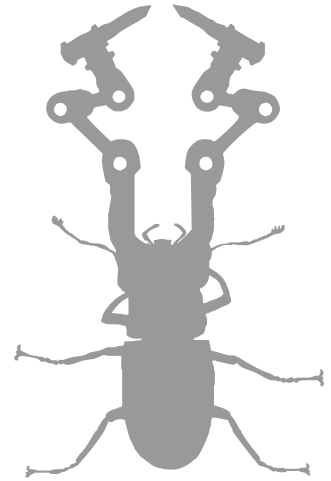


UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→ **UPCGRAU**

Sistemes de control en temps discret →

Ramon Costa Castelló
Enric Fossas Colet



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC



UPCGRAU

Sistemes de control en temps discret →

Ramon Costa Castelló
Enric Fossas Colet

Primera edició: desembre de 2014
Reimpressió: gener de 2016
Reimpressió: juliol de 2016
Reimpressió: juny de 2017

Disseny i dibuix de la coberta: Jordi Soldevila
Disseny maqueta interior: Jordi Soldevila
Maquetació: Mercè Aicart

Fotografia de la coberta: © iStock.com/pozitivstudija

- © Els autors, 2014
- © Iniciativa Digital Politècnica, 2014
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Dipòsit legal: B-26548-2014
ISBN: 978-84-9880-463-8



Índex

I. ANÀLISI DE SISTEMES DE CONTROL	13
1. Introducció	15
2. Senyals i sistemes de temps discret i equacions en diferències	23
2.1. Senyals de temps discret	23
2.1.1. Introducció	23
2.1.2. Senyals bàsics	24
2.1.3. Operacions amb senyals	26
2.2. Equacions en diferències	27
2.2.1. Introducció	27
2.3. Equacions en diferències lineals a coeficients constants	29
2.3.1. Solucions de les equacions diferencials lineals	30
2.3.1.1. Existència de solucions	30
2.3.1.2. Estructura de les solucions	30
2.3.1.3. Polinomi característic	30
2.3.2. Solucions de les equacions homogènies de primer ordre	31
2.3.3. Solucions de les equacions homogènies de segon ordre	32
2.3.4. Solucions de les equacions homogènies d'ordre qualsevol	34
2.3.5. Estabilitat	36
2.3.6. Anàlisi de la resposta forçada	37
2.3.6.1. Solució general	37
2.3.6.2. Règims forçats sinusoidals	39
3. Sistemes mostrejats	43
3.1. Introducció	43
3.1.1. Mostratge	43
3.1.2. Manteniment	45



3.1.3. Quantificació	45
3.1.4. Conversors AD i DA	46
3.2. Estudi matemàtic del mostratge	47
3.2.1. Formalització	47
3.2.2. Suma de retards	47
3.2.3. Tren d'impulsos	48
3.2.4. Propietats de la transformada de Laplace d'un senyal mostrejat ...	51
3.3. Estudi matemàtic del manteniment	53
3.4. Teorema del mostratge	55
3.4.1. Exemple previ	55
3.4.2. Anàlisi: senyal sinus	55
3.4.3. Desenvolupament	59
3.5. Reconstrucció de senyals	61
3.5.1. Reconstrucció ideal	62
3.5.2. Mantenidor d'ordre zero	62
3.5.3. Mantenidor de primer ordre	63
3.6. Funció de transferència de sistemes mostrejats	64
3.6.1. Sistema de llaç obert	64
3.6.2. Àlgebra de blocs: connexió en sèrie	65
3.6.3. Sistemes de llaç tancat	67
4. La transformada en z	75
4.1. Definició	75
4.2. Propietats de la transformada z	77
4.3. Càlcul de transformades	80
4.4. Càlcul d'antitransformades	81
4.4.1. Divisió de polinomis	81
4.4.2. Descomposició en fraccions simples	82
4.5. Equacions en diferències i funcions de transferència	85
4.6. La transformada z i els sistemes mostrejats	86
4.6.1. Introducció	87
4.6.2. Sistemes amb mantenidor d'ordre zero	90
4.6.3. Relació entre la variable z i la variable s	91
4.6.4. Nombre de mostres per període	96
5. Resposta temporal dels sistemes de temps discret	101
5.1. Introducció	101
5.2. Sistemes de primer ordre	103
5.2.1. Grau relatiu 1	103
5.2.2. Grau relatiu 0	105
5.3. Sistemes de segon ordre	106
5.3.1. Grau relatiu 2 i pol real doble	107
5.3.2. Grau relatiu 2 i pols complexos conjugats	107
5.4. Efecte dels zeros	109

5.5. Comparació qualitativa	111
5.6. Dominància	112
5.7. Mesura quantitativa	114
6. Estabilitat dels sistemes lineals de temps discret	121
6.1. Definició	121
6.2. Criteri de Jury: introducció	125
6.3. Criteri de Jury: algorisme	126
6.4. Exemple d'aplicació del criteri de Jury en l'anàlisi de la robustesa	128
6.5. Exemple d'aplicació del criteri de Jury en el disseny del controlador	131
7. Anàlisi de la resposta en règim permanent	139
7.1. Definició	139
7.2. Error i precisió	140
7.2.1. Senyal graó	140
7.2.2. Senyal rampa	143
7.2.3. Senyal paràbola	145
7.2.4. Concepte de tipus	146
7.3. Generalització del concepte de tipus	147
7.4. Principi del model intern	149
7.4.1. Introducció	149
7.4.2. Formulació	150
7.4.3. Senyals sinusoidals	152
7.4.4. Senyals periòdics	154
8. Resposta freqüencial dels sistemes de temps discret	161
8.1. Concepte	161
8.2. Algunes propietats de la resposta freqüencial de temps discret	162
8.3. Representacions gràfiques	163
8.3.1. Introducció	163
8.3.2. Diagrama polar	164
8.3.3. Diagrama de Bode	165
8.3.4. Diagrama de Nichols	167
8.4. Resposta freqüencial dels sistemes de primer i segon ordre	169
8.4.1. Introducció	169
8.4.2. Resposta freqüencial dels sistemes de primer ordre	169
8.4.3. Resposta freqüencial dels sistemes de segon ordre	171
8.5. Sistemes mostrejats	173
9. El lloc geomètric de les arrels (<i>Evans locus</i>)	183
9.1. Introducció	183
9.2. Característiques i propietats del lloc geomètric de les arrels	186



10. Anàlisi d'estabilitat en el camp freqüencial	201
10.1. Criteri de Nyquist	201
10.2. Criteri simplificat de Bode	210
10.3. Marges d'estabilitat	214
10.3.1. Introducció	214
10.3.2. Marge de guany	215
10.3.3. Marge de fase	218
10.3.4. Distància mínima al punt -1	222
II. DISSENY DE SISTEMES DE CONTROL	233
11. Algorismes de control	235
11.1. Controladors	235
11.2. Especificacions	236
11.3. Controladors de primer ordre	237
11.4. Controlador PID	241
11.4.1. Presentació	241
11.4.2. Acció proporcional	241
11.4.3. Acció integral	242
11.4.4. Acció derivativa	244
11.4.5. Controlador PID	245
11.4.6. Altres opcions	246
11.4.6.1. Controlador proporcional integral	246
11.4.6.2. Controlador proporcional derivatiu	247
12. Disseny per assignació de pols	253
12.1. Introducció	253
12.2. Assignació de pols en sistemes determinats	258
12.3. Assignació de pols en sistemes sobredeterminats	262
12.4. Assignació de pols en sistemes subdeterminats (cas del PID)	268
13. Disseny en el lloc geomètric de les arrels	279
13.1. Introducció	279
13.2. Disseny d'un controlador proporcional	281
13.3. Disseny d'un compensador d'avanç de fase	285
13.4. Disseny del compensador de retard de fase amb forma de dipol	294
14. Disseny en el camp freqüencial	307
14.1. Introducció	307
14.2. La transformació bilineal	308
14.2.1. Definició	308
14.2.2. Aplicació de la transformada bilineal a funcions de transferència	310
14.2.3. Disseny de compensadors	317

14.3. Disseny del compensador d'avanç de fase emprant la transformada bilineal	318
14.4. Disseny del compensador de retard de fase emprant la transformada bilineal	329
14.5. Mètodes exactes	339
III. APÈNDIX	347
A. Principi de l'argument	349
A.1. Principi de l'argument	349
B. Criteri de Routh	355
B.1. Procediment de construcció de la taula	355
B.1.1. Procediment general	355
B.1.2. Casos singulars	356
B.2. Teorema	357
B.3. Exemples	357
Índex alfabètic	363





Aplicacions

El text del llibre s'acompanya d'un conjunt d'aplicacions gràfiques i interactives que han estat dissenyades i pensades per donar suport al procés d'aprenentatge. Cadascuna de les aplicacions ha estat pensada per il·lustrar un dels conceptes descrits en el text. Encara que les aplicacions poden utilitzar-se de forma independent del text, aquest proposa un conjunt d'exercicis per realitzar durant l'estudi. Aquesta segona opció ofereix un marc que permet combinar un estudi formal i rigorós amb el desenvolupament d'intuïció sobre les qüestions plantejades.

Les aplicacions poden utilitzar-se en plataformes Windows, Mac i Linux. Es poden obtenir de dues maneres:

1. Descarregar totes les aplicacions per a una plataforma.

Per fer-ho podeu seguir els enllaços corresponents:

- Aplicacions per Windows: http://ocw.upc.edu/sites/default/files/materials/15015641/aplicacions_llibre_win-5344.zip
- Aplicacions per Mac: http://ocw.upc.edu/sites/default/files/materials/15015641/aplicacions_llibre_mac-5344.zip
- Aplicacions per Linux: http://ocw.upc.edu/sites/default/files/materials/15015641/aplicacions_llibre_linux-5344.zip

Un cop descarregada l'aplicació, s'obté un fitxer comprimit (.zip) que caldrà descomprimir. En fer-ho apareixerà un directori que conté un conjunt de subdirectoris, cadascun dels quals està vinculat a un capítol del llibre. En l'interior de cadascun dels subdirectoris trobareu les aplicacions que es poden executar amb la plataforma triada. En aquest format caldrà que quan es vulguin fer els exercicis s'executi l'aplicació corresponent que té el nom indicat en la secció del text on es proposen els exercicis.

Aquesta és l'única opció si es treballa amb el text amb format paper.

2. Descarregar cada aplicació en el moment en què es volen fer els exercicis.

En les àrees del text on es proposen exercicis per a una aplicació trobareu tres símbols, un per a Windows, un per a Mac i finalment un per a Linux. En clicar sobre el símbol corresponent es pot descarregar directament l'aplicació per a la plataforma triada. Per qüestions de seguretat es descarrega un .zip que conté l'ampliació i no l'aplicació directa. Per aquest motiu, en la majoria d'ordinadors convindrà descomprimir-la i executar-la manualment.

Aquesta segona opció permet un accés més àgil a les aplicacions però requereix estar connectat a internet en el moment d'utilitzar-les i emprar el text en format .pdf.



Primera part
Anàlisi de sistemes de control

→ 1



Introducció

El control és una tecnologia present en molts àmbits de la ciència i de la tècnica que té com a objectiu que els dispositius físics es comportin d'acord amb unes especificacions determinades. Això ha de ser així encara que se'n tingui un coneixement parcial. Per tal d'aconseguir-ho s'incorpora un sensor, dispositiu que mesura la magnitud que es vol controlar (sortida) i un actuador, dispositiu que modifica el comportament del dispositiu físic (acció de control). En el marc de la teoria de control, el conjunt dispositiu físic, sensor i actuador rep el nom de *planta*. Així el sistema de control, o controlador, determina l'acció de control necessària per tal que la sortida de la planta segueixi una referència determinada. La Figura 1.1 mostra un esquema de blocs on apareixen els diferents elements esmentats i la seva relació.

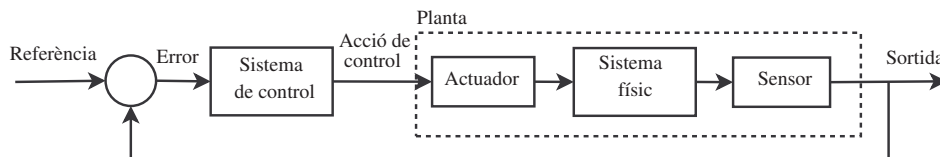


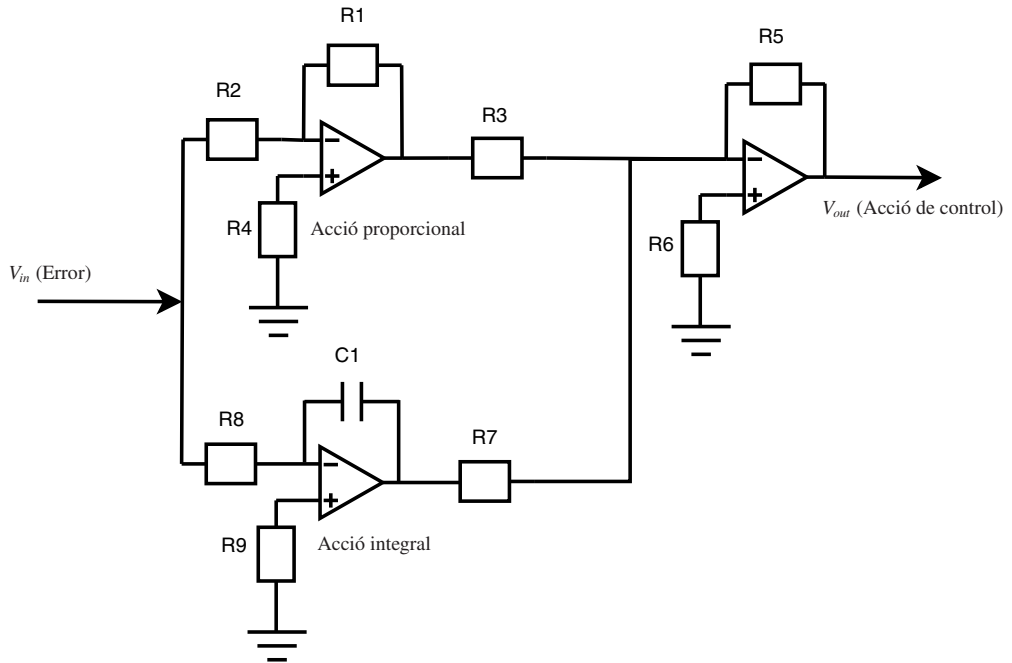
Fig. 1.1
Esquema de blocs d'un sistema de control.

Normalment, el comportament de la planta es modela com un sistema dinàmic emprant equacions diferencials. Per aquest motiu, també és normal descriure el sistema de control mitjançant un conjunt d'equacions diferencials, que són el resultat d'un procés d'anàlisi i disseny en el qual s'aplica la teoria de control [1, 2]. Un cop obtingut aquest conjunt d'equacions diferencials, caldrà trobar un sistema físic que es comporti d'acord amb les equacions diferencials obtingudes. A mode d'exemple, la Figura 1.2 mostra un circuit electrònic que es comporta com un controlador PI (proporcional integral). Els paràmetres del controlador PI s'ajusten fixant el valor dels elements que componen el circuit, en aquest cas resistències i condensadors. Aquest tipus d'implementació permet una reproducció acurada del comportament descrit per les equacions diferencials com a solució del problema de control. En contrapartida, presenta diferents problemes. Els principals són:

- La implementació de controladors, per molt senzills que siguin, implica construir sistemes físics.
- La modificació estructural o paramètrica del sistema de control obliga a construir un nou sistema o a canviar els components del sistema inicial.



Fig. 1.2
Esquema analògic d'un controlador proporcional integral.



- La teoria clàssica de control genera com a resultat unes equacions diferencials lineals, però els components analògics presenten un comportament lineal únicament en un subconjunt del seu domini d'actuació i això dificulta el disseny de determinats tipus de controladors.
- El sistemes físics envelleixen (es degraden); per tant, el seu comportament canvia amb el pas del temps, cosa que fa que el sistema de control no sempre es comporti igual.
- El comportament dels sistemes físics depèn de les condicions de l'entorn, com ara la humitat, la temperatura o la pressió. Això fa que el sistema de control variï el seu funcionament en funció d'aquestes condicions.
- En ocasions, convé implementar dinàmiques complexes o no lineals. En aquests casos, la complexitat dels sistemes físics a desenvolupar augmenta considerablement.

Per tots aquests motius i per l'abaratiment i la proliferació dels dispositius digitals, cada vegada més els sistemes de control s'implementen emprant computadors. Aquest fet permet treure profit d'algunes característiques dels computadors; les principals són:

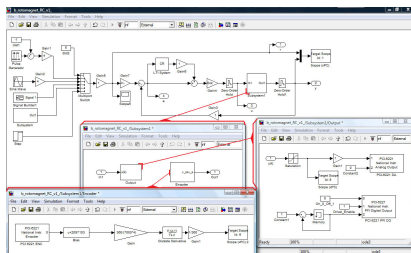
- Els sistemes de control són programes que s'executen al computador. La Figura 1.3 mostra l'estructura genèrica d'un sistema de control senzill. Que el sistema de control es tradueixi en un programa aporta una gran flexibilitat.

Fig. 1.3
Pseudocodi del programa que implementa un sistema de control.

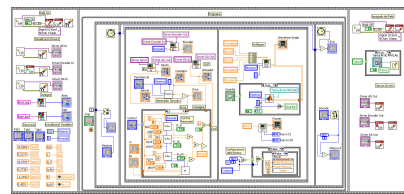
```

mentre no_final fer
     $y_k = \text{sensor}()$ ;
     $e_k = r_k - y_k$ ;
     $u_k = \text{algorisme}(e_k, u_{k-1})$ ;
     $\text{actuador}(u_k)$ ;
     $\text{retard}()$ ;
     $u_{k-1} = u_k$ ;
fmentre
    
```

- Canvis en el sistema de control impliquen únicament canvis en el programa. En el cas de canvis paramètrics, únicament impliquen canvis en algunes de les variables del programa.
- Resulta senzill implementar comportaments no lineals o discontinus i, per tant, implementar tècniques de control sofisticades [3].
- Els programes presenten un comportament invariant en cas de condicions ambientals variants i no experimenten desgast. Per tant, el sistema de control sempre es comporta de la mateixa manera.
- És possible emprar eines gràfiques i interactives que faciliten el desenvolupament i la validació dels sistemes de control (Figura 1.4).



MATLAB/Simulink



Labview

Fig. 1.4
Eines gràfiques i interactives per al disseny de sistemes de control. MATLAB/Simulink i Labview són dues eines informàtiques especialment indicades per al desenvolupament de sistemes de control.

- Un mateix computador pot implementar diferents sistemes de control.
- La implementació digital¹ facilita la integració amb sistemes de supervisió i seguiment (SCADA).

A diferència dels circuits electrònics, els circuits hidràulics o els sistemes mecànics, que són de naturalesa contínua, els computadores són sistemes de naturalesa discreta. És a dir, els computadores no actuen contínuament si no que únicament actualitzen la seva sortida en determinats instants de temps; de forma similar, un computador únicament observa el valor de la variable de sortida en determinats instants de temps. La Figura 1.5 mostra la naturalesa dels diferents senyals que hi ha en un sistema controlat per computador.

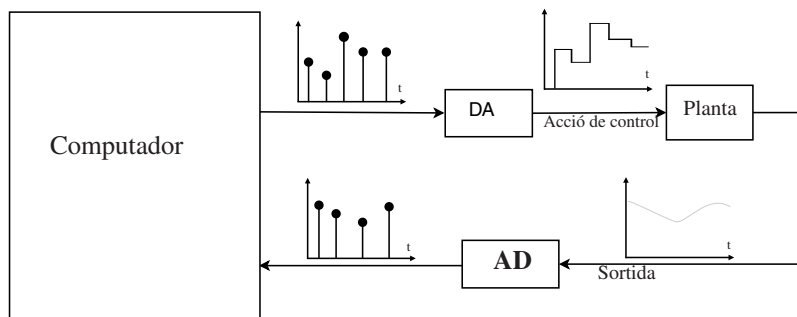


Fig. 1.5
Esquema de blocs d'un sistema de temps continu controlat per computador.

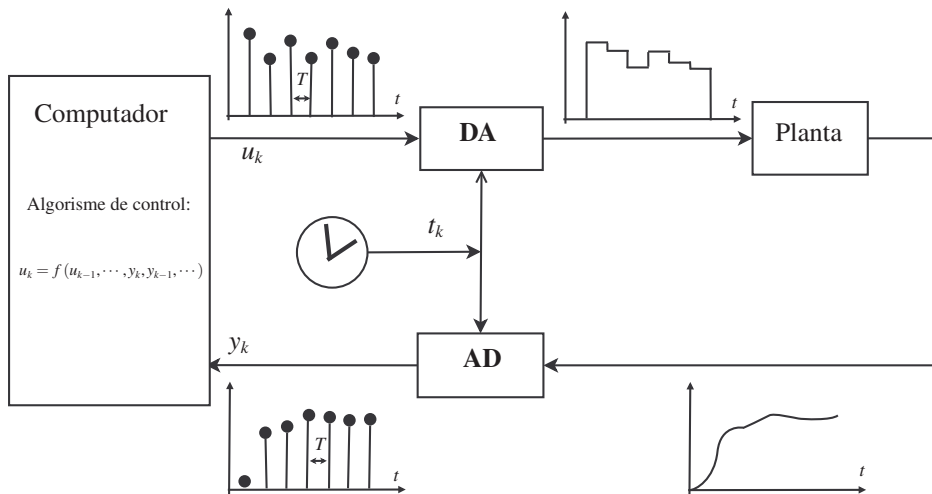
¹ S'anomenen *sistemes digitals* els sistemes de temps discret, sotmesos a quantificació. En contraposició, s'anomenen *sistemes analògics* els sistemes continus en temps i valor.

Així doncs, els sistemes controlats per computador es poden entendre com a sistemes híbrids, perquè combinen un comportament de temps continu amb un comportament de temps discret. Aquesta naturalesa híbrida dificulta l'anàlisi i el disseny rigorós dels controladors.

Des del punt de vista físic, l'enllaç entre l'element de temps discret, el computador, i l'element de temps continu, la planta, es realitza incorporant dos elements, el convertidor analògic-digital (AD) i el convertidor digital-analògic (DA). El primer transforma senyals del món analògic al digital, mentre que el segon realitza la funció inversa.

A l'entrada i a la sortida del computador, els senyals s'obtenen/regeneren en uns instants de temps t_k . Aquests, poden seguir diferents patrons o estar sincronitzats amb diferents tipus d'events. La distribució de temps més emprada és la distribució homogènia, és a dir: els instants d'actuació i mostratge són equidistants un temps T , anomenat *període de mostratge* ($t = k \cdot T, k \in \mathbb{N}$). A més, estan sincronitzats, *i.e.* l'instant en què la sortida del computador varia és el mateix instant en què es mesura l'entrada (Figura 1.6). Aquestes hipòtesis simplifiquen notablement el marc de treball i permeten construir models que recullen el comportament del sistema de llaç tancat. Aquest és l'enfocament que es seguirà en la resta de capítols d'aquest llibre.

Fig. 1.6
Sistema de control digital
basat en el mostratge
sincron.



Per tal de modelar els sistemes de control per computador, es pot procedir de dues gran maneres: l'aproximació de temps continu [4] i l'aproximació de temps discret [5, 6]. En la primera, el comportament discret del computador es modela mitjançant tècniques de temps continu; d'aquesta manera, tant la planta com el computador es descriuen i s'analitzen en aquest marc. Els sistemes modelats d'aquesta manera reben el nom de *sistemes mostrejats*. Alternativament, l'aproximació de temps discret remodela la planta com un sistema de temps discret; aleshores, tant el controlador com la planta són *sistemes de temps discret* i el seu comportament es pot estudiar en aquest marc.

L'estudi dels sistemes mostrejats permet il·lustrar diferents fenòmens propis dels sistemes de control per computador mitjançant models exactes que descriuen els sistemes en

qualsevol instant de temps. En contrapartida, resulta un marc complex que dificulta el disseny de controladors. Alternativament, l'estudi dels sistemes de temps discret ofereix un marc més senzill per a l'anàlisi i el disseny de controladors. En contrapartida, aquest enfocament només descriu el comportament del sistema en els instants de mostreig. Aquest fet és poc rellevant si el període de mostreig és suficientment petit. En aquest llibre, s'emprarà principalment el segon enfocament, encara que en alguns moments es segueix el primer per tal de posar de manifest algunes característiques rellevants.

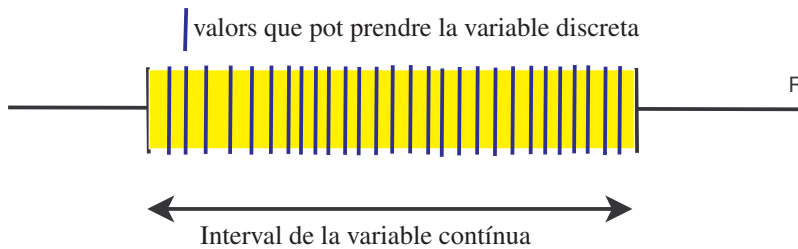


Fig. 1.7
Comparació dels valors que pot prendre una variable discreta i una de contínua.

Una altra diferència substancial dels computadors respecte dels sistemes continus és que també són discrets en valor, és a dir, els senyals que apareixen en un sistema continu poden, en general, prendre qualsevol valor dins un interval determinat mentre que al computador els senyals únicament poden prendre un conjunt finit de valors (Figura 1.7). La distribució del conjunt de valors que pot prendre la variable discreta depèn de l'aritmètica en què treballi el computador. Hi ha dues grans famílies d'aritmètiques; les aritmètiques de *coma fixa*, en què la distribució dels valors dins el rang de representació és homogènia i la distància entre dos nombres consecutius representables (precisió) és constant, i les aritmètiques de *coma flotant*, en què aquesta distribució és variable, essent la precisió més petita en els nombres petits i més gran en els nombres més grans. El fet que els ordinadors treballin amb aritmètiques de precisió finita comporta dos grans problemes:

- Les propietats aritmètiques de les operacions, la distributivitat i l'associativitat entre d'altres, deixen de ser exactes.
- En digitalitzar una magnitud contínua, *i.e.* passar-la a discreta en valor, es produeix una quantificació i, per tant, una pèrdua d'informació.

Ocasionalment, aquests fenòmens poden, produir oscil·lacions o un error en els sistemes de control [7]. Malauradament, es tracta de fenòmens no lineals i discontinus, difícils de tractar matemàticament. Per aquest motiu, no se solen tenir en compte en les etapes d'anàlisi i disseny dels sistemes de control. Cal tenir present que, en augmentar el nombre de bits emprats en les representacions digitals, el nombre de valors que es poden representar en un interval concret és cada vegada més gran, la qual cosa redueix notablement els efectes de la quantificació de les variables en els llaços de control. Actualment, els principals problemes relacionats amb el treball amb aritmètiques finites es concentren en les quantificacions produïdes durant la conversió AD i la conversió DA. Si bé han augmentat les prestacions dels conversors, aquestes encara no són del mateix ordre que les de les representacions aritmètiques emprades per realitzar els càlculs al computador. En aquest treball, no s'analitzaran els efectes d'aquests fenòmens sobre els llaços de control.



Bibliografia

- [1] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 5th edition edition, 2009.
- [2] Richard C. Dorf and Robert H. Bishop. *Modern Control Systems*. Prentice Hall, 12th edition edition, 2010.
- [3] William S. Levine, editor. *The Control Systems Handbook, Second Edition: Control System Advanced Methods*. CRC Press, second edition edition, 2010.
- [4] Tongwen Chen and Bruce Francis. *Optimal Sampled-Data Control Systems*. Springer-Verlag Telos, 1995.
- [5] Katsuhiko Ogata. *Discrete-Time Control Systems*. Prentice Hall, 2n edition, 1995.
- [6] Benjamin C. Kuo. *Digital Control Systems*. Oxford University Press, 1995.
- [7] Michael Santina, Allen R. Stubberud, and Peter Stubberud. *The Control Handbook, Second Edition: Control System Fundamentals*, chapter Quantization Effects, pages 14–1, 14–29. CRC Press, 2010.



→ 2



Senyals i sistemes de temps discret i equacions en diferències

Aquest capítol introdueix el concepte de senyal de temps discret i el d'equació en diferències. En particular, analitza amb detall les solucions de les equacions en diferències lineals.

Els resultats d'aquest capítol en el camp temporal són la base per a la anàlisi dels sistemes de control que es realitzarà posteriorment.

2.1. Senyals de temps discret

2.1.1. Introducció

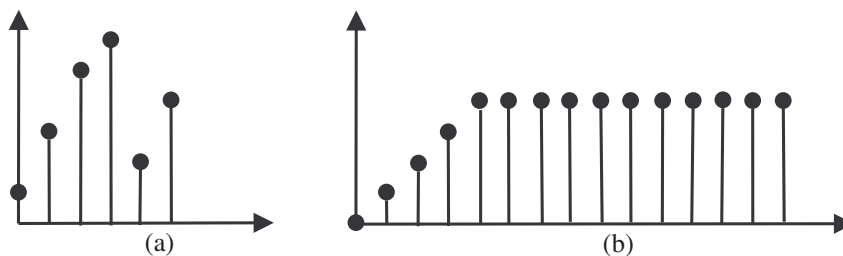


Fig. 2.1
Exemples de senyals de temps discret.
(a) senyal 2.1;
(b) senyal 2.2.

Un senyal de temps discret correspon a una seqüència de valors. Aquesta seqüència queda definida pels valors que pren el senyal. Així, per exemple, un senyal de temps discret es pot definir de la forma:

$$y = (1, 3, 5, 6, 2, 4). \quad (2.1)$$

Aquest senyal es pot representar gràficament com es mostra a la Figura 2.1a. Per indicar la posició d'un valor determinat de la seqüència, emprarem un índex, k , de la forma y_k .



Així, i a manera d'exemple, en el senyal definit per (2.1), $y_0 = 1$ i $y_3 = 6$. Una altra manera de definir senyals de temps discret és donar una expressió analítica per a cada element de la seqüència; així, podem fer-ho de la forma:

$$y_k = \min\{k, 4\}. \quad (2.2)$$

La Figura 2.1b mostra una representació del senyal definit per (2.2).

Cal tenir present que hi ha senyals de llargada finita, com el representat a (2.1), i d'altres de llargada infinita, com el representat a (2.2). Des d'aquest punt de vista, els senyals de temps discret poden entendre's com una aplicació d'un subconjunt de nombres enters, Ω , sobre els nombres reals:

$$\begin{aligned} y &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ k &\rightarrow y_k \end{aligned}$$

on $\Omega \subset \mathbb{Z}$. En aquest context, la teoria de control treballa generalment amb senyals en què $\Omega = \mathbb{Z}$, és a dir, definits per índexs positius i negatius, i són senyals de llargada infinita. Cal, però, tenir present que normalment es consideren iguals a 0 quan l'índex és negatiu.

Des del punt de vista dels valors que prenen, els senyals es poden classificar en senyals fitats i senyals no fitats.

Definició 1 *senyal fitat* Es diu que un senyal és fitat si els seus valors pertanyen a un cert interval $[-\rho, \rho]$, és a dir, es pot trobar un nombre real ρ de manera que $|y_k| \leq \rho$, $\forall k$.

En cas contrari, es diu que el senyal és no fitat. Així, per exemple, $y_k = \frac{1}{1+|k|}$ és un senyal fitat ja que $|y_k| \leq 1$, $\forall k$, mentre que $y_k = e^{|k|}$ és un senyal no fitat $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \infty$; i no es pot trobar cap fita, ρ , als seus valors.

2.1.2. Senyals bàsics

La teoria de control emprava repetidament uns quants senyals que serveixen de referència. Els principals senyals que s'empren en aquest text són:

- Senyal impuls unitari. Aquest senyal val 1 en $k = 0$ i la resta de valors són 0. El designem δ .

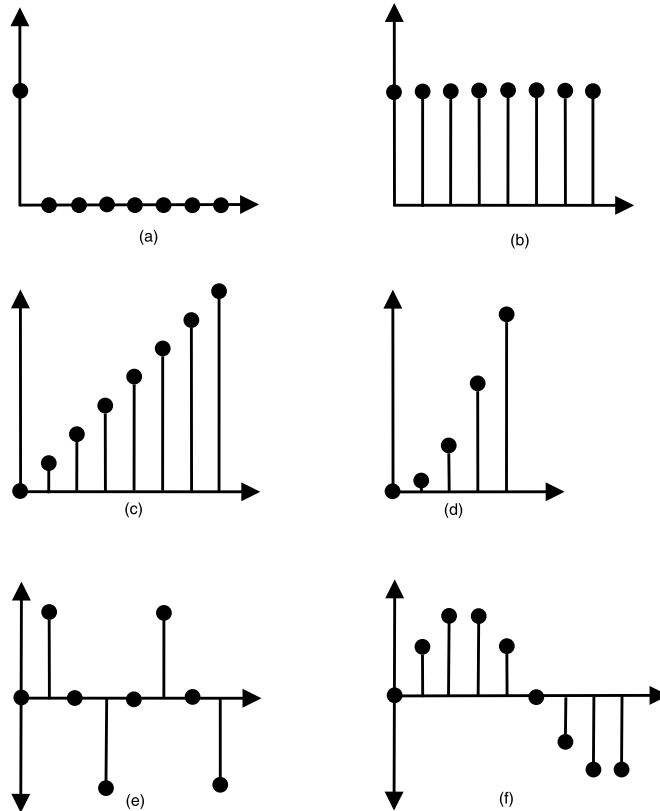
$$\delta_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

- Senyal graó unitari. Correspon al senyal en què tots els elements, amb $k \geq 0$, valen 1 i la resta de valors valen zero. Aquest senyal el designarem μ i rep el nom de funció de *Heaveside*.

$$\mu_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$



Fig. 2.2
Senyals bàsics emprats
en la teoria de control.



- Senyal rampa unitària. Correspon a un senyal en què tots els elements amb $k \geq 0$ prenen un valor igual a la seva posició en la seqüència i la resta de valors valen zero. Així:

$$y_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k & k \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Alternativament, el senyal es pot escriure de la forma $y_k = k \cdot \mu_k$.

- Senyal paràbola unitària. Correspon a un senyal en què tots els elements prenen un valor igual a la seva posició en la seqüència, elevat al quadrat. Així:

$$y_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k^2 & k \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Alternativament, el senyal es pot escriure de la forma $y_k = k^2 \cdot \mu_k$.

- Senyal sinusoidal. Aquest senyal està definit valorant la funció sinus de pulsació ω en els instants de la posició dins la seqüència.

$$y_k = \sin(\omega \cdot k) \cdot \mu_k \quad (2.7)$$

La Figura 2.2 mostra els principals senyals que es fan servir en la teoria de control.



2.1.3. Operacions amb senyals

A partir de la combinació i la manipulació d'altres senyals, es poden generar senyals més complexos. Les operacions principals que s'utilitzen en els senyals són:

- Combinació lineal. Donats dos senyals, r i t , i dos escalars, α i β , es pot definir un nou senyal com $y = \alpha \cdot r + \beta \cdot t$. És a dir:

$$y_k = \alpha \cdot r_k + \beta \cdot t_k \tag{2.8}$$

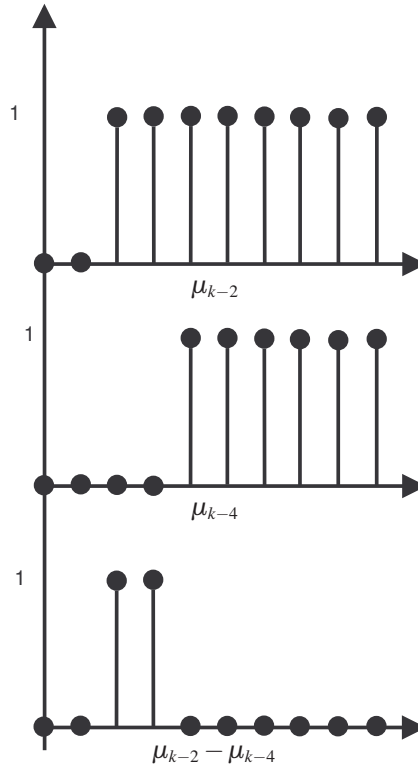
- Avanç. Donat un senyal, y , es pot definir un nou senyal, r , desplaçant p posicions els seus elements endavant i afegint $p - 1$ zeros a l'inici (això es noterà y_{k-p}):

$$r_k = \begin{cases} 0 & 0 \leq k < p \\ y_{k-p} & k \geq p \end{cases} \tag{2.9}$$

- Retard. Donat un senyal, y , es pot definir un nou senyal, r , desplaçant p posicions els seus elements endarrere (això es noterà y_{k+p}):

$$r_k = \begin{cases} y_{k+p} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Fig. 2.3
Exemple de construcció de senyals.





Exemple 1 *El senyal definit com un senyal igual a zero excepte en les posicions 2 i 3 en què val 1, visualitzat a la Figura 2.3, es pot escriure de la forma:*

$$y_k = \mu_{k-2} - \mu_{k-4}.$$

2.2. Equacions en diferències

2.2.1. Introducció

A la secció 2.1.3, s'ha presentat una manera de generar senyals a partir de la combinació d'altres senyals. Una generalització d'aquest procediment consisteix a generar senyals a partir dels mateixos senyals i d'altres. Així, el valor d'un element de la seqüència es pot obtenir a partir dels valors previs de la mateixa seqüència i els valors dels altres senyals. En general, podem escriure:

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n+1}, y_{k-n}, u_{k+p}, u_{k+p-1}, \dots, u_{k+2}, u_{k+1}, u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-m+1}, u_{k-m}). \quad (2.11)$$

Les equacions de la forma (2.11) reben el nom d'equacions en diferències. Aquest tipus d'equacions s'empra per modelar un gran nombre de fenòmens. En particular, s'utilitzen per descriure el comportament dels sistemes dinàmics de temps discret (Figura 2.4). En aquest cas, el senyal u correspon a l'entrada del sistema mentre que el senyal y correspon a la seva sortida.

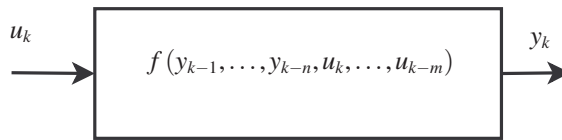


Fig. 2.4 Equacions en diferències en el modelatge de sistemes dinàmics de temps discret.

Definició 2 *Sistema causal* Es diu que un sistema és causal, o presenta un comportament causal, quan el valor que pren el senyal de sortida depèn únicament dels valors de l'entrada i de la sortida en posicions anteriors o iguals a la de l'element en qüestió.

Per tal que l'equació (2.11) descriu un comportament causal, cal que el valor de cada element de la seqüència, y_k , no depengui de valors del senyal u posteriors en la seqüència. Per aquest motiu les equacions en diferències que descriuen el comportament de sistemes dinàmics causals han de ser de la forma:

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n+1}, y_{k-n}, u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-m+1}, u_{k-m}). \quad (2.12)$$

Exemple 2 *El sistema*

$$y_k = y_{k-1} \cdot u_{k-1} + y_{k-3} \quad (2.13)$$

és causal mentre que el

$$y_k = y_{k-1} \cdot u_{k+1} + y_{k-3} \quad (2.14)$$

és no causal.



Definició 3 *Ordre d'un sistema:* En una equació en diferències, com (2.12), s'anomena ordre la distància dins la seqüència entre l'element que es vol calcular y_k i el més llunyà, ja sigui del senyal de sortida, y_{k-n} , o del senyal d'entrada, u_{k-m} , del qual y_k depèn. Així, l'ordre de (2.12) és el màx $\{n, m\}$.

Prenent $o = \max\{n, m\}$, l'ordre del sistema, i $l = k - o$, l'equació (2.12) es pot escriure com

$$\begin{aligned} y_{l+o} &= \hat{f}(y_{l+o-1}, y_{l+o-2}, \dots, y_{l+o-n}, u_{l+o}, u_{l+o-1}, u_{l+o-2}, \dots, u_{l+o-m}) \\ &= \hat{f}(y_{l+o-1}, y_{l+o-2}, \dots, y_l, u_{l+o}, u_{l+o-1}, u_{l+o-2}, \dots, u_l). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Exemple 3 *El sistema definit per:*

$$y_k = y_{k-1}^2 - y_{k-3} + u_k - 2 \cdot u_{k-1}$$

és un sistema de tercer ordre.

Exemple 4 *El sistema definit per:*

$$y_k = \sin(y_{k-1} \cdot u_{k-2})$$

és un sistema de segon ordre.

Definició 4 *Sistema autònom:* Es diu que un sistema és autònom quan, per calcular y_k , únicament calen elements del propi senyal en el passat. És a dir, l'evolució de la sortida no depèn de cap entrada. En aquests casos, l'equació en diferències pren la forma:

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n+1}, y_{k-n}). \quad (2.16)$$

Exemple 5 *La coneguda sèrie de Fibonacci, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... satisfà el sistema autònom de segon ordre*

$$y_k = y_{k-2} + y_{k-1} \quad (2.17)$$

per a $k \geq 2$.

Definició 5 *Solució d'una equació en diferències* Donats un senyal d'entrada, u , i unes condicions inicials, valors de y_0, \dots, y_{o-1} , on o és l'ordre del sistema, s'anomena solució de l'equació en diferències (2.15) la seqüència y_k que satisfà, al mateix temps, l'equació en diferències en tots els valors de k i les condicions inicials.

De l'equació en diferències (2.15), es dedueix fàcilment que per a cada entrada u i o condicions inicials, y_0, \dots, y_{o-1} , hi ha una única solució de l'equació en diferències per a $k \geq o$. En segons quins contextos es parla de *solució endavant*; tanmateix, encara que sigui amb un abús de llenguatge nosaltres en seguirem dient *solucions*.



Exemple 6 La solució de l'equació de Fibonacci amb condicions inicials $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ és:

$$y_k = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) \quad (2.18)$$

Exemple 7 La solució general de

$$y_{k+1} + y_k = 0 \quad (2.19)$$

és la seqüència

$$y_k = (-1)^k y_0 \mu_k = \begin{cases} y_0 & k \text{ parell} \\ -y_0 & k \text{ senar} \end{cases} \quad (2.20)$$

on y_0 és un nombre real qualsevol. Es pot observar que hi ha infinites solucions, les quals formen un subespai vectorial de dimensió 1 de l'espai vectorial de les seqüències de nombres reals. Fixar una condició inicial equival a triar un element de l'espai vectorial de solucions.

2.3. Equacions en diferències lineals a coeficients constants

Un cas particular d'equacions en diferències és aquell en què f és una aplicació lineal; és a dir: l'element, k , de la seqüència es pot escriure com una combinació lineal dels elements anteriors i dels elements actuals i anteriors de la resta de senyals:

$$y_k = -a_{n-1}y_{k-1} - \dots - a_1y_{k-n+1} - a_0y_{k-n} + b_nu_k + b_{n-1}u_{k-1} + \dots + b_1u_{k-n+1} + b_0u_{k-n}. \quad (2.21)$$

on $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_n$ són els coeficients de l'equació, que suposarem constants. Les equacions en diferències lineals permeten modelar un gran nombre d'aplicacions. A diferència del cas general, les equacions en diferències lineals a coeficients constants poden estudiar-se força bé. En particular, és possible obtenir la solució general de forma analítica, cosa de gran interès per entendre el comportament dels sistemes representats.

L'equació (2.21) es pot escriure també com :

$$y_k + a_{n-1}y_{k-1} + a_{n-2}y_{k-2} + \dots + a_0y_{k-n} = b_nu_k + b_{n-1}u_{k-1} + \dots + b_0u_{k-n}. \quad (2.22)$$

Com es pot observar, el terme de l'esquerra de la igualtat depèn únicament de la sortida del sistema, y , mentre que el terme de la dreta depèn únicament del senyal d'entrada, u . Per aquest motiu, el terme de la dreta es pot pensar com un nou senyal de la forma:

$$f_{k-n} \triangleq b_nu_k + b_{n-1}u_{k-1} + \dots + b_1u_{k-n+1} + b_0u_{k-n}, \quad (2.23)$$

que rep el nom de *terme independent o forçat*. Amb aquesta manipulació i un canvi en els índexs, l'equació s'escriu

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + a_{n-2}y_{k+n-2} + \dots + a_1y_{k+1} + a_0y_k = f_k. \quad (2.24)$$



Quan el terme forçat es redueix a la successió de zeros, es diu que es té una equació homogènia.

2.3.1. Solucions de les equacions diferencials lineals

2.3.1.1. Existència de solucions

Tal com s'ha comentat a l'apartat anterior, per a cada terme forçat i cada n-pla de condicions inicials, on n és l'ordre del sistema, hi ha una única solució endavant. A més, prenent i , el menor i tal que a_i és diferent de zero, es pot aïllar y_k per a valors negatius de k a partir de $y_{k+i+1}, \dots, y_{k+i+n}$. En conclusió:

Proposició 1 *L'equació en diferències (2.24) amb condicions inicials $y_0 = c_0, \dots, y_{n-1} = c_{n-1}$ té una solució única. La solució general de l'equació en diferències (2.24) té n graus de llibertat, on n és l'ordre de l'equació.*

2.3.1.2. Estructura de les solucions

Una manera d'estudiar la solució general del sistema (2.24) és replantejar el problema com una aplicació lineal. A partir de l'equació (2.24), es defineix l'aplicació lineal: següent

L : Successions de nombres reals \longrightarrow Successions de nombres reals

$$y_k \quad \longmapsto \quad L(y)_k = y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + a_1y_{k+1} + a_0y_k$$

Resoldre l'equació en diferències (2.24) equival a determinar l'antiimatge de la successió f_k per l'aplicació lineal L . Si f_k pertany al subespai $Im(L)$, la solució general de l'equació homogènia, $L^{-1}(f_k)$, s'obté com una antiimatge qualsevol de f_k més el nucli de L^1 . En termes de les solucions de l'equació en diferències, aquest resultat es llegeix de la manera següent: la solució general d'una equació en diferències lineal a coeficients constants s'obté sumant a una solució particular la solució general de l'equació homogènia. Pel que fa a la solució general de l'equació homogènia, $ker(L)$ és un subespai vectorial de dimensió n .

Proposició 2 *La solució general d'una equació en diferències, lineal, a coeficients constants s'obté com una solució particular més la solució general de l'equació homogènia.*

2.3.1.3. Polinomi característic

A l'equació en diferències

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + a_1y_{k+1} + a_0y_k = 0 \quad (2.25)$$

¹ El nucli d'una aplicació lineal L , $ker(L)$, és un subespai vectorial format pels vectors que l'aplicació lineal envia a zero.



se li associa el polinomi característic $p(z) \triangleq z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ i es defineix un producte d'un polinomi per una seqüència, de la forma següent:

$$\varphi(p, y_k) = (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0) \cdot (y_k) \triangleq y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + a_1y_{k+1} + a_0y_k.$$

Si $p(z)$ és el polinomi característic associat a l'equació (2.25), les solucions d'aquesta equació són les seqüències y_k que satisfan $\varphi(p, y_k) = 0$.

Observis que, si $p(z) = p_1(z) \cdot p_2(z)$, aleshores $\varphi(p, y_k) = \varphi(p_1, \varphi(p_2, y_k))$. En conseqüència, les solucions de $\varphi(p, y_k) = 0$ es poden estudiar en termes de les solucions de $\varphi(p_i, y_k) = 0$.

En resum, per tal de trobar una base de $\ker(L)$, és suficient trobar les solucions de $\varphi(p_i, y_k) = 0$, on $p(z) = \prod_i p_i(z)$ és la descomposició de $p(z)$ com a producte de potències de polinomis primers. Així doncs, per trobar les solucions de (2.25), es descomposa el seu polinomi característic en producte de factors primers i buscarem les solucions de les equacions en les diferències que defineixen cadascun d'aquests factors.

Proposició 3 *Les solucions d'una equació en diferències, lineal, a coeficients constants i homogènia qualsevol formen un subespai vectorial, la dimensió del qual coincideix amb l'ordre de l'equació.*

Proposició 4 *Una base d'aquest subespai vectorial s'obté a partir de les arrels del polinomi característic. Se'n presenten els a la secció següent.*

2.3.2. Solucions de les equacions homogènies de primer ordre

Donada una equació en diferències lineal de la forma

$$y_{k+1} - a_0 y_k = 0 \tag{2.26}$$

el seu polinomi característic és $z - a_0$. Així, per a una condició inicial c_0 , la solució general és

$$y_k = c_0 \cdot a_0^k. \tag{2.27}$$

Efectivament, aquesta solució satisfà l'equació i les condicions inicials.

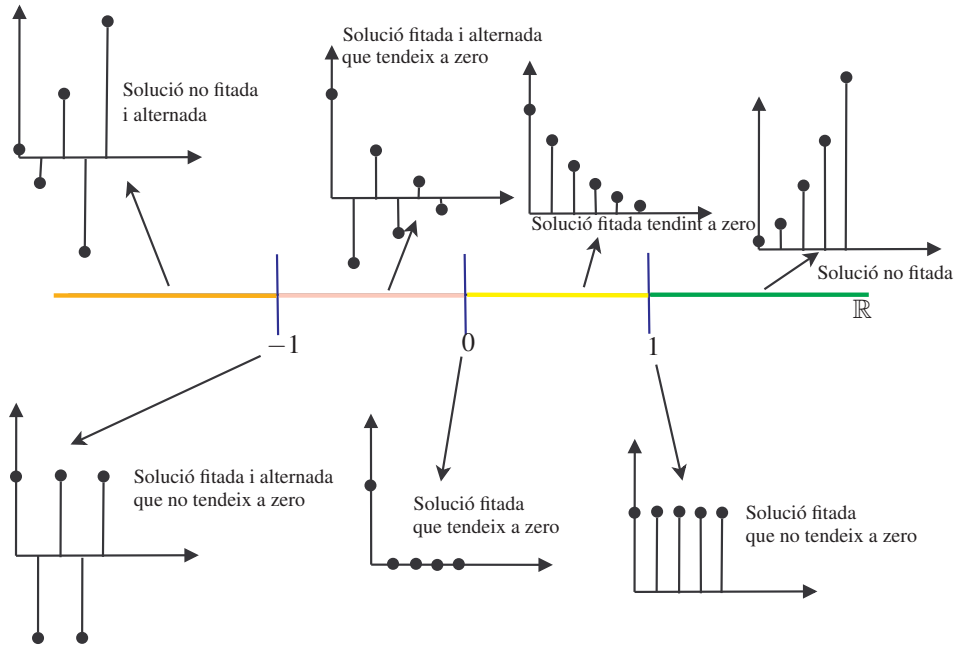
Definició 6 *Senyal alternat: Es diu que un senyal, y , és alternat quan el signe de dos elements consecutius és diferent. És a dir, si $y_k > 0$, aleshores $y_{k+1} < 0$ (o, equivalentment, $y_k \cdot y_{k+1} < 0$).*

Proposició 5 *Les solucions de (2.26) satisfan:*

- en cas que $1 > a_0 > 0$, y_k és un senyal fitat que tendeix a 0 monòtonament.
- en cas que $0 > a_0 > -1$, y_k és un senyal fitat que tendeix a 0 de forma alternada.
- en cas que $a_0 = 0$, $y_k = c_0 \cdot \delta_k$, que és un senyal fitat.



Fig. 2.5
Esquema de la forma de les solucions d'un sistema de primer ordre homogeni, amb condicions inicials no nul·les, en funció de l'arrel.



- en cas que $a_0 = -1$, y_k és un senyal fitat alternat, una mostra val c_0 i la següent val $-c_0$.
- en cas que $a_0 = 1$, y_k és un senyal constant igual a c_0 .
- en cas que $-1 > a_0$, y_k és un senyal no fitat que tendeix a infinit de forma alternada.
- en cas que $1 < a_0$, y_k és un senyal no fitat que tendeix a infinit de forma monòtona.

La Figura 2.5 mostra un esquema de les possibles solucions.

2.3.3. Solucions de les equacions homogènies de segon ordre

L'equació lineal

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0 \tag{2.28}$$

amb $a_0 \neq 0$, té com a polinomi característic $z^2 + a_1 z + a_0$. Les arrels d'aquest polinomi poden presentar les formes següents:

- Dues arrels reals: en aquest cas, el polinomi característic es pot escriure com

$$z^2 + a_1 z + a_0 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2), \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

i la solució de l'equació homogènia és:

$$y_k = \alpha_1 \cdot \lambda_1^k + \alpha_2 \cdot \lambda_2^k$$

on $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ i $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ són dues constants que depenen de les condicions inicials, y_0 i y_1 , i satisfan:



$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= y_0 \\ \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 &= y_1\end{aligned}$$

És important adonar-se que la solució és la suma de les solucions de dos sistemes de primer ordre. Per tant, la casuística es pot analitzar en termes de la combinació d'aquestes (secció 2.3.2).

- Dues arrels reals iguals: en aquest cas, el polinomi característic es pot escriure com

$$z^2 + a_1 z + a_0 = (z - \lambda)^2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

i la solució és:

$$y_k = \alpha_1 \cdot \lambda^k + \alpha_2 \cdot k \cdot \lambda^k = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot k) \cdot \lambda^k$$

on $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ i $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ són dues constants que depenen de les condicions inicials, y_0 i y_1 , i satisfan:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= y_0 \\ \alpha_1 \lambda + \alpha_2 &= y_1\end{aligned}$$

Per tal d'analitzar les possibles situacions, és important tenir present que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot \lambda^k = \begin{cases} \infty & \forall \lambda \text{ tal que } |\lambda| \geq 1 \\ 0 & \forall \lambda \text{ tal que } |\lambda| < 1 \end{cases}$$

Proposició 6 Les solucions de (2.28), en cas que el polinomi característic tingui una arrel real de multiplicitat 2, satisfan:

- en cas que $0 < \lambda < 1$ o $-1 < \lambda < 0$, y_k és un senyal fitat que tendeix a 0.
 - en cas que $\lambda = 0$, $y_k = y_0 \delta_k + y_1 \delta_{k-1}$, que és un senyal fitat.
 - en cas que $|\lambda| \geq 1$, y_k és un senyal no fitat que tendeix a infinit.
- Dues arrels complexes conjugades: en aquest cas, el polinomi característic es pot escriure com

$$z^2 + a_1 z + a_0 = (z - r e^{j\theta})(z - r e^{-j\theta}), r, \theta \in \mathbb{R}.$$

i la solució és de la forma

$$y_k = \alpha \cdot r^k \cdot e^{j\theta k} + \bar{\alpha} \cdot r^k \cdot e^{-j\theta k} = (\alpha \cdot e^{j\theta k} + \bar{\alpha} \cdot e^{-j\theta k}) r^k$$

on $\alpha \in \mathbb{C}$ i $\bar{\alpha}$ denota el seu conjugat. α depèn de les condicions inicials y_0 i y_1 i satisfà:

$$\begin{aligned}\alpha + \bar{\alpha} &= y_0 \\ \alpha \cdot r \cdot e^{j\theta} + \bar{\alpha} \cdot r \cdot e^{-j\theta} &= y_1\end{aligned}$$

Proposició 7 Les solucions de (2.28), en cas que el polinomi característic tingui un parell d'arrels complexes conjugades, satisfan:



- per a cada arrel $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de multiplicitat 1, s'afegeix un terme de la forma $\alpha_i \lambda_i^k + \bar{\alpha}_i \bar{\lambda}_i^k$, on $\alpha_i \in \mathbb{C}$ vindrà determinat per les condicions inicials.
- per a cada arrel $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de multiplicitat p , s'afegeixen els termes següents: $\alpha_i^1 \lambda_i^k + \bar{\alpha}_i^1 \bar{\lambda}_i^k, \alpha_i^2 \cdot k \cdot \lambda_i^k + \bar{\alpha}_i^2 \cdot k \cdot \bar{\lambda}_i^k, \dots, \alpha_i^p \cdot k^{p-1} \cdot \lambda_i^k + \bar{\alpha}_i^p \cdot k^{p-1} \cdot \bar{\lambda}_i^k$, on $\alpha_i^j \in \mathbb{C}$ són p coeficients que vindran determinats per les condicions inicials.

Finalment, se sumen tots els termes.

Exemple 8 *El polinomi característic de l'equació en diferències*

$$y_{k+4} + 0.1y_{k+3} + 8.34y_{k+2} + 4.72y_{k+1} - 4.52y_k = 0$$

és $p(z) = z^4 + 0.1z^3 + 8.34z^2 + 4.72z - 4.52$. Aquest polinomi es pot escriure com $p(z) = (z - 0.5)(z + 1)(z - 0.2 + 0.3j)(z - 0.2 - 0.3j)$; per tant, presenta dues arrels reals de multiplicitat 1 i una parella d'arrels complexes conjugades. La solució general de l'equació en diferències ve donada per:

$$\begin{aligned} y_k &= c_1 0.5^k + c_2 (-1)^k + \alpha (0.2 + 0.3j)^k + \bar{\alpha} (0.2 - 0.3j)^k \\ &= c_1 0.5^k + c_2 (-1)^k + c_3 \cos(k\theta) + c_4 \sin(k\theta), \theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{0.3}{0.2} \right) \end{aligned}$$

on $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ i $\alpha \in \mathbb{C}$ (a efectes de la resolució, s'escriurà $\alpha = a + bj$).

Per tal de determinar els paràmetres, s'imposa que la solució general compleixi les condicions inicials. S'obté:

$$\begin{aligned} y_0 &= c_1 + c_2 + \alpha + \bar{\alpha} = c_1 + c_2 + 2a \\ y_1 &= 0.5c_1 - c_2 + \alpha \cdot (0.2 + 0.3j) + \bar{\alpha} \cdot (0.2 - 0.3j) = 0.5c_1 - c_2 + 0.4a - 0.6b \\ y_2 &= 0.5^2 c_1 + c_2 + \alpha \cdot (0.2 + 0.3j)^2 + \bar{\alpha} \cdot (0.2 - 0.3j)^2 = 0.25c_1 + c_2 - 0.1a - 0.24b \\ y_3 &= 0.5^3 c_1 - c_2 + \alpha \cdot (0.2 + 0.3j)^3 + \bar{\alpha} \cdot (0.2 - 0.3j)^3 = .125c_1 - c_2 - 0.0902a - 0.018b \end{aligned}$$

i, resolent, s'obté:

$$\begin{aligned} a &= 0.245y_0 + 0.572y_1 - 1.307y_2 - 1.634y_3 \\ b &= 0.517y_0 - 1.879y_1 + 0.327y_2 + 2.723y_3 \\ c_1 &= 0.481y_0 - y_1 + 2.222y_2 + 3.704y_3 \\ c_2 &= 0.0283y_0 - 0.144y_1 + 0.392y_2 - 0.436y_3 \end{aligned}$$

que, per a $y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3, y_3 = 4$, dóna $a = -9.069, b = 8.633, c_1 = 19.963$ i $c_2 = -0.826$.

y_k és un senyal fitat, ja que els quatre components que el formen ho són, encara que no tendirà a cap valor concret, perquè hi ha un terme oscil·lant d'amplitud mantinguda (el generat per l'arrel $z = -1$). Per tant, per a k prou gran

$$y_k \approx (0.02832244009y_0 - 0.1437908497y_1 + 0.3921568627y_2 - 0.4357298475y_3) (-1)^k.$$

**Exemple 9** *El polinomi característic de l'equació en diferències*

$$y_{k+7} - 0.3y_{k+6} + 2.03y_{k+5} - 0.601y_{k+4} + 1.06y_{k+3} - 0.302y_{k+2} + 0.03y_{k+1} - 0.001y_k = 0$$

és $P(z) = z^7 - 0.3z^6 + 2.03z^5 - 0.601z^4 + 1.06z^3 - 0.302z^2 + 0.03z - 0.001$. Aquest polinomi presenta una arrel en $z = 0.1$ de multiplicitat 3 i una parella d'arrels complexes conjugades en $z = \pm j$ de multiplicitat 2. Per aquest motiu, la solució general de l'equació en diferències pren la forma:

$$y_k = c_1^1 0.1^k + c_1^2 \cdot k \cdot 0.1^k + c_1^3 \cdot k^2 \cdot 0.1^k + \alpha(j)^k + \bar{\alpha}(-j)^k + \beta \cdot k \cdot (j)^k + \bar{\beta} \cdot k \cdot (-j)^k.$$

Per tal de determinar els valors dels paràmetres c_1^1 , c_1^2 , c_1^3 , α i β , cal imposar que es verifiquin les set condicions inicials. A mode d'exemple, per a $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 0, y_6 = 0$, s'obté $c_1^1 = 1.0008$, $c_1^2 = -1.5092$, $c_1^3 = 0.4901$, $\alpha = -0.4305e - 3 + .2353e - 3j$ i $\beta = 0.7255e - 4 + .2353e - 3j$.

El senyal solució és un senyal no fitat, ja que alguns dels elements que el componen no ho són. En concret, els termes deguts a la multiplicitat del pol complex conjugat.

2.3.5. Estabilitat

Definició 7 *Sistema estable* Es diu que un sistema, descrit per una equació en diferències lineal a coeficients constants,

$$y_{k+n} = -a_{n-1}y_{k+n-1} - a_{n-2}y_{k+n-2} - \dots - a_1y_{k+1} - a_0y_k + b_nu_{k+n} + b_{n-1}u_{k+n-1} + \dots + b_1u_{k+1} + b_0u_k,$$

és estable si la solució del sistema homogeni és un senyal fitat que tendeix a zero.

Proposició 8 *Un sistema descrit per una equació en diferències lineal a coeficients constants és estable si i només si les arrels del seu polinomi característic tenen mòdul estrictament inferior a la unitat.*

A la secció anterior, s'ha vist que les solucions de les equacions lineals homogènies a coeficients constants es poden expressar com la suma de diferents termes que provenen de les arrels del polinomi característic. Tots els sumands que provenen d'arrels amb mòdul estrictament inferior a 1 tendeixen a zero quan k tendeix a infinit. Noteu que les arrels de multiplicitat 1 i mòdul 1 donen lloc a respostes fitades però que no tendeixen a zero, i que les arrels de multiplicitat superior a 1 i mòdul 1, o les que tenen mòdul més gran que 1 donen lloc a una resposta no fitada.

Definició 8 *Sistema marginalment estable* Es diu que un sistema, descrit per una equació en diferències lineals,

$$y_{k+n} = -a_{n-1}y_{k+n-1} - a_{n-2}y_{k+n-2} - \dots - a_1y_{k+1} - a_0y_k + b_nu_{k+n} + b_{n-1}u_{k+n-1} + \dots + b_1u_{k+1} + b_0u_k,$$

és marginalment estable si i només si la solució del sistema homogeni és un senyal fitat que no tendeix a zero.



Proposició 9 *Un sistema descrit per una equació en diferències lineal és marginalment estable si té alguna o algunes arrels del seu polinomi característic de mòdul 1 i multiplicitat 1, i tota la resta tenen un mòdul estrictament inferior a la unitat.*

Essencialment, un sistema marginalment estable pot presentar tres tipologies diferents. Una primera en què l'arrel de mòdul 1 sigui $z = 1$; en aquest cas, la solució tendeix a un valor finit diferent de zero. L'altra possibilitat és que l'arrel sigui complexa, però situada sobre el cercle unitari; en aquest cas, la solució descriu una oscil·lació d'amplitud constant, amb una freqüència que depèn de la posició de l'arrel sobre el cercle (el cas $z = -1$ es pot considerar dins aquest cas). Finalment, hi ha un tercer cas, que consisteix en l'agregació dels anteriors.

Definició 9 *Sistema inestable* Es diu que un sistema, descrit per una equació en diferències lineals a coeficients constants,

$$y_{k+n} = -a_{n-1}y_{k+n-1} - a_{n-2}y_{k+n-2} - \dots - a_1y_{k+1} - a_0y_k + b_nu_{k+n} + b_{n-1}u_{k+n-1} + \dots + b_1u_{k+1} + b_0u_k,$$

és inestable si la solució general del sistema homogeni és un senyal no fitat.

Proposició 10 *Un sistema descrit per una equació en diferències lineal a coeficients constants és inestable si i només si el seu polinomi característic té alguna arrel de mòdul superior a 1 o si té arrels de mòdul 1 i multiplicitat superior a 1.*

Seguint l'anàlisi de la secció, es pot deduir que l'existència d'una arrel del polinomi característic amb mòdul superior a 1 comporta que la solució no estigui fitada. Així mateix, les arrels sobre el cercle unitat amb multiplicitat superior a 1 donen lloc a components de la solució que són no fitades.

2.3.6. Anàlisi de la resposta forçada

2.3.6.1. Solució general

A les seccions anteriors, s'ha analitzat la solució de les equacions en diferències lineals a coeficients constants i homogènies (sistemes autònoms); seguidament es presenta un mètode per obtenir la solució general de les equacions no homogènies.

Consideris l'equació en diferències

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + a_1y_{k+1} + a_0y_k = f_k. \quad (2.31)$$

Tal com s'ha comentat prèviament, la solució general d'aquesta equació està formada per una solució particular més la solució general de l'equació homogènia. Tot seguit, es presenta una forma de calcular una solució particular si es disposa d'un polinomi en z que anul·li la seqüència f_k .

A tall d'exemple, observis que el polinomi $z - a$ anul·la la seqüència $f_k = a^k$. Efectivament,

$$(z - a) \cdot f_k = f_{k+1} - a \cdot f_k = a^{k+1} - a \cdot a^k = 0.$$



El *quid* de la qüestió el proporciona el resultat següent:

Proposició 11 *Sigui $p(z)$ el polinomi característic de l'equació 2.31, $p_f(z)$ un polinomi que anul·li la seqüència f_k i $y_{f,k}$ una solució particular de 2.31. Aleshores, $y_{f,k}$ és solució de l'equació homogènia, el polinomi característic de la qual és $p_f(z) \cdot p(z)$.*

Efectivament, si $y_{f,k}$ és una solució particular de 2.31, es verifica

$$p(z) \cdot y_{f,k} = f_k$$

i, en conseqüència, també es verifica

$$p_f(z) \cdot p(z) \cdot y_{f,k} = p_f(z) \cdot f_k;$$

però, per construcció, el terme de la dreta val zero. Per tant $y_{f,k}$ és solució de l'equació homogènia, el polinomi característic de la qual és $p_f(z) \cdot p(z)$.

Aleshores, per trobar una solució particular de l'equació 2.31, es pren la solució general de l'equació homogènia el polinomi característic de la qual és $p_f(z) \cdot p(z)$ i es determina el valor dels coeficients imposant que se satisfaci l'equació no homogènia inicial.

Exemple 10 *Considereu l'equació*

$$y_{k+2} - 0.6y_{k+1} + 0.05y_k = 1 + 0.2^{k+2}.$$

El polinomi característic de l'equació homogènia és corresponent $P(z) = z^2 - 0.6z + 0.05 = (z - 0.1)(z - 0.5)$ i un polinomi que anul·la el terme forçat és $Q(z) = (z - 1)(z - 0.2)$. El primer terme, $(z - 1)$ prové de l'1 del terme de la dreta, mentre que $(z - 0.2)$ prové de la seqüència $0.2^{k+2} = 0.04 \cdot 0.2^k$. Per tal d'obtenir una solució particular, prenem $H(z) = P(z)Q(z) = (z - 0.1)(z - 0.5)(z - 1)(z - 0.2)$, que proporciona la solució general:

$$y_k = c_1 0.1^k + c_2 0.5^k + c_3 + c_4 0.2^k.$$

Si imposem ara que aquesta solució general satisfaci l'equació amb terme forçat, obtenim $c_3 = 2.222$ i $c_4 = -1.333$, i c_1 i c_2 queden. Així, la solució és:

$$y_k = \underbrace{c_1 \cdot 0.1^k + c_2 \cdot 0.5^k}_{\text{solució general de l'equació homogènia}} + \underbrace{2.222222222 - 1.333333333 \cdot 0.2^k}_{\text{solució particular}}$$

Els coeficients de c_1 i c_2 permeten fixar les condicions inicials. Així, per a $y_0 = 1$ i $y_1 = -1$, s'obté $c_1 = 7.528$ i $c_2 = -7.417$.

L'exemple anterior posa de manifest que la solució general de l'equació en diferències es pot escriure com la suma de la solució general del sistema homogeni més una solució particular del sistema forçat.



Proposició 12 *Teorema de la superposició. Donat el sistema*

$$y_{k+n} = -a_{n-1}y_{k+n-1} - a_{n-2}y_{k+n-2} - \dots - a_1y_{k+1} - a_0y_k + b_nu_{k+n} + b_{n-1}u_{k+n-1} + \dots + b_1u_{k+1} + b_0u_k,$$

si y_k^1 és la solució per a l'entrada u_k^1 , i y_k^2 és la solució per a l'entrada u_k^2 , aleshores $\alpha \cdot y_k^1 + \beta \cdot y_k^2$ és la solució per a l'entrada $\alpha \cdot u_k^1 + \beta \cdot u_k^2$.

Exemple 11 *Tornant a l'equació*

$$y_{k+2} - 0.6y_{k+1} + 0.05y_k = 1 + 0.2^{k+2}.$$

Es pot trobar una solució general d'aquesta l'equació a partir d'una solució de

$$y_{k+2} - 0.6y_{k+1} + 0.05y_k = 1.$$

i una solució de

$$y_{k+2} - 0.6y_{k+1} + 0.05y_k = 0.2^{k+2}.$$

De la primera equació, s'obté $y_k^1 = c_1 0.1^k + c_2 0.5^k + 2.222$ i, de la segona, $y_k^2 = c_1 0.1^k + c_2 0.5^k - 1.333 \cdot 0.2^k$.

2.3.6.2. Règims forçats sinusoidals

Un tipus de senyals de gran interès en els sistemes lineals són els senyals sinusoidals. De forma genèrica, aquests senyals es poden escriure com la combinació de senyals de la forma:²

$$u_k = e^{jk\theta}.$$

$$\text{Efectivament, } \sin(k\theta) = \frac{e^{jk\theta} - e^{-jk\theta}}{2j} \text{ i } \cos(k\theta) = \frac{e^{jk\theta} + e^{-jk\theta}}{2}.$$

Tot seguit, es calcula la solució particular d'una equació en diferències lineal a coeficients constants i terme forçat sinusoidal:

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + a_{n-2}y_{k+n-2} + \dots + a_1y_{k+1} + a_0y_k = \sin(k\theta).$$

El polinomi $p_f(z) = (z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})$ anul·la la seqüència $\sin(k\theta)$.

Efectivament,

$$\begin{aligned} (z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta}) \cdot \sin(k\theta) &= (z^2 - (e^{j\theta} + e^{-j\theta})z + 1) \cdot \sin(k\theta) \\ &= \sin((k+2)\theta) - (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \sin((k+1)\theta) + \sin(k\theta) \\ &= \frac{1}{2j} [(e^{j(k+2)\theta} - e^{-j(k+2)\theta}) - (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \cdot (e^{j(k+1)\theta} - e^{-j(k+1)\theta}) + (e^{jk\theta} - e^{-jk\theta})] = 0. \end{aligned}$$

² Aquest és un senyal complex, i fins ara únicament s'han emprat senyals reals. En aquesta secció, s'utilitzen els nombres complexos per simplificar els càlculs.



Per tant, la solució particular provindrà de les arrels de $p_f(z)$. Tal com s'ha estudiat a la secció dedicada a sistemes homogenis de segon ordre, aquesta solució és de la forma $(\alpha \cdot e^{jk\theta} + \bar{\alpha} \cdot e^{-jk\theta})$, que també es pot escriure com $M \sin(k\theta + \varphi)$. Imposant aquesta solució per a l'equació original, s'obté α o, equivalentment, M i φ .

Proposició 13 *La solució particular d'un sistema lineal a coeficients constants forçat per un terme sinusoidal $\sin(k\theta)$ és un altre senyal trigonomètric de la mateixa freqüència $y_k^p = M \sin(k\theta + \varphi)$.*

Donada l'equació en diferències:

$$y_k + a_{n-1}y_{k-1} + a_{n-2}y_{k-2} + \dots + a_0y_{k-n} = b_nu_k + b_{n-1}u_{k-1} + \dots + b_0u_{k-n}, \quad (2.32)$$

per tal de determinar el valor de M i φ , assumint $u_k = e^{j\theta k}$, s'assaja una solució particular de la forma $y_k = He^{j\theta k}$ amb $H \in \mathbb{C}$. Substituint u_k i y_k a l'equació en (2.32), s'obté:

$$H(1 + a_{n-1}e^{-\theta j} + a_{n-2}e^{-2\theta j} + \dots + a_0e^{-n\theta j})e^{j\theta k} = (b_n + b_{n-1}e^{-\theta j} + \dots + b_0e^{-n\theta j})e^{j\theta k} \quad (2.33)$$

i, per tant,

$$H = \frac{b_n + b_{n-1}e^{-\theta j} + \dots + b_0e^{-n\theta j}}{1 + a_{n-1}e^{-\theta j} + a_{n-2}e^{-2\theta j} + \dots + a_0e^{-n\theta j}}.$$

Definint $M = |H|$ i $\varphi = \angle H$, en resulta la proposició següent.

Proposició 14 *Donada una equació en diferències lineal de coeficients constants estable de la forma*

$$a_ny_k + a_{n-1}y_{k-1} + a_{n-2}y_{k-2} + \dots + a_0y_{k-n} = b_nu_k + b_{n-1}u_{k-1} + \dots + b_0u_{k-n}$$

quan l'entrada és un senyal sinusoidal $\sin(\theta \cdot k)$, la solució en règim permanent és un senyal de la forma

$$y_k = M \sin(\theta \cdot k + \varphi)$$

on $M = |H|$ i $\varphi = \angle H$ amb

$$H = \frac{b_n + b_{n-1}e^{-\theta j} + \dots + b_0e^{-n\theta j}}{a_n + a_{n-1}e^{-\theta j} + a_{n-2}e^{-2\theta j} + \dots + a_0e^{-n\theta j}}.$$



Exercicis proposats

1. Resoleu les equacions en diferències següents:

(a) $x_{k+1} = 2x_k, x_0 = 1$.

(b) $x_{k+1} = 0.5x_k - 3, x_0 = 1$.

2. Noteu que $x_k = 2k$ satisfà l'equació en diferències $2x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$. Obtingueu la solució general de l'equació en diferències i la solució $x_k = 2k$ com a cas particular.

3. Calculeu la solució general de les equacions següents en diferències en funció de x_1

(a) $x_k = 2x_{k-1} + n$,

(b) $x_k = x_{k-1} + n^2$,

(c) $x_k = x_{k-1} + 2^n$.

4. Escriviu els quatre primers termes de les seqüències següents i l'equació en diferències associada.

(a) $u_k = \sum_{r=1}^k (2r - 1)$. (b) $u_k = \sum_{r=1}^k (10 - r)$. (c) $u_k = \sum_{r=1}^k 3(2r + 1)$.

5. Escriviu una equació en diferències que tingui, com a solució, la seqüència que comença per 2, 4, 10, 28, 82, 244, i completeu la solució fins als deu primers termes (assumiu inicialment un sistema de sisè ordre).

6. Determineu la solució general i l'estabilitat de

$$x_{k+2} = -ax_{k+1} + x_k + e^k.$$

7. Determineu la solució general i l'estabilitat de

$$x_{k+2} = -ax_{k+1} + x_k + \sin(0.1k\pi).$$

8. Determineu, en funció de b , el valor de x_k en règim permanent per l'equació en diferències:

$$x_k - a \cdot x_{k-1} = u_k + b \cdot u_{k-1}.$$

(a) $a = 0.5$ i $u_k = \cos(k)$.

(b) $a = 0.5$ i $u_k = 2\cos(k) + 2\cos(2k)$.

(c) $a = 1.5$ i $u_k = \sin\left(\frac{k}{2}\right)$.

9. Una població de mamífers creix a un ritme d'un 3% anual. Designem x_k la població que hi ha a l'any k .

(a) Modeleu l'evolució de la població mitjançant una equació en diferències.

(b) Dibuixeu l'evolució de la població respecte del temps (anual).

(c) Quants anys calen per doblar la població?

(d) Quina és l'evolució de la població a llarg termini.

10. Repetiu l'exercici anterior suposant que anualment m membres de la població moren.

→ 3



Sistemes mostrejats

Un cas particularment interessant de sistemes de temps discret són els que resulten de mostrejar les entrades i sortides d'un sistema de temps continu. Aquest tipus de sistemes són els que s'obtenen en introduir un computador en un llaç de control. Atès que, malgrat ser sistemes de temps continu, la sortida s'observa únicament en determinats instants de temps i , consegüentment, l'acció de control no varia de forma contínua, rebent el nom de *sistemes mostrejats* (*sampled-data systems*). En aquest capítol, s'analitzen els diferents procediments i els mecanismes per poder modelar aquest tipus de sistemes.

3.1. Introducció

En els sistemes de control per computador, apareixen fenòmens propis dels sistemes mostrejats que cal estudiar. Els més rellevants estan lligats directament amb l'enllaç entre els elements de temps continu i els elements de temps discret. A continuació, es defineixen aquests fenòmens i s'analitza el modelatge dels dispositius físics d'enllaç entre els elements de temps continu i els de temps discret, i viceversa.

Les anàlisis seguiran el plantejament clàssic [1], basat a modelar tots els elements des d'un punt de vista de temps continu.

3.1.1. Mostratge

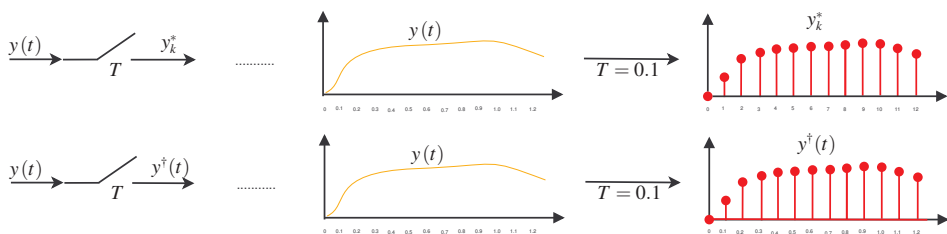


Fig. 3.1
Mostratge.



Definició 10 *Mostratge.* Mostrejar consisteix a prendre el valor d'un senyal de temps continu, $y(t)$, en uns certs instants de temps, t_k , i a partir d'aquests valors generar un senyal de temps discret, y_k^* , tal que $y_k^* = y(t_k)$.

Definició 11 *Mostratge uniforme.* Es parla de mostratge uniforme quan els instants de mostratge es poden escriure de la forma $t_k = k \cdot T$, on T rep el nom de període de mostratge.

La part superior de la Figura 3.1 mostra una exemple de mostratge. És important observar que, en els esquemes de blocs, el mostratge es representa com un interruptor; a la part inferior s'indica el període de mostratge emprat.

En ocasions, convé estudiar els sistemes de temps discret com a sistemes de temps continu, o convé barrejar elements de temps discret i temps continu en un marc de temps continu. Per aquest motiu, és habitual associar, a un senyal de temps discret, un senyal de temps continu.

Definició 12 *Mostratge impulsional.* Al parell format per un senyal de temps discret y_k i uns instants de mostratge t_k , s'hi associa el senyal de temps continu $y^\dagger(t)$ definit per:

$$y^\dagger(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot \delta(t - t_k). \quad (3.1)$$

$y^\dagger(t)$ és un senyal que val 0 sempre excepte en els instants t_k , on val $y(t_k)$. En aquest text, com en el cas del mostratge, s'emprarà $t_k = k \cdot T$.

Definició 13 *Mostratge impulsional uniforme.* Al parell format per un senyal de temps discret y_k i uns instants de mostratge $t_k = k \cdot T$, se li associa el senyal de temps continu $y_T^\dagger(t)$, definit per:

$$y_T^\dagger(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot \delta(t - k \cdot T). \quad (3.2)$$

Definició 14 *Senyals mostrejats.* Durant les anàlisis que es realitzaran sortiran, senyals de temps continu que provenen del mostratge d'un senyal de temps continu amb un període de mostratge T . Aquests senyals s'haurien de notar com $(y_k^*)_T^\dagger$ tanmateix, per no sobreçarregar la notació definim:

$$y^*(t) \triangleq (y_k^*)_T^\dagger. \quad (3.3)$$

La part inferior de la Figura 3.1 il·lustra un exemple d'aquest procés. És important observar la diferència entre els dos processos que es mostren en la figura. Mentre que el de la part superior és un senyal de temps discret, el de la part inferior és un senyal de temps continu.

3.1.2. Manteniment

El mostratge, no és l'única manera en què es pot construir un senyal de temps continu a partir d'un de temps discret; de fet n'hi ha tantes com es vulgui. Una altra manera especialment interessant és la que rep el nom de *manteniment* o *manteniment d'ordre zero*.

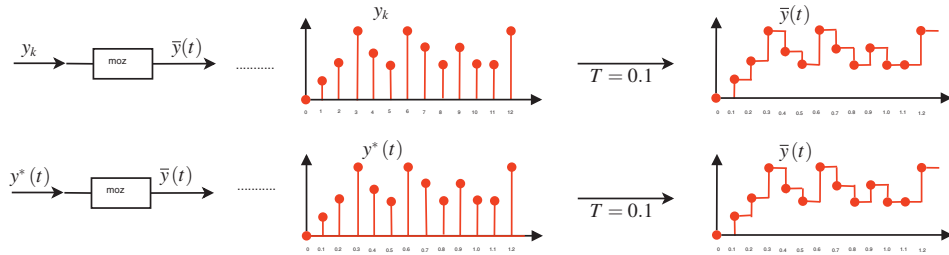


Fig. 3.2
Manteniment.

Definició 15 *Manteniment.* Donat un senyal de temps discret y_k i un període de mostratge T , es defineix el senyal, $\bar{y}(t)$, de la forma:

$$\bar{y}(t) = y_k, \text{ amb } t \in [k \cdot T, (k + 1) \cdot T). \quad (3.4)$$

Aquesta manera de construir senyals de temps continu a partir d'un senyal de temps discret rep el nom de *manteniment* o *manteniment d'ordre zero*.

És important adonar-se que $\bar{y}(t)$ és un senyal constant a trams i que únicament canvia en els instants de mostratge, $k \cdot T$. La part superior de la Figura 3.2 mostra la representació en esquema de blocs i un exemple de manteniment. Cal adonar-se que el mantenidor pot rebre com a entrada un senyal de temps discret, y_k , o un senyal de temps continu, $y^*(t)$; en els dos casos, la sortida és la mateixa.

En ocasions, el manteniment s'aplica també sobre senyals de temps continu mostrejats; en aquest cas, la definició del procés s'ha d'ajustar lleugerament:

Definició 16 *Manteniment d'un senyal mostrejat.* Donat un senyal de temps continu mostrejat $y^*(t)$ ¹, es defineix el senyal, $\bar{y}(t)$, de la forma:

$$\bar{y}(t) = y^*(kT), \text{ amb } t \in [k \cdot T, (k + 1) \cdot T). \quad (3.5)$$

La part inferior de la Figura 3.2 mostra la representació en esquema de blocs i un exemple de manteniment.

3.1.3. Quantificació

A part dels processos de conversió entre temps continu i temps discret, els sistemes de control per computador incorporen altres tipus de procediments. Un dels més importants és la quantificació.

¹ Noteu que els senyals mostrejats incorporen de forma intrínseca uns instants de mostratge (període de mostratge).

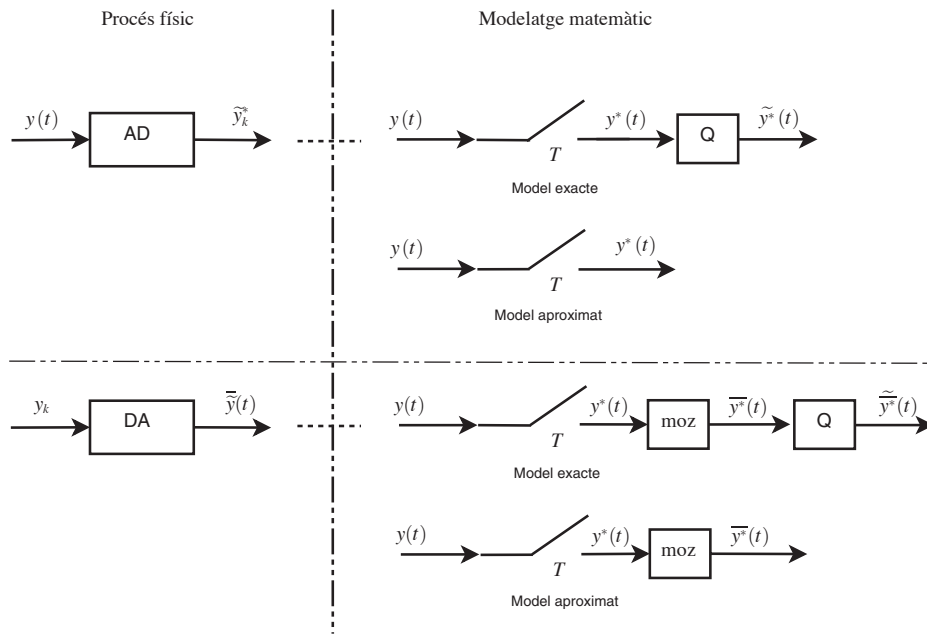
Definició 17 *Quantificació.* Donat un senyal de temps continu $y(t)$ o de temps discret y_k i un conjunt de valors \mathcal{Q} , s'anomena *quantificació* el procés d'assignació dels valors del senyal original als del valors del conjunt.

$$\tilde{y}(t) = Q(y(t)), \tilde{y}_k = Q(y_k). \tag{3.6}$$

En el context del control per computador, el conjunt \mathcal{Q} correspon als nombres representables en l'aritmètica de treball. Aquesta pot ser de coma fixa o de coma flotant [2]. L'assignació als nombres del conjunt es pot realitzar de diferents maneres, si bé les més usuals són per truncament, per arrodoniment per sobre o per arrodoniment al més proper [2]. En tots els casos, es tracta de relacions no lineals i discontinües.

3.1.4. Convertors AD i DA

Fig. 3.3
Definició i modelatge
dels convertidors
analògic-digital (AD) i
digital-
analògic (DA).



Des del punt de vista físic, per enllaçar els sistemes de temps discret i els de temps continu s'han d'introduir dos tipus de dispositius:

- Convertidor analògic-digital (AD). A partir d'un senyal de temps continu i d'un període de mostratge, el convertidor AD genera un senyal de temps discret y_k^* , que és quantificat d'acord amb les característiques del convertidor. Així, estrictament a la sortida del convertidor AD hi ha el senyal \tilde{y}_k^* . Per tant, la funcionalitat del convertidor AD es pot modelar com un procés de mostratge i una quantificació posterior (o viceversa)². La part superior esquerra de la Figura 3.3 mostra l'esquema de blocs emprat per representar el convertidor AD.

² Noteu que el mostratge i la quantificació són operadors que commuten.

A vegades, convé estudiar el comportament del convertidor AD en un context de temps continu; per aquest motiu, és convenient transformar el senyal de sortida en un senyal de temps continu. Així, en aquest cas, s'assumirà que la sortida és $(\tilde{y}_k^*)_T^\dagger = \tilde{y}^*(t)$. En aquest context, el convertidor AD el descomponem en un mostrejador i un quantificador, tal com es mostra a la part dreta superior de la Figura 3.3 (model exacte). Atès que l'efecte de la quantificació és difícil de modelar i analitzar, i normalment té un efecte negligible sobre els sistemes de control, no se sol tenir en compte en el moment de modelar convertidors AD. Així, s'assumirà que si l'entrada al convertidor AD és $y(t)$, la sortida serà $y^*(t)$, com es mostra a la part superior dreta de la Figura 3.3 (model aproximat).

- Convertidor digital-analògic (DA). Aquest dispositiu parteix de senyals de temps discret y_k , els quantifica, \tilde{y}_k , i, posteriorment hi aplica un procés de manteniment $\tilde{\tilde{y}}(t)$ ³ (Figura 3.3, part inferior esquerra).

En moltes ocasions, convé estudiar l'efecte del convertidor DA des d'un punt de vista de temps continu; en aquests casos, s'assumeix que el senyal d'entrada és de temps continu i que hi ha un mostrejador a l'entrada. Així, en col·locar un senyal de temps continu a l'entrada, $y(t)$, se li aplica un mostrejador, $y^*(t)$, posteriorment un procés de manteniment $\tilde{\tilde{y}}(t)$ i finalment un procés de quantificació $\tilde{y}^*(t)$. L'esquema de blocs es mostra a la part inferior dreta de la Figura 3.3 (model exacte). Com en el cas anterior, en aquest text es negligeix l'efecte del quantificador, i així s'obté l'esquema de blocs de la part inferior dreta de la Figura 3.3 (model aproximat).

3.2. Estudi matemàtic del mostratge

A la secció anterior, s'han descrit breument els fenòmens que apareixen en un sistema de control per computador, deguts a la interacció entre un sistema de temps continu (planta) i un sistema de temps discret (computador, controlador). En aquesta secció, es formalitza el procés de mostratge i es dedueixen diferents característiques dels senyals mostrejats. Aquest estudi es realitzarà en un context de temps continu, és a dir, s'assumirà que tots els senyals són de temps continu. En particular, es deduiran dues expressions equivalents dels senyals mostrejats en el camp temporal; posteriorment, s'aplicarà la transformada de Laplace a aquestes expressions i se'n deduiran algunes propietats.

3.2.1. Formalització

3.2.2. Suma de retards

Seguint la formulació introduïda anteriorment a l'equació (3.2), un senyal de temps continu, $y(t)$, mostreat amb un període T pot escriure's com:

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k \cdot T) \delta(t - k \cdot T). \quad (3.7)$$

³ Observeu que el manteniment i la quantificació commuten.



Aplicant la transformada de Laplace a $y^*(t)$, i utilitzant que \mathcal{L} i \sum commuten, s'obté:

$$Y^*(s) = \mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} y(k \cdot T) \delta(t - k \cdot T) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L} \{y(k \cdot T) \delta(t - k \cdot T)\}.$$

Com que $y(k \cdot T)$ és un terme constant i $\mathcal{L} \{ \delta(t - k \cdot T) \} = e^{-k \cdot T \cdot s}$, s'obté:

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k \cdot T) e^{-k \cdot T \cdot s}. \tag{3.8}$$

Exemple 12 (Senyal graó) Donat el senyal $y(t) = u_s(t)$, la seva transformada de Laplace és $Y(s) = \frac{1}{s}$. La versió mostrejada del senyal és de la forma $y_k^* = 1$. Finalment, aplicant-hi (3.8), es pot calcular la transformada de Laplace del senyal mostreat:

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k \cdot T \cdot s} = \frac{1}{1 - e^{-T \cdot s}}$$

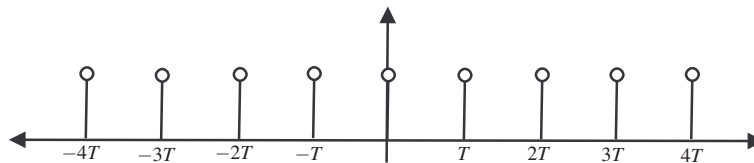
Exemple 13 (Senyal exponencial) Donat el senyal $y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} u_s(t)$, la seva transformada de Laplace és $Y(s) = \frac{\tau}{\tau s + 1}$. La versió mostrejada del senyal és de la forma $y_k^* = e^{-\frac{k \cdot T}{\tau}}$. Finalment, aplicant-hi (3.8), es pot calcular la transformada de Laplace del senyal mostreat:

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k \cdot T) \cdot e^{-k \cdot T \cdot s} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k \cdot T}{\tau}} u_s(k \cdot T) \cdot e^{-k \cdot T \cdot s} = \frac{1}{1 - e^{-T(\frac{1}{\tau} + s)}}$$

És interessant adonar-se que a les expressions obtingudes, la variable complexa s és situada a l'interior de funcions exponencials i, per tant, no es tracta de funcions racionals de polinomis, com és el més habitual en els senyals de temps continu [3].

3.2.3. Tren d'impulsos

Fig. 3.4
Senyal tren d'impulsos.



Definició 18 (Tren d'impulsos) S'anomena tren d'impulsos el senyal

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T)$$

La Figura 3.4 mostra una representació gràfica del tren d'impulsos.

Proposició 15 (Sèrie de Fourier d'un tren d'impulsos) *El tren d'impulsos és un senyal periòdic de període T per aquest motiu, es pot escriure com una sèrie de Fourier de la forma:*

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \cdot k \cdot \omega_s \cdot t}$$

on $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ i $c_k \in \mathbb{C}$ són els coeficients de la sèrie de Fourier. Aquests poden obtenir-se com:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_s \cdot t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_s \cdot t} dt = \frac{1}{T}$$

i, per tant,

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j \cdot k \cdot \omega_s \cdot t}.$$

Un senyal mostrejat es pot escriure com el producte del senyal original per un tren d'impulsos. Així doncs,⁴

$$y^*(t) = y(t) \cdot \delta_T(t). \tag{3.9}$$

Aquesta manera d'escriure permet interpretar el fenomen del mostratge com una modulació per alçada de pols (PAM⁵) [Figura 3.5] on $\delta_T(t)$ fa el paper de portadora i $y(t)$, de senyal a modular.

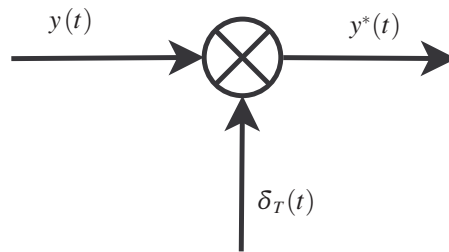


Fig. 3.5 Interpretació del mostratge com una modulació.

La transformada de Laplace de (3.9) es pot calcular aprofitant la propietat:

Proposició 16 (Trasllat a l'eix transformat [3]) *Donat el senyal $f(t)$, si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ és la seva transformada de Laplace i $a \in \mathbb{C}$, es compleix:*

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot f(t)\} = F(s+a)$$

⁴ Cal observar que $y^*(t_k) = y(t_k)$ si i només si $y(t)$ és continu en t_k .

⁵ PAM: pulse amplitude modulation.



Així, la transformada de Laplace de (3.9) es pot escriure:

$$Y^*(s) = \mathcal{L}\{y(t) \cdot \delta_T(t)\} = \mathcal{L}\left\{y(t) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j \cdot k \cdot \omega_s \cdot t}\right\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{y(t) e^{j \cdot k \cdot \omega_s \cdot t}\}$$

i, finalment, aplicant la propietat de trasllat a l'eix transformat es pot escriure:

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s - k \cdot j \cdot \omega_s) + \frac{y(0^+)}{2}$$

o, alternativament,

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + k \cdot j \cdot \omega_s) + \frac{y(0^+)}{2}. \quad (3.10)$$

El senyal $y(t)$ presenta una discontinuïtat en $t = 0$ ja que els senyals amb els quals treballem valen, per definició, són 0 per a temps negatius. Així, en aquest punt, $y^*(0) \neq y(0)$. Per tal d'ajustar-ho és necessari afegir el terme $\frac{y(0^+)}{2}$ [4, 5, 6]. Una cosa similar passaria si $y(t)$ presentés discontinuïtats en altres instants de mostreig, t_k .

Exemple 14 (Senyal de graó) Donat el senyal $y(t) = u_s(t)$, la seva transformada de Laplace és $Y(s) = \frac{1}{s}$. La versió mostrejada del senyal correspon a $y_k^* = 1$; la transformada de Laplace d'aquest senyal es pot obtenir aplicant (3.10):

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + k \cdot j \cdot \omega_s) + \frac{y(0^+)}{2} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s + k \cdot j \cdot \omega_s} + \frac{y(0^+)}{2} \\ &= \frac{1}{s \cdot T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2sT}{s^2 T^2 + 4k^2 \pi^2} + \frac{y(0^+)}{2} = \frac{1}{s \cdot T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{sT}{2}}{\left(\frac{sT}{2}\right)^2 + (k\pi)^2} + \frac{y(0^+)}{2}. \end{aligned}$$

Posteriorment, aplicant que

$$\cotgh(x) = \frac{1}{x} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (k\pi)^2} \quad (3.11)$$

i que

$$\cotgh(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \quad (3.12)$$

amb $x = \frac{sT}{2}$, s'obté:

$$Y^*(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{T \cdot s} + \frac{1}{2} \frac{\cotgh\left(\frac{T \cdot s}{2}\right) \cdot T \cdot s - 2}{T \cdot s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{sT} + 1}{e^{sT} - 1} = \frac{e^{sT}}{e^{sT} - 1}.$$

⁶ $\frac{y(0^+)}{2}$ prové del fet que a $t = 0$ hi ha un impuls multiplicat per $y(0)$. Donat que els senyals amb els quals treballem valen, per definició, són 0 per a temps negatius, cal aplicar aquesta contribució. El valor de la sèrie de Fourier d'una funció f en una discontinuïtat de salt al punt p és $\frac{f(p^+) + f(p^-)}{2}$.

Exemple 15 (Senyal exponencial) Donat el senyal $y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} u_s(t)$, la seva transformada de Laplace és $Y(s) = \frac{\tau}{\tau s + 1}$. La versió mostrejada del senyal correspon a $y_k^* = e^{-\frac{kT}{\tau}}$ i la transformada de Laplace d'aquest senyal es pot obtenir aplicant (3.10):

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + k \cdot j \cdot \omega_s) + \frac{y(0^+)}{2} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{\tau(s + k \cdot j \cdot \omega_s) + 1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{\tau}{T}}{\tau s + 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{2(\tau s + 1)}{\tau T}}{\left(s + \frac{1}{\tau} + \frac{2k \cdot \tau \cdot j}{T}\right) \left(s + \frac{1}{\tau} - \frac{2k \cdot \tau \cdot j}{T}\right)} \end{aligned}$$

Tot seguit, i aplicant les mateixes relacions (3.11) i (3.12), amb $x = \frac{T(\tau s + 1)}{2\tau}$, s'obté:

$$Y^*(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{T(\tau s + 1)}{\tau}} + 1}{e^{-\frac{T(\tau s + 1)}{\tau}} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{T(\tau s + 1)}{\tau}}}$$

Com es pot veure, els resultats obtinguts emprant l'expressió (3.8) coincideixen exactament amb els obtinguts emprant l'expressió (3.10).

Estructuralment, les dues solucions són força diferents: la utilització d'una o l'altra dependrà de les característiques que s'estudiïn. Com s'ha il·lustrat als Exemples 14 i 15, els procediments necessaris per obtenir $Y^*(s)$ aplicant (3.10) són força més complexos que els emprats aplicant (3.8).

3.2.4. Propietats de la transformada de Laplace d'un senyal mostrejat

A partir de les expressions de la transformada de Laplace d'un senyal mostrejat, (3.10) i (3.8), se n'obtenen tres propietats bàsiques.

Proposició 17 Periodicitat de $Y^*(s)$. $Y^*(s)$ és periòdica de període $j\omega_s$, essent $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. Per tal que $Y^*(s)$ sigui periòdica de període $j\omega_s$, cal que:

$$Y^*(s) = Y^*(s + j\omega_s) \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Emprant (3.8) per calcular $Y^*(s)$, s'obté:

$$\begin{aligned} Y^*(s + j\omega_s) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(k \cdot T) e^{-k \cdot T \cdot (s + j\omega_s)} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k \cdot T) e^{-k \cdot T \cdot s} e^{-k \cdot T \cdot \omega_s \cdot j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y(k \cdot T) e^{-k \cdot T \cdot s} e^{-k \cdot T \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot j} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k \cdot T) e^{-k \cdot T \cdot s} \underbrace{e^{-k \cdot 2\pi \cdot j}}_1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y(k \cdot T) e^{-k \cdot T \cdot s} = Y^*(s). \end{aligned}$$

cosa que mostra que $Y^*(s)$ és periòdica de període $j\omega_s$.

La periodicitat de $Y^*(s)$ permet conèixer-la a partir del seu comportament en un dels períodes, és a dir, coneixent $Y^*(s)$ en qualsevol regió del pla complex (pla s) limitada



per dues rectes horitzontals distanciades ω_s . La Figura 3.6 vol representar aquest fet. La selecció de bandes és arbitrària. Tanmateix, una d'elles s'anomena *banda primària*.

Fig. 3.6
Periodicitat de $Y^*(s)$ i
concepte de banda.

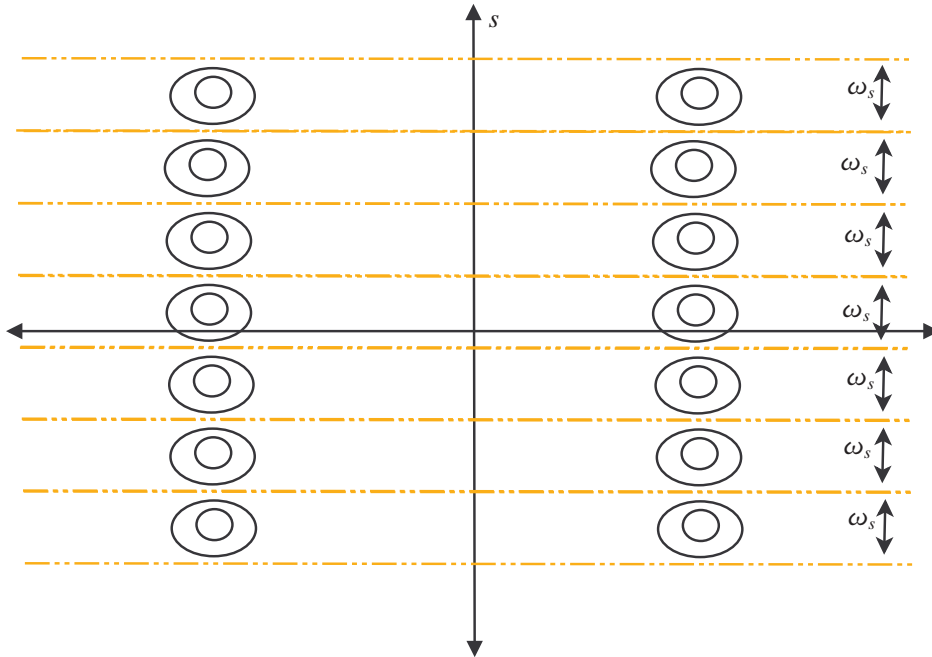
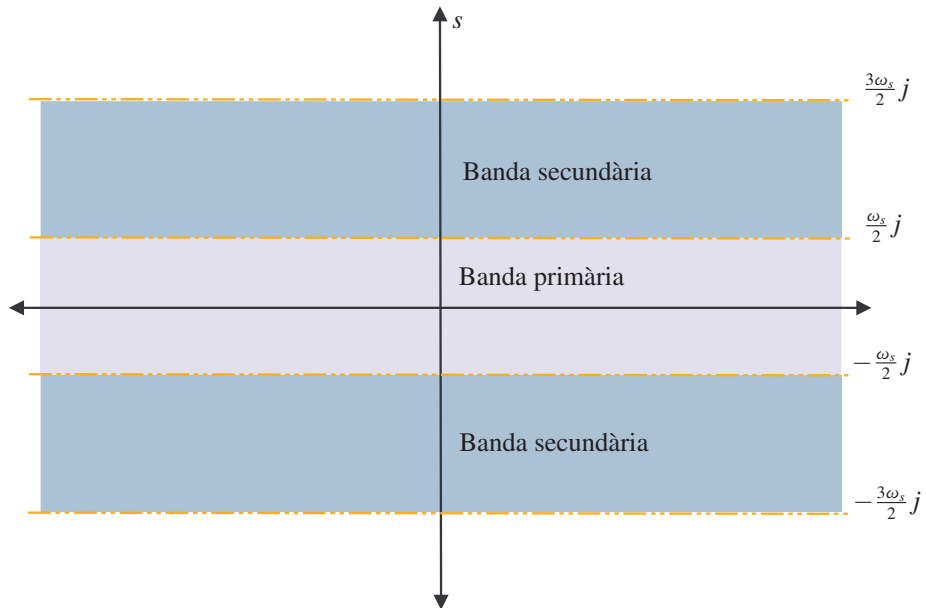


Fig. 3.7
Periodicitat de $Y^*(s)$ i
definició de bandes.



Definició 19 *Banda primària.* S'anomena *banda primària* la regió del pla complex situada entre $s = -\frac{\omega_s}{2} j$ i $s = \frac{\omega_s}{2} j$.

La resta de bandes definides, a partir de la banda primària, reben del nom de bandes complementàries o secundàries (Figura 3.7). Atès que el comportament a les bandes secundàries és el mateix que a la primària, únicament s'estudia el comportament a aquesta banda.

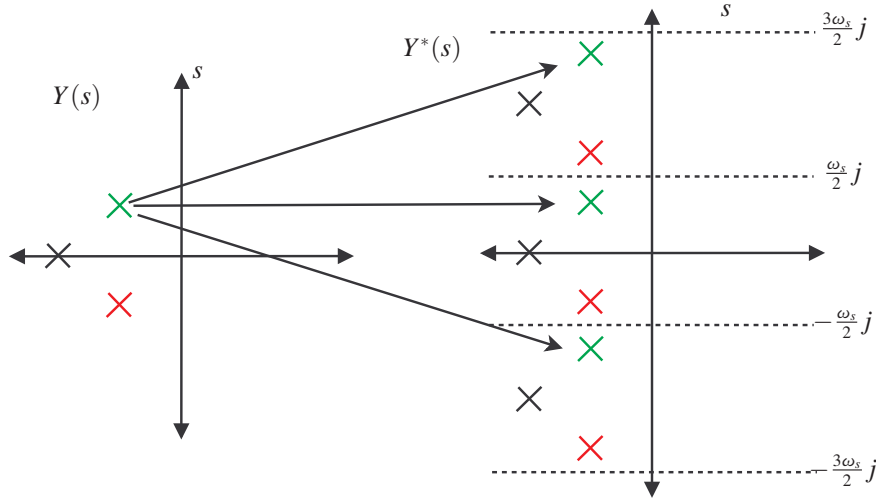


Fig. 3.8 Representació gràfica de la periodicitat dels pols en les transformades de senyals mostrejats.

Proposició 18 *Periodicitat dels pols.* Si $Y(s)$ té un pol a $s_1 \in \mathbb{C}$, $Y^*(s)$ té pols a $s_1 + jn\omega_s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Per comprovar-ho, només cal partir de l'expressió (3.10) i adonar-se que els termes de la suma són de la forma $Y(s \pm j \cdot n \cdot \omega_s)$, desplaçades $j\omega_s$; per tant, si $Y(s_1) = \infty$, aleshores $Y^*(s_1 - j \cdot n \cdot \omega_s) = \infty$.

La Figura 3.8 mostra una representació gràfica de la generació dels pols de la transformada del senyal mostrejat a partir dels pols de la transformada del senyal original.

Proposició 19 *El mostratge no es pot expressar com una funció de transferència.* Les expressions (3.8) i (3.10) no permeten escriure la transformada de Laplace de la sortida del mostrejador, $Y^*(s)$, com el producte d'alguna funció de transferència, $Y(s)$, per la transformada de Laplace de l'entrada. Això és un indicador clar que el mostratge és un fenomen no lineal i, per tant, no expressable en termes de funcions de transferència.

Obseveu que, a la Figura 3.13, hi ha dos senyals diferents que proporcionen el mateix senyal mostrejat. Per tant, a partir de l'observació de les mostres, no és possible determinar quin és el senyal que hi ha a l'entrada.

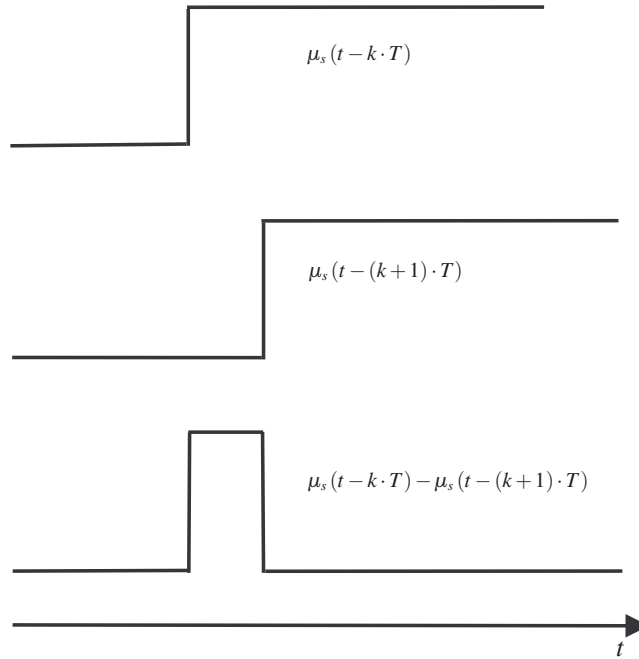
3.3. Estudi matemàtic del manteniment

El manteniment ha estat definit a la secció 3.1.2 i formalitzat a l'expressió (3.5). En aquesta secció s'obindrà una funció de transferència que reculli el seu comportament, i posteriorment s'analitzarà aquesta funció en un context de temps continu i per tant,



s'assumirà que l'entrada al mantenidor és un senyal de temps continu mostrejat, $y^*(t)$. Designarem $\bar{y}(t)$ la sortida del mostrejador.

Fig. 3.9
Construcció del
mantenidor a partir de
graons.



A (3.5), la sortida del mantenidor s'ha definit com

$$\bar{y}(t) = y^*(kT) \quad t \in [k \cdot T, (k + 1) \cdot T).$$

Observeu que $\bar{y}(t)$ és una funció constant a trams que també es pot reescriure com:

$$\bar{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y^*(k \cdot T) [\mu_s(t - k \cdot T) - \mu_s(t - (k + 1) \cdot T)]. \quad (3.13)$$

La Figura 3.9 mostra una representació gràfica de la diferència de graons.

Per tal de construir la funció de transferència del mantenidor, es calcula la transformada de Laplace de $\bar{y}(t)$ i s'obté:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(s) &= \mathcal{L}\{\bar{y}(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} y^*(k \cdot T) [\mathcal{L}(u_s(t - k \cdot T)) - \mathcal{L}(u_s(t - (k + 1) \cdot T))] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y^*(k \cdot T) \left[\frac{e^{-k \cdot T \cdot s}}{s} - \frac{e^{-(k+1) \cdot T \cdot s}}{s} \right] = \frac{1 - e^{-T \cdot s}}{s} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} y^*(k \cdot T) e^{-k \cdot T \cdot s}}_{Y^*(s)} \\ &= G_{moz}(s) Y^*(s) \end{aligned}$$

Proposició 20 Un mantenidor d'ordre zero és un operador lineal. La seva funció de transferència és:

$$G_{moz}(s) \triangleq \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \quad (3.14)$$

La Figura 3.10 mostra la resposta freqüencial de (3.14). Observeu que es tracta d'un filtre passabaixos amb guany canònic (guany en contínua) igual al període de mostrejatge. Observeu també que la funció de transferència s'anul·la a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ rad/s, la qual cosa prové del fet que el numerador de la funció de transferència s'anul·la a $s = \pm \frac{2\pi}{T}kj$.

Reconstrucció: Modifiqueu el període de mostrejatge i analitzeu la resposta freqüencial del mantenidor. Compareu la semblança de l'espectre del senyal original amb el senyal mantingut.

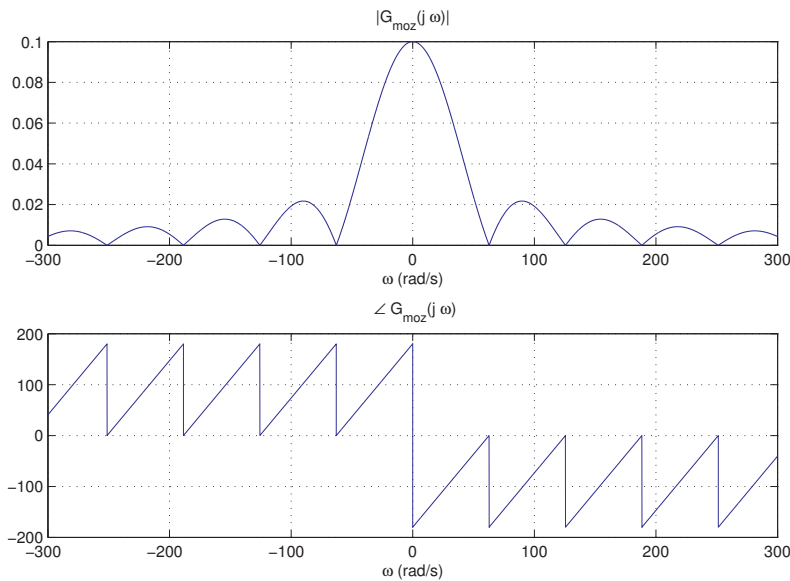


Fig. 3.10 Resposta freqüencial del mantenidor d'ordre zero per $T = 0.1$ s.

3.4. Teorema del mostrejatge

3.4.1. Exemple previ

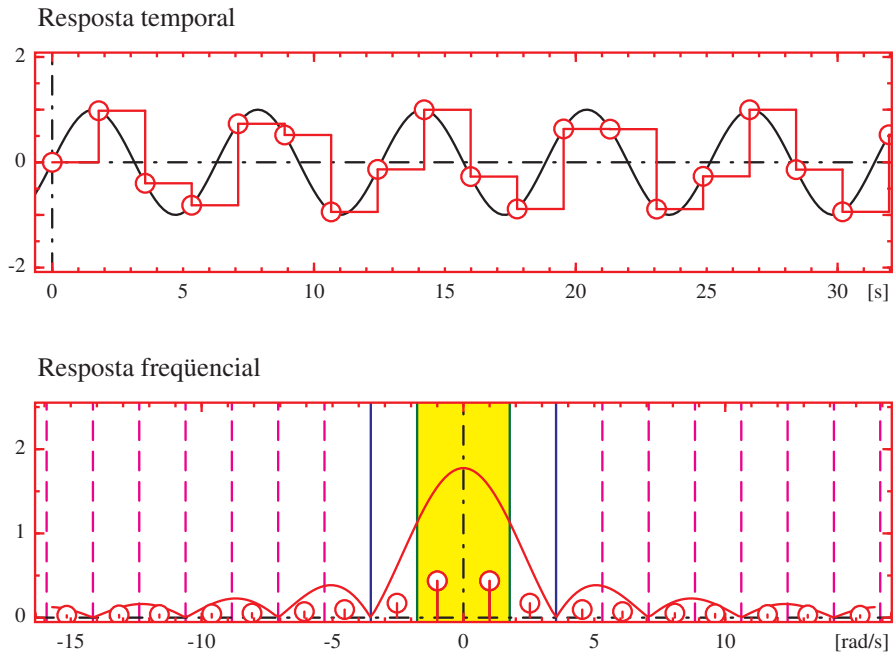
3.4.2. Anàlisi: senyal sinus

Un dels senyals més emprats a la teoria de control és el senyal sinusoidal. Per aquest motiu, a continuació s'aplica a aquest senyal les expressions que s'acaben de deduir. Un senyal sinusoidal pot escriure's de la forma:⁷

⁷ Observeu que aquest senyal pren valors diferents de 0 en temps negatius. Encara que no compleixi les característiques que s'assumeixen, permet il·lustrar les característiques principals que es volen introduir.



Fig. 3.11
Reconstrucció: Senyal mantingut d'un sinus mostrejat (resposta temporal i freqüencial).



$$y(t) = \sin(\omega \cdot t) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} - \frac{1}{2 \cdot j} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t},$$

com es pot observar aquest senyal té dues components freqüencials, ω i $-\omega$.

Tot seguit, es calcula la versió mostrejada seguint l'apartat 3.2.3:

$$y^*(t) = y(t) \delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_s t} = \frac{1}{2 \cdot T \cdot j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(k \cdot \omega_s - \omega)t} - e^{j(k \cdot \omega_s + \omega)t}$$

Tal com es pot observar, aquest senyal té infinits components freqüencials, situats a $k \cdot \omega_s + \omega$ i $k \cdot \omega_s - \omega$. Es pot observar que n'hi ha dos, obtinguts per $k = 0$, a les mateixes freqüències del senyal inicial. La part superior de la Figura 3.12, mostra una representació del senyal sinusoidal, $y(t)$, i la seva versió mostrejada $y^*(t)$ (en vermell). La part inferior de la Figura 3.12 mostra la representació dels components freqüencials de $y(t)$ (en negre) i els components freqüencials de $y^*(t)$ (en vermell). La zona en groc marca la zona definida pel rang de pulsacions $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$. La línia blava indica les pulsacions ω_s i $-\omega_s$.



T_Mostratge: L'aplicatiu permet observar com varien els components freqüencials de la funció sinus, $y^*(t)$, per a diferents períodes de mostratge. Modifiqueu el període de mostratge i analitzeu la evolució de les components freqüencials del senyal mostrejat.

Com es pot veure a la Figura 3.13, quan el nombre de mostres que hi ha per a cada període d'oscil·lació és petit, els components freqüencials surten de la banda $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$.

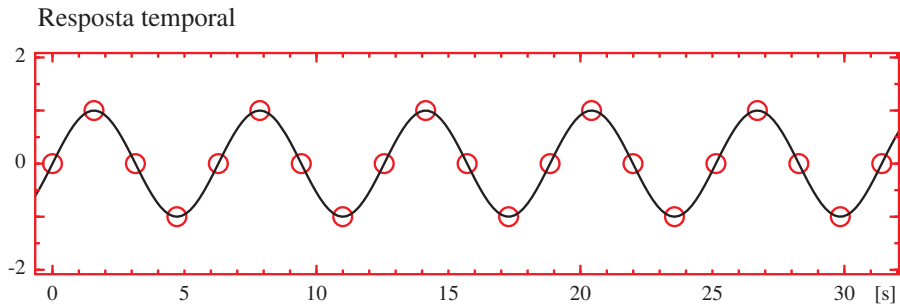


Fig. 3.12
 $T_{Mostratge}$: Senyal sinusoidal mostrejat i les seves components freqüencials : Exemple de components freqüencials dins la banda $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$.

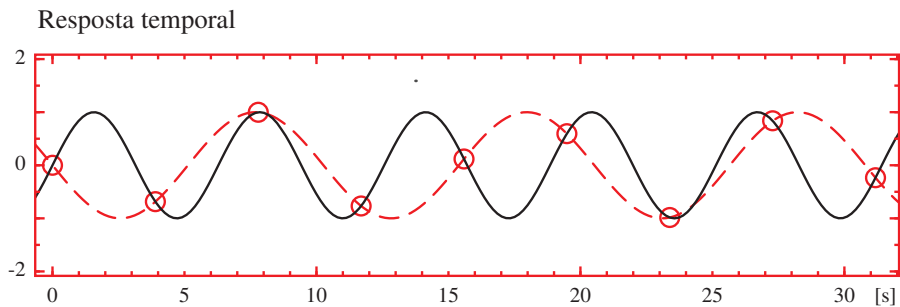
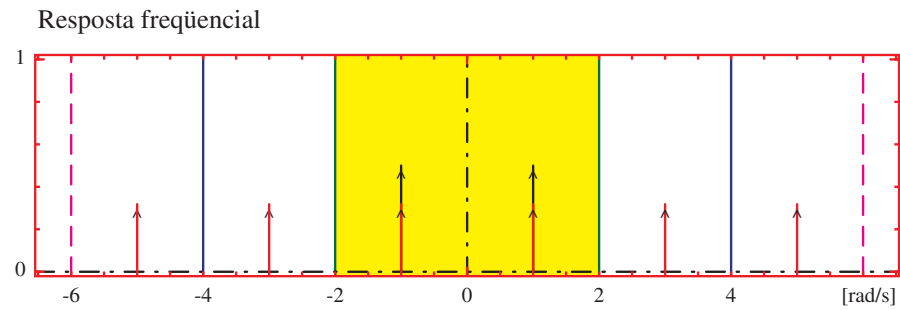
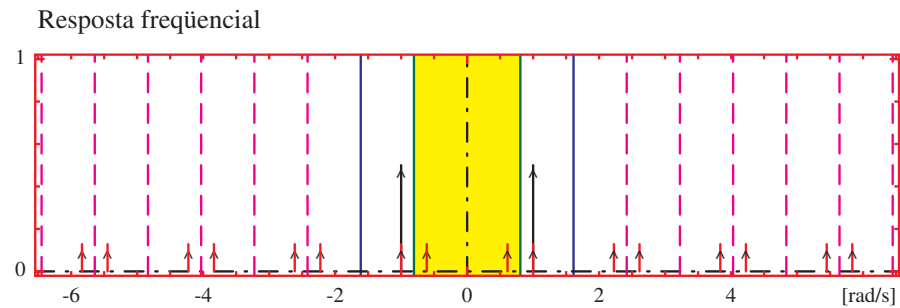


Fig. 3.13
 $T_{Mostratge}$: Senyal sinusoidal mostrejat i les seves components freqüencials : Exemple de components freqüencials fora de la banda $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$.



$T_{Mostratge}$: Modifiqueu el període de mostrejat i analitzeu l'evolució dels components freqüencials del senyal mostrejat. Determineu en quin moment els components freqüencials de $y^*(t)$ surten fora de la banda $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$.





En funció de la relació entre la pulsació de mostratge i la pulsació del sinus, es poden distingir tres casos:

1. Si $\omega_s > 2\omega$ els components freqüencials a l'interval $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ coincideixen amb els components del senyal de temps continu. Per tant, idealment, es podria construir un filtre passabaix que deixés passar únicament els components freqüencials en el rang $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ i reconstruir el senyal original.
2. Si ω_s compleix $k \cdot \omega_s - \omega = k \cdot \omega_s + \omega$, (ex. $\omega_s = 2\omega$), els components freqüencials del senyal mostrejat es fan idènticament 0.
3. Si $\omega_s < 2\omega$, els components freqüencials a l'interval $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ no coincideixen amb els senyals de temps continu. Per tant, en el cas d'aplicar el procediment de reconstrucció indicat anteriorment, el senyal obtingut seria diferent del senyal original.

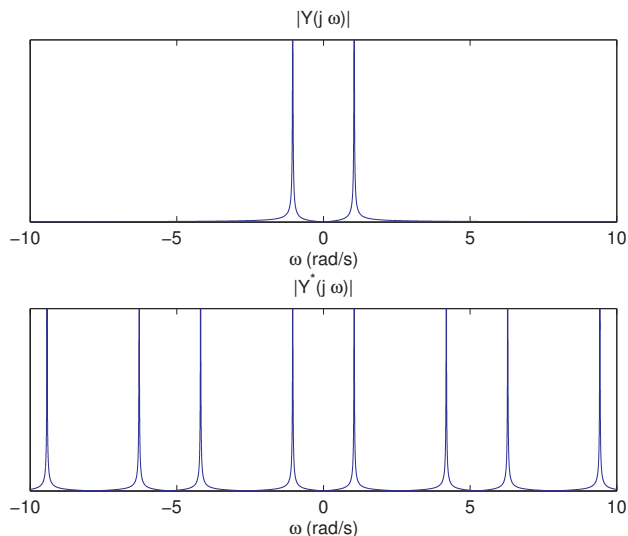
Un cop analitzades les característiques de $y^*(t)$ en el domini temporal, s'analitzaran en el domini transformat. La transformada de Laplace de (3.15) és:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Aplicant-hi la fórmula (3.10), s'obté la transformada de Laplace del senyal mostrejat:

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{s + j \cdot k \cdot \omega_s}{\omega^2 + (s + j \cdot k \cdot \omega_s)^2} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(s + j \cdot n \cdot \omega_s)}{s^2 + (2 \cdot k \cdot \omega_s \cdot j) s + \omega^2 - \omega_s^2 \cdot k^2} \\ &= \frac{1 - e^{2sT}}{-2e^{2sT} + \left(8 \cos\left(\frac{T\omega}{2}\right)^2 - 4\right) e^{sT} - 2}. \end{aligned}$$

Fig. 3.14
 $|Y(j\omega)|$ i $|Y^*(j\omega)|$ per
 $\omega = \frac{2\pi}{6}$ i $T = \frac{6}{5}$.



Com es pot veure, mentre la transformada original presenta una parell de pols complexos conjugats a $\pm\omega j$, la transformada del senyal mostrejat presenta infinits pols situats a $\pm(k\omega_s + \omega) \cdot j$. La Figura 3.14 mostra l'evolució de $|Y(j\omega)|$ i $|Y^*(j\omega)|$, per $\omega = \frac{2\pi}{6}$ rad/s i $T = \frac{6}{5}$ s. Pot observar-se que $|Y^*(j\omega)|$ és un senyal periòdic i que, a la zona de baixes freqüències, ambdós senyals presenten uns valors molt semblants.

3.4.3. Desenvolupament

A la secció 3.2, s'ha pogut observar que el mostratge és un fenomen no lineal, que pot ocasionar pèrdua d'informació. És a dir, dos senyals diferents, un cop mostrejats, poden passar a ser el mateix senyal. Això fa que, un cop mostrejat, no sempre es pugui recuperar el senyal inicial.

En aquesta secció, veurem en quines hipòtesis la informació es conserva.

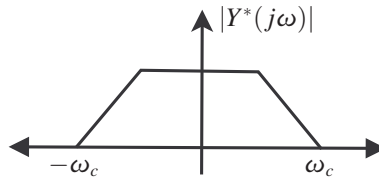


Fig. 3.15
Espectre d'un senyal de banda limitada.

Definició 20 *Senyal de banda limitada.* Es diu que un senyal analògic $y(t)$ és de banda limitada si el suport de la seva transformada de Fourier està fitat, i.e. $y(t)$ no té components freqüencials a partir d'una freqüència determinada.

La Figura 3.15 mostra una representació de l'espectre d'un senyal de banda limitada. L'espectre del senyal mostrejat és periòdic de període $\frac{2\pi}{\omega_s}$. Si la pulsació de mostratge és prou gran, $\omega_c < \frac{\omega_s}{2}$ (veure Figura 3.17), les diferents repeticions no solapen. La Figura 3.16 mostra l'espectre de $Y^*(s)$ en aquest cas. En aquestes circumstàncies, és possible recuperar el senyal original aplicant-hi un filtre, l'espectre freqüencial del qual tingui forma de rectangle que deixi invariant el contingut de la banda primària i elimini la resta de components. Quan la pulsació de mostratge, ω_s , és petita en comparació amb el màxim contingut freqüencial del senyal, les diferents repeticions solapen les unes amb les altres (Figura 3.17); aquest fenomen rep el nom de *recobriments espectral (aliasing)*. En aquestes circumstàncies no és possible recuperar el senyal original perquè no és possible separar les diferents repeticions mitjançant un procés de filtratge.

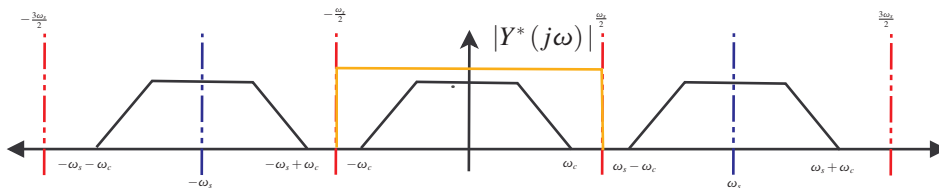


Fig. 3.16
Espectre d'un senyal de banda limitada mostrejat i espectre del filtre de reconstrucció.

Teorema 1 *Teorema del mostratge [7].* Si un senyal no conté components freqüencials per sobre de ω_c rad/s, quedarà completament caracteritzat pels seus valors en els instants del mostratge $k \cdot T$ si T satisfà



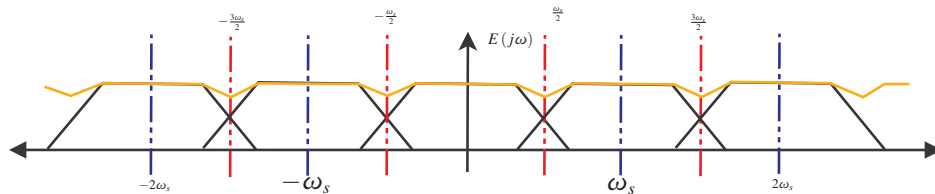
$$T < \frac{2\pi}{2\omega_c} = \frac{\pi}{\omega_c}$$

o, equivalentment,

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_c$$

Teorema 2 *Teorema del mostreig generalitzat. Un senyal de banda limitada (ω_c) es pot caracteritzar perfectament a partir de les seves mostres, obtingudes a una freqüència de mostreig $\omega_s < 2\omega_c$ si, a més de tenir informació del senyal, se'n té de les seves derivades. El període de mostreig es pot anar fent més gran si es disposa dels valors de les successives derivades del senyal. En concret, si es coneixen els valors del senyal i de les seves derivades fins a ordre n en els instants de mostreig; aleshores, el període de mostreig màxim que permet recuperar el senyal és $\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{2\pi}{\omega_c}\right)$.*

Fig. 3.17
Espectre d'un senyal de banda limitada mostreig amb una pulsació de mostreig petita en comparació amb ω_c , exemple de recobriments espectral.



El teorema del mostreig és realment rellevant en sistemes de comunicació en els quals el mostreig i la codificació del senyal mostreig s'utilitzen per a la transmissió, el rebuig de soroll,... i on la reconstrucció del senyal és primordial. Si bé es poden trobar moltes semblances en el mostreig i la codificació de senyals entre els sistemes de comunicació i els sistemes de control, cal no oblidar que els objectius d'uns i altres són diferents. Per exemple, en sistemes de control, la reconstrucció pot no ser realment rellevant.



T_Mostratge:

1. Busqueu interactivament un nombre de mostres que faci que el senyal mostreig representi el senyal de temps continu de forma adient. Observeu que s'han de verificar les hipòtesis del teorema del mostreig. Interpreteu-ho en el domini de la freqüència.
2. Fixeu la freqüència de mostreig en el límit determinat pel teorema del mostreig. Interpreteu-ho en el domini temporal. Quan val el senyal en els instants de mostreig?
3. Fixeu la freqüència de mostreig com la meitat de la freqüència del senyal de temps continu. Interpreteu-ho en el domini temporal. Quina és la freqüència del senyal a la banda primària?

Els senyals de la vida real, no són generalment de banda limitada. Això fa que sigui necessari determinar la banda passant d'un senyal de forma aproximada, fixant un rang de freqüències en què interessa treballar. Una vegada fixat aquest rang, és convenient emprar una relació entre la pulsació de mostreig i la màxima pulsació d'interès que sigui molt superior a la mínima que satisfà les hipòtesis del teorema del mostreig ($\omega_s > 5\omega_c$ o $\omega_s > 10\omega_c$ solen ser opcions força emprades).

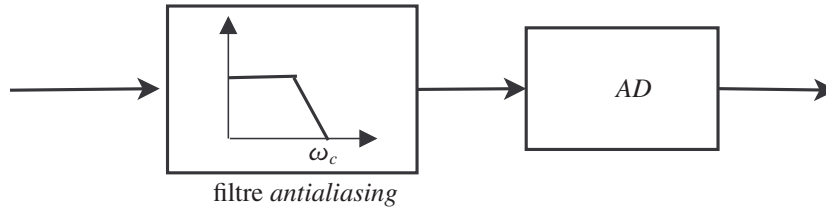


Fig. 3.18 Situació del filtre *antialiasing*.

Per limitar els components freqüencials per sobre de ω_c (soroll de mostratge), s'inclou un filtre passabaix de forma prèvia al procés de mostratge (Figura 3.18). Aquest procés s'ha de fer sempre en temps continu, un cop mostrejat, ja no és possible distingir entre els components originals i els que provenen del recobriment. L'objectiu del filtre *antialiasing* és atenuar al màxim els components freqüencials més enllà de ω_c i, d'aquesta manera, minimitzar el recobriment espectral.

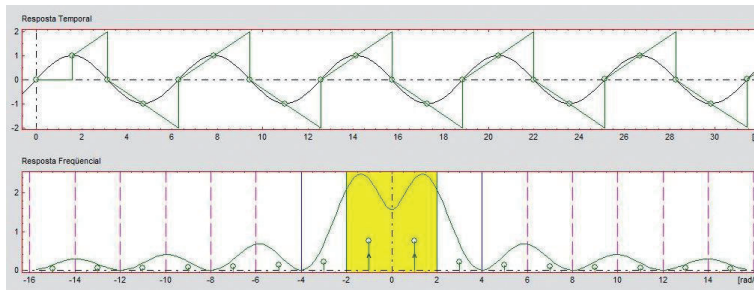


Fig. 3.19 *Reconstrucció*: Resposta temporal i freqüència del mantenidor de primer ordre.

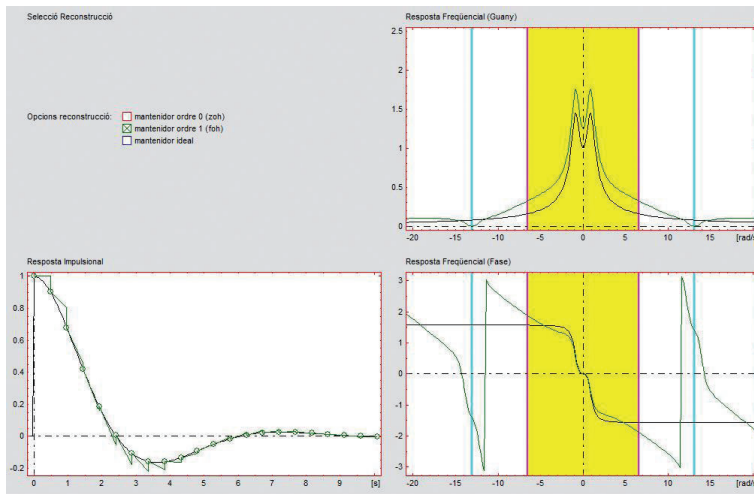


Fig. 3.20 *Reconstr_sist*: Reconstrucció de senyals.

3.5. Reconstrucció de senyals

En moltes ocasions, cal reconstruir el senyal de temps continu $y(t)$ a partir del senyal mostrejat $y^*(t)$. Aquest procediment pot realitzar-se unívocament sempre que durant el procés de mostratge s'hagin satisfet les hipòtesis del teorema del mostratge. Els mètodes



des de reconstrucció es basen a filtrar passabaix el senyal mostrejat de tal manera que totes les components freqüencials fora de la banda primària quedin fortament atenuades (idealment aniquilades).

El teorema del mostratge determina de quina manera es poden recuperar els senyals originals a partir dels senyals mostrats. Així es defineix el reconstructor ideal. Malauradament, el reconstructor ideal és no causal i no pot emprar-se a la pràctica. Per aquest motiu, s'utilitzen altres mecanismes com el mantenidor d'ordre zero o el mantenidor de primer ordre. Seguidament, es descriuen i comparen aquests mètodes.

3.5.1. Reconstrucció ideal

La resposta freqüencial d'un hipotètic filtre ideal hauria de venir donada per un rectangle d'alçada T i amplada $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$. D'aquesta manera, la sortida del sistema no tindria components fora de la banda primària i els de l'interior resultarien multiplicats per 1 i, per tant es recuperaria el senyal original.

La resposta impulsional d'un filtre d'aquestes característiques és:

$$g(t) = \text{sinc}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right) \quad (3.15)$$

on $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. La reconstrucció s'obindrà de la forma :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k \cdot T) \text{sinc}\left(\frac{(t - k \cdot T)}{T}\right)$$



Reconstr_sist: Analitzeu el resultat obtingut amb el reconstructor ideal. Observeu que es tracta d'una implementació d'ordre finit del reconstructor ideal.

La resposta impulsional, (3.15), presenta resposta no nul·la per temps negatius i, per tant, el filtre associat és no causal. Encara que aquest filtre té un gran interès teòric, no és aplicable a la pràctica.

3.5.2. Mantenidor d'ordre zero

El mantenidor d'ordre zero (moz) és un dels elements més emprats per passar senyals de temps discret a temps continu. Aquest dispositiu ha estat estudiat amb detall a la secció 3.3 observeu que es tracta d'un element passabaix i que té guany zero a la freqüència de mostratge i els seus harmònics, cosa que atenua molt les repeticions introduïdes pel mostratge.

Aquest reconstructor manté constant el valor de la sortida en el temps entre dos instants de mostratge consecutius. És a dir:

$$f(t) = f^*(k \cdot T) \quad \forall t \in [k \cdot T, (k + 1) \cdot T).$$

La funció de transferència del mantenidor d'ordre zero és:

$$G_{moz}(s) = \frac{1 - e^{-T \cdot s}}{s}.$$

Encara que la resposta freqüencial de $G_{moz}(s)$ (Figura 3.10) no és un rectangle, es tracta d'una aproximació.

El mantenidor d'ordre zero és el reconstructor més emprat a la pràctica. Atès que els convertidors DA ja l'incorporen, no és necessari afegir-hi cap element addicional.

3.5.3. Mantenidor de primer ordre

El mantenidor de primer ordre (o mantenidor d'ordre u, mou) és una aproximació més sofisticada que la del mantenidor d'ordre zero. Fa ús de la derivada del senyal mostrejat de la forma següent:

$$f(t) = f^*(k \cdot T) + f'(k \cdot T)(t - k \cdot T) \quad \forall t \in [k \cdot T, (k+1) \cdot T)$$

on:

$$f'(k \cdot T) = \frac{f^*(k \cdot T) - f^*((k-1) \cdot T)}{T}$$

és una estimació de la derivada del senyal als instants de mostrejat. La funció de transferència d'un mantenidor de primer ordre és:

$$G_{mou}(s) = \frac{1 + T \cdot s}{T} \left(\frac{1 - e^{-T \cdot s}}{s} \right)^2.$$

A la Figura 3.19, es pot observar la resposta freqüencial d'aquest filtre.

Reconstrucció:



1. Verifiqueu en quines condicions els senyals reconstruïts s'assemblen als senyals originals pels diferents reconstructors.
 2. Compareu la resposta del mantenidor de primer ordre i el mantenidor d'ordre zero per a períodes de mostrejat grans ($T > 0.5$ s). Quin dels dos aproxima millor?
 3. Quin és el guany de cada un dels reconstructors a la freqüència de mostrejat? I a la pulsació $\omega = 0$?
-

Encara que idealment semblaria que aquesta aproximació hauria d'oferir millors resultats, a la pràctica la millora és poca. Per aquest motiu, i per la complexitat tecnològica que comporta implementar-lo, és molt poc emprat.

És possible definir mantenidors d'ordre superior però, a la pràctica, no s'utilitzen per la complexitat tecnològica que implica la seva implementació.

3.6. Funció de transferència de sistemes mostrejats

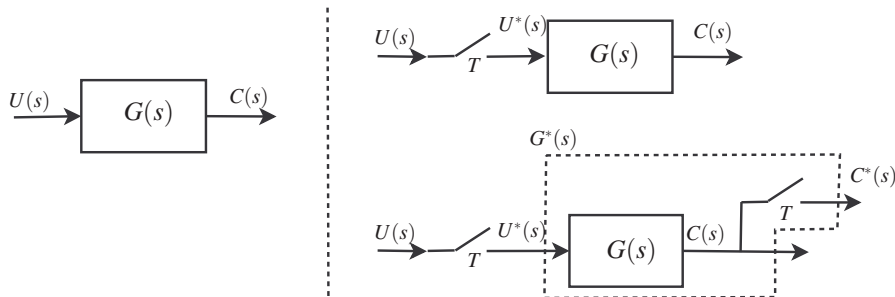
A les seccions anteriors, s'han analitzat els fenòmens i dispositius emprats en el mostratge, el manteniment, la conversió AD i la conversió DA dels senyals. En aquesta secció, s'analitza com afecten aquests fenòmens als sistemes.

3.6.1. Sistema de llaç obert

La funció de transferència, $G(s)$, d'un sistema de temps continu descriu la relació entre la transformada de Laplace de l'entrada del sistema, $U(s)$, i la transformada de Laplace de la sortida, $C(s)$ (la part esquerra de la Figura 3.21 mostra aquesta relació):

$$C(s) = G(s)U(s).$$

Fig. 3.21
Incorporació del
mostratge en els
sistemes de temps
continu.



Aquesta relació pot expressar-se també en el domini temporal, de la forma:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)U(s)\} = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau) d\tau = g(t) * u(t)$$

on $g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\}$ correspon a la resposta impulsional de $G(s)$.

Quan a l'entrada del sistema es col·loca un senyal mostrejat, $U^*(s)$, la sortida del sistema és de la forma (la part dreta superior de la Figura 3.21 mostra aquesta relació)

$$C(s) = G(s)U^*(s). \tag{3.16}$$

És important adonar-se que, en aquest cas, la sortida i l'entrada són de naturalesa diferent. La sortida és de temps continu, mentre l'entrada és un senyal mostrejat. Per aquest motiu, sol incorporar un mostrejador a la sortida del sistema; d'aquesta manera, la nova sortida, $C^*(s)$, serà de la mateixa naturalesa que l'entrada i es podrà obtenir un operador que els relacioni (la part dreta inferior de la Figura 3.21 mostra aquesta relació). Aquest mostrejador rep el nom de *mostrejador virtual*.

Fent servir (3.10) per calcular $C^*(s)$, s'obté:

$$C^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s + jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)U^*(s + jn\omega_s),$$

aprofitant que $U^*(s)$ és periòdic, resulta:

$$C^*(s) = \underbrace{\left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \right]}_{G^*(s)} U^*(s) = G^*(s)U^*(s).$$

$G^*(s)$ relaciona l'entrada mostrejada amb la sortida mostrejada i fa el mateix paper que una funció de transferència.

Proposició 21 *Funció de transferència d'un sistema mostrejat. La funció de transferència d'un sistema mostrejat és*

$$G^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s). \quad (3.17)$$

Proposició 22 *$G^*(s)$ coincideix amb la transformada de Laplace del senyal que resulta de mostrejar la resposta impulsional de $G(s)$.*

$$G^*(s) = \mathcal{L} \{ \mathcal{L}^{-1} \{ G(s) \} \}_{t=kT} \}. \quad (3.18)$$

Cal tenir present que $G^*(s)$ no conté informació sobre el comportament de la sortida de temps continu, és a dir, no conté informació del que passa entre instant de mostreig i instant de mostreig.

3.6.2. Àlgebra de blocs: connexió en sèrie

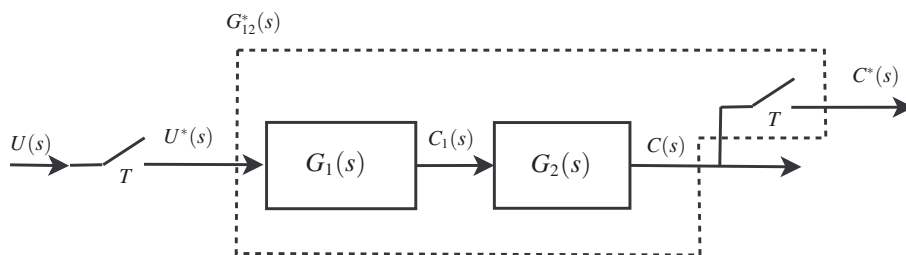


Fig. 3.22 Connexió en sèrie de dos sistemes no separats per mostrejadors.

Tot seguit, obtindrem la funció de transferència d'un sistema definit per la connexió en sèrie de dos sistemes de temps continu, amb un mostrejador a l'entrada i el mostrejador virtual a la sortida (Figura 3.22).

La sortida del primer sistema, $G_1(s)$, es pot escriure de la forma:

$$C_1(s) = G_1(s)U^*(s).$$

La sortida del segon sistema, $G_2(s)$, es pot escriure de la forma:

$$C(s) = G_2(s)C_1(s) = G_2(s)G_1(s)U^*(s).$$



Finalment, la sortida del mostrejadore virtual serà:

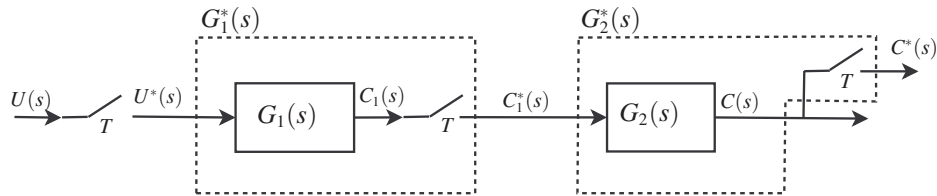
$$C^*(s) = (G_2G_1)^*(s)U^*(s).$$

On:

$$(G_2G_1)^*(s) \triangleq \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_2(s + jk\omega_s) G_1(s + jk\omega_s) \quad (3.19)$$

que coincideix amb la transformada de Laplace del senyal que resulta de mostrejar la resposta impulsional del producte de funcions de transferència $G_1(s)G_2(s)$.

Fig. 3.23
Connexió en sèrie de dos
sistemes separats per
mostrejadors.



Exemple 16 Donat un sistema com el de la Figura 3.22, amb $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$ i $G_2(s) = \frac{2}{4s+1}$, la funció de transferència del sistema és de la forma:

$$(G_2G_1)^*(s) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \{G_1(s)G_2(s)\}_{t=kT} e^{-ksT}.$$

Observeu que la inversa de la transformada de Laplace de $G_1(s)G_2(s)$ és:

$$g_{12}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G_1(s)G_2(s)\} = \frac{2}{3} \left(e^{\frac{3}{4}t} - 1 \right) e^{-t}.$$

Mostrejant aquest senyal amb període T i utilitzant l'expressió (3.8) per calcular $(G_2G_1)^*(s)$, s'obté:

$$(G_2G_1)^*(s) = \frac{2}{3} \frac{-e^{-T(s+1)} + e^{-\frac{T}{4}(4s+1)}}{(e^{-T(s+1)} - 1)(e^{-\frac{T}{4}(4s+1)} - 1)}$$

Tot seguit, es realitza el mateix procediment pel sistema de la Figura 3.23. Observeu que, en aquest cas, hi ha un mostrejadore entre $G_1(s)$ i $G_2(s)$. La sortida del primer sistema pot escriure's de la forma:

$$C_1(s) = G_1(s)U^*(s)$$

mentre que, pel segon sistema, tenim:

$$C(s) = G_2(s)C_1^*(s).$$

Com que els dos sistemes estan separats per un mostrejadore, és necessari mostrejar la sortida del primer sistema per tal de poder enllaçar-los (secció 3.6.1). Així,

$$C_1^*(s) = G_1^*(s)U^*(s)$$

i finalment:

$$C(s) = G_2(s) [G_1^*(s)U^*(s)].$$

Per tal d'obtenir la sortida del mostrejador virtual, cal mostrejar $C(s)$:

$$C^*(s) = G_2^*(s) [G_1^*(s)U^*(s)].$$

És important adonar-se que en mostrejar un senyal mostrejat amb el mateix període de mostratge, el senyal resta invariant (secció 3.6.1). Per aquest motiu, quan hi ha diferents elements mostrejats en sèrie i es tornen a mostrejar, tot queda igual.

Exemple 17 Donat un sistema com el de la Figura 3.23, amb $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$ i $G_2(s) = \frac{2}{4s+1}$, la funció de transferència del sistema és de la forma:

$$G_2^*(s)G_1^*(s) \triangleq \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \{G_2(s)\}_{t=kT} e^{-ksT} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \{G_1(s)\}_{t=kT} e^{-ksT} \right].$$

Així:

$$G_1^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T(s+1)}}$$

i

$$G_2^*(s) = \frac{1}{2 \left(1 - e^{-\frac{T(4s+1)}{4}} \right)}.$$

Finalment,

$$G_2^*(s)G_1^*(s) = \frac{1}{2(1 - e^{-T(s+1)}) \left(1 - e^{-\frac{T(4s+1)}{4}} \right)}$$

De l'observació dels exemples, es pot comprovar que generalment:

$$(G_2G_1)^*(s) \neq G_2^*(s)G_1^*(s).$$

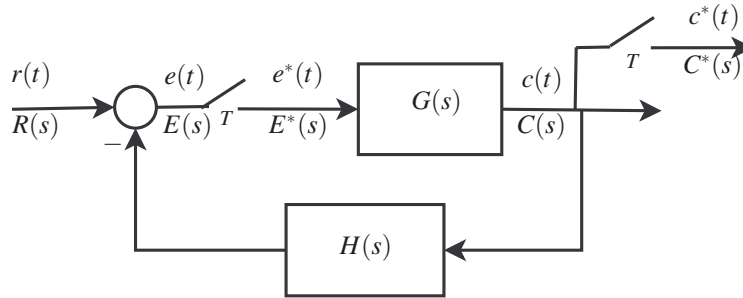
Encara que això es pot veure intuïtivament adonant-se que els senyals que veu el segon sistema són diferents en els dos casos i, per tant, la sortida serà diferent en els dos casos. Cal notar que encara que $(G_2G_1)^*(s)$ i $G_2^*(s)G_1^*(s)$ comparteixen als pols els seus zeros, són, en general, diferents.

3.6.3. Sistemes de llaç tancat

A la secció anterior, s'han calculat les funcions de transferència de sistemes en llaç obert a partir dels blocs que conformen el sistema i dels mostrejadors que hi apareixen. En aquesta secció, s'analitzen els sistemes de llaç tancat.



Fig. 3.24
Connexió en
realimentació de dos
sistemes.



Una forma metòdica de procedir per analitzar aquests sistemes és:

1. Etiquetar totes les variables que són:
 - Entrades al sistema de llaç tancat
 - Sortides del sistema de llaç tancat
 - Entrades als mostrejadors
2. Obtenir les variables de sortida del sistema i les entrades als mostrejadors en funció de les variables d'entrada al sistema i les sortides dels mostrejadors. Per fer-ho, seguir el diagrama de blocs sempre en sentit oposat al flux.
3. Mostrejar les relacions de les variables de sortida del sistema i les entrades als mostrejadors.
4. Manipular algebraicament les relacions obtingudes en el pas anterior fins a obtenir la relació entre les variables d'entrada i sortida desitjades.

Tot seguit, s'aplica aquest procediment a l'esquema de blocs de la Figura 3.24.

1. Donar nom a totes les variables:
 - Entrades al sistema de llaç tancat: $R(s)$
 - Sortides del sistema de llaç tancat: $C(s)$
 - Entrades als mostrejadors: $C(s), E(s)$
2. Obtenir les variables de sortida del sistema i les entrades als mostrejadors en funció de les variables d'entrada al sistema i les sortides dels mostrejadors:

Les relacions obtingudes així són de la forma:

$$E(s) = R(s) - H(s)G(s)E^*(s)$$

$$C(s) = G(s)E^*(s)$$

3. Mostrejar les relacions de les variables de sortida del sistema i les entrades als mostrejadors:

Les relacions prenen la forma:

$$E^*(s) = R^*(s) - (HG)^*(s)E^*(s)$$

$$C^*(s) = G^*(s)E^*(s)$$

4. Manipular algebraicament les relacions obtingudes en el pas anterior fins a obtenir la relació entre les variables d'entrada i sortida desitjades:

De la primera equació, s'obté:

$$E^*(s) = \frac{1}{1 + (HG)^*(s)} R^*(s)$$

i, substituint aquesta relació en la segona equació, s'obté:

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 + (HG)^*(s)} R^*(s).$$

Així, s'obtenen les funcions de transferència que descriuen el comportament del sistema (Figura 3.25):

$$\frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + (HG)^*(s)}, \quad \frac{E^*(s)}{R^*(s)} = \frac{1}{1 + (HG)^*(s)}.$$

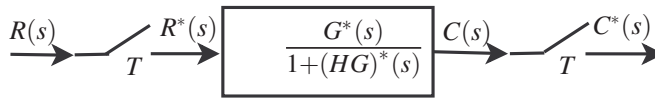


Fig. 3.25
Sistema equivalent al sistema de la Figura 3.24.

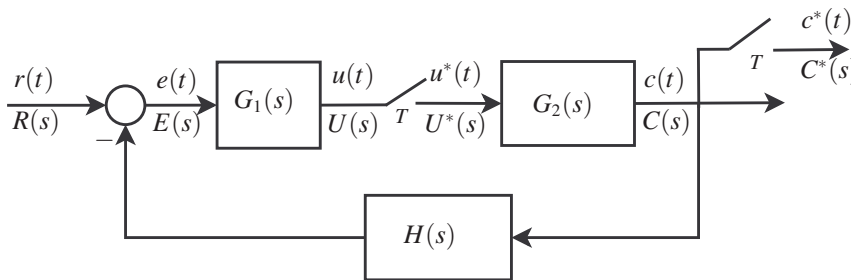


Fig. 3.26
Connexió en realimentació amb components no separats per mostrejadors.

Repetim el procediment per a l'esquema de blocs de la Figura 3.26.

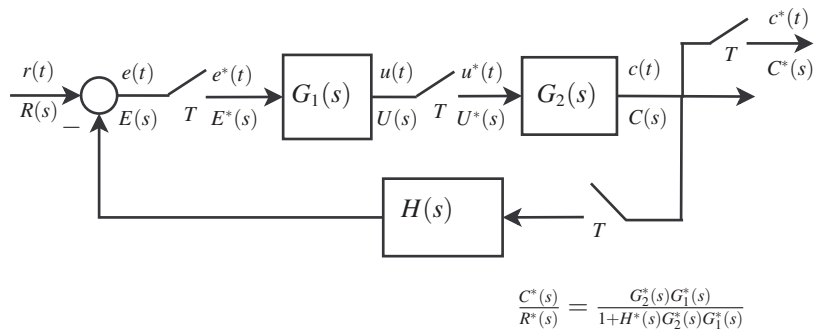
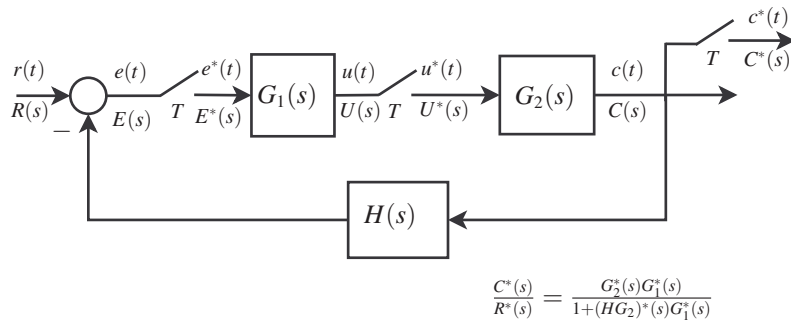
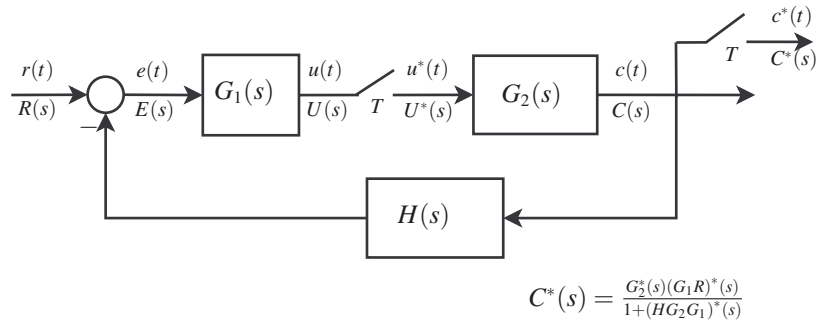
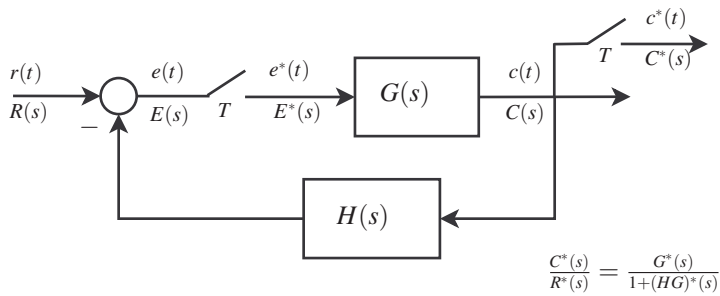
1. Donar nom a totes les variables:
 - Entrades al sistema de llaç tancat: $R(s)$
 - Sortides del sistema de llaç tancat: $C(s)$
 - Entrades als mostrejadors: $U(s), C(s)$
2. Obtenir les variables de sortida del sistema i les entrades als mostrejadors en funció de les variables d'entrada al sistema i les sortides dels mostrejadors:

$$U(s) = G_1(s)R(s) - G_1H(s)G_2(s)U^*(s)$$

$$C(s) = G_2(s)U^*(s)$$



Fig. 3.27
Alguns exemples de
connexió en
realimentació i les seves
funcions de
transferència.



3. Mostrejar les relacions de les variables de sortida del sistema i les entrades als mostrejadors:

$$U^*(s) = G_1 R^*(s) - (G_1 H G_2)^*(s) U^*(s)$$

$$C^*(s) = G_2^*(s) U^*(s)$$

4. Manipular algebraicament les relacions obtingudes en el pas anterior fins a obtenir la relació entre les variables d'entrada i sortida desitjades:

De la primera equació s'obté:

$$U^*(s) = \frac{(G_1 R)^*(s)}{1 + (G_1 H G_2)^*(s)}$$

i, substituint a la segona,

$$C^*(s) = \frac{G_2^*(s) (G_1 R)^*(s)}{1 + (G_1 H G_2)^*(s)}.$$

És important adonar-se que aquestes dues expressions no són funcions de transferència pròpiament dites, ja que del terme de la dreta no es pot aïllar $R^*(s)$. Aquestes expressions permeten calcular la transformada de Laplace de la sortida mostrejada, un cop conegut el senyal d'entrada, i no són, per tant, independents dels senyals d'entrada.

La Figura 3.27 mostra alguns esquemes de blocs i les seves funcions de transferència o transformades de Laplace mostrejades.

Bibliografia

- [1] Eliahu I. Jury. On the History and Progress of Sampled-Data Systems. *IEEE Control Systems Magazine (ISSN: 0272-1708)*, 7(1):16–21, February 1987.
- [2] Michael Santina, Allen R. Stubberud, and Peter Stubberud. *The Control Handbook, Second Edition: Control System Fundamentals*, chapter Quantization Effects, pages 14–1, 14–29. CRC Press, 2010.
- [3] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 5th edition edition, 2009.
- [4] G.V. Lago. Additions to sampled-data theory. *Proceedings of the national electronics conference*, pages 403–408, 1955.
- [5] W.K. Linvill. Sampled-data control systems through comparison of sampling. *Transactions-American Institute of Electrical Engineers*, 70:1779–1788, 1951.
- [6] Eliahu Ibrahim Jury. *Sampled-Data Control Systems*. Krieger Publishing Co., Inc., 1977.
- [7] C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 7:379–423, 623–656, July, October 1948.



Exercicis proposats

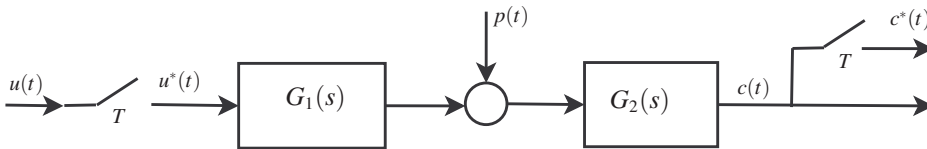
1. Els senyals $y_1(t) = \sin(t)$ i $y_2 = \sin(3t)$ es mostregen amb un període de mostrejatge $T = 0.5\pi$ s. Compareu els valors de $y_1^*(t)$ i $y_2^*(t)$. Expliqueu-ho en termes del teorema del mostrejatge.
2. Un senyal mostrejat $y^*(t) = 2 + \sin(k * T)$ amb un període $T = 0.1$ s prové del mostrejatge de $y(t)$. Analitzeu quines components freqüencials pot tenir $y(t)$.
3. Compareu la resposta freqüencial del mantenidor d'ordre zero amb la resposta freqüencial del reconstructor ideal. (Quina és la diferència d'atenuació en les freqüències $\omega = \frac{0.8\pi}{T}$ rad/s i $\omega = \frac{1.5\pi}{T}$ rad/s). Analitzeu com afectaria, en aquestes freqüències, la reconstrucció del senyal $y(t) = \sin(\frac{\pi}{2T}t) u_s(t)$ a partir de la versió mostrejada, amb període T .
4. La resposta impulsional d'un sistema digital ve donada per (en els intervals $(kT, (k+1)T)$) la resposta és nul·la):

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 & y(T) &= a & y(2T) &= 0 \\ y(3T) &= 0 & y(4T) &= a^2 & y(5T) &= 0 \\ y(6T) &= 0 & y(7T) &= a^3 & y(8T) &= 0 \\ y(9T) &= 0 & y(10T) &= a^4 & y(11T) &= 0 \end{aligned}$$

Calculeu la seva transformada $Y^*(s)$.

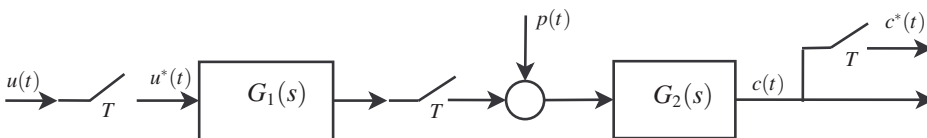
5. Donat el sistema $G(s) = \frac{1}{s+1}$, quin seria un període de mostrejatge adient per implementar un sistema de control amb computador?
6. Trobeu la transformada de Laplace de la sortida mostrejada, i si és possible la funció de transferència, del sistema de la Figura 3.28. Analitzeu la relació entre la sortida mostrejada i les diferents entrades.

Fig. 3.28
Esquema de blocs de dos sistemes en sèrie amb un entrada intermitja.



7. Trobeu la transformada de Laplace de la sortida mostrejada i, si és possible, la funció de transferència del sistema de la Figura 3.29. Analitzeu la relació entre la sortida mostrejada i les diferents entrades. Compareu els resultats amb els obtinguts a l'exercici anterior.

Fig. 3.29
Esquema de blocs de dos sistemes en sèrie amb un entrada intermedia.



8. Trobeu la transformada de Laplace de la sortida mostrejada i, si és possible, la funció de transferència del sistema de la Figura 3.30.

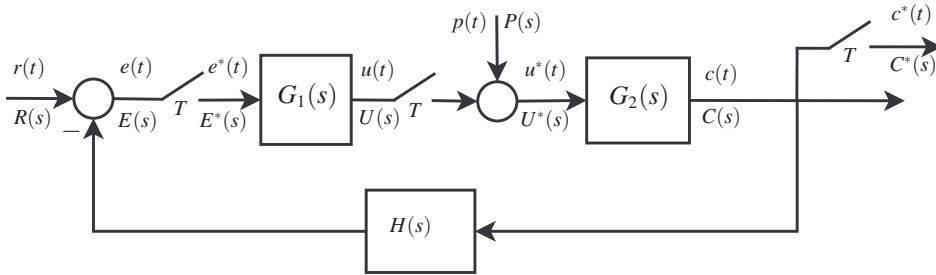


Fig. 3.30 Esquema de blocs d'un sistema de laç tancat mostrejat amb dues entrades.

9. Trobeu la funció de transferència dels sistemes de laç tancat que es mostren a la Figura 3.31.

- Assumint que el sistema de laç tancat és estable; quin serà l'error en estat estacionari del sistema de temps continu enfront d'entrades de tipus graó. I en el cas del sistema de temps discret?
- Per al cas $k_p = 1$ i $k_v = \frac{1}{2}$, analitzeu la resposta temporal del sistema de laç tancat de temps continu. És possible dir alguna cosa sobre la resposta del sistema de temps discret?

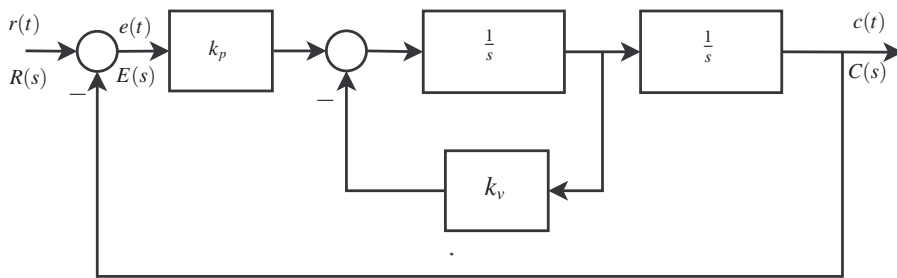
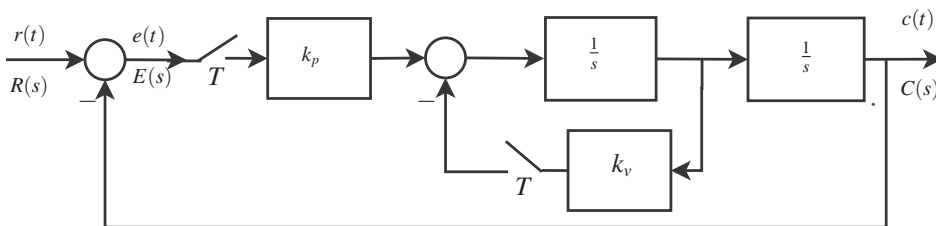


Fig. 3.31 Esquemes de sistemes en laç tancat: comparació d'un sistema de temps continu i un sistema de temps discret.



10. Trobeu $G^*(s)$ pel senyal definit per $G(s) = \frac{A(s)F^*(s)B(s)}{B(s)C^*(s)D(s)E^*(s)}$.

→ 4



La transformada en z

Estudiar senyals i sistemes en el domini temporal resulta difícil. La transformada \mathfrak{z} els canvia de domini. En aquest nou domini, les propietats principals, com l'estabilitat o els estats estacionaris, són fàcilment caracteritzables. Per aquest motiu, aquesta transformada permet estudiar, de forma senzilla, el comportament dels sistemes lineals.

La transformada \mathfrak{z} juga en sistemes de temps discret un paper semblant al de la transformada de Laplace en sistemes de temps continu. En particular, les equacions de recurrències es transformen en equacions algebraïques.

En aquest capítol, es presenta la definició de la transformada \mathfrak{z} i se'n descriuen les propietats principals i es mostren exemples de transformació directa i indirecta.

4.1. Definició

Definició 21 *Transformada \mathfrak{z} . La transformada \mathfrak{z} d'un senyal y_k es defineix de la forma:*

$$Y(z) = \mathfrak{z}\{y_k\} = y_0 + y_1 \cdot z^{-1} + y_2 \cdot z^{-2} + y_3 \cdot z^{-3} + y_4 \cdot z^{-4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}. \quad (4.1)$$

Per tal d'obtenir expressions més compactes, cal sumar aquesta sèrie. $Y(z)$ conté tota la informació sobre y_k . Per tant, de l'anàlisi de $Y(z)$, se'n poden concloure resultats sobre y_k .

Exemple 18 *La transformada \mathfrak{z} del senyal $y = (1, 6, 7, 0, \dots, 0, \dots)$ és:*

$$Y(z) = \mathfrak{z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = 1 + 6 \cdot z^{-1} + 7 \cdot z^{-2} = \frac{z^2 + 6z + 7}{z^2}.$$

Exemple 19 *La transformada \mathfrak{z} del senyal impuls unitari, δ_k , és:*

$$\Delta(z) = \mathfrak{z}\{\delta_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k z^{-k} = 1.$$



Exemple 20 La transformada \mathfrak{z} del senyal graó unitari, μ_k , és:

$$\mu(z) = \mathfrak{z} \{ \mu_k \} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

Es tracta d'una sèrie geomètrica de raó $\frac{1}{z}$.

La suma d'una sèrie geomètrica de raó r compleix:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

i, per tant, si $|r| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1}{1 - r}$.

Així, la transformada \mathfrak{z} del graó és:

$$\mu(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}$$

Taula. 4.1
Taula de transformades \mathfrak{z}
dels senyals principals.

Senyal	Transformada \mathfrak{z}
δ_k	1
μ_k	$\frac{z}{z - 1}$
k	$\frac{z}{(z - 1)^2}$
a^k	$\frac{z}{z - a}$
e^{-ak}	$\frac{z}{z - e^{-a}}$
k^2	$\frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}$
$k \cdot a^k$	$\frac{az}{(z - a)^2}$
$\sin(ak)$	$\frac{z \sin(a)}{z^2 - 2 \cdot \cos(a) \cdot z + 1}$
$\cos(ak)$	$\frac{z(z - \cos(a))}{z^2 - 2 \cdot \cos(a) \cdot z + 1}$
$a^k \sin(bk)$	$\frac{az \sin(b)}{z^2 - 2 \cdot a \cdot \cos(b) \cdot z + a^2}$
$a^k \cos(bk)$	$\frac{z^2 - az \cos(b)}{z^2 - 2 \cdot a \cdot \cos(b) \cdot z + a^2}$

Exemple 21 La transformada \mathfrak{z} del senyal rampa unitària, $y_k = k$, és:

$$Y(z) = \mathfrak{z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = 1 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 3 \cdot z^{-3} + \dots$$

Es tracta d'una sèrie aritmètica-geomètrica de raó $\frac{1}{z}$.

Recuperant que la suma d'una sèrie aritmètica-geomètrica de raó r complex (assumint $|r| < 1$):

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \dots + (n)r^{n-1} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Així, la transformada \mathfrak{z} de la rampa unitària pot escriure's:

$$Y(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{1}{z}\right)^{k-1} = \frac{\frac{1}{z}}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Seguint aquest procediment i utilitzant la fórmula d'Euler, es poden obtenir les transformades \mathfrak{z} dels principals senyals emprats a la teoria de control. La Taula 4.1 en mostra uns quants exemples.

Definició 22 Pols i zeros. La majoria de transformades \mathfrak{z} es poden escriure com a funcions racionals (fraccions de polinomis), $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$. S'anomenen pols de $G(z)$ els zeros del polinomi del denominador ($D(z) = 0$) i zeros de $G(z)$ els zeros del polinomi del numerador ($N(z) = 0$).

4.2. Propietats de la transformada \mathfrak{z}

En aquesta secció, es presenten les propietats principals de la transformada \mathfrak{z} . La majoria d'aquestes propietats es dedueixen directament de la definició (23).

– Linealitat: Siguin y_k, x_k dos senyals de temps discret i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dos escalars; aleshores:

$$\mathfrak{z}\{\alpha \cdot y_k + \beta \cdot x_k\} = \alpha \cdot \mathfrak{z}\{y_k\} + \beta \mathfrak{z}\{x_k\}.$$

– Retard (translació real). Donat un senyal de temps discret y_k i un nombre natural $n \in \mathbb{N}$, aleshores:

$$\mathfrak{z}\{y_k\} = Y(z) \Rightarrow \begin{cases} \mathfrak{z}\{y_{k-n}\} = z^{-n} \cdot Y(z) \\ \mathfrak{z}\{y_{k+n}\} = z^n [Y(z) - \sum_{h=0}^{n-1} y_h z^{-h}] \end{cases}$$

Exemple 22 Atès que $\mathfrak{z}\{\cos(ak)\} = \frac{z(z-\cos(a))}{z^2-2\cos(a)\cdot z+1}$, la transformada \mathfrak{z} de $\cos(a(k-1))$ és:

$$\frac{z(z-\cos(a))}{z(z^2-2\cos(a)\cdot z+1)} = \frac{z-\cos(a)}{z^2-2\cos(a)\cdot z+1}$$



i la transformada \mathfrak{z} de $\cos(a(k+1))$ és:

$$\frac{z^2(z - \cos(a))}{z^2 - 2 \cdot \cos(a) \cdot z + 1} - \underbrace{\cos(a \cdot 0)}_1 z = \frac{\cos(a)z^2 - z}{z^2 - 2 \cdot \cos(a) \cdot z + 1}$$

– Translació complexa. Donat un senyal de temps discret y_k i nombre $a \in \mathbb{C}$, aleshores:

$$\mathfrak{z}\{y_k\} = Y(z) \Rightarrow \mathfrak{z}\{e^{\mp ak} y_k\} = Y(ze^{\pm a}).$$

Exemple 23 Atès que $\mathfrak{z}\{\mu_k\} = \frac{z}{z-1}$, la transformada \mathfrak{z} de e^{-ak} és:

$$\frac{z}{z-1} \Big|_{z=ze^a} = \frac{ze^a}{ze^a - 1} = \frac{z}{z - e^{-a}}.$$

– Teorema del valor inicial. Donat un senyal de temps discret y_k i la seva transformada $Y(z) = \mathfrak{z}\{y_k\}$, en cas que el límit $\lim_{z \rightarrow \infty} Y(z)$ existeixi, aleshores: $y_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z)$.

Exemple 24 La transformada \mathfrak{z} de $\cos(ak)$ és $\frac{z(z - \cos(a))}{z^2 - 2 \cdot \cos(a) \cdot z + 1}$. Observeu que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z - \cos(a))}{z^2 - 2 \cdot \cos(a) \cdot z + 1} = 1$$

que correspon a $\cos(a \cdot 0) = 1$.

– Teorema del valor final. Sigui y_k un senyal de temps discret i $Y(z) = \mathfrak{z}\{y_k\}$ la seva transformada \mathfrak{z} . Si $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k \in \mathbb{R}$ i $(1 - z^{-1})Y(z)$ no té pols a $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}$, aleshores:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z).$$

Exemple 25 $(1 - z^{-1})\mathfrak{z}\{\mu_k\}$ és constant i val 1; per tant, no té pols al disc unitat. Així doncs,

$$1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z}{z-1} = 1,$$

tal com estableix la propietat.

Exemple 26 Sigui $y_k = \sin(\omega \cdot k)$ i la seva transformada \mathfrak{z} , $Y(z) = \frac{z \sin(a)}{z^2 - 2 \cdot \cos(a) \cdot z + 1}$.

Observeu que $Y(z)(1 - z^{-1})$ presenta pols amb $|z| = 1$ i, per tant, el teorema del valor final no és aplicable. Podem comprovar també que $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k$ no existeix, doncs.

– Derivació parcial. Sigui $y_k(a)$ una seqüència que depèn del paràmetre $a \in \mathbb{C}$; aleshores, la seva transformada depèn també d'aquest paràmetre, $Y(z, a)$, i val:

$$\mathfrak{z}\left\{\frac{\partial}{\partial a}[y_k(a)]\right\} = \frac{\partial}{\partial a}Y(z, a).$$

Exemple 27 Es vol trobar la transformada \mathfrak{z} del senyal $y_k(a) = k^2 e^{-ak}$.
Com que

$$\frac{\partial (-k \cdot e^{-a \cdot k})}{\partial a} = k^2 e^{-ak}$$

i que

$$\mathfrak{z} \{k \cdot e^{-a \cdot k}\} = \frac{e^{-a} z}{(z - e^{-a})^2},$$

s'obté:

$$\mathfrak{z} \{k^2 e^{-ak}\} = \mathfrak{z} \left\{ \frac{\partial (-k \cdot e^{-a \cdot k})}{\partial a} \right\} = -\frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{e^{-a} z}{(z - e^{-a})^2} \right] = \frac{e^{-a} (z + e^{-a}) z}{(z - e^{-a})^3},$$

- Convulsió. Siguin y_k i x_k dos senyals de temps discret. Es defineix el producte de convulsió, $y_k * x_k$, per

$$(y * x)_k = \sum_{n=0}^k y_{k-n} \cdot x_n.$$

Aleshores, si $Y(z)$ i $X(z)$ són les transformades \mathfrak{z} de y_k i x_k , respectivament, es verifica

$$\mathfrak{z} \{(y * x)_k\} = Y(z)X(z) = X(z)Y(z).$$

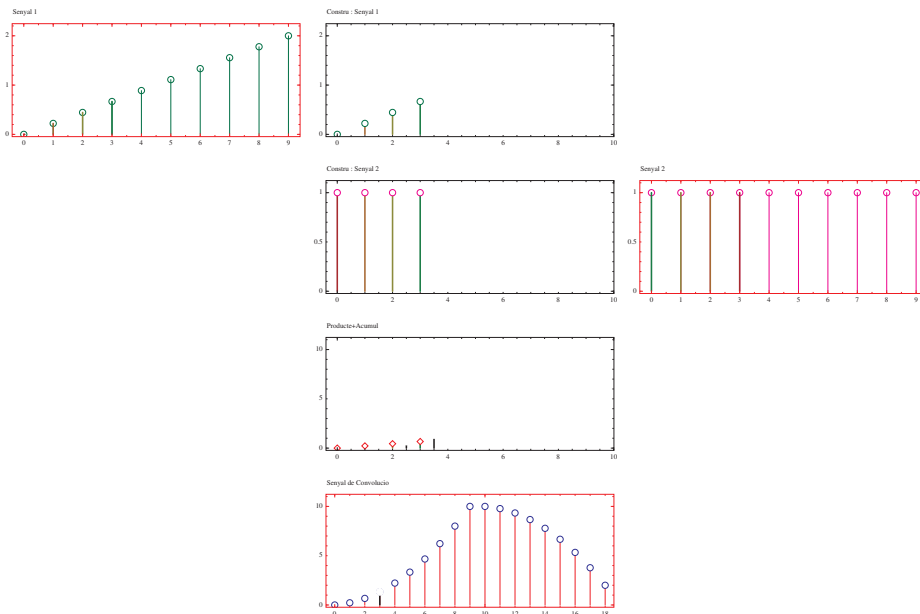


Fig. 4.1
Discrete_convolution:
Construcció de la
convulsió de dos
senyals de temps discret.



Això és: la transformada \mathfrak{z} del producte de convolució és el producte de transformades \mathfrak{z} dels senyals. La convolució és una operació especialment interessant en la teoria de sistemes, perquè permet calcular fàcilment la resposta d'un sistema a qualsevol excitació a partir de la seva resposta impulsional.

Algunes de les propietats de la convolució són:

- Linealitat: $x_k * (\alpha \cdot t_k + \beta \cdot r_k) = \alpha x_k * t_k + \beta x_k * r_k$
- Commutativitat: $x_k * t_k = t_k * x_k$

La Figura 4.1 il·lustra el procés de construcció de la convolució de dos senyals. La figura està composta per tres columnes: la de l'esquerra és on es visualitza el primer senyal, la de la dreta és on es visualitza el segon senyal i a la part inferior de la columna central, es visualitza el senyal resultat de convolucionar els senyals anteriors.



Discrete_convolution:

1. Seleccioneu el senyal impuls en el senyal 1, i l'exponencial en el segon. Quin és el senyal de convolució?
 2. Construïu un senyal impuls desplaçat en el temps en el senyal 2 i seleccioneu el senyal impuls en el senyal 1. Quin és el senyal de convolució?
 3. Seleccioneu en un dels senyals el senyal graó i en l'altre, un senyal exponencial. Com relacioneu el senyal de convolució amb la resposta al graó d'un sistema de primer ordre?
-

4.3. Càlcul de transformades

Hi ha diferents maneres de calcular la transformada \mathfrak{z} d'un senyal. La manera més directa és aplicar la definició i sumar, si es pot, la sèrie resultant. Aplicant aquest procediment i la fórmula d'Euler $e^{a+bj} = e^a(\cos(b) + j\sin(b))$, s'han obtingut les transformades que es mostren a la Taula 4.1.

Altres transformades es poden calcular combinant les transformades de la Taula 4.1 i les propietats de la transformada \mathfrak{z} (Secció 4.2). D'aquesta manera, es poden obtenir la majoria de transformades d'interès.

Exemple 28 Donat el senyal definit per $y_k = \mu_{k-2} - \mu_{k-4}$, per obtenir-ne la transformada \mathfrak{z} s'aplica, en primer lloc la propietat de linealitat:

$$Y(z) = \mathfrak{z} \{ \mu_{k-2} - \mu_{k-4} \} = \mathfrak{z} \{ \mu_{k-2} \} - \mathfrak{z} \{ \mu_{k-4} \}.$$

Posteriorment, es pot aplicar la propietat de translació real a cadascun del terme i el fet que $\mathfrak{z} \{ \mu_k \} = \frac{z}{z-1}$:

$$Y(z) = z^{-2} \frac{z}{z-1} - z^{-4} \frac{z}{z-1} = \frac{z^3 - z}{z^4(z-1)} = \frac{z^2 - 1}{z^3(z-1)} = \frac{z+1}{z^3}.$$

4.4. Càlcul d'antitransformades

Definició 23 *Antitransformada* \mathfrak{z} . Anomenem antitransformar \mathfrak{z} de $Y(z)$ i escrivim $\mathfrak{z}^{-1}\{Y(z)\}$ el procés d'obtenir una seqüència, y_k , tal que $\mathfrak{z}\{y_k\} = Y(z)$. De la definició, es dedueix que aquesta seqüència és única.

El càlcul d'antitransformades es pot fer de diferents maneres. Tot seguit, se n'introdueixen dues: la divisió de polinomis i la descomposició en fraccions simples.

4.4.1. Divisió de polinomis

La majoria de transformades \mathfrak{z} són funcions racionals de polinomis:

$$Y(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}, \text{ on } m \leq n. \quad (4.2)$$

Aquestes funcions racionals poden interpretar-se con la divisió de dos polinomis. Si es fa aquesta divisió, se n'obté una expressió de la forma:

$$Y(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + c_4 z^{-4} + \dots$$

Si es compara aquesta expressió amb l'obtinguda a (4.1), s'observa que els coeficients c_k que van apareixent en el quocient de la divisió corresponen als valors successius de la seqüència y_k . Per tant, de forma directa es va obtenint el senyal volgut.

No sempre és senzill obtenir una expressió general a partir de l'observació dels primers termes de la seqüència.

Proposició 23 *Si la funció racional $Y(z)$, (4.2), és de grau relatiu $l = n - m$, els l primers termes del senyal y_k són nuls.*

Es dedueix directament en fer la divisió dels polinomis que el primer terme diferent de zero és el coeficient de z^{-l} , que val $\frac{b_m}{a_n}$.

Exemple 29 *Donada $\mathfrak{z}\{y_k\} = Y(z) = \frac{3z^2 + 2z + 1}{z^4 + 5z^3 + 2z - 1}$, ens preguntem pels primers termes de la seva antitransformada \mathfrak{z} , y_k .*

Dividint el numerador entre el denominador, s'obté:

$$\begin{array}{r} 3z^2 \quad +2z \quad +1 \\ -3z^2 \quad -15z \quad 0 \quad -6z^{-1} \quad 3z^{-2} \\ \quad -13z \quad 1 \quad -6z^{-1} \quad 3z^{-2} \\ \quad \quad +13z \quad +65 \quad \quad +26z^{-2} \quad -13z^{-3} \\ \quad \quad \quad +66 \quad -6z^{-1} \quad 29z^{-2} \quad -13z^{-3} \\ \quad \quad \quad \quad -66 \quad -330z^{-1} \quad \quad -132z^{-3} \quad +66z^{-4} \\ \quad \quad \quad \quad \quad -336z^{-1} \quad 29z^{-2} \quad -145z^{-3} \quad +66z^{-4} \end{array} \quad \frac{z^4 + 5z^3 + 2z - 1}{3z^{-2} - 13z^{-3} + 66z^{-4}}$$

Així, els primers termes de y_k són:

$$y_k = (0, 0, 3, -13, 66, \dots).$$



Observem que, atès que la transformada \mathfrak{z} és de grau relatiu 2, els dos primers valors que pren el senyal són nuls.

4.4.2. Descomposició en fraccions simples

Aquesta tècnica, que també es fa servir en el càlcul de primitives de funcions racionals, consisteix a descompondre $Y(z)$ com a suma de fraccions simples i, aprofitant la linealitat de la transformada \mathfrak{z} , buscar les antitransformades de les fraccions simples a les taules de transformades.

Per descompondre una funció racional:

$$Y(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \text{ on } m \leq n,$$

cal seguir els passos següents:

1. Factoritzar el polinomi del denominador:

$$Y(z) = \frac{\frac{b_m}{a_n} z^m + \frac{b_{m-1}}{a_n} z^{m-1} + \dots + \frac{b_1}{a_n} z + \frac{b_0}{a_n}}{(z - p_1) \dots (z - p_n)}, \text{ on } m \leq n.$$

2. En cas que el polinomi del numerador tingui un zero en $z = 0$, $b_0 = 0$, es defineix

$$Y'(z) = \frac{Y(z)}{z}:$$

$$Y'(z) = \frac{Y(z)}{z} = \frac{\frac{b_m}{a_n} z^{m-1} + \frac{b_{m-1}}{a_n} z^{m-2} + \dots + \frac{b_1}{a_n}}{(z - p_1) \dots (z - p_n)}, \text{ on } m \leq n.$$

En cas que el polinomi del numerador no tingui zeros en $z = 0$, $b_0 \neq 0$, es defineix $Y'(z) = Y(z)$.

3. Per a cada pol de $Y'(z)$, $p_i \in \mathbb{C}$, diferent s'afegirà un terme a la descomposició:

– Per a cada pol, $p_i \in \mathbb{C}$, de multiplicitat senzilla, s'incorpora un terme de la forma:

$$\frac{\alpha_i}{z - p_i}, \quad \alpha_i = [(z - p_i) Y'(z)]_{z=p_i}$$

– Per a cada pol, $p_i \in \mathbb{C}$, de multiplicitat r , s'incorporen els termes següents:

$$\frac{\beta_i^r}{(z - p_i)^r} + \frac{\beta_i^{r-1}}{(z - p_i)^{r-1}} + \dots + \frac{\beta_i^1}{(z - p_i)}, \quad \beta_i^k = \frac{1}{(r - k)!} \left[\frac{\partial^{r-k}}{\partial z^{r-k}} [(z - p_i)^r Y'(z)] \right]_{z=p_i}$$

4. $Y'(z)$ s'expressa com la suma de tots els termes obtinguts. En cas que $Y'(z) = \frac{Y(z)}{z}$, s'obté l'expressió de $Y(z)$ multiplicant els dos cantons de la igualtat per z .
5. Tot seguit, y_k s'expressa com la suma de la antitransformades \mathfrak{z} de cadascun dels termes (obtinguts emprant les taules de transformades).

Exemple 30 Donada la transformada \mathfrak{z} , $Y(z) = \frac{z^2(z-1)}{z^3-1.1z^2-1.9z+0.2}$ determineu $\mathfrak{z}^{-1}\{Y(z)\}$. Per fer-ho, s'aplicarà el mètode descrit anteriorment per tal de descompondre la transformada en elements senzills:

1. En primer lloc, es factoritza el polinomi del denominador:

$$Y(z) = \frac{z^2(z-1)}{(z-2)(z-0.1)(z+1)}.$$

2. Donat que el polinomi del numerador té zeros en $z = 0$, aleshores

$$Y'(z) = Y(z)/z = \frac{z(z-1)}{(z-2)(z-0.1)(z+1)}.$$

3. Tots els zeros del denominador són senzills. Per tant, en la descomposició cal afegir els termes següents:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{z-2} \quad , \quad \alpha_1 &= [(z-2)Y'(z)]_{z=2} = 0.35087 \\ \frac{\alpha_2}{z-0.1} \quad , \quad \alpha_2 &= [(z-0.1)Y'(z)]_{z=0.1} = 0.04306 \\ \frac{\alpha_3}{z+1} \quad , \quad \alpha_3 &= [(z)Y'(z)]_{z=-1} = 0.60606. \end{aligned}$$

Per tant,

$$Y'(z) = \frac{0.35087}{z-2} + \frac{0.04306}{z-0.1} + \frac{0.60606}{z+1}$$

i

$$Y(z) = \frac{0.35087z}{z-2} + \frac{0.04306z}{z-0.1} + \frac{0.60606z}{z+1}.$$

Cadascun d'aquests elements es pot trobar a les taules de transformades i, per tant, s'obté:

$$\begin{aligned} y_k &= \mathfrak{z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathfrak{z}^{-1}\left\{\frac{0.35087z}{z-2}\right\} + \mathfrak{z}^{-1}\left\{\frac{0.04306z}{z-0.1}\right\} + \mathfrak{z}^{-1}\left\{\frac{0.60606z}{z+1}\right\} \\ &= 0.3508(2)^k + 0.04306(0.1)^k + 0.60606(-1)^k. \end{aligned}$$

Exemple 31 Donada la transformada $Y(z) = \frac{z^2+4z}{z^5-\frac{1}{2}z^4-\frac{1}{4}z^3+\frac{13}{8}z^2+\frac{5}{4}z+\frac{1}{4}}$, determineu $\mathfrak{z}^{-1}\{Y(z)\}$.

Per fer-ho, s'aplicarà el mètode basat a descompondre la transformada en elements senzills:



1. En primer lloc, es factoritza el polinomi del denominador:

$$Y(z) = \frac{z^2 + 4z}{(z - 1 + j)(z - 1 - j)\left(z + \frac{1}{2}\right)^3}$$

2. Donat que el polinomi del numerador té zeros en $z = 0$, aleshores $Y'(z) = \frac{Y(z)}{z}$ i, per tant,

$$Y'(z) = \frac{z + 4}{(z - 1 + j)(z - 1 - j)\left(z + \frac{1}{2}\right)^3}$$

3. Pels dos zeros del denominador de multiplicitat senzilla, s'incorporen els termes següents:

$$\frac{\alpha_1}{z - 1 + j}, \quad \alpha_1 = [(z - 1 + j)Y'(z)]_{z=-1+j} = \frac{-956}{2197} - \frac{4}{2197}j$$

$$\frac{\alpha_2}{z - 1 - j}, \quad \alpha_2 = [(z - 1 - j)Y'(z)]_{z=-1-j} = \frac{-956}{2197} + \frac{4}{2197}j.$$

4. Pel pol de multiplicitat múltiple, cal incorporar els termes següents:

$$\frac{\beta_1^3}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3}, \quad \beta_1^3 = \frac{1}{(3-3)!} \left[\left(z + \frac{1}{2}\right)^3 Y'(z) \right]_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{14}{13}$$

$$\frac{\beta_1^2}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad \beta_1^2 = \frac{1}{(3-2)!} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(z + \frac{1}{2}\right)^3 Y'(z) \right]_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{220}{169}$$

$$\frac{\beta_1^1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)}, \quad \beta_1^1 = \frac{1}{(3-1)!} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(z + \frac{1}{2}\right)^3 Y'(z) \right]_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1912}{2197}.$$

Per tant,

$$Y'(z) = \frac{-956}{2197} - \frac{4}{2197}j + \frac{-956}{2197} + \frac{4}{2197}j + \frac{14}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{220}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1912}{\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

i

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{\left(\frac{-956}{2197} - \frac{4}{2197}j\right)z}{z - 1 + j} + \frac{\left(\frac{-956}{2197} + \frac{4}{2197}j\right)z}{z - 1 - j} + \frac{\frac{14}{13}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{\frac{220}{169}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\frac{1912}{2197}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{-8}{2197} \frac{239 \cdot z^2 - 240z}{z^2 - 2z + 2} + \frac{\frac{14}{13}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{\frac{220}{169}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\frac{1912}{2197}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Cadascun d'aquests elements es pot trobar en les taules de transformades i, per tant, s'obté:

$$\begin{aligned} y_k &= \mathfrak{z}^{-1} \{Y(z)\} \\ &= \mathfrak{z}^{-1} \left\{ \frac{-8}{2197} \frac{239 \cdot z^2 - 240z}{z^2 - 2z + 2} \right\} + \mathfrak{z}^{-1} \left\{ \frac{\frac{14}{13}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} \right\} + \mathfrak{z}^{-1} \left\{ \frac{\frac{220}{169}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} \right\} + \mathfrak{z}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1912}{2197}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)} \right\} \\ &= -\frac{1912}{2197} e^{k \frac{\ln(2)}{2}} \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \frac{8}{2197} e^{k \frac{\ln(2)}{2}} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \frac{440}{169} \left(\frac{-1}{2}\right)^k (k^2 - k) - \\ &\quad - \frac{440}{169} k \left(\frac{-1}{2}\right)^k + \frac{1912}{2197} \left(\frac{-1}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

4.5. Equacions en diferències i funcions de transferència

La transformada \mathfrak{z} pot emprar-se en les equacions en diferències de manera semblant a com s'utilitza la transformada de Laplace en equacions diferencials. Això permet transformar una equació en diferències en una equació algebraica.

L'aplicació de la transformada \mathfrak{z} a les equacions en diferències proporciona una relació algebraica entre les transformades \mathfrak{z} de l'entrada $U(z)$ i de la sortida $Y(z)$.

Prenent l'equació en diferències:

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k. \quad (4.3)$$

Es pot aplicar la transformada \mathfrak{z} als dos costats de la igualtat i, suposant condicions inicials nul·les, s'obté:

$$\begin{aligned} a_n z^n Y(z) + a_{n-1} z^{n-1} Y(z) + \dots + a_1 z Y(z) + a_0 Y(z) = \\ b_m z^m U(z) + b_{m-1} z^{m-1} U(z) + \dots + b_1 z U(z) + b_0 U(z), \end{aligned}$$

i, traient factor comú, resulta:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Definició 24 *Funció de transferència. La funció racional*

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (4.4)$$

rep el nom de funció de transferència del sistema amb entrada $U(z)$ i sortida $Y(z)$.



Definició 25 *Grau relatiu de la funció de transferència.* S'anomena grau relatiu d'una funció de transferència (4.4) la diferència entre el grau del polinomi del numerador i el grau del polinomi del denominador.

El grau relatiu de les funcions de transferència causals és 0 o positiu.

La funció de transferència obtinguda permet obtenir la solució de l'equació en diferències per a qualsevol entrada u_k . Per fer-ho, cal obtenir la transformada \mathfrak{z} de l'entrada $U(z)$; aleshores, es calcula la transformada \mathfrak{z} de la sortida, que val: $Y(z) = W(z)U(z)$. Finalment, s'aplica la transformada \mathfrak{z} inversa.

Proposició 24 *Solució de l'equació en diferències.* Donada una entrada u_k qualsevol, la solució de l'equació en diferències (4.3) i condicions inicials nul·les és:

$$y_k = \mathfrak{z}^{-1} \{W(z)\mathfrak{z} \{u_k\}\}. \quad (4.5)$$

Definició 26 *Resposta impulsional.* S'anomena resposta impulsional d'una equació en diferències (o sistema) la solució obtinguda per a una entrada impulsional unitària i condicions inicials nul·les.

Proposició 25 *Funció de transferència i resposta impulsional.* La funció de transferència d'una equació en diferències coincideix amb la transformada \mathfrak{z} de la resposta impulsional de la equació en diferències (sistema).

És conseqüència directa del fet que la transformada \mathfrak{z} de l'impuls unitari val 1.

De la propietat de convolució de la transformada \mathfrak{z} , es dedueix que la resposta d'un sistema amb funció de transferència $Y(z)$ a una entrada amb transformada $\mathfrak{z} U(z)$ és el producte de convolució de la resposta impulsional del sistema i l'entrada.

4.6. La transformada \mathfrak{z} i els sistemes mostrejats

A la secció 3, s'han analitzat les característiques i propietats de la transformada de Laplace dels senyals i sistemes mostrejats. Aquestes transformades presenten característiques diferents de les transformades de Laplace dels senyals de temps continu; en particular, no són funcions racionals a la variable s .

És molt útil treballar amb aquests sistemes en un marc de temps discret. En aquesta secció, s'analitzarà l'aplicació de la transformada \mathfrak{z} en els sistemes mostrejats i la relació de la transformada \mathfrak{z} amb la transformada de Laplace.

Comentari 1 *Quan es treballa amb senyals mostrejats, la transformada \mathfrak{z} no és una aplicació injectiva si es considera el conjunt de senyals de temps continu com a conjunt de partida; en canvi, si que ho és si el conjunt de partida és el conjunt de seqüències (mostres o senyals de temps discret). En altres paraules, més d'un senyal de temps continu pot donar la mateixa transformada \mathfrak{z} . On sí que hi ha unicitat és en els valors que prenen en els instants de mostreig aquells senyals que tenen la mateixa transformada \mathfrak{z} . És en aquest sentit que parlarem d'antitransformada \mathfrak{z} .*

4.6.1. Introducció

A l'equació (4.1), s'ha definit la transformada \mathfrak{z} de la forma

$$Y(z) = \mathfrak{z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}.$$

Anteriorment, al capítol 3, s'ha provat que la transformada de Laplace d'un senyal mostrejat pren la forma (3.8):

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k \cdot T) e^{-kT \cdot s}.$$

Com es pot observar, ambdues són força semblants l'element k de la seqüència es pot associar al valor del senyal a l'instant $k \cdot T$, és a dir, $y_k = y(k \cdot T)$.

Proposició 26 *Relació de la transformada \mathfrak{z} amb la transformada de Laplace. Siguin $y(t)$ un senyal de temps continu, $y_k = y(kT)$ el senyal discret resultat de mostrejar amb un període de mostratge T , $Y^*(s)$, $Y(z)$ les transformades de Laplace i \mathfrak{z} del senyal mostrejat. Aleshores, $Y(z)|_{z=e^{T \cdot s}} = Y^*(s)$ per tant, la relació*

$$z = e^{T \cdot s} \tag{4.6}$$

estableix la relació entre la transformada \mathfrak{z} i la transformada de Laplace.

Comentari 2 *A partir de (4.6), es pot interpretar la multiplicació per z com un avanç d'una posició en la seqüència o un avanç d'un període en el temps. De forma similar, $\frac{1}{z}$ correspon a un retard d'una posició en la seqüència o un retard d'un període.*

Així, aplicant (4.6),

$$\mathfrak{z}\{y_k\} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \right]_{y_k=y(kT)} = [Y^*(s)]_{s=\frac{\ln(z)}{T}}.$$

Aquesta relació també es pot escriure per a l'altra expressió de la transformada de Laplace d'un senyal mostrejat, (3.10), i en resulta:

$$G(z) = G^*(s)_{s=\frac{1}{T} \ln(z)} = \left[\frac{g(0)}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(s + j \cdot n \cdot \frac{2\pi}{T}\right) \right]_{s=\frac{1}{T} \ln(z)}$$

on $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ és la transformada de Laplace del senyal/sistema de temps continu; $G^*(s) = \mathcal{L}\{g^*(t)\}$ és la transformada de Laplace del senyal/sistema mostrejat, i $G(z) = \mathfrak{z}\{g(k \cdot T)\}$ és la transformada \mathfrak{z} del senyal de temps discret.

Proposició 27 *Relació $G(z)$ - $G(s)$. De la relació anterior es dedueixen les propietats següents:*

- Si $G(s)$ té un pol en α , aleshores $G(z)$ té un pol en $e^{\alpha T}$.
- L'ordre de $G(z)$ és el mateix que el de $G(s)$.



- La resposta impulsional de $G(s)$, $g(t)$, coincideix en els instants de mostratge amb la resposta impulsional de $G(z)$, $g(k \cdot T)$.

Per simplificar la notació, s'introdueix l'operador \mathcal{Z} , que es defineix de la forma:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k}. \quad (4.7)$$

Fent un abús del llenguatge, en ocasions escriurem:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{Y(s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}^{-1}\{Y(s)\}_{t=kT} \cdot z^{-k}. \quad (4.8)$$

En aquest text, conviuren ambdues expressions i, en funció del paràmetre d'entrada, es distingeix entre una i l'altra. Ambdues notacions tenen implícit un període de mostratge, T , que no es visualitza per simplificar la notació.

Comentari 3 Relació $G(z)$ - $G(s)$. Donat $G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$:

- $G(z)$ té un grau relatiu igual al nombre de zeros que hi ha a l'inici de la sèrie definida per $y(k \cdot T)$.
- Malgrat que $G(s)$ tingui grau relatiu positiu, $G(z)$ pot tenir (de fet acostuma a tenir) grau relatiu 1.
- No hi ha una relació tancada entre els zeros de temps continu i els zeros de temps discret [1].

Exemple 32 Donada la funció de transferència $G(s) = \frac{\alpha s + 1}{\tau s + 1}$, la seva transformada \mathcal{Z} és:

$$G(z) = \frac{(\tau \alpha + \tau - \alpha)z - \tau \alpha e^{-\frac{T}{\tau}}}{\tau^2 (z - e^{-\frac{T}{\tau}})}.$$

Observeu que tant $G(s)$ com $G(z)$ són de grau relatiu 0.

Exemple 33 Donada la funció de transferència $G(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 1)}$, la seva transformada \mathcal{Z} , amb un període $T = 1$ s, és:

$$G(z) = \frac{4.13759(z + 0.51798)z}{(z - 0.36787944)(z^2 - 0.78589z + 0.367879)}.$$

Observeu que $G(s)$ és de grau relatiu 2, i $G(z)$ és de grau relatiu 1. Aquest és el cas més comú.

Exemple 34 Donada la funció de transferència $G(s) = \frac{-s + 1}{(s^2 + s + 1)(s + 1)}$, la seva transformada \mathcal{Z} , amb un període $T = 1.106189$ s és:

$$G(z) = \frac{2.25858z}{(z - 0.33082)(z^2 - 0.66163z + 0.330817)}.$$

Observeu que, encara que $G(s)$ és de grau relatiu 2, $G(z)$ és de grau relatiu 1. Aquest és cas patològic que passa rarament.

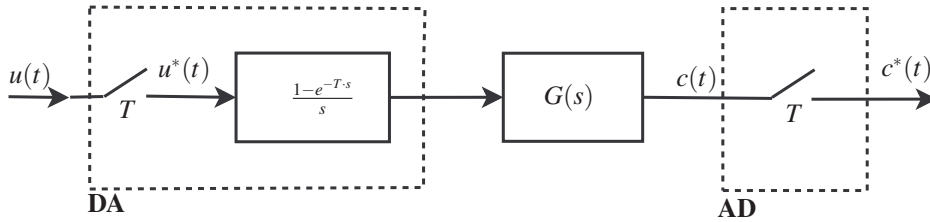
La Taula 4.2 mostra una taula de senyals de temps continu, les seves transformades de Laplace i les seves transformades \mathcal{Z} .

$g(t)$	$G(s)$	$G(z)$
$u_s(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$t \cdot u_s(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2} \cdot u_s(t)$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$t^{k-1} \cdot u_s(t)$	$\frac{(k-1)!}{s^k}$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} \right]$
$e^{-at} \cdot u_s(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$t e^{-at} \cdot u_s(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$t^{k-1} e^{-at} \cdot u_s(t)$	$\frac{(k-1)!}{(s+a)^k}$	$(-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} \right]$
$(1 - e^{-at}) \cdot u_s(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\left(t - \frac{1 - e^{-at}}{a}\right) \cdot u_s(t)$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{z[(aT - 1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aT e^{-aT})]}{a(z-1)^2(z - e^{-aT})}$
$(1 - (1 + at)e^{-at}) \cdot u_s(t)$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{aT e^{-aT} z}{(z - e^{-aT})^2}$
$(e^{-at} - e^{-bt}) \cdot u_s(t)$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
$(\sin(at)) \cdot u_s(t)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\frac{z \sin(aT)}{z^2 - 2z \cos(aT) + 1}$
$(\cos(at)) \cdot u_s(t)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\frac{z(z - \cos(aT))}{z^2 - 2z \cos(aT) + 1}$
$\left(\frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt)\right) \cdot u_s(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2 + b^2}$	$\frac{1}{b} \left[\frac{z e^{-aT} \sin(bT)}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos(bT) + e^{-2aT}} \right]$
$(e^{-at} \cos(bt)) \cdot u_s(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$\frac{z^2 - e^{aT} \cos(bT)z}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos(bT) + e^{-2aT}}$
$\left(1 - e^{-at} \left(\cos(bt) + \frac{a}{b} \sin(bt)\right)\right) \cdot u_s(t)$	$\frac{a^2 + b^2}{s[(s+a)^2 + b^2]}$	$\frac{z(Az + B)}{(z-1)(z^2 - 2z e^{-aT} \cos(bT) + e^{-2aT})}$ $A = 1 - e^{-aT} \left(\cos(bT) + \frac{a}{b} \sin(bT)\right)$ $B = e^{-2aT} + e^{-aT} \left(\frac{a}{b} \sin(bT) - \cos(bT)\right)$
$\left(\frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{a(a-b)} + \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}\right) \cdot u_s(t)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{(Az + B)z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})(z - 1)}$ $A = \frac{b(1 - e^{-aT}) - a(1 - e^{-bT})}{ab(b-a)}$ $B = \frac{ae^{-aT}(1 - e^{-bT}) - be^{-bT}(1 - e^{-aT})}{ab(b-a)}$

Taula. 4.2
Taula de transformades,
 $G(z) = \mathcal{Z}\{g(t)\}$
 $= \mathcal{Z}\{G(s)\}$.



Fig. 4.2
Relació entre la banda
primària del pla s
i el pla z .



4.6.2. Sistemes amb mantenidor d'ordre zero

Ens proposem obtenir la transformada z del sistema mostrejat de la Figura 4.2. Aquest sistema és molt comú, ja que correspon a col·locar un convertidor DA a l'entrada de la planta i un convertidor AD a la seva sortida, que és el que es fa en la majoria de sistemes de control digital.

Observeu que la transformada- \mathcal{Z} d'aquest sistema s'obté de la forma:

$$G(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-T \cdot s}}{s} G(s) \right\}.$$

Com que la transformada- \mathcal{Z} és lineal i $e^{-T \cdot s}$ correspon a un retard de temps T , que en el domini z equival a multiplicar per z^{-1} , es pot escriure:

$$G(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-T \cdot s}}{s} G(s) \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}. \quad (4.9)$$

Cal tenir present que $\mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$ té un pol $z = 1$, que es cancel·la amb el zero $z = 1$ de $1 - z^{-1}$.

Proposició 28 *Preservació del guany en contínua.* $G(z)$ presenta el mateix guany en contínua que $G(s)$. És a dir:

- Si $G(s)$ no té pols a $s = 0$, aleshores $G(s)_{s=0} = G(z)_{z=1}$.
- Si $G(s)$ té n pols a $s = 0$, aleshores $\lim_{s \rightarrow 0} s^n G(s) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^n}{T^n} G(z)$.

Discussió: Donada una $G(s)$ amb n pols a $s = 0$, aleshores

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{K}{s^{n+1}} + G^\dagger(s)$$

on $K = [s^n G(s)]_{s=0}$ i $G^\dagger(s)$ és un sistema amb n pols a $s = 0$. Aplicant la transformada \mathcal{Z} a $\frac{1-e^{-T \cdot s}}{s} G(s)$, s'obté:

$$\frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \frac{K \cdot T^n}{(z-1)^{n+1}} + G^\ddagger(z) = \frac{K \cdot T^n}{z(z-1)^n} + G^\ddagger(z)$$

on $G^{\ddagger}(z)$ és una funció de transferència amb $n - 1$ pols en $z = 1$. A l'efecte d'estudiar-ne la precisió, únicament és rellevant el primer terme ja que el segon no influeix en l'error en estat estacionari. $\frac{K \cdot T^n}{z \cdot (z-1)^n}$ presenta el terme T^n , que apareix també en el càlcul del límit i, per tant, es compensen entre si. Així doncs, l'únic valor rellevant és K , que apareixerà tant en temps continu com en temps discret. Per tant això completa la discussió.

Exemple 35 Donada la funció de transferència $G(s) = \frac{a}{s+a}$ i suposant que s'utilitza un mantenidor d'ordre zero, la seva transformada \mathcal{Z} amb un període $T = 1$ s és:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{a}{s(s+a)} \right\}.$$

La $\mathcal{Z} \left\{ \frac{a}{s(s+a)} \right\}$ es busca a la Taula 4.2, i se n'obté:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})} = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}.$$

Es pot observar que l'ordre es manté i que $G(z)_{z=1} = \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-aT}} = 1$, que és igual que $G(s)_{s=0} = \frac{a}{0+a} = 1$.

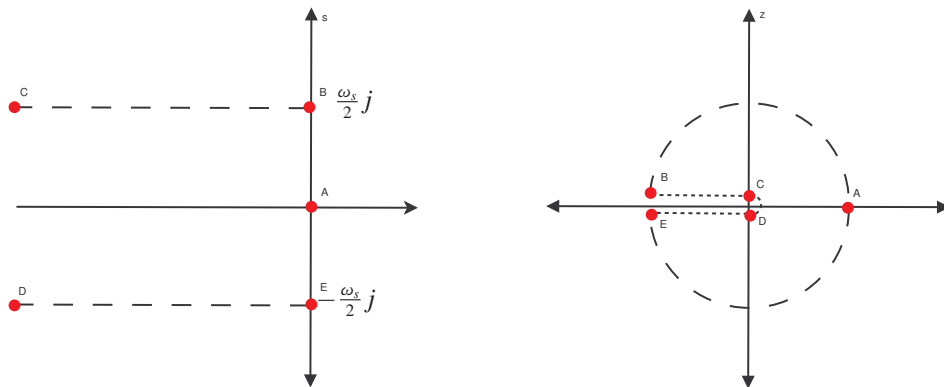


Fig. 4.3 Relació entre la banda primària del pla s i el pla z.

4.6.3. Relació entre la variable z i la variable s

Acabem de veure que la transformació $z = e^{sT}$ aplica els pols dels sistemes de temps continu en els pols dels sistemes que resulten de mostrejar amb període de mostratge T . Vegem ara com es transformen alguns dels llocs geomètrics del pla s. Concretament, el lloc geomètric que caracteritza l'estabilitat (semiplà esquerre), el lloc geomètric d'esmoreïment constant, el lloc geomètric de freqüència constant, el lloc geomètric corresponent al coeficient d'esmoreïment constant, el lloc geomètric de freqüència natural constant i el lloc geomètric real. Observem que tots aquests llocs geomètrics estan definits al pla s.

Cal fer notar que, en temps continu, els llocs geomètrics (i les característiques de la seva resposta temporal) estan definits per sistemes sense zeros, mentre que els sistemes de temps discret equivalents presenten zeros. Per tant, els sistemes de temps discret que tin-



guin zeros diferents dels que provenen directament del procés de mostratge presentaran característiques diferents de les del sistema de temps continu (modificacions similars a les que s'obtenen en introduir zeros en el sistema de temps continu).

La característica més important d'un sistema és la seva estabilitat. En temps continu els sistemes estables estan caracteritzats per tenir el pols en el semiplà esquerra del pla s . Per aquest motiu s'estudiarà com la relació $z = e^{T \cdot s}$ transforma el semiplà esquerra del pla s . Cal tenir present que aquesta transformació és periòdica amb període $j\omega_s$, la qual cosa permet reduir l'estudi a la banda primària del pla s .

Tal com es pot observar a la Figura 4.3, la part estable de la banda primària està definida per

$$\{s \in \mathbb{C} \text{ tals que } \operatorname{Re}(s) < 0 \text{ i } -j\frac{\omega_s}{2} \leq \operatorname{Im}(s) \leq j\frac{\omega_s}{2}\}.$$

L'aplicació $z = e^{T \cdot s}$ transforma aquest conjunt a l'interior del disc unitat. Efectivament, si $s = a + bj$, amb $a < 0$, aleshores $|e^{(a+bj)T}| < 1$. Recíprocament, si $z = \rho \cdot (\cos(\theta) + j\sin(\theta))$, amb $0 \leq \rho \leq 1$, aleshores $z = e^{(a+bj)T}$, on $a = \log(\rho/T)$ i $b = \theta/T$, que es pot prendre a l'interval $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ perquè és un interval de longitud $2\pi/T$. Així doncs, per tal que un sistema de temps discret sigui estable, cal que els seus pols pertanyin a l'interior del disc unitat.

Per tal d'il·lustrar quina forma pren l'aplicació $z = e^{T \cdot s}$, la Figura 4.3 mostra com alguns punts del pla s , $A = 0 + 0j$, $B = 0 + \frac{\omega_s}{2}j$, $C = -\infty + \frac{\omega_s}{2}j$, $D = -\infty - \frac{\omega_s}{2}j$ i $E = 0 - \frac{\omega_s}{2}j$, es transformen en el pla z $A = e^{0j}$, $B = 1e^{\pi j}$, $C = 0e^{\pi j}$, $D = 0e^{-\pi j}$ i $E = 1e^{-\pi j}$. Es pot analitzar també com es transformen alguns segments de recta del pla s sobre el pla z :

- $A - B$: Arc de cercle de radi 1 centrat a l'origen.
- $B - C$: Segment de recta horitzontal entre el -1 i el 0 .
- $C - D$: Arc de cercle de radi 0 centrat a l'origen (es redueix a l'origen).
- $D - E$: Segment de recta horitzontal entre el 0 i el -1
- $E - A$: Arc de cercle de radi 1 centrat a l'origen.



Correspondencia_zs:

1. Seleccionen l'opció **Frontera**. Recorreu amb el pol la frontera de la banda primària i observeu el recorregut sobre el pla z . Quin és el punt associat a cadascun dels vèrtexs de la banda primària?. Analitzeu-ne els resultats.

Els principals llocs geomètrics d'interès són:

- *Lloc geomètric d'amortiment constant*. Aquest lloc geomètric correspon a tots els pols de temps continu que tenen la mateixa part real, cosa que implica que la resposta temporal associada té el mateix temps de convergència.

Per tant, els llocs geomètrics d'amortiment constant vénen donats per rectes verticals al pla s . Aquestes rectes es poden escriure de la forma:

$$s = \sigma + j \cdot \omega, \quad \omega \in (-\infty, 0].$$

Substituint aquestes expressions en la transformació $z = e^{s \cdot T_s}$, s'obté:

$$z = e^{s \cdot T_s} = e^{\sigma \cdot T_s + j \cdot \omega \cdot T_s} = e^{\sigma \cdot T_s} e^{j \cdot \omega \cdot T_s} = e^{\sigma \cdot T_s} e^{j \cdot \theta}, \theta \in [-\pi, \pi]$$

Per tant, les rectes verticals ($s = \sigma$) del pla s es transformen en cercles ($radi = e^{\sigma \cdot T_s}$) al pla z. La Figura 4.4 mostra una representació d'aquest lloc geomètric i la comparació de la resposta al graó de dos sistemes amb pols al mateix lloc geomètric.

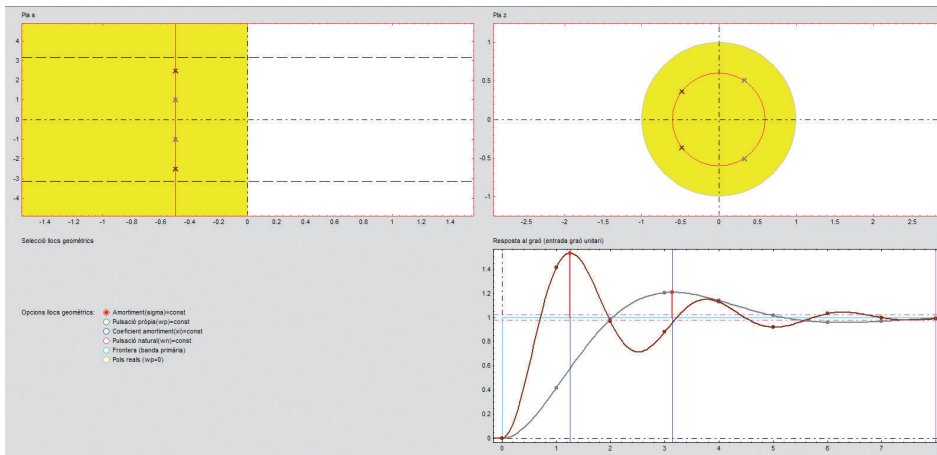


Fig. 4.4
Correspondència_zs:
Transformació dels llocs geomètrics d'amortiment constant.

- *Lloc geomètric de pulsació constant.* Aquest lloc geomètric consta dels pols de temps continu que tenen la mateixa part imaginària, cosa que implica que la resposta temporal associada té la mateixa pulsació natural d'oscil·lació.

Per tant, els llocs geomètrics corresponen a rectes horitzontals en el pla s. Aquestes rectes es poden escriure de la forma:

$$s = \sigma + j \cdot \omega, \sigma \in (-\infty, 0].$$

Substituint aquestes expressions en la transformació $z = e^{s \cdot T}$, s'obté

$$z = e^{s \cdot T} = e^{\sigma \cdot T + j \cdot \omega \cdot T} = e^{\sigma \cdot T} e^{j \cdot \omega \cdot T} = e^{\theta} e^{j \cdot \omega \cdot T}, \theta \in [0, 1].$$

Per tant, les rectes horitzontals ($s = j \cdot \omega$) en el pla s es transformen en rectes radials (inclinació $\omega \cdot T$) en el pla z. La Figura 4.5 mostra el lloc geomètric de pulsació constant en el pla s i el pla z, respectivament.

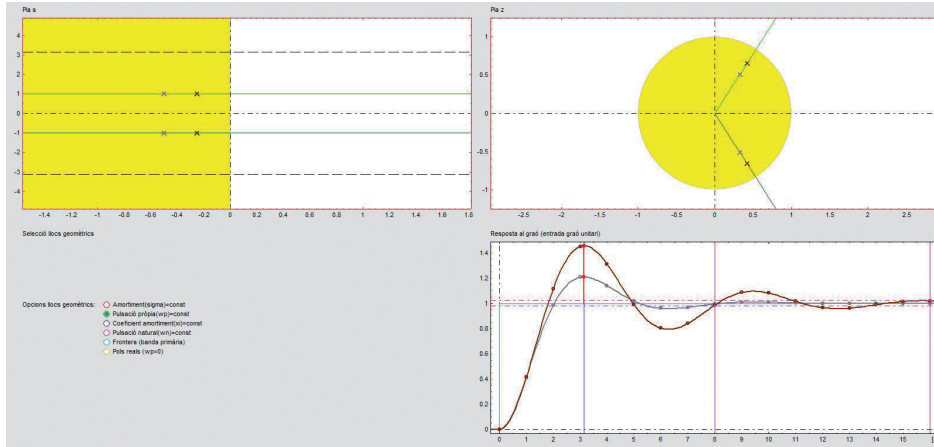
Correspondència_zs:



1. Seleccionen el lloc geomètric de pulsació pròpia constant.
 - Quina propietat comparteixen les respostes temporals lligades als sistemes amb els pols sobre aquest lloc geomètric?
 - Moveu la recta horitzontal cap a munt. Com ha variat la característica comuna? I el lloc geomètric del pla z?



Fig. 4.5
Correspondència_zs:
Transformació dels llocs
geomètrics de pulsació
pròpia constant.



– *Lloc geomètric de coeficient d'amortiment constant.* Aquest lloc geomètric consta dels pols de temps continu que tenen el mateix argument ($\angle s = \frac{\pi}{2} + \arcsin(\xi)$) i mateix sobrepuig relatiu ($e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi}$).

El lloc geomètric de coeficient d'amortiment constant ve donat per rectes radials del pla s. Aquestes rectes es poden escriure de la forma:

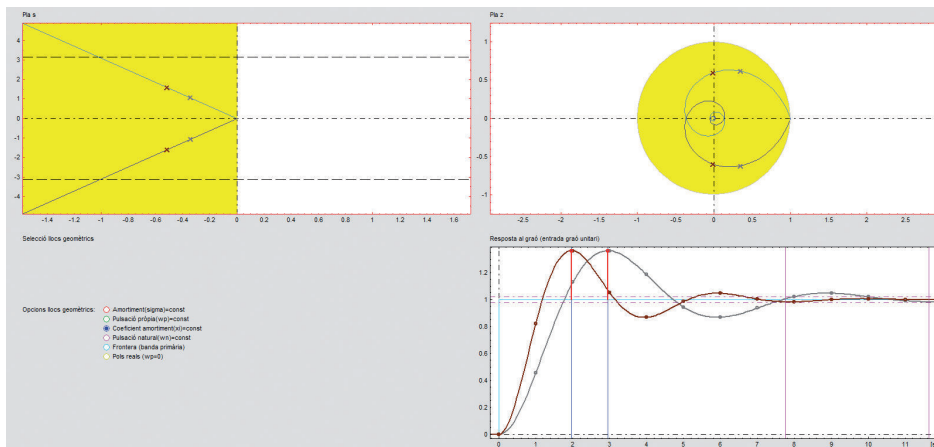
$$s = r e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin(\xi)\right)}$$

Substituint aquesta expressió en la transformació $z = e^{sT_s}$, s'obté

$$z = e^{sT_s} = e^{-r \cdot \xi \cdot T_s} e^{j \cdot r \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot T_s}$$

Per tant, les línies radials de pla s ($\angle s = \frac{\pi}{2} + \arcsin(\xi)$) es transformen per l'aplicació $e^{T_s \cdot s}$ en espirals logarítmiques del pla z. La Figura 4.6 mostra una representació gràfica d'aquesta transformació.

Fig. 4.6
Correspondència_zs:
Transformació dels llocs
geomètrics de coeficient
d'amortiment constant.





Correspondencia_zs:

1. Seleccioneu el lloc geomètric d'amortiment constant.
 - Quina propietat comparteixen les respostes temporals lligades als sistemes amb els pols sobre aquest lloc geomètric?
 - Incrementeu el radi del cercle que apareix sobre el pla z. Com ha variat la característica comuna?
 - Desplaceu el lloc geomètric del pla s a l'esquerra. Què ha passat amb el cercle del pla z? I amb la resposta temporal?

- *Lloc geomètric de pulsació natural constant.* Aquest lloc geomètric correspon a tots els pols de temps continu que tenen el mateix mòdul ($|s| = \omega_n$), cosa que implica la mateixa freqüència de tall en la resposta freqüencial.

Per tant, el lloc geomètric de freqüència natural constant ve donat pels cercles amb centre l'origen i radi ω_n del pla s. Aquests cercles es poden escriure de la forma:

$$s = \omega_n e^{j\theta}, \theta \in [-\pi, \pi].$$

Substituint l'expressió del cercle en la transformació $z = e^{sT}$, s'obté

$$z = e^{sT} = e^{\omega_n T \cos(\theta)} e^{j\omega_n T \sin(\theta)}$$

La Figura 4.7 mostra el lloc geomètric de pulsació constant en el pla s i el pla z, respectivament.

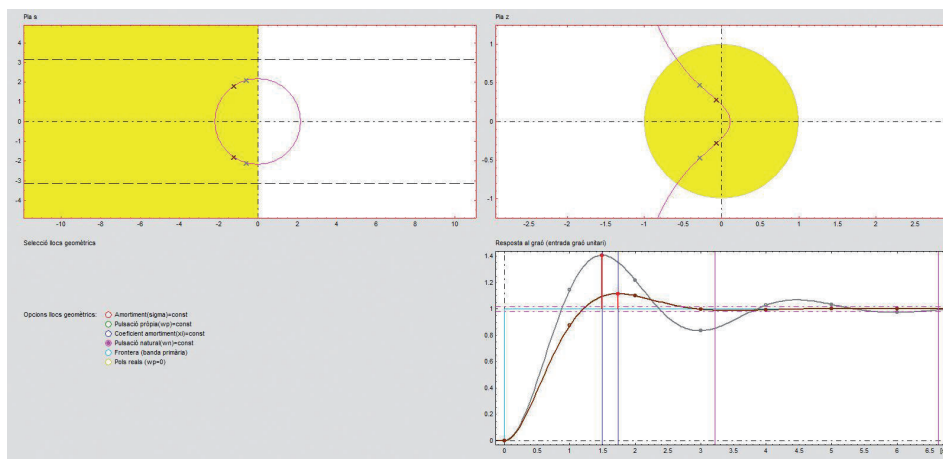


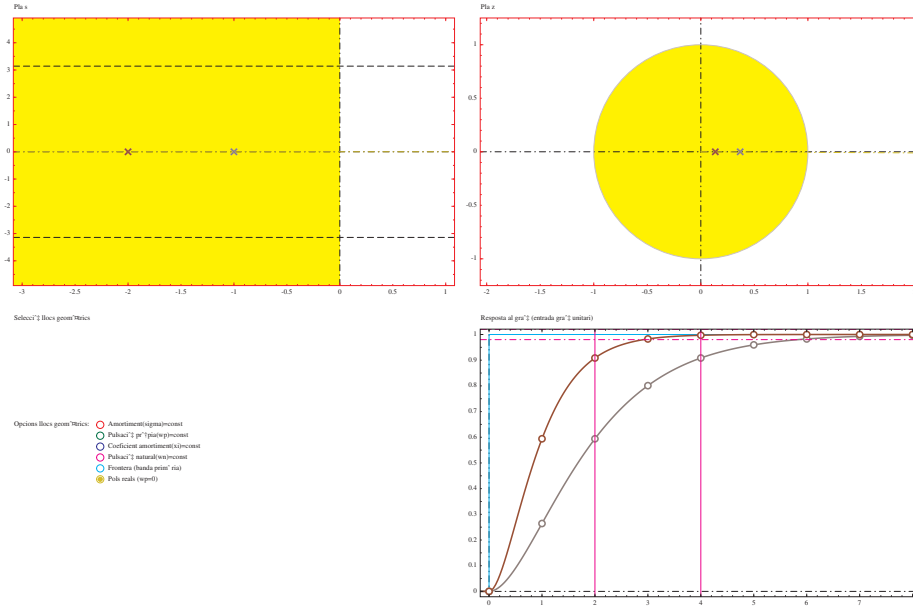
Fig. 4.7
Correspondencia_zs:
Transformació dels llocs geomètrics de freqüència natural constant.

Correspondencia_zs:



1. Seleccioneu el lloc geomètric de coeficient d'amortiment constant.
 - Quina propietat comparteixen les respostes temporals lligades als sistemes amb els pols sobre aquest lloc geomètric?
 - Verifiquen si la resposta de temps discret presenta el mateix valor màxim que la resposta del sistema de temps continu. Analitzeu si podem aplicar el mateix concepte que en temps continu. En quines circumstàncies?

Fig. 4.8
Correspondència_zs:
Transformació dels llocs
geomètrics reals.



- *Lloc geomètric real*. Aquest lloc geomètric correspon a tots els pols de temps continu reals, cosa que implica respostes temporals exponencials. Es pot considerar un cas particular dels *llocs geomètrics de pulsació constant* prenent $\omega = 0$. Els pols reals del pla s es transformen en pols reals del pla z (l'eix real del pla s es transforma en el semieix real positiu del pla z). La Figura 4.8 mostra una representació gràfica d'aquesta transformació.

4.6.4. Nombre de mostres per període

La resposta impulsional d'un sistema de temps continu amb pols a $s = \sigma \pm j\omega_p$ té una component que oscil·la a la pulsació de ω_p rad/s, $Ke^{\sigma t} \sin(\omega_p t + \varphi)$. En un abús del llenguatge, parlem del període del senyal com del període de l'oscil·lació, $T_p = \frac{2\pi}{\omega}$. La transformada- z de la versió mostrejada, amb període T , del senyal, $y_k = y(k \cdot T)$, presenta un pol en

$$z = e^{s \cdot T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega_p \cdot T \cdot j}$$

Aquest pol presenta mòdul $e^{\sigma T}$ i argument $\theta = \omega_p \cdot T$, on T correspon al període de mostratge.

La component de y_k , lligada al pol $e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega_p \cdot T \cdot j}$, conté un nombre de mostres finit per a cada oscil·lació. Aquest nombre, R , es calcula de la forma

$$R = \frac{T_p}{T} = \frac{2\pi}{\omega_p} \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{\theta}$$

És important adonar-se que el nombre de mostres per període d'oscil·lació està relacionat directament amb l'angle del pol de $Y(z)$. Així, per exemple:

θ	R
$\frac{\pi}{10}$	20
$\frac{\pi}{6}$	12
$\frac{\pi}{2}$	4
π	2

Comentari 4 El nombre de mostres per període d'oscil·lació és una mesura quantitativa de com de ben mostrejada està una dinàmica determinada. Per aquest motiu, és convenient seleccionar sempre un període de mostratge tal que el sistema de temps discret obtingut tingui els pols en una franja situada entre els $-\frac{\pi}{4}$ rad i els $\frac{\pi}{4}$ rad.

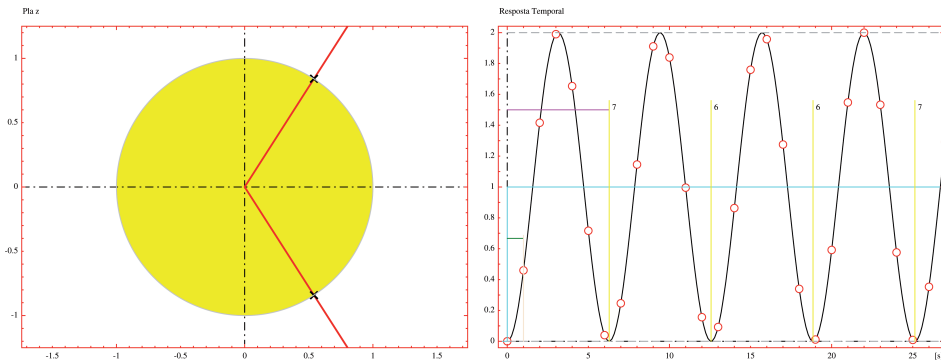


Fig. 4.9
Mostres_per_periode:
Nombre de mostres per període d'oscil·lació.

Mostres_per_periode:



1. Seleccioneu el lloc geomètric de coeficient d'amortiment constant.
2. Modifiqueu l'angle del pol fins a obtenir 30 mostres per període d'oscil·lació.
3. Modifiqueu l'angle del pol fins a obtenir 3 mostres per període d'oscil·lació.
4. Modifiqueu l'angle del pol fins a obtenir 4 mostres per període d'oscil·lació, i modifiqueu el mòdul del pol. Es conserva la característica?

Bibliografia

- [1] K. Åström, P. Hagander, and J. Sternby. Zeros of sampled systems. *Automatica*, 20(1):21–38, 1984.



Exercicis proposats

1. Determineu la transformada \mathcal{Z} de

- (a) $\epsilon_1(t) = \mu(t)$,
- (b) $\epsilon_2(t) = e^{-at} \mu(t)$,
- (c) $\epsilon_3(t) = t\mu(t)$,
- (d) $\epsilon_4(t) = \mu(t - T)$
- (e) $\epsilon_5(t) = t e^{-at} \mu(t)$,
- (f) $\epsilon_6(t) = \sin(\omega t) \mu(t)$,
- (g) $\epsilon_7(t) = e^{-at} \sin(\omega t) \mu(t)$.

2. Determineu l'antitransformada \mathfrak{z} de $Y_1(z) = \frac{(1 - e^{-a})z}{(z-1)(z - e^{-a})}$.

3. Determineu l'antitransformada \mathfrak{z} de $Y_2(z) = \frac{(1 - e^{-a})}{(z-1)(z - e^{-a})}$.

4. Determineu l'antitransformada \mathfrak{z} de $Y_3(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1}$.

5. Determineu l'antitransformada \mathfrak{z} de $Y_4(z) = \frac{T_s z}{(z-1)^2}$.

6. Determinar el senyal que presenta la transformada següent \mathfrak{z} :

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-a})z}{z^2 - (1 + e^{-a})z + e^{-a}}$$

7. Donada la transformada \mathfrak{z}

$$Y(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3 - \frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{8}z},$$

determineu $\mathfrak{z}^{-1}\{Y(z)\}$.

8. Donada l'equació en diferències $y_k - 0.5y_{k-1} + u_k = 0$, determineu quina és la seva solució quan $u_k = 2 + 3k$.

9. Aplicant la relació entre el pla s i pla z , determineu quin és el temps d'estabilització del sistema

$$G(z) = \frac{1}{z - 0.5} \quad \text{quan } T = 1\text{s}.$$

10. Determineu el nombre de mostres per període d'oscil·lació que presenta la resposta impulsional del sistema

$$G(z) = \frac{z + 1}{(z - e^{j\frac{\pi}{4}})(z - e^{-j\frac{\pi}{4}})}$$

i la del sistema

$$G(z) = \frac{z + 1}{(z - e^{j\frac{\pi}{4}})(z - e^{-j\frac{\pi}{4}})(z - \frac{1}{1.5}e^{j\frac{\pi}{2}})(z - \frac{1}{1.5}e^{-j\frac{\pi}{2}})}$$



→ 5



Resposta temporal dels sistemes de temps discret

En aquest capítol, s'estudia la resposta temporal dels sistemes de temps discret, en particular la resposta dels sistemes de primer i segon ordre. Les respostes dels sistemes d'ordre superior es poden expressar com a combinació de sistemes com aquests.

S'analitza, la resposta temporal dels sistemes discrets de primer i segon ordre, lineals, a coeficients constants davant de dos termes forçats estàndar: l'impuls i el graó. Per al càlcul de la resposta temporal, s'utilitzen indistintament els resultats sobre solucions d'equacions en diferències lineals, a coeficients constants, i les propietats de la transformada- z , així com les taules de transformades. Val la pena assenyalar que, gràcies al fet que les equacions són lineals, n'hi ha prou estudiant les respostes a l'impuls i al graó unitaris.

5.1. Introducció

Els sistemes lineals a coeficients constants es caracteritzen per una equació en diferències:

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k$$

o per la seva funció de transferència:

$$W(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{Y(z)}{U(z)}.$$

En el marc dels sistemes de control, interessa familiaritzar-se amb les respostes dels sistemes a entrades impuls (resposta impulsional) i a entrades graó (resposta al graó o resposta indicial). Gràcies a la descomposició de la funció de transferència, $W(z)$, com a suma de fraccions simples, n'hi ha prou a estudiar les respostes impulsional i indicial dels sistemes de primer i segon ordre.



Així, es pot escriure:

$$Y(z) = W(z)U(z) = (W_1(z) + \dots + W_l(z))U(z) = U_1(z) + \dots + U_l(z).$$

on $W_j(z)$ són funcions de transferència de primer i segon ordre, i $U_j(z)$ correspon a la resposta al graó/impuls d'aquests sistemes de primer i segon ordre.

– Sistemes de primer ordre.

Un sistema de primer ordre genèric és descrit per una equació en diferències de la forma:

$$y_k = -a_0 y_{k-1} + b_1 u_k + b_0 u_{k-1}.$$

Aplicant-hi la transformada \mathfrak{z} , se n'obté:

$$Y(z) = -a_0 z^{-1} Y(z) + b_1 U(z) + b_0 z^{-1} U(z),$$

i, reagrupant,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 + b_0 z^{-1}}{1 + a_0 z^{-1}} = \frac{b_1 z + b_0}{z + a_0}.$$

– Sistemes de segon ordre.

Un sistema de segon ordre genèric és descrit per una equació en diferències, de la forma:

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_0 y_{k-2} + b_2 u_k + b_1 u_{k-1} + b_0 u_{k-2}.$$

Aplicant-hi la transformada \mathfrak{z} , se n'obté:

$$Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) - a_0 z^{-2} Y(z) + b_2 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + b_0 z^{-2} U(z),$$

i, reagrupant,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}.$$

En aquesta formulació, s'ha assumit, sense que això suposi cap restricció ni limitació, que el terme lligat al coeficient de grau màxim del denominador és 1.

Proposició 29 *Relació resposta graó/impuls. És senzill comprovar que, si y_k és la resposta a l'impuls d'un sistema, la resposta al graó s'obté de la forma:*

$$x_k = x_{k-1} + y_k.$$

En el domini transformat, això és: $X(z) = \frac{z}{z-1} Y(z)$.



Proposició 30 *Relació resposta i resposta sense zeros. La resposta temporal d'un sistema amb zeros, pot escriure's com la suma ponderada de la resposta del mateix sistema sense zeros i avanços en el temps d'aquesta.*

Sigui el sistema definit per

$$W(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

un senyal d'entrada $U(z)$ i $y_k^0 = \mathfrak{z}^{-1} \left\{ \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} U(z) \right\}$ ($Y^0(z) = \mathfrak{z} \{y_k^0\}$). Com que

$$Y(z) = b_m z^m Y^0(z) + b_{m-1} z^{m-1} Y^0(z) + \dots + b_0 Y^0(z)$$

resulta senzill adornar-se que la sortida del sistema, $W(z)$, enfront de l'entrada $U(z)$, es pot escriure de la forma:

$$y_k = b_m \cdot y_{k+n}^0 + b_{m-1} \cdot y_{k+n-1}^0 + \dots + b_0 \cdot y_{k+n-m}^0.$$

5.2. Sistemes de primer ordre

En aquesta secció, es caracteritza la resposta a l'impuls i el graó dels sistemes de primer ordre:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = W(z) = \frac{b_1 + b_0 z^{-1}}{1 + a_0 z^{-1}} = \frac{b_1 z + b_0}{z + a_0}.$$

Per fer-ho, es distingeixen dos casos: els sistemes de grau relatiu 1 ($b_1 = 0$) i els sistemes de grau relatiu 0 ($b_1 \neq 0$).

5.2.1. Grau relatiu 1

Gràcies a la linealitat de la transformada \mathfrak{z} , és suficient considerar el cas $b_0 = 1$. Per als casos en què $b_0 \neq 1$, únicament cal escalar la resposta per aquest valor.

– Resposta impulsional. De les propietats de la transformada \mathfrak{z} , tenim

$$Y(z) = \frac{1}{z+a} \cdot 1 = z^{-1} \frac{z}{z+a}$$

Per tant,

$$y_k = (z^{-1}) \cdot (-a)^k \mu_k = (-a)^{k-1} \mu_{k-1}.$$

Observeu que el primer valor és 0. En cas que $|a| < 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$; en cas que $|a| > 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \infty$; per a $a = 1$, la resposta és una seqüència d'uns; per a $a = -1$, el $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$ no existeix (el senyal va prenent els valors -1 i 1 de forma alternada).



- Resposta al graó (indicial). En aquest cas, com a exemple de procediment alternatiu, es resol l'equació en diferències:

$$y_k = -ay_{k-1} + \mu_{k-1}. \quad (5.1)$$

El polinomi característic de l'equació homogènia és $z + a$ i un polinomi que anul·la el terme forçat μ_k és $z - 1$. Per tant, la solució general és de la forma

$$y_k = A(-a)^k + B. \quad (5.2)$$

Primer es determina B , de manera que es compleixi l'equació no homogènia. Substituint l'expressió de y_k , (5.2), a l'equació, (5.1), s'obté:

$$A(-a)^k + B = -a(A(-a)^{k-1} + B) + \mu_{k-1}, \quad \forall k \geq 1.$$

Simplificant i resolent per a B , resulta $B = \frac{1}{1+a}$, i imposant la condició inicial $y_{-1} = 0$ en (5.1) s'obté $y_0 = 0$, que substituint a la solució dóna:

$$0 = y_0 = A(-a)^0 + B = A + B$$

Per tant, $A = -B$ i la resposta al graó (resposta indicial) és

$$y_k = \left[\frac{1}{1+a} (1 - (-a)^k) \right] \cdot \mu_k$$

Observeu que, atès que el sistema té grau relatiu 1, la resposta del sistema s'endarrerix una mostra respecte al terme forçat ($y_0 = 0$, malgrat $\mu_0 = 1 \neq 0$).

El resultat anterior és vàlid per a $a \neq -1$. Si $a = -1$, el polinomi característic del sistema i el polinomi que anul·la el terme forçat coincideixen; per tant, $z = -1$ és un pol de multiplicitat dos, i la solució del problema s'obtindrà prenent

$$y_k = (A + Bk)1^k.$$

Per determinar B , se substitueix y_k a l'equació no homogènia i aquesta solució general a l'equació, i s'obté:

$$(A + Bk)1^k = (A + B(k-1))1^{k-1} + \mu_{k-1}, \quad \forall k \geq 1;$$

d'aquí $B = 1$. Imposant la condició inicial deduïda per a y_0 , s'obté $A = 0$, i la resposta indicial en aquest cas és

$$y_k = k\mu_k$$

Convé adonar-se que, malgrat que el sistema sigui marginalment estable, i el senyal d'entrada fitat, el senyal de sortida és no fitat.



5.2.2. Grau relatiu 0

Gràcies a les propietats de la transformada \mathfrak{z} , és suficient considerar el cas $b_1 = 1$. Com veurem tot seguit, que el sistema tingui grau relatiu zero comporta un efecte immediat del terme forçat (no hi ha retard).

- Resposta impulsional. Correspon a l'equació en diferències

$$y_k = -a y_{k-1} + \delta_k + b_0 \delta_{k-1},$$

i amb condició inicial $y_{-1} = 0$. Substituint a l'equació la seqüència corresponent a l'impuls, i resolent per a y_k , s'obté:

0	1	2	3	...
1	$-a + b_0$	$(-a)^2 - a b_0$	$(-a)^3 + (-a)^2 b_0$...

que, en forma compacta, s'escriu

$$y_k = [(-a)^k \cdot \mu_k + b_0 (-a)^{k-1} \mu_{k-1}] \mu_k = (-a + b_0 \mu_{k-1}) (-a)^{k-1} \mu_k.$$

En cas que $|a| < 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$, en el cas que $|a| > 1$, el senyal és no fitat en cas que $a = -1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 1 + b_0$, i, finalment en cas que $a = 1$, el senyal és fitat però no tendeix a cap valor concret (és alternat).

- Resposta al graó. La seqüència solució s'obté antitransformant

$$Y(z) = \frac{(z + b_0)z}{(z + a)(z - 1)} = z \left[\frac{A}{z + a} + \frac{B}{z - 1} \right]$$

on $A = \frac{-a+b_0}{-a-1}$ i $B = \frac{1+b_0}{1+a}$. Dels desenvolupaments anteriors i de les taules de transformades \mathfrak{z} per $a \neq -1$, en resulta:

$$y_k = [A(-a)^k + B] \mu_k.$$

Per a $a = -1$, s'obté:

$$Y(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{b_0}{(z-1)^2}$$

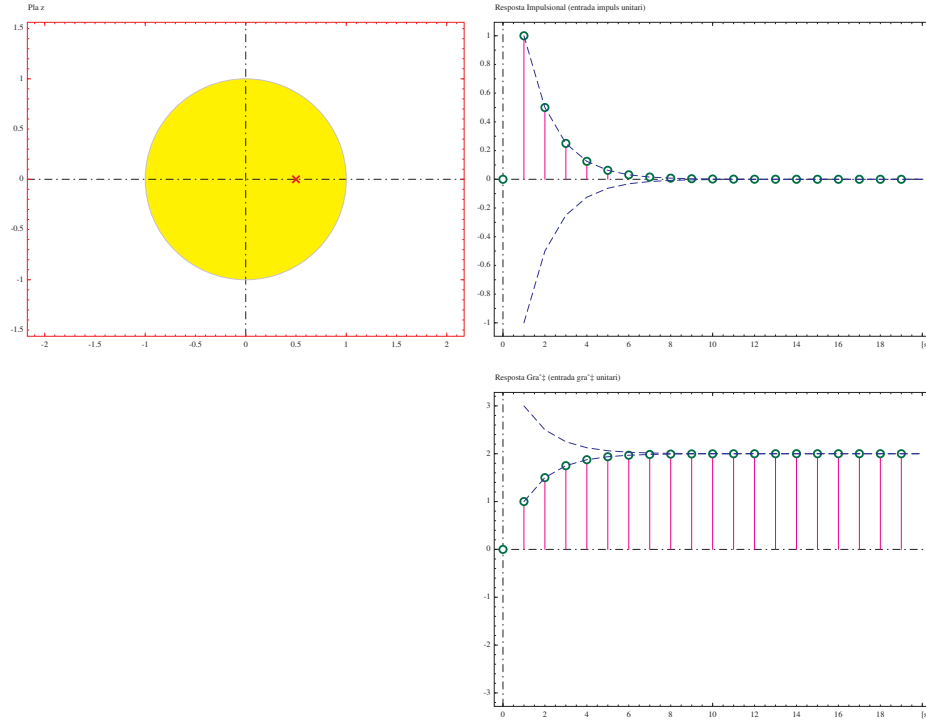
i, per tant,

$$y_k = [1 + (b_0 - 1)k] \mu_k.$$

En ambdós casos, $y_0 = 1$; tanmateix, la sortida per a $a = -1$ és no fitada. Aquest és un altre exemple d'un sistema marginalment estable amb entrada fitada i sortida no fitada.



Fig. 5.1
RT_ordre_baix:
Resposta temporal del sistema de primer ordre.



RT_ordre_baix:

1. Seleccioneu l'opció "1 pol real" del menú: desplaçe el pol sobre l'eix real i observeu l'evolució de la resposta temporal. Pareu especial atenció en passar del semiplà dret al semiplà esquerre.
2. Seleccioneu l'opció "1 pol real/1 zero real" del menú: deixeu fixa la posició del pol, desplaçe el zero sobre l'eix real i observeu l'evolució de la resposta temporal. Pareu especial atenció en passar del semiplà dret al semiplà esquerre.

5.3. Sistemes de segon ordre

En aquesta secció, es caracteritza la resposta temporal dels sistemes de segon ordre. Aquests sistemes poden modelar-se mitjançant funcions de transferència, de la forma:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_2 + b_1z^{-1} + b_0z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_0z^{-2}} = \frac{b_2z^2 + b_1z + b_0}{z^2 + a_1z + a_0}$$

Els sistemes de segon ordre poden tenir dos pols reals diferents, dos pols reals iguals o dos pols complexos conjugats. El primer cas equival a tractar dos sistemes de primer ordre en cascada (en sèrie) o en paral·lel; per tant, en aquesta secció només analitzarem els altres dos casos.



5.3.1. Grau relatiu 2 i pol real doble

L'equació de transferència del sistema es pot escriure com

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0}{(z+a)^2}.$$

No és pèrdua de generalitat suposar $b_0 = 1$; per tant, s'estudien la resposta impulsional i inicial del sistema

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{(z+a)^2} = \frac{1}{z^2 + 2az + a^2} = \frac{z^{-2}}{1 + 2az^{-1} + a^2z^{-2}}. \quad (5.3)$$

– Resposta impulsional.

Reescrivint l'equació (5.3) com una equació en diferències amb $U(z) = 1$, s'obté:

$$y_k = -2ay_{k-1} - a^2y_{k-2} + \delta_{k-2},$$

i condicions inicials $y_{-1} = y_{-2} = 0$. Substituint a l'equació la seqüència corresponent a l'impuls i resolent per a y_k , s'obté:

k	0	1	2	3	4	5	...
y_k	0	0	1	$2(-a)$	$3(-a)^2$	$4(-a)^3$...

que, en forma compacta, s'escriu $y_k = (k-1)(-a)^{k-2}\mu_{k-2}$.

– Resposta al graó. En aquest cas, obtindrem la solució antitransformant

$$Y(z) = \frac{-1}{(1+a)^2} \frac{1}{z+a} + \frac{a}{1+a} \frac{1}{(z+a)^2} + \frac{1}{(1+a)^2} \frac{1}{z-1}.$$

Dels exercicis en capítols anteriors i de les taules de transformades \mathfrak{z} , en resulta:

$$y_k = \frac{-1}{(1+a)^2} (-a)^{k-1} \mu_{k-1} + \frac{a}{1+a} (k-1) (-a)^{k-1} \mu_{k-1} + \frac{1}{(1+a)^2} \mu_{k-1}.$$

Val la pena observar que $y_0 = y_1 = 0$, tal com indica el fet que el grau relatiu del sistema és 2.

Observeu que aquest resultat és vàlid per a $a \neq -1$. L'anàlisi del cas $a = -1$ es deixa per al lector.

5.3.2. Grau relatiu 2 i pols complexos conjugats

En aquest cas, s'assumeix que el sistema té una parella de pols complexos conjugats en $re^{\pm\theta j}$. Per aquest motiu, el polinomi del denominador pot escriure's de la forma: $(z - re^{\theta j})(z - re^{-\theta j}) = z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\theta) + r^2$. I el sistema a analitzar és



$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0}{z^2 - 2 \cdot r \cdot \cos(\theta) \cdot z + r^2}. \quad (5.4)$$

Per simplificar els càlculs, prenem $b_0 = r \cdot \sin(\theta)$. Gràcies a la linealitat del problema, aquesta assignació no resta generalitat al procediment.

– Resposta impulsional. La transformada \mathfrak{z} del sistema és

$$\frac{r \cdot \sin(\theta)}{z^2 - 2 \cdot r \cdot \cos(\theta) \cdot z + r^2} = z^{-1} \frac{r \cdot \sin(\theta) z}{z^2 - 2 \cdot r \cdot \cos(\theta) \cdot z + r^2}$$

i, aplicant les taules de transformades, s'obté:

$$y_k = r^{k-1} \sin((k-1)\theta) \mu_{k-1}.$$

És d'interès adonar-se que, tal com indica el fet que el grau relatiu del sistema és dos, s'ha de verificar $y_0 = y_1 = 0$, com efectivament succeeix.

– Resposta al graó. La seqüència solució s'obté, en aquest cas, antitransformant:

$$\frac{r \cdot \sin(\theta)}{z^2 - 2 \cdot r \cdot \cos(\theta) \cdot z + r^2} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{A \cdot z + B}{z^2 - 2 \cdot r \cdot \cos(\theta) \cdot z + r^2} + \frac{C}{z-1}$$

amb

$$A = \frac{r \sin(\theta)}{-r^2 + 2r \cos(\theta) - 1}, B = -\frac{r^3 \sin(\theta)}{-r^2 + 2r \cos(\theta) - 1}, C = -\frac{r \sin(\theta)}{-r^2 + 2r \cos(\theta) - 1}.$$

Antitransformant i aplicant el resultat obtingut a la resposta a l'impuls, s'obté:

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{1}{r^2 - 2r \cos(\theta) + 1} [-r^k \sin(k\theta) \mu_k + r^{k+1} \sin((k-1)\theta) \mu_{k-1} + r \sin(\theta) \mu_{k-1}] \\ &= \frac{r \sin(\theta)}{r^2 - 2r \cos(\theta) + 1} \mu_{k-1} + r^k \sin\left(k\theta + \arctan\left(\frac{1 - r \cos(\theta)}{r \sin(\theta)}\right)\right) \mu_{k-1} \end{aligned}$$

Es pot comprovar que $y_0 = y_1 = 0$ i que es tracta d'una oscil·lació de freqüència θ i amplitud decreixent (si $|r| < 1$) entorn d'un graó. L'anàlisi dels casos singulars es deixa per al lector.



RT_ordre_baix:

1. Seleccioneu l'opció "1 pol real" en l'aplicatiu. Desplaçar el pol sobre l'eix real. Classifiqueu la resposta temporal en funció de les diferents regions del pla z .
2. Seleccioneu l'opció "2 pols complexos". Desplaceu els pols intentant mantenir el mòdul constant i variant l'angle. Quin és l'efecte sobre la resposta temporal?
3. Seleccioneu l'opció "1 zero real/1 pol real". Col·loqueu el pol proper a $z = 1$ desplaçant el zero sobre l'eix real. Quin és l'efecte sobre la resposta temporal?

5.4. Efecte dels zeros

A les seccions anteriors, hem presentat un estudi detallat de la resposta impulsional dels sistemes de primer i segon ordre. La Figura 5.2 mostra un resum de les característiques de la resposta temporal en funció de la posició dels pols. Aquesta figura resulta molt interessant per obtenir intuïció sobre com és la resposta temporal d'un sistema de temps discret arbitrari.

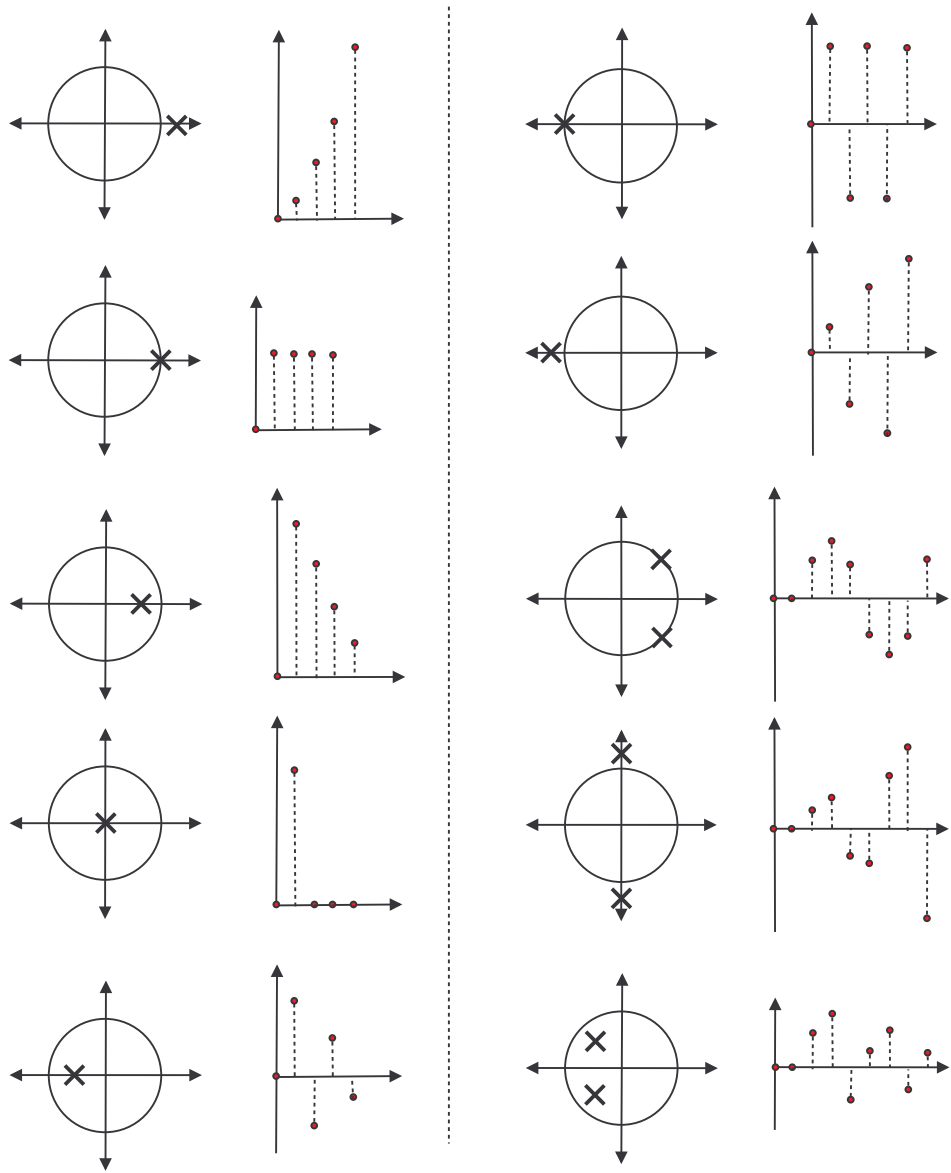
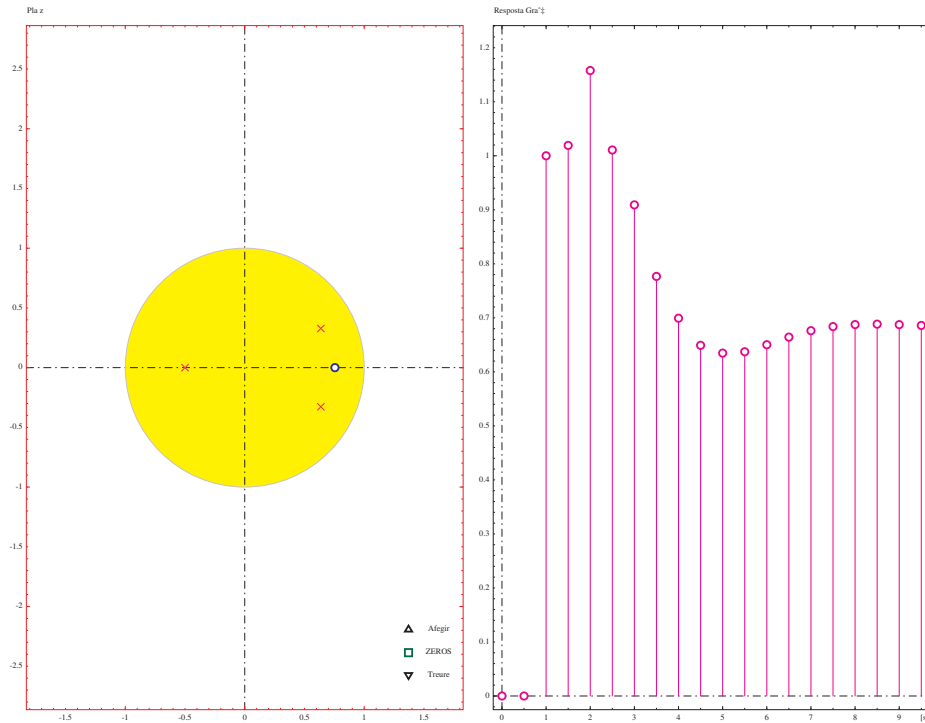


Fig. 5.2
Esquema de la resposta impulsional dels sistemes de primer i segon ordre.

A part dels pols, un dels elements que caracteritza la resposta temporal dels sistemes són els zeros. L'efecte dels pols sobre la resposta temporal pot ser força complex, però de forma simplificada l'efecte dels zeros es pot agrupar en dues grans famílies:



Fig. 5.3
RT_ordre_generic:
Resposta temporal d'un
sistema de temps discret.



- Zeros reals en el semiplà dret. Donat el sistema $G(z) = \frac{(z - \alpha) \cdot N(z)}{D(z)}$, la seva resposta impulsional es pot escriure de la forma següent:

$$g_k = h_{k+1} - \alpha \cdot h_k$$

on $h_k = \mathfrak{Z}^{-1} \left\{ \frac{N(z)}{D(z)} \right\}$ correspon a la resposta impulsional del sistema sense l'efecte del zero a $z = \alpha$. En cas que $\alpha > 0$, g_k correspon a la resta ponderada entre h_{k+1} i h_k ; això implica un efecte diferencial (cas $\alpha = 1$, correspon a una derivada directament), i, per tant, g_k presenta variacions més elevades que les de h_k .

- Zeros reals en el semiplà esquerre. Seguint una anàlisi similar a la de l'apartat anterior es pot observar que l'efecte dels zeros reals en el semiplà esquerre presenta un efecte de mitjana, ja que la resposta impulsional correspon a la suma ponderada de la resposta sense el zero, h_k , i aquesta retardada un cicle, h_{k-1} .
- Zeros complexos. Donat el sistema $G(z) = \frac{(z - r \cdot e^{j\theta}) \cdot (z - r \cdot e^{-j\theta}) \cdot N(z)}{D(z)}$, la seva resposta impulsional es pot escriure de la forma següent:

$$g_k = h_{k+2} - 2 \cdot r \cdot \cos(\theta) \cdot h_{k+1} + r^2 \cdot h_k$$



on $h_k = \mathfrak{z}^{-1} \left\{ \frac{N(z)}{D(z)} \right\}$. En cas que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, aleshores $\cos(\theta) > 0$ i, per tant, a la suma hi ha dos termes positius i un de negatiu, cosa que genera un efecte diferencial; en el cas contrari, els tres termes seran positius i, per tant, la combinació generarà un efecte de suavitzat.

RT_ordre_generic:



1. Construïu un sistema de tercer ordre sense zeros. Fixeu els pols a $z = 0$, $z = 0.5$ i $z = -0.5$. Com és l'inici de la resposta temporal? Per què?
 - Desplaceu el pol a $z = 0$ cap a la dreta. Quin és l'efecte sobre la resposta temporal?
 - Desplaceu el pol a $z = 0$ cap a l'esquerra. Quin és l'efecte sobre la resposta temporal?
2. Afegiu en el sistema anterior un zero a $z = -1$.
 - Com ha canviat l'inici de la resposta temporal?
 - Desplaceu el zero a $z = -1$ cap a la dreta. Quin és l'efecte sobre la resposta temporal?

5.5. Comparació qualitativa

A les seccions anteriors, s'ha obtingut la resposta dels sistemes de primer i segon ordre, en funció dels pols de la funció de transferència. Resulta especialment interessant escriure els pols en notació polar, és a dir, $z = r e^{j\theta}$.

El mòdul del pol, r , ens dóna idea de la velocitat de convergència; els sistemes més ràpids tenen r proper a 0, mentre que els més lents (triguen més a arribar a l'estacionari) tenen r proper a 1. Aquesta característica permet comparar, de forma senzilla, la velocitat relativa dels dos sistemes (Figura 5.4).

L'argument del pol, θ , està relacionat amb la freqüència d'oscil·lació. Com més gran és l'angle, més elevada és la freqüència d'oscil·lació. Així, és possible comparar la freqüència relativa de dos sistemes comparant l'argument dels seus pols (Figura 5.4).

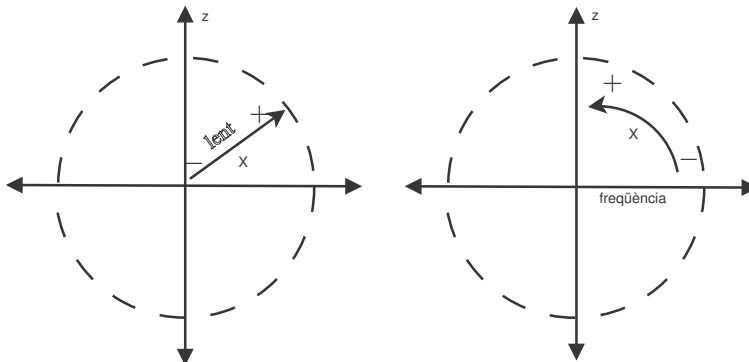


Fig. 5.4
Comparació qualitativa de la resposta temporal del sistema de temps discret en funció dels pols.



5.6. Dominància

Treballar amb funcions de transferència d'ordre elevat resulta complex i poc àgil. En alguns casos, és possible aproximar una funció de transferència d'ordre elevat per una d'ordre més petit sense que això signifiqui una pèrdua d'informació rellevant. El procés de reducció d'ordre es pot realitzar de diferents maneres [1]; una de les senzilles és aplicar el que es coneix per dominància.

Definició 27 *Dominància.* Siguin p_1 i p_2 dos pols d'una funció de transferència. Es diu que p_1 domina sobre p_2 si

$$\frac{\log(|p_1|)}{\log(|p_2|)} \leq 0.1, \text{ que és equivalent a } \frac{\log(|p_2|)}{\log(|p_1|)} \geq 10$$

En altres paraules, els pols propers a la circumferència unitat dominen sobre els pols propers a l'origen. Els pols de la funció de transferència que dominen sobre tots els altres s'anomenen pols dominants. Observeu que a la condició anterior cal introduir el mòdul, atès que la velocitat de convergència només depèn del mòdul del pol.

Comentari 5 *La condició de dominància implica que la resposta temporal associada a p_2 arriba a l'estacionari un mínim de deu vegades abans que la resposta temporal lligada a p_1 .*

És important tenir present que en el moment de simplificar, l'efecte dels pols i zeros que són fora del cercle unitat (anomenats de fase no mínima) no es pot negligir. Per tant, la simplificació se centrarà únicament en els pols i zeros de fase mínima (situats a l'interior del cercle unitat).

Donada una funció de transferència:

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

Per simplificar d'acord amb la dominància, el que es fa és, en primer lloc, factoritzar la funció de transferència:

$$G(z) = k_0 \frac{(z - \hat{c}_1) \dots (z - \hat{c}_l) (z - c_1) \dots (z - c_{m-l})}{(z - \hat{p}_1) \dots (z - \hat{p}_k) (z - p_1) \dots (z - p_{n-k})}$$

on \hat{p}_j correspon a pols situats sobre o fora del cercle, i p_j correspon a pols situats a l'interior del cercle unitat, de tal forma que $|p_i| \geq |p_j|$ si $i \leq j$, \hat{c}_j correspon als zeros situats sobre o fora del cercle i c_j correspon als zeros situats a l'interior del cercle unitat, de tal forma que $|c_i| \geq |c_j|$ si $i \leq j$.

Tot seguit, es determina l'ordre volgut per la funció de transferència, $k + n_d < n$. Aquest n_d s'ha de fixar d'acord amb la distribució de dominància dels pols o a partir de les característiques volgudes.



En cas que $k + n_d \geq m$, es construeix una funció de transferència de la forma:

$$\tilde{G}(z) = \tilde{k}_0 \frac{(z - \hat{c}_1) \cdots (z - \hat{c}_l) (z - c_1) \cdots (z - c_{m-l})}{(z - \hat{p}_1) \cdots (z - \hat{p}_k) (z - p_1) \cdots (z - p_{n_d})}.$$

En cas contrari, cal eliminar també $m - k - n_d$ zeros situats a l'interior del cercle unitat (seguint el mateix criteri d'eliminar primer els de mòdul més petit) per mantenir la causalitat del sistema:

$$\tilde{G}(z) = \tilde{k}_0 \frac{(z - \hat{c}_1) \cdots (z - \hat{c}_l) (z - c_1) \cdots (z - c_{n_d+k-l})}{(z - \hat{p}_1) \cdots (z - \hat{p}_k) (z - p_1) \cdots (z - p_{n_d})}.$$

Finalment, \tilde{k}_0 se selecciona de forma que $G(1) = \tilde{G}(1)$. En cas que $G(z)$ presenti pols a $z = 1$, \tilde{k}_0 se selecciona de forma que

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^o \tilde{G}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^o G(z)$$

on o és la multiplicitat dels pols a $z = 1$.

En cas que entre els pols eliminats i els mantinguts hi hagi una relació de dominància, la resposta temporal de $\tilde{G}(z)$ serà molt semblant a la de $G(z)$. Entre $\tilde{G}(z)$ hi ha $G(z)$ una variació de grau relatiu; això fa que la resposta d'un sistema i l'altre estiguin desfasades algunes mostres. Per aquest motiu, a vegades es pren com sistema simplificat el següent:

$$\hat{G}(z) = \hat{k}_0 \frac{(z - \hat{c}_1) \cdots (z - \hat{c}_l) (z - c_1) \cdots (z - c_{m-l})}{(z - \hat{p}_1) \cdots (z - \hat{p}_k) (z - p_1) \cdots (z - p_{n_d}) z^{n-k-n_d}}$$

on \hat{k}_0 s'obté de forma similar a com s'ha realitzat anteriorment. En aquest cas, encara que es produeix una simplificació en la dinàmica del sistema i que la resposta de $\hat{G}(z)$ i la de $G(z)$ no presenten el decalatge esmentat, no es produeix una reducció d'ordre.

Exemple 36 Considerem el sistema discret definit per la funció de transferència en z

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{0.13131(z + 0.4394)}{z^2 - 0.89z + 0.079}.$$

La seva resposta a un graó unitari és

$$y_k = -1.1141 \cdot 0.79^k + 0.1141 \cdot 0.1^k + 1$$

Les potències del pol 0.1 convergeixen vers zero molt més ràpidament que les del pol 0.79, tal com es pot observar a la gràfica de l'esquerra de la Figura 5.5. Com a conseqüència d'aquest fet, podríem negligir el pol a 0.1 i substituir la funció de transferència original per

$$\tilde{G}(z) = \frac{0.13131(z + 0.4394)}{0.9(z - 0.79)}.$$

Aquesta funció s'ha obtingut de l'anterior eliminant el pol a $z = 0.1$ i modificant el guany per tal que ambdues funcions de transferència tinguin el mateix guany en contínua. La



solució $\tilde{y}_k = -0.8541 \cdot 0.79^k + 1$ d'aquest sistema de primer ordre i la solució exacta evolucionen de manera semblant, tal com es pot veure a la gràfica de la dreta de la Figura 5.5.

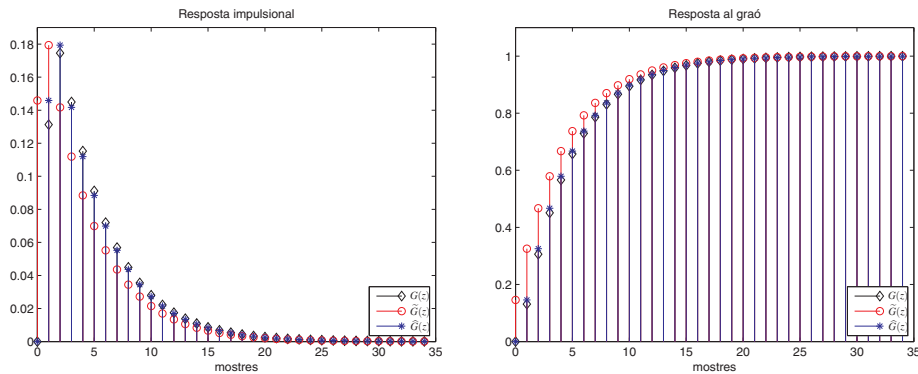
Es diu que el pol $z = 0.79$ és el pol dominant o que domina sobre el pol $z = 0.1$.

Finalment, la Figura 5.5 mostra també la resposta temporal de

$$\hat{G}(z) = \frac{0.13131(z + 0.4394)}{0.9(z - 0.79)z}$$

que, com podem comprovar, aproxima molt millor la resposta temporal del sistema original $G(z)$.

Fig. 5.5
Comparació qualitativa de la resposta temporal del sistema de temps discret en funció dels pols.



Comentari 6 En cas que la planta de temps discret en què s'està treballant provingui del mostratge d'una planta de temps continu, és més convenient realitzar la reducció d'ordre en temps continu i després passar-la a temps discret que fer-ho a la inversa, perquè en el primer procediment s'ajusten automàticament els zeros de mostratge, mentre que en el segon caldria ajustar-los a posteriori.



Dominancia:

1. Carregueu l'exemple I i desplaçeu el pol real cap a l'esquerra. Compareu la resposta temporal del sistema complet i la del sistema reduït. A partir de quin punt les dues respostes són prou properes?
2. Carregueu l'exemple II i desplaçeu els pols reals cap a l'esquerra. Compareu la resposta temporal del sistema complet i la del sistema reduït. A partir de quin punt les dues respostes són prou properes?

5.7. Mesura quantitativa

La resposta dels sistemes de temps discret no és caracteritzable amb la matemàtica contínua, per aquest motiu, resulta complicat calcular els màxims o els temps de pic. Recordem que els sistemes de temps continu de segon ordre es caracteritzen a partir de la resposta dels sistemes sense zeros:



$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.5)$$

Mitjançant els paràmetres:

- M_p : Sobrepuig, valor màxim de la resposta temporal. Se sol expressar en tant per cent.
- t_p : Temps de sobrepuig, instant de temps a partir de l'aplicació del graó en què s'obté el valor màxim de la resposta temporal.
- t_s : Temps d'estabilització, instant de temps a partir del qual la resposta temporal entra en la franja de 2% del valor final.
- t_r : Temps d'enlairament, temps necessari per arribar del 0% al 100% del valor final.
- t_d : Temps de retard, temps necessari per arribar del 0% al 50% del valor final.

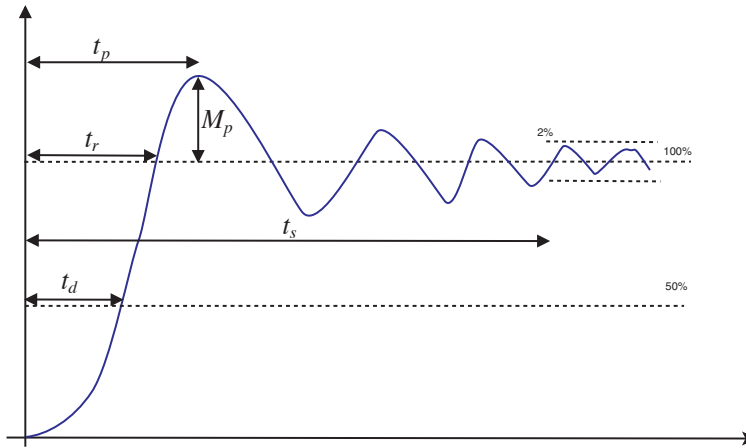


Fig. 5.6
Definició dels paràmetres de la resposta al graó tipus.

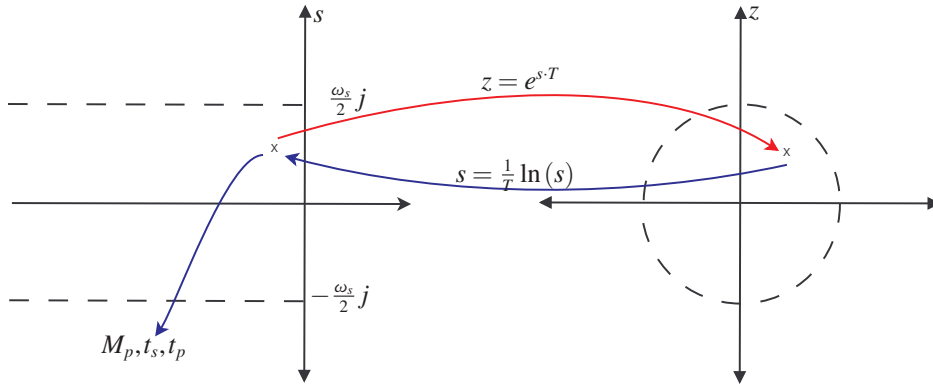
Paràmetres	Expressió
pols	$s = -\sigma \pm \omega_d j = -\xi\omega_n \pm \omega_d j = \omega_n (-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})$
M_p	$e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi}$
t_p	$\frac{\pi}{\omega_d}$
t_s	$\frac{4}{\sigma}(2\%)^1$
t_r	$\frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{\sigma} \right)$

Taula 5.1
Expressions dels paràmetres de la resposta d'un sistema de segon ordre (5.5) estable.
 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$

¹ Aquesta aproximació únicament és vàlida per valors petits de ξ .



Fig. 5.7
Ús de la relació entre el pla z i el pla s .



A la Figura 5.6, es mostra un croquis de la resposta al graó típica d'un sistema i la interpretació dels paràmetres definits.

Per als sistemes de la forma (5.5), els paràmetres anteriors es poden calcular de forma senzilla i mitjançant expressions compactes. Aquestes expressions estan recollides a la Taula 5.1.

Una manera d'aprofitar aquestes expressions i metodologies de treball és assimilar la resposta temporal del sistema de temps discret a una de temps continu i emprar el fet que, si la funció de transferència de temps continu té un pol en p , la de temps discret el tindrà en e^{pT} , on T és el període de mostratge (Figura 5.7). Se segueixen els passos següents:

1. Donat un pol de temps discret z_p i un període de mostratge T , s'obté el seu equivalent de temps continu s_p :

$$s_p = \frac{1}{T} \ln(z_p)$$

2. Al pol s_p se li associen els paràmetres característics: σ , ξ , ω_n i ω_d .
3. Finalment, es calculen els paràmetres d'interès.

Exemple 37 Donada la funció de transferència $G_1(z) = \frac{1}{1.718z^2 - 1.35z + 0.6321}$ i assumint un període de mostratge de $T = 1$ s, es vol caracteritzar mitjançant els paràmetres quantitatius la seva resposta al graó.

Per fer-ho, se seguirà l'assimilació a un sistema de segon ordre de temps continu. En primer lloc, es busquen els pols del sistema, que són: $z_p = 0.3929 \pm 0.4620j$. Els seus equivalents de temps continu són $s_p = -0.5000 \pm 0.8660j$ i, per tant, $\sigma = 0.5$, $\omega_d = 0.8660$, $\omega_n = 1$ i $\xi = 0.5$.

Finalment, les característiques de la resposta són $M_p = 0.1630$, $t_p = 3.6276$ s, $t_s = 8$ s i $t_r = 1.2092$ s.

La Figura 5.8 i la resposta al graó del sistema $G_1(z)$ (en color vermell), mostra també la resposta del sistema:



$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

Aquest sistema correspon a un sistema en la forma canònica, (5.5), i que presenta el pols s_d . S'ha inclòs també la resposta del sistema de temps discret següent:

$$G(z) = \mathcal{Z}_T \{G(s)\} = \frac{0.3403z + 0.2417}{z^2 - 0.7859z + 0.3679}.$$

Aquest sistema té els mateixos pols que $G_1(z)$, però també té un zero provinent del mostreig.

Observeu que la resposta al graó de $G(z)$ i $G(s)$ coincideixen en els instants de mostreig, i que la resposta al graó de $G_1(z)$ i $G(z)$ no coincideixen, encara que són similars. Observeu també que els punts que caracteritzen la resposta del sistema de temps continu no necessàriament coincideixen amb els instants de mostreig i, per exemple, el sobrepuig del $G(s)$ no coincideix amb el sobrepuig de $G(z)$, encara que és similar.

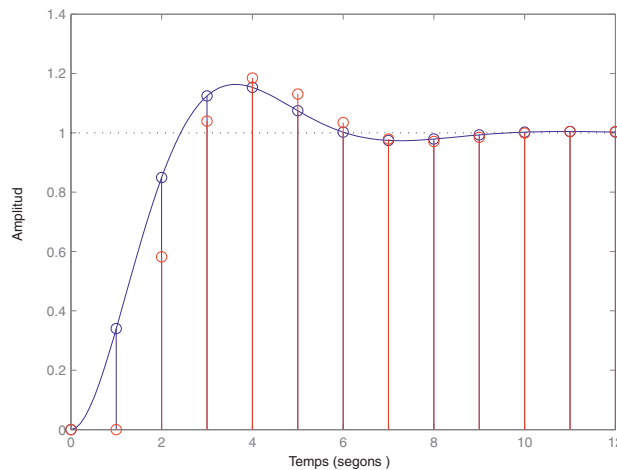


Fig. 5.8
Comparació d'una
resposta de temps
continu i temps discret.

Comentari 7 Cal tenir present que, en aquesta aproximació, s'assumeix que el sistema està ben mostrejat i que, per tant, els pols de temps discret provenen d'uns pols de temps continu dins de la banda primària.

Aquest procediment, encara que útil, és aproximat. Les fonts d'error són:

- Els punts que caracteritzen algun dels paràmetres no necessàriament coincideixen amb els instants de mostreig.
- En passar de temps continu a temps discret, generalment s'incorporen zeros, l'efecte dels quals no es té en compte en fer el càlcul de la inversa.

Bibliografia

- [1] Athanasios C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM, 2005.



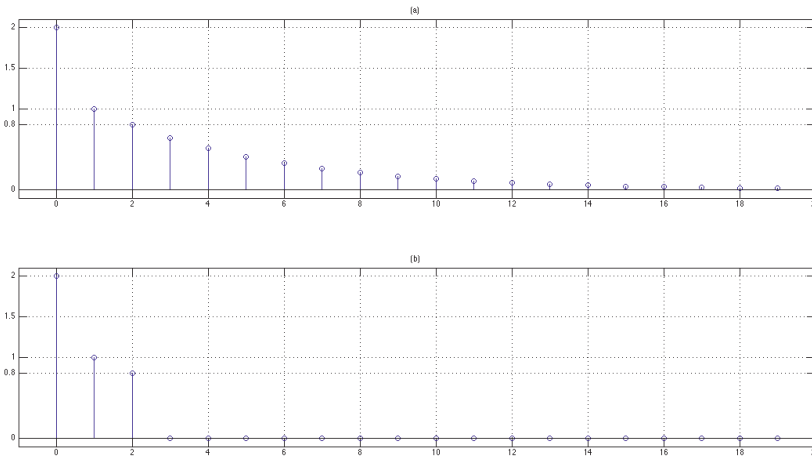
Exercicis proposats

1. Trobeu la resposta impulsional de $\frac{b_1 z + b_0}{(z + a)^2}$.
2. Trobeu la resposta al graó de $\frac{b_1 z + b_0}{z^2 - 2r \cos(\theta) z + r^2}$.
3. La Figura 5.9 presenta la resposta impulsional dels dos sistemes següents:

$$- G_1(z) = \frac{az^2 + bz + c}{z^2} \quad - G_2(z) = k \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

Identifiqueu raonadament quina resposta temporal correspon a cadascun del sistemes. A partir de l'observació de les respostes temporals, determineu els valors de a, b, c i k, α, β .

Fig. 5.9
Diagrama de Bode de
l'Exercici 3.



4. La Figura 5.10 presenta la resposta al graó dels quatre sistemes següents:

$$- G_1(z) = \frac{z - 1}{z(z + 0.8)} \quad - G_3(z) = \frac{1}{z + 0.8}$$

$$- G_2(z) = \frac{0.77552}{z^2 - 0.8645z + 0.64} \quad - G_4(z) = \frac{0.2}{z - 0.8}$$

Identifiqueu raonadament quina resposta temporal correspon a cadascun dels sistemes.

5. Compareu la resposta temporal dels sistemes

$$G_1(z) = \frac{1}{z^2 - 1.712z + 0.81} \quad \text{i} \quad G_2(z) = \frac{1}{z^2 + 0.3527z + 0.09}$$

Quina és més ràpida ? Quina presenta una freqüència menor d'oscil·lació ?

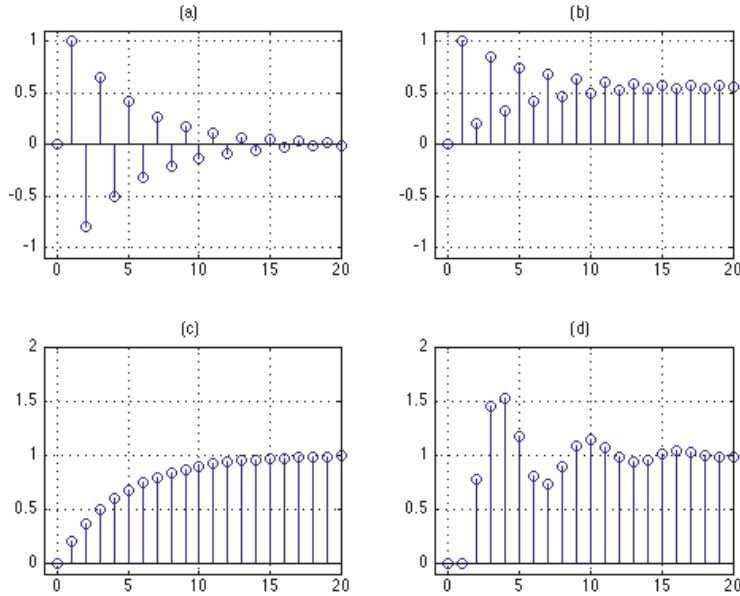


Fig. 5.10
Diagrama de Bode de
l'Exercici 4.

6. Un sistema $H(z)$ presenta una resposta impulsional h_k . Determineu la resposta temporal enfront d'una entrada genèrica r_k a partir de h_k .
7. Compareu la resposta impulsional dels sistemes

$$G(z) = \frac{0.144(z-0.5)}{(z-0.1)(z-0.2)(z-0.9)}, \quad G_1(z) = \frac{1.44(z-0.9)(z-0.5)}{(z-0.1)(z-0.2)(z-0.9)}$$

$$\text{i } G_2(z) = \frac{0.075789(z+0.9)(z-0.5)}{(z-0.1)(z-0.2)(z-0.9)}.$$

8. Aplicant el concepte de dominància, obteniu un model d'ordre reduït que presenti una resposta temporal similar a la del sistema

$$G(z) = \frac{z^2 - z + 0.16}{z^5 - 1.607z^4 + 0.8864z^3 - 0.126z^2 - 0.0695z - 0.01764}.$$

9. Aplicant el concepte de dominància, obteniu un model d'ordre reduït que presenti una resposta temporal similar a la del sistema

$$G(z) = \frac{z^4 - 3z^3 + 3.15z^2 - 1.31z + 0.1584}{z^4 - 1.7z^3 + 0.71z^2 + 0.017z - 0.0072}.$$

10. Emprant l'aproximació de temps continu, determineu els temps d'estabilització i el sobrepuig de la resposta al graó dels sistemes

$$G_1(z) = \frac{0.49167(z+0.5006)}{z^2 - 0.3975z + 0.1353} \quad \text{i} \quad G_2(z) = \frac{1.4756(z-0.5)}{z^2 - 0.3975z + 0.1353}.$$

Assumint un període de mostratge $T = 1$ s.

→ 6



Estabilitat dels sistemes lineals de temps discret

L'estabilitat és una propietat imprescindible en un sistema de control. La resposta d'un sistema lineal estable a un senyal fitat continua éssent un senyal fitat la qual cosa evita un mal funcionament del sistema.

A les seccions següents, es presenta la definició d'estabilitat i la caracterització d'aquesta en el cas dels sistemes lineals.

6.1. Definició

Definició 28 *Sistema lineal estable.*¹ Es diu que un sistema causal és estable si, per a qualsevol entrada fitada, la sortida és també un senyal fitat.

A les seccions anteriors, s'ha vist que el comportament d'un sistema de temps discret es pot representar mitjançant una funció de transferència (Figura 6.1). Aquesta mostra la relació entre la transformada z de l'entrada i la de sortida, amb les hipòtesis de condicions inicials nul·les.

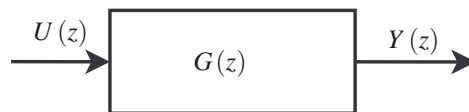


Fig. 6.1
Esquema d'un sistema.

És important recordar que la funció de transferència, $G(z)$, d'un sistema correspon a la transformada z de la resposta impulsional del sistema, g_k . L'estabilitat del sistema es pot caracteritzar a partir de l'estudi de la resposta impulsional del sistema.

¹ En la literatura, això és coneix també com a BIBO (*bounded input bounded output*) estable.



Proposició 31 *Sistema lineal estable. Un sistema lineal és estable únicament si la suma de la sèrie definida per $|g_k|$ és fitada:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| \leq \bar{G}$$

Demostració: Cal recordar que el producte en el domini de la transformada correspon a la convolució en el domini temporal. Així,

$$Y(z) = G(z)U(z) \rightarrow y_k = g_k * u_k = \sum_{l=0}^k u_l g_{k-l}.$$

Per tant,

$$|y_k| = \left| \sum_{l=0}^k u_l g_{k-l} \right| = \left| \sum_{l=0}^k u_{k-l} g_l \right| \leq \sum_{l=0}^k |u_{k-l}| |g_l|.$$

Si el senyal d'entrada és fitat, aleshores $|u_k| < \bar{U}$, per tant es pot escriure:

$$|y_k| \leq \sum_{l=0}^k |u_{k-l}| |g_l| \leq \bar{U} \sum_{l=0}^k |g_l| \leq \bar{U} \cdot \bar{G}.$$

Això prova que si, $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| \leq \bar{G}$ i el senyal d'entrada és fitat, la sortida és fitada ($|y_k| < \bar{G} \cdot \bar{U}$).

Per demostrar la implicació de la proposició en sentit contrari, cal provar que, en cas que $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k|$ sigui divergent, el senyal de sortida és no fitat. Per fer-ho, es mostrarà que en, cas que la sèrie sigui divergent, la sortida serà no fitada per, alguns senyals.

Que la sèrie sigui divergent implica que es pot trobar un instant K tal que la $\sum_{k=0}^K |g_k| > H$ per a qualsevol valor de $H > 0$ que es fixi. Tot seguit, es defineix el senyal següent

$$u_k = \text{sign}(g(K-k)).$$

Observeu que $|u_k| \leq 1$ i, per tant, és un senyal fitat. En aquest cas, la sortida a l'instant K pren la forma:

$$y_K = \sum_{l=0}^K u_l g_{K-l} = \sum_{l=0}^K \text{sign}(g(K-k)) g_{K-l} = \sum_{l=0}^K |g_l| > H.$$

Així, podem concloure que y_k és un senyal sempre positiu i que, donat un valor H , sempre podem trobar un instant K tal que el senyal és més gran que H . Per tant, es tracta d'un senyal no fitat.

Amb això finalitza la demostració.

Proposició 32 *Sistema lineal estable. Un sistema lineal descrit per una funció de transferència, $G(z)$, és estable si tots els seus pols estan a l'interior del cercle unitat.*

Demostració: A les seccions anteriors, s'ha vist que la funció de transferència correspon a la transformada en z de la resposta impulsional del sistema. Aquesta es pot descom-



pondre com la suma de diferents termes, cadascun d'ells lligats a cadascun dels pols del sistema. Els termes corresponents a pols a l'interior del cercle són termes exponencials decreixents en el temps. Per tant, amb les hipòtesis plantejades, tots els termes són exponencialment decreixents i, per tant, la resposta impulsional tendeix a zero i la sèrie $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k|$ és sumable.

Definició 29 *Sistema lineal marginalment estable.* Es diu que un sistema causal és marginalment estable si, per a qualsevol entrada fitada que tendeix a zero amb el temps, la sortida correspon a un senyal fitat no nul. O, en altres paraules, si la seva resposta impulsional és un senyal fitat.

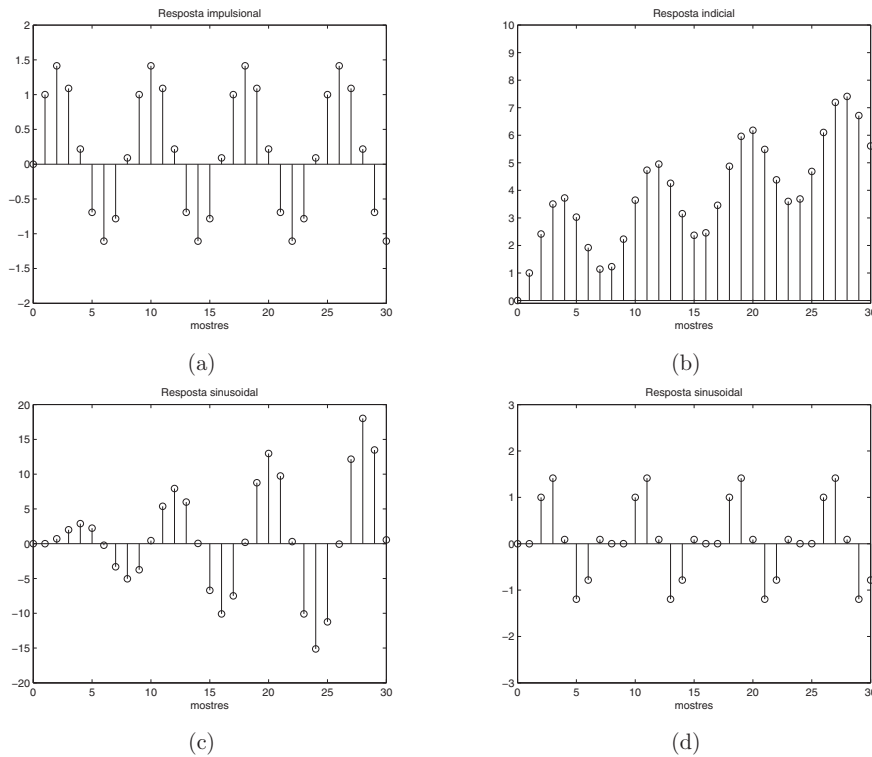


Fig. 6.2
Resposta temporal de
l'Exemple 38.

Exemple 38 Donat un sistema lineal representat per la funció de transferència següent:

$$G(z) = \frac{z^2 - z + 0.09}{z^3 - 2.414z^2 + 2.414z - 1}$$

analitzeu-ne l'estabilitat.

En primer lloc, s'obtenen els pols del sistema; així :

$$G(z) = \frac{(z - 0.9)(z - 0.1)}{(z - 1)(z - e^{\frac{\pi}{4}j})(z - e^{-\frac{\pi}{4}j})}$$

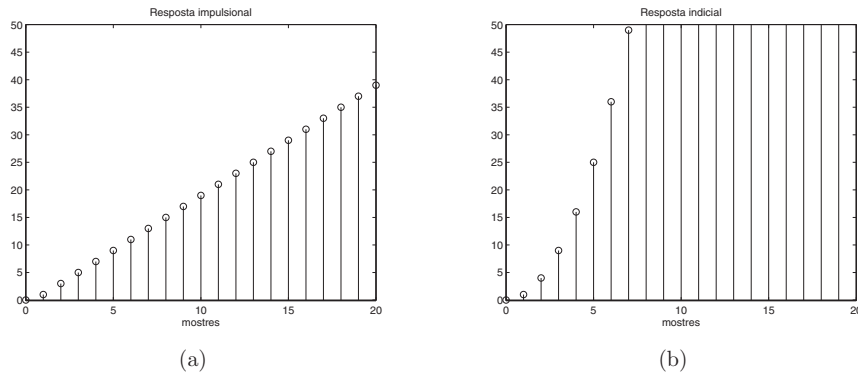
com es pot observar, té tres pols sobre el cercle de multiplicitat 1. Així, el sistema serà marginalment estable.



La Figura 6.2 mostra la resposta temporal del sistema enfront de diferents senyals d'entrada. La subfigura 6.2.a correspon a la resposta a un senyal impulsional i com es pot comprovar, es tracta d'un senyal fitat. La subfigura 6.2.b correspon a la resposta a un senyal graó i com es pot comprovar, es tracta d'un senyal no fitat. La subfigura 6.2.c correspon a la resposta a un senyal sinusoidal, $u_k = \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)$, de freqüència $\frac{\pi}{4}$ i, com es pot comprovar, es tracta d'un senyal no fitat. I, finalment, la subfigura 6.2.d correspon a la resposta a un senyal sinusoidal, $u_k = \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$, de freqüència $\frac{\pi}{2}$ i, com es pot comprovar, es tracta d'un senyal fitat. Per tant, aquest sistema presenta una resposta fitada per a la majoria de senyals d'entrada i una resposta no fitada per a alguns senyals. En particular, presenta una resposta no fitada per a aquells senyals que presenten components relacionades amb els pols (integradors i elements de freqüència $\frac{\pi}{4}$).

Proposició 33 Sistema lineal marginalment estable. Un sistema lineal descrit per una funció de transferència, $G(z)$, és marginalment estable si té pols de multiplicitat senzilla sobre el cercle i no té pols fora del cercle unitat.

Fig. 6.3
Resposta temporal de
l'Exemple 39.



Exemple 39 Donat el sistema

$$G(z) = \frac{z + 1}{z^2 - 2z + 1}$$

determineu-ne l'estabilitat.

Per fer-ho, es visualitzen els pols del sistema:

$$G(z) = \frac{(z + 1)}{(z - 1)^2}$$

Com es pot veure, el sistema presenta un pol de multiplicitat 2 sobre el cercle. Per això, es tracta d'un sistema inestable. La Figura 6.3 mostra la resposta temporal del sistema. En particular, la subfigura 6.3.a mostra la resposta impulsional, mentre que la subfigura 6.3.b mostra la resposta indicial del sistema. Com es pot veure, en els dos casos la resposta és un senyal no fitat.

Així, l'estabilitat dels sistemes lineals es caracteritza a partir de la posició dels seus pols, seguint el que s'indica a la Figura 6.4. Les diferents possibilitats són:

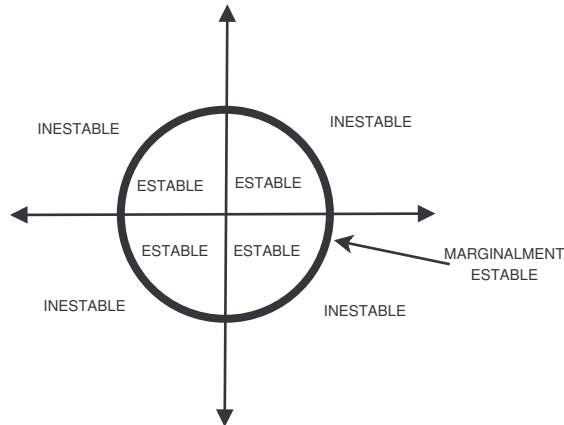


Fig. 6.4
Llocs geomètrics
d'estabilitat.

- Sistema estable: Un sistema lineal, descrit per una funció de transferència, és estable si tots els pols de la funció de transferència són a l'interior del cercle unitat.
- Sistema marginalment estable: Un sistema lineal, descrit per una funció de transferència, és marginalment estable si presenta pols sobre el cercle unitat de multiplicitat senzilla i la resta, a l'interior del cercle unitat.
- Sistema inestable: Un sistema pot ser inestable per dos motius:
 1. Algun dels pols del sistema està fora del cercle unitat.
 2. El sistema té algun pol sobre el cercle de multiplicitat més gran que 1.

6.2. Criteri de Jury: introducció

La caracterització de l'estabilitat d'un sistema, ja sigui de llaç obert o de llaç tancat, és de gran importància. A la secció anterior, s'ha mostrat que l'estabilitat dels sistemes lineals modelats mitjançant funcions de transferència queda caracteritzada pels pols de la funció de transferència.

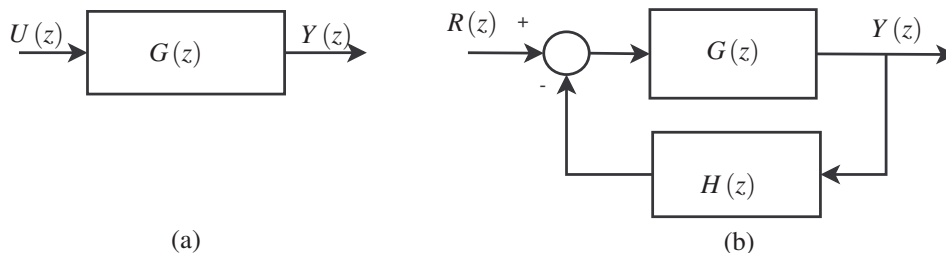


Fig. 6.5
Sistema de llaç obert i
sistema de llaç tancat.

Així, en cas de voler caracteritzar l'estabilitat d'un sistema en llaç obert (subfigura 6.5.a), cal descompondre la funció de transferència $G(z)$ que el descriu, en numerador i denominador $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ i determinar la ubicació de les arrels del polinomi del denominador, $D(z) = 0$, que corresponen al pols del sistema de llaç obert. En cas de voler caracteritzar l'estabilitat d'un sistema de llaç tancat (subfigura 6.5.b), cal construir la funció de transferència de llaç tancat,



$$\frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{\frac{N_G(z)}{D_G(z)}}{1 + \frac{N_G(z)N_H(z)}{D_G(z)D_H(z)}} = \frac{N_G(z)D_H(z)}{N_H(z)N_G(z) + D_H(z)D_G(z)},$$

descompondre-la en numerador i denominador, i determinar la ubicació de les arrels del polinomi del denominador, $N_H(z)N_G(z) + D_H(z)D_G(z) = 0$, que corresponen al pols del sistema de llaç tancat.

Cal tenir present que, per caracteritzar l'estabilitat, no cal conèixer el valor dels pols; únicament cal conèixer la seva ubicació en el pla complex. Per saber la ubicació hi ha diferents possibilitats:

1. Calcular les arrels del polinomi. Avui és senzill calcular numèricament les arrels d'un polinomi d'ordre arbitrari si es coneix el valor dels coeficients del polinomi.

En la teoria de control, hi ha ocasions en què els coeficients del polinomi són incerts² o són incògnites, per exemple els paràmetres d'un controlador. En aquests casos, no es poden aplicar els mètodes numèrics. Cal tenir present que únicament hi ha una solució analítica per als polinomis fins a grau 4, i les expressions corresponents a grau 3 i 4 són de poca utilitat pràctica.

2. Aplicar el criteri de Jury. El criteri de Jury [1, 2, 3, 4] és un procediment que indica quines condicions han de complir els coeficients d'un polinomi per tal que tingui totes les seves arrels a l'interior del cercle unitat. Aquest criteri es pot aplicar tant amb polinomis amb coeficients numèrics com amb incògnites en els coeficients. És en aquest darrer cas que el criteri de Jury té interès pràctic avui en dia.

6.3. Criteri de Jury: algorisme

Del criteri de Jury, n'hi ha diferents formulacions[1, 2, 3, 4]. En aquesta secció, es presenta la més habitual.

El criteri de Jury permet, donat un polinomi $Q(z)$, determinar si totes les seves arrels tenen mòdul inferior a 1 o no, és a dir, si són a l'interior del cercle unitat o no.

Sigui

$$Q(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 \quad a_0 \neq 0.$$

Per aplicar el criteri de Jury, es comença escrivint els coeficients del polinomi, tal com es mostra a la taula següent:

	z^0	z^1	z^2	\dots		z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	1
2	1	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0

² Incert: no conegut de forma exacta; normalment es coneix un interval en què hi ha contingut el valor real.



a la qual s'hi van afegint files seguint l'algorisme $b_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ 1 & a_i \end{vmatrix}$

	z^0	z^1	z^2	\dots		z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	1
2	1	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_2	b_0	

i així successivament, $c_i = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-i} \\ b_{n-1} & b_i \end{vmatrix}$, fins arribar a la fila $2n - 2$:

	z^0	z^1	z^2	\dots		z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	1
2	1	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_2	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots	c_0		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots				
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots				
2n-3	v_0	v_1	v_2				
2n-2	v_2	v_1	v_0				

Proposició 34 *Criteri de Jury.* Totes les arrels de $Q(z)$ tenen mòdul estrictament inferior a 1 si i només si:

- $Q(1) > 0$ i $Q(-1) > 0$ si n és parell, $Q(-1) < 0$ altrament.
- $|a_0| < a_n = 1$.
- $|b_0| > |b_{n-1}|$.
- $|c_0| > |c_{n-2}|$.
- \vdots
- $|v_0| > |v_2|$.

Comentari 8 *El nombre d'inequacions que s'incomplixen no aporta cap tipus d'informació.*

Exemple 40 *Determineu per a quins valors de A totes les arrels de $Q(z) = z^2 - 0.2Az + 0.1A$ tenen mòdul inferior a 1.*



Atès que el polinomi inicial és de segon grau, la taula té una única fila. Aplicant-hi les condicions del criteri, tenim:

$$- Q(1) > 0 \Leftrightarrow 1 - 0.1A > 0 \quad Q(-1) > 0 \Leftrightarrow 1 + 0.3A > 0.$$

Per tant, les dues arrels de $Q(z)$ tenen mòdul inferior a 1 si i només si $-\frac{1}{0.3} < A < 10$.

Exemple 41 Determineu si totes les arrels de $Q(z) = z^4 - 2z^3 + 1.5z^2 - 0.1z - 0.2$ tenen mòdul inferior a 1.

Primer, completeu la taula de Jury:

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0.2	-0.1	1.5	-2	1
2	1	-2	1.5	-0.1	-0.2
3	-0.96	2.02	-1.8	0.5	
4	0.5	-1.8	2.02	-0.96	
5	0.67	-1.04	0.72		
6	0.72	-1.04	0.67		

En aplicar les condicions del criteri, s'obté:

- $Q(1) = 0.2 > 0$ **Ok**, $Q(-1) = 4.4 > 0$ **Ok**.
- $|-0.2| < 1$ **Ok**.
- $|0.96| > |0.5|$ **Ok**.
- $|0.67| \not> |0.72|$ **!!!**.

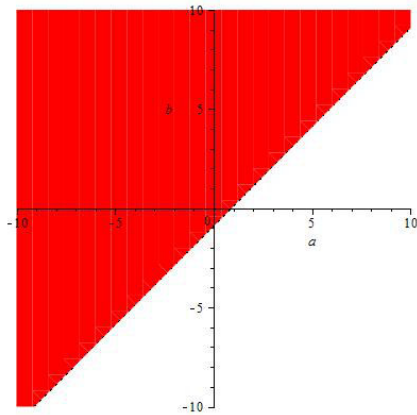
per tant, el polinomi té alguna arrel fora del cercle.

Numèricament, es pot comprovar que les arrels del polinomi són: $0.8140 \pm 0.6458j$, 0.6548 i -0.2829 . El mòdul d'aquestes arrels és 1.0391 , 1.0391 , 0.6548 i 0.2829 ; per tant, com ja havia predit el criteri de Jury, el polinomi presenta arrels fora del cercle.

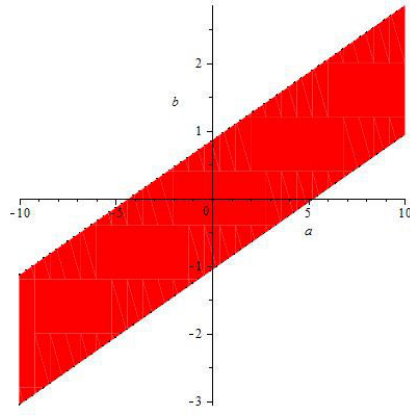
6.4. Exemple d'aplicació del criteri de Jury en l'anàlisi de la robustesa

Una de les aplicacions del criteri de Jury és analitzar l'estabilitat d'un sistema de control en què la planta presenta paràmetres incerts. A manera d'exemple, s'analitza un sistema de llaç tancat on la planta és de la forma:

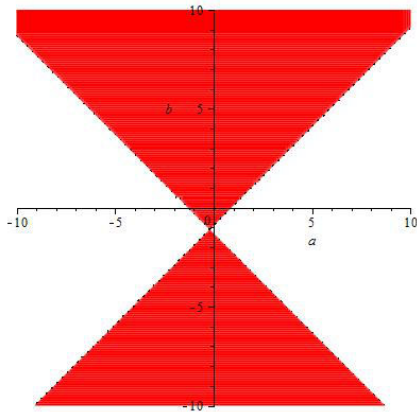
$$P(z) = \frac{z+1}{z^3 + az^2 + bz + 0.1}$$



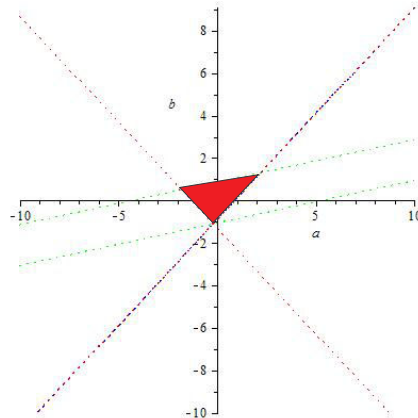
Inequació 1



Inequació 2



Inequació 3



Conjunt solució

Fig. 6.6
Regions del pla a - b que compleixen les diferents condicions (en vermell, la regió que compleix), d'acord amb l'Exemple 6.4.

on $a, b \in \mathbb{R}$ són dos paràmetres incerts amb un valor nominal de 0. Pel sistema nominal:

$$\bar{P}(z) = \frac{z+1}{z^3+0.1}$$

s'ha dissenyat el controlador proporcional integral següent:

$$C(z) = 0.1 + 0.001 \frac{z}{z-1}.$$

Els pols de llaç tancat del sistema nominal són: 0.9985 , $0.2649 \pm 0.5560j$, i -0.5282 . Donat que tots estan dins el cercle unitat el sistema de llaç tancat és estable.

Ens preguntem per a quins valors de la incertesa (paràmetres a i b) el sistema en llaç tancat continua estable. Per fer-ho, s'aplica el criteri de Jury. Primerament, es construeix la funció de llaç tancat:



$$T(z) = \frac{P(z)C(z)}{1+P(z)C(z)}$$

$$= \frac{(z+1.0)(101z-100)}{1000z^4 + (-1000 + 1000a)z^3 + (1000b + 101 - 1000a)z^2 + (-1000b + 101)z - 200}$$

Per tal d'estudiar l'estabilitat del sistema de llaç tancat, cal analitzar el polinomi del denominador:

$$D(z) = 1000z^4 + (-1000 + 1000a)z^3 + (1000b + 101 - 1000a)z^2 + (-1000b + 101)z - 200.$$

Donat que el polinomi depèn dels paràmetres a i b , i que el polinomi és de quart grau no podem calcular les arrels de forma analítica, per la qual cosa s'aplica el criteri de Jury. Per aplicar-lo, es converteix el polinomi en mònic:

$$Q(z) = z^4 + (-1.0 + a)z^3 + (1.0b + 0.101 - 1.0a)z^2 + (-1.0b + 0.101)z - 0.2$$

i es construeix la taula següent:

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	a_0	a_1	a_2	a_3	1
2	1	a_3	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	
4	b_3	b_2	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2		
6	c_2	c_1	c_0		

on a_i és el coeficient de $Q(z)$ i

$$b_0 = -0.96$$

$$b_1 = 0.2b + 0.9798 - a$$

$$b_2 = -1.2b - 0.1212 + 1.2a$$

$$b_3 = 0.099 - 0.2a + b$$

i

$$c_0 = 0.911799 + 0.0396a - 0.198b - 0.04a^2 + 0.4a \cdot b - 1.0b^2$$

$$c_1 = 0.048b - 0.9286092 + 0.81696a - 1.44 \cdot a \cdot b + 1.2b^2 + 0.24a^2$$

$$c_2 = 0.1524b + 0.0193518 - 0.85704a + 1.04ab - 0.2b^2 - 0.2a^2.$$

Per tal que el sistema de llaç tancat sigui estable, cal que es compleixin les condicions següents:

- $Q(1) > 0$: $0.002 > 0$. Per tant, es compleix la condició.
- $Q(-1) > 0$: $1.8 + 2a - 2b > 0$. Aquesta inequació l'anomenarem *inequació 1*.



- $|a_0| < 1$: $0.80 < 1$. Per tant, es compleix la condició.
- $|b_3| > |b_0|$: $-0.96 + |-0.099 + 0.2a - 1.0b| < 0$. Aquesta inequació l'anomenarem *inequació 2*.
- $|c_2| > |c_0|$: $-|-0.911799 - 0.0396a + 0.198b + 0.04a^2 - 0.4ab + b^2| + |-0.1524b - 0.0193518 + 0.85704a - 1.04ab + 0.2b^2 + 0.2a^2|$. Aquesta inequació l'anomenarem *inequació 3*.

Per tal de determinar la regió del pla $a - b$ en què el sistema és estable, s'analitza la intersecció de les regions definides per cadascuna de les inequacions presentades. La Figura 6.6 mostra la regió del pla $a - b$ que compleixi les diferents inequacions i, finalment, la intersecció de totes les regions. Així, podem concloure que els paràmetres a i b es poden moure a l'interior del triangle de la Figura 6.6 i es mantindrà l'estabilitat; si algun dels valors surt d'aquest triangle, el sistema de llaç tancat es tornarà inestable.

6.5. Exemple d'aplicació del criteri de Jury en el disseny del controlador

Un altre interès del criteri de Jury és determinar els valors dels paràmetres d'un controlador per tal que el sistema de llaç tancat sigui estable. Tot seguit, s'il·lustra el procediment que permet fer-ho mitjançant un exemple.

Donada la planta:

$$P(z) = 0.1 \frac{z^2 + 6z + 5}{z^3 + 0.5z^2 + 0.7z + 0.3}$$

es vol dissenyar un controlador proporcional integral (PI) de la forma:

$$C(z) = k_p + \frac{k_i(z+1)}{z-1}$$

que garanteixi l'estabilitat de llaç tancat. Per determinar els valors de k_p i k_i es construeix la funció de transferència de llaç tancat:

$$T(z) = \frac{(z^2 + 6.0z + 5.0)((k_p + k_i)z - k_p + k_i)}{10.0z^4 + (-5 + k_p + k_i)z^3 + (2 + 7k_i + 5k_p)z^2 + (-k_p + 11k_i - 4)z - 3 - 5k_p + 5k_i}$$

Per tal d'estudiar l'estabilitat del sistema de llaç tancat, cal analitzar el polinomi del denominador:

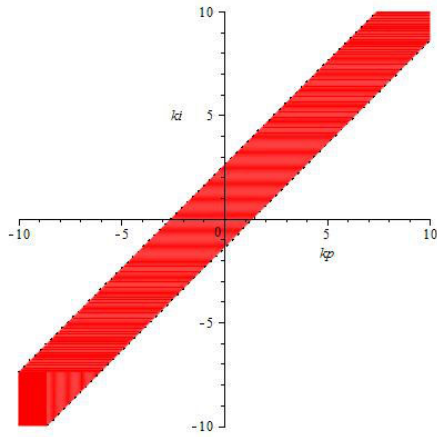
$$D(z) = 10.0z^4 + (-5 + k_p + k_i)z^3 + (2 + 7k_i + 5k_p)z^2 + (-k_p + 11k_i - 4)z - 3 - 5k_p + 5k_i.$$

Donat que el polinomi depèn dels paràmetres k_p i k_i , i que el polinomi és de quart grau no podem calcular les arrels de forma analítica, per la qual cosa s'aplica el criteri de Jury. Per aplicar-lo, es converteix el polinomi en mònic:

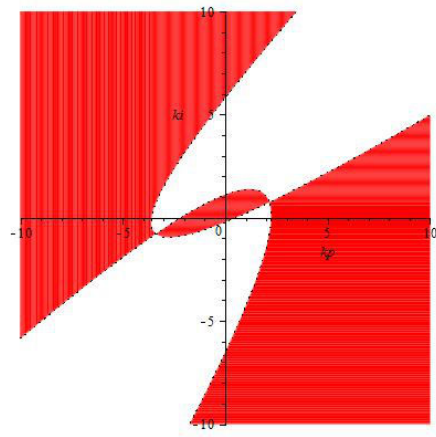
$$Q(z) = z^4 + (-0.5 + 0.1k_p + 0.1k_i)z^3 + (0.2 + 0.7k_i + 0.5k_p)z^2 + (-0.1k_p + 1.1k_i - 0.4)z - 0.3 - 0.5k_p + 0.5k_i$$



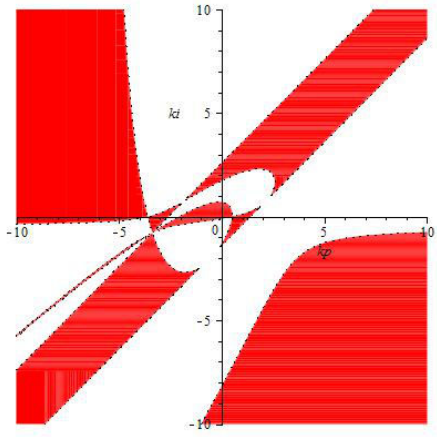
Fig. 6.7
Regions del pla $k_p - k_i$ que compleixen les diferents condicions (en vermell, la regió que compleix) d'acord amb l'Exemple 6.5.



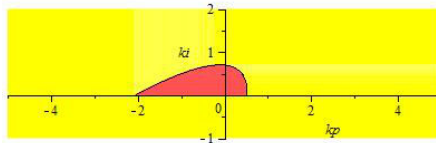
Inequació 2



Inequació 3



Inequació 4



Conjunt solució

i es construeix la taula següent:

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	a_0	a_1	a_2	a_3	1
2	1	a_3	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	
4	b_3	b_2	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2		
6	c_2	c_1	c_0		



on a_i són els coeficients de $Q(z)$ i

$$b_0 = -0.91 + 0.3k_p - 0.3k_i + 0.25k_p^2 - 0.5k_p k_i + 0.25k_i^2$$

$$b_1 = 0.62 + 0.13k_p - 0.63k_i + 0.05k_p^2 - 0.6k_p k_i + 0.55k_i^2$$

$$b_2 = -0.26 - 0.75k_p - 0.81k_i - 0.25k_p^2 - 0.1k_p k_i + 0.35k_i^2$$

$$b_3 = 0.55 + 0.32k_p - 1.38k_i - 0.05k_p^2 + 0.05k_i^2$$

i

$$c_0 = 0.06k_p^4 + 0.06k_i^4 + 0.182k_p^3 - 0.012k_i^3 - 0.25k_p^3 k_i - 0.25k_p k_i^3 - 0.4124k_p^2 - 2.3244k_i^2$$

$$- 0.588k_p^2 k_i + 0.418k_p k_i^2 + 0.38k_p^2 k_i^2 + 1.6132k_p k_i - 0.898k_p + 2.064k_i + 0.5256$$

$$c_1 = 0.12k_i^4 - 0.42k_p k_i^3 + 0.09k_p^3 + 0.201k_i^3 - 0.18k_p^3 k_i - 1.4538k_i^2$$

$$- 0.771k_p^2 k_i + 0.48k_p k_i^2 + 0.48k_p^2 k_i^2 + 0.513k_p^2 - 0.7128k_p k_i - 0.4212 + 0.5634k_p + 0.474k_i$$

$$c_2 = -0.06k_p^4 + 0.06k_i^4 + 0.07k_p^3 k_i - 0.17k_p k_i^3 - 0.272k_p^3 + 0.483k_i^3 - 0.1006k_p^2$$

$$- 1.3434k_i^2 + 0.447k_p^2 k_i - 0.658k_p k_i^2 + 0.1k_p^2 k_i^2 + 0.914k_p k_i + 0.3346k_p + 2.0172k_i - 0.1044.$$

Per tal que el sistema de llaç tancat sigui estable, cal que es compleixin les condicions següents:

- $Q(1) > 0$: $2.4k_i > 0$. Aquesta inequació l'anomenarem *inequació 1*.
- $Q(-1) > 0$: $1.8 > 0$. Per tant es compleix la condició.
- $|a_0| < 1$: $|-0.3 - 0.5k_p + 0.5k_i| - 1 < 0$. Aquesta inequació l'anomenarem *inequació 2*.
- $|b_3| > |b_0|$:

$$- \left| -0.91 + 0.3k_p - 0.3k_i + 0.25k_p^2 - 0.5k_p k_i + 0.25k_i^2 \right| + |0.55 + 0.32k_p - 1.38k_i - 0.05k_p^2 + 0.05k_i^2| < 0,$$

aquesta inequació l'anomenarem *inequació 3*.

- $|c_2| > |c_0|$:

$$- \left| -0.4124k_p^2 + 1.6132k_p k_i - 2.3244k_i^2 - 0.588k_p^2 k_i + 0.418k_p k_i^2 - 0.25k_p^3 k_i + 0.38k_p^2 k_i^2 - 0.25k_p k_i^3 + 0.182k_p^3 - 0.012k_i^3 + 0.06k_p^4 + 0.06k_i^4 + 0.5256 - 0.898k_p + 2.064k_i \right| + \left| -0.1006k_p^2 + 0.914k_p k_i - 1.3434k_i^2 + 0.447k_p^2 k_i - 0.658k_p k_i^2 + 0.07k_p^3 k_i + 0.1k_p^2 k_i^2 - 0.17k_p k_i^3 - 0.272k_p^3 + 0.483k_i^3 - 0.06k_p^4 + 0.06k_i^4 - 0.1044 + 0.3346k_p + 2.0172k_i \right| < 0.$$

Aquesta inequació l'anomenarem *inequació 4*.

Per tal de determinar la regió del pla k_p - k_i en què el sistema és estable, s'analiza la intersecció de les regions definides per cadascuna de les inequacions presentades. La Figura 6.7 mostra la regió del pla k_p - k_i que compleix les diferents inequacions i, finalment, la intersecció de totes les regions. Així podem concloure que els paràmetres k_p i



k_i es poden moure a l'interior del triangle de la Figura 6.7 i es mantindrà l'estabilitat; si algun dels valors surt d'aquesta zona, el sistema de llaç tancat es tornarà inestable.

Bibliografia

- [1] E.I. Jury. *Theory and Application of the z-Transform Method*. Robert E. Krieger Pub. Co., Huntington, N.Y., 2 edition, 1973. Reprinted with corrections. Originally published in 1964.
- [2] L.H. Keel and S.P. Bhattacharyya. A new proof of the jury test. *Automatica*, 35:251–258, 1999.
- [3] Ekaitz Zulueta, Teodoro Rico, Idoia Manero, M. Karnele, and L. De Ipiña. Una demostración de la prueba de bibo estabilidad para sistemas discretos. In *Jornadas de Automática*, pages 1189–1193, 2006.
- [4] Younseok Choo. An elementary proof of the jury test for real polynomials. *Automatica*, 47(1):249–252, January 2011.



Exercicis proposats

1. Determineu l'estabilitat dels sistemes següents:

$$G_1(z) = \frac{z+1}{z-0.9}, \quad G_2(z) = \frac{z+2}{z-0.9}, \quad G_3(z) = 10 \frac{z+1}{z+0.9},$$

$$G_4(z) = \frac{z+1}{z-1.9} \quad \text{i} \quad G_5(z) = \frac{z+0.1}{z+1.9}.$$

2. Determineu l'estabilitat dels sistemes:

$$G_1(z) = \frac{1}{z^2+1}, \quad G_2(z) = \frac{1}{z^2+\frac{1}{2}} \quad \text{i} \quad G_3(z) = \frac{1}{z^2+2}.$$

3. Caracteritzeu l'estabilitat del sistema

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2+\alpha z+\beta}$$

en funció dels valors de α i β .

4. Un sistema de temps discret $G(z)$ presenta una resposta impulsional

$$g_k = e^{-k} \sin(\omega k).$$

Indiqueu si és estable, marginalment estable o inestable.

5. Donada la planta

$$P(z) = \frac{z+0.6}{(z+1)(z-0.6)(z-1)},$$

es tanca un llaç de control proporcional amb una constant de proporcionalitat k_p . Determineu el rang de valors de k_p que fan estable el sistema.

6. Donada la planta

$$P(z) = \frac{1}{z^2+z+1},$$

es tanca un llaç de control proporcional amb una constant de proporcionalitat k_p . Determinar el rang de valors de k_p que fan estable el sistema.

7. Donada una planta

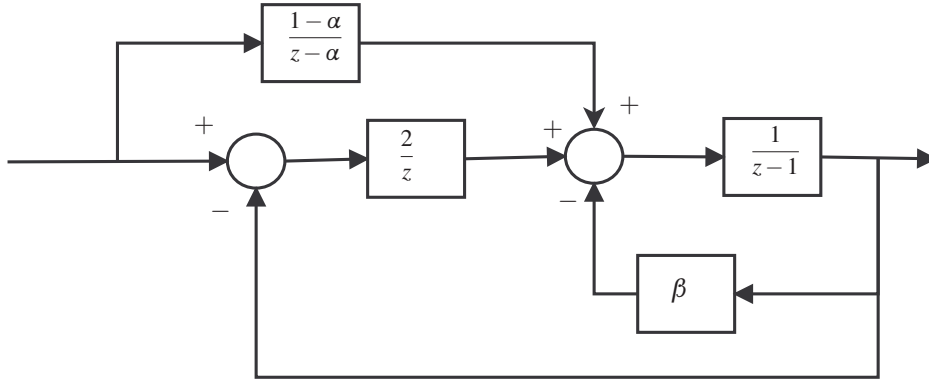
$$P(z) = \frac{1}{z^2+\alpha z+1},$$

es tanca un llaç de control proporcional amb una constant de proporcionalitat $k_p = 1$. Determineu el rang de valors de α que fan estable el sistema de llaç tancat.

8. Donat el sistema de la Figura 6.8, caracteritzeu-ne l'estabilitat en funció de α i β

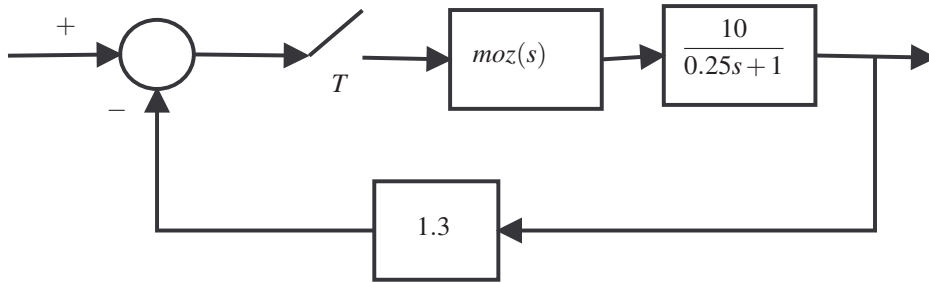


Fig. 6.8
Esquema de blocs de l'Exercici 8.i



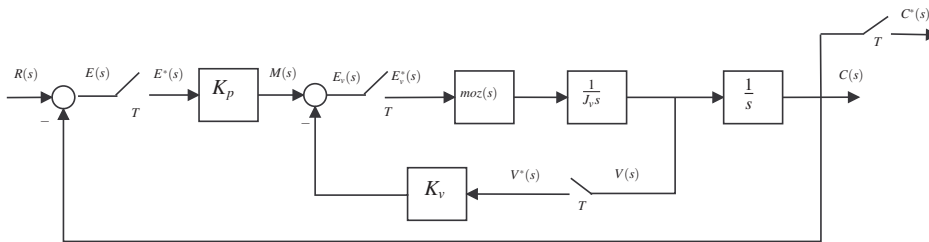
9. Donat el sistema de la Figura 6.9, caracteritzeu-ne l'estabilitat en funció de T .

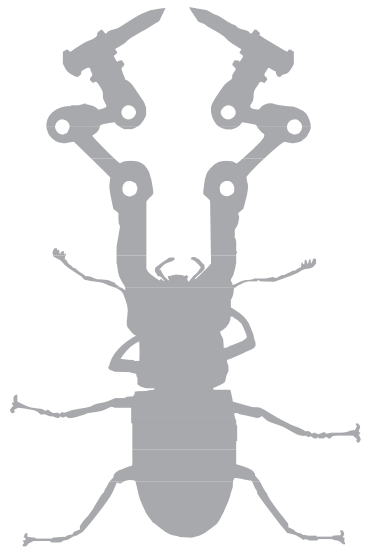
Fig. 6.9
Esquema de blocs de l'Exercici 9.i



10. Donat el sistema de la Figura 6.10, caracteritzeu-ne l'estabilitat en funció de K_v, K_p, J_v i T .

Fig. 6.10
Esquema de blocs de l'Exercici 10.i





→ 7



Anàlisi de la resposta en règim permanent

L'objectiu principal d'un sistema de control és que la sortida segueixi la referència. En el context de la teoria de sistemes de control lineals, la convergència dels senyals és exponencial i asimptòtica, i, per tant, no s'arriba mai de forma exacta al valor al qual tendeix. Anomenem precisió l'error en règim permanent. El teorema del valor final permetrà relacionar el règim permanent amb el domini z .

Una condició necessària tant per poder parlar de precisió com per poder aplicar el teorema del valor final és que el sistema sigui estable.

7.1. Definició

La Figura 7.1 mostra dos diagrames de blocs de sistemes en llaç tancat. Determinar la precisió del sistema comporta analitzar l'error (e_k , $E(z)$), que es calcula com la diferència entre el senyal de referència $R(z)$ i el senyal $H(z)Y(z)$.

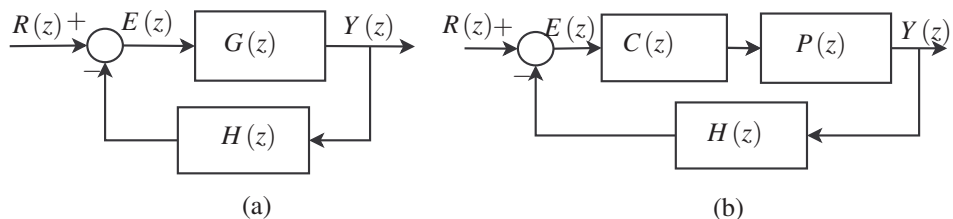


Fig. 7.1
Definició de l'error.

Cal tenir present que, en cas que $H(z) = 1$, l'error és $E(z) = R(z) - Y(z)$ i, per tant, correspon a la diferència entre la sortida i el senyal que es vol seguir. Quan $H(z) \neq 1$, la interpretació del senyal d'error és una mica més complexa i depèn de $H(z)$ i l'aplicació concreta.



Comentari 9 *Error i arquitectura de control.* Pel que fa a l'anàlisi de l'error, en aquest capítol assumirem l'esquema de blocs de la Figura 7.1. Quan s'utilitzi alguna altra estructura, caldrà refer-ne els càlculs.

Sigui e_k la seqüència de mostres del senyal d'error. A les seccions següents, s'analitza el límit $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k$ i es determinen les condicions per tal de garantir que aquest límit és zero.

Definició 30 *Règim permanent.* Donat un sistema estable amb un senyal d'entrada no nul, s'anomena règim permanent el comportament del sistema un cop s'han extingit els comportaments transitoris. En els sistemes estables, el règim permanent de les diferents variables són senyals fitats normalment no constants.

Definició 31 *Estat estacionari.* Donat un sistema estable amb un senyal d'entrada no nul però constant, s'anomena estat estacionari el comportament del sistema un cop s'han extingit els comportaments transitoris.

7.2. Error i precisió

El senyal d'error del sistema de control de la subfigura 7.1.a es pot escriure com:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)H(z)}. \quad (7.1)$$

Si se suposa que $(1 - z^{-1})E(z)$ no té pols de mòdul més gran o igual que 1, gràcies al teorema del valor final, podem escriure:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (7.2)$$

Observeu que (7.2) depèn explícitament del senyal de referència i, per tant, no es pot analitzar l'evolució de l'error de forma genèrica.

Proposició 35 *L'error en estat estacionari depèn del tipus de senyal de referència.*

A continuació, analitzem aquesta expressió per a tres referències: un graó, una rampa i una paràbola.

7.2.1. Senyal graó

Un dels senyals més emprats a la pràctica és el senyal graó. Aquest senyal presenta una transformada \mathcal{Z} de la forma:

$$R(z) = A \frac{z}{z-1}.$$

Substituint aquest valor a (7.1), se n'obté:

$$E(z) = \frac{A \frac{z}{z-1}}{1 + G(z)H(z)}. \quad (7.3)$$



Suposant que el sistema és estable, l'error en estat estacionari es pot calcular de la forma:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e_k &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A \frac{z}{z-1}}{1 + G(z)H(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A}{1 + G(z)H(z)} = \frac{A}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z)}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Per tant, l'error en estat estacionari davant d'una entrada graó pot prendre dos tipus de valors en funció del valor de $\lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z)$:

1. Si $\lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z)$ és un nombre finit, aleshores l'error en estat estacionari és una constant diferent de zero.
2. Si $\lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z) = \infty$, aleshores l'error en estat estacionari és nul.

S'acostuma a definir $K_p \triangleq \lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z)$ i rep el nom de coeficient d'error de posició. Aleshores, l'error en estat estacionari d'un sistema de llaç tancat estable és:

$$T(z) = \frac{G(z)H(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

i davant d'una entrada en forma de graó d'amplitud A és:

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}.$$

Proposició 36 *Per obtenir error estacionari nul per entrades graó, és necessari que $K_p = \infty$ i, en conseqüència, que $G(z)H(z)$ tingui un o més pols en $z = 1$.*

Exemple 42 *Donat un sistema de llaç tancat compost per la planta*

$$G(z) = 10 \frac{z - 0.3}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

i una realimentació unitària, se'n vol determinar l'error en estat estacionari davant d'entrades graó.

En primer lloc, se'n determina l'estabilitat. La funció de llaç tancat és:

$$T(z) = \frac{2(10.0z - 3.0)}{2z^2 + 1.7z - 5}$$

i els pols són 0.2846 i -8.7846 ; per tant, el sistema de llaç tancat és inestable i no té sentit parlar d'error estacionari.

Exemple 43 *Donat un sistema de llaç tancat compost per la planta*

$$G(z) = \frac{z - 0.3}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

i una realimentació unitària, se'n vol determinar l'error en estat estacionari davant d'entrades graó.



En primer lloc, se'n determina l'estabilitat. La funció de llaç tancat és:

$$T(z) = \frac{10.0z - 3.0}{10z^2 - 5z + 2}$$

i els pols són $0.25 \pm 0.37j$, per tant, el sistema de llaç tancat és estable.

Tot seguit, es miren els pols de llaç obert de la planta, que són 0.5 i 1. Donat que el sistema en llaç obert presenta un pol a $z = 1$ (un integrador), l'error davant d'un graó serà sempre nul.

En cas que $G(z)H(z)$ no tingui cap integrador, s'obindrà un error en estat estacionari que dependrà únicament de $G(1)H(1)$ ¹. Com més gran sigui aquest valor, més petit serà l'error.

Exemple 44 Donat un sistema de llaç tancat compost per la planta

$$G(z) = \frac{10.0z - 3.0}{10.0z^2 - 5.0z + 2.0}$$

i una realimentació

$$H(z) = 0.25 \frac{5.0z - 1.0}{(2.0z - 1.0)z},$$

determineu-ne l'error en estat estacionari davant d'entrades graó.

En primer lloc, se'n determina l'estabilitat. La funció de llaç tancat és:

$$T(z) = \frac{(10.0z - 3.0)(2.0z - 1.0)z}{20.0z^4 - 20.0z^3 + 21.5z^2 - 8.25z + 0.75}$$

i els pols són $0.25 \pm 0.845j, 0.13075, 0.3692$; per tant, el sistema de llaç tancat és estable.

Tot seguit, es miren els pols de llaç obert de la planta, que són $0.25 \pm 0.3708j$, i els de la realimentació, 0 i 0.5. Donat que el sistema en llaç obert no presenta pols a $z = 1$ (un integrador), l'error davant d'un graó serà un valor constant. Aquest error serà de la forma:

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$$

on

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z) = G(1)H(1) = 1$$

i, per tant,

$$e_{ss} = \frac{A}{2} = 0.5 \cdot A.$$

¹ Aquest valor sol anomenar-se *guany en contínua*.



7.2.2. Senyal rampa

La transformada \mathcal{Z} d'una rampa és:

$$R(z) = A \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Substituint aquest valor a (7.1) s'obté:

$$E(z) = \frac{A \frac{z}{(z-1)^2}}{1 + G(z)H(z)}. \quad (7.5)$$

Assumint que el sistema és estable, l'error en estat estacionari es pot calcular de la forma:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e_k &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A \frac{z}{(z-1)^2}}{1 + G(z)H(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{A}{z-1}}{1 + G(z)H(z)} = \frac{A}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)H(z)}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Per tant, l'error en estat estacionari davant d'una entrada rampa pot prendre tres tipus de valors en funció del valor de $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)H(z)$:

1. Si $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)H(z) = 0$, aleshores l'error és infinit. Això implica que la sortida no segueix la rampa de referència i el valor absolut de l'error creix amb el temps.
2. Si $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)H(z)$, és un nombre finit i diferent de zero. L'error en estat estacionari és un valor constant diferent de zero.
3. Si $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)H(z) = \infty$, aleshores l'error en estat estacionari és nul.

S'acostuma a definir $K_v \triangleq \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{T} G(z)H(z)$ i rep el nom de coeficient d'error de velocitat. Aleshores, l'error en estat estacionari del sistema en llaç tancat estable, $T(z)$, per a una entrada en forma de rampa d'amplitud A , és $1/K_v$.

Exemple 45 Donat el sistema de llaç tancat compost per la planta

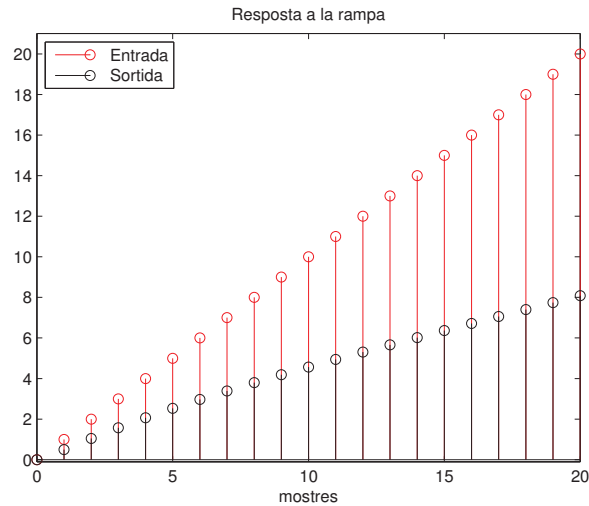
$$G(z) = \frac{z(z-0.9)}{(z-0.6)(z-0.5)}$$

i la realimentació unitària, analitzeu la seva resposta a la rampa.

Els pols de llaç tancat del sistema estan en 0.1838 i 0.8162; per tant, el sistema és estable. Donat que la planta no presenta pols a $z = 1$, la resposta del sistema no podrà seguir la rampa i ambdós senyals divergirán. La Figura 7.2 presenta la resposta temporal del sistema de llaç tancat enfront de la rampa. Com es pot observar, el senyal de referència i el de sortida cada cop són més lluny un de l'altre.



Fig. 7.2
Exemple 45: Resposta
temporal a la rampa.



Exemple 46 Donat el sistema de llaç tancat compost per la planta

$$G(z) = \frac{z(z-0.9)}{(z-1)(z-0.5)}$$

i la realimentació unitària, analitzeu la seva resposta a la rampa.

Els pols de llaç tancat del sistema estan en 0.2683 i 0.9317; per tant, el sistema és estable. Donat que la planta presenta un pol a $z = 1$, la resposta del sistema seguirà la rampa a distància constant. Aquesta distància és l'error; per calcular-lo, s'obté en primer lloc el coeficient d'error de velocitat:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = 0.2$$

i, finalment,

$$ess = \frac{1}{K_v} = 5.$$

La Figura 7.3 presenta la resposta temporal del sistema de llaç tancat enfront de la rampa. Com es pot observar, el senyal de referència i el de sortida, en règim permanent, es mantenen a distància constant.

Proposició 37 Per obtenir error estacionari nul per a entrades de tipus rampa, és necessari que $K_v = \infty$ i, en conseqüència, que $G(z)H(z)$ tingui dos o més pols a $z = 1$.

Exemple 47 Donat el sistema de llaç tancat compost per la planta

$$G(z) = \frac{0.5z(z-0.9)}{(z-1)^2(z-0.5)}$$

i la realimentació unitària, analitzeu la seva resposta a la rampa.

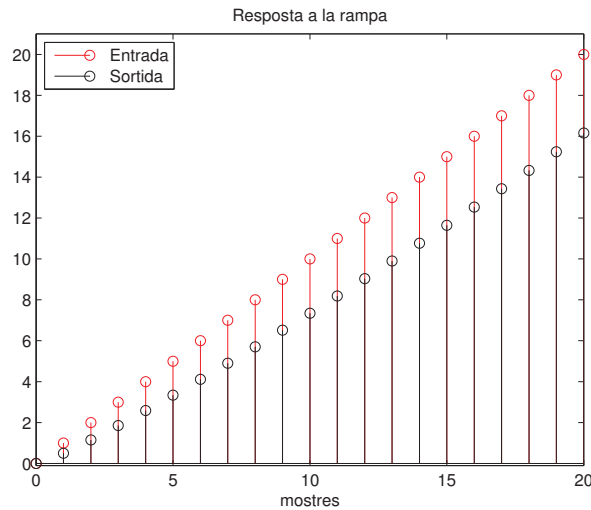


Fig. 7.3
Exemple 46: Resposta temporal a la rampa.

Els pols de llaç tancat del sistema estan a $0.5554 \pm 0.5038j$ i 0.8893 ; per tant, el sistema és estable. Donat que el sistema presenta dos pols a $z = 1$ la resposta del sistema seguirà en règim permanent la rampa de referència.

La Figura 7.4 presenta la resposta temporal del sistema de llaç tancat enfront de la rampa. Com es pot observar, el senyal de sortida convergeix cap al senyal de referència.

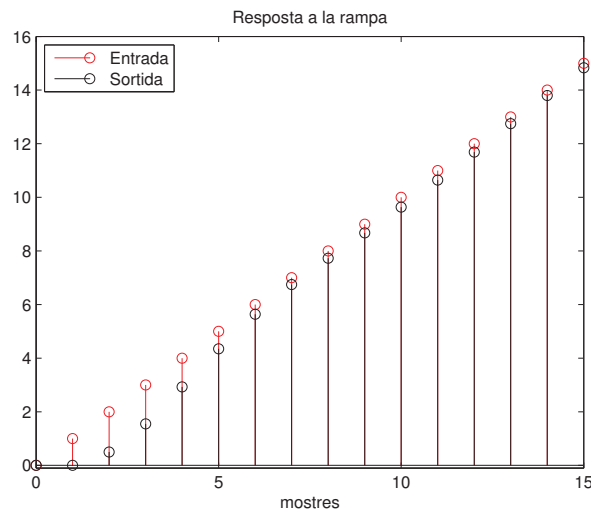


Fig. 7.4
Exemple 47: Resposta temporal a la rampa.

7.2.3. Senyal paràbola

Repetint el procediment anterior, ara per a entrades paràbola, s'obté:

$$R(z) = A \frac{z \cdot (z+1)}{2(z-1)^3}, E(z) = \frac{A \frac{z \cdot (z+1)}{2(z-1)^3}}{1 + G(z)H(z)}$$



i

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e_k &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A \frac{T^2 \cdot z \cdot (z+1)}{2(z-1)^3}}{1 + G(z)H(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{A \cdot T \cdot (z+1)}{2(z-1)^2}}{1 + G(z)H(z)} = \frac{A \cdot T^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)H(z)}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Com en el cas anterior, l'error en estat estacionari davant d'una entrada paràbola pot prendre tres tipus de valors, en funció del valor de $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)H(z)$:

1. Si $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)H(z) = 0$, aleshores l'error és infinit. Això implica que la sortida no segueix la paràbola de referència i el valor absolut de l'error creix amb el temps.
2. Si $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)H(z)$ és un nombre finit i diferent de zero, aleshores l'error en estat estacionari és una constant diferent de zero.
3. Si $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)H(z) = \infty$, aleshores l'error en estat estacionari és un nul.

S'acostuma a definir $K_a \triangleq \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)H(z)/T^2$ i rep el nom de coeficient d'error d'acceleració. Aleshores, l'error en estat estacionari del sistema en llaç tancat estable $T(z)$ per a una entrada en forma de paràbola d'amplitud A és $1/K_a$.

Proposició 38 Per tal d'obtenir error estacionari nul per a entrades paràbola, és necessari que $K_a = \infty$ i, en conseqüència, que $G(z)H(z)$ tingui tres o més pols a $z = 1$.

7.2.4. Concepte de tipus

Com acabem de veure, la multiplicitat del pol $z = 1$ determina l'error de seguiment per a senyals tipus graó, rampa i paràbola.

Definició 32 Tipus d'un sistema. S'anomena tipus d'un sistema de control, com el de la subfigura 7.1.a, la multiplicitat del pol a $z = 1$ de $G(z)H(z)$.

Taula. 7.1
Característiques de
l'error en funció del tipus
del sistema i el senyal
d'entrada.

	Tipus 0	Tipus 1	Tipus 2	Tipus 3
graó	$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$
rampa	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$
paràbola	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$	$e_{ss} = 0$

La Taula 7.1 mostra un resum de l'error en estat estacionari que s'obté per a sistemes estables en funció del tipus del sistema i els diferents senyals estudiats. És important



insistir que la capacitat de seguiment amb error estacionari nul depèn únicament del nombre d'integradors que tingui el sistema de laç obert.

7.3. Generalització del concepte de tipus

Els sistemes de control acostumen a tenir més entrades a part de la referència. La Figura 7.5 mostra els principals senyals d'entrada que hi ha en un laç de control estàndard. Així, $D_i(z)$ modela el senyal de pertorbació sobre l'acció de control, $D_o(z)$ modela el senyal de pertorbació sobre la variable de sortida $D_o(z)$ i $N(z)$ modela possibles fonts de soroll sobre l'element de mesurament. L'objectiu de control és compensar les pertorbacions i ser màximament insensible al soroll. Per aquest motiu, és usual voler saber quin és l'efecte d'aquestes entrades addicionals sobre la variable d'error, que és l'emprada per mesurar les prestacions del sistema. Com en el cas del senyal de referència, aquesta anàlisi es fa en règim permanent.

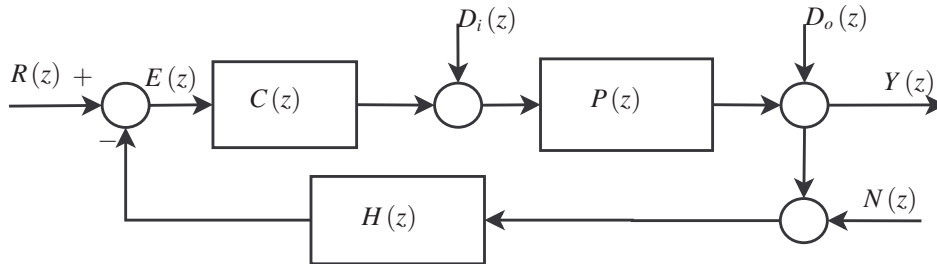


Fig. 7.5
Definició de l'error.

Aplicant el principi de superposició al diagrama de blocs de la Figura 7.5 s'obté:

$$E(z) = \frac{1}{1 + C(z)P(z)H(z)}R(z) + \frac{P(z)H(z)}{1 + C(z)P(z)H(z)}D_i(z) + \frac{H(z)}{1 + C(z)P(z)H(z)}(D_o(z) + N(z))$$

i ara s'aplica un procediment semblant al de les seccions prèvies per caracteritzar l'error respecte de cada entrada en funció del tipus corresponent (*i.e.*, multiplicitat del pol $z = 1$ a la funció corresponent de transferència).

Un cop fet això, és possible aplicar un procediment semblant al que s'ha desenvolupat en les seccions prèvies i caracteritzar l'error generat en règim estacionari pels diferents senyals en funció de les característiques del sistema i la classe del senyal d'entrada (graó, rampa o paràbola). Això porta a la definició del que anomenarem *tipus generalitzat*.

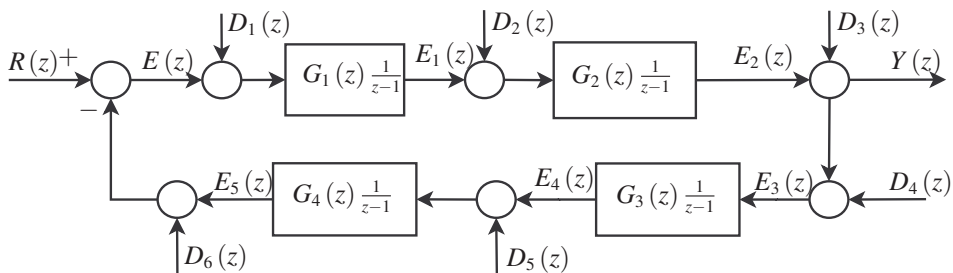


Fig. 7.6
Tipus generalitzat.



Definició 33 *Tipus generalitzat.* Siguin D_i, E_j un parell entrada/sortida d'un sistema en llaç tancat (Figura 7.6). Es defineix que la relació $D_i - E_j$ és de tipus k si la funció de transferència que s'obté en recórrer l'esquema de blocs, en el sentit del flux, des d' E_j fins a D_i té un pol a $z = 1$ de multiplicitat k .

Exemple 48 La Figura 7.6 mostra un sistema de llaç tancat amb diferents entrades, $R(z)$ i $D_i(z)$, i diferents sortides $E(z)$, $E_i(z)$ i $Y(z)$. Suposem que $z = 1$ no és pol de les funcions $G_i(z)$ per a $i = 1, 2, 3, 4$ i que el sistema en llaç tancat és estable. Aleshores:

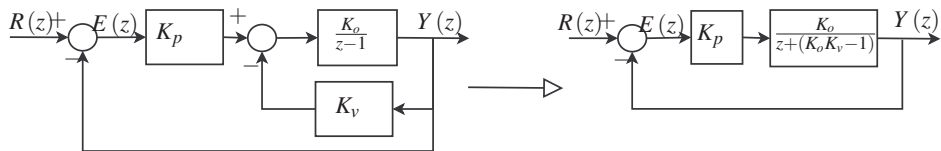
- Tipus generalitzat 0: les relacions $E(z) - D_1(z)$, $E_1(z) - D_2(z)$, $E_2(z) - D_3(z)$, $E_2(z) - D_4(z)$, $E_4(z) - D_5(z)$, $E_5(z) - D_6(z)$, $E_5(z) - R(z)$ són de tipus 0.
- Tipus generalitzat 1: les relacions $E(z) - D_2(z)$, $E_1(z) - D_3(z)$, $E_1(z) - D_4(z)$, $E_2(z) - D_5(z)$, $E_3(z) - D_5(z)$, $E_4(z) - D_6(z)$, $E_4(z) - R(z)$, $E_5(z) - D_2$ són de tipus 1.
- Tipus generalitzat 2: les relacions $E(z) - D_3(z)$, $E(z) - D_4(z)$, $E_1(z) - D_5(z)$, $E_2(z) - D_6(z)$, $E_2(z) - R(z)$, $E_3(z) - D_6(z)$, $E_3(z) - R(z)$, $E_4(z) - D_2(z)$, $E_5(z) - D_3$, $E_5(z) - D_4$ són de tipus 2.
- Tipus generalitzat 3: les relacions $E(z) - D_5(z)$, $E_1(z) - D_6(z)$, $E_1(z) - R(z)$, $E_2(z) - D_2(z)$, $E_3(z) - D_2(z)$, $E_4(z) - D_3(z)$, $E_4(z) - D_4(z)$, $E_5(z) - D_5(z)$ són de tipus 3.
- Tipus generalitzat 4: les relacions $E(z) - R(z)$, $E(z) - D_6(z)$, $E_3(z) - D_3(z)$, $E_3(z) - D_4(z)$ són de tipus 4.

Així, si s'introdueix un graó a l'entrada $D_1(z)$, l'error, $E(z)$, en estat estacionari tendirà a un valor constant (la relació $E(z) - D_1(z)$ és de tipus generalitzat 0), mentre que si, en lloc d'introduir-lo en $D_1(z)$, s'introdueix en $D_2(z)$, l'error en estat estacionari tendirà a zero (la relació $E(z) - D_2(z)$ és de tipus generalitzat 1).

És important insistir que el tipus generalitzat no és una característica intrínseca del sistema de llaç tancat, sinó que depèn de la relació entrada/sortida. Per tant, un sistema de control com el de la Figura 7.6 i no d'altres en funció del lloc on es produeixen.

Per aplicar la definició de tipus, és convenient que el sistema de control tingui un únic llaç. En cas que n'hi hagi més d'un, el concepte de tipus s'aplica únicament al més extern, i un cop simplificats tots els llaços interiors.

Fig. 7.7 Transformació d'un esquema de blocs per estudiar el concepte de tipus.



Exemple 49 La part esquerra de la Figura 7.7 mostra un sistema de control compost per dos llaços. Per tal d'aplicar el concepte de tipus (o tipus generalitzat), cal transformar-lo en un sistema de control d'un únic llaç. El resultat d'aquesta transfor-



mació el tenim a la part dreta de la Figura 7.7. Observeu que el tipus (relació $E(z)$ - $R(z)$) és 0, encara que a l'esquema inicial hi havia un element que contenia un integrador.

7.4. Principi del model intern

7.4.1. Introducció

A la secció 7.2, s'ha caracteritzat com han de ser els sistemes en llaç obert per tal que el sistema en llaç tancat segueixi amb error estacionari nul els senyals graó, rampa i paràbola. Observeu que les transformades d'aquests senyals:

$$R_{\text{graó}}(z) = A \frac{z}{z-1}, R_{\text{rampa}}(z) = A \frac{z}{(z-1)^2}, R_{\text{paràbola}}(z) = A \frac{z \cdot (z+1)}{2(z-1)^3}.$$

totes tres tenen pols a $z = 1$ (integradors), i aquesta és la particularitat que caracteritza tant el tipus com el tipus generalitat definit anteriorment.

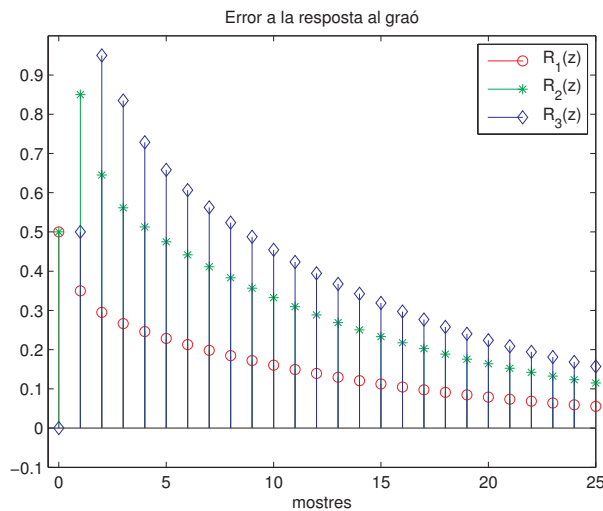


Fig. 7.8
Exemple 50: Evolució de l'error del sistema per les diferents referències.

Exemple 50 Donat el sistema de llaç tancat analitzat a l'Exemple 46, es vol analitzar l'error en règim estacionari quan les entrades de referència són

$$R_1(z) = A \frac{z}{z-1}, R_2(z) = A \frac{z+1}{z-1} \quad i \quad R_3(z) = A \frac{z+1}{(z-1)(z-0.2)}.$$

Com ja s'ha vist, és un sistema estable i, per tant, l'estudi de precisió té sentit. La Figura 7.8 mostra l'evolució de l'error del sistema en el cas de les tres entrades de referència. Tal com es pot observar en els tres casos, l'error tendeix a zero amb el temps. La velocitat de convergència i la forma del transitori depenen del sistema en concret.

Les tres entrades que s'han d'analitzar a l'Exemple 50 es poden expressar com una suma ponderada de senyals graons o senyals que tendeixen a 0 amb el temps:



$$R_2(z) = A \frac{z+1}{z-1} + A \frac{z}{z-1}$$

$$R_3(z) = \frac{2A}{0.8} \frac{1}{z-1} - \frac{1.2A}{0.8} \frac{1}{z-0.2}.$$

Donat que el sistema és de tipus 1, l'error generat per les components graó tendirà a zero amb el temps, mentre que la resta de components tendiran a zero i, per tant, l'error també. Així doncs, la resta d'elements que componen la transformada \mathfrak{z} d'aquests senyals, guany, zeros i resta de pols, no afecten l'error; l'afectarien únicament en cas que l'error convergís a un error finit diferent de zero (afecten el valor quantitatiu de l'error, no el qualitatiu).

El concepte de tipus pot estendre's a altres tipus de senyals persistents, i d'aquesta manera es pot caracteritzar de forma qualitativa el comportament en règim permanent d'un sistema enfront de diferents tipus de senyals. Aquesta caracterització rep el nom de principi del model intern [1] i es formula a la secció següent.

7.4.2. Formulació

S'agafa com a punt de partida el sistema en llaç tancat de la subfigura 7.1.a. La relació entre el senyal de referència i el senyal d'error és:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)H(z)} R(z) = \frac{1}{1 + \frac{N_G(z)}{D_G(z)} \frac{N_H(z)}{D_H(z)}} \frac{N_R(z)}{D_R(z)} =$$

$$= \frac{D_G(z)D_H(z)}{D_G(z)D_H(z) + N_G(z)N_H(z)} \frac{N_R(z)}{D_R(z)}. \quad (7.8)$$

Per tal que es pugui aplicar el teorema del valor final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)D_G(z)D_H(z)}{z(D_G(z)D_H(z) + N_G(z)N_H(z))} \frac{N_R(z)}{D_R(z)}$$

és necessari demostrar que aquest senyal tendeix a algun valor de forma prèvia; per tant, s'assumeix com a hipòtesi prèvia que el sistema de llaç tancat és estable i que l'error és un senyal fitat. Que el senyal d'error sigui un senyal fitat, pot assolir-se de les formes següents:

1. El terme de la dreta, corresponent al senyal de referència, és un senyal fitat que tendeix a zero (els zeros de $D_R(z)$ estan tots a l'interior del cercle unitat). En aquest cas, i donat que el sistema de llaç tancat és estable, l'error tendeix a zero i l'aplicació del *teorema del valor final* no dóna gaire informació addicional sobre el comportament del sistema.
2. El terme de la dreta, corresponent al senyal de referència, és un senyal fitat que tendeix a un cert valor ($D_R(z)$ té un zero en $z = 1$). En aquest cas, el senyal d'error està definit i és calculable a través de l'aplicació del *teorema del valor final*.



3. El terme de la dreta, corresponent al senyal de referència, és un senyal que no tendeix a un cert valor. En aquests casos, és convenient descompondre el senyal de referència en dues parts, una que s'extingeix i una que no s'extingeix:

$$R(z) = \frac{N_R(z)}{D_R(z)} = \frac{N_R(z)}{D_R^-(z)D_R^+(z)} = \frac{N_R^-(z)}{D_R^-(z)} + \frac{N_R^+(z)}{D_R^+(z)}$$

on els zeros de $D_R^-(z)$ són a l'interior del cercle unitat i els zeros de $D_R^+(z)$ són a sobre o fora del cercle unitat. La contribució de $\frac{N_R^-(z)}{D_R^-(z)}$ s'extingeix amb el temps i, per tant, no contribueix a l'error en estat estacionari.

El senyal, $\frac{N_R^+(z)}{D_R^+(z)}$, no s'extingeix, i per tal que l'error en estat estacionari sigui nul, és necessari que la funció de transferència $\frac{(z-1)D_G(z)D_H(z)}{z(D_G(z)D_H(z)+N_G(z)N_H(z))}$ cancel·li el comportament d'aquest senyal. Per que això sigui així, el denominador del senyal s'ha de cancel·lar amb el numerador de la funció de transferència. Per tant, s'ha de poder escriure:

$$(z-1)D_G(z)D_H(z) = D_R^+(z)X(z)$$

on $X(z)$ és un polinomi arbitrari.

Així, cal que el sistema de llaç obert contingui com a pols tots els pols de la transformada z del senyal de referència que són a sobre o fora del cercle unitat.

Definició 34 *Tipus generalitzat. S'anomenen senyals persistents aquells senyals que no s'extingeixen, tendeixen a zero, amb el temps.*

Exemple 51 *El senyal $y_k = 0.2^k \cdot \mu_k$ no és un senyal persistent.*

Exemple 52 *El senyal $y_k = \sin(0.2k) \cdot \mu_k$ és un senyal persistent.*

Definició 35 *Generador d'un senyal. S'anomena generador d'un senyal el denominador de la transformada en z del senyal.*

Exemple 53 *El senyal graó és un senyal persistent i el seu generador és $\frac{1}{z-1}$.*

Exemple 54 *El senyal $y_k = 2^k$ és un senyal persistent i el seu generador és $\frac{1}{z-2}$.*

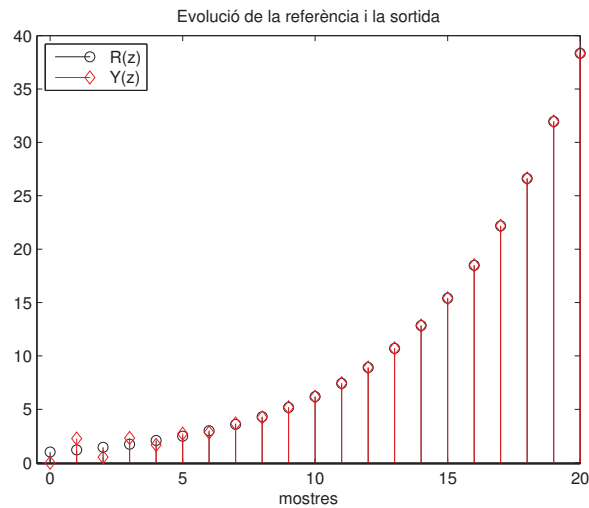
Proposició 39 *Principi del model intern. Per tal que un sistema de control segueixi amb error estacionari nul una referència definida per un senyal persistent, és necessari que el sistema de llaç obert contingui el denominador del seu generador.*

És important insistir que el denominador del generador pot estar contingut en el denominador de la funció de transferència de la planta o bé en el del controlador.

Exemple 55 *Donats el senyal de referència $y_k = 1.2^k$ i la planta $G(z) = \frac{z}{(z-0.3)(z-0.5)}$, determinen un controlador capaç de seguir el senyal de referència amb error estacionari nul.*



Fig. 7.9
Exemple 55: Evolució de la sortida i la referència.



La transformada z del senyal de referència és de la forma:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1.2}$$

i, per tant, el seu generador és $\frac{1}{z-1.2}$. Perquè el controlador pugui seguir el senyal, cal que el controlador inclogui el generador, ja que la planta no el conté, i que garanteixi l'estabilitat de llaç tancat. Un controlador que fa això és:

$$C(z) = \frac{2.2664(z-0.7056)}{z-1.2}$$

La Figura 7.9 mostra l'evolució de la sortida del sistema de llaç tancat i el senyal de referència. Com es pot veure, el senyal de sortida convergeix ràpidament cap al senyal de referència i en règim permanent l'error serà nul.

Clarament, es pot emprar el concepte de tipus és un cas particular del principi del model intern. Per aquest motiu es pot emprar el procediment que s'ha fet servir per definir el concepte de tipus generalitzat (secció 7.3) en un context més general.

Proposició 40 Per tal que un sistema de control pugui rebutjar una pertorbació persistent en el senyal d'error, cal que en recórrer el circuit en el sentit del flux des de l'error fins al punt on entra la pertorbació es trobi el generador de la pertorbació d'interès.

7.4.3. Senyals sinusoidals

Hi ha un tipus especialment interessant de senyals en la teoria de control i diferents àmbits de l'enginyeria. Aquest són els senyals trigonomètrics. Aquests senyals poden escriure's de la forma:

$$y_k = \sin(\omega k + \phi).$$



La transformada z d'aquests senyals pren la forma:

$$Y(z) = \frac{\sin(\phi)z^2 - z\sin(-\omega + \phi)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}.$$

Per tant, el generador d'aquests senyals és $\frac{1}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$. Aquest presenta una parella de pols complexos conjugats amb un angle que correspon a la pulsació del senyal (Figura 7.10). Aquests elements reben el nom d'*elements ressonants* o *ressonadors*.

Així doncs, si es vol dissenyar un sistema de control capaç de seguir senyals sinusoidals amb un cert període, cal incorporar, en el controlador, el seu generador. És important adonar-se que cal saber la freqüència del senyal a seguir.

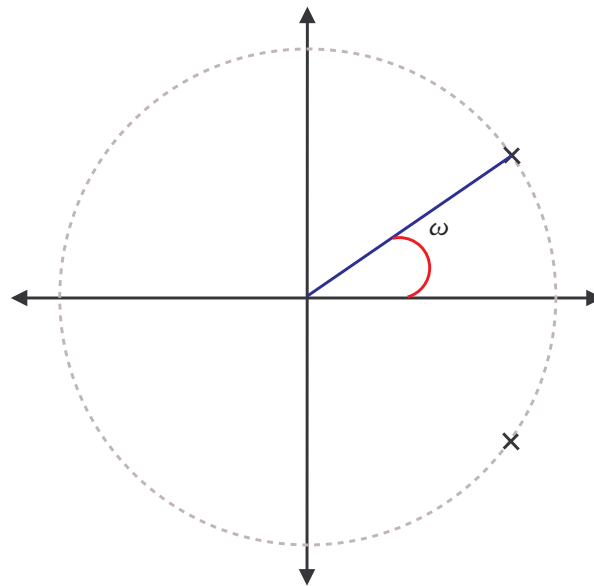


Fig. 7.10
Pols del generador d'un senyal sinusoidal.

Exemple 56 Donada la planta definida per $G(z) = \frac{z}{(z-0.3)(z-0.5)}$, es vol dissenyar un sistema de control que sigui capaç de seguir referències de la forma $y_k = A \sin(2 \cdot k + \phi)$.

Donat que la planta no incorpora el generador del sinus caldrà que ho faci el controlador, cal també que el controlador garanteixi l'estabilitat de llaç tancat. Un controlador que fa ambdues coses és:

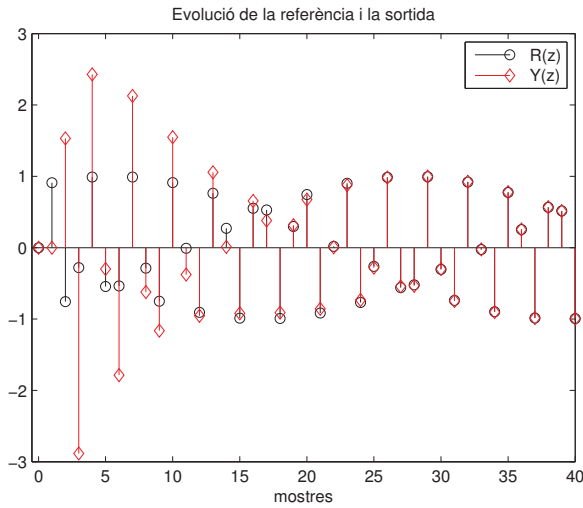
$$C(z) = \frac{1.684(z^2 + 0.6646z + 0.816)}{z^2 - 2z\cos(2) + 1}.$$

La Figura 7.11 mostra l'evolució de la referència i la sortida. Com es pot veure després d'un breu transitori, la sortida coincideix amb la referència.

En cas de voler seguir un senyal compost per senyals sinusoidals de diferents freqüències, és convenient afegir els generadors de cadascun dels senyals que componen el senyal.

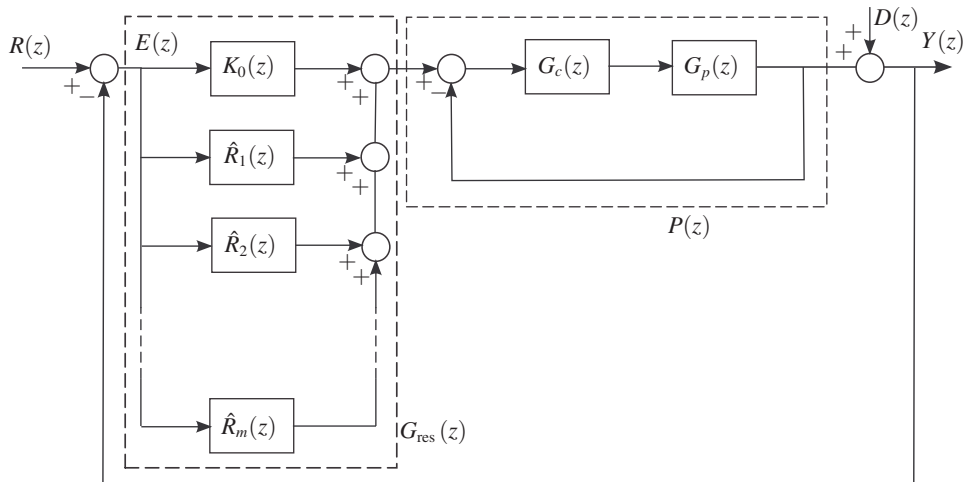


Fig. 7.11 Evolució de la sortida i la referència.



Quan s'incorporen generadors de senyals sinusoidals en la funció de llaç obert, garantir l'estabilitat de llaç tancat pot ser un problema. Per tal de fer-ho possible i obtenir procediments de disseny senzills, s'utilitzen generalment estructures de control concretes [2]. A tall d'exemple, la Figura 7.12 mostra una de les estructures possibles.

Fig. 7.12 Estructura d'un controlador ressonant [2]. $G_p(z)$ és la planta, $G_c(z)$ és un controlador que dona robustesa al sistema, $K_0(z)$ és un controlador que garanteix l'estabilitat del sistema de llaç tancat i $\hat{R}_i(z)$ són elements ressonants col·locats en les freqüències d'interès.



7.4.4. Senyals periòdics

Definició 36 Senyal N-periòdic. Es diu que un senyal, y_k , és N-periòdic si compleix:

$$y_k = y_{k-N}, \forall k.$$

La transformada \mathcal{Z} d'un senyal N-periòdic és:

$$Y(z) = \frac{y_0 + y_1z + y_2z^2 + \dots + y_{n-1}z^{N-1} + y_nz^N}{z^N - 1}$$



on y_i són els valors que pren el senyal en un dels períodes. Així, el generador dels senyals N-periòdics és $\frac{1}{z^N - 1}$. Així, per dissenyar un control que permeti seguir senyals N-periòdics, és necessari incloure aquest element dins el llaç de control. Incloure aquest element dins el llaç de control i garantir l'estabilitat de llaç tancat no és una qüestió trivial i és necessari emprar arquitectures i tècniques de disseny de controladors concretes. Aquest tipus de tècniques reben el nom genèric de *control repetitiu* [3].

Bibliografia

- [1] B.A. Francis and W.M. Wonham. Internal model principle in control theory. *Automatica*, 12(5):457–465, 1976.
- [2] Shane Malo and Robert Griñó. Adaptive feed-forward cancellation control of a full-bridge dc-ac voltage inverter. In *Proc. of the 17th IFAC World Congress*, pages 4571–4576, 2008.
- [3] R. Costa-Castello, J. Nebot, and R. Griñó. Demonstration of the internal model principle by digital repetitive control of an educational laboratory plant. *IEEE Trans. Education*, 48(1):73–80, 2005.



Exercicis proposats

1. Donat un sistema com el de la subfigura 7.1.a, determineu quin error estacionari presentarà quan

$$R(z) = 3 \frac{1}{z-1}, \quad G(z) = \frac{1}{(z-0.6)(z+0.5)} \quad \text{i} \quad H(z) = 1.$$

2. Donat un sistema com el de la subfigura 7.1.a, determineu quin error estacionari presentarà per a referències en forma de graó, rampa i paràbola,

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z+0.5)} \quad \text{i} \quad H(z) = \frac{0.6}{z}.$$

3. Donat un sistema com el de la subfigura 7.1.a, determineu quin error estacionari presentarà per a referències en forma de graó, rampa i paràbola,

$$G(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z+0.5)} \quad \text{i} \quad H(z) = \frac{1}{z}.$$

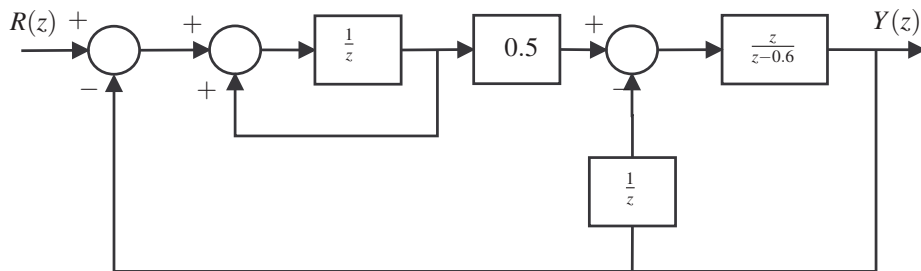
4. Donat un sistema com el de la subfigura 7.1.a, determineu quin error estacionari presentarà quan la referència n

$$R(z) = 3 \frac{z+5}{(z-1)(z+0.5)}, \quad G(z) = \frac{1}{(z-1)(z+0.5)} \quad \text{i} \quad H(z) = 1.$$

5. En el sistema de la Figura 7.13, analitzeu quin serà l'error en estat estacionari quan en la referència hi ha un graó unitari. I quan hi ha una rampa unitària? I quan la referència és

$$R(z) = 3 \frac{z}{z-1} + 0.5 \frac{1}{(z-1)^2}?$$

Fig. 7.13
Esquema de blocs de l'Exercici 5.



6. En el sistema de la Figura 7.14, analitzeu quin és l'efecte en estat estacionari de cadascuna de les diferents entrades sobre la sortida. En cas que les diferents entrades siguin

$$R(z) = \frac{Az}{z-1}, \quad P(z) = \frac{Bz}{z-1} \quad \text{i} \quad D(z) = \frac{Cz}{z-1},$$

quina serà la sortida?

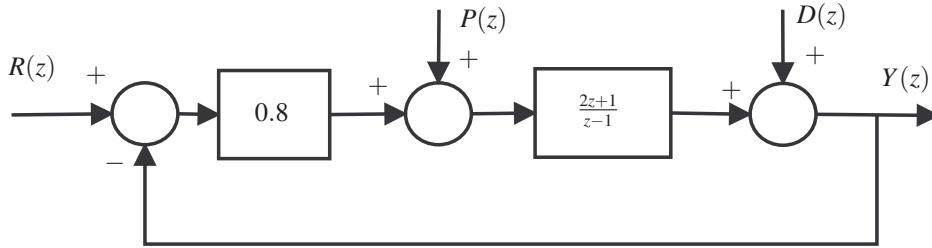


Fig. 7.14
Esquema de blocs de l'Exercici 6.

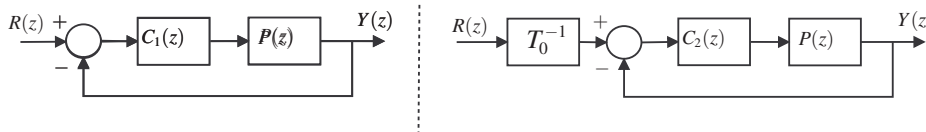


Fig. 7.15
Esquema de blocs de l'Exercici 7.

7. Donada una planta nominal

$$P_n(z) = \frac{0.3}{z - 0.9},$$

la Figura 7.15 mostra dues propostes d'arquitectura de sistema de control. A la primera, el controlador pren la forma

$$C_1(z) = \frac{0.02z - 0.008}{z - 1},$$

mentre que a la segona el controlador pren la forma

$$C_2 = \frac{0.02}{z} \quad \text{i} \quad T_0 = \frac{P_n(1)C_2(1)}{1 + P_n(1)C_2(1)}.$$

Analitzeu en les dues arquitectures quin és el valor de la sortida, $Y(z)$, en estat estacionari en cas que

$$R(z) = \frac{Az}{z - 1},$$

en els casos següents:

- (a) S'assumeix que la planta coincideix amb la planta nominal i, per tant, $P(z) = P_n(z)$.
- (b) La planta ha experimentat una petita variació respecte de la planta nominal i $P(z) = 0.9P_n(z)$.

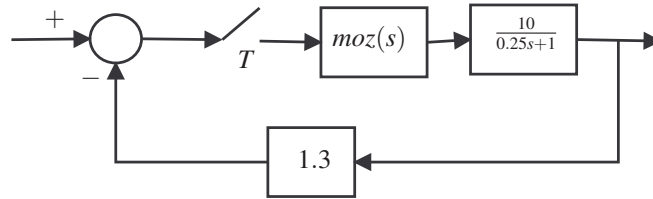
Quines conclusions podeu obtenir de l'observació dels dos esquemes?

8. Donat un sistema com el de la subfigura 7.1.b, dissenyeu un controlador, $C(z)$, tal que, donada una planta $P(z) = \frac{z}{z-0.8}$ i una realimentació $H(z) = 1$, faci que el sistema de laç tancat sigui capaç de seguir referències de la forma $r_k = A \cdot \sin(0.5k + \phi)$ sense error estacionari.



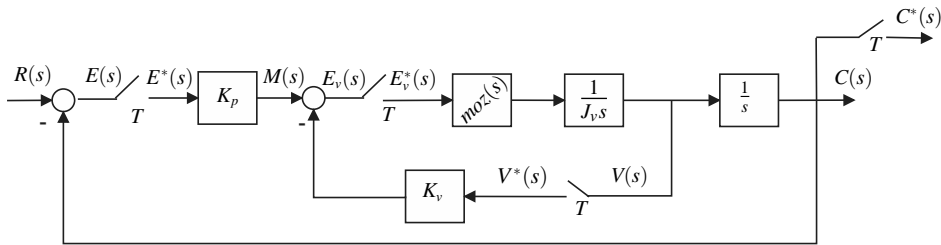
9. Donat el sistema de la Figura 7.16, analitzeu les seves característiques de precisió. Quines serien les característiques d'un sistema de temps continu equivalent (sense mostrejador ni mantenedor)?

Fig. 7.16
Esquema de blocs de l'Exercici 9.



10. Donat el sistema de la Figura 7.17, es demana caracteritzar-ne la precisió per senyals graó, rampa i paràbola $K_v = 1$, $K_p = 5$, $J_v = 10$ i $T = 0.1$.

Fig. 7.17
Esquema de blocs de l'Exercici 10.





→ 8



Resposta freqüencial dels sistemes de temps discret

Una característica dels sistemes lineals estables és que, en règim permanent, quan s'exciten amb un senyal sinusoidal, la seva sortida és un altre senyal sinusoidal de la mateixa freqüència, amb un canvi d'amplitud i fase. Aquesta variació en amplitud i fase caracteritza el comportament del sistema, i s'empra de forma habitual en l'àmbit de l'enginyeria per especificar i descriure el comportament del sistema.

La resposta freqüencial serveix també per estudiar l'estabilitat d'un sistema de llaç tancat. A diferència d'altres mètodes d'estudi de l'estabilitat, l'ús de la resposta freqüencial permet analitzar la robustesa i dissenyar controladors de forma natural.

En aquest capítol, se'n presenten els conceptes principals i els mecanismes de representació gràfica, i s'analitza amb detall la resposta freqüencial dels sistemes de primer i segon ordre.

8.1. Concepte

A la secció 2.3.6.2, s'ha vist que la resposta en règim permanent del sistemes lineals estables quan l'entrada és un senyal sinusoidal ve donada per un altre senyal sinusoidal de la mateixa freqüència, de diferent amplitud i desfasat respecte del senyal original (Figura 8.1).

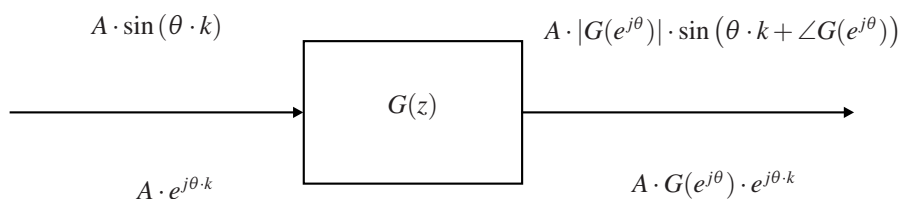


Fig. 8.1
Resposta temporal dels sistemes lineals estables en règim permanent.



Proposició 41 Sigui Σ un sistema lineal estable, de temps discret, caracteritzat per la funció de transferència $G(z)$; siguin u_k l'entrada del sistema, que suposem que és una seqüència sinusoidal (i.e., $u_k = \sin(\theta k)$), i y_k la seva sortida. Aleshores, en règim permanent, es verifica:

$$y_k = M \cdot \sin(k\theta + \varphi).$$

A més,

$$M e^{j\varphi} = G(e^{j\theta}).$$

La demostració s'ha realitzat a la secció 2.3.6.2.

Definició 37 Pulsació normalitzada. θ rep el nom de pulsació normalitzada i té unitat de radians.

Definició 38 Funció isòcrona de temps discret.

S'anomena funció isòcrona de temps discret d'un sistema, $G(z)$, la funció $G(e^{j\theta})$.

8.2. Algunes propietats de la resposta freqüencial de temps discret

Aquesta secció analitza algunes propietats de la resposta freqüencial dels sistemes lineals de temps discret.

Proposició 42 Simetria de la resposta freqüencial. Atès que els coeficients de la funció de transferència, $G(z)$, són nombres reals, es pot concloure que $G(\bar{z}) = \overline{G(z)}$ i, per tant,

$$G(e^{-j\theta}) = \overline{G(e^{j\theta})}.$$

Proposició 43 Periodicitat de la resposta freqüencial. $G(e^{j\theta})$ com a funció de θ és periòdica de període 2π . El resultat és conseqüència immediata del fet que l'exponencial complexa és periòdica de període $2\pi j$.

Proposició 44 Atès que $G(e^{j\theta})$ és 2π -periòdica i simètrica, la resposta freqüencial d'un sistema lineal de temps discret queda caracteritzada pel valor de $G(e^{j\theta})$ en $\theta \in [0, \pi]$ rad.

Per tant, per caracteritzar la resposta freqüencial, és suficient avaluar la funció de transferència sobre la semicircumferència unitat entre el primer i el segon quadrants del pla z .

Proposició 45 Inici i final de la resposta freqüencial. Per determinar la resposta freqüencial cal recórrer $G(e^{j\theta})$ amb $\theta \in [0, \pi]$ rad.

- El punt d'inici correspon a $\theta = 0$ rad i, per tant, $z = e^{j0} = 1$. Així, la resposta freqüencial per a la primera freqüència és $G(1)$.
- El punt final correspon a $\theta = \pi$ rad i, per tant, $z = e^{j\pi} = -1$. Així, la resposta freqüencial per a la darrera freqüència és $G(-1)$.



Atès que els coeficients de la funció de transferència són reals, els punts d'inici i final són nombres reals:

$$G(1) \in \mathbb{R}, G(-1) \in \mathbb{R}.$$

Comentari 10 Resposta freqüencial de temps continu vs resposta freqüencial de temps discret. La periodicitat de la resposta freqüencial de temps discret és una diferència important amb la resposta freqüencial dels sistemes de temps continu. Aquesta fa que en temps continu s'estudiï en un rang de pulsacions infinit $[0, \infty)$ rad/s, mentre que en temps discret únicament s'estudiï en el rang $[0, \pi]$ rad. L'inici de la corba de resposta freqüencial de temps continu s'obté per $s = 0$, mentre que en temps discret s'obté per $z = 1$; de forma similar, el final de la corba en temps continu s'obté avaluant $s = j\omega \rightarrow \infty$, mentre que en temps discret s'obté avaluant $z = -1$.

8.3. Representacions gràfiques

8.3.1. Introducció

Per tal de visualitzar la resposta freqüencial d'un sistema lineal, s'empren diferents representacions gràfiques. Les més populars són el diagrama de Nyquist, el diagrama de Bode i el diagrama de Nichols, que es descriuen a continuació.

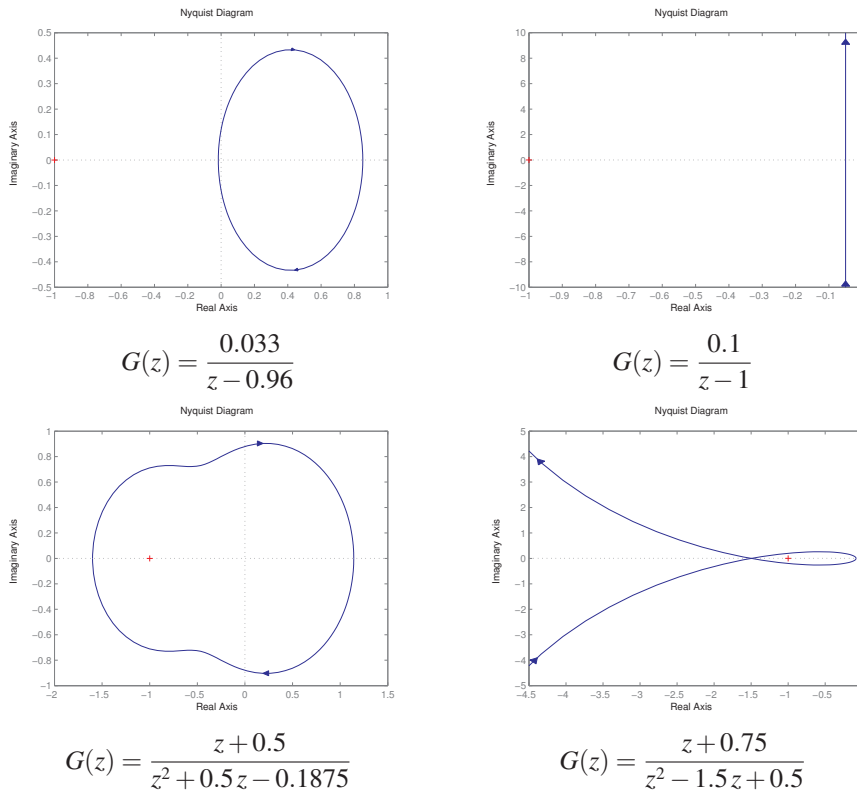


Fig. 8.2 Exemples de diagrames polars.

8.3.2. Diagrama polar

Definició 39 El diagrama polar del sistema de funció de transferència $G(z)$ consisteix en la corba del pla complex definida per $G(e^{j\theta})$, parametritzada per $\theta \in [-\pi, \pi]$ rad.

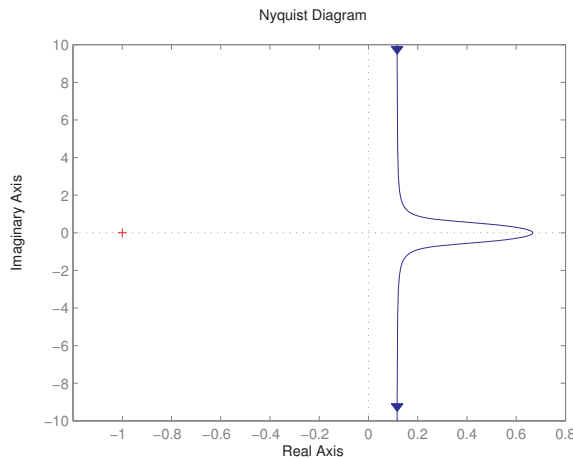
Proposició 46 Algunes característiques del diagrama polar de temps discret són:

- El diagrama polar és simètric respecte de l'eix real (eix d'abscisses); per tant, per representar-lo, n'hi ha prou a fer variar θ en l'interval $[0, \pi]$ rad.
- El diagrama polar comença pel valor del paràmetre $\theta = 0$ rad a l'eix real i acaba per a $\theta = \pi$, també a l'eix real.

La corba polar de temps discret presenta formes variades i similars a les de les corbes polars de temps continu [1]. Donada una corba polar, no es pot distingir si aquesta és de temps continu, o de temps discret. La Figura 8.2 mostra alguns diagrames polars i les seves funcions de transferència.

Comentari 11 En aquesta representació, no apareix la freqüència de forma explícita.

Fig. 8.3
Exemple 57: Diagrama polar.



Exemple 57 Donada la funció de transferència $G(z) = \frac{z+0.2}{z^2+0.9z-0.1}$ dibuixeu-ne el diagrama de polar.

Per construir el diagrama, cal substituir z per $e^{j\theta}$:

$$G(e^{j\theta}) = \frac{e^{j\theta} + 0.2}{e^{2\theta} + 0.9e^{j\theta} - 0.1} = \frac{10 \cos(\theta) + 2 + 10 \sin(\theta) j}{10 \cos(2\theta) + 9 \cos(\theta) - 1 + (10 \sin(2\theta) + 9 \sin(\theta)) j} \tag{8.1}$$

Tot seguit, se'n calcula la part real

$$\Re \{G(e^{j\theta})\} = -2 \frac{10 \cos(\theta) + 17}{20 \cos(\theta) - 101}$$



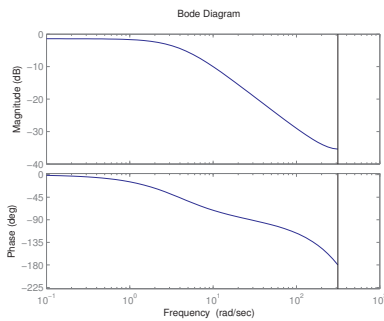
i la part imaginària

$$\Im \{G(e^{j\theta})\} = 4 \frac{(16 + 5 \cos(\theta)) \sin(\theta)}{-101 + 20 (\cos(\theta))^2 - 81 \cos(\theta)}$$

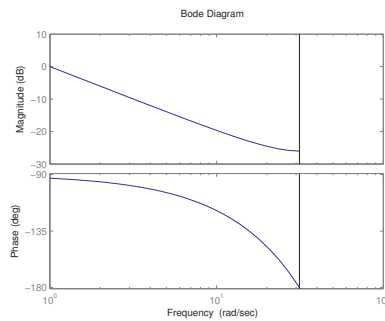
Finalment, es pinta la seva evolució en el pla complex. La Figura 8.3 en mostra el resultat.

Observeu que la figura comença a $G(1) = 0.6667$, que és un nombre real, i tendeix a infinit ja que presenta un pol en $\theta = \pi \text{rad}$ ($z = -1$).

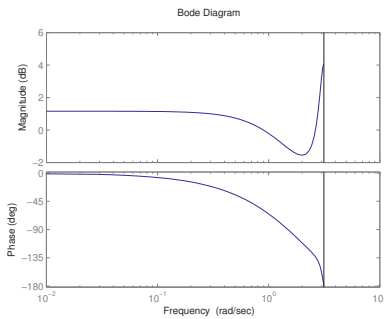
Com es veurà al capítol 10, el diagrama polar coincideix amb el que s'anomena diagrama de Nyquist; per això, molt sovint el diagrama polar s'anomena també diagrama de Nyquist.



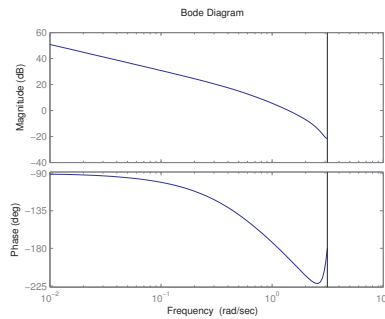
$$G(z) = \frac{0.033}{z - 0.96}$$



$$G(z) = \frac{0.1}{z - 1}$$



$$G(z) = \frac{z + 0.5}{z^2 + 0.5z - 0.1875}$$



$$G(z) = \frac{z + 0.75}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

Fig. 8.4 Exemples de diagrames de Bode.

8.3.3. Diagrama de Bode

Definició 40 Guany. El mòdul de la funció de transferència s'anomena guany.

Definició 41 Guany en contínua. Donada una funció de transferència $G(z)$, s'anomena guany en contínua el guany de la funció de transferència valorada en $\theta = 0$, és a dir, $|G(e^{j0})| = |G(1)|$.



Definició 42 El diagrama de Bode del sistema de funció de transferència $G(z)$ consisteix en el dibuix del guany en decibels (dB) i la fase en graus (o radians) de la funció de transferència $G(z)$, avaluada a $z = e^{j\theta}$. A l'eix d'abscisses, s'hi representa $\log_{10} \theta$, per a $\theta \in [0, \pi]$ rad.

La Figura 8.2 mostra alguns diagrames de Bode i les seves funcions de transferència.

Comentari 12 Guany en dB. S'utilitza decibels (dB), ja que el logaritme transforma productes en sumes:

$$20\log_{10} (|G(e^{j\theta})||H(e^{j\theta})|) = 20\log_{10} (|G(e^{j\theta})|) + 20\log_{10} (|H(e^{j\theta})|).$$

Aquesta propietat ajuda a interpretar la resposta freqüencial del sistema i la combinació de sistemes lineals.

Comentari 13 Diagrama no asimptòtic. A diferència del que passa amb el diagrama de Bode de temps continu, el diagrama de Bode de temps discret no és asimptòtic i, per tant, resulta complicat realitzar aproximacions d'aquest diagrames emprant trams lineals.

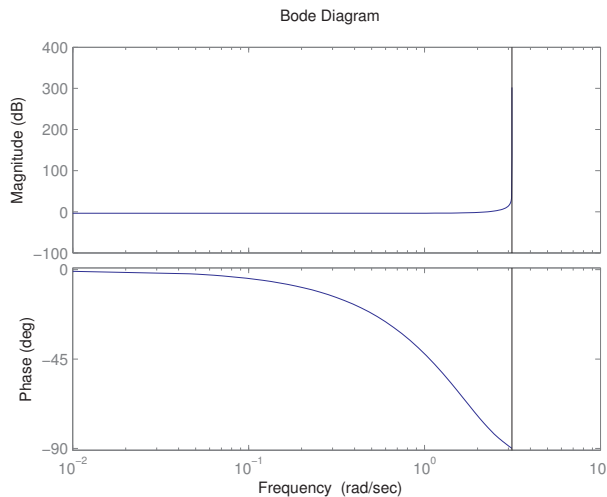
En funció de la forma que pren la resposta freqüencial, i sobretot del guany es defineixen alguns conceptes.

Definició 43 Banda passant (o ample de banda). S'anomena banda passant aquell rang de freqüències en que la resposta freqüencial presenta guany per sobre de 1 (o 0dB).

Definició 44 Freqüència de tall. En un sistema, s'anomena freqüència de tall aquella freqüència en que el guany és 1 (o 0dB).¹

Definició 45 Sistema passabaix. Un sistema passabaix és un sistema que amplifica o permet el pas de les freqüències més baixes i atenua les freqüències més altes.

Fig. 8.5
Exemple 58: Diagrama de Bode.



¹ En ocasions també es defineix com la freqüència en que el guany presenta el valor de -3 dB.



Definició 46 *Sistema passaalt.* Un sistema passaalt és un sistema que amplifica o permet el pas de les altes freqüències però que atenua els senyals de freqüències més baixes que la freqüència de tall.

Exemple 58 Donada la funció de transferència $G(z) = \frac{z+0.2}{z^2+0.9z-0.1}$ dibuixeu-ne el diagrama de Bode.

Per construir el diagrama, cal substituir z per $e^{j\theta}$, (8.1), i posteriorment calcular el guany en dB:

$$20 \log_{10} (|G(e^{j\theta})|) = 20 \log_{10} \left(2 \sqrt{-\frac{13 + 5 \cos(\theta)}{-101 + 20 (\cos(\theta))^2 - 81 \cos(\theta)}} \right) \quad (8.2)$$

i la fase en graus:

$$\angle G(e^{j\theta}) = \tan^{-1} \left(4 \frac{(16 + 5 \cos(\theta)) \sin(\theta)}{-101 + 20 (\cos(\theta))^2 - 81 \cos(\theta)}, -2 \frac{10 \cos(\theta) + 17}{20 \cos(\theta) - 101} \right), \quad (8.3)$$

finalment, es pinten els dos valors en el rang de pulsacions normalitzades $[0, \pi]$ rad.

La Figura 8.5 mostra el resultat. Observeu que a la part dreta del diagrama apareix una línia vertical; aquesta línia marca la pulsació normalitzada de $\theta = \pi$ rad.

8.3.4. Diagrama de Nichols

Definició 47 El diagrama de Nichols del sistema de funció de transferència $G(z)$ consisteix a dibuixar el guany en decibels (dB) contra la fase en graus de la funció de transferència $G(z)$ avaluada a $z = e^{j\theta}$.

Comentari 14 En aquesta representació, no hi apareix la freqüència de forma explícita.

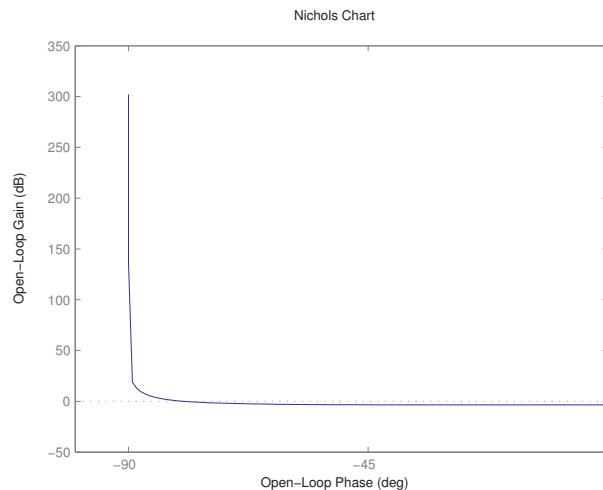


Fig. 8.6
Exemple 59: Diagrama de Nichols.



Exemple 59 Donada la funció de transferència

$$G(z) = \frac{z + 0.2}{z^2 + 0.9z - 0.1},$$

estudieu-ne el diagrama de Nichols.

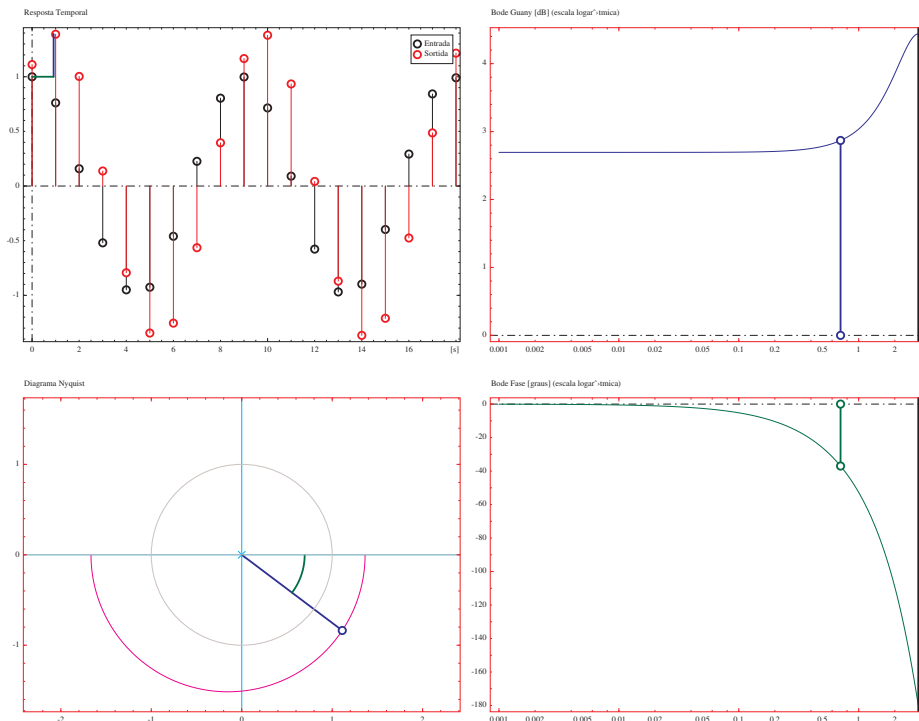
Per construir el diagrama cal substituir z per $e^{j\theta}$, (8.1), i posteriorment calcular el guany en dB, (8.2), i la fase en graus, (8.3). Finalment es pinten els dos valors en el rang $[0, \pi]$ rad. La Figura 8.6 en mostra el resultat.



Concepte_freqüencial_TD:

1. Col·loqueu el punter sobre la barra blava en el diagrama de Nyquist. Interaccioneu amb ella. Analitzeu la relació entre el punt d'estudi en el diagrama de Nyquist i el punt d'estudi en el diagrama de Bode.
2. Varieu la freqüència de treball sobre el digrama de Bode, moveu la barra vertical d'esquerra a dreta i analitzeu quina és l'evolució del nombre de mostres per període d'oscil·lació sobre la gràfica de resposta freqüencial.
3. Activeu la visualització del diagrama de Nichols. Col·loqueu el punter sobre la barra verda en el diagrama de Bode de fase. Interaccioneu amb ell. Porteu la freqüència a l'extrem. En quina freqüència estem i com evoluciona la barra violeta en el diagrama de Nichols?

Fig. 8.7
Concepte_freqüencial_TD:
Representacions de la
resposta freqüencial
d'un sistema.





8.4. Resposta freqüencial dels sistemes de primer i segon ordre

8.4.1. Introducció

El diagrama de Bode de guany es pot construir analitzant el mòdul de la funció de transferència avaluada sobre la funció isòcrona de temps discret, $G(e^{j\omega})$. Aquesta té una estructura polinomial que es pot emprar per descompondre el càlcul en part. Així, suposem que:

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{k(z - z_1) \cdots (z - z_{n_1})(z - r_1 e^{j\theta_1})(z - r_1 e^{-j\theta_1}) \cdots (z - r_{n_2} e^{j\theta_{n_2}})(z - r_{n_2} e^{-j\theta_{n_2}})}{(z - p_1) \cdots (z - p_{n_3})(z - \rho_1 e^{j\beta_1})(z - \rho_1 e^{-j\beta_1}) \cdots (z - r_{n_2} e^{j\theta_{n_2}})(z - r_{n_2} e^{-j\theta_{n_2}})}$$

Aquesta estructura pot emprar-se per calcular el guany de la forma següent:

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} (|G(e^{j\omega})|) &= 20 \log_{10} (|k|) + 20 \log_{10} (|e^{j\omega} - z_1|) + \cdots + 20 \log_{10} (|e^{j\omega} - z_{n_1}|) \\ &+ 20 \log_{10} (|(e^{j\omega} - r_1 e^{j\theta_1})(e^{j\omega} - r_1 e^{-j\theta_1})|) + \cdots + 20 \log_{10} (|(e^{j\omega} - r_{n_2} e^{j\theta_{n_2}})(e^{j\omega} - r_{n_2} e^{-j\theta_{n_2}})|) \\ &- 20 \log_{10} (|e^{j\omega} - p_1|) - \cdots - 20 \log_{10} (|e^{j\omega} - p_{n_3}|) - 20 \log_{10} (|(e^{j\omega} - r_1 e^{j\theta_1})(e^{j\omega} - r_1 e^{-j\theta_1})|) \\ &- \cdots - 20 \log_{10} (|(e^{j\omega} - r_{n_2} e^{j\theta_{n_2}})(e^{j\omega} - r_{n_2} e^{-j\theta_{n_2}})|). \end{aligned}$$

Per tant, el guany de la resposta freqüencial d'un sistema pot escriure's com a suma de respostes freqüencials de sistemes de primer i segon ordre. De forma similar, la fase pot escriure's de la forma:

$$\begin{aligned} \angle G(e^{j\omega}) &= \angle(k) + \angle(e^{j\omega} - z_1) + \cdots + \angle(e^{j\omega} - z_{n_1}) \\ &+ \angle((e^{j\omega} - r_1 e^{j\theta_1})(e^{j\omega} - r_1 e^{-j\theta_1})) + \cdots + \angle((e^{j\omega} - r_{n_2} e^{j\theta_{n_2}})(e^{j\omega} - r_{n_2} e^{-j\theta_{n_2}})) \\ &- \angle(e^{j\omega} - p_1) - \cdots - \angle(e^{j\omega} - p_{n_3}) \\ &- \angle((e^{j\omega} - r_1 e^{j\theta_1})(e^{j\omega} - r_1 e^{-j\theta_1})) - \cdots - \angle((e^{j\omega} - r_{n_2} e^{j\theta_{n_2}})(e^{j\omega} - r_{n_2} e^{-j\theta_{n_2}})) \end{aligned}$$

i, per tant, pot escriure's també com la composició d'elements de primer i segon ordre.

Atès que la resposta freqüencial pot caracteritzar-se com la combinació de la resposta freqüencial d'elements de primer i segon ordre resulta particularment interessant conèixer les respostes freqüencials dels elements de primer i segon ordre dels sistemes de temps discret [2].

En les subseccions següents, es presenten les respostes freqüencials dels sistemes de primer i segon ordre de temps discret.

8.4.2. Resposta freqüencial dels sistemes de primer ordre

Els sistemes de primer ordre de temps discret poden escriure's com una funció de transferència de la forma:

$$G(z) = \frac{1}{z - \rho}$$

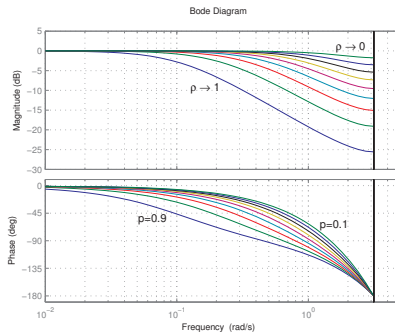


on $\rho \in \mathbb{R}$ és el pol del sistema. Aquesta representació presenta un guany en contínua $|G(e^{j\omega})|$ que depèn de la posició del pol; per aquest motiu, s'ha seleccionat la representació següent:

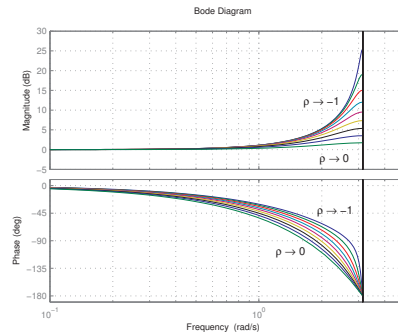
$$G(z) = \frac{1 - \rho}{z - \rho} \tag{8.4}$$

que presenta un guany unitari $|G(e^{j0})| = 1$ per a qualsevol valor de ρ^2 .

Fig. 8.8 Resposta freqüencial d'alguns sistemes de primer ordre estable.

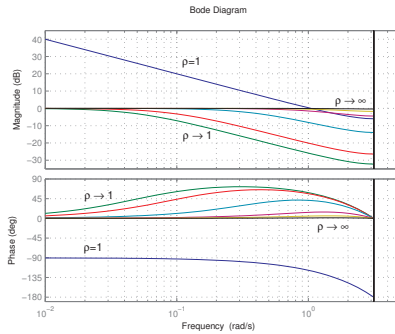


(a)

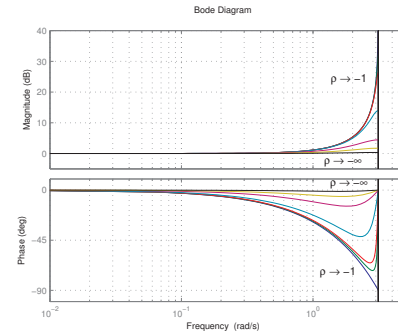


(b)

Fig. 8.9 Diagrama de Bode d'alguns sistemes de primer ordre inestable.



(a)



(b)

El guany d'aquesta funció de transferència és:

$$g = \sqrt{\frac{(\rho - 1)^2}{\rho^2 - 2 \cos(\omega) \rho + 1}}$$

i la fase és:

$$f = \arctan(- (1 - \rho) \sin(\omega), (1 - \rho) (\cos(\omega) - \rho)).$$

La Figura 8.8 mostra l'evolució de la resposta freqüencial pels sistemes de primer ordre estables ($|\rho| < 1$). Se'n poden distinguir dos casos:

² Aquesta representació és vàlida per a qualsevol valor de $\rho \neq 1$. El cas $\rho = 1$ es tractarà a part.



- La subfigura 8.8.a correspon al cas en què $0 < \rho < 1$ i, per tant, el pol està en el semiplà dret i dins el cercle unitat, en aquest cas el sistema es comporta com un filtre passabaix. El valor mínim de la resposta temporal correspon a $|G(-1)| = \left| \frac{\rho-1}{1+\rho} \right|$ i la fase acaba en 180° . A mesura que $\rho \rightarrow 1$, la banda passant del filtre és menor. Un cas particular correspon al de $\rho = 1$; en aquest, el sistema correspon a un integrador i presenta guany infinit en la primera freqüència.
- La subfigura 8.8.b correspon al cas en què $-1 < \rho < 0$ i, per tant, el pol està en el semiplà esquerre i dins el cercle unitat; en aquest cas, el sistema es comporta com un filtre passaalt. El valor màxim de la resposta temporal correspon a $|G(-1)| = \left| \frac{\rho-1}{1+\rho} \right|$ i la fase acaba en 180° . A mesura que $\rho \rightarrow -1$, la banda passant del filtre és major. En el cas $\rho = -1$ el sistema presenta un pol en $z = -1$ i, per tant, la resposta freqüencial pren un valor infinit en la darrera freqüència.

Encara que el concepte de resposta freqüencial per sistemes inestables no és directament aplicable, la Figura 8.9 mostra el diagrama de Bode per al cas en què $|\rho| > 1$, com abans, s'hi distingeixen dos casos

- La subfigura 8.9.a correspon al cas en què $\rho > 1$ el pol està en el semiplà dret i fora el cercle unitat; en aquest cas, el sistema presenta un guany similar al d'un filtre passabaix i la fase és positiva.
- La subfigura 8.9.b correspon al cas en què $-1 > \rho$ el pol està en el semiplà esquerre i fora del cercle unitat; en aquest cas, el sistema presenta un guany similar al d'un filtre passaalt i la fase és negativa.

Comentari 15 *Resposta freqüencial dels pols reals. Si un es pregunta sobre la resposta freqüencial d'un sistema de la forma:*

$$H(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z}$$

pot adonar-se que aquest sistema correspon a la inversa de (8.4) i, per tant,

$$|H(e^{j\theta})| = \frac{1}{|G(e^{j\theta})|}, \angle H(e^{j\theta}) = -\angle G(e^{j\theta}).$$

Així doncs, es pot establir una caracterització freqüencial del comportament dels zeros reals de forma similar a la que s'ha fet amb els pols reals.

8.4.3. Resposta freqüencial dels sistemes de segon ordre

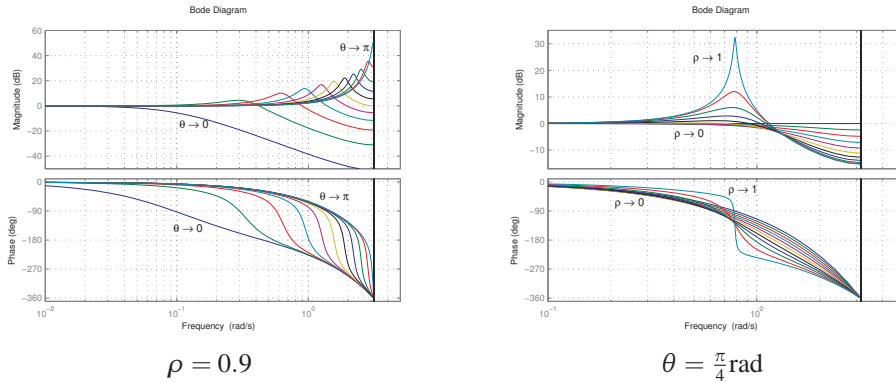
Els sistemes de segon ordre de temps discret amb pols complex conjugats poden escriure's com una funció de transferència:

$$G(z) = \frac{1}{z^2 - 2p_\rho \cos(p_\theta)z + p_\rho^2}$$

on $p_\rho \in \mathbb{R}$ és el mòdul del pol i $p_\theta \in \mathbb{R}$ correspon a l'argument del pol. Atès que el guany en contínua depèn del pol, s'estudia l'evolució del sistema:



Fig. 8.10
Resposta freqüencial
d'alguns sistemes de
segon ordre estables.



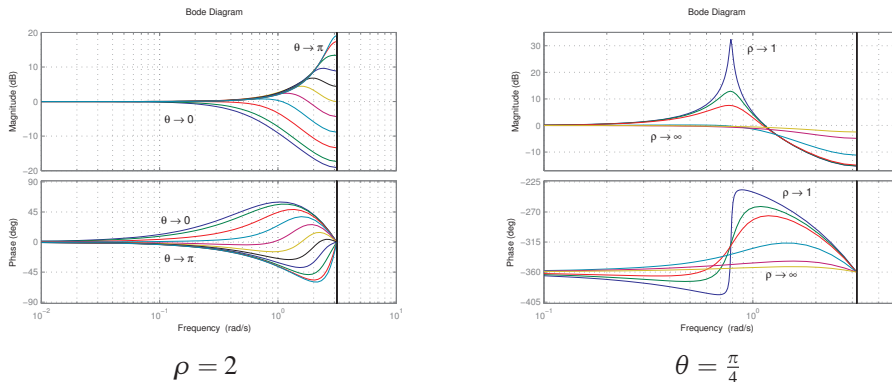
$$G(z) = \frac{1 - 2p_\rho \cos(p_\theta) + p_\rho^2}{z^2 - 2p_\rho \cos(p_\theta)z + p_\rho^2} \quad (8.5)$$

que presenta guany unitari per a tots els possibles pols.

La Figura 8.10 mostra l'evolució de la resposta freqüencial per a sistemes de segon ordre estables ($|\rho| < 1$); a la subfigura de l'esquerra es deixa $\rho = 0.9$ constant i es varia el valor de θ , mentre que a la subfigura de la dreta es fixa $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad i es varia ρ . Podem observar que, quan el mòdul és proper a 1 o l'angle proper a π , la funció pren un valor molt elevat, pic de ressonància, que a l'extrem és infinit. En contrapartida, per a valors de ρ petits, o valors de θ petits el sistema es converteix en un sistema passabaix sense sobrepic.

La Figura 8.11 mostra l'evolució de la resposta freqüencial per a sistemes de segon ordre inestables ($|\rho| > 1$)³; a la subfigura de l'esquerra es deixa $\rho = 2$ constant i es varia el valor de θ , mentre que a la subfigura de la dreta es fixa $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad i es varia ρ . Podem observar que, quan el mòdul és proper a 1 o l'angle proper a π , la funció pren un valor molt elevat, pic de ressonància, que a l'extrem és infinit. En contrapartida, per a valors de ρ petits, o valors de θ petits el sistema es converteix en un sistema passabaix sense sobrepic.

Fig. 8.11
Diagrama de Bode
d'alguns sistemes de
segon ordre inestables.



³ En els sistemes inestables, el concepte de resposta freqüencial no és directament aplicable.



Com en el cas dels sistemes de primer ordre, a partir d'aquesta anàlisi és possible deduir la resposta freqüencial dels zeros complexos.

8.5. Sistemes mostrejats

En els sistemes mostrejats, el concepte de resposta freqüencial s'ha de matisar i aclarir. Així, seguint l'esquema de la Figura 8.12, s'estudia el règim permanent dels senyals que hi ha involucrats. Si $e(t)$ és un senyal sinusoidal:

$$e(t) = e^{j\omega t}$$

un cop mostrejat, s'obté (secció 3.4.2):

$$e^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega+k\cdot\omega_s)t}$$

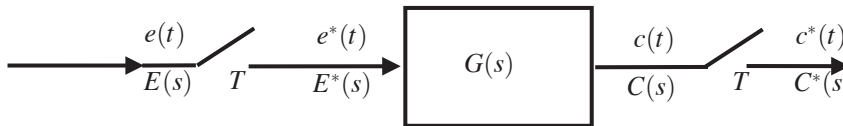


Fig. 8.12
Estructura d'un sistema mostrejat

Com es pot comprovar, aquest senyal presenta infinites components freqüencials, totes de la mateixa amplitud. Si la planta, $G(s)$, és estable, en règim permanent a la sortida de la planta, s'obté el senyal següent:

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(j(\omega+k\cdot\omega_s)) e^{j(\omega+k\cdot\omega_s)t}$$

Aquest senyal té infinites components freqüencials però, atès que no totes tenen la mateixa amplitud, no es tracta d'un senyal sinusoidal mostrejat. Això indica que la relació entre $e(t)$ i $c(t)$ no és lineal. Posteriorment, aquest senyal es mostreja i s'obté:

$$c^*(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(j(\omega+k\cdot\omega_s)) e^{j(\omega+k\cdot\omega_s+l\cdot\omega_s)t} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(j(\omega+k\cdot\omega_s)) \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega+n\cdot\omega_s)t}$$

Com es pot comprovar, $c^*(t)$ presenta infinites components freqüencials, totes de la mateixa amplitud; per tant, és un senyal sinusoidal mostrejat. La relació entre $e^*(t)$ i $c^*(t)$ és una relació lineal i la resposta freqüencial del sistema mostrejat queda caracteritzada per:

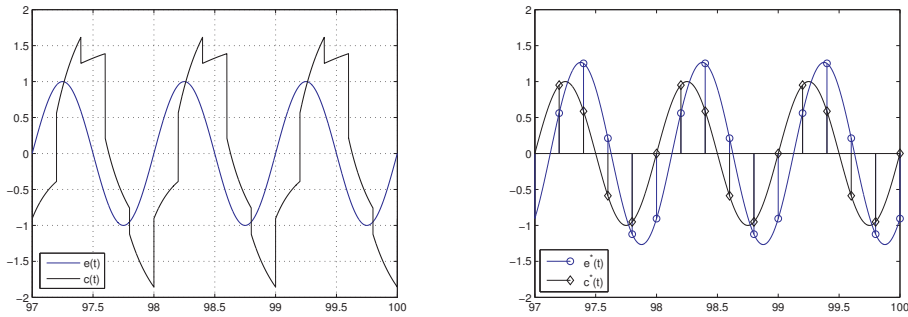
$$\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(j(\omega+k\cdot\omega_s)) \right]$$

que no és altra cosa que la transformada \mathcal{L} de $G(s)$.

Exemple 60 Seguint l'esquema de la Figura 8.12, un període de mostratge de $T = 0.2$ s, i emprant



Fig. 8.13
Exemple 60: Resposta temporal en règim permanent.



$$G(s) = \frac{(s+5)(s+13)}{(s+3)(s+8)}$$

i un mantenidor, analitzeu la resposta freqüencial del sistema.

La Figura 8.13 mostra l'entrada de temps continu, $e(t)$, i la sortida de temps continu del sistema $c(t)$. Encara que l'entrada és un senyal sinusoidal de pulsació 2π rad/s, la sortida no ho és, si bé és un senyal període de la mateixa freqüència. Es podria comprovar que la sortida presenta diferents components harmòniques de diferent amplitud. La mateixa figura, a la dreta, mostra l'entrada de temps discret $e^*(t)$ i la sortida de temps discret $c^*(t)$; com es pot comprovar, ambdues⁴ són senyals sinusoidals. El canvi d'amplitud i el canvi de fase pot calcular-se avaluant la funció de transferència de temps discret:

$$G(z) = \mathcal{Z}_T \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{(s+5)(s+13)}{(s+3)(s+8)} \right\} = \frac{(z-0.3498)(z+0.5)}{(z-0.5488)(z-0.2019)}$$

en la pulsació del senyal d'entrada:

$$G(e^{j\omega T}) = G(e^{j2\pi \cdot 0.2}) = 0.8850 - 0.9055i$$

i, per tant, el guany és 1.2662 i la fase, -45.65° .

Així doncs, en els sistemes de temps discret que són el resultat de mostrejar, amb període de mostratge T , un sistema de temps continu (amb mantenidor d'ordre zero o no), els resultats de les seccions anteriors s'apliquen exactament igual. Cal tenir en compte, però, que, en aquests casos, el domini de la freqüència ω no és l'interval $[0, \pi]$, sinó l'interval $[0, \frac{\omega_s}{2}] = [0, \frac{\pi}{T}]$ rad/s. Observeu que, si $G(z)$ és la funció de transferència a z d'un sistema mostrejat, la seva funció de transferència isòcrona és $G(je^{\omega T})$; si fem el canvi de variable $\theta = \omega T$, qualsevol referència al període ha desaparegut. Reescrivim, a continuació, les definicions de l'apartat anterior i els comentaris per a sistemes mostrejats.

⁴ La traça contínua s'ha incorporat per facilitar la interpretació de la figura.

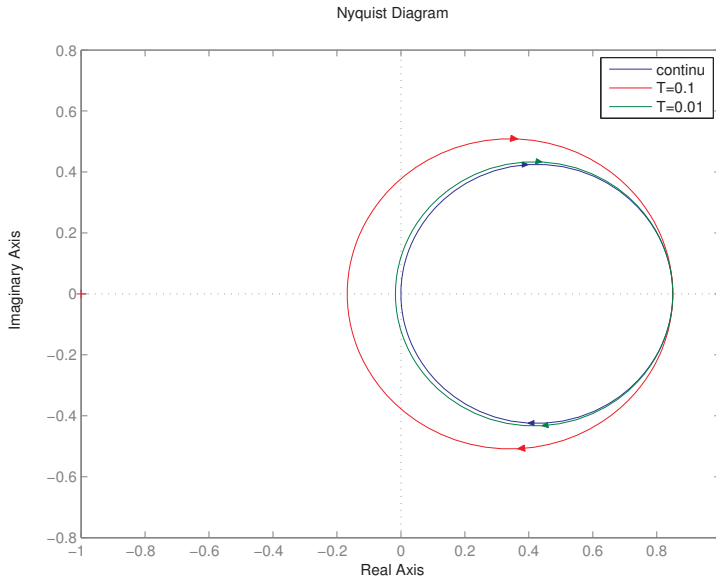


Fig. 8.14
Exemple 61: Diagrama polar.

Definició 48 El diagrama polar de la sistema de funció de transferència $G(z)$ consisteix en la corba del pla complex definida per $G(e^{j\omega T})$ i parametritzada per $\omega \in \left(-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}\right)$.

De les observacions que acabem de fer, es dedueix els següent:

Proposició 47

- La corba de polar és simètrica respecte de l'eix real (eix d'abscisses); per tant, per representar-la, n'hi ha prou de fer variar ω a l'interval $\left[0, \frac{\omega_s}{2}\right] = \left[0, \frac{\pi}{T}\right]$ rad/s.
- La corba comença pel valor del paràmetre $\omega = 0$ a l'eix real, i acaba per $\omega = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$, també a l'eix real.

Definició 49 El diagrama de Bode del sistema de funció de transferència $G(z)$ consisteix en el dibuix del guany en decibels (dB) i la fase en graus (o radians) de la funció de transferència $G(z)$, avaluada a $z = e^{j\omega T}$. A l'eix d'abscisses, s'hi representa $\log_{10} \omega$, per a $\omega \in \left[0, \frac{\omega_s}{2}\right]$

Exemple 61 Donat el sistema de temps continu $\frac{50 \cdot 0.017}{0.25s + 1}$, obteniu els sistemes de temps discret equivalents (emprant mantenidor d'ordre zero), amb $T = 0.1$ s i $T = 0.01$ s. Trobeu i compareu el diagrama polar i el diagrama de Bode dels diferents sistemes.

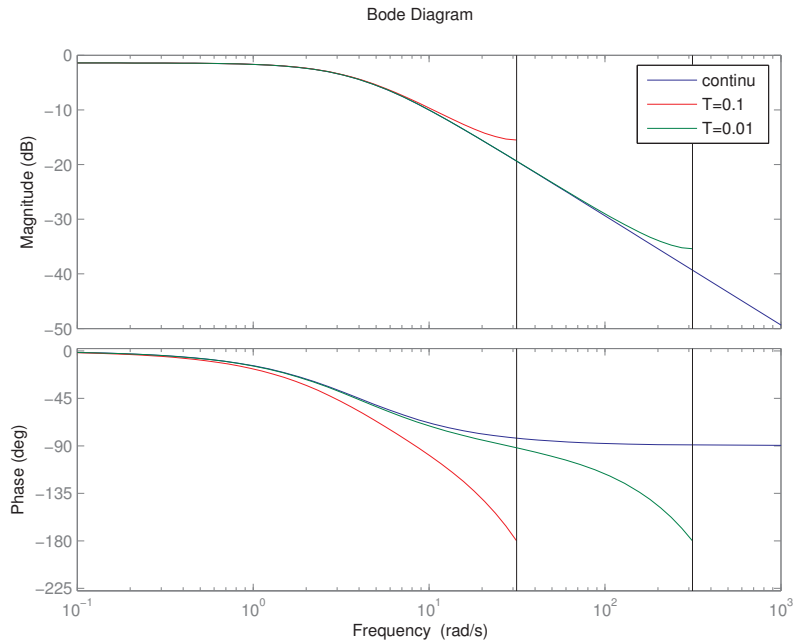
Aplicant la transformada a \mathcal{Z} , s'obtenen els sistemes:

$$G_{0.1}(z) = \frac{0.2802}{z - 0.6703}, G_{0.01}(z) = \frac{0.03333}{z - 0.9608}.$$



La Figura 8.14 mostra el diagrama polar dels diferents sistemes. Es pot comprovar que en la zona propera al punt d'inici és força semblant (és igual en el punt d'inici) mentre que divergeix a mesura que la freqüència augmenta. A la Figura 8.15, es mostren els diagrames de Bode dels diferents sistemes. Cal destacar que el rang de dibuix dels tres sistemes és diferent.

Fig. 8.15
Exemple 61: Diagrama de Bode.



Bibliografia

- [1] Abbas Emami-Naeini. The shapes of nyquist plots. connections with classical plane curves. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 102–115, october 2009.
- [2] Bernardo A. León de la Barra and Raul Prieto. On the frequency response of scalar discrete-time systems. *Automatica*, 35:1843–1853, 1999.



Exercicis proposats

1. Donat el sistema

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2+z+0.1},$$

determineu la resposta en règim permanent quan l'entrada és $u_k = 1 + \sin(k+1) + 3 \cos(3k)$.

2. Donat el sistema

$$G(z) = \frac{z^2+0.8323z+1}{z(z-0.7)(z+0.5)},$$

determineu quina és la sortida en règim permanent quan l'entrada és $u_k = \sin(2k)$. Relacioneu la sortida obtinguda amb la posició dels zeros del sistema i la freqüència del senyal d'entrada.

3. La Figura 8.16 mostra el diagrama de Bode dels sistemes:

$$G_0(z) = \frac{0.1}{z-0.9} \quad \text{i} \quad G_1(z) = \frac{0.2}{z-0.8}.$$

Determineu quina corba correspon a quin sistema.

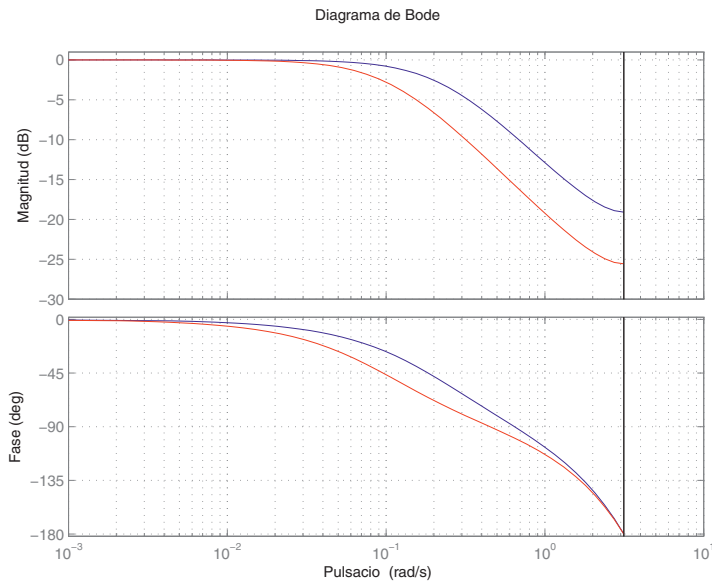


Fig. 8.16
Exercici 3: Diagrama de Bode.

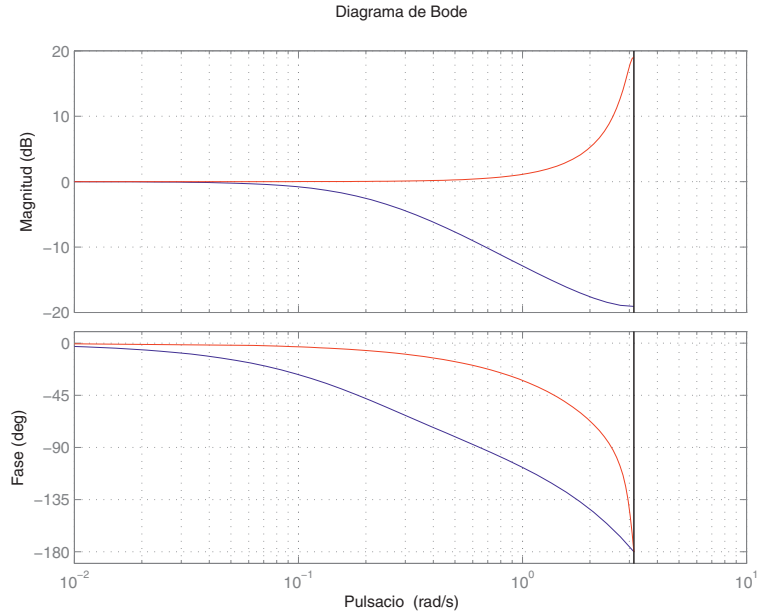
4. La Figura 8.17 mostra el diagrama de Bode dels sistemes:

$$G_0(z) = \frac{1.8}{z+0.8} \quad \text{i} \quad G_1(z) = \frac{0.2}{z-0.8}.$$

Determineu quina corba correspon a quin sistema.



Fig. 8.17
Exercici 4: Diagrama de Bode.

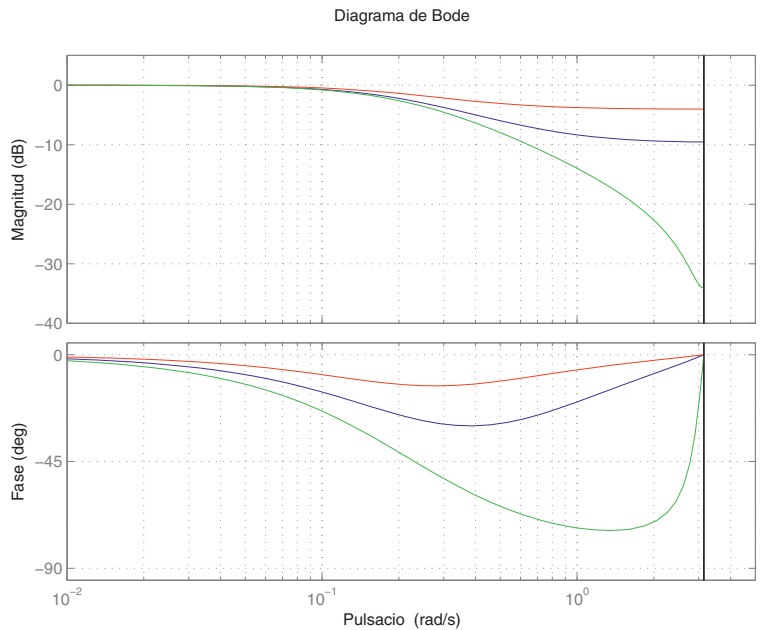


5. La Figura 8.18 mostra el diagrama de Bode dels sistemes:

$$G_0(z) = \frac{0.4(z-0.5)}{z-0.8}, \quad G_1(z) = \frac{0.66667(z-0.7)}{z-0.8} \quad \text{i} \quad G_2(z) = \frac{0.11765(z+0.7)}{z-0.8}.$$

Determineu quina corba correspon a quin sistema.

Fig. 8.18
Exercici 5: Diagrama de Bode.





6. Donat un sistema de la forma

$$H(z) = \frac{z - \alpha}{(1 - \alpha)(z - 0.5)},$$

determineu en funció del valor α si es tracta d'un sistema passaalt o passabaix.

7. Donat un sistema amb

$$G(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta} \frac{1 - \beta}{1 - \alpha},$$

analitzeu si la resposta freqüencial és passaalt o passabaix en funció de la posició relativa de α i β .

8. La Figura 8.19 mostra el diagrama de Bode dels sistemes:

$$G_0(z) = \frac{1}{z^2} \quad \text{i} \quad G_1(z) = \frac{-2.3333(z - 0.4286)}{z(z - 2.333)}.$$

Determineu quina corba correspon a quin sistema. Quina serà la resposta temporal davant d'una entrada de la forma $u_k = \sin(2k)$.

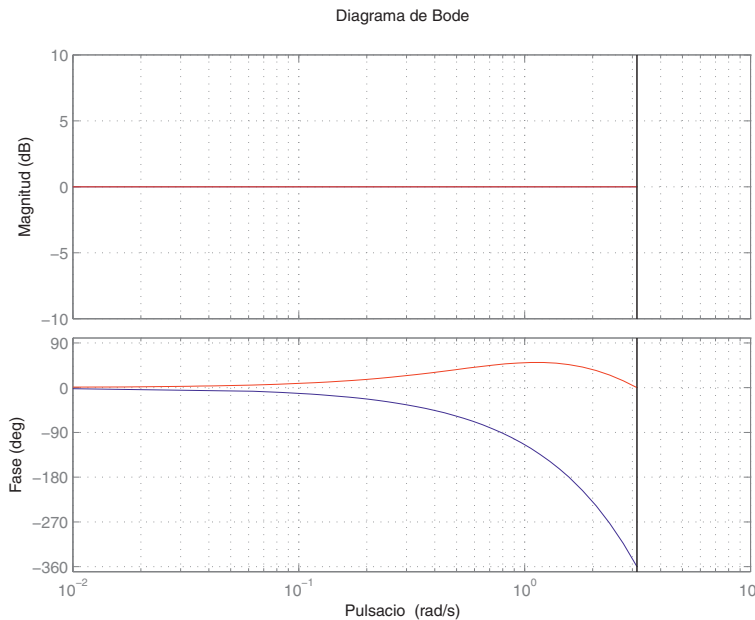


Fig. 8.19
Exercici 8: Diagrama de Bode.

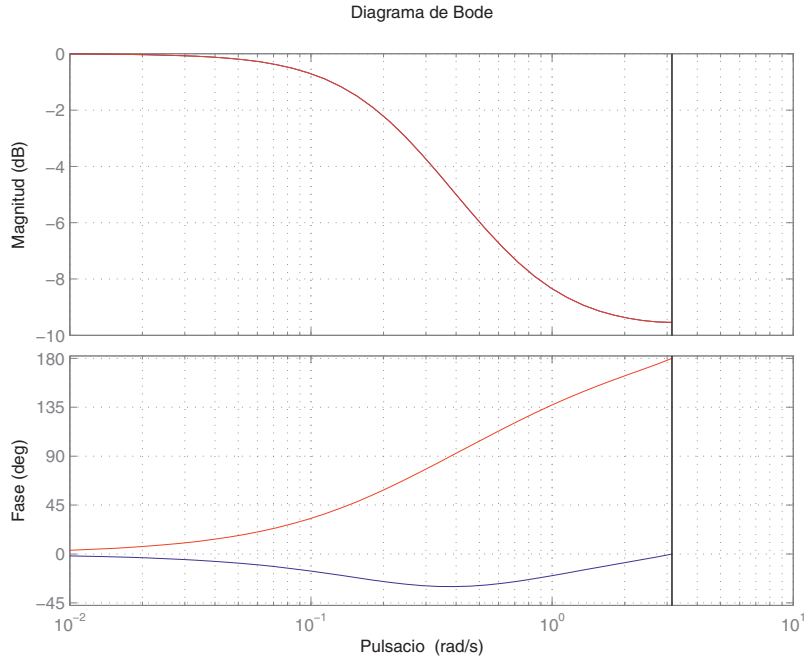
9. La Figura 8.20 mostra el diagrama de Bode dels sistemes:

$$G_0(z) = \frac{0.4(z - 0.5)}{z - 0.8} \quad \text{i} \quad G_1(z) = \frac{-0.5(z - 0.5)}{z - 1.25}.$$

Quina de les corbes correspon a cadascun dels sistemes? Quina serà la resposta del sistema en règim permanent si s'introdueix el senyal $u_k = \sin(k)$ a l'entrada.



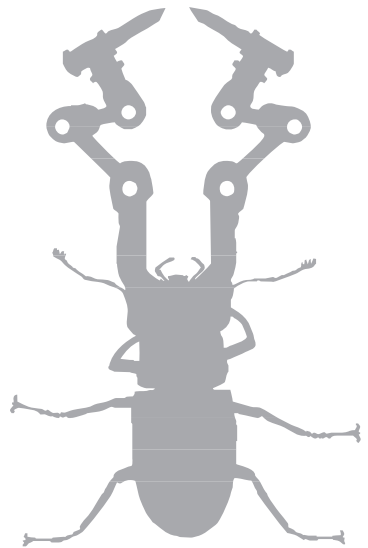
Fig. 8.20
Exercici 9: Diagrama de Bode.



10. Donat el sistema

$$G(s) = \frac{1}{s+1},$$

determineu el canvi de guany i el desfasament que presentaria el senyal $u(t) = \sin(0.1t)$ en introduir-se en el sistema. Si s'aplica un mostrejadore amb període de mostrejatge $T = 0.2$ s a l'entrada i a la sortida del sistema, calculeu quin guany i desfasament presentaria la component freqüència de 0.1 rad/s. Feu-ho a partir de $G(z)$ i aproximant $G^*(s)$ amb dos termes de la suma infinita.







El lloc geomètric de les arrels (Evans locus)

El lloc geomètric de les arrels és una de les eines clàssiques d'anàlisi dels sistemes lineals de llaç tancat. Permet analitzar l'evolució dels pols de llaç tancat en funció d'un paràmetre, normalment el guany d'un controlador proporcional. En els casos en què el lloc geomètric presenta les característiques volgudes de resposta temporal i de precisió, un controlador proporcional permet satisfer les especificacions preestablertes.

En aquest capítol, es defineix el lloc geomètric de les arrels, es presenten algunes de les seves propietats i finalment se n'analitzen alguns exemples.

9.1. Introducció

El diagrama del lloc geomètric de les arrels, o *root locus* (RL) en anglès, d'un sistema discret $G(z)$ és el lloc geomètric del pla complex \mathbb{C} que correspon a les arrels de l'equació característica del sistema en llaç tancat que té a la cadena directa un controlador proporcional $k \in \mathbb{R}^+$ en sèrie amb $G(z)$ i realimentació unitària (Figura 9.1). L'estudi del RL és un mètode molt emprat i estudiat en la literatura [1, 2, 3].

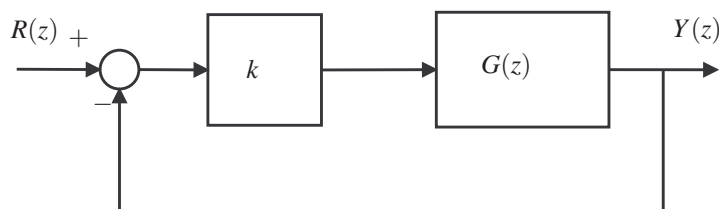


Fig. 9.1
Sistema de llaç tancat
analitzat en el lloc
geomètric de les arrels.

El lloc geomètric de les arrels mostra gràficament la posició de tots els pols del sistema en llaç tancat, com el de la Figura 9.1, obtinguts en variar k . La representació del lloc geomètric es pot obtenir fàcilment amb l'ajuda de programes específics (Matlab, Scilab, Maple) o programant la resolució del polinomi característic en funció de k i dibuixant-ne les arrels.

**Definició 50** *Sigui*

$$G_{OL}(z) \triangleq G(z) = k_g \frac{\prod_{i=1}^{n_z} (z - z_i)}{\prod_{l=1}^{n_p} (z - p_l)} \quad (9.1)$$

la funció de transferència en z del sistema enllaç obert; $z \in \mathbb{C}$ pertany al RL si i només si z és un zero de $1 + kG_{OL}(z)$ per a algun valor del controlador proporcional, és a dir, es verifica

$$1 + kG_{OL}(z) = 0 \quad (9.2)$$

per a algun valor de k^1 . En altres paraules:

$$RL = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists k > 0 \text{ tq } 1 + kG_{OL}(z) = 0\}$$

L'equació (9.2) que caracteritza el lloc geomètric de les arrels és una equació sobre els complexos. Escrivint l'equació en coordenades polars, s'obtenen la *condició de mòdul* i la *condició d'argument* (o *condició de fase*) que són:

– *condició de mòdul*. La *condició de mòdul* es basa a reescriure (9.2) de la forma:

$$kG_{OL}(z) = -1$$

i calcular el mòdul dels dos costats de la igualtat:

$$|k| |G_{OL}(z)| = \frac{|k| |k_g| \prod_{i=1}^{n_z} |z - z_i|}{\prod_{l=1}^{n_p} |z - p_l|} = 1 \rightarrow k = \frac{1}{|G_{OL}(z)|} = \frac{\prod_{l=1}^{n_p} |z - p_l|}{|k_g| \prod_{i=1}^{n_z} |z - z_i|}$$

– *condició d'argument* (o *fase*). La *condició d'argument* es basa a reescriure (9.2) de la forma:

$$kG_{OL}(z) = -1$$

i calcular l'argument dels dos costats de la igualtat:

$$\angle k + \angle G_{OL}(z) = \angle k + \angle k_g + \sum_{i=1}^{n_z} \arg(z - z_i) - \sum_{l=1}^{n_p} \arg(z - p_l) = \pm(2q + 1)180^\circ, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

El lloc geomètric es calcula normalment per a $k \in \mathbb{R}^+$ i, per tant, $\angle k = 0$; així, la *condició d'argument* pren la forma:

$$\angle k_g + \sum_{i=1}^{n_z} \arg(z - z_i) - \sum_{l=1}^{n_p} \arg(z - p_l) = \pm(2q + 1)180^\circ, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (9.3)$$

¹ Encara que és possible generalitzar-ho, és habitual assumir $k \cdot k_g \in \mathbb{R}^+$.



Comentari 16 *Condicció d'argument.* La condició d'argument sol emprar-se per determinar si un punt del pla complex pertany o no al lloc geomètric. Per fer-ho, únicament cal avaluar l'argument de la funció de transferència d'interès sobre el punt en qüestió. Si aquest és π rad el punt pertany al lloc geomètric; en cas contrari, no hi pertany.

Així doncs, per tal que $z_d \in \mathbb{C}$ pertanyi al RL, cal que $k \cdot G_{OL}(z_d) \in \mathbb{R}^-$.

Comentari 17 *Condicció de mòdul.* Quan se sap que un punt del pla complex, $z_d \in \mathbb{C}$, pertany al lloc geomètric, es pot aplicar la condició de mòdul per determinar quin valor del guany proporcional fa que sigui pol de llaç tancat:

$$k = \frac{1}{|G_{OL}(z_d)|}.$$

És important adonar-se que la condició de mòdul no dóna informació de si un punt pertany o no al lloc geomètric.

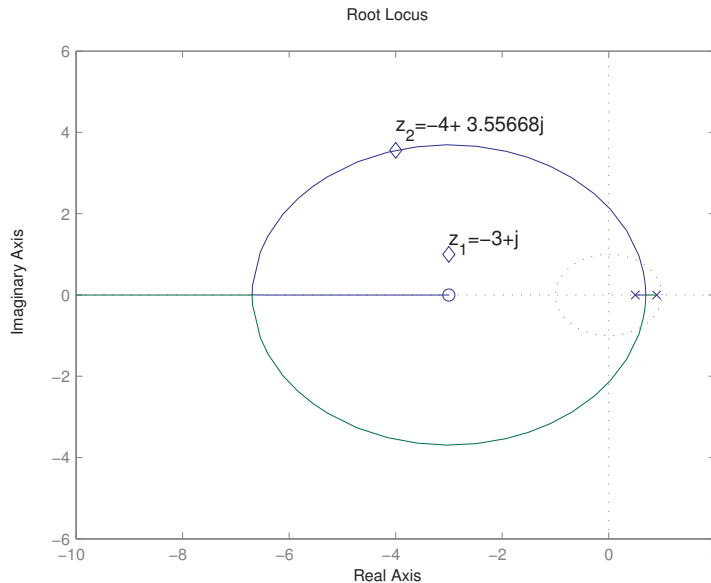


Fig. 9.2 Exemples 62 i 63: Lloc geomètric de les arrels.

Exemple 62 Donada la planta $G(z) = \frac{(z+3)}{(z-0.5)(z-0.9)}$, determineu si el punt $z_1 = -3 + j$ pot ser un pol de llaç tancat.

Per determinar si el punt pertany al lloc geomètric, s'avalua la funció de transferència en el punt d'interès:

$$G(z_1) = -0.0345 + 0.0589j$$

i, per tant, l'argument és $\angle G(z_1) = 2.1$ rad. Atès que l'argument no és π rad, el punt no pertany al lloc geomètric de les arrels. La Figura 9.2 mostra el lloc geomètric de la planta i es pot observar que el punt no està sobre el lloc geomètric.



Exemple 63 Donada la planta $G(z) = \frac{(z+3)}{(z-0.5)(z-0.9)}$ determineu si el punt $z_2 = -4 + 3.5567j$ pot ser un pol de llaç tancat. En cas afirmatiu, determineu el valor de k que fa que ho sigui.

Per determinar si el punt pertany al RL, s'avalua la funció de transferència en el punt d'interès:

$$G(z_2) = -0.106383$$

i, per tant, l'argument és $\angle G(z_2) = \pi \text{rad}$ i el punt pertany al RL. La Figura 9.2 mostra el lloc geomètric de la planta i es pot observar que el punt està sobre del lloc geomètric.

Per determinar el valor de k que fa que z_2 sigui pol de llaç tancat, s'aplica la condició de mòdul:

$$\frac{|k| |k_g| \prod_{i=1}^{n_z} |z_2 - z_i|}{\prod_{l=1}^{n_p} |z_2 - p_l|} = 1 \rightarrow k = \frac{\prod_{l=1}^{n_p} |z_2 - p_l|}{|k_g| \prod_{i=1}^{n_z} |z_2 - z_i|}$$

$$i, \text{ per tant, } k = \frac{1}{|G(z_2)|} = 9.4.$$

La secció següent introdueix algunes característiques i propietats del lloc geomètric que ajuden a entendre'l i analitzar-lo. Quan no hi havia mitjans computacionals per calcular el lloc geomètric, s'utilitzaven aquestes propietats i el *Spirule* [4] per construir-lo. Conèixer aquestes propietats permet desenvolupar la intuïció sobre el comportament i l'estructura del lloc geomètric, cosa que és força important quan s'utilitzen eines gràfiques per dissenyar controladors.

9.2. Característiques i propietats del lloc geomètric de les arrels

En aquesta secció, s'assumeix que $k^* \triangleq k \cdot k_g \geq 0$ per tal de facilitar els desenvolupaments.

Definició 51 *Branca del lloc geomètric.* El RL descriu l'evolució de les arrels de llaç tancat per als valors de $k \in [0, \infty)$. Aquestes són les solucions d'un polinomi que és una funció contínua; per tant, si es parametriza cadascuna de les arrels en funció de k , es descriu una corba contínua. Cadascuna d'aquestes corbes rep el nom de branca del lloc geomètric.

El lloc geomètric satisfà les propietats següents:

1. Inici i final del lloc geomètric de les arrels. El RL comença ($k^* = 0$) als pols de $G_{OL}(z)$ i acaba ($k^* = +\infty$) als zeros de $G_{OL}(z)$.

Efectivament, reescrivint l'equació que defineix el lloc geomètric

$$1 + k^* \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n_z} (z - z_i)}{\prod_{l=1}^{n_p} (z - p_l)} = 0 \quad (9.4)$$



com

$$\prod_{l=1}^{n_p} (z - p_l) + k^* \cdot \prod_{i=1}^{n_z} (z - z_i) = 0. \quad (9.5)$$

s'observa que, en prendre $k^* = 0$, les arrels de l'equació són les arrels de $\prod_{l=1}^{n_p} (z - p_l) = 0$ i, per tant, els pols de llaç obert.

Recíprocament, reescriuint l'equació (9.5) com:

$$\frac{\prod_{l=1}^{n_p} (z - p_l)}{k^*} + \prod_{i=1}^{n_z} (z - z_i) = 0.$$

s'observa que, si k^* tendeix a infinit, els zeros de l'equació (9.5) tendeixen als zeros de llaç obert.

2. Nombre de branques del RL. El RL té màx $\{n_z, n_p\}$ branques. Les branques corresponen a les solucions de

$$\prod_{l=1}^{n_p} (z - p_l) + k^* \cdot \prod_{i=1}^{n_z} (z - z_i) = 0$$

i, donat que és un polinomi de grau màx $\{n_z, n_p\}$, aquest és el nombre de solucions. Atès que en els sistemes de control es treballa amb sistemes causals $n_p > n_z$, aleshores màx $\{n_z, n_p\} = n_p$.

3. El RL és simètric respecte de l'eix real ja que el polinomi característic té coeficients reals i, si hi ha una arrel complexa, també ho és la conjugada.
4. Asímptotes del RL. Si $n_p > n_z$, $n_p - n_z$ branques tendeixen a l'infinit seguint línies rectes (asímptotes) [5]. Els angles que formen les asímptotes en aquestes branques amb l'eix real valen

$$\Phi_A = \frac{(2q+1)}{n_p - n_z} 180^\circ \quad q = 0, 1, 2, \dots, (n_p - n_z - 1).$$

5. Intersecció de les asímptotes del RL. Totes les asímptotes del RL intersequen en un punt sobre l'eix real, anomenat *centroide* [5]. Aquest punt es calcula com la suma ponderada dels pols i els zeros de $G_{OL}(z)$:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{l=1}^{n_p} p_l - \sum_{i=1}^{n_z} z_i}{n_p - n_z}.$$

6. El RL i l'eix real. Per tal que un punt $r \in \mathbb{R}$ pertanyi al lloc geomètric, cal que compleixi la condició d'argument:

$$\angle \left(k^* \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n_z} (r - z_i)}{\prod_{l=1}^{n_p} (r - p_l)} \right) = 180^\circ.$$

En la hipòtesi que $k > 0$ i $k_g > 0$, l'expressió anterior resulta:

$$\sum_{i=1}^{n_z} \angle(r - z_i) - \sum_{l=1}^{n_p} \angle(r - p_l) = 180^\circ. \quad (9.6)$$

Cal observar que, si α és un pol o zero complex, aleshores $\bar{\alpha}$ també ho serà i:

$$\angle(r - \alpha) + \angle(r - \bar{\alpha}) = 0.$$

Per tant, a (9.6) únicament cal tenir en compte els pols i zeros reals.

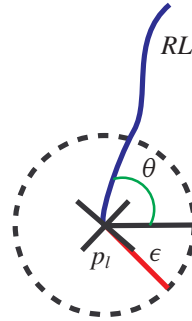
Cal adonar-se també que, si $\beta \in \mathbb{R}$, aleshores:

$$\angle(r - \beta) = \begin{cases} 0 & r \geq \beta \quad \beta \text{ a l'esquerra de } r \\ 180 & r < \beta \quad \beta \text{ a la dreta de } r \end{cases}$$

i que $-180^\circ = 180^\circ = 540^\circ = -540^\circ$.

Així doncs, $r \in \mathbb{R}$ és del RL si i només si el nombre de zeros i pols de $G_{OL}(z)$ que queden a la seva dreta és imparell.

Fig. 9.3
Càlcul de l'angle
d'entrada i sortida.



- Angles de sortida dels pols i arribada als zeros. Per determinar el pendent de sortida del RL dels pols o d'arribada als zeros, es pot aplicar la condició d'argument a un cercle de radi ϵ centrat en el pol, $p_l + \epsilon e^{j\theta}$, o el zero, $z_i + \epsilon e^{j\theta}$, amb ϵ tendint a zero (Figura 9.3). Així, de l'equació:

$$\angle G(p_l + \epsilon e^{j\theta}) = \pi$$

s'aïlla el valor de θ i aquest marca l'angle de sortida (o arribada) del RL.

- Intersecció del RL amb l'eix imaginari. Al lloc geomètric de les arrels, hi ha punts de particular interès, com per exemple la intersecció del RL amb l'eix imaginari. Per determinar-los, es pot emprar el *criteri de Routh* [6] (v. apèndix B), que indica les condicions que ha de complir un polinomi per tal que totes les seves arrels estiguin en el semiplà esquerre. Aquest criteri presenta unes singularitats que poden relacionar-se amb la presència d'arrels sobre l'eix imaginari.



Així, per determinar la intersecció del RL amb l'eix imaginari, s'aplica el *criteri de Routh* al polinomi del denominador de llaç tancat del sistema, i es busquen els valors de k que fan que apareguin zeros a la primera columna de la taula de Routh. Aquests valors corresponen als casos en què el sistema de llaç tancat presenta arrels sobre l'eix imaginari. Un cop es disposa dels valors de k , se substitueixen en el polinomi i finalment s'obtenen les arrels del polinomi. Aquestes corresponen als punts de pas del lloc geomètric sobre l'eix imaginari.

9. Punts de bifurcació. S'anomenen *punts de bifurcació* les interseccions de dues o més branques del lloc geomètric. Aquestes interseccions corresponen a pols de multiplicitat més gran que 1. Per detectar aquests punts, es pot aplicar el *teorema de la funció implícita* a l'equació (9.2) i les variables k i z ; així, una condició necessària per ser punt de bifurcació és $\frac{dk}{dz} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dz} &= -\frac{d}{dz} \frac{1}{G_{OL}(z)} = -\frac{d}{dz} \frac{D(z)}{N(z)} = -\frac{N(z) \frac{dD(z)}{dz} - D(z) \frac{dN(z)}{dz}}{N(z)^2} = 0. \\ &\rightarrow N(z) \frac{dD(z)}{dz} - D(z) \frac{dN(z)}{dz} = 0 \end{aligned} \quad (9.7)$$

Els angles que formen les branques en els punts de bifurcació són iguals [5].

És important adonar-se que no totes les solucions de (9.7) corresponen a bifurcacions; únicament ho són aquelles que compleixen la condició d'argument.

Exemple 64 Donat el sistema

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - 1.7z + 0.72} = \frac{(z+2)}{(z-0.9)(z-0.8)}$$

construir el RL aplicant de forma literal les propietats anteriors.

En aquest sistema, $n_z = 1$ i $n_p = 2$, i el seu RL està definit per:

$$\mathbf{RL} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{R} \mid (z+2)k + (z-0.9)(z-0.8) = 0\}.$$

Primer, s'obtenen els zeros i els pols de la funció de transferència del sistema en llaç obert, que són $z_1 = -2$ i $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.8$, respectivament.

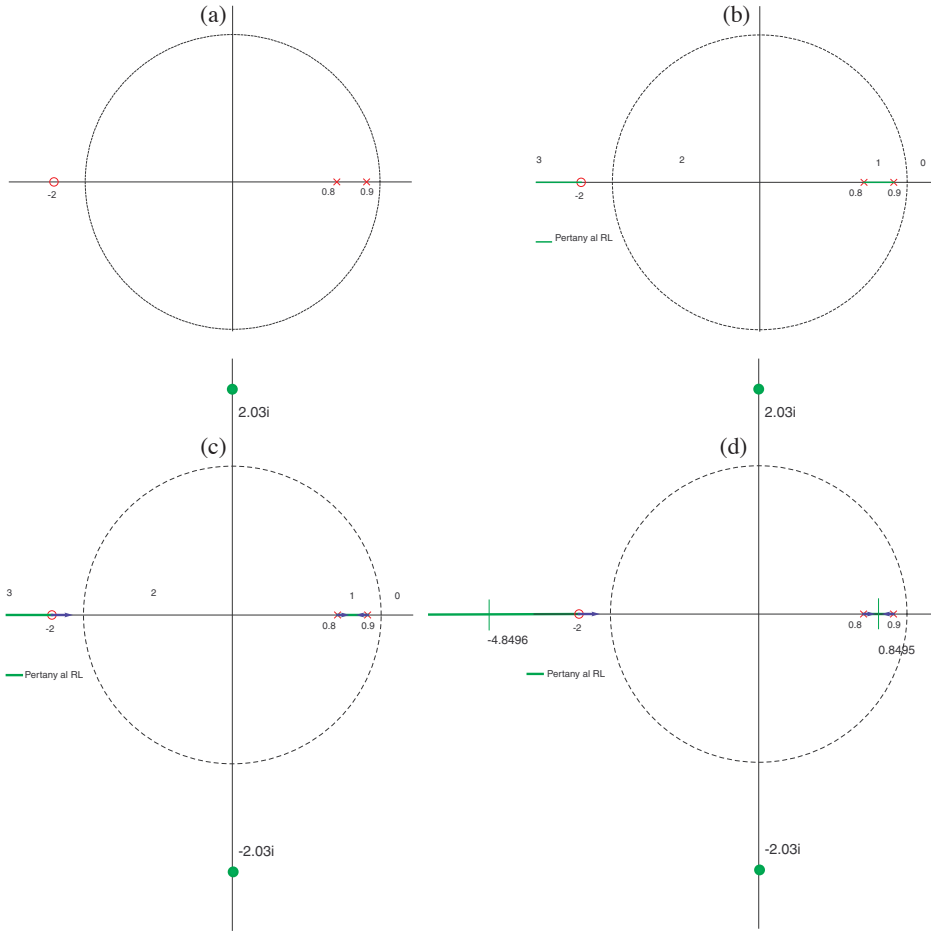
1. Punts inicial i final.

- Inicial: s'obté per a $k = 0$. El RL comença als pols del sistema en llaç obert, que són $p_1 = 0.8$ i $p_2 = 0.9$.
- Final: s'obté per a $k \rightarrow \infty$. El RL acaba als zeros del sistema en llaç obert, que en aquest cas és $z_1 = -2$.

Això es visualitza a la subfigura 9.4.a.



Fig. 9.4
 Construcció del RL
 segons l'Exemple 64.
 (a) Punts inicial i final,
 (b) Descomposició de la
 recta real, (c) Intersecció
 del RL amb l'eix
 imaginari, (d) Punts de
 bifurcació.



2. Aquest lloc geomètric té $\max\{n_z, n_p\} = 2$ branques.
3. Les branques del RL són simètriques respecte de l'eix real (eix d'abscisses).
4. Atès que $2 = n_p > n_z = 1$, hi ha $n_p - n_z = 2 - 1 = 1$ branca que acaba a ∞ . El pendent de l'asíptota que li correspon val:

$$\Phi_A = \frac{(2q + 1)}{n_p - n_z} 180^\circ \quad q = 0.$$

Fent els càlculs per a $q = 0$, s'obté $\Phi_{A|q=0} = 180^\circ$.

5. El centroide és

$$\sigma_A = \frac{\sum_{l=1}^{n_p} p_l - \sum_{i=1}^{n_z} z_i}{n_p - n_z} = \frac{0.9 + 0.8 + 2}{1} = 3.7$$

Donat que l'asíptota és horitzontal, el centroide no aporta cap tipus d'informació.



6. *Punts de la recta real que pertanyen al RL. Cal adonar-se que els pols i els zeros estan ordenats de la forma següent: $z_1 < p_2 < p_1$. Aleshores, si $r > p_1$, no pertany al lloc geomètric perquè el nombre de zeros o pols a la seva dreta és zero (parell); el mateix passa amb els punts de l'interval $(-2, 0.8)$ (en aquest cas, a la seva dreta hi ha dos pols). En canvi, els punts de $(-\infty, -2) \cup (0.8, 0.9)$ tenen, a la seva dreta un nombre imparell de zeros o pols (3 i 1, respectivament). Això es visualitza a la subfigura 9.4.b.*
7. *Angles de sortida i arribada. Atès que hi ha dues branques que surten de pols reals i inicialment evolucionen sobre els reals, els angles de sortida són 0° per a $p_1 = 0.8$ i 180° per a $p_2 = 0.9$. Un argument semblant permet establir que l'angle d'arribada a $z_1 = -2$ és 0° .*

En aquest exemple, aquesta regla no aporta cap informació addicional.

8. *Intersecció del RL amb l'eix imaginari. Per determinar la intersecció del RL amb l'eix imaginari, primer cal construir la funció de transferència de llaç tancat:*

$$\frac{k \cdot G_{OL}(z)}{1 + k \cdot G_{OL}(z)} = \frac{(z+2)k}{(z+2)k + (z-0.9)(z-0.8)}$$

i, amb el polinomi del denominador,

$$(z+2)k + (z-0.9)(z-0.8) = z^2 + (-1.7+k) \cdot z + 0.72 + 2 \cdot k$$

es construeix la taula del criteri de Routh:

R_2	1	$0.72 + 2k$
R_1	$-1.7 + k$	
R_0	$\frac{(0.72 + 2k)(-1.7 + k)}{-1.7 + k} = 0.72 + 2k$	

Per tal de forçar una singularitat, cal igualar a zero els elements de la primera columna:

- $-1.7 + k = 0$, que correspon a $k = 1.7$; per a aquest valor, el polinomi de llaç tancat és:*

$$z^2 + 4.12 = 0$$

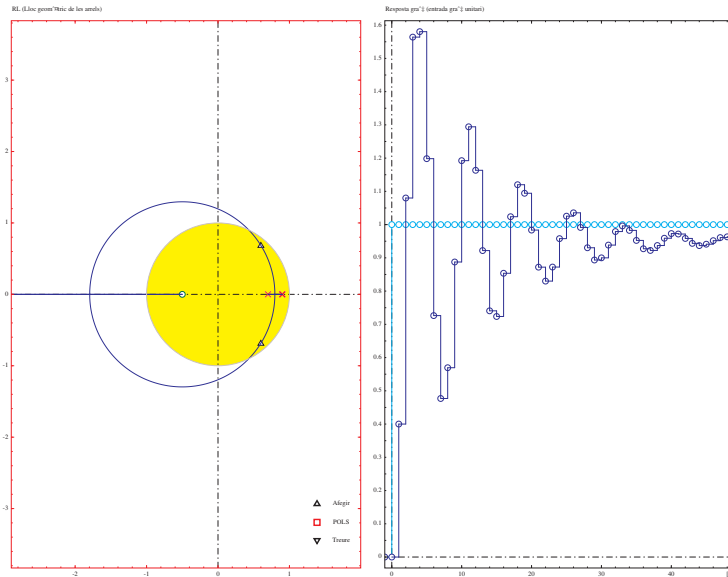
que presenta les arrels $z = \pm 2.02978j$, que, com era d'esperar, estan sobre l'eix imaginari.

- $0.72 + 2k = 0$, que correspon a $k = -0.36$. Atès que el RL únicament es construeix per a valors positius de k , aquesta singularitat no dona informació sobre el RL.*

Així, el RL talla únicament l'eix imaginari a $z = \pm 2.02978j$. Això es visualitza a la subfigura 9.4.c.



Fig. 9.5
LGRtd: Lloc geomètric de l'exemple 64 i resposta temporal per a un valor (indicar en triangles sobre el RL).



9. Punts de bifurcació. Calculant l'equació (9.7):

$$\frac{dk}{dz} = -\frac{d \frac{z^2 - 1.7z + 0.72}{z+2}}{dz} = \frac{(z-0.9)(z-0.8) - (z+2)(2 \cdot z - 1.7)}{(z+2)^2} = \frac{z^2 + 4 \cdot z - 4.12}{(z+2)^2}$$

i igualant el numerador a zero:

$$z^2 + 4 \cdot z - 4.12 = 0$$

s'obté $z_{b1} = -4.8496$, $z_{b2} = 0.8495$. S'observa que tots dos pertanyen al RL, fet que es visualitza a la subfigura 9.4.d.

La Figura 9.5, a l'esquerra, mostra el lloc geomètric resultant. Com es pot observar, les propietats del lloc geomètric permeten construir qualitativament el RL, encara que un dibuix acurat requereix l'ús d'eines de càlcul.



LGRtd:

1. El triangle correspon als pols de llaç tancat per un valor de k . La resposta al graó del sistema de llaç tancat per a aquest valor es mostra a la figura de la dreta. Interaccioneu amb ell i comproveu la resposta temporal per als diferents de k .
2. Col·loqueu el triangle sobre el cercle unitat. Què passa amb la resposta temporal?
3. Activeu *Dibuixar punts de bifurcació*. Comproveu que estan situats on s'ha calculat.
4. Analitzeu com canvia el RL en moure el zero del sistema de llaç obert.
5. Determineu quin és el mínim error que es pot assolir si es vol una resposta al graó que no sigui oscil·lant.


Exemple 65 Donat el sistema

$$G(z) = \frac{625}{625z^4 - 256}$$

construïu el RL emprant les propietats del lloc geomètric.

En aquest sistema, $n_z = 0$, $i n_p = 4$. Els pols de la funció de transferència del sistema en llaç obert, que són $p_1 = -0.8$, $p_2 = 0.8$, $p_3 = 0.8j$ i $p_4 = -0.8j$.

1. Punts inicial i final.

- Inicial: s'obté per a $k = 0$. El RL comença als pols del sistema en llaç obert.
- Final: atès que no hi ha zeros, totes les branques del lloc geomètric acabaran a l'infinit.

 2. Aquest lloc geomètric té màx $\{n_z, n_p\} = 4$ branques.

3. Les branques del RL són simètriques respecte de l'eix real (eix d'abscisses).

 4. Atès que $n_p > n_z$, hi ha $n_p - n_z = 4$ branques que acaben a ∞ , seguint 4 asímptotes, el pendent de les quals és:

$$\Phi_A = \frac{(2q+1)}{n_p - n_z} 180^\circ \quad q = 0, 1, 2, 3$$

Fent els càlculs per a $q = 0, 1, 2, 3$, s'obté $\Phi_{A|q=0} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$, $\Phi_{A|q=1} = \frac{3 \cdot 180}{4} = 135^\circ$, $\Phi_{A|q=2} = \frac{5 \cdot 180}{4} = 225^\circ$ i $\Phi_{A|q=3} = \frac{7 \cdot 180}{4} = 315^\circ$.

5. El centroide és

$$\sigma_A = \frac{\sum_{l=1}^{n_p} p_l - \sum_{i=1}^{n_z} z_i}{n_p - n_z} = \frac{-0.8 + 0.8 + 0.8j - 0.8j}{4} = 0.$$

 6. Punts de la recta real que pertanyen al RL. Atès que no hi ha zeros i els pols reals són 0.8 i -0.8 , per tant l'interval de la recta real que pertany al RL és $[-0.8, 0.8]$.

7. Angles de sortida i arribada. Per tal de saber els angles de sortida del pols, s'aplica la condició d'argument en els diferents pols.

– $z = 0.8$.

$$\begin{aligned} \angle G_{OL}(0.8 + \epsilon e^{\theta j}) &= \angle \frac{1}{(z-0.8)(z+0.8)(z+0.8j)(z-0.8j)} \Big|_{z=0.8+\epsilon e^{\theta j}} \\ &= -\angle(0.8 + \epsilon e^{\theta j} - 0.8) - \angle(0.8 + \epsilon e^{\theta j} + 0.8) \\ &\quad -\angle(0.8 + \epsilon e^{\theta j} + 0.8j) - \angle(0.8 + \epsilon e^{\theta j} - 0.8j). \end{aligned}$$



En els termes de la forma $\angle(x + \epsilon e^{\theta j})$, amb $x \neq 0$, l'angle estarà fixat per x , ja que $\epsilon \rightarrow 0$; per tant, en aquests casos, fem $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} &= -\angle(\epsilon e^{\theta j}) - \angle(1.6) - \angle(0.8 + 0.8j) - \angle(0.8 - 0.8j) \\ &= -\theta - 0 - \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\theta. \end{aligned}$$

Així $-\theta = \pi i$, per tant, $\theta = \pi$.

$$-z = -0.8.$$

$$\begin{aligned} \angle G_{OL}(-0.8 + \epsilon e^{\theta j}) &= \angle \frac{1}{(z-0.8)(z+0.8)(z+0.8j)(z-0.8j)} \Big|_{z=-0.8+\epsilon e^{\theta j}} \\ &= -\angle(-0.8 + \epsilon e^{\theta j} - 0.8) - \angle(-0.8 + \epsilon e^{\theta j} + 0.8) \\ &\quad -\angle(-0.8 + \epsilon e^{\theta j} + 0.8j) - \angle(-0.8 + \epsilon e^{\theta j} - 0.8j) \\ &= -\angle(-1.6) - \angle(\epsilon e^{\theta j}) - \angle(-0.8 + 0.8j) - \angle(-0.8 - 0.8j) \\ &= -\pi - \theta - \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= -\pi - \theta. \end{aligned}$$

Així, $-\pi - \theta = \pi i$, per tant, $\theta = 0$.

$$-z = -0.8j.$$

$$\begin{aligned} \angle G_{OL}(-0.8j + \epsilon e^{\theta j}) &= \angle \frac{1}{(z-0.8)(z+0.8)(z+0.8j)(z-0.8j)} \Big|_{z=-0.8j+\epsilon e^{\theta j}} \\ &= -\angle(-0.8j + \epsilon e^{\theta j} - 0.8) - \angle(-0.8j + \epsilon e^{\theta j} + 0.8) \\ &\quad -\angle(-0.8j + \epsilon e^{\theta j} + 0.8j) - \angle(-0.8j + \epsilon e^{\theta j} - 0.8j) \\ &= -\angle(-0.8 - 0.8j) - \angle(0.8 - 0.8j) - \angle(\epsilon e^{\theta j}) - \angle(-1.6j) \\ &= -\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \theta - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\theta + \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Així, $-\theta + \frac{3\pi}{2} = \pi i$, per tant, $\theta = -\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.



$$-z = 0.8j.$$

$$\begin{aligned} \angle G_{OL}(-0.8j + \epsilon e^{\theta j}) &= \angle \frac{1}{(z-0.8)(z+0.8)(z+0.8j)(z-0.8j)} \Big|_{z=0.8j+\epsilon e^{\theta j}} \\ &= -\angle(0.8j + \epsilon e^{\theta j} - 0.8) - \angle(0.8j + \epsilon e^{\theta j} + 0.8) \\ &\quad - \angle(0.8j + \epsilon e^{\theta j} + 0.8j) - \angle(0.8j + \epsilon e^{\theta j} - 0.8j) \\ &= -\angle(-0.8 + 0.8j) - \angle(0.8 + 0.8j) - \angle(1.6j) - \angle(\epsilon e^{\theta j}) \\ &= -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \theta \\ &= -\theta - \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Així, } -\theta - \frac{3\pi}{2} = \pi i, \text{ per tant, } \theta = -\pi - \frac{3\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

8. Intersecció del **RL** amb l'eix imaginari. Per tal de determinar la intersecció del **RL** amb l'eix imaginari, cal, en primer lloc, construir la funció de transferència de llaç tancat:

$$\frac{k \cdot G_{OL}(z)}{1 + k \cdot G_{OL}(z)} = \frac{625k}{625 \cdot z^4 - 256 + 625 \cdot k}.$$

i amb el polinomi del denominador

$$625 \cdot z^4 - 256 + 625 \cdot k$$

es construeix la taula del criteri de Routh:

$$\begin{array}{l} R_4 : \\ R_3 : \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 625 & 0 & -256 + 625k \\ 0 & 0 & \end{array} \right.$$

Com es pot observar, hi ha una fila que s'anul·la totalment; això és normalment un indicador de l'existència d'arrels sobre l'eix imaginari. Per continuar construint la taula, la fila R_3 es construeix a partir de la derivada del polinomi R_4 :

$$\begin{array}{l} R_4 : \\ R_3 : \\ R_2 : \\ R_1 : \\ R_0 : \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 625 & 0 & -256 + 625k \\ 2500 & 0 & \\ 256 - 625k & -256 - 625k & \\ 2500 & & \\ -256 + 625k & & \end{array} \right.$$

Per forçar l'aparició de singularitats, s'igualava el primer element de la fila R_2 a zero:

$$256 - 625k = 0 \rightarrow k = \frac{256}{625}.$$



Per a aquest valor de k , s'obté que $z = 0$ és un zero del denominador, de multiplicitat 4.

A més de l'observació de la taula del criteri de Routh, es dedueix que a l'interval $k \in (0, \frac{256}{625})$ hi ha un pol en el semiplà dret, mentre que a $k \in (\frac{256}{625}, \infty)$ n'hi ha 2.

Podem observar que els punts corresponents a $k = 0$ ($z = \pm 0.8j$) i $k = \frac{256}{625}$ ($z = 0$) pertanyen a l'eix imaginari, el qual correspon a un punt de bifurcació, atès que hi ha una arrel de multiplicitat 4. Donat que l'angle de sortida del punt $0.8j$ és $-\frac{\pi}{2}$ i el d'arribada a 0 és $\frac{\pi}{2}$ (apartat següent), sembla que el segment de l'eix imaginari entre aquests dos punts també pertany al lloc geomètric. Per comprovar-ho, posem la solució $z = \rho j, \rho \in \mathbb{R}$ a l'equació característica; així:

$$625\rho^4 - 256 + 625 \cdot k = 0 \rightarrow \rho^4 = \frac{256}{625} - k$$

atès que el cantó esquerre és positiu, el de la dreta també ho ha de ser. Així, trobarem solució per valor de $k \in [0, \frac{256}{625}]$, que correspon al segment de l'eix imaginari entre $-0.8j$ i $0.8j$.

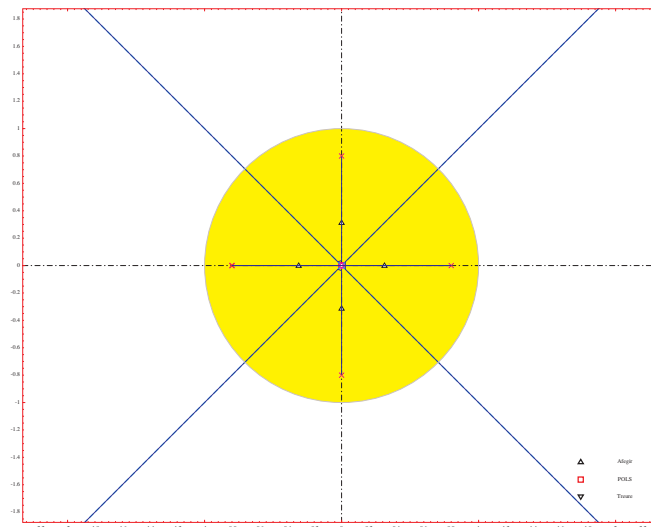
9. Punts de bifurcació. Calculant l'equació (9.7):

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{G_{OL}(z)} = -4z^3$$

i, forçant el numerador a zero, s'obté $z = 0$. Per tant els punts de multiplicitat més gran que 1 són $z = 0$. Atès que en les bifurcacions hi ha equidistribució i que el segment de la recta real a la dreta i a l'esquerra del punt de bifurcació pertanyen al RL, els angles d'entrada són $(0, \frac{\pi}{2}, \pi, \pi - \frac{\pi}{2})$.

Fig. 9.6
Exemple 65:
Lloc geomètric de les
arrels de

$$G(z) = \frac{625}{625z^4 - 256}$$





La Figura 9.6 mostra el RL del sistema estudiat. Observeu que les quatre branques del RL inicien el seu recorregut en els pols de llaç obert. A mesura que augmenta en valor de k , van evolucionant fins a l'origen, i posteriorment tendeixen cap a l'infinít sobre les asímptotes.

Bibliografia

- [1] Gregory Walter Evans. Bringing root locus to the classroom. the story of walter r. evans and his textbook control-system dynamics. *IEEE Control Systems Magazine*, 24(6):74–81, December 2004.
- [2] Annraoi de Paor. The root locus method: famous curves, control designs and non-control applications. *International Journal of Electrical Engineering Education*, 37(4):344–356, October 2000.
- [3] Panagiotis Tsiotras. The relation between the 3-d bode diagram and the root locus. *IEEE Control Systems Magazine*, 25(1):88–100, February 2005.
- [4] Walter R. Evans. *Spirule Instruction*.
- [5] Gerald Berman and R. G. Stanton. The asymptotes of the root locus. *SIAM Review*, 5(3):209–218, July 1963.
- [6] Herve Chapellat, Mohamed Mansour, and Shankar P. Bhattacharyya. Elementary proofs of some classical stability criteria. *IEEE Transactions on Education*, 33(3): 232–239, August 1990.



Exercicis proposats

1. Determineu si els punts $z_1 = 1 + j$ i $z_2 = -5$ pertanyen al RL del sistema

$$G_{OL}(z) = \frac{z+1}{z^2+0.1z+1}$$

2. Determineu si el punt $z = -0.8$ pertany al lloc geomètric de

$$G_{OL}(z) = \frac{z^2 - 0.1z - 0.42}{z^3 - 1.6z^2 + 0.78z - 0.18}$$

i en cas afirmatiu, determineu per quin valor de k és arrel de llaç tancat.

3. Fent ús de les propietats del RL, dibuixeu aproximadament el RL pel sistema següent:

$$G_{OL}(z) = \frac{1}{z(z+0.4)(z+0.5)}$$

4. Fent ús de les propietats del RL, dibuixeu aproximadament el RL pel sistema següent:

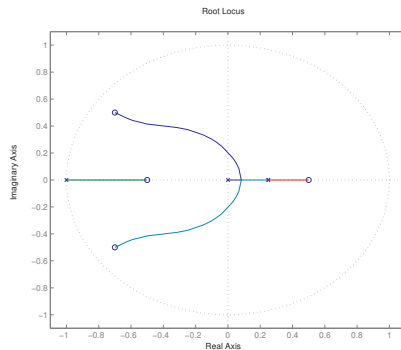
$$G_{OL}(z) = \frac{5z-1}{z(z+1)(z-0.25)^2}$$

5. La subfigura 9.7.a mostra el RL del sistema

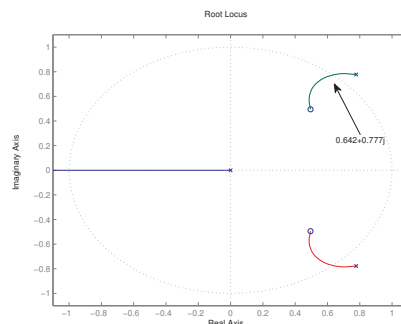
$$G_{OL}(z) = \frac{z^4 + 1.4z^3 + 0.49z^2 - 0.35z - 0.185}{z^4 + 0.5z^3 - 0.4375z^2 + 0.0625z}$$

A partir de la seva observació determineu el rang de valors de k que fa estable el sistema de llaç tancat. És possible trobar algun valor de k que faci que el sistema de llaç tancat presenti una resposta no oscil·lant

Fig. 9.7
RL dels exercicis.



(a)



(b)



6. La subfigura 9.7.b mostra el RL del sistema

$$G_{OL}(z) = \frac{z^2 - 0.9899z + 0.49}{z^3 - 1.556z^2 + 1.21z}$$

Determineu el rang de valors de k que fa estable el sistema de llaç tancat.

7. Demostreu que, donat un sistema de grau relatiu 1, sempre és possible trobar un valor de k que fa que el sistema de llaç tancat sigui inestable.
8. Donat el sistema

$$\frac{1}{z - \rho}, \quad \text{amb } |\rho| > 1,$$

determineu el rang de valors de k que faria el sistema de llaç tancat estable. Determineu si, en aquest rang de valors, el sistema de llaç tancat oscil·la o no.

9. Donat el sistema

$$G_{OL}(z) = \frac{(z + \alpha)(z + 0.8)}{z(z - 1)},$$

analitzeu si és possible trobar un valor de k que faci el sistema de llaç tancat inestable en funció del valor de α .

10. Donat el sistema

$$G_{OL}(z) = \frac{(z + \alpha)(z + 0.8)}{(z + \beta)(z - 0.9)(z - 0.8)},$$

determineu els valors de α i β per tal que el punt $z_d = 0.5 + 0.5j$ sigui pol de llaç tancat.

→ 10



Anàlisi d'estabilitat en el camp freqüencial

El criteri de Nyquist permet caracteritzar l'estabilitat d'un sistema de llaç tancat a partir de la resposta freqüencial de llaç obert. Aquest marc conceptual és un dels que s'utilitzen més, tant en el disseny com en l'anàlisi dels sistemes de control.

El fet que l'estabilitat del sistema de llaç tancat depengui del comportament del sistema de llaç obert és especialment interessant, ja que permet manipular el sistema de llaç obert de forma senzilla per tal de garantir el comportament de llaç tancat volgut.

En aquest capítol, es presenta el criteri de Nyquist, es mostren exemples de la seva aplicació en l'anàlisi de sistemes de control, es presenta el criteri de Bode com una versió simplificada del criteri de Nyquist, amb exemples de la seva aplicació, i finalment es presenten el marge de fase i el marge de guany com a eines d'anàlisi de l'estabilitat relativa.

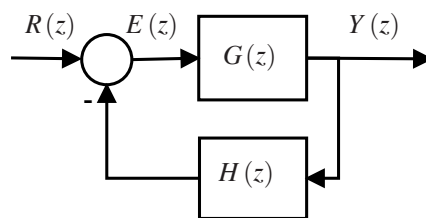


Fig. 10.1
Sistema de llaç tancat.

10.1. Criteri de Nyquist

Per tal de determinar l'estabilitat d'un sistema de llaç tancat com el de la Figura 10.1, cal analitzar el pols de la funció de transferència:

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}. \quad (10.1)$$



En particular, cal determinar si $T(z)$ presenta pols fora del cercle unitat. És important adonar-se que $G(z)$ i $H(z)$ són funcions de transferència conegudes i, per tant, els seus pols i zeros també ho són. En aquestes condicions, l'aplicació del principi de l'argument (apèndix A) proporciona informació sobre els pols i zeros de $1 + G(z)H(z)$ a l'interior d'una regió \mathcal{D} . Aquest principi indica que, donada una regió finita del pla complex, \mathcal{D} , aleshores:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\partial D} \frac{(G(z)H(z))'}{1 + G(z)H(z)} = P - Z, \quad (10.2)$$

on ∂D^1 és la frontera de \mathcal{D} recorreguda en sentit horari, P és el nombre de pols de $1 + G(z)H(z)$ continguts en \mathcal{D} i Z és el nombre de zeros de $1 + G(z)H(z)$ continguts en \mathcal{D} . Cal tenir present que, d'acord amb el *principi de l'argument*, el terme $\frac{1}{2\pi j} \int_{\partial D} \frac{(G(z)H(z))'}{1 + G(z)H(z)}$ correspon al nombre de voltes que $1 + G(z)H(z)$ avaluat sobre ∂D dona al voltant de l'origen en sentit horari.

Per analitzar l'estabilitat d'un sistema com el de la Figura 10.1, convé saber si hi ha pols a l'exterior del cercle unitat.

Amb aquest objectiu, es fan les consideracions següents:

- El nombre de pols de $G(z)H(z)$ és igual al nombre de zeros de $1 + G(z)H(z)$; en els dos casos, és n i coincideix amb l'ordre de $G(z)H(z)$.
- Els pols de $G(z)H(z)$ són els mateixos que els de $1 + G(z)H(z)$.
- En la hipòtesi que no hi ha zeros de $1 + G(z)H(z)$ ni pols de $G(z)H(z)$ sobre la circumferència unitat, es verifica que:
 - $Z_{in} + Z_{out} = n$, on Z_{in} és el nombre de zeros de $1 + G(z)H(z)$ a l'interior del cercle unitat i Z_{out} és el nombre de zeros de $1 + G(z)H(z)$ que estan fora del cercle unitat.
 - $P_{in} + P_{out} = n$, on P_{in} és el nombre de pols de $G(z)H(z)$ a l'interior del cercle unitat i P_{out} és el nombre de pols de $G(z)H(z)$ fora del cercle unitat.
- En cas que s'agafi \mathcal{D} com el cercle unitat i s'apliqui (10.2), s'obtindrà:

$$N = P_{in} - Z_{in}$$

on N correspon al nombre de voltes que fa $1 + G(z)H(z)$ al voltant de l'origen en recórrer z el cercle unitat. Això es pot reescriure emprant les igualtats anteriors de la forma:

$$N = (n - P_{out}) - (n - Z_{out}) = Z_{out} - P_{out} \rightarrow Z_{out} = N + P_{out}$$

Així, és possible lligar el nombre de zeros de $1 + G(z)H(z)$ fora del cercle amb el nombre de pols de $G(z)H(z)$ fora del cercle i el nombre de voltes que fa $1 + G(z)H(z)|_{z=\partial D}$ al voltant de l'origen.

¹ L'aplicació del principi de l'argument implica que no hi hagi ni pols ni zeros de $G(z)H(z)$ sobre ∂D .



Així, sigui \mathcal{D} el cercle unitat. La circumferència unitat pot parametritzar-se de la forma:

$$\partial D = \{z \in \mathbb{C} | e^{j\theta} \theta \in [-\pi, \pi]\}.$$

Aleshores:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\partial D} \frac{G(z)H(z)'}{1+G(z)H(z)} = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{G(e^{j\theta})H(e^{j\theta})'}{1+G(e^{j\theta})H(e^{j\theta})} d\theta = \frac{1}{2\pi j} \int_{N_y} \frac{1}{z - (-1)}$$

on N_y correspon a la corba $1 + G(e^{j\theta})H(e^{j\theta})$, amb $\theta \in [0, 2\pi]$, i

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{N_y} \frac{1}{z - (-1)}$$

és el nombre de voltes en sentit horari que fa N_y al voltant del punt $-1 + 0j$.

Exemple 66 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z) = \frac{5z+2}{5z-4} \quad i \quad H(z) = 1,$$

determineu si presenta pols fora del cercle unitat.

Observeu que el pol de $G(z)H(z)$ és $z = \frac{4}{5}$, que està a l'interior del cercle unitat ($P=0$); la Figura 10.2 següent mostra l'evolució de $G(e^{j\theta})$ en recórrer $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Observeu que la corba no envolta el punt -1 ($N=0$) i, per tant:

$$Z = P + N = 0 + 0 = 0$$

cosa que implica que $\frac{1}{1+G(z)H(z)}$ no presenta pols fora del cercle unitat. Es pot comprovar que el pol de llaç tancat està en 0.2 i, per tant, a l'interior del cercle unitat.

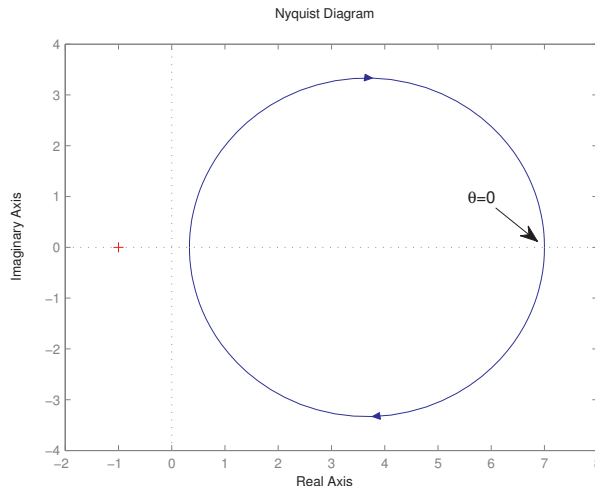


Fig. 10.2 Diagrama polar del sistema de l'Exemple 66.



Exemple 67 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z) = \frac{z-0.3}{(z+0.2)(z+0.7)} \quad i \quad H(z) = \frac{1}{z-1.1},$$

determineu si presenta pols fora del cercle unitat.

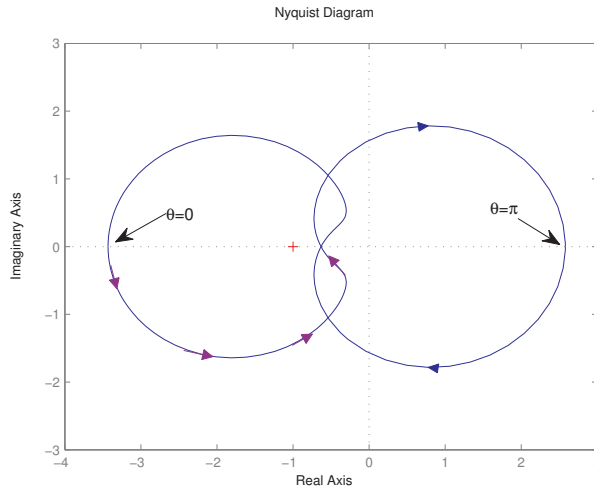
Observeu que els pols de $G(z)H(z)$ són -0.2 , -0.7 i 1.1 , un d'ells és fora del cercle unitat i, per tant, $P = 1$. La Figura 10.3 mostra l'evolució de $G(e^{j\theta})$ en recórrer $\theta \in [0, 2\pi]$.

Observeu que la corba envolta el punt -1 una vegada en sentit antihorari ($N = -1$) i, per tant:

$$Z = N + P = -1 + 1 = 0$$

cosa que implica que $\frac{1}{1+G(z)H(z)}$ no presenta pols fora del cercle unitat. Es pot comprovar que els pols de laç tancat són 0.7703 i $-0.2852 \pm 0.7128i$, que estan a l'interior del cercle unitat.

Fig. 10.3
Diagrama polar del sistema de l'Exemple 67.



En ocasions, la funció $G(z)H(z)$ presenta pols sobre el cercle unitat; en aquests casos, no és possible aplicar el procediment anterior i cal modificar la corba. Seguint el mateix principi, es construeix una corba que recorre el cercle unitat en les zones on no hi ha zeros, i a les proximitats dels pols s'envolta per fora, com s'il·lustra a la Figura 10.4; això es fa amb arcs de cercle de radi ϵ , amb $\epsilon \rightarrow 0$.

Definició 52 Donada la circumferència unitat:

$$\mathcal{C} = \{e^{j\theta} \mid \theta \in [-\pi, \pi]\},$$

es defineix l'arc de circumferència:

$$\mathcal{C}_{\theta^1, \theta^2} = \{e^{j\theta} \mid \theta \in [\theta^1, \theta^2]\}.$$

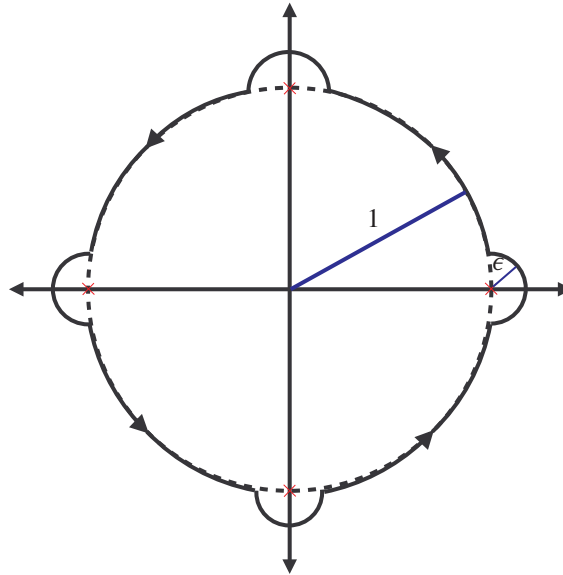


Fig. 10.4
Contorn de Nyquist en cas de sistemes amb singularitats sobre el cercle unitat.

Es defineix també una circumferència de radi ϵ centrada en $e^{j\alpha}$:

$$\mathcal{C}_{\epsilon,\alpha} = \{e^{j\alpha} + \epsilon \cdot e^{j\theta} \mid \theta \in [-\pi, \pi]\}.$$

Si ϵ és prou petit, es pot definir l'arc de circumferència següent:

$$\rho_{\epsilon,\alpha} = \{e^{j\alpha} + \epsilon \cdot e^{j\theta} \mid \theta \in [\alpha_i, \alpha_f] \text{ tal que } |e^{j\alpha} + \epsilon \cdot e^{j\theta}| \geq 1\} \quad (10.3)$$

que correspon a l'arc de circumferència de $\mathcal{C}_{\epsilon,\alpha}$ que queda fora del cercle unitat. Complementàriament, es defineixen els angles $\theta_{\epsilon,\alpha}^1$ i $\theta_{\epsilon,\alpha}^2$ de la forma següent:

$$e^{j\theta_{\epsilon,\alpha}^k} = e^{j\alpha} + \epsilon \cdot e^{j\alpha_p}, \text{ amb } \theta_{\epsilon,\alpha}^k \in [-\pi, \pi), \theta_{\epsilon,\alpha}^1 < \theta_{\epsilon,\alpha}^2$$

on $k = \{1, 2\}$ i $p = \{i, f\}$.

Definició 53 (Contorn de Nyquist) Abans de definir el diagrama de Nyquist, es defineix el contorn de Nyquist:

- Si $G(z)H(z)$ no presenta arrels sobre la circumferència unitat de pla z ; aleshores, el contorn de Nyquist es defineix de la forma:

$$\partial D_{Ny} = \{e^{j\theta} \mid \theta \in [-\pi, \pi]\}.$$

- Si $G(z)H(z)$ presenta p pols diferents² sobre la circumferència unitat en $z_k = e^{j\theta_k}$, amb $\theta_k \in [-\pi, \pi)$ i $\theta_k \leq \theta_{k+1}$, aleshores el contorn de Nyquist es defineix com la unió de diferents corbes (Figura 10.4).

² En cas que un pol sigui de multiplicitat més gran que 1, només s'han de tenir en compte una vegada.



En cas que $\theta_1 = -\pi$.

$$\partial D_{Ny} = \rho_{\epsilon, -\pi} \cup C_{[\theta_{\epsilon, -\pi}^1, \theta_{\epsilon, \theta_2}^1]} \cup \rho_{\epsilon, \theta_2} \cup C_{[\theta_{\epsilon, \theta_2}^2, \theta_{\epsilon, \theta_3}^1]} \cup \rho_{\epsilon, \theta_3} \cup C_{[\theta_{\epsilon, \theta_3}^2, \theta_{\epsilon, \theta_4}^1]} \cup \dots \cup C_{[\theta_{\epsilon, \theta_p}^2, \theta_{\epsilon, -\pi}^2]}.$$

En cas contrari:

$$\partial D_{Ny} = C_{[-\pi, \theta_{\epsilon, \theta_2}^1]} \cup \rho_{\epsilon, \theta_2} \cup \dots \cup \rho_{\epsilon, \theta_p} \cup C_{[\theta_{\epsilon, \theta_p}^2, \pi]} \quad \text{amb } \epsilon \rightarrow 0.$$

Definició 54 (Diagrama de Nyquist) S'anomena diagrama de Nyquist de $G(z)H(z)$ la corba que s'obté en avaluar $G(z)H(z)$ sobre el contorn de Nyquist, ∂D_{Ny} .

Comentari 18 En cas que $G(z)H(z)$ presenti pols sobre la circumferència unitat, $z = e^{j\theta_k}$, aleshores el diagrama de Nyquist al voltant de $\theta = \theta_k$ correspon a la corba:

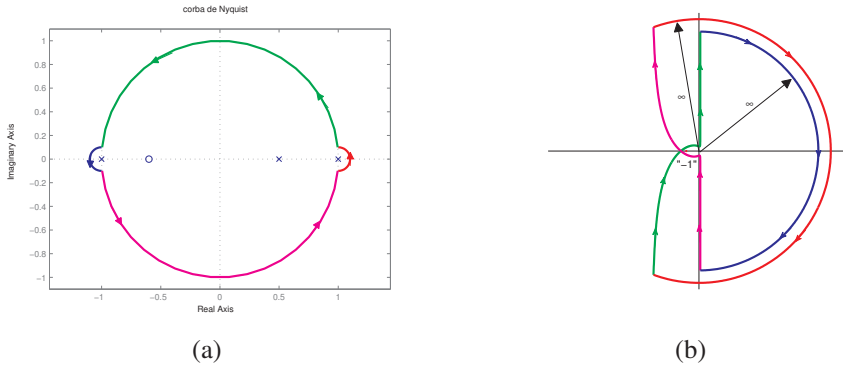
$$G(e^{j\theta_k} + \epsilon e^{j\alpha})H(e^{j\theta_k} + \epsilon e^{j\alpha}) = \frac{K(e^{j\theta_k} + \epsilon e^{j\alpha})}{(e^{j\theta_k} + \epsilon e^{j\alpha} - e^{j\theta_k})^m} \quad (10.4)$$

on $K(z)$ és una funció que no conté pols ni zeros en $e^{j\theta_k}$ i m és la multiplicitat dels pols en $e^{j\theta_k}$ de $G(z)H(z)$. Per $\epsilon \rightarrow 0$, (10.4), correspon a: $\frac{K(e^{j\theta_k})}{\epsilon^m} e^{-j \cdot m \cdot \alpha}$, amb $\alpha \in [\theta_k - \pi, \theta_k + \pi]$, que correspon a la corba:

$$\infty \cdot e^{j(\angle K(e^{j\theta_k}) - m \cdot \theta_k - m \cdot \beta)}.$$

Aquesta és una corba que, en recórrer β entre $-\pi$ i π , dóna m semivoltes en sentit horari sobre l'infinit, començant en un punt amb mòdul infinit i fase $\angle K(e^{j\theta_k}) - m \cdot \theta_k + m \cdot \pi$.

Fig. 10.5
Contorn i diagrama de Nyquist de l'Exemple 68.



Exemple 68 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z) = \frac{z + 0.6}{(z + 1)(z - 1)(z - 0.5)} \quad i \quad H(z) = 1,$$

determineu si presenta pols fora del cercle unitat.

Observeu que els pols de $G(z)H(z)$ són -1 , 1 i 0.5 , dos d'ells sobre la circumferència unitat; per tant, cal aplicar la segona opció en la construcció de la corba de Nyquist (subfigura 10.5.a).

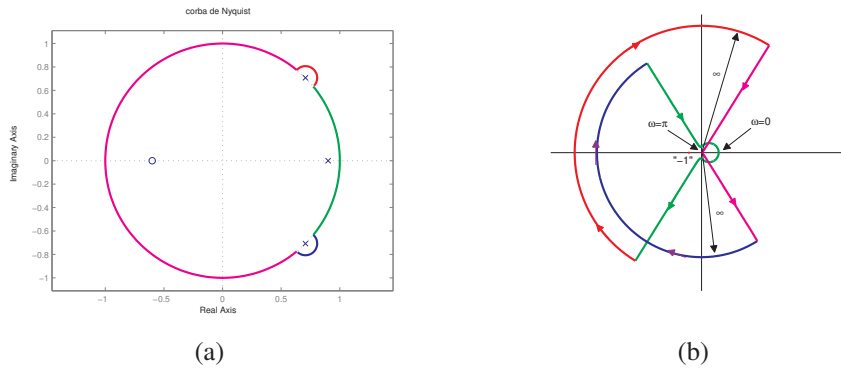


Fig. 10.6 Contorn i diagrama de Nyquist de l'Exemple 69.

Amb aquesta corba, s'obté $P = 0$. La subfigura 10.5.b mostra l'evolució de $G(e^{j\theta})$ en recórrer el contorn de Nyquist, és a dir, el diagrama de Nyquist.

Observeu que la corba envolta el punt -1 dues vegades en sentit horari i, per tant:

$$Z = N + P = 2 + 0 = 2$$

cosa que implica que $\frac{1}{1+G(z)H(z)}$ presenta dos pols fora del cercle unitat. Es pot comprovar que els pols de laç tancat són $-0.8897, 0.6948 \pm 0.8681i$ i que els dos darrers estan fora del cercle unitat.

Exemple 69 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z) = \frac{0.05(z+0.6)}{(z-0.9)(z^2-1.414z+1)} \quad i \quad H(z) = 1,$$

determineu si presenta pols fora del cercle unitat.

Observeu que els pols de $G(z)H(z)$ són 0.9 i $e^{\pm \frac{\pi}{4}j}$. Dos d'ells són sobre la circumferència unitat; per tant, cal aplicar la segona opció en la construcció del contorn de Nyquist (subfigura 10.6.a).

Amb aquest corba, s'obté $P = 0$. La subfigura 10.6.b mostra l'evolució de $G(e^{j\theta})$ en recórrer del contorn de Nyquist, és a dir, el diagrama de Nyquist.

Observeu que la corba envolta el punt -1 dues vegades en sentit horari i, per tant:

$$Z = N + P = 2 + 0 = 2$$

cosa que implica que $\frac{1}{1+G(z)H(z)}$ presenta dos pols fora del cercle unitat. Es pot comprovar que els pols de laç tancat són $0.7749 \pm 0.7332i$ i 0.7644 , i els dos primers estan fora del cercle unitat.

Comentari 19 El diagrama de Nyquist és simètric respecte de l'eix real. Observeu que $G(z)H(z)$ és una funció racional de coeficients reals:



$$G(a + bj)H(a + bj) = \overline{G(a - bj)H(a - bj)}.$$

Per aquest motiu, la informació continguda en el diagrama de Nyquist complet es pot obtenir a partir de l'avaluació de la part superior de ∂D_{Ny} sobre $G(z)H(z)$.

Comentari 20 Observeu que en el cas de sistemes $G(z)H(z)$ sense pols sobre la circumferència unitat la part superior de la corba de Nyquist correspon a:

$$G(e^{j\theta})H(e^{j\theta}), \theta \in [0, \pi] \text{ rad}$$

que correspon a la corba polar del sistema $G(z)H(z)$, és a dir, la resposta freqüencial de llaç obert.

En el cas de sistemes mostrejats, aquesta corba correspon a:

$$G(e^{j\omega T})H(e^{j\omega T}), \omega \in \left[0, \frac{\pi}{T}\right] \text{ rad/s}$$

on T és el període de mostratge.

Proposició 48 Criteri de Nyquist Donat un sistema com el de la Figura 10.1, i definint:

- **Z**, el nombre de zeros de $1 + G(z)H(z)$, el mòdul dels quals és més gran que 1 (nombre de pols inestables del sistema de llaç tancat).
- **P**, el nombre de pols de $G(z)H(z)$, el mòdul dels quals és més gran que 1 (nombre de pols inestables del sistema de llaç obert).
- **N**, el nombre de semivoltes que el diagrama de Nyquist que $G(z)H(z)$ dona entorn de $-1 + 0 \cdot j$, comptades en sentit horari.

Aleshores:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{P} + \mathbf{N}$$

Comentari 21 Per tal que un sistema com el de la Figura 10.1 sigui estable, cal que $Z = 0$.

Comentari 22 El criteri de Nyquist permet relacionar l'estabilitat de llaç tancat a partir d'informació de llaç obert, el nombre de pols inestables de llaç obert ($G(z)H(z)$) i el diagrama de Nyquist ($G(z)H(z)$), que correspon al diagrama polar de llaç obert.

Comentari 23 Encara que, per aplicar el criteri de Nyquist, únicament cal dibuixar el diagrama de Nyquist en recórrer la part superior de la corba de Nyquist, moltes eines computacionals, com el MATLAB, dibuixen les dues parts. Per tant, cal anar amb compte en interpretar aquestes gràfiques.

Comentari 24 En cas que el diagrama de Nyquist passi per sobre del punt $-1 + 0 \cdot j$, el principi de l'argument no es pot aplicar i, per tant, no és possible determinar quants pols fora del cercle unitari presenta el sistema de llaç tancat. El que sí que es pot dir és que el sistema de llaç tancat presenta, com a mínim, un pol sobre el cercle i, per tant, serà marginalment estable o inestable. Des del punt de vista pràctic, ambdues coses són similars.

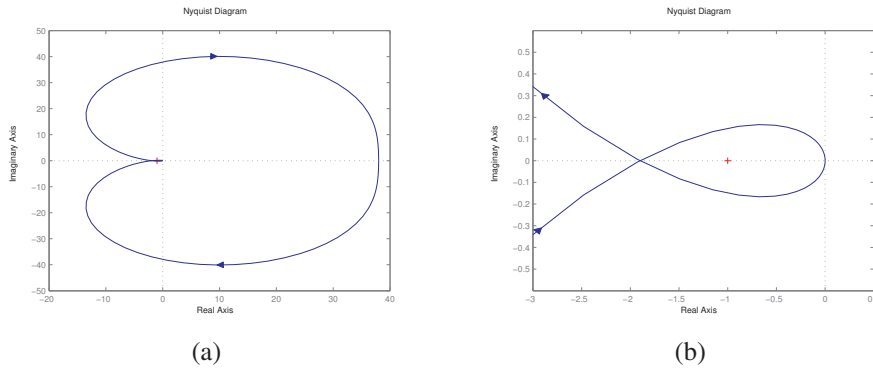


Fig. 10.7 Diagrama de Nyquist de l'Exemple 70 i detall.

Exemple 70 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z)H(z) = \frac{0.19z + 0.19}{z^2 - 1.89z + 0.9},$$

analitzeu l'estabilitat del sistema de llaç tancat.

Els pols de $G(z)H(z)$ són $0.9450 \pm 0.0835i$, estan a l'interior del cercle unitat i, per tant, $P = 0$. Per analitzar l'estabilitat de llaç tancat, es dibuixa la corba de resposta freqüencial del sistema de llaç obert, i emprant MATLAB s'obté la subfigura 10.7.a.

Es pot observar la simetria del diagrama, cosa que indica que s'ha dibuixat tota la corba de Nyquist i no únicament la part superior, és a dir, s'ha dibuixat la resposta freqüencial per a freqüències positives i negatives. Observeu que, per; $\theta = 0$, s'obté $z = 1$ i $G(1)H(1) = 38$; així, podem veure que el diagrama de Nyquist comença a la part dreta de la gràfica i recorre en sentit horari el pla z (sentit de les fletxes); podem verificar també que, per a $\theta = \pi$, s'obté $z = -1$ i $G(-1)H(-1) = 0$, de manera que el diagrama finalitza sobre l'origen. Amb aquesta representació gràfica, no resulta fàcil saber el nombre de semivoltes que es realitzen al voltant del punt $-1 + 0 \cdot j$. Per tant, cal fer una ampliació de la gràfica al voltant d'aquest punt (subfigura 10.7.b).

Com es pot observar, la corba fa dues semivoltes en sentit horari al voltant del punt -1 . Per aquest motiu, $N = 2$ i, finalment, $Z = P + N = 2$, cosa que indica que el sistema de llaç tancat presenta dos pols fora del cercle unitat.

Es pot comprovar fàcilment que els pols de llaç tancat són $0.8500 \pm 0.6062i$ i que són fora del cercle unitat.

Exemple 71 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

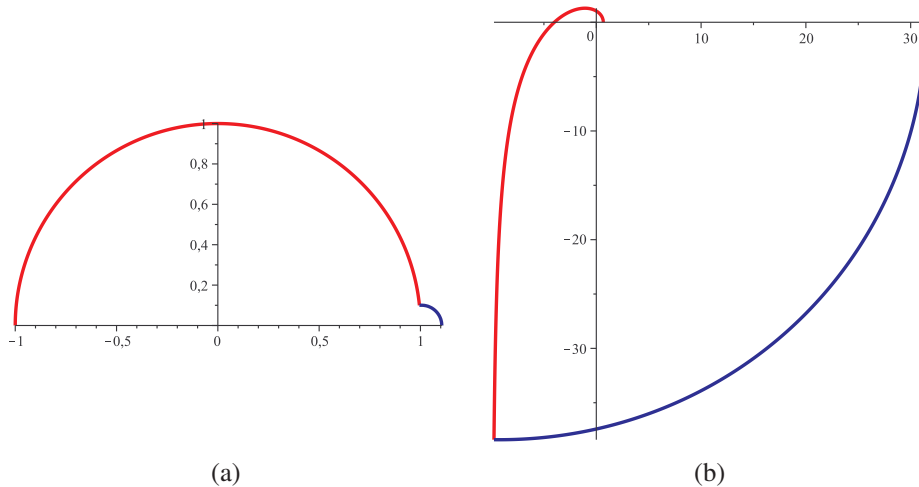
$$G(z)H(z) = \frac{4}{(z-1)(2z-1)},$$

analitzeu l'estabilitat del sistema de llaç tancat.

Els pols de $G(z)H(z)$ estan en $z = 1$ i $z = \frac{1}{2}$. Com que hi ha un pol sobre la circumferència unitat, cal aplicar la corba de Nyquist que envolta el pol per fora del cercle unitat. Aquest



Fig. 10.8
Corba i diagrama de Nyquist de l'Exemple 71.



pren la forma que es mostra a la subfigura 10.8.a. Observeu que únicament es dibuixa la part superior de la corba de Nyquist.

Com es pot veure a la subfigura 10.8.b, el diagrama de Nyquist consta de dues parts: en blau, el camí corresponent a $G(z)H(z)$ per a z sobre el quart de circumferència de radi ϵ , i, en vermell, el camí corresponent a $G(z)H(z)$ per als z de la circumferència unitat.

Quan ϵ tendeix a zero, la línia vermella comença amb una asymptota vertical i la blava s'ha transformat en un quart de circumferència de radi infinit, aleshores, $N = 2$. Observeu que, en aquest cas, cal comptar el nombre de semivoltes perquè estem considerant com a domini de freqüències l'interval $[0, \pi]$.

Atès que $P = 0$ i $N = 2$, el sistema de llaç tancat presenta dos pols fora del cercle unitat i, per tant, és inestable.

10.2. Criteri simplificat de Bode

En molts àmbits de l'enginyeria, s'utilitza el diagrama de Bode com a eina d'anàlisi del comportament del sistema. Per aquest motiu, és interessant poder aplicar el criteri de Nyquist sobre el diagrama de Bode [1, 2].

Encara que es pot aplicar per a tot tipus de planta [1], el criteri simplificat de Bode es sol emprar únicament amb plantes que no presenten pols fora del cercle unitat ($P = 0$ en l'aplicació del criteri de Nyquist). En aquest tipus de sistemes, el criteri de Nyquist es redueix a $Z = N$, és a dir, el nombre de pols fora del cercle unitat és igual al nombre de semivoltes que fa el diagrama de Nyquist al voltant del punt -1 .

Exemple 72 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z) = \frac{0.5(z - 0.8)}{z^2(z - 0.95)} \quad i \quad H(z) = 1,$$

determineu si presenta pols fora del cercle unitat.

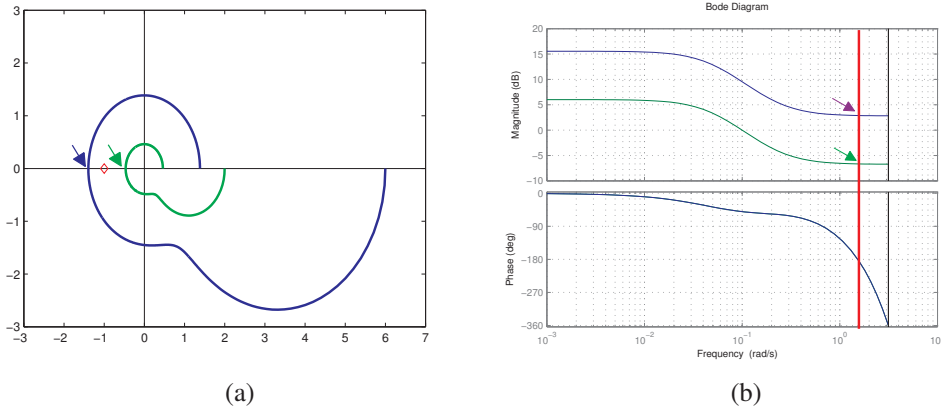


Fig. 10.9 Diagrama de Nyquist i Bode de la planta de l'Exemple 72. Es mostra la resposta freqüencial de $G(z)H(z)$ (en verd) i la de $3 \cdot G(z)H(z)$ (en blau). Les fletxes indiquen els punts que permeten caracteritzar l'estabilitat de llaç tancat.

A la subfigura 10.9.a, i en color verd, es mostra el diagrama de Nyquist de $G(z)H(z)$. Com es pot observar, la corba no envolta el punt -1 ; per tant, $N = 0$ i, atès que $P = 0$, aleshores $Z = 0$ i, per tant, el sistema de llaç tancat és estable.

La subfigura 10.9.a, i en color blau, il·lustra el diagrama de Nyquist de $3 \cdot G(z)H(z)$. Com es pot observar, envolta el punt -1 en sentit horari; per tant, $N = 1$ i, atès que $P = 0$, $Z = 1$ i, per tant, el sistema de llaç tancat és inestable.

Observeu que, per determinar si s'envolta o no el punt -1 , n'hi ha prou d'observar el guany del sistema en el moment en què es talla el semieix real negatiu, és a dir analitzar el guany en la freqüència en què el sistema presenta una fase de -180° . Aquesta informació es pot obtenir directament del diagrama de Bode (subfigura 10.9.b). En el primer cas, el guany en tallar el semieix real negatiu és inferior a la unitat, és a dir, en la freqüència en què hi ha fase -180° , la corba de guany està per sota de 0dB i, per tant, el diagrama de Nyquist no envolta el punt -1 , cosa que implica que el sistema de llaç tancat és estable. En el segon cas, el tall es produeix en un punt que està a l'esquerra del punt -1 i, per tant, en el moment de tallar el semieix real negatiu el guany és superior a la unitat, és a dir, en la freqüència en què hi ha fase -180° , la corba de guany està per sobre de 0dB i, per tant, el diagrama de Nyquist envolta el punt -1 , cosa que implica que el sistema de llaç tancat és inestable.

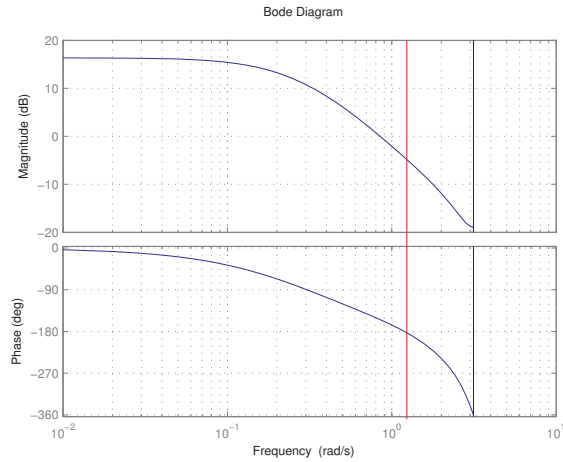
Proposició 49 *Criteri simplificat de Bode.* Considereu el sistema de la Figura 10.1; si el diagrama de Bode de $G(z)H(z)$ no presenta guany més gran que 1 (0dB) en cap de les freqüències en què presenta fase -180° ($180^\circ + 360^\circ \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$) i $G(z)H(z)$ no té pols de mòdul més gran que 1, aleshores el sistema de llaç tancat és estable.

Comentari 25 Encara que el criteri simplificat de Bode no permet concloure la inestabilitat del sistema, cal tenir present que, en la majoria de casos, l'incompliment del criteri implica la inestabilitat i, encara que no és estrictament cert, en molt àmbits el no-compliment del criteri simplificat de Bode se sol vincular a la inestabilitat del sistema de llaç tancat.

En particular, en els sistemes que presenten un únic tall amb -180° , la condició es torna necessària i suficient.



Fig. 10.10
Diagrama de Bode de la
planta de l'Exemple 73.



Exemple 73 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

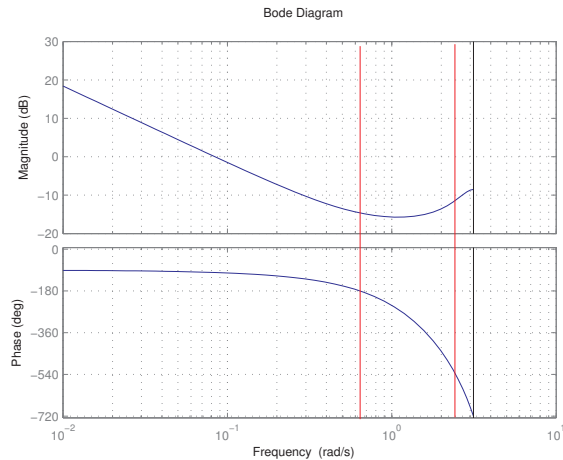
$$G(z) = \frac{0.75(z+2)(z-0.3)}{(z-0.8)(z-0.6)} \quad i \quad H(z) = \frac{1}{z},$$

determineu si presenta pols fora del cercle unitat.

La Figura 10.10 presenta el diagrama de Bode de $G(z)H(z)$. Atès que tots els pols de $G(z)H(z)$ són a l'interior del cercle unitat i que el diagrama de Bode presenta un únic tall a -180° i ho fa amb un mòdul inferior als 0dB, es pot concloure que el sistema de llaç tancat és estable.

Convé adonar-se que, si $G(z)$ es substituís per $2G(z)$, el diagrama de Bode en fase quedaria exactament igual mentre que el diagrama de Bode en guany es desplaçaria cap amunt, i el tall es produiria amb guany superior a 0dB, i el sistema de llaç tancat es convertiria en inestable (això es podria confirmar aplicant-hi el criteri de Nyquist).

Fig. 10.11
Diagrama de Bode de la
planta de l'Exemple 74.





Exemple 74 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z) = \frac{0.25(z-0.5)}{(z-1)(z+0.5)} \quad i \quad H(z) = \frac{1}{z^3},$$

determineu si presenta pols fora del cercle unitat.

La Figura 10.11 presenta el diagrama de Bode de $G(z)H(z)$. Atès que tots els pols de $G(z)H(z)$ són a l'interior del cercle unitat i que el diagrama de Bode presenta dos talls amb -180° (un a -180° i l'altre a -540°), ambdós amb un mòdul inferior als 0dB, es pot concloure que el sistema de llaç tancat és estable.

Exemple 75 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z) = \frac{4.6(z-0.5)}{z^2 - 1.902z + 1} \quad i \quad H(z) = \frac{1}{z - 0.1531},$$

determineu si presenta pols fora del cercle unitat.

Els pols de $G(z)H(z)$ són 0.1531 i $e^{\pm j\frac{\pi}{10}}$, els darrers situats sobre el cercle unitat; per tant, és possible aplicar-hi el criteri simplificat de Bode. La Figura 10.12 presenta el diagrama de Bode de $G(z)H(z)$; aquest presenta un tall amb -180° , amb un mòdul inferior als 0dB i, per tant es pot concloure que el sistema de llaç tancat és estable.

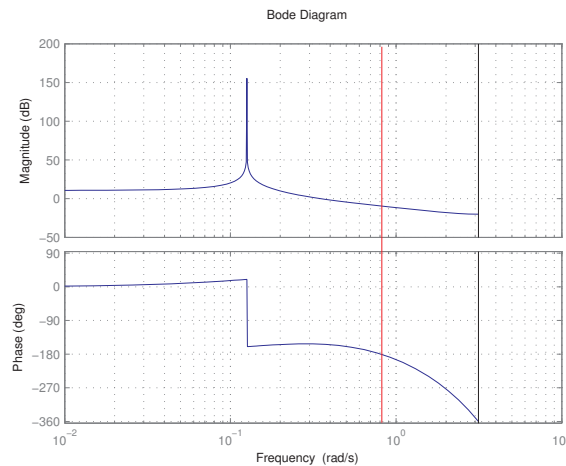


Fig. 10.12
Diagrama de Bode de la planta de l'Exemple 75.

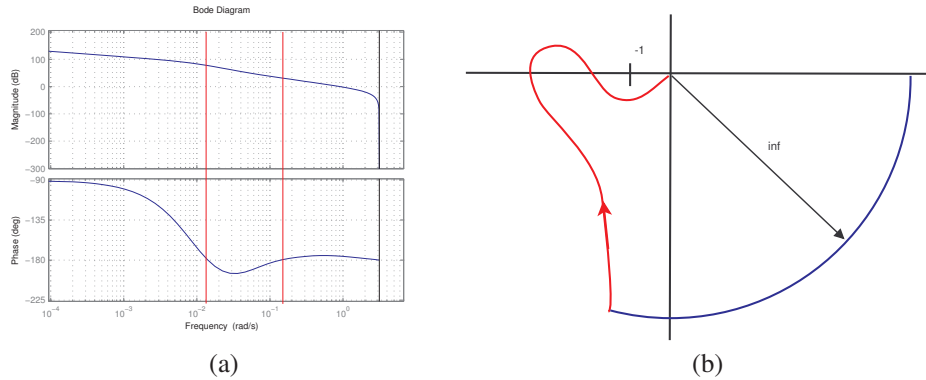
Exemple 76 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z) = \frac{0.24046(z-0.9512)(z-0.9324)(z-0.6)(z+1)^2}{(z-1)(z-0.99)^2(z-0.9048)(z-0.5385)} \quad i \quad H(z) = 1,$$

determineu si presenta pols fora del cercle unitat.

La subfigura 10.13.a mostra el diagrama de Bode de $G(z)H(z)$. Es pot comprovar que el diagrama passa 3, vegades per -180° , dues d'elles amb el guany per sobre dels 0dB

Fig. 10.13
 Diagrama de Bode (a) i
 esquema del diagrama
 de Nyquist (b) de la
 planta de l'Exemple 76.



i una amb mòdul amb 0 ($-\infty$ dB), és important adonar-se que $G(z)H(z)$ presenta dos zeros en la darrera freqüència ($z = -1$). Atès que presenta talls amb mòdul superior a la unitat, no és aplicable el criteri simplificat de Bode.

La subfigura 10.13.b presenta un esquema del diagrama de Nyquist de $G(z)H(z)$. A l'esquema, es pot comprovar que el diagrama envolta dues vegades el -1 , una, sentit horari i l'altra en sentit antihorari; per tant, el nombre total de semivoltes és 0 ($N=0$). Atès que $N = 0$ i que $G(z)H(z)$ no presenta pols fora del cercle unitat ($P=0$), aleshores el sistema de llaç tancat no presenta pols fora del cercle unitat ($Z = 0$) i, per tant, és estable.

Aquest exemple permet comprovar que el criteri simplificat de Bode dona una condició suficient però no necessària.

10.3. Marges d'estabilitat

10.3.1. Introducció

Tant el criteri de Nyquist com el criteri simplificat de Bode donen eines per decidir si un sistema de llaç tancat és estable o no. En ocasions, resulta convenient disposar de mesures quantitatives d'estabilitat, les quals mesuren quant es pot modificar el sistema de llaç obert, de manera que el sistema de llaç tancat mantingui l'estabilitat. Aquestes mesures donen idea de la robustesa del sistema enfront d'elements no modelats o de variacions que pugui experimentar la planta.

Les mesures d'estabilitat quantitativa més emprades són el marge de guany i el marge de fase. El marge de guany indica quin és el valor màxim d'un guany incorporat en el sistema de llaç obert, de manera que aquest mantingui l'estabilitat, mentre que el marge de fase indica quin és el màxim retard que es pot incorporar en el sistema de llaç obert, de manera que el sistema de llaç tancat mantingui l'estabilitat. Aquestes dues mesures presenten una interpretació intuïtiva i tenen associades tècniques de disseny de compensadors. Encara que són mesures força generals, hi ha casos en què no funcionen del tot bé; en aquests casos, cal recórrer a eines més genèriques, com la distància del punt -1 . Aquesta, encara que més genèrica, resulta més difícil d'interpretar i no resulta

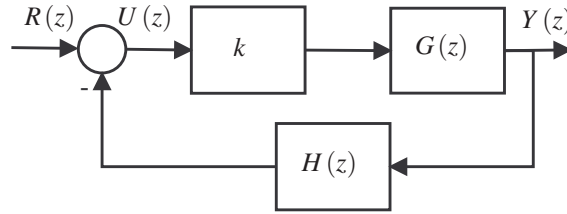
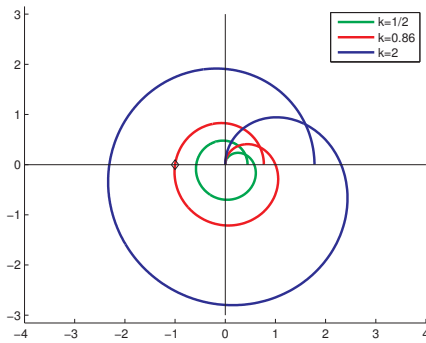
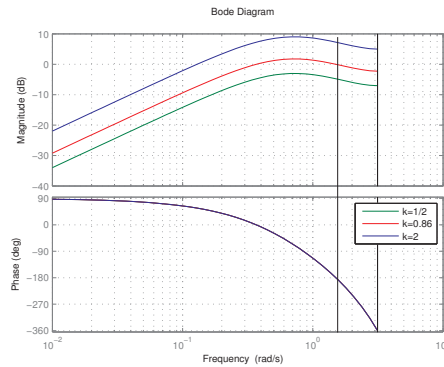


Fig. 10.14 Sistema de llaç tancat amb una variació de guany.

fàcil d'emprar en el disseny de controladors. A continuació, es descriuen les tres mesures indicades.



(a)



(b)

Fig. 10.15 Efecte de la variació de guany.

10.3.2. Marge de guany

La Figura 10.14 presenta la mateixa estructura que el sistema representat a la Figura 10.1, però amb un guany addicional, k . En cas que $G(z)H(z)$ no contingui pols fora del cercle unitat, el marge de guany analitza els valors que pot prendre k i que el sistema de la Figura 10.14 sigui estable.

Exemple 77 La Figura 10.15 mostra el diagrama de Nyquist i el diagrama de Bode de

$$kG(z)H(z) = \frac{k(z-1)}{z(z-0.5)^2}$$

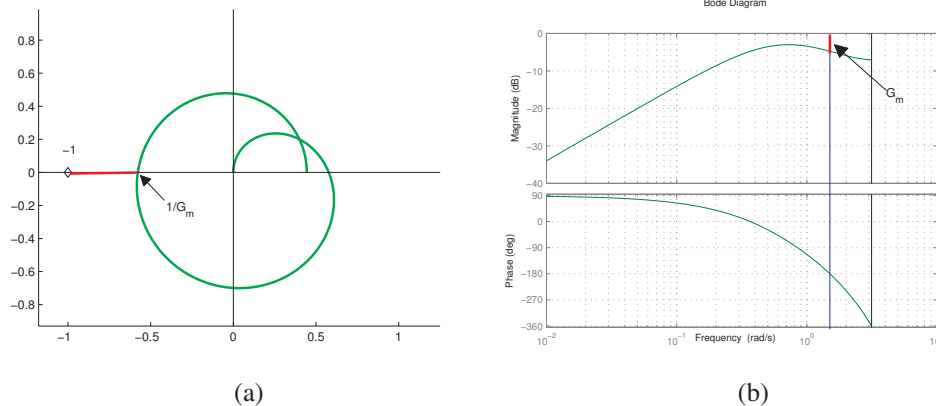
per a tres valors de k . És important adonar-se que els diferents diagrames de Nyquist presenten la mateixa forma i que únicament canvia la mida; de forma similar, el diagrama de Bode de fase es manté inalterat mentre que el diagrama de Bode de guany es desplaça amunt o avall en funció del valor de k . Atès que aquest sistema no presenta pols fora del cercle unitat ($P = 0$), l'estabilitat vindrà marcada pel guany que presenti la resposta freqüencial en la freqüència en què la fase pren el valor de -180° . Podem observar que, en funció del valor de k , el sistema de llaç tancat pot ser estable, marginalment estable o inestable. Així, el sistema de la Figura 10.14 serà estable si $k \in (0, 0.86)$.

Definició 55 Marge de guany. Sigui un sistema com el de la Figura 10.14, amb $P = 0$. El mínim valor de k que fa el sistema marginalment estable és aquell que fa que la corba

de fase prengui valor -180° i la de guany, valor 1 (0dB) simultàniament. Aquest rep el nom de marge de guany, G_m , de $G(z)H(z)$. Així, el sistema de llaç tancat serà estable si $k \in (0, G_m)$.

El marge de guany es pot representar gràficament tant en el diagrama de Nyquist com en el diagrama de Bode. La Figura 10.16 mostra aquesta representació per al cas analitzat a l'Exemple 77. En el diagrama de Nyquist, la representació conté un segment de l'eix real negatiu, que correspon al que uneix el punt -1 amb el tall del diagrama de Nyquist i l'eix real negatiu. Cal adonar-se que, encara que la longitud del segment dóna idea del marge de guany, no és directament el marge de guany. El marge de guany en el diagrama de Nyquist presenta unitats absolutes.

Fig. 10.16 Representació gràfica del marge de guany (G_m).



En el diagrama de Bode, la representació gràfica del marge de guany correspon a un segment de línia vertical que uneix la línia horitzontal que indica els 0dB amb el valor de la corba de guany que presenta el sistema en la freqüència en què la corba de fase talla els -180° ; aquest segment vertical està situat en la freqüència en què es produeix el tall de la fase amb els -180° . La longitud del segment de línia vertical correspon directament al marge de guany expressat en dB.

Proposició 50 Procediment de càlcul del marge de guany. En un sistema com el de la Figura 10.1 amb $G(z)H(z)$ sense pols fora del cercle unitat ($P = 0$), el marge de guany es calcula de la forma següent:

1. Determineu les freqüències de tall $a -180^\circ + 360 \cdot n, n \in \mathbb{Z}$ de la corba de resposta freqüencial. És a dir, calculeu ω_{180} (o, alternativament, θ_{180}):

$$\begin{aligned} -180^\circ + 360 \cdot n &= \angle G(e^{j\omega_{180}T})H(e^{j\omega_{180}T}) \\ -180^\circ + 360 \cdot n &= \angle G(e^{j\theta_{180}})H(e^{j\theta_{180}}) \end{aligned}$$

en què T correspon al període de mostratge, en cas de tractar-se d'un sistema mostrejat.

2. Calculeu el guany a les pulsacions ω_{180} (o, alternativament, θ_{180})

$$A = |G(z)H(z)|_{z=e^{j\omega_{180}T}} = |G(z)H(z)|_{z=e^{j\theta_{180}}}$$



i quedeu-vos amb el valor més gran. En altres paraules:

$$A = \max_{\omega_{180}} |G(z)H(z)|_{|z=e^{j\omega_{180}T}}$$

amb

$$-180^\circ + 360 \cdot n = \angle G(e^{j\omega_{180}T})H(e^{j\omega_{180}T}), n \in \mathbb{Z}$$

3. Aleshores, $G_m = \frac{1}{A}$ en absolut i $G_m = -20 \cdot \log_{10}(A)$ en decibels.

Comentari 26 Observeu que el diagrama de Nyquist de $G(z)H(z)$ envolta el -1 si $A > 1$; per tant, en absolut, $G_m < 1$ i, en decibels, $G_m < 0$. Per tant, un marge de guany positiu en decibels indica que el sistema és estable. Alternativament, un marge de guany negatiu indica que el sistema de llaç tancat serà inestable.

Exemple 78 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z) = \frac{0.09507z^2 - 0.1373z + 0.05073}{z^6 - 3.248z^5 + 4.169z^4 - 2.579z^3 + 0.7502z^2 - 0.09131z + 0.003308}$$

i $H(z) = 1$, analitzeu-ne el marge de guany. Cal tenir present que aquest sistema representa un sistema amb un període de mostratge $T = 0.5$ s.

Observant el diagrama de Bode (Figura 10.17), podem observar que la corba talla una vegada a -180° i una altra vegada a -540° ; per tant, en el càlcul del marge de guany, s'ha de tenir en compte aquests dos punts.

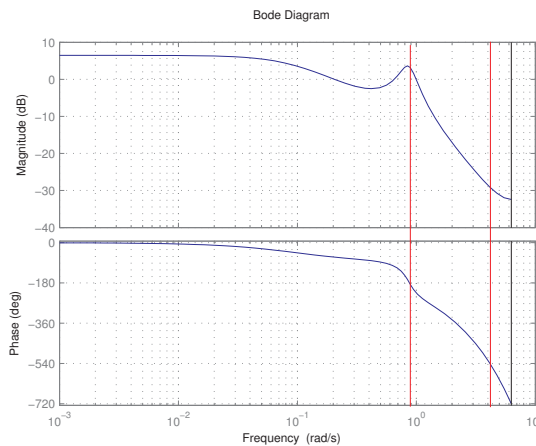


Fig. 10.17
Diagrama de Bode de l'Exemple 78.

Per calcular el marge de guany, es busca la solució de les equacions següents:

$$\begin{aligned} -180 &= \angle G(e^{j\omega_1 T})H(e^{j\omega_1 T}) \rightarrow \omega_1 = 0.8754 \text{ rad/s} \\ -180 &= \angle G(e^{j\theta_1})H(e^{j\theta_1}) \rightarrow \theta_1 = 0.4377 \text{ rad} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} -180 &= \angle G(e^{j\omega_2 T})H(e^{j\omega_2 T}) \rightarrow \omega_2 = 4.1551 \text{ rad/s,} \\ -180 &= \angle G(e^{j\theta_2})H(e^{j\theta_2}) \rightarrow \theta_2 = 2.0775 \text{ rad.} \end{aligned}$$



Tot seguit, es calcula el guany en les freqüències indicades:

$$|G(e^{j\omega_1 T})H(e^{j\omega_1 T})| = 1.4791$$

i

$$|G(e^{j\omega_2 T})H(e^{j\omega_2 T})| = 0.0350.$$

Atès que en la primera freqüència es disposa d'un guany més elevat, és aquesta la que defineix el marge de guany. Així, el marge de guany és $\frac{1}{1.4791} = 0.6760$ en absolut i $-20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{1.4791} \right) = 3.4$ en decibels.

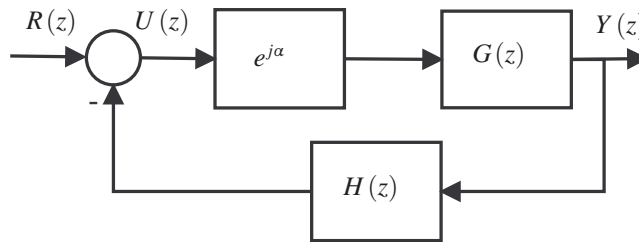
Atès que el marge de guany en absolut és inferior a la unitat, el sistema de llaç tancat serà inestable. En cas d'incorporar un guany $k \in (0, 0.6760)$, el sistema seria estable.

10.3.3. Marge de fase

La resposta freqüencial dels sistemes es representa sobre els nombres complexos, que es poden descompondre en dues components: mòdul i fase. El marge de guany analitza l'estabilitat relativa quan es varia el guany de $G(z)H(z)$; alternativament, el marge de fase analitza com varia l'estabilitat relativa del sistema de la Figura 10.1 quan es varia la fase de $G(z)H(z)$.

L'efecte de la variació de fase de $G(z)H(z)$ es pot estudiar mitjançant el sistema indicat a la Figura 10.18; així, caldrà estudiar l'estabilitat relativa de $e^{j\alpha}G(z)H(z)$. És important adonar-se que $G(e^{j\theta})H(e^{j\theta})$ i $e^{j\alpha}G(e^{j\theta})H(e^{j\theta})$ presenten, a cada freqüència, θ , el mateix guany, mentre que la fase està alterada per un factor α . En altres paraules, el diagrama de Nyquist $e^{j\alpha}G(e^{j\theta})H(e^{j\theta})$ està rotat un angle α respecte del diagrama de Nyquist de $G(e^{j\theta})H(e^{j\theta})$.

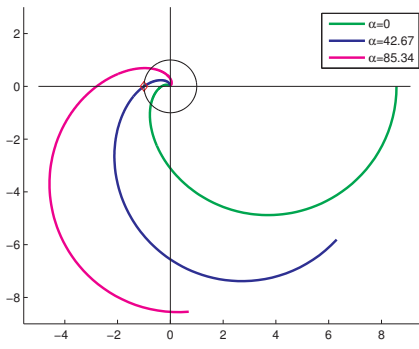
Fig. 10.18
Sistema de llaç tancat
amb una variació de
fase.



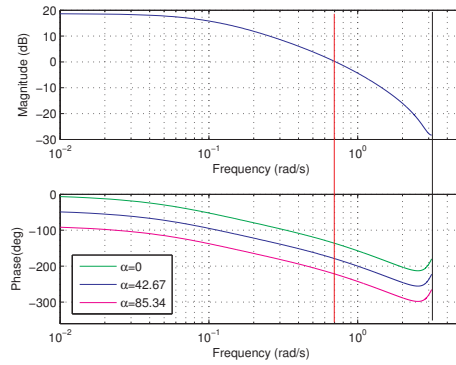
Exemple 79 La Figura 10.19 mostra el diagrama de Nyquist i el diagrama de Bode de

$$e^{j\alpha}G(z)H(z) = e^{j\alpha}0.32 \frac{z + 0.6875}{(z - 0.9)(z - 0.37)}$$

per a tres valors de α . És important adonar-se que els diferents diagrames de Nyquist estan rotats un angle α ; de forma similar, el diagrama de Bode de guany es manté inalterat mentre que el diagrama de Bode de fase es desplaça verticalment en funció del valor de α . Atès que aquest sistema no presenta pols fora del cercle unitat ($P = 0$), l'estabilitat



(a)



(b)

Fig. 10.19 Efecte de la variació de la fase.

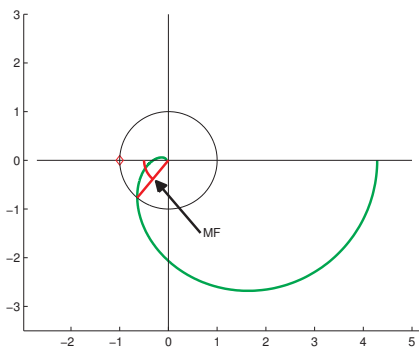
vindrà marcada per la fase que presenti la resposta freqüencial en els punts de guany unitat (intersecció amb el cercle unitat del diagrama de Nyquist). Podem observar que, en funció del valor de α , el sistema de llaç tancat pot ser estable, marginalment estable o inestable. Així, el sistema de la Figura 10.14 serà estable si $\alpha \in (0^\circ, 42.67^\circ)$.

Definició 56 *Marge de fase.* Sigui un sistema com el de la Figura 10.18, amb $P = 0$. S'anomena MF el mínim valor de α que fa que:

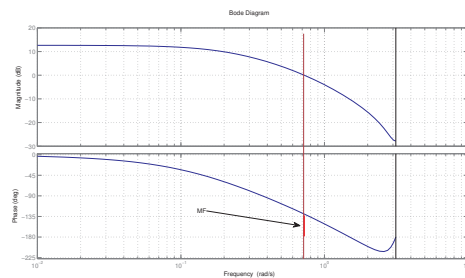
$$\begin{aligned} e^{j\alpha}G(e^{j\theta})H(e^{j\theta}) &= -180^\circ - 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ |G(e^{j\theta})H(e^{j\theta})| &= 1 \end{aligned}$$

alternativament,

$$MF = \begin{cases} \min_{\alpha} & 180 + \angle G(e^{j\theta})H(e^{j\theta}) - \alpha = 0 \\ \text{amb} & 1 = |G(e^{j\theta})H(e^{j\theta})| \end{cases}$$



(a)



(b)

Fig. 10.20 Representació gràfica del marge de fase (MF).

El marge de fase es pot representar gràficament tant en el diagrama de Nyquist com en el diagrama de Bode. La Figura 10.20 mostra aquesta representació per un sistema de la forma



$$G(z)H(z) = \frac{0.32(z + 0.6875)}{(z - 0.8)(z - 0.37)}.$$

Al diagrama de Nyquist, la representació correspon a l'arc de cercle que falta (o sobra) per tal que el punt on el diagrama de Nyquist talla el cercle unitat es col·loqui sobre el punt $-1 + 0 \cdot j$.

Al diagrama de Bode, la representació gràfica del marge de fase correspon a un segment de línia vertical que uneix la línia horitzontal que indica els -180° amb el valor de la corba de fase que presenta el sistema en la freqüència en què la corba de guany talla els 0dB. Aquest segment vertical està situat en la freqüència en què es produeix el tall de la fase amb els 0dB. La longitud del segment de línia vertical correspon directament al marge de fase expressat en graus.

Proposició 51 *Procediment de càlcul del marge de fase. Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb $G(z)H(z)$ sense pols fora del cercle unitat ($P = 0$), el marge de guany es calcula de la forma següent:*

1. *Determineu les freqüències de tall a 0dB de la corba de resposta freqüencial. És a dir, calculeu ω_{0dB} (o, alternativament, θ_{0dB}):*

$$1 = |G(e^{j\omega_{0dB}T})H(e^{j\omega_{0dB}T})|, 1 = |G(e^{j\theta_{0dB}})H(e^{j\theta_{0dB}})|$$

on T correspon al període de mostratge, en cas de tractar-se d'un sistema mostreat.

2. *Calculeu la fase a les pulsacions ω_{0dB} (o, alternativament, θ_{0dB}) i quedeu-vos amb el valor més proper a -180° , o situat per sota, si és el cas:*

$$\phi = \angle G(z)H(z)|_{z=e^{j\omega_{0dB}T}} = \angle G(z)H(z)|_{z=e^{j\theta_{0dB}}}.$$

3. *Aleshores, $MF = 180 + \phi$.*

Proposició 52 *Sigui un sistema com el de la Figura 10.18, amb $P = 0$. Si el marge de fase, MF , és positiu, aleshores el sistema en llaç tancat $\frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$ és estable.*

A diferència del marge de guany, no hi ha cap sistema físic que presenti una resposta freqüencial de la forma $e^{j\alpha}$; per aquest motiu resulta més complex buscar una interpretació física del concepte de marge de fase. El que hi ha és un dispositiu que presenta una resposta freqüencial que únicament modifica la fase però no modifica el guany. Aquest és el retard. Un retard de la forma z^{-N} presenta una resposta freqüencial de la forma: $e^{jN\omega T}$ (o $e^{jN\theta}$). Cal adonar-se que, en el retard, la fase és funció de la freqüència, a diferència del que es planteja a la Figura 10.18. Per aquest motiu, molt sovint s'introdueix el de marge de retard.

Definició 57 *Marge de retard. Sigui un sistema com el de la Figura 10.1, amb $P = 0$, i estable en llaç tancat. S'anomena marge de retard el màxim nombre de retards N (Figura 10.21) que es pot incorporar dins del llaç, de manera que el sistema de la Figura 10.21 sigui estable.*

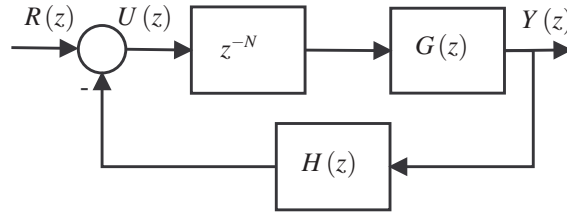


Fig. 10.21 Sistema de llaç tancat amb un retard.

El marge de retard és un concepte més genèric que el marge de fase i, en el cas dels sistemes lineals, es pot calcular a partir del marge de fase.

Proposició 53 Càlcul del marge de retard a partir del marge de fase

1. Sigui un sistema com el de la Figura 10.1 amb $P = 0$, i estable. Calculeu el marge de fase, MF , i la freqüència a la qual està definit ω_{MF} (o θ_{MF}).
2. Tot seguit, cal trobar quin retard presenta una fase igual o inferior al marge de fase en la freqüència en què aquest està definit:

$$MF \geq N \cdot \omega_{MF} \cdot T \rightarrow N = \left\lfloor \frac{MF}{\omega_{MF} \cdot T} \right\rfloor \quad (10.5)$$

$$\omega_{MF} \geq N \cdot \theta_{MF} \rightarrow N = \left\lfloor \frac{MF}{\theta_{MF}} \right\rfloor \quad (10.6)$$

on $\lfloor \cdot \rfloor$ indica l'arrodoniment cap avall (Cal tenir en compte que N ha de ser un nombre natural).

Exemple 80 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z) = \frac{0.32z + 0.22}{(z - 0.9)(z - 0.37)}, \quad i \quad H(z) = 1 \text{ (amb } T = 0.5 \text{ s),}$$

analitzeu-ne el marge de guany, el marge de fase i el marge de retard.

La Figura 10.19 (amb color verd) mostra el diagrama de Nyquist i el diagrama de Bode de $G(z)H(z)$. El sistema talla dues vegades el semieix real negatiu, en la pulsació 1.42 rad/s i en la darrera pulsació de temps discret $\frac{\pi}{T} = 6.28$ rad/s. En la primera, el guany és 0.3293, mentre que en la segona és 0.03841; per tant, el marge de guany queda definit per la primera pulsació i és igual a $\frac{1}{0.3293} = 3.0363$ (9.6468 dB).

D'altra banda, la pulsació de tall a 0dB és 1.4245 rad/s; en aquesta pulsació, la fase és -137.38° . Per tant el marge de fase és $MF = 180^\circ - 137.38^\circ = 42.6167^\circ = 0.7438$ rad/s.

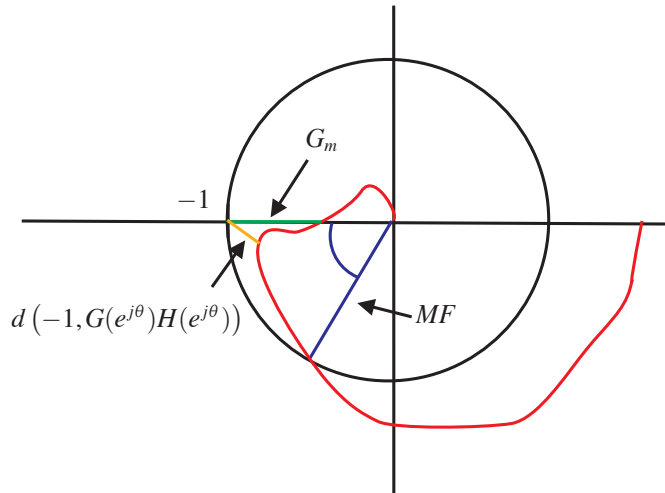
Atès que tant el marge de guany com el marge de fase són positius, es pot concloure que el sistema de llaç tancat serà estable.

Finalment, es calcula el marge de retard com:

$$N = \left\lfloor \frac{0.7438}{1.4245 \cdot 0.5} \right\rfloor = \lfloor 1.044 \rfloor = 1.$$

És a dir, es pot incorporar un retard d'un període i el sistema de llaç tancat continuarà essent estable. Si s'incorpora un retard de dos períodes, el sistema deixarà de ser estable.

Fig. 10.22
Comparació de diferents
mesures de robustesa.



10.3.4. Distància mínima al punt -1

El marge de fase i el marge de guany són les mesures de robustesa més populars, però en alguns casos rars aquestes mesures poden no ser prou adients, ja que poden trobar-se sistemes que tot, i presentar un bon marge de fase i un bon marge de guany, són propers a la inestabilitat. El marge de fase i guany estudien les variacions que poden modificar les característiques d'estabilitat que estan alineades amb mòdul o fase. En alguns casos la deformació mínima que fa canviar aquestes característiques pot implicar un canvi simultani de mòdul i fase. Aquest tipus de deformacions no es recullen en el marge de fase i el marge de guany. Una mesura que sí que té en compte aquestes possibles deformacions és la distància mínima del diagrama de Nyquist al punt $-1 + 0 \cdot j$. Aquesta mesura es defineix com:

$$\begin{aligned} d(-1, G(e^{j\theta})H(e^{j\theta})) &= \inf_{\theta} | -1 - G(e^{j\theta})H(e^{j\theta}) | = \inf_{\theta} | 1 + G(e^{j\theta})H(e^{j\theta}) | \\ &= \left[\sup_{\theta} \left| \frac{1}{1 + G(e^{j\theta})H(e^{j\theta})} \right| \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Observeu que la distància mínima entre el diagrama de Nyquist i el punt $-1 + 0 \cdot j$ correspon al màxim de la resposta freqüencial de la funció de transferència que relaciona l'error amb la referència. A diferència del marge de fase i el marge de guany, que s'obtenen a partir de l'observació de la funció de llaç obert $L(z) = G(z)H(z)$, la distància al punt $-1 + 0 \cdot j$ s'obté a partir de l'observació d'una funció de llaç tancat $\frac{1}{1+L(z)}$; això fa que sigui menys senzill dissenyar pensant en aquesta mesura; per això no se sol emprar com a mesura en els processos de disseny analítics. Tot i això, és molt interessant emprar la distància al punt $-1 + 0 \cdot j$ com una eina d'anàlisi complementària.

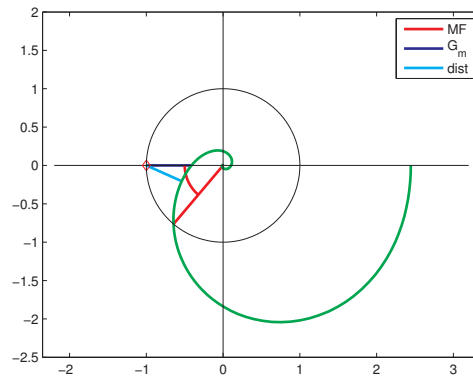


Fig. 10.23
Diagrama de Nyquist de l'Exemple 81 amb les mesures de marge de fase (MF), marge de guany (G_m) i punt de distància mínima al punt -1 ($dist$).

Exemple 81 Donat un sistema com el de la Figura 10.1, amb

$$G(z) = \frac{0.031584(z - 0.8461)}{(z - 0.593)(z^2 - 1.864z + 0.8723)(z^2 - 0.9115z + 0.5078)} \quad i \quad H(z) = 1,$$

analitzeu-ne el marge de guany, el marge de fase i la distància mínima al punt -1 .

El marge guany està definit a la pulsació 0.3274 rad (punt de tall a -180°). En aquesta pulsació, el guany del sistema és 0.4119 i, per tant, el marge de guany és 2.4273 (7.7025 dB). El marge de fase està definit a la pulsació 0.1667 rad (punt de tall a 0 dB). En aquesta pulsació, la fase és -130° i, per tant, el marge de fase és $MF = 49.78^\circ$. Finalment, la mínima distància al punt -1 es produeix en la pulsació 0.25157 rad i és 0.5045 .

La Figura 10.23 mostra una representació gràfica de les tres magnituds. Com es pot comprovar, en aquest cas les tres mesures són consistents.

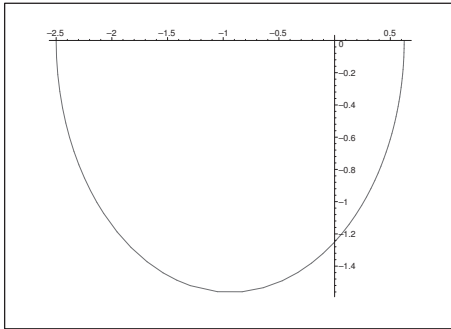
Bibliografia

- [1] Mario García-Sanz. Stability criteria in non-polar diagrams. *International Journal of Electrical Engineering Education*, 36:65–72, 1999.
- [2] Juergen Hahn, Thomas Edison and Thomas F. Edgar. A note on stability analysis using bode plots. *Chemical Engineering Education*, pages 208–211, 2001.

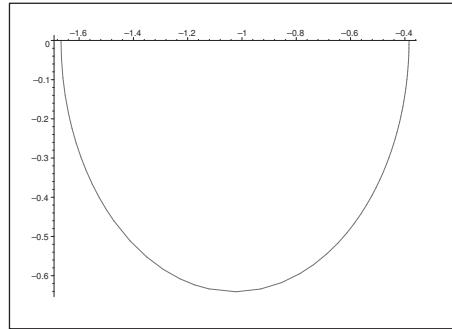


Exercicis proposats

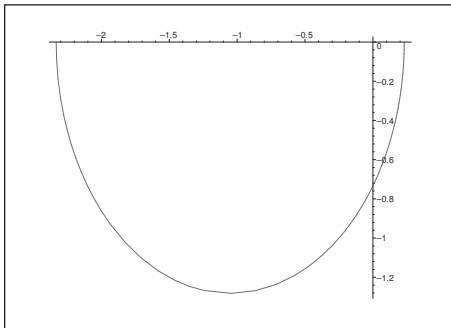
1. Analitzeu l'estabilitat dels sistemes de la forma 10.1 per als sistemes següents. Per a cada sistema, es presenta el diagrama de Nyquist i la funció de transferència $G(z)H(z)$.



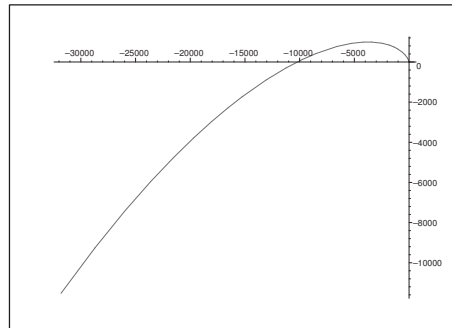
$$\frac{1}{z+0.6}$$



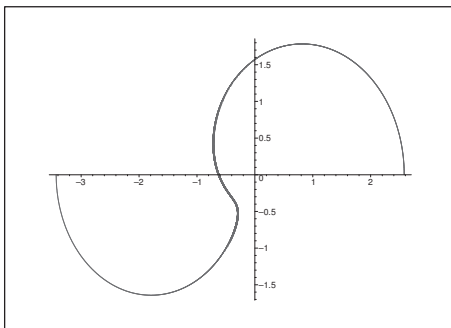
$$\frac{1}{z-1.6}$$



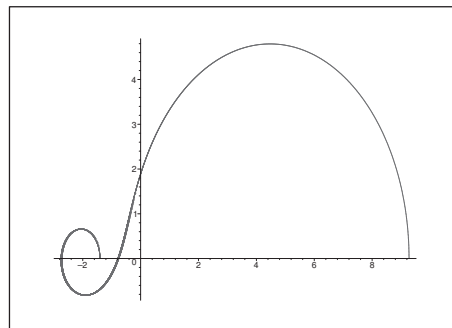
$$\frac{5z+2}{5z-8}$$



$$\frac{(z+1)^3(1001z-999)}{(101z-99)(11z-9)(z-1)^2}$$



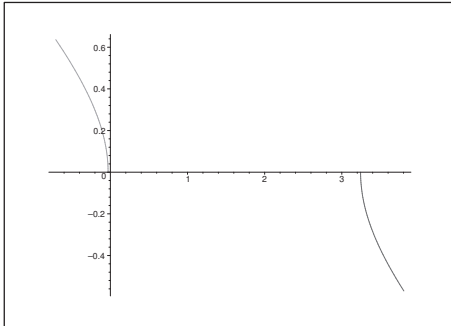
$$\frac{z-0.3}{(z+0.2)(z+.7)(z-1.1)}$$



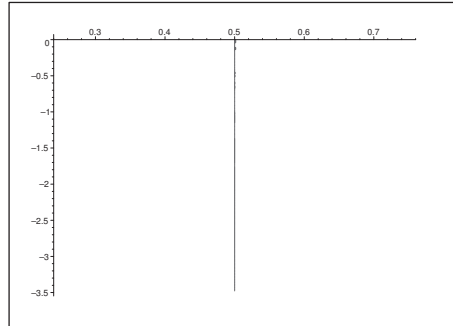
$$-2.0 \frac{(z+0.86)(z^2-1.06z+0.57)}{(z-1.1)(z+0.7)(z+0.2)}$$



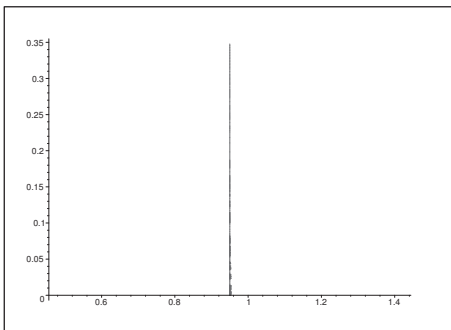
2. Analitzeu l'estabilitat dels sistemes de la forma 10.1 per als sistemes següents. Per a cada sistema, es presenta el diagrama de Nyquist i la funció de transferència $G(z)H(z)$.



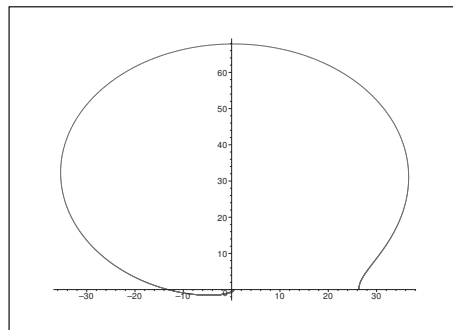
$$\frac{1.0z + 0.8}{z^2 - 1.41z + 0.89} = \frac{1.0z + 0.8}{(z - e^{j\frac{\pi}{4}})(z - e^{-j\frac{\pi}{4}})}$$



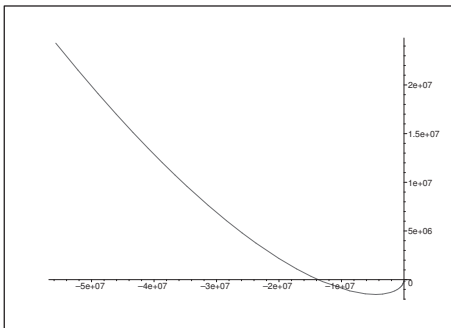
$$\frac{1}{z + 1}$$



$$\frac{z + 0.8}{z + 1}$$



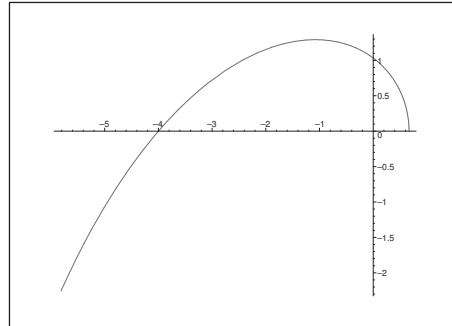
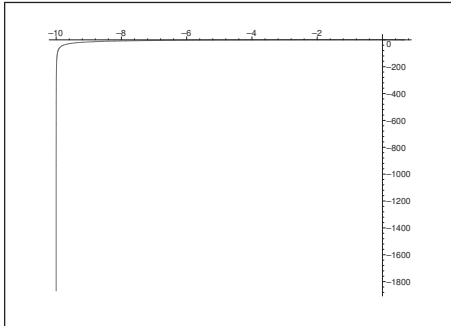
$$\frac{1}{z^2 + 1.886z + .924} = \frac{1}{(z + 0.961e^{j2.946})(z + 0.961e^{-j2.946})}$$



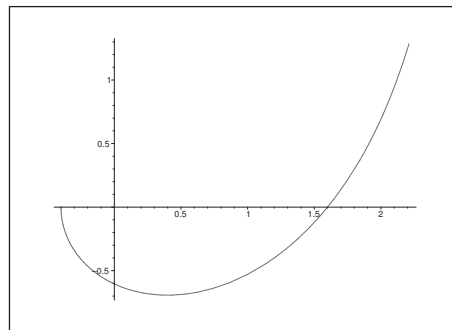
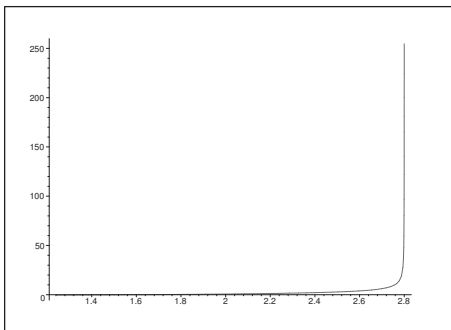
$$\frac{(z + 1)(51z - 49)(501z - 499)}{(z - 1)^3}$$



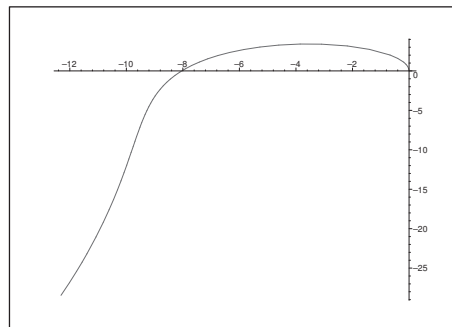
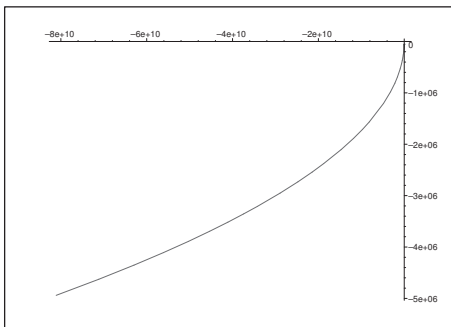
3. Analitzeu l'estabilitat dels sistemes de la forma 10.1 per als sistemes següents. Per a cada sistema, es presenta el diagrama de Nyquist (i un detall) i la funció de transferència $G(z)H(z)$.



$$\frac{4}{(z-1)(2z-1)}$$



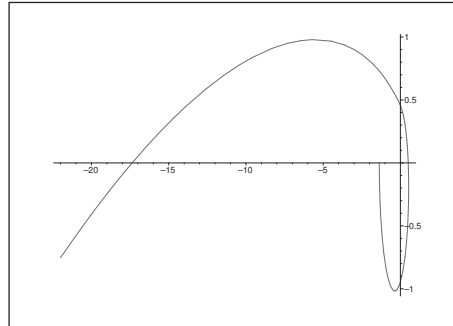
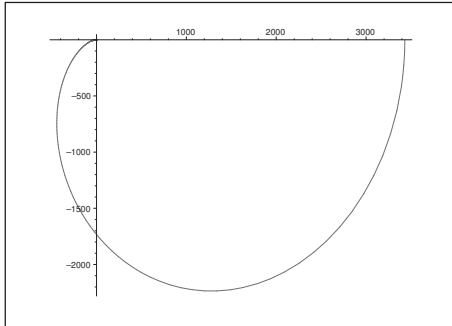
$$\frac{0.8(z-2)}{(z-1)(2z-1)}$$



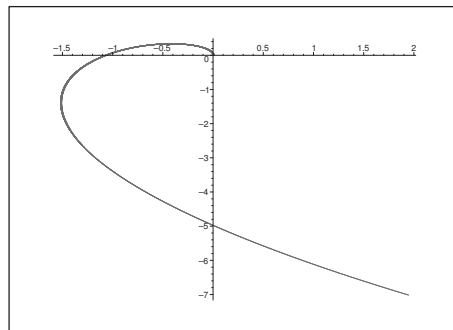
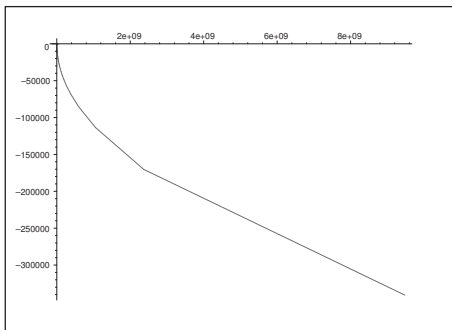
$$\frac{(13.667z-13)(z+1)}{(z+.6667)(z-1)^2}$$



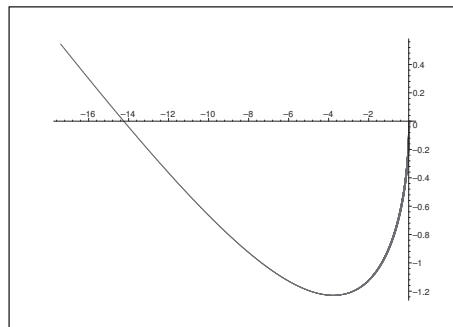
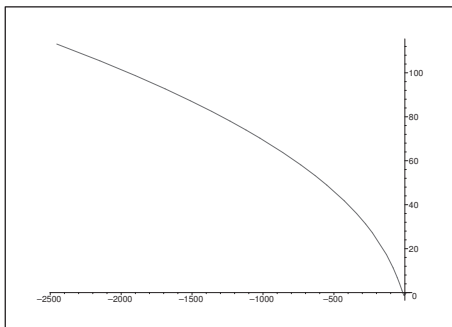
4. Analitzeu l'estabilitat dels sistemes de la forma 10.1 per als sistemes següents. Per a cada sistema, es presenta el diagrama de Nyquist (i un detall) i la funció de transferència $G(z)H(z)$.



$$\frac{z - 0.3}{(z + 0.2)(z + .7)(z - 0.99)^2}$$



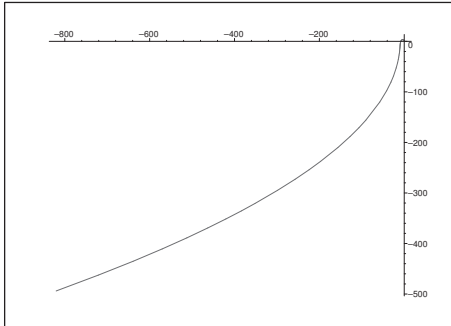
$$\frac{(z - 1.5)(z + 1)}{z(z - 1)^2}$$



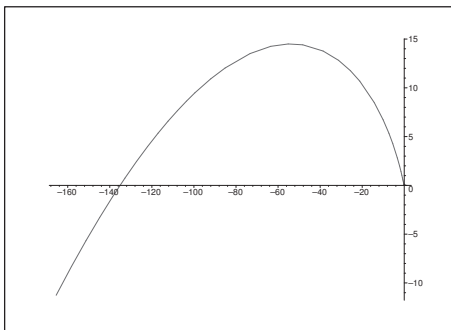
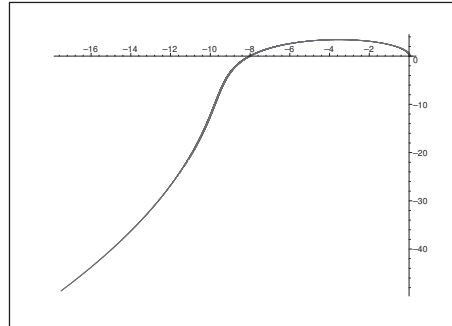
$$\frac{(z + 1)(z - 0.667)(z - 0.33)}{(z - 0.82)(z - 1)^2}$$



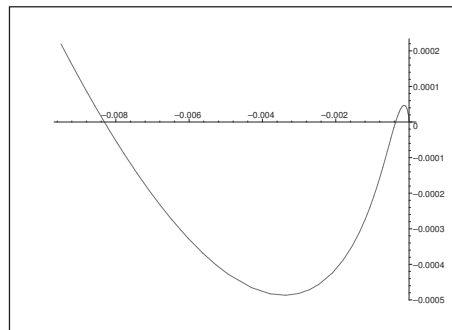
5. Analitzeu l'estabilitat dels sistemes de la forma 10.1 per als sistemes següents. Per a cada sistema es presenta el diagrama de Nyquist (i un detall) i la funció de transferència $G(z)H(z)$.



$$\frac{(z+1)(13.67z-13)}{(z+0.667)(z-1)^2}$$



$$\frac{0.0002(z+1)^3(z-0.5)(z-0.94)}{(z-1.0)(z-0.998)(z-0.99)(z+0.11)(z+0.18)}$$



6. Analitzeu l'estabilitat del sistema de la forma 10.1 on

$$G(z) = \frac{z}{(z-0.8)(z-0.9)} \quad \text{i} \quad H(z) = \frac{0.97538(z-0.9931)(z-0.8)}{(z^2-1.769z+1)}$$

amb $T = 1$ s tot sabent que el diagrama de Bode de $G(z)H(z)$ és el que es mostra a la Figura 10.24.

7. Analitzeu l'estabilitat del sistema de la forma 10.1 on

$$G(z) = \frac{(z-2)}{(z-0.8)(z+0.3)} \quad \text{i} \quad H(z) = \frac{1.5436(z-0.9991)}{(z-0.8392)(z-0.9056)(z-0.252)},$$

tot sabent que el diagrama de Bode de $G(z)H(z)$ és el que es mostra a la Figura 10.25.



Diagrama de Bode

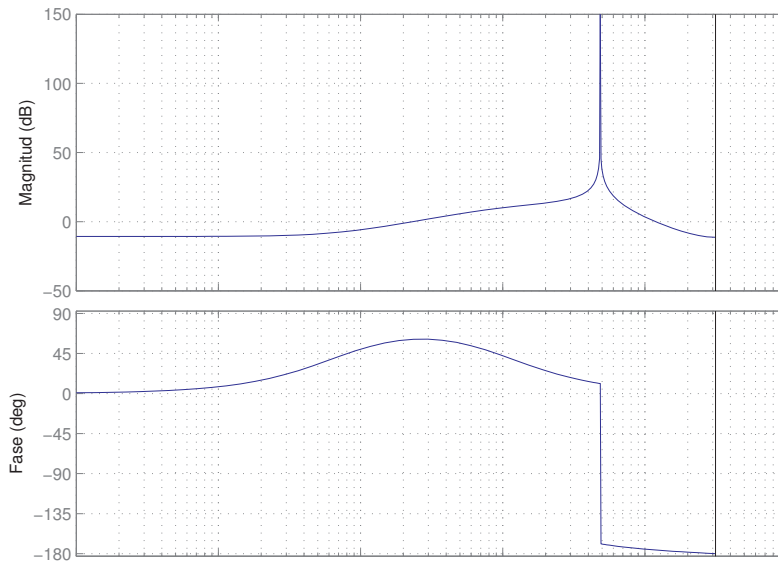


Fig. 10.24
Diagrama de Bode de
l'Exercici 6.

Diagrama de Bode

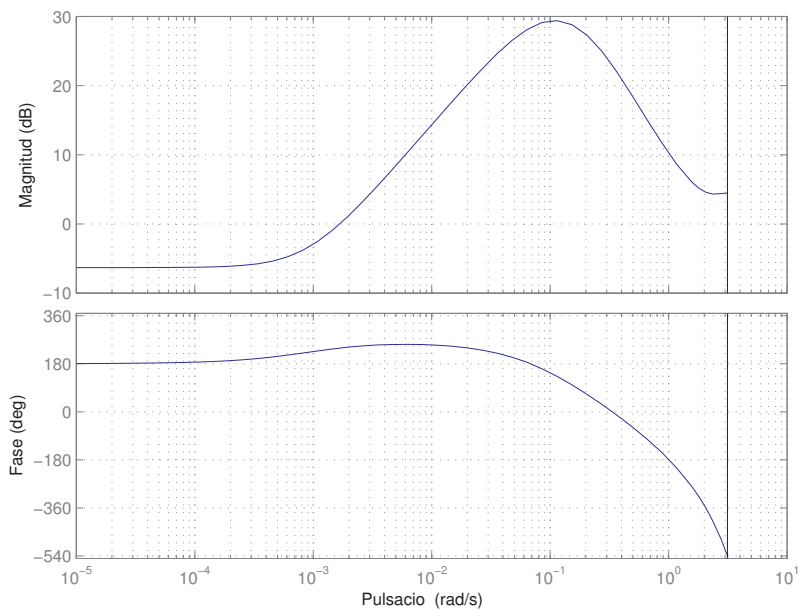


Fig. 10.25
Diagrama de Bode de
l'Exercici 7.

8. Analitzeu l'estabilitat del sistema de la forma 10.1 on

$$G(z) = \frac{(z-2)}{(z-0.8)(z+0.3)} \quad \text{i} \quad H(z) = \frac{1.5436(z-0.9991)}{(z-0.8392)(z-0.9056)(z-0.252)},$$

tot sabent que el diagrama de Bode de $G(z)H(z)$ és el que es mostra a la Figura 10.26.



Fig. 10.26
Diagrama de Bode de
l'Exercici 8.

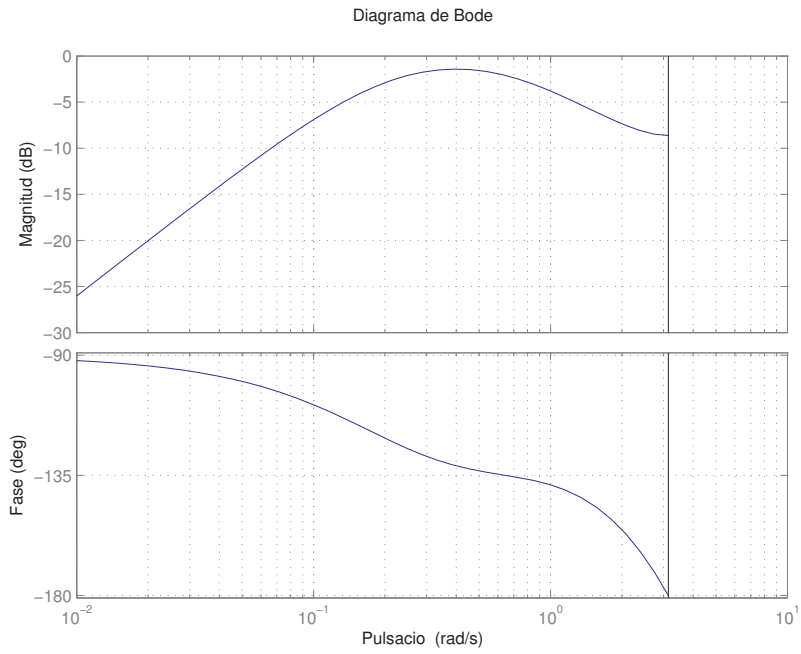
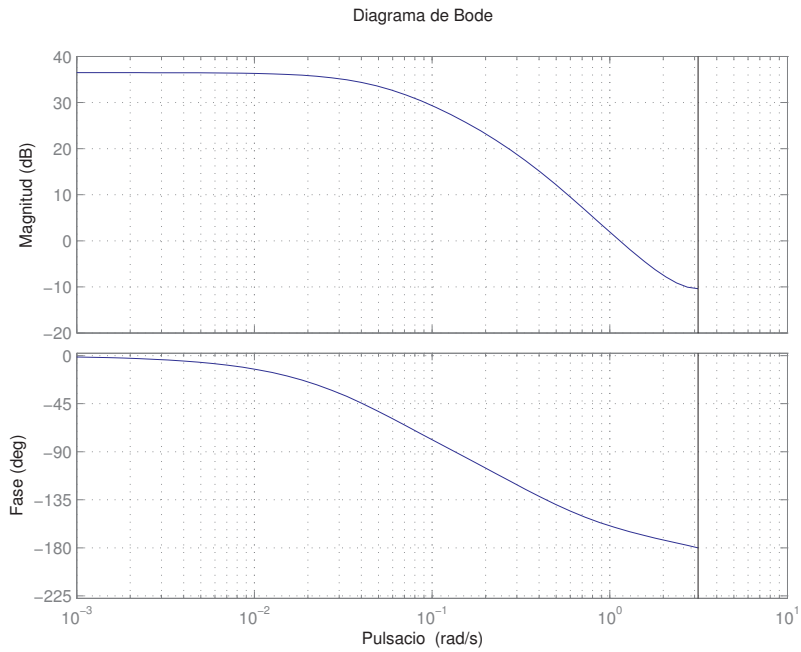


Fig. 10.27
Diagrama de Bode de
l'Exercici 9.



9. Analitzeu l'estabilitat del sistema de la forma 10.1 on

$$G(z) = \frac{z}{(z-0.7)(z-0.95)} \quad \text{i} \quad H(z) = 1$$



tot sabent que el diagrama de Bode de $G(z)H(z)$ és el que es mostra a la Figura 10.27. Quin marge de fase presenta el sistema ? Quin marge de guany presenta el sistema? Quants retards es poden incorporar en sèrie a $H(z)$ i que el sistema continuï essent estable?

10. Analitzeu l'estabilitat del sistema de la forma 10.1 on

$$G(z) = \frac{z}{(z - 0.7)(z - 0.95)} \quad \text{i} \quad H(z) = \frac{1.3957}{z + 0.3957},$$

tot sabent que el diagrama de Bode de $G(z)H(z)$ és el que es mostra a la Figura 10.28. Quin marge de fase presenta el sistema? Quin marge de guany presenta el sistema? Quant pot canviar el guany en contínua de $H(z)$ i que el sistema continuï essent estable? Quants retards es poden incorporar en sèrie a $H(z)$ i que el sistema continuï essent estable? [Feu els càlculs aproximadament a partir de l'observació del diagrama de Nyquist].

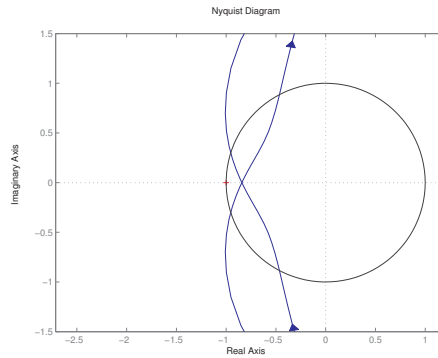
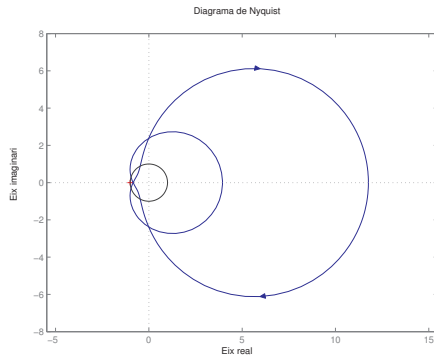


Fig. 10.28
Diagrama de Nyquist de l'Exercici 10 i detall.



Segona part
Disseny de sistemes de control

→ 11



Algorismes de control

Un dels objectius finals de la teoria de control és el disseny de controladors, que són els encarregats de fer que el sistema de llaç tancat compleixi unes especificacions determinades. Els controladors són sistemes dinàmics i, per tant, es modelen amb les mateixes eines que les plantes.

En aquest capítol, es presenten diversos tipus de controladors lineals emprats en la pràctica, i les especificacions que normalment s'apliquen en el seu disseny i sintonia.

11.1. Controladors

Els controladors lineals són sistemes físics que interaccionen amb la planta per tal que la combinació d'ambdós blocs compleixi unes especificacions determinades. La planta ($P(z)$) i el controlador ($C(z)$) poden interaccionar de moltes formes; la més popular és la de l'esquema de la Figura 11.1, que té com a objectiu principal que la sortida del sistema ($Y(z)$) segueixi a la referència ($R(z)$). El controlador rep com a entrada el senyal d'error, $E(z)$, que és la diferència entre la sortida i la referència i genera l'acció de control, $U(z)$, que s'utilitza com a entrada a la planta.

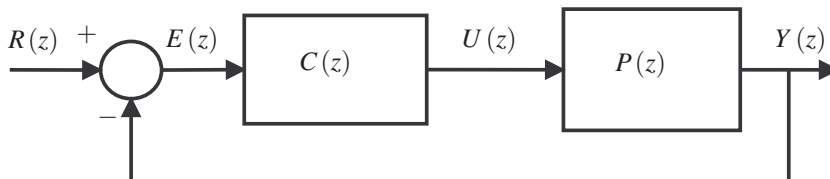
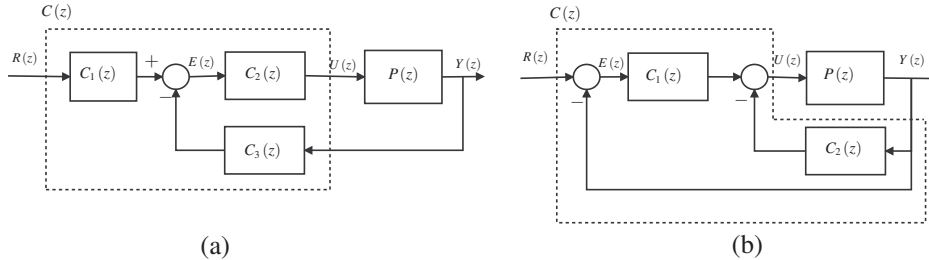


Fig. 11.1
Sistema de llaç tancat.

A la Figura 11.2, s'hi poden veure dues estructures de control més complexes. L'estructura de la subfigura 11.2.a rep el nom d'estructura *RST*. En aquest cas, el controlador es descompon en tres parts, $C_1(z)$, $C_2(z)$ i $C_3(z)$ i cadascuna d'elles veu senyals diferents [1, 2] i, per tant, cadascuna d'elles té unes tasques diferents. Aquest esquema té més graus de llibertat que el sistema en cascada original. En canvi, el controlador de



Fig. 11.2
Arquitectures de control.



la subfigura 11.2.b està compost per dos llaços de realimentació, un interior $C_2(z)$, que té com a objectiu principal facilitar l'estabilització del sistema, i un d'exterior $C_1(z)$, encarregat de garantir les prestacions requerides.

L'ús d'una estructura o una altra depèn de l'aplicació concreta i de les tècniques de disseny de controladors que es pretenen emprar. En general, l'estructura en cascada es prou genèrica per a la majoria de casos i serà la que s'utilitzarà en la resta del text.

El controlador es descriu mitjançant una funció de transferència:

$$C(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = k \frac{(z - z_1) \dots (z - z_m)}{(z - p_1) \dots (z - p_n)} \quad (11.1)$$

i presenta un conjunt de graus de llibertat o paràmetres de disseny b_m, \dots, b_0 i a_{n-1}, \dots, a_0 o, alternativament, k, z_1, \dots, z_m i p_1, \dots, p_n , que s'han de seleccionar per tal d'assolir el compliment de les especificacions. Normalment, es procura que l'ordre del controlador, n , sigui el més petit possible que permeti satisfer les especificacions. La manera de seleccionar els paràmetres depèn de la tècnica de disseny. En ocasions, resulta útil emprar els coeficients dels polinomis; en altres els pols i zeros i, altres vegades, convé agrupar-los d'altres formes.

El procés que permet obtenir els valors dels paràmetres a partir de les especificacions rep el nom de *sintonització del controlador*.

11.2. Especificacions

Qualsevol sistema de laç tancat ha de ser, abans que res, estable. Dit això, a continuació es detallen algunes característiques que solen emprar-se com a especificacions:

- Error en estat estacionari. Un objectiu de tot sistema de control és que la sortida segueixi la referència; l'error mesura la diferència entre aquests senyals. Exigir un error en estat estacionari nul determina la forma del controlador (recordeu el principi del model intern (secció 7.4)); en canvi, un error en estat estacionari finit respecte de les entrades graó, rampa o paràbola determina una de les constants de posició, velocitat o acceleració.
- Estabilitat relativa (robustesa). Mesura l'estabilitat del sistema en laç tancat davant les incerteses en els paràmetres del sistema. Entre aquestes mesures, cal destacar el marge de guany i el marge de fase.

- Resposta temporal. La forma en què el sistema arriba a l'estat estacionari i el temps que triga a fer-ho són, en general, especificacions de comportament. La resposta transitòria és funció dels pols i zeros del sistema de llaç tancat. Per tant, les especificacions de resposta temporal es transformen, en general, en la ubicació dels pols i zeros de llaç tancat.

En moltes ocasions, únicament s'especifiquen els pols de llaç tancat, perquè s'assumeix que l'efecte dels zeros és negligible. També és habitual que únicament s'especifiqui la posició dels pols dominants del sistema, cosa que permet donar forma a la resposta temporal amb controladors senzills (d'ordre baix).

Aquest tipus d'especificacions donen informació quantitativa sobre l'ordre del controlador i els valors dels coeficients.

- Resposta freqüencial. Ample de banda. La resposta freqüencial dóna idea de quins components freqüencials pot seguir la sortida i quins no. Així, per tal que un sistema segueixi senyals d'una certa freqüència, cal que la resposta freqüencial de llaç tancat presenti guanys propers a la unitat en aquell rang de freqüències, és a dir, que el sistema de llaç obert presenti guanys elevats en aquest mateix rang. Normalment, s'especifica el rang de freqüències en què la resposta freqüencial ha de tenir un guany gran.

Aquestes especificacions no són excloents entre si. De fet, el més habitual és que se'n plantegi més d'una de simultània.

11.3. Controladors de primer ordre

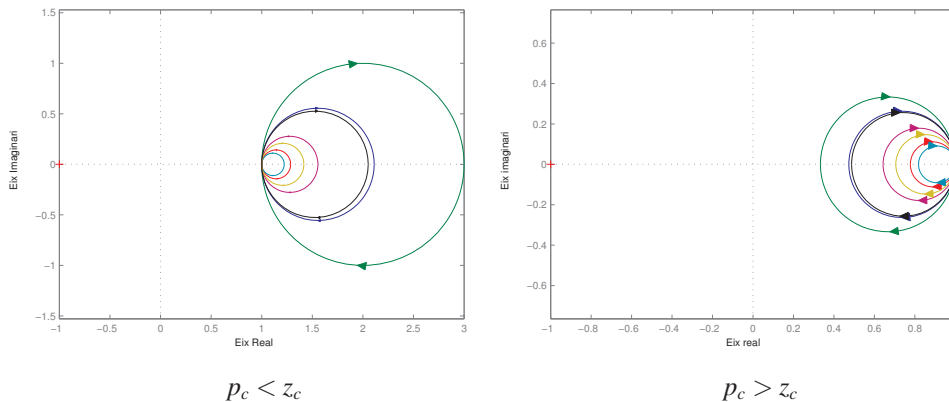


Fig. 11.3
Diagrames de Nyquist de sistemes de primer ordre. Aquests diagrames de Nyquist estan pintats en el rang de freqüències $[-\pi, \pi]$

En el control clàssic, el més habitual és emprar controladors d'ordre baix per tal d'assolir les especificacions. Encara que emprar controladors d'ordre reduït imposa algunes limitacions conceptuals, a la pràctica solen ser suficients per a moltes aplicacions. Uns dels controladors més emprats són els controladors de primer ordre. Es poden escriure de la forma:

$$\bar{C}(z) = k_c \frac{z - z_c}{z - p_c} \tag{11.2}$$



Fig. 11.4
Diagrames de Bode de sistemes de primer ordre.

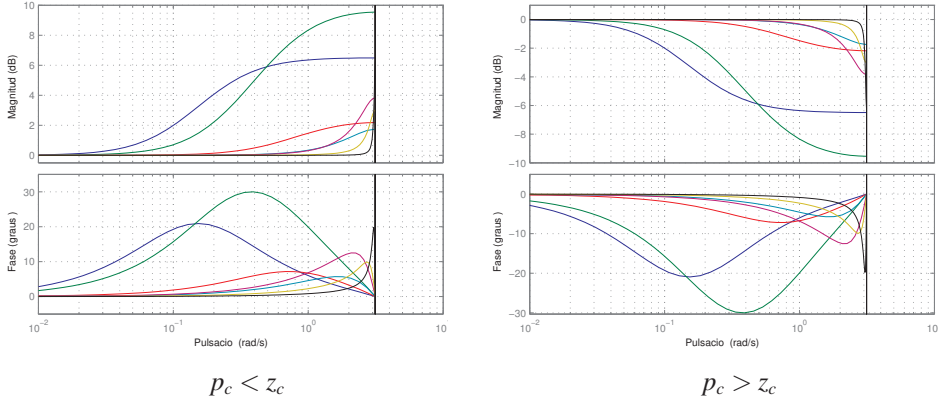
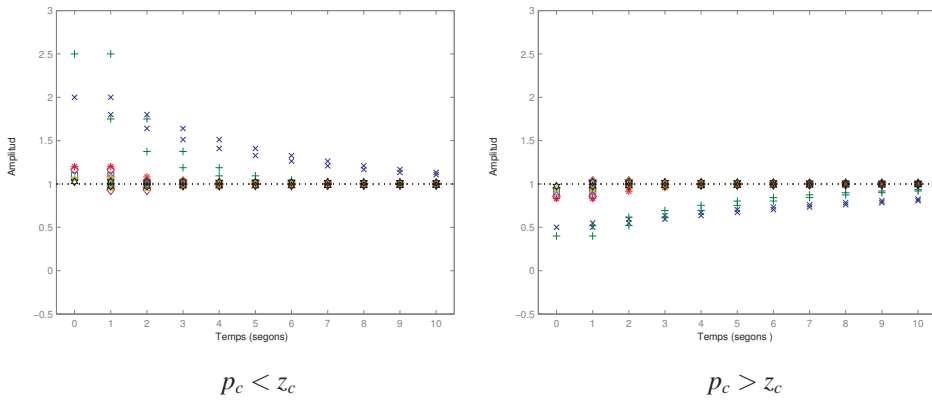


Fig. 11.5
Resposta al graó de sistemes de primer ordre.



Aquests controladors presenten tres graus de llibertat, k_c , z_c i p_c . Malaurament, el guany en contínua $C(1)$ depèn de tots tres. Per aquest motiu, una manera alternativa d'escriure¹ és:

$$C(z) = k_c \left(\frac{1-p_c}{1-z_c} \right) \frac{z-z_c}{z-p_c}. \quad (11.3)$$

Cal adonar-se que ara $C(1) = k_c$ i, per tant, k_c és directament el guany en contínua del sistema.

Aquests controladors s'acostumen a dissenyar amb el pol i el zero a l'interior del disc unitat (sistemes estables i de fase mínima) i, per tant, $-1 < z_c < 1$ i $-1 < p_c < 1$.

Es pot comprovar que el diagrama de Nyquist d'aquests sistemes és un arc de cercle¹ que comença en $C(1)$ i finalitza en

$$C(e^{j\pi}) = C(-1) = \frac{k_c(1-p_c)(-1-z_c)}{(1-z_c)(-1-p_c)}.$$

¹ Si es dibuixa el diagrama de Nyquist entre $[-\pi, \pi]$, són cercles, com es visualitza a la Figura 11.3.

L'arc de cercle està centrat en

$$c = \frac{k_c(z_c p_c - 1)}{(-1 + z_c)(p_c + 1)}$$

i presenta un radi de

$$r = \frac{k_c(p_c - z_c)}{((-1 + z_c)(p_c + 1))}.$$

La Figura 11.3 en mostra alguns exemples. Observeu que, per a $p_c < z_c$, l'arc de cercle és al segon quadrant, mentre que, per a $z_c < p_c$, l'arc de cercle és al primer quadrant. Cal adonar-se que el diagrama de Nyquist d'aquests controladors està sempre al semiplà dret de pla de Nyquist; per tant, la fase està sempre entre -90° i 90° (aquest tipus de sistema rep el nom de positiu real).

El guany del controlador en la freqüència presenta l'expressió següent:

$$|C(e^{j\theta})| = \sqrt{\frac{z_c^2 - 2z_c \cos(\theta) + 1}{p_c^2 - 2p_c \cos(\theta) + 1}} \left| \frac{k(1 - p_c)}{1 - z_c} \right|.$$

Es pot comprovar que presenta un perfil monòton creixent o decreixent en funció de la relació entre z_c i p_c . Per a $\theta = 0$ rad, s'obté el valor de k_c mentre que, per a $\theta = \pi$ rad, s'obté

$$\left| k_c \frac{(1 - p_c)(-1 - z_c)}{(1 - z_c)(-1 - p_c)} \right|.$$

Cal observar que si $z_c > p_c$, aleshores $C(-1) > k$ i que, si $p_c > z_c$, aleshores $C(-1) < k$, cosa que implica que, quan $z_c > p_c$, es tracta d'un sistema passaalt mentre que si estem en el cas contrari, $p_c > z_c$, es tracta d'un sistema passabaix. La Figura 11.4 mostra alguns exemples d'evolució del guany en els dos casos.

La fase d'aquest controlador es pot escriure de la forma següent:

$$\angle C(e^{j\theta}) = \arctan(-\sin(\theta)(p_c - z_c), z_c p_c - (p_c + z_c) \cos(\theta) + 1).$$

La gràfica d'aquesta funció presenta un màxim o un mínim a

$$\bar{\theta} = \arccos\left(\frac{p_c + z_c}{1 + z_c \cdot p_c}\right)$$

i, en aquesta freqüència, la fase i el guany són:

$$\angle C(e^{j\bar{\theta}}) = \arctan\left(-\sqrt{(-1 + z_c^2)(-1 + p_c^2)}(p_c - z_c), (-1 + z_c^2)(-1 + p_c^2)\right) \quad (11.4)$$

$$|C(e^{j\bar{\theta}})| = \sqrt{\frac{-1 + z_c^2}{-1 + p_c^2}} \left| \frac{k(-1 + p_c)}{-1 + z_c} \right|. \quad (11.5)$$

La Figura 11.4 mostra alguns exemples de respostes freqüencials.

En el cas en què $z_c > p_c$ (Figura 11.6) els sistemes presenten sempre fase positiva i un perfil de guanys passaalt. Aquests tipus de controladors reben el nom de *compensadors d'avanç de fase*. Normalment, els compensadors d'avanç de fase s'utilitzen per aportar fase i per ampliar l'ample de banda d'un sistema. Un cas extrem d'aquest tipus de controlador és aquell que presenta el zero a $z_c = 1$; aquest cas correspon a un element derivatiu.

Fig. 11.6
Configuració relativa dels
pols i zeros en els
compensadors d'avanç
de fase.

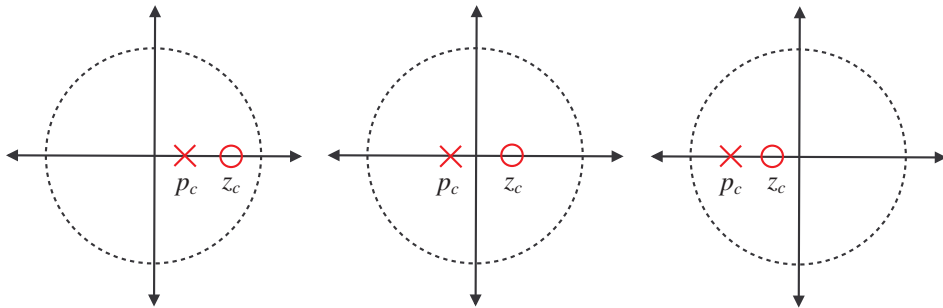
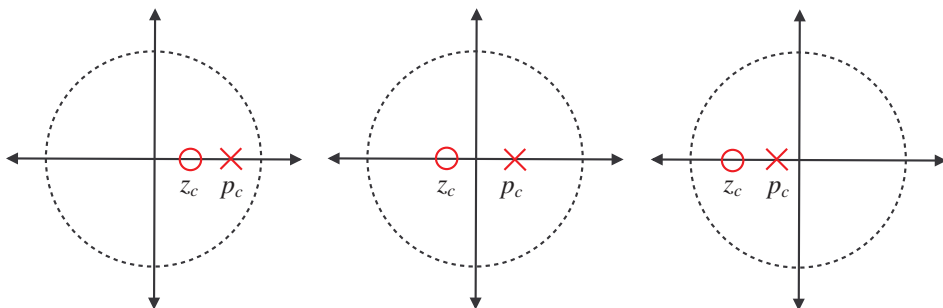


Fig. 11.7
Configuració relativa dels
pols i zeros en els
compensadors de retard
de fase.



En el cas en què $z_c < p_c$ (Figura 11.7), els sistemes presenten sempre fase negativa i un perfil de guanys passabaix. Aquests tipus de controladors reben el nom de *compensadors de retard de fase*. Normalment els compensadors de retard de fase s'utilitzen per reduir l'ample de banda d'un sistema. Un cas extrem d'aquest tipus de sistema correspon a aquell que presenta el pol a $p_c = 1$ i, per tant, introdueix un integrador en el llaç de control.

La Figura 11.5 mostra la resposta temporal d'alguns sistemes de primer ordre. Es pot observar que, en el cas $z_c > p_c$, les respostes són més agressives i prenen valors per sobre del valor en estat estacionari; en contrapartida, en el cas $p_c > z_c$, la resposta és més suau i no sobrepassa mai el valor en estat estacionari. Al capítol 5 es poden obtenir les expressions analítiques d'aquests sistemes.

Els compensadors d'avanç i retard de fase poden dissenyar-se emprant diferents tipus de tècniques, fixació de pols, disseny en el camp freqüencial o en el lloc geomètric de les arrels.

compavan_td:



1. Analitzeu la relació entre el valor de la màxima fase de la resposta freqüencial i la resposta temporal del controlador d'avanç.
 2. Canvieu la pulsació en què es produeix la màxima fase i analitzeu la posició relativa del pol i el zero. És possible deduir-ne alguna relació senzilla?
 3. Canvieu la pulsació en què es produeix la màxima fase i analitzeu la forma de la resposta freqüencial.
-

compret_td:



1. Analitzeu la relació entre el valor del mínim guany de la resposta freqüencial i la resposta temporal del controlador de retard.
 2. Canvieu la pulsació en què es produeix el mínim guany i analitzeu la posició relativa del pol i el zero. És possible deduir-ne alguna relació senzilla?
 3. Canvieu la pulsació en què es produeix el mínim guany i analitzeu la forma de la resposta freqüencial.
-

11.4. Controlador PID

11.4.1. Presentació

Els controladors PID són entre els més populars i més utilitzats a la pràctica [3, 4]. Solen escriure's en la forma genèrica (11.1), o com la suma de tres components o accions: l'acció proporcional (P), l'acció integral (I) i l'acció derivativa (D). Cadascuna d'aquestes accions veu l'error (e_k) i contribueix aditivament a l'acció de control, u_k . En la literatura, aquests controladors s'implementen de diverses formes; tanmateix en aquest capítol es presenten únicament les expressions primigènies de cadascuna de les accions. El controlador PID fou formulat inicialment en temps continu; per aquest motiu s'obtindrà a partir de la discretització de les accions de temps continu.

A part de la interpretació intuïtiva que normalment presenta el comportament del PID, un dels motius de la seva popularitat han estat un conjunt de regles de sintonia, basades en experiments senzills [5]. Encara que aquestes regles empíriques, i amb un fort component heurístic, són de gran interès pràctic no es tractaran en aquest text. En el text, es presenten mecanismes de sintonia analítica basats en l'assoliment d'especificacions.

11.4.2. Acció proporcional

L'acció de control proporcional correspon a l'acció que aplicaria un controlador proporcional, és a dir:

$$u^p(t) = k_p e(t),$$

on $e(t)$ correspon al senyal d'error. Donat que es tracta d'una acció algebraica, la discretització és dir:



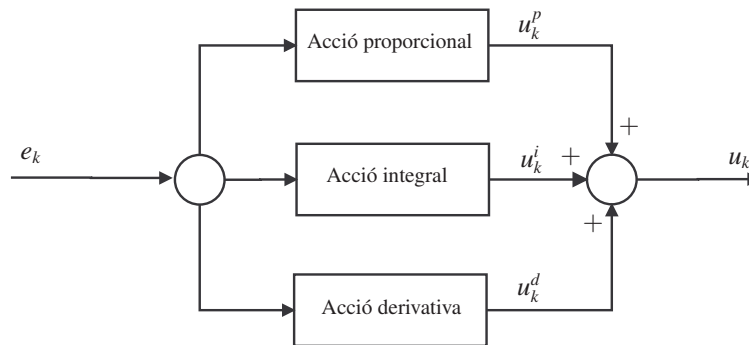
$$u_k^p = k_p e_k.$$

Aquesta acció de control contribueix que els pols de llaç tancat estiguin en el lloc volgut, és dir, que el sistema presenti la resposta temporal volguda.

11.4.3. Acció integral

La majoria dels sistemes de control estan pensats per seguir senyals constants o senyals localment constants. Aquest tipus de senyals poden assimilar-se a graons, i, tal com indica el principi del model intern (seccions 7.2.4 i 7.4), per poder-los seguir sense error estacionari cal que el controlador incorpori un integrador.

Fig. 11.8
Estructura per accions
del controlador PID.



En temps continu, l'acció integral es defineix de la forma següent:

$$u^i(t) = \int_0^t e(t) dt \rightarrow U^i(s) = \frac{1}{s} E(s).$$

Així, donat un senyal de temps continu $f(t)$, la seva integral avaluada en els instants de mostratge és:

$$\phi(k \cdot T) = \int_0^{k \cdot T} f(t) dt.$$

Els sistemes mostrejats únicament reben informació en els instants de mostratge, $k \cdot T$. Per aquest motiu convé escriure la integral de la forma:

$$\phi(k \cdot T) = \phi((k-1) \cdot T) + \int_{(k-1) \cdot T}^{k \cdot T} f(t) dt.$$

Com es pot observar, el valor de la integral en un instant de mostratge es pot calcular com la integral fins a l'instant de mostratge anterior, més la integral del senyal entre l'instant de mostratge anterior i l'instant de mostratge actual.

Atès que en els sistemes mostrejats únicament es disposa del valor de la variable en els instants de mostratge, cal buscar mecanismes per tal d'aproximar el valor de la integral a partir de la informació disponible. Per fer-ho, s'hi introdueixen dues opcions:

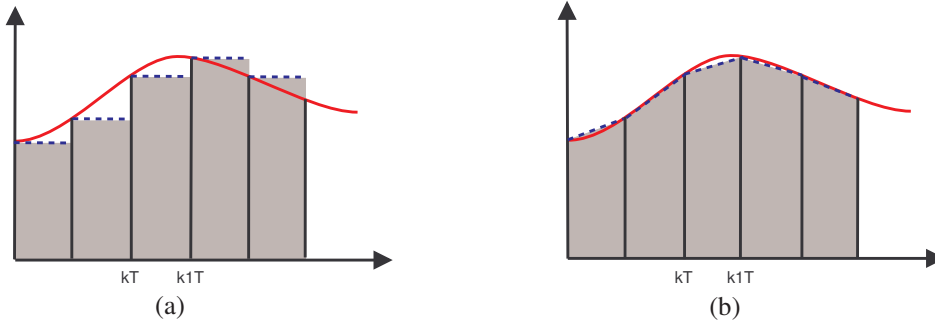


Fig. 11.9
Representació gràfica de l'aproximació de la integral. (a) Aproximació per rectangles (b) Aproximació per trapezis.

- Aproximació per rectangles. Donat un senyal de temps continu, $f(t)$, la seva integral en un període es pot aproximar de la forma següent:

$$\int_{t-T}^T f(t)dt \approx f(t-T) \cdot T.$$

La subfigura 11.9.a mostra una representació gràfica d'aquesta aproximació. Com es pot observar aquesta aproximació únicament utilitza informació del valor senyal a l'instant de mostratge anterior.

Emprant aquesta aproximació, s'obté l'equació en diferències:

$$u_k^i = u_{k-1}^i + e_{k-1} \cdot T \tag{11.6}$$

on u_k^i és el valor de la integral, e_k el senyal que es vol integrar i T el període de mostratge. Si s'aplica la transformada en z a (11.6), s'obté:

$$\frac{U^i(z)}{E(z)} = \frac{T}{z-1}. \tag{11.7}$$

Aquesta funció de transferència és de grau relatiu 1 i, per tant, en la resposta a l'impuls el primer valor és nul; presenta un pol a $z = 1$ que correspon a l'integrador i no presenta cap zero.

- Aproximació per trapezis. Donat un senyal de temps continu, $f(t)$, la seva integral en un període també es pot aproximar de la forma següent:

$$\int_{t-T}^T f(t)dt \approx (f(t) + f(t-T)) \cdot \frac{T}{2}.$$

La subfigura 11.9.b mostra una representació gràfica d'aquesta aproximació. Com es pot observar, aquesta aproximació utilitza informació del valor del senyal a l'instant anterior i l'instant actual.

Emprant aquesta aproximació, s'obté l'equació en diferències següent:

$$u_k^i = u_{k-1}^i + (e_k + e_{k-1}) \cdot \frac{T}{2} \tag{11.8}$$



on u_k^i és el valor de la integral, e_k el senyal que es vol integrar i T el període de mostratge. Si s'aplica la transformada en z a (11.6), s'obté:

$$\frac{U^i(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}. \quad (11.9)$$

Aquesta funció de transferència és de grau relatiu 0 i, per tant, en la resposta a l'impuls el primer valor és no nul ($\frac{T}{2}$); presenta un pol a $z = 1$ que correspon a l'integrador i un zero a $z = -1$. Això correspon a un zero en la darrera freqüència de temps discret. És a dir, en la pulsació $\omega_s = \frac{\pi}{T}$ rad/s, la resposta freqüencial s'anul·la. Aquesta és, en general, una propietat interessant.

Les dues aproximacions proposades incrementen en el tipus del sistema i, per tant, contribueixen que l'error en estat estacionari davant d'entrades graó sigui nul. Per tant, es poden emprar totes dues. A la resta del text, s'emprarà l'aproximació trapezoidal.

11.4.4. Acció derivativa

Un senyal diferenciable, $f(t)$, es pot aproximar de la forma següent:

$$f(t+T) \approx f(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial t} T.$$

Això implica que la derivada es pot emprar per estimar el valor del senyal en el futur. Per aquest motiu, es sol dir que la derivada és una acció de control anticipativa, que afavoreix, en general, l'estabilitat del sistema de llaç tancat.

En temps continu, l'acció derivativa es defineix de la forma següent:

$$u^d(t) = \frac{de(t)}{dt} \rightarrow U^d(s) = sE(s).$$

La derivada és un element que, en temps continu, aporta 90° de fase a totes les freqüències. Això, en general, és bo perquè millora les característiques d'estabilitat relativa. En contrapartida, presenta un guany molt elevat a freqüències elevades; això és problemàtic, ja que s'amplifica el soroll d'alta freqüència².

En les implementacions digitals, cal aproximar la derivada a partir de la informació disponible en els instants de mostratge. Una manera de fer-ho és emprar el mètode d'Euler. Així:

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT} \simeq \frac{f(kT) - f((k-1)T)}{T}. \quad (11.10)$$

Per tant, l'acció derivativa en el domini temporal pot escriure's de la forma:

$$u_k^d = (e_k - e_{k-1}) \frac{1}{T} \quad (11.11)$$

² Per evitar-ho, a les aplicacions pràctiques es solen emprar versions filtrades de la derivada.

on e_k és el senyal al qual es vol extraure la derivada i T és el període de mostratge. Si s'aplica la transformada \mathcal{Z} a (11.11), s'obté:

$$U^d(z) = (E(z) - E(z)z^{-1}) \frac{1}{T} = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} E(z). \quad (11.12)$$

Com es pot observar, (11.12) presenta un zero a $z = 1$ (derivador) i un pol a $z = 0$ (un retard).

11.4.5. Controlador PID

El controlador PID es defineix com la suma de les tres accions –proporcional, integral i derivativa–, ponderades per uns coeficients de proporcionalitat:

$$u^{PID} = K_P u^P + K_I u^I + K_D u^D. \quad (11.13)$$

Que en el domini transformat és:

$$\begin{aligned} PID(z) &= k_p + k_i \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} + k_d \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} = \\ &= \frac{(k_p T + k_d + \frac{k_i}{2} T^2) z^2 + (-k_p T + \frac{k_i}{2} T^2 - 2k_d) z + k_d}{T(z-1)z}. \end{aligned}$$

Observeu que el controlador té dos pols, un a l'origen ($z = 0$) i l'altre a $z = 1$ (integrador), i també té dos zeros que depenen dels valors dels paràmetres k_p , k_i i k_d .

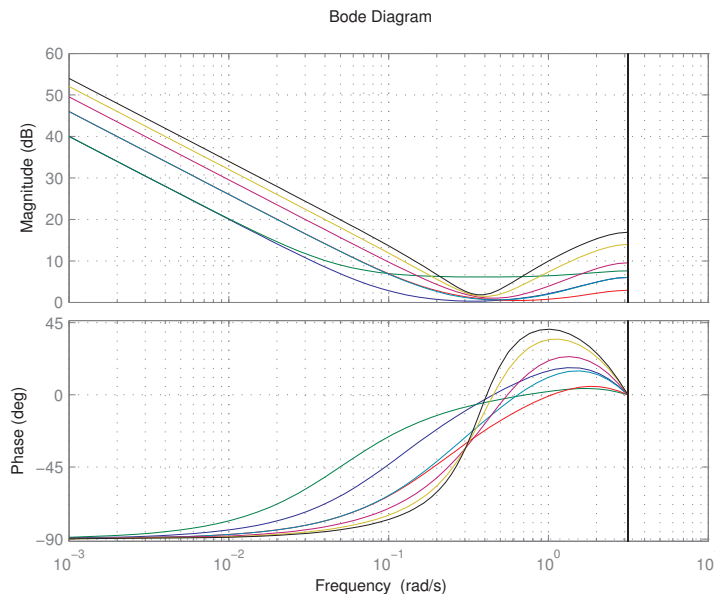


Fig. 11.10 Alguns exemples de diagrames de Bode de controladors PID.

Encara que no és estrictament necessari, la majoria de mecanismes de sintonia assumeixen que els paràmetres són positius, és a dir, $k_p > 0$, $k_i > 0$ i $k_d > 0$. La Figura 11.10

mostra el diagrama de Bode d'alguns d'aquests sistemes. Es pot observar que, en aquests sistemes, la fase és negativa al principi i, posteriorment, és positiva. Per aquest motiu, aquests sistemes es poden considerar compensadors de retard-avanç.

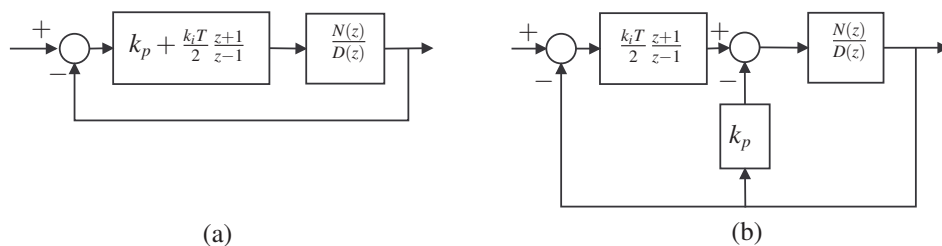
El PID és un sistema de segon ordre; per tant, presenta més flexibilitat que els sistemes de primer ordre, que s'han analitzat a la secció anterior.

11.4.6. Altres opcions

A la secció anterior, s'ha presentat el controlador PID. A la pràctica, no sempre s'utilitzen les tres accions; hi ha casos en què únicament s'utilitzen les accions proporcional i integral o proporcional i derivativa. A les seccions següents, es presenten aquestes estructures.

11.4.6.1. Controlador proporcional integral

Fig. 11.11
Estructures de controladors proporcional integrals, (a) PI, (b) IP.



En sistemes de d'ordre baix, és habitual emprar únicament les accions proporcional i integral; també és habitual no emprar l'acció derivativa en entorns on hi ha molt soroll de mesura. A la subfigura 11.11.a, es mostra l'estructura del controlador proporcional integral, que rep el nom de controlador PI. Si es calcula la funció de transferència del sistema de llaç tancat de la subfigura 11.11.a, s'obté:

$$T_{PI}(z) = \frac{((2k_p + k_i T)z - 2k_p + k_i T)N(z)}{2D(z)(z - 1) + N(z)((2k_p + k_i T)z + k_i T - 2k_p)}. \quad (11.14)$$

Es pot observar que el sistema presenta els zeros de la planta, $N(z)$, i un zero en

$$z = \frac{2k_p - T \cdot k_i}{2k_p + T \cdot k_i}.$$

Atès que a el controlador PI disposa únicament de dos paràmetres de disseny, aquests se solen emprar per garantir l'estabilitat del sistema i donar forma a la seva resposta temporal. Això fa que el zero quedi lliure en funció dels paràmetres del controlador. En moltes ocasions, el zero del controlador genera un sobrepuig no volgut en la resposta temporal.

La subfigura 11.11.b mostra una manera alternativa d'incorporar les accions proporcional i integral. En aquesta estructura, que rep el nom de controlador IP, l'acció integral té

com; entrada l'error mentre la sortida del sistema és l'entrada de l'acció proporcional; en aquest cas, la funció de transferència que porta de la referència a la sortida és:

$$T_{IP}(z) = \frac{k_i T (z + 1) N(z)}{2D(z)(z - 1) + N(z)((2k_p + k_i T)z + k_i T - 2k_p)}. \quad (11.15)$$

Es pot observar que les funcions de transferència (11.14) i (11.15) tenen el mateix denominador; en contrapartida, el numerador ha canviat. El sistema amb estructura IP presenta els zeros de la planta i un zero en $z = -1$. Aquest zero fa que el guany del sistema en llaç tancat sigui nul en la darrera pulsació de temps discret i genera un efecte passabaix en la resposta temporal del sistema de llaç tancat.

És important adonar-se també que, atès que en el controlador IP l'acció proporcional no veu la referència, la resposta al graó en la referència és més suau en el controlador IP que en el controlador PI.

Per aquests motius, i atès que el controlador IP manté les principals característiques del controlador PI, l'estructura IP resulta molt més interessant en la majoria de casos.

11.4.6.2. Controlador proporcional derivatiu

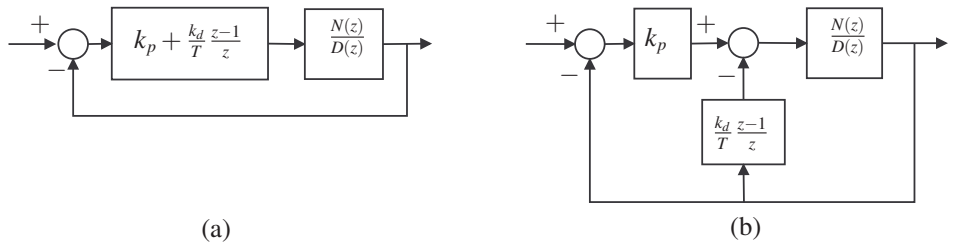


Fig. 11.12 Estructures de controladors proporcionals derivatius, (a) PD, (b) DP.

En els sistemes de tipus 1, no és convenient l'ús de la part integral; incorporar-la implicaria una caiguda important en la fase del sistema de llaç obert, cosa que dificultaria el disseny del controlador. En aquests casos, és habitual emprar únicament les accions proporcional i derivativa. La subfigura 11.12.a presenta l'estructura del controlador proporcional derivatiu, que rep el nom de controlador PD. Si es calcula la funció de transferència del sistema de llaç tancat de la subfigura 11.12.a, s'obté:

$$T_{PD}(z) = \frac{((k_p T_s + k_d)z - k_d) N(z)}{T_s z D(z) + ((k_p T_s + k_d)z - k_d) N(z)}. \quad (11.16)$$

Es pot observar que el sistema preserva els zeros de la planta, $N(z)$, i n'introdueix un de nou en

$$z = \frac{k_d}{k_d + k_p T}.$$

Els dos paràmetres de disseny del controlador PD es solen emprar per garantir l'estabilitat del sistema i la seva resposta temporal. Això fa que el zero quedi lliure en funció dels



paràmetres del controlador. En moltes ocasions, aquest zero crea un sobrepuig no volgut en la resposta temporal.

La subfigura 11.12.b, mostra una manera alternativa d'incorporar les accions proporcional i derivativa. En aquesta estructura, l'acció proporcional té com a entrada l'error, mentre a l'entrada de l'acció derivativa és la sortida del sistema; en aquest cas, la funció de transferència que relaciona la referència amb la sortida és:

$$T_{DP}(z) = \frac{k_p T_s z N(z)}{T_s z D(z) + ((k_p T_s + k_d) z - k_d) N(z)} \quad (11.17)$$

Es pot observar que les funcions de transferència (11.16) i (11.17) presenten el mateix denominador; en contrapartida, el numerador ha canviat. La nova estructura presenta els zeros de la planta i un zero a $z = 0$. Això correspon a un avanç en el temps i, per tant, fa que el sistema de llaç tancat sigui una mica més ràpid.

És important adonar-se també que, atès que en la nova estructura l'acció derivativa no veu la referència, la resposta del graó en la referència és més suau en el cas del controlador PD.

Per aquests motius, i atès que la nova estructura manté les principals característiques del controlador PD, l'estructura de la subfigura 11.12.b resulta molt més convenient en la majoria de casos.

Bibliografia

- [1] R. Longchamp. *Commande numérique de systèmes dynamiques: Volume 1, Méthodes de base*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, troisième édition, 2010. ISBN 13: 9782880748807.
- [2] R. Longchamp. *Commande numérique de systèmes dynamiques: Volume 2, Méthodes avancées*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, troisième édition, 2010. ISBN 13: 9782880748814.
- [3] Karl Johan Åström and Tore Hägglund. *Advanced PID Control*. ISA: The Instrumentation, Systems and Automation Society, August 2005.
- [4] Tore Hägglund. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. ISA: The Instrumentation, Systems and Automation Society, 1995.
- [5] J.G. Ziegler, N.B. Nichols and N.Y. Rochester. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the A.S.M.E.*, 64:759–765, November 1942.

Exercicis proposats

1. Quina és la màxima fase que pot presentar un controlador d'avanç de fase de primer ordre? Quin és el màxim guany que pot aportar (assumint que està normalitzat)? En quina pulsació es produeix?
2. Quina és la màxima atenuació que pot aportar un controlador de retard de fase de primer ordre (normalitzat)?
3. Analitzeu com afecta sobre la resposta freqüencial emprar una acció derivativa filtrada de la forma $\frac{z-1}{z+\alpha}$, en lloc de la forma habitual $\frac{z-1}{z}$, en funció del valor de α .
4. En el cas d'un controlador PI, analitzeu si és d'interès emprar una configuració en què l'acció integral es col·loqui en la cadena de realimentació i l'acció proporcional, en la cadena directa.
5. En el cas d'un controlador PD, analitzeu si és d'interès emprar una configuració en què l'acció derivativa es col·loqui en la cadena directa i l'acció proporcional en la cadena de realimentació.
6. Compareu la composició dels pols i zeros dels sistemes visualitzats a la Figura 11.2.
7. Analitzeu l'interès d'emprar controladors de la forma

$$C_1(z) = \frac{N(z)}{z^n}, \quad C_2(z) = \frac{z^n}{N_c(z)}, \quad C_3(z) = \frac{D_c(z)}{z^n}$$

en l'arquitectura de la Figura 11.2.

8. Analitzeu quina estructura té la resposta freqüencial d'un controlador amb

$$C(z) = k_c \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} \quad \text{amb} \quad 1 > z_1 > p_1 > p_2 > z_2 > -1.$$

Compareu-la amb la resposta freqüencial d'un controlador d'avanç de fase (secció 11.3).

9. Trobeu la relació d'entrada-sortida del sistema de la Figura 11.13. Quina és la funció de transferència del controlador? Analitzeu el cas en què $P_n(z) = P(z)$. Quin interès presenta aquesta arquitectura de controlador?

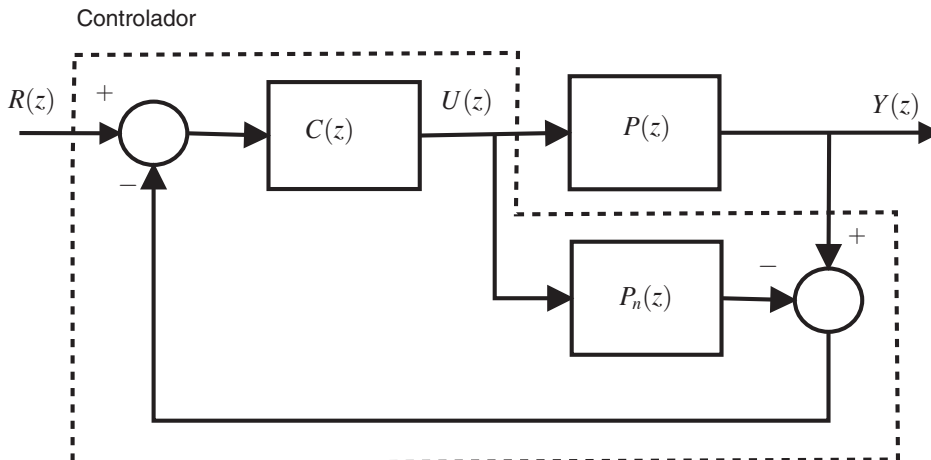
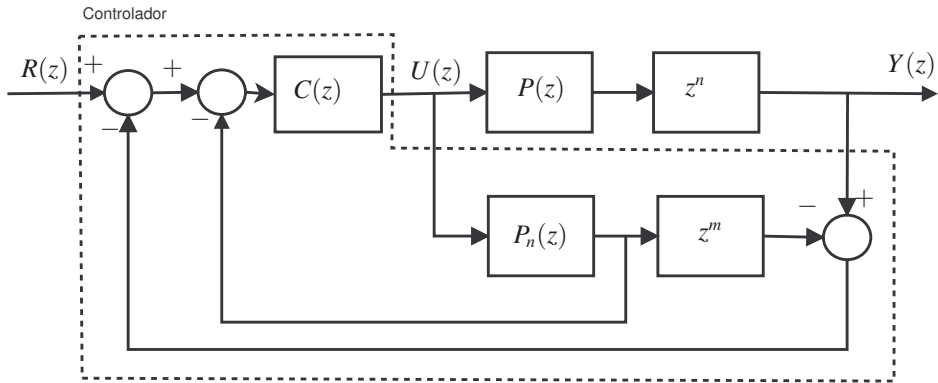


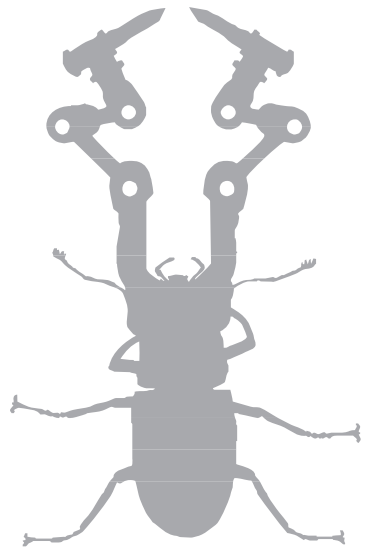
Fig. 11.13 Estructura de control emprada en l'internal model control (IMC).



10. Trobeu la relació d'entrada-sortida del sistema de la Figura 11.14. Quina és la funció de transferència del controlador? Analitzeu el cas en què $P_n(z) = P(z)$ i $n = m$. Quin interès presenta aquesta arquitectura de controlador?

Fig. 11.14
Estructura de control
anomenada Smith
predictor.





→ 12

Disseny per assignació de pols

Un dels objectius principals dels sistemes de control és que el sistema de llaç tancat presenti la resposta temporal volguda, la qual ve determinada, principalment, pels seus pols.

Així, l'objectiu del disseny per assignació de pols és fixar els pols de llaç tancat; d'aquesta manera, es pot forçar l'estabilitat de llaç tancat i dissenyar-ne la resposta temporal.

En aquest capítol, es presenta una metodologia que permet fixar els pols de llaç tancat, assumint que s'utilitza un controlador genèric en cascada. S'analitza també el nombre de paràmetres necessaris en funció de l'ordre del sistema de llaç tancat. Es presenten alguns casos particulars de disseny emprant controladors PID i controladors de primer ordre. Finalment, es desenvolupen alguns exemples de combinació de la tècnica de fixació de pols amb la incorporació d'altres tipus d'especificacions, en particular de la precisió.

12.1. Introducció

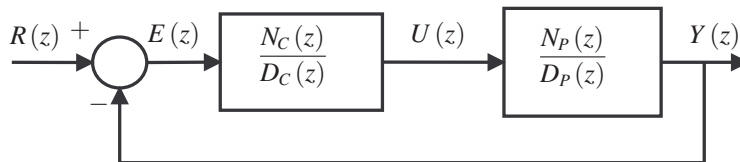


Fig. 12.1
Sistema de llaç tancat.

Es pren com a punt de partida el sistema de la Figura 12.1. En aquesta figura, es disposa d'una planta de temps discret $P(z)$, que es descriu mitjançant una funció de transferència:

$$P(z) = \frac{N_P(z)}{D_P(z)} = \frac{N_P(z)}{D_P(z)} = \frac{b_p z^p + b_{p-1} z^{p-1} + b_{p-2} z^{p-2} + \dots + b_1 z + b_0}{z^m + a_{m-1} z^{m-1} + a_{m-2} z^{m-2} + \dots + a_1 z + a_0}$$



on $N_P(z)$ i $D_P(z)$ són polinomis, amb $m = \deg\{D_P(z)\} \geq p = \deg\{N_P(z)\}$ ¹. S'assumeix que hi ha un controlador, $C(z)$, connectat en cascada, que es representa mitjançant una funció de transferència de la forma següent:

$$C(z) = \frac{N_C(z)}{D_C(z)} = \frac{N_C(z)}{D_C(z)} = \frac{d_l z^l + d_{l-1} z^{l-1} + d_{l-2} z^{l-2} + \dots + d_1 z + d_0}{z^q + c_{q-1} z^{q-1} + c_{q-2} z^{q-2} + \dots + c_1 z + c_0}, \quad (12.1)$$

on $N_C(z)$ i $D_C(z)$ són polinomis, amb $q = \deg\{D_C(z)\} \geq l = \deg\{N_C(z)\}$. Amb aquestes hipòtesis, la relació entre la referència $R(z)$ i la sortida $Y(z)$ ve donada per:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} = \frac{\frac{N_C(z)}{D_C(z)} \frac{N_P(z)}{D_P(z)}}{1 + \frac{N_C(z)}{D_C(z)} \frac{N_P(z)}{D_P(z)}} = \frac{N_C(z)N_P(z)}{N_C(z)N_P(z) + D_C(z)D_P(z)}. \quad (12.2)$$

Comentari 27 Donat un sistema de llaç tancat com el de la Figura 12.1, amb

$$C(z) = \frac{N_C(z)}{D_C(z)} \quad i \quad P(z) = \frac{N_P(z)}{D_P(z)},$$

s'assumeix que $C(z)$ i $P(z)$ no presenten cancel·lacions². La funció de transferència que relaciona la referència amb la sortida compleix:

- L'ordre del sistema de llaç tancat correspon a l'ordre del controlador més l'ordre de la planta.

En altres paraules, el grau del polinomi del denominador de la funció de llaç tancat correspon al grau del polinomi del denominador de la planta ($D_P(z)$) més el grau del polinomi del denominador del controlador ($D_C(z)$).

$$\deg\{N_C(z)N_P(z) + D_C(z)D_P(z)\} = \deg\{D_C(z)\} + \deg\{D_P(z)\}$$

- Els zeros del sistema de llaç tancat $T(z)$ corresponen als zeros del polinomi $N_C(z)N_P(z)$.

En cas de voler eliminar algun zero, z_o , de la planta ($N_P(z_o) = 0$), cal incorporar un terme de la forma $(z - z_o)$ al denominador del controlador, és a dir, $D_C(z) = (z - z_o)D_C^\dagger(z)$. Això només es pot fer si $|z_o| < 1$; altrament, en cas que $|z_o| \geq 1$, una cancel·lació d'aquest estil generaria un sistema que no és internament estable.

Els pols del sistema són els zeros del polinomi del denominador de $T(z)$:

$$N_C(z)N_P(z) + D_C(z)D_P(z) = 0.$$

¹ És habitual que les plantes de temps discret que provenen del mostratge d'una planta de temps continu siguin de grau relatiu 1 i, per tant, $p = m - 1$.

² $N_P(z)$ i $D_C(z)$, i $D_P(z)$ i $N_C(z)$ no presenten zeros en comú.

Aquests pols determinen l'estabilitat i permeten caracteritzar la resposta temporal del sistema de llaç tancat. L'objectiu de disseny és fixar els pols del sistema de llaç tancat; en altres paraules, el que es pretén és donar forma al polinomi del denominador de $T(z)$.

El grau del polinomi $D(z) = N_C(z)N_P(z) + D_C(z)D_P(z)$ és $n = \deg\{D_C(z)\} + \deg\{D_P(z)\}$. No és pèrdua de generalitat suposar que assumir que $D(z)$ és un polinomi mònic³. Amb aquesta hipòtesi, es pot escriure:

$$D(z) = (z - p_1) \cdot (z - p_2) \cdots (z - p_n) = \prod_{k=1}^n (z - p_k) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1z + \alpha_0. \quad (12.3)$$

Els coeficients del polinomi es poden pensar com a funcions no lineals dels pols $\alpha_k(p_l)$.

Comentari 28 Atès que $D(z)$ és un polinomi sobre els reals, aleshores, si p_k és un pol complex, aleshores \bar{p}_k també és un pol.

Comentari 29 Cal assenyalar que, en els casos en què hi ha cancel·lació pol/zero, és a dir, $N_C(p_k)N_P(p_k) = 0$ i $D_C(p_k)D_P(p_k) = 0$, aleshores $D(p_k) = 0$ i, per tant, p_k és també un pol de llaç de tancat. Per als càlculs que es realitzaran a continuació, convé assumir que no hi ha cancel·lacions pol/zero (o que aquestes han estat eliminades de $D(z)$).

Tot seguit, s'analitza quina forma presenten els coeficients del polinomi:

$$N_C(z)N_P(z) + D_C(z)D_P(z) \quad (12.4)$$

en funció dels coeficients dels polinomis que defineixen les funcions de transferència de la planta i el controlador. De forma preliminar, assenyalar que:

$$\begin{aligned} D_C(z)D_P(z) &= z^{q+m} + (a_{m-1} + c_{q-1}) \cdot z^{q+m-1} + (a_{m-2} + a_{m-1}c_{q-1} + c_{q-2}) \cdot z^{q+m-2} + \\ &\cdots + (a_k c_0 + a_{k-1}c_1 + a_{k-2}c_2 + \cdots + a_0 c_k) z^k + \cdots \\ &+ (a_1 c_0 + c_1 a_0) \cdot z + a_0 \cdot c_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_C(z)N_P(z) &= d_l b_p z^{l+p} + (d_l b_{p-1} + d_{l-1} b_p) \cdot z^{l+p-1} + (d_l b_{p-2} + d_{l-1} b_{p-1} + d_{l-2} b_p) \cdot z^{l+p-2} + \\ &\cdots + (d_k b_0 + d_{k-1} b_1 + d_{k-2} b_2 + \cdots + d_0 b_k) z^k + \cdots \\ &+ (d_1 b_0 + d_0 b_1) \cdot z + d_0 \cdot b_0. \end{aligned}$$

Així, quan $m = p$ i $q = l$, (12.4) pren la forma:

$$\begin{aligned} N_C(z)N_P(z) + D_C(z)D_P(z) &= \\ &(d_q b_m + 1) z^{q+m} + (d_q b_{m-1} + d_{q-1} b_m + a_{q-1} + c_{m-1}) z^{q+m-1} + \cdots \\ &+ (d_1 b_0 + d_0 b_1 + a_1 c_0 + c_1 a_0) \cdot z + d_0 b_0 + a_0 c_0. \end{aligned} \quad (12.5)$$

³ El coeficient del terme de grau n és 1. Si $D(z)$ no és mònic, es pot convertir en mònic dividint tot el polinomi pel coeficient de major grau.



Quan $m = p + 1$ i $q = l$ (cas més freqüent), (12.4) pren la forma:

$$\begin{aligned} N_C(z)N_P(z) + D_C(z)D_P(z) = & \quad (12.6) \\ z^{q+m} + (d_q b_{m-1} + d_{q-1} b_m + a_{q-1} + c_{m-1}) z^{q+m-1} + \dots \\ + (d_1 b_0 + d_0 b_1 + a_1 c_0 + c_1 a_0) \cdot z + d_0 b_0 + a_0 c_0. \end{aligned}$$

Per tal que $N_C(z)N_P(z) + D_C(z)D_P(z)$ presenti els pols volguts, p_k , cal que els coeficients de (12.3) siguin iguals als coeficients de (12.6)⁴. Això genera un sistema de $q + m$ equacions:

$$\begin{aligned} d_q b_{m-1} + a_{m-1} + c_{q-1} &= \alpha_{q+m-1}(p_k) \\ &\vdots \\ d_0 b_0 + a_0 c_0 &= \alpha_0(p_k). \end{aligned}$$

En el disseny de controladors, $P(z)$ està determinat i, per tant, els coeficients de $N_P(z)$, b_k , i els coeficients de $D_P(z)$, a_k , són coneguts. En contrapartida, els coeficients del $N_C(z)$, d_k , i els coeficients de $D_C(z)$, c_k , són variables lliures i, per tant, paràmetres de disseny. Així, l'objectiu és trobar el valor de d_k i c_k , un cop fixats els pols de llaç tancat, p_k , que són les especificacions.

Per resoldre el sistema d'equacions, es pot plantejar de la forma:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} b_{m-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{m-2} & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & a_{m-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & 0 & \dots & \dots & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_q \\ d_{q-1} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \\ c_{q-1} \\ c_{q-2} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ a_{m-2} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \alpha_{q+m-1}(p_k) \\ \alpha_{q+m-2}(p_k) \\ \vdots \\ \alpha_1(p_k) \\ \alpha_0(p_k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Aquest és un sistema lineal que és fàcilment resoluble emprant mètodes numèrics.

En funció del nombre d'equacions i els nombre d'incògnites, els sistemes lineals es classifiquen en:

⁴ En cas que $p = m$ i $q = l$, cal transformar (12.5) en un polinomi mònic abans d'igualar-lo amb (12.3). Això pot provocar que algunes equacions es transformin en no lineals.

- Determinats. En aquest cas, hi ha tants paràmetres lliures com pols de llaç tancat.

Cal assenyalar que el sistema de llaç tancat presenta $q + m$ pols; per tant, perquè el controlador (12.1), que presenta q paràmetres lliures en el numerador i $q + 1$ paràmetres lliures en el denominador, pugui fixar tots els pols de llaç tancat cal que compleixi:

$$q + m = 2q + 1 \rightarrow q = m - 1.$$

Així, si tenim una planta d'ordre m , per poder fixar tots els pols de llaç tancat serà necessari disposar un controlador de la forma (12.1) d'ordre $m - 1$ ($q = m - 1$).

- Sobredeterminats. En aquest cas, hi ha més paràmetres lliures que pols de llaç tancat.

Quan es disposa d'un controlador d'ordre més elevat del necessari ($q > m - 1$), un cop fixats els pols de llaç tancat és possible fixar altres característiques d'interès. Unes especificacions especialment rellevants són aquelles lligades a la precisió. És important adonar-se que fixar el pols no implica res sobre les característiques de precisió.

Si per exemple es volen afegir dues restriccions addicionals a les que ja s'han imposat pels pols, cal disposar d'un controlador de la forma (12.1), que compleixi:

$$q + m + 2 = 2q + 1 \rightarrow q = m + 1.$$

En cas que les especificacions addicionals es puguin expressar en forma d'equacions lineals, la resolució del sistema complet es realitzarà emprant un procediment de resolució d'equacions lineals que presenta solució directa. En cas contrari, si s'hi incorporen especificacions amb restriccions no lineals serà necessari emprar algorismes iteratius més sofisticats.

- Subdeterminats. En aquest cas, hi ha menys paràmetres lliures que pols de llaç tancat.

En algunes ocasions, es disposa de controladors d'estructura fixa, de tipus PID o avanç-retard. Aquest tipus de controladors són d'ordre baix i disposen de pocs paràmetres lliures. Això fa que en la majoria de casos, no sigui possible fixar tots els pols de llaç tancat. Atès que no es poden fixar tots els pols, en plantejar el sistema d'equacions (12.7), alguns dels pols es converteixen en incògnites, p'_k , i la resta es mantenen com a especificacions p_k . El nombre de pols que es mantenen com a especificacions, p_k , ha de ser igual al nombre de paràmetres de disseny.

Clarament, els pols lliures p'_k , que són funció dels paràmetres de la planta i els pols especificats, p_k , alteren el comportament del sistema de llaç tancat. Aquesta alteració es pot classificar en les categories següents:

- Pols lliures inestables. En cas que algun dels pols lliures compleixi $|p'_k| \geq 1$, el sistema de llaç tancat serà inestable i, per tant, el disseny del controlador no és acceptable. Per solucionar el problema, hi ha dues opcions: una primera opció és canviar les especificacions i fixar uns altres pols, p_k . Alternativament, es pot emprar un controlador amb més paràmetres lliures, cosa que permetria fixar un nombre més elevat de pols.



- Pols lliures dominants. És possible que el pols lliures estiguin a l'interior del cercle unitat però siguin dominants respecte als pols fixats, és a dir $|p'_k| > |p_r|$. En aquest cas, tot i que el sistema de llaç tancat és estable, aquest no es comportarà d'acord amb les especificacions volgudes. Per tant, en principi es tracta d'un disseny poc recomanable.
- Pols lliures no dominants. Aquest cas correspon al cas ideal, perquè encara que el sistema presenti més pols que els especificats el comportament dels pols addicionals és poc rellevant i el sistema de llaç tancat es comporta, aproximadament, tal com s'ha especificat.

Malauradament, no hi ha un mecanisme clar que permeti analitzar a priori en quines condicions s'estarà en funció dels paràmetres de la planta i els pols especificats.

El disseny de la resposta temporal mitjançant la fixació únicament dels pols de llaç tancat és un procediment aproximat. En els casos en què es vulgui fixar la resposta temporal amb precisió, cal fixar també els zeros. Per fer-ho, cal emprar arquitectures més sofisticades [1, 2, 3] que les presentades aquí.

A les seccions següents, es presenten diferents exemples d'aplicació de la tècnica descrita en aquesta secció. La secció 12.2 presenta alguns exemples de sistemes determinats; en aquesta secció, s'analitza també com es seleccionen els pols volguts a partir d'especificacions temporals i com es selecciona l'estructura del compensador a partir dels pols que s'han de fixar. La secció 12.3 presenta exemples de sistemes sobredeterminats i analitza el procediment que permet incloure especificacions addicionals de precisió. Finalment, la secció 12.4 analitza alguns exemples de sistemes subdeterminats i fa èmfasi en el disseny de controladors PID mitjançant l'assignació de pols.

12.2. Assignació de pols en sistemes determinats

Normalment, és complicat determinar directament quins són els pols volguts per a un sistema de llaç tancat determinat. En general, resulta més senzill definir les especificacions en termes del temps d'estabilització, t_s (temps en què la resposta al graó arriba al 2% del valor final), el temps de pic, t_p (temps en què la resposta temporal presenta el seu valor màxim), el sobrepic, M_p (valor màxim que pren la resposta al graó) o la freqüència d'oscil·lació. Caracteritzar aquestes magnituds en temps discret és més complex que en temps continu; per aquest motiu, és habitual emprar les expressions de temps continu [4, 5] (secció 5.7). La taula 12.1 presenta les expressions més emprades.

Taula 12.1
Relació dels paràmetres de resposta temporal amb la posició del pols de temps continu.

Tipus de pol	Posició del pol (s)	Característica	Expressió
pol real	$-\sigma (\sigma > 0)$	estacionari (2%)	$t_s = 4 \frac{1}{\sigma} s$
pols imaginaris	$-\sigma \pm \omega j (\sigma > 0)$	estacionari (2%)	$t_s = 4 \frac{1}{\sigma} s$
pols imaginaris	$-\sigma \pm \omega j (\sigma > 0)$	pulsació oscil·lació	$\omega \text{ rad/s}$
pols imaginaris	$-\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} j (\zeta > 0, \omega_n > 0)$	sobrepic	$e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pi} \%$
pols imaginaris	$-\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} j (\zeta > 0, \omega_n > 0)$	temps de sobrepic	$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} s$

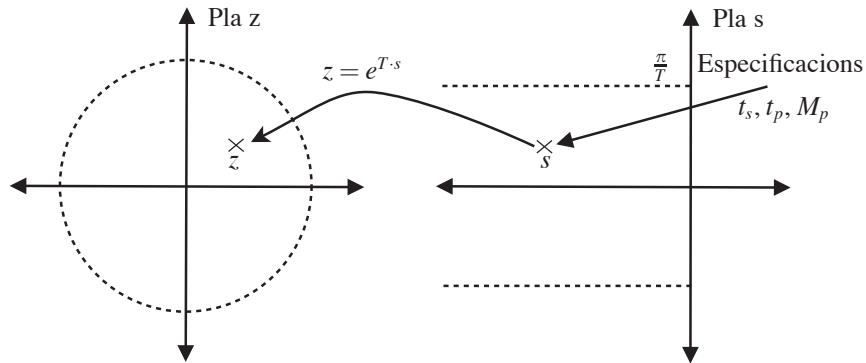


Fig. 12.2 Relació dels pols en el pla s amb els pols en el pla z .

A partir de les especificacions i les expressions analítiques, s’obtenen els pols de temps continu; finalment, s’obtenen els pols de temps discret a partir de l’expressió $z = e^{T \cdot s}$.

El procediment descrit és força útil però és aproximat, perquè el sistema de temps discret no presenta exactament les característiques temporals especificades (v. secció 5.7).

Exemple 82 Donada la planta

$$P(z) = \frac{1}{z - \frac{4}{5}}$$

i un període de mostratge $T = 1$ s, es vol trobar un controlador per tal que el sistema de llaç tancat presenti un sobrepuig d’un 10% i un temps d’establiment de 5 s.

Primerament, es busquen els pols que presenten les característiques volgudes. Per tal de tenir un sobrepuig del 10%, cal tenir un coeficient d’esmoreïment $\zeta = 0.591$. Per tal que el temps d’establiment sigui 5 s cal que $\sigma = \frac{4}{5}$. Per tant, $\omega_n = 1.353$ rad/s i $\omega = 0.812$ rad/s. Finalment, els pols de temps continu són $s_d = -\frac{4}{5} \pm 1.091 j$, per tant, els pols de temps discret equivalents són $z_d = e^{s \cdot T} = 0.207 \pm 0.399 j$.

Així, el polinomi del denominador de temps discret és:

$$D_{des}(z) = (z - z_d)(z - \bar{z}_d) = z^2 - 0.414z + 0.202.$$

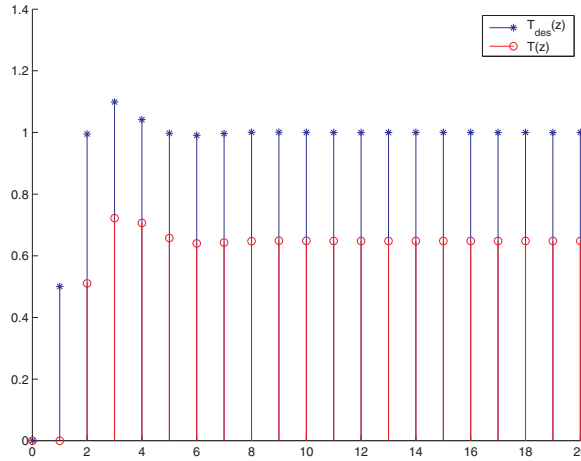
Atès que s’han de fixar dos pols, és necessari disposar d’un controlador amb dos paràmetres lliures. El controlador:

$$C(z) = \frac{d_0}{z + c_0}$$

presenta dos paràmetres lliures i, per tant, servirà per assignar els dos pols. Seguint el procediment indicat a la secció anterior, es construeix la funció de transferència de llaç tancat:



Fig. 12.3
Resposta temporal del sistema de llaç tancat i la del sistema de referència (Exemple 82).



$$T(z) = \frac{P(z)C(z)}{1 + P(z)C(z)} = \frac{5d_0}{5z^2 + (5c_0 - 4)z - 4c_0 + 5d_0}.$$

Abans de calcular els coeficients, cal escriure el polinomi del denominador en forma mònica:

$$z^2 + \left(c_0 - \frac{4}{5}\right)z - \frac{4}{5}c_0 + d_0.$$

Posteriorment, s'igualen els coeficients d'aquest polinomi i els de $D_{des}(z)$, i s'obté:

$$c_0 = 0.38558, d_0 = 0.51036.$$

Així, el sistema de llaç tancat presenta la forma:

$$T(z) = \frac{0.51036}{z^2 - 0.41442z + 0.20190}.$$

La Figura 12.3 presenta la resposta temporal del sistema de llaç tancat. Aquesta figura presenta també la resposta temporal d'un sistema de temps discret obtingut directament del mostratge del sistema de temps continu de referència $T_{des}(s) = \frac{\omega_n^2}{(s-s_d)(s-\bar{s}_d)}$. Aquest sistema correspon a:

$$T_{des}(z) = \frac{0.28445(z + 0.579)}{z^2 - 0.6183z + 0.2019}.$$

$T(z)$ i $T_{des}(z)$ presenten els mateixos pols, però no presenten els mateixos zeros ni el mateix guany. Compartir els pols fa que la forma de la resposta temporal d'ambdós sistemes sigui similar, com es pot observar a la Figura 12.3. En aquesta mateixa figura, es poden observar també algunes diferències, en primer lloc es pot observar que mentre la resposta de $T_{des}(z)$ únicament pren el valor 0 en el primer instant de temps, la de $T(z)$ ho fa en dos instants de temps; això és degut al fet que $T(z)$ no té zeros i és, per tant, de grau relatiu 2, mentre que $T_{des}(z)$ és de grau relatiu 1. En el procediment descrit, no

es tenen en compte els zeros i aquests influeixen en la resposta transitòria. L'altra gran diferència que pot ser fàcilment observada és la diferència en la precisió. Així mentre la resposta de $T_{des}(z)$ assoleix, en estat estacionari, el valor de l'amplitud del graó, la resposta de $T(z)$ presenta un error del 36% aproximadament. Això és degut al fet que en el disseny no s'han tingut en compte les característiques de precisió i, en general, els pols de llaç tancat no són indicadors de la precisió.

Comentari 30 Com s'ha pogut observar a l'Exemple 82 els pols de llaç tancat no estan relacionats directament amb la precisió del sistema. Per tant, fixar els pols de llaç tancat no implica que el sistema presenti unes bones característiques de precisió.

Exemple 83 Donats la planta $P(z) = \frac{z+3}{z^2-0.5z-0.5}$ i un període de mostratge $T = 0.1$ s, es vol trobar un controlador per tal que el sistema de llaç tancat presenti un temps d'establiment de 12 s i una freqüència d'oscil·lació d'1.43 Hz.

Atès que la planta és de segon ordre, calen un mínim de dos paràmetres per fixar els pols de llaç tancat. Per tenir dos paràmetres lliures, cal un controlador de primer ordre, cosa que implica que el sistema de llaç tancat serà de tercer ordre. Així, finalment, ens caldran tres paràmetres per poder fixar tots els pols de llaç tancat. Un controlador que es pot emprar és:

$$C(z) = \frac{d_1 z + d_0}{z + c_0}.$$

Per assolir les característiques de resposta temporal volgudes, s'apliquen les expressions de la Taula 12.1:

$$t_s = 12 \text{ s} = \frac{4}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{1}{3}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 1.43 \text{ rad/s}$$

i, per tant, el pol de temps continu equivalent és $s_d = -\frac{1}{3} \pm 2.86\pi j$, en passar-lo a temps discret, s'obté $z_d = e^{s_d \cdot 0.1} = 0.603 \pm 0.756j$. D'aquestes especificacions, se n'obtenen dos pols de referència i el sistema és de tercer ordre. Per això, cal fixar un pol addicional. En aquest exemple, s'opta per fixar el tercer pol a $z = 0$. Així, el polinomi del denominador volgut pren la forma:

$$D_{des}(z) = z(z - z_d)(z - \bar{z}_d) = z^3 - 1.20z^2 + 0.935z.$$

La funció de transferència de llaç tancat és:

$$T(z) = \frac{2(z+3)(d_1 z + d_0)}{2z^3 + (2d_1 + 2c_0 - 1)z^2 + (-1 + 2d_0 + 6d_1 - c_0)z - c_0 + 6d_0}.$$

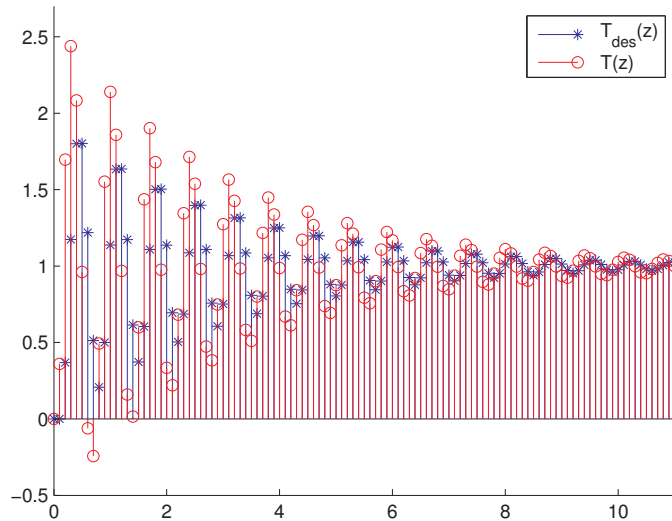
El polinomi del denominador en forma mònica és:

$$D(z) = z^3 + (d_1 + c_0 - 0.5)z^2 + (-0.5 + 1d_0 + 3d_1 - 0.5c_0)z - 0.5c_0 + 3d_0.$$

Igualant els coeficients de $D(z)$ i $D_{des}(z)$, s'obté:

$$c_0 = -1.066, d_0 = -0.178, d_1 = 0.360.$$

Fig. 12.4
Resposta temporal del sistema de llaç tancat i la del sistema de referència (Exemple 83).



Així, la funció de transferència de llaç tancat és:

$$T(z) = \frac{2(z+3)(0.360z - 0.178)}{2z^3 - 2.412z^2 + 1.871z}$$

mentre que la funció de transferència de referència és:

$$T_{des}(z) = \frac{0.36887(z+0.9774)}{z(z^2 - 1.206z + 0.9355)}$$

Encara que els pols de les dues funcions de transferència són els mateixos, hi ha diferència en la posició dels zeros i el grau relatiu. La Figura 12.4 mostra la resposta al grau de les dues funcions de transferència. La forma de les respostes és força semblant. En aquest cas, les dues segueixen el grau sense error estacionari. Això és degut al fet que la planta presenta un integrador i, per tant, el sistema és de tipus 0.

12.3. Assignació de pols en sistemes sobredeterminats

La majoria de controladors de temps discret s'implementen en computadors, cosa que fa que augmentar l'ordre del controlador no sigui gaire problemàtic. Augmentar el nombre de paràmetres lliures fa que sigui possible fixar altres característiques, a part dels pols de llaç tancat.

La majoria de sistemes de control estan pensats perquè un cert senyal (la sortida del sistema) segueixi la referència. Per aquest motiu, encara que la resposta temporal és una característica força important, la precisió també ho és. El mecanisme descrit permet donar forma a la resposta temporal a partir de fixar els pols. Per fixar també la precisió del sistema, cal afegir algunes restriccions addicionals. Tot seguit, s'analitza quina forma presenten aquestes relacions addicionals que s'han d'afegir.

Al capítol 7, s'ha analitzat quines característiques ha de tenir un sistema per tal que presenti les característiques de precisió volgudes en funció del tipus de senyals que es vol seguir o rebutjar. Una funció de transferència que permet caracteritzar la precisió és la funció de sensibilitat:

$$S(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + P(z)C(z)} = \frac{D_P(z)D_C(z)}{D_P(z)D_C(z) + N_P(z)N_C(z)}.$$

Aquesta relaciona el senyal d'error amb el senyal de referència. D'aquesta funció de transferència, se'n poden obtenir les restriccions necessàries per tal d'imposar restriccions de precisió. Així, alguns exemples són:

- Error nul davant d'entrades graó. Per tal que el sistema de llaç tancat presenti error nul en estat estacionari davant d'entrades graó, cal que $S(1) = 0$, cosa que és equivalent a:

$$D_P(1)D_C(1) = 0.$$

Atès que $D_P(z)D_C(z)$ correspon al polinomi del denominador de la funció de llaç obert, aquesta condició és equivalent a dir que el sistema sigui de tipus 1, com a mínim. Els coeficients de $D_P(z)$ són coneguts i constants, mentre que $D_C(z) = z^q + c_{q-1}z^{q-1} + c_{q-2}z^{q-2} + \dots + c_1z + c_0$; per tant, la restricció imposada és lineal i escalar, cosa que no hi introdueix més complexitat de resolució. Que la restricció sigui escalar indica que únicament cal un paràmetre lliure per imposar-la.

- Error constant enfront davant d'entrades graó. La funció de sensibilitat avaluada a $z = 1$ indica directament l'error percentual (tant per u) en estat estacionari que es comet davant d'entrades graó. Així, si es vol un error e^{ss} , cal imposar la restricció:

$$\frac{D_P(1)D_C(1)}{D_P(1)D_C(1) + N_P(1)N_C(1)} = e^{ss} \rightarrow (e^{ss} - 1) \cdot D_P(1)D_C(1) + e^{ss} \cdot N_P(1)N_C(1) = 0.$$

La restricció imposada és lineal i escalar; per tant, no introdueix més complexitat de resolució.

- Error constant davant d'entrades rampa. Per poder seguir rampes és necessari que la funció de sensibilitat presenti, com a mínim, dos zeros a $z = 1$ (cosa que és equivalent a dir que el sistema és de tipus 2). Això es pot forçar de la forma:

$$\begin{aligned} D_P(1)D_C(1) &= 0 \\ \left. \frac{\partial D_P(z)D_C(z)}{\partial z} \right|_{z=1} &= 0. \end{aligned}$$

Aquest tipus d'especificació implica dues restriccions lineals i escalars. Caldrien, per tant, dos paràmetres lliures, però no hi introduiran més complexitat de resolució.

- Seguiment de senyals sinusoidals. Per tal que un sistema de llaç tancat sigui capaç de seguir senyals sinusoidals de pulsació $\theta = \omega T$, cal que la funció de sensibilitat tingui zeros a $z = e^{\pm j\theta} = e^{\pm j\omega T}$. Per tant, cal imposar la restricció:

$$D_P(e^{\pm j\theta})D_C(e^{\pm j\theta}) = 0.$$



Aquesta és una restricció sobre els nombres complexos i , per tant, es pot descompondre en dues sobre els nombres reals. Si s'utilitza la part real i la part imaginària en la descomposició se n'obtenen dues restriccions lineals i , per tant, no hi introduiran complexitat en la seva resolució.

Aquestes restriccions poden combinar-se entre si, és a dir, si es vol seguir graons i senyals sinusoidals, podrien incorporar-s'hi les seves corresponents restriccions per tal d'assolir un sistema de control que compleixi les diferents especificacions.

Exemple 84 Donats la planta

$$P(z) = \frac{1}{z - \frac{4}{5}}$$

i un període de mostratge $T = 1$ s es vol trobar un controlador per tal que la resposta al graó del sistema de llaç tancat presenti error estacionari nul, un sobrepuig de 0.1% i un temps d'establiment de 5 s.

Atès que la planta i les especificacions en la resposta temporal són les mateixes que a l'Exemple 82, els pols de referència i , per tant, el polinomi de referència són els mateixos:

$$D_{des}(z) = (z - z_d)(z - \bar{z}_d) = z^2 - 0.618z + 0.202.$$

Atès que s'han de fixar dos pols i una condició de precisió, és necessari disposar d'un controlador amb tres paràmetres lliures. Servirà el controlador:

$$C(z) = \frac{d_1z + d_0}{z + c_0}.$$

La funció de transferència de llaç tancat serà:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{P(z)C(z)}{1 + P(z)C(z)} = 5 \frac{d_1z + d_0}{5z^2 + (5d_1 - 4 + 5c_0)z + 5d_0 - 4c_0}$$

mentre que la funció de sensibilitat serà:

$$S(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + P(z)C(z)} = \frac{(5z - 4.0)(z + c_0)}{5z^2 + (5d_1 - 4 + 5c_0)z + 5d_0 - 4.0c_0}.$$

Abans de calcular els coeficients, cal escriure el polinomi del denominador en forma mònica:

$$z^2 + (c_0 - 0.8 + d_1)z - 0.8c_0 + d_0.$$

Posteriorment, igualant els coeficients d'aquest polinomi i els de $D_{des}(z)$, i afegint-hi la condició

$$S(1) = 0 \rightarrow 1 + c_0 = 0$$

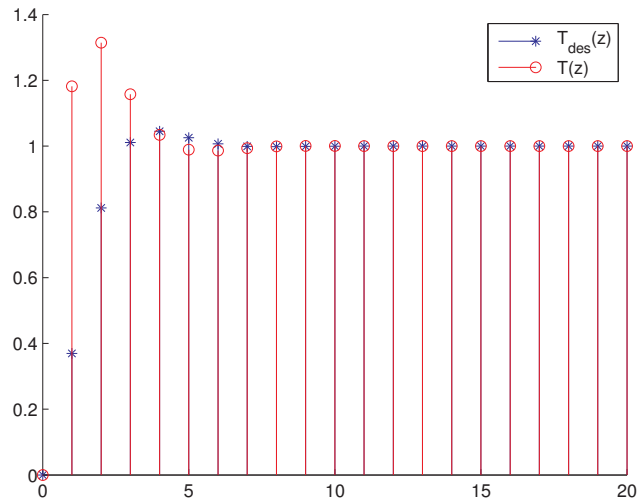


Fig. 12.5 Resposta temporal del sistema de llaç tancat i la del sistema de referència (Exemple 84).

que garanteix error estacionari nul en entrades graó, s'obté:

$$c_0 = -1, d_0 = -0.598, d_1 = 1.182.$$

Cal assenyalar que $c_0 = -1$, cosa que implica que el controlador presenta un integrador (el controlador pot pensar-se com un controlador PI) i, per tant, el sistema serà de tipus 1, cosa que farà que hi hagi un error nul enfront d'entrades graó.

Així, el sistema de llaç tancat presenta la forma:

$$T(z) = 5 \frac{1.182z - 0.598}{5z^2 - 3.092z + 1.009}.$$

La Figura 12.5 presenta la resposta temporal del sistema de llaç tancat. Aquesta figura presenta també la resposta temporal del sistema de referència, $T_{des}(z)$, que correspon al mateix que el de l'Exemple 82. Podem adonar-nos que el temps d'establiment i l'error estacionari són els mateixos i, per tant, iguals als especificats, mentre que la resposta transitòria presenta alguna diferència. En particular, el sistema dissenyat presenta un sobrepuig força més elevat que l'especificat (31%). Aquesta diferència és atribuïble a la diferència entre els zeros de les dues funcions de transferència. El sistema de referència presenta un zero en el semiplà dret ($z = 0.5062$), mentre que el dissenyat el presenta en el semiplà esquerre ($z = -0.579$).

Exemple 85 Donada una planta de la forma

$$P(z) = \frac{3z + 3}{3z^2 - 0.5z - 1.0},$$

amb $T = \frac{1}{2}$ es demana construir un controlador que faci que el sistema de llaç tancat sigui capaç de seguir senyals sinusoidals de freqüència $\frac{1}{4}$ Hz i que la resposta al graó no presenti oscil·lacions ni sobrepuig i tingui un temps d'establiment de 10s.



Per imposar la capacitat de seguiment dels senyals sinusoidals, es necessitaran dos paràmetres lliures. Addicionalment, faran falta tants paràmetres lliures com ordre tingui el sistema de llaç tancat. El sistema de llaç tancat serà d'ordre $2 + q$ (la planta és de segon ordre), on q és l'ordre del controlador. Així, podem plantejar el sistema d'equacions següent:

$$2 + 2 + q = q + l' + 1, l' \leq q$$

on l' és el grau del polinomi del numerador del controlador. La solució que fa q mínim és $q = 3$ i $l = 3$. Així, el controlador presentarà la forma:

$$C(z) = \frac{d_3 z^3 + d_2 z^2 + d_1 z + d_0}{z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0}.$$

Que, com es pot observar, presenta set paràmetres lliures.

Atès que les especificacions demanen que no hi hagi oscil·lacions ni sobrepuig, els pols de llaç tancat es fixaran reals. Atès que el sistema de llaç tancat presenta cinc pols es triarà un pol real amb el temps d'estabilització sol·licitat i la resta no dominants respecte d'aquest primer. Així, el primer pol es tria de la forma següent:

$$t_s = 10 = \frac{4}{\sigma} \rightarrow s_1 = -\frac{4}{10} \rightarrow p_1 = e^{-\frac{4}{10} \frac{1}{2}}$$

i de la resta es fan tots iguals i no dominants respecte de p_1 :

$$p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = e^{-10 \frac{4}{10} \frac{1}{2}} = e^{-2}.$$

Per tant, el polinomi del denominador volgut és de la forma:

$$D_{des}(z) = z^5 - 1.36z^4 + 0.553z^3 - 0.09989z^2 + 0.008453z - 0.00027465.$$

Per imposar les característiques de precisió en senyals sinusoidals de pulsació normalitzada θ , s'imposa la restricció:

$$(3z^2 - 0.5z - 1.0) (z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0)_{z=e^{j\theta}} = 0.$$

És interessant adonar-se que el primer polinomi, provinent del denominador de la funció de transferència de la planta, presenta arrels a $-\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$. Per tant, no s'anul·la a $z = e^{j\theta}$ i la restricció és equivalent a la següent:

$$(z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0)_{z=e^{j\theta}} = 0.$$

És a dir:

$$\begin{aligned} c_0 + (\cos(\theta) + j \sin(\theta)) c_1 + (2j \cos(\theta) \sin(\theta) + 2(\cos(\theta))^2 - 1) c_2 \\ - 3 \cos(\theta) + 4j(\cos(\theta))^2 \sin(\theta) - j \sin(\theta) + 4(\cos(\theta))^3 = 0. \end{aligned}$$

Aquesta equació sobre els complexos es pot descompondre en dues equacions sobre els reals:

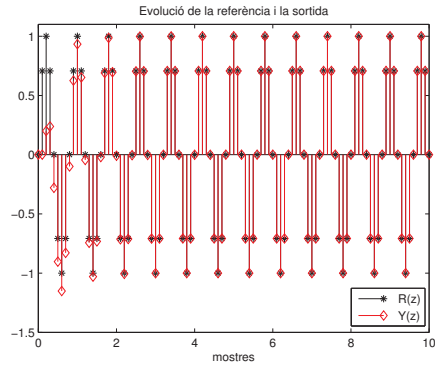
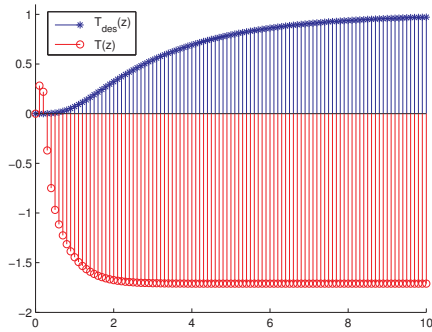


Fig. 12.6 Resposta temporal del sistema de llaç tancat i la del sistema de referència (primer disseny de l'Exemple 85).

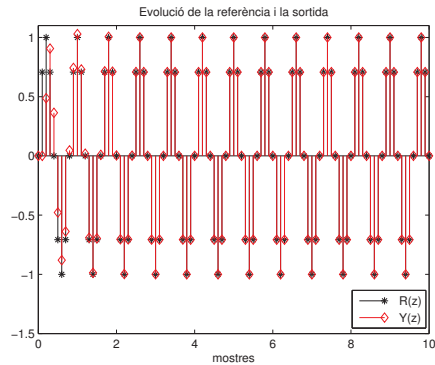
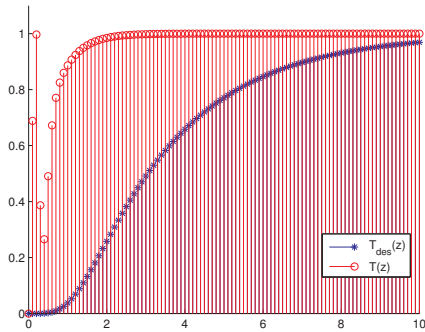


Fig. 12.7 Resposta temporal del sistema de llaç tancat i la del sistema de referència (segon disseny de l'Exemple 85).

$$c_0 + c_1 \cos(\theta) + (2(\cos(\theta))^2 - 1)c_2 - 3\cos(\theta) + 4(\cos(\theta))^3 = 0$$

$$c_1 \sin(\theta) + 2c_2 \cos(\theta) \sin(\theta) + 4(\cos(\theta))^2 \sin(\theta) - \sin(\theta) = 0.$$

D'aquestes dues restriccions i de les obtingudes a en igualar els coeficients dels polinomis, s'obté:

$$c_0 = -0.0620, \quad c_1 = 1.0878, \quad c_2 = -1.4763,$$

$$d_0 = -0.02097, \quad d_1 = 0.38167, \quad d_2 = -0.73028, \quad d_3 = 0.28288.$$

Amb això, s'obté el controlador

$$C(z) = 0.2829 \frac{(z - 0.06215)(z - 0.63184)(z - 1.8876)}{(z - e^{j\frac{\pi}{4}})(z - e^{-j\frac{\pi}{4}})(z - 0.062076)}$$

que genera la funció següent de llaç tancat:

$$T(z) = 6.0 \frac{(z + 1.0)(0.28288z^3 - 0.73028z^2 + 0.38167z - 0.02097)}{6.0z^5 - 8.160z^4 + 3.319z^3 - 0.599z^2 + 0.0507z - 0.001648}$$



La Figura 12.6 mostra la resposta al graó del sistema de llaç tancat i la resposta davant d'una entrada sinusoidal de freqüència $\frac{1}{4}$ Hz. Com es pot comprovar, el temps d'establiment i l'error davant d'entrades sinusoidals són els esperats. Es pot observar, però, que la resposta al graó presenta guany negatiu. Atès que aquest comportament no és desitjable, en la majoria de casos, caldrà redissenyar el controlador perquè la resposta al graó presenti guany positiu. Una manera és demanar que l'error davant d'entrades graó sigui nul. Atès que s'afegeix una restricció addicional, cal augmentar la complexitat del controlador:

$$C(z) = \frac{d_4 z^4 + d_3 z^3 + d_2 z^2 + d_1 z + d_0}{z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0}.$$

Atès que hi ha un pol addicional, es col·loca a $p_6 = e^{-2}$. La Figura 12.7 mostra el resultat obtingut amb el nou disseny. Com es pot observar, les respostes temporals compleixen les especificacions, però cal destacar la diferència entre la resposta temporal dissenyada i l'obtinguda; això és degut a la diferència entre els zeros de $T(z)$ i els de $T_{des}(z)$.

12.4. Assignació de pols en sistemes subdeterminats (cas del PID)

Tot seguit, es detalla el procediment de disseny de controladors PID emprant mètodes algebàrics en una planta de segon ordre. Posteriorment, s'analitza el disseny de compensadors PI/PD per plantes de tercer ordre.

La funció de transferència del controlador PID digital és:

$$PID(z) = k_p + k_i \frac{T(z+1)}{2(z-1)} + k_d \frac{z-1}{T \cdot z}$$

on T és el període de mostratge i k_p , k_i i k_d són els paràmetres del controlador. Per simplificar el procés de sintonia, es planteja el canvi de variable següent:

$$k_i^* \triangleq \frac{k_i \cdot T}{2}, k_d^* \triangleq \frac{k_d}{T}$$

de manera el que l'equació del PID pren la forma:

$$PID(z) = k_p + k_i^* \frac{z+1}{z-1} + k_d^* \frac{z-1}{z}.$$

Suposant que la planta és de segon ordre, assumirem que la seva transmitància és:

$$G(z) = \frac{a_1 z + a_0}{z^2 + b_1 z + b_0}.$$

Tancant el llaç amb un PID com el que s'ha presentat anteriorment, la transmitància de llaç tancat pren la forma:

$$T(z) = \frac{PID(z)G(z)}{1 + PID(z)G(z)} = \frac{Num(z)}{Den(z)}.$$

Es pot comprovar fàcilment que el denominador és:

$$\begin{aligned}
 D(z) &= z^4 + (-1 + k_i^* a_1 + b_1 + k_d^* a_1 + k_p a_1) z^3 \\
 &\quad + (-b_1 - k_p a_1 + k_p a_0 + b_0 - 2k_d^* a_1 + k_i^* a_0 + k_i^* a_1 + k_d^* a_0) z^2 \\
 &\quad + (k_i^* a_0 - b_0 - 2k_d^* a_0 - k_p a_0 + k_d^* a_1) z \\
 &\quad + k_d^* a_0.
 \end{aligned}$$

És un polinomi de quart grau; per tant, tindrà quatre arrels. Atès que volem fixar els pols del sistema de llaç tancat, hem de veure quina relació hi ha entre els pols del sistema i els coeficients:

$$\begin{aligned}
 D_{des}(z) &= (z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)(z - p_4) \\
 &= z^4 + (-p_1 - p_2 - p_3 - p_4) z^3 \\
 &\quad + (p_1 p_2 - (-p_1 - p_2) p_3 - (-p_1 - p_2 - p_3) p_4) z^2 \\
 &\quad + (-p_1 p_2 p_3 - (p_1 p_2 - (-p_1 - p_2) p_3) p_4) z \\
 &\quad + p_1 p_2 p_3 p_4.
 \end{aligned}$$

Igualant coeficients, s'obté:

$$\begin{aligned}
 -1 + k_i^* a_1 + b_1 + k_d^* a_1 + k_p a_1 &= (-p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \\
 -b_1 - k_p a_1 + k_p a_0 + b_0 - & \\
 -2k_d^* a_1 + k_i^* a_0 + k_i^* a_1 + k_d^* a_0 &= (p_1 p_2 - (-p_1 - p_2) p_3 - (-p_1 - p_2 - p_3) p_4) \\
 k_i^* a_0 - b_0 - 2k_d^* a_0 - k_p a_0 + k_d^* a_1 &= (-p_1 p_2 p_3 - (p_1 p_2 - (-p_1 - p_2) p_3) p_4) \\
 k_d^* a_0 &= p_1 p_2 p_3 p_4
 \end{aligned}$$

que és un sistema de quatre equacions lineals amb tres incògnites k_p, k_d^* i k_i^* . Per tant, sembla clar que no es podran fixar tots els pols del sistema, és a dir, un d'ells quedarà lliure (p_4). Aquest és un fet habitual quan s'intenta fixar els pols d'un sistema amb un controlador de baix ordre. Per tal que la metodologia sigui acceptable i adequada, el pol lliure p_4 ha de ser estable i no dominant. En cas de ser inestable el controlador obtingut fa inestable el sistema en anell tancat i, per tant, no és un controlador admissible. En cas que el pol lliure sigui dominant però estable, el comportament de llaç tancat no serà el desitjat, encara que el controlador estabilitzarà el sistema de llaç tancat.

El sistema d'equacions anterior es planteja en forma matricial:

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} -1 & -a_1 & -a_1 & -a_1 \\ p_2 + p_3 + p_1 & a_1 - a_0 & -a_1 - a_0 & -a_0 + 2a_1 \\ -p_1 p_2 - p_3 p_1 - p_3 p_2 & a_0 & -a_0 & 2a_0 - a_1 \\ p_1 p_2 p_3 & 0 & 0 & -a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4 \\ k_p \\ k_i^* \\ k_d^* \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} p_1 + p_2 + p_3 - 1 + b_1 \\ -p_1 p_2 - p_3 p_1 - p_3 p_2 + b_0 - b_1 \\ p_1 p_2 p_3 - b_0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$



Un cop obtinguts els valors de k_p, k_d^* i k_i^* , ja es poden obtenir els paràmetres del controlador k_p, k_d i k_i i per tant, el procés de disseny ha finalitzat.

Exemple 86 Donats la planta

$$P(z) = \frac{-0.0451z + 0.0498}{z^2 - 1.90z + 0.9048}$$

i un període de mostratge $T = 0.05$ s, es demana dissenyar un controlador PID que faci que els pols de llaç tancat estiguin a $p_1 = 0.7749 + 0.00777j$, $p_2 = 0.7749 - 0.00777j$ i $p_3 = 0.6065$.

Atès que la planta és de segon ordre, s'aplica el procediment anterior i se n'obtenen els valors següents:

$$k_p = -0.8066, k_i = -0.1217, k_d = 7.7581, p_4 = 1.0519.$$

Com es pot verificar, el pol lliure p_4 és fora del cercle unitat. Això fa que el disseny no sigui vàlid.

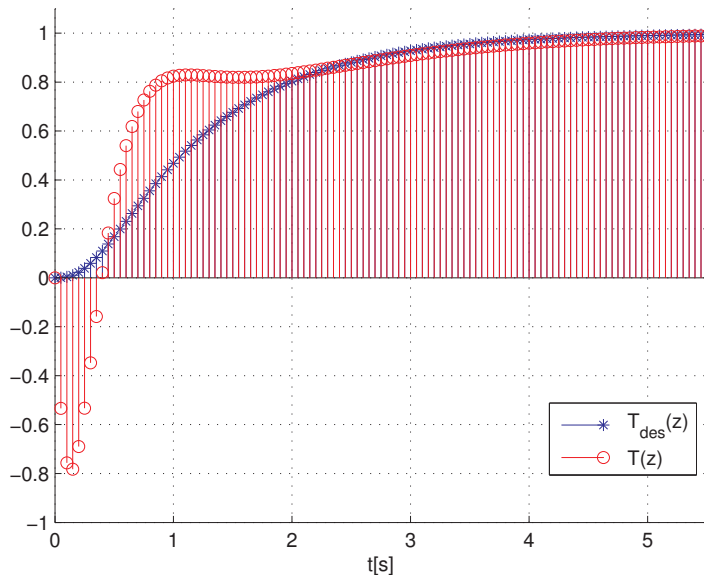
Cal, per tant, relaxar les especificacions. Una opció és fer el pol p_3 més lent. Així, es selecciona $p_3 = 0.9512$. Es torna a aplicar el procediment i se n'obté:

$$k_p = 1.0149, k_d = 10.784, k_i = 0.01967, p_4 = 0.9323.$$

Amb aquests paràmetres, la funció de llaç tancat és:

$$T(z) = \frac{-0.53331(z - 1.105)(z^2 - 1.909z + 0.9125)}{(z - 0.9323)(z - 0.9512)(z^2 - 1.55z + 0.6065)}.$$

Fig. 12.8 Resposta temporal del sistema de llaç tancat i la del sistema de referència (Exemple 86).



La Figura 12.8 mostra la resposta temporal del sistema. Com es pot comprovar, les constants de temps del sistema són similars a les especificades, ja que el pol lliure és una mica més ràpid que el pol p_3 . Cal, però, destacar; que la resposta presenta un sobrepuig cap avall⁵ ja a que la planta presenta un zero de fase no mínima ($z = 1.105$), zero que també apareix en la funció de transferència de llaç tancat.

Encara que el control PID és força emprat, moltes vegades és interessant emprar controladors PI:

$$PI(z) = k_p + k_i \frac{T(z+1)}{2(z-1)}.$$

Aquest tipus de controlador pot dissenyar-se seguint procediments similars als descrits anteriorment. Quan s'aplica al control d'una planta de tercer ordre:

$$P(z) = \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0},$$

s'obté el conjunt següent de restriccions:

$$\begin{aligned} -p_1 - p_2 - p_3 - p_4 + 1 - b_2 - a_2 &= 0 \\ k_p - a_2 k_i p_1 &= 0 \\ p_2 - (-p_1 - p_2) p_3 - (-p_1 - p_2 - p_3) p_4 + b_2 - b_1 + a_2 k_p - a_2 k_i - a_1 k_p - a_1 k_i &= 0 \\ -p_1 p_2 p_3 - (p_1 p_2 - (-p_1 - p_2) p_3) p_4 + b_1 - b_0 + a_1 k_p - a_1 k_i - a_0 k_p - a_0 k_i &= 0 \\ p_1 p_2 p_3 p_4 + b_0 + a_0 k_p - a_0 k_i &= 0 \end{aligned}$$

Atès que el sistema de llaç tancat és de quart ordre i únicament hi ha dos paràmetres de disseny, k_p i k_i , els pols p_3 i p_4 són pols lliures i, per tant, incògnites en el sistema anterior. Cal assenyalar que les equacions anteriors hi ha productes creuats de p_3 i p_4 ; això fa que les equacions siguin no lineals i, per tant, més difícils de resoldre.

Exemple 87 Donada una planta

$$P(z) = \frac{0.00015469(z + 3.464)(z + 0.2485)}{(z - 0.8187)(z^2 - 1.9z + 0.9048)}$$

amb període de mostratge $T = 0.05$ s, es demana fixar un controlador PI que fixi els pols de llaç tancat en $0.77491 \pm 0.7775j$.

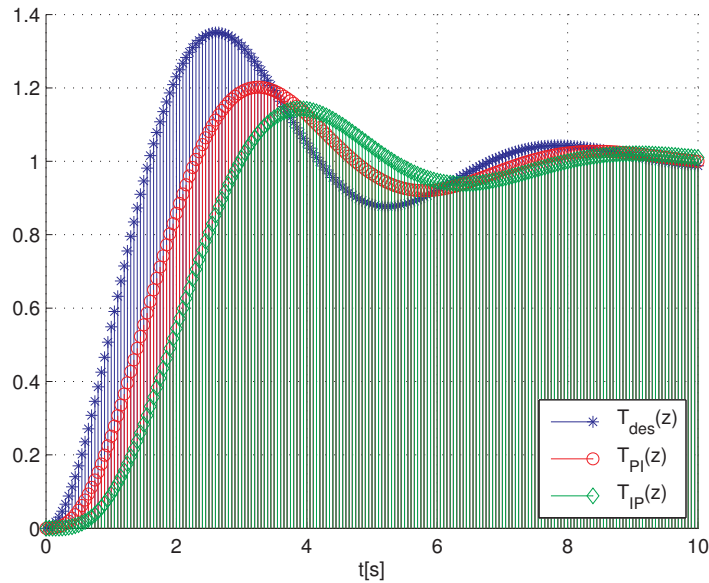
Solucionant les equacions indicades anteriorment, s'obté:

$$k_p = 10.109, \frac{k_i T}{2} = 1.7234, p_3 = 1.0835 - 0.2131j, p_4 = 1.0835 + 0.2131j.$$

Com es pot comprovar, els pols lliures estan fora del cercle unitat, cosa que fa que el disseny no sigui viable.

⁵ undershoot en anglès.

Fig. 12.9
Resposta temporal del sistema de llac tancat i la del sistema de referència (Exemple 87).



Per tal d'obtenir un controlador, es relaxen les especificacions fixant uns pols més lents, situats a $0.9784 \pm 0.058777j$; per a aquests nous pols, la solució de les equacions genera:

$$k_p = 0.4758, \frac{k_i T}{2} = 0.02074, p_3 = 0.95202, p_4 = 0.8098.$$

En aquest cas els pols lliures queden en l'interior de cercle unitat i a més són més lents que els pols desitjats. Per tant es pot donar el disseny per bo. La funció de transferència de llac tancat és:

$$T_{PI}(z) = \frac{7.6814e-05(z+3.464)(z-0.9165)(z+0.2485)}{(z-0.8098)(z-0.952)(z^2-1.957z+0.9608)}.$$

Amb els mateixos paràmetres s'aplica un controlador IP (secció 11.4.6.1), en aquest cas la funció de transferència de llac tancat és:

$$T_{IP}(z) = \frac{3.2081e-06(z+3.464)(z+1)(z+0.2485)}{(z-0.8098)(z-0.952)(z^2-1.957z+0.9608)}.$$

Com es pot observar, les dues funcions de transferència presenten els mateixos pols i comparteixen els zeros de la planta, però el sistema amb controlador IP presenta un pol a $z = -1$ mentre que el sistema amb controlador PI el presenta a $z = 0.9165$; aquest darrer presenta un efecte derivador, cosa que fa que la resposta temporal sigui més agressiva. La Figura 12.9 mostra la resposta temporal de les dues funcions de llac tancat i la del sistema de referència. Es pot observar que les respostes temporals dels tres sistemes són qualitativament iguals, encara que hi ha diferències en el sobrepuig obtingut. Com ja s'ha predit la resposta obtinguda amb el controlador IP presenta menys sobrepuig que l'obtinguda amb el PI i una arrencada més suau.

De forma similar, molt sovint, s'utilitza el controlador PD:

$$PD(z) = k_p + \frac{k_d(z-1)}{z}$$

especialment en plantes que ja contenen integradors. A tall d'exemple, s'analitza la seva aplicació en sistemes de tercer ordre:

$$P(z) = \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}.$$

Atès que el sistema de llaç tancat serà de quart ordre, en igualar els coeficients del polinomi de referència amb el polinomi de llaç tancat s'obté:

$$\begin{aligned} -p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - b_2 - a_2 k_p - a_2 k_d &= 0 \\ p_1 p_2 - (-p_1 - p_2) p_3 - (-p_1 - p_2 - p_3) p_4 - b_1 + a_2 k_d - a_1 k_p - a_1 k_d &= 0 \\ -p_1 p_2 p_3 - (p_1 p_2 - (-p_1 - p_2) p_3) p_4 - b_0 + a_1 k_d - a_0 k_p - a_0 k_d &= 0 \\ p_1 p_2 p_3 p_4 + a_0 k_d &= 0. \end{aligned}$$

En aquest sistema d'equacions, p_1 i p_2 són paràmetres de disseny, mentre que k_p , k_d , p_3 i p_4 s'obtenen de la resolució de les equacions. Així, el sistema de llaç tancat presenta dos pols lliures. Cal observar que a les equacions hi ha productes creuats de p_3 i p_4 ; per tant, es tracta d'un conjunt d'equacions no lineals, cosa que en dificulta la resolució numèrica.

Exemple 88 *Donada una planta,*

$$P(z) = \frac{6.5375e - 07(z + 2.941)(z + 0.2026)}{(z - 1)(z - 0.9608)(z - 0.3679)},$$

amb $T = 0.01$ s, es demana dissenyar un controlador que fixi els pols en llaç tancat en $0.99 \pm 0.0099j$.

Aplicant les equacions anteriors, s'obté:

$$k_p = 41.5667, k_d = 3782.98, p_3 = 0.34678, p_4 = 0.0043.$$

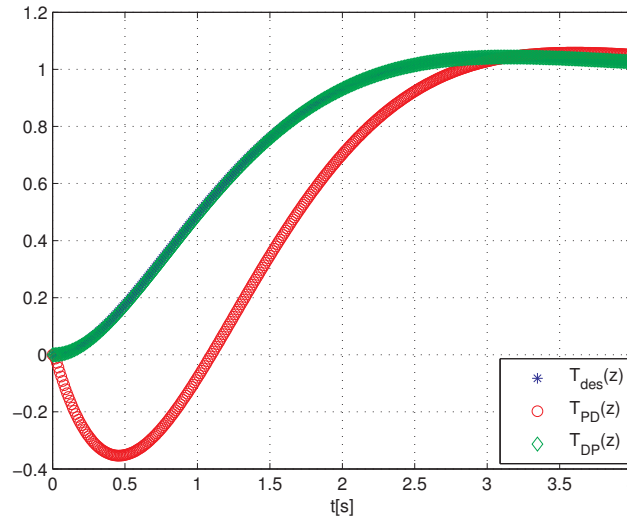
Com es pot observar, els pols lliures són a l'interior del cercle unitat i són no dominants respecte dels fixats; per tant, el disseny es pot donar per bo. La funció de transferència de llaç tancat és:

$$T_{PD}(z) = \frac{-0.0024459(z - 1.011)(z + 2.941)(z + 0.2026)}{(z - 0.004334)(z - 0.3468)(z^2 - 1.98z + 0.9802)}.$$

Amb els mateixos paràmetres, s'ha dissenyat també un controlador amb la part derivativa en la cadena de realimentació (controlador DP, secció 11.4.6.2):

$$T_{DP}(z) = \frac{2.7174 \cdot 10^{-5} z(z + 2.941)(z + 0.2026)}{(z - 0.004334)(z - 0.3468)(z^2 - 1.98z + 0.9802)}.$$

Fig. 12.10
Resposta temporal del sistema dellaç tancat i la del sistema de referència (Exemple 88).



Es pot observar que el polinomi del denominador és el mateix en els dos casos (presenten, per tant, els mateixos pols): mentre que el primer presenta un zero de fase de mínima a $z = 1.011$, el segon presenta el zero a $z = 0$ (un avanç en el temps).

La Figura 12.10 mostra la resposta al graó del sistema de referència:

$$T_{des}(z) = \frac{9.9335 \cdot 10^{-5}(z + 0.9934)}{(z^2 - 1.98z + 0.9802)}$$

i l'obtinguda amb el $T_{PD}(z)$ i el $T_{DP}(z)$. La resposta de $T_{des}(z)$ i la de $T_{DP}(z)$ estan pràcticament superposades; per tant, el disseny és molt satisfactori. Es pot observar també que l'efecte del zero a $T_{PD}(z)$ fa que el disseny sigui poc satisfactori, encara que el temps d'estabilització i la precisió siguin satisfactòries.

Bibliografia

- [1] Roland Longchamp. *Commande numérique de systèmes dynamiques (Vol. 1). Cours d'automatique-Méthodes de base*. EPFL/Automatic Control Laboratory. EPFL PRESS, 2010.
- [2] Roland Longchamp. *Commande numérique de systèmes dynamiques (Vol. 2). Cours d'automatique-Méthodes avancées*. EPFL/Automatic Control Laboratory. EPFL PRESS, 2010.
- [3] Chi-Tsong Chen. *Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods*. Oxford University Press, USA, February 2006.
- [4] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 5th edition edition, 2009.
- [5] Richard C. Dorf and Robert H. Bishop. *Modern Control Systems*. Prentice Hall, 12th edition edition, 2010.

Exercicis proposats

1. Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.2}{z - 0.8},$$

busqueu un controlador que faci que el sistema de llaç tancat presenti els pols següents: 0, -0.1.

2. Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.2}{z - 0.8},$$

busqueu un controlador que faci que el sistema de llaç tancat presenti els pols següents 0 i -0.1 i un error en estat estacionari entrades graó del 5%.

3. Donada la planta

$$P(z) = \frac{z - 0.3}{(z - 0.8)(z - 0.9)} (T = 0.1 \text{ s}),$$

i emprant un controlador PID, feu que el sistema de llaç tancat presenti un coeficient d'esmoreïment de 0.856 i una freqüència natural de 3.02 rad/s. Analitzeu l'efecte dels pols lliures.

4. Donada la planta

$$P(z) = \frac{1}{z - 0.9}$$

dissenyeu un controlador PI que faci que els pols de llaç tancat estiguin a 0 i 0.8. Compareu aquest controlador amb un controlador IP amb les mateixes especificacions.

5. Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.5(z - 0.1)}{(z - 0.9)(z - 0.5)},$$

construiu un controlador que faci que el sistema de llaç tancat segueixi de senyals del tipus $r_k = A \sin(0.2 \cdot k + \phi)$ sense error en règim permanent i el sistema sigui el més ràpid possible.

6. Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.3}{(z - 0.85)},$$

busqueu un controlador que faci que els pols de llaç tancat siguin: $0.4710 \pm 0.5595j$ i l'error davant d'entrades graó sigui inferior al 20%.



7. Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.3}{(z-0.9)(z-0.7)},$$

busqueu un controlador que faci que els pols dominants de llaç tancat siguin: $0.4710 \pm 0.5595j$ i el sistema de llaç tancat sigui de segon ordre.

8. Analitzeu l'ús d'un compensador genèric de segon ordre de la forma

$$\frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{(z-1)(z-\alpha)}$$

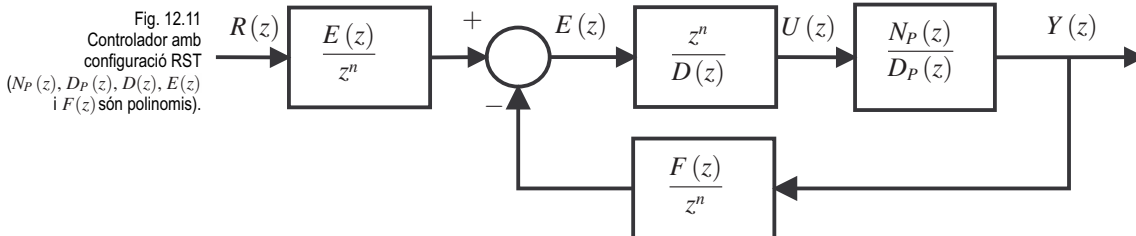
davant d'un controlador PID en el disseny de sistemes de control emprant la tècnica d'assignació de pols.

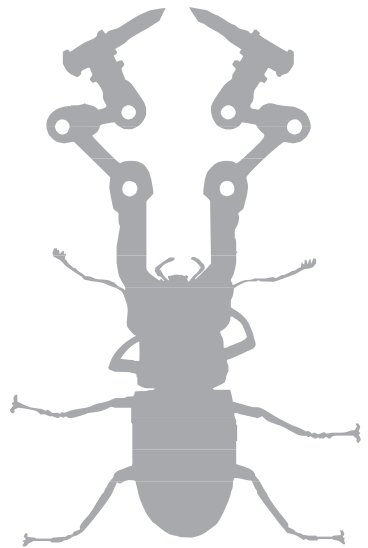
9. Donada una planta

$$P(z) = \frac{k(z-\alpha)}{(z-\beta)},$$

analitzeu si, especificant un pol de llaç tancat a $z = \alpha$, és possible cancel·lar l'efecte del zero de la planta a $z = \alpha$ sobre el sistema de llaç tancat.

10. Analitzeu la funció de llaç tancat del sistema de la Figura 12.11. És possible emprar els mecanismes de fixació de pols introduïts en aquest capítol? Quins avantatges presenta aquesta estructura enfront de l'esquema de la Figura 12.1.





→ 13



Disseny en el lloc geomètric de les arrels

El lloc geomètric de les arrels (RL) és una de les eines clàssiques d'anàlisi dels sistemes de laç tancat. Permet analitzar l'evolució dels pols de laç tancat en funció d'un paràmetre, normalment el guany d'un controlador proporcional. En els casos en què el lloc geomètric presenta les característiques volgudes de resposta temporal i de precisió, un controlador proporcional permetrà satisfer les especificacions. Atès que no sempre és el cas, a vegades convé modificar el lloc geomètric per tal que passi per un punt determinat o presenti les característiques de precisió volgudes en un punt. Això es pot fer afegint-hi un controlador en sèrie amb la planta. Normalment, s'utilitzen controladors d'ordre baix.

En aquesta secció, es presenta el disseny de controladors de primer ordre en el lloc geomètric de les arrels.

13.1. Introducció

Aquest capítol està dedicat al disseny de controladors digitals de primer ordre en el lloc geomètric de les arrels. Les funcions de transferència que els descriuen són de la forma

$$C(z) = k_c \frac{z - z_c}{z - p_c} \quad (13.1)$$

on tant el zero, z_c , com el pol, p_c , són reals i pertanyen a l'interior del disc unitat. El guany del controlador és:

$$\lim_{z \rightarrow 1} C(z) = k_c \frac{1 - z_c}{1 - p_c}.$$

A la secció 11.3, s'han classificat aquests controladors en controladors d'avanç (i.e., proporcional-derivatiu) i controladors de retard (i.e., proporcional-integral). Aquesta classificació establia la nomenclatura següent:



- Els controladors d'avanç de fase són aquells que compleixen $-1 < p_c < z_c < 1$.
- Els controladors en retard de fase són aquells que compleixen $-1 < z_c < p_c < 1$.
- Un controlador PD té la forma següent:

$$C_{PD}(z) = k_p + k_d \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} = \left(k_p + \frac{k_d}{T} \right) \frac{z - \frac{k_d}{T k_p + k_d}}{z}.$$

Per escriure aquest controlador en la forma (13.1), cal fer:

$$k_c = k_p + \frac{k_d}{T}, z_c = \frac{k_d}{T k_p + k_d}, p_c = 0.$$

Si k_p i k_d són positius, en general el controlador PD és un controlador d'avanç de fase.

- Pel que fa a un controlador PI, s'obté:

$$C_{PI}(z) = k_p + k_i \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} = \left(k_p + \frac{k_i T}{2} \right) \frac{z + \frac{k_i T/2 - k_p}{k_p + \frac{k_i T}{2}}}{z-1}.$$

Per escriure aquest controlador en la forma (13.1), cal fer:

$$k_c = k_p + \frac{k_i T}{2}, z_c = -\frac{k_i T/2 - k_p}{k_p + \frac{k_i T}{2}}, p_c = 1.$$

Si k_p i k_i són positius, en general el controlador PD és un controlador d'avanç de fase.

Si $z_c \neq p_c$, el RL de $C(z)P(z)$ es modifica respecte al RL de $P(z)$ i s'hi afegeix una nova branca; en general, el nou RL és força diferent de l'original. Tanmateix, en alguns casos específics, aquests controladors permeten fer passar el RL per un punt concret o modificar el guany del sistema gairebé sense modificar el RL i per tant, sense modificar significativament els pols del sistema enllaç tancat.

Com a eines de càlcul i modificació del RL s'utilitzaran la condició d'argument i la condició de mòdul (secció 9.1). La condició d'argument ens permetrà determinar si un punt del pla complex pertany o no al lloc geomètric, mentre que la condició de mòdul ens dirà per a quin valor de la constant de proporcionalitat del controlador, k_c , un punt que pertany al RL és arrel de llaç tancat.

Aquests tipus de dissenys es basen en la fixació d'un parell de pols complexos conjugats, z_d , que dominen la resposta temporal. En sistemes d'ordre elevat, cal analitzar la ubicació de la resta de pols de llaç tancat abans de donar per bo el disseny obtingut. Els mètodes de disseny s'estructuren en els passos següents:

- Determinar els pols, z_d (o la regió on han de pertànyer els pols), del sistema enllaç tancat.
- Fixar/analitzar la precisió obtinguda/volguda.
- Dissenyar els paràmetres del controlador (k_c, z_c, p_c) per tal de satisfer les especificacions.

- Validar que es compleixen les especificacions i el comportament del sistema de llaç tancat.

Tot seguit, s’analitzen tres casos: primer, el disseny d’un controlador proporcional, després el disseny d’un controlador d’avanç de fase i, finalment, el disseny d’un controlador de retard de fase en forma de dipol. El primer cas es presentarà a partir d’un exemple; el segon i el tercer, d’una forma més genèrica.

13.2. Disseny d’un controlador proporcional

Suposem que les especificacions del problema es poden reduir a fixar un pol de llaç tancat z_d . Si aquest z_d pertany al lloc geomètric de les arrels, aleshores n’hi ha prou amb un controlador proporcional per satisfer les especificacions. Aquest és el cas més senzill dels que s’estudien i es descriu tot desenvolupant un exemple.

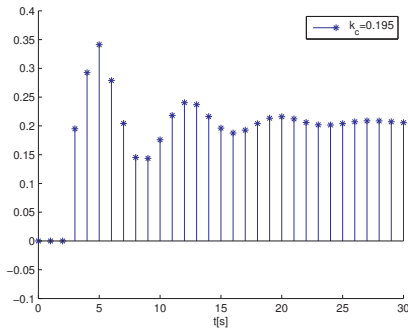
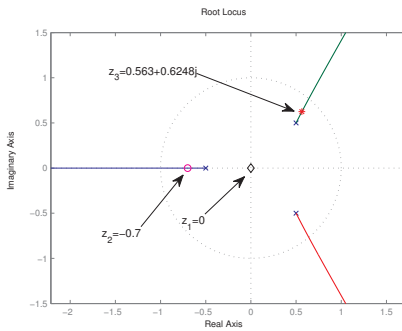


Fig. 13.1
RL del sistema de l’Exemple 89 amb els punts analitzats i resposta temporal per al cas $k_c = 0.195$.

Exemple 89 Donada la planta

$$P(z) = \frac{1}{(z + 0.5)(z^2 - z + 0.5)},$$

analitzeu si, per a cada un dels següents valors $z_1 = 0$, $z_2 = -0.8$ i $z_3 = 0.5640 \pm 0.6248j$, és possible trobar un controlador proporcional que faci que siguin pols de llaç tancat.

Per saber si un punt del pla complex pot ser un pol de llaç tancat amb un controlador proporcional, es pot emprar la condició d’argument; s’avalua la funció de transferència de la planta en el punt d’interès i es calcula el seu argument; si aquest és π rad, el punt pertany al RL i, per tant, pot ser pol de llaç tancat.

A continuació, s’analitzen els diferents punts proposats:

- $z_1 = 0$. En avaluar $P(0)$, s’obté 4: atès que la fase és 0, el punt no pertany al RL i, per tant, no pot ser pol de llaç tancat.
- $z_2 = -0.8$. En avaluar $P(-0.8)$, s’obté -1.7182 : atès que la fase és π , el punt pertany al RL i, per tant, pot ser pol de llaç tancat.

Per determinar per a quin valor de k_c el punt és pol de llaç tancat, s’aplica la condició de mòdul:



$$k_c = \frac{-1}{P(z_2)} = 0.5820.$$

Per analitzar el comportament del sistema, es calculen els pols de llaç tancat, és a dir, els pols de

$$\frac{k_c}{(z+0.5)(z^2-z+0.5)+k_c}.$$

que són $0.65 \pm 0.7858j$ i -0.8 . Tal com era d'esperar el punt desitjat és pol de llaç tancat, però també ho són $0.65 \pm 0.7858j$ que estan fora del cercle unitat i, per tant, el sistema és inestable. Així doncs, no hi ha cap controlador proporcional que faci que el pol de llaç tancat estigui a -0.8 i el sistema de llaç tancat sigui estable.

- $z_3 = 0.5640 + 0.6248j$. En avaluar $P(0.5640 + 0.6248j)$, s'obté -5.1290 . Atès que la fase és π , el punt pertany al RL i, per tant, pot ser pol de llaç tancat.

Com en el cas anterior, es calculen els altres pols del sistema en llaç tancat.

$$k_c = \frac{-1}{P(z_3)} = 0.195.$$

Per verificar la validesa del punt, s'analitzen els pols de llaç tancat, és a dir, els pols de

$$\frac{k_c}{(z+0.5)(z^2-z+0.5)+k_c}.$$

Se n'obtenen $0.5640 \pm 0.6248j$ i -0.6281 . Tal com era d'esperar, el punt desitjat és pol de llaç tancat i l'altre pol està situat a l'interior del cercle unitat. Per tant, el disseny seria correcte.

La Figura 13.1 mostra el RL de la planta i la ubicació dels diferents punts estudiats.

Exemple 90 Considereu la planta de temps continu definida per

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)}.$$

Determineu un controlador digital amb període de mostrejatge $T = 1$ s en sèrie amb la planta, amb un mantenidor d'ordre zero, de manera que: a) l'error en estat estacionari respecte d'entrades graó sigui nul, b) el sobrepuig sigui inferior al 5% i c) el temps d'assentament sigui inferior a 9 s.

Com a primer pas, s'obté la transformada en \mathcal{Z} del sistema digital equivalent:

$$\begin{aligned} \bar{P}_T(z) &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}_T\left(\frac{G_p(s)}{s}\right) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}_T\left(\frac{1}{s^2(s+2)}\right) = \\ &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{0.5Tz}{(z-1)^2} - \frac{0.25z}{z-1} + \frac{0.25z}{z-e^{-2T}} \right] \end{aligned}$$



Prenent $T = 1$ s es té $e^{-2T} = 0.1353$ i l'equació anterior resulta:

$$\bar{P}_T(z) = \frac{0.2838(z + 0.5232)}{(z - 1)(z - 0.1353)}.$$

Atès que el sistema és de tipus 1, la primera especificació segur que es compleix si el sistema de llaç tancat és estable.

El lloc geomètric de les arrels

$$RL = \{z \in \mathbb{C} \mid (z - 1)(z - 0.1353) + k(z + 0.5232) = 0 \forall k \in \mathbb{R}^+\}.$$

està representat a la Figura 13.2.

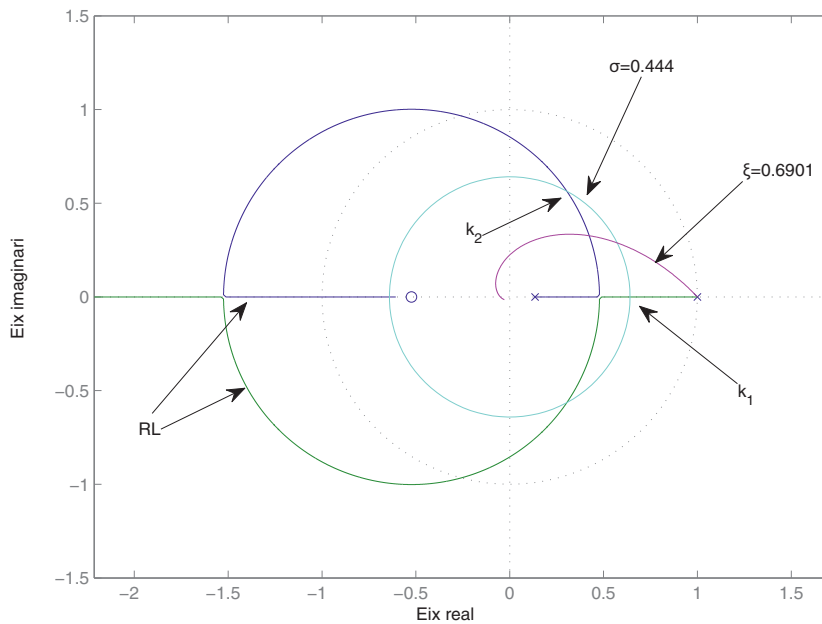


Fig. 13.2
RL del sistema de l'Exemple 90 amb els llocs geomètrics que marquen els límits de les especificacions.

El sobrepuig màxim relatiu, M_p , d'un sistema de segon ordre de temps continu escrit de forma canònica:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{13.2}$$

ve donat per

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

essent ξ el coeficient d'esmoreïment. Per tant, $M_p \leq 0.05$ equival a

$$\log(0.05) \leq \frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}};$$



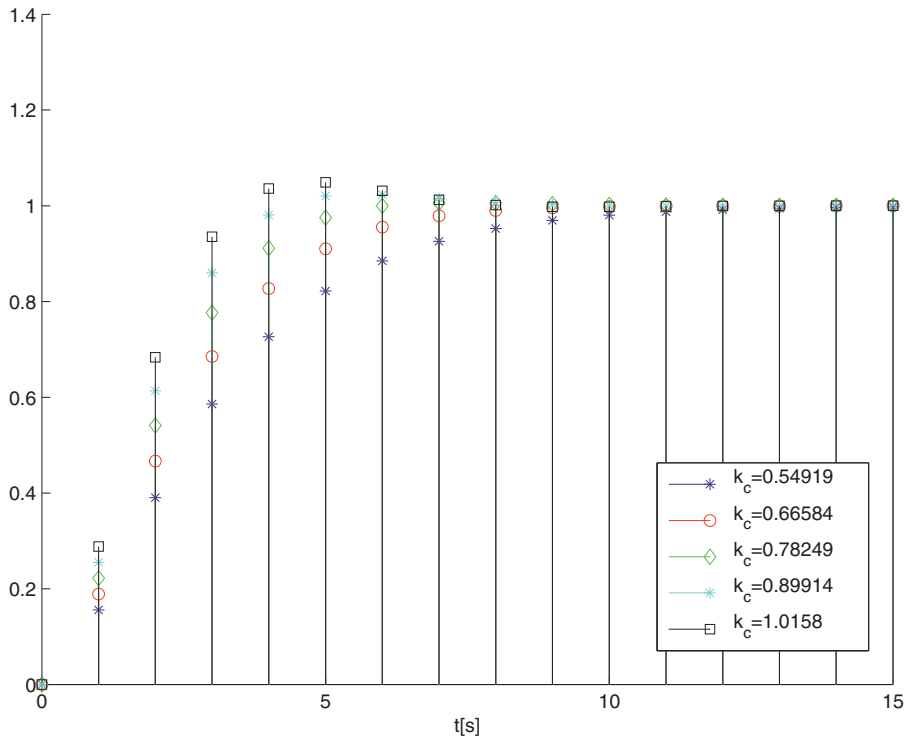
d'on s'obté $\xi \leq 0.6901$. Així, la segona especificació equival que el coeficient d'esmortiment ξ sigui més petit o igual a 0.6901; en el pla z , aquesta restricció correspon a estar a l'interior de la zona envoltada per l'espiral logarítmica corresponent a $\xi = 0.6901$ (en magenta a la Figura 13.2).

El temps d'estabilització (al 2%) de la resposta al graó del sistema (13.2) és, aproximadament, $t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\sigma} i$, per tant, $\sigma > \frac{4}{9} = 0.444$. El mòdul màxim dels corresponents pols en el domini z és $e^{-0.444T} = e^{-0.444} = 0.6412$. Així, els pols han de ser a l'interior del cercle de radi 0.6412 i centrats a l'origen (en cian a la Figura 13.2).

De l'anàlisi del lloc geomètric es dedueix que el controlador proporcional k_c ha de satisfer $k_1 \leq k_c \leq k_2$, on k_1 és la k_c corresponent al tall de lloc geomètric amb la circumferència de radi $e^{-0.444}$ i k_2 és la k_c corresponent a la intersecció del lloc geomètric amb el lloc geomètric de $\xi = 0.6901$ (v. Figura 13.2). Gràficament, s'obté que el k_1 està definit a $z = 0.6412 i$, aplicant la condició de mòdul, s'obté $k_1 = 0.5492$; de forma similar, s'obté que el k_2 està definit a $z \approx 0.4264 + 0.3259 j i$, aplicant la condició de mòdul, s'obté $k_2 \approx 1.0158$.

La Figura 13.3 mostra la resposta al graó de diferents sistemes obtinguts per diferents valors de k_c a l'interval en qüestió. Com es pot veure, totes les respostes compleixen les especificacions realitzades.

Fig. 13.3 Resposta temporal d'alguns sistemes que compleixen les especificacions de l'Exemple 90.





LGRtd:



1. Carregar el primer exemple. Trobeu interactivament el màxim valor d'un controlador proporcional que fa que els dos pols de llaç tancat siguin reals. Quin és l'error estacionari que presentaria el sistema de llaç tancat enfront d'entrades graó?
2. Carregar el segon exemple. És possible trobar un controlador proporcional que faci que la resposta temporal no oscil·li? Quin és el mínim error estacionari enfront d'entrades graó que pot aconseguir un controlador proporcional?
3. Carregar el tercer exemple. És possible trobar un controlador proporcional que faci el sistema de llaç tancat estable?

13.3. Disseny d'un compensador d'avanç de fase

A la secció anterior, s'ha vist que, en cas que les especificacions del sistema de llaç tancat es puguin expressar en forma d'un parell de pols complexos conjugats, z_d , que pertanyen al lloc geomètric, un controlador proporcional és suficient. Aquest no acostuma a ser el cas; aleshores, cal emprar controladors més sofisticats per poder modificar el RL i forçar que aquest passi pel punt volgut (z_d).

Encara que altres opcions són possibles, en aquesta secció es fa el disseny suposant que el controlador és de primer ordre i avanç de fase:

$$C(z) = k_c \frac{z - z_c}{z - p_c}, \quad 1 > z_c > p_c > -1. \quad (13.3)$$

Sigui $P(z)$ la funció de transferència de la planta a controlador. Per tal de dissenyar el controlador que garanteixi que z_d és un pol de llaç tancat, s'imposen les condicions de mòdul i angle a $C(z_d) \cdot P(z_d)$. Tanmateix, com que es disposa de tres paràmetres per sintonitzar (k_c, z_c, p_c), i només hem esmentat dues condicions, encara queda un grau de llibertat, que farem servir per satisfer una especificació addicional.

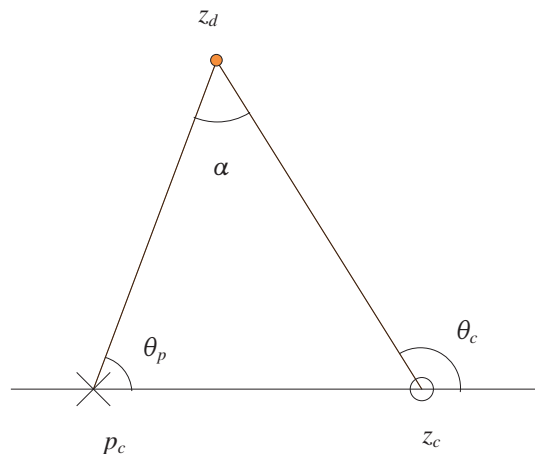


Fig. 13.4
Representació gràfica de la condició d'angle.

Aquestes condicions s'imposen de la forma següent

1. Condició d'angle. Per tal que z_d pertanyi al lloc geomètric, s'ha de complir:

$$P(z_d)C(z_d) = -1$$

i, quedant-nos únicament amb la component de fase, s'obté:

$$\angle P(z_d) + \angle C(z_d) = \pi \text{ rad},$$

on el símbol $\angle z$ designa l'argument del nombre complex. Incorporant-hi la forma del compensador, (13.3), l'equació anterior es pot reescriure de la forma:

$$\pi \text{ rad} = \varphi + \theta_z - \theta_p \quad (13.4)$$

on $\varphi \triangleq \angle P(z_d)$, $\theta_z \triangleq \angle(z_d - z_c)$ i $\theta_p \triangleq \angle(z_d - p_c)$. La condició d'angle es pot representar gràficament com es mostra a la Figura 13.4. Del fet que la suma dels tres angles d'un triangle és igual a π , en resulta $\alpha = \pi - \varphi$. La condició d'angle permet determinar la relació entre el zero i el pol del controlador. De fet, estableix l'angle que formen $z_d - p_c$ i $z_d - z_c$.

2. Condició de mòdul. Per tal que z_d sigui un pol de llaç tancat, s'ha de complir:

$$k_c |C(z_d)| |P(z_d)| = 1. \quad (13.5)$$

Per tant, es pren:

$$k_c = \frac{1}{|C(z_d)| |P(z_d)|}. \quad (13.6)$$

Així, aquesta condició permet determinar el valor de la constant de proporcionalitat, k_c .

Amb aquestes condicions, s'han fixat dos dels tres graus de llibertat que hi ha al controlador (13.3). L'altre grau de llibertat pot fixar-se de moltes formes. Algunes de les formes habituals són:

- Cancel·lar un pol o zero de la planta. Es col·loca el zero (o pol) del compensador sobre un pol (o zero) de la planta. Això fa que el sistema en llaç tancat sigui del mateix ordre que la planta en llaç obert i, per tant, no augmenti la complexitat de la resposta temporal. L'avantatge principal és que no hi ha problemes de dominància de pols i en el cas de plantes d'ordre baix (fins a 2), es poden fixar tots el pols de llaç tancat.

Cal tenir present que no es poden cancel·lar pols/zeros inestables ($|p_i| > 1$) o marginalment estables ($p_i \in \{-1, 1\}$), ja que el sistema no seria internament estable.

- Fixar la precisió. La precisió del sistema de llaç tancat està relacionada directament amb el valor que pren la funció de llaç obert a $z = 1$. Així, per al cas de sistemes de tipus 0, el coeficient d'error de posició es pot calcular de la forma:

$$k_p = C(1)P(1) = k_c \frac{1 - z_c}{1 - p_c} P(1).$$

Aquesta equació introdueix una nova restricció que pot emprar-se en el disseny del controlador i que és de gran interès pràctic, ja que la precisió és una característica molt important en els sistemes de control.

- z_c i p_c s'equidistribueixen respecte de z_d . En els dissenys anteriors, es poden obtenir triangles (Figura 13.4) molt desequilibrats; això fa que el controlador presenti problemes de fragilitat numèrica. Una solució a aquest problema és col·locar el pol i el zero de manera que el triangle obtingut sigui isòsceles, és a dir, $\theta_p = \pi - \theta_c$. Aquesta manera de procedir dóna lloc a sistemes numèricament ben condicionats.

D'aquestes condicions, cal triar en cada aplicació aquella que sigui més adient.

A la Taula 13.1, es mostra un resum del procediment que s'ha de seguir en forma d'algorisme i les equacions que s'han de resoldre.

-
- Entrades:
 - $P(z)$ sense pols fora del cercle unitat, T .
 - Especificacions:
 - Parella de pols complexos conjugats (z_d).
 - Precisió si s'escau (K_p^*, K_v^* o K_a^* en funció del tipus de $P(z)$).

Taula 13.1
Algorisme de disseny del compensador d'avanç de fase en el lloc geomètric de les arrels.

.....

Cal resoldre les tres equacions següents ($\theta_z = \angle(z_d - z_c)$, $\theta_p = \angle(z_d - p_c)$):

1. $\pi = \angle P(z_d) + \theta_z - \theta_p$.
 2. $k_c = \frac{1}{|C(z_d)P(z_d)|}$.
 3. Triar-ne una:
 - (a) Cancel·lació : $z_c = p_j$ (on p_j és pol estable de $P(z)$) o $p_c = z_j$ (on z_j és pol estable de $P(z)$).
 - (b) Precisió: $K_p^* = k_c \frac{1 - z_c}{1 - p_c} P(1)$ si la planta és de tipus 0.
 - (c) Equidistribució: $\theta_p = \pi - \theta_c$.
-

Exemple 91 Considerem una planta de temps continu definida per la funció de transferència

$$P(s) = \frac{887.69}{s(s + 8.871)}, \tag{13.7}$$

mostrada amb un període de mostreig $T = 0.01$ s. Busqueu un controlador que faci que els pols de llaç tancat siguin $z_d = 0.581 \pm 0.36 \cdot j$, de manera que el sistema de llaç tancat sigui del mateix ordre que el de llaç obert.

La transformada \mathcal{Z} del bloc planta-mantenidor d'ordre zero és:

$$\bar{P}_T(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{887.69}{s^2(s+8.871)} \right\} = 0.043101 \frac{(z+0.9709)}{(z-1)(z-0.9151)}. \quad (13.8)$$

Per tal de dissenyar el controlador proporcional, s'ha dibuixat el RL d'aquest sistema.

Per aplicar la condició d'angle, s'avalua la planta sobre el punt d'interès:

$$\bar{P}_T(z_d) = -0.0477 + 0.2485 \cdot j$$

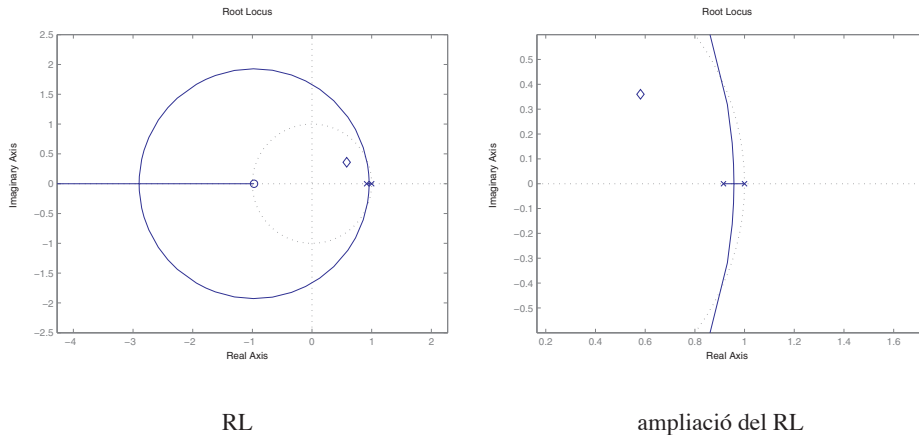
i es calcula $\varphi = \angle \bar{P}_T(z_d) = 100.87^\circ$. Com es pot comprovar, el punt d'interès no compleix la condició d'angle i, per tant, no pertany al lloc geomètric (Figura 13.5). En conseqüència, les especificacions no es poden assolir amb un controlador proporcional. S'hi afegeix un compensador de primer ordre i es calcula la condició d'angle del sistema compensat:

$$\theta_z - \theta_p + \varphi = \pi \text{ rad} \rightarrow \angle(z_d - z_c) - \angle(z_d - p_c) = 79.13^\circ. \quad (13.9)$$

Perquè la planta de llaç obert i el sistema de llaç tancat siguin del mateix ordre, és necessari que el controlador cancel·li un pol o un zero de la planta. Atès que la planta presenta un pol a $z = 0.9151$ que dominarà la resposta temporal, es decideix cancel·lar-lo. Per tant:¹

$$z_c = 0.9151. \quad (13.10)$$

Fig. 13.5
RL del sistema de l'Exemple 91 i ampliació d'una de les zones on hi ha bifurcació (el visualitza el punt z_d especificat).



Per aconseguir que z_d sigui un pol de llaç tancat, s'aplica la condició de mòdul:

$$1 = k_c \frac{|z_d - z_c|}{|z_d - p_c|} |P(z_d)| \rightarrow |z_d - p_c| = k_c |z_d - z_c| |P(z_d)|. \quad (13.11)$$

¹ Una solució alternativa seria cancel·lar el zero de la planta amb el pol del controlador.

Així, finalment se n'obté el sistema d'equacions següent:

$$\angle(z_d - z_c) - \angle(z_d - p_c) = 79.13^\circ \quad (13.12)$$

$$z_c = 0.915 \quad (13.13)$$

$$|z_d - p_c| = k_c |z_d - z_c| 0.2531 \quad (13.14)$$

i resolent, resulta: $k_c = 3.5924$, $z_c = 0.9151$ i $p_c = 0.3168$, cosa que fa que el controlador resultant sigui:

$$C(z) = \frac{3.5924(z - 0.9151)}{z - 0.3168}$$

Amb aquest compensador, el sistema de llaç tancat és:

$$T(z) = \frac{0.15484(z + 0.9709)(z - 0.9151)}{(z - 0.9151)(z^2 - 1.162z + 0.4672)}$$

Aquesta funció de transferència té els pols $0.581 \pm 0.36 \cdot j$ i 0.9151 , i els zeros -0.9709 , 0.9151 . Com podem observar, el sistema en llaç tancat té els pols volguts i un únic zero degut a la cancel·lació pol/zero. La Figura 13.6 mostra el RL del sistema amb compensador i l'original. Observeu que el RL s'ha modificat degut al compensador però, gràcies a la cancel·lació pol/zero, el nombre de branques no ha variat. En comparar els zeros i pols de llaç obert del sistema original i del sistema compensat, ens adonem que el zero i el pol originals a $z = 0.9709$ i a $z = 1$, respectivament, es mantenen i ha aparegut un nou pol a $z = 0.3168$. És important adonar-se que el RL del sistema compensat presenta les branques més properes a l'origen; això és degut al fet que el compensador és d'avanç de fase i, per tant, el sistema amb compensador és més ràpid que el sistema que s'obtindria únicament amb un controlador proporcional.

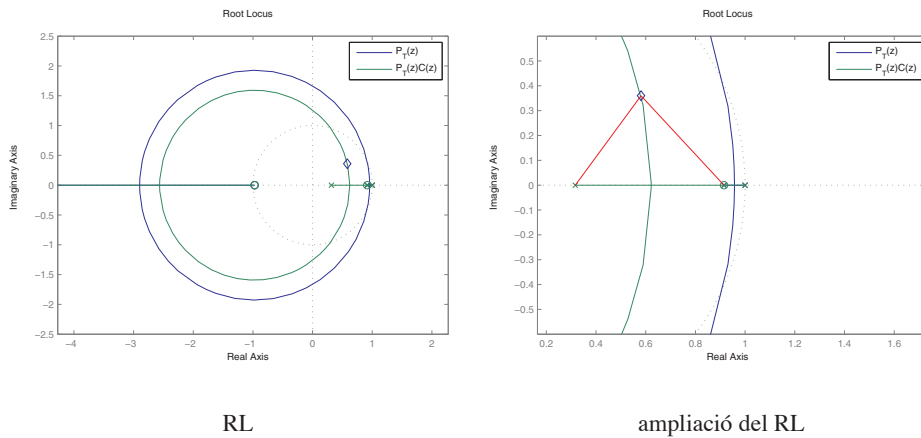
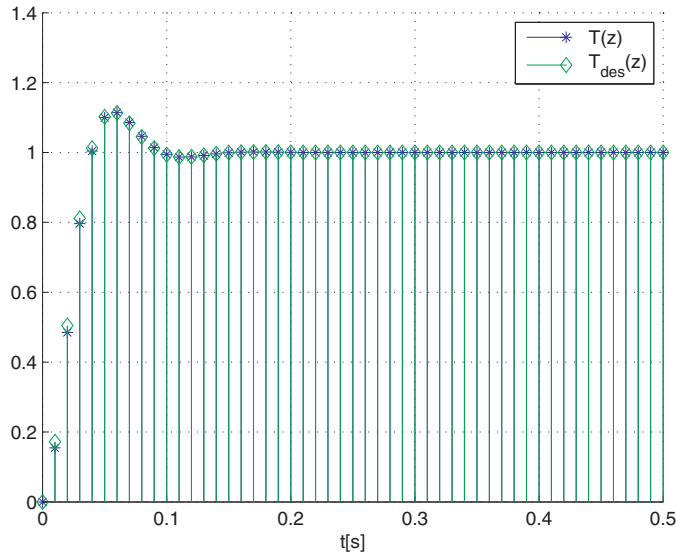


Fig. 13.6
RL del sistema de l'Exemple 91 i ampliació d'una de les zones on hi ha bifurcació (el visualitza el punt z_d especificat i el triangle de la condició d'angle).

La Figura 13.7 mostra la resposta al graó del sistema de llaç tancat. Es visualitza la resposta obtinguda i la resposta temporal d'un sistema de temps continu que únicament conté els pols especificats i al qual posteriorment se li ha aplicat la transformada \mathcal{L} :



Fig. 13.7
Resposta temporal
d'alguns sistemes que
compleixen les
especificacions de
l'Exemple 91.



$$T_{des}(z) = \frac{0.17204(z + 0.7738)}{z^2 - 1.162z + 0.4672}. \quad (13.15)$$

Com es pot observar, la resposta és pràcticament idèntica, amb petites discrepàncies, degudes a la posició dels zeros del sistema de llaç tancat. Cal observar que, atès que el sistema és de tipus 1, la resposta al graó presenta error estacionari nul.

Exemple 92 Considereu una planta de temps continu definida per la funció de transferència

$$P(s) = \frac{887.69}{s(s + 8.871)}, \quad (13.16)$$

mostrejada amb un període de mostratge $T = 0.01s$. Busquem un controlador que faci que els pols de llaç tancat estiguin a $z_d = 0.581 \pm 0.36 \cdot j$ i, a més, el sistema presenti un coeficient d'error de velocitat igual a $K_v = 20$.

Atès que la planta i els pols especificats són els mateixos que a l'Exemple 91, les equacions corresponents a la condició d'argument i la condició de mòdul seran exactament les mateixes. Caldrà únicament substituir l'equació de cancel·lació pol/zero per l'equació que fixa la precisió. El coeficient d'error de velocitat queda determinat per:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} k_c \cdot C(z)P(z) = K_v^{des} = 20.$$

En el cas particular de la planta objecte d'estudi, s'obté:

$$k_c \frac{1 - z_c}{1 - p_c} 0.043101 \frac{(1 + 0.9709)}{(1 - 0.9151)} = 20.$$

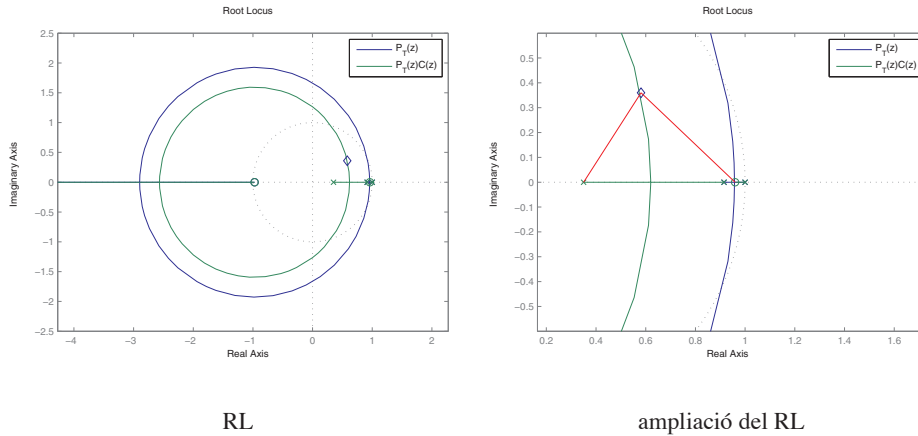


Fig. 13.8
RL del sistema de l'Exemple 92 i ampliació d'una de les zones on hi ha bifurcació (se'n visualitza el punt z_d especificat i el triangle de la condició d'angle).

Així, les equacions que cal solucionar són:

$$\angle(z_d - z_c) - \angle(z_d - p_c) = 79.13^\circ \quad (13.17)$$

$$k_c \frac{1 - z_c}{1 - p_c} 100.06 = 20 \quad (13.18)$$

$$|z_d - p_c| = k_c |z_d - z_c| 0.2531 \quad (13.19)$$

D'aquestes, se n'obté: $k_c = 3.2334$, $z_c = 0.9598$ i $p_c = 0.3501$, cosa que fa que el controlador resultant sigui:

$$C(z) = \frac{3.2334(z - 0.9598)}{z - 0.3501}.$$

Amb aquest compensador, el sistema de llaç tancat és:

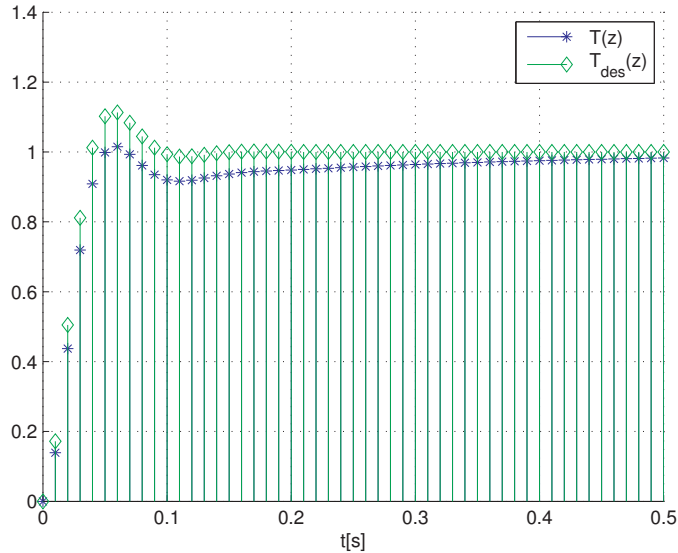
$$T(z) = \frac{0.13936(z + 0.9709)(z - 0.9598)}{(z - 0.9638)(z^2 - 1.162z + 0.4671)}$$

Aquesta funció de transferència té els pols $0.581 \pm 0.36 \cdot j$ i 0.9638 , i els zeros -0.9709 , 0.9598 . La Figura 13.6 mostra el RL del sistema amb compensador i l'original. Observeu que el RL s'ha modificat degut al compensador, ara aquest passa pel punt desitjat. El nou RL presenta tres branques i, per tant, el sistema de llaç tancat és de tercer ordre. És important adonar-se que el RL del sistema compensat presenta les branques més properes a l'origen; això és degut al fet que el compensador és d'avanç de fase i per tant el sistema amb compensador és més ràpid que el sistema que s'obtindria sense el compensador i únicament amb un controlador proporcional.

La Figura 13.7 mostra la resposta al graó del sistema de llaç tancat. Es visualitza la resposta obtinguda i la d'un sistema amb els pols especificats (13.15). Com es pot observar, la resposta és força semblant, però la discrepància en la situació dels zeros i l'existència d'un pol addicional fa que no siguin exactament iguals. La resposta del sistema obtingut és més lenta, a causa de l'existència d'un pol dominant a $z = 0.9638$.



Fig. 13.9
Resposta temporal
d'alguns sistemes que
complexen les
especificacions de
l'Exemple 92.



Exemple 93 Considerem una planta de temps continu definida per la funció de transferència

$$P(s) = \frac{887.69}{s(s + 8.871)}, \quad (13.20)$$

mostrejada amb un període de mostratge $T = 0.01$ s. Busquem un controlador que faci que els pols de llaç tancat siguin $z_d = 0.581 \pm 0.36 \cdot j$ i el sistema de control presenti poca fragilitat numèrica.

Atès que la planta i els pols especificats són els mateixos que a l'Exemple 91, les equacions corresponents a la condició d'argument i la condició de mòdul seran exactament les mateixes. Caldrà únicament substituir l'equació de cancel·lació pol/zero per una política d'equidistribució entre el pol i el zero. Així, el triangle de la condició d'angle (Figura 13.4) serà isòsceles. Per aconseguir-ho s'afegeix la restricció següent:

$$\theta_z = \pi - \theta_p \rightarrow \angle(z_d - z_c) = \pi - \angle(z_d - p_c).$$

Les equacions que cal solucionar són:

$$\angle(z_d - z_c) - \angle(z_d - p_c) = -79.13^\circ \quad (13.21)$$

$$\angle(z_d - z_c) = \pi - \angle(z_d - p_c) \quad (13.22)$$

$$|z_d - p_c| = k_c |z_d - z_c| \cdot 0.2531 \quad (13.23)$$

D'aquestes, s'obté: $k_c = 3.9515$, $z_c = 0.8785$ i $p_c = 0.2835$, cosa que fa que el controlador resultant sigui:

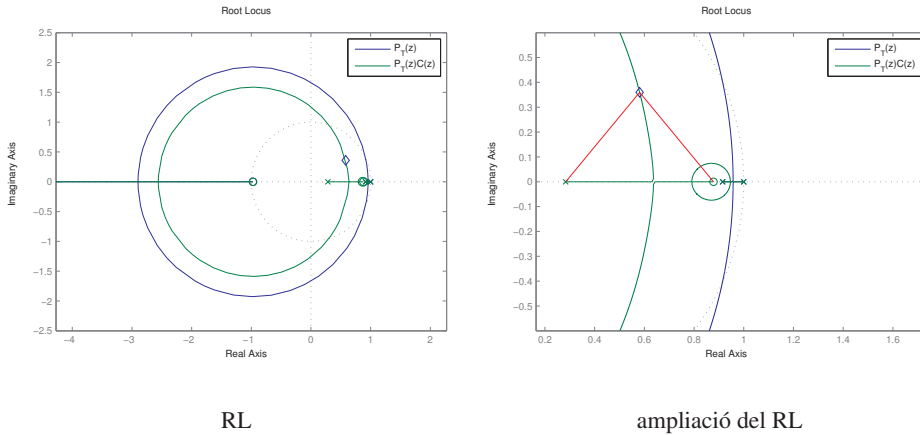


Fig. 13.10
RL del sistema de l'Exemple 93 i ampliació d'una de les zones on hi ha bifurcació (es visualitza el punt z_d especificat i el triangle de la condició d'angle).

$$C(z) = \frac{3.9515(z - 0.8785)}{z - 0.2835}$$

Amb aquest compensador, el sistema de llaç tancat és:

$$T(z) = \frac{0.17031(z + 0.9709)(z - 0.8785)}{(z - 0.8663)(z^2 - 1.162z + 0.4672)}$$

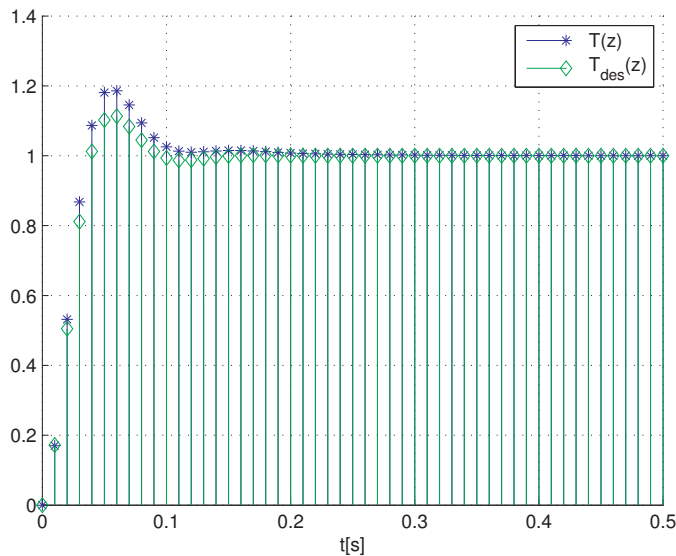


Fig. 13.11
Resposta temporal d'alguns sistemes que compleixen les especificacions de l'Exemple 93.

Aquesta funció de transferència té els pols $0.581 \pm 0.36 \cdot j$ i 0.8663 , i els zeros -0.9709 , 0.8785 . La Figura 13.10 mostra el RL del sistema amb compensador i l'original. Observeu que el RL s'ha modificat a causa del compensador, i ara aquest passa pel punt volgut. El nou RL presenta tres branques i, per tant, el sistema de llaç tancat és de tercer ordre. És important adonar-se que el RL del sistema compensat presenta les branques



més properes a l'origen. Això és degut al fet que el compensador és d'avanç de fase i per tant el sistema amb compensador és més ràpid que el sistema que s'obtingria sense el compensador i únicament amb un controlador proporcional. És important assenyalar que el triangle que formen el pol desitjat, el pol i el zero del compensador és un triangle isòsceles.

La Figura 13.11 mostra la resposta al graó del sistema de llaç tancat. Se'n visualitza la resposta obtinguda i la d'un sistema amb els pols especificats, (13.15). Com es pot observar, la resposta és força semblant, però la discrepància en la situació dels zeros i l'existència d'un pol addicional fa que no siguin exactament iguals. La resposta del sistema obtingut és més lenta, a causa de l'existència d'un pol dominant a $z = 0.8663$.



CARLtd:

1. Carregar el segon exemple. Activeu l'opció d'Equidistribució. Tot fent un zoom sobre el lloc geomètric, comproveu la figura geomètrica que descriuen el pol i el zero del controlador i el pol especificat. Desplaceu el pol especificat cap a l'origen. Quin efecte es produeix sobre la resposta temporal?
 2. Carregar el segon exemple. Activeu l'opció de Precisió. Quina és la figura geomètrica que descriuen el pols i el zero del controlador i el pol especificat? Reduir l'error en estat estacionari. Com afecta la figura geomètrica que descriuen el pols i el zero del controlador i el pol especificat?
-

13.4. Disseny del compensador de retard de fase amb forma de dipol

Com s'ha vist a la secció 13.2, per dissenyar un controlador que faci que un punt, z_d , que pertany al RL de la planta, sigui pol de llaç tancat és suficient un controlador proporcional.

Els exemples de la secció 13.2 mostren que fixar el pol de llaç tancat no implica necessàriament obtenir un sistema amb la precisió volguda. En alguns casos, encara que la forma de la resposta temporal és la volguda, l'error de seguiment no és l'esperat. En aquesta secció, es proposa un mecanisme de disseny que permet fixar la precisió volguda i simultàniament mantenir, de forma aproximada, la forma de la resposta temporal.

Donada una planta $P(z)$, s'assumeixen com a especificacions un parell de pols complexos conjugats z_d , que pertanyen al RL de $P(z)$, i unes especificacions en forma de coeficient d'error de posició, velocitat o acceleració en funció del tipus de $P(z)$.

Cal assenyalar, que el fet que z_d pertanyi al RL de $P(z)$ implica que:

$$\angle P(z_d) = \pi \text{ rad}$$

i, de forma similar, que existeix un $k_c \in \mathbb{R}^+$ que compleix

$$-1 = k_c P(z_d).$$

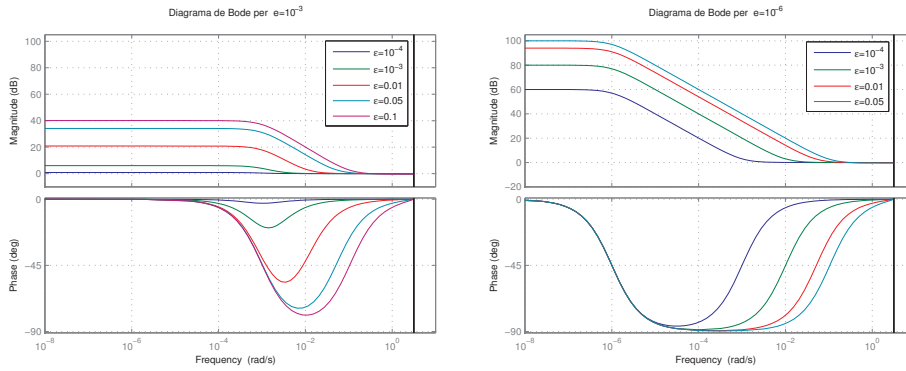


Fig. 13.12 Resposta del compensador de retard per $\epsilon = 10^{-3}$ i $\epsilon = 10^{-6}$ i diferents valors de ϵ .

En el cas d'un sistema de tipus zero, el coeficient d'error de posició és:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} k_c \cdot P(z) = k_c \cdot P(1),$$

atès que el valor de $P(1)$ està fixat i el valor k_c s'utilitza per fer que z_d sigui un pol de llaç tancat, la precisió queda fixada automàticament. Per tal de poder fixar la precisió de forma lliure, s'introdueix un controlador de primer ordre i retard de fase:

$$C(z) = \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

amb $-1 < z_c < p_c < 1$. L'objectiu del controlador és aconseguir fixar la precisió en el valor desitjat tot mantenint que z_d sigui un pol de llaç tancat.

Així, les condicions que $C(z)$ ha de complir són:

$$-1 = k_c C(z_d) P(z_d) \tag{13.24}$$

$$K_p = k_c C(1) P(1) \tag{13.25}$$

A diferència del que passava anteriorment a (13.25) hi ha un grau de llibertat, $C(1)$, que permetrà fixar la precisió. Observem també que, si $C(z_d) \approx 1$, l'equació (13.24) també es complirà i, per tant, també aproximadament z_d serà un pol de llaç tancat.

Una aproximació al problema és emprar la configuració de dipol. En aquesta configuració, el pol i el zero del controlador s'escriuen de la forma:

$$p_c = 1 - \epsilon \tag{13.26}$$

$$z_c = p_c - \epsilon \tag{13.27}$$

on $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ és un nombre tan petit com es vulgui² i $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ és un nombre que s'emprarà per ajustar la precisió del controlador. Amb aquesta hipòtesi, el controlador pren la forma:

² No ha de ser zero doncs això implicaria l'aparició d'un integrador i, per tant, l'increment del tipus del sistema, cosa no volguda en principi. Encara que, en teoria, pot ser tan petit com es vulgui, nombres massa petits poden generar problemes d'implementació.



$$C(z) = \frac{z - 1 + \varepsilon + \epsilon}{z - 1 + \varepsilon}.$$

Així, l'equació emprada per ajustar la precisió serà:

$$K_p = k_c \frac{\varepsilon + \epsilon}{\varepsilon} P(1) \rightarrow \epsilon = \left(\frac{K_p}{k_c P(1)} - 1 \right) \varepsilon.$$

De forma similar, l'equació que fixa el pol de llaç tancat queda de la forma:

$$-1 = k_c \frac{z_d - 1 + \varepsilon + \epsilon}{z_d - 1 + \varepsilon} P(z_d),$$

la component de fase d'aquesta equació pren la forma:

$$-\pi = \angle \frac{z_d - 1 + \varepsilon + \epsilon}{z_d - 1 + \varepsilon} + \underbrace{\angle P(z_d)}_{-\pi} \rightarrow \angle \frac{z_d - 1 + \varepsilon + \epsilon}{z_d - 1 + \varepsilon} = 0$$

i, com es pot observar, si ϵ és prou petit

$$\frac{z_d - 1 + \varepsilon + \epsilon}{z_d - 1 + \varepsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{z_d - 1 + \varepsilon} \approx 1$$

i, per tant, l'equació es compleix aproximadament. Això farà també que aproximadament es compleixi l'equació:

$$-1 \approx k_c C(z_d) P(z_d)$$

i, per tant, z_d serà aproximadament un pol de llaç tancat.

La Figura 13.12 mostra el diagrama de Bode d'alguns controladors que s'obtenen prenent $\varepsilon = 10^{-3}$ i $\varepsilon = 10^{-6}$, i analitzant diferents valors de ϵ . Com es pot comprovar, tots ells presenten perfils passabaix; això és degut al fet que el pol sempre és a la dreta del zero. Com es pot observar, els controladors obtinguts presenten un guany important en baixa freqüència (amb fase pràcticament nul·la), i a alta freqüència presenten un guany aproximadament d'1 (amb fase pràcticament nul). Per tant, els sistemes obtinguts presenten un guany variable en funció de la freqüència: a baixa freqüència en presenten un d'elevat, cosa que contribueix a millorar la precisió, mentre que a alta freqüència presenten un guany proper a 1, cosa que deixa el RL pràcticament inalterat. Com més petit és el guany en contínua, més ràpidament el sistema arriba a 1 i, per tant, més inalterat queda el RL. Podem observar que, com més petit és ε , més ideal és el comportament dels filtres.

Atès que l'objectiu principal del compensador és augmentar el guany en contínua, és possible analitzar l'increment de guany aportat en funció de ε i ϵ :

$$\frac{\varepsilon + \epsilon}{\varepsilon} = \Delta K_p \rightarrow \epsilon = (\Delta K_p - 1) \varepsilon.$$

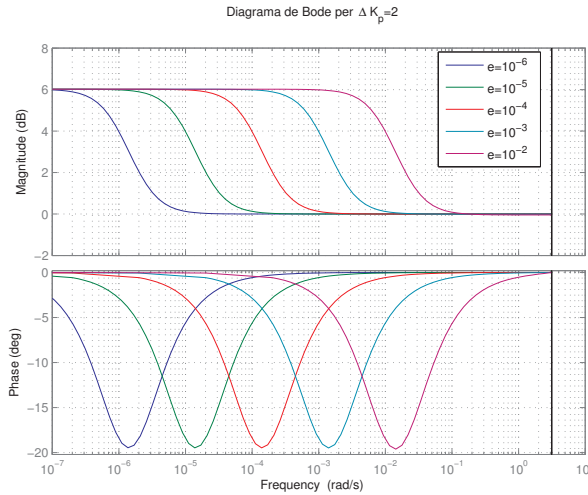


Fig. 13.13 Resposta del compensador de retard per $\Delta K_p = 2$ i diferents valors de ϵ .

Així, podem veure que, fixat un $\Delta K_p > 1$ desitjat ϵ , es pot fer tan petit com es vulgui fent ϵ petit. Conceptualment, convé que els dos siguin tan petits com sigui possible. Per observar-ne l'efecte, la Figura 13.13 mostra la resposta temporal per un valor de $\Delta K_p = 2$ i diferents valors de ϵ . Com es pot comprovar com més petit és ϵ , més ideal és la resposta freqüencial. Per, un valor de ΔK_p fixat, el valor ϵ està directament lligat a la distància entre el pol i el zero; com més petit és ϵ , menor és la distància entre el pol i zero i millor es comporta el sistema. Aquest és el motiu pel qual aquesta configuració s'anomena dipol.

- Entrades:
 - $P(z)$ sense pols fora del cercle unitat, T .
- Especificacions:
 - Parella de pols complexos conjugats (z_d), que pertany al RL de $P(z)$.
 - Precisió, si s'escau (K_p^*, K_v^* o K_a^* , en funció del tipus de $P(z)$).

Taula 13.2 Algorisme de disseny del compensador de retard en el lloc geomètric de les arrels.

Cal resoldre les tres equacions següents:

1. $k_c = \frac{1}{|P(z_d)|}$.
2. Triar p_c arbitràriament proper a 1.
3. $z_c = 1 - (1 - p_c) \frac{K_p^*}{k_c P(1)}$ si $P(z)$ és de tipus 0.

Comentari 31 En els sistemes de tipus 0 estables en llaç obert, normalment el pol i el zero del compensador se situen molt més propers al cercle unitat que qualsevol pol de la planta. Per aquest motiu, el RL presenta una branca entre el pol i el zero del controlador; així, el sistema de llaç tancat presenta un zero en el zero del compensador i un pol situat



entre el pol i el zero del compensador. Això fa que el sistema de llaç tancat presenti un pol molt proper al cercle unitat i que la resposta temporal presenti una convergència força lenta al valor d'estacionari.

A la Taula 13.2, es mostra un resum del procediment que s'ha de seguir en forma d'algorisme i equacions per resoldre.

Exemple 94 Donada la planta

$$P(z) = \frac{z - 0.2}{(z - 0.7)(z - 0.9)}$$

trobeu un controlador que faci que els pols del sistema de llaç tancat siguin, aproximadament, pols a $0.7750 + 0.1392j$ i un error del 10%.

Per comprovar si els pols pertanyen al RL de la planta s'avalua la planta, en el punt d'interès i es mira l'angle $\angle P(0.7750 + 0.1392j) = \pi$. Atès que és π , el punt pertany al RL. Per saber per a quin valor del controlador proporcional seran arrels de llaç tancat, s'avalua la condició de mòdul:

$$k_c = \frac{1}{|P(z_d)|} = 0.05.$$

Amb aquest controlador proporcional, el coeficient d'error de posició és:

$$K_p = k_c P(1) = 1.333$$

cosa que implica que l'error en estat estacionari davant d'entrades graó és del 43%. Per tal de mantenir les característiques de resposta temporal i millorar les de precisió, s'hi introdueix un controlador de retard de fase. Així, al controlador s'ha d'aplicar un increment del guany

$$\Delta K_p = \frac{9}{1.333} = 6.75.$$

Selecció $\epsilon = 0.01$ i aplicant-hi l'increment de guany, s'obté $\epsilon = 0.0575$, cosa que implica $p_c = 0.99$ i $z_c = 0.9325$. Així, el controlador obtingut presenta la forma

$$C(z) = 0.05 \frac{z - 0.9325}{z - 0.99}.$$

Amb aquest controlador, la funció de llaç tancat obtinguda és de la forma:

$$T_{ret}(z) = \frac{0.05(z - 0.9325)(z - 0.2)}{(z - 0.9458)(z^2 - 1.594z + 0.6496)}.$$

Com es pot observar, el sistema de llaç tancat presenta dos pols complexos, conjugats a $0.7971 + 0.1192j$, que són propers als que es volien fixar. La Figura 13.14, mostra el RL del sistema original i el sistema amb compensador. S'hi indiquen també els pols que es volen mantenir i els que s'han obtingut. Com es pot observar, estan propers. Les

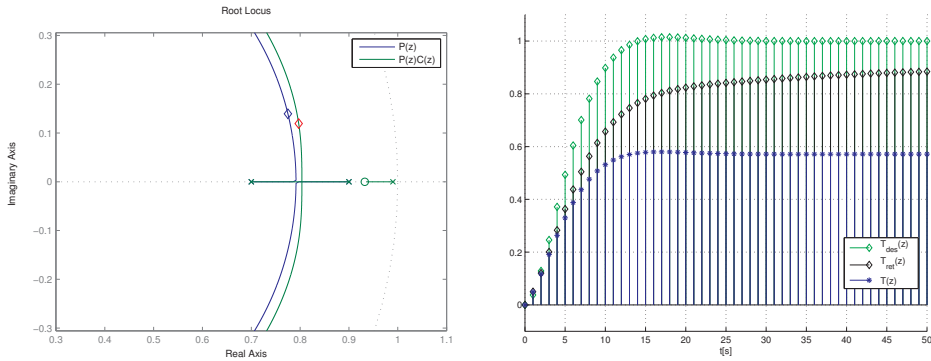


Fig. 13.14 Lloc geomètric i resposta temporal de l'Exemple 94.

branques del sistema modificat estan més a prop del cercle unitat perquè es tracta d'un compensador de retard de fase i, per tant, el sistema de llaç tancat amb compensador és més lent que el sistema de llaç tancat únicament amb compensador proporcional.

A més d'aquests pols, el sistema de llaç tancat presenta també un pol a $z = 0.9458$ i un zero a $z = 0.9325$, que prové del controlador. Aquest pol domina la resposta temporal. A la Figura 13.14 es mostren la resposta temporal de referència, l'obtinguda amb el controlador proporcional i l'obtinguda amb el controlador de retard de fase. Com es pot comprovar aquesta darrera presenta la precisió volguda amb un resposta similar a la dissenyada.

Exemple 95 Donada la planta

$$P(z) = \frac{1}{(z+0.5)(z^2 - z + 0.5)},$$

trobeu un controlador que faci que els pols de llaç tancat dominants estiguin a $z_d = 0.5640 \pm 0.6248j$ i el sistema presenti un error en estat estacionari a la resposta al graó inferior al 10%.

Observeu que a l'Exemple 89 s'ha determinat que z_d pertany al lloc geomètric de $P(z)$. I que és un pol de llaç tancat amb un controlador proporcional, amb $k_c = 0.195$. Com es pot observar a la Figura 13.1, l'error davant d'entrades graó és força gran. El coeficient d'error de posició és:

$$K_p = k_c P(1) = 0.195 \cdot 1.333 = 0.26 \rightarrow e^{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.7937$$

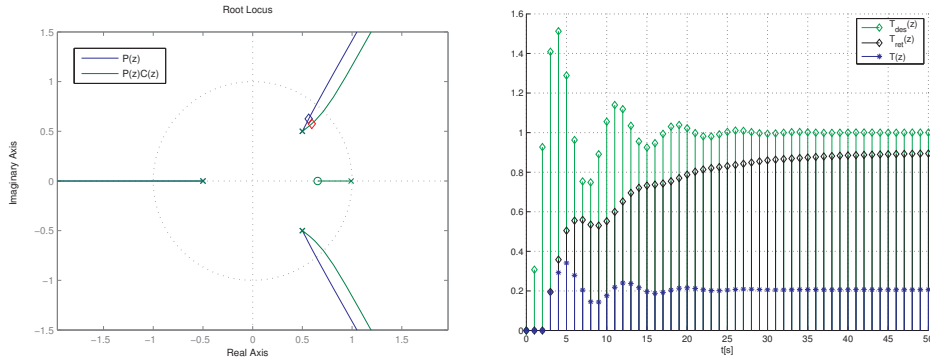
per tant, l'error és d'un 80%.

Per tal de mantenir la resposta temporal i millorar les característiques de precisió, s'introduirà un controlador per retard de fase. Per tal de tenir un error inferior al 10%, s'ha de tenir un coeficient d'error de posició de $K_p = \frac{1}{e^{ss}} - 1 = 9$; així, el controlador ha d'aplicar un increment de

$$\Delta K_p = \frac{9}{0.26} = 34.6.$$



Fig. 13.15
Lloc geomètric i resposta temporal de l'Exemple 95.



Com es pot comprovar, l'increment de guany és força gran, cosa que farà que el que controlador estigui lluny de l'ideal.

Seleccionant $\epsilon = 0.01$ i aplicant l'increment de guany, s'obté $\epsilon = 0.336$, cosa que implica $p_c = 0.99$ i $z_c = 0.6538$. Així, el controlador obtingut presenta la forma

$$C(z) = 0.19497 \frac{z - 0.6538}{z - 0.99}$$

Amb aquest controlador, la funció de llaç tancat obtinguda és:

$$T_{ret}(z) = \frac{0.19497(z - 0.6538)}{(z - 0.9057)(z + 0.6047)(z^2 - 1.189z + 0.6847)}$$

Com es pot observar, el sistema de llaç tancat presenta dos pols complexs conjugats a $0.5945 \pm 0.5756i$. Com es pot veure, són propers als que es volien fixar. La Figura 13.15 mostra el RL del sistema original i el sistema amb compensador. S'hi indiquen també els pols que es volen mantenir i els que s'han obtingut. Com es pot observar, estan propers. A més d'aquests pols, el sistema de llaç tancat presenta també pols a $z = 0.9057$ i $z = -0.6047$ i un zero a $z = 0.6538$ que prové del controlador. El proper pol domina la resposta temporal i el seu efecte no es cancel·la amb el zero, ja que estan força lluny. A la Figura 13.15, es mostren la resposta temporal de referència, l'obtinguda amb el controlador proporcional i l'obtinguda amb el controlador de retard de fase. Com es pot comprovar, aquesta darrera presenta la precisió volguda però una resposta temporal que no és la dissenyada; això és degut al fet que en el controlador dissenyat el pol i el zero estan força distanciats i, per tant, no presenta la configuració de dipol.

Exemple 96 Considerem una planta de temps continu definida per la funció de transferència

$$P(s) = \frac{887.69}{s(s + 8.871)}, \tag{13.28}$$

mostrejada amb un període de mostrejatge $T = 0.01$ s. Busqueu un controlador que faci que els pols de llaç tancat estiguin a $z_d = 0.956 \pm 0.0737 \cdot j$ i que el sistema presenti un coeficient d'error de velocitat igual a $k_v = 20$.

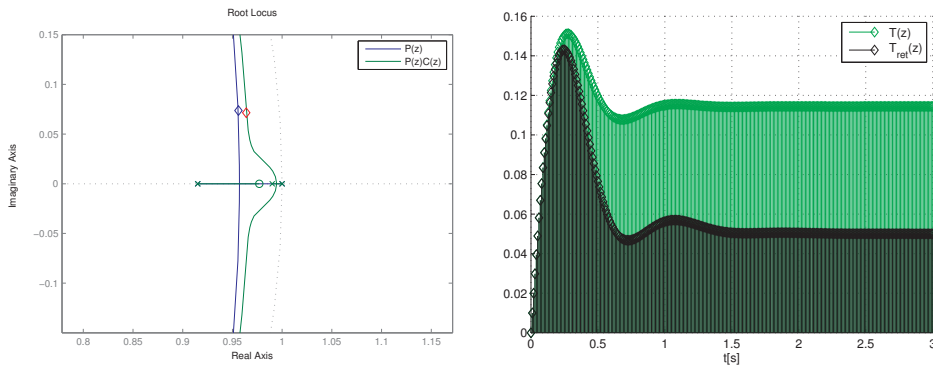


Fig. 13.16
Lloc geomètric i evolució de l'error enfront d'entrades en forma de rampa unitària de l'Exemple 96.

Atès que la planta i el període de mostratge són els mateixos que els de l'Exemple 91, el lloc geomètric del sistema proposat es pot veure a la Figura 13.6.

Els pols indicats als pols de temps continu són $-4.2035 \pm 7.6940 \cdot j$, que equivalen a tenir $\xi = 0.479$ i $\omega_n = 8.76 \text{ rad/s}$ i, per tant, un sobrepuig del 17.9% i una freqüència d'oscil·lacions de 7.69 rad/s.

Per tal de verificar que el punt pertany realment al lloc geomètric, es comprova la condició d'angle:

$$\begin{aligned} \angle(z_d + 0.9709) - \angle(z_d - 1) - \angle(z_d - 0.9151) = \\ 0.03823 - 2.109018 - 1.064272 = -3.14 \end{aligned} \quad (13.29)$$

Atès que el resultat és, aproximadament, $-\pi \text{ rad}$, es conclou que el punt pertany al lloc geomètric. Per sintonitzar el controlador proporcional que proporciona els pols de llaç tancat volguts, s'aplica la condició de mòdul ($z_d = 0.956 \pm 0.0737 \cdot j$)

$$k_c = \frac{1}{\bar{P}_T(z_d)} = \frac{|z_d - 1| |z_d - 0.9151|}{0.043101 |z_d + 0.9709|} = 0.08704. \quad (13.30)$$

Amb aquest controlador proporcional, el sistema presenta un coeficient d'error de velocitat de

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T_s \cdot z} K G_p(z) = 100.066 \cdot 0.08704 = 8.71046 \quad (13.31)$$

on 100.066 és el coeficient d'error de velocitat que presenta la planta i 0.08704 és el guany que s'hi ha introduït per tal que el z_d sigui un pol de llaç tancat.

Per tal de millorar la precisió per a entrades en forma de rampa, es dissenya un compensador per retard de fase. Es vol que la nova constant d'error de velocitat valgui 20, que equival a demanar un error de seguiment del 5% per a entrades en forma de rampa. L'increment de guany que ha d'aportar el compensador és $\Delta K^P = 2.2961$, i, agafant $\varepsilon = 10^{-2}$, s'obté: $\varepsilon = 0.0130$ i, per tant, $p_c = 0.99$ i $z_c = 0.977$, cosa que genera el controlador:



$$C(z) = \frac{0.087047(z - 0.977)}{(z - 0.99)}$$

Amb aquest controlador, la funció de llaç tancat obtinguda és de la forma:

$$T_{ret} = \frac{0.0037518(z - 0.977)(z + 0.9709)}{(z - 0.9736)(z^2 - 1.928z + 0.9342)}$$

Com es pot observar, el sistema de llaç tancat presenta dos pols complexos conjugats a $0.9639 \pm 0.0715i$. Com es pot veure, són propers als que es volien fixar. La Figura 13.16 mostra el RL del sistema original i el sistema amb compensador. S'indiquen també els pols que es volen mantenir i els que s'han obtingut. Com es pot observar estan propers. A més d'aquests pols, el sistema de llaç tancat presenta també un pol a $z = 0.9736$ i zeros a $z = 0.977$ i $z = -0.9709$. A la Figura 13.16 es mostra l'error de seguiment a la rampa del sistema obtingut amb el controlador proporcional i l'obtinguda amb el controlador de retard de fase. Com es pot comprovar, aquesta darrera presenta la precisió volguda.



CRRLtd:

1. Carregar el segon exemple. Activeu l'opció de Precisió. Analitzeu el controlador obtingut i compareu-ne el sistema compensat i sense compensar. Augmenteu la K_p fins a 160 aproximadament. Quins canvis s'observen en el RL? I en la resposta temporal? Continueu augmentant el valor de K_p . Quin efecte té?
 2. Carregar el segon exemple. Activeu l'opció de Precisió i fixeu el valor de K_p en 160, aproximadament. Augmenteu en valor del pol del compensador i analitzeu l'evolució del RL del sistema amb compensador i la resposta temporal. Què es pot observar?
-



Exercicis proposats

1. Donada la planta

$$P(z) = \frac{-0.036972(z-1.5)}{z(z-0.6902)(z-0.8)},$$

busqueu el controlador proporcional que fa que els pols de llaç tancat dominants siguin $0.78778 \pm 0.17053j$. Quin és l'error en estat estacionari del sistema de llaç tancat enfront d'entrades graó? Incorporeu un controlador de retard de fase que, faci que mantenint el pols de llaç tancat, l'error sigui inferior al 20%.

2. Donada la planta

$$P(z) = \frac{z-0.3}{(z-0.8)(z-0.9)} \quad (T = 0.1 \text{ s}),$$

busqueu un controlador que faci que el sistema de llaç tancat presenti un coeficient d'esmoreïment de 0.856 i una freqüència natural de 3.02 rad/s emprant un controlador d'avanç de fase amb un mètode de sintonia d'equidistribució.

3. Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.3}{(z-0.8)(z-0.6)},$$

busqueu un controlador que faci que els pols de llaç tancat estiguin a $0.7 \pm 0.53j$. Quin és l'error en estat estacionari del sistema de llaç tancat enfront d'entrades graó? Incorporeu un controlador de retard de fase que faci que, mantenint el pols de llaç tancat, l'error sigui inferior al 10%. Fixeu primerament el pol del controlador a 0.95 i posteriorment fixeu-lo a 0.99. Compareu la posició dels pols de llaç tancat en els dos casos.

4. Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.3}{(z-0.85)(z-0.5)},$$

busqueu un controlador que faci que els pols dominants de llaç tancat siguin: $0.4710 \pm 0.5595j$ i l'error davant d'entrades graó sigui inferior al 20%.

5. Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.3}{(z-0.9)(z-0.7)},$$

busqueu un controlador que faci que els pols dominants de llaç tancat siguin: $0.4710 \pm 0.5595j$ i el sistema de llaç tancat sigui de segon ordre.

6. Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.5}{(z-0.95)(z-0.7)},$$



busqueu un controlador que faci que els pols dominants de llaç tancat siguin: $0.825 \pm +0.696j$ i el sistema de llaç tancat sigui de segon ordre. Afegiu, a continuació, un controlador addicional (en sèrie amb l'anterior) en que l'error en estat estacionari davant d'entrades graó sigui inferior al 10%.

- Analitzeu si és possible aplicar el mecanisme de disseny que s'ha presentat en aquest capítol (secció 13.3 i secció 13.4) a un sistema de la forma

$$P(z) = \gamma \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

- Analitzeu si és possible emprar el mecanisme descrit a la secció 13.3 per dissenyar compensadors de retard de fase.
- Analitzeu si és possible estabilitzar el sistema

$$P(z) = \frac{(z - 2)(z + 2)}{(z - 1.1)(z + 1.1)}$$

amb un controlador de primer ordre.

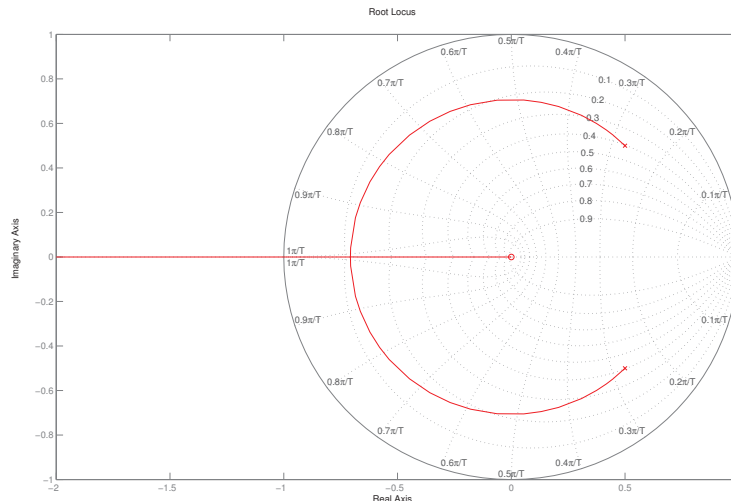
- Donada la planta

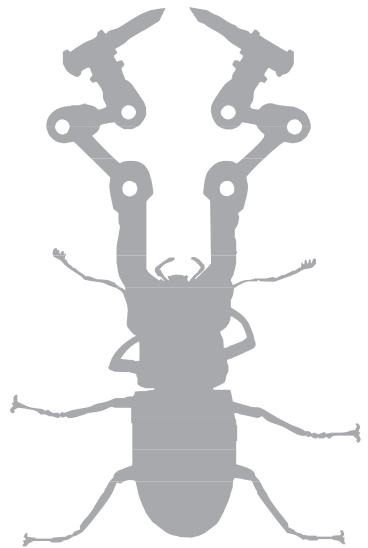
$$P(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0.5} \quad (T = 0.1s)$$

i tenint en compte que el seu RL es visualitza a la Figura 13.17), busqueu un controlador que faci que els pols dominants presentin un coeficient d'esmoreïment de 0.358 i una freqüència natural de 3.34 rad/s, i el sistema presenti un error estacionari davant d'entrades graó inferior al 10%. Analitzeu si és assolible amb un controlador de primer ordre i, en cas contrari, analitzeu quina estructura ha de tenir el controlador. Podeu ajudar-vos de l'eina interactiva de construcció del RL per analitzar on s'han de ficar els pols i els zeros; posteriorment, completeu analíticament el disseny.

Fig. 13.17
RL de la planta

$$P(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0.5}$$





→ 14



Disseny en el camp freqüencial

Un dels marcs de treball més emprats en el disseny de compensadors és el camp freqüencial. En aquest context, es procura donar forma a la resposta freqüencial de llaç obert per tal que el sistema de llaç tancat presenti les característiques volgudes. El més habitual és fixar especificacions de precisió i de marge de fase.

La resposta freqüencial de temps discret presenta un comportament difícil d'analitzar; en contrapartida, la resposta freqüencial dels sistemes de temps continu presenta un comportament asimptòtic que la fa més fàcil d'analitzar i caracteritzar. Per aquest motiu, resulta més senzill dissenyar els controladors en el marc de temps continu que en el de temps discret.

La transformada bilineal (o transformada de Tustin) és una transformació que s'aplica a les funcions de transferència de temps discret per tal de convertir-les en funcions de transferència similars a les de temps continu. Un cop s'ha aplicat aquesta transformada, es poden dissenyar controladors en el camp freqüencial de forma anàloga a l'emprada en temps continu. Posteriorment, s'aplica la transformada bilineal inversa al controlador obtingut i s'obté un controlador de temps discret que compleix les especificacions.

En aquest capítol, es presenten algorismes de disseny de controladors d'avanç i retard de fase aproximats en el camp freqüencial, emprant la transformada bilineal; finalment, es presenta una aproximació exacta i directa al disseny de controladors d'avanç/retard en temps discret.

14.1. Introducció

El disseny en el camp freqüencial és un dels més emprats a la pràctica ja que permet aconseguir dissenys de forma senzilla i tenint en compte els principals tipus d'especificacions. En moltes ocasions, el disseny en el camp freqüencial permet assolir les especificacions emprant controladors d'ordre baix (aquest és l'enfocament que es segueix en aquest capítol).



Quan es dissenya en el camp freqüencial, les especificacions solen estructurar-se de la forma següent:

- Error en règim permanent. L'error en règim permanent en el seguiment de determinants tipus de senyals està relacionat directament amb el valor de la resposta freqüencial de llaç obert. Així, per exemple, l'error en el seguiment de senyals graó, rampa o paràbola (precisió) està directament lligat amb el valor (o l'existència de pols) en la freqüència $\omega = 0$ (secció 7.2.4).

L'error en el seguiment de senyals sinusoidals està relacionat directament amb el valor de la resposta freqüencial de llaç obert en la freqüència dels senyals sinusoidals. Si es vol assolir error nul en una freqüència, cal que el sistema de llaç obert presenti un pol en aquella freqüència (secció 7.4).

- Banda passant. L'ample de banda dóna una idea de quin tipus de senyals poden seguir-se en transitori. Un ample de banda gran indica que el sistema és ràpid i, per tant, pot seguir senyals amb gran contingut dinàmic; en contrapartida, els sistemes amb una banda passant reduïda són sistemes amb una resposta lenta.
- Robustesa. Com s'ha analitzat a la secció 10.3, hi ha mesures que indiquen que lluny que s'està de la inestabilitat. És a dir, quan pot canviar la planta i que el sistema de llaç tancat continuï essent estable. En particular, és habitual emprar el marge de fase en els processos de disseny de controladors.

Molts dels mètodes clàssics de disseny en el camp freqüencial estan basats en el coneixement que es té del comportament de les respostes freqüencials dels sistemes de temps continu. Aquestes estan definides a l'interval $[0, \infty]$ i presenten un comportament asimptòtic. És aquest comportament asimptòtic un dels conceptes més emprats en els processos de disseny.

La resposta freqüencial de temps discret, a diferència de la de temps continu, està definida a l'interval $[0, \pi]^1$ i no presenta un comportament asimptòtic. Això fa que aquests mètodes no siguin directament aplicables.

Hi ha una transformació, anomenada *transformació bilineal*, que agafa la resposta freqüencial d'un sistema de temps discret i la transforma en una que presenta les mateixes característiques que les de temps continu. L'ús d'aquesta transformada permet aplicar els mètodes clàssics de disseny en el camp freqüencial de forma senzilla. Aquesta aproximació es descriu a les seccions següents.

14.2. La transformació bilineal

14.2.1. Definició

La transformació bilineal és una transformació conforme del pla \mathbb{C} menys un punt, al mateix pla menys un altre punt. Les transformacions conformes conserven angles; tanmateix, la part que ens interessa més és que transformen rectes en circumferències, i viceversa.

¹ $[0, \frac{\pi}{T}]$ en els sistemes mostrejats.

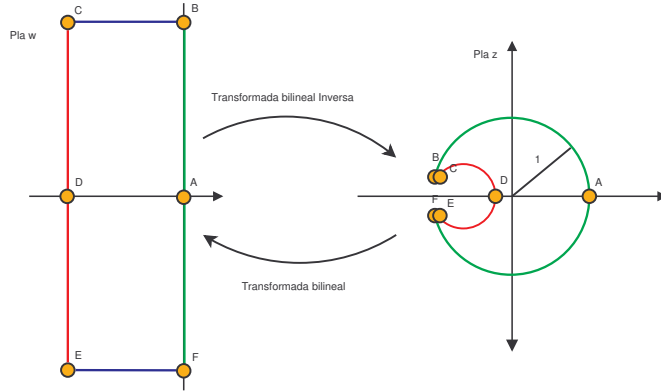


Fig. 14.1 Relació del pla w amb el pla z emprant la transformada bilineal.

Definició 58 L'aplicació de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ a $\mathbb{C} \setminus \{\frac{2}{T}\}$ definida per

$$\mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{2}{T}\}$$

$$z \longmapsto w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

on T és un escalar positiu, s'anomena transformació bilineal (o transformada de Tustin).

Definició 59 L'aplicació de $\mathbb{C} \setminus \{\frac{2}{T}\}$ a $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ definida per

$$\mathbb{C} \setminus \{\frac{2}{T}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$

$$w \longmapsto z = \frac{1 + \frac{T \cdot w}{2}}{1 - \frac{T \cdot w}{2}}$$

on T és un escalar positiu, s'anomena transformació bilineal inversa (o transformada de Tustin inversa).

Proposició 54 La transformació bilineal i la transformada bilineal inversa són bijectives.

Atès que les transformacions definides a

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad i \quad z = \frac{1 + \frac{T \cdot w}{2}}{1 - \frac{T \cdot w}{2}}$$

són inverses una de l'altra, ambdues són bijectives (1:1).

Per analitzar com la transformada bilineal relaciona el pla z amb un pla w , la Figura 14.1 mostra com es transforma un rectangle en el pla w definit pels vèrtexs B, C, E i F . Aquest rectangle es transforma en la regió continguda entre dos arcs de circumferència. Com es pot observar, els segments de línia recta es transformen en arcs de cercle i, de forma similar, les rectes en el pla w es transformen en arcs de circumferències en el pla z . Es pot comprovar que, a mesura que augmentem la grandària del rectangle del pla w , els punts B, C, D, E i F del pla z es van aproximant al punt $z = -1$.



Proposició 55 La transformació bilineal transforma la circumferència unitat en l'eix imaginari, i el seu interior en el semiplà esquerre.

14.2.2. Aplicació de la transformada bilineal a funcions de transferència

En aquesta secció, s'analitzen els resultats d'aplicar la transformada bilineal a una funció de transferència. Així, donada un funció de transferència:

$$P_z(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

si s'hi aplica la transformada bilineal, s'obté:

$$\begin{aligned} P_w(w) = \mathcal{T}_T(P_z(z)) &= \frac{b_m \left(\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\right)^m + b_{m-1} \left(\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\right)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \left(\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\right)^{n-1} + \dots + a_0} \\ &= \frac{(1-\frac{T}{2}w)^{n-m} \sum_{k=0}^m b_k \left(1+\frac{T}{2}w\right)^k (1-\frac{T}{2}w)^{m-k}}{\sum_{k=0}^n a_k \left(1+\frac{T}{2}w\right)^k (1-\frac{T}{2}w)^{n-k}} \end{aligned}$$

on T és un factor d'escalat que correspon al període de mostratge en cas que $P_z(z)$ provingui del mostratge d'una planta de temps continu, i $T = 1$ en cas de plantes de temps discret pur². Com es pot comprovar, independentment del grau relatiu de la funció de transferència original, la funció de transferència a w és de grau relatiu 0. Fent un abús del llenguatge, anomenarem funció de transferència en bilineal $P_w(w)$. Cal tenir en compte que la interpretació de $P_w(w)$ en termes d'una relació entrada sortida no és directa.

Proposició 56 Donada una funció de transferència $P_z(z)$, l'obtinguda aplicant la transformada bilineal, $P_w(w)$, compleix:

- Si $P_z(z)$ té un pol a $z = p$, aleshores $P_w(w)$ presenta un pol a $\frac{2}{T} \cdot \frac{p-1}{p+1}$.
 - Els pols de $P_z(z)$ situats a l'interior del cercle unitat del pla z corresponen a pols de $P_w(w)$ sobre el semiplà esquerre del pla w .
 - Els pols de $P_z(z)$ situats sobre la circumferència unitat del pla z corresponen a pols de $P_w(w)$ sobre l'eix imaginari del pla w .
 - Els pols de $P_z(z)$ situats a l'exterior del cercle unitat del pla z corresponen a pols de $P_w(w)$ sobre el semiplà dret del pla w .
- Si $P_z(z)$ no presenta cancel·lacions pol/zero i presenta p pols a $z = -1$; aleshores, $P_w(w)$ és de grau relatiu $-p$.
- No hi ha una relació senzilla entre els zeros de $P_z(z)$ i els de $P_w(w)$.
 - Si $P_z(z)$ no presenta cancel·lacions pol/zero i presenta p zeros a $z = -1$; aleshores, $P_w(w)$ és de grau relatiu p .

² Encara que aquest és el factor d'escalat més emprat, a la pràctica són possibles altres factors d'escalat (warping factor).



- Si $P_z(z)$ no presenta cancel·lacions pol/zero i no presenta pols/zeros a $z = -1$; aleshores, $P_w(w)$ és de grau relatiu 0. A més, $P_w(w)$ presenta tants zeros a $w = \frac{2}{T}$ com grau relatiu presenta $P_z(z)$.

De forma similar, donada una funció de transferència en bilineal

$$G_w(w) = \frac{c_m w^m + c_{m-1} w^{m-1} + \dots + c_1 w + c_0}{d_n w^n + d_{n-1} w^{n-1} + \dots + d_1 w + d_0}$$

en aplicar la transformada bilineal inversa s'obté:

$$\begin{aligned} G_z(z) = \mathcal{T}_T^{-1}(G_w(w)) &= \frac{c_m \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)^m + c_{m-1} \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)^{m-1} + \dots + c_1 \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right) + c_0}{d_n \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)^n + d_{n-1} \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)^{n-1} + \dots + d_1 \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right) + d_0} \\ &= \frac{T^{n-m} (z+1)^{n-m} \sum_{k=0}^m c_k (z-1)^k (z+1)^{m-k} 2^k T^{m-k}}{\sum_{k=0}^n d_k (z-1)^k (z+1)^{n-k} 2^k T^{n-k}}. \end{aligned}$$

Proposició 57 Una funció de transferència $G_z(z)$, obtinguda aplicant la transformada bilineal inversa a $G_w(w)$, compleix:

- Si $G_w(w)$ presenta un pol en w , aleshores $G_z(z)$ presenta un pol a $\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$. Els pols en el semiplà esquerre del pla w es corresponen amb pols a l'interior del cercle unitat del pla z ; de forma similar, els pols sobre l'eix imaginari es transformen en pols sobre la circumferència unitat.
- Si $n > m$, aleshores $G_z(z)$ conté $m - n$ zeros a $z = -1$.
- Si $m > n$, aleshores $G_z(z)$ conté $m - n$ pols a $z = -1$. Per tant, si $G_w(w)$ presenta tots els pols en el semiplà esquerre aleshores $G_z(z)$ és marginalment estable ($m - n = 1$) / inestable ($m - n > 1$).
- $G_z(z)$ és sempre causal independentment del grau relatiu de $G_w(w)$.

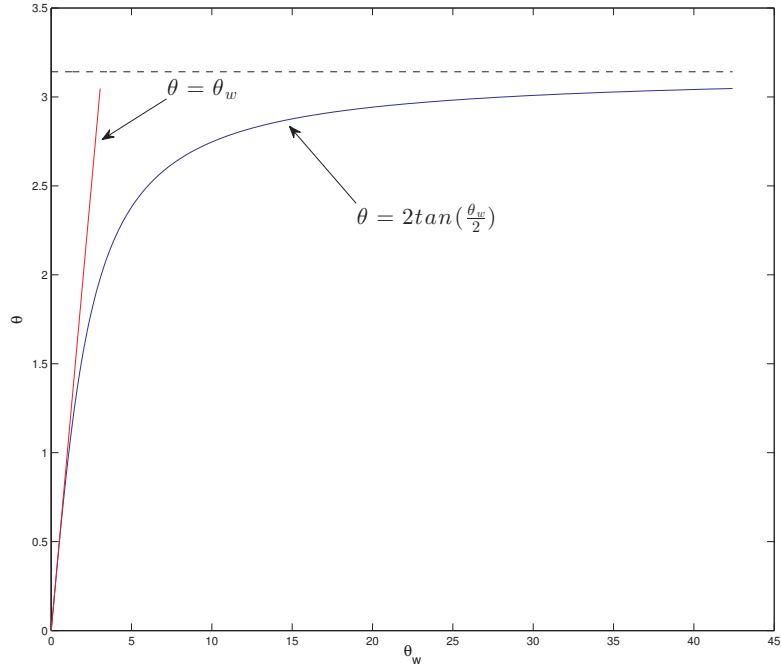
Comentari 32 Les plantes de temps discret, $P(z)$, que provenen del mostratge d'una planta de temps continu, $P(s)$, són majoritàriament de grau relatiu 1; per aquest motiu, $P_w(w) = \mathcal{T}_T(P(z))$ serà de grau relatiu 0, amb un zero a $w = \frac{2}{T}$. En cas d'aplicar la transformada bilineal inversa a $P_w(w)$, es recuperaria la funció de transferència original, $P(z)$.

Si, donada $P(z)$, s'obté $P_w(w) = \mathcal{T}_T(P(z))$, és possible pensar $P_w(w)$ com una funció de transferència de temps continu assimilant la variable w a la variable s de la transformada de Laplace. Amb aquestes hipòtesis es pot dir que la transformada bilineal és una transformació que conserva l'estabilitat, ja que si $P(z)$ correspon a una funció de transferència estable, aleshores $P_w(w)$ correspondria a una funció de transferència estable.

Com s'ha analitzat a la secció 8.1, la resposta freqüencial dels sistemes de temps discret es caracteritza perquè avalua la funció de transferència sobre la circumferència unitat, $P(e^{j\theta})$ $\theta \in [0, \pi]$, ($P(e^{j\omega T})$ $\theta \in [0, \frac{\pi}{T}]$). Com s'ha vist a la secció 14.2.1, la transformada bilineal transforma el cercle unitat en l'eix imaginari; així és possible trobar $\theta(\omega)$ i $\theta_\omega(\omega)$ tals que:



Fig. 14.2
Desescalat de
freqüències introduït per
la transformació bilineal.



$$P(e^{j\theta}) = P_w(\theta_w j); P(e^{j\omega T}) = P_w(\varpi j).$$

Atès que la resposta freqüencial d'un sistema de temps continu $G(s)$ s'obté avaluant $s = \omega j$ ($\omega \in [0, \infty]$), la funció de transferència en bilineal, $P_w(w)$, presentarà exactament el mateix diagrama de Nyquist que $P(z)$.

Per determinar la relació entre θ (ω) i θ_w (ϖ), s'aplica la igualtat sobre la transformació bilineal:

$$\begin{aligned} \theta_w j &= 2 \frac{e^{j\theta} - 1}{e^{j\theta} + 1} = 2 \frac{(j\theta - 1)(e^{-j\theta} + 1)}{(e^{j\theta} + 1)(e^{-j\theta} + 1)} = 2 \frac{\lambda + e^{j\theta} - e^{-j\theta} - \lambda}{1 + e^{j\theta} + e^{-j\theta} + 1} \\ &= 2 \frac{2j \sin(\theta)}{2(1 + \cos(\theta))} = 2j \frac{2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{1 + \cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})} \\ &= 2j \frac{2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2j \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

i s'obté:

$$\theta_w = 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right); \varpi = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (13.1)$$

Aquesta relació es visualitza a la Figura 14.2. En les pulsacions properes a zero, la tangent es pot aproximar per l'angle; per tant,

$$\varpi = 2 \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \approx 2 \frac{\omega}{2} = \omega; \theta_{\varpi} \approx \theta$$

cosa que, com es pot veure a la Figura 14.2, fa que a la zona de baixes freqüències el desescalat sigui molt petit. Atès que ϖ i θ_{ϖ} no són pulsacions reals, normalment reben el nom de pseudopulsació de bilineal i pseudopulsació normalitzada de bilineal, respectivament.

Comentari 33 Des del punt de vista de la resposta freqüencial (diagrama de Bode), la transformada bilineal és únicament un desescalat de l'eix de freqüències. Els valors que pren la resposta freqüencial són els mateixos, amb la diferència que es prenen a freqüències/pseudofreqüències diferents.

Atès que els valors de la resposta freqüencial són els mateixos i que en els diagrames de Nyquist i Nichols no apareix la freqüència, ambdós diagrames són idèntics. En contrapartida, el diagrama de Bode de temps de discret i els de bilineal són diferents.

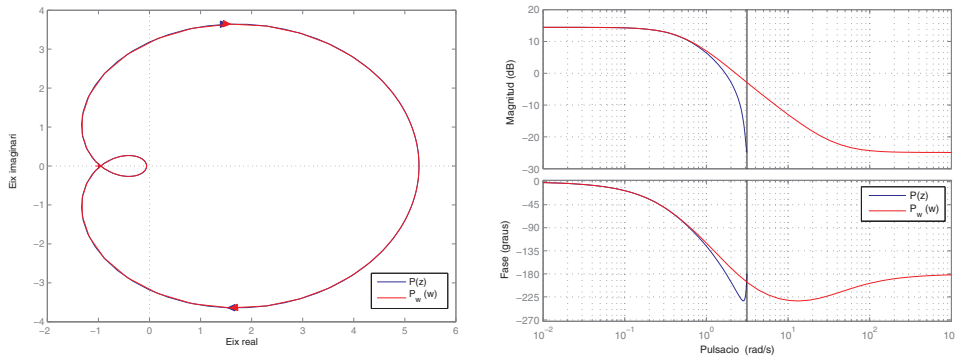


Fig. 14.3
Diagrames de Nyquist i Bode de $P(z)$ i $P_w(w)$ de l'Exemple 97.

Exemple 97 Donada la planta

$$P(z) = \frac{z + 0.9}{(z - 0.6)(z - 0.1)},$$

amb $T = 1$ s, es vol obtenir la transformada bilineal i comparar les dues respostes freqüencials.

Un cop aplicat el canvi de variable, s'obté:

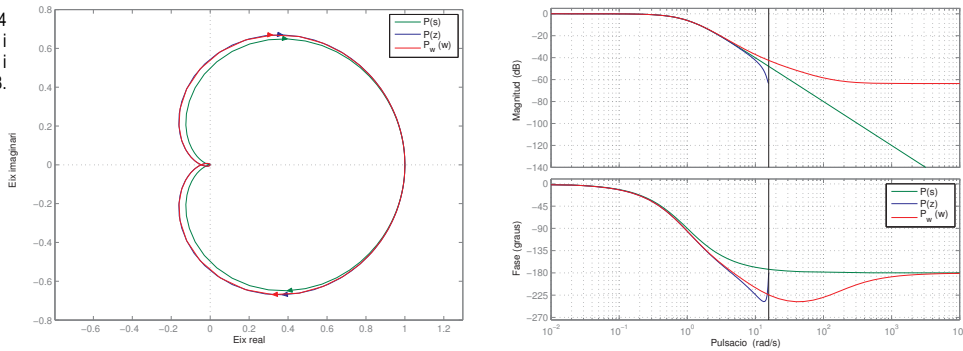
$$P_w(w) = \frac{-0.056818(w + 38)(w - 2)}{(w + 0.5)(w + 1.636)}.$$

Podem observar que, encara que la funció de transferència inicial és de grau relatiu 1, la de la bilineal és de grau relatiu 0. Es pot veure també que els pols de $P(z)$ son a l'interior del cercle unitat, mentre que el de $P_w(w)$ és al semiplà esquerre del pla w ; per tant es conserven les característiques d'estabilitat. La Figura 14.3 mostra el diagrama de Nyquist de $P(z)$ i $P_w(w)$; com es pot comprovar, són idèntics. La figura mostra també el diagrama de Bode. En aquest cas, hi ha discrepància entre ambdós. El diagrama de



Bode de $P(z)$ es pinta en un rang finit de freqüències, mentre que el de $P_w(w)$ es pinta en un rang infinit. A més a més, aquest darrer presenta un perfil asimptòtic.

Fig. 14.4
Diagrams de Nyquist i
Bode de $P(s)$, $P_T(z)$ i
 $P_w(w)$ de l'Exemple 98.



Exemple 98 Donada la planta de temps continu definida per la funció de transferència

$$P(s) = \frac{1}{(s + 1)^2},$$

obtenu-ne la seva transformada en z , amb $T = 0.2$ s, i després la transformada bilineal. Finalment, compareu el valor de la resposta freqüencial en 1 rad/s i 10 rad/s.

Aplicant la transformada en z , amb el període de mostratge indicat, s'obté la funció de transferència:

$$P_T(z) = \mathcal{Z}_T \{P(s)\} = \frac{0.017523(z + 0.8752)}{(z - 0.8187)^2}.$$

Posteriorment, aplicant la transformada bilineal, s'obté:

$$P_w(w) = \mathcal{T} \{P_T(z)\} = \frac{-0.00066137(w + 150.2)(w - 10)}{(w + 0.9967)^2}.$$

Podem comprovar que totes les funcions de transferència són de segon ordre, però mentre la funció de temps continu és de grau relatiu 2, la de temps discret és de grau relatiu 1 i la de transformada bilineal és de grau relatiu 0. La Figura 14.4 mostra la resposta freqüencial de les tres funcions de transferència. Com es pot observar, el diagrama de Nyquist de la funció de temps discret i el de la transformada bilineal són idèntics, mentre que hi ha discrepàncies en el de temps discret. Si s'observa el diagrama de Bode, es pot veure que totes tres respostes freqüencials són diferents, encara que a la zona de baixa freqüència presenten força similituds.

Per avaluar el valor de la resposta freqüencial a 1 rad/s, es fa:

$$\begin{aligned} P(1 \cdot j) &= 3.0 \cdot 10^{-17} - 0.5 \cdot j, P_T(e^{1 \cdot 0.2 \cdot j}) = -0.0498 - 0.4967 \cdot j, P_w(1 \cdot j) \\ &= -0.0482 - 0.4985 \cdot j. \end{aligned}$$

Per avaluar el valor de la resposta freqüencial a 10rad/s, es fa:

$$\begin{aligned} P(10 \cdot j) &= -0.0097 - 0.0020 \cdot j, P_T(e^{10 \cdot 0.2 \cdot j}) = -0.0055 + 0.0053 \cdot j, P_w(10 \cdot j) \\ &= -0.0121 + 0.0069 \cdot j \end{aligned}$$

Comentari 34 Encara que la transformada bilineal transformi una funció de transferència en z en una funció de transferència que presenta característiques de temps continu, aquesta no correspon a la planta de temps continu original en el cas de sistemes mostrejats.

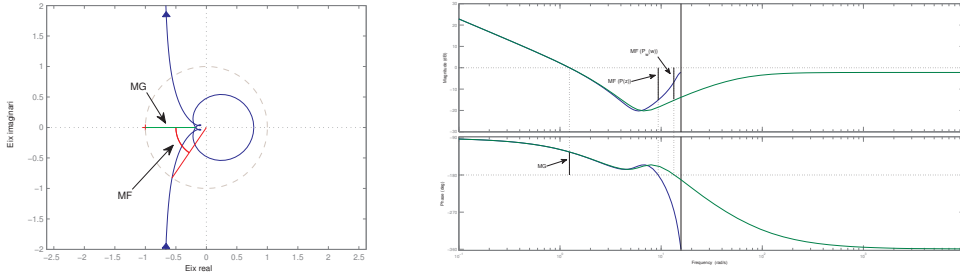


Fig. 14.5 Representacions dels marges de fase i guany de l'Exemple 99.

Exemple 99 Donats la planta

$$P(z) = \frac{(z^2 - 0.6z + 0.45)}{z(z - 0.1)(z - 0.6)(z + 0.7)}$$

i el controlador $C(z) = \frac{0.3z - 0.1}{z - 1}$, i un període de mostratge de $T = 0.2$ s, determineu el marge de fase i el marge de guany del sistema de llaç tancat. Apliqueu-hi posteriorment la transformada bilineal, i obteniu el marge de fase i el marge de guany del sistema transformat.

Per determinar el marge de guany, es busca la pulsació de tall a -180°

$$\angle C(e^{j\omega_{MG}T})P(e^{j\omega_{MG}T}) = -180^\circ \rightarrow \omega_{MG} = 9.3544 \text{ rad/s,}$$

posteriorment, es mira el guany en aquesta pulsació:

$$|C(e^{j\omega_{MG}T})P(e^{j\omega_{MG}T})| = 0.1753.$$

I finalment, es calcula el marge de guany com:

$$MG = \frac{1}{0.1753} = 5.7048 \rightarrow 15.1248 \text{ dB.}$$

De forma similar, el marge de fase s'obté buscant la pulsació de tall a 0dB:

$$|C(e^{j\omega_{MF}T})P(e^{j\omega_{MF}T})| = 1 \rightarrow \omega_{MF} = 1.2390 \text{ rad/s.}$$

Posteriorment, es mira la fase en aquesta pulsació:

$$\angle C(e^{j\omega_{MF}T})P(e^{j\omega_{MF}T}) = -124.2006^\circ$$



i finalment, es calcula el marge de fase com:

$$MF = 180 - 124.2006 = 55.7994^\circ.$$

Atès que ambdós són positius, el sistema de llaç tancat serà estable.

Aplicant la transformada bilineal a $P(z)$ i $C(z)$, s'obté:

$$P_w(w) = \frac{3.8826(w-10)^2(w^2 + 5.366w + 41.46)}{(w+10)(w+8.182)(w+2.5)(w+56.67)}$$

$$C_w(w) = \frac{0.2w + 1}{w}$$

La Figura 14.5 mostra el diagrama de Nyquist i el diagrama de Bode de $P(z)$ i $P_w(w)$. Com es pot comprovar, el diagrama de Nyquist és idèntic i, per tant, els marges de fase i guany també ho són.

Per calcular els valors del marge de fase i guany emprant les funcions de transferència en bilineal es fa el següent. Per determinar el marge de guany, es busca la freqüència de tall a -180°

$$\angle C_w(j\omega_{MG})P_w(j\omega_{MG}) = -180^\circ \rightarrow j\omega_{MG} = 13.5592 \text{ rad/s},$$

posteriorment es mira el guany en aquesta pseudopulsació:

$$|C_w(j\omega_{MG})P_w(j\omega_{MG})| = 0.1753$$

i finalment, es calcula el marge de guany com

$$MG = \frac{1}{0.1753} = 5.7048 \rightarrow 15.1248 \text{ dB}.$$

De forma similar, el marge de fase s'obté buscant la pseudopulsació de tall a 0 dB:

$$|C_w(j\omega_{MF})P_w(j\omega_{MF})| = 1 \rightarrow \omega_{MF} = 1.2454 \text{ rad/s}.$$

Posteriorment, es mira la fase en aquesta pseudopulsació:

$$\angle C_w(j\omega_{MF})P_w(j\omega_{MF}) = -124.2006^\circ$$

i finalment, es calcula el marge de fase com:

$$MF = 180 - 124.2006 = 55.7994^\circ.$$

Atès que ambdós són positius, el sistema de llaç tancat serà estable. Com es pot comprovar, les característiques d'estabilitat es mantenen inalterades. Els valors de marge de fase i el marge guany són idèntics. La diferència principal és la pulsació/pseudopulsació a què s'obtenen. Com es pot comprovar, el marge de fase es produeix a baixa freqüència i, per tant, la variació de freqüència és poca, mentre que en el marge de guany la cosa és diferent.



Comentari 35 *En un sistema de temps discret al qual s'aplica la transformada bilineal, les característiques freqüencials queden inalterades. Per aquest motiu, tant la caracterització d'estabilitat en llaç tancat com els marges de fase i guany es poden calcular en els dos àmbits, indistintament.*

Transformacio_Bilineal_zw:



1. Carregueu l'exemple per defecte (Reset).
 - (a) Identifiqueu sobre el diagrama de Bode quin és la resposta freqüencial de $P(z)$ i la de $P_w(w)$.
 - (b) Desplaceu els pols del sistema en transformada z. Quin és l'efecte sobre el zero del sistema amb bilineal?
 2. Carregueu el segon exemple. Desplaceu el pols complexos conjugats de $P(z)$. Com es mouen els pols de $P_w(w)$? Es mouen els zeros de $P_w(w)$?
-

14.2.3. Disseny de compensadors

Com s'ha vist a la secció anterior, la transformada bilineal d'un sistema de control no n'altera les característiques freqüencials. Aquesta propietat pot emprar-se en el disseny de controladors en el camp freqüencial.

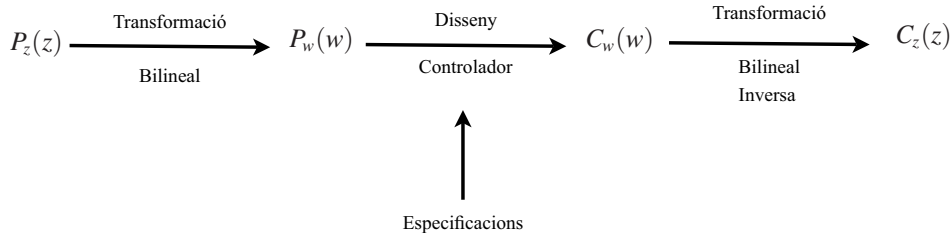


Fig. 14.6
Esquema del procediment de disseny emprant la transformada bilineal.

El camp freqüencial de temps discret no presenta una estructura senzilla que permeti fer dissenys intuïtius. En contrapartida, el camp freqüencial de temps continu presenta una estructura asimptòtica que permet desenvolupar algorismes senzills i intuïtius. Emprant la transformada bilineal, aquests mètodes definits en temps continu poden emprar-se per dissenyar controladors per a sistemes de temps discret. El procediment que cal seguir és el següent:

- Donada la funció de transferència de la planta $P(z)$, s'hi aplica la transformada bilineal i se n'obté $P_w(w)$.
- Partint de $P_w(w)$ i unes especificacions en el domini de la freqüència (precisió, marge de guany/fase), s'hi aplica algun procediment de disseny i se n'obté un controlador $C_w(w)$.

Pot emprar-se qualsevol mètode existent en temps continu que treballi en el camp de la freqüència.

- Finalment, s'hi aplica la transformada bilineal inversa i se n'obté $C(z)$ a partir de $C_w(w)$.

Per les propietats de la transformada bilineal, la resposta freqüencial de $C_w(w)P_w(w)$ presenta les mateixes característiques que les de $C(z)P(z)$.

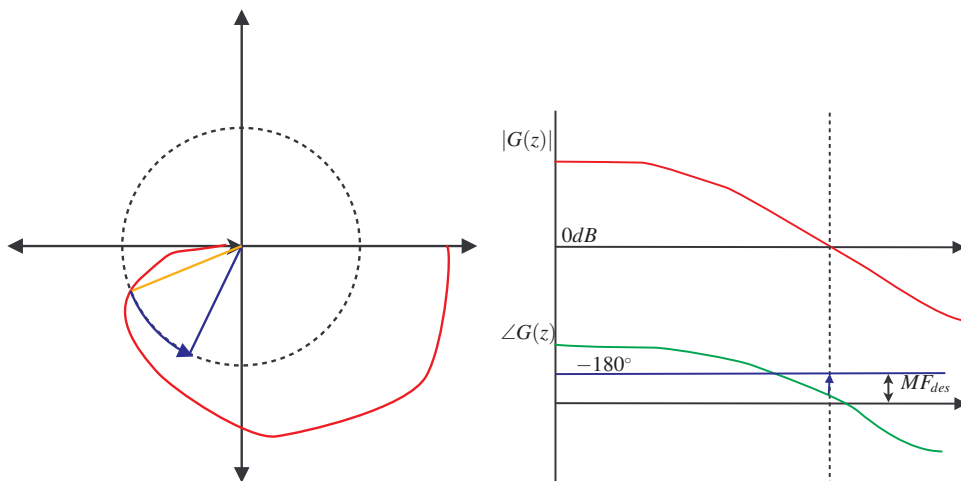
La Figura 14.6 mostra un esquema del procediment descrit.

A les seccions 14.3 i 14.4, es repassen els mètodes de disseny de compensador d'avanç i retard de primer ordre i s'il·lustra l'aplicació del procediment descrit.

14.3. Disseny del compensador d'avanç de fase emprant la transformada bilineal

En el procediment de disseny del compensador d'avanç, s'assumeixen com a especificacions la precisió del sistema i un marge de fase volgut. Per fer-ho, es fixa, en primer lloc, el guany estàtic del controlador per tal d'assolir les especificacions de precisió i, posteriorment, es dissenyen la resta de paràmetres del controlador per tal d'assolir el marge de fase volgut.

Fig. 14.7
Esquema del procediment emprat en el disseny del compensador per avanç de fase.



La Figura 14.7 mostra un possible diagrama de Nyquist. En aquest cas la planta objecte d'estudi presenta un cert marge de fase; si aquest es vol millorar, cal que el punt de tall de la corba de Nyquist amb el cercle unitat es desplaci sobre el cercle fins a situar-lo en el punt indicat. Això es pot fer mantenint el mòdul del punt inicial i afegint-hi la fase necessària. Aquest procediment serà el que intentarà aplicar el compensador d'avanç. A la mateixa figura, es mostra el diagrama de Bode i s'analitza el punt on està definit el marge de fase. Per tal de millorar el marge de fase, una aproximació és incorporar un controlador que en el punt de definició presenti mòdul 1 i una fase positiva que faci que la corba es desplaci al punt volgut. La idea del procediment és aportar fase en el punt en què està definit el marge de fase, que es pretén deixar invariant, i mantenir la resta del diagrama similar a l'anterior.

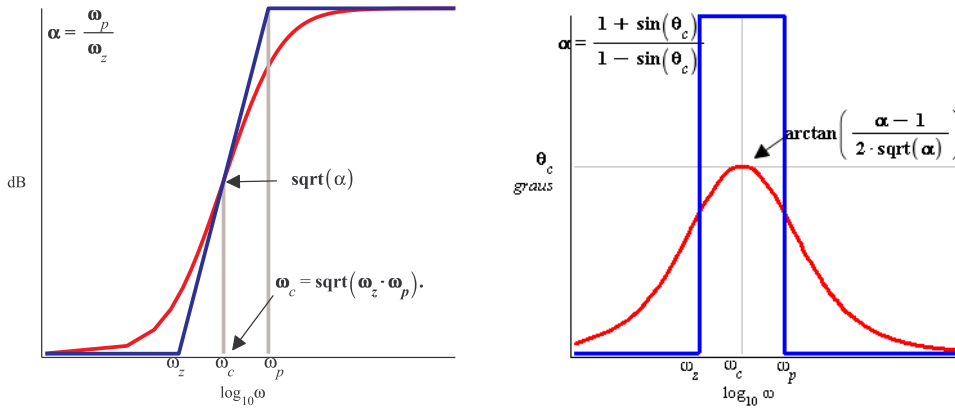


Fig. 14.8 Resposta freqüencial del controlador d'avanç de fase.

Per aplicar el procediment indicat, caldria un compensador que únicament canviés la fase en el punt d'interès. Malauradament, no hi ha cap sistema realitzable que presenti una resposta freqüencial que únicament modifiqui la fase en un punt determinat. Hi ha, però, un sistema que únicament varia la fase i deixa el guany invariant; aquest és el retard $e^{-s\tau}$ (z^{-N}). Tanmateix, el retard aporta una fase negativa, mentre que la fase necessària per millorar el marge de fase és positiva. Per tant, s'utilitzarà un sistema que modifiqui el guany i la fase, però s'intentarà aplicar el raonament introduït anteriorment.

Un controlador que permet realitzar aquest tipus de modificació sobre la resposta freqüencial és de la forma següent:³

$$C(s) = k_c \cdot \frac{\frac{s}{\omega_z} + 1}{\frac{s}{\omega_p} + 1}.$$

Aquest controlador de primer ordre presenta una resposta freqüencial caracteritzada per ω_z , la freqüència del zero, i ω_p , la freqüència del pol. Per tal que l'aportació de fase sigui positiva, és necessari que $\omega_z < \omega_p$, això fa que el controlador sigui d'avanç de fase. La Figura 14.9 mostra la taula de resposta freqüencial asimptòtica del compensador d'avanç de fase.

	0	ω_z	ω_p	∞
$\frac{s}{\omega_z} + 1$	0	1	1	
$\left(\frac{s}{\omega_p} + 1\right)^{-1}$	0	0	-1	
Totals	0	1	0	

Fig. 14.9 Taula de resposta freqüencial asimptòtica del controlador d'avanç de fase.

Com es pot veure a la Figura 14.7, el controlador presenta una resposta freqüencial asimptòtica que té un rang de freqüències amb fase zero, fins a la freqüència ω_z ; un altre interval de freqüències que presentar una fase que tendeix a 90° , entre ω_z i ω_p ,

³ Encara que, en el context del llibre aquest controlador s'emprarà en un marc de la transformada bilineal, inicialment es va formular en temps continu (transformada de Laplace) i, per aquest motiu, es descriu en temps continu.



i un darrer interval que torna a presenta fase nul·la, més enllà de ω_p . Així doncs, el controlador permet aportar fase positiva en un interval de freqüències, cosa que permetrà millorar el marge de fase, i presenta fase nul·la fora d'aquest interval, cosa que permetrà deixar aproximadament inalterada la resposta freqüencial del sistema fora de l'interval on es definirà el marge de guany. Algunes de les principals característiques quantitatives d'aquesta resposta freqüencial s'introdueixen a la Proposició 58.

Proposició 58 *Característiques del compensador d'avanç de fase.*

1. El màxim de l'argument de $C(j\omega)$, $|C(j\omega)|$, s'aconsegueix a la freqüència $\omega_c = \sqrt{\omega_z \cdot \omega_p}$, que correspon a la mitjana geomètrica de la freqüència del zero i la freqüència del pol.
2. El guany del controlador a la freqüència ω_c és:

$$|C(j \cdot \omega_c)| = \sqrt{\alpha}$$

$$\text{essent } \alpha = \frac{\omega_p}{\omega_z}.$$

3. L'argument del controlador a la freqüència ω_c és:

$$\angle C(j \cdot \omega_c) = \theta_c = \arctan\left(\frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}\right).$$

4. Els resultats següents són equivalents:

$$(a) \tan(\theta_c) = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

$$(b) \alpha = \frac{(1 + \sin(\theta_c))}{(1 - \sin(\theta_c))}.$$



compavan:

1. Agafeu el punt de màxima fase del diagrama de Bode, desplaçeu-lo a la dreta i a l'esquerra. Com afecta a distància relativa entre el pol i el zero?
2. Agafeu el punt de màxima fase del diagrama de Bode, desplaçeu-lo cap amunt. Quina és la màxima fase que es pot obtenir? Que passa amb la distància relativa entre el pol i el zero en augmentar la fase màxima? Que passa amb el guany màxim en augmentar la fase màxima?
3. Activeu l'opció "Diagrama de Nyquist" en el menú *settings*. Quina forma presenta el diagrama de Nyquist? Canvieu la distància relativa del pol i el zero del compensador. Com és modifica el diagrama de Nyquist?

Com es pot veure a la Figura 14.8, la fase és pràcticament nul·la fora de la banda central i, per tant, la modificació de fase se centra a la zona central. Tanmateix, en el procés de disseny cal tenir present que el controlador presenta també un augment de guany.

Partint d'una planta de temps discret $P(z)$ i el seu període de mostratge T , una especificació de precisió d'error estacionari davant d'una entrada graó $e_{\text{graó}}^{ss}$, rampa e_{rampa}^{ss} , o paràbola $e_{\text{paràbola}}^{ss}$, en funció del tipus de $P(z)$ i un marge de fase volgut MF_{des} , el procediment de disseny que s'aplica per dissenyar el compensador segueix els passos següents:

1. S'obté d'un controlador proporcional k_c que compleixi les especificacions de precisió.

Donat l'error estacionari volgut, s'obté el coeficient d'error especificat, K_p per al cas de plantes de tipus 0 o K_v per al cas de plantes de tipus 1. Així, és planteja l'equació:

$$K_p = k_c P(1)$$

o, en el cas de sistemes de tipus 1:

$$K_v = k_c \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} P(z).$$

D'aquestes equacions, s'obté el valor de k_c .

2. S'aplica la transformada bilineal a $P_w(w) = \mathcal{T}_T(P(z))$.
3. Es calcula el marge de fase de $k_c P_w(w)$. Es busca la pseudofreqüència que compleix:

$$1 = |k_c P_w(j\omega_{MF})|$$

i, posteriorment,

$$MF = 180 + \angle P_w(j\omega_{MF}).$$

4. Es calcula l'aportació de fase necessària.

Per tal que el sistema compensat presenti el marge de fase volgut, MF_{des} , cal que el compensador aporti una fase de:

$$MF_{des} - MF.$$

Atès que, com es veurà més endavant, el procediment de disseny és aproximat, s'hi afegirà un coeficient de seguretat i, per tant, la màxima fase del compensador serà:

$$\theta_c = MF_{des} - MF + \Delta\phi.$$

on $\Delta\phi$ és un angle addicional, normalment un angle en l'interval $[0, 15^\circ]$. θ_c marca la distància geomètrica entre el pol i el zero del compensador.

5. Es calcula de la distància geomètrica entre el pol i zero del compensador.

$$\alpha = \frac{1 + \sin(\theta_c)}{1 - \sin(\theta_c)}.$$



Cal recordar que

$$\alpha = \frac{\omega_p}{\omega_z} \rightarrow \omega_p = \alpha \omega_z.$$

Atès que es tracta d'un controlador d'avanç, la freqüència del zero és inferior a la freqüència del pol i, per tant, $\alpha > 1$.

6. Es busca la freqüència en què $k_c |P_w(j\omega'_{MF})| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Idealment, el compensador no hauria de modificar el guany però, com s'ha vist a la Proposició 58, en el punt de màxima fase el compensador aporta un guany de $\sqrt{\alpha}$. Per aquest motiu, en lloc d'aplicar el controlador en la pseudofreqüència ω_{MF} (on tenim guany 1), s'aplica en la pseudofreqüència, ω'_{MF} , en què hi ha guany $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Per tant,

$$k_c |C_w(j\omega'_{MF})P_w(j\omega'_{MF})| = 1$$

i serà aquesta la freqüència en què estarà definit el nou marge de fase.

Atès que $\angle P_w(j\omega_{MF}) \neq \angle P_w(j\omega'_{MF})$, el valor del marge de fase no és exactament el desitjat. Normalment, $\angle P_w(j\omega_{MF}) > \angle P_w(j\omega'_{MF})$, i la diferència entre ambdues fases és petita; per aquest motiu, el marge de seguretat, $\Delta\phi$, farà que es compleixin les especificacions.

7. Es construeix el controlador. Als apartats anteriors, s'ha determinat la distància geomètrica entre la freqüència del pol i el zero, α , i la freqüència en què volem aplicar la fase calculada, ω'_{MF} . Així, es plantegen les equacions següents:

$$\begin{aligned} \omega'_{MF} &= \sqrt{\omega_z \omega_p} \rightarrow (\omega'_{MF})^2 = \omega_z \omega_p \\ \omega_p &= \alpha \omega_z \end{aligned}$$

D'aquestes equacions, es dedueix el valor de $\omega_z = \frac{\omega'_{MF}}{\sqrt{\alpha}}$ i $\omega_p = \sqrt{\alpha} \omega'_{MF}$, cosa que determina totalment el controlador. Així, s'obté:

$$C_w(w) = k_c \cdot \frac{\frac{w}{\omega'_{MF}} + 1}{\frac{w}{\sqrt{\alpha} \omega'_{MF}} + 1} = k_c \cdot \frac{\frac{w\sqrt{\alpha}}{\omega'_{MF}} + 1}{\frac{w}{\sqrt{\alpha} \omega'_{MF}} + 1}.$$

8. Es verifiquen les especificats.

Atès que el procediment no és exacte, cal verificar si el controlador obtingut assoleix les especificacions volgudes. En particular, cal mirar si el marge de fase:

$$MF' = 180 + \angle C_w(j\omega'_{MF})P_w(j\omega'_{MF}),$$

obtingut satisfà les especificacions. En cas que no es compleixin, es pot tornar al punt 4 i incrementar el marge de seguretat.

Cal tenir present que, si el sistema de llaç tancat obtingut és estable, les especificacions de precisió es satisfan constructivament.

9. S'aplica l'antitransformada bilineal al controlador obtingut.

Finalment, per obtenir el controlador final, cal desfer la transformació bilineal:

$$C(z) = k_c \frac{2 \frac{(z-1)\sqrt{\alpha}}{T(z+1)\varpi'_{MF}} + 1}{2 \frac{z-1}{T(z+1)\sqrt{\alpha}\varpi'_{MF}} + 1} = k_c \frac{\sqrt{\alpha} ((2\sqrt{\alpha} + T\varpi'_{MF})z - 2\sqrt{\alpha} + T\varpi'_{MF})}{(2 + T\sqrt{\alpha}\varpi'_{MF})z - 2 + T\sqrt{\alpha}\varpi'_{MF}}$$

- Entrades:
 - $P(z)$ sense pols fora del cercle unitat, T .
 - Marge de seguretat $\Delta\phi$.
- Especificacions:
 - Precisió: e_{grao}^{ss} , e_{rampa}^{ss} o $e_{parabola}^{ss}$.
 - Marge de fase: MF_{des} .

Taula 14.1
Algorisme de disseny del compensador d'avanç de fase en el camp freqüencial.

1. Obtenció de k_c , per a plantes tipus 0.

(a) $K_p = \frac{1 - e_{grao}^{ss}}{e_{grao}^{ss}}$

(b) $k_c = \frac{K_p}{P(1)}$

2. $P_w(w) = \mathcal{T}_T(P(z))$
3. $1 = |k_c P_w(j\omega_{MF})|$
4. $MF = 180 + \angle P_w(j\omega_{MF})$
5. $\theta_c = MF_{des} - MF + \Delta\phi$
6. $\alpha = \frac{1 + \sin(\theta_c)}{1 - \sin(\theta_c)}$
7. $k_c |P_w(j\omega'_{MF})| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
8. $C_w(w) = k_c \frac{\frac{w\sqrt{\alpha}}{\omega_{MF}} + 1}{\frac{w}{\sqrt{\alpha}\omega'_{MF}} + 1}$
9. Verificació $MF' = 180 + \angle C_w(j\omega'_{MF})P_w(j\omega'_{MF})$
10. $C(z) = \mathcal{T}_T^{-1}(C_w(w))$

A la Taula 14.1, es mostra un resum del procediment que cal seguir en forma d'algorisme i equacions per resoldre.

Exemple 100 Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.25(z - 0.1)(z + 0.4)}{(z - 0.9)(z^2 - 1.2z + 0.45)}$$



amb $T = 0.1$ s, dissenyeu un compensador d'avanç de fase que faci que l'error en estat estacionari a la resposta al graó sigui del 5% i que s'obtingui un marge de fase de 20° emprant un marge de seguretat de 10° .

Atès que es vol un error estacionari del 5% i que la planta és de tipus 0, aleshores el coeficient d'error de posició és $K_p = 19$. Així, el guany del compensador ha de ser $k_c = \frac{K_p}{P(1)} = 1.51$.

Aplicant-hi la transformada bilineal, s'obté la funció de transferència:

$$P_w(w) = \frac{-0.032771(w + 16.36)(w + 46.67)(w - 20)}{(w + 1.053)(w^2 + 8.302w + 37.74)}.$$

El marge de fase de $k_c P_w(w)$ és -13.17° i està definit a la pseudofreqüència de 9.86 rad/s. Atès que el marge de fase és negatiu, el sistema de llaç tancat amb el controlador proporcional k_c seria inestable.

Per calcular la fase que ha d'aportar el compensador, es fa:

$$\theta_c = MF_{des} - MF + \Delta\phi = 20 + 13.17 + 10 = 43.17^\circ.$$

Això marcarà la distància geomètrica entre el pol i el zero del compensador:

$$\alpha = \frac{1 + \sin(\theta_c)}{1 - \sin(\theta_c)} = 5.33.$$

Tot seguit, per determinar la freqüència central del compensador, es resol l'equació:

$$\sqrt{\alpha} \cdot k_c \cdot P(j\omega'_{MF}) = 1 \rightarrow \omega'_{MF} = 14.3943.$$

Amb això, el compensador queda totalment determinat:

$$C_w(w) = 1.51 \frac{0.2419w + 1}{0.03008w + 1}.$$

Per determinar el marge de fase obtingut, s'avalua:

$$MF = 180 + \angle C_w(j\omega'_{MF})P_w(j\omega'_{MF}) = 15.2777^\circ.$$

Així, el compensador no assoleix exactament el marge de fase volgut però, atès que el sistema de llaç tancat serà estable i que el marge de fase obtingut no és molt llunyà al volgut el disseny es donarà per bo.

La Figura 14.10 mostra el diagrama de Bode del $C_w(w)$, $k_c P_w(w)$ i $C_w(w)P_w(w)$. Com es pot observar, la freqüència central del compensador, la de màxima fase, correspon a ω'_{MF} . Es pot veure que, en tot moment, la corba de resposta freqüencial de $C_w(w)P_w(w)$ està per sobre de la de $k_c P_w(w)$, cosa característica dels compensadors d'avanç de fase. Això passa tant en el Bode de guany com en el Bode de fase. La Figura 14.10 mostra, també, un detall del diagrama de Nyquist de $k_c P_w(w)$ i $C_w(w)P_w(w)$, en què es pot observar que el marge de fase està definit en la freqüència ω'_{MF} . Es pot veure que els punts

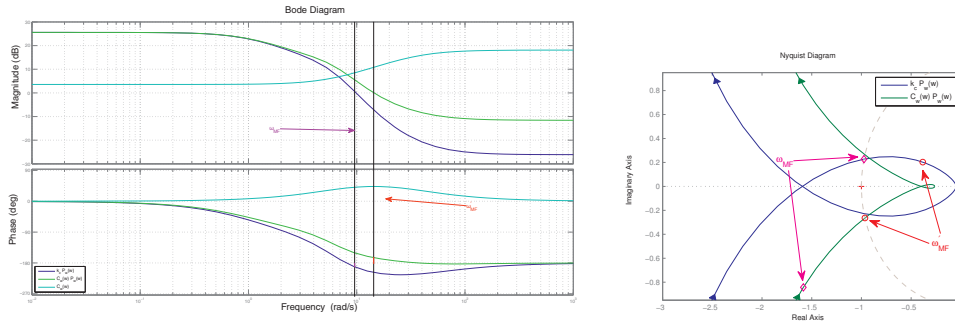


Fig.14.10 Diagrama de Bode i detall del diagrama de Nyquist de l'Exemple 100.

corresponents a ω'_{MF} i ω_{MF} estan una mica distanciats; això justifica el fet que no s'assoleixin les especificacions realitzades. Es pot observar també que el punt lligat a ω_{MF} , que a la corba de $k_c P_w(w)$ està sobre del cercle unitat, a la corba $C_w(w)P_w(w)$ està fora del cercle unitat, perquè al punt de màxima fase $C_w(w)$ presenta un guany superior a la unitat.

Finalment, aplicant la transformada bilineal inversa, s'obté:

$$C(z) = \frac{3.962z - 2.079}{z + 0.2487}.$$

Aquest compensador manté les especificacions de marge de fase. Així el marge de fase de $C(z)P(z)$ és 15.2790° i s'obté en la pulsació de 12.476 rad/s , que és diferent a la pseudopulsació en què estava definit el marge de fase en el marc de la bilineal.

Exemple 101 Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.1(z - 0.1)}{(z - 0.8)(z - 1)},$$

amb període de mostratge $T = 0.1 \text{ s}$, es demana dissenyar un controlador que faci que l'error de seguiment a la rampa sigui del $e_{rampa}^{ss} = 0.05$, amb un marge de fase de $MF_{des} = 45^\circ$ emprant un marge de seguretat de $\Delta\phi = 15^\circ$.

Per fixar les característiques de precisió, es calcula el coeficient d'error de velocitat $K_v^{des} = \frac{1}{e_{rampa}^{ss}} = 20$. El coeficient d'error de velocitat de $P(z)$ és:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} P(z) = 4.5.$$

Així, el guany del compensador ha de ser:

$$k_c = \frac{20}{4.5} = 4.4444.$$

Per realitzar-ne el disseny, s'aplica la transformada bilineal a $P(z)$:

$$P_w(w) = \mathcal{F}_T(P(z)) = \frac{-0.030556(w + 16.36)(w - 20)}{w(w + 2.222)}.$$



El marge de fase de $k_c P_w(w)$ és $MF = 21.5141^\circ$ i s'obté en la pseudofreqüència $\omega_{MF} = 6.9839 \text{ rad/s}$.

El compensador ha d'aportar la fase següent:

$$\theta_c = MF_{des} - MF + \Delta\phi = 38.4859^\circ.$$

Amb aquesta, s'obté $\alpha = 4.2955$. Tot seguit, es soluciona l'equació:

$$\sqrt{\alpha} \cdot k_c \cdot P(j\omega'_{MF}) = 1 \rightarrow \omega'_{MF} = 11.2034 \text{ rad/s}.$$

Amb això, el compensador queda totalment determinat:

$$C_w(w) = 1.51 \frac{0.8222w + 4.444}{0.04307w + 1}.$$

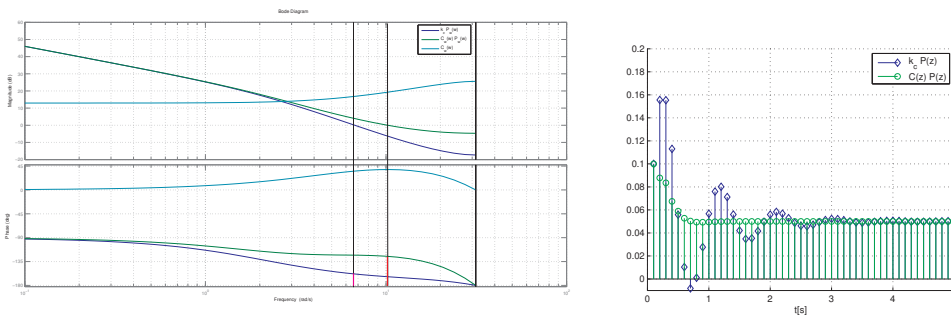
Per determinar el marge de fase obtingut, s'avalua:

$$MF = 180 + \angle C_w(j\omega'_{MF})P_w(j\omega'_{MF}) = 54.8468^\circ.$$

Així, el compensador genera un marge de fase més gran que el volgut i, per tant, el disseny es donarà per bo. Per completar el procés, s'aplica la transformada bilineal inversa a $C_w(w)$:

$$C(z) = \frac{11.22z - 6.447}{z + 0.0745}.$$

Fig.14.11
Diagrama de Bode i
error de la resposta a la
rampa de l'Exemple 101.



La Figura 14.11 mostra el diagrama de Bode de $k_c P(z)$, $C(z)P(z)$ i $C(z)$. Com es pot observar, la resposta freqüencial de temps discret presenta les característiques volgudes. Cal assenyalar que el controlador no presenta forma asimptòtica. La Figura 14.11 mostra la resposta temporal de l'error enfront d'una entrada rampa unitària del sistema de llaç tancat per $k_c P(z)$ i $C(z)P(z)$. Com es pot observar, ambdues presenten el valor estacionari volgut (e_{rampa}^{ss}), cal però assenyalar que la resposta de $C(z)P(z)$ és força més ràpida que la de $k_c P(z)$; això és normal en els controladors d'avanç de fase.

Comentari 36 En cas d'obtenir que, en el pas 4, s'obtingui $\theta_c > 50^\circ$,⁴ el pol i el zero del controlador estaran molt separats i no es modificarà únicament un rang de freqüències sinó que es modificarà gairebé tota la resposta freqüencial de la planta.

Per aquest motiu, no és convenient emprar un únic controlador i convé emprar un controlador d'ordre superior. Per fer-ho, es pren el menor nombre natural N tal que $\frac{\theta_c}{N} < 50^\circ$. Es dissenya el controlador per a $\hat{\theta}_c = \frac{\theta_c}{N}$; en el pas 5, s'utilitza l'equació,

$$|k_c P_w(j \cdot \omega'_{MF})| = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right)^N.$$

i, finalment, la construcció del controlador (pas 6) es fa de la forma:

$$C_w(w) = k_c \left(\frac{\frac{w}{\sigma_z} + 1}{\frac{w}{\sigma_p} + 1} \right)^N.$$

Exemple 102 Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.2(z+1)(z+0.7)}{(z-1)^2(z-0.8)}$$

amb $T = 0.1$ s, obteniu un controlador que faci que el sistema de llaç tancat presenti un error estacionari enfront de la paràbola del 25% i un marge de fase de $MF_{des} = 15^\circ$, emprant un marge de seguretat de $\Delta\phi = 15^\circ$.

Per fixar les característiques de precisió, es calcula el coeficient d'error de velocitat $K_a^{des} = \frac{1}{e_{parabola}^{ss}} = 4$. El coeficient d'error de velocitat de $P(z)$ és:

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{T} \right)^2 P(z) = 340.$$

Així, el guany del compensador ha de:

$$k_c = \frac{4}{340} = 0.0118.$$

En aquest cas, el compensador atenua en lloc amplificar.

Per realitzar el disseny, s'aplica la transformada bilineal a $P(z)$:

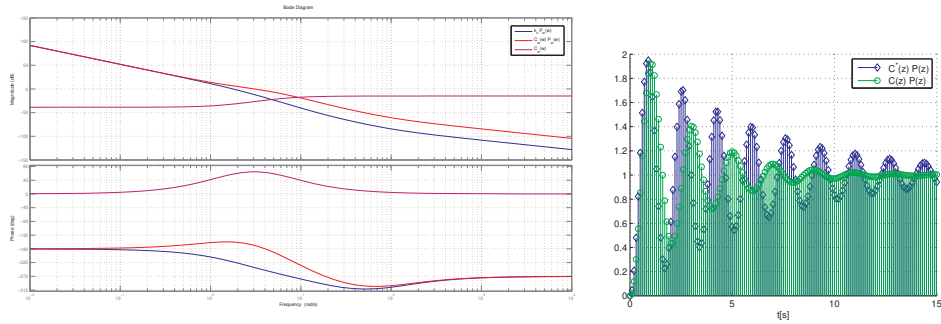
$$P_w(w) = \mathcal{F}_T(P(z)) = \frac{-0.33333(w+113.3)(w-20)}{w^2(w+2.222)}.$$

El marge de fase de $k_c P_w(w)$ és $MF = -42.7255^\circ$ i s'obté en la pseudofreqüència $\omega_{MF} = 1.7714$ rad/s.

⁴ Idealment, la màxima fase que es pot obtenir és de 90° , que correspon al cas en què el pol i el zero estan infinitament separats.



Fig.14.12
Diagrama de Bode i
error de la resposta a la
rampa de l'Exemple 102.



El compensador ha d'aportar la fase següent:

$$\theta_c = MF_{des} - MF + \Delta\phi = 72.7255^\circ.$$

Aquest angle és força gran i el compensador, de primer ordre, com els emprats anteriorment:

$$C_w^*(w) = \frac{0.02087w + 0.01176}{0.04094w + 1}$$

obté un marge de fase de 5° . Per tal de millorar aquestes característiques, s'utilitzarà un controlador de segon ordre. Per fer-ho, emprarem:

$$\theta_c = \frac{MF_{des} - MF + \Delta\phi}{2} = 36.3627^\circ.$$

Això marcarà la distància geomètrica entre els pols i els zeros del compensador:

$$\alpha = \frac{1 + \sin(\theta_c)}{1 - \sin(\theta_c)} = 3.9127.$$

Tot seguit, per determinar la freqüència central del compensador, es resol l'equació:

$$\alpha \cdot k_c \cdot P(j\omega'_{MF}) = 1 \rightarrow \omega'_{MF} = 3.0530 \text{ rad/s.}$$

Amb això, el compensador queda totalment determinat:

$$C_w(w) = \frac{0.18011(w + 1.543)^2}{(w + 6.039)^2}.$$

Per determinar el marge de fase obtingut, s'avalua:

$$MF = 180 + \angle C_w(j\omega'_{MF})P_w(j\omega'_{MF}) = 11.6406^\circ.$$

Com es pot observar, el marge de fase obtingut no és exactament el volgut però és proper; per aquest motiu, el disseny es dona per bo. La Figura 14.12 mostra el diagrama de Bode del $k_c P_w(w)$, que presenta un marge de fase negatiu; el de $C_w(w)P_w(w)$, que presenta el marge de fase indicat, i el de $C_w(w)$, que com es pot observar, presenta un

comportament similar als controladors de primer ordre, però amb uns pendents superiors.

Finalment, s'aplica la transformada bilineal inversa i s'obté:

$$C(z) = \frac{0.12329(z - 0.8567)^2}{(z - 0.5362)^2}$$

que correspon al controlador que s'ha d'implementar. A la Figura 14.12, es mostra la resposta al graó del sistema de llaç tancat obtingut amb el controlador de primer ordre, $C^*(z)$, i l'obtingut amb $C(z)$. Com es pot observar, el comportament obtingut amb el controlador de segon ordre presenta una resposta més ràpida.

avanc_freqTD:

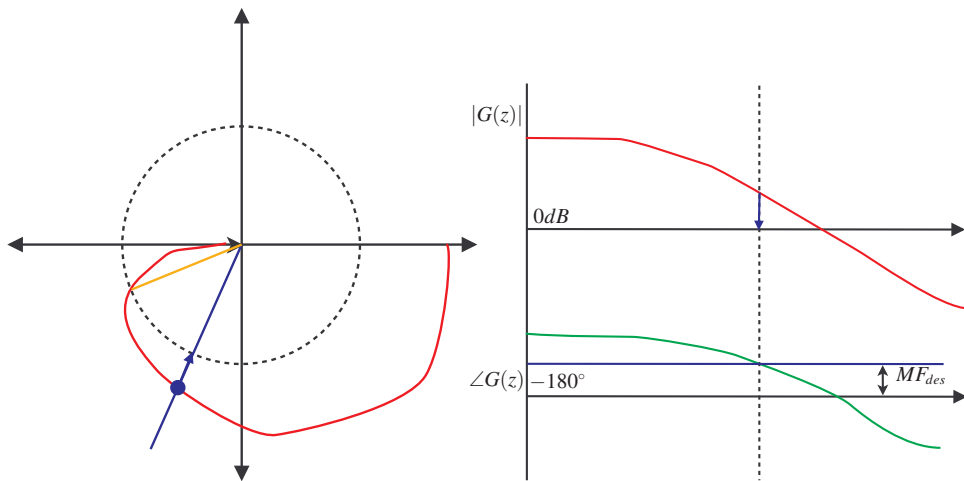


1. Carregueu el tercer exemple. Activeu el compensador i fixeu un marge de fase (MF (desitjat)) d'uns 60° . Observant el resultat obtingut, analitzeu el següent:
 - (a) Mirant el diagrama de Bode, compareu les corbes de guany i fase del sistema amb compensador i del sistema sense compensador. Quina està per sobre? (Quin és el motiu?)
 - (b) Quina de les dues respostes temporals (la del sistema amb compensador o la del sistema sense compensador) arriba abans a l'estacionari?
 - (c) Compareu el lloc geomètric de les arrels del sistema amb compensador i sense. Quines branques són més properes al cercle unitat?
 - (d) Aneu augmentant el marge de fase volgut. Quin és el màxim marge de fase que s'obté, en aquest cas? Analitzeu-ne les causes.
 2. Carregueu el primer exemple. Activeu el compensador, fixeu K_p a 0.2 (aproximadament) i el marge de fase (MF (desitjat)) d'uns 40° . Observant el resultat obtingut, analitzeu el següent:
 - (a) Mirant el diagrama de Bode, compareu les corbes de guany i fase del sistema amb compensador i del sistema sense compensador. Quina està per sobre? (Quin n'és el motiu?)
 - (b) Quina de les dues respostes temporals (la del sistema amb compensador o la del sistema sense compensador) arriba abans a l'estacionari?
 - (c) Compareu el lloc geomètric de les arrels del sistema amb compensador i sense. Quines branques són més properes al cercle unitat?
 - (d) Aneu augmentant el marge de fase volgut. Quin és el màxim marge de fase que s'obté, en aquest cas? Analitzeu-ne les causes.
-

14.4. Disseny del compensador de retard de fase emprant la transformada bilineal

En el procediment de disseny del compensador de retard, s'assumeixen com a especificacions la precisió del sistema i un marge de fase desitjat. Per fer-ho, es fixa, en primer lloc,

Fig.14.13
Esquema del
procediment emprat en el
disseny del compensador
per retard de fase.



el guany estàtic del controlador per tal d'assolir les especificacions de precisió i, posteriorment, es dissenyen la resta de paràmetres del controlador per tal d'assolir el marge de fase volgut.

La Figura 14.13 mostra un possible diagrama de Nyquist. En aquest cas, la planta objecte d'estudi presenta un cert marge de fase; la idea és buscar un punt on la planta presenti la fase necessària per definir el marge de fase volgut i portar-lo sobre el cercle unitat, aleshores, aquest punt definirà el marge de fase, que serà exactament el volgut. Això pot fer-se intentant mantenir la fase igual a la del punt inicial i modificant el guany per tal que el punt es col·loqui sobre el cercle unitat. Aquest procediment és el que s'intentarà aplicar. La mateixa figura mostra el diagrama de Bode. En aquest context, la idea és reduir el guany en la freqüència en què es vol definir el marge de fase (fins que sigui 0dB) i procurar deixar invariant la corba de fase, tot mantenint la resta del diagrama similar a l'anterior.

Per aplicar el procediment indicat, caldria un compensador que únicament canviés el guany en un rang de freqüències (de la freqüència d'interès endavant). Un element que únicament modifica el guany però no la fase és un controlador proporcional (amb constant de proporcionalitat positiva). Amb aquest compensador, es podria fixar el marge de fase just en el punt volgut; malauradament el guany s'aplicaria igualment a totes les freqüències, cosa que modificaria la precisió del sistema (atès que normalment la variació de guany és inferior a la unitat, aquesta aproximació generaria un sistema amb poca precisió). Per tant, s'utilitzarà un sistema que modifiqui el guany i la fase, però s'intentarà aplicar el raonament introduït anteriorment.

Un controlador que permet realitzar aquest tipus de modificació sobre la resposta freqüencial és de la forma següent:

$$C(s) = k_c \cdot \frac{\frac{s}{\omega_z} + 1}{\frac{s}{\omega_p} + 1}.$$

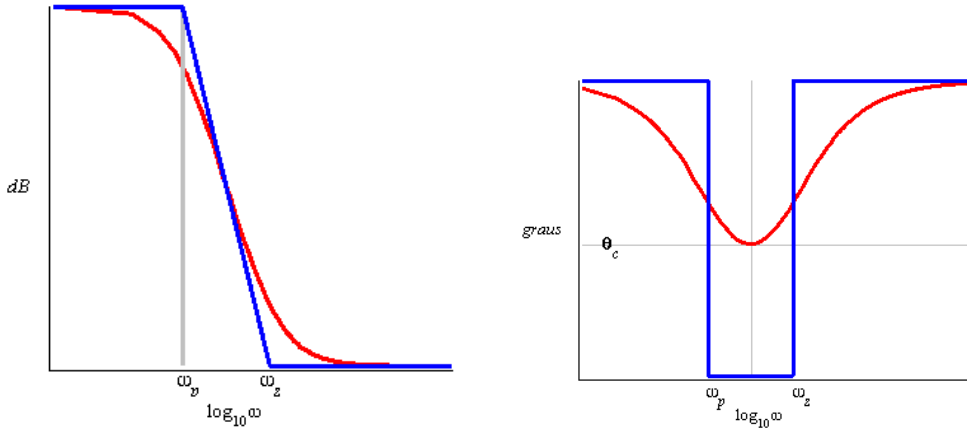


Fig.14.14 Resposta freqüencial del controlador de retard de fase.

Aquest controlador de primer ordre presenta una resposta freqüencial caracteritzada per ω_z , la freqüència del zero, i ω_p , la freqüència del pol. Per tal que la corba de guany presenti una reducció a partir d'una determinada freqüència és necessari que $\omega_z > \omega_p$. Això fa que el controlador sigui de retard de fase. La Figura 14.15 mostra la taula de resposta freqüencial asimptòtica del compensador de retard de fase.

	0	ω_p	ω_z	∞
$\frac{s}{\omega_z} + 1$	0	0	1	
$\left(\frac{s}{\omega_p} + 1\right)^{-1}$	0	-1	-1	
Totals	0	-1	0	

Fig.14.15 Taula de resposta freqüencial asimptòtica del controlador de retard de fase.

Com es pot veure, el controlador presenta una resposta freqüencial asimptòtica que té un rang de freqüències amb guany pràcticament constant, fins a la pulsació ω_p ; posteriorment decau i es torna a mantenir constant a partir de la pulsació ω_z . Paral·lelament la fase es manté propera a zero fins; la pulsació ω_p ; posteriorment varia substancialment (aportant fase negativa) i, a partir de la pulsació ω_z , la fase torna a ser molt propera a zero. Així, el controlador presenta una resposta freqüencial que, a partir d'una pulsació determinada, atenua i deixa la fase pràcticament nul·la, cosa que permetrà emprar la filosofia de disseny descrita anteriorment.

La Figura 14.14 mostra la resposta freqüencial del controlador de retard de fase. Algunes de les principals característiques quantitatives d'aquesta resposta freqüencial s'introdueixen a la Proposició 59.

Proposició 59 *Característiques del compensador de retard de fase.*

1. Per a valors de la pulsació superiors a ω_z , la fase tendeix asimptòticament a 0° i el guany, a $\frac{\omega_p}{\omega_z} < 1$.
2. En la pulsació de $10 \cdot \omega_z$ el guany del compensador és:

$$|C(10 \cdot \omega_z \cdot j)| = \frac{\sqrt{101}}{\sqrt{1 + 100 \frac{\omega_z^2}{\omega_p^2}}} \approx \frac{\omega_p}{\omega_z}$$



3. En la pulsació de $10 \cdot \omega_z$, la fase del compensador és:

$$\angle C(10 \cdot \omega_z \cdot j) = \arctan(10 \omega_p - 10 \omega_z, \omega_p + 100 \omega_z).$$

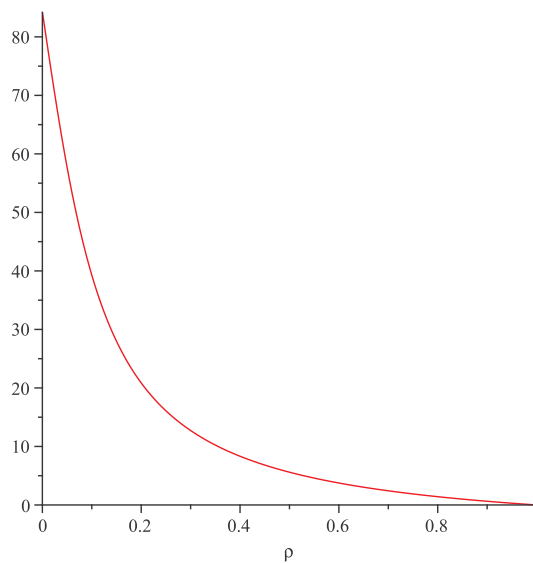
Atès que el compensador està pensat per aplicar una atenuació $\rho = \frac{\omega_p}{\omega_z}$, la fase en aquest cas queda:

$$\arctan(-10(-1 + \rho), 1 + 100\rho).$$

La Figura 14.16 mostra el valor de la fase en graus que s'obté en aquesta pulsació, en funció de l'atenuació introduïda. Es pot observar que, per a valors propers a 1, la fase és propera a 0, i que es manté per sota dels 10° per a valors de ρ superiors a 0.3555.

4. La fase mínima és de $-\arctan\left(\frac{\rho-1}{2\sqrt{\rho}}\right)$ i s'assoleix a la pulsació de $\sqrt{\omega_p \cdot \omega_z}$.

Fig.14.16
Fase del compensador de retard en la pulsació $10 \cdot \omega_z$, en funció de l'atenuació $\rho = \frac{\omega_p}{\omega_z}$.



compretard:

1. Agafeu el punt de mínim guany del diagrama de Bode, desplaçeu-lo a la dreta i a l'esquerra. Com afecta la distància relativa entre el pol i el zero?
2. Agafeu el punt de mínim guany del diagrama de Bode, desplaçeu-lo cap amunt i avall. Com afecta la distància relativa entre el pol i el zero?
3. Activeu l'opció "Diagrama de Nyquist" en el menú *settings*. Quina forma presenta el diagrama de Nyquist? Canvieu la distància relativa del pol i el zero del compensador. Com es modifica el diagrama de Nyquist?

Encara que, com es pot veure a la Figura 14.16, la fase és pràcticament nul·la fora de la banda central, aquesta no és idènticament nul·la i, per tant, dificultarà els processos de disseny.

Partint d'una planta de temps discret $P(z)$ i el seu període de mostratge T , una especificació de precisió d'error estacionari davant d'una entrada en graó e_{grao}^{ss} , rampa e_{rampa}^{ss} o paràbola $e_{parabola}^{ss}$, en funció del tipus de $P(z)$ i un marge de fase volgut MF_{des} . El procediment de disseny que s'aplica per dissenyar el compensador segueix els passos següents:

1. S'obté un controlador proporcional k_c que compleixi les especificacions de precisió. Donat l'error estacionari volgut s'obté el coeficient d'error especificat, K_p^{des} per al cas de plantes de tipus 0 o K_v^{des} per al cas de plantes de tipus 1. Així, en el cas de sistemes de tipus 0, es planteja l'equació:

$$K_p^{des} = k_c P(1)$$

o, en el cas de sistemes de tipus 1:

$$K_v^{des} = k_c \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} P(z).$$

D'aquestes equacions, s'obté el valor de k_c .

2. S'aplica la transformada bilineal $P_w(w) = \mathcal{T}_T(P(z))$.
3. Es busca la pseudopulsació de bilineal en què la planta presenta la fase tal que:

$$MF_{des} + \Delta\phi = 180^\circ + \angle P_w(\varpi_{MF})$$

on $\Delta\phi$ és un coeficient de seguretat introduït per compensar les aproximacions emprades en el procediment.

4. Es calcula el guany en aquesta freqüència:

$$|k_c P_w(\varpi_{MF})|.$$

Aquesta definirà l'atenuació que ha d'aplicar el filtre; així:

$$\frac{1}{\rho} = |k_c P_w(\varpi_{MF})|.$$

5. Es defineix la pseudofreqüència de bilineal d'aplicació del filtre. El punt on es vol aplicar l'atenuació és ϖ_{MF} ; per tant:

$$10 \cdot \varpi_z = \varpi_{MF} \rightarrow \varpi_z = \frac{\varpi_{MF}}{10}.$$

6. Es completa el disseny del compensador. Un cop fixada la freqüència del zero, es fixa la posició del pol a partir de l'atenuació volguda:

$$\rho = \frac{\varpi_p}{\varpi_z} \rightarrow \varpi_p = \rho \varpi_z = \frac{\rho \varpi_{MF}}{10}.$$



Amb això, el compensador queda totalment especificat:

$$C_w(w) = k_c \cdot \frac{\frac{10w}{\omega_{MF}} + 1}{\frac{10w}{\rho \cdot \omega_{MF}} + 1}.$$

7. Es verifiquen les especificats. Atès que el procediment no és exacte, cal verificar si el controlador obtingut assoleix les especificacions volgudes. En particular, cal comprovar el marge de fase obtingut:

$$1 = |C_w(j\omega'_{MF})P_w(j\omega'_{MF})|$$

$$MF' = 180 + \angle C_w(j\omega'_{MF})P_w(j\omega'_{MF})$$

Cal tenir present que, si el sistema de llaç tancat obtingut és estable, les especificacions de precisió se satisfan constructivament.

8. S'aplica l'antitransformada bilineal al controlador obtingut. Finalment, per obtenir el controlador, cal desfer la transformació bilineal. Així, s'obté:

$$C(z) = k_c \frac{\rho \cdot (5(20 + T\omega_{MF})z - 20 + T\omega_{MF})}{(20 + T\rho\omega_{MF})z - 20 + T\rho\omega_{MF}}.$$

Taula 14.2

Algorisme de disseny del compensador de retard de fase en el camp freqüencial.

- Entrades:
 - $P(z)$ sense pols fora del cercle unitat, T .
 - Marge de seguretat $\Delta\phi$.
- Especificacions:
 - Precisió: $e_{grao}^{ss}, e_{rampa}^{ss}$ o $e_{parabola}^{ss}$.
 - Marge de fase: MF_{des} .

1. Obtenció de k_c , per plantes tipus 0.

(a) $K_p^{des} = \frac{1 - e_{grao}^{ss}}{e_{grao}^{ss}}$

(b) $k_c = \frac{K_p^{des}}{P(1)}$

2. $P_w(w) = \mathcal{T}_T(P(z))$

3. $MF_{des} + \Delta\phi = 180^\circ + \angle P_w(\omega_{MF}) \rightarrow \omega_{MF}$

4. $\frac{1}{\rho} = |k_c P_w(\omega_{MF})|$

5. $C_w(w) = k_c \cdot \frac{\frac{10w}{\omega_{MF}} + 1}{\frac{10w}{\rho \cdot \omega_{MF}} + 1}$.

6. Verificació marge de fase obtingut.

7. $C(z) = \mathcal{T}_T^{-1}(C_w(w))$

A la Taula 14.2, es mostra un resum del procediment que cal seguir en forma d'algorisme i equacions per resoldre.

Exemple 103 Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.25(z-0.1)(z+0.4)}{(z-0.9)(z^2-1.2z+0.45)},$$

amb $T = 0.1$ s, dissenyeu un compensador d'avanç de fase que faci que l'error en estat estacionari en la resposta al graó sigui del 5% i que s'obtingui un marge de fase de 20° emprant un marge de seguretat de 10° .

Atès que es vol un error estacionari del 5% i la planta és de tipus 0, aleshores el coeficient d'error de posició volgut és $K_p^{des} = 19$. Així, el guany del compensador ha de ser

$$k_c = \frac{K_p^{des}}{P(1)} = 1.51.$$

Aplicant la transformada bilineal s'obté la funció de transferència:

$$P_w(w) = \frac{-0.032771(w+16.36)(w+46.67)(w-20)}{(w+1.053)(w^2+8.302w+37.74)}.$$

Tot seguit, es busca la pseudofreqüència en què

$$20^\circ + 10^\circ = \angle P_w(\varpi_{MF}) + 180^\circ \rightarrow \varpi_{MF} = 5.5052 \text{ rad/s}.$$

Es busca, a continuació, l'atenuació que ha d'aportar el controlador dissenyat:

$$|k_c P_w(\varpi_{MF})| = 3.2044$$

i, per tant,

$$\rho = \frac{1}{3.2044} = 0.3121.$$

Amb això s'obté el controlador:

$$C_w(w) = k_c \cdot \frac{\frac{10w}{\varpi_{MF}} + 1}{\frac{10w}{\rho \cdot \varpi_{MF}} + 1} = \frac{2.739w + 1.508}{5.821w + 1}.$$

Finalment, es verifica el marge de fase obtingut:

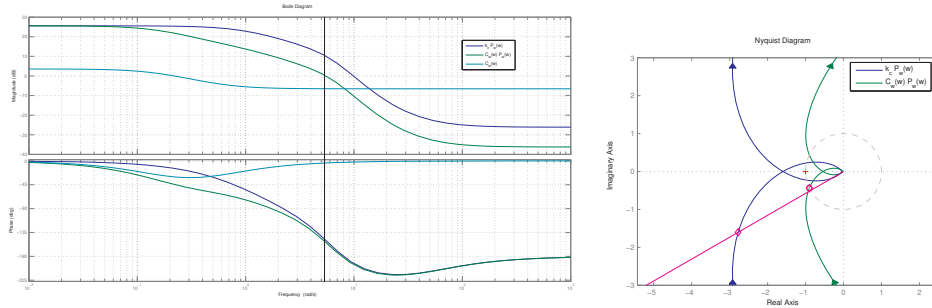
$$1 = |C_w(\varpi'_{MF})P_w(\varpi'_{MF})| \rightarrow \varpi'_{MF} = 5.5211 \text{ rad/s}$$

i, finalment,

$$MF = 180^\circ + \angle C_w(\varpi'_{MF})P_w(\varpi'_{MF}) = 25.8337^\circ.$$

Com es pot observar, el marge de fase obtingut és superior a l'especificat, encara que la pseudopulsació no és exactament la seleccionada inicialment. La Figura 14.17 mostra el diagrama de Bode del sistema sense compensar ($k_c P_w(w)$), el sistema compensat ($C_w(w)P_w(w)$) i el compensador obtingut ($C_w(w)$). Com es pot veure, la resposta freqüen-

Fig.14.17
 Diagrama de Bode i detall del diagrama de Nyquist de l'Exemple 103.



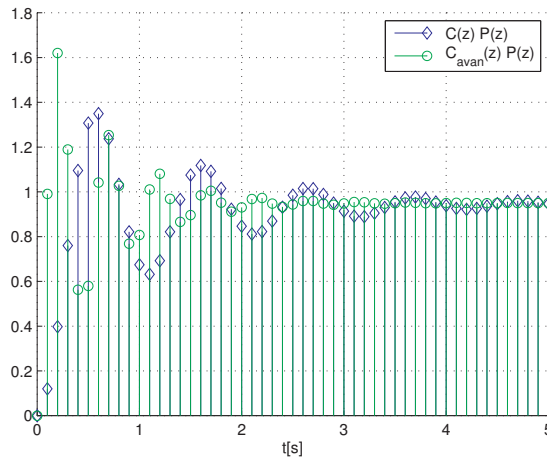
cial del sistema compensat sempre està per sota de la del sistema sense compensar. La Figura 14.17 mostra, també, un detall del diagrama de Nyquist del sistema sense compensar ($k_c P_w(w)$) i el sistema compensat ($C_w(w) P_w(w)$), i s'indiquen la pulsació ϖ_{MF} i ϖ'_{MF} . Com es pot veure, la fase d'ambdues pseudopulsacions és aproximadament la mateixa.

Finalment, s'aplica la transformada bilineal inversa al controlador obtingut:

$$C(z) = \mathcal{F}_T^{-1} \{C_w(w)\} = \frac{0.4794z - 0.4537}{z - 0.983}.$$

La Figura 14.18 mostra la resposta temporal del sistema de llaç tancat. Com es pot observar, presenta la precisió volguda. A la mateixa figura, es presenta la resposta freqüencial obtinguda a l'Exemple 100 per a aquesta mateixa planta i especificacions. Com es pot comprovar, el controlador per avanç és una mica més ràpid que l'obtingut per retard. Això és degut al fet que la banda passant amb el controlador d'avanç és lleugerament més gran que la del controlador per retard de fase; en contrapartida, el compensador de retard presenta un marge de fase millor.

Fig.14.18
 Comparació de la resposta temporal dels dissenys obtinguts en l'Exemple 100 ($C_{avan}(z)$) i l'Exemple 103 ($C(z)$).



Exemple 104 Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.1(z - 0.1)}{(z - 0.8)(z - 1)},$$



amb període de mostratge $T = 0.1$ s, es demana dissenyar un controlador que faci que l'error de seguiment a la rampa sigui del $e_{rampa}^{ss} = 0.05$, amb un marge de fase de $MF_{des} = 45^\circ$, emprant un marge de seguretat de $\Delta\phi = 15^\circ$.

Per fixar les característiques de precisió, es calcula el coeficient d'error de velocitat $K_v^{des} = \frac{1}{e_{rampa}^{ss}} = 20$. El coeficient d'error de velocitat de $P(z)$ és:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} P(z) = 4.5.$$

Així, el guany del compensador ha de ser:

$$k_c = \frac{20}{4.5} = 4.4444.$$

Per fer el disseny, s'aplica la transformada bilineal a $P(z)$:

$$P_w(w) = \mathcal{T}_T(P(z)) = \frac{-0.030556(w+16.36)(w-20)}{w(w+2.222)}.$$

Tot seguit, es busca la freqüència en què

$$20^\circ + 10^\circ = \angle P_w(j\omega_{MF}) + 180^\circ \rightarrow \omega_{MF} = 1.3283 \text{ rad/s}.$$

Es busca, a continuació, l'atenuació que ha d'aportar el controlador dissenyat:

$$|k_c P_w(j\omega_{MF})| = 12.9945$$

i, per tant,

$$\rho = \frac{1}{3.2044} = 0.07695.$$

Amb això, s'obté el controlador:

$$C_w(w) = k_c \cdot \frac{\frac{10w}{\omega_{MF}} + 1}{\frac{10w}{\rho \cdot \omega_{MF}} + 1} = \frac{33.46w + 4.444}{97.82w + 1}.$$

Finalment, es verifica el marge de fase obtingut:

$$1 = |C_w(j\omega'_{MF})P_w(j\omega'_{MF})| \rightarrow \omega'_{MF} = 1.3336 \text{ rad/s}$$

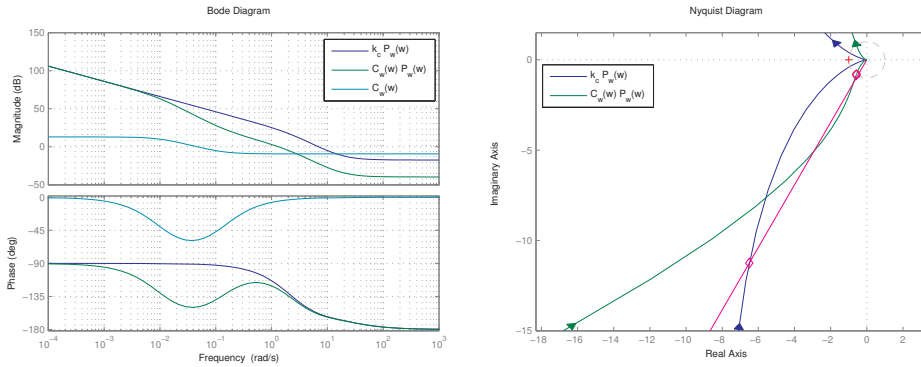
i

$$MF = 180^\circ + \angle C_w(j\omega'_{MF})P_w(j\omega'_{MF}) = 54.6272^\circ.$$

Com es pot observar, el marge de fase obtingut és superior a l'especificat, encara que la pseudopulsació no és exactament la seleccionada inicialment. La Figura 14.19 mostra el diagrama de Bode del sistema sense compensar ($k_c P_w(w)$), el sistema compensat ($C_w(w)P_w(w)$) i el compensador obtingut ($C_w(w)$). Com es pot veure, la resposta freqüen-



Fig.14.19
Diagrama de Bode i
detall del diagrama
de Nyquist de
l'Exemple 104.



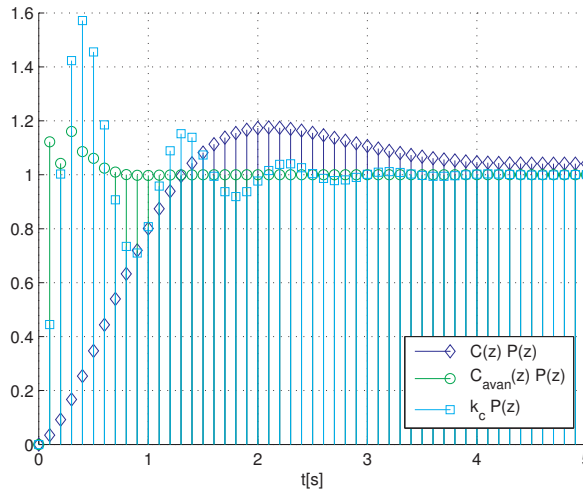
cial del sistema compensat sempre està per sota de la del sistema sense compensar. La Figura 14.19 mostra, també, un detall del diagrama de Nyquist del sistema sense compensar ($k_c P_w(w)$) i el sistema compensat ($C_w(w)P_w(w)$), s'indiquen les pulsacions ω_{MF} i ω'_{MF} . Com es pot veure, la fase d'ambdues pseudopulsacions és aproximadament la mateixa.

Finalment, s'aplica la transformada bilineal inversa al controlador obtingut:

$$C(z) = \mathcal{F}_T^{-1}\{C_w(w)\} = \frac{0.3441z - 0.3396}{z - 0.999}$$

La Figura 14.20 mostra la resposta temporal del sistema de llaç tancat. Com es pot observar, presenta la precisió volguda. A la mateixa figura, es presenta la resposta freqüencial obtinguda a l'Exemple 101 per a aquesta mateixa planta i especificacions. Com es pot comprovar, el controlador per avanç és una mica més ràpid que l'obtingut per retard. Això és degut al fet que la banda passant amb el controlador d'avanç és lleugerament més gran que la del controlador per retard de fase.

Fig.14.20
Comparació de la
resposta temporal dels
disseny obtinguts en
l'Exemple 101 ($C_{avan}(z)$)
i l'Exemple 104 ($C(z)$).





 retard_freqTD:


1. Carregueu el primer exemple. Activeu el compensador i fixe un marge de fase (MF (desitjat)) d'uns 50° . Observant el resultat, obtingut analitzeu el següent:
 - (a) Mirant el diagrama de Bode, compareu les corbes de guany i fase del sistema amb compensador i del sistema sense compensador. Quina està per sobre? (Quin n'és el motiu?)
 - (b) Quina de les dues respostes temporals (la del sistema amb compensador o la del sistema sense compensador) arriba abans a l'estacionari?
 - (c) Compareu el lloc geomètric de les arrels del sistema amb compensador i sense. Quines branques són més properes al cercle unitat?
 - (d) Aneu augmentant el marge de fase volgut. Quin és el màxim marge de fase que s'obté en aquest cas? Analitzeu-ne les causes
 2. Carregueu el segon exemple. Activeu el compensador, fixe K_p a 2 (aproximadament) i el marge de fase (MF (desitjat)) d'uns 50° . Observant el resultat obtingut, analitzeu el següent:
 - (a) Mirant el diagrama de Bode, compareu les corbes de guany i fase del sistema amb compensador i del sistema sense compensador. Quina està per sobre? (Quin n'és el motiu?)
 - (b) Quina de les dues respostes temporals (la del sistema amb compensador o la del sistema sense compensador) arriba abans a l'estacionari?
 - (c) Compareu el lloc geomètric de les arrels del sistema amb compensador i sense. Quines branques són més properes al cercle unitat?
 - (d) Aneu augmentant el marge de fase volgut. Quin és el màxim marge de fase que s'obté en aquest cas? Analitzeu-ne les causes.
-

14.5. Mètodes exactes

A les seccions anteriors, s'han presentat mètodes constructius que permeten obtenir controladors sense la necessitat de fer càlculs complexos i que es poden realitzar a partir del diagrama de Bode. En aquesta secció, s'analitza una alternativa, basada en el plantejament de les equacions que defineixen les especificacions i la seva resolució numèrica directa. Així, donada una planta $P(z)$ i un període de mostratge, si es vol fixar la precisió, K_p , i el marge de fase, MF_{des} , les equacions que cal resoldre són de la forma següent (per al cas d'un sistema de tipus 0):

$$\begin{aligned}
 K_p &= C(1)P(1) \\
 1 &= |C(e^{j\omega_{MF}T})P(e^{j\omega_{MF}T})| \\
 MF_{des} &= 180^\circ + \angle C(e^{j\omega_{MF}T})P(e^{j\omega_{MF}T})
 \end{aligned}$$

o, alternativament,

$$\begin{aligned}
 K_p &= C(1)P(1) \\
 e^{j(MF_{des}-\pi)} &= C(e^{j\omega_{MF}T})P(e^{j\omega_{MF}T}) \rightarrow e^{jMF_{des}} = -C(e^{j\omega_{MF}T})P(e^{j\omega_{MF}T}).
 \end{aligned}$$

En fixar l'estructura del controlador, $C(z) = k_c \frac{z-z_c}{z-p_c}$, s'obté:

$$K_p = k_c \frac{1-z_c}{1-p_c} P(1) \rightarrow K_p(1-p_c) = k_c(1-z_c)P(1)$$

$$e^{jMF_{des}} = -k_c \frac{e^{j\omega_{MF}T} - z_c}{e^{j\omega_{MF}T} - p_c} P(e^{j\omega_{MF}T}) \rightarrow e^{jMF_{des}}(e^{j\omega_{MF}T} - p_c) = -k_c(e^{j\omega_{MF}T} - z_c)P(e^{j\omega_{MF}T}).$$

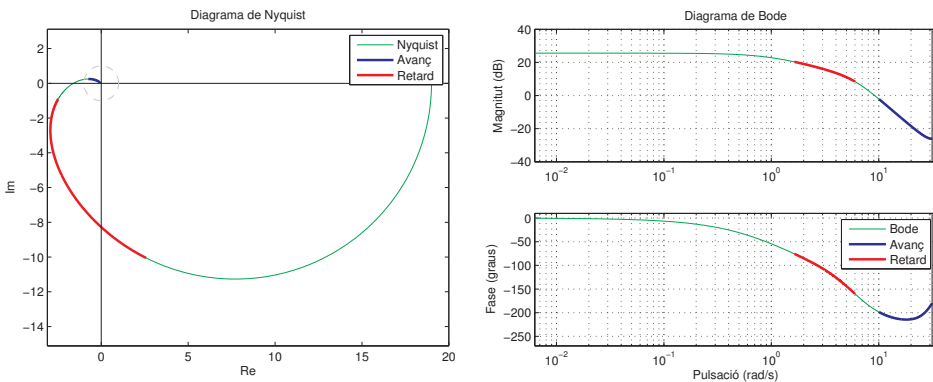
En aquestes equacions, hi ha quatre incògnites k_c , z_c , p_c i ω_{MF} , i tres equacions sobre els reals. Per tal que, en els casos en què hi ha solució, el sistema quedi perfectament determinat, caldrà fixar una de les incògnites. El més natural és fixar el valor de ω_{MF} com una especificació addicional.

Les equacions obtingudes són no lineals i no resulta senzill resoldre-les analíticament, sinó que cal recórrer a mètodes numèrics per a la seva resolució. En la literatura, s'ha analitzat en quines condicions el problema té solucions [1, 2, 3].

Comentari 37 Cal destacar que, en aquest plantejament, no s'ha emprat la transformada bilineal.

Comentari 38 En tractar-se d'un mètode exacte, no cal emprar marges de seguretat com els que s'han fet servir en els procediments de disseny aproximats.

Fig.14.21 Diagrama de Bode i diagrama de Nyquist de l'Exemple 105, amb indicació de les regions en què hi ha solució a les especificacions plantejades. En blau, es marca la zona en què la solució correspon a un controlador d'avanç de fase, mentre que en vermell s'indica la zona en què la solució correspon a un controlador de retard de fase.



Exemple 105 Donada la planta

$$P(z) = \frac{0.25(z-0.1)(z+0.4)}{(z-0.9)(z^2-1.2z+0.45)},$$

amb $T = 0.1$ s, dissenyeu un compensador d'avanç de fase que faci que l'error en estat estacionari en la resposta al graó sigui del 5% i que s'obtingui un marge de fase de 20°.

Atès que es vol un error estacionari del 5% i la planta és de tipus 0, aleshores el coeficient d'error de posició és $K_p^{des} = 19$. Així, les equacions que cal resoldre són:

$$K_p(1-p_c) = k_c(1-z_c)P(1)$$

$$e^{jMF_{des}}(e^{j\omega_{MF}T} - p_c) = -k_c(e^{j\omega_{MF}T} - z_c)P(e^{j\omega_{MF}T}).$$

La primera és una equació sobre els reals, mentre que la segona és sobre els complexos. A efectes de resolució, és convenient transformar-les en tres equacions sobre els reals. Per fer-ho, es substitueix l'equació sobre els complexos per la seva part real i la seva part imaginària:

$$K_p(1 - p_c) = k_c(1 - z_c)P(1)$$

$$\cos(MF_{des} + \omega_{MF}T) - \cos(MF_{des})p_c = (z_c - \cos(\omega_{MF}T))k_c\Re(P(e^{j\omega_{MF}T})) + \sin(\omega_{MF}T)k_c\Im(P(e^{j\omega_{MF}T}))$$

$$\sin(MF_{des} + \omega_{MF}T) - \sin(MF_{des})p_c = (z_c - k_c \cos(\omega_{MF}T))k_c\Im(P(e^{j\omega_{MF}T})) - \sin(\omega_{MF}T)k_c\Re(P(e^{j\omega_{MF}T}))$$

La Figura 14.21 mostra el diagrama de Bode i el diagrama de Nyquist de $k_c^*P(z)$ ⁵. S'hi indiquen les zones en què hi ha solució pel sistema d'equacions plantejat en funció de la pulsació ω_{MF} fixada. La zona en blau correspon a la regió en què la solució correspon a un controlador d'avanç de fase ($\omega_{MF} \in [10.0488, 31.4159]$ rad/s), mentre que en vermell s'indica la zona en què la solució correspon a un controlador de retard de fase ($\omega_{MF} \in [1.6402, 6.0079]$ rad/s).

Per aconseguir les especificacions, es proposa un controlador de retard en la pulsació $\omega_{MF} = 3.8209$ rad/s:

$$C_{retard}(z) = \frac{0.24644(z - 0.6675)}{z - 0.9457}$$

i un controlador d'avanç en la pulsació de $\omega_{MF} = 20.7260$ rad/s:

$$C_{avanc}(z) = \frac{8.1247(z - 0.7273)}{z + 0.4693}$$

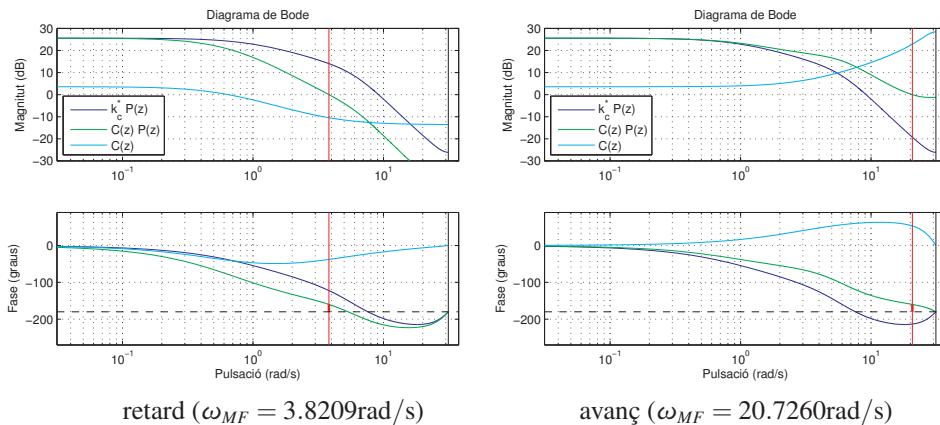


Fig.14.22 Diagrames de Bode dels dissenys realitzats en l'Exemple 105.

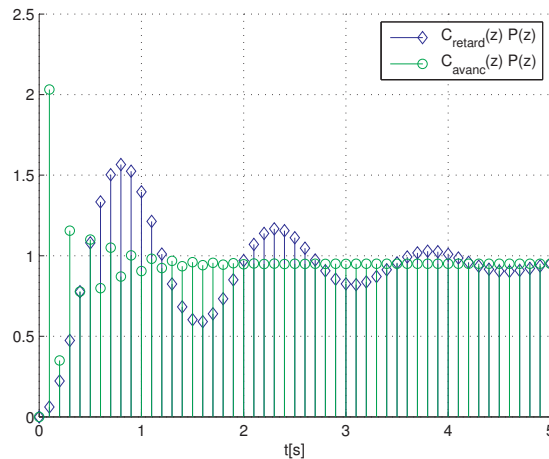
⁵ k_c^* és el guany necessari per fixar les especificacions de precisió ($k_c^* = \frac{K_p}{P(1)}$).

La Figura 14.22 mostra els resultats obtinguts en els dos casos. Atès que les freqüències seleccionades corresponen a les freqüències centrals dels intervals en què hi ha solució, els controladors existeixen en els dos casos. En les dues solucions proposades, les especificacions de precisió i marge de fase es compleixen de forma exacta. La solució amb el controlador de retard presenta un ample de banda menor que la solució obtinguda per avanç.

És important adonar-se que la distribució en freqüència de la resposta freqüencial dels components del controlador i la freqüència en què està definit el marge de fase no segueix el plantejament que s'ha seguit en els controladors dissenyats anteriorment. Així, en el cas del controlador d'avanç, la freqüència de definició del marge de fase no coincideix amb la de màxima fase del controlador i, en el cas del controlador de retard, la freqüència de definició del marge de fase no correspon a les de mínim guany del controlador. Atès que la planta i les especificacions són les mateixes que les del l'Exemple 100 i l'Exemple 103, se'n poden comparar les solucions obtingudes.

Finalment, la Figura 14.23 mostra la resposta al graó del sistema de llaç tancat obtinguda amb el controlador de retard i el controlador d'avanç de fase. Com es podia esperar la resposta obtinguda amb el controlador d'avanç és força més ràpida que l'obtinguda amb el controlador de retard.

Fig. 14.23
Comparació de la resposta temporal dels dissenys obtinguts a l'Exemple 105, comparació de la solució de retard i la d'avanç.



Bibliografia

- [1] Fei-Yue Wang. The exact and unique solution for phase-lead and phase-lag compensation. *Education, IEEE Transactions on*, 46(2): 258–262, 2003.
- [2] William Messner. Simple Formulas for Direct Design of Discrete-Time Lead Compensators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 122(2): 358–360, 1999. doi: 10.1115/1.482472.
- [3] R. Zanasi and Stefania Cuoghi. Direct method for digital lead-lag design: analytical and graphical solutions. In *Automation Science and Engineering (CASE), 2011 IEEE Conference on*, pages 804–809, 2011.

Exercicis proposats

1. Donada la funció de transferència

$$P(z) = \frac{1}{z+0.8}$$

(definida amb $T = 1$ s), quina de les funcions de transferència següents correspon a la seva transformada bilineal:

$$P_w^1(w) = \frac{-5(s-2)}{s+18}, P_w^2(w) = \frac{10}{s+18} \text{ o } P_w^3(w) = \frac{5(s-2)}{s+18}?$$

2. Donada la planta de temps discret

$$P(z) = \frac{0.355(z+0.6945)}{(z-0.9048)(z-0.3679)},$$

dissenyeu un controlador per retard de fase que faci que l'error davant d'entrades graó sigui d'un 5% i el marge de fase, d'uns 40° .

3. Donada la planta de temps discret

$$P(z) = \frac{0.2(z+1)}{(z-1)(z-0.9)},$$

dissenyeu un controlador per avanç de fase que faci que l'error davant d'entrades rampa sigui inferior al 5% i el marge de fase, d'uns 40° .

4. Donada la planta de temps continu

$$P(s) = \frac{1}{s^2+s+1},$$

obteniu un controlador (amb període de mostratge $T = 0.1$ s) que faci que el sistema de llaç tancat presenti un error estacionari d'un 10% enfront entrades graó, un marge de fase de 30° i una banda passant superior a la del sistema amb realimentació proporcional.

5. Donada la planta de temps continu

$$P(s) = \frac{1}{s^2+s+1},$$

obteniu un controlador (amb període de mostratge $T = 0.1$ s) que faci que el sistema de llaç tancat presenti un error estacionari d'un 10% davant d'entrades graó, un marge de fase de 30° i una banda passant inferior a la del sistema amb realimentació proporcional. Compareu el controlador obtingut amb el de l'exercici anterior.

6. La planta

$$P(z) = \frac{z-0.5}{(z-0.9)(z-0.8)(z-0.1)}$$



es controla amb un controlador proporcional $k_p = 0.3$. A causa del seu deteriorament, es substitueix el sensor, $H(z) = 1$, per un nou sensor, que es modela com $H(z) = z^{-1}$. Analitzeu l'estabilitat del nou sistema i obteniu un controlador que faci que el nou sistema presenti, aproximadament, el mateix marge de fase i característiques d'error estacionari que el sistema inicial.

7. Es disposa d'una planta

$$P(z) = \frac{0.5 \cdot \alpha}{z(z - 0.8)}$$

(amb un període de mostratge de $T = 0.1$ s), on α és un paràmetre constant però incert $\alpha \in [1, 2]$. Es demana buscar un controlador que faci que el sistema tingui sempre un marge de fase mínim de 30° i un error estacionari màxim davant d'entrades graó de 10%.

8. Donada la planta

$$P(z) = \frac{(z + 1)^2}{(z - 1)^2},$$

analitzeu si és possible estabilitzar-la amb un controlador d'avanç o de retard de fase.

9. Donada la planta

$$P(z) = \frac{1.666 \cdot 10^{-7} (z + 3.732)(z + 0.2679)}{(z - 1)^3}$$

(definida amb $T = 0.01$ s) que presenta el diagrama de Bode de la Figura 14.24, analitzeu si és possible estabilitzar el sistema de llaç tancat amb un sistema de primer ordre com els que s'han vist en aquest el capítol.

10. Analitzeu si els mecanismes de disseny de controlador d'avanç i retard de fase introduïts són aplicables en plantes que presenten pols fora del cercle unitat.

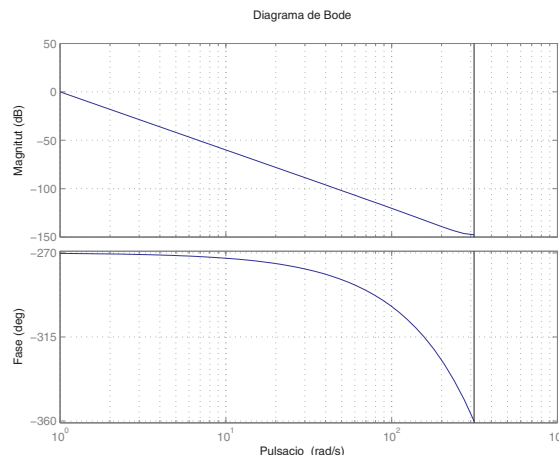
Fig.14.24

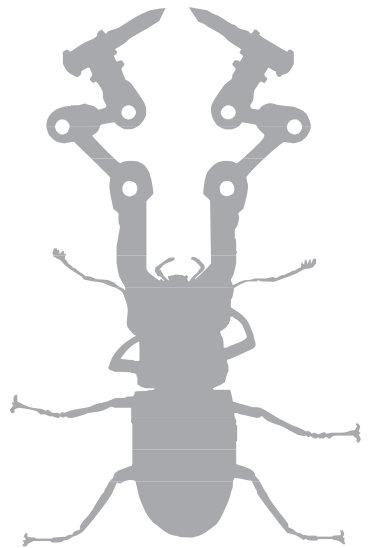
Diagrama de Bode de la funció de transferència

$$P(z) =$$

$$\frac{1.666 \cdot 10^{-7} (z + 3.732)(z + 0.2679)}{(z - 1)^3}$$

(definida amb $T = 0.01$ s).







Tercera part
Apèndix

→ A



Principi de l'argument

El principi de l'argument és l'eina matemàtica que permet formular el criteri de Nyquist. En aquesta secció, es formula i s'il·lustra amb alguns exemples.

A.1. Principi de l'argument

Definició 60 (Funció analítica) Si $f(z)$ està definida en tots els punts d'una regió \mathcal{D} i la derivada $f'(z)$ està definida en un obert que conté \mathcal{D} , aleshores diem que $f(z)$ és una funció analítica en \mathcal{D} .

Definició 61 (Integral d'una funció sobre una corba) Sigui f una funció analítica de la variable $z \in \mathbb{C}$ i Γ una corba a \mathbb{C} . Sigui $\gamma(x)$, $x \in [a, b]$ una parametrització de la corba Γ . La integral de f sobre Γ es defineix com

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x) dx$$

on $\gamma'(x)$ correspon a la derivada de $\gamma(x)$ respecte de x i \cdot representa el producte habitual en \mathbb{C} . La integral és una funció complexa que s'ha d'entendre com la suma de la integral de la part real i la part imaginària de $f(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x)$.

La integral anterior no depèn de la parametrització de Γ , però sí de la seva orientació.

Proposició 60 (Índex d'una corba Γ respecte d'un punt a) Sigui Γ una corba tancada i $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$; aleshores, la integral

$$I(\Gamma, a) \triangleq \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a}$$

rep el nom d'índex de Γ respecte de a . L'índex de Γ respecte de a és un nombre enter i correspon al nombre de voltes de la corba Γ , en sentit antihorari, al voltant de a .



Exemple 106 Suposem que Γ_n correspon a la corba que s'obté en girar n – vegades en sentit antihorari al voltant del cercle unitat; aleshores

$$\int_{\Gamma_n} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{jnt}} jne^{jnt} dt = \int_0^{2\pi} jndt = 2\pi jn$$

i, per tant, $I(\Gamma_n, 0) = n$.

Teorema 3 (Principi de l'argument) Sigui f una funció analítica, excepte en punts aïllats de \mathbb{C} , Γ una corba tancada en \mathbb{C} i \mathcal{D} la regió continguda a l'interior de Γ ($\Gamma = \partial\mathcal{D}$). En cas que sobre Γ no hi hagi ni pols ni zeros de f , aleshores

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= 2\pi j \left(\sum_{k=1}^Z I(\Gamma, z_k) - \sum_{l=1}^P I(\Gamma, p_l) \right) = \\ &= \begin{cases} P - Z, & \text{si } \Gamma \text{ està definit en sentit horari} \\ Z - P, & \text{en cas contrari} \end{cases} \end{aligned}$$

on z_k són els zeros de f a l'interior de \mathcal{D} , Z el nombre de zeros, p_l els pols de f a l'interior de \mathcal{D} i P el nombre de pols.

Comentari 39 La integral

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

es pot interpretar com la variació de l'argument de $f(z)$ quan z evoluciona sobre Γ o com l'índex de Γ respecte de l'origen ($2\pi j$ vegades el nombre de voltes al voltant de l'origen).

Exemple 107 Donada la funció

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$$

i una regió \mathcal{D} composta pel cercle de radi $\frac{1}{2}$ i centre l'origen.

En aquest cas, Γ és una circumferència de radi $\frac{1}{2}$ i centre l'origen. Una parametrització d'aquesta és:

$$\Gamma = \left\{ \frac{1}{2} e^{j\theta}, \theta \in (0, 2\pi] \right\}.$$

El conjunt de punts que s'obté en recórrer la funció $f(z)$ sobre Γ ($f(\Gamma)$) és el que apareix a la Figura A.1.

Com es pot comprovar, es dóna una volta al voltant del origen, i aquesta es dóna en sentit horari. Per tant:

$$-1 = P - Z = 0 - 1$$

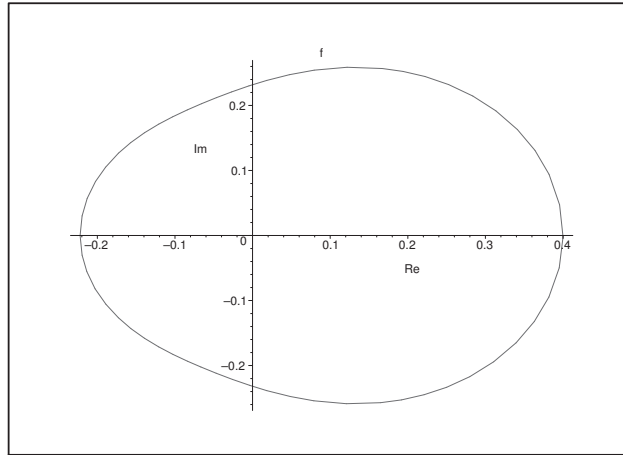


Fig. A1
Corba de l'Exemple 107.

on Z és el nombre de zeros f i P és el nombre de zeros f a \mathcal{D} , respectivament. Donat que f presenta un zero a 0 , $Z=1$, i no presenta cap pol dins \mathcal{D} , aleshores $P=0$.

Exemple 108 Donada la funció

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$$

i una regió \mathcal{D} composta pel cercle de radi 2 i centre a $z = j$.

En aquest cas, Γ és una circumferència de radi 2 i centre $0 + j$. Una parametrització d'aquesta és:

$$\Gamma = \{j + 2e^{j\theta}, \theta \in (0, 2\pi]\}.$$

El conjunt de punts que s'obté en recórrer la funció $f(z)$ sobre Γ ($f(\Gamma)$) és el que apareix a la Figura A.2.

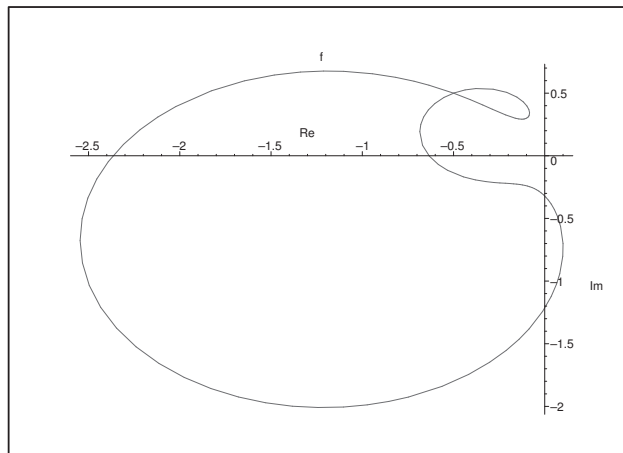


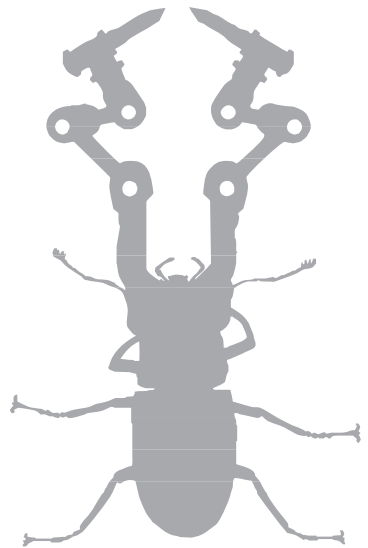
Fig. A2
Corba de l'Exemple 108.



Com es pot comprovar, no s'envolta cap vegada a l'origen. Per tant:

$$0 = Z - P = 1 - 1 = 0$$

on Z és el nombre de zeros f i P és el nombre de zeros f a \mathcal{D} , respectivament. Donat que f presenta un zero a 0 , $Z=1$, i presenta un pol, ($z = -1$), dins \mathcal{D} , aleshores $P=1$.



→ B



Criteri de Routh

El criteri de Routh és un algorisme que permet determinar si un polinomi presenta arrels en el semiplà dret del pla complex. Això fa que sigui de gran utilitat en l'anàlisi de l'estabilitat dels sistemes de temps continu.

Avui és possible obtenir les arrels d'un polinomi de forma numèrica sense gaire dificultat. Per aquest motiu, l'interès del criteri de Routh està en l'anàlisi de sistemes amb paràmetres incerts o en el disseny de sistemes de control.

B.1. Procediment de construcció de la taula

Del criteri de Routh, n'hi ha diverses formulacions. La majoria d'elles difereixen en com tracten els anomenats *casos singulars*. En aquesta secció, es descriu l'algorisme que hi ha a [1], que introdueix un procediment per tenir en compte aquests casos.

En el cas de pols sobre l'eix imaginari la seva multiplicitat pot estudiar-se emprant el mètode descrit a [2].

B.1.1. Procediment general

Donat un polinomi de la forma:

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \quad (\text{B.1})$$

amb $a_0 \neq 0$ i $a_n > 0$.

La taula del criteri de Routh està composta per $n + 1$ files. Les dues primeres files es construeixen de la forma següent:

$$\begin{array}{l} R_n: \quad a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-4} \quad \dots \\ R_{n-1}: \quad a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5} \quad \dots \end{array}$$



En cas que $a_{n-1} \neq 0$, la fila següent es construeix de la forma:

$$R_{n-2}: \quad b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad b_{n-3} \quad \dots$$

on

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots, b_{n-k} = \frac{a_{n-1}a_{n-(k+1)} - a_n a_{n-(k+2)}}{a_{n-1}}.$$

Aquest procediment se segueix fins a obtenir una taula de $n + 1$ files de la forma següent:

$$\begin{array}{l} R_n: \quad a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-4} \quad \dots \\ R_{n-1}: \quad a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5} \quad \dots \\ R_{n-2}: \quad b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad b_{n-3} \quad \dots \\ R_{n-3}: \quad c_{n-2} \quad d_{n-2} \quad d_{n-3} \quad \dots \\ \quad \quad \quad \vdots \\ R_1: \quad f_1 \quad f_0 \\ R_0: \quad g_1 \end{array}$$

Cal assenyalar que cada fila es construeix a partir de les dues files anteriors i conté una columna menys que la fila immediatament anterior.

B.1.2. Casos singulars

En els casos en què el primer coeficient ($a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-2}, d_{n-3}, \dots, g_1$) d'una fila és nul, el mecanisme anterior no es pot aplicar i cal construir la fila seguint altres mecanismes. En fer-ho, cal distingir dos casos diferents:

- T1 Aplicant el procediment anterior s'obté una fila R_k amb tots els elements iguals a 0. En aquest cas la fila R_k es construeix a partir de la fila R_{k+1} de la forma següent. A la fila R_{k+1} , se li pot associar un polinomi de la forma:

$$\alpha_{k+1}s^{k+1} + \alpha_k s^k + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

on α_j correspon als elements continguts a les columnes de la taula. La fila R_k es construeix a partir de la derivada d'aquest polinomi:

$$\alpha_{k+1}(k+1)s^k + \alpha_k k s^{k-1} + \dots + \alpha_1$$

i, per tant, la fila R_k serà:

$$R_k: \quad \alpha_{k+1}(k+1) \quad \alpha_k k \quad \alpha_{k-1}(k-1) \quad \dots$$

- T2 Aplicant el procediment anterior, s'obté una fila R_k de la forma:

$$R'_k: \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \alpha_{k-p} \quad \alpha_{k-p-1} \quad \dots$$

amb $\alpha_{k-p} \neq 0$ i, per tant, la fila R_k comença amb $p - 1$ zeros. En aquest cas, la fila R_k es construeix com a suma de dues files auxiliars:

$$\begin{array}{l} A: \quad 0 \qquad \qquad 0 \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \cdots \quad \alpha_{k-p} \quad \alpha_{k-p-1} \quad \cdots \\ B: \quad (-1)^p \alpha_{k-p} \quad (-1)^p \alpha_{k-p-1} \quad (-1)^p \alpha_{k-p-2} \quad \cdots \end{array}$$

i, per tant,

$$R_k: (-1)^p \alpha_{k-p} \quad (-1)^p \alpha_{k-p-1} \quad (-1)^p \alpha_{k-p-2} \quad \cdots \quad \alpha_{k-p} + (-1)^p \alpha_{k-2-p} \quad \alpha_{k-p-1} + (-1)^p \alpha_{k-2-p-1} \quad \cdots$$

B.2. Teorema

Teorema 4 (Criteri generalitzat de Routh [1]) Donat un polinomi de la forma:

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \tag{B.2}$$

amb $a_0 \neq 0$ i $a_n > 0$, es construeix la taula seguint la metodologia indicada a la secció anterior. Aleshores,

- El nombre de canvis de signe en els elements de la primera columna correspon al nombre d'arrels del polinomi en el semiplà dret del pla complex.
- Si, en la construcció de la taula, apareixen casos singulars T2, $Q(s)$ presenta arrels en el semiplà dret.
- El polinomi $Q(s)$ no conté arrels en el semiplà dret si, en la construcció de la taula, no apareixen singularitats T2 i no hi ha canvi de signe en els elements de la primera columna de la taula.

A més si la singularitat T1 apareix únicament una vegada, els zeros de $Q(s)$ sobre l'eix són de multiplicitat simple.

- El polinomi $Q(s)$ conté totes les seves arrels en el semiplà esquerre si, en la construcció de la taula, no apareixen singularitats ni T1 ni T2 i no hi ha canvis de signe en els elements de la primera columna de la taula.

B.3. Exemples

Exemple 109 Donat el polinomi:

$$P(s) = s^3 + 8s^2 + 19s + 12$$

es vol determinar si presenta arrels en el semiplà dret aplicant-hi el criteri de Routh.

Es verifica que $a_3 > 0$ i $a_0 \neq 0$ i, per tant, es construeix la taula de la forma:

$$\begin{array}{l} R_3: \quad 1 \quad 19 \\ R_2: \quad 8 \quad 12 \\ R_1: \quad \frac{35}{2} \\ R_0: \quad 12 \end{array}$$



En la construcció, no han aparegut singularitats ni de tipus T1 ni de tipus T2 i no hi ha canvis de signe en la primera columna; per tant, no hi ha arrels en el semiplà dret i totes les arrels estan en el semiplà esquerre. Es pot comprovar que

$$P(s) = (s + 1)(s + 3)(s + 4).$$

Exemple 110 Donat el polinomi:

$$P(s) = s^3 + 6s^2 + 5s - 12$$

es vol determinar si presenta arrels en el semiplà dret aplicant-hi el criteri de Routh.

Es verifica que $a_3 > 0$ i $a_0 \neq 0$ i, per tant, es construeix la taula de la forma:

$$\begin{array}{l} R_3: \quad 1 \quad 5 \\ R_2: \quad 6 \quad -12 \\ R_1: \quad 7 \quad 0 \\ R_0: \quad -12 \end{array}$$

En la construcció, no han aparegut singularitats ni de tipus T1 ni de tipus T2, i hi ha 1 canvi de signe a la primera columna; per tant, hi ha una arrel en el semiplà dret. Es pot comprovar que

$$P(s) = (s - 1)(s + 3)(s + 4).$$

Exemple 111 Donat el polinomi:

$$P(s) = s^4 + 7s^3 + 13s^2 + 7s + 12$$

es vol determinar si presenta arrels en el semiplà dret aplicant-hi el criteri de Routh.

Es verifica que $a_4 > 0$ i $a_0 \neq 0$ i, per tant, es construeix la taula de la forma:

$$\begin{array}{l} R_4: \quad 1 \quad 13 \quad 12 \\ R_3: \quad 7 \quad 7 \\ R_2: \quad 12 \quad 12 \\ R_1: \quad 0 \end{array}$$

Donat que la fila R_1 és idènticament nul·la, es tracta d'una singularitat T1 i, per tant, la taula es contínua de la forma:

$$\begin{array}{l} R_1: \quad 24 \\ R_0: \quad 12 \end{array}$$

A la primera columna, no hi ha canvis de signe; per tant, no hi ha arrels en el semiplà dret. Com que hi ha una singularitat T1, i únicament n'hi ha una, hi ha arrels sobre l'eix de multiplicitat senzilla. Es pot comprovar que

$$P(s) = (s + j)(s - j)(s + 3)(s + 4).$$

Exemple 112 Donat el polinomi [1]:

$$P(s) = s^8 + s^7 + s^6 + s^5 + s^2 + s + 1$$

es vol determinar si presenta arrels en el semiplà dret aplicant-hi el criteri de Routh.

Es verifica que $a_3 > 0$ i $a_0 \neq 0$ i, per tant, es construeix la taula de la forma:

$$\begin{array}{l} R_8: 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ R_7: 1 \quad 1 \quad 0 \quad \quad \quad \\ R_6: 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \quad \end{array}$$

Com es pot veure, hi apareix una singularitat T2; per aquest motiu, s'introdueixen les files auxiliars de la forma següent:

$$\begin{array}{l} A: 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ B: 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ R_6: 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Un cop obtinguda la fila, es continua amb la taula

$$\begin{array}{l} R_8: 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ R_7: 1 \quad 1 \quad 0 \quad \quad \quad \\ R_6: 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \quad \\ R_5: 0 \quad -1 \quad -1 \quad \quad \quad \end{array}$$

Novament, apareix una singularitat T2 i, per tant, s'afegeixen les files auxiliars:

$$\begin{array}{l} A: 0 \quad -1 \quad -1 \\ B: 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ R_5: 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \end{array}$$

i es continua endavant:

$$\begin{array}{l} R_8: 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ R_7: 1 \quad 1 \quad 0 \quad \quad \quad \\ R_6: 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \quad \\ R_5: 1 \quad 0 \quad -1 \quad \quad \quad \\ R_4: 1 \quad 2 \quad 1 \quad \quad \quad \\ R_3: -2 \quad 2 \quad \quad \quad \quad \\ R_2: 1 \quad 1 \quad \quad \quad \quad \\ R_1: 0 \quad \quad \quad \quad \quad \end{array}$$

Ara apareix una singularitat T1 i, per tant, s'aplica la derivada al polinomi R_2 i finalment s'obté:



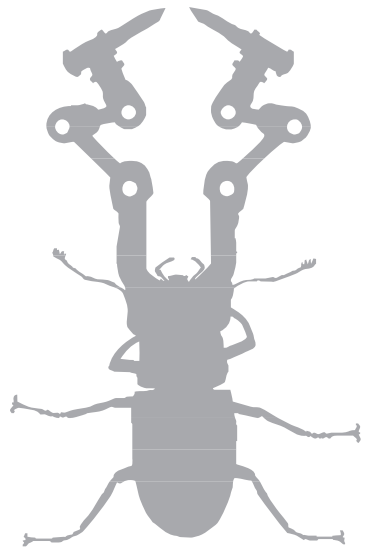
$$\begin{aligned}R_8 &: 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\R_7 &: 1 & 1 & 0 & & \\R_6 &: 1 & 1 & 1 & 1 & \\R_5 &: -1 & 0 & -1 & & \\R_4 &: 1 & 2 & 1 & & \\R_3 &: -2 & 2 & & & \\R_2 &: 1 & 1 & & & \\R_1 &: 2 & & & & \\R_0 &: 1 & & & & \end{aligned}$$

La primera columna presenta tres canvis de signe i, per tant, hi ha tres arrels en el semiplà dret. Han aparegut singularitats T2, cosa que confirma l'existència d'arrels en el semiplà dret.

Es pot comprovar que les arrels són: $-1.10512 \pm 0.42002i$, $0.74551 \pm 0.48247i$, $\pm i$, i $-0.1404 \pm 0.9421i$.

Bibliografia

- [1] M. Benidir and B. Picinbono. Extended Table for Eliminating the Singularities in Routh's Array. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(2): 218–222, february 1990.
- [2] M.A. Choghadi and H.A. Talebi, H.A. The Routh-Hurwitz Stability Criterion, Revisited: The Case of Multiple Poles on Imaginary Axis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(7): 1866–1869, 2013.







Índex alfabètic

aliasing, 59

acció de control, 15

acció derivativa, 241, 244, 246

acció integral, 241, 242

acció proporcional, 241

actuador, 15

ample de banda, 308

aproximació per rectangles, 243

aproximació per trapezis, 243

banda limitada, 60

banda passant, 60, 308

Banda primària, 52

BIBO estable, 121

centroide, 187

coma fixa, 19

coma flotant, 19

condició d'argument, 184, 185

condició de fase, 184

condició de mòdul, 184–186

condició de mòdul., 184

condicions inicials, 28

contorn de Nyquist, 205

control repetitiu, 155

controladors d'avanç, 279

controladors de retard, 279

controladors PID, 241

convertidor AD, 46, 90

convertidor DA, 47, 90

convolució, 79

criteri de Jury, 127

criteri de Nyquist, 208, 212, 214

criteri de Routh, 188, 189, 191, 195

criteri simplificat de Bode, 211, 213, 214

diagrama de Bode, 166, 175

diagrama de Nichols, 167

diagrama de Nyquist, 165

diagrama polar, 164

dominància, 112

equació homogènia, 30

especificacions, 15

estat estacionari, 140

fase mínima, 238

filtre *antialiasing*, 61

funció de transferència, 85

funció de transferència d'un sistema mostrejat, 65

funció de transferència en bilineal, 310

generador d'un senyal, 151

grau relatiu, 104

Heaveside, 24

internal model control, 249

internament estable, 254

IP, 246

Labview, 17



- manteniment, 45
- manteniment d'ordre zero, 45
- manteniment d'un senyal mostrejat, 45
- marge de fase, 214, 219
- marge de guany, 214, 216
- marge de retard, 220, 221
- MATLAB, 17, 208, 209
- mostratge, 44
- mostratge impulsional, 44
- mostratge impulsional uniforme, 44
- mostratge uniforme, 44
- mostrejador virtual, 64, 65

- PAM, 49
- passaalt, 239, 240
- passabaix, 62, 239, 240
- PD, 247, 248
- PI, 15, 246
- PID, 246
- planta, 15
- positiu real, 239
- precisió, 139, 308
- precisió finita, 19
- principi de l'argument, 202, 208
- principi del model intern, 150, 151, 236, 242
- proporcional integral, 15
- pseudopulsació de bilineal, 313
- pseudopulsació normalitzada de bilineal, 313

- quantificació, 19, 45, 46

- règim permanent, 140, 308
- recobriment espectral, 59
- resposta freqüencial, 308
- robustesa, 308
- root locus, 183

- sèrie de Fibonacci, 28
- sampled-data systems, 43
- SCADA, 17
- sensor, 15
- senyal alternat, 31

- senyal de banda limitada, 59
- senyal fitat, 24
- senyal graó, 24
- senyal impuls, 24
- senyal N-periòdic, 154
- senyal paràbola, 25
- senyal persistent, 151
- senyal rampa, 25
- senyals mostrejats, 44
- Simulink, 17
- sistema autònom, 28
- sistema causal, 27
- sistema estable, 36, 125
- sistema inestable, 37, 125
- sistema lineal estable, 121, 122
- sistema lineal marginalment estable, 124
- sistema marginalment estable, 36, 125
- sistemes de temps discret, 18
- sistemes mostrejats, 18
- sobrepuig, 115
- solució d'una equació en diferències, 28
- soroll de mesura, 246
- Spirule, 186

- temps d'enlairament, 115
- temps d'estabilització, 115
- temps de retard, 115
- temps de sobrepuig, 115
- teorema de la superposició, 39
- teorema de la funció implícita, 189
- teorema del mostratge, 59, 61
- teorema del mostratge generalitzat, 60
- teorema del valor final, 78, 150
- teorema del valor inicial, 78
- terme forçat, 29
- terme independent, 29
- tipus d'un sistema, 146
- tipus generalitzat, 148
- transformació bilineal, 308
- translació complexa, 78
- translació real, 77
- tren d'impulsos, 48

- warping factor, 310