

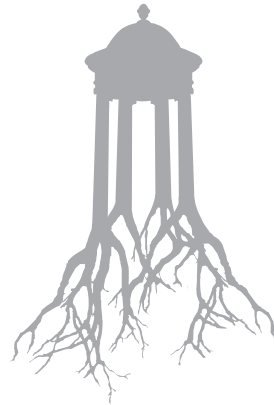
UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→ **UPCGRAU**

Física aplicada al càlcul estructural arquitectònic →

Francesc Fayos
Ramon Torres





UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques de la UPC

→ **UPCGRAU**

Física aplicada al càlcul estructural arquitectònic →

Francesc Fayos
Ramon Torres

Primera edició: març de 2017

- © Els autors, 2017
- © Iniciativa Digital Politècnica, 2017
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

DL: B 6775-2017
ISBN: 978-84-9880-640-3

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei.



Prefaci

L'abast dels ensenyaments que s'integren dintre de la carrera d'arquitectura a l'Estat espanyol difereix notablement del que és habitual a la majoria de països del món. Com que l'arquitecte espanyol continua essent legalment responsable de tot l'edifici, és imprescindible proporcionar-li coneixements suficients del que col·loquialment anomenem “les tecnologies”, d'una manera especial –però no exclusivament– de les estructures, les instal·lacions, l'acústica, les façanes...

És ben cert que resulta completament impossible que una sola persona pugui acabar dominant tots aquests temes a nivell d'especialitat. Per aquest motiu, la realitat ha acabat imposant inevitablement el seu dictat i el més habitual és que el projecte arquitectònic sigui desenvolupat per un grup de tècnics o d'empreses, cadascuna d'elles especialitzades en un d'aquests camps –o per una gran empresa que agrupa tots aquests coneixements en diferents departaments o divisions. Tanmateix, com a responsable últim, l'arquitecte almenys ha de ser capaç de coordinar críticament tot el material que produeixen els seus col·laboradors.

Aquesta concepció de la figura de l'arquitecte explica que els arquitectes espanyols tinguin un prestigi reconegut pràcticament a qualsevol país del món. I no ens referim ara a les “figures”, sinó a l'arquitecte mitjà.

Aconseguir això no és gens fàcil, però. L'extraordinària evolució tecnològica que ha experimentat en les darreres dècades en el món de l'arquitectura en particular, i el de la construcció en general, fa necessari un filtratge molt curós dels coneixements que s'han de transmetre a l'estudiant, ja que la capacitat d'aprenentatge de l'ésser humà és inevitablement limitada. Aquesta necessitat de filar molt prim en la metodologia i en les eines de la docència és especialment important en aquelles assignatures o moments de la carrera en què es produeix la transició entre el coneixement científic i la seva instrumentació tecnològica. Bo i reconeixent el valor absolut d'una actitud de l'estudiant procliu a submergir-se en l'oceà del coneixement, també és cert que, si no se li proporcionen alguns ajuts, pot acabar per ofegar-se en el propi coneixement: és a dir, l'excés d'informació pot contribuir més a crear confusió que a deixar un sediment cultural.

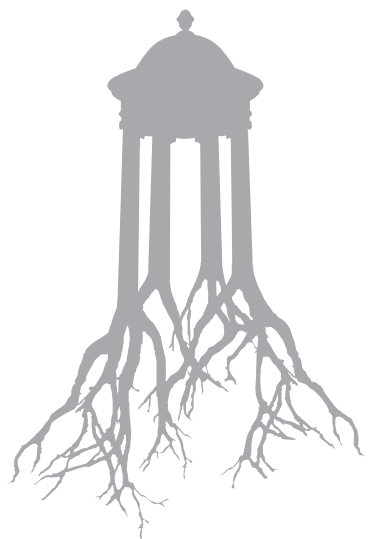


Aquest llibre, escrit pels professors Fayos i Torres, pretén que això no succeeixi i neix amb la voluntat de ser com una carta de navegació en el trànsit difícil entre les assignatures de Física i Estructures. És cert que hi ha un gran nombre de publicacions relatives a la resistència dels materials, actuals i antigues, moltes d'elles de gran qualitat (encara que les actuals mostren una tendència excessiva a diluir el concepte físic dintre de la seva formulació matemàtica). Però també és indubtable que el seu contingut difícilment és compatible amb la necessitat de transmetre uns coneixements prou útils en el breu període de docència de catorze setmanes.

Aquest text, preparat pels professors Fayos i Torres, té el gran valor d'identificar perfectament el contingut indispensable de coneixements introductoris a l'anàlisi estructural, i desenvolupar-los d'una forma suficientment ordenada i codificada perquè siguin perfectament comprensibles per a l'estudiant. A més, incorpora una sèrie d'exercicis, alguns d'ells resolts i d'altres només enunciats, tots ells amb una intencionalitat clara i en nombre suficient per permetre completar un aprenentatge adequat del tema tractat, però sense arribar a requerir de l'estudiant un esforç que acabi resultant incompatible amb la càrrega de treball que li exigeixen el conjunt d'assignatures que ha d'atendre durant el curs. A la vegada, intenta mantenir sempre un equilibri curós entre el rigor científic i la senzillesa expositiva, i entre el contingut teòric i la seva aplicació pràctica.

Per tots aquests motius, aquest llibre pot ser indubtablement una gran ajuda per als estudiants d'arquitectura a l'hora d'iniciar el seu aprenentatge en la disciplina del disseny i l'anàlisi estructural, permetent-los endinsar-se en els mètodes i en els procediments imperants en aquest món, i començar a ensinistrar-se tant en el llenguatge com en les tècniques que hauran d'aplicar quan cursin les assignatures d'Estructures durant els cursos següents.

Dr. Agustí Obiol Sánchez
Catedràtic d'Estructures del Departament de Tecnologia de l'Arquitectura
a l'Escola Tècnica Superior d'Arquitectura de Barcelona (ETSAB)







Pròleg

Una part important de les arrels del pensament humà contemporani prové de la revolució copernicana i del pensament científic que se'n va derivar. El pensament científic modifica constantment la imatge que l'home té de si mateix i la seva relació amb el que l'envolta. En particular, l'evolució de la ciència i de la tecnologia influeix, de manera clara, en la concepció de l'arquitectura. I ho fa tant per la contribució de la ciència al pensament humà, del qual es nodreix l'arquitectura, com per les millores tecnològiques que es produeixen constantment, cosa que permet als arquitectes disposar de millors solucions tècniques (que no tan sols milloren la part més purament constructiva de l'obra, sinó que influeixen en la forma última d'aquesta).

Un exemple contemporani d'això el trobem en la revolució quàntica, que al llarg del segle xx va generar una electrònica basada en els semiconductors. Aquesta electrònica ha permès millorar constantment els processos computacionals, ajudats ara per ordinadors, la qual cosa ha proporcionat grans ajuts i ha introduït canvis a gairebé tots els camps de l'arquitectura. Òbviament, un dels beneficiaris d'aquest avenç tecnològic ha estat el càlcul estructural. Així, hem passat dels mètodes manuals de càlcul, basats sovint en esquemes gràfics, als mètodes de càlcul moderns, assistits per ordinador. La nova potència de càlcul ha permès dissenyar estructures complexes, que eren intractables anys enrere.

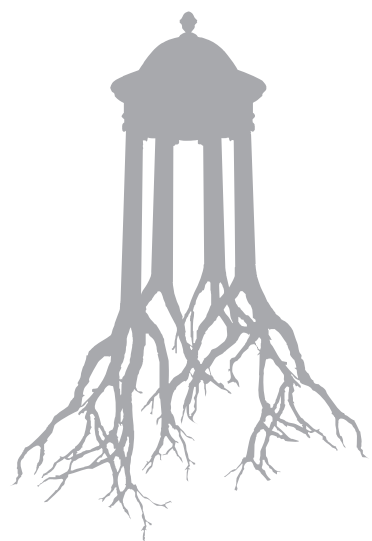
Ara bé, perquè els ordinadors puguin ser realment un ajut, cal introduir-hi una sèrie de dades relacionades directament amb un projecte i fer una anàlisi crítica dels resultats generats. Aquestes serien les tasques pròpies de l'arquitecte o, més acuradament, d'un arquitecte que tingués els conceptes estructurals bàsics ben clars.

Aquest llibre pretén, precisament, oferir una introducció al càlcul estructural tenint en compte aquesta realitat. El nostre anhel és que les noves generacions d'arquitectes coneguin des dels primers cursos, d'una banda, els fonaments de la ciència que són aplicables a les estructures i, de l'altra, els rudiments de les aplicacions del càlcul estructural. Seguint aquesta filosofia, el llibre cobreix l'espai conceptual existent entre els models de la matèria més utilitzats en la tecnologia de les estructures i els primers



resultats de l'anàlisi d'estructures complexes. Així doncs, s'hi tracten des dels models de partícula puntual, sòlid rígid o sòlid elàstic, passant per les lleis de Newton i Hooke, fins als diagrames d'esforços axials, tallants i moments flectors dels pòrtics i la deformada a estima de bigues o pòrtics.

L'enfocament del llibre es basa en l'exposició dels fonaments físics de cada tema i la seva aplicació a la pràctica arquitectònica, utilitzant exemples senzills per il·lustrar convenientment els coneixements més complexos. Per tant, bona quantitat de problemes estan resolts (mentre que d'altres simplement es proposen), amb vista a ajudar els estudiants d'arquitectura a adquirir i afermar els seus coneixements dels fonaments del càlcul estructural. No obstant això, hem de remarcar que en aquest llibre només tractem dels fonaments, atès que els estudiants ja s'enfrontaran al moll de l'os del càlcul estructural en cursos posteriors.







Índex

Prefaci	5
Pròleg	9
Índex	13
1. Les estructures i els materials en arquitectura	17
1.1 Els conjunts de sòlids en equilibri	17
1.2 Les petites deformacions	18
1.3 Els models de la matèria sòlida	18
1.4 Les forces	19
1.4.1 Les forces puntuals	19
2. Estàtica de la partícula puntual	25
2.1 La força resultant.....	25
2.2 Les lleis de Newton	26
2.3 Condició d'equilibri estàtic per a una partícula puntual	27
Exemples	27
3. Estàtica d'un sòlid rígid (SR)	31
3.1 Sistema de forces contingudes en un pla i aplicades a un SR.....	31
3.2 El cas de les forces transversals distribuïdes sobre elements rectes	33
3.3 Condicions d'equilibri d'un SR.....	35
3.3.1 Un sòlid rígid sotmès a forces en dos punts.....	35
3.3.2 Equivalència estàtica de sistemes de forces aplicades a un SR	36
3.4 Tipus de suports	38
3.5 Problemes	39
4. Estructures planes isostàtiques: gelosies, pòrtics i marcs plans	43
4.1 Isoestaticitat i hiperestaticitat	43
4.2 Equilibri dels sistemes de sòlids rígids articulats	44
4.2.1 Aplicació del principi d'acció i reacció en barres rígides lligades entre elles per articulacions o soldadures.....	45
4.3 Classificació dels sistemes sòlids rígids articulats.....	46
4.4 Tècnica de resolució de problemes per a gelosies planes	47



4.4.1	Nodes sota condicions especials de càrrega	49
4.5	Tècnica de resolució de problemes per a carcasses (marcs, pòrtics, etc.)	51
4.5.1	Si l'estructura és rígida (i isostàtica):	51
4.5.2	Si l'estructura és NO rígida (i isostàtica):	53
4.6	Problemas	55
5.	Bigues rectes. Diagrames d'esforços tallants i moments flectors	61
5.1	Forces internes en una barra recta	61
5.2.1	Càlcul de $V(x)$ i $M(x)$ al tram simple	63
5.3	Propietats de $V(x)$ i $M(x)$	65
5.4	Llei de les àrees per determinar $M(x)$ a partir de $V(x)$	66
5.5	Tractament de la barra recta amb els seus trams	67
5.5.1	Discontinuitats de $V(x)$ i $M(x)$ en una barra recta formada per diversos trams	67
5.6	Procediment general per a obtenir els diagrames d'esforços tallant i moments flectors	69
5.6.1	Explicitació dels convenis de signes	71
5.7	Dibuix "aproximat" del diagrama de moments flectors sense fer abans el d'esforços tallants	73
5.8	Problemes	74
6.	Diagrames de pòrtics isostàtics bidimensionals	77
6.1	Forces axials	77
6.2	Esquema general de resolució i exemples	78
6.3	Diagrama de flectors de manera aproximada	82
6.4	Problemes	85
7.	Comportament elàstic dels materials. Càrrega axial uniforme i flexió pura	91
7.1	Casos fonamentals i simplificacions	91
7.2	Tensions normal i tangencial	92
7.3	Deformacions sota una càrrega axial uniforme	92
7.4	Llei de Hooke	94
7.5	Flexió pura	96
7.5.1	Element simètric sotmès a flexió pura	96
7.5.2	Deformacions per flexió pura	97
7.6	Deformacions i càlcul estructural	100
7.7	Problemes	102
8.	Deformació per flexió d'un tram d'una barra recta. Deformada a estima	105
8.1	Deformació d'un tram de barra per flexió pura: Deformada i deformada a estima	105
8.2	Deformada a estima: desplaçaments i girs als extrems d'un tram d'una barra sotmesa a un estat general de càrrega	108
8.2.1	Estats bàsics de deformació	108
8.2.2	Un exemple: deformada a estima d'una barra recta isostàtica	111
8.3	Problemes	113
Apèndix: Ampliació d'elasticitat	117	
A.1	Energia emmagatzemada en la deformació sota una força axial	117
A.2	Relacions de Poisson	118

A.3 Càrrega multiaxial.....	119
A.3.1 Llei de Hooke generalitzada.....	119
A.3.2 Energia emmagatzemada per unitat de volum.....	120
A.3.3 Compressió uniforme.....	121
A.4 Cisallament pur.....	122
Glossari.....	127

→ 1



Les estructures i els materials en arquitectura

L'arquitectura s'interessa especialment per la creació d'estructures estables o en *equilibri*. En aquest capítol, veurem com la ciència modelitza les estructures i identifica els fenòmens físics que intervenen per aconseguir aquest estat d'equilibri. Igualment, desenvoluparem les eines bàsiques que la ciència aporta a l'estudi de les estructures i que farem servir al llarg del llibre.

1.1 Els conjunts de sòlids en equilibri

Suposem que un grup de sòlids lligats entre ells¹ i amb l'entorn,² i que tenen una forma inicial donada, són sotmesos a forces externes.

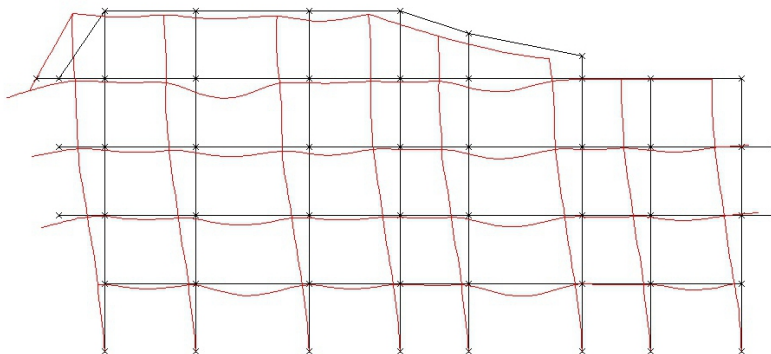


Fig. 1.1
En negre, una part d'una estructura abans de ser carregada. En vermell, l'estructura un cop carregada. (La deformació causada per les càrregues s'ha exagerat expressament.)

Sota aquestes sol·licitacions, el conjunt es deformarà i, en determinades condicions, podrà assolir un *estat final d'equilibri*. En aquest estat final, s'hauran de complir simultàniament:



- a) les anomenades *condicions d'equilibri estàtic* (que bàsicament relacionen les forces sobre el conjunt),
- b) les relacions de *tensió-deformació* (que relacionen les forces sobre el conjunt amb les deformacions globals i de cada element) i
- c) les condicions de *compatibilitat geomètrica* (que incorporen les limitacions sobre les deformacions del conjunt i les seves parts).

1.2 Les petites deformacions

Les condicions anteriors es poden simplificar molt en cas que les forces aplicades siguin tan petites que no causin deformacions apreciables sobre els sòlids. Llavors, com a primer grau d'aproximació, podríem negligir les deformacions i tractar cadascun dels sòlids del conjunt i el conjunt en si com un sòlid no deformable.³ D'aquesta manera, de les tres condicions que hem avançat, ens hauríem de concentrar a estudiar només les condicions d'equilibri estàtic.

D'altra banda, pot passar que les forces aplicades no siguin massa *grans* (de manera que el conjunt assoleixi l'estat final d'equilibri sense patir grans deformacions) i que vulguem (o necessitem) tenir en compte aquestes petites deformacions. En aquest cas, es pot recórrer a la *teoria de les pertorbacions* de primer ordre, que ens proporcionarà relacions lineals (i, per tant, simplificadores) entre les forces implicades i les deformacions produïdes. Tanmateix, en aquesta aproximació s'han de tenir en compte totes les condicions indicades més amunt: *a)* s'han de complir les condicions d'equilibri estàtic sobre cadascun dels elements del conjunt considerant-los en equilibri. (Això ens determinarà unes relacions entre les forces aplicades i les forces als suports o d'altres forces desconegudes); *b)* s'han de tenir en compte les relacions lineals entre les forces i les deformacions que s'hauran de satisfer en cada part i en el conjunt, i *c)* s'han de complir les condicions de compatibilitat geomètrica que diuen que les deformacions no són arbitràries, sinó que han de satisfer una sèrie de restriccions dictades per com estan lligats els sòlids entre ells i amb els suports.

1.3 Els models de la matèria sòlida

De les consideracions anteriors, es pot deduir que considerarem diferents models per a la matèria sòlida. En efecte, a continuació enumerem els tres models que farem servir,⁴ seguint una classificació segons la seva disposició i la seva interacció a escala macroscòpica:

- a) Per a qualsevol objecte real, les dimensions del qual siguin irrellevants en la situació o en el problema considerat, podem assumir la simplificació que aquest ocupa un punt a l'espai on descansa tota la seva massa. Aquest model s'anomena *de partícula puntual (PP)*.
- b) Per a qualsevol objecte real, les dimensions del qual restin majorment invariables, sota les forces a què estigui sotmès (independentment dels suports



sobre els quals estigui recolzat), podem assumir la simplificació que aquest sempre té la mateixa forma. Aquest model s'anomena *de sòlid rígid (SR)*.

- c) Per a qualsevol objecte real, les dimensions del qual variïn apreciablement quan l'objecte és sotmès a forces externes, però que és capaç de recuperar la forma inicial tan aviat com aquestes han desaparegut, diem que es comporta com un *sòlid elàstic (SE)*.⁵

1.4 Les forces

En el marc de la mecànica newtoniana, la força és una magnitud vectorial capaç de modificar la quantitat de moviment o la forma dels materials. En la pràctica estructural, distingim entre *forces puntuals* (o *concentrades*), que tenen un *punt* d'aplicació (quan la superfície de distribució és petita amb relació a la superfície total del sòlid –per exemple, per modelitzar la força que fa la punta d'un clau quan se'l comença a clavar a la fusta) i *forces distribuïdes* (com, per exemple, la força que fa la mà quan ens recolzem sobre una taula). A continuació, estudiarem les propietats de les forces puntuals i deixarem per a més endavant (cap. 3) l'estudi de les forces distribuïdes. De fet, si no diem el contrari, tractarem les forces com a puntuals.

1.4.1 Les forces puntuals

Per tal de conèixer completament una força puntual, caldrà saber:

- a) El mòdul o valor de la intensitat de la força, que es mesurarà amb:
- i. Dines (dyn) en el *sistema cegesimal*, que es defineix com la força que cal aplicar a un gram (g) massa per obtenir-ne una acceleració d'un centímetre per segon al quadrat (1 cm/s^2).
 - ii. Newtons (N) en el *sistema internacional*, que es defineix com la força que cal aplicar a un quilogram de massa (kg) per obtenir-ne una acceleració d'un metre per segon al quadrat (1 m/s^2).
 - iii. Quiloponds (kp) (o quilograms-força) en el *sistema tècnic d'unitats*, que és la força amb la qual la Terra atrau un quilogram de massa. En arquitectura, és molt usual fer servir una unitat múltiple seva, la **tona-força (t)**, definida com $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kp}$
- b) La direcció, que ens proporcionarà la recta sobre la qual es trobarà el vector força o recta d'aplicació de la força.
- c) El sentit (com que els punts d'una recta es poden recórrer en dos sentits, cal dir en quin dels dos sentits apunta la força).
- d) El punt d'aplicació de la força.

La representació simbòlica estàndard de la magnitud vectorial força es fa d'acord amb uns eixos cartesianes coordinats, X, Y i Z, que porten associats sengles vectors unitaris



$\{i, j, k\}$,⁶ que formen la base canònica. Per tant, podem escriure qualsevol força \mathbf{F} com:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (1.1)$$

en què F_x , F_y i F_z són les components de \mathbf{F} en relació amb la base canònica $\{i, j, k\}$.

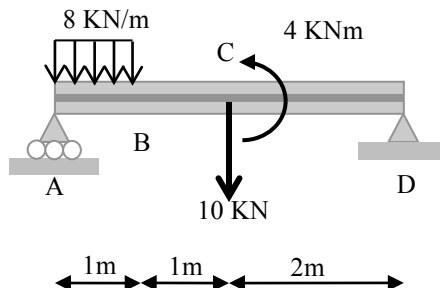
En molts casos pràctics, les simetries existents ens permeten dividir l'estructura en diferents plans perpendiculars al terra.



Per simplicitat, el càlcul estructural estudia cadascun d'aquests plans per separat i, posteriorment, estudia la interacció entre ells. És costum anomenar el pla objecte específic d'estudi *pla X-Y*. Més encara, s'acostuma a agafar l'eix *Y* en la direcció de la força que fa la gravetat sobre els objectes.

En càlcul estructural, és molt important la **representació gràfica** de les forces que actuen sobre una PP o un SR (tant si es tracta d'una força coneguda com si no, ja sigui aquesta puntual o distribuïda), atès que el fet de recórrer a la informació que s'obté de manera immediata a través d'un dibuix suposa una gran simplificació, a tots els nivells (v. Fig. 1.2).

Fig. 1.2





Vegem ara com representar les forces en funció de les propietats que en coneguem.

1. *Força totalment coneguda.* En el punt d'aplicació de la força, dibuixem una fletxa amb la direcció i en el sentit donats, al costat de la qual indiquem la intensitat de la força (mòdul) amb un nombre en les seves unitats (N, kN, kp, t). La llargària de la fletxa s'ha de relacionar convenientment amb el mòdul de la força (v. Fig. 1.3).

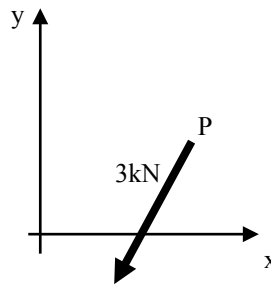


Fig. 1.3

Ens inspirem ara en aquesta tècnica de representació de forces conegudes per representar tant les forces totalment desconegudes com aquelles de les quals només coneixem la direcció (es dóna per descomptat que en coneixem sempre el punt d'aplicació).

2. *Força amb només direcció i punt d'aplicació coneguts.* Dibuíxem una fletxa amb la direcció coneguda i en el sentit que creiem que finalment serà el correcte.⁷ Si denotem el vector unitari amb aquesta direcció i en aquest sentit, la força real la podem escriure $T = T \hat{u}$, on T és el component de la força T en la direcció del vector \hat{u} (i, com a tal, pot tenir signe positiu –si la força dibuixada té el sentit de la força real, és a dir, si T i \hat{u} tenen el mateix sentit– o negatiu –si T i \hat{u} tenen sentit contrari). Al costat de la fletxa, hi escriurem el component T (v. Fig. 1.4).

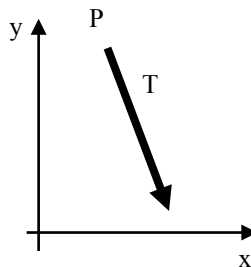


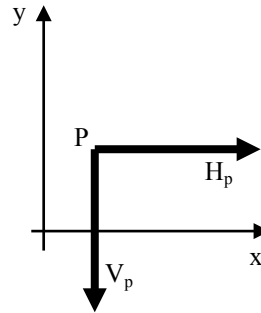
Fig. 1.4
Representació gràfica d'una força amb magnitud i sentit desconeguts. La força real pot tenir el sentit indicat o el contrari. Observeu que la denotem amb el component T

3. *Força amb només el punt d'aplicació conegut.* Atès que, en arquitectura, la força de la gravetat determina una direcció privilegiada (la vertical), una manera molt útil, a la pràctica, de descriure una força totalment desconeguda és descompondre-la en dues forces, una de direcció vertical i l'altra de direcció horitzontal. A l'hora de representar aquesta descomposició al punt d'aplicació P , escollim de la forma més adient el sentit de les dues forces i hi escrivim les

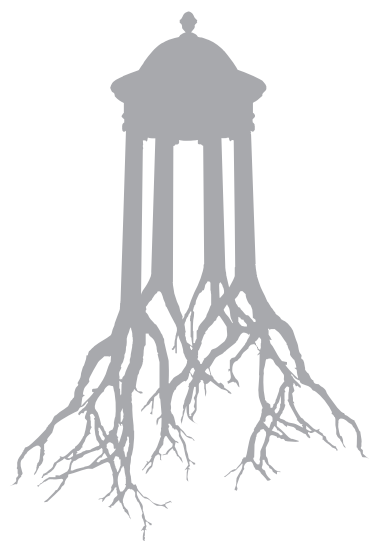


components H_P o V_P a la força horitzontal o vertical, respectivament⁸ (v. Fig. 1.5). De manera similar a l'apartat anterior, si, per exemple, $H_P < 0$, això implica que la força horitzontal real té el sentit contrari al dibuixat i el valor absolut de H_P serà el mòdul del component horitzontal de la força total a P.

Fig. 1.5



-
- ¹ Més endavant definirem amb precisió els lligams interns (en particular, les articulacions i les unions rígides).
 - ² Així mateix, explicarem què s'entén per lligams externs (en particular, tractarem dels suports llisos, dels suports bilaterals, de les articulacions i dels encastaments).
 - ³ *Sòlid rígid* en la terminologia que incorporarem a partir de la pròpia secció.
 - ⁴ Encara que hi ha d'altres possibilitats, aquestes no seran considerades en aquest llibre.
 - ⁵ En aquest llibre, doncs, no estudiem el cas en què el sòlid no recupera la forma inicial.
 - ⁶ D'ara endavant, per tal de representar un vector, n'escriuim el símbol corresponent en negreta.
 - ⁷ Si no tenim cap pista, podem escollir el sentit de manera arbitrària.
 - ⁸ Des del punt de vista matemàtic, H_P i V_P són els components en la direcció dels vectors unitaris (horitzontal i vertical, respectivament) amb un sentit arbitràriament escollit.



→2



Estàtica de la partícula puntual

En aquest capítol, posem els fonaments de l'equilibri de les estructures. Aquest primer pas implica estudiar l'equilibri de la partícula puntual, cosa que ens permetrà després estudiar l'equilibri dels sòlids. A més, també aprendrem una sèrie de tècniques de representació i de càlcul, imprescindibles per als capítols posteriors.

2.1 La força resultant

Si, sobre una partícula puntual, hi actuen N forces (amb $i = 1 \dots N$), la suma vectorial d'aquestes forces ens proporciona la **força resultant (o total)** del sistema de forces aplicades sobre la partícula puntual. La resultant serà, doncs, un vector \mathbf{R} tal que:

$$\mathbf{R} \equiv R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} \equiv \left(\sum_{i=1}^N F_{ix} \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^N F_{iy} \right) \mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^N F_{iz} \right) \mathbf{k} .$$

A la pràctica, treballem usualment en dues dimensions i fem servir la representació *gràfica* que hem vist al final del capítol anterior, atès que resultarà molt més simple d'aplicar. Per tant, hem de considerar la definició de resultant segons el nostre enfocament. Il·lustrem la nostra manera de procedir amb l'obtenció de l'expressió analítica de la res F_i ultant per a l'exemple que apareix a la Fig. 2. 1. Com es pot veure, s'hi sumen tres forces (una totalment coneguda –la tercera– i les altres, no completament determinades) per tal d'obtenir-ne la força resultant desconeguda (totes es s'indiquen amb la simbologia que s'ha detallat al capítol anterior).

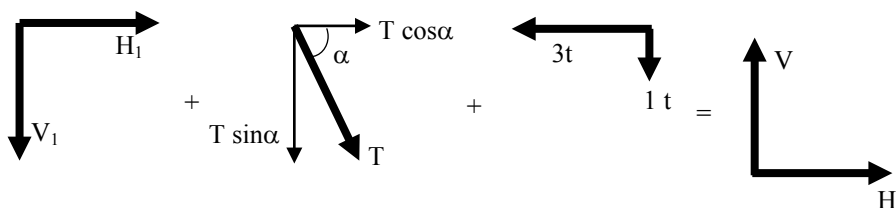


Fig. 2. 1



Per tal d'obtenir les expressions analítiques en general:

- Descomponem totes les forces que s'han de sumar en els seus components horitzontals i verticals (v. Fig. 2. 1).
- A l'hora de sumar les forces horitzontals i verticals, fem servir, com a conveni de signes per defecte, el que ens diu que les forces horitzontals que apunten cap a la dreta les hem de considerar positives, i negatives en cas contrari. Igualment, si les forces verticals apunten cap amunt les considerem positives, i negatives en cas contrari.⁹
- La resultant tindrà un component horitzontal suma (amb el seu signe corresponent) dels components horitzontals de les forces que se sumen, i tindrà un component vertical suma (amb el seu signe corresponent) dels components verticals de les forces que se sumen. Així, l'aplicació d'aquest conveni a les forces de la figura ens proporciona:

$$H = H_1 + T \cdot \cos \alpha - 3t$$

$$V = - V_1 - T \cdot \sin \alpha - 1t$$

2.2 Les lleis de Newton

Les lleis de Newton són la base de la mecànica clàssica, i descriuen i relacionen les causes i les formes en què es mouen els cossos. Les lleis de Newton són vàlides quan els sistemes de referència són inercials (és a dir, que no requereixen la inclusió de *forces fictícies*). Els problemes que es plantegen normalment en càlcul estructural fan servir sistemes de referència en repòs respecte a la superfície de la Terra. Aquests sistemes de referència es poden considerar (aproximadament) inercials. (Els efectes de la rotació de la Terra respecte del seu eix, el de la translació respecte del Sol, etc., són negligibles). Així doncs, en una aproximació molt bona, podrem aplicar les lleis de Newton al càlcul estructural sense afegir-hi cap tipus de força fictícia.

Els enunciats de les tres lleis de Newton són els següents:

Primera llei. Principi d'inèrcia. Tot cos lliure, sobre el qual no actua cap força neta, manté el seu estat de moviment, ja sigui en repòs o en moviment, rectilini uniforme.

Segona llei. Llei fonamental de la dinàmica. Tot cos sobre el qual actua una força neta té una acceleració proporcional a la força neta que produeix el moviment.

Tercera llei. Llei d'acció i reacció. Sempre que un cos exerceix una força sobre un altre (*acció*), aquest segon cos exerceix una força igual i en sentit contrari sobre el primer (*reacció*).

La figura 2.2 il·lustra la tercera llei quan considerem dues partícules puntuals interaccionant situades als punts P i Q. Més endavant, veurem que aquesta llei adquirirà una gran rellevància per al càlcul estructural quan considerem la interacció entre sòlids rígids.

Fig. 2.2





2.3 Condió d'equilibri estàtic per a una partícula puntual

Per a les aplicacions en les quals estem interessats, diem que una partícula està en *equilibri* quan es troba en repòs respecte d'un sistema de referència que es mou amb el terra. Segons aquesta definició, la segona llei de Newton assenyala que una partícula puntual està en equilibri (estàtic) quan la resultant de totes les forces que actuen sobre ella és igual a zero (i la seva velocitat en un moment qualsevol és zero segons el sistema de referència en repòs respecte al terra). Expressant-ho en termes matemàtics, tenim, doncs:

$$0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \left(\sum_{i=1}^N F_{ix} \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^N F_{iy} \right) \mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^N F_{iz} \right) \mathbf{k}$$

Des del punt de vista de la representació gràfica de les forces, i tenint en compte que treballam en dues dimensions, aquesta relació vectorial és millor expressar-la com a:

- La suma de les forces horitzontals ha de ser igual a zero i
- La suma de les forces verticals ha de ser igual a zero.¹⁰

Exemples

1. Determineu la força (de components H_1 i V_1), (v. Fig. 2.3) que cal aplicar a una partícula puntual per deixar-la en equilibri si, a més, s'hi apliquen les altres dues forces que apareixen a la figura següent:

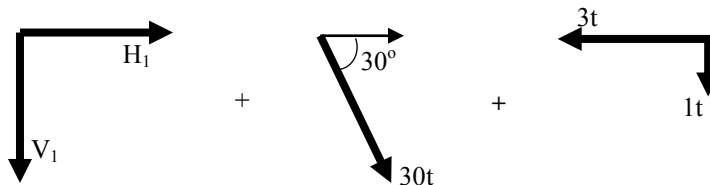


Fig. 2.3

Solució:

$$H_1 + 30 \cos(30^\circ) t - 3t = 0, -V_1 - 30 \sin(30^\circ) t - 1t = 0,$$

$$\Rightarrow H_1 = -22.98 t, V_1 = -16 t.$$

Representem la solució gràficament a la figura 2.4.

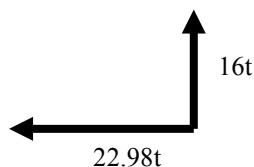


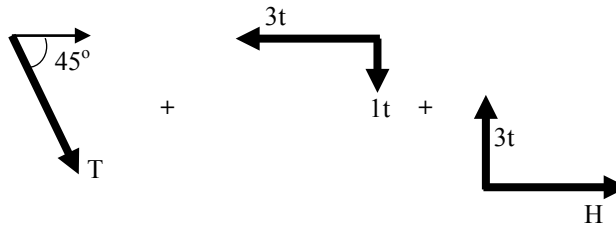
Fig. 2.4

Observeu com els signes negatius per a H_1 i V_1 a la solució analítica indiquen que la solució té sentits contraris als que havíem dibuixat inicialment.



4. Les tres forces de la figura actuen sobre una partícula puntual. Determineu el valor de T i H (v. Fig. 2.5) per deixar-la en equilibri.

Fig. 2.5



Solució:

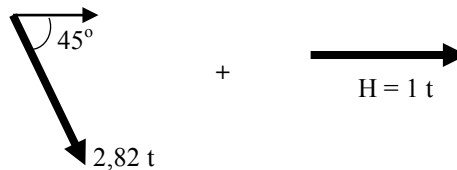
$$T \cos(45^0) - 3 t + H = 0,$$

$$-T \sin(45^0) - 1 t + 3 t = 0,$$

$$\Rightarrow T = 2,82 t, H = 1 t$$

Gràficament, obtindrem la Fig. 2.6:

Fig. 2.6



5. A l'exemple que hem mostrat a la figura 2.1, considerem que les forces que hem sumat s'apliquen sobre una partícula i suposem que aquesta ha d'estar en equilibri. Com s'han de trobar relacionades entre si les forces desconegudes?

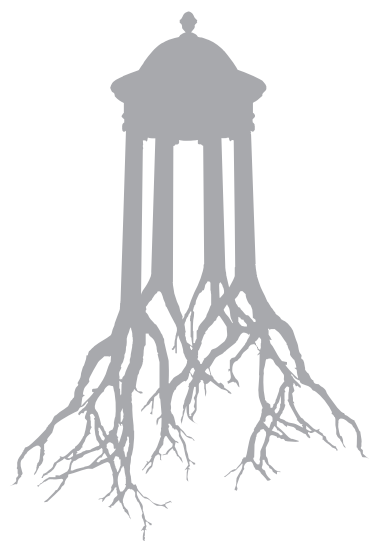
Si la partícula es troba en equilibri, llavors $H = V = 0$ o, el que és el mateix:

$$0 = H_1 + T \cos\alpha - 3 t, \quad 0 = -V_1 - T \sin\alpha - 1 t$$

En aquest cas, solament podem obtenir dues equacions que relacionen quatre magnituds no fixades inicialment: H_1 , V_1 , T i α .

⁹ En altres paraules, fem servir la suma vectorial dels vectors expressats a la base canònica $\{i, j\}$ estàndard.

¹⁰ Cal remarcar que, atès que la resultant és zero, les dues equacions obtingudes seran independents del conveni de signes que s'esculli.



→ 3



Estàtica d'un sòlid rígid (SR)

Si considerem un sòlid rígid com una col·lecció d'un gran nombre de partícules, el seu equilibri estaria garantit per l'equilibri de totes i cadascuna de les seves partícules. No obstant això, la imposició de les condicions de l'equilibri per a cada partícula individual seria impracticable. Per aquesta raó, en aquest capítol aprendrem a escriure unes condicions d'equilibri específiques i especialment simples per al SR.

3.1 Sistema de forces contingudes en un pla i aplicades a un SR

Per tal de caracteritzar un sistema de forces aplicades a un sòlid rígid, serà molt útil introduir els conceptes següents:

- **Força resultant general (FR) d'un sistema de forces aplicades a un SR.** Es defineix com la suma (vectorial) de les forces aplicades, com si fossin vectors lliures. Igual que en el cas d'una partícula puntual, diem que la resultant general té un *component horitzontal* (suma dels components horitzontals de les forces aplicades al SR) i un *component vertical* (suma dels components verticals).

Analíticament, i com en el cas de la partícula puntual, tenim:

$$\mathbf{FR} \equiv FR_x \mathbf{i} + FR_y \mathbf{j} + FR_z \mathbf{k} \left(\sum_{i=1}^N F_{ix} \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^N F_{iy} \right) \mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^N F_{iz} \right) \mathbf{k}$$

- **Moment d'una força aplicada a un punt P respecte d'un punt Q qualsevol.** Analíticament, el moment d'una força \mathbf{F} aplicada a P, respecte d'un punt Q, és un **vector aplicat a Q**, que anomenem \mathbf{M}_Q i que es defineix com¹¹:

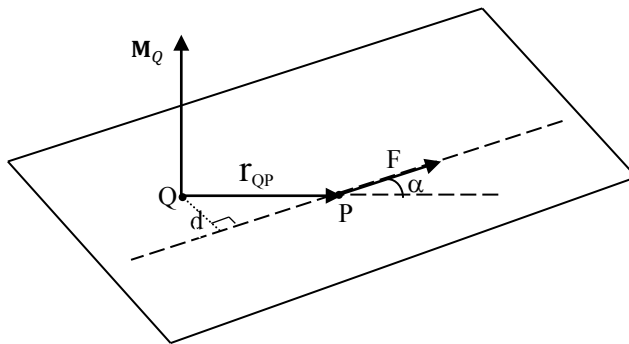
$$\mathbf{M}_Q = \mathbf{r}_{QP} \times \mathbf{F} \quad (3.1)$$

on \mathbf{r}_{QP} és el vector que té com a origen Q i extrem P (el punt d'aplicació de \mathbf{F}) i el símbol \times indica el producte vectorial (v. Fig. 3.1). Suposem el cas en què \mathbf{r}_{QP} i \mathbf{F} no tenen la mateixa direcció i, per tant, existeix un pla que els conté. De l'equació 3.1 deduïm que \mathbf{M}_Q serà perpendicular a aquest pla. Si escollim una tríada d'eixos X, Y i Z orientada positivament, de manera que el pla X-Y sigui el pla anterior, l'únic component no nul de \mathbf{M}_Q , el component en la direcció z, serà:

$$M_{Q_z} \equiv M_Q = \pm |\mathbf{F}| |\mathbf{r}_{QP}| \sin \alpha = \pm |\mathbf{F}| d \quad (3.2)$$

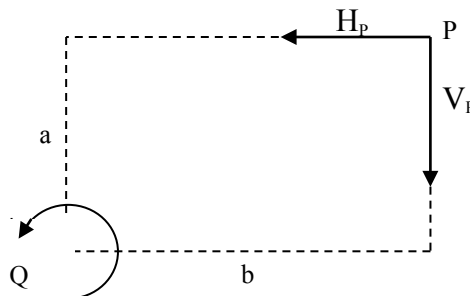
on α és l'angle que formen els vectors \mathbf{r}_{QP} i \mathbf{F} , d és la distància entre el punt Q i la línia d'acció de la força F (v. Fig. 3.1) i el signe \pm es determinarà a través de la "regla del tirabuixó o de la mà dreta".

Fig. 3.1
S'ha d'interpretar el dibuix considerant els vectors \mathbf{r}_{QP} i \mathbf{F} continguts en el mateix pla, i \mathbf{M}_Q perpendicular a aquest pla



Per efectuar aquest càlcul *gràficament*, representem la força fent servir els seus components horitzontal i vertical, i determinem les distàncies a les seves línies d'acció a i b, com s'indica a la Fig. 3.2.

Fig. 3.2



Fem servir l'expressió 3.2 per trobar el moment de la força horitzontal i el de la força vertical respecte de Q. El moment M_Q ve donat per la suma d'aquests moments. A l'exemple proposat a la figura 3.2, tenim:

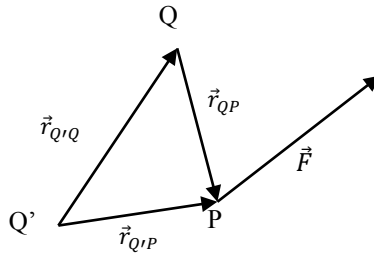


$$M_Q = + H_p a - V_p b$$

Òbviament, amb aquesta manera de procedir, obtindrem el mateix resultat que amb el càlcul purament analític (v. Eq. 3.1).

- **Relació entre M_Q i $M_{Q'}$** : (essent Q' un punt diferent de Q –v. Fig. 3.3) per a una força F aplicada a un punt P .

Fig. 3.3



Tindrem:

$$\mathbf{M}_{Q'} = \mathbf{r}_{Q'P} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_{Q'Q} + \mathbf{r}_{QP}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{Q'Q} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}_Q \quad (3.3)$$

- **Moment resultant MR_Q general d'un sistema de forces**. Donat un sistema de forces F_1, F_2, \dots , aplicades a punts P_1, P_2, \dots , que tenen uns moments M_{1Q}, \dots , respecte a un punt Q , definim el moment resultant general respecte del punt com:

$$\mathbf{MR}_Q = \mathbf{M}_{1Q} + \mathbf{M}_{2Q} + \dots$$

- **Relació entre MR_Q i $MR_{Q'}$** (essent Q' un punt diferent de Q). Igual com per al M_{2Q} cas d'una única força, és fàcil veure que, si es tracta d'un sistema de forces amb FR la força resultant general i MR_Q el moment resultant general respecte a Q , llavors el moment resultant $MR_{Q'}$ respecte a un altre punt Q' estarà relacionat amb MR_Q per l'expressió:

$$\mathbf{MR}_{Q'} = \mathbf{r}_{Q'Q} \times \mathbf{FR} + \mathbf{MR}_Q \quad (3.4)$$

3.2 El cas de les forces transversals distribuïdes sobre elements rectes

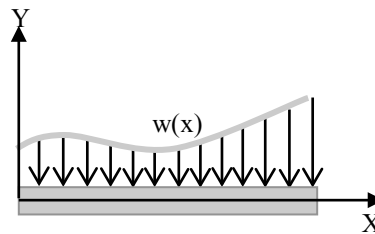
Estem interessats principalment en problemes en què tant els elements rectes que conformen l'estructura com les forces aplicades estan situades en un pla. En aquest cas, les forces distribuïdes transversals a cada element recte es poden tractar de la manera que il·lustrem a continuació:



1. Donat un element recte, suposem que la força transversal distribuïda és aplicada sobre una longitud L de l'element.
2. Agafem un sistema cartesià X, Y, Z amb l'origen en un extrem de la barra. L'eix X el situem al llarg de la barra; l'eix Y , perpendicular a l'anterior i a la superfície del terra, i l'eix Z , perpendicular al pla X - Y .
3. La força transversal per unitat de longitud en un punt x determinat de l'element recte la denotem $w(x)$ ($= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, on Δf és la força distribuïda sobre el tros

Δx). Les seves unitats més habituals són els N/m o les t/m . Una representació gràfica de la força distribuïda al llarg de l'element recte podria tenir l'aspecte següent:

Fig. 3.4
Un cas particular
d'una càrrega
distribuïda al llarg de
tota una barra



Observeu que hem dirigit les fletxes en la direcció negativa de l'eix Y , atès que és el cas més habitual –per exemple, quan la força distribuïda és deguda al pes d'alguna paret recolzada sobre la barra. D'aquesta manera, el conveni habitual consisteix a agafar $w(x) > 0$ quan la força estigui dirigida cap avall.

La força elemental df aplicada perpendicularment a la barra entre el punt x i el $x + dx$ té component y :

$$df = -w(x) dx$$

Per tant, la força total al llarg de tota una barra de longitud L tindrà com a resultant:

$$\mathbf{FR} = \int_0^L df \mathbf{j} = - \int_0^L w(x) dx \mathbf{j}$$

El moment resultant respecte a l'origen serà un vector perpendicular al pla X - Y :

$$\mathbf{MR}_0 = \int_0^L dM \mathbf{k} = - \int_0^L x w(x) dx \mathbf{k}$$

4. En el cas particular d'una força **uniformement** distribuïda, és a dir, $w(x) = \text{constant}$, denotem w aquesta constant. (Aquest és el cas habitual que tractem en aquest llibre.) La representació gràfica d'una força uniformement distribuïda amb $w > 0$, aplicada sobre una barra de longitud L , es pot veure al dibuix següent.

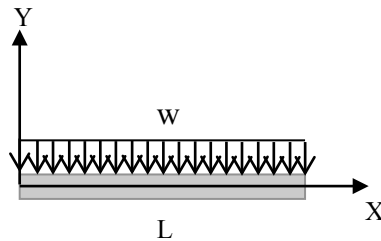


Fig. 3.5

La força total al llarg de tota la barra tindrà com a resultant:

$$\mathbf{FR} = -\int_0^L (xw) dx \mathbf{j} = -wL \mathbf{j}$$

El moment resultant respecte a l'origen serà:

$$\mathbf{MR}_0 = -\int_0^L x w(x) dx \mathbf{k} = -\frac{1}{2} w L^2 \mathbf{k} \quad (3.5)$$

Observeu que, en cas que w sigui negativa, els resultats són igualment vàlids (cal recordar de posar w amb el signe corresponent).

3.3 Condicions d'equilibri d'un SR

Considerant un sòlid rígid com un sistema de partícules puntuals en interacció que mantenen la seva posició relativa inalterada, siguin quines siguin les forces externes que s'hi apliquin, fent servir les lleis de Newton, es dedueix¹² que **les condicions d'equilibri d'un sòlid rígid són**:

$\mathbf{FR} = 0,$ $\mathbf{MR}_Q = 0.$

Observeu que, a la segona equació, és suficient que això passi per a un punt Q qualsevol, ja que, si $\mathbf{FR} = 0$, llavors, de (3.4):

$$\mathbf{MR}_{Q'} = \mathbf{r}_{Q',Q} \times \mathbf{FR} + \mathbf{MR}_Q = \mathbf{MR}_Q$$

Per tant, si dóna zero en un punt, donarà zero en qualsevol punt.

3.3.1 Un sòlid rígid sotmès a forces en dos punts

Com a exemple, molt útil per a càlculs posteriors, tractem ara el cas particular d'un sòlid rígid sotmès a forces tan sols a dos dels seus punts. Anomenem A i B aquests



punts i denotem **A** i **B** (en negreta) les forces en aquests punts. (En cas que actuessin diverses forces sobre cadascun d'aquests punts, llavors **A** i **B** representaran les forces resultants sobre els punts A i B, respectivament). Les equacions d'equilibri ens diuen que la suma de moments respecte del punt A hauria de ser zero. Això només és possible si la força resultant a B té la direcció de la recta que uneix els punts A i B. Igualment, prenent moments respecte de B, obtenim que la força resultant en A ha de tenir la direcció de la recta que uneix A i B. D'altra banda, perquè la resultant de les forces sumi zero, com ens indiquen les equacions de l'equilibri, les dues forces (que sabem ara que tenen la mateixa direcció) han de tenir sentits contraris i la mateixa magnitud. Així doncs, només són possibles dues situacions en aquest cas, que representem a continuació:

1. Forces a *tracció*

Fig. 3.6



2. Forces a *compressió*

Fig. 3.7



3.3.2 Equivalència estàtica de sistemes de forces aplicades a un SR

La contribució d'un sistema de forces¹³ a l'equilibri d'un SR es dedueix directament de les seves condicions d'equilibri, és a dir, ve donada per:

1. la seva contribució a la **FR** i
2. la seva contribució al **MR**

Des d'aquest punt de vista, diem que:

Dos sistemes de forces són estàticament equivalents si tenen la mateixa força resultant general $FR_{(1)} = FR_{(2)}$ i el mateix moment general $MR_{Q(1)} = MR_{Q(2)}$ respecte d'un punt Q qualsevol.

Corol·lari: El criteri d'equivalència no depèn del punt escollit com a origen de moments ja que, si són equivalents respecte d'un punt Q determinat, també ho seran respecte de qualsevol altre punt Q'.

La demostració és immediata tenint en compte (3.4).

Vegem ara algunes de les conseqüències més importants que sorgeixen d'aquest criteri d'equivalència:

- Principi de transmissibilitat. Una força F determinada és equivalent a una altra d'igual mòdul, direcció, sentit i recta d'aplicació, però diferent punt d'aplicació.

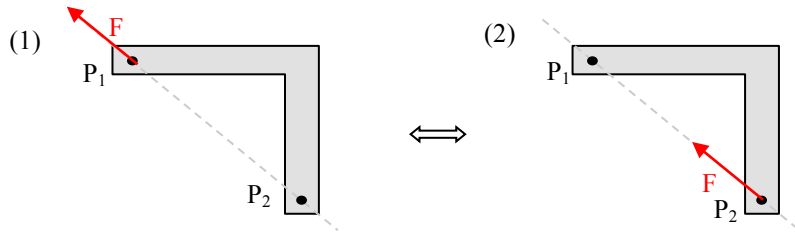


Fig. 3.8
Il·lustració del principi de transmissibilitat. Per tal que el sòlid estigui en equilibri, hi ha d'haver altres forces que no han estat dibuixades. Observeu, per exemple, que $MR_{P_1}(1) = MR_{P_1}(2) = 0$.

- La força uniformement distribuïda w al llarg d'un segment de longitud L es pot substituir per una puntual de mòdul $w \cdot L$, de direcció i sentits dictats per la distribució i aplicada en el punt mitjà del segment ($L/2$).

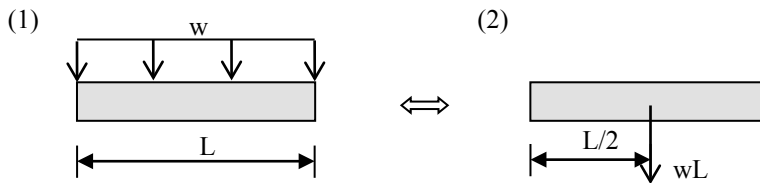


Fig. 3.9
Il·lustració de força concentrada equivalent a una força uniformement distribuïda. Observeu que, fent servir 3.5, tenim $MR_{O(1)} = MR_{O(2)}$

- Parell de forces. Diem que tenim un *parell de forces bàsic* quan disposem de dues forces d'igual magnitud i direcció, però de sentits oposats i amb línies d'acció paral·leles (no coincidents). En aquest cas, la resultant serà nul·la i el moment serà diferent de zero. Com ja hem vist anteriorment, el fet que $FR = 0$ farà que el valor del moment sigui independent del punt origen del moment: $MR_{Q(1)} = MR_{Q(2)}$.

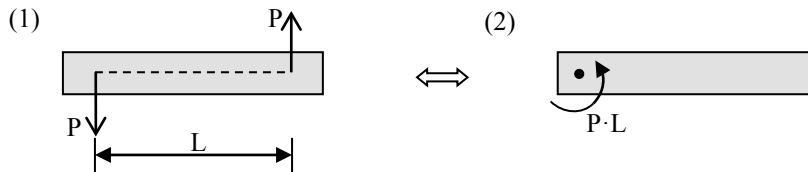


Fig. 3.10

Aquesta definició és generalitzable per a un sistema de forces amb $FR = 0$. Llavors, diem que apliquem un *moment extern* (o *parell extern*) sobre un SR quan li apliquem un sistema de forces caracteritzat per $FR = 0$ i un moment extern resultant (amb un punt d'aplicació indiferent) diferent de zero.

- Un sistema de forces amb força resultant FR i moment resultant MR_Q és equivalent a:

- una única força F tal que $F = FR$ i amb punt d'aplicació Q , i
- un moment extern N_Q tal que $N_Q = MR_Q$.

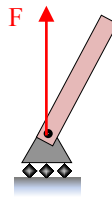
Per tant, el sistema de forces pot ser substituït, des del punt de vista de l'equilibri estàtic, per una força única F , aplicada a Q , i un parell extern, N_Q .

3.4 Tipus de suports

Quan considerem les forces externes que actuen sobre un SR, hem de considerar com aquest sòlid interacciona amb el seu entorn per mitjà dels seus *suports*. El SR fa forces (d'acció) sobre els suports i aquests, segons la tercera llei de Newton, han de fer forces de reacció sobre el SR. Atenent aquest comportament, considerem tres tipus bàsics de suports:

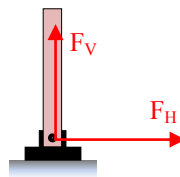
1. **Suport bilateral.** Qualsevol suport en què la reacció té sempre una línia d'acció coneguda. Aquests suports restringeixen el moviment del SR fent només possible el moviment perpendicular a la reacció (habitualment, paral·lel a la superfície del suport). En aquest cas, ens trobarem amb **una** incògnita: la intensitat de la força que fa el suport sobre el SR.

Fig. 3.11
Hem dibuixat una part d'una estructura subjecta a un suport bilateral (rodets sobre el terra). En aquesta situació, la direcció i el sentit de la força que fa el suport són coneguts (fletxa vermella). La intensitat de la força és la magnitud desconeguda



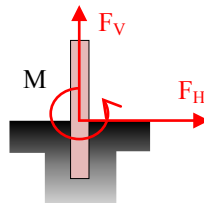
2. **Articulació.** Qualsevol suport en què la magnitud i la direcció de la reacció siguin, en principi, desconegudes (per a un sistema de forces arbitrari que actui sobre el SR). Aquest tipus de suport restringeix totalment el trasllat del SR, però no així el seu gir. D'aquesta manera, habitualment ens trobem amb **dues** incògnites: la intensitat i la direcció de la força que fa el suport sobre el SR o, equivalentment, les components horitzontals i verticals d'aquesta força.

Fig. 3.12
Hem dibuixat una part d'una estructura subjecta a una articulació (pern subjecte al terra). En aquesta situació, la direcció de la força que fa el suport sobre l'estructura és desconeguda. Per tant, hi ha dues incògnites que, al dibuix, hem escollit com els seus components horitzontal i vertical (fletxes vermelles)



3. **Encastament.** En aquest cas, el SR té restringits tant els dos graus de llibertat lligats als desplaçaments horitzontals i verticals, com la rotació al voltant del punt de l'encastament. Atès que el sistema de forces que conformen la reacció sobre el suport és equivalent a una força única i a un moment extern, per a un conjunt de forces arbitrari que actui sobre el SR, desconeixem tant la intensitat i la direcció de la força resultant en el suport com la magnitud del moment. D'aquesta manera, habitualment ens trobem amb **tres** incògnites en plantejar-nos la reacció a un encastament.

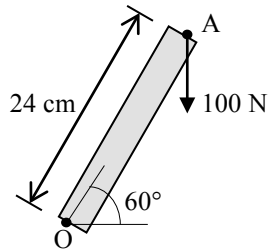
Fig. 3.13
Hem dibuixat una part d'una estructura subjecta per a un encastament. En aquesta situació, la direcció de la força i la magnitud del parell que fa el suport sobre l'estructura solen ser desconeguts, cosa que fa un total de tres incògnites



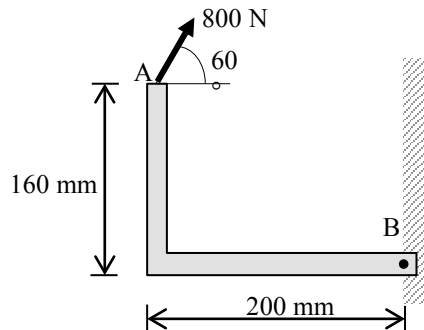


3.5 Problemes

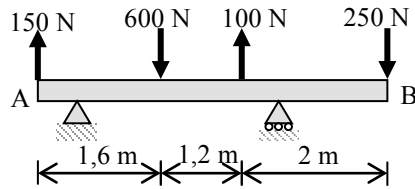
1. Una força vertical de 100 N s'aplica a l'extrem d'una barra. Determineu:
 - a. El moment de la força respecte d'O.
 - b. La força horitzontal aplicada a A que originaria el mateix moment respecte d'O.
 - c. La força mínima aplicada a A que originaria el mateix moment respecte d'O.
 - d. Quant lluny d'O hauria d'estar una força vertical de 240 N per originar el mateix moment respecte d'O?



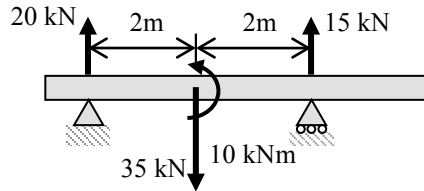
2. Una força de 800 N actua sobre la mènsula, com es mostra a la figura. Determineu el moment de la força respecte de B.



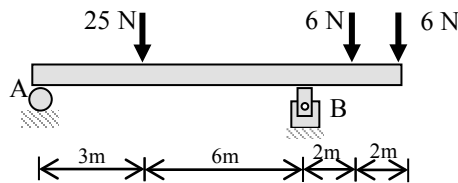
3. Una biga de 4,80 m de longitud està subjecta a les quatre forces que es mostren a la figura (a més de les forces als suports). Determineu:
 - a. La força resultant de les quatre forces.
 - b. El moment resultant respecte de A de les quatre forces.
 - c. A quin lloc de la biga s'hauria de col·locar la força resultant de l'apartat anterior per produir el mateix moment respecte de A?



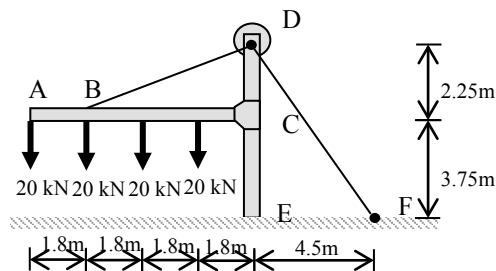
4. La biga que es mostra a la figura té dos suports que exerceixen sobre ella unes reaccions que ens “asseguren” que tenen unes magnituds de 20 kN i 15 kN, tal com es mostra al dibuix. També s’hi apliquen una càrrega de 35 kN i un parell de 10 kN·m.
- Redueix el conjunt a una única força i a un únic parell situats a la meitat de la biga.
 - Redueix el conjunt a una única força i a un únic parell situats al punt de recolzament del suport unilateral.
 - Es troba aquesta biga en equilibri sota l’acció de les forces i el parell indicats?



5. S’apliquen a una biga tres càrregues com les que es mostren a la figura. La biga es recolza sobre un rodet a A i un pern a B. Trobeu les reaccions als suports A i B.



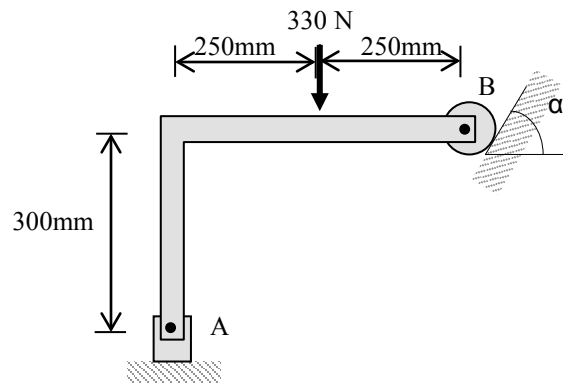
6. El marc que es mostra a la figura suporta una part del sostre d’un petit edifici. Se sap que la tensió al cable és de 150 kN. Trobeu les reaccions a l’encastament E.





7. Determineu-ne les reaccions a A i B quan

- a. $\alpha = 0$
- b. $\alpha = 90^\circ$
- c. $\alpha = 30^\circ$



¹¹ Observeu que aquesta definició és totalment general i que ni tan sols cal l'existència d'un SR.

¹² Per demostrar aquest resultat, cal aprofundir en mecànica newtoniana (inclosa la dinàmica), cosa que queda fora de l'objectiu d'aquest llibre. Consulteu, per exemple, *Mecànica vectorial para ingenieros*, de Beer, Johnston i Eisenberg (McGraw Hill, 8a edició).

¹³ Possible subconjunt del conjunt total de forces sobre el SR.

→ 4



Estructures planes isostàtiques: gelosies, pòrtics i marcs plans

En aquest capítol, tractem dels diferents tipus i possibilitats que ens trobem en el càlcul d'una estructura plana que tingui solució única en fer servir només les seves condicions d'equilibri. Per fer-ho, ens basem en el fet que les estructures són un conjunt de sòlids rígids units entre ells per articulacions, lligades a l'exterior per uns suports i sotmeses a unes forces externes determinades. Elles mateixes, considerades en conjunt i amb els seus suports, poden ser tractades com a sòlids rígids. Així, basant-nos en els resultats obtinguts per a l'equilibri del SR del capítol anterior, podem ara desenvolupar unes tècniques específiques per a cada tipus d'estructura.

4.1 Isoestaticitat i hiperestaticitat

En primera instància, podem classificar les estructures com a:

1. **Isostàtiques.** Són aquelles en què és possible determinar tant les reaccions en els suports com el conjunt de forces que actuen sobre cada element de l'estructura, exclusivament per mitjà de les condicions d'equilibri estàtic (v. Fig. 4.1).
2. **Hiperestàtiques.** Són aquelles en què **no** és possible determinar les reaccions en els suports i el conjunt de forces que actuen sobre cada element de l'estructura fent servir, exclusivament, les condicions d'equilibri estàtic (v. Fig. 4.2). En aquest cas, cal afegir a aquestes condicions les relacions esforç-deformació i les condicions de compatibilitat geomètrica per tal de poder trobar els valors d'aquestes forces. De retruc, amb aquestes condicions, es poden obtenir també les deformacions corresponents dels elements del conjunt.¹⁴ (Ens ocuparem d'aquest cas a partir del capítol 7.)



Fig. 4.1 esquerra.
Estructura isostàtica amb tres incògnites (dues a A i una a E) determinables amb les (3) condicions d'equilibri estàtic.

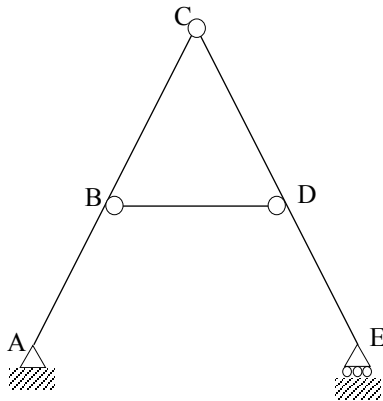
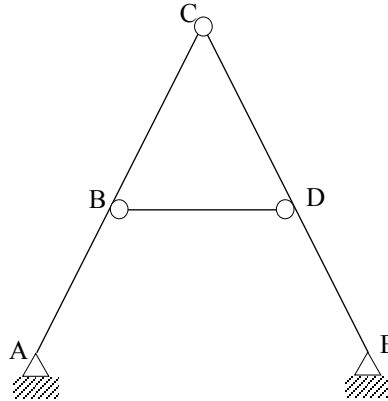


Fig. 4.2 dreta.
Estructura hiperestàtica amb quatre incògnites (dues a A i dues a E) no determinables amb les condicions d'equilibri estàtic.



4.2 Equilibri dels sistemes de sòlids rígids articulats

Entenem com a *sistema de sòlids rígids articulats* el conjunt de sòlids lligats els uns amb els altres per pernys o passadors i lligats a suports externs. És molt usual, per les simplificacions que comporta en els càlculs, considerar com a sistema de sòlids rígids articulats un sistema on es facin servir unions rígides (obtingudes amb rebllons, soldadures, etc.) per tal de lligar diferents sòlids. En aquest cas, els resultats dels càlculs s'hauran de prendre com una aproximació molt bona.

Demandar l'**equilibri d'un sistema de sòlids rígids articulats** equival a demandar l'equilibri de cadascun dels sòlids que el componen. Per tal de verificar aquestes demandes, cal fracturar el sistema en sòlids individuals.

Com a eina per garantir l'equilibri de cada SR, fem servir el **diagrama del sòlid lliure (DSL)**. El DSL consisteix en un croquis on es representa el cos idealitzat (unidimensional en cas de barres) amb:

- les reaccions (forces i moments) dels suports connectats al SR específic,
- les altres forces i moments, externs a l'estructura, que s'apliquen al sòlid específic i
- les forces d'acció i reacció fruit de la interacció del SR estudiat amb els altres sòlids que s'hi articulen.

Pel que fa a aquest darrer punt i, més específicament, a l'aplicació del principi d'acció-reacció que comporta, és interessant diferenciar-ne tres casos rellevants:

- Dos sòlids rígids articulats en un punt.
- Dos sòlids rígids articulats amb una força aplicada a l'articulació. (Aquesta força podria provenir de la reacció d'un suport o ser un altre tipus de força externa.)
- Tres sòlids rígids articulats en un punt (amb o sense una força externa aplicada).

A la propera secció, estudiem un per un aquests tres casos.



4.2.1 Aplicació del principi d'acció i reacció en barres rígides lligades entre elles per articulacions o soldadures

Considerem dues barres articulades en un punt A, com es veu a l'esquerra de la Fig. 4.3. Procedim a separar les barres i a dibuixar les forces d'acció-reacció sobre elles. Com que no coneixem la força d'acció sobre la primera barra, en dibuixem els seus components horitzontals i verticals. A continuació, hem de dibuixar sobre la segona barra la reacció o, més concretament, els seus components horitzontals i verticals, que han de tenir el sentit contrari dels anteriors, però la mateixa magnitud (d'acord amb el principi d'acció-reacció). Vegeu el dibuix de la dreta de la Fig. 4.3.

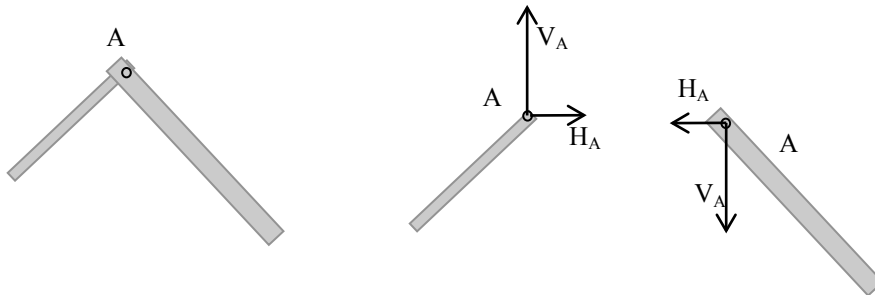


Fig. 4.3
Dues barres articulades a A se separen per estudiar les forces d'acció-reacció entre elles. Suposem que sobre elles actuen d'altres forces, que no s'han dibuixat.

Centrem-nos ara en la Fig. 4.4. Dues barres es troben articulades en un punt A i s'hi aplica una força externa denotada F . Procedim com abans amb la barra de l'esquerra. Considerem que la força externa F s'aplica a A sobre la barra AC. Observeu que aquesta elecció és arbitrària, ja que també hauríem pogut escollir que la força s'apliqués al punt A de la barra AB. Totes dues opcions donen com a resultat les mateixes forces totals a A en ambdues barres considerades per separat. (Una altra manera d'imaginar la situació consisteix a considerar que la força s'aplica sobre el pern a A que uneix les dues barres. La nostra elecció, llavors, equivaldria a deixar el pern a la barra AC en separar les dues barres.)

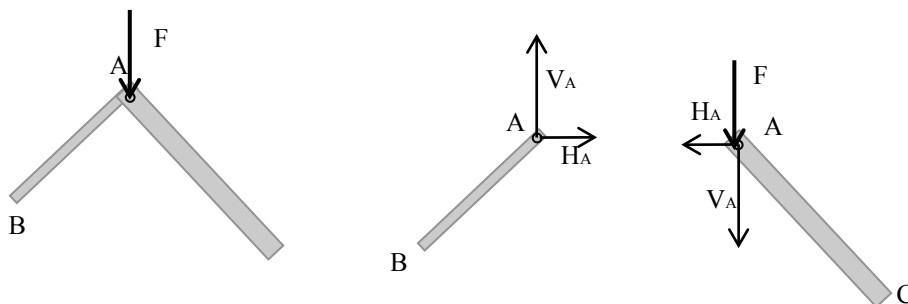
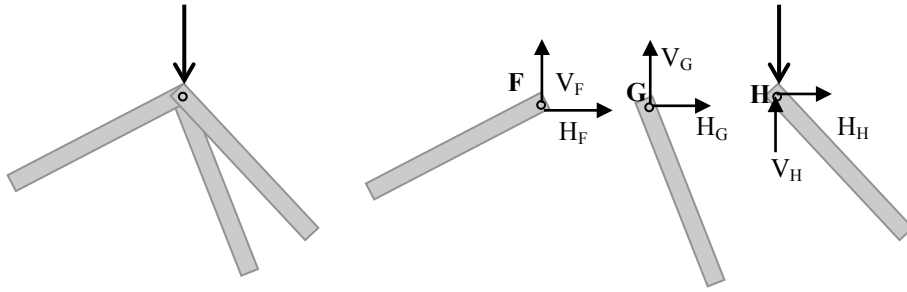


Fig. 4.4

En cas de tres barres o més, podem fer servir el principi d'acció-reacció, però de manera més compacta, com es veu a la Fig. 4.5.

Fig. 4.5
En aquest cas, imposen la condició $F+G+H=0$ sobre els vectors força, cosa que representa dues igualtats escalars: components verticals i components horitzontals.



4.3 Classificació dels sistemes sòlids rígids articulats

A l'hora d'enfrontar-nos al càlcul d'una estructura, hem de tenir en compte, primer, a quin tipus pertany i quines consideracions porta associades:

A. Sistemes de sòlids rígids articulats que conformen un SR (fins i tot separats dels suports) (v. Fig. 4.7)

- En aquest cas, si les restriccions dels suports porten associades, com a molt, tres incògnites, llavors aquestes reaccions es poden¹⁵ determinar directament de les equacions d'equilibri del conjunt. (Per exemple, és comú quan hi ha només dos suports, essent aquests una articulació i un suport bilateral.) Llavors, l'estructura pot ser *isostàtica*, excepte que sigui *internament hiperestàtica*.
- Si els suports no immobilitzen completament l'estructura, es diu que l'estructura es troba *impròpiament restringida*.
- Si els suports immobilitzen completament l'estructura, però presenten un nombre d'incògnites superior a tres, l'estructura es troba *estàticament indeterminada*, és a dir, és *hiperestàtica*.

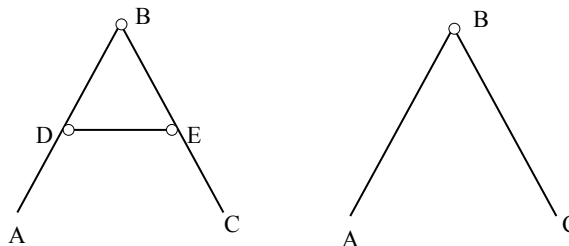
B. Sistemes de sòlids rígids articulats que *no* conformen un SR (quan el sistema és separat dels suports) (v. Fig. 4.6)

Ens podem trobar aquesta situació tant per a estructures isostàtiques com hiperestàtiques.

- En aquest cas, els suports han d'aportar les restriccions necessàries per tal que el conjunt, sistema més suports, sigui rígid.

Fig. 4.6 esquerra.
Estructura que es comporta com un sòlid rígid fins i tot fora dels suports.

Fig. 4.7 dreta.
Estructura que no es comporta com un sòlid rígid fora dels suports



D'altra banda, amb vista a enfocar el millor sistema de càlcul de l'estructura, també és interessant diferenciar dos grans tipus d'estructures:



1. Quan totes les barres d'una estructura són rectes, es troben articulades entre elles i només estan sotmeses a forces als extrems, l'estructura s'anomena gelosia o armadura (v. Fig. 4.8).
2. Quan alguna de les condicions anteriors no se satisfà, l'estructura s'anomena carcassa¹⁶ (essent tipologies estructurals comunes, en aquest cas, el marc i el pòrtic) (v. Fig. 4.9).

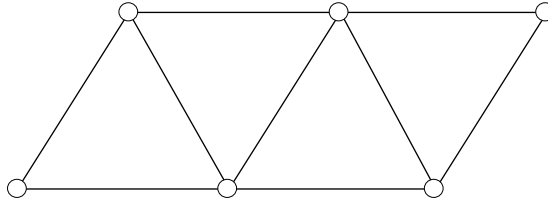


Fig. 4.8
Gelosia o armadura

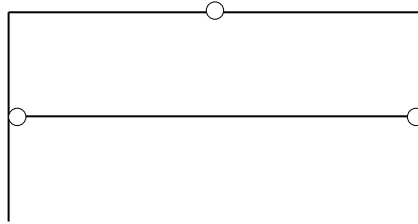


Fig. 4.9
Marc

4.4 Tècnica de resolució de problemes per a gelosies planes

Si bé existeixen diferents mètodes per a la resolució d'una gelosia, nosaltres ens centrem en el *mètode dels nodes*. Aquest mètode es basa en el fet que, d'acord amb la definició de gelosia, cada barra que la constitueix ha d'estar a tracció o a contracció.¹⁷ D'aquesta manera, sobre cada barra només la magnitud d'una força és desconeguda. El node (pern o passador) és l'element que fa força sobre la barra i , pel principi d'acció-reacció, la barra fa una força d'igual magnitud sobre el pern. Per tant, si coneixem com actua la barra sobre el node, coneixerem la força sobre la barra. El mètode consta dels passos següents:

1. Identificar i caracteritzar els suports
2. DSL de la gelosia:
 - a. Dibuixar la gelosia lliure dels suports.
 - b. Explicitar al dibuix les reaccions en els suports.
3. Analitzar si la gelosia és rígida o no. Comprovar si és isostàtica.
4. Escriure les condicions d'equilibri del conjunt: identificar-ne les incògnites. Com que es tracta d'un sistema de tres equacions, sempre hi podem posar tres incògnites en funció de les altres.

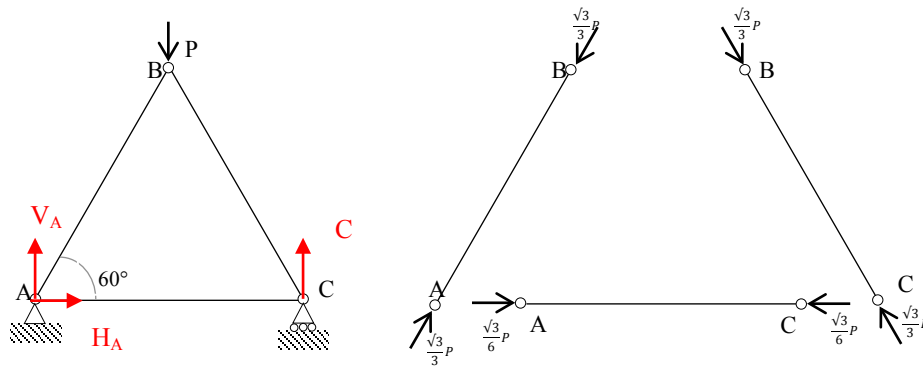
Pot ser que, fent servir alguna de les condicions d'equilibri, com ara prenent moments en un punt concret, poguéssim determinar completament alguna

reacció. En alguns casos en què la gelosia és un SR, això ens permetrà determinar completament les reaccions en els suports.

- Per determinar la resta de reaccions en els suports (si cal) i les forces internes, podem considerar, per exemple, cadascun dels pern/nodes que lliguen les barres. (Observeu que, alternativament, també podríem considerar altres parts internes de l'estructura.) Sobre ells, hi poden actuar forces externes a la gelosia i hi actuaran les forces que exerciran les barres a les quals el node lliga. L'equilibri del node, en l'aproximació en què és considerat un objecte bidimensional (PP), ens proporciona dues equacions (una per a les components horitzontals de les forces i una altra per a les verticals), amb les quals podem trobar fins a dues incògnites. D'aquesta manera, seleccionant adequadament els nodes que s'han d'anitzar, anirem trobant les incògnites que ens quedin per determinar i, en particular, les forces que s'exerceixen sobre cadascuna de les barres.
- Dibuixem la gelosia indicant les reaccions als suports i les forces sobre cada una de les barres. S'ha d'indicar clarament la magnitud de les forces i, per a cada barra, si es troba a compressió o a tracció.
- Podem fer servir els nodes i les equacions no utilitzats per comprovar que els resultats obtinguts són correctes.

Exemple. Considerem la gelosia de la figura 4.10a. Consta de tres barres unides per pernns formant un triangle equilàter. Per tant, és una gelosia rígida i isostàtica.

Fig. 4.10
 a) Gelosia rígida isostàtica amb les reaccions als suports en vermell.
 b) Solució al problema. Observeu que totes les barres treballen a compressió en aquest exemple

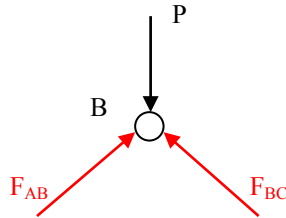


Per obtenir la reacció al suport C, és suficient prendre moments respecte de A. Així obtenim $C = P/2$. Com que les components verticals de les forces han de sumar zero a l'equilibri, tindrem que $V_A = P/2$. I, considerant els components horitzontals de les forces, tenim $H_A = 0$.

Analitzem ara els nodes (apartat e). Considerem, per exemple, el node B. Sobre ell, s'hi apliquen la força externa P i les forces que hi fan les barres AB i BC (i que han de tenir la direcció de les barres). Per tant, tenim:



Fig. 4.11

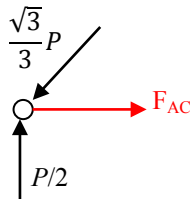


En aquest node, les dues incògnites es calculen fàcilment fent servir que l'equilibri del node implica que els components horitzontals de FAB i FBC han de ser iguals i, per tant, $F_{AB} = F_{BC}$. D'altra banda, que els components verticals de les forces sumin zero implica que $F_{AB} \cdot \sin 60^\circ + F_{BC} \cdot \sin 60^\circ - P = 0$. Amb això obtenim

$$F_{AB} = F_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} P.$$

A continuació, podem considerar el node A. L'equilibri de la barra AB ens diu que la força que fa la barra AB sobre ell és la que acabem de calcular. La força que fa la barra AC sobre ell és l'única incògnita ara. Les forces actuen sobre el node són:

Fig. 4.12

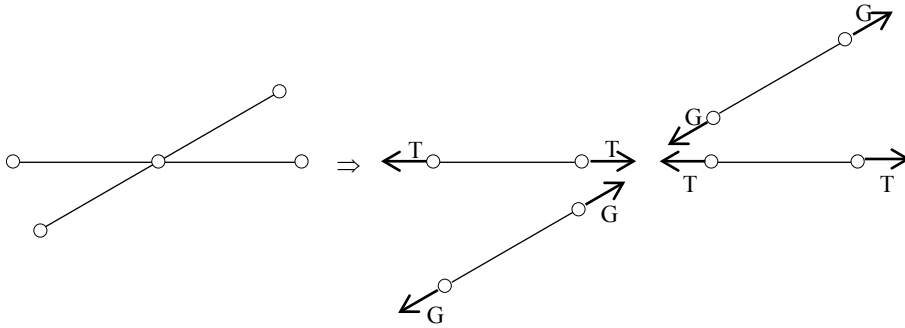


Si considerem que els components horitzontals de les forces han de sumar zero, obtenim directament $F_{AC} = \frac{\sqrt{3}}{6} P$. Per simetria, tindrem una situació equivalent al node C. Amb això ja tenim totes les forces sobre les barres. La solució final l'hem representada a la figura 4.10b.

4.4.1 Nodes sota condicions especials de càrrega

En alguns casos, que tractem a continuació, és possible extreure informació de les forces sobre una barra amb la observació simple d'un node al qual està subjecta. Per veure-ho, considerem el node central del dibuix de l'esquerra de la Fig. 4.13, al qual hi ha subjectes quatre barres.

Fig. 4.13

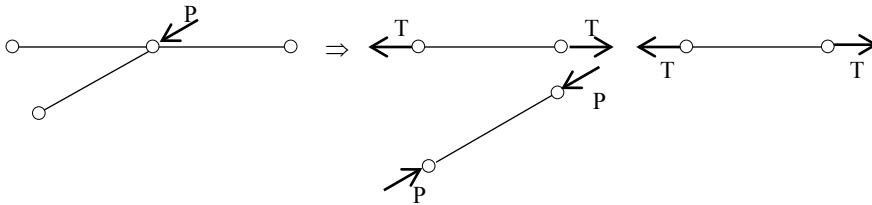


Les condicions de l'equilibri considerades sobre el node ens diuen que les forces en els elements oposats han de ser iguals.

Considerem ara que una de les barres és substituïda per una càrrega \mathbf{P} amb la direcció de la càrrega substituïda (v. Fig. 4.14). Llavors, la força sobre l'element orientat com a \mathbf{P} ha de tenir aquesta magnitud (v. barra inclinada a la dreta). D'altra banda, si \mathbf{P} no existeix ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$), no hi pot haver cap força sobre aquesta barra i, per tant, serà un **element a força zero**. En altres paraules, quan tres barres en una gelosia coincideixen amb un node (sobre el qual no actua cap altra força) i dues barres estan alineades, la barra que no estigui alineada es trobarà a força zero.

Fig. 4.14

En el cas dibuixat, sobre la barra inclinada, hi ha d'haver una força d'igual magnitud que la força externa aplicada. Si aquesta força externa no existeix, llavors la barra s'ha de trobar a força zero.



Si només tenim dues barres, l'equilibri del node ens diu: (i) si es troben alineades, hi ha la mateixa força sobre cadascuna d'elles (v. Fig. 4.15) i, (ii) si no es troben alineades, les dues barres s'han de trobar a força zero.

Fig. 4.15

Si sobre un node actuen només dues barres alineades, llavors sobre les dues hi ha una força de la mateixa magnitud

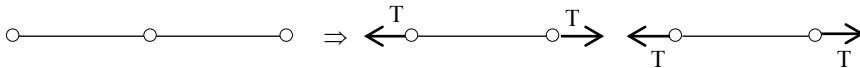
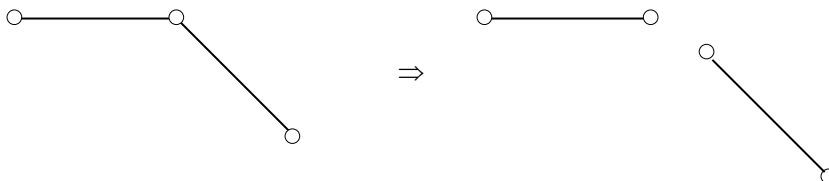


Fig. 4.16

Si sobre un node actuen només dues barres no alineades, llavors les dues s'han de trobar a la força zero (cfr. figura 4.11)





Una altra situació rellevant amb dues barres es produeix quan una barra i una força estan alineades i la segona barra no ho està. Considereu, per exemple, la figura 4.14 sense la barra horitzontal a la dreta. Llavors, la força sobre la barra alineada amb la força externa serà P i la barra no alineada s'haurà de trobar a força zero.

4.5 Tècnica de resolució de problemes per a carcasses (marcs, pòrtics, etc.) planes

Procedim seguint els passos que descrivim a continuació:

1. Identificar i caracteritzar els suports
2. DSL de l'estructura:
 - a. Dibuixar l'estructura lliure dels suports.
 - b. Explicitar al dibuix les reaccions en els suports i, en cas que alguna barra lligada a un suport només estigui sotmesa a forces a dos dels seus punts (una d'elles serà la reacció del suport), expressar que la reacció ha de tenir la direcció de la recta que uneix els dos punts d'aplicació de les dues forces.
3. Analitzar si l'estructura és rígida o no. Comprovar si és isostàtica.

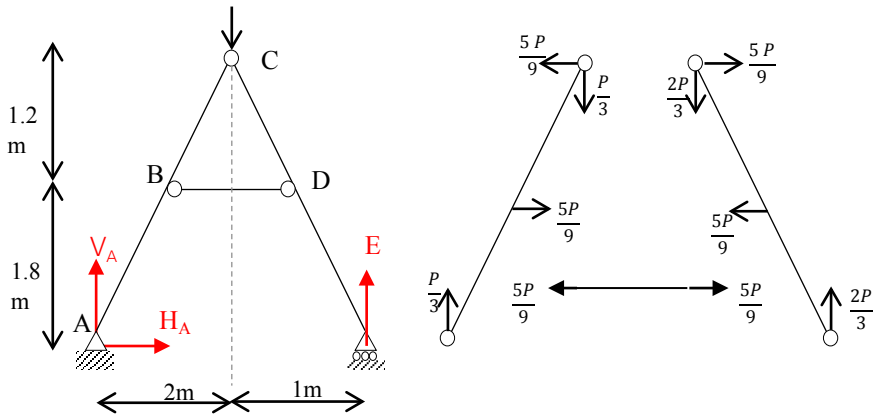
4.5.1 Si l'estructura és rígida (i isostàtica):

1. Sempre és possible determinar les reaccions als suports en imposar les condicions d'equilibri a l'estructura.
2. Un cop determinades les reaccions, desmembrar-ne l'estructura i dibuixar el DSR de cada barra tenint en compte:
 - a. Les reaccions en els suports (ja calculades).
 - b. Per a cada barra sotmesa exclusivament a forces a dos dels seus punts (si n'hi ha), explicitar que les forces totals als punts han de tenir, com a línia d'acció, la recta que uneix els punts. A més, les forces han de tenir el mateix mòdul i sentits oposats.
 - c. El principi d'acció i reacció a les articulacions entre barres.
3. Fet això, continuar aplicant les condicions d'equilibri a les altres barres (començant per alguna que tingui, com a màxim, tres incògnites) i acabar de resoldre el problema.

Exemple 1. El marc de la dreta de la figura 4.17 està format per tres barres articulades entre elles als punts B, C i D i és un marc rígid isostàtic. A la dreta, hem dibuixat la solució al problema de trobar les forces que estan actuant sobre cada barra. Vegem ara com l'hem obtinguda.

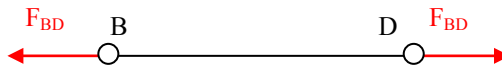


Fig. 4.17
A la dreta, un marc rígid isostàtic del que volen les forces que actuen sobre cadascun dels seus elements. A l'esquerra, el resultat obtingut pel procediment proposat. Observeu que cometem aquí un petit abús en dibuixar el marc amb les reaccions dels suports i els mateixos suports



- Hem dibuixat en vermell les forces desconegudes als suports. Podem trobar aquestes forces calculant moments respecte de A per tal d'obtenir $E = 2 P/3$. Perquè la suma de components verticals de les forces sigui zero, $V_A = P/3$ i, perquè la suma dels components horitzontals sigui zero, $H_A = 0$.
- Per trobar ara les forces sobre cadascuna de les barres que el componen, comencem per la barra més senzilla: BD. Com que està sotmesa a forces a dos dels seus punts, considerem que es troba a tracció.

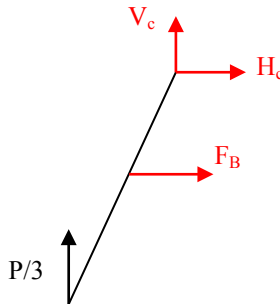
Fig. 4.18



Les equacions de l'equilibri aplicades a aquesta barra no ens en poden donar més informació.

- Considerem ara la barra ABC i les forces que actuen sobre ella.

Fig. 4.19



Observeu que estem considerant que el pes P extern s'aplica sobre la barra CDE i per això no el dibuixem. Veiem que tenim tres incògnites (en vermell) en aquesta barra. Si fem la suma de moments respecte del punt C, n'obtenim $F_{BD} = 5 P/9$. La suma de components horitzontals ens proporciona $H_C = -5 P/9$ i la de components verticals, $V_C = -P/3$.



Finalment, sobre la barra CDE ja no queda cap incògnita; per tant, podem fer-la servir per comprovar els resultats obtinguts. Aquests resultats han estat recollits gràficament a la dreta de la figura 4.17.

4.5.2 Si l'estructura és NO rígida (i isostàtica):

1. En aquest cas, **no** és possible determinar totes les reaccions en els suports en imposar les condicions d'equilibri a l'estructura: sempre hi haurà més de tres incògnites. Per tant, hem de buscar les equacions que ens manquen per tal de tenir un sistema compatible i determinat. (Tanmateix, a vegades serà possible trobar *algunes* de les reaccions als suports ja en aquest nivell.)
2. * En cas que l'estructura es pugui descompondre en dues parts, cadascuna d'elles rígida, articulades entre elles en un punt P, considerem una part amb suport bilateral o suport articulat. Podem afegir-hi una equació que vinculi únicament les forces de reacció al suport prenent moments de la part escollida respecte a P. Amb això tenim una nova equació, cosa que, juntament amb les condicions d'equilibri del conjunt, permetrà determinar completament les reaccions en els suports.
* En cas que l'estructura estigui formada per diversos SR lligats entre ells per articulacions de manera concatenada i lligats en els extrems a suports externs, el procediment es pot generalitzar prenent moments de forma consecutiva respecte a les diferents articulacions.
3. Per a cada barra sotmesa exclusivament a forces a dos dels seus punts (si n'hi ha), explicitar que les forces totals als punts han de tenir, com a línia d'acció, la recta que uneix els punts. A més, les forces han de tenir el mateix mòdul i sentits oposats.
4. Fet això, podem considerar la resta d'elements de l'estructura (començant per algun que tingui, com a màxim, tres incògnites) i acabar de resoldre el problema.

Exemple 2. El pòrtic de la figura 4.20 està format per tres barres articulades als punts A, C i F, i és no-rígid i isostàtic.

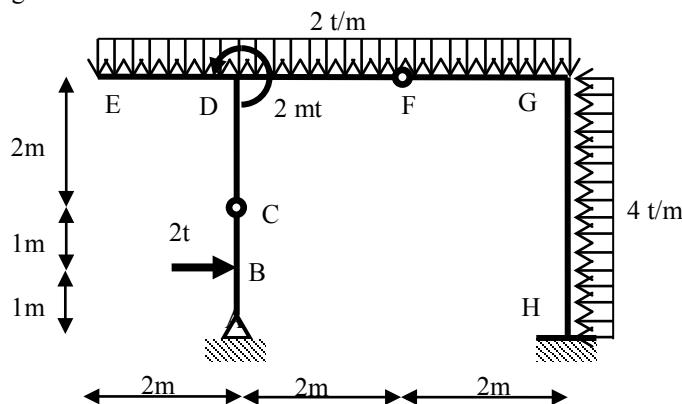
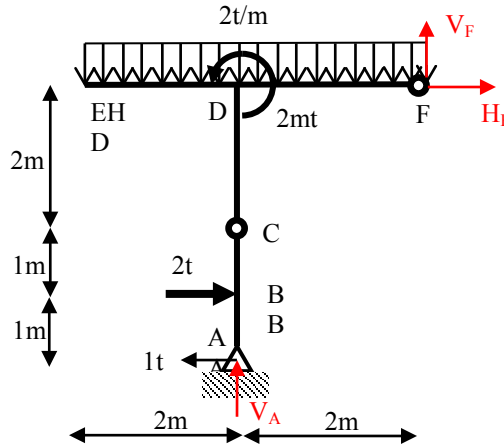


Fig. 4.20
Un exemple de marc no rigid isostàtic del que volen les forces que actuen sobre cadascun dels seus elements.

Per a aquest pòrtic no rígida, tenim cinc incògnites als suports: dues a l'articulació A i tres a l'encastament H. Per tal de trobar-les, considerem primer la barra ABC. Prenent moments respecte de C, trobem $H_A = -1$ t. Considerant ara el conjunt de l'estructura, com que els components horitzontals de les forces han de sumar zero, tindrem $H_H = 15$ t.

Si ara considerem el conjunt ABCDEF, format per dues barres, tenim el DSL següent:

Fig. 4.21

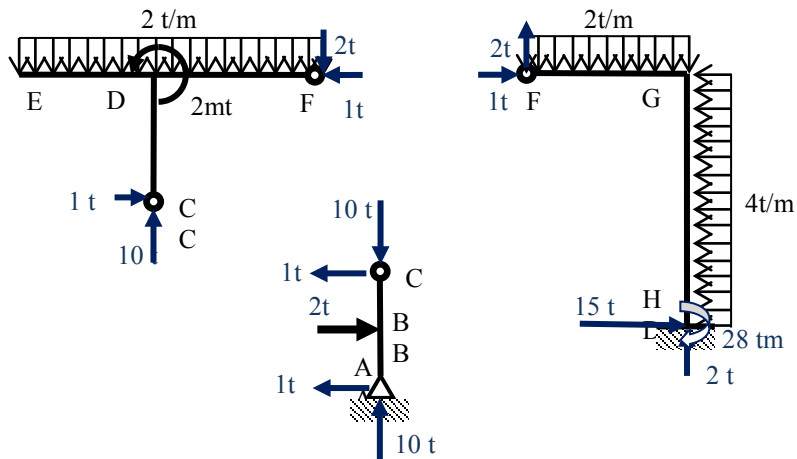


Que la suma de moments respecte a F sigui zero proporciona $V_A = 10$ t. (Noteu que, per fer aquest càlcul, és convenient substituir la força distribuïda entre E i F per una força concentrada equivalent de $4 \cdot 2 = 8$ t, aplicada a D).

Que la suma de forces verticals a tot el marc hagi de sumar zero ens proporciona $V_H = 2$ t. Finalment, fent la suma de moments des d'algun punt convenient, obtenim $M_H = -28$ t·m.

D'altra banda, l'equilibri de cada barra per separat ens proporciona directament els resultats que representem a continuació:

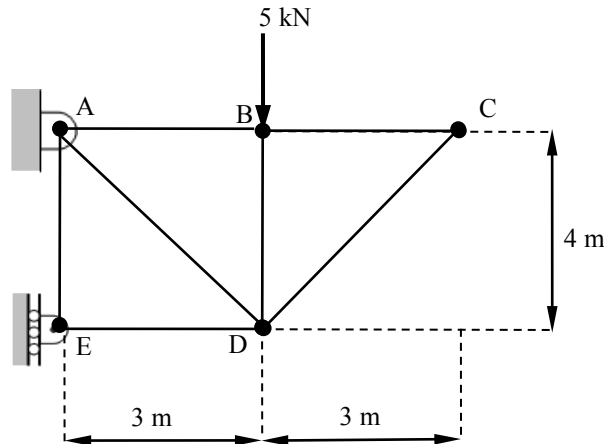
Fig. 4.22



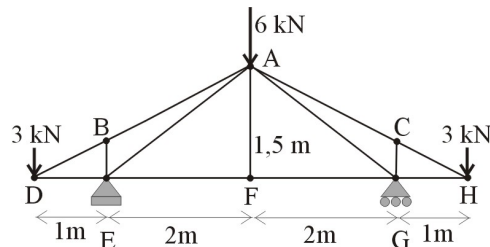


4.6 Problemas

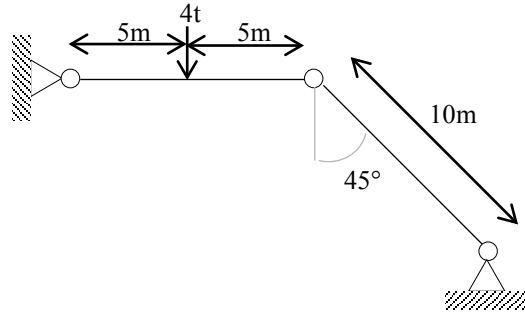
1. L'armadura de la figura està connectada a l'exterior amb una articulació a A i amb un recolzament que llisca a E i suporta una càrrega de 5 kN al punt B. Calculeu les forces a totes les barres de l'armadura i indiqueu si treballen a tracció o a compressió.



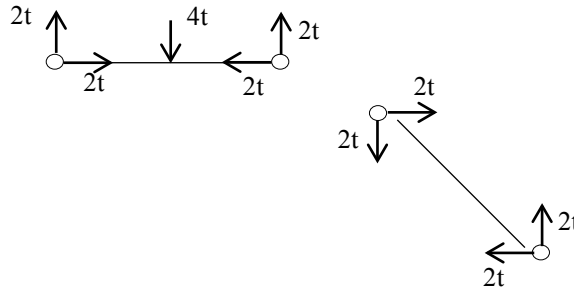
2. Per a l'armadura de la figura, calculeu:
 - a. Les reaccions externes
 - b. Les forces sobre cada una de les barres, indicant si treballen a compressió o a tracció



3. El marc de la figura consta de dues barres. El sistema es connecta a l'exterior mitjançant dues articulacions als extrems. Les barres es troben articulades entre elles. El pes de les barres i el fregament en les connexions es consideren negligibles.
 - a. Dibuixeu el diagrama de sòlid lliure de tot el sistema i calculeu-ne les reaccions exteriors.
 - b. Calculeu les forces que actuen sobre totes les barres.

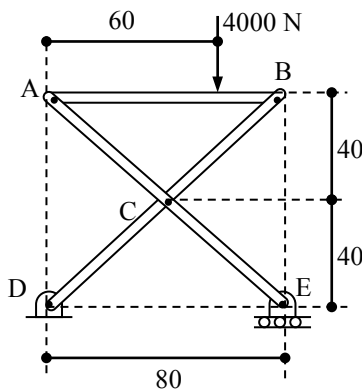


c. Comproveu que els resultats obtinguts es corresponen amb els següents:



4. L'estructura de la figura consta de les barres AB, ACE i BCD. El sistema es connecta a l'exterior mitjançant una articulació a D i un recolzament bilateral a E. Les barres s'articulen entre elles mitjançant passadors als punts A, B i C. A la barra AB, s'aplica una força vertical de 4.000 N. El pes de les barres i el fregament a les connexions es consideren negligibles. Les dimensions es donen en centímetres.

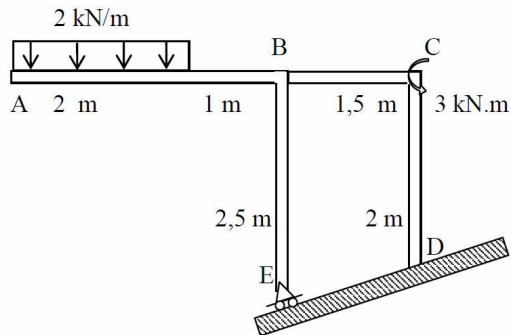
- a. Dibuixeu el diagrama de sòlid lliure de tot el sistema i calculeu-ne les reaccions exteriors.
- b. Calculeu les forces que actuen sobre totes les barres.
- c. Representeu els resultats sobre els diagrames de sòlid lliure de les tres barres.



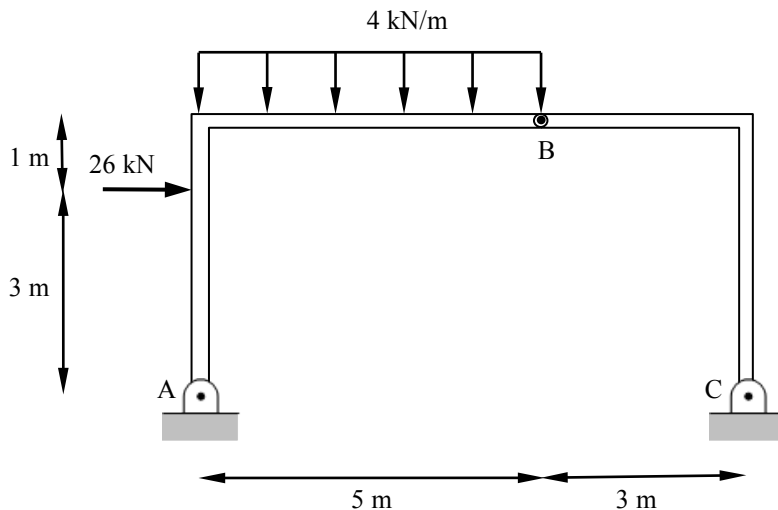


5. El pòrtic de la figura, els elements ABE i BCD estan articulats entre si al punt B. L'element ABE es recolza sobre el pla inclinat a E, mentre que a D hi ha un encastament.
- Determineu el valor de les reaccions a E i D.
 - Determineu totes les forces que actuen sobre els elements ABE i BCD.

Dibuixeu el diagrama de sòlid lliure de cada element



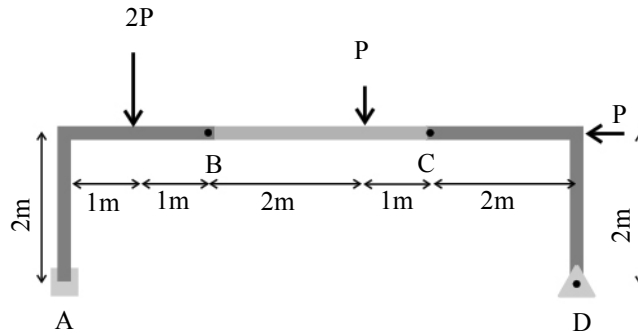
6. Determineu les reaccions exteriors en els suports A i C de l'estructura de la figura, així com les forces a l'articulació B. Dibuixeu el diagrama de sòlid lliure de les dues barres (AB i BC), representeu-hi les solucions i comproveu que les dues barres estan en equilibri.





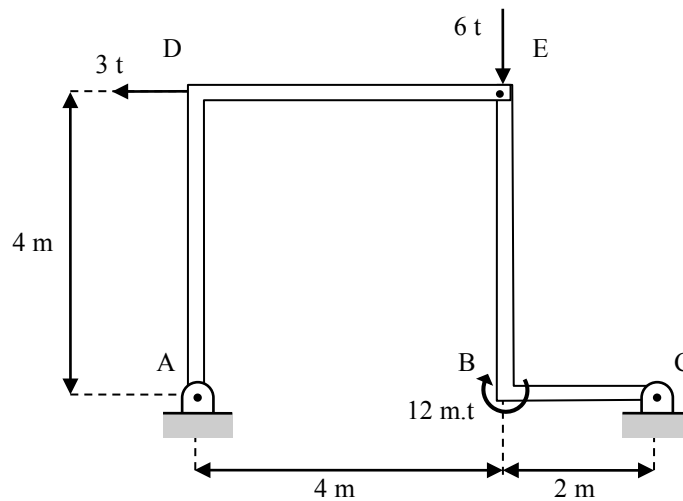
7. L'estructura de la figura consta de les barres AB , BC i CD . El sistema es connecta a l'exterior mitjançant un encastament a A i una articulació a D . Les barres s'articulen entre elles mitjançant passadors als punts B i C . El pes de les barres i el fregament a les connexions es consideren negligibles.

- a. Calculeu les forces que actuen sobre totes les barres.
- b. Representeu els resultats sobre els diagrames de sòlid lliure de cadascuna de les tres barres.



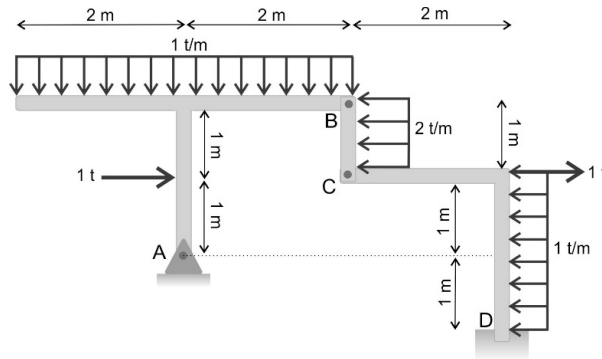
8. Dues barres ADE i EBC estan articulades a E i connectades a sengles suports articulats a A i C, tal com es mostra a la figura. Determineu:

- a. Les reaccions en els suports i
- b. les forces i moments a què estan sotmesos els trams AD, DE, EB i BC.

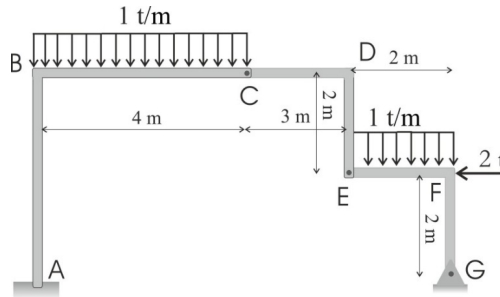




9. El pòrtic de la figura consta de tres elements, AB, BC i CD. Aquests elements es troben units entre ells per perns a B i a C. Respecte als suports, el pòrtic té una articulació a A i es troba encastat a D.
- Trobeu les reaccions als suports.
 - Trobeu les forces i els parells a què estan sotmesos cadascun dels elements. Feu un diagrama de sòlid lliure de cada element per separat.



10. El pòrtic de la figura consta de tres elements, ABC, CDE i EFG. Aquests elements es troben units entre ells per articulacions a C i E. Respecte als suports, el pòrtic es troba encastat a A i té una articulació a G.
- Trobeu les reaccions als suports.
 - Trobeu les forces i els parells (moments) a què estan sotmesos cadascun dels elements. Feu un diagrama de sòlid lliure de cada element per separat.



¹⁴ Observeu que estem deixant fora de l'estudi les anomenades "estructures crítiques", en què el sistema d'equacions que s'obté d'aplicar les condicions d'equilibri estàtic no són compatibles. Això pot ser degut tant a la naturalesa dels materials (elasticitat no lineal o plasticitat) com a una distribució peculiar dels elements de l'estructura (crítica per la forma).

¹⁵ Encara que no sempre.

¹⁶ Carcassa: en castellà, *armazón*, y en anglès, frame. En la pràctica arquitectònica, és més comú parlar de les seves tipologies estructurals: marc, pòrtic, etc.

¹⁷ Les gelosies es dissenyen per suportar forces molt superiors al pes de les barres; per tant, en els nostres càlculs, negligirem el pes de les barres.

→ 5



Bigues rectes.

Diagrames d'esforços tallants i moments flectors

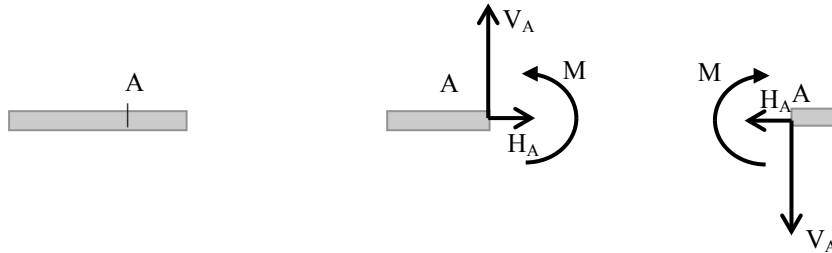
L'objectiu últim de l'estàtica aplicada a una estructura és determinar les relacions entre les forces que s'hi apliquen, les seves condicions de compatibilitat geomètrica i les relacions tensió-deformació que, en conjunt, finalment ens permetran escollir els materials i les dimensions més adients de cadascun dels seus elements. Per exemple, en el simple cas d'una biga recta isostàtica, donades les forces i els moments externs, podem calcular (com hem estudiat al capítol 3) les reaccions en els suports que la deixin en equilibri estàtic. Tanmateix, aquestes dades són insuficients per escollir la secció i els materials que necessitem per a la biga. Per a això, ens cal tenir informació sobre les forces i els moments a què està sotmès cada petit tros de la biga. En aquest capítol, veurem com podem obtenir la informació que necessitem per al cas de les bigues rectes i com podem codificar-la en els anomenats *diagrames d'esforços tallants* i *de moments flectors*.

5.1 Forces internes en una barra recta

Considerem una barra recta sobre un pla, sotmesa a forces concentrades o distribuïdes i, perpendiculars al pla, moments externs que actuen sobre la barra. A la Fig. 5.1, hem dibuixat exclusivament la barra –i no les forces i els moments externs. Escollim una secció recta A qualsevol (perpendicular a l'eix principal de la barra) i separem imaginàriament les dues parts de la barra que es generen. Que la barra es mantingui unida a A, malgrat les forces i els moments que puguin actuar sobre ella, ens indica que aquestes parts es fan forces d'acció i reacció distribuïdes sobre les dues seccions rectes que queden després de la separació. Un sistema estàticament equivalent a aquestes forces distribuïdes és, simplement, una força interna aplicada a A i un parell (o moment) intern M com els que hem representat a la dreta de la Fig. 5.1. La relació entre forces i moments interns al tros de l'esquerra i al de la dreta obeeix al principi d'acció i reacció. (Equivalentment, quan recomponem de nou la barra, les forces internes s'han de cancel·lar.)



Fig. 5.1
A l'esquerra, una barra sotmesa a forces i moments externs (no dibuixats). A la dreta, veiem la força total interna (separada en components horitzontal i vertical) i el parell intern a cada banda de la secció recta A.



Si a A s'apliquen una força externa F_E i/o un moment extern puntual M_E , per separar imaginàriament les parts, procedim de manera anàloga a la del paràgraf anterior. D'aquesta manera, obtenim les forces internes i els moments interns sobre cada part, com s'indica a les figures 5.2 i 5.3.

Fig. 5.2
Separació imaginària quan hi ha una força concentrada externa a A. L'elecció de posar la força externa a la part esquerra en separar és arbitrària

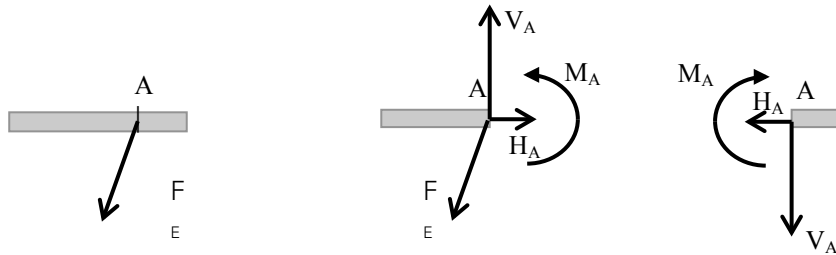
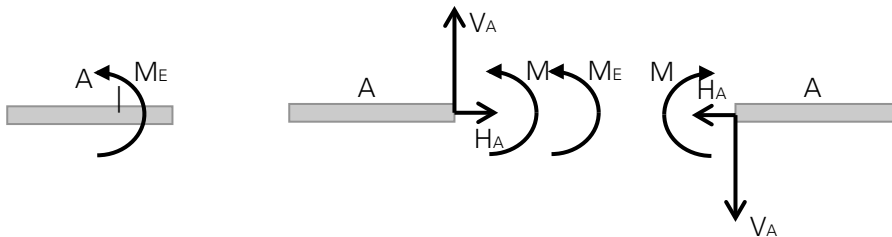


Fig. 5.3
Separació imaginària quan hi ha un parell a A. L'elecció de posar el moment extern a la part esquerra en separar és arbitrària



Les forces internes perpendiculars a la secció, les paral·leles a la secció i els moments interns que hem trobat ens serviran per definir (quasi directament) les anomenades *forces axials*, les *forces tallants* i els *moments flectors*, respectivament. Aquestes són les magnituds que realment es fan servir a la pràctica arquitectònica. A la secció següent, tractem les dues últimes.

5.2 Forces tallants i moments flectors a un tram simple

Considerem ara un cas particular de l'anterior en què la barra recta és sotmesa a forces concentrades o uniformement distribuïdes només *transversals*. Aquest és un cas habitual quan, per exemple, carreguem una biga.

Una barra com aquesta es pot descompondre (desmembrar o fracturar) en una sèrie de *trams simples*, i el cas més general és el que es representa a la Fig. 5.4. Així, diem que estem davant d'un tram simple de la barra si a l'interior del tram només s'hi aplica, com a molt, una força uniformement distribuïda w . D'altra banda, als extrems del tram



només s'hi aplica una força (amb component vertical F_I –a l'inici del tram– i F_F –al final) i un parell de moment N_I –a l'inici del tram– i N_F –al final.

Per tal d'obtenir les forces i els moments (F_I i F_F , N_I i N_F) als extrems de cada tram simple d'una barra, procedim com segueix:

1. Calculem les reaccions en els suports de tota la barra¹⁸ i
2. Calculem les forces i els moments als extrems de cada tram simple per mitjà:
 - a. de l'aplicació de les condicions d'equilibri a cada tram i
 - b. de l'aplicació del principi d'acció i reacció entre trams consecutius.

5.2.1 Càlcul de $V(x)$ i $M(x)$ al tram simple

A la Fig. 5.4.a, s'hi representa el diagrama de sòlid lliure d'un tram simple sotmès a un estat general de càrrega. Denotem amb L la longitud i fem servir, com abans, I i F per etiquetar les seccions rectes inicial i final del tram, respectivament. Com de costum, escollim els eixos X - Y tal com es mostra a la Fig. 5.4.

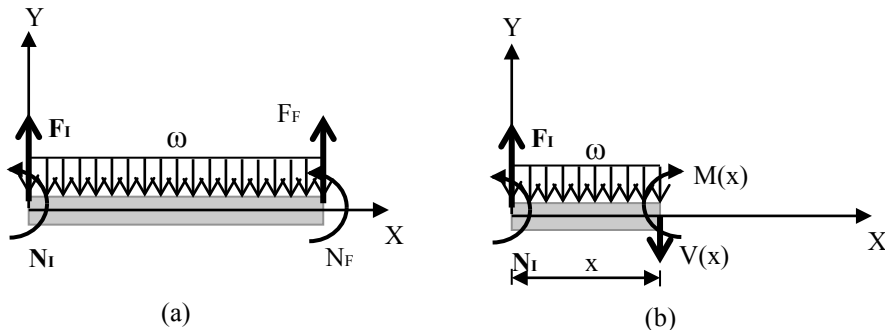


Fig. 5.4
A l'esquerra, se'n representa un tram simple. Pot ser tant un tros de la barra com la barra sencera.

Els valors F_I , F_F , N_I , N_F i w no són independents ja que han de complir les condicions d'equilibri:

$$0 = F_I + F_F - wL \quad (5.1)$$

$$0 = N_I + N_F + \frac{1}{2}wL^2 - F_I L \quad (5.2)$$

Les expressions anteriors ens permeten aïllar F_F i N_F , i n'obtenim:

$$F_F = wL - F_I \quad (5.3)$$

$$N_F = F_I L - N_I - \frac{1}{2}wL^2 \quad (5.4)$$

Tallem ara, imaginàriament, la barra esmentada per una secció perpendicular a la seva direcció principal a una distància x de l'origen de la barra ($x = 0$) i considerem la porció que conté l'extrem I . Definim (excepte per un signe, del qual parlem tot seguit) l'esforç tallant $V(x)$ i el moment flector $M(x)$ com la força i el moment necessaris per equilibrar aquest tros del tram, respectivament (v. Fig. 5.4.b).

Pel que fa al signe, fem servir el conveni de representació següent:

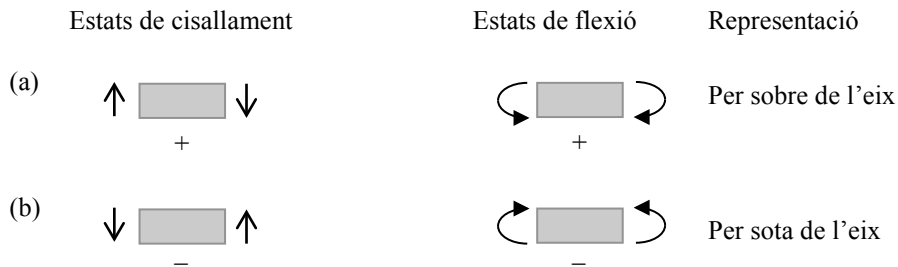
Representem $V(x)$ per sobre de l'eix de les abscisses si, en aquest tall $(0, x)$, el vector força apunta en el sentit negatiu de l'eix Y , i representem $M(x)$ per sobre de l'eix de les abscisses si el vector moment apunta en el sentit negatiu de l'eix Z .

Per exemple, a la Fig. 5.4.b, al punt x escollit representàriem tant $V(x)$ com $M(x)$ per sobre de l'eix.

En altres paraules, això vol dir que, si considerem el sistema de forces i moments que actuen sobre un element de la barra de longitud dx que es trobi a una distància x de l'extrem I , $V(x)$ es representarà per sobre de l'eix si el sistema de forces transversals, considerades independentment (sense tenir en compte els moments que s'hi puguin aplicar), produeix un gir de l'element de volum en el sentit de les agulles del rellotge (v. primer dibuix a la Fig. 5.5.a). Igualment, $M(x)$ es representarà per sobre de l'eix si el sistema de moments produeix compressió en les fibres inferiors d'aquest element de volum, i tracció en les superiors (v. segon dibuix a la Fig. 5.5.a).

La situació per a V i M , dibuixats per sota de l'eix, amb el conveni utilitzat, l'hem recollida a la figura 5.5.b.

Fig. 5.5
Estats de cisallament (1a columna) i de flexió (2a columna) possibles per a un element infinitesimal de barra.



Com hem vist per a tot el tram, i tenint en compte el nostre conveni, és fàcil veure que les equacions d'equilibri de la porció escollida (Fig. 5.4.b) ens proporcionen:

$$V(x) = -wx + F_I \quad (5.5)$$

$$M(x) = \frac{1}{2}wx^2 - F_I x + N_I \quad (5.6)$$



5.3 Propietats de $V(x)$ i $M(x)$

Valors als extrems del tram

Fent $x \rightarrow 0^+$ i $x \rightarrow L^-$ a les equacions (5.5) i (5.6), i considerant les relacions (5.1), (5.2), (5.3) i (5.4), s'obtenen els valors següents valors per a les forces tallants i els moments flectors als extrems del tram:

$$\begin{aligned} V(0)^+ &= +F_I \\ V(L)^- &= -F_F \\ M(0)^+ &= +N_I \\ M(L)^- &= -N_F \end{aligned} \quad (5.7)$$

on, per a qualsevol magnitud "U", $U(x_a)^\pm \equiv \lim_{x \rightarrow x_a^\pm} U(x)$.

Dependència en w del tipus de corba $V(x)$ i $M(x)$.

- Si $w = 0$, això implica que $V(x) = F_I$ és **constant** i $M(x) = F_I x - N_I$ tindrà com a gràfic un segment **recte**.
- Si $w = \text{constant} \neq 0$, llavors (5.6) ens indica que $V(x)$ tindrà com a gràfic un segment **recte**, mentre que, per a $M(x)$, serà una porció de **paràbola**. Aquesta porció de paràbola pot tenir llavors un extrem al tram. Com que $d^2M / dx^2 = w$, tindrem:
 - o Si $w > 0$ (el cas habitual) i existeix l'extrem, M tindrà un mínim en aquest punt.
 - o Si $w < 0$ i existeix l'extrem, M tindrà un màxim en aquest punt.

Relacions entre $V(x)$ i $M(x)$. Creixement i decreixement

Tenint en compte (5.5) i (5.6), és fàcil veure que es compleixen les relacions:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{dV(x)}{dx} \quad \text{i} \\ V(x) &= -\frac{dM(x)}{dx} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Per tant, tindrem:

$$V(x_0) > 0 \leftrightarrow M(x) \text{ decreixent en el punt } x_0$$

$$V(x_0) < 0 \leftrightarrow M(x) \text{ creixent en el punt } x_0$$



on x_0 és un punt del tram.

D'altra banda, per a $w > 0$, (5.8) implica que, si

$$V(x_{\min}) = 0 \quad (\Leftrightarrow x_{\min} = F_I/w)$$

al punt x_{\min} del tram, allí $M(x)$ tindrà un mínim de valor que denotarem:

$$M_{\min} = M[x = x_{\min}]$$

on $M(x)$ ve donada per (5.6).

Nota: Malgrat que les relacions (5.8) s'han obtingut per al cas específic en què la distribució de càrrega és constant, aquestes relacions són certes amb tota generalitat ($w(x) \neq \text{constant}$). Això es podria demostrar escollint un tros infinitesimal del tram sotmès a la distribució general de càrrega $w[x]$. Imposant les condicions d'equilibri sobre aquest tros, s'obtidrien directament les relacions esmentades.

5.4 Llei de les àrees per determinar $M(x)$ a partir de $V(x)$

Fent servir ara les relacions (5.5), (5.6) i (5.7), n'obtenim:

$$V(L)^- = V(0)^+ - wL \quad (5.9)$$

$$M(L)^- = M(0)^+ - A(V(x); 0, L) \quad (5.10)$$

on s'ha definit:

$$A(V(x); 0, L) = V(0)L - \frac{1}{2}wL^2$$

Observeu que:

- Si $w > 0$ (cas habitual), l'expressió wL a (5.9) és l'àrea compresa entre la corba $w(x)$ (= constant) i l'eix x , entre els punts $x = 0$ i $x = L$.
- El valor absolut de $A(V(x); 0, L)$ és l'àrea compresa entre la corba $V(x)$ i l'eix x , entre els punts $x = 0$ i $x = L$. Serà l'àrea quan V es trobi per sobre de l'eix x i serà menys l'àrea en cas contrari.¹⁹

Vegem ara com la relació (5.10) també es pot demostrar, de manera alternativa, integrant (5.8) entre $x = 0$ i $x = L$. (Això ens permetrà entendre fàcilment per què hem obtingut relacions amb “àrees” i obtenir relacions generals - $w \neq \text{constant}$.) Procedint de la manera indicada, amb la primera equació de (5.8), obtenim:

$$V(L)^- - V(0)^+ = - \int_0^L w(x) dx \quad (5.11)$$

on, per a $w(x) > 0$, el segon membre de la igualtat és l'àrea compresa sota la corba $w(x)$ entre I i F, canviada de signe.²⁰ Observeu que (5.11) té, com a cas particular,



(5.9) quan w és constant. Procedint d'igual manera amb la segona equació de (5.8), obtenim:

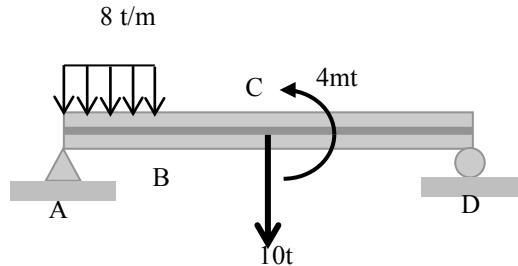
$$M(L)^- - M(0)^+ = - \int_0^L V(x) dx \quad (5.12)$$

Observeu que l'expressió (5.12) té, com a cas particular, (5.10) quan w és constant. Per tant, recalquem que (5.11) i (5.12) són expressions totalment generals, mentre que les expressions (5.9) i (5.10) són només casos particulars.

5.5 Tractament de la barra recta amb els seus trams

Considerem, com a representant d'aquest cas general, la barra de la figura.

Fig. 5.6



D'acord amb els criteris anteriors, aquesta barra contindria tres trams simples: AB, BC i CD. Per raons de simplicitat, considerem un únic eix X amb origen al punt A i orientat cap a la dreta. Així, ara les funcions $V(x)$ i $M(x)$ representen l'esforç tallant i el moment flector al llarg de la barra, respectivament. Com que ja sabem com trobar aquestes funcions a cada tram, ens preocuparem ara per la connexió de les funcions entre trams.

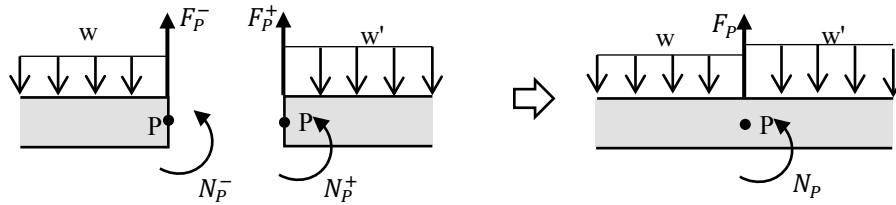
5.5.1 Discontinuitats de $V(x)$ i $M(x)$ en una barra recta formada per diversos trams

Ens centrem ara en un punt P que es troba al final d'un tram i al principi del següent (igual com, a la figura anterior, el punt C és al final del segon tram i al principi del tercer). Siguin:

- F_P^- , el valor de la força vertical al final del tram que acaba al punt P ;
- F_P^+ , el valor de la força a l'inici del tram següent;
- N_P^- , el valor del moment al final del tram que acaba al punt P , i
- N_P^+ , el valor del moment a l'inici del tram següent.

Si, justament al punt P , s'hi apliquen la força externa vertical F_P i el moment extern N_P –sense superíndex (v. Fig. 5.7)–, llavors les condicions d'equilibri que s'apliquen a un tram infinitesimal al voltant de P :

Fig. 5.7



ens diuen que s'ha de complir:

$$F_P^- + F_P^+ = F_P \quad (5.13)$$

$$N_P^- + N_P^+ = N_P \quad (5.14)$$

Fent servir les relacions (5.7), obtenim:

$$V(x_P)^+ - V(x_P)^- = F_P \leftrightarrow V(x_P)^+ = V(x_P)^- + F_P,$$

$$M(x_P)^+ - M(x_P)^- = N_P \leftrightarrow M(x_P)^+ = M(x_P)^- + N_P,$$

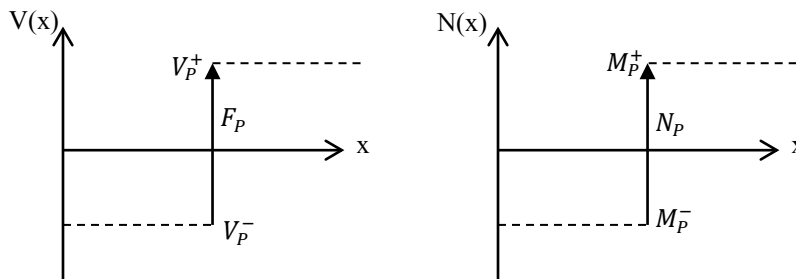
on $V(x_P)^-$, $V(x_P)^+$, $M(x_P)^-$, $M(x_P)^+$ són els valors de $V(x)$ i $M(x)$ just abans i just després del punt P . Simplificant la notació, podem escriure:

$$V_P^+ = V_P^- + F_P \quad (5.15)$$

$$M_P^+ = M_P^- + N_P \quad (5.16)$$

Per tant, com es mostra a la figura 5.8, la força concentrada a P provoca una discontinuïtat de salt a la funció de forces tallants de magnitud F_P , mentre que el moment extern a P provoca una discontinuïtat de salt a la funció de moments flectors de magnitud N_P .

Fig. 5.8
Discontinuitats de salt
creades per les forces
concentrades i els moments
externs sobre la barra.





5.6 Procediment general per a obtenir els diagrames d'esforços tallant i moments flectors

El nostre objectiu ara és dibuixar, de manera específica i aproximada, les funcions $V(x)$ i $M(x)$ en els anomenats diagrames d'esforços tallants i moments flectors. Aquests diagrames es poden obtenir fent servir les propietats que hem anat mostrant fins ara. Per fer-ho, una vegada tenim les reaccions als suports d'una barra general amb trams identificats pels punts A, B, C..., procedim com segueix:

1. Determinem els valors V_A^+ i M_A^+ al començament del primer tram fent servir les relacions (5.7):

$$V_A^+ = F_A \quad (5.17)$$

$$M_A^+ = N_A \quad (5.18)$$

2. Determinarem els valors de V_B^- i M_B^- al primer tram utilitzant les relacions (5.7) i la llei de les àrees:

$$V_B^- = V_A^+ - w_1 L_1 \quad (5.19)$$

$$M_B^- = M_A^+ - A(V(x); x_A, x_B) \quad (5.20)$$

3. Dibuem $V(x)$ per al tram AB. A continuació, ajudant-nos de les àrees del dibuix anterior, dibuem $M(x)$ per al tram AB.

En aquest procés, hem de tenir en compte que la forma de les corbes queda determinada per les relacions (5.5) i (5.6). D'aquesta manera, quan $w = 0$, les corbes d'esforços tallants i de moments flectors són segments de rectes. D'altra banda, si $w > 0$, la corba de moments flectors és un tros de paràbola amb la convexitat en la direcció positiva de l'eix on representem M .

També hem de tenir en compte que si, en un punt x_0 d'un tram determinat, sabem que $V(x_0) = 0$, llavors determinarem fàcilment la posició x_0 en la qual això passa a partir de $V(x) = V_I - wx = 0$, que ens porta a $x_0 = V_I / w$. Com hem vist abans, per a $w > 0$, aquesta serà la posició del mínim de $M(x)$. El valor de $M(x)$ en aquest mínim es pot determinar mitjançant la llei de les àrees.

1. Si hi ha una força externa concentrada F_B o un moment extern N_B al punt B, hem de considerar les possibles discontinuïtats:

$$V_B^+ = V_B^- + F_B \quad (5.21)$$

$$M_B^+ = M_B^- + N_B \quad (5.22)$$

que ens permetran calcular tallants i flectors al començament del segon tram.

2. I així successivament per a la resta de trams BC, CD...



Cal subratllar que, si la barra és formada per dues o més bigues articulades i alineades, l'estratègia emprada sempre es pot fer servir i s'obté que als punts on hi ha les articulacions $M(x) = 0$.

Exemple 1

Considerem com a primer exemple la barra doblement recolzada que apareixia a la Fig. 5.6 amb les mides següents: $AB = BC = 1\text{ m}$ i $CD = 2\text{ m}$. Determineu els diagrames de forces tallants i de moments flectors.

Procedirem com hem explicat més amunt.

- Calculem les reaccions en els suports. En aquest cas, prenen els valors $F_A = 13t$ i $F_D = 5t$.
- Com es veu, la biga és formada per tres trams simples: AB , BC i CD . Primer calculem els valors de $V(x)$ i $M(x)$ als extrems de cada tram:²¹

	V	$A(V(x); 0, L)$	M
Punt A	$V_A^+ = F_A = 13t$		$M_A^+ = N_A = 0$
Tram AB	$V_B^- = V_A^+ - L_{AB}w_{AB} = 5t$	$A_{AB} = +9mt$	$M_B^- = M_A^+ - A_{AB} = -9mt$
Punt B	$V_B^+ = V_B^- + F_B = 5t$		$M_B^+ = M_B^- + N_B = -9mt$
Tram BC	$V_C^- = V_B^+ - L_{BC}w_{BC} = 5t$	$A_{BC} = +5mt$	$M_C^- = M_B^+ - A_{BC} = -14mt$
Punt C	$V_C^+ = V_C^- + F_C = -5t$		$M_C^+ = M_C^- + N_C = -10mt$
Tram CD	$V_D^- = V_C^+ - L_{CD}w_{CD} = -5t$	$A_{CD} = -10mt$	$M_D^- = M_C^+ - A_{CD} = 0$

- Dibuixem els diagrames (aproximat) de tallants i flectors del conjunt (v. Fig. 5.9). En aquest cas, $V(x)$ a cada tram és sempre diferent de zero.

Finalment, a la segona gràfica de la figura 5.9 es pot veure que el diagrama de flectors recorda vagament (i exageradament) la deformació que s'intueix que tindria la biga sota l'acció de les forces i els moments externs donats. Aquest és un resultat que s'obté habitualment i que, al capítol 8, descobrirem d'on ve.

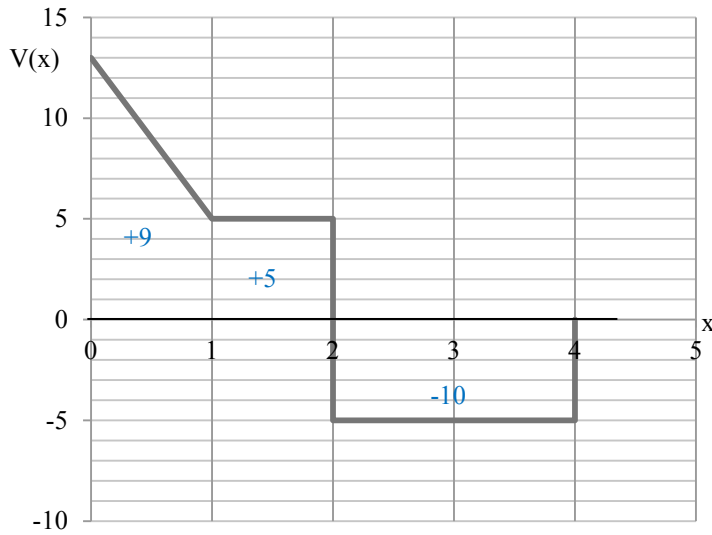
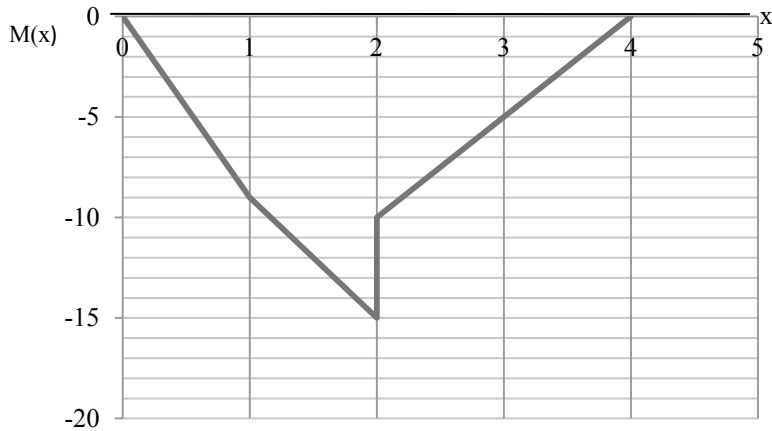


Fig. 5.9

A la gràfica superior, els tallants de la biga de l'exemple 1, en què s'han indicat les àrees en blau. A la inferior, els moments flectors corresponents. Per a aquest gràfic, entre $x = 0$ i $x = 1$ hi ha un arc de paràbola

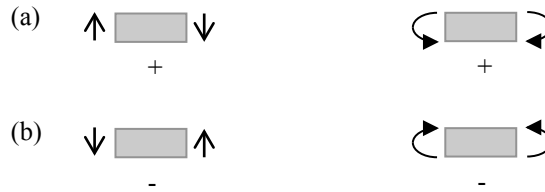


5.6.1 Explicitació dels convenis de signes

Tal com s'han representat, els diagrames de la Fig. 5.9 no donen tota la informació a qui els observa, atès que no s'ha donat a conèixer el conveni de signes que s'ha fet servir per representar-los. Històricament, aquesta dificultat va quedar resolta dibuixant sobre el diagrama de tallants, per a cada tram, l'estat de cisallament de cada element de longitud dx , i dibuixant sobre el diagrama de moments flectors, per a cada tram, l'estat de flexió de cada element de longitud dx . Així, seguint el conveni que hem explicitat en aquest llibre, per a cada tram, inclouríem els dibuixos (o etiquetes) de la Fig. 5.10 (a) per al cas de tallants i flectors dibuixats per sobre de l'eix X (+), respectivament, o de la Fig. 5.10 (b) per als dibuixats per sota de l'eix X (-).



Fig. 5.10

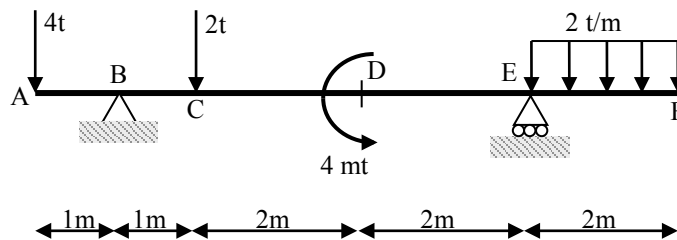


Proporcionem ara un segon exemple per explicitar aquesta simbologia.

Exemple 2

Repetim ara el procés amb la biga de la Fig. 5.11.

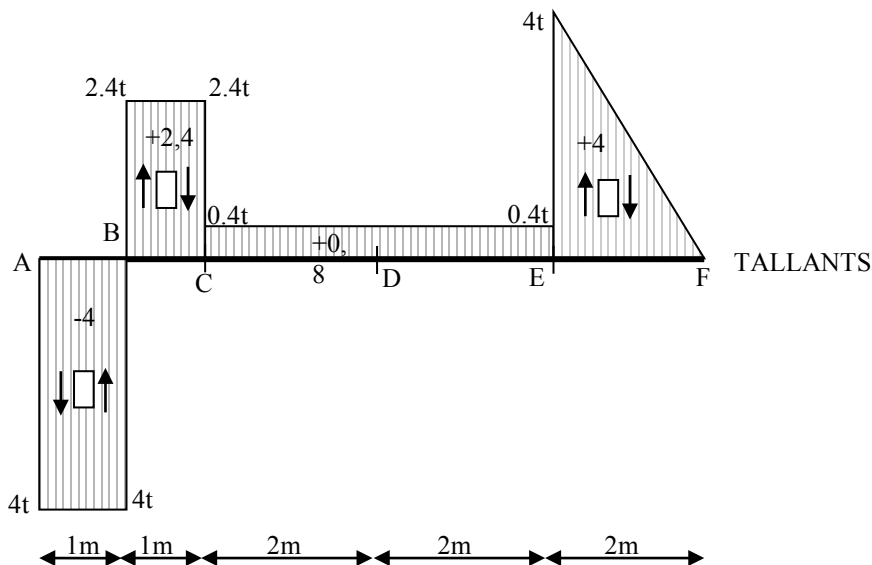
Fig. 5.11

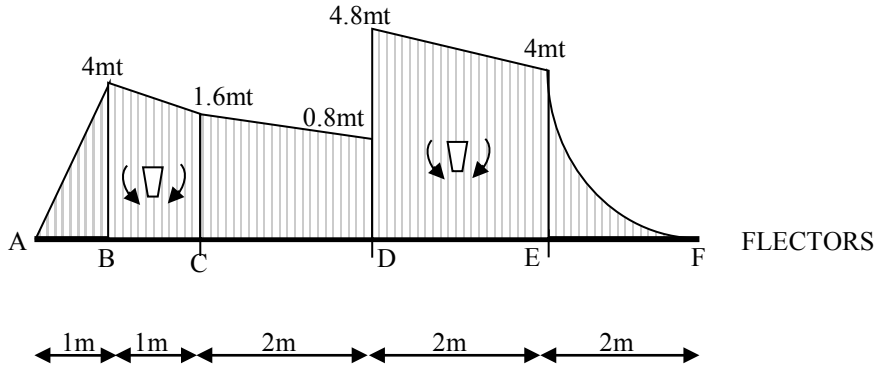


Els diagrames de tallants i flectors que se n'obtenen s'han recollit a la Fig. 5.12 Ara, a més, es mostra de manera inequívoca l'estat de cisallament o flexió a cada tram (i, per tant, indiquem quin és el conveni de signes que hem fet servir per dibuixar-los).

Finalment diem que, de fet, no importa gaire si dibuixem els diagrames d'una manera determinada o la simètrica especular respecte a l'eix X de la barra, sempre que posem l'etiqueta correctament. El diagrama ens dona el valor absolut de l'esforç/moment i l'etiqueta acaba de determinar completament com està aplicat.

Fig. 5.12





5.7 Dibuix "aproximat" del diagrama de moments flectors sense fer abans el d'esforços tallants

Considerem un altre cop l'exemple de la Fig. 5.6 amb les mides $AB = BC = 1\text{ m}$ i $CD = 2\text{ m}$ i que, com ja vam veure, té el diagrama de moments flectors representat al segon diagrama de la Fig. 5.12. Com hem vist, si al tram d'estudi:

- a. No s'hi aplica força uniformement distribuïda, el diagrama de moments flectors del tram és una recta. Per tant, coneixent els valors del moment flector als punts inicial i final del tram, en podem dibuixar el diagrama a tot el tram.

Si hi ha una força uniformement distribuïda, el diagrama de moments del tram és un tros de paràbola "penjada" dels valors inicials i finals del moment flector en el tram. Hi haurà un mínim en un punt x_{\min} del tram ($0 \leq x_{\min} \leq L_{AB}$) si el tallant en aquest punt és zero, és a dir, si $0 = F_1 - w x_{\min}$. Per tant, la condició d'existència d'aquest mínim serà:

$$0 \leq x_{\min} = F_1/w \leq L_{AB}$$

Per tant, per dibuixar aproximadament el diagrama de moments flectors, la clau és trobar els moments als extrems de cada tram. Així, en el problema de la Fig. 5.6, només cal que determinem els valors de M_A^+ , M_B^- , M_B^+ , M_C^- , M_C^+ , M_D^- . En aquest cas, el procés seria com segueix:

1. Directament de (5.7), $M_A^+ = 0$.
2. Considerem el DSL del tram AB^- (per a això, hem de tenir en compte les reaccions als suports) i prenem moments respecte del punt B^- . Llavors:

$$-13 \text{ t } 1 \text{ m} + 8 \text{ t } 0,5 \text{ m} - M_B^- = 0$$

Per tant, $M_B^- = -9 \text{ mt}$.

3. Com que no hi ha un parell extern a B, la funció serà continua en aquest punt i tindrem $M_B^+ = M_B^- = -9 \text{ mt}$.



4. Considerarem ara el DSL del tram mixt ABC. Considerant la força i el moment externs a C com a aplicats a C⁺D i prenent moments respecte de C, obtenim:

$$-13 \text{ t} \cdot 2 \text{ m} + 8 \text{ t} \cdot 1,5 \text{ m} - M_C^- = 0$$

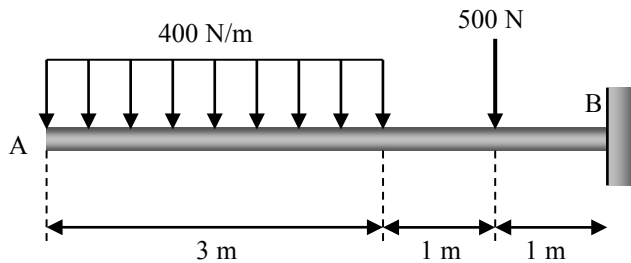
Així, $M_C^- = -14 \text{ mt}$

5. Per tal d'obtenir el moment M_C^+ a l'inici de l'últim tram, hem de tenir en compte que el moment extern causarà un salt segons (5.16). Llavors, tindrem $M_C^+ = M_C^- + N = -10 \text{ mt}$.
6. Directament de (5.7), tenim $M_D^- = 0$.

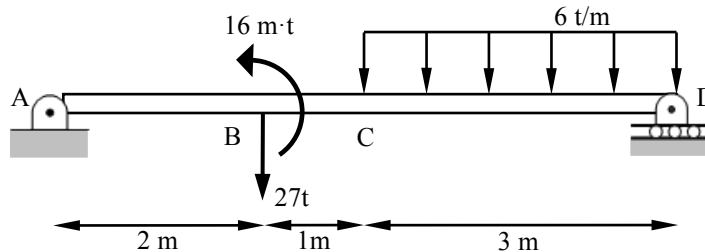
És fàcil de veure que, amb aquests valors, podrem dibuixar aproximadament el diagrama de moments flectors que ja havíem trobat a la Fig. 5.12.

5.8 Problemes

1. Donada la biga de la figura:
- Calculeu les reaccions a l'encastament B.
 - Calculeu i representeu els diagrames de força tallant i moment flector al llarg de la biga.

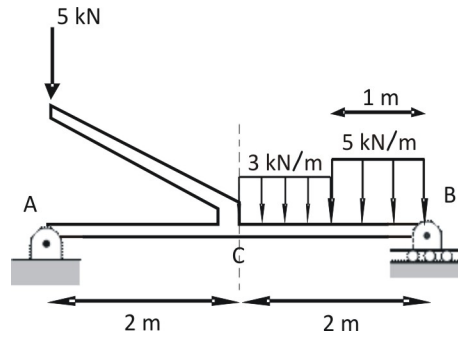


2. Representeu gràficament la força tallant $V(x)$ i el moment flector $M(x)$ al llarg de la biga de la figura, i doneu-ne els valors als punts A, B, C i D. Escriviu les equacions de $V(x)$ i $M(x)$.



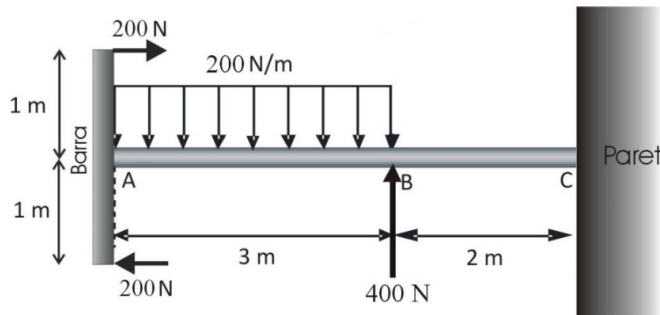


3. Feu els diagrames de tallants i flectors de la biga recta ACB.



4. Feu els diagrames de tallants i flectors per a la biga recta ABC.

L'únic suport de la biga consisteix en un encastament a una paret al punt C. La biga té una càrrega vertical concentrada al punt B i una càrrega uniformement distribuïda entre A i B. A més, té una barra vertical enganxada al punt A sobre la qual actuen forces externes horitzontals de 200 N als extrems en els sentits que es mostren al dibuix.



¹⁸ Cosa que sempre serà factible, atès que considerem només casos isostàtics.

¹⁹ Com es pot comprovar integrant $V(x)$ entre $x = 0$ i $x = L$.

²⁰ Estem considerant el cas habitual de càrregues distribuïdes apuntant en el sentit de y decreixents ($w(x) > 0$). En cas contrari, el segon membre seria directament l'àrea.

²¹ Per comoditat, aquí enumerem tots els resultats analítics abans de fer cap dibuix. Tanmateix, recomanem al lector que vagi dibuixant a mesura que avanci tram per tram.

→ 6



Diagrames de pòrtics isostàtics bidimensionals

Al capítol 4, hem estudiat la relació entre les càrregues que suporta un pòrtic isostàtic i les reaccions als seus suports, a més d'estudiar les forces i els moments externs a què està sotmès cada element que compon el pòrtic. En aquest capítol, intentarem conèixer les forces i els moments *interns* a què estan sotmesos cadascun dels elements. Només ens centrarem (semblantment a com hom hem fet en el cas de les bigues rectes) en les forces i els moments interns sobre les diferents *llesques* (seccions rectes perpendiculars a l'eix de cada element) que conformen el pòrtic. L'objectiu final serà representar els resultats sobre diagrames d'esforços axials, esforços tallants i moments flectors. Això ens permetrà, a posteriori, dimensionar el pòrtic adequadament i seleccionar els diferents materials de què voldrem que estigui constituït.

6.1 Forces axials

La representació del diagrama d'axials és una novetat en aquest capítol (atès que les forces axials són nul·les per a les bigues amb càrregues transversals que s'han tractat al capítol anterior). Donada una secció recta d'una barra, anomenem (excepte per un signe) *força axial* $F(x)$ la magnitud de la força interna perpendicular a la secció. El conveni de signes que farem servir per completar la definició de força axial és el següent: si en separar imaginàriament la barra per la seva secció recta, la força interna perpendicular es dirigeix cap enfora de les parts, diem que la força axial és positiva.

Si considerem el sistema de forces que actuen sobre un element de barra de longitud dx , que es troba a una distància x de l'extrem I , $F(x)$ serà positiu si el sistema de forces perpendiculars a la secció (considerades independentment) produeix una tracció de l'element. Al contrari, serà negatiu si el sistema de forces produeix una compressió de l'element.



6.2 Esquema general de resolució i exemples

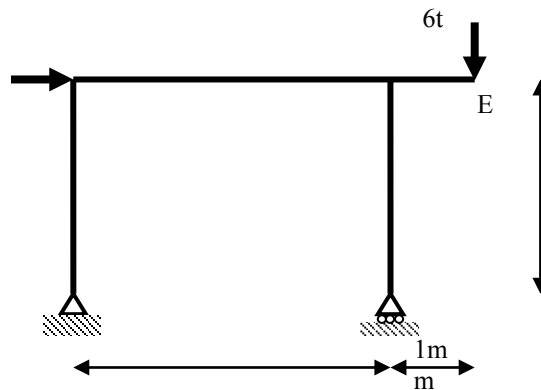
Per dur a terme aquesta tasca, seguirem aquest esquema general:

- Primer calculem les *reaccions en els suports*,
- Tot seguit, *descomponem el pòrtic en barres rectes* i
- finalment, calculem els valors més significatius dels *esforços axials*, els *esforços tallants* i els *moments flectors*, i en dibuixem els diagrames corresponents.

Ho exemplifiquem ara aquest esquema, fent servir un parell de pòrtics. Comencem amb el pòrtic de la figura 6.1.

Exemple 1

Fig. 6.1



- Reaccions als suports.** Com sabem, per estudiar les reaccions als suports dels pòrtics, hem de diferenciar dos casos: els pòrtics que es comporten com a sòlids rígids (en separar-los dels suports externs) i els que no tenen aquesta propietat.

L'exemple 1 de la figura 6.1 és un cas de pòrtic pla que es comporta com un sòlid rígid en què la barra BCE és soldada a la AB a B i a la CD a C. Les reaccions als suports A i D s'obtenen directament i s'han indicat a la figura 6.2.

- Descomposició del pòrtic en barres rectes.** El pòrtic consta de les barres rectes AB, BCE i CD. Les condicions d'equilibri de cada barra ens proporcionen tres condicions, que determinen el conjunt de forces i moments que l'equilibren (v. Fig. 6 2).
- Diagrames d'esforços axials, tallants i moments flectors.** Apliquem el que hem après per a les barres rectes en la confecció dels diagrames de tallants i flectors, i representem tots els resultats sobre el croquis del pòrtic. La diferència principal amb el cas de les "bigues rectes" és que ara tenim també



barres verticals (“pilars”). D’aquesta manera, representem els diagrames corresponents a aquestes barres verticals girats (\pm) 90 graus respecte als que fem per a les horitzontals. Més concretament, per conveni, escollirem la part positiva dels diagrames cap enfora del pòrtic (v. Fig. 6.3).

La representació del diagrama d’axials sobre el croquis del pòrtic no suposa cap dificultat ja que, partint de la descomposició del pòrtic en barres rectes (v. Fig. 6.2 per al cas que estem tractant), només haurem de representar la magnitud de les forces axials (és a dir, que segueixen la direcció axial de la barra). Vegeu el primer diagrama de la figura 6.3 amb els símbols corresponents a tracció i compressió.

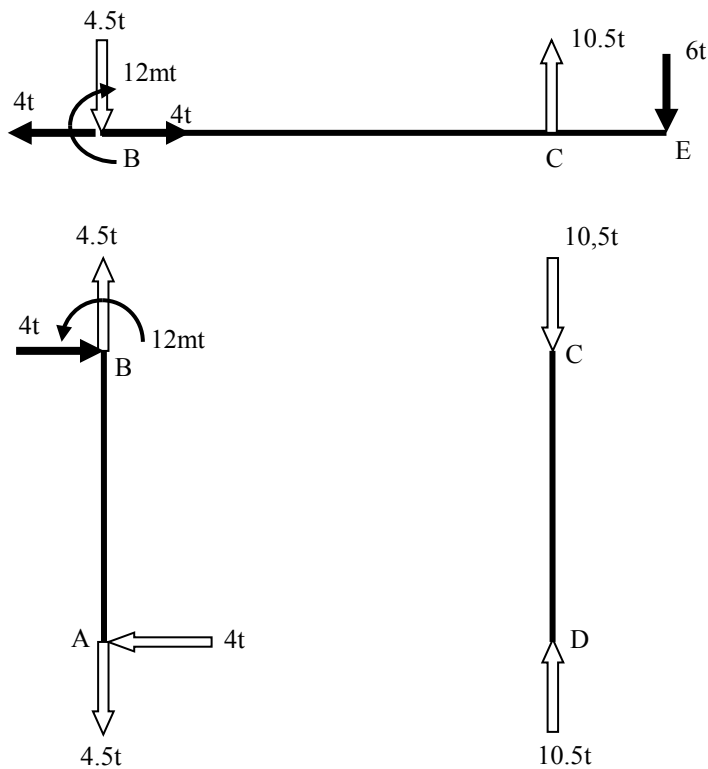
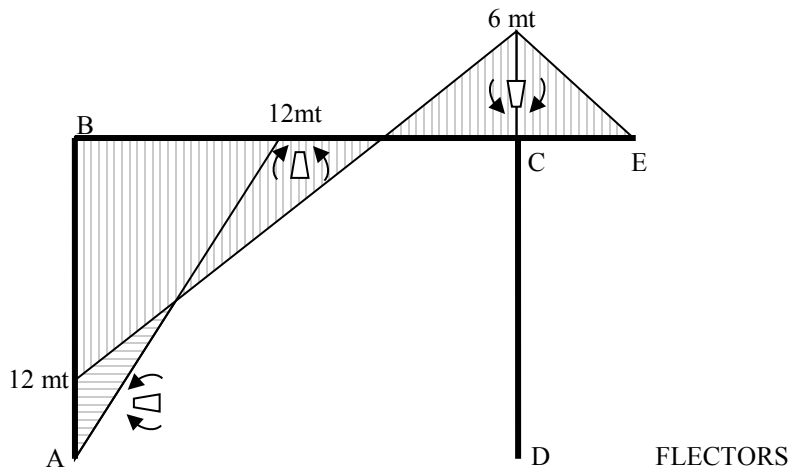
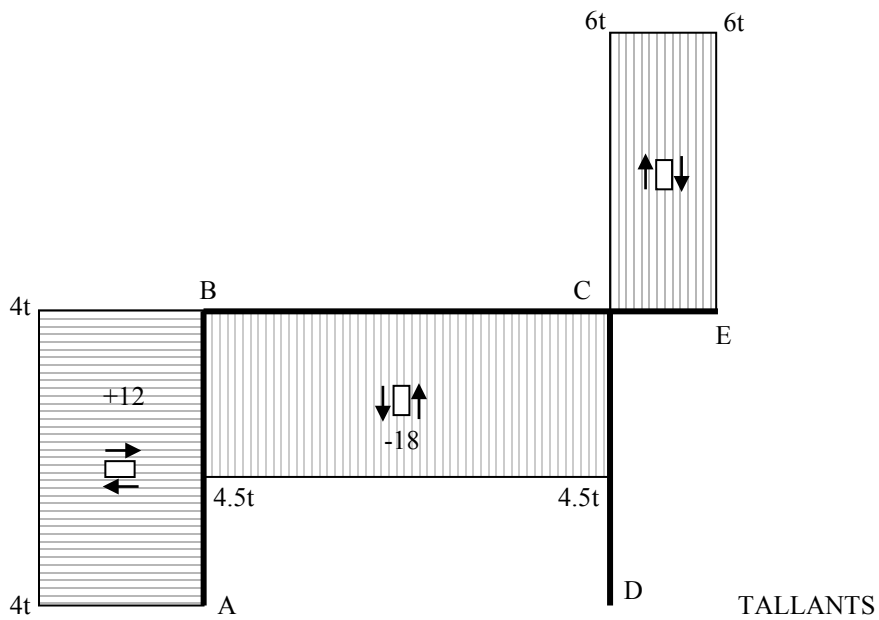
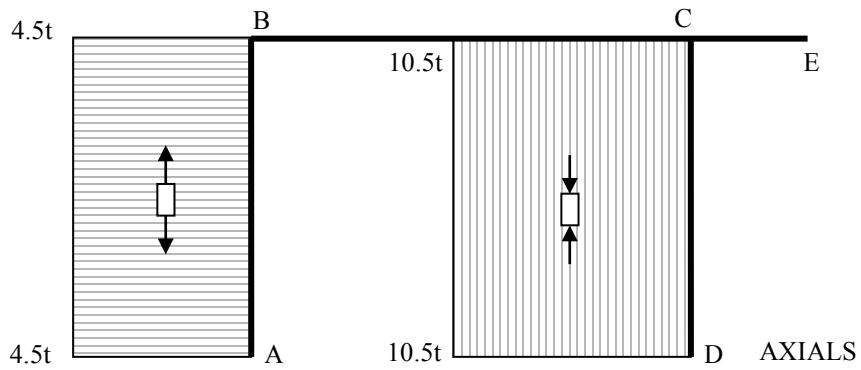


Fig. 6.2



Fig. 6.3





Exemple 2

A la Fig. 6.4, mostrem un exemple que ja hem vist al capítol 4 d'un pòrtic que *no es comporta com un sòlid rígid*. El pòrtic està format per tres barres, ABC, CEDF i FGH, articulades entre si a C i F.

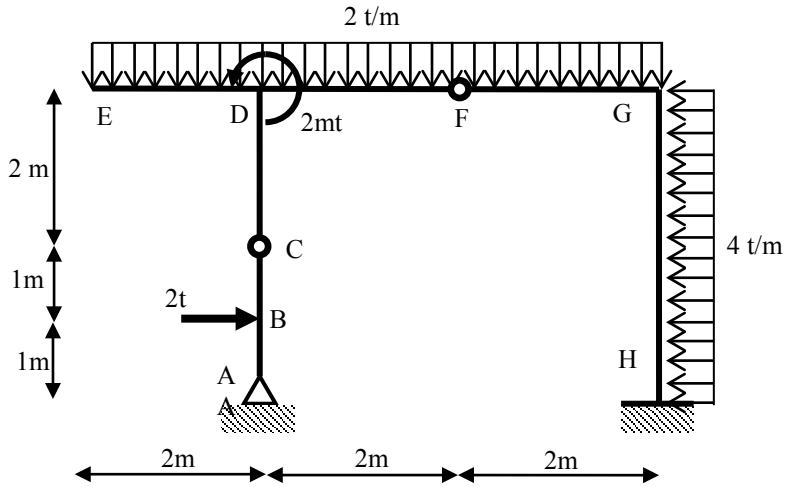


Fig. 6.4

- a. **Reaccions als suports.** Al capítol 4, hem trobat les reaccions als suports A i H. Concretament: $H_A = -1$ t (1 t cap a l'esquerra), $V_A = +10$ t (10 t cap amunt), $H_H = +15$ t (15 t cap a la dreta), $V_H = +2$ t (2 t cap amunt) i $M_H = +28$ m·t (28 m·t en sentit horari).
- b. **Descomposició del pòrtic en barres rectes.** Desmembrem el pòrtic en tres barres rectes (ABCD, EDFG i GH) i hem de determinar el conjunt de forces i moments externs a cadascuna d'elles que fan que aquestes estiguin en equilibri. Així, tenim els resultats següents (v. Fig. 6.5):

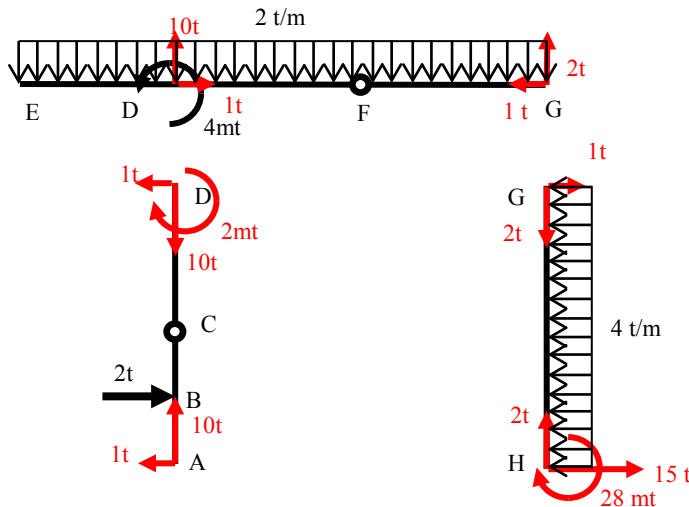
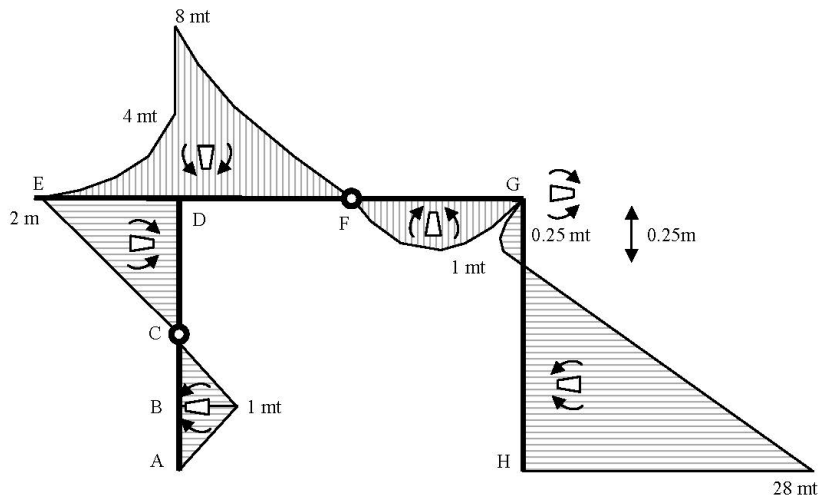
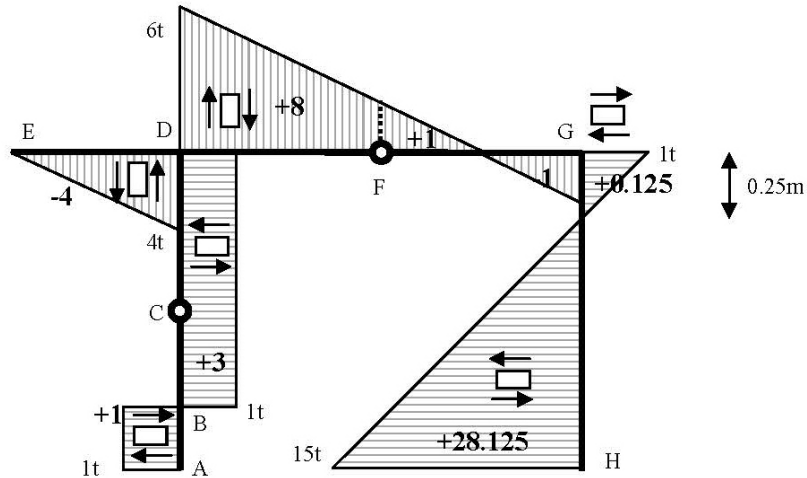


Fig. 6.5

- c. **Diagrames d'esforços tallants i moments flectors.**²² Amb aquestes dades i seguint les indicacions del capítol 5, és senzill determinar els diagrames de tallants i flectors que adjuntem a continuació (v. Fig. 6. 6).

Fig. 6.6



6.3 Diagrama de flectors de manera aproximada

Com ja hem explicat al capítol anterior (per al cas d'una biga recta), en moltes ocasions podem estar interessats a obtenir el diagrama de flectors del pòrtic, sense haver de passar per trobar-ne el diagrama de tallants. Posem ara en pràctica l'estratègia de dibuixar el *diagrama de flectors d'un pòrtic de manera aproximada*, fent servir el darrer exemple (v. Fig. 6. 6). Quan haguem determinat les reaccions als suports, per tal de fer aquest diagrama haurem de procedir com segueix:



A la barra ABCD:

- Considerem el tros de barra AB^- ; prenent moments envers B^- , determinarem

$$M_{B^-} = -1 \text{ mt.}$$

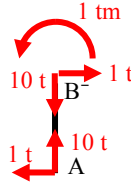


Fig. 6.6.1

- Considerem el tros de barra $ABCD^-$; prenent moment envers D^- , determinarem

$$M_{D^-} = 2 \text{ mt.}$$

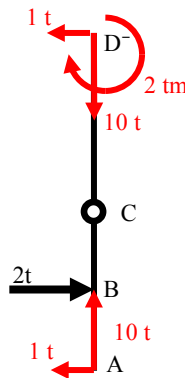


Fig. 6.6.2

A la barra EDFG:

- Considerem el tros de barra ED^- ; prenent moment envers D^- , determinarem $M_{D^-} = 4 \text{ mt.}$

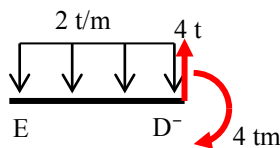


Fig. 6.6.3

- Considerem el tros de barra $ABCED^+$; prenent moment envers D^+ , determinarem $M_{D^+} = 8 \text{ mt.}$

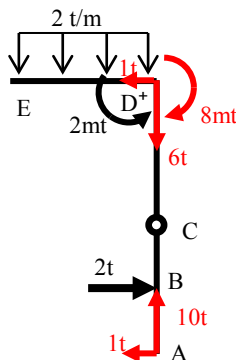
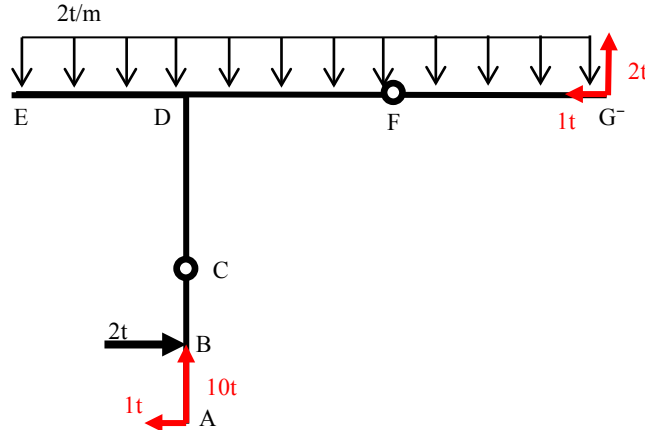


Fig. 6.6.4

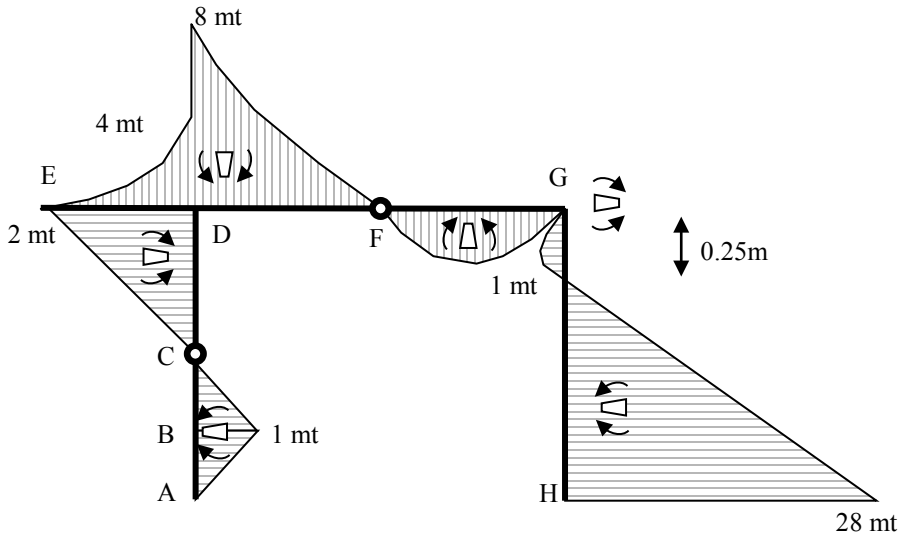
- Considerem el tros de barra ABCEDFG; prenent moment envers G^- , determinarem $M_G^- = 0$ mt. $M_G^+ = 0$ mt.

Fig. 6.6.5



Dibuixarem el diagrama de la manera següent (v. Fig. 6 7):

Fig. 6 7
En aquest diagrama de flectors aproximat, la magnitud dels moments als "mínims" ("¿?") queda forçosament indeterminada



Barra ABCD: Com que no hi ha forces distribuïdes, hem de dibuixar segments rectes que uneixin els punts A^+ : $M_A^+ = 0$; B: $M_B = -1$ mt; C: $M_C = 0$ mt; D: $M_D^- = 2$ mt.

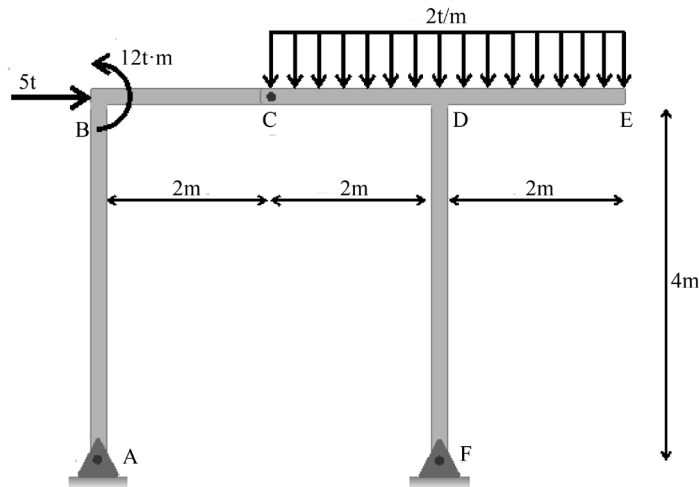
Barra EDFG: Com que hi ha una força uniformement distribuïda, hem de dibuixar trossos de paràbola que uneixin els punts E^+ : $M_E^+ = 0$ mt (la paràbola té un mínim en aquest punt); D: $M_D^- = 4$ mt; D⁺: $M_D^+ = 8$ mt; F: $M_F = 0$ mt; G: $M_G^- = 0$ mt (per tant, entre F i G, la paràbola té un mínim –amb una magnitud que no hem calculat).



Barra $G^+ H^-$: Com que hi ha una força uniformement distribuïda, hem de dibuixar un tros de paràbola que uneixi els punts G^+ : $M_G^+ = 0$ mt; H^- : $M_H^- = 28$ mt. Per saber si hem de dibuixar el vèrtex de la paràbola entre G i H, podem fer servir que, en aquests extrems, el pilar GH té forces externes, **totes elles dirigides cap a la dreta**. (Així, $V_G > 0 \Rightarrow M_G$ decreixent i $V_H < 0 \Rightarrow M_H$ creixent). És possible que els moments flectors hagin de decreixer per després créixer només si n'hi ha un mínim entre G i H.

6.4 Problemes

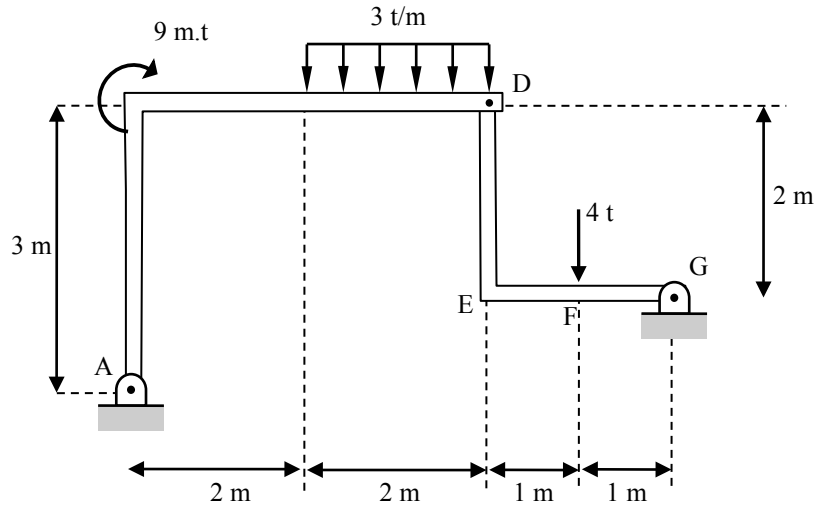
1. El pòrtic que es mostra consta de dues barres (ABC i CDEF) subjectes per una articulació al punt C. D'altra banda, el pòrtic es recolza al terra mitjançant articulacions als punts A i F.
 - a. Trobeu les reaccions als suports.
 - b. Fragmenteu el pòrtic en segments rectes simples i indiqueu sobre cada segment les forces i els parells que hi actuen.
 - c. Feu els diagrames de forces axials, forces tallants i moments flectors del pòrtic. Indiqueu sempre el conveni de signes que feu servir amb el símbol corresponent.



2. El pòrtic que es mostra consta de dues barres (ABCD i DEFG) subjectes entre elles per un pern al punt D. D'altra banda, el pòrtic es recolza al terra mitjançant articulacions als punts A i G.
 - a. Trobeu les reaccions als suports A i G.
 - b. Fragmenteu el pòrtic en segments rectes i indiqueu sobre cada segment les forces i els parells que hi actuen.



- c. Dibuixeu els diagrames de forces axials, forces tallants i moments flectors per al pòrtic a les plantilles que es proporcionen. Indiqueu sempre el conveni de signes que feu servir amb el símbol corresponent.

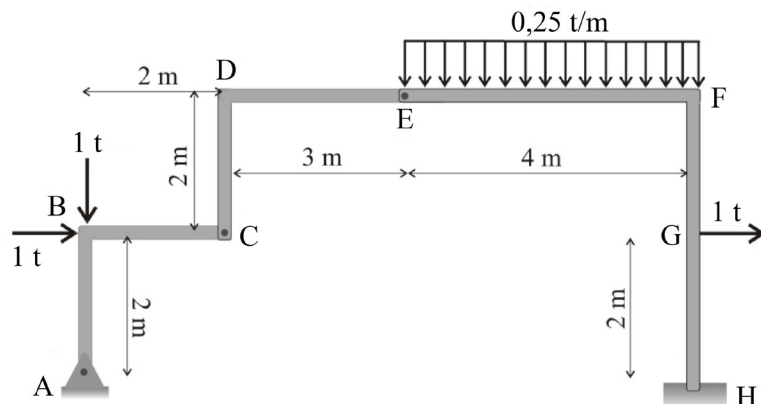


3. El pòrtic que es mostra consta de tres barres (ABC, CDE i EFGH) subjectes entre elles per articulacions als punts C i E. D'altra banda, el pòrtic es recolza al terra mitjançant una articulació a A i un encastament a H.

- a. Trobeu les reaccions als suports A i H.

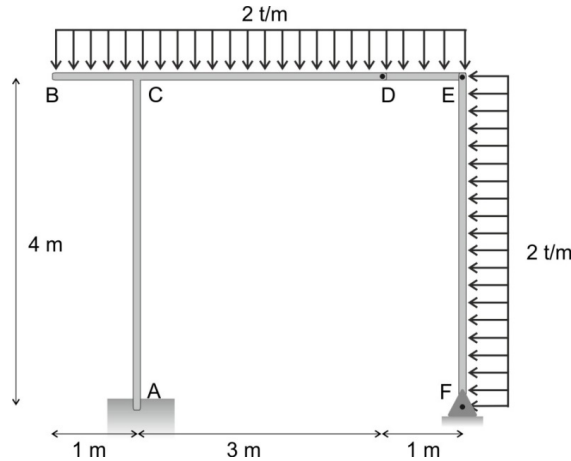
Nota: Comproveu que el parell degut a l'encastament a H és $M_H = 20 \text{ t}\cdot\text{m}$ en sentit anihorari.

- b. Dibuixeu els diagrames de forces axials, forces tallants i moments flectors per al pòrtic. Indiqueu sempre el conveni de signes que feu servir amb el símbol corresponent.





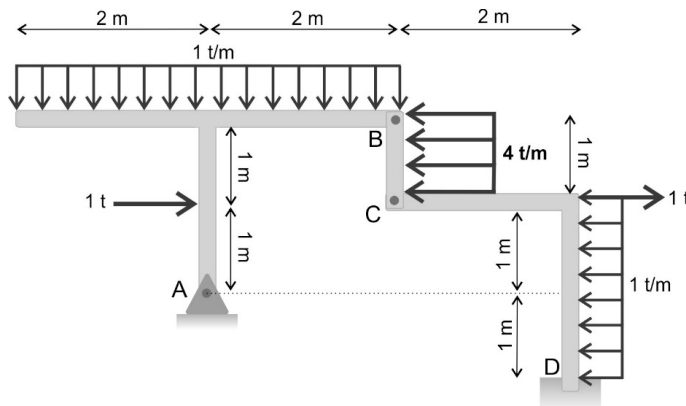
4. El pòrtic de la figura consta de tres barres rígides ABCD, DE i EF articulades a D i E. El pòrtic té un encastament a A i un suport articulat a F. Determineu:
- Les reaccions als suports a A i F. (*Solució parcial*: El moment a l'encastament a A hauria de sortir de 5 m·t en el sentit de les agulles del rellotge).
 - Les forces i els moments a què estan sotmesos els trams rectes AC, BCDE i EF.
 - Els diagrames d'axials, tallants i flectors.



5. Al pòrtic del dibuix, hem calculat les reaccions als suports i n'hem obtingut:

Reacció a l'articulació A: Força amb component horitzontal de 1 t cap a la dreta i amb component vertical de 5,5 t cap amunt.

Reacció a l'encastament D: Força amb component horitzontal de 3 t cap a la dreta i amb component vertical de 1,5 t cap avall.
Parell de 1 t·m en sentit horari.





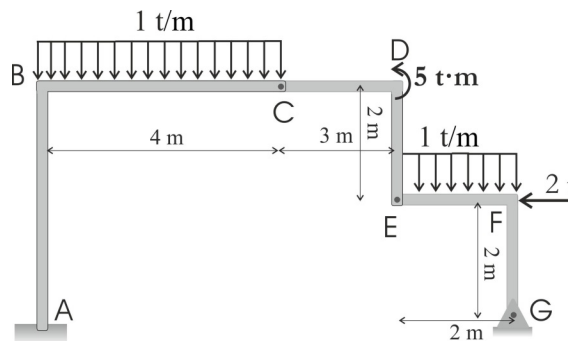
Fent servir aquestes dades, dibuixeu:

- El diagrama de forces axials del pòrtic.
- El diagrama de forces tallants del pòrtic.
- El diagrama de moments flectors del pòrtic.

6. Al pòrtic del dibuix, hem calculat les reaccions als suports i n'hem obtingut:

Reacció a l'encastament A: Força amb component horitzontal de 4 t cap a la dreta i amb component vertical de 3 cap amunt.
Parell (moment) de 12 t·m en sentit horari.

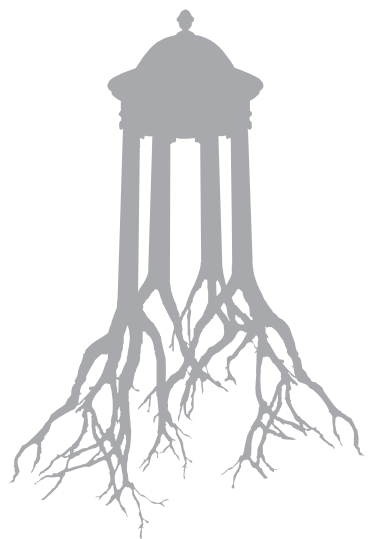
Reacció a l'articulació G: Força amb component horitzontal de 2 t cap a l'esquerra i amb component vertical de 3 t cap amunt.



Fent servir aquestes dades, dibuixeu:

- El diagrama de forces axials del pòrtic.
- El diagrama de forces tallants del pòrtic.
- El diagrama de moments flectors del pòrtic.

²² Deixem per al lector la tasca de representar el diagrama de forces axials corresponent.



→7



Comportament elàstic dels materials.

Càrrega axial uniforme i flexió pura

Fins ara, hem fet l'aproximació suposant que els diferents elements que componen una estructura es comporten com a *sòlids rígids*. En aquest capítol, deixem de banda aquesta aproximació i estudiem les deformacions més importants que es produeixen quan un sòlid és sotmès a l'acció de forces exteriors a ell. La branca de la física que estudia aquests efectes s'anomena *mecànica dels sòlids deformables*. Més endavant veurem que aquesta informació es pot i s'ha d'incorporar al càlcul d'estructures que hem estat desenvolupant fins ara.

7.1 Casos fonamentals i simplificacions

Ateses les seves aplicacions importants en arquitectura, en aquest capítol ens centrem en l'estudi de les deformacions en dos casos fonamentals:

- a. Càrrega axial uniforme
- b. Flexió pura

En mecànica dels sòlids deformables, es considera el model de “medi continu” de la matèria. Això comporta una descripció de la matèria considerada lliure de discontinuïtats, de manera que les propietats físiques, si varien, ho fan suaument des d'un punt del material fins a un altre punt molt proper. A aquest model, hi afegim les característiques simplificadores següents:

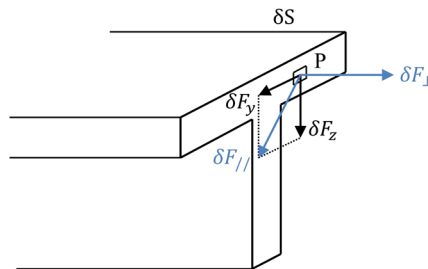
- a. Homogeneïtat. Se suposa que la matèria del cos és homogènia, és a dir, que té les mateixes propietats a cada punt del material.
- b. Isotropia. Les propietats del material són les mateixes en totes direccions.

Observem que la suposició d'homogeneïtat es pot emprar sempre que les dimensions del cos considerat siguin grans, comparades amb les dels elements que el componen. Si aquests elements estan orientats a l'atzar, el material es pot tractar com a isòtrop.²³

7.2 Tensions normal i tangencial

Imaginem una biga que, per concretar, considerem que té una secció en forma de T. Tallem imaginàriament aquesta biga per una secció recta dividint-la en dues parts, una de les quals es mostra a la Fig. 7.1. Sobre la secció recta del tros representat, hi apareix aplicada una força distribuïda sobre tota la secció recta (repartida irregularment, en general). Fixem-nos en una petita superfície δS al voltant d'un punt P . Descomponem la força (d'acció-reacció) que l'altra part de la biga fa sobre aquesta secció en un component perpendicular a la secció i un altre tangent a ella.

Fig. 7.1



Per tant, es tindrà:

$$\delta F = \delta F_{\perp} + \delta F_{//}$$

Definim la tensió (o esforç) normal σ_p i la tensió (o esforç) tangencial τ_p a P com les forces per unitat d'àrea que es fan en la direcció normal i tangencial, respectivament. L'expressió matemàtica precisa seria, doncs:

$$\sigma_p = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta F_{\perp}}{\delta S} \quad \sigma \equiv \text{Tensió normal}$$

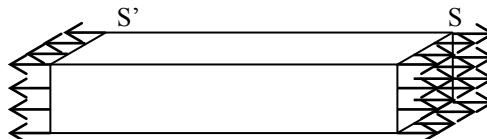
$$\tau_p = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta F_{//}}{\delta S} \quad \tau \equiv \text{Tensió tangencial o tallant}$$

D'aquesta manera, les unitats de les tensions en el sistema internacional són els newtons per metre quadrat (N/m^2), altrament anomenats pascals (Pa). A la pràctica, és molt habitual utilitzar múltiples d'aquesta unitat, com els $\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa}$.

7.3 Deformacions sota una càrrega axial uniforme

Considerem una barra prismàtica de manera que, sobre les superfícies S i S' perpendiculars a la direcció principal de la barra, s'hi apliqui una força uniformement distribuïda, com es mostra a la Fig. 7.2.

Fig. 7.2





Sigui σ el valor de la tensió normal sobre cada punt d'aquestes superfícies. En aquest cas, amb σ constant a tots els punts de les superfícies transversals S i S' , diem que tenim una “càrrega axial uniforme”.

Per la seva definició, en cas de distribució uniforme, podem escriure la tensió normal en funció de la força total, com segueix:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Respecte al seu signe, tenim que:

- si es tracta d'una tracció (i, per tant, escrivim $F > 0$) $\Rightarrow \sigma > 0$
- si es tracta d'una compressió (i, per tant, escrivim $F < 0$) $\Rightarrow \sigma < 0$

A partir d'ara, per comoditat, dibuixem la força resultant F de la distribució uniforme de forces aplicades en S , en lloc de la pròpia distribució.

A l'hora d'aplicar una força externa, hi ha diferència entre si és una força concentrada o una força uniformement distribuïda (amb resultant d'igual magnitud). A l'esquerra de la figura 7.3, tenim una barra que serà sotmesa a les mateixes forces totals. A a), aquestes forces s'apliquen de manera distribuïda, mentre que a b) s'apliquen concentrades al centre de la barra. Podem observar que això provocarà diferents deformacions. De fet, en general, dos sistemes de forces estàticament equivalents provoquen deformacions diferents en el material. Tanmateix, i seguint el principi de Saint-Venant, les deformacions dels elements de volum situats lluny del lloc on s'apliquen les càrregues es poden considerar iguals (v. zona central de les barres deformades a i b). Aquest fet ens permetrà aplicar els resultats que obtindrem per a les deformacions sota càrregues uniformement distribuïdes a algunes situacions en què les càrregues no són estrictament uniformes.

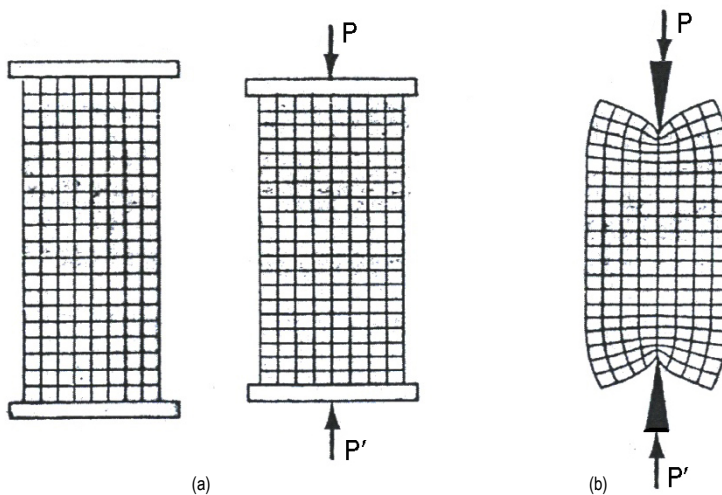


Fig. 7.3

7.4 Llei de Hooke

La Fig. 7.4 ens mostra tres barres del mateix material, de longituds inicials L_1 , L_2 , L_3 i seccions inicials S_1 , S_2 , S_3 , respectivament, sotmeses a una càrrega axial uniforme amb la mateixa força resultant aplicada P . Si dibuixem en una gràfica la relació entre la força P aplicada i l'allargament observat per a diferents materials, podem diferenciar els materials en dos tipus: aquells en què la relació de dependència és (molt aproximadament) lineal i aquells en què no ho és.

Fig. 7.4

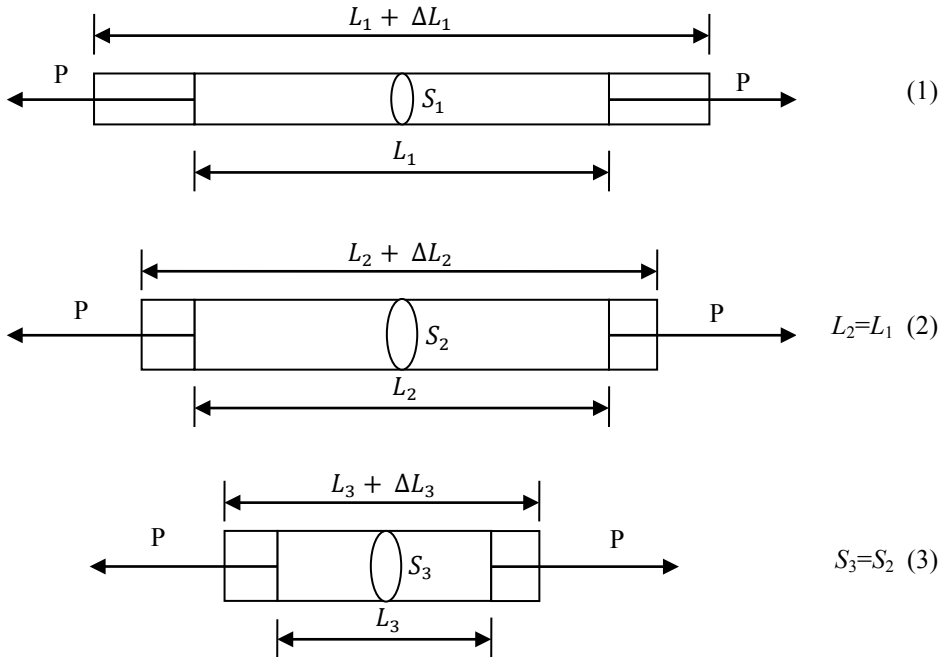
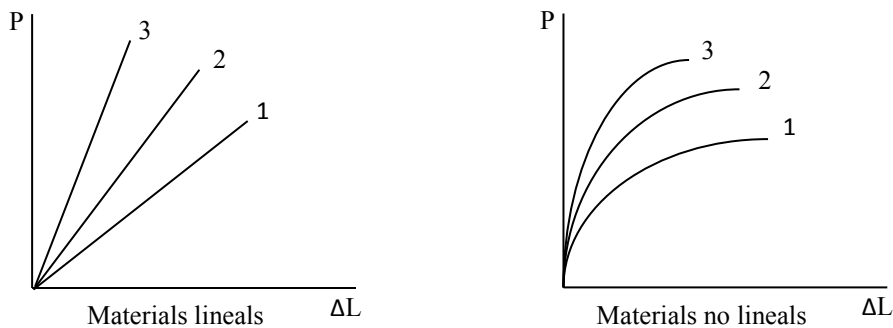


Fig. 7.5
 Diagrames força-
 allargament per a
 materials lineals i no
 lineals



En la realització d'aquestes experiències d'esforç-deformació, s'han de fer algunes puntualitzacions:



- Per tal de determinar quin allargament li correspon a cada força aplicada, aquesta s'ha d'aplicar de forma "progressiva", de manera que la barra assoleixi, des de l'estat inicial fins al final, successius estats d'equilibri.
- Si, quan procedim a la descàrrega per tal d'alliberar la barra de tota càrrega, s'assoleixen els mateixos estats d'equilibri que en el procés de càrrega, retornant aquesta a la forma inicial, diem que el rang de forces aplicades i els allargaments observats pertanyen a la zona de *comportament elàstic*.
- En alguns materials, com els derivats del cautxú, tot i que es retorna a la forma inicial, els estats assolits en la descàrrega no coincideixen amb els de la corba de càrrega. A aquest comportament s'anomena *histèresi elàstica*.
- Davant de "grans" càrregues (que dependran del material) fins i tot els materials lineals deixen de comportar-se linealment. Diem llavors que el material ha assolit el seu *límit de proporcionalitat*.

En els materials lineals, doncs, la força i l'allargament segueixen la llei de Hooke: $P \propto \Delta L$. Si intentéssim representar $\sigma = \frac{P}{S}$ en funció de la *deformació unitària* (o deformació per unitat de longitud) $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ (on S és l'àrea transversal inicial i L és la longitud inicial) per a les tres barres que havíem considerat, és fàcil adonar-se'n que les tres corbes col·lapsarien en una de sola (ja que, en fer servir com a variables la força *per unitat de superfície* i l'allargament *per unitat de longitud*, ens estem desfent de les característiques $-S$ i $-L$ que les diferenciaven). El pendent d'aquesta recta l'anomenem *mòdul elàstic* o *de Young* E , i dependrà exclusivament del material amb què estiguin fetes les barres. El seu valor per als materials comuns es pot trobar sense dificultat en taules publicades que s'han anat elaborant experimentalment.

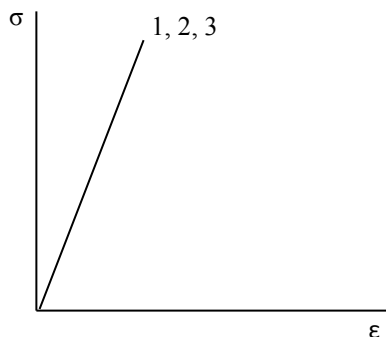


Fig. 7.6

$\sigma \equiv$ esforç normal o nominal

$\varepsilon \equiv$ deformació unitària

$E \equiv$ mòdul de Young

Per tant, obtenim una versió molt més pràctica de la llei de Hooke:

$$\sigma = E \varepsilon$$

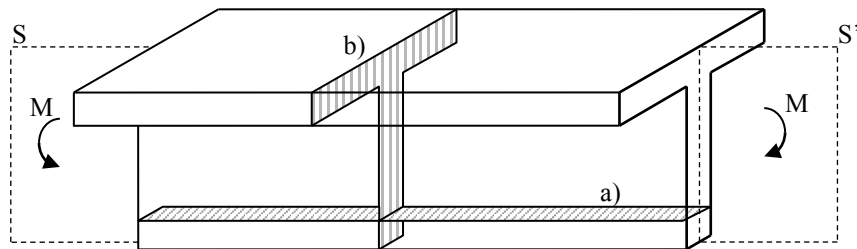
7.5 Flexió pura

A continuació, estudiem un cas especial de deformació en què imposem, tant a la barra com a les seves forces internes, unes condicions molt específiques. Al capítol següent, veurem com els resultats obtinguts en estudiar aquest cas particular ens serviran per estudiar les deformacions que es produiran a les bigues en general.

7.5.1 Element simètric sotmès a flexió pura

Considerem una barra recta homogènia de mòdul elàstic E que té un pla axial de simetria (pla paral·lel a l'eix axial principal, assenyalat amb línies discontinues a la Fig. 7.7).

Fig. 7.7



Per tal de facilitar l'exposició, tallem imaginàriament aquesta barra en dos tipus de seccions planes i perpendiculars al pla de simetria (v. Fig. 7.7): a) les paral·leles a la direcció principal de la barra, que anomenarem *fibres*, i b) les perpendiculars a la direcció principal de la barra, que anomenarem *seccions rectes* (com hem fet fins ara). Considerem que les seccions rectes són totes iguals en forma i mida.

En aquesta secció, volem considerar el cas en que:

1. A les seccions rectes, s'hi aplica una tensió normal σ que provoca una força total nul·la sobre elles. (Observeu que la simetria del problema implica que σ no pot estar distribuïda de qualsevol manera. Ho estudiarem més endavant). El sistema més simple estàticament equivalent al que es dona és un parell M , perpendicular al pla axial de simetria (representat a la Fig. 7.7).
2. Per al cas considerat, dues seccions planes i paral·leles continuen essent planes, encara que no necessàriament paral·leles, en el procés de deformació.

Diem que aquesta barra està sotmesa a *flexió pura* si es compleixen les condicions 1 i 2.

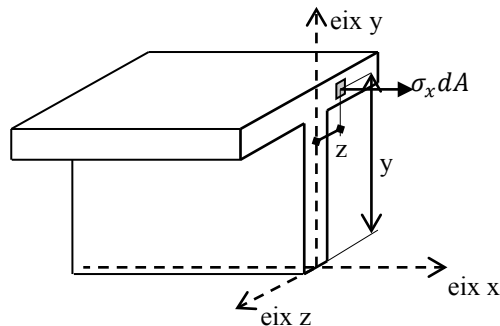
Considerant el sistema d'eixos de la Fig. 7.8, les condicions anteriors ens determinen que:

1. Com que la força resultant s'ha d'anul·lar, llavors $F_x = \int \sigma_x dA = 0$.



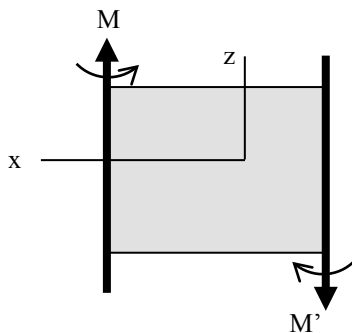
2. Calculem el *moment flector* com $M = -\int y dF_x = -\int y \sigma_x dA$

Fig. 7.8



7.5.2 Deformacions per flexió pura

D'acord amb les condicions que defineixen la flexió pura, la barra homogènia es deforma tot respectant les propietats següents:



Secció longitudinal i horitzontal,
que anomenem "fibra"

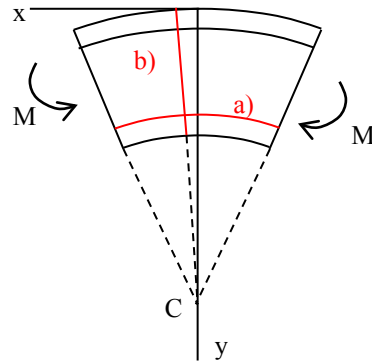


Fig. 7.9

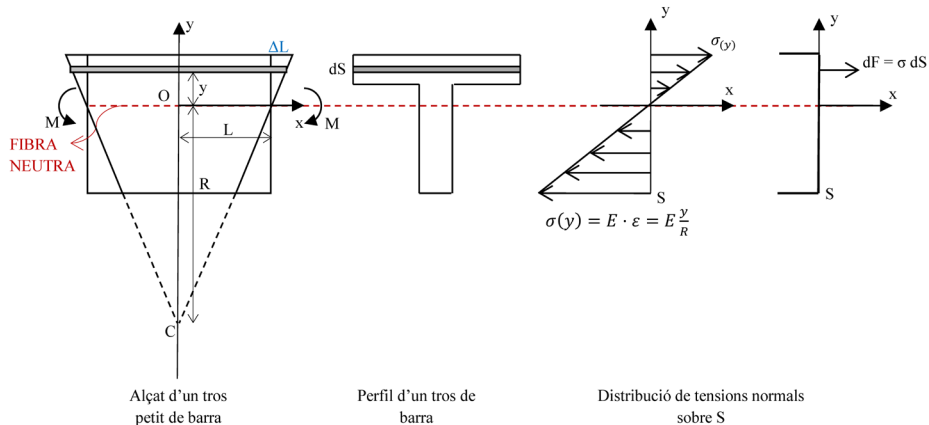
Secció longitudinal i vertical
(pel pla de simetria)

1. L'element roman simètric respecte el pla axial de simetria.
2. Cada fibra es doblega uniformement per formar un arc circular (que és l'única corba possible, atès que totes les seccions són iguals).
3. Els plans que contenen les seccions rectes es mantenen plans i passen pel centre de l'arc.
4. Per als sentits dels moments considerats a la figura 7.9, la longitud de les fibres superiors s'allarga i la longitud de les fibres inferiors s'escurça.
5. Del punt anterior, se segueix que ha d'existir una "superfície neutra" (*fibra neutra*), que és paral·lela a la superfície superior i inferior, per a la qual la longitud no canvia.

6. Del punt 4, es dedueix que, per als sentits dels moments considerats, les tensions són negatives per sota de la fibra neutra (compressió) i són positives per sobre de la fibra neutra (tracció).

A la Fig. 7.10, es mostra un tros petit de longitud $2L$ de la barra anterior, representant-ne l'alçat i el perfil. S'hi pot veure la forma inicial i com es deforma aproximadament (en aquest petit tros, l'arc s'aproxima per la tangent) per l'acció del que anomenem "flexió pura". Hem d'assenyalar que hem escollit ara l'origen de coordenades en el punt d'intersecció entre el pla axial de simetria i la fibra neutra.

Fig. 7.10



Considerant la semblança de triangles, n'obtenim:

$$\frac{R}{L} = \frac{y}{\Delta L}$$

on R és el radi (de curvatura)²⁴ del cercle que descriu la fibra neutra i ΔL és l'allargament de la fibra considerada (gris a la Fig. 7.10), que es troba a una altura y respecte de la fibra neutra. Per tant:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{y}{R}.$$

D'acord amb la llei de Hooke, tenim:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} = \frac{E y}{R}$$

Com es pot veure, σ és directament proporcional a la distància y a la fibra neutra i inversament proporcional al radi de curvatura R . (Per tant, es reproduïx el fet que, a la part superior ($y > 0$), hi ha tracció sobre les fibres, mentre que, a la inferior ($y < 0$), hi ha compressió.)

La força aplicada sobre tota una fibra situada a una distància y de la fibra neutra és estàticament equivalent a una força $dF = \sigma dS$ aplicada just al centre de la secció recta. Com que la resultant de les forces ha de ser igual a zero, imposarem que



$$F = \int_S dF = \int_S \sigma dS = \frac{E}{R} \int_S y dS = 0 \Leftrightarrow \int_S y dS = 0$$

Aquesta darrera expressió indica que, per a cada secció S , el punt $y = 0$ i $x = 0$ (degut a l'existència del pla axial de simetria) és l'anomenat centroide de S . Com es pot veure,

el centroide, definit per la solució de $\int_S y dS = 0$, només depèn de la geometria de la

secció recta i no de l'estat de càrrega a què estigui sotmesa la barra. El càlcul del centroide de les seccions rectes més emprades és ben conegut i apareix a tots els manuals de geometria. D'aquesta manera, podem saber sense dificultat on és la fibra neutra de la barra considerada.

D'altra banda, el moment flector es pot escriure com:

$$M = - \int_S y dF = - \frac{E}{R} \int_S y^2 dS = - \frac{EI}{R}$$

on s'ha definit la magnitud I com:

$$I \equiv \int_S y^2 dS$$

La magnitud I s'anomena *moment d'inèrcia* de la secció recta i, com en el cas del centroide, només depèn de la geometria d'aquesta. La seva dependència amb y^2 a l'integrand ens diu que, per a una superfície S de la secció recta, I serà més gran com més allunyada de la fibra neutra es trobi el conjunt de la superfície. A la Fig. 7.11, mostrem diversos perfils ordenats d'esquerra a dreta amb moments d'inèrcia decreixents.

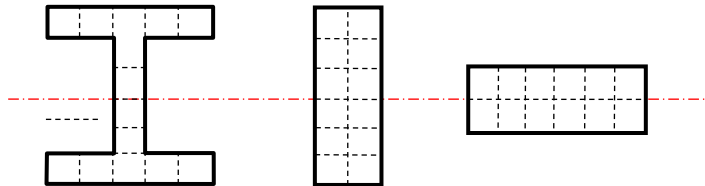


Fig. 7.11

En geometria, la inversa del radi de curvatura s'anomena *curvatura*, això és, $\frac{1}{R}$. Com més gran sigui la curvatura, més petit serà el radi de curvatura i, per tant, més gran serà la deformació.

Per tal d'apreciar millor el significat de les relacions que hem anat trobant, imaginem ara dues barres, 1 i 2, del mateix material ($E_1 = E_2$), amb un pla axial de simetria i sotmeses a flexió pura. Considerem dues situacions diferents:



1. Suposem que $I_1 = I_2$ i veiem què passa quan s'hi apliquen diferents moments exteriors. Si $M_1 < M_2$, llavors, de $M = -EI/R$, tindrem $R_1 > R_2$. Per tant, com es pot esperar, per tal d'obtenir deformacions per flexió més grans cal aplicar moments flectors més grans.
2. Suposem ara que apliquem sobre les barres els mateixos moments externs $M_1 = M_2 < 0$ i vegem com afecta l'elecció de la secció de la barra (I) a la deformació per flexió. Com que $R = -EI/M$, tindrem que, si $I_1 > I_2$, llavors $R_1 > R_2$. Per tant, la barra 2 és més rígida a la flexió que la 1 (la curvatura de la barra 2 és més gran que la de la barra 1). En definitiva, com més grans són els moments d'inèrcia, menors seran les deformacions per flexió.

7.6 Deformacions i càlcul estructural

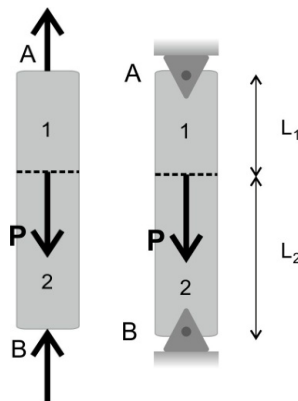
El mètode formal general²⁵ per abordar problemes d'estructures (bigues, marcs, gelosies, pòrtics, etc.), en què es tenen en compte les deformacions d'aquests consta de les etapes següents:

1. Selecció del sistema i idealització de les seves característiques.
2. Estudi de les forces i condicions d'equilibri estàtic.
3. Estudi de les deformacions i aplicació de les relacions tensió-deformació, és a dir, les relacions entre les causes i els efectes de la deformació als sòlids deformables.
4. Estudi de les condicions de compatibilitat geomètrica i extracció de les expressions matemàtiques que comporten.
5. Resolució "simultània" de les equacions d'equilibri estàtic, les relacions tensió-deformació i les condicions de compatibilitat geomètrica.

Exemple. En aquest exemple, tractem del pilar que es mostra a la figura 7.12.

Aquest pilar té una longitud $L = L_1 + L_2$ i suporta la càrrega P que es mostra. Volem saber quines reaccions hi ha als suports A i B.

Fig. 7.12
Pilar amb càrrega
P. El nostre
objectiu és trobar
les reaccions als
suports A i B.





Considerem primer l'equilibri estàtic del pilar. Si anomenem A i B les reaccions als suports respectius, la suma de components verticals de les forces ens porta a la condició:

$$A + B = P \quad (7.1)$$

Atès que les condicions d'equilibri no ens proporcionen més informació i que, amb aquesta equació, no podem determinar les dues incògnites, queda clar que estem davant d'un problema *hiperestàtic amb càrrega axial*.

El fet que existeix la càrrega P divideix el pilar en dos trams diferents. Per avaluar les forces axials a cada tram considerem els talls següents a cada tram. (Observeu que el primer té una longitud més petita que L_1 , mentre que el segon té una longitud més petita que L_2 .)

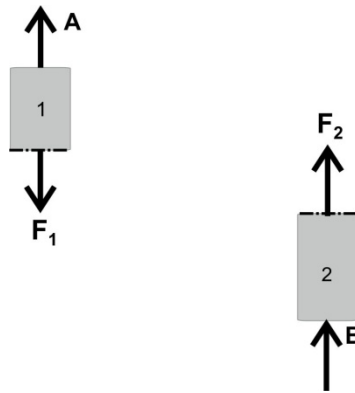


Fig. 7.13

Com es pot veure a la figura 7.13, per defecte considerem les forces axials desconeegudes a tracció. L'equilibri d'aquests dos trossos ens proporciona:

$$F_1 = A \quad \text{i} \quad F_2 = -B \quad (7.2)$$

Com hem vist, al principi del capítol la relació tensió-deformació que s'ha d'aplicar en aquest cas de càrregues axials és la llei de Hooke:

$$\sigma = E \varepsilon$$

que podem reescriure, fent servir les definicions de tensió normal i deformació unitària, com:

$$\delta = \frac{F l}{S E}$$

on F és la força interna axial, l és la longitud del tram considerat i S és la seva secció. Aplicada a cada tram del pilar considerat i fent servir (2), ens proporciona:

$$\delta_1 = \frac{A L_1}{S E} \quad \text{i} \quad \delta_2 = -\frac{B L_2}{S E} \quad (7.3)$$



Finalment, considerem el lligam geomètric. Observem que, malgrat les deformacions del pilar causades per la càrrega P , la seva longitud total no pot canviar per l'acció dels suports rígids a A i B. És dir, l'allargament total del pilar ha de ser nul i, per tant:

$$0 = \delta_1 + \delta_2 \quad (7.4)$$

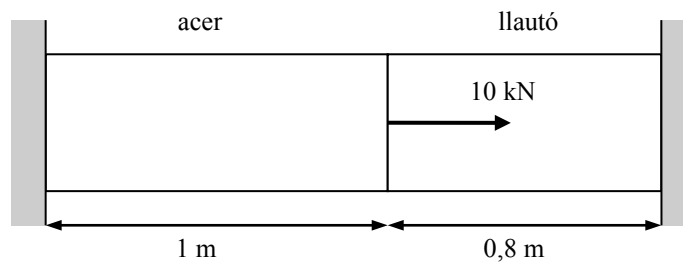
El sistema format per (1), (3) i (4) constitueix un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites (A , B , δ_1 i δ_2). La seva resolució porta directament als resultats buscats:

$$A = \frac{L_2}{L} P \quad \text{i} \quad B = \frac{L_1}{L} P$$

Observeu que, amb aquests resultats, ara també podríem calcular fàcilment les tensions normals i l'allargament que experimenta cadascun dels trams (cosa que deixem com a exercici per al lector).

7.7 Problemes

1. La barra de la figura, de 7 cm^2 de secció transversal, està formada per un tram d'acer i un tram de llautó. Els dos extrems de la barra estan soldats a sengles suports rígids i immòbils. La barra està sotmesa a una força de 10 kN , com s'indica a la figura.



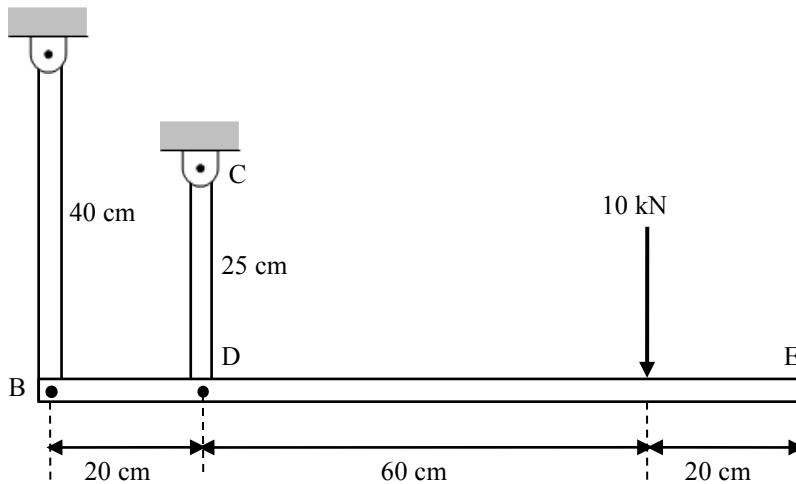
Determineu les reaccions exteriors als extrems de la barra.

Dades: Acer: mòdul de Young = 210 GPa ; Llautó: mòdul de Young = 105 GPa

2. Un pedestal de formigó de secció transversal quadrada de 40 cm de costat es reforça amb 9 varetes d'acer de 2 cm de diàmetre. El mòdul de Young de l'acer és de 210 GPa i el del formigó és de 24 GPa . Sobre el pedestal es col·loca una estàtua de pes P .
 - a. Calculeu, en funció de P , els esforços normals en l'acer i en el formigó.



- b. Si els esforços normals màxims que poden suportar amb seguretat l'acer i el formigó són de 150 MPa i 15 MPa, respectivament, calculeu el màxim pes P que pot tenir l'estàtua perquè no se superin aquests esforços màxims a cap dels dos materials.
3. La barra horitzontal BDE, que suposem *rígida*, penja de dues varetes verticals, AB i CD. La vareta AB és d'acer (mòdul de Young de 210 GPa) i té una secció de 8 cm^2 . La vareta CD és de llautó (mòdul de Young de 105 GPa) i té una secció de 10 cm^2 . Si s'aplica una càrrega vertical de 10 kN sobre la barra BDE, calculeu el desplaçament del punt E.



²³ Així, un material compost reforçat amb fibres es pot considerar homogeni si les fibres són petites, comparades amb les dimensions del cos, però les fibres fan que les seves propietats depenguin de la direcció considerada. Per tant, es un material *anisòtrop*.

²⁴ Observeu que R pot ser positiu (quan el centre del cercle està per sota de la fibra) o negatiu (en cas contrari).

²⁵ A la *pràctica*, els punts que enumerem s'acostumen a adaptar al tipus d'estructura particular que estem tractant i si el càlcul s'ha de fer a mà o amb l'ajut de computadors.

→ 8



Deformació per flexió d'un tram d'una barra recta. Deformada a estima

En molts casos, les deformacions degudes a la flexió de les barres que constitueixen un pòrtic o una unió de pòrtics són les deformacions més importants. Tanmateix, normalment no cal conèixer la deformació precisa del pòrtic. Quan coneixem els valors més significatius i la forma aproximada de la deformada per flexió d'una barra o un pòrtic, direm que tenim la *deformada a estima* de la barra o del pòrtic.

En aquest capítol, detallem els principis, les simplificacions i els càlculs que cal emprar per tal de determinar la deformada a estima d'una barra sotmesa a càrregues transversals i moments perpendiculars. Només tractem el cas en què la barra es troba lligada isostàticament a determinats suports. Cal remarcar, però, que els resultats obtinguts es podran fer servir per trobar la solució dels problemes hiperestàtics.

8.1 Deformació d'un tram de barra per flexió pura: Deformada i deformada a estima

Com ja hem vist al capítol 5, una barra recta sempre es pot descompondre en trams simples. A la Fig. 8.1(a), es mostra el diagrama del sòlid lliure d'un tram simple amb un estat de càrrega genèric.

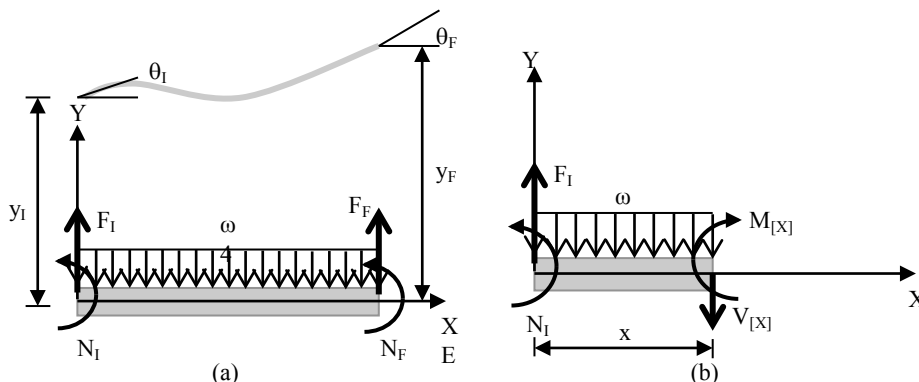


Fig. 8.1
A la part inferior de (a), un tram sense considerar la seva deformació i, a la part superior, la suposada flexió de la fibra neutra. A (b), l'anàlisi de les forces i dels moments interns d'una porció del tram.



Denotem amb L , I i E , la longitud, el moment d'inèrcia de la secció recta i el mòdul d'elasticitat del tram, respectivament.

El nostre objectiu és descriure la deformació de la fibra neutra d'una biga dotada d'un pla axial de simetria. La corba que descriu la fibra neutra s'anomena *elàstica* (v. part superior de la figura 8.1(a)).

La teoria de la flexió pura que hem estudiat al capítol 7 ens ha permès relacionar el valor del moment flector M en un punt amb el radi de curvatura R de l'elàstica:

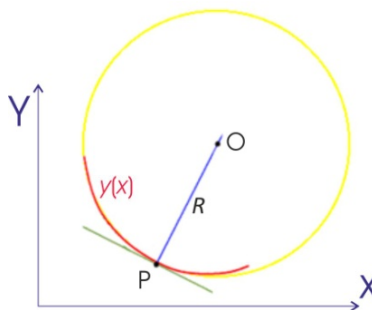
$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{EI} M$$

En general, en una biga, el moment flector no és una funció constant i, equivalentment, tampoc no esperem la mateixa curvatura a tots els punts de l'elàstica. No obstant això, fem servir el resultat anterior (considerant que es compleix de manera aproximada):

$$\frac{1}{R(x)} = -\frac{1}{EI} M(x)$$

Observeu que aquesta expressió és una aproximació, ja que no estem considerant les deformacions causades pels esforços tallants. Es pot demostrar que l'aproximació que fem servir és vàlida si la longitud de la biga és gran, comparada amb les dimensions de la secció transversal, ja que llavors la deformació per flexió serà molt més gran que la deformació per cisallament (v. apèndix).

D'altra banda, un resultat ben conegut de l'anàlisi matemàtica és que el radi de curvatura d'una corba en un punt P , per a petits pendents, es pot aproximar com $R(x) \cong 1 / y''(x)$, on $y''(x)$ és la derivada segona de la corba al punt.



En cas que la flexió produeixi petites deformacions, és usual que els pendents també siguin petits. Així doncs, l'equació que relaciona la curvatura de la deformada amb el moment flector es pot escriure, aproximadament, com:

$$y''(x) = -\frac{1}{EI} M(x)$$



Integrant aquesta equació entre el punt inicial $x = 0$ i un punt arbitrari x al tram, s'obté:²⁶

$$y'(x) - y'(0) = -\frac{1}{EI} \int_0^x dx' M(x')$$

Com ja hem vist al capítol 5, les condicions d'equilibri d'una porció d'aquest tram ens proporcionen:

$$V(x) = -wx + F_I \quad \text{i} \quad M(x) = +\frac{1}{2}wx^2 + F_I x + N_I.$$

Incorporant aquest resultat per a $M(x)$ a l'integral anterior, s'obté:

$$y(x) - y'(0)x = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{2}F_I x^2 - N_I x \right) \quad (8.1)$$

Per a petits pendants, es té:

$$\tan(\theta) \cong \theta$$

on $\theta = \theta(x)$ és l'angle girat per un element de barra que es troba a una distància x de l'extrem I. Això ens permet particularitzar l'expressió per als pendants, prenent $x = L$, com:

$$\theta_F - \theta_I = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}wL^3 + \frac{1}{2}F_I L^2 - N_I L \right) \quad (8.2)$$

on $\theta_I \cong y'(0)$ i $\theta_F \cong y'(L)$ són els angles girats o girs als extrems del tram.

Partint de (8.1) i integrant entre el punt inicial $x = 0$ i un punt arbitrari x al tram, obtenim:

$$y(x) = y(0) + \theta_I x + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{6}F_I x^3 - \frac{1}{2}N_I x^2 \right)$$

Aquesta és l'equació de la deformada del tram. Com hem dit, en general aquesta expressió exacta de la deformada no és necessària. Tanmateix, a la secció següent veurem com aquesta expressió ens permet trobar la deformada a estima molt fàcilment. Abans, però, necessitem la seva expressió particular quan considerem l'inici i el final del tram:

$$y_F - y_I = \theta_I L + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{24}wL^4 + \frac{1}{6}F_I L^3 - \frac{1}{2}N_I L^2 \right) \quad (8.3)$$

on y_I i y_F són els desplaçaments verticals dels extrems I i F, respectivament.



8.2 Deformada a estima: desplaçaments i girs als extrems d'un tram d'una barra sotmesa a un estat general de càrrega

Com ja hem vist al capítol 4, les equacions d'equilibri estàtic del tram són:

$$\begin{aligned}0 &= F_I + F_F - wL \\0 &= N_I + N_F + \frac{1}{2}wL^2 - F_I L\end{aligned}$$

D'altra banda, les relacions esforç-deformació pels extrems del tram són (8.2) i (8.3):

$$\begin{aligned}\theta_F - \theta_I &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}wL^3 + \frac{1}{2}F_I L^2 - N_I L \right) \text{ i} \\y_F - y_I &= \theta_I L + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{24}wL^4 + \frac{1}{6}F_I L^3 - \frac{1}{2}N_I L^2 \right).\end{aligned}$$

Les quatre equacions anteriors constitueixen el conjunt d'equacions necessàries i suficients que vinculen les vuit variables F_I , F_F , N_I , N_F , w , θ_I , θ_F i $(y_F - y_I)$. Així doncs, podem manipular-les algebàricament per tal d'expressar-ne quatre en funció de les restants:

$$\theta_I = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{24}wL^3 + \frac{1}{3}N_I L - \frac{1}{6}N_F L \right) + \frac{1}{L}(y_F - y_I) \quad (8.4)$$

$$\theta_F = \frac{1}{EI} \left(+\frac{1}{24}wL^3 - \frac{1}{6}N_I L + \frac{1}{3}N_F L \right) + \frac{1}{L}(y_F - y_I), \quad (8.5)$$

$$F_I = +\frac{1}{L}N_I + \frac{1}{L}N_F + \frac{1}{2}wL$$

$$F_F = -\frac{1}{L}N_I - \frac{1}{L}N_F + \frac{1}{2}wL$$

on hem ressaltat les dues equacions sobre els girs, atès que són les equacions fonamentals per trobar la deformada a estima. La idea bàsica és que, amb els girs (i els desplaçaments) als extrems dels trams, podem fer una representació aproximada de la deformada.

8.2.1 Estats bàsics de deformació

La interpretació d'aquests resultats pot ser més intuïtiva si n'analitzem alguns casos siples fonamentals. Considerem els quatre estats de càrrega de la mateixa barra que apareixen a la Fig. 8.2.

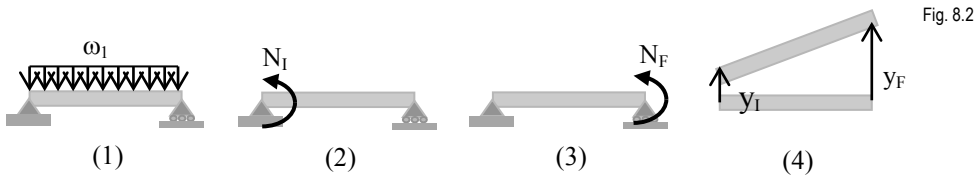


Fig. 8.2

En els tres primers casos, els lligams de la barra n'impedeixen el desplaçament en la direcció vertical. Per tant, en tots tres casos tindrem que $y_I^i = 0$ i $y_F^i = 0$, on el superíndex pren els valors dels casos considerats ara: $i = 1, 2, 3$. En el darrer estat (4), es preveu l'eventual translació vertical global finita i la rotació global (determinades per la resta de la barra a la qual estigui lligat el tram en qüestió).

Els girs a l'origen i al final de la barra es poden obtenir directament de (8.4) i (8.5) particularitzant, per a cadascun dels quatre casos anteriors:

$$\theta_I^1 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{24} wL^3 \right), \quad \theta_F^1 = \frac{1}{EI} \left(+\frac{1}{24} wL^3 \right) \quad (8.6)$$

$$\theta_I^2 = \frac{1}{EI} \left(+\frac{1}{3} N_I L \right), \quad \theta_F^2 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6} N_I L \right)$$

$$\theta_I^3 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6} N_F L \right), \quad \theta_F^3 = \frac{1}{EI} \left(+\frac{1}{3} N_F L \right)$$

$$\theta_I^4 = \frac{y_F - y_I}{L}, \quad \theta_F^4 = \frac{y_F - y_I}{L}$$

Igualment, les reaccions en els suports segons les fórmules que hem trobat seran:

$$F_I^1 = \frac{1}{2} wL, \quad F_F^1 = \frac{1}{2} wL,$$

$$F_I^2 = \frac{1}{L} N_I, \quad F_F^2 = -\frac{1}{L} N_I,$$

$$F_I^3 = \frac{1}{L} N_F, \quad F_F^3 = -\frac{1}{L} N_F,$$

$$F_I^4 = 0, \quad F_F^4 = 0$$

És fàcil veure que les expressions dels girs al tram més general que hem obtingut anteriorment (8.4 i 8.5) es poden escriure com:

$$\theta_I = \sum_{i=1}^4 \theta_I^i \quad (8.7)$$



$$\theta_F = \sum_{i=1}^4 \theta_F^i$$

Mentre que les reaccions al cas general es poden expressar com:

$$F_I = \sum_{i=1}^4 F_I^i \quad (8.8)$$

$$F_F = \sum_{i=1}^4 F_F^i$$

Raonant en la direcció contrària a la que hem seguit per arribar fins aquí, podem interpretar que el gir de l'extrem I , el gir de l'extrem F i els valors de F_I i F_F s'obtenen com a suma de les contribucions individuals dels quatre estats esmentats (8.7 i 8.8). Per aquest motiu, els quatre estats anteriors els anomenem els *quatre estats bàsics de deformació*.

Considerem ara les deformades que s'intuïrien (és a dir, sense fer els càlculs) dels estats bàsics 1, 2 i 3 (representades a la Fig. 8.3, a la Fig. 8.4 i a la Fig. 8.5, respectivament).

Fig. 8.3
Deformació produïda per una càrrega uniformement distribuïda

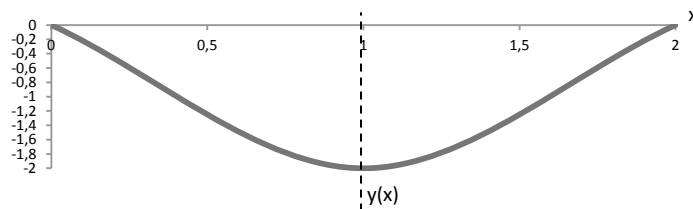


Fig. 8.4
Deformació produïda per un parell extern aplicat a l'extrem esquerre ($N_I > 0$).

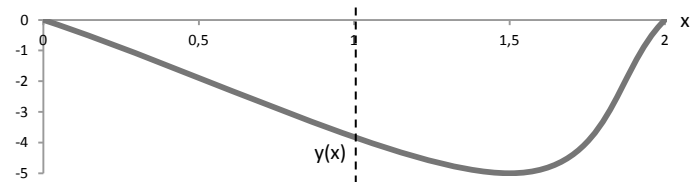
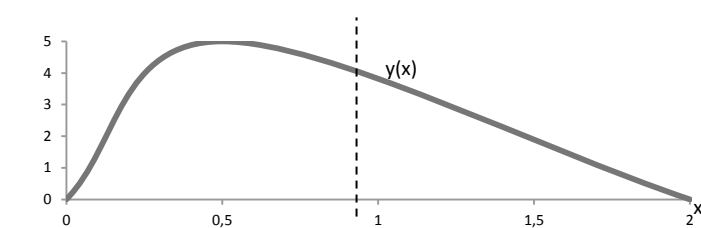


Fig. 8.5
Deformació produïda per un parell extern positiu aplicat a l'extrem dret ($N_F > 0$).
El moment N_I a la figura 8.4 i el moment N_F d'ara han estat escollits de la mateixa magnitud





D'aquestes figures, se'n poden extreure alguns resultats qualitius interessants, que es poden comparar amb el resultat analític (8.6):

- De la figura 8.3 (on s'ha considerat $\omega > 0$), veiem que s'esperaria $\theta_F = -\theta_I > 0$, que justifica els valors relatius i els signes obtinguts per als girs al primer estat bàsic.
- De la figura 8.4 (on s'ha considerat $N_I > 0$) $\rightarrow \theta_I > -\theta_F > 0$, que justifica els valors relatius i els signes obtinguts per als girs al segon estat bàsic.
- De la figura 8.5 (on s'ha considerat $N_F > 0$) $\rightarrow 0 < -\theta_I < \theta_F$, que justifica els valors relatius i els signes obtinguts per als girs al tercer estat bàsic.

És notable que, a partir de la pura observació de les deformades ja esmentades, dibuixades d'acord amb el sentit comú, considerant arguments dimensionals i recordant els nombres 3, 6 i 24 (que apareixen a les expressions 8.6 obtingudes per als girs dels estats bàsics), podem reproduir totalment les expressions (8.4) i (8.5) dels girs.

8.2.2 Un exemple: deformada a estima d'una barra recta isostàtica

Sigui la barra doblement recolzada que hem tractat anteriorment i que es mostra a la Fig. 8.6 (recordeu que les distàncies $AB = BC = 1$ m, $CD = 2$ m).

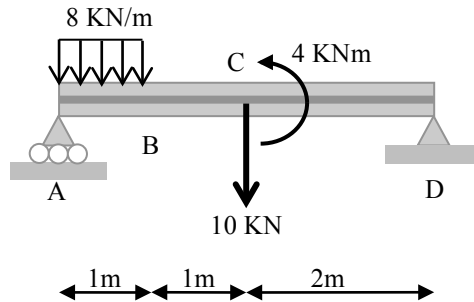


Fig. 8.6

Determineu els desplaçaments i els girs dels punts A, B, C i D deguts a la flexió en funció de E i I .

Observeu que, per poder aplicar les relacions (8.4) i (8.5), només cal conèixer els valors dels moments en els extrems de cada tram simple. Això ja ho hem fet, amb un procediment abreujat, a l'última secció del capítol 5. Els resultats eren:

1. $M_A^+ = 0$
2. $M_B^- = -9$ mt
3. $M_B^+ = M_B^- = -9$ mt
4. $M_C^- = -14$ mt
5. $M_C^+ = M_C^- + N = -10$ mt
6. $M_D^- = 0$



Les condicions de comptabilitat geomètrica s'expressen:

$$y_A = y_D = 0$$

$$y_B^- = y_B^+ \equiv y_B$$

$$y_C^- = y_C^+ \equiv y_C$$

$$\theta_B^- = \theta_B^+ \equiv \theta_B$$

$$\theta_C^- = \theta_C^+ \equiv \theta_C$$

Amb l'ajut de les expressions (8.4) i (8.5), i tenint en compte les condicions de compatibilitat geomètrica, construirem un sistema de sis equacions (dues per a cada tram) amb sis incògnites. Concretament, enumerarem un sistema més senzill aplicant (8.5) al tram AB, (8.4) i (8.5) al BC i finalment (8.5) al CD. Així, obtindrem:

$$\theta_B = \frac{10}{3EI} + y_B$$

$$\theta_B = -\frac{16}{3EI} + y_C - y_B$$

$$\theta_C = \frac{37}{6EI} + y_C - y_B$$

$$\theta_C = -\frac{20}{3EI} - \frac{1}{2}y_C$$

Resolent el sistema de quatre equacions amb quatre incògnites, obtenim:

$$y_B = -\frac{155}{12EI}$$

$$y_C = -\frac{103}{6EI}$$

Substituint els valors obtinguts a (8.4), s'obtenen finalment, per a cadascun dels trams, els girs:

$$\theta_A = -\frac{50}{4EI}, \theta_B = -\frac{115}{12EI}, \theta_C = \frac{23}{12EI}, \theta_D = \frac{143}{12EI}$$

Podem fer servir ara les dades obtingudes per als desplaçaments i els girs de la biga per dibuixar la deformada a estima de la biga.

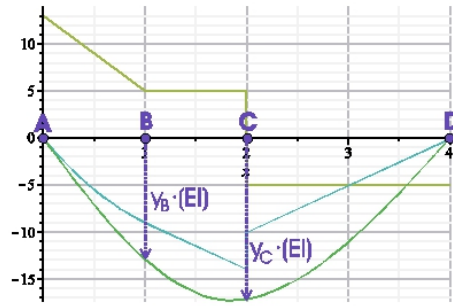
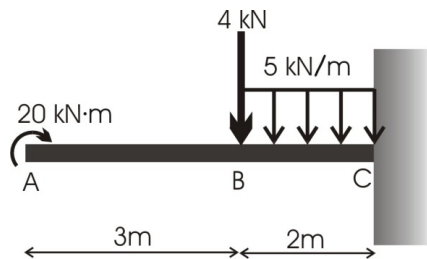


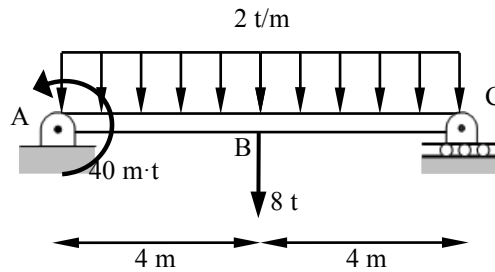
Fig. 8.7
En verd, la deformada (juntament amb les forces tallants i el moment flector de la biga, que ja hem vist). Veieu com els desplaçaments i els girs dels punts A, B, C i D es corresponen amb els obtinguts

8.3 Problemes

1. La biga de la figura es troba encastada a una paret al punt C. D'altra banda, hi actua un parell de 20 kN·m a l'extrem A, una càrrega concentrada de 4 kN a B i una càrrega distribuïda de 5 kN/m entre B i C.
 - a. Trobeu els desplaçaments i els girs als punts A, B i C.
 - b. Feu un dibuix de la deformada a estima.
 - c. Volem construir el tram AB de la biga amb dos materials diferents, situats a cada banda de la seva superfície neutra. Tenint en compte la distribució d'esforços que es produirà a les seccions transversals entre A i B, feu una proposta sobre el tipus de material que faríeu servir tant per a la part inferior com per a la part superior del tram AB de la biga. Expliqueu-ne detalladament els motius.



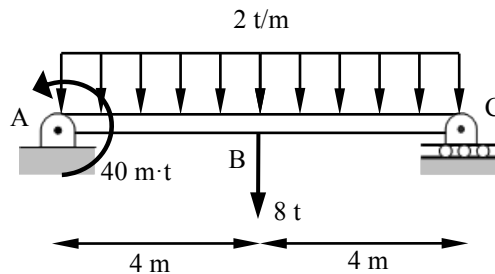
2. La biga de la figura té una càrrega distribuïda de 2 t/m a tota la seva longitud, un parell extern de 40 m·t a A i una càrrega concentrada de 8 t al punt B. Els seus suports són una articulació a A i un suport lliscant a C.
 - a. Calculeu les reaccions a A i C.
 - b. Trobeu els desplaçaments verticals i els girs als punts A, B i C.
 - c. Dibueixeu la deformada a estima de la biga.



3. La biga de la figura té una càrrega distribuïda de 2 t/m a tota la seva longitud, un parell (o un *moment*) extern de 40 m·t a A i una càrrega concentrada de 8 t al punt B. Els seus suports són una articulació a A i un suport lliscant a C.

a. Trobeu els desplaçaments verticals i els girs als punts A, B i C.

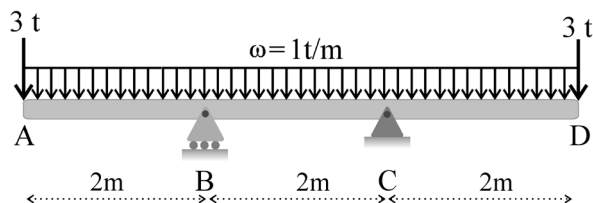
b. Dibuixeu la deformada a estima de la biga.



4. La biga del dibuix mesura 6 m i està recolzada al suport unilateral B i a l'articulació C. Dues càrregues de 3 tones actuen als seus extrems i una càrrega uniformement distribuïda d'1 t/m actua sobre tota la biga.

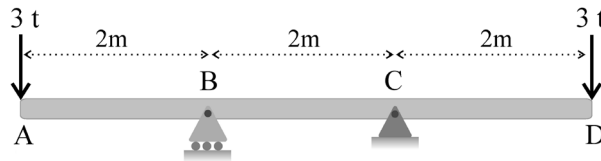
a. Trobeu els desplaçaments i els girs als punts A, B, C i D en funció de EI.

b. Dibuixeu-ne la deformada a estima.





5. La biga del dibuix mesura 6 m i està recolzada al suport unilateral B i a l'articulació C. Dues càrregues de 3 tones actuen als seus extrems.
- Dibuixeu-ne la deformada a estima.
 - Comenteu per què la *flexió pura* és especialment rellevant per a aquesta biga i quines implicacions té això sobre la seva curvatura.



²⁶ Aquesta expressió constitueix el *primer teorema de Mohr*.





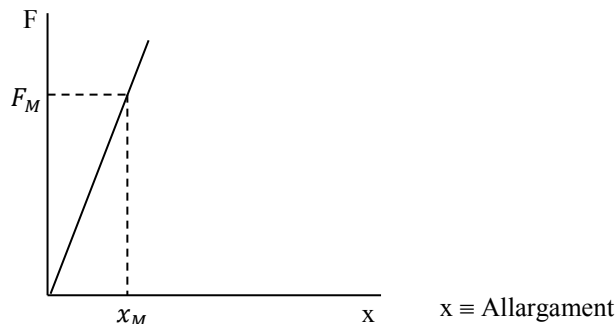
Apèndix: Ampliació d'elasticitat

En aquest apèndix, tractem d'alguns aspectes bàsics de la teoria de l'elasticitat que no s'han tractat al capítol 7, perquè no formen part del tronc principal d'aquest llibre. Tanmateix, considerem interessant explicar alguns efectes que hem negligit als capítols 7 i 8, atès que el seu estudi ens permet comprendre per què no s'han tingut en compte en les condicions indicades en aquells capítols.

Hem d'advertir el lector que l'elasticitat és un tema complex i que aquí només en tractem alguns temes fonamentals. El lector ha de consultar els múltiples tractats d'elasticitat que existeixen a la literatura si vol aprofundir aquesta branca de la mecànica dels sòlids.

A.1 Energia emmagatzemada en la deformació sota una força axial

Considerem el cas d'una barra prismàtica recta en equilibri i sotmesa a forces en la direcció axial principal. Per a materials lineals, la llei de Hooke ens diu que, si les forces són prou petites, hi ha una relació lineal entre la força aplicada i l'allargament de la barra:



El treball que realitza la força quan l'allargament de la barra oscil·la entre x_1 i x_2 el podem calcular com:

$$\Delta W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

En el nostre cas, la llei de Hooke ens diu que $F(x) = \frac{SE}{L} \cdot x$. Per tant:

$$\Delta W = \int_0^{x_M} \frac{SE}{L} x dx = \frac{SE}{L} \frac{x_M^2}{2} = \frac{1}{2} F_M x_M$$

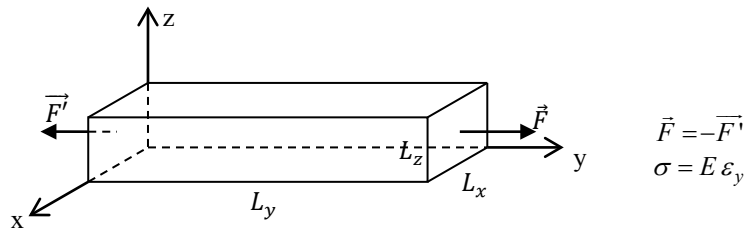
El treball realitzat sobre la barra s'hi acumula en forma d'*energia de deformació* o *energia elàstica*. Podem calcular fàcilment l'energia que s'acumula per unitat de volum a la barra o *densitat volumètrica d'energia* quan el material és homogeni, ja que que és constant a tot el cos.

$$\frac{\Delta E}{V} = \frac{1}{2} \frac{F_M}{S} \frac{x_M}{L} = \frac{1}{2} \sigma_M \varepsilon_M \quad (1)$$

A.2 Relacions de Poisson

Considerem novament el cas d'una barra prismàtica recta en equilibri i sotmesa a forces en la direcció axial principal, com s'il·lustra a la figura a.1.

Fig. a.1



Fins ara, ens hem fixat en la deformació en la direcció d'aplicació de la força. No obstant això, també esperem deformació en les direccions perpendiculars. En particular, si la força té la direcció i el sentit de la figura, n'esperarem un escurçament en les direccions perpendiculars. L'experiència demostra que aquesta deformació existeix i que, per a petites deformacions, està relacionada linealment amb la deformació en la direcció de la força (per a materials homogenis i isotrops). Així tenim les anomenades *relacions de Poisson*:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &\equiv \frac{\Delta L_x}{L_x} = -\mu \frac{\Delta L_y}{L_y} \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_z \\ \varepsilon_z &\equiv \frac{\Delta L_z}{L_z} = -\mu \frac{\Delta L_y}{L_y} \end{aligned}$$

on μ és l'anomenat *coeficient de Poisson*, que, per als materials comuns, satisfà $\mu > 0$.



A.3 Càrrega multiaxial

Considerem ara una barra prismàtica recta, sotmesa no tan sols a càrregues en una direcció axial principal, sinó també a càrregues ortogonals a totes les seves cares. A la figura a.2, hem representat aquesta barra prismàtica mostrant les forces resultants estàticament equivalents a les càrregues uniformement distribuïdes (σ_x , σ_y i σ_z) que s'hi apliquen realment. Observeu que hem dibuixat uns eixos alineats amb les forces resultants. L'estat de càrrega esmentat s'anomena *càrrega multiaxial*.

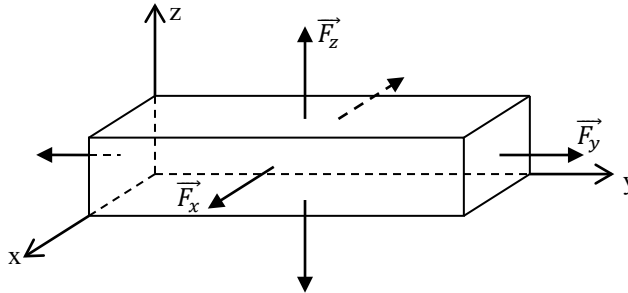


Fig. a.2

L'estudi de situacions d'aquest tipus té un alt interès teòric, perquè simplifica l'estudi d'estats de càrrega totalment generals. D'altra banda, també té aplicació en situacions pràctiques. Per exemple, trobem una càrrega multiaxial quan una barra és sotmesa a una càrrega de compressió en la direcció axial principal i, alhora, es troba entre dos murs paral·lels i molt rígids que limiten la seva deformació en una de les direccions perpendiculars a la de l'aplicació de la càrrega. La barra tendirà a expandir-se en les direccions perpendiculars i això generarà tensions (reacció) dels murs sobre la barra (en aquest cas, de compressió) en aquesta direcció perpendicular.

A.3.1 Llei de Hooke generalitzada

Imposem que la barra resti en equilibri estàtic i elàstic un cop se li apliquen el conjunt de tensions normals. A continuació, enumerem les definicions de les tensions normals a les cares i el valor de les superfícies on aquestes s'apliquen, fent servir el sistema d'eixos esmentat anteriorment:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{F_x}{S_x} & S_x &= L_y L_z \\ \sigma_y &= \frac{F_y}{S_y} & S_y &= L_x L_z \\ \sigma_z &= \frac{F_z}{S_z} & S_z &= L_x L_y \end{aligned}$$

Farem servir els convenis de signes que hem aplicat fins ara i que ens permetran distingir amb claredat si en una direcció determinada hi ha una tracció (o compressió) i si hi ha un allargament (o escurçament):



$$\left. \begin{array}{l} \sigma_i > 0 \text{ tracció} \\ \varepsilon_i > 0 \text{ allargament} \end{array} \right\} i = x, y, z$$

Si l'estat de càrrega manté la barra prismàtica dins del límit elàstic (la qual cosa implica, en la major part dels materials de construcció, que les deformacions unitàries són molt menors que la unitat), llavors és correcta l'aplicació de l'anomenat *principi de superposició*, que en aquest cas diu el següent: Si un element de volum és sotmès a l'acció dels esforços σ_x , σ_y i σ_z , els components de la deformació resultant en qualsevol de les tres direccions dels eixos es poden obtenir sumant les deformacions que es produïrien en cas d'actuar cadascun dels esforços per separat. Així, fent servir la llei de Hooke i les relacions de Poisson, tenim:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E},$$

$$\varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \text{ i}$$

$$\varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

Per exemple, tenim que la deformació unitària en la direcció x , ε_x és deguda a la suma de les produïdes per la tensió σ_x , per mitjà de la llei de Hooke, i per les tensions σ_y i σ_z , mitjançant les relacions de Poisson.

El conjunt d'aquestes tres equacions es coneix pel nom de *llei de Hooke generalitzada* (o *tridimensional*). Observeu que aquestes equacions constitueixen un conjunt de tres equacions lineals en les deformacions unitàries i les tensions. Entre les aplicacions de la llei de Hooke generalitzada, tenim la resolució de problemes en què les tensions vénen donades i es volen calcular les deformacions en cadascuna de les tres direccions, i la resolució de problemes hiperestàtics en què la deformació en alguna de les direccions està limitada (ve donada) i es coneixen, per exemple, dues tensions.

A.3.2 Energia emmagatzemada per unitat de volum

El valor de l'energia elàstica emmagatzemada per unitat de volum quan una barra prismàtica recta, com l'esmentada, és sotmesa a un estat de càrrega multiaxial es pot deduir fàcilment de l'expressió (1) (que hem obtingut per a forces en una única direcció), si tenim en compte l'aplicació de forces en les tres direccions i el principi de superposició. D'aquesta manera, obtenim directament:

$$\frac{\Delta E}{V_0} = \frac{1}{2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z]$$



A.3.3 Compressió uniforme

Un cas particular de càrrega multiaxial es dona quan les tres tensions prenen el mateix valor i aquest és negatiu. Aquesta situació la trobem, per exemple, quan tenim un bloc prismàtic submergit en un fluid. La pressió P serà, llavors, la tensió normal sobre cadascuna de les parets del bloc, i diem que sobre ell s'exerceix una *compressió uniforme*:

$$\sigma_i = -P \quad P > 0 \quad P \equiv \text{pressió sobre les cares del prisma}$$

Per calcular la deformació que experimenta aquest bloc, fem servir la Llei de Hooke generalitzada particularitzada per a aquest cas:

$$\varepsilon_i = \frac{\mu+1}{E} \sigma_i - \frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \rightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1+\mu}{E} (-P) - \frac{\mu}{E} (-3P) = -\frac{(1-2\mu)}{E} P$$

$$P = \frac{E}{3(1-2\mu)} e \quad \text{on} \quad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z .$$

Com que les deformacions unitàries són molt més petites que la unitat, podem calcular aproximadament variació relativa de volum com segueix:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(L_x + \Delta L_x)(L_y + \Delta L_y)(L_z + \Delta L_z) - L_x L_y L_z}{L_x L_y L_z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \dots \cong e$$

D'aquesta manera, en podem obtenir el resultat següent:

$$P = -x \frac{\Delta V}{V}$$

on

$$x \equiv \text{mòdul d'elasticitat de volum o mòdul de compressibilitat} = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

Observeu que aquest exemple demostra, en general, que no hem d'esperar la conservació del volum sota l'acció de càrregues axials ($\Delta V \neq 0$).

Com que els materials habituals de construcció redueixen el seu volum en ser submergits, tenim que $\Delta V / V < 0$, la qual cosa implica que $x > 0$ i, en definitiva:

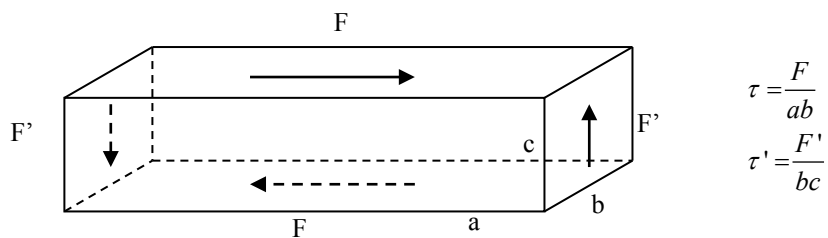
$$0 < \mu < \frac{1}{2}$$

Per tant, el coeficient de Poisson d'aquests materials ha de ser més petit que 0,5.

A.4 Cisallament pur

Considerem el prisma recte de la figura a.3 (d'arestes a , b i c), sotmès ara a tensions tangencials τ i τ' provinents de càrregues tangencials distribuïdes a les dues cares ab i a les dues cares bc , respectivament. Les forces concentrades estàticament equivalents seran $F = \tau ab$ i $F' = \tau' bc$ (representades a la Fig. a.3; observeu que, en una cara i en la seva oposada, les forces tenen sentits contraris). Diem que el prisma es troba sotmès a *cisallament pur* quan sobre ell actuen només aquestes tensions tangencials i se satisfà $\tau = \tau'$. Aquest estat és especial és fàcil de veure que si $\tau = \tau'$; llavors, el prisma recte roman en equilibri estàtic. És a dir, el prisma es troba en equilibri sota l'acció exclusiva de tensions tangencials i, per tant, la seva deformació serà deguda exclusivament a elles.

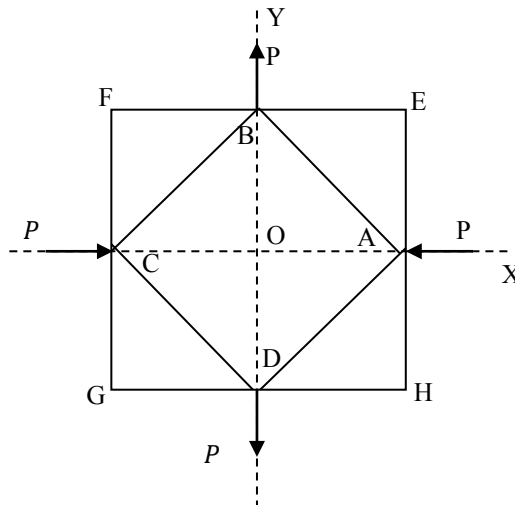
Fig. a.3



Intentem ara estudiar la deformació que es produirà en aquest estat de cisallament pur en funció de les tensions tangencials que s'hi apliquen. A continuació, veurem com aquesta deformació està relacionada amb la deformació per càrrega multiaxial uniforme que hem estudiat anteriorment.

Prenem un prisma recte EFGH de dimensions $\sqrt{2}l, \sqrt{2}l, l$, en què l és la longitud en la direcció Z perpendicular al pla del dibuix. Sotmetem a aquest prisma a una tracció uniforme en la direcció de l'eix Y i una compressió uniforme en la direcció de l'eix X , com s'indica a la figura a.4.

Fig. a.4





Sota l'acció d'aquest estat de càrrega, i fent servir la llei de Hooke multiaxial, podem obtenir les deformacions unitàries en la direcció dels eixos, tenint en compte que

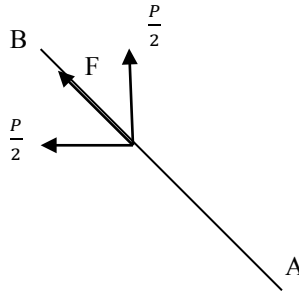
$$\sigma_z = 0 \text{ i } -\sigma_x = \sigma_y = \sigma = \frac{P}{\sqrt{2}l^2} :$$

$$-\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon = \frac{1+\mu}{E}\sigma \text{ i } \varepsilon_z = 0$$

Així doncs, podem deduir que en la direcció Y el prisma s'allargarà (Δ_{BD}), mentre que en la direcció X el prisma s'escurçarà (Δ_{AC}), de manera que

$$\Delta_{BD} = -\Delta_{AC} = \frac{(1+\mu)P}{El}$$

Tallem ara mentalment el prisma per un pla perpendicular al pla del dibuix i que passi justament pels punts A i B (i deixem de banda el tros ABE). Per tal que l'objecte restant es mantingui en equilibri, cal que sobre la superfície quadrada de costat l aparegui una distribució uniforme de forces, de manera que la resultant estàticament equivalent en la direcció X tingui una magnitud $-P/2$, mentre que en la direcció Y tingui una magnitud $P/2$, tal com s'indica al dibuix:



Com es veu, de la composició d'ambdues forces, en surt una força única (distribuïda uniformement) de direcció AB. D'aquesta manera, la tensió total serà tangencial al pla AB i de valor:

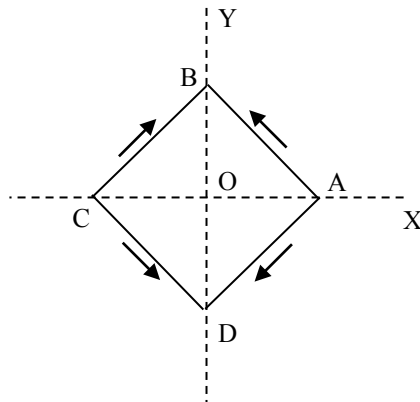
$$\tau = \frac{P\sqrt{2}}{2l^2} = \frac{P}{\sqrt{2}l^2} = \sigma$$

Repetint la mateixa operació amb les altres tres cantonades, n'obtenim un cub sotmès a un estat de cisallament pur, com es mostra a la figura a.5.

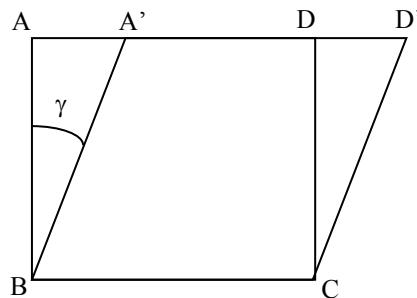
Per tant, hem d'entendre que un estat de cisallament pur és equivalent a un estat de tracció-compensió combinat, com el que s'ha proposat més amunt, a $\pm 45^\circ$.



Fig. a.5



Pel que fa a la deformació per cisallament pur, sabem quina és la deformació que la compressió-tracció a la qual és sotmès el prisma original (v. Fig. a.4) causa sobre ell. És fàcil, doncs, deduir que el cub sotmès a cisallament pur (cub de la Fig. a.5) es deformarà i es convertirà en un rombe. Això ens permet caracteritzar la deformació per cisallament pur amb un angle que denotem γ , com s'il·lustra a la figura següent:



on ABCD és la forma del prisma abans de la deformació i A'BCD' és la forma després de la deformació. L'angle γ està relacionat geomètricament amb la deformació unitària ϵ , calculada més amunt. És fàcil demostrar, amb una mica de geometria, que

$$\gamma = 2 \epsilon$$

Fent servir les relacions anteriors, n'obtenim:

$$\gamma = 2 \frac{1 + \mu}{E} \sigma = 2 \frac{1 + \mu}{E} \tau$$

Per tant, la deformació –caracteritzada per γ – és proporcional a la tensió tangent τ . Si denotem amb G la inversa del coeficient de proporcionalitat, podrem escriure l'anomenada *lleï de Hooke per a l'esforç tallant*:

$$\tau = G \cdot \gamma$$



on G rep el nom de *mòdul de rigidesa* (o *mòdul de tallant* o *de cisallament*) i queda determinat per E i μ segons:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

El cisallament té la seva importància en algunes situacions de la pràctica arquitectònica. En destaquem un parell:

- a.* Quan una estructura de formigó porticada, tancada per panys de paret de totxanes, es re-assenta amb el pas dels anys, és fàcil que apareguin petites escletxes a les parets a $\pm 45^\circ$. En general, són degudes a estats de cisallament sorgits del moviment relatiu dels elements que conformen el marc de formigó del pany de paret. L'escletxa surt en la direcció de la compressió i és perpendicular a la tracció.
- b.* Sobre una biga amb càrregues transversals, hi apareixen forces tallants i moments flectors. Al capítol 8, hem considerat negligibles els efectes de la deformació per forces tallants (cisallament) per a bigues prou primes. Tanmateix, per a bigues gruixudes (amb una ràtio longitud de la biga/gruix de la biga $\ll 20$), la deformació per cisallament pot ser important i, en alguns casos, pot arribar a superar la deformació per flexió.





Glossari

A

Armadura, 47, 55
Articulació, 38

C

Carcassa, 47
Càrrega axial uniforme, 92
Càrrega multiaxial, 119
Centroide, 99
Cisallament pur, 122
Coeficient de Poisson, 118
Compressió, 36
Compressió uniforme, 121
Condicions d'equilibri, 35
Conveni de signes, 64
Curvatura, 99

D

Deformació unitària, 95
Deformada a estima, 105
Diagrama del sòlid lliure (DSL), 44
Diagrames d'esforços axials, 78
Diagrames d'esforços tallants, 69
Diagrames de moments flectors, 69
Discontinuitats de $V(x)$ i $M(x)$, 67

E

Elàstica, 106
Element a força zero, 50
Encastament, 38
Energia emmagatzemada, 117
Energia emmagatzemada per unitat de volum, 120

Equilibri, 27

Equivalència estàtica, 36
Esforç tallant, 64
Estats bàsics de deformació, 108

F

Fibra, 96
Flexió Pura, 96
Força resultant (o total), 25
Força Resultant General (FR), 31
Forces axials, 77
Forces distribuïdes, 19
Forces internes, 61
Forces puntuals (o concentrades), 19
Forces transversals distribuïdes, 33

G

Gelosia, 47
Girs, 107

H

Hiperestaticitat, 43

I

Isoestaticitat, 43

L

Límit de proporcionalitat, 95

Ll

Llei de Hooke, 94
Llei de Hooke generalitzada, 119
Llei de Hooke per a l'esforç tallant, 124



Llei de les àrees, 66
Lleis de Newton, 26

M

Mètode dels nodes, 47
Mòdul d'elasticitat de volum, 121
Mòdul de compressibilitat, 121
mòdul de rigidesa, 125
Mòdul elàstic o de Young, 95
Moment d'inèrcia, 99
Moment d'una força, 31
moment flector, 64
Moment resultant, 33

P

Parell de forces, 37
Partícula Puntual, 18

Pla axial, 96
Principi de Transmissibilitat, 36

R

Relació de Poisson, 118
Representació gràfica, 20

S

Secció recta, 61
Sòlid Elàstic, 19
Sòlid Rígid, 19
Suport bilateral, 38

T

Tona-força (t), 19
Tracció, 36
Tram simple, 62