



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→ **UPCGRAU**

Álgebra lineal en la educación → para el desarrollo sostenible

María Isabel García Planas
Judith Taberna Torres
Natalia Rina García



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Álgebra lineal en la educación → para el desarrollo sostenible

María Isabel García Planas
Judit Taberna Torres
Natalia Rina García

Este libro ha sido financiado por el Centre de Cooperació per al Desenvolupament (CCD)-UPC mediante el proyecto 2017-S001.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Centre de Cooperació per al Desenvolupament

Primera edició: enero de 2018

- © fotografía de la cubierta: Judit Taberna
- © Los autores, 2018
- © Iniciativa Digital Politècnica, 2018
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona, 31
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Depósito legal: B 2155-2018
ISBN: 978-84-9880-700-4

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley.

*Este libro te lo dedico a ti.
Adéntrate en el mundo y descubre
cómo resolver con el álgebra lineal
algunas de las necesidades más
importantes de nuestra sociedad actual.*

*Quien obra puede equivocarse,
pero quien no hace nada ya está equivocado.*
Santa Teresa de Ávila

Lo que oyes lo olvidas, lo que ves lo recuerdas, lo que haces lo aprendes.
Proverbio chino

El que sentis ho oblides, el que veus ho recordes, el que fas ho aprens.
Proverbi xinès

I hear and I forget, I see and I remember, I do and I understand.
Chinese proverb



Índice

Introducción	15
1. Objetivo 1: Fin de la pobreza	19
1.1. Introducción	19
1.2. Proyecto 1	21
1.3. Proyecto 2	22
2. Objetivo 2: Hambre cero	25
2.1. Introducción	25
2.2. Proyecto 1	26
2.3. Proyecto 2	27
3. Objetivo 3: Salud y bienestar	31
3.1. Introducción	31
3.2. Proyecto 1	32
3.3. Proyecto 2	33
4. Objetivo 4: Educación de calidad	37
4.1. Introducción	37
4.2. Proyecto 1	38
4.3. Proyecto 2	40
5. Objetivo 5: Igualdad de género	43
5.1. Introducción	43
5.2. Proyecto 1	44
5.3. Proyecto 2	45



6. Objetivo 6: Agua limpia y saneamiento	49
6.1. Introducción.....	49
6.2. Proyecto 1	51
6.3. Proyecto 2	53
7. Objetivo 7: Energía asequible y no contaminante	57
7.1. Introducción.....	57
7.2. Proyecto 1	58
7.3. Proyecto 2	60
8. Objetivo 8: Trabajo decente y crecimiento económico	63
8.1. Introducción.....	63
8.2. Proyecto 1	64
8.3. Proyecto 2	66
9. Objetivo 9: Industria, innovación e infraestructura	69
9.1. Introducción.....	69
9.2. Proyecto 1	70
9.3. Proyecto 2	71
10. Objetivo 10: Reducción de las desigualdades	75
10.1. Introducción.....	75
10.2. Proyecto 1	77
10.3. Proyecto 2	78
11. Objetivo 11: Ciudades y comunidades sostenibles	81
11.1. Introducción.....	81
11.2. Proyecto 1	82
11.3. Proyecto 2	83
12. Objetivo 12: Producción y consumo responsables	87
12.1. Introducción.....	87
12.2. Proyecto 1	88
12.3. Proyecto 2	89
13. Objetivo 13: Acción por el clima	93
13.1. Introducción.....	93
13.2. Proyecto 1	94
13.3. Proyecto 2	95
14. Objetivo 14: Vida submarina	99
14.1. Introducción.....	99
14.2. Proyecto 1	100
14.3. Proyecto 2	101

15. Objetivo 15: Vida en los ecosistemas terrestres	105
15.1. Introducción	105
15.2. Proyecto 1	106
15.3. Proyecto 2	108
16. Objetivo 16: Paz, justicia e instituciones sólidas	111
16.1. Introducción	111
16.2. Proyecto 1	112
16.3. Proyecto 2	114
17. Objetivo 17: Alianzas para lograr los objetivos	117
17.1. Introducción	117
17.2. Proyecto 1	118
17.3. Proyecto 2	119
A. Solución al proyecto 1 del objetivo 6	123
Bibliografía	131





Índice de figuras

1. Objetivos de Desarrollo Sostenible. Fuente: ONU	15
2. Matrices. Fuente [11]	16
3. Lluvia de ideas. Fuente: Emprendices	17
1.1. Migración. Fotografía: Universidad Anáhuac. México	20
1.2. Los microcréditos como instrumento financiero al servicio del desarrollo. Fotografía: P. Arrambide	20
2.1. Mapa del hambre en el mundo en 2015. Fotografía: Archivos de la FAO	26
2.2. Piscifactoría. Fotografía: All you need is Biology	26
2.3. Hambruna. Fotografía: Archivo del ACNUR	28
3.1. Yemen, brote de cólera 2017. Fotografía: Archivos de la OMS	32
3.2. Pacientes en los pasillos. Fotografía: <i>El País</i> , 13.02.08	32
3.3. <i>El triunfo de la muerte</i> de Brueghel el Viejo. Fuente: Museo del Prado	34
4.1. Escuela. Fotografía: Archivos de la UNMEER	37
4.2. Partes del modelo dinámico del ascensor. (a) Circuito equivalente del motor DC. (b) Dinámica de las partes rotativas del sistema. (c) Fuerzas que actúan sobre la cabina del ascensor. Fuente: [27]	40
4.3. La trayectoria deseada. Fuente: [27]	40
5.1. Mujeres haciendo cola para votar en las elecciones locales de Srinagar, India. Fuente: [26]	43
5.2. Trabajo precario. Fotografía: Google	45
6.1. Autorretrato de Da Vinci. Fuente: Google	49
6.2. Somalia, abril de 2016. Fotografía: Archivos de la ONU	50



6.3. Presa de Asuán. Fuente: NASA.....	50
6.4. Desagüe pluvial. Fuente: <i>Ciudadano Sur</i>	51
6.5. Depuradora biológica para aguas negras. Fuente: Hidrología Sostenible	51
6.6. Depósitos de agua. Fuente: Elaboración propia.....	53
6.7. Depósitos de recogida de agua de lluvia. Fuente: elhuertoenlaciudad.wordpress.com	54
7.1. Aerogeneradores. Fotografía: Archivos de la ONU	57
7.2. Rosa de los vientos. Fuente: Compass rose simple.svg	58
7.3. Torre de turbina de viento. Fuente: [14]	60
7.4. Secciones de la torre de turbina de viento. Fuente: [14]	60
8.1. Objetivo 8. Fotografía: archivo ODS.CR	63
8.2. Crecimiento económico. Fuente: <i>Expansión</i>	64
8.3. Conjunto de comunicación global “transperfecto”. Fuente: transperfectconnect.com	65
9.1. Desarrollo de infraestructuras sostenibles. Fotografía: Kibae Park/Sipa Press	70
9.2. Transporte público. Fuente: Google.....	71
9.3. Representación de un sistema de múltiples vehículos. Fuente: [12]	72
10.1. Desigualdades. Fuente: <i>El Confidencial</i>	75
10.2. Brecha salarial. Fuente: igualdadmisse.wordpress.com.....	76
11.1. Construcción de ciudades sostenibles. Fuente: FCINA.....	81
11.2. Flujo de tráfico a través de un bloque determinado de calles. Fuente: ILAS	82
12.1. Distribución sostenible. Fuente: II Congreso Nacional de Movilidad	88
12.2. Pan. Fotografía: TS Media	88
13.1. ¿Qué puedes hacer tú contra el cambio climático? Fuente: A. Isan	93
13.2. Circulación densa en Madrid, año 2016. Fotografía: enerTIC	94
13.3. Mapa del calentamiento global proyectado con el modelo climático HadCM3. Fuente: cambioclimaticoglobal.com	95
13.4. Gráfica de temperaturas. Fuente [1]	96
14.1. Acropora. Fuente: Google	99
14.2. Atún de aleta amarilla. Fotografía: Wikipedia.....	101
15.1. Aves migratorias amenazadas. Fotografía: Mark Anderson	106
15.2. Buitres. La crónica verde. Fotografía: C. Palacio	106

15.3. Ciclo de la vida. Fuente propia	107
15.4. Búho alimentándose. Fotografía: Buhopedia	109
16.1. Paz y justicia. Fotografía: Archivo de la ONU	111
16.2. Grafo dirigido. Fuente: I. Morán [23]	112
16.3. Violencia doméstica. Fuente: Radio Claret América	114
17.1. Objetivo 17. Fuente: Archivo de la ONU	117
17.2. Solvencia. Fuente: Mutua de Propietarios	118
17.3. Red eléctrica sencilla. Fuente: esfm.egormaximenko.com	119





Introducción

En 2015, se aprobó la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible con el fin transformar el mundo, y se fijaron 17 Objetivos para el Desarrollo Sostenible. Uno de los objetivos el 4, establece en su meta 4.7 ([33]) que “todos los estudiantes adquieran los conocimientos y las habilidades necesarios para promover el desarrollo sostenible, incluyendo la educación, la ciudadanía global y la diversidad cultural”. Para colaborar en este objetivo, planteamos este texto, que presenta diferentes tareas contextualizadas orientadas a profundizar y ampliar la materia relativa a la asignatura álgebra lineal sino la que hacen referencia a los Objetivos de Desarrollo Sostenible.



Fig. 1
Objetivos de Desarrollo Sostenible.
Fuente: ONU.

La universidad ha de ser protagonista y ejercer una función básica en la aplicación del Programa 2030 para el Desarrollo Sostenible. Esta debe abanderar el logro de una educa-



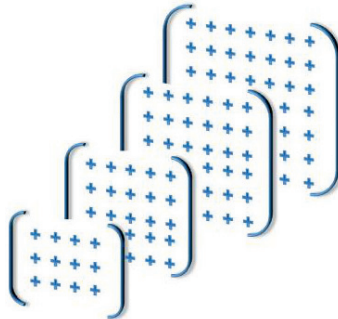
ción de calidad, y contribuir a la formación de ciudadanos responsables, comprometidos con el desarrollo sostenible local y global. De forma progresiva, las universidades y otras instituciones de educación superior han ido incorporando valores y prácticas de desarrollo sostenible en sus actividades básicas de enseñanza e investigación, y también de gestión.

El objetivo de este texto es sensibilizar, desarrollar y trabajar, desde el álgebra lineal, aspectos vinculados al desarrollo sostenible. Para ello, se han preparado proyectos de distinta dificultad y de distinto tiempo de ejecución, que se resuelven utilizando el álgebra lineal y en que se enfatizan en distintos aspectos de los Objetivos del Desarrollo Sostenible (ODS).

Utilizando la herramienta del aprendizaje basado en proyectos (PBL), a partir de casos prácticos, las competencias transversales relacionadas con los temas globales de los ODS, pueden ser explicadas y evaluadas en asignaturas correspondientes a enseñanzas científico-técnicas.

Bajo este escenario, vamos a poner nuestro granito de arena en los ODS a través del álgebra lineal.

Fig. 2
Matrices.
Fuente [11].



Este libro está organizado por capítulos que se corresponden a cada uno de los ODS. En cada uno de ellos, se presentan dos proyectos que se pueden resolver a partir de los distintos programas docentes correspondientes a la asignatura Álgebra lineal que se imparte en escuelas de ingeniería y facultades de ciencias. Los proyectos presentados pretenden analizar en profundidad los problemas que conlleva llevar a cabo los distintos objetivos de los ODS. Cabe decir también que algunos de los proyectos permiten profundizar en más de un objetivo de los ODS, si bien se ahonda en el objetivo del capítulo correspondiente.

No todos los proyectos tienen la misma dificultad, por lo cual el profesor debe marcar el plan de trabajo: algunos de ellos se pueden resolver en el aula en una sesión de clase, mientras que otros precisan de más tiempo. También algunos de ellos se pueden resolver a partir de las primeras sesiones del curso y otros requieren avanzar en la asignatura. Estos proyectos pueden resolverse de forma individual, aunque se sugiere el: grupal para fomentar así el trabajo colaborativo y cooperativo.

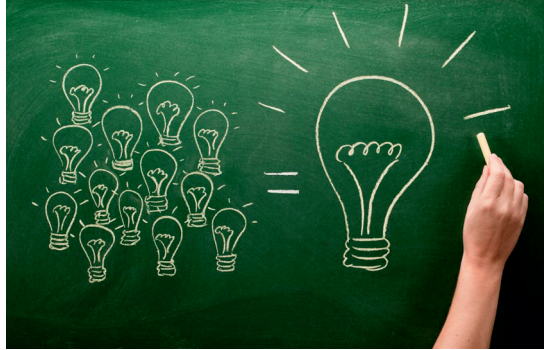


Fig. 3
Lluvia de ideas.
Fuente: Emprendices.

→ 1



Objetivo 1: Fin de la pobreza

Poner fin a la pobreza en todas sus formas en todo el mundo

1.1. Introducción

Los índices de pobreza extrema se han reducido a la mitad desde 1990. A pesar de ser un logro importante, 1 de cada 5 personas de las regiones en vías de desarrollo aún vive con menos de 1,25 dólares al día, y hay millones de personas que ganan poco más de esta cantidad diaria, y a ello añade que hay muchas personas en riesgo de recaer en la pobreza.¹

La pobreza no solo implica la falta de ingresos y recursos para garantizar unos medios de vida sostenibles. Se manifiesta, entre otros factores en el hambre y la malnutrición, el acceso limitado a la educación y a otros servicios básicos, la discriminación y la exclusión sociales, y la falta de participación en la adopción de decisiones. El crecimiento económico debe ser inclusivo con el fin de crear empleos sostenibles y promover la igualdad.¹

Las limitaciones económicas que afectan a las personas que viven en el umbral de la pobreza hacen que se vean sometidas a situaciones terribles de hambre, insalubridad, falta de educación, trabajo digno, etc. Este fenómeno se agudiza en los países con limitaciones económico-financieras que impiden combatir este problema fundamental, lo cual hace que nos veamos enfrentados con un problema de migración permanente hacia otros países, con la idea de encontrar un trabajo que les permita obtener los ingresos suficientes para su subsistencia y la de su familia ([21]).

La migración es un derecho humano y su motivación inicial no debería ser principalmente la pobreza. El fenómeno de la migración debe regularse de manera sostenible con el fin de permitir el desarrollo pleno de la persona en contextos sociales favorables ([21]).

¹ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/poverty/>



Fig. 1.1
Migración.
Fotografía: Universidad
Anáhuac, México.

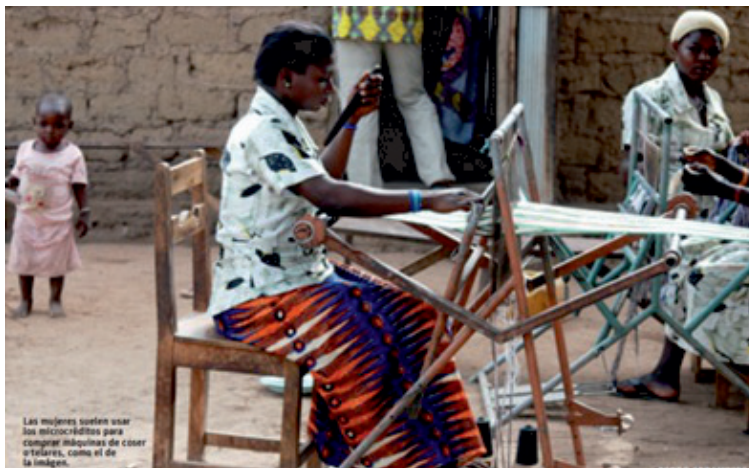


El Banco *Grameen* cuyo nombre procede de la palabra gram que significa “rural”o “pueblo”en el idioma sánscrito, y galardonado con el Premio Nobel de la Paz, es una institución microfinanciera y un banco de desarrollo comunitario. Se fundó en Bangladés, y se caracteriza por conceder microcréditos a las personas de clase baja sin pedir una garantía a cambio.

La práctica del microcrédito se ha extendido a escala mundial como una herramienta para la erradicación de la pobreza.

Según Manos Unidas, potenciar el acceso de las mujeres a los recursos y al crédito es una de las líneas de trabajo más importantes para erradicar la pobreza ([6]).

Fig. 1.2
Los microcréditos como
instrumento financiero al
servicio del desarrollo.
Fotografía: P. Arrambide.



Las mujeres suelen usar los microcréditos para comprar máquinas de coser artesanales, como el de la imagen.



1.2. Proyecto 1

Desde la década de los años noventa, la movilidad territorial en España sigue un patrón de comportamiento subordinado al fenómeno suburbano y al de los desplazamientos interurbanos. La importancia de este fenómeno social es tal que resulta de interés modelizarlo para conocer su comportamiento dinámico e interno.

El propósito de este trabajo es, suponiendo una cierta homogeneidad temporal, analizar el fenómeno de la movilidad territorial en España. Para ello, consideraremos la delimitación territorial propuesta por el Instituto Nacional de Estadística (INE), que clasifica los municipios españoles en seis categorías, en función del número de habitantes. La primera categoría hace referencia a municipios con una población inferior a los 10.001 habitantes y que, según el INE, constituyen áreas rurales; la segunda, con una población de 10.001 a 20.000 habitantes, la tercera, con una población de 20.001 a 50.000 habitantes, la cuarta, con una población de 50.001 a 100.000 habitantes, la quinta, con una población de más de 100.000 habitantes, y la sexta las capitales de provincia, que son consideradas áreas urbanas.

Designando $X(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ la dinámica de la movilidad territorial de una población cuyos estados se corresponden con las seis categorías de municipios descritas.

Es decir, $X(k)$ define el estado en que una población se localiza en un instante discreto de tiempo k . La relación entre $X(k)$ y $X(k+1)$, bajo el supuesto de homogeneidad temporal, viene caracterizada por una matriz de transición $P = (p_{ij})$, donde p_{ij} es la probabilidad de emigrar a una población j desde una población i entre dos instantes de tiempo consecutivos.

A partir de los datos de emigración del INE de dos períodos consecutivos (de 2003 a 2004 y de 2004 a 2005), se han obtenido (v. [17]) los valores siguientes de p_{ij} :

		1	2	3	4	5	6
1	Menos de 10.001 hab.	0,278	0,121	0,134	0,083	0,070	0,314
2	De 10.001 a 20.000 hab.	0,244	0,136	0,152	0,100	0,080	0,288
3	De 20.001 a 50.000 hab.	0,218	0,122	0,156	0,110	0,078	0,316
4	De 50.001 a 100.000 hab.	0,203	0,118	0,171	0,121	0,080	0,307
5	Más de 100.000 hab.	0,204	0,111	0,137	0,093	0,121	0,334
6	Capitales de provincia	0,288	0,128	0,178	0,113	0,102	0,191

De la anterior matriz de transición homogénea, es posible obtener una proyección de las probabilidades de transición para un período posterior o bien la distribución de equilibrio de la cadena.



1.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática: Relación entre pobreza y migración.

Paso 1

- Descripción matricial de la dinámica de la población.
- ¿Es posible obtener una proyección de las probabilidades de transición para un período posterior?

Paso 2

- Determinación, en su caso, de la distribución de equilibrio.

Paso 3

- Valoración del resultado teniendo en cuenta el contexto.

1.3. Proyecto 2

En la actualidad, los servicios microfinancieros han resultado ser una práctica muy rentable y, contrariamente a lo que se creía sobre el elevado riesgo de impago de créditos, su recuperación es muy alta [30]. En este trabajo, pretendemos analizar este riesgo.

Para calificar el riesgo de un crédito, no basta con considerar la probabilidad de impago, sino que es necesario analizar las transiciones por las cuales pasan los pagos de los créditos.

Empezamos dando a cada crédito una cierta calificación. Para este estudio, suponemos clases o estados A , B , C , D , E , F y G , definidos de la forma siguiente:

- A : El estado de un crédito cuyo importe exigible a fecha fija es pagado en su totalidad y con un rango de atraso de 0 a 7 días después de la fecha de pago acordada.
- B : El estado de un crédito cuyo importe exigible a fecha fija es liquidado en su totalidad y con un rango de atraso de 8 a 30 días después de la fecha en que se debió realizar el pago.
- C : El estado de un crédito cuyo importe exigible a fecha fija es pagado en su totalidad y con un rango de atraso de 31 a 60 días después de la fecha en que se debió realizar el pago.
- D : el estado de un crédito cuyo importe exigible a fecha fija es pagado en su totalidad y con un rango de atraso de 61 a 90 días después de la fecha en que se debió realizar el pago.



E: El estado de un crédito cuyo importe exigible a fecha fija es pagado en su totalidad y con un rango de atraso de 91 a 120 días después de la fecha en que se debió realizar el pago.

F: El estado de un crédito cuyo importe exigible a fecha fija es pagado en su totalidad y con un rango de atraso de 121 días o más.

G: El crédito es cancelado.

La evolución de las calificaciones para créditos pendientes de amortizar se puede modelar mediante un sistema dinámico discreto, que se mueve mensualmente a través de las diferentes situaciones en que se encuentra el pago.

Por ejemplo, una cuenta que este mes está “al corriente de pago”(estado *A*), estará también “al corriente de pago” el próximo mes si se efectúa un pago en el rango de atraso de 0 a 7 días; estará en los “30 días de demora”(estado *B*) si no se ha realizado el pago, y, en caso de haberse realizado el último pago, este estará en el estado *G* de crédito cancelado. Obsérvese que no se puede pasar del estado *A* al *C*, *D*, *E* o *F* en un mes, sino que debe progresar de un mes a otro.

1.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática: ¿Cómo ayudan los microcréditos a combatir la pobreza?

Paso 1

Suponiendo que las probabilidades p_{XY} de pasar del estado *Y* al estado *X* son: $P_{AA} = 0,95$, $P_{BA} = 0,04$, $P_{GA} = 0,01$, $P_{AB} = 0,15$, $P_{BB} = 0,75$, $P_{CB} = 0,07$, $P_{GB} = 0,03$, $P_{BC} = 0,05$, $P_{CC} = 0,75$, $P_{DC} = 0,15$, $P_{GC} = 0,05$, $P_{CD} = 0,1$, $P_{DD} = 0,8$, $P_{ED} = 0,1$, $P_{EE} = 0,8$, $P_{FE} = 0,2$, $P_{EF} = 0,1$, $P_{FF} = 0,9$, $P_{GG} = 1$ y el resto cero.

- Escribir la matriz de transición de estados.

Paso 2

- ¿Por qué el modelo es una cadena de Markov absorbente?

Paso 3

- Si el estado inicial $P(0)$ es estar al corriente de pago, ¿cuál es la distribución de probabilidad de morosidad al cabo de 24 meses?

Paso 4

- Valorar el resultado teniendo en cuenta el contexto.
- Analizar las consecuencias del mal uso del microcrédito (tarjetas de crédito).

→ 2



Objetivo 2: Hambre cero

Poner fin al hambre, lograr la seguridad alimentaria y la mejora de la nutrición y promover la agricultura sostenible

2.1. Introducción

Una meta para 2030 del objetivo 2 es poner fin al hambre y asegurar el acceso de todas las personas, en particular de los pobres y de las personas en situaciones vulnerables, incluidos los lactantes, a una alimentación sana, nutritiva y suficiente.

Una gestión sostenible de la agricultura, la silvicultura y las piscifactorías puede asegurar el suministro de alimentos nutritivos para todos y generar ingresos decentes, al tiempo que se apoya el desarrollo de las gentes del campo y la protección del medio ambiente.

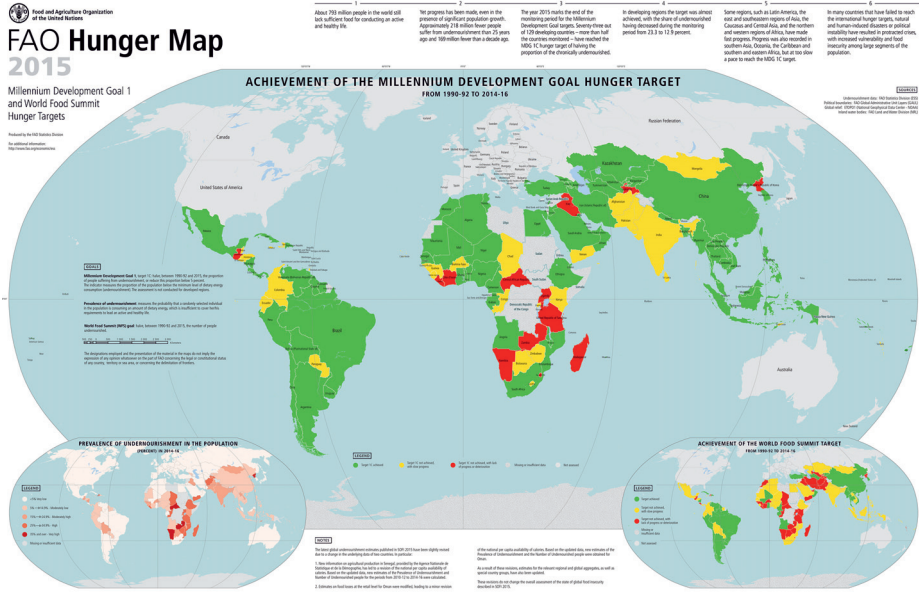
Es necesaria una profunda reforma del sistema mundial de la agricultura y la alimentación si queremos alimentar a los 925 millones de personas hambrientas que existen actualmente y a los dos mil millones más de personas que vivirán en el año 2050.²

La acuicultura se presenta como una solución al hambre. En el ámbito de la cooperación, existen proyectos con participación española en países en vías de desarrollo donde se aplicaría el conocido proverbio chino: “Si un hombre tiene hambre, no le des un pez enséñale a pescar.”

² <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/hunger/>



Fig. 2.1
Mapa del hambre en el mundo en 2015.
Fotografía: Archivos de la FAO.



Las organizaciones implicadas en estos proyectos ven en la piscicultura una salida para garantizar el abastecimiento de pescado, a la vez que una fuente de ingresos a las pequeñas comunidades.

Fig. 2.2
Piscifactoría.
Fotografía: All you need is Biology.



2.2. Proyecto 1

Un reto al que tenemos que afrontar es conseguir que el mundo produzca suficiente comida para alimentar adecuadamente a todos sus habitantes. Tenemos que lograr que la pesca sea más productiva y sostenible por ejemplo mediante piscifactorías, pero se debe controlar la producción para que, en efecto, sea sostenible. Proponemos pues, en este proyecto, estudiar si se puede controlar dicha producción.



En una piscifactoría, se cría una especie particular de salmón. Estos peces están clasificados según tres clases de edad y la tasa de supervivencia de los salmones en edad de primera y segunda clase es de 0,53 (en tanto por 1) e indeterminada α en la tercera clase. También se asume que cada hembra en la segunda clase de edad produce cuatro crías hembras y un número indeterminado β de crías en la tercera clase de edad. La otra clase de edad no produce crías. Supongamos que se han introducido en el sistema 1.200 salmones hembras en cada una de las tres clases de edad y que, al año siguiente, hay 10.800, 636 y 264 salmones hembra en cada una de las clases.

2.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática: ¿Cómo puede una piscifactoría ayudar a combatir el hambre del mundo?

Paso 1

- Determinar los valores de los parámetros α y β en función de los datos considerados.

Paso 2

Se pretende que, en el primer año, la población de salmones en cada una de las clases de edad sea de 9.000, 530 y 220, respectivamente.

- ¿Cuántos salmones se tendrían que haber introducido en cada una de las clases?

Paso 3

- ¿Es sostenible esta piscifactoría? Razona la respuesta teniendo en cuenta el contexto.

2.3. Proyecto 2

En 2017, los países del cuerno de África han padecido una fuerte hambruna que, según la ACNUR,³ posiblemente sea peor que la de 2011. Según la misma fuente, miles de niños y madres lactantes se encontraban en estado de desnutrición aguda.

A través de las ayudas internacionales, se ha conseguido reunir cinco toneladas de arroz y lentejas, y cuatro de carne seca.

Téngase en cuenta que cada uno de estos alimentos contiene grasa, proteína y carbohidratos, en las proporciones siguientes:

- Cada 100 gramos de arroz contienen 0,8 gramos de grasa, 7 gramos de proteína y 80 gramos de carbohidratos.

³ <https://eacnur.org/es>



Fig. 2.3
Hambruna.
Fotografía: Archivo del
ACNUR.



- Cada 100 gramos de carne contienen 25 gramos de grasa, 17 gramos de proteína y 0,1 gramos de carbohidratos.
- Cada 100 gramos de lentejas contienen 2 gramos de grasa, 22 gramos de proteína y 62,5 gramos de carbohidratos.

Y que los requisitos mínimos diarios de grasa, proteína y carbohidratos que se deben obtener con estos alimentos para una ración de comida media por persona son de 20 gramos de grasa, 25 gramos de proteína y 50 gramos de carbohidratos.

2.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la problemática de la hambruna.

Paso 1

- ¿Cuántas unidades de alimento se deben consumir para satisfacer estos requisitos?
(1 unidad de alimento = 100 gramos)

Paso 2

- Si en la zona se encuentran 250.000 personas, ¿durante cuántos días podrán ser alimentadas?

Paso 3

- Valorar el resultado teniendo en cuenta el contexto.



→ 3



Objetivo 3: Salud y bienestar

Garantizar una vida sana y promover el bienestar para todos en todas las edades

3.1. Introducción

Para lograr el desarrollo sostenible, es fundamental garantizar una vida saludable y promover el bienestar para todos en cualquier edad. Se han realizado grandes progresos en relación con el aumento de la esperanza de vida y la reducción de algunas de las causas de muerte más comunes relacionadas con la mortalidad infantil y materna. Se han logrado grandes avances en el acceso al agua limpia y al saneamiento, así como en la reducción de la malaria, la tuberculosis, la poliomielitis y la propagación del VIH/SIDA. Sin embargo, se necesitan muchas más iniciativas para erradicar por completo una amplia gama de enfermedades y hacer frente a numerosas y variadas cuestiones persistentes y emergentes, relativas a la salud.⁴

Asumir los principios del desarrollo sostenible en el campo de la sanidad supone tener en cuenta también la gestión racional de los recursos de los centros hospitalarios.

Tener en cuenta el desarrollo sostenible en el marco de la sanidad no ha de suponer necesariamente cambios en los modelos sanitarios pero *sí* cambios en la estrategia para que la salud sea igual, solidaria, equitativa, universal, gratuita y participativa ([4]).

⁴ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/health/>



Fig. 3.1
Yemen, brote de cólera
2017.
Fotografía: Archivos de la
OMS.



3.2. Proyecto 1

En un determinado servicio de un centro hospitalario, los pacientes tras ser intervenidos quirúrgicamente, pasan a la sala de recuperación (estado S1), donde se sabe que la probabilidad de permanecer en ella es del 40%, la de ir a casa (estado C) es del 30% y, por estudios anteriores, se conoce que hay un 20% de pacientes que pueden pasar a la sala de terapia intermedia (estado S2) por complicaciones o por la propia patología del paciente, y un 10% pasar a terapia intensiva (estado S3) por los mismos problemas. Los pacientes que están en la sala intermedia o permanecen en ella o tienen una probabilidad de un 10% de pasar a la sala de recuperación y un 20% de pasar a la sala de terapia intensiva. Finalmente, los pacientes de la sala terapia intensiva tienen un 70% de permanecer en ella, un 20% de pasar a la sala de terapia intermedia y hay un 10% de probabilidades de morir (estado M).

Se trata de analizar la dinámica de ocupación de las salas con el objetivo de optimizar el uso de los recursos disponibles y hacer así más sostenible el hospital.

Fig. 3.2
Pacientes en los pasillos.
Fotografía: *El País*,
13.02.08.





3.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática: Breve descripción de la problemática de la utilización de las camas en los hospitales.

Paso 1

- Describir matricialmente la evolución de la ocupación de las salas.
- Si un paciente está en la sala de terapia intensiva, ¿cuál es la probabilidad de que al cuarto día ya esté en casa?

Paso 2

- Explicar con todo detalle la información del álgebra lineal necesaria para la resolución del sistema dinámico planteado, así como:
 - a) Analizar el tipo de matriz que describe el sistema.
 - b) Calcular las potencias de una matriz en función del tipo de matriz.
 - c) Determinar los valores propios.
 - d) Dar la solución del sistema con las probabilidades dadas.

Paso 3

- Evaluar los resultados teniendo en cuenta el contexto.

3.3. Proyecto 2

Se denomina *epidemia* una enfermedad que se propaga durante un período de tiempo en una determinada zona geográfica y que afecta simultáneamente a gran parte de la población. Cuando la epidemia se expande por varios países, se transforma en una pandemia. Ha habido grandes pandemias a lo largo de la historia.

Por otra parte, cuando la epidemia se mantiene en una misma zona durante un período prolongado de tiempo, se convierte en una endemia como, por ejemplo, el caso de la malaria en varios países africanos.

El análisis de los datos puede ayudar a prever la expansión de la epidemia permitiendo poner en marcha medidas de control y contención de la misma ([10]).

Desde comienzos de los años ochenta, el sida se ha convertido en una de las mayores pandemias de nuestra época, por lo cual el conocimiento de la evolución en el tiempo de la epidemia es un objetivo prioritario con el fin de establecer unas políticas sanitarias adecuadas ([24]).

Fig. 3.3
El triunfo de la muerte
de Brueghel el Viejo.
Fuente: Museo del
Prado.



En este proyecto, se pretende analizar la evolución de la epidemia de VIH-SIDA en el tiempo, modelando mediante una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto, con tiempos de observación anuales.

3.3.1. Pasos que dar

Paso 0

– Introducción a la temática de las epidemias.

Paso 1

Se definen los cuatro estados del proceso siguientes:

1. Susceptible de ser infectado.
2. Infectado por VIH.
3. Enfermo de sida.
4. Muerto como consecuencia de la enfermedad.

Se supone que una persona que está en un estado, o se queda en el mismo estado o pasa al siguiente, eso es una persona susceptible de estar infectada no puede pasar directamente al estado enferma de sida ni al estado muerto, y una persona infectada no puede volver a estar en el estado de susceptible ser infecada.

– Dibujar el grafo con las posibles transiciones entre estados.



Paso 2

En las epidemias humanas, la matriz de transición suele obtenerse a partir de los datos de población, incidencia, prevalencia y mortalidad publicados en los registros oficiales.

Se designa p_{ij} la probabilidad de que una persona que está en el estado i pase al j al año siguiente, y se supone que, a partir de los datos de los registros, la tasa de contagio de una persona susceptible de ser contagiada es $p_{12} = 0,000064$, la tasa de personas con VIH y que pasan a tener sida es $p_{23} = 0,006432$ y la tasa de personas con sida que mueren al año siguiente es de $p_{34} = 0,0082$.

- Escribir la matriz de transición de estados.

Paso 3

- Cálculo la probabilidad de que un sujeto actualmente susceptible de ser infectado pueda estar infectado dentro de dos años.

Paso 4

- Análisis de la evolución de la epidemia en el tiempo.

Paso 5

- Valoración teniendo en cuenta el contexto.

→ 4



Objetivo 4: Educación de calidad

Garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos

4.1. Introducción

La educación es la clave para poder alcanzar otros objetivos de desarrollo sostenible (ODS). Cuando las personas logran acceder a una educación de calidad, pueden escapar del ciclo de la pobreza. Por consiguiente, la educación contribuye a reducir las desigualdades y a conseguir la igualdad de género. También empodera a las personas de todo el mundo para que lleven una vida más saludable y sostenible. La educación es también fundamental para fomentar la tolerancia entre las personas, y contribuye a crear sociedades más pacíficas.



Fig. 4.1
Escuela.
Fotografía: Archivos de la
UNMEER.



Una meta de este objetivo para el año 2030 es aumentar considerablemente el número de jóvenes y adultos que tengan las competencias necesarias, en particular técnicas y profesionales, para acceder al empleo, el trabajo decente y el emprendimiento.⁵

El abandono escolar en cualquier etapa académica es un problema global que afecta la calidad de la educación, además de los costes sociales y económicos que conlleva. Por este motivo, muchos países dedican recursos a estudiar de dicho fenómeno.

Para poder reducir la deserción, es importante conocer el comportamiento de esta deserción desde diferentes ópticas.

El tiempo de permanencia de un estudiante en el sistema educativo no está sincronizado con su avance académico, pues al final de cada período cursado tiene tres posibilidades: avanzar al siguiente curso, permanecer en el mismo curso o retirarse del sistema educativo. Este tipo de comportamiento hace que una buena aproximación a su evolución pueda realizarse mediante el álgebra lineal (v. [29]).

Otra de las metas del objetivo 4 de los ODS es construir y adecuar instalaciones educativas que tengan en cuenta las necesidades de los niños y las personas con discapacidad y las diferencias de género, y que ofrezcan entornos de aprendizaje seguros, no violentos, inclusivos y eficaces para todos.¹

Para los niños con discapacidad o movilidad reducida, la escuela puede convertirse en un mundo infranqueable sencillamente por falta de ascensores, rampas de acceso o baños adaptados, lo cual provoca exclusión o deserción escolar.

Una forma de eliminar las barreras es asegurar que en las escuelas hay rampas y ascensores para el desplazamiento de las personas con movilidad reducida.

4.2. Proyecto 1

En una escuela de ingeniería, se ha analizado una muestra de las ocho series completas de los estudiantes correspondientes a los ocho cuatrimestres que dura la titulación del grado, durante siete años, identificados a partir de primer cuatrimestre del primer año analizado y hasta el segundo cuatrimestre del último de estos años. Para el estudio, se ha tenido en cuenta la información socioafectiva, socioeconómica, demográfica y académica que tiene almacenada la institución.

En el estudio, se analiza el flujo del estudiante en la escuela desde que se matricula por primera vez, teniendo en cuenta las tres posibilidades siguientes después de cursar el cuatrimestre:

1. que el estudiante abandone los estudios del centro, lo cual se considera como una deserción

⁵ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/education/>



2. que el estudiante suspenda el cuatrimestre y decida repetirlo; entonces sigue en la escuela
3. que el estudiante apruebe su cuatrimestre y pase al cuatrimestre siguiente, y así sucesivamente, hasta que se gradúe o abandone la escuela.

4.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática sobre la educación de calidad.

Paso 1

Téngase en cuenta que el grado tiene cuatro cursos con dos cuatrimestres cada uno y pasamos a tener die posibles estados (o situaciones del alumno), que denominamos $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, G$ y D , donde C_i indica el cuatrimestre en que se encuentra el alumno, G que se ha graduado, y D que ha desertado.

- Realizar el diagrama de estados.

Se denomina $p_{i,j}$, ($i = 1, 2, \dots, 8, G, D$, $j = 1, 2, \dots, 8, G, D$) la posibilidad de que el estado i avance al estado j .

- Encontrar la matriz de transición de estados.

Paso 2

Teniendo en cuenta todos los factores, durante todos los años en que se ha realizado el estudio, se han obtenido las probabilidades siguientes: $p_{11} = 0,17$, $p_{12} = 0,72$, $p_{1D} = 0,11$, $p_{22} = 0,17$, $p_{23} = 0,73$, $p_{2D} = 0,1$, $p_{33} = 0,16$, $p_{34} = 0,72$, $p_{3D} = 0,12$, $p_{44} = 0,14$, $p_{45} = 0,75$, $p_{4D} = 0,11$, $p_{55} = 0,14$, $p_{56} = 0,78$, $p_{5D} = 0,08$, $p_{66} = 0,12$, $p_{67} = 0,81$, $p_{6D} = 0,07$, $p_{77} = 0,09$, $p_{78} = 0,86$, $p_{7D} = 0,05$, $p_{88} = 0,12$, $p_{8G} = 0,8$, $p_{8D} = 0,08$, $p_{DD} = p_{GG} = 1$ y el resto cero.

- ¿Cuál es probabilidad de que un alumno acabe la carrera en cuatro años (ochos cuatrimestres)?

Paso 3

En las mismas condiciones que el paso 2:

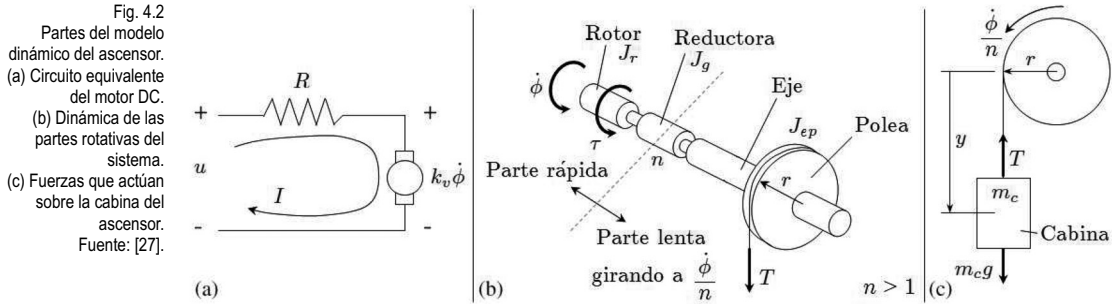
- ¿Cuál es el tiempo de permanencia de una persona desde que se matricula por primera vez a la universidad hasta que se gradúa?

Paso 4

Analizar el resultado en el contexto del objetivo 4 de desarrollo sostenible.

4.3. Proyecto 2

Consideramos un ascensor impulsado por un motor DC, que dispone de un eje, una polea y una cabina que transporta cargas (v. figura 4.2).



El voltaje u aplicado al ascensor se puede relacionar (una vez linealizado) con la posición vertical y de la cabina de la forma siguiente:

$$\ddot{y} = c_1 \dot{y} + c_2 u + c_3 \tag{1.1}$$

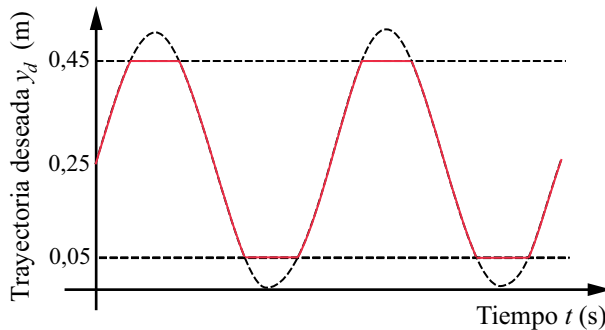
donde k_i es la constante del par, J_r es la inercia del rotor, J_g es la inercia de la reductora reducida al eje del motor, $n > 1$ es el factor de reducción, J_{ep} es la inercia del conjunto eje-polea, T es la tensión del cable, r es el radio de la polea y

$$c_1 = -\frac{k_i k_v n^2}{J_T R}, \quad c_2 = \frac{r k_i n}{J_T R}, \quad c_3 = \frac{m_c r^2 g}{J_T},$$

$$J_T = n^2 (J_g + J_r) + J_{ep} + m_c r^2.$$

Se trata de estudiar el control del ascensor con carga variable para que este siga la trayectoria periódica de la figura 4.3.

Fig. 4.3
La trayectoria deseada.
Fuente: [27].



Esta trayectoria simula el transporte de cargas entre dos pisos. Cuando el ascensor llega a uno de los pisos, se detiene durante unos segundos para cargar o descargar. Se trata de asegurar que el tiempo en que el ascensor está detenido es suficiente para que puedan entrar o salir con facilidad las personas con movilidad reducida.



4.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la problemática de accesibilidad en los centros escolares.

Paso 1

- Linealizar la ecuación (4.1).

Paso 2

Considerar los valores $R = 21,5 \Omega$, $k_v = 0,0212 V \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$, $k_i = 0,0212 \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$, $J_r = 4,2 \cdot 10^{-7} \text{kg} \cdot \text{m}^2$, $J_g = 0,4 \cdot 10^{-7} \text{kg} \cdot \text{m}^2$, $n = 62$, $J_{ep} = 287,584 \cdot 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m}^2$, $r = 0,0425 \text{m}$, $m_c = 0,18 \text{kg}$.

- Resolver la ecuación homogénea asociada a (4.1).

Paso 3

- Determinar u de manera que la solución siga la trayectoria deseada.

Paso 4

- Valorar el resultado.

→ 5



Objetivo 5: Igualdad de género

Lograr la igualdad entre los géneros y empoderar a todas las mujeres y las niñas

5.1. Introducción

La igualdad entre los géneros no es solo un derecho humano fundamental, sino la base necesaria para conseguir un mundo pacífico, próspero y sostenible.⁶

Las mujeres y las niñas representan la mitad de la población mundial y por tanto, también, la mitad de su potencial. Sin embargo, la desigualdad de género persiste hoy en todo el mundo y provoca el estancamiento del progreso social.⁷



Fig. 5.1
Mujeres haciendo cola para votar en las elecciones locales de Srinagar, India.
Fuente: [26].

En una iniciativa para aumentar la representación política de la mujer, la India modificó su Constitución en 1993 para reservar a las mujeres una tercera parte de los cargos en

⁶ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/gender-equality/>

⁷ http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/wp-content/uploads/sites/3/2016/10/5_Spanish_Why_it_Matters.pdf



todos los niveles del gobierno local. Ello hizo aumentar la participación de mujeres en los gobiernos locales que pasó de menos del 5 % en 1992 a cerca del 40 % en 2005. Esta exposición obligatoria a que hubiera mujeres líderes ayudó a los votantes a que comprendiesen que las mujeres pueden ser líderes competentes [26].

5.2. Proyecto 1

En un determinado país hay cuatro partidos políticos principales: A, B, C, D . El partido B lleva en su programa que, si llega al gobierno, la mitad de sus ministros serán mujeres, y el partido D , que al menos lo serán la cuarta parte. Los otros dos partidos no especifican nada al respecto.

Supongamos que se registran los resultados de la elección al Parlamento cada cuatro años mediante un vector $x \in \mathbb{R}^4$:

$$x = \begin{pmatrix} \text{porcentaje de población que vota } A \\ \text{porcentaje de población que vota } B \\ \text{porcentaje de población que vota } C \\ \text{porcentaje de población que vota } D \end{pmatrix}$$

y que el resultado de la elección depende solamente de los resultados de la elección anterior.

Se han realizado sondeos y se ha observado que el 60 % de personas que votan A votarían lo mismo la próxima vez, el 20 % votaría B , el 10 % votaría C y el 10 % votaría D . El 60 % de personas que votan B votarían B la próxima vez, el 15 % votaría A , otro 5 % votaría C y el 20 % votaría D , el 40 % de personas que votan C volverían a votar C , el 20 % votaría A , el 30 % votaría B y el 10 % votaría D y, por último, el 60 % de personas que votan D volverían a votar D , el 20 % votaría A , el 10 % votaría B y el 10 % votaría D .

5.2.1. Pasos que dar

Paso 0

Introducción a la problemática de la igualdad de género.

Paso 1

Si los porcentajes de transición de una votación a la siguiente permanecen constantes durante muchos años:

- Describir matricialmente la evolución de las votaciones.
- Determinar el resultado probable para las elecciones siguientes y para las elecciones sucesivas.



Paso 2

- Determinar los valores propios de la matriz hallada en el paso 1.
- Hallar el vector propio positivo correspondiente al radio espectral.

Paso 3

Supóngase que los resultados de una elección han sido

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,35 \\ 0,15 \\ 0,10 \end{pmatrix}$$

- Determinar el resultado probable para la elección siguiente.
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya mujeres en el gobierno la próxima legislatura?

Paso 4

Valorar el resultado teniendo en cuenta el contexto.

5.3. Proyecto 2

En el año 2008, la participación laboral femenina en Chile se había convertido en un tema importante a debatir, debido a su bajo nivel que no pasaba del 39 %, además de la amplia brecha salarial de género, en que las mujeres recibían, por término medio, el 77 % del salario que percibían los hombres.

Estos hechos cobraron una mayor significación cuando el Informe anual del Foro Económico Mundial plantea que el bajo nivel de participación laboral femenina era uno de los principales factores que situaban Chile en los últimos lugares en el *ranking* mundial de competitividad. En ese momento, se planteó la hipótesis de que el trabajo a tiempo parcial podía ser un recurso importante para aumentar la participación laboral de las mujeres. De todos modos, se necesita hacer un estudio de viabilidad económica que tenga en cuenta, además, aspectos culturales, y adaptar las leyes, en su caso ([28]).



Fig. 5.2
Trabajo precario.
Fotografía: Google.



En este proyecto, se trata de realizar un análisis de la dinámica de la participación laboral. Para ello, se clasifica la población activa en cuatro posibles estados $S = \{1, 2, 3, 4\}$, en que $s = 1$ corresponde a la inactividad, eso es, personas de 15 años o más de edad que no participan del mercado laboral; $s = 2$ corresponde a estar desempleado (estar en las listas de desempleo); $s = 3$ corresponde a tener trabajo a tiempo parcial, y $s = 4$ corresponde a estar trabajando a tiempo completo.

Denominamos $X(t)$ la variable aleatoria que indica el estado en que una persona se encuentra en tiempo t , y este estado solo depende del estado del tiempo $t - 1$ anterior.

5.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática de las brechas salariales por cuestión de género.

Paso 1

Después de haber recogido datos, se ha encontrado que la probabilidad de que una persona que está inactiva en el tiempo t lo siga estando en el tiempo $t + 1$ es del 0,713, de que estando desocupada pase a estar inactiva es de 0,255, de que estando trabajando a tiempo parcial pase a estar inactiva es del 0,253 y que de jornada completa pase a inactiva es de 0,124.

Que de inactiva pase a desocupada es del 0,056, que siga desocupada es del 0,087, que pase a trabajar a tiempo parcial es del 0,035 y a trabajar a jornada completa del 0,048.

Que una persona inactiva pase a trabajar a tiempo parcial del 0,060 que de desocupado a trabajar a tiempo parcial del 0,134, que siga trabajando a tiempo parcial, del 0,020 y que pase a tiempo completo del 0,104.

Y, finalmente, si una persona está inactiva, tiene un 0,171 de probabilidades de pasar a trabajar a tiempo completo; si está desocupada la probabilidad de pasar a tiempo completo es del 0,524, si está trabajando a tiempo parcial, la probabilidad de pasar a tiempo completo es del 0,537 y de mantenerse a tiempo completo, del 0,724.

- Escribir la matriz de transición de estados.

Paso 2

- Determinar el estado estacionario.

Paso 3

Suponiendo que una mujer está inactiva en el momento t :

- ¿Qué probabilidad tiene de que en el tiempo $t + 4$ esté trabajando a tiempo parcial?
- ¿Y a tiempo completo?

Paso 4

- Valorar el resultado teniendo en cuenta el contexto.

→ 6



Objetivo 6: Agua limpia y saneamiento

Garantizar la disponibilidad de agua y su gestión sostenible y el saneamiento para todos

6.1. Introducción

Los problemas actuales de sequía nos llevan a recordar la sentencia de Leonardo da Vinci (v. figura 6.1): “El agua es la fuerza motriz de toda la naturaleza.”

El agua potable se acaba y los gobiernos han de encaminar sus políticas ambientales y económicas hacia una mejor gestión del agua. Por ejemplo, uno de los sectores en que más agua se gasta, la agricultura, presenta un alto porcentaje de deficiencia en la administración de la misma.⁸

Una de las metas del objetivo 6 de desarrollo sostenible para 2030 es lograr el acceso universal y equitativo al agua potable a un precio asequible para todos.

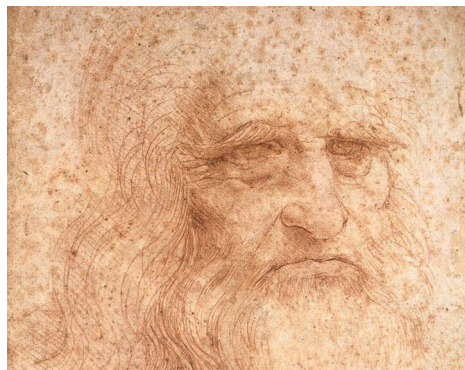


Fig. 6.1
Autorretrato de Da Vinci.
Fuente: Google.

⁸ <http://www.enbuenasmanos.com/el-agua-potable-se-acaba>



Aun siendo optimistas sobre el aumento de la productividad agrícola, de la eficacia del riego y de la expansión del regadío, se estima que en los países en vías de desarrollo en 2030 la agricultura de regadío necesitará un 14% más de agua. Ello requerirá una capacidad de embalse adicional de unos 220 km³. Además, es necesario reemplazar la capacidad que se pierde por la sedimentación de los embalses. También ha de reemplazarse el agua que se sobreexplota en los acuíferos. En los próximos treinta años, se necesitarán alrededor de 2.180 km³ de capacidad de embalse, sin tener en cuenta las pérdidas por evaporación, que aumentarán al incrementarse la superficie de embalse.

Fig. 6.2
Somalia, abril de 2016.
Fotografía: Archivos de
la ONU.



Las obras necesarias equivalen a construir una nueva presa de Asuán cada año.

Es poco probable que en los próximos treinta años se construyan las obras necesarias para disponer de esta capacidad de embalsamiento adicional, por razones tanto económicas, como ambientales y sociales (Departamento de Desarrollo Sostenible de la FAO).

Fig. 6.3
Presa de Asuán.
Fuente: NASA.



Desde la perspectiva de la salud, el tratamiento de las aguas residuales generadas por la población y las industrias de una determinada zona urbana es de suma importancia para asegurar un crecimiento estable de la misma. Además, es necesario asegurar que las aguas residuales generadas son tratadas hasta niveles que no afecten el medio ambiente en que son vertidas, para garantizar que este crecimiento urbano se lleva a cabo de forma sostenible.



Fig. 6.4
Desagüe pluvial.
Fuente: Ciudadano Sur.

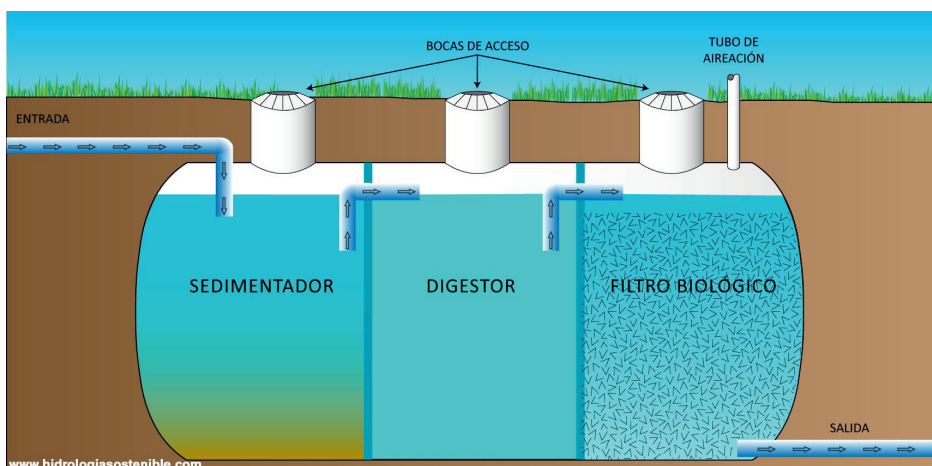


Fig. 6.5
Depuradora biológica para aguas negras.
Fuente: Hidrología Sostenible.

6.2. Proyecto 1

En un determinado país, se plantea construir un embalse para regular la cuenca de uno de sus ríos con el objetivo de satisfacer las necesidades de agua para regadío. La capacidad máxima del embalse previsto será de 5.000.000 m³, eso es, de 5 unidades de agua (1 unidad de agua = 1.000.000 m³).

Antes de proceder a la construcción, sería deseable tener alguna idea sobre la efectividad del embalse a largo plazo.



Por ello, se ha llevado a cabo un estudio sobre los volúmenes semanales de agua aportados por el río, y se ha encontrado que pueden aproximarse a través de la siguiente distribución de probabilidad discreta:

Aportación semanal en unidades de agua	2	3	4	5	6
Probabilidad	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

Se considera que, para satisfacer el riego, se requerirá el consumo de 2 unidades de agua por semana pero, para mantener los estándares de calidad del agua para otros usos, se deberá dejar salir al menos 1 unidad de agua más por semana. Por tanto, el objetivo semanal será dejar salir 3 unidades de agua. Si el estado del embalse (nivel del embalse) más la aportación de agua del río son inferiores a esta cantidad, se deberá dejar salir menos agua, ello incidirá en los regadíos. Si el embalse está lleno, cualquier exceso será vertido por los aliviadores. El nivel mínimo admitido del embalse (estado mínimo) no podrá ser inferior a una unidad de agua.

6.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática: Breve descripción de la problemática del agua.

Paso 1

- Describir, mediante una ecuación matricial del tipo $p(k+1) = Ap(k)$, la transición semanal de unidades de agua probables, detallando el qué, el cómo, el porqué y el para qué.

Paso 2

- Indicar el término general de la sucesión vectorial definida por recurrencia obtenida en el paso 1. Es decir, expresar $p(k)$ en función de $p(0)$ y demostrar la veracidad de la expresión hallada.
- Suponiendo que la primera semana partimos de una situación en que hay embalsadas tres unidades de agua, ¿cuál es la probabilidad de que dos semanas después se halle al mínimo?
- Valoración crítica del resultado dentro del contexto del trabajo.

Paso 3

- Obtener los valores y los vectores propios de la matriz A .
- Utilizar los cálculos obtenidos para calcular la situación del embalse a la semana, $k = 10$.



Paso 4

- Estudio y análisis de la estabilidad y la sostenibilidad.
- a) Interpretar las componentes “normalizadas” del vector propio de valor propio mayor.
- b) Estudiar el comportamiento asintótico del sistema. ¿Es sostenible el embalse?

Paso 5

Por problemas de filtración, el agua puede llegar al embalse contaminada, por lo que se ha de colocar una depuradora haciendo que entre menos agua al embalse.

Debido a ello, los volúmenes semanales de agua que aporta el río se aproximan a la distribución siguiente:

Aportación semanal en unidades de agua	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	0,1	0,18	0,38	0,18	0,08	0,08

- ¿Es sostenible el embalse en estas condiciones?

6.3. Proyecto 2

En una determinada urbanización, se planea instalar tres depósitos cilíndricos interconectados para tratar el agua y conseguir que esté en condiciones óptimas para el consumo.

En este proyecto, se trata de estudiar si es posible controlar el nivel de agua de los tres depósitos.

Consideremos tres depósitos cilíndricos interconectados como los de la figura 6.6:

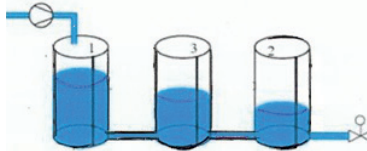


Fig. 6.6
Depósitos de agua.
Fuente: Elaboración propia.

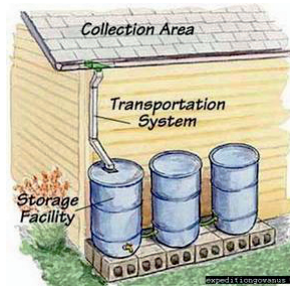
de diámetros, respectivamente, d_1 , d_3 , d_2 , y niveles de agua variables $x_1(k)$, $x_3(k)$ y $x_2(k)$ dependientes del período de tiempo k . Supongamos, además, que la cantidad $u_1(k)$ de entrada de agua del exterior por el depósito 1 y la cantidad $u_2(k)$ de salida de agua por el depósito 2 se pueden controlar con un par de bombas.

Es sabido que los niveles tienden espontáneamente a equilibrarse, siendo la velocidad de circulación del agua directamente proporcional a la diferencia de niveles e inversamente proporcional a la pérdida de carga⁹ de las conexiones entre los depósitos.

⁹ Recuérdese que la pérdida de carga en una tubería es la pérdida de presión que se produce en un fluido debida a la fricción de las partículas del fluido entre sí y contra las paredes de la tubería que las conduce.



Fig. 6.7
Depósitos de recogida de
agua de lluvia.
Fuente:
elhuertoenlaciudad.word
press.com.



Se trata de estudiar si se puede conseguir que los depósitos tengan los niveles de agua que deseemos.

6.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción al tema de manera que se dé respuesta a las dos preguntas siguientes:
 - a) ¿La mala calidad del agua repercute en la salud?
 - b) ¿Están relacionados la salud y el desarrollo sostenible?

Paso 1

Supongamos que las mediciones de los niveles las realizamos por períodos de tiempo k iguales.

- Describir el control de los niveles de agua en función del período de tiempo mediante un sistema de ecuaciones “de control” de la forma:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

donde:

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}, \quad u(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

detallando el qué, el cómo, el porqué y para qué.

Paso 2

- a) Indicar el término general de la sucesión vectorial definida por recurrencia obtenida en el paso 1. Es decir, expresar $X(k)$ en función de $X(0)$ y de la cantidad de agua que entra en cada período de tiempo.
- b) Se sabe que las alturas de los depósitos son todas de una unidad, que los diámetros de los depósitos son $d_1 = d_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ i $d_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}}$ y que las pérdidas de carga en las interconexiones son $p_1 = p_2 = 0,5$.



Supóngase que inicialmente los depósitos están vacíos.

- i) Estudiar si, empleando solo la primera bomba, podemos conseguir que en el período de tiempo $k = 3$ se haya llenado el depósito número 2, y hayan quedado vacíos los otros.
 - ii) ¿Qué cantidad de agua ha entrado en cada período de tiempo?
- c) Valoración crítica del resultado dentro del contexto del trabajo.

Paso 3

Suponiendo que inicialmente los depósitos están llenos:

- Estudiar en cuántos períodos de tiempo se vaciarán si la bomba de entrada está cerrada y abierta la de salida.

Paso 4

Supongamos ahora que las cantidades u_1 de agua que entra y u_2 de agua que sale son las mismas en cada período de tiempo ($u_1(k) = u_1(0)$, $u_2(k) = u_2(0)$, para todo $k \geq 0$).

- Supongamos que los depósitos tienen ciertos niveles de agua. ¿Es posible fijar las unidades u_1 y u_2 de entrada y salida de agua, de manera que se mantengan estos niveles de agua (es decir, definan un punto de equilibrio)? ¿Cuáles deben ser estos niveles de agua y cuáles serán las unidades de entrada y salida de agua?

Paso 5

- En un sistema cualquiera del tipo $x(k+1) = Ax(k) + Bu$ (u constante), ¿qué condiciones deben cumplirse para poder encontrar un punto de equilibrio? ¿En qué condiciones es único? Describirlo con todo detalle.
- Sea cuál sea la condición inicial, ¿podemos siempre llegar a esta situación estable? Describirlo con todo detalle.
- Aplicar el estudio al caso que nos ocupa.
- Realizar una valoración crítica del resultado dentro del contexto del trabajo.

→ 7



Objetivo 7: Energía asequible y no contaminante

Garantizar el acceso a una energía asequible,
segura, sostenible y moderna para todos

7.1. Introducción

La energía es básica para casi todos los grandes desafíos y oportunidades a que se enfrenta el mundo actualmente. Ya sea para los empleos, la seguridad, el cambio climático, la producción de alimentos, o para aumentar los ingresos, el acceso a la energía es esencial para todos.



Fig. 7.1
Aerogeneradores.
Fotografía: Archivos de la
ONU.



La energía sostenible es una oportunidad que transforma vidas, economías y el planeta.

El secretario general de las Naciones Unidas Ban Ki-moon impulsa la iniciativa *Energía sostenible para todos* para asegurar el acceso universal a los servicios de energía modernos, mejorar el rendimiento y aumentar el uso de fuentes renovables.¹⁰

El viento es una fuente considerable de energía al tiempo que contribuye significativamente a los procesos de intercambio térmico entre la superficie de la Tierra y la atmósfera.

La energía eólica es uno de los recursos energéticos más antiguos explotados por el ser humano, y hoy por hoy es la energía más desarrollada y eficiente de todas las energías renovables.

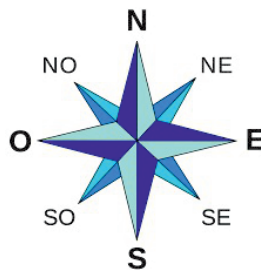
7.2. Proyecto 1

Para valorar si un lugar de la Tierra es idóneo para la instalación de aerogeneradores, primero se deben conocer las características climato-estadísticas, que pueden estudiarse teniendo en cuenta la velocidad del viento y las mediciones de dirección que pueden ser recogidas mediante estaciones meteorológicas.

El viento puede soplar en la misma dirección durante un tiempo relativamente largo. Entonces, de repente aparecen cambios de una dirección a otra; sigue soplando en la nueva dirección hasta un nuevo cambio, y así sucesivamente. La secuencia resultante de datos de la dirección del viento consta, pues, de series de tiempo de estados estables y cambios bruscos entre ellos. Estos estados dependen de la fuerza del viento, que puede tomar todas las direcciones de la veleta. La velocidad y la dirección del viento son un tanto erráticas y persistentes. Esto significa que las variaciones del viento en el tiempo se pueden describir mediante cadenas de Markov.

Este trabajo se propone analizar las probabilidades de cambio de una dirección a otra del viento a partir de una muestra observada de direcciones del viento en un lugar determinado. De acuerdo con la división en ocho sectores de los puntos cardinales (v. figura 7.2):

Fig. 7.2
Rosa de los vientos.
Fuente:
Compass_rose_simple.
svg.



¹⁰ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/energy/>



clasificamos las direcciones del viento en ocho estados:

$$\{N, NE, E, SE, S, SO, O, NO\}.$$

Se han realizado mediciones en un lugar de la Tierra, y se puede suponer que los datos (basados en los estudios de Martha Cecilia Palafox Duarte [25]) de direcciones del viento obtenidos pueden modelizarse mediante una cadena de Markov. Designamos p_{ij} la probabilidad de que el viento tome la dirección i si en el estado anterior tiene la dirección j . Una aproximación de la variación de la dirección del viento viene dada por la matriz de transferencia siguiente:

$$P = \begin{pmatrix} 0,541 & 0,3604 & 0,261 & 0,18 & 0,12 & 0,16 & 0,37 & 0,36 \\ 0,311 & 0,44 & 0,281 & 0,11 & 0,070 & 0,057 & 0,13 & 0,206 \\ 0,061 & 0,11 & 0,27 & 0,102 & 0,031 & 0,023 & 0,06 & 0,033 \\ 0,034 & 0,041 & 0,083 & 0,311 & 0,22 & 0,034 & 0,02 & 0,236 \\ 0,021 & 0,0264 & 0,06 & 0,181 & 0,323 & 0,256 & 0,1 & 0,066 \\ 0,011 & 0,007 & 0,03 & 0,081 & 0,16 & 0,27 & 0,12 & 0 \\ 0,008 & 0,0062 & 0,01 & 0,035 & 0,07 & 0,12 & 0,14 & 0,033 \\ 0,013 & 0,009 & 0,005 & 0 & 0,006 & 0,08 & 0,06 & 0,066 \end{pmatrix}$$

7.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática de las energías renovables.

Paso 1

- ¿Cuál es la probabilidad de que el viento permanezca en la dirección Norte (N) si se encuentra en esa misma dirección?
- Si en el momento actual el viento tiene dirección Sur, ¿cuál es la probabilidad de que el viento tome la dirección NO al cabo de dos períodos de tiempo?

Paso 2

- Determinar los valores propios del sistema, utilizando, si es preciso, algún software matemático.
- Determinar, en caso de que exista, la distribución estacionaria.

Paso 3

¿Es idóneo este lugar para instalar aerogeneradores? Razona la respuesta.



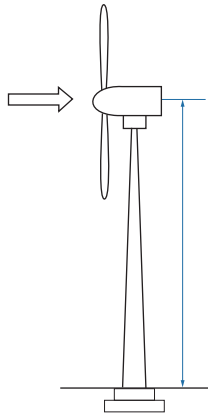
7.3. Proyecto 2

Una de las principales formas de producir energía renovable y eficiente de conversión de la energía cinética del viento en energía eléctrica es la extracción de energía a partir del viento, mediante aerogeneradores ([3], [14]).

El daño más grave que pueden sufrir las turbinas eólicas es la rotura estructural de las torres de los aerogeneradores. Estos daños pueden ser causados por el ser humano, por un viento fuerte o una tormenta (entre otras posibilidades), que golpea la estructura y puedan inducir vibraciones estructurales tanto en la torre como en las palas. Este proyecto tiene como objetivo diseñar un modelo simplificado de la torre de la turbina que permita analizar su estabilidad a partir de los esfuerzos de flexión forzados por el viento.

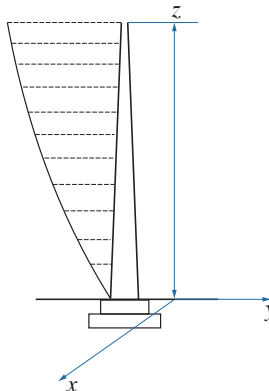
Las torres de las turbinas eólicas están (normalmente) construidas en acero y su estructura puede ser vista como una viga-columna en voladizo, con un diámetro variable, considerando los esfuerzos de flexión y torsión que recibe, desde el punto de vista estructural, y su estabilidad puede estudiarse modelándolas como sistemas hamiltonianos ([13]).

Fig. 7.3
Torre de turbina de
viento.
Fuente: [14].



La modelización de la estructura de una torre de turbina de viento puede simplificarse si dicha torre es vista como una viga en columna cuyo diámetro varía de forma lineal y es seccionada en etapas de espesor variable, sujeta a una fuerza axial P .

Fig. 7.4
Secciones de la torre de
turbina de viento.
Fuente: [14].





7.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática de las energías renovables.

Paso 1

Cuando se divide la columna en un número de elementos, se puede suponer que la fuerza axial, las cargas de viento y los módulos de las secciones son constantes con respecto a z en cada elemento, por lo cual la torre puede ser modelada mediante la ecuación diferencial siguiente:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = q$$

donde EI es la rigidez a flexión, $y(z)$ es la desviación en el plano yz y q es la carga transversal.

- Linealiza dicha ecuación modelizando la torre mediante un sistema lineal del tipo $\dot{X} = AX + B$.

Paso 2

Supóngase que se han hecho tres secciones.

- Da la solución para cada una de las secciones.

Para el análisis, se consideran los parámetros siguientes:

- $P = 11,000 \times 9,81$ que representa el peso de la góndola soportado por la torre.
- $E = 210,000 \text{ N/mm}^2$ correspondiente al material de acero.
- $I_3 = 2,197 \times 10^6$, $I_1 = 2,185 \times 10^6$, y $I_2 = 2,195 \times 10^6$, como el valor de la inercia de las secciones de la torre que son analizadas. (Son diferentes, ya que el diámetro de la torre no es constante.)

Paso 3

- Calcula los valores propios de la matriz del sistema, para cada una de las secciones.
- Estudia la estabilidad de la torre.

Paso 4

- Valora el resultado teniendo en cuenta el contexto.

→ 8



Objetivo 8: Trabajo decente y crecimiento económico

Promover el crecimiento económico sostenido, inclusivo y sostenible, el empleo pleno y productivo y el trabajo decente para todos

8.1. Introducción

La falta reiterada de oportunidades de trabajo decente, la inversión insuficiente y el bajo consumo producen una degradación del contrato social básico subyacente en las sociedades democráticas: el derecho de todos a compartir el progreso. La creación de empleos de calidad sigue siendo un gran reto para muchas economías.¹¹



Fig. 8.1
Objetivo 8.
Fotografía: archivo
ODS.CR.

Para crear trabajo decente, es imprescindible que las políticas económicas y sociales de los países se concentren en la creación de empleo.

¹¹ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/economic-growth/>



El trabajo decente sintetiza las aspiraciones de las personas durante su vida laboral. Significa la oportunidad de acceder a un empleo productivo que genere un ingreso justo, la seguridad en el lugar de trabajo y la protección social para las familias, mejores perspectivas de desarrollo personal y de integración social, libertad para que los individuos expresen sus opiniones, se organicen y participen en las decisiones que afectan sus vidas, y la igualdad de oportunidades y de trato para todos, mujeres y hombres.¹²

Para conseguir el desarrollo económico sostenible, las sociedades deben crear las condiciones necesarias para que las personas accedan a empleos de calidad, estimulando la economía sin perjudicar el medio ambiente. También es preciso que haya oportunidades laborales para toda la población en edad de trabajar, con unas condiciones de trabajo decentes.¹

Hay un amplio consenso entre los economistas de que, para generar crecimiento económico, es necesaria la inversión, al tiempo que esta inversión está relacionada con la determinación de empleo.

Fig. 8.2
Crecimiento económico.
Fuente: *Expansión*.



8.2. Proyecto 1

El modelo Insumo Producto, basado en el modelo de Leontief, permite estudiar la interdependencia existente entre las actividades económicas y ofrecer una descripción detallada de la ruta que siguen los bienes y servicios hasta llegar a la demanda final. De esta forma, se puede describir la estructura de una economía e identificar los efectos añadidos y sectoriales generados por variaciones en los componentes de la demanda final y del valor añadido. El modelo permite ajustar la interdependencia entre los sectores que componen la economía mediante ecuaciones lineales, cuyos coeficientes representan las características estructurales de la economía ([22]).

¹² <http://www.oit.org/global/topics/decent-work/lang-es/index.htm>

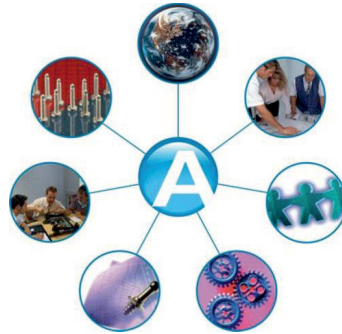


Fig. 8.3
Conjunto de
comunicación global
"transperfecto".
Fuente:
transperfectconnect.com.

Todo ello indica la gran utilidad del modelo Insumo Producto porque, a través de la matriz inversa de Leontief, es posible calcular los efectos generados en toda la economía debido a cambios en cualquiera de los elementos exógenos del modelo, como el consumo de los hogares, el gasto del gobierno o las exportaciones en uno o más sectores.

8.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la problemática del trabajo decente.

Paso 1

Supongamos que hay n sectores económicos, cuya producción puede venderse como productos intermedios a otros sectores y como productos finales.

Designamos x_i el valor de la producción x , del sector i , x_{ij} el valor de la producción que el sector i le vende al sector j , C_i al valor de la producción del sector i que se vende a los hogares, I_i el valor de la producción que el sector i vende como bien de inversión (formación bruta de capital), G_i el valor de la producción que el sector i le vende al gobierno, E_i al valor de la producción que el sector i exporta al resto del mundo, añadiendo las ventas de productos intermedios y las ventas de productos finales.

- Obtén la producción total x_i .

Paso 2

Aceptando la hipótesis de proporcionalidad estricta del modelo, se tiene que el nivel de producción que el sector i le vende al sector j es una proporción constante del nivel de producción del sector j . Es decir, se tiene que $x_{ij} = a_{ij}x_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

(a_{ij} recibe el nombre de coeficiente de insumo del producto del sector i en el sector j .)

- Interpreta el coeficiente a_{ij} .
- Expresa la producción $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ de la forma $x = Ax + y$.
- Obtén la producción.



Paso 3

En este paso, se trata de estudiar la estimación de la producción y el empleo a partir de la demanda.

El procedimiento para calcular el número de empleos se puede realizar del modo siguiente:

Consideramos la matriz inversa de Leontief por la matriz diagonal de la demanda final:

$$X = (X_{ij}) = (I - A)^{-1} \text{diag}(y_1, \dots, y_n)$$

- ¿Qué permite identificar esta matriz?

Paso 4

Designamos w_i el coeficiente de remuneración salarial del sector i y s_i el salario medio del sector i .

- ¿Cuál es la remuneración de los asalariados del sector i producida por la demanda del sector j ?
- ¿Cuál es el número medio de plazas de trabajo N_{ij} del sector i asociados a la demanda del sector j ?
- A partir de la matriz N , obtén el total de empleos generados en toda la economía por la demanda en el sector j para cada j .

Paso 5

- Valora el resultado teniendo en cuenta el contexto.

8.3. Proyecto 2

En este proyecto, veremos que las ecuaciones en diferencias lineales son una herramienta muy útil para el análisis de muchos fenómenos económicos que, por naturaleza, tienen un carácter dinámico discreto en el tiempo.

En una economía determinada la evolución de la tasa de crecimiento del producto x y la tasa de crecimiento de la inversión i viene expresada de la manera siguiente:

$$\begin{cases} x(k+1) = \frac{1}{2}x(k) + \frac{4}{5}i(k) \\ i(k+1) = \frac{1}{10}x(k) + \frac{2}{5}i(k) \end{cases}$$

8.3.1. Pasos que dar

Paso 0

Introducción a la temática.

Paso 1

– Reducción del sistema a una ecuación en diferencias.

Paso 2

Si en el período $k = 0$ la tasa de crecimiento del producto ha sido de un 3% y la tasa de crecimiento de la inversión ha alcanzado el 5%:

- ¿Cuál es la secuencia de crecimiento de la producción de esta economía?
- ¿Cuál es la secuencia de la inversión realizada en esta economía?

Paso 3

– Valora el resultado teniendo en cuenta el contexto.





Objetivo 9: Industria, innovación e infraestructura

Construir infraestructuras resilientes, promover la industrialización inclusiva y sostenible, y fomentar la innovación

9.1. Introducción

Las inversiones en infraestructuras (transporte, riego, energía y tecnología de la información y la comunicación) son fundamentales para lograr el desarrollo sostenible y empoderar a las comunidades en numerosos países. Desde hace tiempo, se reconoce que, para conseguir un incremento de la productividad y de los ingresos, y mejoras en los resultados sanitarios y educativos, se necesitan inversiones en infraestructuras.

El ritmo de crecimiento y urbanización también está generando la necesidad de contar con nuevas inversiones en infraestructuras sostenibles, que permitan a las ciudades ser más resistentes al cambio climático e impulsar el crecimiento económico y la estabilidad social.

Además de la financiación gubernamental y la asistencia oficial para el desarrollo, se está promoviendo la financiación del sector privado para los países que necesitan apoyo financiero, tecnológico y técnico.¹³

Planificar inversiones públicas en infraestructuras representa un problema debido a la gran variedad de consideraciones y factores que deben tenerse en cuenta en la ejecución de los estudios o la construcción de cada una de las posibles obras. Se plantea así el problema inicial que se debe afrontar: asignar recursos económicos, generalmente escasos, a una diversidad de posibilidades de acción para obtener los objetivos deseados.

¹³ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/infrastructure/>



Fig. 9.1
Desarrollo de
infraestructuras
sostenibles.
Fotografía: Kibae
Park/Sipa Press.



9.2. Proyecto 1

Supongamos que el ayuntamiento de una ciudad ha de decidir si instala un polideportivo y se han presentado tres proyectos. Se trata de comparar las tres alternativas para ayudar a la toma de decisión.

Para decidir sobre en qué infraestructura se va a invertir, se debe hacer previamente una comparación entre las distintas alternativas. Para comparar elementos, se deben realizar mediciones que permitan aplicar los criterios de comparación para poder establecer preferencias entre ellos. Las unidades de medición de cada uno de los elementos que participan en un proceso de decisión suelen ser diferentes (peso, distancia, tiempo por ejemplo), por lo cual es necesario transformar estas unidades en una unidad definida que permita relacionar todas las medidas.

Pero encontrar esos “pesos” no es tarea fácil. Entre otros cometidos, está el de comparar al mismo tiempo todas las alternativas entre sí para establecer cada uno de esos pesos. Esta tarea prácticamente inasequible, pero sí es posible realizar comparaciones “paritarias” entre ellas, es decir, de dos en dos.

Los principales criterios que hay que tener en cuenta para asignar pesos son:

- a) Políticas municipales: tipo de deporte (de competición, formativo, recreativo), generación de empleo (temporal, fijo), población beneficiaria (nivel de desarrollo humano, situación de vulnerabilidad).
- b) Criterios técnicos: calidad técnica de los proyectos presentados.
- c) Criterios económicos: beneficiarios directos e indirectos, costo anual equivalente por usuario, programación de la inversión.



9.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática sobre la inversión pública en infraestructuras.

Paso 1

- ¿Si el resultado de las comparaciones paritarias realizadas para el criterio “generación de empleo”, se escribiese en forma matricial, qué forma tendría esta matriz?
- Si $a_{12} = 2$, $a_{13} = 4$ y $a_{23} = 5$ donde a_{ij} representa la importancia relativa entre la alternativa i y la j , escribe la matriz de las comparaciones paritarias para este caso.
- Dibuja el grafo correspondiente.
- La prioridad se define como la intensidad del recorrido y es el producto de las intensidades de los arcos del recorrido. Determina la intensidad de preferencia del nodo 1 con respecto del nodo 1, considerando los efectos de segundo orden de los demás nodos.
- La intensidad de preferencia entre la alternativa i y la j , considerando los efectos de orden k , es el elemento ij de la matriz A^k .

Paso 2

- Obtén el vector propio normalizado (vector de probabilidad) de valor propio máximo de la matriz obtenida en el paso 1.
- Interpreta el resultado.

9.3. Proyecto 2

El gobierno de un determinado país se está planteando invertir en la compra de nuevos trenes para su red de cercanías, con el fin de aumentar su cadencia y evitar el exceso de pasajeros en horas punta, que a veces llega a superar la carga máxima permitida.

Una vez en funcionamiento, estos trenes deberán mantener una cierta distancia para evitar el colapso de trenes en las estaciones. Esto hace necesario estudiar la dinámica de estos trenes.

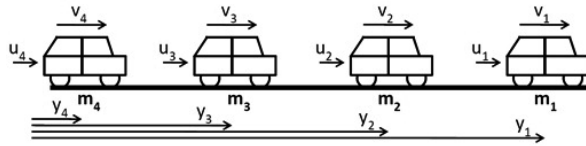


Fig. 9.2
Transporte público.
Fuente: Google.



En este proyecto, se trata de analizar la dinámica del problema de mantener una distancia predeterminada entre vehículos adyacentes. Para ello, consideremos cuatro vehículos como los de la figura 9.3, que se mueven en un mismo carril y en la misma dirección, y sean y_i , v_i , m_i y u_i la posición, la velocidad, masa y fuerza aplicada correspondiente al vehículo i . Sea k el coeficiente de fricción viscosa (el mismo para cada vehículo).

Fig. 9.3
Representación de un sistema de múltiples vehículos.
Fuente: [12].



9.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática.

Paso 1

Recordando las leyes de la mecánica

$$\begin{aligned} v_i &= \dot{y}_i \\ u_i &= kv_i + m_i \dot{v}_i \end{aligned}$$

y, con el propósito de mantener una distancia h_0 entre vehículos contiguos y manteniendo en lo posible una misma velocidad v_0 para cada vehículo:

- Modela el problema mediante un sistema dinámico de la forma:

$$\dot{X} = AX + Bu$$

cuyas variables de estado sean las tres distancias entre los vehículos y las cuatro velocidades, y las variables de entrada, las cuatro fuerzas aplicadas a cada vehículo.

Paso 2

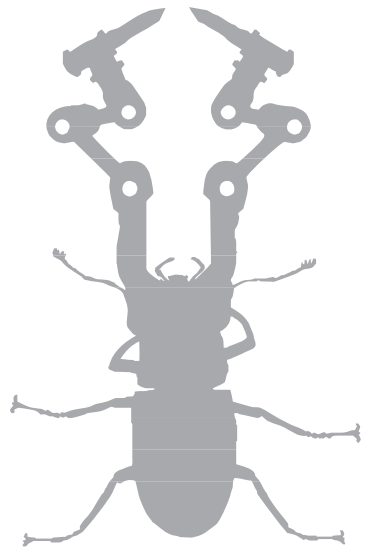
- Calcula los valores propios del sistema.
- Calcula los valores propios para el caso en que los cuatro vehículos sean idénticos y vayan a la misma velocidad.

Paso 3

- Estudia la controlabilidad del sistema.
- Haz simulaciones dando valores a las variables.

Paso 4

- Valora el resultado teniendo en cuenta el contexto.



→ 10



Objetivo 10: Reducción de las desigualdades

Reducir la desigualdad entre los países y dentro de ellos

10.1. Introducción

La comunidad internacional ha realizado grandes avances para sacar a las personas de la pobreza. Las naciones más vulnerables, los países menos adelantados, los países en vías desarrollo desarrollo sin litoral y los pequeños estados insulares continúan avanzando en la reducción de la pobreza. Sin embargo, siguen existiendo desigualdades y grandes disparidades en el acceso a los servicios sanitarios y educativos, y a otros bienes productivos.¹⁴



Fig. 10.1
Desigualdades.
Fuente: *El Confidencial*.

¹⁴ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/inequality/>



Las diferencias entre riqueza y la pobreza no son solo de dinero. La falta de acceso a unos servicios básicos de calidad, como el agua, el saneamiento, la salud, la educación, la gestión de residuos y el transporte, hace que se agrande la brecha existente.

Cada vez más países están de acuerdo en que el crecimiento económico no basta para reducir la pobreza, a menos que sea inclusivo y tenga en cuenta las tres dimensiones del desarrollo sostenible: económica, social y ambiental.

Una de las metas del objetivo 10 de desarrollo sostenible es adoptar políticas fiscales, salariales y de protección social, y lograr progresivamente una mayor igualdad.¹⁵

Un factor que puede ayudar a conseguir una mayor igualdad entre las personas es intentar de reducir de la brecha salarial. Para ello, es necesario conocer el mercado laboral.

El mecanismo del mercado de trabajo está condicionado por las regulaciones de las instituciones gubernamentales que establecen las normas de la contratación de los trabajadores, y estas pueden estimular o restringir la utilización y la movilidad de los factores intervinientes. En la contratación, se pacta el salario y este está relacionado con la productividad del puesto de trabajo.

En un entorno ideal en que se pudieran distinguir las diferencias de productividad de los factores en el mercado de trabajo, se pagaría un solo precio por unidad de productividad de dicho factor y, por tanto, la desigualdad salarial solo reflejaría las diferencias de productividad del trabajo ([19]).

Desgraciadamente, se está lejos de este entorno ideal y la discriminación salarial en algunas empresas se realiza de forma sutil e indirecta, de manera que, con un mismo sueldo base, se adjudican complementos o se reconocen retribuciones distintas a empleos que, aunque tienen la misma productividad, se le asigna una categoría diferente. Estas discriminaciones, que hay que combatir, son difíciles de detectar incluso por inspectores de trabajo.

Fig. 10.2
Brecha salarial.
Fuente:
igualdadmissem.
wordpress.com.



¹⁵ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/inequality/>



10.2. Proyecto 1

La renta nacional $Y(n)$ de un país en un período n determinado puede escribirse como:

$$Y(n) = C(n) + I(n) + G(n)$$

donde $C(n)$ indica los gastos de consumo para la compra de bienes de consumo, $I(n)$ la inversión privada inducida para la compra de bienes de capital y $G(n)$ el gasto gubernamental, donde n se mide en años.

Haciendo las suposiciones siguientes, que son ampliamente aceptadas por los economistas:

- El gasto de consumo $C(n)$ es proporcional al ingreso nacional $Y(n-1)$ del año anterior $n-1$, es decir, $C(n) = \alpha Y(n-1)$, donde $\alpha > 0$ se llama comúnmente la propensión marginal a consumir.
- La inversión privada inducida $I(n)$ es proporcional al aumento del consumo $C(n) - C(n-1)$, es decir, $I(n) = \beta (C(n) - C(n-1))$, donde $\beta > 0$ es la relación de proporcionalidad.
- El gasto gubernamental $G(n)$ es constante a lo largo de los años y podemos elegir las unidades de tal manera que $G(n) = 1$.

10.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la problemática sobre la reducción de las desigualdades.

Paso 1

Partiendo de las condiciones dadas:

- Obtén una ecuación en diferencias que describa el ingreso nacional del país.

Paso 2

- Determina, si existe, el punto de equilibrio.
- ¿Bajo qué condiciones el punto de equilibrio es (asintóticamente) estable?
- ¿Bajo qué condiciones el ingreso nacional oscila en torno al punto de equilibrio?

Paso 3

Suponiendo que $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 1$:

- Resuelve la ecuación obtenida en el paso 1.



Paso 4

Supongamos ahora que el gasto gubernamental $G(n)$ no es constante, sino que es proporcional al ingreso nacional del período correspondiente al de hace dos años, es decir, $G(n) = \gamma Y(n-2)$, con $0 < \gamma < 1$.

- Obtén una ecuación en diferencias que describa el ingreso nacional del país para este caso.
- Encuentra condiciones para la estabilidad y las oscilaciones de las soluciones.

Paso 5

- Valora el resultado teniendo en cuenta el contexto.

10.3. Proyecto 2

En este trabajo, se trata de estudiar la productividad de una pequeña economía. Para ello, suponemos que esta economía está dividida en tres sectores:

- i) Manufacturas
- ii) Materias primas
- iii) Servicios

10.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción al problema de la brecha salarial.

Paso 1

En dicha economía, por cada unidad de producción de manufactura se requieren 0,10 unidades de otras empresas de este sector, 0,30 unidades del sector de las materias primas y 0,30 unidades de servicios. Por cada unidad de producción en materias primas, se necesitan 0,20 unidades de otras materias primas, 0,50 de manufacturados y 0,15 de servicios. Finalmente, por cada unidad de producción del sector de los servicios, se necesitan 0,70 de manufacturados y 0,10 de materias primas.

- Construye la matriz de consumo.
- Determina qué demandas intermedias se crean si se plantea producir 100 unidades de materias primas.



Paso 2

- Determina los niveles de producción que se necesitan para satisfacer una demanda final de 20 unidades para el sector de las materias primas y sin demanda final para los otros sectores.
- Determina los niveles de producción que se necesitan para satisfacer una demanda final de 20 unidades para manufacturados y sin demanda final para los otros sectores.
- Determina los niveles de producción que se necesitan para satisfacer una demanda final de 20 unidades para el sector de las materias primas, 20 unidades de manufacturados y 10 unidades del sector de los servicios.

Paso 3

La productividad de una economía es una medida de lo bien que se han combinado y utilizado los recursos para cumplir los resultados específicos deseados. Matemáticamente, se describe como la relación entre la producción y el insumo:

$$\text{Productividad} = \frac{\text{producción}}{\text{insumo}}.$$

- Determina la productividad de esta economía.

Paso 4

- Valora el resultado teniendo en cuenta el contexto.

→ 11



Objetivo 11: Ciudades y comunidades sostenibles

Lograr que las ciudades y los asentamientos humanos sean inclusivos, seguros, resilientes y sostenibles

11.1. Introducción

Son muchos los problemas para mantener que las ciudades sigan creando empleos y prosperidad sin ejercer presión sobre la Tierra y los recursos. Los problemas comunes de las ciudades son la congestión, la falta de fondos para prestar servicios básicos, la escasez de vivienda adecuada y el deterioro de las infraestructuras.



Fig. 11.1
Construcción de ciudades sostenibles.
Fuente: FCINA.



La mitad de la humanidad vive actualmente en ciudades. Dado que para la mayoría de las personas el futuro será urbano, las soluciones a algunos de los principales problemas a que se enfrentan los seres humanos, como la pobreza, el cambio climático, la asistencia sanitaria y la educación, deben encontrarse en la vida de la ciudad.¹⁶

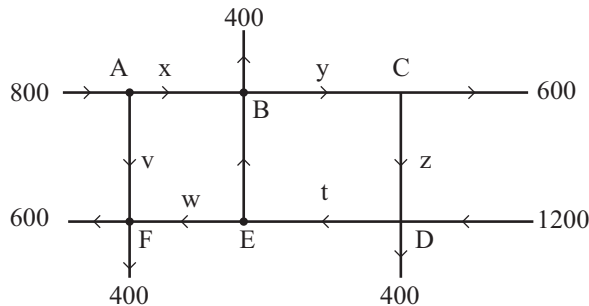
Una meta del objetivo número 11 de desarrollo sostenible es proporcionar acceso a sistemas de transporte seguros, asequibles, accesibles y sostenibles para todos, y mejorar la seguridad vial, en particular mediante la ampliación del transporte público, prestando especial atención a las necesidades de las personas en situación de vulnerabilidad, las mujeres, los niños, las personas con discapacidad y las personas mayores.¹⁷

11.2. Proyecto 1

Para hacer más sostenible la ciudad, el ayuntamiento pretende regular el tráfico y encarga un estudio sobre la red de tráfico de la ciudad.

El diagrama 11.2 representa el flujo de tráfico a través de un bloque determinado de calles. (Los números son los flujos medios de entrada y salida de la red en las horas de tráfico máximo).¹⁸

Fig. 11.2
Flujo de tráfico a través de un bloque determinado de calles.
Fuente: ILAS.



11.2.1. Pasos que dar

Paso 0

Introducción a la construcción de ciudades sostenibles.

Paso 1

- Utilizando la primera ley de Kirchhoff, escribe el sistema de ecuaciones que determina el flujo de coches en una intersección.

¹⁶ http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/wp-content/uploads/sites/3/2016/10/11_Spanish_Why_it_Matters.pdf

¹⁷ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/cities/>

¹⁸ <http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/networks.htm>



- Resuelve el sistema de ecuaciones.
- Da la solución para el caso en que $w = 300$ y $t = 1,300$ (vehículos por hora).

Paso 2

Supongamos ahora que las calles de A a B y de B a C deben cerrarse al tráfico debido a una reparación de las cañerías.

- ¿Cómo se puede redirigir el tráfico?

Paso 3

Valora los resultados teniendo en cuenta el objetivo 11 de desarrollo sostenible.

11.3. Proyecto 2

En muchas ciudades, para hacerlas más sostenibles y pensadas para el ciudadano, están implementando servicios de alquiler de bicicletas de tipo "Bicing", para fomentar una movilidad más sostenible y reducir la contaminación y el ruido.

El ayuntamiento de una ciudad ha decidido poner en funcionamiento un sistema de Bicing y, por la forma de la ciudad, acuerda ubicar las estaciones de alquiler en tres puntos de la misma, un punto en el centro (con la etiqueta C), un punto en el extremo Este (etiquetada como E) y un punto en el extremo Oeste (etiquetada como O). El ayuntamiento también crea un servicio de agencia de reponedores y reparadores para asegurar el servicio en los tres puntos. Durante la prueba piloto, se ha observado lo siguiente:

1. De las bicicletas que se recogen en el punto C , el 30% se devuelven en el mismo centro de la ciudad, el 30% se devuelven en el punto E y el 40%, en el O .
2. De las bicicletas que se recogen en el punto E , el 40% se devuelven en el centro de la ciudad, el 40% en el mismo punto E y el 20% se devuelven en el punto O .
3. De las bicicletas que se recogen en el punto O , el 50% se entregan en el centro de la ciudad, el 30% se entregan en punto E y el 20% se entregan en el mismo punto O .

Después de devolver una bicicleta en un punto determinado, esta se queda en ese punto para volver a ser alquilada. De esta manera, la ubicación de una bicicleta se determina solo por su ubicación anterior.

Para simplificar el problema, suponemos que cada una de las personas que alquilan una bicicleta la devuelve al cabo de 30 minutos.

11.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción al transporte público sostenible.



Paso 1

Considerando que un estado es la ubicación de una bicicleta en el sistema en un momento determinado k :

- Escribe la matriz de transición de estados.

Paso 2

- Si una bicicleta se encuentra en el punto O , ¿cuál es la probabilidad de que se encuentre en el punto E al cabo de una hora?
- Demuestra que, al final del día, la probabilidad de la ubicación de una bicicleta no depende del punto donde se encontraba inicialmente.
- ¿Cuáles son las probabilidades de que se encuentre en cada uno de los puntos?

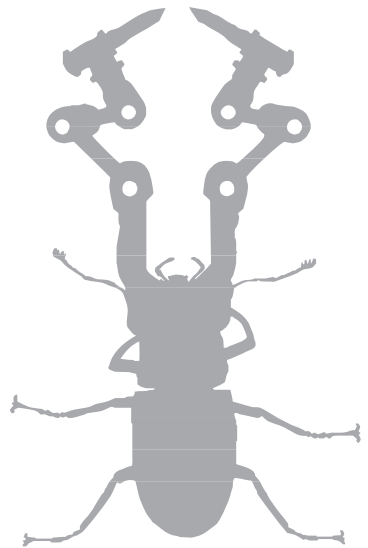
Paso 3

El ayuntamiento desea que, a primera hora del día, haya la misma cantidad de bicicletas en cada uno de los puntos.

- ¿Cómo debe organizar el equipo de reponedores para optimizar la tarea?

Paso 4

- Valora el resultado teniendo en cuenta el contexto.



→ 12



Objetivo 12: Producción y consumo responsables Garantizar modalidades de consumo y producción sostenibles

12.1. Introducción

El objetivo del consumo y la producción sostenibles es hacer más y mejores cosas con menos recursos, incrementando las ganancias netas de bienestar de las actividades económicas mediante la reducción del uso de los recursos, de la degradación y de la contaminación durante todo el ciclo de vida, logrando al mismo tiempo una mejor calidad de vida. En ese proceso participan distintos stakeholders, entre ellos empresas, consumidores, responsables de la formulación de las políticas, investigadores, científicos, minoristas, medios de comunicación y organismos de cooperación para el desarrollo.¹⁹

El crecimiento económico conlleva una destacada transformación en la movilidad de las personas y las mercancías, especialmente en lo que se refiere a su impacto sobre otras áreas de la infraestructura básica. En concreto, en las sociedades emergentes, la demanda creciente de movilidad en términos de desplazamientos de personas y de logística de carga plantea nuevos retos y costos, debidos al aumento de la demanda de energía, de los servicios de comunicaciones y de la provisión de agua ([20]), lo cual deriva de una mayor demanda de infraestructuras de transporte.

Uno de los retos que se presentan es la optimización de la logística del transporte de mercancías y el cambio del tipo de distribución.

¹⁹ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/sustainable-consumption-production/>



No hay que olvidar los sectores productivos agrícola y ganadero, ya que tienen una gran importancia por su carácter socioeconómico; sin embargo, el desarrollo de estas economías se ve afectado por grandes fluctuaciones en los precios, debidas por una parte a los ciclos de producción, a problemas referentes al clima y al crecimiento de la población, entre otros. Es importante pues, profundizar en los modelos económicos que analizan la evolución de los precios.

Fig. 12.1
Distribución sostenible.
Fuente: II Congreso
Nacional de Movilidad.



12.2. Proyecto 1

Tres panaderías con capacidades de producción de 5.000, 7.000 y 9.000 panes diarios deben abastecer a cinco poblados cuyas demandas son de 2.000, 6.000, 8.000, 4.000 y 1.000 panes diarios.

En momentos puntuales, pueden aumentar la producción con un máximo de 500 panes más cada panadería.

Debido a las diferentes distancias entre las tres panaderías y los cinco poblados, los costes de transporte varían en función de qué panadería hace el envío y cuál es la población de destino.

En este proyecto, se plantea estudiar cómo minimizar este coste.

Fig. 12.2
Pan.
Fotografía: TS Media.





12.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática.

Paso 1

Descripción matricial de cinco posibles formas de envío de los panes

	Pobl. 1	Pobl. 2	Pobl. 3	Pobl. 4	Pobl. 5
Pan. 1					
Pan. 2					
Pan. 3					

Paso 2

Si el coste de expedición de 1 pan desde la panadería i , ($i = 1, 2, 3$) hasta el poblado j , ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) es el elemento (i, j) de la matriz de coste, expresada en la moneda local:

$$\begin{pmatrix} 0,70 & 0,30 & 0,20 & 0,40 & 0,20 \\ 0,60 & 0,50 & 0,80 & 0,30 & 0,40 \\ 0,30 & 0,20 & 0,50 & 0,70 & 0,10 \end{pmatrix}$$

- ¿Cuántos panes se tendrán que enviar cada día desde cada panadería a cada pueblo para satisfacer sus demandas al menor coste?
- ¿Cuál es este menor coste del transporte?
- ¿Cuál es el coste por panadería?

Paso 3

El pueblo 1 celebra una fiesta a la cual se espera que acudan e personas de otros lugares, por lo cual para este día solicita 400 panes más.

- ¿Cómo se repartirán la producción las tres panaderías, para que el coste del transporte siga siendo el menor posible?

Paso 4

- Valoración del resultado teniendo en cuenta el contexto del ejercicio.

12.3. Proyecto 2

Se pretenden explicar las fluctuaciones que se producen en los precios de los mercados agrícolas y ganaderos, cuya producción no es instantánea ni continua, debido a que su



producción exige un período de duración. En este tipo de economías, la decisión de producción se debe adoptar en el período anterior al de la venta y se debe confiar en que el precio verifica alguna relación con los precios de los años anteriores.²⁰

12.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática.

Paso 1

Suponiendo que deciden de que el precio $p(t)$ se va a mantener en el próximo período y suponiendo también que la oferta y la demanda son funciones lineales del precio del producto:

- Formula matemáticamente las funciones de oferta y demanda.
- Deduce del apartado anterior, una ecuación en diferencias dependiente del tiempo, que describa el equilibrio de mercado.
- Resuelve dicha ecuación y analízala.

Paso 2

Supongamos ahora que el precio esperado $\hat{p}(t)$ para la oferta no depende solamente del precio de la temporada anterior, sino que consideran como precio esperado para sus producciones la media de las cuatro últimas temporadas.

- Formula matemáticamente las funciones de oferta y demanda.
- Deduce del apartado anterior, una ecuación en diferencias dependiente del tiempo, que describa el equilibrio de mercado.
- Resuelve dicha ecuación y analízala.

Paso 3

- Valorar el resultado desde el punto de vista económico.

²⁰ <https://jcmoreno.webs.ull.es/Análisis/Modelo%20de%20la%20telarana.pdf>



→ 13



Objetivo 13: Acción por el clima

Adoptar medidas urgentes para combatir el cambio climático y sus efectos

13.1. Introducción

El cambio climático afecta todos los países de todos los continentes. Tiene un impacto negativo en la economía nacional y en la vida de las personas, de las comunidades y de los países. En el futuro sus consecuencias todavía serán peores.

Entre las metas a conseguir está incorporar medidas relativas al cambio climático en las políticas, las estrategias y los planes nacionales. Las políticas necesarias no solamente se deben adoptar a escala nacional, sino que también a escala local: los ayuntamientos deben responder al reto del cambio climático tomando medidas, por ejemplo, con relación a la emisión de gases contaminantes.



Fig. 13.1
¿Qué puedes hacer tú
contra el cambio
climático?
Fuente: A. Isan.



13.2. Proyecto 1

En una determinada ciudad, se liberan diariamente gases contaminantes a la atmósfera que proceden mayoritariamente de los polígonos industriales que hay a su alrededor y por el uso de vehículos. Las autoridades locales se han propuesto analizar la calidad del aire en función de la concentración de gases contaminantes que contiene, con el fin de poder regular la emisión de dichos gases y así mejorarla.

Fig. 13.2
Circulación densa en
Madrid, año 2016.
Fotografía: enerTIC.



Para ello, se distinguen tres situaciones o estados: normal n , de preemergencia p y de emergencia e .

El estado de alerta depende del número de vehículos y del número de fábricas que están en funcionamiento, que, contabilizando los gases que emiten, pueden equipararse a una determinada cantidad de vehículos, considerando que el número total de vehículos es x .

Si un día el número de vehículos que circulan es y , y el estado de alerta es normal, la probabilidad de que al día siguiente siga siendo normal es de $1 - f(y)$ y $f(y)$ es la probabilidad de que sea preemergente. Si el estado era preemergente, la probabilidad de que al día siguiente sea normal es de $1 - f(y)$ y de que sea emergente, de $f(y)$. La función $f(y)$ es estrictamente creciente, con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

En función del estado de alerta, el ayuntamiento toma las medidas siguientes:

- En un día de preemergencia, prohíbe circular $(1 - \alpha)x$ vehículos.
- En un día de emergencia, prohíbe circular $(1 - \beta)x$ con $\beta < \alpha$ vehículos.

Supongamos, pues, que cada día circula solo la cantidad de vehículos permitido.

13.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción al cambio climático.

Paso 1

- Dibujar el diagrama de estados.
- Modelar matricialmente la evolución de la alerta.



Paso 2

Supongamos que estamos en nuestra ciudad y disponemos de vehículo:

- Por término medio, ¿cuántos días al año podremos usarlo?

Paso 3

Por cada vehículo que deja de funcionar la producción disminuye en z euros. Por cada día que la ciudad está en estado preemergente o emergente, una persona empeora su salud.

- ¿Qué valores de α y β se deben tomar para minimizar los daños?

Paso 4

- Valoración del ejercicio con relación al objetivo 13 de desarrollo sostenible.

13.3. Proyecto 2

En 1979, se celebró en Ginebra la I Conferencia Mundial sobre el Clima. Por primera vez se consideró que el cambio climático era una amenaza real para el planeta. La conferencia adoptó una declaración que incitaba a los gobiernos a prever y evitar posibles cambios en el clima provocados por el hombre. El cambio climático es un cambio en la distribución estadística de las pautas meteorológicas durante un período prolongado de tiempo. Las causas del cambio climático son muy complejas y ello explica que haya una gran diversidad de opiniones al respecto y sea difícil hallar puntos comunes para tratar de revertir este proceso, cuyas consecuencias pueden ser devastadoras para el planeta ([5]).

Para buscar estos puntos en común, es conveniente disponer de simulaciones matemáticas que permitan, a partir de datos meteorológicos recogidos a lo largo de un período de tiempo, simular su evolución y poder predecir los datos para dentro de un cierto tiempo.

En este proyecto, se pretende ver que, a partir de unos datos tomados previamente, se puede simular la temperatura de la Tierra utilizando sistemas lineales ([1]).

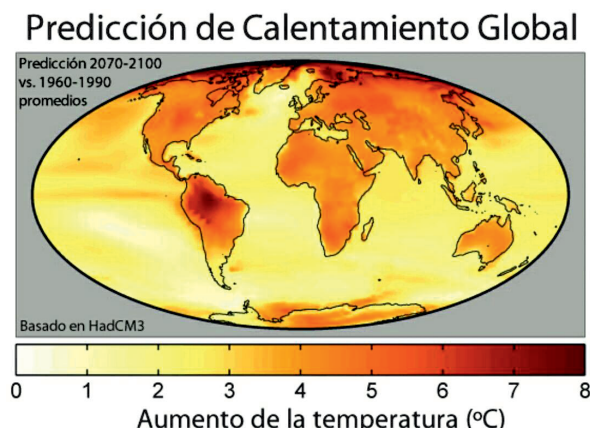


Fig. 13.3
Mapa del calentamiento global proyectado con el modelo climático HadCM3.
Fuente: cambioclimaticoglobal.co



13.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la problemática del calentamiento global.

Paso 1

Se supone un sistema dinámico lineal discreto de la forma:

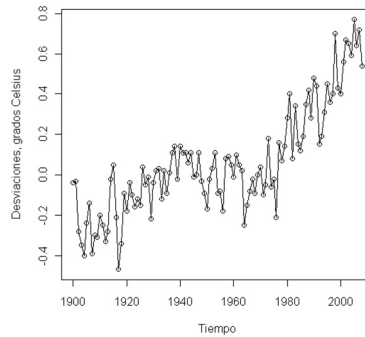
$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(k) \\ b_2(k) \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + d(k)$$

con una condición inicial dada por una distribución de probabilidad a priori normal para el vector de estados de dimensión 2, en $k = 0$.

A partir de las desviaciones de las temperaturas dadas en tablas de anomalías medias globales anuales (DTs), procedentes de las estaciones meteorológicas, recogidos desde 1900 por la NASA (<http://data.giss.nasa.gov/gistemp>), se pueden calcular las estimaciones de máxima verosimilitud de las varianzas de las perturbaciones y se obtiene:

Fig. 13.4
Gráfica de temperaturas.
Fuente [1].



$$d = 001146983$$

$$b_1 = 0,001078437$$

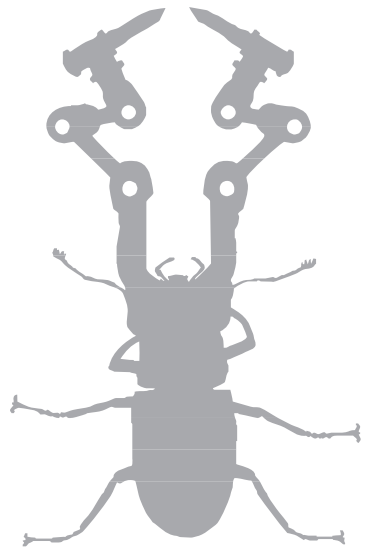
$$b_2 = 0,000002273492$$

Supongamos que el estado inicial es $(0,66242538, 0,01507321)$.

- Determinar los estados $x(1), x(2), x(10)$.
- ¿Cuál es la predicción de desviación de temperaturas para dentro de diez años?

Paso 2

- Valorar el resultado teniendo en cuenta el contexto de los ODS.



→ 14



Objetivo 14: Vida submarina

Conservar y utilizar en forma sostenible los océanos, los mares y los recursos marinos para el desarrollo sostenible

14.1. Introducción

Los océanos del mundo, su temperatura, química, corrientes y vida mueven sistemas mundiales que hacen que la Tierra sea habitable para la humanidad.

El calentamiento del mar y el aumento de la acidez del agua marina han provocado el estancamiento del crecimiento de los arrecifes de coral, lo cual pone en peligro las especies que viven en este ecosistema.

Considerando el rol que los arrecifes de coral juegan en los ecosistemas marinos, es imprescindible dedicar esfuerzos para monitorizar y preservar su salud.

Asimismo los corales pueden utilizarse como geoindicadores de cambios ambientales en los océanos y zonas próximas a las costas. La capacidad casi perfecta de datación de las colonias de corales, junto con sus abundantes trazadores geoquímicos y su resolución temporal subanual, los han convertido en uno de los más ricos registros y archivos ambientales naturales ([31]).



Fig. 14.1
Acropora.
Fuente: Google.



Una de las metas del objetivo 14 para 2020 es reglamentar eficazmente la explotación pesquera y poner fin a la pesca excesiva, a la pesca ilegal no declarada y no reglamentada y a las prácticas pesqueras destructivas, y aplicar planes de gestión con fundamento científico a fin de restablecer las poblaciones de peces en el plazo más breve posible, para alcanzar al menos unos niveles que les permitan obtener el máximo rendimiento sostenible, de acuerdo con sus características biológicas.²¹

14.2. Proyecto 1

Una colonia de coral de 30 cm de diámetro, que crece a una tasa media de 1 cm/año, suministra de 20 a 25 años de información de línea de base, mientras que colonias masivas de 3 a 6 metros de altura pueden proporcionar datos históricos sobre amplias extensiones de océano, que no se podrían obtener de otra manera.

En este proyecto se trata de analizar, mediante un modelo matemático, el crecimiento de una colonia de corales.

Para ello, clasificamos los corales por tamaños y consideramos tres clases: pequeños, medianos y grandes.

14.2.1. Pasos que dar

Paso 0

– Breve introducción a la afectación del cambio climático sobre la vida submarina.

Paso 1

Designamos:

- i) p_{pp} , p_{mm} , p_{gg} , las probabilidades de que una colonia de tamaño pequeño p , mediano m y grande g permanezca en la misma clase de tamaño.
 - ii) p_{pm} , p_{mg} , las probabilidades de que una colonia crezca y pase al tamaño siguiente.
 - iii) p_{gm} , p_{gp} , p_{mp} la posibilidad de que parte de la colonia pueda fragmentarse y pasar de grande mediana, de grande a pequeña o bien de mediana a pequeña.
 - iv) f_{pp} , f_{mp} , f_{gp} indican la fecundidad de cada clase de colonia.
- Escribir la matriz de transición para un modelo que describa el crecimiento de una colonia de corales.

Paso 2

Supongamos que se han tomado datos de una hipotética colonia de coral y se ha obtenido que $p_{pp} = 0,75$, $p_{mp} = 0,25$, $p_{gp} = 0,15$, $p_{pm} = 0,15$, $p_{mm} = 0,85$, $p_{gm} = 0,25$, $p_{mg} = 0,20$,

²¹ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/oceans/>



$p_{gg} = 0,70$, $f_{pp} = 2$, $f_{mp} = 3$ y $f_{gp} = 3$, donde las medidas están tomadas en unidades de mil.

- Escribir la matriz de transición para este caso particular.
- Buscar los valores y los vectores propios del sistema.

Paso 3

- Probar que la población tiene un tipo de crecimiento exponencial.
- ¿Existe una distribución estable de etapas?

Paso 4

- Valorar el resultado teniendo en cuenta el contexto de los ODS.

14.3. Proyecto 2

Es importante debatir con investigadores y administradores de recursos marinos y con el organismo marítimo apropiado, para coordinar de las políticas marítimas acerca de las metodologías cuantitativas, enfocadas en situaciones de escasez de datos, para evaluar el impacto de la pesca sobre ciertas poblaciones de peces y los riesgos poblacionales resultantes, a fin de identificar de manera rápida y oportuna las especies más susceptibles a explotación y que deberían ser objeto de atención. Es preciso disponer de metodologías demográficas útiles para evaluar los riesgos poblacionales de ciertas especies de las cuales se dispone de pocos datos.



Fig. 14.2
Atún de aleta amarilla.
Fotografía: Wikipedia.

Una metodología que ha cobrado un cierto interés desde finales del siglo pasado para el estudio de la dinámica poblacional de especies con escasez de datos es el análisis demográfico, en particular las tablas de vida y los modelos matriciales estructurados por edad. Con este estudio, se pretende averiguar la probabilidad de que el tamaño de la población disminuya por debajo de un nivel previamente fijado (punto de referencia



biológico), que puede ser la biomasa total, la biomasa reproductora, el número total de animales, el número de reclutas, el número de nacimientos o alguna otra cantidad que refleje información sobre la abundancia de la población antes de la pesca. Si el análisis da como resultado que después de la pesca el indicador cae por debajo del punto de referencia dentro de un período de tiempo especificado, se deberán tomar medidas para que la explotación sea sostenible.

Se trata de analizar el caso de la pesca de atún de aleta amarilla en el Pacífico oriental ([32]).

14.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Breve introducción al impacto de la pesca sobre la vida submarina.

Paso 1

El modelo que utilizar es un modelo densodependiente desarrollado por Jensen [18], basado en la forma discreta de la ecuación logística utilizando la matriz de Leslie. Este modelo ha sido aplicado a poblaciones estructuradas por edad para determinar niveles de explotación óptimos, es decir, de máximo rendimiento sostenible y esfuerzo óptimo.

El modelo tiene la estructura siguiente:

$$N(k+1) = N(k) + D(N)(LI)N(k), \text{ con } D(N) = (KN)/K$$

donde $N(k)$ y $N(k+1)$ son los vectores de la estructura de edad en el tiempo k ; $D(N)$ es una función densodependiente, K es la capacidad de carga ambiental y N es la suma de elementos de $N(k)$, I es la matriz identidad y L es la matriz de Leslie, que contiene los parámetros siguientes:

- F_x (número de hijas por hembra adulta de cada clase de edad x),
- P_x (probabilidad de sobrevivir y pasar a la siguiente clase de edad relacionada con la mortalidad natural y por pesca), y
- S_x (probabilidad de sobrevivir y permanecer en la misma clase de edad).

En función de la cantidad de organismos, se estructura la población de atunes en seis grupos de edades $0, I, II, III, IV$ y V , definidas teniendo en cuenta las relaciones longitud-peso y longitud-edad.

- Escribir la matriz de Leslie.

Paso 2

Se considera que la estructura de edad inicial utilizada fue (en miles de organismos): 59,866 de edad 0 , 19,247 de edad I , 5,016 de edad II , 537 de edad III , 27 de edad IV y



15 de edad V . El peso medio de cada clase de edad es 14,2, 9,82, 31,75, 64,18, 97,55 y 124,97 kg, dando un total de 472.037,3 t de biomasa total.

El valor de la capacidad de carga ambiental K asignado para la población de atún de aleta amarilla, considerando una distribución uniforme, es un valor aleatorio del intervalo de variación de $540,000 \pm 150,000$ t.

La probabilidad de supervivencia basada en la mortalidad natural y por pesca es $P_x = 0,8$. La probabilidad de sobrevivir y permanecer en la misma clase de edad se considera solamente para la última clase de edad. Es decir, se supone que la clase de edad V contiene a los organismos de edad V y posteriores: $S_x = 0,3$. En lugar del número de hijas, se contabiliza el reclutamiento, por lo cual no es necesario considerar que la matriz de Leslie usualmente sólo funciona para la porción femenina de la población. El reclutamiento total es de 120 t, repartidos de forma homogénea en las edades fértiles.

- Estudiar la evolución de $N(k)$.

Paso 3

- Valorar el resultado teniendo en cuenta el contexto.

→ 15



Objetivo 15: Vida en los ecosistemas terrestres

Gestionar de forma sostenible los bosques, luchar contra la desertificación, detener e invertir la degradación de las tierras y frenar la pérdida de biodiversidad

15.1. Introducción

El 30 % de la superficie terrestre está cubierta por bosques y estos, además de proporcionar seguridad alimentaria y refugio, son fundamentales para combatir el cambio climático, pues protegen la diversidad biológica y las viviendas de la población indígena. Cada año desaparecen 13 millones de hectáreas de bosques y la degradación persistente de las zonas áridas ha provocado la desertificación de 3.600 millones de hectáreas.²²

De las 8.300 razas de animales que se conocen, el 8 % están compuestas por especies extinguidas y el 22 %, por especies en peligro de extinción.

Las aves migratorias se enfrentan a numerosas amenazas en su trayecto de larga distancia. El Programa de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente (PNUMA) destacó, con motivo del Día Mundial dedicado a estas aves, que algunas especies se están reduciendo a un ritmo sin precedentes debido a la pérdida de su hábitat.²³

²² <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/biodiversity/>

²³ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/2017/05/la-poblacion-de-aves-migratorias-esta-descendiendo-drasticamente/>



Fig. 15.1
Aves migratorias
amenazadas.
Fotografía: Mark
Andersor.



15.2. Proyecto 1

Para desarrollar sistemas automáticos de detección de aves en los aerogeneradores de los parques eólicos con el fin de evitar que colisionen con sus aspas, es necesario conocer el comportamiento poblacional de las aves.

En este proyecto, se trata de diseñar un modelo matemático con el cual se puedan hacer estimaciones del comportamiento poblacional de los tipos de aves, en particular del buitre común. Este modelo también puede servir para realizar estudios de impacto ambiental sobre la ubicación más idónea de los parques eólicos.

Fig. 15.2
Buitres. La crónica verde.
Fotografía: C. Palacio.



15.2.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la temática sobre la gestión sostenible de los ecosistemas terrestres.

Paso 1

Describir la dinámica de la población objeto de estudio, estructurada por edades sobre la base de las tres hipótesis siguientes:



- La edad x es una variable continua a partir de 0, subdividida en clases de edad discretas, de 0 a s : la clase de edad, por tanto, corresponde al conjunto de individuos cuya edad satisface $i - 1 < x < i$ para $i = 1, 2, \dots, s$.
- El tiempo es una variable discreta. Denotamos por t el paso de tiempo.
- El paso de tiempo es exactamente igual a la duración de cada clase de edad, lo cual significa que, en el paso de t a $t + 1$, todos los individuos van de la clase i a la clase $i + 1$.

El ciclo de vida se puede esquematizar mediante la representación de cada clase de edad por un nodo y la transferencia de individuos de una clase a otra, por una flecha. Entonces, obtenemos un grafo como el de la figura 15.3, que contiene s (por ejemplo 3) clases de edad.

Las clases de edad 1, 2 y 3 se reproducen proporcionando individuos de la clase 1; El paso de los años hace que los individuos avancen una clase, y la clase 3 es la edad máxima de los individuos.

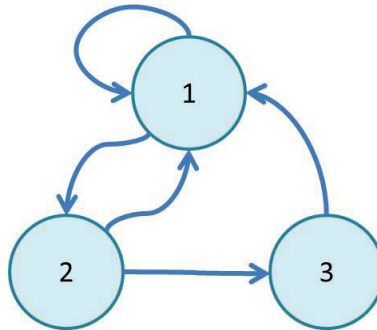


Fig. 15.3
Ciclo de la vida.
Fuente propia.

Con carácter general, y para simplificar, podemos suponer que la población está integrada enteramente por hembras. (En realidad, para la mayoría de las especies, la cantidad de machos es prácticamente la misma que la de hembras.)

Teniendo en cuenta la probabilidad de que un individuo sobreviva de la clase i a la clase $i + 1$, y el número de hijos que sobreviven de cada clase aportando individuos de la clase 1:

- Escribe la variación de población estructurada por edades, en términos de un sistema del tipo $n(t + 1) = An(t)$, donde $n(t) = (n_1(t), \dots, n_s(t))^t$ y $n_i(t)$ es el número de individuos de clase i en el tiempo t .

Paso 2

- Obtén el término general de la sucesión vectorial definida por recurrencia, obtenida en el paso 1.

Justifica cada uno de los pasos realizados.



Paso 3

Consideremos el caso particular de la población de buitre negro que habita en el Prepirineo: la media de edad es de 30 años y, teniendo en cuenta que empiezan a ser fértiles a partir de los 5 años, supondremos $s = 6$.

El promedio de hijas que tiene una hembra durante el tiempo que permanece en la clase de orden i es a_i , con $i = 1, 2, \dots, s$. La fracción de hembras que están en la clase i que se espera que sobrevivan y pasen a la clase de orden $i + 1$ es b_i , con $i = 1, 2, \dots, s - 1$.

La distribución de los buitres (hembras) en el tiempo $t = 3$ es $(n_1(3), n_2(3), n_3(3), n_4(3), n_5(3), n_6(3))$.

– ¿Cuántos había el año en que se inició el estudio?

Datos para la resolución numérica del caso de estudio:

- i) $(n_1(3), n_2(3), n_3(3), n_4(3), n_5(3), n_6(3)) = (84, 34, 49, 1, 4, 4)$
- ii) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 2, a_6 = 1$
- iii) $b_1 = 0,9, b_2 = 0,8, b_3 = 0,8, b_4 = 0,6, b_5 = 0,6$

Paso 4

– Obtén los valores propios y utilízalos para calcular el número de buitres en el tiempo $t = 10$.

Paso 5

- Estudio y análisis de la estabilidad.
- ¿Se mantendrá la población de buitres negros en el Prepirineo a lo largo del tiempo?

Paso 6

– Valora el resultado teniendo en cuenta el contexto.

15.3. Proyecto 2

Se conoce como modelo de Volterra-Lotka un modelo matemático que describe la lucha constante por la supervivencia entre dos especies que viven en un mismo hábitat, siendo una de ellas el alimento de la otra. Se sabe que la especie depredadora se extinguiría si no dispusiera de la presa y que las presas crecerían sin la presencia de los depredadores.

Se pretende estudiar el caso en que la comunidad está formada por unos depredadores que son los búhos y unas presas que son las ratas de bosque. Se denota la población de búhos y ratas de bosque en el tiempo k por $X(k) = (O(k), R(k))$, donde k es el tiempo en meses, $O(k)$ es el número de búhos en la región estudiada y $R(k)$ es el de ratas (medidas en miles).



Fig. 15.4
Búho alimentándose.
Fotografía: Buhopedia.

Si no hay ratas en el bosque, solo sobrevivirán la mitad de los búhos cada mes, mientras que sin búhos como depredadores, la población de ratas aumentará en un 10% cada mes. En condiciones normales, cuando hay representantes de las dos especies, la depredación de los búhos hace aumentar cada mes su población en un 40% de la cantidad de ratas, y hace disminuir la población de ratas en un 10,4% del número de búhos.

15.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción al tema teniendo en cuenta los ODS.

Paso 1

- Modelizar la dinámica de la población como sistema lineal discreto homogéneo.

Paso 2

- Determinar los valores propios de la matriz A hallada en el paso 1, así como el vector propio correspondiente al valor propio de mayor módulo.

Paso 3

- Determinar la evolución de la población a lo largo del tiempo si inicialmente hay 500 ratas y 20 búhos.

Paso 4

- Valorar el resultado teniendo en cuenta el objetivo de desarrollo sostenible.

→ 16



Objetivo 16: Paz, justicia e instituciones sólidas

Promover sociedades justas, pacíficas e inclusivas

16.1. Introducción

El objetivo 16 de los ODS propuestos se centra en la promoción de sociedades pacíficas e inclusivas para el desarrollo sostenible, la provisión de acceso a la justicia para todos y la construcción de instituciones responsables y eficaces a todos los niveles.

Una de las metas de este objetivo es garantizar el acceso público a la información y proteger las libertades fundamentales, de conformidad con las leyes nacionales y los acuerdos internacionales.

Para alentar el “dominio público de la información” como “bien público común”, las autoridades deben adoptar políticas y directrices que faciliten el desarrollo de un dominio público potente, para hacer frente a las disparidades existentes y facilitar el acceso a las redes mundiales de información.

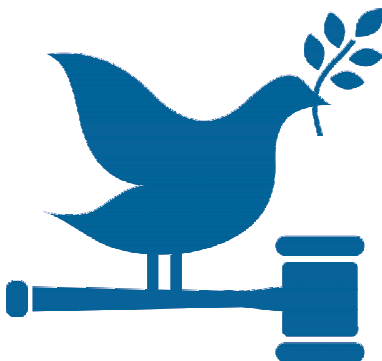


Fig. 16.1
Paz y justicia.
Fotografía: Archivo de la
ONU.



Una de las metas del objetivo 16 de desarrollo sostenible es reducir significativamente todas las formas de violencia y sus tasas de mortalidad en todo el mundo.²⁴

El álgebra lineal permite elaborar modelos que puede estimarse econométricamente con el objetivo de elaborar instrumentos que sirvan como un procedimiento de alerta temprana a la violencia.

16.2. Proyecto 1

Diseñar un buscador de información en la red es un problema de ingeniería matemática. El primer paso es traducir el problema a un modelo matemático y, a continuación, analizar el modelo e implementarlo. Con este proyecto, se pretende estudiar y analizar la metodología utilizada para el funcionamiento del buscador de Google.

Utilizando el álgebra lineal, Google organiza las páginas web, y las relaciona entre ellas recopilando información de cada una de ellas: las veces que el elemento buscado aparece en la página, la distancia en que aparece el mismo elemento repetido, si este aparece en el título o simplemente aparece citado en el texto alguna vez, etc. Con esta información, es posible crear una “matriz” $M = (m_{ij})$.

Definimos m_{ij} como un indicador de si la página j contiene un enlace que lleva a la página i , es decir, si se puede ir de j a i . El valor de este indicador m_{ij} será 1 si es posible ir de j a i , y será 0 en caso contrario.

16.2.1. Pasos que dar

Paso 0

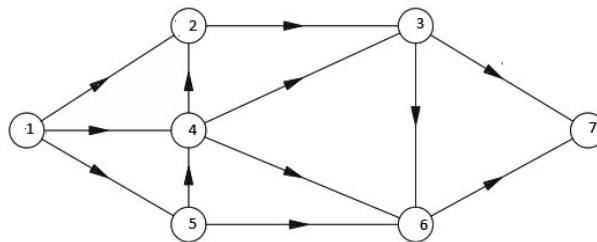
- Introducción a la temática de la información teniendo en cuenta el objetivo 16 de desarrollo sostenible.

Paso 1

Consideremos que tenemos 7 páginas web P_i , $i = 1, \dots, 7$, cuyos indicadores vienen representados con el grafo 16.2:

- Escribe la matriz M para este caso.

Fig. 16.2
Grafo dirigido.
Fuente: I. Morán [23].



²⁴ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/peace-justice/>



Paso 2

Se quiere determinar la importancia de cada una de las páginas teniendo en cuenta cuántas páginas enlazan con ella y qué importancia tienen.

Definimos la importancia x_i de la página P_i de tal manera que es proporcional a la suma de las importancias de las páginas que enlazan con ella.

- Designando K la constante de proporcionalidad, escribe el sistema de ecuaciones lineal que define la importancia de todas las páginas.
- Comprueba que el vector formado por las importancias es un vector propio de la matriz M .

Paso 3

El modelo planteado no es determinista, ya que si en un momento determinado un buscador está visitando una página no se puede afirmar qué página estará visitando un instante después, aunque sí con qué probabilidad estará en cada una de las páginas relacionadas. Es decir, es un modelo probabilístico.

Además, el modelo es dinámico, ya que a la página siguiente que visita el buscador le podemos aplicar el mismo razonamiento, y así sucesivamente.

- Construye a partir de M una nueva matriz M' , de manera que tenga en cuenta estas probabilidades.
- Determina la probabilidad de pasar de la página P_j a otra P_i tras 5 instantes de tiempo.

Paso 4

A pesar de que la mayoría de páginas web son accesibles, hay un pequeño porcentaje que no son accesibles desde este gran conjunto y que tampoco llevan a ninguna otra (páginas sin salida). Una forma de tener en consideración estas páginas es añadir una pequeña probabilidad $(1 - c)\frac{1}{n}$, de manera que la matriz del nuevo sistema será:

$$M'' = cM' + (1 - c) \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} (1 \quad \dots \quad 1).$$

Considérese el sistema dinámico $X(n+1) = M''X(n)$, con $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ y $c = 0,85$ (el orden considerado por Google).

- Obtén la solución estable del sistema.

Paso 5

- Valora el resultado en relación con los ODS.



16.3. Proyecto 2

Un tipo de violencia, desgraciadamente muy común, es la doméstica, que es la violencia ejercida dentro del núcleo familiar, sobre las personas que conviven bajo un mismo techo. Ello obliga a poner en marcha planes encaminados a ayudar a gestionar de forma sana los conflictos en general, y los familiares en particular para lograr reducir la violencia.

Fig. 16.3
Violencia doméstica.
Fuente: Radio Claret
América.



No todos los países disponen de sistemas de alerta previa para prevenir los actos de violencia doméstica y de género. Aristy Escuder en [2] presenta un modelo de transición basada en la teoría de “cadenas de Markov” para determinar la evolución de la probabilidad de distintos tipos de agresión en contra de la víctima. Este estudio es de interés porque pone de manifiesto que, por lo general, las víctimas de un episodio de violencia doméstica que deciden abandonar sus hogares retornan después de un plazo de tiempo relativamente corto, lo cual incrementa la probabilidad de que sean atacadas nuevamente con mayor dureza.

En este proyecto, se analiza este modelo utilizando datos simulados. Para ello empezamos clasificando a los agresores en cuatro estados, según el tipo de agresión denunciada:

- I Agresión psicológica
- II Agresión sexual
- III Agresión física
- IV Homicidio

16.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la problemática de la violencia doméstica.

Paso 1

Supongamos que una persona que abusa psicológicamente de un familiar tiene un 83 % de probabilidades de continuar haciéndolo durante el plazo que transcurre hasta la próxima denuncia. Esa misma persona tiene un 9 % de probabilidades de que en la próxima



denuncia sea acusada de haber abusado sexualmente a su pareja y un 7% de haberla maltratado físicamente. La probabilidad de que esa persona asesine a su pareja es de un 1%.

Para el caso de una persona que abusa sexualmente de un familiar, se observa que la probabilidad de que el próximo caso de denuncia sea un abuso físico es del 14%, que la agrede psicológicamente es del 4% y sexualmente del 3% y que la asesine del 2%.

Por su parte, una persona que agrede físicamente a un familiar es probable que su siguiente agresión sea psicológica en un 1% de los casos, que sea sexual en un 3%, que vuelva a ser física en un 93% y que la asesine un 3%.

- Escribe la matriz de transición de estados.

Paso 2

- ¿Qué probabilidad hay de que una persona que ha agredido psicológicamente a un familiar acabe asesinándolo a la tercera denuncia?

Paso 3

- Calcula los valores propios de la matriz.
- Determina, en caso de que exista, el vector estacionario.

Paso 4

- Valora el resultado teniendo en cuenta el contexto.

→ 17



Objetivo 17: Alianzas para lograr los objetivos

Revitalizar la Alianza Mundial para el Desarrollo Sostenible

17.1. Introducción

Para que una agenda de desarrollo sostenible sea eficaz, se necesitan alianzas entre los gobiernos, el sector privado y la sociedad civil. Estas alianzas inclusivas se construyen sobre la base de principios y valores, una visión compartida y unos objetivos comunes, que otorgan prioridad a las personas y al planeta, y son necesarias a nivel mundial, regional, nacional y local.

Una de las metas del objetivo 17 es ayudar a los países en vías de desarrollo a lograr la sostenibilidad de la deuda a largo plazo con políticas coordinadas, orientadas a fomentar, financiar, mitigar y reestructurar la deuda, según proceda, y a hacer frente a la deuda externa de los países pobres muy endeudados a fin de reducir el endeudamiento excesivo.²⁵



Fig. 17.1
Objetivo 17.
Fuente: Archivo de la
ONU.

En la Cumbre de la Tierra celebrada en Río de Janeiro en 1992, se aprobó el Programa 21, un plan mundial para el desarrollo sostenible; su capítulo 34 trata de la “Transferencia de tecnología ecológicamente racional, la cooperación y el aumento de la capacidad”.

²⁵ <http://www.un.org/sustainabledevelopment/es/globalpartnerships/>



Este objetivo es una de las metas del objetivo 17 de desarrollo sostenible para 2030; textualmente, la meta 17.7 dice: “Promover el desarrollo de tecnologías ecológicamente racionales y su transferencia, divulgación y difusión a los países en vías de desarrollo en condiciones favorables, incluso en condiciones concesionarias y preferenciales, según lo convenido de mutuo acuerdo”. Una aportación a este objetivo es cooperar en la instalación de redes eléctricas eficientes energéticamente.

17.2. Proyecto 1

La trayectoria de la deuda pública influye drásticamente en las decisiones de un gobierno en materia de ingresos y gastos. Una política fiscal sostenible es aquella que genera una secuencia de deuda y déficit tal que la condición de valor presente de la restricción presupuestaria se cumple. En caso de no cumplirse, es imposible de sostener un déficit creciente, lo que lleva a tener que hacer cambios en la política fiscal.

Otro concepto importante es el de *solvencia*, que mide la capacidad que tiene un gobierno de generar, en el futuro, suficientes superávits primarios que igualen, en términos de valor presente, el saldo de la deuda pública ([16]).

El análisis de sostenibilidad y solvencia fiscal se calcula a partir de la restricción gubernamental del presupuesto. En una economía cerrada, la forma más simple de cálculo de la restricción viene dada por la fórmula ([16]):

$$B(k+1) = R(k)B(k) + D(k)$$

donde $B(k)$ es el stock de deuda viva al final del período k , $R(k)$ indica la tasa de interés bruto entre el período k y $k+1$, y $D(k)$ el déficit primario (flujo de gastos menos ingresos).

Fig. 17.2
Solvencia.
Fuente: Mutua de
Propietarios.



17.2.1. Pasos que dar

Paso 0

Introducción a la temática.



Paso 1

- Determinación de la restricción en un horizonte a largo plazo.

Paso 2

- Deducción de la condición que ha de verificar $B(t)$ para que el estado sea solvente.

Paso 3

- Valoración del resultado teniendo en cuenta el contexto.

17.3. Proyecto 2

Pese a que numerosos proyectos de cooperación internacional han contribuido a la mejorar las redes eléctricas, en la actualidad se está muy lejos de conseguir que la electricidad llegue a todos los hogares. Así pues, hay que seguir impulsando este tipo de proyectos.

El álgebra lineal permite calcular, mediante sistemas de ecuaciones lineales, intensidades de corrientes en los ramales de las redes eléctricas y las diferencias de voltajes entre nodos, conociendo ciertos datos, tales como las fuerzas electromotrices y las resistencias.

En este proyecto, se trata de calcular las intensidades de una red eléctrica sencilla como la de la figura 17.3.

17.3.1. Pasos que dar

Paso 0

- Introducción a la problemática de la energía eficiente.

Paso 1

- Aplica la ley de corrientes de Kirchhoff a los nodos 1, 2, 3, 4 de la red eléctrica de la figura 17.3.
- Aplica la ley de tensiones de Kirchhoff y la ley de Ohm a las trayectorias 1, 2, 3 de la red eléctrica de la figura 17.3.

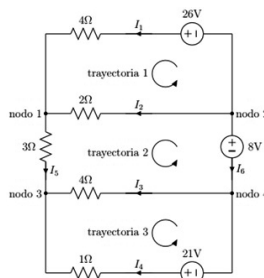


Fig. 17.3
Red eléctrica sencilla.
Fuente:
esfm.egormaximenko.co

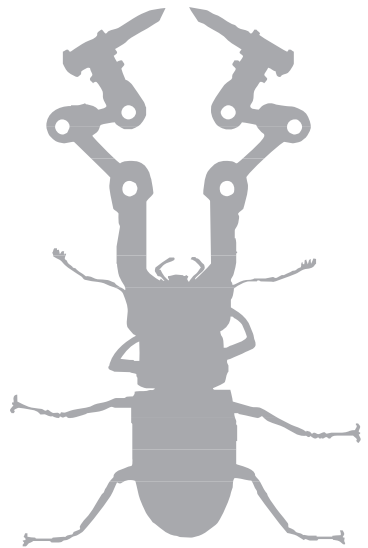


Paso 2

- Determina las intensidades I_1, \dots, I_6 de la red eléctrica mostrada en la figura 17.3.

Paso 3

- Valora los resultados teniendo en cuenta los ODS.







Solución al proyecto 1 del objetivo 6

En este anexo, mostramos la cronología del plan de trabajo y la solución para el proyecto 1 del objetivo 6.

Este proyecto está pensado para que sea planteado en la primera semana de curso y se vaya realizando a lo largo de todo el curso, a medida que se vaya introduciendo en clase la base teórica para realizarlo.

El método de evaluación mediante rúbricas ([7]) de autoevaluación, evaluación por pares y evaluación por parte del profesor es el más adecuado para este tipo de enseñanza-aprendizaje. Las rúbricas han de estar disponibles para los alumnos al inicio del proyecto para que sepan de qué y cómo serán evaluados.

Una buena forma de presentar el proyecto es mediante el uso de e-portafolios ([8]), que los estudiantes van elaborando para ir avanzando en el trabajo y hacerlo visible (al menos) para el profesor y los compañeros de clase, pues facilitan la evaluación del profesor y el *feedback* correspondiente, así como la evaluación por pares.



Plan de trabajo

Trabajo que realizar	Fecha límite de realización	Observaciones
Paso 0	Segunda semana	Evaluación por pares
Paso 1	Cuarta semana	Autoevaluación
Paso 2	Séptima semana	Autoevaluación Evaluación por pares Evaluación
Paso 3	Novena semana	Evaluación por pares
Paso 4	Undécima semana	Autoevaluación Evaluación por pares Evaluación
Paso 5	Décimocuarta semana	Autoevaluación Autoevaluación Evaluación

Solución

Paso 0

Aquí cada alumno puede expresar, justificándolo, cuál es para él el verdadero problema del agua. Se ha de valorar la coherencia.

Paso 1

Se debe hallar la matriz $A = (p_{ij})$ que defina el sistema.

Designemos k la semana que estamos valorando, $p_i(k)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ las unidades de agua en la semana k y p_{ij} la probabilidad de que, si en la semana k hay j unidades de agua, en la siguiente haya i .

Se ha de calcular, pues, p_{ij} : (mostramos solo algunos casos, el procedimiento es el mismo para todos).

► Cálculo de p_{11} :

Si hay una unidad y entran dos (0,2%) unidades, si salieran tres se quedaría vacío de modo que solo salen 2 y se queda una.

Si entran tres unidades (0,4%) $1 + 3 = 4$ salen tres y, por tanto, queda $4 - 3 = 1$.

Si entran más unidades, en total quedaría más de una unidad.

Luego $p_{11} = 0,2 + 0,4 = 0,6$.



► Cálculo de p_{12} :

Si hay 2 y entran 2 (0,2%), salen 3 $4 - 3 = 1$ y queda 1.

Si hay 2 y entran 3 (0,2%), salen 3 $5 - 3 = 2$ y quedan $2 > 1$.

Si hay 2 y entran > 3 , quedan > 1 .

Luego $p_{12} = 0,2$.

► Cálculo de p_{42} :

Si hay 2 y entran ≤ 4 , salen 3 y quedan $x \leq 6 - 3 = 3 < 4$.

Si hay 2 unidades y entran 5 (0,1%) tenemos $2 + 5 = 7$, pero salen 3, o sea, que quedan $7 - 3 = 4$.

Si hay 2 unidades y entran 6 y salen 3, quedan $8 - 3 = 5 > 4$.

Luego $p_{42} = 0,1$.

► Cálculo de p_{43} :

Si hay 3 unidades y entran 6, $6 + 3 = 9$; si salen 3 quedan $9 - 3 = 6 > 5$ por lo cual salen 4 y quedan $9 - 4 = 5$.

Si hay tres unidades y entran 5 (0,1%), tenemos $3 + 5 = 8$, pero salen 3, o sea, quedan $8 - 3 = 5 > 4$.

Por otra parte, si hay 3 y entran 4 (0,2%), tenemos $3 + 4 = 7$ pero salen 3, o sea quedan $7 - 3 = 4$.

Si hay 3 y entran menos de 4 unidades, al salir 3, las unidades que quedan son menos que 4.

Luego $p_{43} = 0,2$.

► Cálculo de p_{44} :

Si hay 4 unidades y entran 6 (0,1%), tenemos $4 + 6 = 10$, salen 3, $10 - 3 = 7 > 5$, luego salen 2 y quedan 5.

Si hay 4 unidades y entran 5 (0,1%), tenemos $4 + 5 = 9$, salen 3, $9 - 3 = 6 > 5$ luego salen 2 y quedan 5.

Si hay 4 y entran 4 (0,2%), tenemos $4 + 4 = 8$, salen 3, $8 - 3 = 5 > 4$.

Si hay 4 y entran 3 unidades (0,4%), tenemos $4 + 3 = 7$ y salen 3, $7 - 3 = 4$.



Si entran menos de 3 unidades, al salir 3 quedan menos de 4.

Luego $p_{44} = 0,4$.

► Cálculo de p_{54} :

Si hay 4 y entran 2, tenemos $4 + 2 = 6$, salen 3, quedan $6 - 3 = 3 < 5$.

Si hay 4 y entran 3, tenemos $4 + 3 = 7$, salen 3, quedan $4 < 5$.

Si hay 4 y entran 4 (0,2%), tenemos $4 + 4 = 8$, salen 3, quedan $8 - 3 = 5$.

Si hay 4 y entran 5 (0,1%), tenemos $4 + 5 = 9$, si salen 3, quedan $9 - 3 = 6 > 5$, luego salen 4 y quedan 5.

Si hay 4 y entran 6 (0,1%), tenemos $4 + 6 = 10$, si salen 3, quedan $10 - 3 = 7 > 5$, luego salen 5 y quedan 5.

Luego $p_{51} = 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4$.

► Cálculo de p_{55} :

Si hay 5 y entran 2, tenemos $5 + 2 = 7$, salen 3, quedan $7 - 3 = 4 < 5$.

Si hay 5 y entran 3 (0,4%), tenemos $5 + 3 = 8$, salen 3: quedan 5.

Si hay 5 y entran 4 (0,2%), tenemos $5 + 4 = 9$, si salen 3 quedan $9 - 3 = 6 > 5$, luego salen 4 y quedan 5.

Si hay 5 y entran 5 (0,1%), tenemos $5 + 5 = 10$, si salen 3 quedan $10 - 3 = 7 > 5$, luego salen 5 y quedan 5.

Si hay 5 y entran 6 (0,1%), tenemos $5 + 6 = 11$, si salen 3 quedan $11 - 3 = 8 > 5$, luego salen 6 y quedan 5.

Luego $p_{55} = 0,4 + 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,8$.

Se obtiene:

$$\begin{pmatrix} p_1(k+1) \\ p_2(k+1) \\ p_3(k+1) \\ p_4(k+1) \\ p_5(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(k) \\ p_2(k) \\ p_3(k) \\ p_4(k) \\ p_5(k) \end{pmatrix}$$



Paso 2

a) De $p(k+1) = Ap(k)$, tenemos:

$$\begin{aligned} p(1) &= Ap(0) \\ p(2) &= Ap(1) = A(Ap(0)) = A^2p(0) \\ p(3) &= Ap(2) = A(A^2p(0)) = A^3p(0) \end{aligned}$$

Inductivamente, se tiene $p(k) = A^k p(0)$.

En efecto, comprobemos la inducción:

- Se cumple para $k = 1$.
- Supongamos que se cumple para k : $p(k) = A^k p(0)$.

Comprobemos, para $k + 1$:

$$p(k+1) = Ap(k) = A(A^k p(0)) = A^{k+1} p(0).$$

b) Partiendo de:

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta la condición inicial:

$$p(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tenemos:

$$(A^2)p(0) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0,22 & 0,24 & 0,16 & 0,04 & 0 \\ 0,16 & 0,2 & 0,24 & 0,16 & 0,04 \\ 0,14 & 0,16 & 0,22 & 0,28 & 0,24 \\ 0,08 & 0,2 & 0,34 & 0,52 & 0,72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,16 \\ 0,24 \\ 0,22 \\ 0,34 \end{pmatrix}.$$

Así pues, la probabilidad de que esté al mínimo es de 0,04 %.

c) Cada alumno ha de hacer su valoración en función de los parámetros que considere.



Paso 3

a) Utilizando software matemático, tenemos que los valores propios son:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,7685, \lambda_3 = 0,4552, \lambda_4 = 0,1129, \lambda_5 = 0,2633$$

Observación: Al ser A una matriz de Toeplitz, de antemano se sabe que los valores propios son en módulo, menores o iguales que 1.

b) Teniendo en cuenta el apartado a, la situación a la semana 10 la determina la potencia 10 de la matriz.

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 0,0553 & 0,0437 & 0,0302 & 0,0201 & 0,0147 \\ 0,0688 & 0,0593 & 0,0482 & 0,0395 & 0,0348 \\ 0,1166 & 0,1105 & 0,1033 & 0,0976 & 0,0944 \\ 0,2311 & 0,2349 & 0,2392 & 0,2425 & 0,2443 \\ 0,5281 & 0,5517 & 0,5791 & 0,6003 & 0,6119 \end{pmatrix}$$

Paso 4

Los puntos de equilibrio son los vectores propios normalizados (la suma de sus componentes es igual a 1) de valor propio 1.

En este caso, es único y es (utilizando software matemático):

$$v_1 = (0,0194, 0,0388, 0,0971, 0,2427, 0,6020)$$

Este punto de equilibrio es estable, puesto que los demás valores propios son, en módulo, inferiores a 1.

$$\lim_k p(k) = \lim_k (\lambda_1^k v_1 + \lambda_2^k v_2 + \lambda_3^k v_3 + \lambda_4^k v_4 + \lambda_5^k v_5) = v_1$$

(v_i son los vectores propios de valores propios λ_i respectivamente).

a) Las componentes del vector v_1 indican probabilidades.

b) El comportamiento asintótico es la tendencia de las cantidades de agua embalsada.

A diferencia de la estabilidad, el concepto de sostenibilidad no está definido matemáticamente, de modo que cada estudiante y teniendo en cuenta el contexto debe valorar si la probabilidad de cantidad de agua en el embalse lo hace sostenible, y debe ponderarlo con otros aspectos.

Paso 5

Se debe repetir el proceso de los apartados 1, 3 y 4 anteriores, y aprovechar el resultado 2a para estos nuevos datos.

En este caso, la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,28 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,18 & 0,38 & 0,18 & 0,1 & 0 \\ 0,08 & 0,18 & 0,38 & 0,18 & 0,1 \\ 0,08 & 0,08 & 0,18 & 0,38 & 0,18 \\ 0 & 0,08 & 0,16 & 0,34 & 0,72 \end{pmatrix}.$$





Bibliografía

- 1 Alonso Rodríguez, A. “Un modelo para la evolución de las temperaturas de la Tierra”. *Anuario Jurídico y Económico Escurialense*, 43, pp. 249-272, 2010.
- 2 Aristy Escuder, J. “El uso de métodos econométricos para prevenir la violencia doméstica y sancionarla objetivamente en los tribunales de la República Dominicana”. Primer Seminario Internacional de Law & Economics del IDLE. 2007.
- 3 Burton, T.; Jenkins, N.; Sharpe, D.; Bossanyi, E. *Wind Energy Handbook*. Second Edition. Wiley, 2011.
- 4 Curiel Herrero, J.; García Megido, G. “Desarrollo sostenible de la sanidad pública”. *Todo Hospital*, 195. Madrid, 2003.
- 5 de Vengoechea, A. *Las cumbres de las Naciones Unidas sobre cambio climático*. Colombia, 2012. Proyecto Energía y Clima de la Fundación Friedrich Ebert <<http://www.fes-energiayclima.org/>>
- 6 Departamento de Estudios y Documentación de los Servicios Centrales de Manos Unidas. *El microcrédito: oportunidades y riesgos*. Manos Unidas: Informe a Fondo/191, 2016.
- 7 Domínguez-García, S. “Creació d’una rúbrica per avaluar la competència docent en l’ús de la Pissarra Digital Interactiva”. TFG. Universitat Rovira i Virgili, 2014.
- 8 Domínguez-García, S.; García-Planas, M.I.; Palau, R.; Taberna, J. “Using the e-portfolio for large groups of students”. *Proceedings of INTED2015 Conference*, pp. 1352-1360, 2015.
- 9 Elaydi, S. N. *An Introduction to Difference Equations*, Nueva York: Springer, 1996.
- 10 Estébanez P. *Medicina humanitaria*. Díaz de Santos, 2005.
- 11 García-Planas, M.I.; Domínguez, J.L. *Introducción a la teoría de matrices positivas Aplicaciones*. Barcelona: Iniciativa Digital Politècnica, 2013.
- 12 García-Planas, M.I.; Domínguez-García, J.L. “A General Approach for Computing Residues of Partial-Fraction Expansion of Transfer Matrices”. *WSEAS Transactions on Mathematics*. 12(7): 747-756, 2013.



- 13 Mediano, B. “Análisis y simulación del comportamiento de una tubería mediante MEF”. PFC. UPC, 2011.
- 14 García-Planas, M.I.; Mediano, B. “Stability analysis of a wind turbine tower using reachability properties of switched systems”. *IEEE Latin America Transactions*, 13(7): 2252-2257, 2015.
- 15 García-Planas, M.I.; Taberna Torres, J. “La competencia de sostenibilidad y compromiso social en la asignatura de álgebra lineal en los grados de ingeniería”. *Debates & Prácticas en Educación*. 2(2): 69-79, 2017.
- 16 Hernando Chaves A. “La restricción intertemporal del presupuesto. Una evaluación empírica para el Gobierno Central de Colombia, 1950-2010”. *Cuadernos de Economía*, 22(39), 2003.
- 17 Hierro Franco, M.; Guijarro Garvi, M. “Un estudio mediante cadenas de Markov de la dinámica de los movimientos migratorios interterritoriales en España (1990-2003) desde un planteamiento de estimación dinámico”. *Revista Asturiana de Economía*, 35, pp. 145-161, 2006.
- 18 Jensen, A.L. “Simple density-dependent matrix model for population projection”. *Ecol. Model.*, 77, pp. 43-48, 1995.
- 19 Jiménez Pozo, W. “Tendencias recientes de la distribución de ingresos laborales: cambios en productividad y salarios relativos en la última década en Bolivia en economía e interdisciplinariedad. Nuevos desafíos del empleo en Bolivia”. *Rev. Umbrales*, 27/28, pp. 135-181, 2015.
- 20 Kreuzer, F.; Wilmsmeier, G. 2014. *Eficiencia energética y movilidad en América Latina y el Caribe. Una hoja de ruta para la sostenibilidad*. CEPAL y Cooperación Alemana.
- 21 López Flores, E. “La pobreza y su relación con la migración como problema social”. *Revista de Derecho*, 32(1): 85-117, 2011.
- 22 Moncaleano Cuéllar, L.M. “Análisis de encadenamientos sectoriales y proyecciones de la demanda final que permitan plantear escenarios para mejorar la producción y reducir el desempleo en Colombia”. TFM. Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas, Colombia, 2015.
- 23 Morán Franqués, I. “Utilización del álgebra lineal para la clasificación por rangos”. TFG. Universitat Politècnica de Catalunya, 2016.
- 24 Ocaña-Riola, R. “Modelos de Markov aplicados a la investigación en ciencias de la salud”. *Interciencia*, 34(3):157-162, 2009.
- 25 Palafox Duarte, M.C. “Inferencia estadística para cadenas de Markov”, Tesis. México, 2009.
- 26 Pande, R.; Topalova, P. “Mujeres al mando”. *Finance & Development*, pp. 12-15, 2013.
- 27 Peidró, A.; Gil, A.; Marín, J.M.; Payá, L.; Reinoso, O. “Control de un ascensor como caso práctico para la docencia de control avanzado”. *Actas de las XXXV Jornadas de Automática*, 2014.
- 28 Rau Binder, T. *Trabajo a tiempo parcial: análisis del caso chileno*. Departamento de Economía y Centro de Microdatos, Universidad de Chile, 2008.

- 29 Rodríguez Ríos, C.Y. “Diseño de un modelo estocástico usando cadenas de Markov para pronosticar la deserción académica de estudiantes de ingeniería. Caso: Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito”. TFM. Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colombia, 2012.
- 30 Rodríguez Vázquez, V.P.; Hernández Vaquero, J. “Matriz de probabilidad de transición de microcréditos: el caso de una microfinanciera mexicana”. *Estudios Económicos*, 28(1): 39-77, 2013.
- 31 Shen, G.; Spencer, T. “Corales: química y patrones de crecimiento”. 2005. <http://www.lgt.lt/geoin/files/01_Patrones_de_crecimiento_corales.DOC>
- 32 Vaca Rodríguez, J. G.; Dreyfus León, M. J. “Análisis de las estrategias de pesca del atún aleta amarilla (*thunnus albacares*) en el pacífico oriental basado en simulaciones monte carlo de un modelo densodependiente”. *Ciencias Marinas*, 26(3): 369-691, 2000.
- 33 Wells, P. J. *UNESCO Higher Education Priorities within the context of the Sustainability Goals*. Washington D.C.: CHEA International Quality Group, 2017. <<https://www.chea.org/userfiles/Conference%20Presentations/2017-ciqg-wells.pdf>>