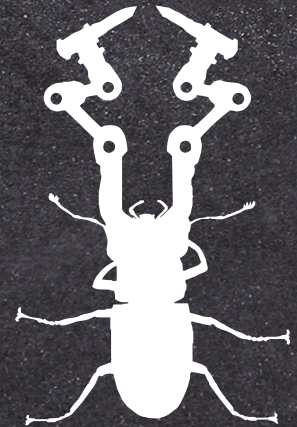


$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{K_i} f_{ik} \cdot y_{ik} + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{v_j} \hat{c}_{0e_{jl}} \cdot d_j \cdot \delta_{je_{jl}}$$

$$\sum_{l=1}^{n_j} \delta_{je_{jl}} = 1 \quad j = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots$$

$$\delta_{je_{jl}} \leq \sum_{k=1}^{K_{e_{jl}}} y_{e_{jl}k} \quad j = 1, \dots, n;$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH→ **UPCPOSTGRAU**

Optimitzar en enginyeria d'organització →
Conceptes i problemes explicats

$$\sum_{j \in E} d_j \cdot \delta_{jj} \leq \sum_{k=1}^{K_j} C_{ik} \cdot y_{ik}$$

Albert Corominas
Ernest Benedito



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCPOSTGRAU**

Optimitzar en enginyeria d'organització →
Conceptes i problemes explicats

Albert Corominas
Ernest Benedito

Primera edició: juliol de 2019

© Els autors, 2019

© Iniciativa Digital Politècnica, 2019
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Edifici K2M, Planta S1, Despatx S103-S104
Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

ISBN: 978-84-9880-755-4

DL: B 14627-2019

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei.

The most important qualification is ability to take a broad view of a problem so that important factors will not be missed.

P. M. S. Blackett (1950) *Operational Research Quarterly*, 1, 1, p. 6.





Índex

Índex	5
Presentació	11
Contingut, estructura i abast	11
Notació i convencions	14
A qui pot ser útil?.....	15
Fonts.....	16
Optar	19
Una discussió sobre el VAN	20
I una consideració final sobre la comparació d'opcions en què s'ha de tenir en compte el que succeeix al llarg d'un horitzó temporal	22
OP01. Rentar-se les mans: inversió vs. explotació	22
OP02. Estudis o treballes?	23
OP03. Pleguem o innovem?.....	25
OP04. Peatges: estovar o allargar?	26
OP05. Assistència en ruta	27
OP06. Cafeteres de qualitat	29
Seleccionar	33
SE01.1. Cobertura: espectre	34
SE01.2. Cobertura: assaig elèctric.....	38
SE02. LRPDP.....	40
SE03. Xarxa	43
SE04. Mapatge	46
SE05. Qui mel maneja	49
Vincular	55
VI01.1. Afectació: minsum	59
VI01.2. Afectació: minmax (coll d'ampolla)	60
VI02. Cadena	62
VI03. Pernils.....	70
VI04. <i>Cotxing</i>	73
VI05. Tovallons	76



VI06. Estiba	78
VI07.1. A cal ferrer, ganivet de ferro: comissions	81
VI07.2. A cal ferrer, ganivet de ferro: avaluacions.....	83
VI08. Expedició aèria	86
VI09. Suport al disseny de la cadena de subministrament	90
VI10. El càlcul paral·lel i la llei de d'Hondt	95
VI11. Camins crítics.....	97
VI12. Magatzem	102
VI13. Planta unidimensional	108
VI14. Els colors de les andanes.....	111
Distribuir	115
De Lagrange a Karush, Kuhn i Tucker	116
DI01. Estratificar.....	119
DI02. Explotació de mines	120
DI03.1. Publicitat: mercats independents	123
DI03.2. Publicitat: mercats connexos.....	123
DI04. Despendre	126
DI05.1. Monopoli mineral: temps discret, demanda lineal.....	127
DI05.2. Monopoli mineral: temps discret, demanda exponencial negativa.....	129
DI05.3. Monopoli mineral: temps continu.....	131
DI06. Demanda insatisfeta	132
DI07.1. Cartera de valors: actius independents	133
DI07.2. Cartera de valors: actius correlacionats	138
DI07.3. Cartera de valors: bundles	139
DI08.1. Sistema expert: preferències binàries	141
DI08.2. Sistema expert: notes	144
DI09. Escons	144
Fornir-se	149
FO01.1. Saldos: un article	149
FO01.2. Saldos: dos articles.....	150
FO02.1. Variacions Harris: el cost de llançament.....	152
FO02.2. Variacions Harris: cost i temps de llançament	157
FO02.3. Variacions Harris: aprenentatge.....	159
FO02.4. Variacions Harris: horitzó finit i actualització.....	162
FO03. Aprovisionament	165
FO04. Economia i hisenda: Cobb-Douglas	167
FO05. Capacitat o estocs?	170
FO06.1. Retorn a les aixetes: temps mínim, amb pressupost.....	172
FO06.2. Retorn a les aixetes: cost mínim	174
FO07.1. Assignació de màquines: deterministes	176
FO07.2. Assignació de màquines: aleatòries	177
FO07.3. Assignació de màquines: maximitzar el marge econòmic	187
FO08. Molta roba i poc sabó	187
FO09. Finançament	190
Concatenar	195

CO01. Canvi d'estat	196
CO02. On podem anar a parar?	198
CO03. Logística humanitària	203
CO04. Casino.....	208
CO05. Busos	212
Parar	215
Arbres de decisió.....	216
PA01.1. <i>¿Lo toma o lo deja?:</i> el concurs	217
PA01.2. <i>¿Lo toma o lo deja?: Les pêcheurs de perles</i> (Nadir i el tauró).....	220
PA01.3. <i>¿Lo toma o lo deja?: Les pêcheurs de perles</i> (Nadir, el tauró i Zurga)	221
PA02.1. Bombolla immobiliària: qui en dóna més?	224
PA02.2. Bombolla immobiliària: impost a la no venda	226
PA03. Amb qui ens quedem?.....	228
Renovar	235
RE01. Més fusta.....	239
RE02. <i>Au voleur!</i>	242
RE03. Rejuveniment.....	244
RE04. <i>The light that burns twice as bright burns half as long</i>	247
Enrobustir	251
EN01. Gran final.....	252
EN02. Grandíssima torbonada.....	253
EN03. Garantia.....	254
EN04. Voleu si voleu	255
EN05. <i>Just-on-time</i>	256
EN06. Relleus	258
EN07. Travessa del desert	261
EN08. <i>Destination Moon</i>	262
EN09. Androides?.....	264
EN10. Encadenament.....	267
EN11. Cadenes i baules	268
EN12. Transports col·lectius.....	270
EN13. El ram de la construcció	270
EN14. Més val prevenir	272
Capgirar	277
CA01. El <i>Newsvendor Problem</i> capgirat	278
CA02. Desmuntar i reciclar.....	286
CA03. Especejament.....	288
CA04. Bucle.....	292
CA05. Retirada.....	295
CA06. Melmelada.....	296
CA07. Vacunes	298
CA08. Mini Marienbad.....	300



Totum Revolutum.....	303
TR01.1. Economia i hisenda: autarquia o coordinació?	303
TR01.2. Canons o mantega?	308
TR01.3. IVA	309
TR02.1. Tallar o col·locar: al tall 1D	311
TR02.2. Tallar o col·locar: atracaments	315
TR02.3. Tallar o col·locar: al tall 2D	317
TR03.1. Depurar: tàctica.....	318
TR03.2. Depurar: estratègia	320
TR04.1. Cremar benzina: <i>volare</i>	321
TR04.2. Cremar benzina: solcar els mars.....	323
TR05.1. Localització: un lloc per viure	325
TR05.2. Localització: i un lloc per consolidar els residus orgànics	326
TR06. Piscicultura.....	328
TR07. Cicles de vida	330
TR08. La fidelització tenia un preu	332
TR09. En una galàxia molt llunyana.....	333
Jugar.....	339
JU01. Minimastermind: la combinació del cademat	339
JU02. L'anomenat Enigma d'Einstein	340
JU03. <i>Sudoku</i>	344
JU04. Quadrats grecollatins	347







Presentació

Contingut, estructura i abast

Aquest llibre conté problemes¹ d'optimització o de factibilitat en l'àmbit de l'enginyeria d'organització. Per a cada problema donem l'enunciat inicial, expliquem com es resol i, amb comptades excepcions, indiquem la solució o solucions. En molts casos presentem qüestions addicionals i els donem resposta.

En els enunciats (a diferència de la majoria dels publicats en llibres de text o proposats en exàmens o pràctiques, que solen ser molt precisos i tenir una estructura que guia l'estudiant en el procés de resolució), partim de la descripció d'una situació i, de vegades, d'un o diversos objectius, i després anem plantejant i resolent qüestions seguint el fil de reflexions que suscita el mateix procés de resolució. És a dir, tot i que formalment se separa l'enunciat inicial de la resolució,² en molts casos el conjunt de l'un i l'altra constitueixen una mena de narració. D'aquesta manera es pot posar de manifest el que hi ha, diguem-ho així, al darrere de cada enunciat, que pot resultar poc visible si només se'n dona la solució.

No és, per tant, un llibre de teoria il·lustrat amb exemples, ni una col·lecció tradicional de problemes resolts, entesa com un conjunt d'enunciats més o

¹ La paraula *problema* té accepcions diverses. Aquí ens referim a textos que plantegen una o diverses preguntes a les quals cal donar respostes raonades.

Entre altres, "problema", en els camps de l'optimització combinatoria i de la complexitat de problemes i algorismes, és una pregunta general com ara, referides a un graf, "existeix un camí hamiltonià?" o "quin és el circuit hamiltonià de cost mínim?" (aquesta darrera pregunta és la que defineix el problema TSP: *travelling salesperson problem*). Per a un problema, un joc de dades específic (com ara per al TSP un graf determinat) constitueix el que en anglès es diu *instance* (és a dir, un exemple, un cas, però no una *instància*, tot i que és molt freqüent aquesta traducció inapropiada) i nosaltres en diem un *exemplar*. La relació entre un problema, en l'accepció que comentem en aquest paràgraf, i un exemplar és anàloga a la que existeix entre una espècie animal o vegetal i els individus que hi pertanyen, dels qual es diu, precisament, que són exemplars de l'espècie.

² Els finals dels enunciats s'indiquen amb línies horitzontals discontinües; els de les resolucions, si cal, amb línies horitzontals contínues.



menys independents, seguits cada un pel resultat o per una exposició concisa del procés de resolució.

Els problemes presentats, amb alguna excepció, no es poden resoldre amb la mera aplicació mecànica d'un procediment, sinó que obliguen a pensar per treure'n l'entrellat i permeten ampliar o aprofundir la teoria corresponent (com els problemes *mind expanding* del llibre de Harvey Wagner³ o com aquelles cançons que l'Atahualpa Yupanqui deia que servien *pa pensar*). Per tant, no s'hi troben mers exercicis, és a dir, enunciats que requereixen únicament l'aplicació immediata d'un procediment i que tenen la finalitat que l'estudiant l'acabi de comprendre o el professorat comprovi que l'ha comprès fins al punt de saber-lo aplicar correctament. Esporàdicament, la resolució és molt senzilla, però hem inclòs l'enunciat perquè hem pensat que il·lustrava algun aspecte que ens semblava interessant.

Un problema, en el sentit acadèmic del terme, no correspon mai exactament a una situació real, perquè la realitat té sempre una complexitat superior a la que es pot reflectir en un enunciat, d'extensió obligadament molt limitada. Però pot captar els aspectes més essencials de la realitat a què es refereix, com ho fan les maquetes. En la major part dels problemes inclosos en aquest text la correspondència entre la situació descrita a l'enunciat i una situació real és immediata. En alguns hi ha una mica més de marge per a la fantasia, però en tots els casos se'n pot desprendre una lliçó útil per abordar problemes que es presenten a la vida de les organitzacions o, senzillament, per aprendre una tècnica o una manera de raonar (no es pot, en abstracte, aprendre a aprendre, com diu el famós i vacu eslògan pseudopedagògic, però és clar que cal i és possible aprendre coses i, a força d'aprendre'n, se n'adquireix l'hàbit i el mètode).

Hem optat per classificar els problemes d'acord amb el tipus de qüestió plantejada i no amb el de la tècnica que s'ha d'aplicar per respondre-la,⁴ perquè en molts casos no hi ha una única tècnica apropiada.⁵ I també, i en conseqüència,

³ Wagner, H. M. (1975) *Principles of operations research: with applications to managerial decisions*. Prentice-Hall.

⁴ També hem evitat la dicotomia determinista-aleatori com a criteri principal de classificació, tot i que en algun cas l'hem tinguda en compte per definir l'estructura interna d'un capítol.

⁵ Sovint es dona el cas que la resolució del problema es pot plantejar de manera que s'hi pugui aplicar un algorisme específic (com ara un algorisme de camins mínims) o com un programa matemàtic que cal resoldre amb el *resolvent* (traducció, més aviat forçada —resolvent és sinònim de resolutiu, adjectiu que s'aplica a allò que té la virtut de resoldre un abscess o una inflamació—, que proposem per a *solver*, ja que *solucionador* no l'admet el diccionari normatiu de català, ni tampoc el de castellà) de què es disposi. L'opció de l'algorisme específic potser seria més eficient des del punt de vista computacional, però a condició de disposar d'una implementació informàtica de l'algorisme, la qual cosa no sol succeir. A més, el plantejament com a programa matemàtic té l'avantatge de la flexibilitat, ja que és fàcil incorporar restriccions addicionals (les quals, tanmateix, poden tenir un impacte molt important en el temps de càlcul); en canvi, els algorismes específics solen ser inservibles si la formulació del model no s'ajusta exactament al format que requereixen. Fa anys, quan la programació matemàtica era una eina feixuga, l'èmfasi en els algorismes específics estava més justificat, però ara la programació matemàtica sol ser el que, per analogia amb la medicina, podem dir-ne tractament d'elecció i d'ampli espectre (com es deia en un anunci d'un producte de neteja: "jo en faig servir un, no en faig servir cinquanta").

per no propiciar que la primera reacció davant d'un problema sigui la d'intentar associar-lo amb una de tècnica coneguda.⁶

Aquest tipus de classificació, a més, permet posar de manifest relacions entre problemes que a primera vista semblen inconnexos. De la mateixa manera que se sol dir que tots els arguments d'obres de ficció (novel·les, teatre, pel·lícules) són variants de trenta-sis⁷ o fins i tot de vint arguments universals,⁸ els enunciats de problemes, de qualsevol disciplina, són variants d'un nombre més aviat reduït d'enunciats bàsics. Adonar-se'n proporciona una visió més estructurada, que supera la de considerar cada problema com un cas particular i posar al davant allò que té d'específic.

Per tant, els enunciats i els comentaris corresponents s'han organitzat en capítols, cada un dels quals inclou una breu introducció en què definim la temàtica a què es refereix. A la introducció o en el decurs del capítol, quan ho hem considerat pertinent, presentem, a vegades críticament, conceptes i eines. Cada capítol correspon a un tipus genèric de problema (per exemple, optar, seleccionar o vincular). De tota manera, en algunes ocasions una cosa porta a una altra i partim de la situació descrita en un enunciat per fer una incursió en altres tipus de problemes que, per tant, apareixen en un capítol que, d'entrada, no els correspondria. Ara bé, tal com de tant en tant hi ha arguments realment innovadors o difícils d'encasellar, també hi ha problemes per als quals no hem sabut detectar prou afinitats amb d'altres, o que tenen afinitats múltiples, i que finalment hem col·locat en un capítol que hem anomenat *totum revolutum*.

Cada problema té un codi i un títol. El codi comença amb dues lletres que identifiquen el capítol (DI, per exemple, per al capítol "Distribuir") seguides per dues xifres que corresponen a la posició del problema en el capítol. Tots els problemes d'un mateix capítol tenen alguna relació entre si, però n'hi ha que la tenen especialment forta. En aquest cas diem que formen un grup. Tots els problemes d'un mateix grup tenen les mateixes quatre posicions inicials del codi i es distingeixen per la xifra que figura en cinquena posició, separada per un punt de la quarta. D'altra banda, els títols dels problemes d'un mateix grup tenen una primera part comuna i una segona part específica, separada de la primera per dos punts.⁹

De tota manera, hi ha problemes que per ser resolts eficientment requereixen algorismes específics i, d'altra banda, en moltes aplicacions reals la complexitat i les dimensions dels models obliguen a desenvolupar procediments de resolució ad hoc, sovint heurístics.

⁶ *If all you have is a hammer, everything looks like a nail*, diu la famosa sentència, atribuïda a Abraham Maslow, a Bernard Baruch i fins i tot a Mark Twain.

⁷ Polti, G. (1895) *Les trente-six situations dramatiques*. Mercure de France.

⁸ Tobias, R. (1993) *Twenty Master Plots: And How to Build Them*. Writer's Digest Books.

⁹ Exemples: VI06. Estiba. Grup: SE01.1. Cobertura: espectre. SE01.2. Cobertura: assaig elèctric.



Els capítols, si es té un cert coneixement de la teoria que pertoqui, es poden llegir en qualsevol ordre, però cada un constitueix una unitat i convé llegir-lo seqüencialment, tot i que molts problemes es poden estudiar aïlladament.

El conjunt constitueix un ampli mostrari d'aplicacions i de tècniques, però, per descomptat, la cobertura temàtica no és exhaustiva, perquè la varietat dels problemes d'optimització i factibilitat és pràcticament il·limitada. A més, alguns tipus de problemes estan relativament poc representats, perquè un tractament més extens duria a una superposició excessiva i innecessària amb altres textos que els tracten de manera completa i satisfactòria.¹⁰

Notació i convencions

Per la naturalesa dels problemes considerats, el text conté nombroses equacions. Atès que una descripció absolutament formal de la notació emprada seria força extensa, hem procurat donar les indicacions que ens han semblat necessàries perquè el text sigui comprensible, assumint un coneixement bàsic de la teoria corresponent i alguna familiaritat amb la notació més habitual en cada cas. Ocasionalment fem servir un asterisc per indicar que una solució o el valor d'una de les variables que la componen són òptimes.

En els models de programació matemàtica normalment no repetim, per brevetat, la definició dels tipus de variables si aquestes s'han descrit anteriorment. Formalment, en aquests models l'abreviatura "s. a" (per "subjecte a") precedeix les restriccions, però en molts casos l'hem considerat sobreentesa.

Malgrat que estrictament caldria que féssim una distinció entre funcions afins i funcions lineals, ens referim a totes dues com a funcions lineals, en contraposició a les no lineals. Aquest ús abusiu de la terminologia és habitual en l'àmbit de l'optimització, en què es parla de programes lineals (si només involucren funcions lineals i afins) i de programes no lineals (si involucren alguna funció que no és lineal o afí).

En general, les unitats només s'especifiquen quan és estrictament necessari (per exemple, si considerem un horitzó temporal dividit en períodes, en molts casos no cal especificar si es tracta de dies, setmanes, mesos o anys; tampoc no sol caldre indicar la unitat monetària €, \$... en què s'expressen preus, costos i pressupostos, però si ha semblat necessari els valors s'expressen en una unitat monetària abstracta: u. m.). Hem procurat que els valors numèrics de les dades siguin versemblants, en termes absoluts o relatius, però no necessàriament corresponen a cap situació real.

Els càlculs, amb poques excepcions, no es detallen, atesa la disponibilitat d'instruments, com ara fulls de càlcul, per resoldre equacions o programes matemàtics de dimensions moderades. Si es té accés a un llenguatge de modelització,

¹⁰ Ens referim als llibres de R. Companys, editats per Publicacions d'Abast, SLL: *Programación dinámica* (2002); *Teoría de la decisión (I y II). Utilidad, decisión, juegos y multicriterio* (2004); *Ejercicios resueltos de decisión (I y II)* (2006).

com ara OPL, i un resolvent, com ara CPLEX o Gurobi, és possible obtenir en menys temps els resultats numèrics dels problemes proposats¹¹ i per a jocs de dades de dimensions més grans.¹² Amb independència de l'instrument emprat, els resultats han de ser coherents amb els que presentem en el text, tot i que mai no es pot descartar absolutament la possibilitat que estiguin exempts d'errors; però s'ha de tenir en compte que en cas d'òptim múltiple, que no és infreqüent, la solució proporcionada per un resolvent pot ser diferent de l'obtinguda amb un altre, o fins i tot pot dependre de l'ordre en què s'escriuen les restriccions (tanmateix, és clar, el valor de la funció objectiu és el mateix per a totes les solucions òptimes).

En alguns enunciats hi surten noms d'empreses o d'organitzacions, la qual cosa no té altra finalitat que facilitar-ne la redacció. Tots aquests noms són ficticis i si en algun cas coincidissin amb el nom d'una organització existent seria per mera casualitat, per la qual demanem disculpes a la bestreta.

Hem procurat que el llenguatge no sigui discriminatori per raó de gènere. D'altra banda, parlem de proveïdores i no, com és usual, de proveïdors, perquè les entitats que fan la funció de proveir una empresa de matèries primeres o components són també empreses, a les quals, per tant, resulta més natural considerar com a proveïdores que com a proveïdors.

A qui pot ser útil?

El text, així ho esperem, dóna un punt de vista diferent de l'habitual en la presentació dels problemes d'optimització i de factibilitat en enginyeria d'organització, i en alguns aspectes arriba a desenvolupaments relativament avançats. Per tant, pot interessar, en primer lloc, a l'estudiant amb coneixements d'àlgebra, càlcul, probabilitats i estadística que vulgui endinsar-se en l'àmbit de l'enginyeria d'organització; una vegada hagi estudiat el llibre haurà assolit un bon nivell en molts aspectes d'aquesta branca de l'enginyeria, en el ben entès que estudiar

¹¹ Ens referim al temps transcorregut des del moment que es comença a treballar en un problema fins que se n'obté la solució i no al temps de càlcul, que per als jocs de dades que es proposen és gairebé sempre insignificant. Tot i que el temps de càlcul de CPLEX o un resolvent similar sigui menor, per a un mateix problema, que el corresponent a un full de càlcul, per a jocs de dades com els inclosos en els enunciats la diferència generalment és inapreciable (no així en problemes de dimensions més grans, que fins i tot poden ser intractables amb fulls de càlcul, els quals solen tenir limitacions severes pel que fa a les dimensions que admeten). En canvi, el temps que cal per preparar un model amb un llenguatge de modelització pot ser significativament inferior al corresponent a fer-ho amb un full de càlcul.

¹² La potència dels mitjans de càlcul disponibles (maquinari + programari), fins i tot en l'àmbit domèstic, té implicacions rellevants, de les quals potser no tothom és plenament conscient, en la manera d'abordar la resolució dels problemes i, per tant, en la docència i fins i tot en la recerca. Molts problemes que fa unes dècades només es podien abordar amb procediments heurístics ara es poden resoldre ràpidament, si no es tracta d'exemplars de grans dimensions, amb procediments exactes d'ampli espectre, com hem dit a la nota 5.



bé aquest llibre vol dir fer la molta feina ineludible per comprendre els desenvolupaments que s'hi presenten i per comprovar, amb l'eina de càlcul de què es disposi, les solucions numèriques.

El professorat també pot trobar-hi elements útils per a la seva activitat docent. Molts enunciats poden servir com a base de pràctiques o de propostes de treballs i creiem que fins i tot una seqüència apropiada d'enunciats pot ser el fil conductor en el desenvolupament d'algunes assignatures o parts d'assignatures.

Finalment, pensem que el llibre constitueix un material adequat perquè l'exestudiant actualitzi coneixements en aquestes matèries i vegi que els instruments per resoldre'n problemes han progressat fins al punt que ara és fàcil i còmode trobar solucions exactes en casos en què abans només hi havia la possibilitat d'obtenir solucions aproximades amb procediments específics o recórrer a instruments de cost elevat i disponibilitat limitada.

Fonts

Els problemes proposats tenen orígens molt variats. Alguns són coneguts des de l'antiguitat. Altres són variants de problemes, que ara es poden considerar clàssics, plantejats en els inicis de l'aplicació de tècniques quantitatives per resoldre problemes de disseny i de gestió de sistemes productius i logístics. Molts provenen, més o menys directament, d'algun o alguns dels centenars d'enunciats generats, des que en el pla d'estudis de 1964 s'establí l'especialitat d'Organització Industrial a l'ETSEIB,¹³ pel professorat de les assignatures de mètodes quantitius i d'organització industrial, liderat inicialment pel professor Ramon Companys.¹⁴ Finalment, n'hi ha de generats expressament per a aquest text, per cobrir els buits que deixaven els procedents d'altres fonts.

Normalment no indiquem l'autoria específica dels enunciats que no són plenament originals, perquè el text que es presenta té canvis substancials en relació amb el que l'ha inspirat o perquè, excepte en casos molt aïllats, els textos de partida no estan signats i, per tant, ens hauríem de refiar de la memòria o de la intuïció, les quals no són precisament gaire fiables. Naturalment, la responsabilitat de qualsevol error que hi pugui haver ens correspon plenament.

¹³ Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona, actualment a la Universitat Politècnica de Catalunya.

¹⁴ En aquests casos, les idees inicials poden procedir d'enunciats del mateix professor Companys, d'un dels autors d'aquest llibre (Albert Corominas) o d'altre professorat del grup (J. M. Ibáñez, X. Roselló). Tanmateix, la versió proposada en aquest llibre sovint és prou diferent de l'original.



→ 1



Optar

Optar és decidir-se per una de les alternatives possibles. Per tant, tots els problemes de decisió són d'aquest tipus (és a dir, tots els problemes d'aquest llibre es podrien encabir en aquest capítol), però aquí considerem només els casos en què el nombre d'alternatives és finit (i no gaire gran). Els problemes d'aquest capítol són molt fàcils de resoldre i l'interès que puguin tenir rau més en la situació descrita a l'enunciat i les preguntes formulades que no pas en el procés de resolució.

Així mateix, es considera únicament el cas monocriteri, la resolució del qual conceptualment és molt senzilla (una altra cosa és que el criteri adoptat sigui o no apropiat): es redueix a avaluar i comparar cada una de les alternatives, segons el criteri elegit. Això, si el nombre d'alternatives no és gaire gran (és a dir, que hi ha prou temps per avaluar-les totes), no té altra dificultat que la que pugui presentar l'avaluació mateixa. Altrament, cal resoldre un problema d'optimització combinatòria o de variable contínua.

Ara bé, quan la decisió que cal prendre té a veure amb el que succeeix al llarg d'un horitzó temporal, es tracta sempre, de fet, d'un problema multicriteri. No sols perquè des del punt de vista econòmic no és el mateix tenir uns diners avui que tenir-los l'any que ve (perquè si tinc diners avui puc fer un dipòsit bancari o comprar una lletra del Tresor i al cap d'un any cobrar els interessos, i si no els tinc i els necessito hauré de demanar un préstec o contractar una pòlissa de crèdit i pagar els interessos corresponents), sinó senzillament perquè a ningú no li és indiferent disposar d'uns diners avui o tenir-los més endavant. Per tant, per avaluar una decisió que implica moviments de fons en diferents instants o períodes s'ha de tenir en compte que els imports corresponents a diferents moments no poden sumar-se sense més ni més. Les coses es compliquen perquè, com que els preus varien al llarg del temps, el poder adquisitiu d'una unitat monetària no és el mateix en moments diferents.



Una discussió sobre el VAN

Tradicionalment, el concepte que s'ha aplicat per superar aparentment totes aquestes dificultats és el VAN (valor actual net; en anglès, *Net Present Value*, NPV). Parteix d'una idea molt senzilla: si, d'una banda, podem dipositar diners sense límit d'import i obtenir-ne un tipus d'interès determinat i , d'una altra, en podem demanar qualsevol quantitat que necessitem, pagant el mateix tipus d'interès que ens abonem pels dipòsits, aleshores una unitat monetària a t és equivalent a $(1 + i)$ unitats monetàries a $t + 1$. Amb aquests supòsits, un import corresponent a un període es pot traslladar, per dir-ho així, a qualsevol altre període, i si traslladem els imports de tots els períodes a l'instant inicial i els sumem, obtenim el VAN (aquests imports són els dels moviments de fons, és a dir, la diferència entre els cobraments i els pagaments corresponents a cada període). Si el VAN és positiu, la decisió és rendible; si comparem dues o més decisions, la més rendible és la que té un VAN més gran.

Per tant, una vegada estimats els moviments de fons, el càlcul del VAN és immediat. Lamentablement, és obvi que els supòsits en què es basa només es compleixen en situacions molt específiques. Si una empresa té una pòlissa de crèdit i no arriba mai a tenir excedent de tresoreria ni a superar el límit de crèdit concedit, és cert que paga el mateix interès per disposar d'uns diners que el que obté d'un moviment de fons positiu que inverteix en rebaixar el saldo negatiu de la pòlissa. Si unes activitats no impliquen canvis del tipus d'interès, en aquest context es diu que són marginals. Un gran projecte d'inversió, tanmateix, difícilment serà marginal. Una economia domèstica és molt improbable que es trobi en una circumstància com la descrita (per exemple, si inverteix una part dels estalvis en l'amortització d'una part d'una hipoteca, el banc segurament li cobrarà una comissió, per la qual cosa el tipus d'interès del deute serà diferent del de la inversió).

Per tant, en general, determinar el valor del tipus d'interès que s'ha d'aplicar per actualitzar els moviments de fons és problemàtic. Una sortida tradicional per superar aquesta dificultat és calcular el VAN per a valors diversos del tipus d'interès i determinar així per a quins intervals d'aquests valors el projecte és rendible o per a quins intervals un projecte és més rendible que un altre. D'aquesta manera potser es pot assegurar que la decisió és correcta encara que no es conegui del cert el valor apropiat del tipus d'interès, però sempre en el supòsits que és el mateix tant si deixes diners com si te'ls deixen i que els imports no estan limitats.

És clar, a més, que en calcular els moviments de fons amb vista a calcular el VAN no s'han de tenir en compte els pagaments per interessos, perquè, en els supòsits esmentats, ja s'han tingut en compte implícitament. Tanmateix, els interessos són una despesa i , per tant, minven els beneficis, dels quals depèn l'import de l'impost de societats. En conseqüència, apareix un element que trenca l'esquema de càlcul del VAN.

Una altra dificultat conceptual ben coneguda en l'aplicació del VAN és la manera de considerar la variació dels preus. Cal fer els càlculs sense tenir en compte la variació dels preus, és a dir, en unitats monetàries constants, o bé en unitats monetàries corrents? La resposta tradicional és que es pot fer com es prefereixi, a condició de fer servir en el càlcul el tipus d'interès real en el primer cas i el tipus d'interès nominal en el segon.¹ Això és correcte en el cas improbable que els preus de tots els béns i serveis involucrats en la decisió evolucionin de la mateixa manera, perquè aleshores és com si la unitat monetària hagués canviat de valor (si tots els preus s'apugen un 3 %, és com si després de les apujades 1 u. m. passés a valer 1/1,03 unitats monetàries de les anteriors a l'augment de preus). Si no (i és clar que en general els preus dels béns i serveis no evolucionen de la mateixa manera; fins i tot n'hi pot haver uns que pugin i uns altres que baixin), els VAN calculats amb unitats monetàries constants o corrents no són necessàriament equivalents.

I s'ha de tenir en compte que, en el cas de diners que es deuen, l'interès pot ser més o menys elevat, però l'import que s'ha de tornar no depèn de l'evolució dels preus. Per tant, quan la proposta que s'ha d'avaluar requereix finançament és segur que hi ha un component dels pagaments, és a saber, la devolució del deute, que no té relació amb l'evolució dels preus.

Dit tot això, és clar que no considerem el VAN un criteri adequat per prendre decisions, excepte en escenaris de característiques molt específiques que difícilment es poden donar, si mai ho arriben a fer, en projectes d'envergadura, que generalment requereixen un finançament complex. En aquests casos, recomanem considerar explícitament el finançament (vegeu FO09) i adoptar com a criteri el valor final del projecte, és a dir, la disponibilitat de fons al final de l'horitzó de planificació.

Òbviament, aquest punt de vista difereix significativament del que s'expressa habitualment en els llibres de text, peròensem que la nostra posició ha quedat prou justificada en els paràgrafs precedents.

En conseqüència, en aquest text es fa ús del VAN amb moltes precaucions. Només quan es considera, explícitament o implícita, que es compleixen els supòsits en què es basa el VAN o perquè l'enunciat indica, sense valorar-ho, que la persona que pren la decisió l'ha adoptat com a criteri, per voluntat pròpia o per imposició.

¹ Per cert, el tipus d'interès real, i_r , es calcula a partir del tipus d'interès nominal, i_n , i de l'augment anual relatiu de preus, p , amb l'expressió $i_r = \frac{1+i_n}{1+p} - 1$. No és igual, per tant, com s'ha escrit més d'una vegada, a $i_n - p$. Aquesta diferència és una aproximació del valor correcte quan i_n i p són petits, però l'error pot ser important quan són grans. Per exemple, amb $i_n = 0,05$ i $p = 0,03$, la diferència és 0,02 i el valor exacte, amb 4 decimals, 0,0194; però amb $i_n = 0,30$ i $p = 0,20$, la diferència és 0,10 i el valor exacte, 0,0833.



I una consideració final sobre la comparació d'opcions en què s'ha de tenir en compte el que succeeix al llarg d'un horitzó temporal

Aquí ens referim a la definició de les opcions que cal comparar, amb independència del criteri que s'adopti per fer-ho. És freqüent que en molts enunciats de problemes d'avaluació i comparació d'inversions es digui que a l'instant inicial s'ha d'elegir una de les opcions disponibles i que ja no es pot decidir res més fins al final de l'horitzó temporal. Per exemple, es pot tractar de decidir entre construir un magatzem petit (P) o un de gran (G) a partir d'unes hipòtesis sobre la demanda i llurs probabilitats. Però en una situació com aquesta es pot prendre una decisió en l'instant inicial (per exemple, elegir l'opció P) i prendre decisions addicionals tenint en compte la informació que es va obtenint al llarg del temps (tancar el magatzem, deixar-lo com està, ampliar-lo).

OP01. Rentar-se les mans: inversió vs. explotació

El departament d'enginyeria d'una empresa ha d'elegir el model d'assegador de mans elèctric per aire calent que instal·larà en un nou establiment. Ha calculat que, en conjunt, els aparells hauran de fer 10.000 cicles diaris i que funcionaran 250 dies l'any. Transcorreguts 5 anys, es renovaran amb algun dels models que aleshores estiguin disponibles.

Ara, l'elecció es planteja entre el model Extra (cicle, 35 s; potència, 1,5 kW; preu, 80 u. m.; 100 unitats) i el model Súper (cicle, 25 s; potència, 2,0 kW; preu, 120 u. m.; 80 unitats).

El preu del kWh és de 0,17 u. m., i es preveu que es mantingui estable en l'horitzó de 5 anys. El tipus d'interès que aplica l'empresa per al càlcul del valor actual d'aquest tipus d'inversions és del 5 %. La companyia de subministrament elèctric factura cada 2 mesos.

En un cas com el d'aquest problema, en què sembla clar que les quantitats implicades són petites en relació amb els moviments de fons totals de l'empresa, és probable que la inversió sigui marginal (és a dir, tal que ni els cobraments ni els pagaments –en aquest cas només hi ha pagaments– no modifiquin el tipus d'interès amb què opera l'empresa) i sigui acceptable fer ús del VAN com a criteri de decisió.

El cost de la compra és de 8.000 i 9.600 u. m., respectivament, per als models Extra i Súper. El costos dels consums bimestrals, 1.032,99 i 983,80 u. m., també respectivament. Els valors actuals dels pagaments pels consums es calculen fàcilment com la suma dels 30 termes d'una progressió geomètrica de raó $1/\sqrt[2]{1,05}$: 27.387,57 i 26.083,40 u.m. Per tant, els valors actuals totals corresponents als models Extra i Súper són: $8.000 + 27.387,57 = 35.387,57$ i $9.600 + 26.083,40 = 35.683,40$. Així doncs, hi ha una diferència, a favor del model Extra, de 295,83 u.m. La diferència entre les dues opcions és inferior a l'1 % del valor

net actual total de qualsevol de les dues. Això fa pensar en la conveniència de tenir en compte altres criteris, bàsicament entorn del nivell de servei. D'entrada, 25 s per eixugar-se les mans són preferibles a 35 s i això afebleix la preferència pel model Extra. Per afinar més caldria estudiar les cues per estimar el temps transcorregut entre el moment en què l'usuari s'ha acabat d'esbandir les mans i el moment en què les té seques i deixa lliure l'aparell (observeu que 10.000 cicles diaris a 35 s són 97,22 h, i a 25 s, 69,44 h, amb una diferència de 27,78 h, que equival a més de 3 jornades de treball).

Una altra qüestió és la validesa de les previsions. Si considerem que el nombre de cicles diaris es pot situar en qualsevol valor de l'interval [9.000, 11.000], ens podem guiar per una taula com la següent:

Nombre de cicles diaris	VAN (Extra)	VAN (Súper)
9.000	32.648,81	33.075,06
10.000	35.387,57	35.683,40
11.000	38.126,33	38.291,74

Des del punt de vista del VAN, per tant, la preferència pel model Extra és robusta en relació amb els errors en les previsions.

Quant al tipus d'interès, és fàcil veure que el VAN del model Extra és inferior al del model Súper per a qualsevol tipus d'interès no negatiu.

En l'opció entre estudiar una carrera universitària o posar-se a treballar intervenen factors molt diversos, a més dels econòmics. Però si considerem únicament aquests últims, el plantejament de la qüestió és formalment molt semblant al d'OP01.

OP02. Estudis o treballes?

Suposem que una persona, P, que té 18 anys i que preveu jubilar-se als 70 i morir-se als 90, dubta entre posar-se a treballar immediatament amb un sou anual de S u. m. (deduïts impostos i cotitzacions) i una pensió $\alpha \cdot S$ u. m./any (amb $\alpha < 1$), o estudiar una carrera de 6 anys, amb un cost anual $\eta \cdot S$, amb la qual assolirà un sou anual $\gamma \cdot S$ (amb $\gamma > 1$) i una pensió $\alpha \cdot \gamma \cdot S$ u. m./any. Tots els valors monetaris indicats ho són en unitats monetàries constants.

P adopta el criteri del VAN amb un tipus d'interès real i i vol saber per a quin valor de γ és indiferent estudiar o treballar.

En el marc dels supòsits de l'enunciat (que són una versió molt simplificada de la realitat) i amb el criteri adoptat per P (que ara no discutim si és encertat o no), es tracta de comparar els dos valors següents (fem $\rho = 1/(1 + i)$; amb $i \neq 0$, $\rho \neq 1$).



$$\begin{aligned} \text{VAN}(\text{estudiar}) &= -\eta \cdot S \cdot \sum_{t=1}^6 \rho^t + \gamma \cdot S \cdot \sum_{t=7}^{52} \rho^t + \alpha \cdot \gamma \cdot S \cdot \sum_{t=53}^{72} \rho^t = \\ &= \frac{S}{1-\rho} \left[-\eta \cdot (\rho - \rho^7) + \gamma \cdot (\rho^7 - \rho^{53}) + \alpha \cdot \gamma \cdot (\rho^{53} - \rho^{73}) \right] \\ \text{VAN}(\text{treballar}) &= S \cdot \sum_{t=1}^{52} \rho^t + \alpha \cdot S \cdot \sum_{t=53}^{72} \rho^t = \frac{S}{1-\rho} \left[(\rho - \rho^{53}) + \alpha \cdot (\rho^{53} - \rho^{73}) \right] \end{aligned}$$

Per tant:

$$\frac{\text{VAN}(\text{estudiar})}{\text{VAN}(\text{treballar})} = \frac{-\eta \cdot (\rho - \rho^7) + \gamma \cdot (\rho^7 - \rho^{53}) + \alpha \cdot \gamma \cdot (\rho^{53} - \rho^{73})}{(\rho - \rho^{53}) + \alpha \cdot (\rho^{53} - \rho^{73})}$$

Si $\hat{\gamma}$ és el valor de γ per al qual aquest quocient és igual a 1, el VAN d'estudiar serà més gran o més petit que el de treballar segons si γ és més gran o més petit que $\hat{\gamma}$.

En el cas $\rho = 1$ les expressions anteriors no estan definides, però és fàcil, mitjançant la regla de l'Hôpital, calcular-ne els límits per a $\rho \rightarrow 1$. O bé, directament:

$$\text{VAN}(\text{estudiar}) = -6 \cdot \eta \cdot S + 46 \cdot \gamma \cdot S + 20 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot S$$

$$\text{VAN}(\text{treballar}) = 52 \cdot S + 20 \cdot \alpha \cdot S$$

$$\frac{\text{VAN}(\text{estudiar})}{\text{VAN}(\text{treballar})} = \frac{-6 \cdot \eta + 46 \cdot \gamma + 20 \cdot \alpha \cdot \gamma}{52 + 20 \cdot \alpha}$$

Si suposem $\eta = 0,4$, $\alpha = 0,5$, $i = 0,02$, resulta $\hat{\gamma} = 1,114$. La taula següent recull els valors de $\hat{\gamma}$ per a supòsits diversos del valor de i :

i	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
$\hat{\gamma}$	1,15	1,203	1,266	1,339	1,422	1,514	2,088	2,840	3,781	4,941

Deixant de banda les simplificacions en l'enunciat (bàsicament, el supòsit que la retribució és constant al llarg del temps i l'enfocament determinista – no es pot associar una probabilitat igual a 1 a jubilar-se als 70 i morir-se als 90; i tampoc a la durada dels estudis–) i encara que ens limitem a l'aspecte econòmic de la decisió, el VAN no és, en general, un bon criteri, perquè segurament no es compleix un dels supòsits en què es fonamenta el seu càlcul, és a saber, que el tipus d'interès és el mateix per als diners que ens deixen que per als que dipositem. Si P ha de demanar un préstec per poder estudiar podrà comprovar, una vegada l'hagi tornat, si mai ho aconsegueix, que obté per als seus estalvis un tipus d'interès molt inferior al que ha estat pagant.

A continuació deixarem de banda el VAN. Suposarem que els preus són constants i el tipus d'interès nul, per la qual cosa podrem sumar sense més els moviments de fons corresponents a períodes diversos. També prescindirem, déu n'hi do, d'amortitzacions, impostos i finançament.

OP03. Pleguem o innovem?

L'empresa SISA analitza, amb un horitzó de 10 anys, la planificació estratègica de la seva planta d'embotellament de sangria, que comercialitza amb la marca Solaris. La planta té una capacitat de producció de 20 milions d'ampolles/any, que és independent del tipus de beguda envasada i no es pot ampliar. El cost fix anual de mantenir la planta en funcionament és de 3 milions d'u. m. i el marge per ampolla (diferència entre el preu de venda a les distribuïdores i el cost variable unitari), de 0,40 u. m.

Fins ara, la demanda de Solaris ha estat suficient per mantenir la plena ocupació de la planta, però se'n preveu una caiguda persistent, pels canvis de gustos del públic, d'acord amb la taula següent (on la demanda s'indica en milions d'ampolles/any):

Any	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Demanda	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2

Les opcions que SISA considera són:

A: tancar la planta. En aquest cas s'ha de determinar el millor moment per fer-ho, tenint en compte que aquesta acció té un cost de $2 \cdot t - 10$ milions d' u.m.

B: llançar una nova versió de la beguda, baixa en alcohol i amb ingredients euforitzants, que comercialitzarà amb la marca Shazam, amb un marge de 0,70 u. m. per ampolla (que resulta d'un preu d'1,20 u. m. i un cost variable unitari de 0,50 u. m.). El llançament de Shazam es faria mitjançant una campanya de publicitat amb un cost de 8 milions d'u. m. el primer any i 6 el segon. La demanda estimada de Shazam, en milions d'ampolles, comptant els anys des del d'inici del llançament, és la següent:

Any	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Demanda	4	10	12	14	16	18	20	20	20	20

El primer any, a més de la producció necessària per satisfer la demanda, cal 1 milió d'ampolles com a subministrament inicial als establiments en què estarà a la venda. L'any anterior al del llançament caldrà fer una despesa de 10 milions d'u. m. per fer estudis i operacions d'adaptació de la planta; per tant, el primer any possible per al llançament de Shazam al mercat és l'any 2.



En aquesta opció s'ha de determinar quin és el millor any per fer el llançament de Shazam.

Tot i que l'enunciat és una versió molt simplificada de la realitat, n'inclou diversos elements significatius, que sovint no estan presents en els llibres de text i, per extensió, podem suposar que tampoc no ho estan en la docència. La demanda dels productes no creix eternament; tots tenen un cicle de vida més o menys llarg i se n'ha de preveure la substitució o renovar-ne les característiques. El llançament d'un nou producte requereix habitualment una inversió considerable en disseny del producte i del procés, i acumulació inicial d'estoc. La planificació estratègica, amb un horitzó temporal llarg, pot semblar inútil perquè les úniques decisions fermes que se n'han de derivar són les corresponents a l'instant inicial, però aquestes estan condicionades per les previsions del que passarà i del que es farà al llarg de l'horitzó i, a més, hi ha moltes decisions que necessiten un temps de preparació significatiu abans que siguin operatives, per la qual cosa s'han de preveure anticipadament (si Shazam s'ha de llançar al mercat l'any 2, la decisió s'ha d'haver pres l'any 1, i aquest any 1 ja cal fer activitats que impliquen despeses).

La resolució és trivial. Només cal enumerar i avaluar les solucions (any de tancament per a l'opció A, any de llançament per a l'opció B).

Per a l'opció A, el millor és tancar l'any 4, amb un moviment de fons acumulat de 17,2 milions d' u.m. Per a la B, introduir Shazam l'any 2, és a dir, com més aviat millor, amb un moviment de fons acumulat de 65,3 milions d' u.m. És clar que caldria saber què es faria, en l'opció A, en els 6 anys restants de l'horitzó de planificació i, en l'opció B, què es faria al final de l'horitzó. Però és prou clar que el que convé és passar de Solaris a Shazam com més aviat millor, al ritme que imposa l'evolució de la demanda.

OP04. Peatges: estovar o allargar?

AUPESA té la concessió, que venç a final de l'any 14,² de l'autopista de peatge A61, amb la qual preveu obtenir un marge anual de $P(1 + \alpha)^{t-1}$ u. m. (on t és l'any). Té també la concessió per 40 anys de l'A62, que s'inaugurarà a l'inici de l'any 3, amb la previsió d'assolir-hi un marge de $Q \cdot (1 + \beta)^{t-3}$ u.m. En les expressions indicades les u. m. són unitats monetàries constants corresponents a l'instant inicial.

Ateses diverses opinions manifestades sobre el peatge de l'A62, l'Administració proposa a AUPESA que hi apliqui el que es denominarà peatge tou, amb el qual el marge corresponent a l'A62 es reduirà a $0,40 \cdot Q \cdot (1 + \beta)^{t-3}$. Per compensar

² Suposem que som a l'inici de l'any 1.

AUPESA per aquesta reducció de tarifes, l'Administració està disposada a allargar la concessió de l'A61.

En el supòsit que s'adopti el VAN com a criteri per prendre aquesta decisió, es tracta d'establir unes expressions que permetin determinar el nombre mínim d'anys que s'ha de perllongar la concessió de l'A61 perquè l'operació sigui acceptable per a AUPESA i calcular aquest valor per a $P = 500$, $\alpha = 0,04$, $Q = 300$, $\beta = 0,08$ amb un tipus d'interès real del 5 %.

El valor actual de la reducció dels marges a causa de la implantació del peatge tou a l'A62 és $0,60 \cdot Q \cdot \sum_{t=3}^{42} \frac{(1+\beta)^{t-3}}{(1+i)^t}$ i el d'allargar τ anys la concessió de l'A61,

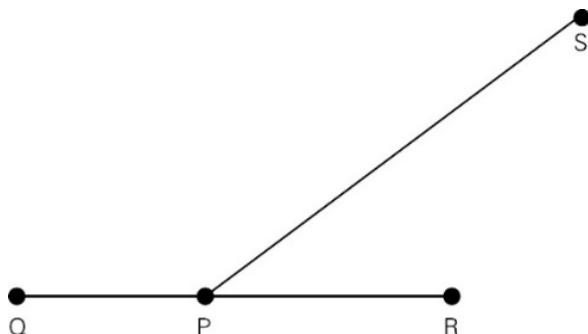
$P \cdot \sum_{t=15}^{14+\tau} \frac{(1+\alpha)^{t-1}}{(1+i)^t}$. Per tant, es tracta de trobar el menor valor de τ per al qual:

$$P \cdot \sum_{t=15}^{14+\tau} \frac{(1+\alpha)^{t-1}}{(1+i)^t} \geq 0,60 \cdot Q \cdot \sum_{t=3}^{42} \frac{(1+\beta)^{t-3}}{(1+i)^t}$$

Amb els valors numèrics indicats, resulta $\tau = 32$ anys (allargar la concessió té aleshores un valor actual d'11.535,16 u. m., que superen les 11.351,70 de reducció per la implantació del peatge tou).

OP05. Assistència en ruta

Un país té una xarxa de tres autopistes (PQ, PR, PS). Es desitja determinar el millor emplaçament, amb el criteri de temps mitjà de resposta mínim, per al garatge dels vehicles d'assistència en ruta. El temps de resposta és el que transcorre des del moment que es rep l'avís d'incidència fins que el vehicle d'assistència arriba al punt on s'ha produït. S'adoptat el supòsit que els vehicles d'assistència, després de fer cada servei, tornen al garatge.



Es disposa de les dades següents:



Autopista														
PQ	km	3	5	9	17	21								
	*	4	1	3	1	4								
PR	km	4	11	15	24	29	35							
	*	1	6	5	1	3	2							
PS	km	8	13	19	25	29	38	41	47	50	52	60	69	70
	*	6	7	5	9	7	8	7	7	6	4	3	8	9

Els quilòmetres corresponen a la distància a P

* Nombre mitjà d'incidències anuals en el punt quilomètric corresponent

Bàsicament, es tracta de decidir a quina de les tres autopistes convé situar el garatge. Si només n'hi hagués una, el problema seria el clàssic de localització d'una instal·lació en un espai unidimensional, la solució òptima del qual s'obté calculant per a cada punt la suma de pesos de tots els que té, per exemple, a l'esquerra i el d'ell mateix. És òptim el primer punt en què aquesta suma és igual o més gran que la meitat de la suma de tots els pesos (si la suma és igual a la meitat, també és òptim el punt següent i tots els del segment que els dos determinen).³

En aquest cas, com que hi ha tres autopistes, tenim tres problemes de localització unidimensional diferents, segons si el garatge se situa a PQ, a PR o a PS.

Es resol fàcilment cada un d'aquests tres problemes com si en cada un només hi hagués un autopista que comencés en el punt amb incidències més a prop del final de l'autopista en què suposem situat el garatge (per exemple, en el km 21 si el situem en PQ), i amb un tram que va des d'aquest punt a P i un altre, de P cap a la dreta, en què se superposen els punts amb incidències de les altres dues autopistes.

En cada un dels 3 casos, l'emplaçament òptim és el punt que compleix la regla de majoria de la suma de pesos, indicada més amunt, o, si en el tram en què se

³ Aquesta regla és molt senzilla i se'n deriven propietats de la solució òptima poc intuïtives, com ara que si un punt té associat un pes més gran que la meitat del pes total, el punt en qüestió és òptim amb independència de les posicions i els pesos dels altres punts. La funció objectiu, que depèn de la posició de la instal·lació, és una línia poligonal que té, doncs, punts amb derivada discontinua i gairebé tothom té més costum de treballar amb funcions diferenciables que amb les d'aquesta mena.

Sigui pel que sigui, en alguns llibres de text, fins i tot de gran difusió internacional, durant molts anys s'ha dit, i en alguns casos encara es continua dient, que la localització òptima correspon al centre de gravetat dels punts amb incidències (o amb empreses proveïdores o clients, etc.), considerant com a pesos el nombre d'incidències. És un fenomen digne d'estudi, perquè això no té cap fonament i no serveix ni com a procediment aproximat, ja que requereix uns càlculs que, tot i que també són senzills, són més complicats que els que permeten determinar l'òptim de manera exacta. Algú ho va escriure i molta gent, en veure-ho escrit en un llibre, ho ha donat per bo sense sotmetre-ho a una anàlisi crítica, i així ha anat passant d'un llibre a un altre. De les quatre regles del mètode cartesiana (René Descartes, *Discours de la méthode*, 1637), "la primera consisteix en no admetre mai res com a vertader sense haver conegut amb evidència que així és", però amb més de 380 anys no n'hi ha hagut prou perquè hagi arrelat universalment.

suposa ubicat el garatge no hi ha cap punt que satisfaci aquesta propietat, el punt P.

Per tant, en els supòsits de situar el garatge a PQ o a PR, l'òptim és P i la suma de productes de distàncies per nombre d'incidents, 3.923. En canvi, en l'autopista PS el punt òptim és el km 29 i el valor de la suma de productes, 2.976. La solució òptima és situar el garatge en el km 29 de l'autopista PS i el recorregut mitjà des del garatge al punt de l'incident és $2.976/117 = 25,44$ km, que a 120 km/h requereix 12,72 minuts. De tota manera, el temps de resposta per a les incidències en el km 35 de PR seria $(29 + 35) \cdot (60/120) = 32$ minuts, possiblement excessius per a un servei d'atenció d'incidències (aquest temps màxim es pot reduir, a costa d'augmentar el temps mitjà, ubicant el garatge en el km 25 de PS o, encara més, en el km 17,5 de la mateixa autopista: d'aquesta manera, el temps màxim, el millor que es pot aconseguir, és $(17,5+35) \cdot (60/120) = 26,25$ minuts.

Quan la presa de decisions s'ha de fer en un context aleatori, s'ha d'adoptar un criteri,⁴ la qual cosa també és una decisió que en general no es fàcil i que té una gran influència sobre el resultat. En molts casos, l'esperança matemàtica és adequada com a criteri, però no sempre és així perquè la idoneïtat d'un criteri depèn de les característiques de la persona o del col·lectiu que ha de prendre les decisions i de les circumstàncies en què les ha de prendre. De tota manera, en el problema següent, que tanca aquest capítol, el criteri adoptat és l'esperança matemàtica.

OP06. Cafeteres de qualitat

INFUSA fabrica un model de cafetera de baix preu. Amb el procediment de producció emprat, el 5 % de les unitats resulten defectuoses, la qual cosa genera reclamacions, devolucions, substitucions i mala imatge comercial, amb un cost estimat de 100 u. m. per cada cafetera defectuosa.

Vista la situació, INFUSA, un cop descartada la millora del procés productiu, estudia dos procediments de control de qualitat. El procediment A té un cost de 0,5 u. m. per cafetera i en detecta les defectuoses en un 80 % dels casos, però també considera com a defectuoses un 10 % de les cafeteres correctes. Els valors anàlegs, en el cas del procediment B, són 3 u. m., 90 % i 0 %.

La classificació com a defectuosa d'una cafetera correcta implica un cost de 25 u. m.

Quin procediment de control convé a INFUSA?

⁴ Segons el diccionari de l'IEC (Institut d'Estudis Catalans. *Diccionari de la llengua catalana*, 2^a ed., <https://mdlc.iec.cat/>), un criteri és una "norma per a jutjar una cosa". En el nostre context és una funció que depèn de les característiques de les solucions i que volem optimitzar (minimitzar o maximitzar, segons la naturalesa del criteri).



Si INFUSA adopta el criteri de l'esperança matemàtica del cost per cafetera, tenim:

$$\text{Procediment A: } 0,5 + 0,05 \cdot (1 - 0,80) \cdot 100 + 0,95 \cdot 0,10 \cdot 25 = 3,875$$

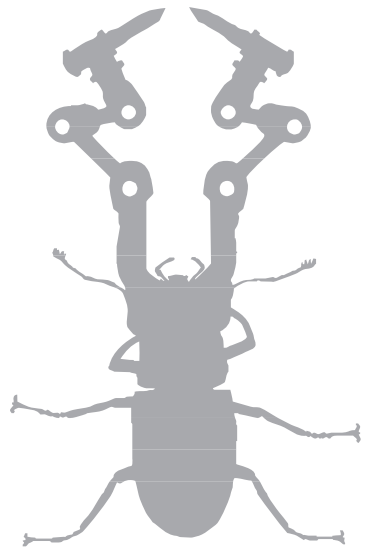
$$\text{Procediment B: } 3 + 0,05 \cdot (1 - 0,90) \cdot 100 = 3,500$$

I també s'ha de considerar la possibilitat de no adoptar cap dels dos procediments:

$$0,05 \cdot 100 = 5,000$$

Per tant, el que convé a INFUSA és aplicar el procediment B.

Tot això, sense perjudici que el que segurament hauria de fer INFUSA és estudiar com canviar el procés de producció, i els costos de canviar-lo, per reduir dràsticament o fins i tot anul·lar la proporció de cafeteres defectuoses.



→2



Seleccionar

En els problemes d'aquest capítol es tracta d'elegir elements d'un conjunt A (que poden ser subconjunts d'un altre conjunt, B), de manera que es compleixin unes condicions predeterminades i s'optimitzi una funció el valor de la qual depèn dels elements elegits.

Dins d'aquest marc hi ha diversos problemes. En els de partició es tracta d'elegir elements de A que constitueixin una partició del conjunt B (FO02.4 i RE01 es poden veure com a problemes de partició). En els d'empaquetament, d'elegir els elements que posem en un o diversos contenidors (en alguns casos, també s'ha de determinar l'ordre en què els posem); el més senzill és el problema de la motxilla (KP: *knapsack problem*) unidimensional, en què es tracta d'elegir els objectes que, sense superar un pes determinat, maximitzen el valor total. Els problemes de tall de materials (com ara TR02.1, TR02.2 i TR02.3) es poden veure també com a problemes d'empaquetament.

Un altre cas particular dels problemes de selecció són els de cobertura, que es presenten en circumstàncies molt diverses, com ara seleccionar els llocs per implantar unes instal·lacions de manera que tots els punts que requereixen un servei tinguin una instal·lació que pugui prestar-li el servei amb el temps o amb la qualitat requerida (hospitals, centres d'atenció primària, parcs de bombers o d'ambulàncies, serveis de manteniment, xarxes d'establiments –pizzeries, botigues de mobles per muntar–, antenes o repetidors de televisió, ràdio o telefonia mòbil...; també és un problema de cobertura determinar el nombre mínim d'experiments, o del conjunt d'experiments de mínim cost, que permeten detectar tots els defectes d'un sistema, si sabem quins defectes detecta cada tipus d'experiment).

En els problemes de cobertura els elements del conjunt A són m diguem-ne orígens (que poden tenir associats uns costos $c_i, i = 1, \dots, m$) i els elements del conjunt B , n diguem-ne destinacions. Cada origen $i \in A$ té associat un subconjunt



$b_j \in B$ d'elements de B , als quals es diu que cobreix. Anàlogament, a cada destinació $j \in B$ es pot associar un conjunt $a_j \subseteq A$ dels orígens des dels quals pot ser cobert. I es tracta de seleccionar orígens de manera que totes les destinacions estiguin cobertes amb el mínim nombre d'orígens o amb el mínim cost.

Una variant del problema consisteix a maximitzar el nombre de destinacions cobertes quan el pressupost o el nombre d'instal·lacions tenen una fita superior que no permet cobrir totes les destinacions.

Amb la notació indicada, un problema de cobertura es pot modelitzar de la manera següent:

Variables:

$$x_i \in \{0,1\} = 1 \text{ si i només si s'elegeix } i, \forall i \in A$$

Model:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{i \in A} c_i \cdot x_i \\ & \text{s.a. } \sum_{i \in a_j} x_i \geq 1 \quad \forall j \in B \end{aligned}$$

Aquest model generalment es resol bé amb programari comercial, llevat que el nombre de restriccions sigui molt elevat, cosa que pot succeir si el nombre de destinacions és molt gran (en principi, hi ha una restricció per a cada destinació) i no s'agrupen o no se saben agrupar adequadament (és menys probable que en un cas real el nombre d'orígens sigui molt gran).

En l'enunciat següent, la caracterització del conjunt de destinacions no és immediata i, segons com es faci, pot donar lloc a models de dimensions molt diferents.

SE01.1. Cobertura: espectre¹

S'ha de dissenyar un instrument òptic que ha de ser capaç de proporcionar selectivament radiacions en l'espectre de 3.500 a 6.400 Å. Per cobrir aquest rang s'han d'incorporar diversos productes químics que s'han de seleccionar entre els de la llista que figura a la taula de la pàgina següent.

Quins productes s'han d'incorporar per tal de cobrir, a cost mínim, tot el rang de 3.500 a 6.400 Å?

¹ Basat en un exemple de Schrage, L. (1986). *Linear, integer and quadràtic programming with LINDO*, 3rd ed. The Scientific Press.

Producte	Rang de cobertura, en Å		Cost
	Límit inferior	Límit superior	
01	3.500	3.655	4
02	3.520	3.905	3
03	3.600	3.658	1
04	3.650	4.075	4
05	3.660	3.915	1
06	3.900	4.449	6
07	3.910	4.095	2
08	3.950	4.160	3
09	3.995	4.065	1
10	4.000	4.195	2
11	4.000	4.200	2
12	4.210	4.405	2
13	4.320	4.451	2
14	4.350	4.500	2
15	4.420	5.400	9
16	4.450	4.800	3
17	4.450	4.570	1
18	5.200	6.000	9
19	5.600	6.200	8
20	6.010	6.400	8
21	6.015	6.250	2

És clar que el conjunt A té 21 elements. El conjunt B està format, d'entrada, per tots els intervals d'una unitat que van de 3.500 a 6.400 Å, és a dir, 2.900 intervals. Si tots els límits fossin múltiples de 5 podríem reduir a $2.900/5 = 580$ el nombre d'elements de B (però el límit 4.451 no és múltiple de 5 i, en tot cas, seguiríem tenint un nombre de destinacions molt gran). Ara bé, només cal tenir en compte els intervals definits pels límits associats als productes; si unim els valors dels límits inferiors i superiors, els ordenem i suprimim les repeticions, obtenim la llista següent, amb 40 valors diferents que defineixen 39 intervals:

N.	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Límit	3.500	3.520	3.600	3.650	3.655	3.658	3.660	3.900	3.905	3.910
N.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Límit	3.915	3.950	3.995	4.000	4.065	4.075	4.095	4.160	4.195	4.200
N.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Límit	4.210	4.320	4.350	4.405	4.420	4.449	4.450	4.451	4.500	4.570
N.	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Límit	4.800	5.200	5.400	5.600	6.000	6.010	6.015	6.200	6.250	6.400

El primer interval és [3.500, 3.520]; el segon, [3.520, 3.600]; el 39è, [6.250, 6.400].



Producte	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Cost→ Interval↓	4	3	1	4	1	6	2	3	1	2	2	2	2	2	9	3	1	9	8	8	2
01	1																				
02	1	1																			
03	1	1	1																		
04	1	1	1	1																	
05		1	1	1																	
06		1		1																	
07		1		1	1																
08		1		1	1	1															
09				1	1	1															
10				1	1	1	1														
11				1		1	1														
12				1		1	1	1													
13				1		1	1	1	1												
14				1		1	1	1	1	1	1										
15				1		1	1	1		1	1										
16						1	1	1		1	1										
17						1		1		1	1										
18						1				1	1										
19						1					1										
20						1															
21						1						1									
22						1						1	1								
23						1						1	1	1							
24						1							1	1							
25						1							1	1	1						
26													1	1	1						
27													1	1	1	1	1				
28														1	1	1	1				
29															1	1	1				
30															1	1					
31															1						
32																1		1			
33																	1				
34																	1	1			
35																		1			
36																			1	1	
37																			1	1	1
38																				1	1
39																					1

Per tant, el model tindrà 21 variables i 39 restriccions. Ara només cal definir els conjunts a_j , que mostra la taula anterior (per a cada interval, el conjunt de productes que el cobreixen està format pels productes que tenen un 1 a la fila de l'interval).

La taula posa de manifest que l'interval 01 només el pot cobrir el producte 01 (que cobreix els intervals de 01 a 04, tots dos inclusivament). A més, l'interval 20 només el cobreix el producte 06; 31, el producte 15; 33, el 18; 35, el 19 i, finalment, l'interval 39 només el cobreix el producte 20. Per tant, els productes 01, 06, 15, 18, 19 i 20 formen part necessàriament de la solució i els únics intervals que no cobreixen són els 05, 06 i 07, que s'han de cobrir entre els productes 02, 03, 04 i 05 (la mera inspecció de la taula permet deduir que el millor és incorporar el producte 02).

En aquest cas, per tant, i a causa de les característiques particulars de les dades, es pot obtenir una solució òptima (de fet, és única) sense recórrer al model. La propietat que si una destinació només es pot servir des d'un origen aleshores l'origen forma part necessàriament de qualsevol solució factible val per a tots els problemes de cobertura total.

També s'hauria pogut reduir la dimensió del problema fent ús de relacions de dominància entre files i entre columnes.

De tota manera, un programari d'optimització que tingui un bon preprocessament farà pel seu compte aquesta feina de reducció.

La resolució del model confirma la solució 01, 02, 06, 15, 18, 19 i 20 amb un cost òptim igual a 47.

A partir de l'anàlisi de la taula hem deduït que aquesta solució és l'única òptima, però la resolució del model no ens ha donat aquesta informació.

Ara bé, si eliminem la solució esmentada, mitjançant la restricció:

$$x_{01} + x_{02} + x_{06} + x_{15} + x_{18} + x_{19} + x_{20} \leq 6$$

Obtenim (amb 01, 04, 06, 15, 18, 19, 20) un cost òptim de 48, la qual cosa demostra que l'òptim és únic.

El problema següent no encaixa exactament amb l'esquema del que es denomina problema de cobertura, perquè el conjunt A no està definit i la manera de "cobrir" els elements de B , cosa que es pot fer en diverses fases, és peculiar. Tanmateix, es tracta de decidir unes accions de manera que, amb el menor cost possible, tinguin l'efecte desitjat sobre tots els elements d'un conjunt.



SE01.2. Cobertura: assaig elèctric

Un circuit elèctric comprèn uns punts de connexió i unes resistències que connecten alguns parells d'aquests punts. Es vol fer un assaig o una successió del menor nombre possible d'assajos per tal de comprovar que totes les resistències deixen passar corrent. Cada assaig consisteix a assignar una polaritat a un subconjunt de punts de connexió i la polaritat contrària als altres, i comprovar si passa corrent per totes les resistències que uneixen punts de polaritat oposada.

Aplicació a 5 punts de connexió, amb les resistències (1,2), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5) i (4,5).

Podem formular un model lineal per minimitzar el nombre d'assajos, però per fer-ho ens cal una fita superior d'aquest nombre (com més ajustada millor, perquè el nombre de variables i de restriccions, com veurem de seguida, augmenta amb el valor de la fita).

Una fita trivial per a aquest tipus de problema, molt poc ajustada, és el nombre de resistències. En podem obtenir una de millor amb un model per maximitzar el nombre de resistències comprovades en un sol assaig: l'aplicació successiva d'aquest model ens donarà una fita superior del nombre d'assajos i una solució factible amb què comprovar totes les resistències amb un nombre d'assajos igual a la fita.

Per formular aquest model cal una variable ($x_i \in \{0,1\}; i = 1, \dots, n$) per a cada punt de connexió, igual a 1 si s'assigna una de les polaritats al punt i 0 si se li assigna la contrària. I també una variable per a cada resistència ($y_{jk} \in \{0,1\}; \forall (j,k) \in R$), on R és el conjunt de les 9 resistències i $y_{jk} = 1$ si i només si j i k tenen polaritats diferents.

Per tant, hem d'imposar que si j i k tenen polaritats iguals, y_{jk} ha de ser igual a 0.

Aleshores poden formular el model:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{(j,k) \in R} y_{jk} \\ & \left. \begin{aligned} x_j + x_k &\leq 2 - y_{jk} \\ y_{jk} &\leq x_j + x_k \end{aligned} \right\} \forall (j,k) \in R \end{aligned}$$

amb el qual, amb les dades de l'enunciat, s'obté la solució següent:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1	1	0	0

Y_{12}	Y_{14}	Y_{15}	Y_{23}	Y_{24}	Y_{25}	Y_{34}	Y_{35}	Y_{45}
0	1	1	0	1	1	1	1	0

És a dir, amb aquest assaig es poden comprovar 6 de les 9 resistències. La comprovació de les 3 restants es pot fer en un sol assaig, com es podria verificar amb una segona aplicació del model per a aquestes 3 resistències (aplicació que, en aquest cas, resulta innecessària perquè les solucions són òbvies). Per tant, l'heurística ens ha donat una solució òptima, perquè com que amb un assaig és impossible comprovar totes les resistències, en calen dos com a mínim.

Com que l'aplicació successiva del model ens permet trobar una solució factible del problema, podem considerar que hem definit un procediment heurístic sofisticat que tendeix a minimitzar el nombre d'assajos necessaris per comprovar tots els components, però sense garantir que la solució obtinguda sigui òptima (de fet, és una *matheurística*, que fa ús de la programació matemàtica en el marc d'una heurística *greedy*²). Per optimitzar cal ampliar el model, amb una funció objectiu igual al nombre d'assajos.

Sigui T la fita superior del nombre d'assajos. Cal afegir un subíndex t ($t = 1, \dots, T$) a cada una de les variables x_j, y_{jk} del model anterior i definir unes noves variables binàries z_t ($t = 1, \dots, T$) iguals a 1 si i només si es fa l'assaig t .

$$\begin{aligned}
 & \text{minimitzar } \sum_{t=1}^T z_t \\
 & \left. \begin{aligned} x_{jt} + x_{kt} &\leq 2 - y_{jkt} \\ y_{jkt} &\leq x_{jt} + x_{kt} \end{aligned} \right\} \forall (j, k) \in R, t = 1, \dots, T \\
 & \sum_{t=1}^T y_{jkt} \geq 1 \quad \forall (j, k) \in R \\
 & \sum_{i=1}^n x_{it} \leq (n-1) \cdot z_t \quad t = 1, \dots, T \\
 & z_{t+1} \leq z_t \quad t = 1, \dots, T-1
 \end{aligned}$$

Els nous grups de restriccions imposen, respectivament, que (i) tota resistència ha de ser comprovada; (ii) si hi ha algun punt de connexió amb la polaritat associada al valor 1 de la variable es considera que es fa l'experiment, ja que la variable z_t només pot prendre el valor 0 si el primer membre és igual a 0 (a més, la restricció impedeix que totes les x_{it} valguin simultàniament 1); (iii) si cal fer \hat{t} experiments, aquests són els \hat{t} primers (i es pot imposar $z_1 = 1$). Observem que, en canviar la funció objectiu, no es pot assegurar que per a un assaig t i

² En aquest context, "*greedy*" es pot traduir per "voraç" o "golafre", però hem preferit mantenir el terme original anglès perquè creiem que resulta prou familiar a les persones que estudien o treballen en aquest àmbit.



una resistència (j,k) qualsevol, en la solució del model y_{jkt} sigui 1 si $x_{jt} + x_{kt} = 1$ (és a dir, si j i k tenen polaritats diferents en l'assaig t). Per tant, cal modificar la definició de les variables y_{jkt} , en relació amb la de les y_{jk} : valen 1 només si j i k tenen polaritats diferents en l'assaig t . Per tant, cal tenir present en interpretar la solució òptima que $y_{jkt} = 0$ no implica que la resistència (j,k) no es comprovarà en fer l'assaig t . Amb aquesta nova definició el nombre de resistències que es comprovaran en un assaig pot ser superior a la suma de les variables y 's d'aquest assaig. Tanmateix, la solució òptima del model dóna una configuració per comprovar totes les resistències amb un nombre d'assajos mínim.

Per a l'exemple, hem vist que $T = 2$. La solució obtinguda amb el model (n'hi ha d'altres) va ser:

x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{51}
1	1	1	0	0
x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	x_{52}
0	1	0	1	0

y_{121}	y_{141}	y_{151}	y_{231}	y_{241}	y_{251}	y_{341}	y_{351}	y_{451}
0	0	1	0	1	0	0	1	0
y_{122}	y_{142}	y_{152}	y_{232}	y_{242}	y_{252}	y_{342}	y_{352}	y_{452}
1	1	0	1	0	1	1	0	1

Tot i que $x_{11} + x_{41} = 1$, $y_{141} = 0$ (el mateix passa, anàlogament, amb y_{251} i y_{341}). Per tant, si féssim els assajos d'acord amb la solució obtinguda, la resistència (1,4) es comprovaria en fer l'assaig 1 (encara que $y_{141} = 0$) i també en fer l'assaig 2 (amb $y_{142} = 1$).

SE02. LRPDP

El *Long Range Process Design Problem* va ser objecte d'algunes publicacions a l'entorn de 1990,³ però després no ha tingut gaire presència a les revistes científiques.

Consisteix en el següent:

Per dur a terme un procés cal executar N operacions, cada una de les quals té $\alpha_i \geq 1$ alternatives ($i = 1, \dots, N$), amb un cost $c_j \left(j = 1, \dots, \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)$. Per determinar una *configuració* del procés s'ha de seleccionar una i només una alternativa per

³ Per exemple: Singhal, J.; Katz, J. L. (1990) A branch-and-fathom algorithm for the Long Range Process Design Problem. *Management Science*, 36, 4, 513-516.

a cada operació, de manera que es respectin les incompatibilitats entre parelles d'alternatives d'operacions diferents. En la versió original del LRPDP no es fa esment dels costos i es tracta d'enumerar totes les configuracions factibles. Per tant, el problema és molt semblant al de saber quants àpats diferents es poden configurar a partir d'un menú de restaurant amb opcions diverses per a primer i segon plat i postres.

En canvi, aquí es tracta de trobar una configuració factible de cost mínim, amb:

$$N = 5; \alpha_1 = 6, \alpha_2 = 7, \alpha_3 = 5, \alpha_4 = 4, \alpha_5 = 8$$

i els costos i les incompatibilitats que figuren a la taula següent, en què el número que correspon a l'alternativa k de l'operació i és $\sum_{l=1}^{i-1} \alpha_l + k$ i on un 1 en

una casella indica incompatibilitat entre l'alternativa de la fila i la de la columna (la matriu és simètrica, atès que ho és la relació d'incompatibilitat). La columna de la dreta és la suma dels elements de cada fila (per tant, és el nombre d'alternatives amb què és incompatible la que correspon a la fila).

o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	S_i
c	37	82	76	18	37	97	11	19	41	30	60	79	92	18	46	92	44	61	33	38	61	50	13	31	79	28	82	33	26	74	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	3
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	4
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	5
4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	5
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	5
7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	5
8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	8
11	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	5
13	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	6
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	4
17	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	8
18	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	5
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4
21	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6



o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Sj
c	37	82	76	18	37	97	11	19	41	30	60	79	92	18	46	92	44	61	33	38	61	50	13	31	79	28	82	33	26	74	
21	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
22	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	7
23	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
24	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
25	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4
27	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
28	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	6
29	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
30	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6

La selecció de les alternatives es pot determinar mitjançant les variables:

$$x_j \in \{0,1\} = 1 \text{ si i només si se selecciona l'alternativa } j \left(j = 1, \dots, \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)$$

Siguin $m_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j$ ($i = 1, \dots, N$), $m_0 = 0$ i I_j ($j = 1, \dots, m_N$) el conjunt d'alternatives incompatibles amb l'alternativa j i d'operacions diferents de la corresponent a j (per exemple: $I_1 = \{17, 25, 28\}$).

Amb aquesta notació podem formular el model:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{j=1}^{m_N} c_j \cdot x_j \\ & \text{s.a. } \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} x_j = 1 \quad i = 1, \dots, N \\ & \quad \sum_{k \in I_j} x_k \leq S_j \cdot (1 - x_j) \quad j = 1, \dots, m_N \end{aligned}$$

Amb el qual s'obté la configuració que comprèn les alternatives 5, 8, 14, 19 i 23, amb un cost total de 120.

És clar que no tots els problemes de selecció tenen una estructura tan simple com els esmentats fins aquí. En el següent es tracta d'elegir els trams que constituïran una xarxa, entre el conjunt de trams que podrien formar-ne part, i quin tipus de conducció s'instal·larà a cada tram, amb l'objectiu de maximitzar els ingressos nets per període.

SE03. Xarxa

XARGASSA ha de determinar la configuració òptima de la xarxa de distribució de gas als nuclis 1 a 6, les demandes anuals dels quals són, respectivament, 20, 28, 30, 40, 16 i 32 Mm³. Si XARGASSA subministra gas a un nucli n'ha de satisfer tota la demanda i això li reporta uns ingressos nets (és a dir, descomptat el cost d'adquisició del gas) iguals, en la u. m. apropiada, a 20 per la demanda.

El gas procedeix del punt 0, d'on se'n pot obtenir qualsevol quantitat necessària per satisfer la demanda.

Els trams que poden formar part de la xarxa són els següents (entre parèntesis, la longitud en km; 7 és un possible punt de connexió, sense demanda): 01(5), 02(6), 06(12), 07(4), 13(8), 14(9), 15(12), 17(4), 24(10), 26(8), 27(5), 34(7), 35(6), 37(10), 45(5), 46(3), 47(6), 56(6), 67(9).

Cada tram pot tenir instal·lacions amb una capacitat anual de 50 Mm³ o de 90 Mm³, amb uns costos anuals per km respectivament iguals a 11 i 18 u.m. El cost de fer circular un Mm³ per una instal·lació és 0,1 u. m./km.

El disseny d'aquesta xarxa implica decisions múltiples: quins trams cal construir i amb quina capacitat, i a quins nuclis s'ha de subministrar gas; els fluxos que circularan pels trams han de ser compatibles amb llurs capacitats i complir la primera llei de Kirchhoff.

Dades:

D_i ($i = 1, \dots, 6$), les demandes.

T , el conjunt de parells de punts corresponents als trams potencials.

L_{ij} ($\forall (i, j) \in T$), les longituds dels trams potencials.

Variables:

$x_i \in \{0, 1\} = 1$ si i només si se subministra gas al nucli i ($i = 1, \dots, 6$).

$y_{ijk} \in \{0, 1\} = 1$ si i només si es construeix un tram entre el parell $(i, j) \in T$ amb capacitat 50 ($k = 1$) o 90 ($k = 2$); $\forall (i, j) \in T$, $k = 1, 2$.

$f_{ij}, f_{ji} \geq 0$ flux de i a j , flux de j a i $\forall (i, j) \in T$.



Model:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{i=1}^6 20 \cdot D_i \cdot x_i - \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} L_{ij} \cdot (11 \cdot y_{ij1} + 18 \cdot y_{ij2}) - 0,1 \cdot \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} L_{ij} \cdot (f_{ij} + f_{ji}) \\ \text{s.a } & y_{ij1} + y_{ij2} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{T} \\ & f_{ij} + f_{ji} \leq 50 \cdot y_{ij1} + 90 \cdot y_{ij2} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{T} \\ & f_{01} - f_{13} + f_{31} - f_{14} + f_{41} - f_{15} + f_{51} - f_{17} + f_{71} - D_1 \cdot x_1 = 0 \\ & f_{02} - f_{24} + f_{42} - f_{26} + f_{62} - f_{27} + f_{72} - D_2 \cdot x_2 = 0 \\ & f_{13} - f_{31} - f_{34} + f_{43} - f_{35} + f_{53} - f_{37} + f_{73} - D_3 \cdot x_3 = 0 \\ & f_{14} - f_{41} + f_{24} - f_{42} - f_{45} + f_{54} - f_{46} + f_{64} - f_{47} + f_{74} - D_4 \cdot x_4 = 0 \\ & f_{15} - f_{51} + f_{35} - f_{45} - f_{56} + f_{65} - D_5 \cdot x_5 = 0 \\ & f_{06} + f_{26} - f_{62} + f_{46} - f_{64} + f_{56} - f_{65} - f_{67} + f_{76} - D_6 \cdot x_6 = 0 \\ & f_{07} + f_{17} - f_{71} + f_{27} - f_{72} + f_{37} - f_{73} + f_{47} - f_{74} + f_{67} - f_{76} = 0 \end{aligned}$$

Amb el qual s'obté la solució representada en la gràfica de la pàgina següent,⁴ amb la funció objectiu igual a 2.672 (u. m./any).

⁴ Per fer aquesta gràfica ens vàrem trobar en la dificultat de situar els punts en el pla de manera que les distàncies euclidianes fossin similars a les longituds dels trams que figuren en l'enunciat. Això es pot aconseguir resolent el programa no lineal següent, per minimitzar la suma dels quadrats de les diferències entre els quadrats de les longituds dels trams i els quadrats de les distàncies euclidianes entre les ubicacions proporcionades pel model:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \delta_{ij}^2 \\ \text{s.a } & (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + \delta_{ij} = L_{ij}^2 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

(on les desviacions δ_{ij} no estan restringides en signe).

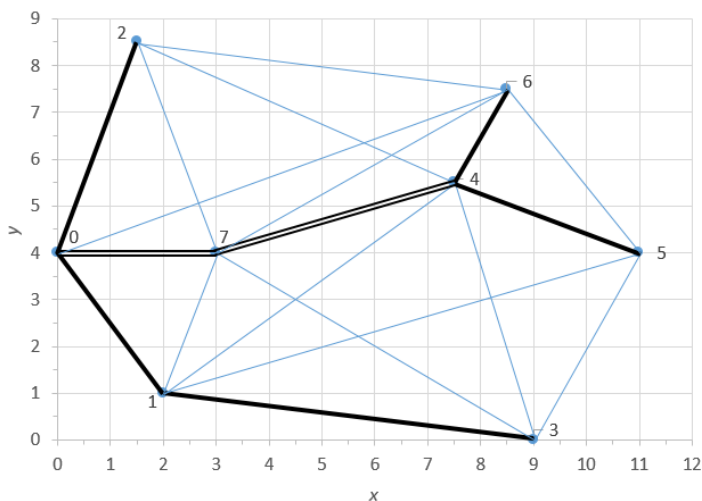
També es pot minimitzar la suma dels valors absoluts de les diferències entre els quadrats de les longituds dels trams i els quadrats de les distàncies euclidianes entre les ubicacions proporcionades pel model:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} (\delta_{ij}^+ + \delta_{ij}^-) \\ \text{s.a } & (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + \delta_{ij}^+ - \delta_{ij}^- = L_{ij}^2 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{T} \\ & \delta_{ij}^+, \delta_{ij}^- \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

En aquest cas, en canvi, cal que les deltes siguin no negatives. En els dos models, les variables x , y poden estar o no restringides en signe; observeu, però, que cada solució en té infinites d'equivalents, com les que s'obtenen per translació dels eixos de coordenades, i que restringir el signe de les variables redueix la multiplicitat de solucions equivalents (que, de tota manera, segueixen sent infinites). Una altra manera de reduir la multiplicitat és fixar les coordenades d'un punt qualsevol; per exemple, situar un punt qualsevol a l'origen (però sense restringir el signe de les variables).

Si en comptes de les distàncies euclidianes considerem les distàncies rectangulars, el model que resulta en primera instància s'ha de linealitzar i l'explicació requereix més espai que el d'una nota a peu de pàgina. Li dediquem el problema següent (SE04), la solució del qual és la que hem representat a les figures.

Els trams amb capacitat de 90 Mm³/any s’han representat a la figura amb doble ratlla contínua i els de 50 Mm³/any, amb ratlla contínua simple.



A mesura que els costos de transport augmenten queden nuclis sense servei; per exemple, si són d’1,25 u. m./km, no se subministra gas al nucli 5, l’estructura de la xarxa canvia, tal com es pot veure a la figura de la pàgina següent, i el valor òptim de la funció objectiu és 747. En aquest cas, tots els trams tenen una capacitat de 50 Mm³/any.

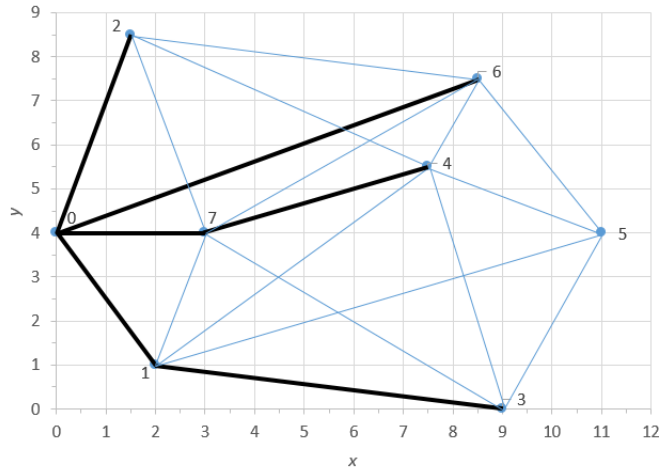
A l’enunciat s’ha suposat que els costos de transport del gas no depenien del tipus de tram. Si no fos així, caldria desdoblar les variables de flux (flux que circula pel tram amb capacitat 50 + flux que circula pel tram amb capacitat 90) i fer les adaptacions corresponents en el model.

Aquesta nota i el problema SE04 il·lustren les possibilitats que ofereix la programació matemàtica per ajustar a uns valors observats els valors proporcionats per un model, com es fa en el cas de la regressió lineal. La programació matemàtica permet tenir en compte restriccions específiques i admet una varietat de funcions objectiu. Per exemple, en comptes de $\sum_{(i,j) \in T} \delta_{ij}^2$ podríem minimitzar

$\sum_{(i,j) \in T} \delta_{ij}^{2p}$ (on p és un enter parell). Com més gran és p , més penalitzades resulten les desviacions

més grans en valor absolut; si $p \rightarrow \infty$, només compta la desviació més gran i, per tant, l’optimització equival a la minimització del màxim valor absolut de les desviacions, que es resol amb el model següent:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } \Delta \\ \text{s.a } &(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + \delta_{ij} = L_{ij}^2 \quad \forall (i, j) \in T \\ &-\delta_{ij} \leq \Delta, \delta_{ij} \leq \Delta \quad \forall (i, j) \in T \end{aligned}$$



El problema següent no encaixa, pel seu contingut, en aquest capítol, però l'hi hem situat (vegeu nota 4) per la relació que té amb l'enunciat anterior (SE03).

SE04. Mapatge

Donats un conjunt \mathcal{T} de parells de punts i les distàncies rectangulars entre els elements de cada parell, L_{ij} ($\forall (i, j) \in \mathcal{T}$), es tracta de determinar les coordenades dels punts que minimitzen la suma dels valors absoluts de les diferències entre llurs distàncies rectangulars i les L_{ij} .

D'entrada, si n és el nombre de punts que formen part d'algun dels parells a \mathcal{T} , el model es planteja amb les variables (x_i, y_i) , és a dir, les coordenades dels punts ($i = 1, \dots, n$), i δ_{ij} , les diferències entre les L_{ij} i les distàncies rectangulars corresponents a les coordenades esmentades ($\forall (i, j) \in \mathcal{T}$); totes les variables són reals i no restringides en signe:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} |\delta_{ij}| \\ & \text{s.a} \\ & |x_i - x_j| + |y_i - y_j| + \delta_{ij} = L_{ij} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

On convé assignar, per reduir la multiplicitat de solucions, un parell qualsevol de coordenades a un dels punts de la llista, elegit arbitràriament.

Com que la funció valor absolut no és lineal ni té derivada contínua, el millor camí per resoldre aquest model és linealitzar-lo, per a la qual cosa calen més variables i més restriccions.

Les noves variables són $\eta_{ij}^+, \eta_{ij}^-, \mu_{ij}^+, \mu_{ij}^-, \delta_{ij}^+, \delta_{ij}^- \geq 0 (\forall (i, j) \in T)$ i $c_{ij}^X, c_{ij}^Y \in \{0, 1\}$ ($\forall (i, j) \in T$); i llurs significats es desprenen dels papers que fan en el model linealitzat. En particular, les variables c_{ij}^X i c_{ij}^Y permeten garantir, respectivament, la complementarietat (és a dir, que almenys un element de cada parella és igual a 0) de les parelles $(\eta_{ij}^+, \eta_{ij}^-)$ i (μ_{ij}^+, μ_{ij}^-) . A i B són les fites superiors de les dues dimensions d'un rectangle en què poden ser ubicats i , per tant, són també fites superiors de les abscisses i de les ordenades, respectivament. Per tal de reduir la multiplicitat de solucions òptimes, hem situat el rectangle en el primer quadrant, amb els vèrtexs $(0,0)$, $(0,B)$, (A,B) i $(A,0)$ i, per tant, amb les variables x i y no negatives.

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{(i,j) \in T} (\delta_{ij}^+ + \delta_{ij}^-) \\ & \text{s.a} \\ & x_i - x_j = \eta_{ij}^+ - \eta_{ij}^- \quad \forall (i, j) \in T \\ & y_i - y_j = \mu_{ij}^+ - \mu_{ij}^- \quad \forall (i, j) \in T \\ & \eta_{ij}^+ + \eta_{ij}^- + \mu_{ij}^+ + \mu_{ij}^- + \delta_{ij}^+ - \delta_{ij}^- = L_{ij} \quad \forall (i, j) \in T \\ & \eta_{ij}^+ \leq A \cdot c_{ij}^X, \eta_{ij}^- \leq A \cdot (1 - c_{ij}^X) \quad \forall (i, j) \in T \\ & \mu_{ij}^+ \leq B \cdot c_{ij}^Y, \mu_{ij}^- \leq B \cdot (1 - c_{ij}^Y) \quad \forall (i, j) \in T \\ & x_i \leq A \quad \forall i \\ & y_i \leq B \quad \forall i \end{aligned}$$

El model, resolt amb IBM ILOG CPLEX amb les dades del problema SE03 i considerant els valors d' A i B iguals a 135 (que és la suma de les longituds dels trams que poden formar part de la xarxa), va donar 4 com a valor òptim de la funció objectiu, amb una configuració de la xarxa molt allargassada. Per tal d'obtenir-ne una de més apropiada per representar-la gràficament, i atès que l'òptim obtingut no necessàriament era únic, vàrem buscar la solució òptima amb el rectangle de costats més petits. A aquest efecte, vàrem modificar el model per tal de minimitzar la funció $\max(x_i, y_i; i = 1, \dots, n)$ amb la condició que la funció objectiu no sigui superior a 4:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \Delta \\ & \text{s.a } \sum_{(i,j) \in T} (\delta_{ij}^+ + \delta_{ij}^-) \leq 4 \\ & x_i \leq \Delta, y_i \leq \Delta \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

i les restriccions pertinents del model anterior.



El resultat, representat en les figures del problema SE03, és el següent:

Punt (i)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
x_i	0,0	2,0	1,5	9,0	7,5	11,0	8,5	3,0
y_i	4,0	1,0	8,5	0,0	5,5	4,0	7,5	4,0

Es pot observar que les distàncies entre els punts que defineixen els trams que poden formar part de la xarxa coincideixen amb les longituds dels trams, exceptuant-ne quatre (07, 14, 24, 27), que haurien de tenir una longitud de 4, 9, 10 i 5 km, respectivament, mentre que la distància entre cada parella de punts és, respectivament, 3, 10, 9 i 6.

Si definim una *recepta* com una transformació d'inputs en outputs, un procés productiu es pot considerar com un conjunt de receptes vinculades per fluxos (un output d'una recepta pot ser l'input d'una altra) i, per tant, representable mitjançant un graf. Un mateix procés productiu pot comprendre un nombre més o menys gran de receptes segons el nivell de detall amb què es vulgui descriure.

Les receptes poden ser de diferents tipus:⁵

- Convergent (C): un nombre especificat d'unitats de cada un dels elements d'un conjunt de components donen lloc a una unitat d'un producte, intermedi o final.
- Mescla flexible (F): correspon a receptes en què la composició de l'output està definida mitjançant intervals o, en general, condicions que ha de complir o bé en què els inputs i la seva quantia poden ser escollits entre un conjunt de possibilitats.
- Divergent (D): d'un sol input surten diversos outputs.
- Molts a molts (M): quantitats determinades de diversos inputs donen lloc a quantitats determinades de diversos outputs.
- Suma (S): no hi ha procés de transformació; l'output és, si no hi ha pèrdues, la mera suma dels inputs.
- Evolució (E): una proporció determinada de l'input esdevé, transcorregut un temps significatiu, un output de diferent condició o naturalesa.

⁵ Corominas, A., Mateo, M., Ribas, I., Rubio, S. (2015) Methodological elements of supply chain design. *International Journal of Production Research*, 53:16, 5017-5030, DOI:

[10.1080/00207543.2015.1013641](https://doi.org/10.1080/00207543.2015.1013641)

Amb un cert abús de llenguatge també podem denominar receptes de tipus α a activitats que, des del punt de vista de qui dissenya o gestiona el procés, només tenen un sol output i no tenen inputs. I receptes tipus ω a activitats que tenen un o més inputs però no tenen outputs.

Il·lustrem aquesta manera de veure els processos productius amb un exemple senzill.

SE05. Qui mel maneja

Königs Honig (KH) prepara i distribueix mel d'abelles, en una sola variant que té una viscositat i un color que la caracteritzen. Concretament, l'índex de viscositat ha d'estar comprès entre 0,15 i 0,20 i el de color, entre 0,07 i 0,16.

KH pot obtenir la matèria primera de 3 abellaires (A1, A2, A3), descrites a la taula següent:

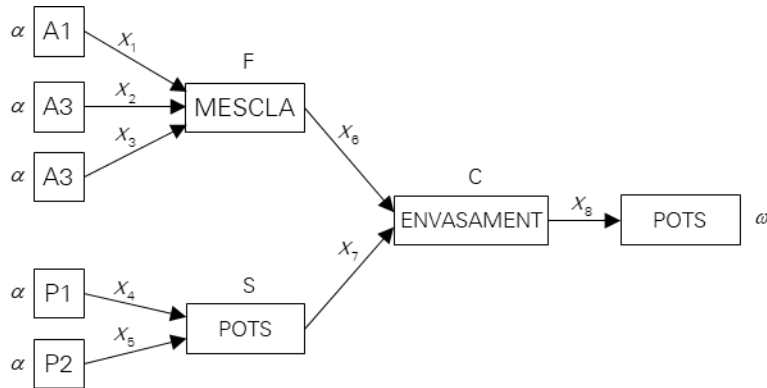
Abellaire	Capacitat (t/any)	Índex de viscositat	Índex de color	Preu (u. m./t)
A1	400	0,10	0,20	20
A2	700	0,20	0,10	25
A3	250	0,30	0,05	30

La mescla de les mels adquirides a les abellaires es fa a la planta de KH, amb un cost de 5 u. m./t d'input i amb unes pèrdues de l'1 % en el pas d'input a output. El producte s'envasa al buit en pots de vidre que contenen un quilo del mel KH. Els pots poden procedir de les proveïdores P1 i P2, amb una capacitat de 650 i 600 milers de pots per any, a uns preus, respectivament, de 3 i 2 u. m. per miler de pots. En el procés d'envasament, que té un cost de 4 u. m. per miler de pots de producte, es perd un 2 % dels pots i un 1,5 % de la mel. Les capacitats de mescla i d'envasament són suficients per a qualsevol valor que puguin prendre els inputs corresponents.

Quina producció màxima de pots de mel es pot obtenir amb aquest procés?

Quin és el cost òptim d'obtenir un milió de pots de mel?

A partir de la descripció del procés continguda a l'enunciat es pot dibuixar un graf en què cada vèrtex correspon a una recepta:



Les variables x_i ($i = 1, \dots, 8$) representen els fluxos que travessen l'arc corresponent. Les condicions que han de respectar i les relacions entre elles són les següents:

$$\begin{aligned}
 &x_1 \leq 400, \quad x_2 \leq 700, \quad x_3 \leq 250, \quad x_4 \leq 650, \quad x_5 \leq 600 \\
 &0,15 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \leq 0,10 \cdot x_1 + 0,20 \cdot x_2 + 0,30 \cdot x_3 \leq 0,20 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\
 &0,07 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \leq 0,20 \cdot x_1 + 0,10 \cdot x_2 + 0,05 \cdot x_3 \leq 0,16 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\
 &x_6 = 0,99 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\
 &x_7 = x_4 + x_5 \\
 &0,985 \cdot x_6 = x_8, \quad 0,98 \cdot x_7 = x_8
 \end{aligned}$$

Amb un cost igual a:

$$20 \cdot x_1 + 25 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 + 5 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) + 4 \cdot x_8$$

Per tant, amb la programació lineal podem donar resposta a les dues preguntes de l'enunciat.

La producció màxima (a què correspon la variable x_8) és de 1.225 milers de pots, que es poden obtenir mitjançant la compra de 400, 656,22 i 200 t de mel a A1, A2 i A3, respectivament, i de 650 i 600 milers de pots a P1 i P2, també respectivament. El cost de producció és de 44.736,51 u. m. (36,52 u. m. per miler d'unitats posades a la venda).

La solució descrita (que és la primera que ens va proporcionar el resolvent que vàrem emprar) és òptima en relació amb l'objectiu de maximitzar la producció, però no necessàriament és única i, per tant, no sabem si, entre totes les que maximitzen la producció, és la que minimitza el cost (com que el cost no intervé a la funció objectiu, el cost corresponent a la solució obtinguda no necessàriament és òptim). Si afegim la restricció $x_8 \geq 1.225$ i minimitzem el cost, aquest passa a ser de 44.517,59 u. m. (36,34 u. m. per miler d'unitats), amb compres de mel i d'envasos iguals a 400, 700, 156,22, 650 i 600.

Una demanda de 1.000 milers d'unitats de mel KH (un milió de pots) es pot satisfer, amb un cost de producció de 35.225,72 u. m. (35,23 u. m. per miler d'unitats), mitjançant la compra de 400 t de mel a A1 i 625,48 a A2, i també 420,41 milers de pots a P1 i 600 milers a P2.

El model ens ha permès respondre les dues preguntes de l'enunciat. Hem determinat la capacitat del sistema i la manera òptima de satisfer una comanda d'un volum determinat (sempre que l'ingrés superi el cost de producció).

També permet avaluar fàcilment, entre d'altres, les conseqüències de canvis de capacitats, de preus i de taxes de pèrdues.

Si considerem donat el preu de venda (per les condicions del mercat, per exemple) podem trobar la producció que proporciona el marge econòmic òptim. Només cal modificar la funció objectiu. Si el preu és alt, l'òptim correspon a produir la màxima quantitat possible al menor cost; però si el preu és baix pot ser millor produir menys quantitat amb un cost unitari menor.

Per obtenir una visió global de la producció òptima en funció del preu podem estudiar els canvis en el cost marginal de producció (és a dir, la derivada del cost total en relació amb la quantitat produïda; informalment, el cost de produir una unitat addicional). Aquest cost és de 34,2416 u. m./unitat entre 0 i 588 (milers) d'unitats de producte. Si la producció és superior, el cost marginal creix, però no contínuament, sinó amb canvis finits en alguns valors de la producció, i es manté constant entre cada un d'aquests valors i el següent. Amb l'ajut del model podem obtenir la taula següent:

Interval de valors de la producció de pots, x_g	Cost marginal
$0 \leq x_g \leq 588$	34,2416
$588 \leq x_g \leq 780,12$	35,2620
$780,12 \leq x_g \leq 1.072,665$	37,8257
$1.072,665 \leq x_g \leq 1.225$	42,9531

Els canvis en el cost marginal corresponen a canvis en l'estructura de la solució òptima (és a dir, a canvis de la base corresponent a la solució òptima). Per exemple, fins a $x_g = 588$ es compren els pots a P2, que és la proveïdora més barata, però produccions més altes només són possibles si se'n compra també a P1.

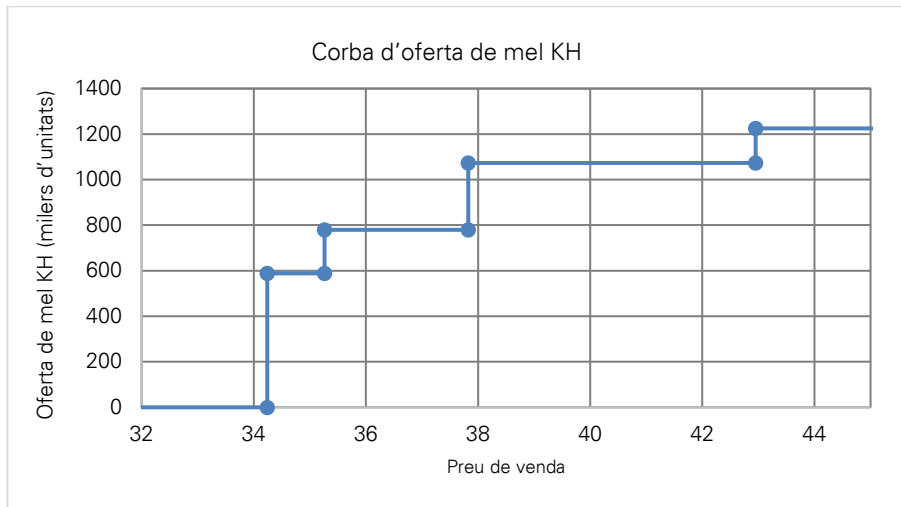
Així doncs, el cost total de producció és una línia poligonal convexa de 4 trams. I el que es tracta d'optimitzar és la diferència entre els ingressos, $p \cdot x_g$ (on p és el preu de venda), i el cost total (sigui $C(x_g)$): $p \cdot x_g - C(x_g)$. Aquesta funció té derivada contínua en tots els punts de l'interval $[0, 1.225]$, excepte en els punts 588, 780,2 i 1.072,665, en què hi ha una diferència finita entre la derivada a la dreta i la derivada a l'esquerra; la funció creix mentre la diferència entre p i la derivada de $C(x_g)$ és positiva. Per tant, la producció òptima és 0 per a $p \leq 34,2416$

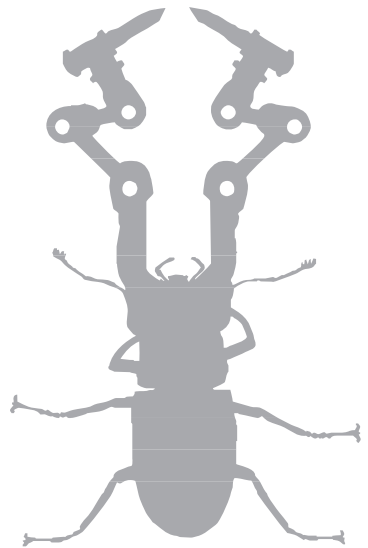


i, per a valors de p més grans, són les que figuren a la taula següent, amb els valors corresponents del marge econòmic (ingressos per vendes menys costos de producció):

Interval de valors del preu, p	Producció òptima	Marge econòmic
$34,2416 \leq x_8 \leq 35,2631$	588,000	0 a 600
$35,2631 \leq p \leq 37,8257$	780,120	600 a 2.600
$37,8257 \leq p \leq 42,9531$	1.072,665	2.600 a 8.100
$42,9531 \leq p$	1.225,000	$8.100 + 1.225 \cdot (p - 42,9531)$

Per tant, la corba d'oferta de KH (és a dir, la quantitat de producte que posa en el mercat, en funció del preu) té la forma que es representa a la figura següent.





→ 3

Aquí considerarem situacions en què es tracta de determinar quines vinculacions convé establir, i potser també amb quina intensitat, entre elements d'un conjunt i elements d'un altre conjunt o bé entre elements d'un mateix conjunt, amb el supòsit que els costos (o guanys) associats a una vinculació són proporcionals a la intensitat d'aquesta.

En els casos que les vinculacions són entre elements d'un conjunt i elements d'un altre de diferent, de vegades podem considerar que els elements d'un dels conjunts són orígens i els de l'altre, destinacions (per exemple, plantes manufactures i àrees comercials, respectivament). Altres vegades, encara que les vinculacions possibles només siguin entre els elements d'un conjunt i els de l'altre, no hi ha motiu per considerar els uns com a orígens i els altres com a destinacions (per exemple, assignar persones a llocs de treball). Aquesta distinció només afecta la terminologia, però no la modelització ni la resolució del problema.

Es pot donar el cas que tinguem dos conjunts, que cada un dels seus elements tingui associat un valor positiu, que cada parella formada per un element d'un conjunt i un de l'altre tingui associat un coeficient positiu de conversió en cost de la intensitat de la relació i que es tracti de determinar les intensitats de les relacions entre els elements d'un conjunt i els de l'altre de manera que, per als elements d'un dels conjunts, la suma de les intensitats de les seves relacions no superi el valor que té associat i, per als de l'altre, no sigui inferior al seu valor. És clar que perquè el problema tingui solució és necessari que la suma dels valors dels elements del primer dels conjunts esmentats no sigui inferior a la suma dels del segon (aquesta condició és suficient si totes les vinculacions són possibles).



El paràgraf anterior conté una descripció abstracta del que es coneix habitualment com el problema de transport.¹ Hem evitat les paraules oferta, estoc, demanda o, precisament, transport, per tal de posar de manifest que la denominació "problema de transport" no ha de fer perdre de vista que hi ha situacions formalment idèntiques en què no hi ha cap activitat involucrada que tingui res a veure amb el que s'entén estrictament per transport (és a dir, portar persones o coses d'un lloc a un altre). Després en veurem alguns exemples.

El problema de transport es pot modelitzar i resoldre mitjançant la programació lineal.

Siguin dos conjunts C , C' amb $|C| = n$, $|C'| = n'$, amb valors $v_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), $v'_j > 0$ ($j = 1, \dots, n'$), tals que $\sum_{i=1}^n v_i \geq \sum_{j=1}^{n'} v'_j$ i amb uns costos unitaris positius, c_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n'$); amb les variables x_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n'$) corresponents a la intensitat de la vinculació entre un element de C i un de C' :

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n'} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ & \text{s. a } \sum_{j=1}^{n'} x_{ij} \leq v_i \quad i = 1, \dots, n \\ & \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} \geq v'_j \quad j = 1, \dots, n' \end{aligned}$$

Com que hem suposat que les c_{ij} són positives (i fins i tot en el cas que fossin no negatives), es pot substituir per = en el segon grup de restriccions.²

Si la intensitat de la vinculació entre un o més parells d'elements està fitada (problema de transport amb capacitats), cal afegir restriccions de fita al model anterior.

Quan els dos conjunts tenen el mateix nombre d'elements i els valors que aquests tenen associats són tots iguals a 1, es denomina problema d'afectació (*assignment problem*).

En alguns casos, en el problema de transport, les variables han de ser enteres. En el problema d'afectació, han de ser binàries (gairebé sempre perquè així ho exigeix la naturalesa del cas estudiat –vincular persones a màquines en les quals han de treballar de manera exclusiva, per exemple– i, quan no és així, perquè

¹ Ens sembla preferible "problema de transport" a "problema del transport". Se'l denomina també problema de transport de Hitchcock-Koopmans.

² Les condicions que s'han de complir perquè la solució sigui factible són \geq , però, atès que els coeficients c_{ij} són positius, podem assegurar que en tota solució òptima es compliran com a =. Hi ha altres problemes en què és possible aplicar raonaments similars, però s'ha d'anar amb molt de compte, per no restringir indegudament el conjunt de solucions factibles.

encara que hi pugui haver solucions òptimes en què no totes les variables prenguin valors enters, sempre hi ha almenys una solució òptima amb tots els valors enters i que, per raons pràctiques, és preferible a les altres).³

Hi ha casos que la vinculació entre un element de C i un de C' només pot ser directa (per exemple, perquè només és possible amb una línia de transport de passatgers o de mercaderies entre l'element de C i el de C'). Si la vinculació pot ser indirecta, perquè es pot fer a través d'un element que no pertany ni a C ni a C' (que aleshores es denomina punt de transbordament) o perquè sigui possible la vinculació entre els elements de C (o de C') entre si, el problema es denomina de transbordament i es pot reduir de diverses maneres a un problema de transport. Una d'aquestes consisteix a determinar els camins de cost mínim entre cada element de C i cada element de C' i adoptar com a c_{ij} el cost corresponent al camí mínim (i no el de la connexió directa entre $i \in C$ i $j \in C'$). Però aquesta transformació no és vàlida en el cas que les intensitats de les vinculacions estiguin fitades (perquè a la solució del problema de transport pot haver-hi intensitats incompatibles amb les capacitats). Una altra via per resoldre el problema, que veurem a continuació, consisteix a formular, sense necessitat de calcular prèviament els camins mínims, un programa lineal, no gaire diferent del corresponent al problema de transport, en el qual es poden incorporar les limitacions en les capacitats com a restriccions de fita.

Siguin dos conjunts C, C' amb $|C| = n, |C'| = n'$, amb valors $v_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), $v'_j \geq 0$ ($j = n+1, \dots, n+n'$),⁴ associats respectivament als elements dels conjunts C i C' i tals que $\sum_{i=1}^n v_i \geq \sum_{j=n+1}^{n+n'} v'_j$, i amb uns costos c_{ij} ($i = 1, \dots, n+n'$; $j [\neq i] = 1, \dots, n+n'$); amb les variables x_{ij} ($i = 1, \dots, n+n'$; $j [\neq i] = 1, \dots, n+n'$) corresponents a la intensitat de la vinculació entre dos elements:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar} \quad \sum_{i=1}^{n+n'} \sum_{(j=1, \dots, n+n') \wedge j \neq i} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ \text{s. a} \quad & \sum_{(i=1, \dots, n+n') \wedge i \neq j} x_{ij} + v_j \geq \sum_{(i=1, \dots, n+n') \wedge i \neq j} x_{ji} \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{(i=1, \dots, n+n') \wedge i \neq j} x_{ij} = v'_j + \sum_{(i=1, \dots, n+n') \wedge i \neq j} x_{ji} \quad j = n+1, \dots, n+n' \end{aligned}$$

³ A causa de l'estructura peculiar de les matrius dels programes matemàtics corresponents, els algorismes emprats habitualment per resoldre aquests tipus de problemes donen com a resultats solucions enteres si els valors associats als elements són enters (en el problema d'afectació ho són sempre).

⁴ Observeu que hem modificat la definició del conjunt C' , ja que inicialment havíem suposat $v'_j > 0 \forall j$ i ara, en canvi, $v'_j \geq 0 \forall j$, és a dir, considerem que pertanyen a C' els punts de transbordament (amb $v'_j = 0$).



Els problemes de transport i d'afectació tenen algorismes específics per resoldre'ls. Alguns dels algorismes que es descriuen en els llibres de text han estat superats per altres de més moderns que de vegades es poden trobar a Internet.

Ara bé, com acabem de veure, aquests problemes es poden modelitzar com a programes lineals i, actualment, es poden resoldre sense dificultats (llevat que es tracti de programes de grans dimensions) amb un algorisme genèric de programació lineal.

Cal destacar que el supòsit que els costos són proporcionals a la intensitat dels fluxos no s'ajusta a la realitat en moltes ocasions, particularment en situacions en què es tracta pròpiament de transportar objectes d'uns llocs a uns altres, perquè aleshores el cost del viatge del vehicle que fa el transport pot ser relativament poc sensible a la magnitud de la càrrega transportada.

Vegem-ne ara uns quants exemples:

- El que es coneix estrictament com el problema de transport: hi ha uns magatzems amb uns estocs donats o unes fàbriques amb una capacitat de producció donada i uns clients o mercats amb una demanda coneguda; es tracta de determinar el pla de transport de cost mínim. Les situacions reals que s'ajusten a aquest esquema són molt variades: panificadores i despatxos de pa; plantes de formigó i obres...
- És més difícil trobar exemples en què es tracti de maximitzar. Però, quan a Espanya encara hi havia servei militar obligatori, en un enunciat d'examen es va demanar el pla d'assignació de reclutes a zones de tal manera que la suma de distàncies entre el domicili dels reclutes i la seva destinació fos màxima. També es pot plantejar com un problema de transport de maximització l'assignació de professorat a la responsabilitat d'assignatures (cada membre del professorat pot ser responsable de més d'una assignatura, una assignatura ha de tenir una sola persona responsable i associem un valor, que n'expressi la idoneïtat, a cada assignació).
- També es poden plantejar com a problemes de transport alguns problemes de planificació de la producció, com en el model de Bowman.⁵ Se suposa que es vol minimitzar el cost de la planificació per a un cert nombre de períodes de la fabricació d'un producte únic i que es coneix la demanda de cada període, els costos unitaris i les capacitats de producció en cada un dels períodes en horari normal o en hores extres, i els costos d'emmagatzemar una unitat de producte fabricada en un període fins a vendre-la en un període posterior. Si veiem cada modalitat de producció (hores normals o hores extres) en cada període com un origen i cada període (amb la demanda corresponent) com una destinació, és clar que el problema encaixa perfectament amb el model de transport.

⁵ Bowman, E. H. (1956) Production Scheduling by the Transportation Method of Linear Programming. *Operations Research*, 4, 1, 100-103.

- Un exemple típic del problema d'afectació és l'assignació de persones a llocs de treball. N'és un cas particular, per exemple, l'assignació d'esportistes a cada un dels estils d'un equip de natació de 4 x 100 estils (és un problema d'afectació si es compta amb 4 esportistes; si n'hi ha més, és un problema de transport en què els valors associats als elements del conjunt d'esportistes i al d'estils són iguals a 1, però es pot reduir a un problema d'afectació mitjançant la introducció d'estils ficticis).
- Alguns problemes de seqüències també es poden plantejar com a problemes d'afectació. Tenim n unitats, cada una de les quals s'ha d'assignar a un i només un dels n intervals temporals disponibles, de manera que les unitats estiguin el més a prop possible d'unes posicions ideals prèviament establertes; si a cada parell unitat-interval associem un valor funció de la diferència entre la posició de l'interval i la posició ideal de la unitat, tenim tot el que cal per definir un exemplar del problema d'afectació.
- Les empreses de lloguer de cotxes i les que gestionen el *bicing* s'enfronten quotidianament amb un problema de transbordament, ja que els fluxos no s'equilibren i hi ha punts en què sobren unitats i altres en què en falten.

Passem ara als problemes.

Com hem dit abans, el problema d'afectació és un cas particular dels que estem considerant, en el qual hi ha dos conjunts amb el mateix nombre d'elements i cada element d'un conjunt s'ha d'associar amb un de l'altre, de manera que cap element formi part de més d'una parella (és a dir, tot element ha de formar part d'una parella i només una) i que es minimitzi la suma dels costos associats a cada parella.

VI01.1. Afectació: minsum

Suposem que el procés per obtenir una unitat d'un producte consta de 10 operacions, que cada operació requereix una persona que la dugui a terme, que els temps d'execució corresponents a cada parella persona (fila) - operació (columna) són els que figuren a la taula inclosa a continuació, i que es vol minimitzar el temps total de treball necessari per al conjunt de totes les operacions del procés.

92	88	57	51	62	64	93	88	72	57
59	98	65	99	56	71	60	100	68	86
77	76	75	84	62	63	83	98	87	85
51	71	67	70	90	57	67	69	73	67
60	53	66	97	63	91	78	56	69	60
60	74	65	82	53	79	55	100	90	82
94	96	96	80	98	87	62	63	66	85
53	64	80	59	72	54	83	83	93	65
53	85	92	92	97	66	71	91	76	77
88	93	95	71	70	52	86	78	86	51



Mostrem el model a continuació:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ & \text{s.a } \sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, 10 \\ & \quad \sum_{i=1}^{10} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, 10 \\ & \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 10; j = 1, \dots, 10 \end{aligned}$$

Hi hem inclòs la condició que les variables són binàries, però en podem prescindir, d'acord amb el que hem indicat en la nota 3 (només cal imposar que les variables siguin no negatives, ja que els dos primers grups de restriccions impliquen $x_{ij} \leq 1 \forall i, j$).

El valor òptim de la funció objectiu és igual a 577, amb les assignacions de tasques corresponents a les caselles negres de la taula següent:

92	88	57	51	62	64	93	88	72	57
59	98	65	99	56	71	60	100	68	86
77	76	75	84	62	63	83	98	87	85
51	71	67	70	90	57	67	69	73	67
60	53	66	97	63	91	78	56	69	60
60	74	65	82	53	79	55	100	90	82
94	96	96	80	98	87	62	63	66	85
53	64	80	59	72	54	83	83	93	65
53	85	92	92	97	66	71	91	76	77
88	93	95	71	70	52	86	78	86	51

VI01.2. Afectació: minmax (coll d'ampolla)

Si les tasques es fan consecutivament, es configura una línia de producció de 10 estacions de treball, la capacitat de la qual (en nombre d'unitats de producte per unitat de temps) és la inversa del temps de cicle de la línia, és a dir, el temps de treball corresponent a l'estació més carregada. En l'exemple (si adoptem com a unitat de temps una hora i els valors de la taula estan expressats en segons), $3.600/68 = 52,94 \text{ h}^{-1}$. Però, amb aquest supòsit, no és pertinent minimitzar la suma de temps, sinó el temps del coll d'ampolla, és a dir, minimitzar el temps de l'estació més carregada.

Aleshores, es diu que el problema és d'afectació de coll d'ampolla (*bottleneck assignment problem*).

La funció objectiu $\left(\max_{i,j} c_{ij} \cdot x_{ij} \right)$ no és lineal, però el problema es pot resoldre amb el model lineal següent:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } z \\ \text{s. a } &\sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, 10 \\ &\sum_{i=1}^{10} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, 10 \\ &c_{ij} \cdot x_{ij} \leq z \quad i = 1, \dots, 10; j = 1, \dots, 10 \\ &x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 10; j = 1, \dots, 10 \end{aligned}$$

El nombre de restriccions ha passat de 20 a 120, que pot ser excessiu per a les capacitats d'alguns programaris (de fet, la versió d'Excel amb què treballàvem tenia un límit de 100 restriccions i no vàrem poder fer-la servir per obtenir la solució del problema d'afectació de coll d'ampolla).

Alternativament, hem donat un valor molt alt a les caselles amb valor ≥ 68 (68 és el valor de coll d'ampolla en la solució corresponent al problema de minimitzar la suma; es tracta d'excloure de la solució aquestes caselles, cosa que també es pot aconseguir eliminant o fent iguals a zero les variables corresponents), hem tornat a resoldre el problema de minimitzar la suma i hem obtingut la solució següent, en què el valor del coll d'ampolla és 66 (per tant, amb una capacitat de producció de $3.600/66 = 54,55 \text{ h}^{-1}$, la qual cosa suposa una millora del 3 %); la suma de temps és, en aquesta solució, 580.

92	88	57	51	62	64	93	88	72	57
59	98	65	99	56	71	60	100	68	86
77	76	75	84	62	63	83	98	87	85
51	71	67	70	90	57	67	69	73	67
60	53	66	97	63	91	78	56	69	60
60	74	65	82	53	79	55	100	90	82
94	96	96	80	98	87	62	63	66	85
53	64	80	59	72	54	83	83	93	65
53	85	92	92	97	66	71	91	76	77
88	93	95	71	70	52	86	78	86	51

A la propera iteració s'ha de donar un valor molt alt a les caselles amb un valor ≥ 66 ; aleshores ja no hi ha cap solució que no tingui un valor "infinit" (no cal fer



càlculs, tots els valors de la columna 9 valors són ≥ 66). Per tant, la darrera solució obtinguda és òptima per al problema de coll d'ampolla.

Aquest procediment iteratiu té un avantatge addicional en relació amb el de resoldre el model lineal per al problema de coll d'ampolla: la solució que proporciona és tal que, entre les que minimitzen el coll d'ampolla, minimitza la suma (en la resolució diguem-ne directa del problema de coll d'ampolla no es fa intervenir el valor de la suma, per la qual cosa el procediment dona una solució òptima qualsevol, per al coll d'ampolla, sense cap propietat pel que fa a la suma dels temps corresponents).

De tota manera, podem adaptar el model lineal del problema de coll d'ampolla perquè proporcioni, entre les solucions òptimes per al coll d'ampolla, una que minimitzi la suma de temps:

$$\text{minimitzar } z + \frac{1}{F} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, 10$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, 10$$

$$c_{ij} \cdot x_{ij} \leq z \quad i = 1, \dots, 10; j = 1, \dots, 10$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 10; j = 1, \dots, 10$$

On F és una fita superior del valor de la suma (en aquest cas, 1.000, per exemple). Si els temps c_{ij} són enters, amb la nova funció objectiu es desfà l'empat entre les solucions que minimitzen el coll d'ampolla a favor de les solucions amb una suma menor. Aquest model proporciona la mateixa solució obtinguda anteriorment amb el procediment de resolució successiva de problemes de minimització de la suma.

Alternativament, una vegada resolt el problema de coll d'ampolla i tant si tots els temps són enters com si no ho són, es pot trobar una solució que minimitzi la suma de temps, entre les que minimitzen el coll d'ampolla, mitjançant la resolució del problema d'afectació amb una matriu que tingui valors molt alts a les caselles en què inicialment el temps sigui superior al valor òptim del coll d'ampolla.

VI02. Cadena

Seguim considerant el procés productiu de 10 operacions descrit en el problema VI01.2. Suposem ara que la capacitat requerida és de 25 unitats/hora i que, per tant, el temps per unitat és de $3.600/25 = 144$ segons. Suposem també que el temps necessari per dur a terme cada operació ($t_j; j = 1, \dots, 10$) és independent de la persona que se n'encarrega:

Operació	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temps en segons	53	64	80	59	72	54	83	83	93	65

Aleshores, es pot organitzar una línia en què cada estació tingui assignades diverses tasques de manera que el temps total no superi els 144 s. Si el cost de la línia és proporcional al nombre d'estacions, s'ha de tractar de minimitzar aquest nombre.

Com que la suma de temps és 706, el nombre d'estacions no pot ser inferior a $\lceil 706 / 144 \rceil = 5$. Podem trobar fàcilment una solució possiblement de bona qualitat si adoptem un criteri raonable d'assignació successiva de tasques; per exemple, podem donar prioritats, entre les tasques compatibles amb les ja assignades a l'estació, a la de més durada i obrir una nova estació quan ja no se li pugui assignar cap altra tasca. "Compatible" vol dir que el temps encara disponible a l'estació no és inferior a la durada de la tasca. Obtenim la solució següent:

Estació	1	2	3	4	5	6
Tasques	9	7, 4	8, 6	3, 2	5, 10	1
Temps total	93	142	137	144	137	53

Així doncs, tenim una solució amb 6 estacions, amb un temps de cicle de 144 i, per tant, amb una capacitat de $3.600/144 = 25 \text{ h}^{-1}$, exactament igual a la que es demana. La solució és òptima, perquè la tasca 9 ha d'anar sola en una estació (no n'hi ha cap altra amb una durada $\leq 144 - 93 = 51$) i les altres, amb una durada total de 613, no es poden encabir en menys de $\lceil 613 / 144 \rceil = 5$ estacions. Com que no hem suposat que hi hagués cap restricció pel que fa a l'ordre o al lloc d'execució de les tasques, la solució anterior és, de fet, una representant d'un conjunt de $6! = 720$ solucions equivalents, que podem obtenir formant totes les permutacions de les 6 estacions.

És clar que no sempre s'obté una solució òptima amb un algorisme tan senzill com el que hem aplicat. Ni sempre és tan fàcil saber que és òptima quan ho és. En general, podem trobar fàcilment fites inferior i superior (5 i 6, respectivament, en l'exemple) del valor òptim del nombre d'estacions.

Per tenir la seguretat de trobar una solució òptima hem de recórrer a un model com el següent (format de manera que es vegi com es pot generalitzar; les variables corresponen a l'existència o no de les estacions —en aquest cas només l'estació 6, ja que sabem que no poden ser menys de 5 ni cal que siguin més de 6— i a l'assignació de les tasques a les estacions; les restriccions imposen que cada tasca es faci en una estació i només en una, que la durada total de les tasques assignades a una estació no superi el valor màxim del temps de cicle, 144, en les estacions 1 a 5 i el valor màxim del temps de cicle multiplicat per la variable binària que indica si l'estació existeix o no en l'estació 6):



$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{i=6}^6 y_i \\ \text{s.a } & \sum_{i=1}^6 x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, 10 \\ & \sum_{j=1}^{10} t_j \cdot x_{ij} \leq 144 \quad i = 1, \dots, 5 \\ & \sum_{j=1}^{10} t_j \cdot x_{ij} \leq 144 \cdot y_i \quad i = 6 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6; \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad j = 1, \dots, 10 \\ & y_i \in \{0, 1\} \quad i = 6 \end{aligned}$$

La solució que vàrem obtenir té 6 estacions, com ja sabíem, amb una distribució diferent de les tasques entre les estacions:

Estació	1	2	3	4	5	6
Tasques	9	4, 10	1, 7	2, 3	8	5, 6
Temps total	93	124	136	144	83	126

Aquesta solució és una representant d'un altre conjunt de 720 solucions òptimes. Aquesta multiplicitat de solucions òptimes allarga el temps de càlcul. Si hi hagués més diferència entre les fites inferior i superior del nombre d'estacions i el nombre d'estacions necessàries fos inferior a aquesta fita superior, encara hi hauria una altra font de simetria, perquè la solució del model podria col·locar les estacions addicionals de diverses maneres; exemple: fita inferior = 7, fita superior = 12, nombre òptim d'estacions = 10 (les 3 estacions addicionals a les 7 de la fita inferior es poden col·locar de $\binom{12-7}{10-7} = \binom{5}{3} = 10$ maneres diferents en les 5 (12-7) posicions potencials).

De fet, de les dues causes de simetria apuntades, la primera és molt improbable que intervingui en un problema de disseny d'una línia de producció, perquè les restriccions de precedència entre les tasques, que pràcticament sempre estan presents, trenquen la simetria. L'exemple que estem considerant, sense restriccions de precedència ni d'incompatibilitat entre les tasques i amb totes les estacions iguals, és formalment igual al problema (*bin packing problem*) de minimitzar el nombre de contenidors necessaris per encabir-hi uns objectes de pesos donats, en el supòsit que cada contenidor pot suportar un pes màxim (on diem pes es pot dir també volum o alçària, segons el cas que considerem).

En canvi, la simetria pel que fa a la posició de les estacions addicionals a les que corresponen a la fita inferior és inherent al tipus de model indicat, i modificar la funció objectiu o afegir restriccions per trencar aquesta simetria (imposar que si

una estació no existeix, la següent tampoc) pot repercutir favorablement en el temps de càlcul.

Tornem a l'exemple. Hem localitzat $2 \cdot 720 = 1.420$ solucions òptimes pel que fa al nombre d'estacions i totes tenen un temps de cycle de 144; per tant, una capacitat de producció exactament igual a la desitjada, 25 h^{-1} . Ara ens plantejem trobar una assignació de tasques que maximitzi la capacitat de producció de la línia (és a dir, que minimitzi el temps de cycle, igual al temps corresponent a l'estació més carregada), atès que té 6 estacions. Ho podem fer amb el model següent:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } z \\ \text{s. a } & \sum_{j=1}^6 x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, 10 \\ & \sum_{j=1}^{10} t_j \cdot x_{ij} \leq z \quad i = 1, \dots, 6 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6; \\ & \quad \quad \quad j = 1, \dots, 10 \\ & z \in \mathbb{Z}_{>0} \end{aligned}$$

Amb el qual vàrem obtenir la solució:

Estació	1	2	3	4	5	6
Tasques	9	1, 7	4, 5	8	3, 6	2, 10
Temps total	93	136	131	83	134	129

En què el temps de cycle és de 136 i, per tant, la capacitat és de $26,47 \text{ h}^{-1}$, un 5,88 % superior a la necessària.

Hem millorat la solució que havíem obtingut abans, però en aquesta darrera els temps morts encara són molt alts: $6 \cdot 136 - 706 = 110$ segons en cada cycle productiu.

Si doblem el temps de cycle màxim ($2 \cdot 144 = 288$) la fita inferior del nombre d'estacions és $\lceil 706 / 288 \rceil = 3$ (és obvi que aquest valor és òptim: es pot obtenir una assignació de tasques compatible amb el temps de cycle agrupant de dues en dues les 6 estacions de les solucions anteriors) i caldran 2 línies. El temps de cycle mínim per a 3 estacions s'obté amb una solució com la següent:

Estació	1	2	3
Tasques	4, 8, 9	1, 2, 6, 10	3, 5, 7
Temps total	235	236	235

Entre les dues línies la capacitat de producció és $2 \cdot 3.600 / 236 = 30,51 \text{ h}^{-1}$, un 11,53 % superior a la d'una sola línia i un 22,04 % superior a la necessària.



Amb 3 línies de 2 estacions tenim una solució com ara:

Estació	1	2
Tasques	1, 4, 7, 9, 10	2, 3, 5, 6, 8
Temps total	353	353

Amb una capacitat de producció igual a $3 \cdot 3.600 / 353 = 30,59 \text{ h}^{-1}$, igual a la que obtindríem amb 6 línies d'una estació cada una (de fet, ja no diríem que són 6 línies, sinó 6 llocs de treball), ja que en el supòsit de 3 línies no hi ha temps morts.

És clar que el supòsit que els temps d'execució no depenen del nombre de tasques assignades a cada persona pot ser que no s'ajusti a la realitat, i els costos de la instal·lació no necessàriament depenen únicament del nombre total d'estacions (tenir més línies complica la mantenició), però també s'ha de tenir en compte que la probabilitat d'interrompre totalment la producció per avaries o baixes de personal es redueix a mesura que augmenta el nombre de línies.

Suposem ara que les operacions 1 i 2 precedeixen la 9, i que la 9 precedeix la 10 (si una operació en precedeix una altra, la segona s'ha d'assignar a la mateixa estació que a la primera –on s'hauran d'executar en l'ordre apropiat– o a una estació posterior). I suposem també que les tasques 1 i 2 no poden assignar-se a una mateixa estació, i que entre l'estació en què s'executi la 2 i la que s'executi la 4 n'hi ha d'haver almenys dues.

Com que ara hi ha restriccions que impliquen les tasques, l'algorisme que hem aplicat abans per obtenir una primera solució amb 6 estacions requereix una adaptació. En aquell algorisme les tasques s'assignaven successivament amb "prioritat, entre les tasques compatibles amb les ja assignades a l'estació, a la de més durada", i ara ampliem la descripció del procediment "entre les tasques sense precedents o tals que totes les seves precedents han estat assignades, assignar la de màxima prioritats, segons el criteri adoptat, compatible amb les ja assignades". "Compatible" vol dir que el temps encara disponible a l'estació no és inferior a la durada de la tasca i que l'assignació no viola cap restricció de les que vinculen les tasques (de fet, això inclou les restriccions de precedència). Aquest algorisme es pot veure com a membre d'una família d'algorismes, cada un caracteritzat pel criteri de prioritats (més durada, menys durada, nombre de tasques precedides...); sol donar bons resultats el denominat "pes" de Helgeson i Birnie:⁶ suma de les durades de la mateixa tasca i de totes les que precedeix.

D'acord amb aquesta definició, els pesos de les tasques són els que figuren a la taula següent:

Operació	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temps en segons	53	64	80	59	72	54	83	83	93	65
Pes	211	222	80	59	72	54	83	83	158	65

⁶ Helgeson, W. B., Birnie, D. P. (1961) Assembly line balancing using the ranked positional weight technique. *Journal of Industrial Engineering*, 12, 394-398.

I la solució que s'obté és:⁷

Estació	1	2	3	4	5	6
Tasques	2, 3	1, 7	9	8, 6	5, 10	4
Temps total	144	136	93	137	137	59

Aquesta solució és òptima pel que fa al nombre d'estacions, ja que el nombre mínim d'estacions era 6 quan no hi havia precedències i incompatibilitats, i afegir restriccions mai no pot millorar el valor òptim de la funció objectiu. Per tant, no cal fer ús del model d'optimització del nombre d'estacions, però podem intentar reduir el temps de cicle amb el model corresponent, al qual cal afegir ara restriccions per tenir en compte les condicions de precedència i d'incompatibilitat:⁸

– Precedències:

$$\sum_{i=1}^6 i \cdot x_{i1} \leq \sum_{i=1}^6 i \cdot x_{i9}, \quad \sum_{i=1}^6 i \cdot x_{i2} \leq \sum_{i=1}^6 i \cdot x_{i9}, \quad \sum_{i=1}^6 i \cdot x_{i9} \leq \sum_{i=1}^6 i \cdot x_{i10}$$

– Incompatibilitats:

$$\begin{aligned} x_{i1} + x_{i2} &\leq 1 \quad i = 1, \dots, 6 \\ \sum_{i=1}^6 i \cdot x_{i2} - \sum_{i=1}^6 i \cdot x_{i4} &\geq 3 - 8 \cdot r \\ \sum_{i=1}^6 i \cdot x_{i4} - \sum_{i=1}^6 i \cdot x_{i2} &\geq 3 - 8 \cdot (1 - r) \\ r &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

I s'obté la solució (amb $r = 1$):

Estació	1	2	3	4	5	6
Tasques	8	1, 7	2, 5	9	3, 6	4, 10
Temps total	83	136	136	93	134	124

⁷ Es poden obtenir solucions diverses en aplicar el procediment amb criteris diferents de prioritats i també mitjançant la resolució del problema que podem denominar invers, és a dir, aquell en què s'han capgirat les precedències (per descomptat, també cal capgirar la solució obtinguda amb el problema invers, per convertir-la en solució del problema directe).

⁸ A causa de les condicions de precedència, hi ha tasques que no es poden assignar a qualsevol estació (a l'exemple, les tasques 1 i 2 no es poden assignar a les estacions 5 i 6, perquè aleshores no cabrien a la línia les tasques successores; la 9 només es pot assignar des de la 2 a la 5, les dues incloses —si es té en compte la incompatibilitat d'1 i 2 es veu que només pot anar entre la 3 i la 5—). Aquesta observació és aplicable amb caràcter general i permet reduir, de vegades molt substancialment, el nombre de variables del model, però aquí en prescindirem.



Amb la qual passem d'un temps de cycle de 144 a un de 136, que implica un increment de capacitat del 5,88 %.

Tornem ara al supòsit que no hi ha restriccions entre les tasques i que els temps depenen de la persona que les executa, d'acord amb la taula 10 x 10 del problema VI01. Volem determinar com s'ha d'organitzar la línia amb 6 estacions de treball, amb les 6 persones que més convingui, per tal d'assolir la màxima capacitat de producció.

Cal un model diferent:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimitzar } z \\
 \text{s.a } &\sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, 10 \\
 &\sum_{j=1}^{10} t_{ij} \cdot x_{ij} \leq M_i \cdot y_i \quad i = 1, \dots, 10 \\
 &\sum_{j=1}^{10} t_{ij} \cdot x_{ij} \leq z \quad i = 1, \dots, 10 \\
 &\sum_{i=1}^{10} y_i \leq 6 \\
 &x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 10; \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad j = 1, \dots, 10 \\
 &y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 10 \\
 &z \in \mathbb{Z}_{>0}
 \end{aligned}$$

El signe de la restricció $\sum_{i=1}^{10} y_i \leq 6$ (\leq en comptes de $=$) permet tenir en compte

la possibilitat que la màxima capacitat de producció es pugui aconseguir amb menys de 6 estacions de treball, cosa que pot succeir si algunes persones poden fer les tasques en temps molt més petits que les altres). Les M_i són fites superiors, com més ajustades millor, del valor que pot prendre el primer membre de la restricció. Els valors que hem emprat en la resolució del model són, per a cada persona, la suma dels seus temps d'execució de totes les tasques (això és vàlid per a qualsevol exemplar del problema; en un exemplar específic, els valors de les M_i es podrien ajustar més, però per resoldre el nostre exemple no cal aprofundir en aquest aspecte).

El temps de cycle òptim és 109 i una de les solucions amb què es pot obtenir és la següent (a la columna de la dreta, el temps total per a cada persona i la suma de temps per a les 10 tasques):

92	88	57	51	62	64	93	88	72	57	108
59	98	65	99	56	71	60	100	68	86	0
77	76	75	84	62	63	83	98	87	85	0
51	71	67	70	90	57	67	69	73	67	0
60	53	66	97	63	91	78	56	69	60	109
60	74	65	82	53	79	55	100	90	82	108
94	96	96	80	98	87	62	63	66	85	66
53	64	80	59	72	54	83	83	93	65	0
53	85	92	92	97	66	71	91	76	77	53
88	93	95	71	70	52	86	78	86	51	103
										547

Si entre totes les solucions que minimitzen el temps de cycle es vol determinar la que optimitza un altre criteri, en el model s'ha de substituir la funció objectiu per la corresponent al nou criteri i imposar que el temps de cycle sigui igual a l'òptim (que s'aconsegueix fent $M_i = 109 \forall i$). Suposem que el criteri de desempat és la suma de temps; com que ja tenim una solució amb un valor 547 per a la nova funció objectiu, també podem incloure una restricció que li imposi un valor millor (és a dir, ≤ 546 , atès que només pot adoptar valors enters); amb aquesta restricció, el fet que el model no tingui solucions factibles implicaria que el valor ja obtingut era òptim (sense la restricció obtindríem el mateix valor òptim, però amb ella reduïm l'espai de solucions factibles i, per tant, possiblement el temps de resolució del model). Aleshores, el model que cal resoldre és:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} t_{ij} \cdot x_{ij} \\ \text{s.a. } & \sum_{i=1}^{10} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, 10 \\ & \sum_{j=1}^{10} t_{ij} \cdot x_{ij} \leq 109 \cdot y_i \quad i = 1, \dots, 10 \\ & \sum_{i=1}^{10} y_i \leq 6 \\ & \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} t_{ij} \cdot x_{ij} \leq 546 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 10 \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad j = 1, \dots, 10 \\ & y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 10 \end{aligned}$$

Amb el qual s'obté la solució:



92	88	57	51	62	64	93	88	72	57	108
59	98	65	99	56	71	60	100	68	86	0
77	76	75	84	62	63	83	98	87	85	0
51	71	67	70	90	57	67	69	73	67	51
60	53	66	97	63	91	78	56	69	60	109
60	74	65	82	53	79	55	100	90	82	108
94	96	96	80	98	87	62	63	66	85	66
53	64	80	59	72	54	83	83	93	65	0
53	85	92	92	97	66	71	91	76	77	0
88	93	95	71	70	52	86	78	86	51	103
										545

No és excepcional que un programa matemàtic tingui òptim múltiple, però és el més habitual quan es tracta de minimitzar un valor màxim, ja que en aquests casos el valor de la funció objectiu el determina, si no hi ha empats, una sola variable. En l'exemple, hi ha altres solucions amb un coll d'ampolla de 109, en les quals el valor de la suma de temps va de 545 a 622.

Hem esmentat anteriorment el model de Bowman com una aplicació del model de transport a la planificació agregada de la producció. En aquell model cada període correspon a un o més orígens (hores normals i hores extres, si hi ha la possibilitat d'implantar-les) i a una destinació.

Una cas diferent és quan un producte elaborat en un període es pot vendre, després de madurar o envellir (embotits, formatges, licors destil·lats...) en diversos períodes posteriors, amb una qualitat i un preu que augmenta amb l'edat del producte (de fet, es podria considerar qualsevol altre tipus de relació entre edat, qualitat i preu).

VI03. Pernils

ASGAMSA inaugura una planta amb capacitat per emmagatzemar N pernils i es disposa a planificar els propers T períodes. ASGAMSA compra gambajons als ramaders i els sotmet a un procés de curació abans de posar-los a la venda al cap d'un, dos o tres períodes. Amb aquesta finalitat, ha elaborat les previsions següents:

- Preu de compra dels gambajons als ramaders: p_{0t} ($t = 1, \dots, T$)
- Quantitat màxima que pot adquirir: Q_t ($t = 1, \dots, T$)
- Preus de venda segons l'edat del pernil: p_{it} ($i = 1, \dots, 3; t = 1, \dots, T$)
- Cost de possessió d'un pernil durant un període (inclou l'energia consumida en el procés de maduració): h

Els gambajons entren al magatzem al principi de cada període i els pernills en surten al llarg del període que segueix a l'instant que arriben a l'edat corresponent.

Als preus previstos, la demanda és prou gran per absorbir tots els pernills que es posen a la venda.

ASGAMSA disposa de tresoreria suficient, de la qual obté un interès al tipus anual i_a .

L'objectiu és maximitzar el valor actualitzat de la diferència entre cobraments i pagaments (tots els quals tenen lloc al final del període corresponent), amb la condició que al final de l'horitzó de planificació hi hagi en el magatzem $N/3$, $N/4$, $N/5$ pernills d'edats iguals a un, dos o tres períodes, respectivament.

Els valors numèrics de les dades esmentades són els següents:

$$N = 50.000, h = 10, i_a = 0,03, T = 12$$

Si els períodes són mesos, el tipus d'interès aplicable a l'actualització és $i_m = (1 + i_a)^{1/12} - 1 = 0,002466$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_{0t}	50	50	50	50	50	55	60	65	70	75	65	45
$Q_t / 1.000$	20	20	20	20	20	25	30	35	40	50	30	20
p_{1t}	-	150	150	150	150	150	150	150	150	155	160	165
p_{2t}	-	-	250	250	250	250	50	250	250	260	280	300
p_{3t}	-	-	-	500	500	500	500	500	500	550	600	750

Variables:

q_t nombre de gambajons comprats a l'inici del període t ($t = 1, \dots, T$)

v_{it} vendes de pernills d'edat i períodes en el període t ($t = 2, \dots, T$; $i = 1, \dots, \min(t-1, 3)$)

s_t, \hat{s}_t estoc a l'inici i al final, respectivament, del període t ($t = 1, \dots, T$)

Model:



$$\text{maximitzar } \sum_{t=2}^T \sum_{i=1}^{\min(t-1,3)} \frac{1}{(1+i_m)^t} \cdot p_{it} \cdot v_{it} - \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+i_m)^t} \cdot p_{ot} \cdot q_t - h \cdot \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+i_m)^t} \cdot \frac{s_t + \hat{s}_t}{2}$$

$$q_t = v_{1,t+1} + v_{2,t+2} + v_{3,t+3} \quad t = 1, \dots, T-3$$

$$q_{T-2} = v_{1,T-1} + v_{2T} + N/5$$

$$q_{T-1} = v_{1T} + N/4$$

$$q_T = N/3$$

$$s_1 = q_1, \hat{s}_1 = q_1$$

$$s_2 = \hat{s}_1 + q_2, \hat{s}_2 = s_2 - v_{12}$$

$$s_3 = \hat{s}_2 + q_3, \hat{s}_3 = s_3 - v_{13} - v_{23}$$

$$s_t = \hat{s}_{t-1} + q_t, \hat{s}_t = s_t - v_{1t} - v_{2t} - v_{3t} \quad t = 4, \dots, T$$

$$q_t \leq Q_t; s_t \leq N \quad t = 1, \dots, T$$

Amb les dades indicades, el valor òptim de la funció objectiu és 48.537,79 milers d'u. m. i la solució òptima es mostra a la taula següent (tots els valors són en milers):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_t	20,00	20,00	10,00	16,67	10,83	10,00	12,50	16,67	10,83	10,00	12,50	16,67
v_{1t}		0,00	7,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
v_{2t}			9,17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
v_{3t}				10,83	12,5	10,00	16,67	10,83	10,00	12,50	16,67	10,83
s_t	20,00	40,00	50,00	50,00	50,00	47,50	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00

Hem suposat que ASGAMSA no tenia limitacions en la disponibilitat de tresoreria. Ara, en canvi, suposem que inicialment només disposa de 500 milers d'u. m. i d'una pòlissa de crèdit amb un límit de $P = 1.000$ milers d'u. m., per a la qual paga un 8 % del saldo a final de cada mes. Si el saldo de tresoreria és positiu, ASGAMSA n'obté un 1 % en concepte d'interessos.

Per no complicar més les coses, prescindim de les repercussions fiscals dels interessos.

En aquest context, l'objectiu d'ASGAMSA és maximitzar el saldo de tresoreria al final de l'horitzó de planificació.

Cal definir noves variables:

μ_t^- , μ_t^+ saldos negatius (en valor absolut) i positius, respectivament, al final del període t ($t = 1, \dots, T$)

l el model modificat és el següent:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \mu_T^+ - \mu_T^- \\ & q_t = v_{1,t+1} + v_{2,t+2} + v_{3,t+3} & t = 1, \dots, T-3 \\ & q_{T-2} = v_{1,T-1} + v_{2T} + N / 5 \\ & q_{T-1} = v_{1T} + N / 4 \\ & q_T = N / 3 \\ & s_1 = q_1, \hat{s}_1 = q_1 \\ & s_2 = \hat{s}_1 + q_2, \hat{s}_2 = s_2 - v_{12} \\ & s_3 = \hat{s}_2 + q_3, \hat{s}_3 = s_3 - v_{13} - v_{23} \\ & s_t = \hat{s}_{t-1} + q_t, \hat{s}_t = s_t - v_{1t} - v_{2t} - v_{3t} & t = 4, \dots, T \\ & q_t \leq Q_t; s_t \leq N & t = 1, \dots, T \\ & \mu_1^+ - \mu_1^- = 500 - \rho_{01} \cdot q_1 - h \cdot (s_1 + \hat{s}_1) / 2 \\ & \mu_2^+ - \mu_2^- = 1,01 \cdot \mu_1^+ - 1,08 \cdot \mu_1^- - \rho_{02} \cdot q_2 + \rho_{12} \cdot v_{12} - h \cdot (s_2 + \hat{s}_2) / 2 \\ & \mu_3^+ - \mu_3^- = 1,01 \cdot \mu_2^+ - 1,08 \cdot \mu_2^- - \rho_{03} \cdot q_3 + \rho_{13} \cdot v_{13} + \rho_{23} \cdot v_{23} - h \cdot (s_3 + \hat{s}_3) / 2 \\ & \mu_t^+ - \mu_t^- = 1,01 \cdot \mu_{t-1}^+ - 1,08 \cdot \mu_{t-1}^- - \rho_{0t} \cdot q_t + \rho_{1t} \cdot v_{1t} + \rho_{2t} \cdot v_{2t} + \rho_{3t} \cdot v_{3t} - h \cdot (s_t + \hat{s}_t) / 2 & t = 4, \dots, T \\ & \mu_t^- \leq P & t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Del qual resulta un saldo de caixa òptim al final de l'horitzó de programació igual a 51.239,23 milers d'u. m. i la solució òptima:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_t	20,00	20,00	12,50	16,67	10,83	10,00	12,50	16,67	10,83	10,00	12,50	16,67
v_{1t}		7,46	10,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
v_{2t}			1,71	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
v_{3t}				10,83	10,00	12,50	16,67	10,83	10,00	12,50	16,67	10,83
s_t	20,00	40,00	45,04	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00
$\mu_t^+ - \mu_t^-$	-700,00	-1000,00	-169,73	3.954,20	8.002,01	13344,59	20.644,70	24.738,65	28.777,70	34.752,98	43.871,35	51.239,23

VI04. Cotxing

Un dia determinat, una empresa de lloguer per un sol dia de cotxes de baix cost que ofereix un model únic de vehicle utilitari té reserves de 25, 48, 14, 19 i 6 unitats, corresponents, respectivament, als aparcaments A, B, C, D i E, en els quals té disponibles actualment 13, 56, 18, 12 i 7 cotxes, també respectivament. El transport de cotxes d'un aparcament a un altre el contracta a 3PL (proveïdors de serveis logístics de tercers, *third-party logistics*) als preus per cotxe que es mostren a la taula (aquests preus són simètrics: el preu és el mateix per anar d'un aparcament P a un altre Q que per anar de Q a P):



	B	C	D	E
A	22	35	42	40
B	-	51	36	25
C		-	61	18
D			-	14

Els ingressos pel lloguer d'un cotxe durant un dia són iguals a 100 i els costos per no poder atendre la demanda de lloguer d'un cotxe s'estimen en 70.

Es tracta de determinar el pla de transport òptim del dia de referència.

Com que globalment la disponibilitat (106) és inferior a la demanda (112), no és possible satisfer totes les reserves i 6 no seran ateses.

Pot ser que en la solució òptima els cotxes disponibles a cada aparcament s'utilitzin per satisfer totalment o parcial la demanda en aquell mateix aparcament, però no podem assegurar, perquè depèn de les tarifes de transport, que les solucions òptimes sempre tinguin aquesta propietat i, per tant, no adoptem aquest supòsit.

En aquesta situació, les restriccions han d'expressar, per a cada aparcament, la igualtat entre disponibilitat + entrades, per una banda, i cotxes llogats + sortides, per una altra; a més, s'ha d'imposar que el nombre de cotxes llogats a cada aparcament no superi la demanda corresponent. Maximitzarem la diferència entre els ingressos pel lloguer dels cotxes i els costos de transport (la minimització del cost de transport consistiria a no transportar res, amb un cost total igual a zero).

La notació que hem adoptat per a les variables és la següent:

y_i ($i \in \{A, B, C, D, E, F\}$) nombre de cotxes llogats a i

x_{ij} ($i, j \in \{A, B, C, D, E, F\}, i \neq j$) nombre de cotxes transportats des de i a j

I el model:

$$\begin{aligned} \text{maximitzar } & 100 \cdot (y_A + y_B + y_C + y_D + y_E) - \\ & (22 \cdot x_{AB} + 22 \cdot x_{BA} + 35 \cdot x_{AC} + 35 \cdot x_{CA} + 42 \cdot x_{AD} + 42 \cdot x_{DA} + \\ & 40 \cdot x_{AE} + 40 \cdot x_{EA} + 51 \cdot x_{BC} + 51 \cdot x_{CB} + 36 \cdot x_{BD} + 36 \cdot x_{DB} + \\ & 25 \cdot x_{BE} + 25 \cdot x_{EB} + 61 \cdot x_{CD} + 61 \cdot x_{DC} + 18 \cdot x_{CE} + 18 \cdot x_{EC} + \\ & 14 \cdot x_{DE} + 14 \cdot x_{ED}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.a} \quad & y_A + x_{AB} - x_{BA} + x_{AC} - x_{CA} + x_{AD} - x_{DA} + x_{AE} - x_{EA} = 13 \\
 & y_B - x_{AB} + x_{BA} + x_{BC} - x_{CB} + x_{BD} - x_{DB} + x_{BE} - x_{EB} = 56 \\
 & y_C - x_{AC} + x_{CA} - x_{BC} + x_{CB} + x_{CD} - x_{DC} + x_{CE} - x_{EC} = 18 \\
 & y_D - x_{AD} + x_{DA} - x_{BD} + x_{DB} - x_{CD} + x_{DC} + x_{DE} - x_{ED} = 12 \\
 & y_E - x_{AE} + x_{EA} - x_{BE} + x_{EB} - x_{CE} + x_{EC} - x_{DE} + x_{ED} = 7 \\
 & y_A \leq 25, y_B \leq 48, y_C \leq 14, y_D \leq 19, y_E \leq 6 \\
 & x_{AB}, x_{BA}, x_{AC}, x_{CA}, x_{AD}, x_{DA}, x_{AE}, x_{EA}, x_{BC}, x_{CB}, \\
 & x_{BD}, x_{DB}, x_{BE}, x_{EB}, x_{CD}, x_{DC}, x_{CE}, x_{EC}, x_{DE}, x_{ED}, \\
 & y_A, y_B, y_C, y_D, y_E \geq 0
 \end{aligned}$$

Els costos per no atendre una reserva no s'han tingut en compte perquè sabem que són iguals a $70 \cdot 6 = 420$. Si no fossin els mateixos en tots els aparcaments, caldria adaptar el model, la qual cosa és immediata.

S'obté una solució òptima:

$$\begin{aligned}
 y_A = 21, y_B = 48, y_C = 14, y_D = 17, y_E = 6 \\
 x_{BA} = 8, x_{CE} = 4, x_{ED} = 5
 \end{aligned}$$

Amb una funció objectiu igual a 10.282 u. m. (diferència entre les $100 \cdot 106 = 10.600$ u. m. i les 318 u. m. corresponents als costos de transport), de la qual s'haurien de deduir les 420 u. m. del cost corresponent a les reserves no ateses. Si el preu del lloguer diari tingués un altre valor positiu qualsevol, igual en tots els aparcaments, la solució obtinguda també seria òptima, ja que finalment els ingressos, donat el preu, queden determinats pel valor mínim entre la demanda total i la disponibilitat total. A la solució obtinguda queden sense atendre 4 reserves a A i 2 reserves a D.

El problema també es podria resoldre mitjançant la creació d'un aparcament fictici amb disponibilitat igual a la diferència entre la demanda total i la disponibilitat total, demanda nul·la i costos de transport nuls entre aquest aparcament fictici i qualsevol aparcament real. Aleshores tindriem un problema de transbordament equilibrat i podríem adoptar com a objectiu la minimització dels costos de transport, atesa l'observació anterior sobre els ingressos. Tanmateix, amb aquest enfocament no podríem tractar el casos que fossin diferents, en els diversos aparcaments, els preus de lloguer o els costos per no atendre reserves.

Si les capacitats de les connexions entre BA, CD, CE i ED són iguals a 6, 3, 3 i 4, respectivament, cal afegir les quatre restriccions corresponents i resulta un valor òptim de 10.251 u. m., a causa de l'increment en els costos de transport de 318 a 349 u. m., amb:

$$\begin{aligned}
 y_A = 20, y_B = 48, y_C = 14, y_D = 18, y_E = 6 \\
 x_{BA} = 6, x_{CA} = 1, x_{BD} = 2, x_{CE} = 3, x_{ED} = 4
 \end{aligned}$$



Suposem ara que el cost del transport no és proporcional al nombre de cotxes transportats, sinó que és igual, quan un tram es fa servir, a 50 més el producte del cost unitari pel nombre de vehicles transportats. Aleshores cal afegir una variable binària per a cada tram que indiqui si aquest es fa servir o no i les restriccions que vinculen la variable de flux en el tram, x_{OrDest} , amb la binària, y_{OrDest} : $x_{OrDest} \leq K_{OrDest} \cdot y_{OrDest}$, on K_{OrDest} és una fita superior del flux que pot passar pel tram amb origen a Or i destinació a $Dest$ (és a dir, la capacitat del tram o, si aquesta és pràcticament il·limitada, la demanda total). També cal afegir a la funció objectiu la suma dels productes de 50 per cada una de les variables binàries. En aquestes condicions, el valor òptim de la funció objectiu és 10.042, amb $y_A = 23, y_B = 48, y_C = 14, y_D = 15, y_E = 6$ i $x_{BA} = 6, x_{CA} = 4, x_{BD} = 2, x_{ED} = 1$ (4 trams actius, un menys que en la solució anterior).

Si el 3PL que opera en el tram BA, que disposa de 2 camions, cada un dels quals pot transportar un màxim de 3 cotxes, canvia el sistema de tarifació, de manera que el cost fix sigui de 45 per cada camió utilitzat, cal canviar la definició de la variable y_{BA} , que ara ha de ser entera, amb una fita superior igual a 2 i ha de figurar a la funció objectiu amb coeficient 45. A més, la restricció que relaciona x_{BA} amb y_{BA} ara ha de ser $x_{BA} \leq 3 \cdot y_{BA}$. En aquestes condicions, el valor òptim de la funció objectiu és 10.005, amb $y_A = 20, y_B = 48, y_C = 14, y_D = 18, y_E = 6$ i $x_{BA} = 3, x_{CA} = 4, x_{BD} = 5, x_{ED} = 1$.

VI05. Tovallons

Una empresa ha obtingut el contracte del servei de bar i restaurant per als cinc dies d'un congrés i ha de resoldre el problema dels tovallons (o del *caterer*). En necessita 110, 210, 190, 120 i 100, respectivament, per a cada un dels cinc dies. Inicialment no en té cap i les seves possibilitats són:

- Comprar-ne, a 5,00 u. m. el tovalló.
- Enviar els tovallons bruts a una bugaderia industrial que els tornarà nets l'endemà passat, abans de l'inici de la jornada congressual, a 1,50 UM la unitat, o bé, l'endemà, abans també de l'inici de la jornada congressual, amb un cost de 3,00 UM la unitat.

Aquest enunciat és un exercici de programació lineal que es pot considerar tradicional (i obsolet: actualment, els tovallons que es fan servir en les pauses d'un congrés, no sabem si amb alguna excepció, són de paper). És clar que té una estructura similar a la d'un problema de transbordament, amb 5 orígens (el diguem-ne dia 0, corresponent a la compra de tovallons, i els dies 1 al 4, tots dos inclusivament) i 5 destinacions (els dies 1 al 5; de tota manera, per al dia 1 l'únic que es pot fer és comprar els 110 tovallons que es necessiten i, per tant, només cal considerar com a destinacions els dies 2 a 5). S'ha de tenir en compte que els tovallons nets de què es disposa en un dia donat poden ser utilitzats en dies

posteriors, si hi ha espai suficient per emmagatzemar-los; d'altra banda, no cal considerar la possibilitat de tenir estocs de tovallons bruts.

Aquest problema dels tovallons, per cert, es pot considerar com un cas peculiar, *avant la lettre*, de logística en bucle (vegeu el problema CA04).

Variables: x_{ot} ($t = 2, \dots, 5$); $x_{t,t+1}$ ($t = 1, \dots, 4$); $x_{t,t+\tau}$ ($t = 1, \dots, 3$; $\tau = 2, \dots, 5 - t$)

Model:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } 5,00 \cdot \sum_{t=2}^5 x_{ot} + 3,00 \cdot \sum_{t=1}^4 x_{t,t+1} + 1,50 \cdot \sum_{t=1}^3 \sum_{\tau=2}^{5-t} x_{t,t+\tau} \\ &x_{02} + x_{12} = 210 \\ &x_{03} + x_{13} + x_{23} = 190 \\ &x_{04} + x_{14} + x_{24} + x_{34} = 120 \\ &x_{05} + x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 100 \\ &x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 110 \\ &x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 210 \\ &x_{34} + x_{35} \leq 190 \\ &x_{45} \leq 120 \\ &x_{ot} \ (t = 2, \dots, 5), \ x_{t,t+1} \ (t = 1, \dots, 4), \ x_{t,t+\tau} \ (t = 1, \dots, 3; \ \tau = 2, \dots, 5 - t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

La generalització a T dies és immediata.

La solució òptima té un cost de 1.780 u. m. (més les 550 u. m. de la compra dels 110 tovallons que calen el dia 1, un total de 2.330 u. m.) i les variables diferents de 0 són:

$$x_{02} = 200, x_{12} = 10, x_{13} = 100, x_{23} = 90, x_{24} = 120, x_{35} = 100$$

Si l'empresa, en acabar el congrés, es pot vendre els tovallons bruts a 2,00 € la unitat, el coeficient 5,00 de les variables x_{ot} a la funció objectiu passa a $5,00 - 2,00 = 3,00$ i una solució òptima és:

$$x_{02} = 210, x_{03} = 80, x_{13} = 110, x_{24} = 120, x_{35} = 100$$

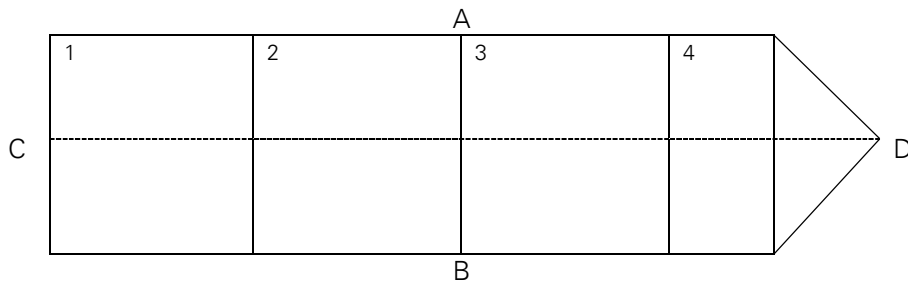
amb un cost total de $1.365 + 3,00 \cdot 110 = 1.695$ u. m.

Els problemes de càrrega de mitjans de transport són molt complexos quan es tracta d'optimitzar la manera de col·locar unitats de dimensions diverses en un espai donat (per exemple, contenidors paral·lelepípedics diferents en un paral·lelepípede més gran, com ara l'espai per a càrrega en un camió). Els supòsits que defineixen el problema següent eludeixen algunes d'aquestes dificultats, en considerar productes a granel i contenidors de posicions prefixades.



VI06. Estiba

La figura representa esquemàticament la projecció en planta d'un vaixell de càrrega, la bodega del qual està dividida en 4 compartiments (els compartiments 1, 2 i 3 tenen unes dimensions, en planta, de 10 x 10 m i el compartiment 4, de 5 x 10 m). La projecció del centre de gravetat del vaixell (sense la càrrega de la bodega) es troba en la intersecció de les línies AB i CD.



El volum disponible per a càrrega en els compartiments 1, 2 i 3 és igual a $V \text{ m}^3$ i en el compartiment 4, $V/2 \text{ m}^3$. El vaixell pot transportar una càrrega de fins a P tones (t).

Es tracta de maximitzar el valor de la càrrega total del vaixell, sabent que es disposa d'unes quantitats S_i ($i = 1, \dots, n$), en tones, de n tipus de minerals diferents (a granel), dels quals es coneix el valor c_i (u. m./t) i el pes específic p_i (t/m^3), que a cada compartiment només s'hi pot carregar un tipus de mineral i que l'abscissa del centre de gravetat de la càrrega ha de pertànyer a l'interval $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Es tracta, bàsicament, d'establir les vinculacions entre el conjunt de minerals i els compartiments i , per tant, el problema és similar als que hem vist anteriorment en aquest capítol, tot i que amb algunes restriccions afegides, de les quals la que es pot considerar més interessant és que a cada compartiment no hi pot anar més d'un tipus de mineral, perquè és assimilable a la condició que un client ha de rebre el producte des d'un sol magatzem, que es presenta sovint en el disseny de sistemes de distribució, com en el problema VI09.

Variables:

$y_{ij} \in \{0,1\}$ $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 4$ (iguals a 1 si es carrega el mineral i en el compartiment j).

$0 \leq x_{ij} \leq V$ $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 3; 0 \leq x_{i4} \leq V/2$ $i = 1, \dots, n$ volum, en m^3 , de mineral i que es carrega en el compartiment j .

Model:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{i=1}^n \left(c_i \cdot p_i \cdot \sum_{j=1}^4 x_{ij} \right) \\ \text{s.a } & \sum_{j=1}^4 y_{ij} \leq 1 && j = 1, \dots, 4 \\ & x_{ij} \leq V \cdot y_{ij} && i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 4 \\ & x_{i4} \leq \frac{V}{2} \cdot y_{i4} && i = 1, \dots, n \\ & p_i \cdot \sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq S_i && i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n \left(p_i \cdot \sum_{j=1}^4 x_{ij} \right) \leq P \\ & 5 \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_{i1} + 15 \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_{i2} + 25 \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_{i3} + 32,5 \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_{i4} \geq \alpha_1 \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot \sum_{j=1}^4 x_{ij} \\ & 5 \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_{i1} + 15 \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_{i2} + 25 \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_{i3} + 32,5 \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_{i4} \leq \alpha_2 \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot \sum_{j=1}^4 x_{ij} \end{aligned}$$

Amb les dades següents:

$$V = 600, P = 6.000, \alpha_1 = 19, \alpha_2 = 21$$

Producte (<i>i</i>)	1	2	3	4	5	6	7
c_i	700,0	500,0	300,0	600,0	1.000,0	1.100,0	1.200,0
p_i	3,0	2,0	6,0	6,5	1,4	1,2	1,5
S_i	800,0	600,0	2.000,0	2.000,0	900,0	1.000,0	1.100,0

La solució òptima consisteix a carregar 333,3 m³ del producte 3 en el compartiment 1, 600 del 5 en el 2, 600 del 7 en el 3 i 300 del 4 en el 4. El valor de la càrrega és 3.690.000 u. m., amb un pes total de 5.690 t. L'abscissa del centre de gravetat de la càrrega és 19,06.

Suposem ara que, si anomenem q al pes total de la càrrega expressat en tones, el cost del transport des de l'origen fins a la destinació és aproximadament igual a $a+b \cdot q^2$ u. m. Si es vol maximitzar la diferència entre el valor de la càrrega i el cost del transport, com s'hauria de modificar el programa matemàtic anterior?

D'entrada, s'ha de modificar la funció objectiu:



$$\text{maximitzar } \sum_{i=1}^n \left(c_i \cdot p_i \cdot \sum_{j=1}^m x_{ij} \right) - (a + b \cdot q^2)$$

amb $q = \sum_{j=1}^m \left(p_j \cdot \sum_{i=1}^n x_{ij} \right)$. El que resulta és, doncs, un programa no lineal mixt, amb restriccions lineals i funció objectiu còncava.

Amb $a = 1.000.000$ i $b = 0,01$, resolt amb un programari comercial, s'obté la solució que consisteix a carregar 600 m³ del producte 7 en el compartiment 1, 600 del 5 en el 2, 307,69 del 4 en el 3 i 266,67 de l'1 en el 4. El valor de la funció objectiu és 2.473.884 u. m. (el valor de la càrrega, 3.680.000, menys el cost del transport, 1.206.116) amb un pes total de 4.540 t. L'abscissa del centre de gravetat de la càrrega és 20,51.

Si no es disposa de programari per resoldre programes mixtos no lineals, el model es pot linealitzar amb la tècnica denominada programació separable convexa de la manera següent.

Dividim l'interval $[0, P]$ en K trams, mitjançant els valors Q_k ($k = 0, \dots, K$), amb $Q_0 = 0$, $Q_{k-1} < Q_k$ ($k = 1, \dots, K$), $Q_k = P$ i afegim les variables q_k ($k = 1, \dots, K$). A la funció objectiu substituïm la funció còncava de q per una línia poligonal amb vèrtexs en els punts d'abscissa Q_k :

$$\sum_{j=1}^n \left(v_j \cdot p_j \cdot \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) - a - b \cdot \sum_{k=1}^K \frac{Q_k^2 - Q_{k-1}^2}{Q_k - Q_{k-1}} q_k$$

i afegim les restriccions:

$$\sum_{j=1}^n \left(p_j \cdot \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) = \sum_{k=1}^K q_k$$

$$0 \leq q_k \leq Q_k - Q_{k-1} \quad k = 1, \dots, K$$

Els dos problemes següents tenen, a primera vista, un caràcter gremial, ja que el primer es refereix a la formació de comissions en una universitat i el segon, a l'assignació de comunicacions d'un congrés científic a les persones que les han d'avaluar per determinar si s'accepten o es rebutgen. Però aquestes situacions poden presentar-se en altres contextos. En qualsevol cas, pensem que donen peu a exercicis de modelització interessants i, sobretot, il·lustren què pot passar i què es pot fer quan el conjunt de solucions factibles és buit, perquè les condicions que s'ha decidit imposar a la solució són incompatibles, i tanmateix s'ha de disposar d'una solució operativa.

VI07.1. A cal ferrer, ganivet de ferro: comissions

Una universitat ha de formar comissions, compostes de m_i membres ($i = 1, \dots, c$). Per tal de complir amb el principi estatutari d'igualtat, a cada comissió el nombre de membres de cada gènere ha d'estar comprès entre el 40% i el 60% del total. En el personal que pot formar part de les comissions hi ha d dones i h homes. Se sap el conjunt de comissions de què pot formar part cada persona ($C_j^D, j = 1, \dots, d$; $C_j^H, j = 1, \dots, h$) i uns valors p_{ij} ($i \in C_j^D, j = 1, \dots, d$) i q_{ji} ($i \in C_j^H, j = 1, \dots, h$), positius i no superiors a 10, que indiquen la idoneïtat de cada persona per a cada comissió de què pot formar part. Cap membre del personal ha de formar part de més de 3 comissions.

Es tracta, és clar, d'un problema de vinculació (en aquest cas, de persones a comissions) que es pot plantejar com un programa lineal binari amb les variables següents:

$$x_{ji} \in \{0,1\}; j = 1, \dots, d; i \in C_j^D \quad (= 1 \text{ si i només si la dona } j \text{ forma part de la comissió } i)$$

$$y_{ji} \in \{0,1\}; j = 1, \dots, h; i \in C_j^H \quad (= 1 \text{ si i només si l'home } j \text{ forma part de la comissió } i)$$

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar} \quad \sum_{j=1}^d \sum_{i \in C_j^D} p_{ji} \cdot x_{ji} + \sum_{j=1}^h \sum_{i \in C_j^H} q_{ji} \cdot y_{ji} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{j \in C_i^D} x_{ji} + \sum_{j \in C_i^H} y_{ji} = m_i \quad i = 1, \dots, c \\ & \sum_{j \in C_i^D} x_{ji} \geq [0,4 \cdot m_i] \quad i = 1, \dots, c \\ & \sum_{j \in C_i^D} x_{ji} \leq [0,6 \cdot m_i] \quad i = 1, \dots, c \\ & \sum_{i \in C_j^D} x_{ji} \leq 3 \quad j = 1, \dots, d \\ & \sum_{i \in C_j^H} y_{ji} \leq 3 \quad j = 1, \dots, h \\ & x_{ji} \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, d; i \in C_j^D \\ & y_{ji} \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, h; i \in C_j^H \end{aligned}$$

La funció objectiu del model anterior, que s'ha de maximitzar, expressa, diguem-ho així, la idoneïtat global de la composició de les comissions. Hi ha altres possibilitats, com ara maximitzar la suma de puntuacions de la comissió en què aquesta suma sigui menor; així s'intentaria evitar que hi hagués comissions amb una composició molt poc idònia (això també es pot aconseguir amb restriccions que imposin, per a totes les comissions, una fita inferior de la idoneïtat).



En el moment d'especificar els valors numèrics de les dades pot succeir que hi hagi restriccions supèrflues (si $|C_j^D| \leq 3$ o $|C_j^H| \leq 3$) o incompatibles. La incompatibilitat pot provenir de les característiques de les comissions i de les persones (impossibilitat de formar una comissió perquè no hi ha prou persones idònies o de formar un conjunt de comissions sense violar la condició que cap persona formi part de més de 3 comissions) o bé de les proporcions mínima i màxima de cada gènere en la composició de les comissions (si $m_i = 3$ no hi ha cap proporció que alhora no sigui inferior al 40% i superior al 60%; per tant, si hi ha comissions de 3 membres s'han de replantejar les condicions que han de complir les solucions: per exemple, que en cada una d'aquestes comissions hi hagi almenys un membre de cada gènere i que la proporció global se situï en l'interval [40%,60%]). Observeu que la condició relativa a les proporcions de cada gènere en cada comissió s'ha plantejat només per a un dels gèneres, perquè el que es compleixi per a un implica que es compleixi per a l'altre.

En comptes dels conjunts de comissions de què pot formar part cada persona també és possible fer servir els conjunts de persones que poden formar part de cada comissió. L'opció entre aquestes dues possibilitats és irrellevant.

També és possible, i formalment correcte, definir les variables d'assignació per a totes les parelles persones-comissió i tenir en compte la possibilitat o no que una persona formi part de la comissió mitjançant coeficients binaris (o amb restriccions que imposin que les variables corresponents a assignacions impossibles siguin iguals a zero –de fet, amb una restricció que imposi que la suma d'aquestes variables és igual a zero és suficient–, però no sembla gaire raonable definir unes variables per convertir-les tot seguit en constants). El nombre de variables amb aquest enfocament serà molt superior, la qual cosa pot ser més o menys rellevant en funció del programari disponible (pot ser que no admeti el model perquè les dimensions siguin excessives, o que mitjançant un preprocesament elimini les variables corresponents a assignacions impossibles i que aleshores el model que s'ha de resoldre sigui equivalent al que hem proposat abans). En resum, el plantejament que hem proposat és el que considerem aconsellable.

En un problema com l'anterior pot ser que no hi hagi solucions factibles. Però si les comissions han de fer una feina, s'han de constituir encara que no compleixin totes les condicions desitjades. En aquest cas, es pot modificar el model mitjançant una relaxació de les condicions, i la relaxació pot ser més o menys acusada en funció de la importància que s'atorgui a la satisfacció de les condicions (fins al punt que alguna pot mantenir-se sense relaxar si correspon a una imposició legal –o, per descomptat, a alguna llei física, com ara un balanç de matèria o d'energia– o, senzillament, perquè es consideri convenient). En el problema següent s'il·lustra com es pot fer i com es pot tractar la relaxació de les condicions.

VI07.2. A cal ferrer, ganivet de ferro: avaluacions

L'organització d'un congrés internacional ha rebut n comunicacions, les quals, per tal que el comitè científic decideixi si són acceptades o rebutjades, les han d'avaluar tres especialistes. Es compta amb m especialistes que, en la denominada fase de subhasta, han especificat els conjunts de comunicacions preferides i acceptables (P_i i A_i , respectivament, per a $i = 1, \dots, m$). A cada especialista només se li poden assignar comunicacions que hagi marcat com a preferides o acceptables.

Es vol assignar les comunicacions de manera que es maximitzi el nombre d'avaluacions corresponents a comunicacions preferides, tot respectant les condicions d'assignar a cada especialista dues comunicacions com a mínim i cinc com a màxim, i d'assignar a cada especialista amb un conjunt P_i no buit una comunicació d'aquest conjunt com a mínim.

Variabls:

$x_{ij} \in \{0,1\}$, $x_{ij} = 1$ si i només si s'assigna a i la comunicació j
 ($i = 1, \dots, m; j \in P_i \cup A_i$)

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{i|P_i \neq \emptyset} \sum_{j \in P_i} x_{ij} \\ \text{s.a. } & \sum_{i|j \in P_i \cup A_i} x_{ij} = 3 \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{j \in P_i \cup A_i} x_{ij} \geq 2 \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j \in P_i \cup A_i} x_{ij} \leq 5 \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j \in P_i} x_{ij} \geq 1 \quad \forall i | P_i \neq \emptyset \end{aligned}$$

Per descomptat, pot ser que aquest model no tingui solucions factibles. Aleshores, cal relaxar alguna o algunes de les condicions imposades. Això es pot fer de maneres diverses, segons la importància que es doni a cada condició i també segons el cas concret de què es tracti (segons el valor de n/m , per exemple).

Un dels plantejaments possibles és el següent:

$$\begin{aligned} \text{maximitzar } &= \sum_{i|P_i \neq \emptyset} \sum_{j \in P_i} x_{ij} - w_1 \cdot \sum_{j=1}^n \delta_j^1 - w_2 \cdot \sum_{j=1}^n \delta_j^2 - w_3 \cdot \sum_{i=1}^m \eta_i^- - w_4 \cdot \sum_{i=1}^m \eta_i^+ - w_5 \cdot \sum_{i|P_i \neq \emptyset} \mu_i \\ \text{s.a. } & \sum_{i|j \in P_i \cup A_i} x_{ij} = 3 - \delta_j^1 - \delta_j^2 \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{j \in P_i \cup A_i} x_{ij} \geq 2 - \eta_i^- \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sum_{j \in P_i \cup A} x_{ij} &\leq 5 + \eta_i^+ & i = 1, \dots, m \\
\sum_{j \in P_i} x_{ij} &\geq 1 - \mu_i & \forall i \mid P_i \neq \emptyset \\
\delta_j^2 &\leq \delta_j^1 & j = 1, \dots, n \\
\eta_i^+ &\leq K & i = 1, \dots, m \\
\delta_j^1, \delta_j^2 &\in \{0, 1\} & j = 1, \dots, n \\
\eta_i^- &\in \{0, 1\} & i = 1, \dots, m \\
\eta_i^+ &\in \mathbb{Z}_{\geq 0} & i = 1, \dots, m \\
\mu_i &\in \{0, 1\} & \forall i \mid P_i \neq \emptyset
\end{aligned}$$

En aquest cas admetem que una comunicació rebi només dues avaluacions, o fins i tot una sola avaluació, que una persona n'avaluï només una i també més de 5 (però no més de $5 + K$, on K és un enter positiu), i que no n'avaluï cap de les seves preferides. Les w són pesos, amb valors corresponents a la importància que es doni a cada tipus de desviació en relació amb les restriccions originals. La variable δ_j^1 val 1 si i només si el nombre d'avaluacions de la comunicació j és igual a 1 o 2, i δ_j^2 val 1 si i només si el nombre d'avaluacions de la comunicació j és igual a 1 (per tant, només pot valer 1 si $\delta_j^1 = 1$, tal com ho imposen les restriccions $\delta_j^2 \leq \delta_j^1$, que no són necessàries si $w_2 > w_1$, però que, en qualsevol cas, poden ajudar a resoldre eficientment el model).

Els problemes d'afectació i de transport, i fins i tot el del camí extrem entre dos vèrtexs d'un graf, es poden considerar casos particulars del problema del flux compatible de cost mínim.

Aquest problema es planteja en relació amb el que es denomina xarxa de transport, que és un graf orientat entre els vèrtexs del qual n'hi ha un i només un d'entrada (és a dir, amb semigrau interior nul), i un i només un vèrtex de sortida (és a dir, amb semigrau exterior nul). Tanmateix, de vegades convé afegir un arc de retorn, que va de la sortida a l'entrada. Els arcs tenen associats tres valors (capacitat mínima, capacitat màxima i cost); el cost és el corresponent a l'assignació a l'arc d'una unitat de flux, i el cost total del flux que passa per l'arc és igual al producte d'aquest cost unitari pel nombre d'unitats de flux que té assignades.

Un flux compatible és un conjunt de valors, corresponents cada un a un arc del graf de transport, que estan compresos entre les corresponents capacitat mínima i màxima i tals que en cada vèrtex, excepte els d'entrada i de sortida, es compleix la primera llei de Kirchhoff,⁹ és a dir, que la suma dels valors assignats

⁹ Si hi ha arc de retorn, aleshores la primera llei de Kirchhoff s'ha de complir en tots els vèrtexs del graf de transport.

als arcs que entren en el vèrtex és igual a la suma dels valors assignats als arcs que en surten (el flux d'entrada és igual al flux de sortida). El cost d'un flux és la suma dels productes dels valors assignats als arcs pels respectius costos unitaris.

El problema del flux màxim (un cas particular del problema del flux compatible de cost mínim, en què l'arc de retorn té un cost unitari igual a -1 i tots els altres, un cost unitari igual a 0) es pot resoldre amb l'algorisme de Ford-Fulkerson, que proporciona el flux òptim i també un conjunt d'arcs que constitueixen un tall mínim, coll d'ampolla del graf.

La descripció del problema i la terminologia usada fan pensar en xarxes en què els arcs són canals o canonades i que tenen per objecte la conducció de fluids, com ara xarxes de distribució d'aigua, oleoductes o gasoductes. Però també hi ha aplicacions dels problemes de fluxos en grafs que es refereixen a sistemes ben diferents dels esmentats.

El problema del flux compatible de cost mínim i tots els seus casos particulars tenen algorismes específics més eficients com més adaptats al tipus particular de problema, però, al seu torn, tots són casos particulars de la programació lineal i es poden resoldre amb un programari adequat per a aquest tipus de programa matemàtic.

En aquests tipus de problemes, una vegada identificada l'estructura de la xarxa de transport i les característiques dels seus arcs, per trobar la solució òptima només cal aplicar un algorisme adequat.

Dintre dels problemes d'aquest tipus, el de fer arribar el màxim nombre d'unitats a una destinació donada en un temps limitat és un clàssic de la teoria de fluxos en grafs. En el llibre de Claude Berge¹⁰ es denomina "la batalla del Marne" i a l'enunciat es demana com es pot fer arribar el màxim nombre d'efectius militars al front del Marne en un temps donat.¹¹

Durant molts anys proposàrem com a enunciat d'un treball per una assignatura d'optimització determinar el nombre màxim de persones que poden arribar, en transport col·lectiu, a una ciutat de destinació, com ara Madrid, des d'una ciutat origen, com ara Barcelona. El problema és molt semblant al de les persones que han d'anar des de Barcelona a Buenos Aires (VI08), que veurem a continuació, però la gran diferència és que en l'enunciat del diguem-ne Barcelona-Madrid, no s'especificava la xarxa de transport i, per a l'estudiant, el pas del concís enunciat al món real resultava ser un gran obstacle. En els primers intents el més freqüent

¹⁰ Berge, C. (1958) *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod.

¹¹ El 7 de setembre de 1914, el 6è exèrcit francès resistia amb dificultats l'atac alemany. El governador de París va reunir tots els taxis de la ciutat per enviar amb urgència sis mil reservistes al camp de batalla. La mesura va tenir un gran impacte, per la imatge espectacular i mai vista fins aleshores de 670 vehicles, la majoria del model Renault AG i de color vermell, reunits davant de l'Hôtel des Invalides. Tot i que està força estesa l'opinió que aquesta expedició motoritzada va tenir molta importància en el resultat de la batalla, se'n pot dubtar, atès que les baixes diàries en el front eren aproximadament 50.000 (https://es.wikipedia.org/wiki/Primera_batalla_del_Marne).



era donar com a solució la suma de places dels trens Barcelona-Madrid i dels vols de pont aeri entre les dues ciutats, amb horaris compatibles amb l'interval temporal suposat. Tothom sap que es pot anar de Barcelona a Madrid passant per Bilbao, per Sevilla, per París o per Londres, posem per cas, però en no ser explícites aquestes possibilitats en l'enunciat del treball pràcticament ningú no les tenia en compte. Una vegada es posaven de manifest, el problema apareixia clarament com la determinació del flux màxim en un graf i la dificultat principal consistia precisament en l'especificació del graf. Cada tren (l'AVE de les 08:00, el de les 09:00...) i cada vol (el de la companyia X de les 07:10, el de la companyia Y de les 07:35...) s'havien de representar amb un arc de capacitat igual al nombre de places disponibles. Els vèrtexs del graf eren parelles d'instal·lació (estació, aeroport) - hora. Les persones podien passar, sense necessitat de mitjà de transport (o amb un transport lleuger, com ara el metro o l'autobús) del vèrtex $i-h$ al vèrtex $i-h'$ si $h + \eta_{ij} \leq h'$ o del vèrtex $i-h$ al $i'-h'$ si i i i' són dues instal·lacions prou pròximes (dues estacions de tren en una mateixa ciutat, comunicades per metro, o l'estació de tren i l'aeroport d'una mateixa ciutat) i $h + \eta_{ij'} \leq h'$ (η_{ij} i $\eta_{ij'}$ són, respectivament, els temps necessaris per a la correspondència entre dos mitjans de transport a i i entre un mitjà de transport a i i un altre a i').

En canvi, en el problema següent, el pas de l'enunciat a la xarxa és immediat.

VI08. Expedició aèria

Un grup de 60 persones s'ha de traslladar de Barcelona a Buenos Aires, on ha d'arribar abans d'una data determinada. Malauradament, no queden bitllets per a cap vol directe entre les dues ciutats i caldrà fer vols amb escales.

Queden places disponibles per als vols següents:

Vol	Places
Barcelona - l'Havana	7
Barcelona - Caracas	26
Barcelona - Rio de Janeiro	20
L'Havana - Caracas	12
Caracas - l'Havana	10
Caracas - Rio de Janeiro	8
Rio de Janeiro - Caracas	6
L'Havana - Buenos Aires	16
Caracas - Buenos Aires	11
Rio de Janeiro - Buenos Aires	25

Els vols que surten de Barcelona i els que arriben a Buenos Aires són de línies regulars i tenen un horari establert; els que tenen origen i destinació a ciutats intermèdies són vols xàrter, d'horari adaptable perquè siguin compatibles amb

les hores d'arribada i de sortida dels vols amb què han de connectar. Es vol maximitzar el nombre de persones que arribin a Buenos Aires abans de la data límit i saber quines rutes hauran de fer.

Farem servir la notació B (Barcelona), A (Buenos Aires), C (Caracas), H (l'Havana) i R (Rio de Janeiro).

D'entrada, és clar que almenys 8 persones s'hauran de quedar a B, ja que de B no poden sortir-ne més de 53 i a A no poden arribar-ne més de 52.

Model:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \varphi_{HA} + \varphi_{CA} + \varphi_{RA} \\ \text{s. a } & \varphi_{BH} + \varphi_{CH} = \varphi_{HC} + \varphi_{HA} \\ & \varphi_{BC} + \varphi_{HC} + \varphi_{RC} = \varphi_{CH} + \varphi_{CR} + \varphi_{CA} \\ & \varphi_{BR} + \varphi_{CR} = \varphi_{RC} + \varphi_{RA} \\ & \varphi_{BH} \leq 7, \varphi_{BC} \leq 26, \varphi_{BR} \leq 20 \\ & \varphi_{CH} \leq 10, \varphi_{HC} \leq 12, \varphi_{HA} \leq 16 \\ & \varphi_{RC} \leq 6, \varphi_{CR} \leq 8, \varphi_{CA} \leq 11, \varphi_{RA} \leq 25 \end{aligned}$$

En aquest problema tots els arcs tenen capacitat mínima (fita inferior del flux) igual a 0. Aquesta condició es té en compte implícitament pel caràcter no negatiu de les variables. Si les capacitats mínimes fossin > 0 , l'adaptació del model seria immediata.

Plantejat així el problema, no s'ha tingut en compte que el nombre de persones que s'han de traslladar és de 60, i amb una xarxa de més capacitat podria resultar un pla de viatge per un nombre superior de passatgers. Perquè en la solució del model el flux no passés de 60, caldria introduir un vèrtex B' i un arc B'B amb capacitat igual a 60, la qual cosa equival a introduir en el model una restricció que imposi que el flux total que surti de B no superi el valor 60.

La solució òptima permet l'arribada a A de 52 persones, amb:

$$\varphi_{BH} = 7, \varphi_{BC} = 25, \varphi_{BR} = 20, \varphi_{CH} = 9, \varphi_{CR} = 5, \varphi_{HA} = 16, \varphi_{CA} = 11, \varphi_{RA} = 25$$

És a dir, de les persones que van de B a C (25), 9 van amb vol xàrter a H i 5, també en vol xàrter, a R. Les altres 11 que arriben a C i les que arriben a H i R, tant si és per vol regular des de B com amb vol xàrter, van des de cada una d'aquestes ciutats, amb vol regular, a A.

Per l'estructura peculiar de la matriu de coeficients, el fet que les capacitats siguin enteres implica que a tota solució bàsica les variables són enteres.

Si el problema es resol amb l'algorisme de Ford-Fulkerson, aquest proporciona la solució òptima i alhora identifica un coll d'ampolla (n'hi pot haver més d'un) de la



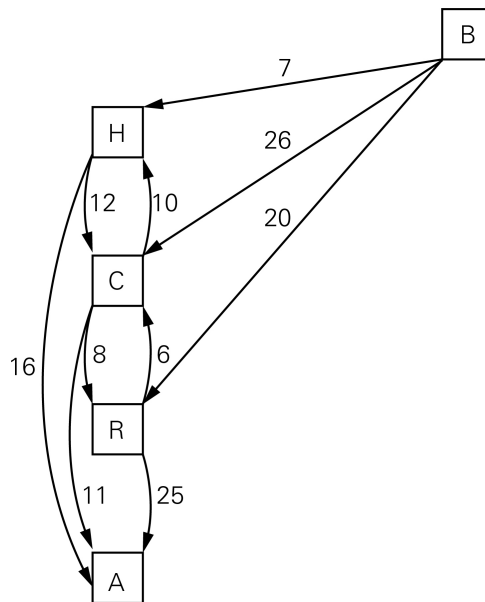
xarxa de transport. Amb la programació lineal, els arcs que componen el coll d'ampolla es poden identificar amb l'examen dels valors de les variables duals associades a les restriccions de capacitat dels arcs. Alternativament, es pot aplicar el procediment de marcatge que s'aplica en l'algorisme de Ford-Fulkerson (en l'algorisme, el procediment de marcatge s'aplica en totes les iteracions i la marca inclou un valor numèric: el fet que en una iteració no es pugui marcar el vèrtex de sortida indica que el flux és òptim i el final de l'algorisme; si ja tenim una solució òptima obtinguda per un altre procediment –la programació lineal, en el nostre cas–, la marca no requereix valor numèric i sabem *a priori* que no podrem marcar el vèrtex de sortida):

Marcar el vèrtex d'entrada.

- Repetir fins que no es pugui fer cap marca més:
- Si un arc té el vèrtex origen marcat i un flux inferior a la capacitat màxima, marcar el vèrtex destinació de l'arc.
- Si un arc té el vèrtex destinació marcat i un flux superior a la capacitat mínima, marcar el vèrtex origen de l'arc.

El coll d'ampolla són els arcs que enllacen els vèrtexs marcats amb els no marcats.

En el nostre cas, partir de la solució que hem obtingut amb la programació lineal, des de l'entrada B marcaríem C i, des de C, H i R; per tant, el coll d'ampolla el constitueixen els arcs HA, CA i RA.



Aquesta solució és òptima, però no necessàriament és única. Entre les solucions òptimes la preferible podria ser la que tingués un cost menor.

Suposem que els costos són aquests:

Vol	Cost fix del vol	Cost de cada bitllet
Barcelona - l'Havana	-	60
Barcelona - Caracas	-	40
Barcelona - Rio de Janeiro	-	50
L'Havana - Caracas	240	10
Caracas - l'Havana	200	10
Caracas - Rio de Janeiro	160	30
Rio de Janeiro - Caracas	120	30
L'Havana - Buenos Aires	-	70
Caracas - Buenos Aires	-	65
Rio de Janeiro - Buenos Aires	-	25

Aleshores calen unes variables binàries que indiquin si el vol xàrter es contracta o no:

$$v_{HC}, v_{CH}, v_{CR}, v_{RC} \in \{0, 1\}$$

I el model:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } 240 \cdot v_{HC} + 200 \cdot v_{CH} + 160 \cdot v_{CR} + 120 \cdot v_{RC} + \\ &\quad 60 \cdot \varphi_{BH} + 40 \cdot \varphi_{BC} + 50 \cdot \varphi_{BR} + 10 \cdot \varphi_{HC} + 10 \cdot \varphi_{CH} + \\ &\quad 30 \cdot \varphi_{CR} + 30 \cdot \varphi_{RC} + 70 \cdot \varphi_{HA} + 65 \cdot \varphi_{CA} + 25 \cdot \varphi_{RA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s. a } &\varphi_{BH} + \varphi_{CH} = \varphi_{HC} + \varphi_{HA} \\ &\varphi_{BC} + \varphi_{HC} + \varphi_{RC} = \varphi_{CH} + \varphi_{CR} + \varphi_{CA} \\ &\varphi_{BR} + \varphi_{CR} = \varphi_{RC} + \varphi_{RA} \\ &\varphi_{HA} + \varphi_{CA} + \varphi_{RA} = 52 \\ &\varphi_{BH} \leq 7, \varphi_{BC} \leq 26, \varphi_{BR} \leq 20 \\ &\varphi_{CH} \leq 10 \cdot v_{CH}, \varphi_{HC} \leq 12 \cdot v_{HC}, \varphi_{HA} \leq 16, \\ &\varphi_{RC} \leq 6 \cdot v_{RC}, \varphi_{CR} \leq 8 \cdot v_{CR}, \varphi_{CA} \leq 11, \varphi_{RA} \leq 25 \end{aligned}$$

Les diferències amb el model de l'enunciat anterior són la funció objectiu, els canvis en les restriccions de capacitat dels vols xàrter per tal de vincular el nombre de places ocupades amb la variable que indica si el vol es contracta o no, i, finalment, la restricció que imposa que el nombre de persones que arribin a A sigui 52 (sense aquesta restricció, la solució òptima del model seria que no viatja ningú, amb cost total nul).

La solució òptima és:

$$\begin{aligned} \varphi_{BH} = 6, \varphi_{BC} = 26, \varphi_{BR} = 20, \varphi_{CH} = 10, \varphi_{CR} = 5, \varphi_{HA} = 16, \varphi_{CA} = 11, \varphi_{RA} = 25 \\ v_{CH} = 1, v_{CR} = 1 \end{aligned}$$

Amb un cost de 5.470 u.m.



Els valors de les variables també són enters, tot i que només es va imposar el caràcter binari de les variables corresponents a la contractació o no contractació dels vols xàrter.

D'un temps ençà, el concepte de cadena de subministrament (*supply chain*) s'ha imposat per designar els sistemes d'aprovisionament, fabricació, distribució, recuperació i reciclatge. Tot i que el terme es va proposar per primera vegada durant els anys 80 del segle passat, les cadenes de subministrament existien i es varen estudiar, sense denominar-les així, molt abans. Configurar una cadena de subministrament és un problema que normalment té una gran complexitat i en algunes fases del procés de disseny és molt aconsellable fer ús de models matemàtics.

Uns dels primers que es varen proposar són els de Balinski,¹² que permeten decidir a quins de m emplaçaments potencials hi haurà uns magatzems i a quin magatzem serà assignat cada un dels n clients, amb l'objectiu de minimitzar els costos anuals del sistema i amb la condició de satisfer tota la demanda. El subministrament del producte als magatzems es fa des d'una única planta industrial, i es coneixen la demanda anual de cada client ($d_j, j = 1, \dots, n$) i els costos c_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) de servir una unitat de producte a un client, que inclouen els de transport des de la fàbrica al magatzem corresponent. Els magatzems tenen un cost fix anual f_i ($i = 1, \dots, m$).

Per tant, aquests models es poden inscriure en el marc d'aquest capítol de problemes que hem anomenat de vinculació. De fet, els models corresponen a models de selecció i vinculació, ja que no és obligat que hi hagi magatzem en tots els emplaçaments potencials, però aquesta característica la tenen també problemes que hem considerat anteriorment (en el problema de transport, si l'oferta és més gran que la demanda pot haver-hi orígens que no subministrin producte).

VI09. Suport al disseny de la cadena de subministrament

Considerem, en primer lloc, la situació descrita en els paràgrafs anteriors. Els supòsits indicats configuren un entorn possiblement poc realista, però hi ha la possibilitat de modificar-los i d'afegir-ne d'altres, com anirem veient.

Ens calen les variables següents:

$y_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, m$ si i només si se situa un magatzem a l'emplaçament i .

$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ unitats de producte subministrades al client j des del magatzem situat a i .

¹² Balinski, M. (1965) Integer programming: methods, uses, computation. *Management Science*, 12, 253-313.

Amb les quals podem plantejar el model:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } \sum_{i=1}^m f_i \cdot \gamma_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \\ &\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, n \\ &x_{ij} \leq d_j \cdot \gamma_i \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Les $m \cdot n$ restriccions $x_{ij} \leq d_j \cdot \gamma_i$ poden ser substituïdes per $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n d_j \cdot \gamma_i$

($i = 1, \dots, m$), cosa que pot suposar una reducció dràstica del nombre de restriccions del model. Tanmateix, el comportament dels resolvents amb el model que hem proposat sol ser millor que amb el model més agregat que resultaria en fer la substitució indicada. Això succeeix també en altres models anàlegs: la formulació desagregada sol ser millor que l'agregada. El motiu d'aquest comportament poc intuïtiu és que en el model desagregat el conjunt de solucions factibles de la seva relaxació lineal¹³ s'ajusta millor al tancament convex del conjunt de solucions factibles del programa enter o mixt, per la qual cosa el nombre d'iteracions de l'algorisme de *branch & bound* que resol el programa enter o mixt és menor, i sol compensar sobradament el fet que la resolució de cada relaxació lineal pugui requerir més temps.

Com que no se suposa cap limitació de capacitat en els magatzems i el cost és independent del volum total de la demanda que tingui assignat el magatzem, tota la demanda d'un client serà servida des del magatzem existent a què correspongui menor cost (si hi ha empat de cost per a un mateix client entre dos o més magatzems, la demanda del client es pot repartir entre ells com es vulgui, pel que fa als costos considerats en el model, però generalment serà més pràctic que el client es relacioni amb un únic magatzem).

El fet d'introduir entre la fàbrica i els clients una capa de magatzems pot obeir a dues raons:

1. Escurçar el temps de resposta a les comandes dels clients. Això no es considera en l'enfocament de Balinski i fins i tot podria donar-se el cas que el temps de resposta fos més gran que el de servir les comandes des de la fàbrica, a causa de l'existència de rutes llargues de cost baix. En tot cas, si hi ha un temps màxim de resposta per a cada client es pot tenir en compte imposant que l'emplaçament del magatzem a què s'assigni pertanyi a un subconjunt dels emplaçaments potencials (és a dir, que cada client només pugui ser assignat als magatzems que estiguin prou a prop).
2. Reduir els costos de transport, pel fet que de la fàbrica al magatzem el transport es pot fer en vehicles de gran capacitat i, per tant, de menor cost

¹³ La relaxació lineal d'un programa matemàtic enter o mixt és el programa lineal que resulta en prescindir de les condicions d'integritat de les variables.



de transport per unitat de producte que el corresponent als vehicles que lliuren el producte als clients. És clar que això depèn de les característiques de la demanda dels clients (per als de més demanda potser el lliurament es pot fer en vehicles de gran capacitat, amb la qual cosa el pas per un magatzem intermedi en comptes de reduir els costos els augmentarà). En tot cas, l'obligació de passar per un magatzem intermedi pot augmentar els costos, encara que només sigui perquè el magatzem té uns costos fixos. Per tant, el model s'ha d'ampliar per tenir en compte la possibilitat de servir els clients directament des de la planta (només cal afegir un nou origen, la planta, per al qual $i = 0$):

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{i=1}^m f_i \cdot y_i + \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \\ & \sum_{i=0}^m x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \leq d_j \cdot y_i \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

En realitat no n'hi ha prou amb decidir si en un emplaçament potencial s'hi construeix o no un magatzem. Se n'ha d'especificar també la capacitat, perquè el cost fix en depèn i perquè condiciona les possibles assignacions de clients.

Pel que fa al cost fix, es pot tractar com una funció de la capacitat, considerada com una variable contínua. En general, la funció serà no lineal, cosa que complicarà força la modelització i la resolució del problema.

Un enfocament alternatiu consisteix a establir per a cada emplaçament una llista de capacitats possibles, amb un cost fix diferent per a cada una. Sigui K_i el nombre de capacitats possibles a l'emplaçament i i C_{ik} i f_{ik} ($i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, K_i$) les capacitats (unitats/any) i els costos fixos corresponents (u. m./any); considerem pràcticament il·limitada, en relació amb la demanda, la capacitat de la planta. Aleshores resulta el model següent:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{K_i} f_{ik} \cdot y_{ik} + \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \\ & \sum_{i=0}^m x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \leq \sum_{k=1}^{K_i} \min(d_j, C_{ik}) \cdot y_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{k=1}^{K_i} y_{ik} \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \sum_{k=1}^{K_i} C_{ik} \cdot y_{ik} \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Ara pot ser que se serveixi un client des de diversos magatzems (o des de la fàbrica i un o més magatzems). Si es considera inacceptable, és a dir, si s'ha de

servir cada client des d'un únic origen, cal introduir unes variables binàries $\delta_{ij} \in \{0, 1\}$, ($i = 0, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) iguals a 1 si i només si se serveix el client j des de l'origen i :

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{K_j} f_{ik} \cdot y_{ik} + \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot d_j \cdot \delta_{ij} \\ & \sum_{i=0}^m \delta_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \\ & \delta_{ij} \leq \sum_{k=1}^{K_j} y_{ik} \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \\ & \sum_{k=1}^{K_j} y_{ik} \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n d_j \cdot \delta_{ij} \leq \sum_{k=1}^{K_j} C_{ik} \cdot y_{ik} \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Les restriccions $x_{ij} \leq \sum_{k=1}^{K_j} \min(d_j, C_{ik}) \cdot y_{ik}$ del primer dels dos models anteriors i les

$\delta_{ij} \leq \sum_{k=1}^{K_j} y_{ik}$ del segon són restriccions que es denominen *vàlides*: són compati-

bles amb les altres i, per tant, són redundants i prescindibles, però fan que el conjunt de solucions factibles de la relaxació lineal s'ajusti més al tancament convex de les solucions factibles del programa enter o mixt i, per tant, en general milloren el comportament dels resolvents en aplicar-los al model.

Fins aquí s'ha considerat, implícitament, que la decisió de quin magatzem s'assigna a cada client correspon a l'empresa fabricant del producte i propietària de la xarxa de magatzems, que assumeix tots els costos de transport. Però en molts casos és el client qui decideix a quin magatzem va a comprar i es fa càrrec dels costos de transport des del magatzem als locals del client.

Suposem que el preu del producte és el mateix a tots els magatzems. Els costos de transport que cal tenir en compte són els de planta a magatzem, $(\hat{c}_{0i}, i = 1, \dots, m)$, ja que els de planta o magatzem a client els assumeix el client. I s'ha d'imposar que el client sigui assignat a la instal·lació a què correspon un cost de transport menor. Per a cada client es pot definir la llista ordenada de menor a major cost de transport, E_j , de les instal·lacions a què està disposat a anar (això permet prohibir implícitament la vinculació d'un client a una instal·lació massa llunyana o d'accés massa costós, etc.).

Segui v_j el nombre d'elements de E_j i e_{jl} ($l = 1, \dots, v_j$) la instal·lació existent (la planta) o potencial que ocupa la posició l en la llista E_j ; la planta pot figurar o no a la llista, però si hi és ocupa necessàriament la darrera posició, perquè, com que ja existeix, el client no aniria mai a una instal·lació que estigués més avall en



la seva llista. Introduïm les variables $\delta_{je_l} \in \{0,1\}$ ($j = 1, \dots, n; l = 1, \dots, v_j$). Amb aquesta notació el model es pot plantejar de la manera següent:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{K_i} f_{ik} \cdot y_{ik} + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1|e_{jl} \neq 0}^{v_j} \hat{c}_{0e_{jl}} \cdot d_j \cdot \delta_{je_l} \\ & \sum_{l=1}^{v_j} \delta_{je_l} = 1 \quad j = 1, \dots, n \\ & \delta_{je_l} \leq \sum_{k=1}^{K_{e_{jl}}} y_{e_{jl}k} \quad j = 1, \dots, n; l = 1, \dots, v_j - 1 \\ & \quad \quad \quad j = 1, \dots, n; l = v_j \text{ (si } e_{jv_j} \neq 0) \\ & \delta_{je_l} \leq 1 - \sum_{k=1}^{K_{e_{jp}}} y_{e_{jp}k} \quad j = 1, \dots, n; l = 2, \dots, v_j; p = 1, \dots, l - 1 \\ & \sum_{k=1}^{K_i} y_{ik} \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j|\exists l|e_{jl}=i} d_j \cdot \delta_{je_l} \leq \sum_{k=1}^{K_i} C_{ik} \cdot y_{ik} \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Les restriccions imposen que un client només es pot vincular a una instal·lació si no n'hi ha de menys cost de transport per al client.

Hem resolt el model amb les dades següents:

Ubicació potencial U_i	Capacitat 1 Cost fix	Capacitat 2 Cost fix	Capacitat 3 Cost fix	Capacitat 4 Cost fix	c_{oi}
U1	200 20.000	250 22.500	300 27.500	400 32.500	15
U2	400 35.000	500 42.500	750 60.000	- -	10
U3	300 20.000	350 32.500	450 41.500	- -	11

Client C_j	Demanda anual	e_{j1}	e_{j2}	e_{j3}
C1	100	U1	U2	U3
C2	150	U2	U3	U1
C3	200	U3	U0*	-
C4	230	U1	U0*	-

* U0 indica la planta

La solució òptima obtinguda consisteix a instal·lar un magatzem de capacitat 400 en l'emplaçament U2, amb C1 i C2 vinculats al magatzem i C3 i C4, a la planta, i amb un cost total de 37.500 u.m.

Suposem ara que l'ordre de preferències de C3 passa a ser U3 - U2 - U0 i que es mantenen les preferències dels altres clients. En aquest cas la solució òptima seria instal·lar un magatzem de capacitat 450 en l'emplaçament U3, amb C1, C2 i C3 vinculats al magatzem i C4, a la planta, i amb un cost total de 46.450 u.m. Veiem doncs que petits canvis en l'ordre de preferències poden donar lloc a diferències substancials del cost òptim.

Continuem el capítol amb una incursió atípica en els terrenys de l'*scheduling* i els seus entorns. *Scheduling* es pot traduir per programació, però aquest terme es excessivament polisèmic i no dóna una idea cabal d'allò a què ens referim.¹⁴ En els problemes de *scheduling* es tracta de determinar amb quins recursos i en quins moments s'han de fer unes operacions, entre les quals hi pot haver restriccions diverses, amb l'objectiu d'optimitzar una funció que pot dependre dels instants en què es fan o s'acaben les operacions i dels recursos que s'hi dediquen. En aquest text no es pretén entrar a fons en aquest tipus de problemes, sinó únicament mostrar amb un parell d'exemples les possibilitats de resoldre'ls mitjançant la programació matemàtica, cosa que no ha de fer perdre de vista que aquests problemes solen ser intrínsecament difícils i que sovint cal conformar-se amb solucions obtingudes heurísticament. En tot cas, els problemes de *scheduling* encaixen en aquest capítol, perquè finalment es tracta de vincular activitats, recursos i instants o períodes.

VI10. El càlcul paral·lel i la llei de d'Hondt

Disposem de m processadors de velocitats v_i ($i = 1, \dots, m$) per executar n programes d'ordinador, que, en un mateix processador, requereixen el mateix temps de càlcul.

S'ha de determinar quants programes s'han d'executar en cada processador per minimitzar l'instant en què acabi el processador que acabi més tard, amb:

$$n = 10, \quad m = 3, \quad v_1 = 5, \quad v_2 = 3, \quad v_3 = 1.$$

Si és possible començar a executar un programa amb un processador i passar-lo a un altre, amb un temps de traspàs negligible, el nombre de programes assignats a cada processador ha de ser inversament proporcional a les velocitats, de manera que tots els processadors acabin al mateix temps:

$$\frac{x_1}{v_1} = \frac{x_2}{v_2} = \frac{x_3}{v_3}, \quad \text{amb } x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

¹⁴ Podeu ampliar la informació amb Corominas, A., Lusa, A. (2016) *Scheduling. Problemes i tècniques. Una introducció*. OmniaScience

(<http://www.omniascience.com/scholar/index.php/scholar/issue/view/32>)



D'on $x_1 = 50/9$, $x_2 = 30/9$, $x_3 = 10/9$ i el processament s'acaba a l'instant $10/9$. Els processadors poden dedicar $9/9 = 1$ unitat de temps (UT) a tractar, respectivament, 5, 3 i 1 programa, i $1/9$ UT a tractar la resta (1 programa); hi ha diverses maneres de fer-ho: el processador 1 pot començar dedicant $1/9$ UT a aquest programa (en completarà $5/9$) i passar-lo al processador 2 (que en completarà $3/9$), que el passarà finalment al processador 3 que completarà el que resti del programa ($1/9$).

Si un programa que es comença a executar en un processador s'ha de completar sense interrupcions en el mateix processador podem resoldre el model següent:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } t \\ & \sum_{i=1}^m x_i = n \\ & t \geq x_i / v_i \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

amb les variables enteres i no negatives.

El resultat és $x_1 = 6$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, amb $t^* = 6/5 = 1,2$.

S'arriba igualment a aquesta solució amb un procediment iteratiu que consisteix a assignar els programes, un per un, al processador amb què resulti un temps màxim menor (així, s'assignen els programes 1, 3, 4, 6, 7 i 10 al processador 1; 2, 5 i 8, al 2, i el programa 9 al processador 3).

El procediment ve a ser l'invers de la llei de d'Hondt per a l'assignació d'escons (rep altres noms, perquè el procediment ha estat descobert més d'una vegada per diverses persones de diferents països; la primera, Jefferson, a finals del segle XVIII), que es pot descriure com l'assignació progressiva d'escons segons el quocient màxim entre el nombre de vots obtinguts per cada opció (partit o coalició) i el nombre d'escons que hagi rebut prèviament més 1 (el procediment maximitza el valor del quocient corresponent al darrer escó adjudicat).¹⁵

Apareix aquí una nova connexió entre un problema de *scheduling* i l'assignació d'escons d'acord amb el resultat d'unes votacions. En veurem una altra a DI09.

Un dels problemes diguem-ne més populars dels de l'àmbit dels mètodes quantitius de gestió és la programació d'activitats de projectes, en què habitualment es fa ús d'un graf que representa les activitats i llurs relacions de precedència mínima i de precedència màxima. El cas en què no hi ha limitació de recursos i es tracta de programar les activitats per minimitzar la durada

¹⁵ Vegeu: Balinski, M. L., Young, H. P. (1983). *Fair representation*. Yale University Press. Bautista, J., Companys, R., Corominas, A. (2001) Solving the generalized apportionment problema through the optimization of discrepancy functions. *European Journal of Operational Research*, 131, 676-684.

del projecte ha estat estudiat i resolt des de fa molts anys, i es redueix a un càlcul de camins en un graf sense circuits (quan les relacions són només de precedència mínima) o amb circuits (quan hi ha relacions de precedència màxima).

En canvi, amb limitació de recursos el problema, en general, esdevé molt difícil de resoldre.

Un cas especial, estudiat i resolt també des de fa molts anys, és el de trobar la corba que relaciona la durada i el cost d'un projecte, en el supòsit que per a cada activitat, i en l'interval entre una fita inferior i una fita superior de la seva durada, hi ha una relació lineal entre aquesta i l'increment de cost de l'activitat. El procediment tradicional de resolució és el MCX (*Minimum Cost Expediting*) que consisteix bàsicament a determinar, iterativament, fluxos màxims en un graf en què les capacitats mínimes i màximes dels arcs es modifiquen en el curs de l'algorisme.

A continuació il·lustrem la possibilitat de resoldre aquest tipus de problemes mitjançant la programació lineal. No ens consta que cap llibre de text proposi aquest enfocament, que potser no sigui la manera computacionalment més efectiva, però sí la que tinguem més a mà, i, finalment, la que ens permeti obtenir la solució òptima en menys temps (generalment, pel que fa a la resolució d'un problema, el que és rellevant és el temps des que ens el plantejem fins que el tenim resolt i no el temps de càlcul, que sovint és una petita fracció del temps total; vegeu nota 11 de la presentació). I amb l'avantatge addicional de poder tenir en compte fàcilment una gran varietat de condicions addicionals.

VI11. Camins crítics

Les dades per a la programació de les activitats corresponents al projecte de construcció del velòdrom municipal de Lavínia són les següents:

Codi	Descripció	Durada (setmanes)	Activitats precedents immediates
A	Preparació del terreny	8	-
B	1a fase de la infraestructura	24	A
C	2a fase de la infraestructura	5	B
D	Adquisició de fusta per a la pista	35	-
E	Construcció de la pista	3	C, D
F	Instal·lacions complementàries	11	B

Quantes setmanes caldran per acabar el velòdrom?



Podem considerar la finalització del projecte com una activitat fictícia, Ω , de durada nul·la, que té com a precedents immediates les activitats que no precedeixen immediatament cap altra activitat (en aquest cas, E i F).

De moment només cal una variable per cada activitat:

t_i data d'inici de l'activitat $i \in \{A, B, C, D, E, F, \Omega\}$

minimitzar t_Ω

$$t_A + 8 \leq t_B$$

$$t_B + 24 \leq t_C$$

$$t_B + 24 \leq t_F$$

$$t_C + 5 \leq t_E$$

$$t_D + 35 \leq t_E$$

$$t_E + 3 \leq t_\Omega$$

$$t_F + 11 \leq t_\Omega$$

El valor òptim de t_Ω és 43, amb $t_A = 0$, $t_B = 8$, $t_F = 32$ (aquestes 3 activitats són les que constitueixen el camí crític i aquests valors de les dates d'inici són els únics compatibles amb una durada total de 43. Les altres activitats (C, D i E) tenen marge i, per tant, hi ha infinites solucions òptimes, entre les quals un nombre finit de solucions bàsiques del programa lineal. Que s'obtingui una o altra d'aquestes solucions bàsiques depèn del programari i, fins i tot, de l'ordre en què es formulen les restriccions; nosaltres vàrem obtenir $t_C = 32$, $t_D = 0$, $t_E = 40$ (aquestes dates són compatibles amb la durada total de 43, però E podria començar a 37).

Però si, com és habitual, ens interessa saber les dates mínimes d'inici de cada activitat només cal modificar la funció objectiu i minimitzar la suma de les t_i . Aleshores la solució òptima canvia i resulta, $t_E = 37$ (les dates d'inici de les altres activitats no es modifiquen).

Si també volem saber les dates màximes d'inici de cada activitat compatibles amb la durada mínima del projecte, hem de fixar el valor de $t_\Omega = 43$ i maximitzar la suma de les dates d'inici de les activitats. En el nostre cas obtenim $t_A = 0$, $t_B = 8$, $t_C = 35$, $t_D = 5$, $t_E = 40$, $t_F = 32$.

Suposem ara que hi ha una restricció de posterioritat màxima. Per exemple, que des de l'arribada de la fusta fins a l'inici de la construcció de la pista no ha de passar més d'una setmana: afegim la restricció $t_E \leq (t_D + 35) + 1$. Les dates mínimes d'inici ara són: $t_A = 0$, $t_B = 8$, $t_C = 32$, $t_D = 1$, $t_E = 37$, $t_F = 32$, $t_\Omega = 43$.

Suposem ara que les 43 setmanes previstes són un termini massa llarg, ja que per a la setmana 40 està programat un gran esdeveniment esportiu per inaugurar la instal·lació.

Un cop consultada l'empresa constructora, assegura que pot reduir la durada de cada una de les activitats fins que arribin a ser 4, 12, 3, 20, 2 i 5 setmanes, respectivament, però que per cada setmana de reducció els costos augmenten en 2, 7, 4, 5, 8 i 3 u. m., també respectivament. Així mateix ens informa que, per tenir més flexibilitat en la programació de les activitats, no tindrà en compte la restricció de posterioritat màxima.

Ara la durada de cada activitat, d_i , passa de ser constant a ser una variable que depèn del nombre de setmanes, r_i , de reducció de la durada total de l'activitat. En un escenari d'aquest tipus es denomina duració normal, d_i^N , de l'activitat la prevista inicialment i duració *crash*, d_i^C , la que correspon a la màxima reducció possible. Així tenim:

i	A	B	C	D	E	F
d_i^N	8	24	5	35	3	11
d_i^C	4	12	3	20	2	5
c_i	2	7	4	5	8	3

$$i \quad d_i = d_i^N - r_i, \text{ amb } 0 \leq r_i \leq d_i^N - d_i^C.$$

Per a una durada determinada del projecte, \hat{t}_Ω (en el nostre cas, 39), es tracta de minimitzar l'increment de costos.

Per tant, el model queda de la manera següent:

$$\text{minimitzar } 2 \cdot r_A + 7 \cdot r_B + 4 \cdot r_C + 5 \cdot r_D + 8 \cdot r_E + 3 \cdot r_F$$

$$t_A + 8 - r_A \leq t_B$$

$$t_B + 24 - r_B \leq t_C$$

$$t_B + 24 - r_B \leq t_F$$

$$t_C + 5 - r_C \leq t_E$$

$$t_D + 35 - r_D \leq t_E$$

$$t_E + 3 - r_E \leq \hat{t}_\Omega$$

$$t_F + 11 - r_F \leq \hat{t}_\Omega$$

$$r_A \leq 4, r_B \leq 12, r_C \leq 2, r_D \leq 15, r_E \leq 1, r_F \leq 6$$

Amb el qual es pot obtenir les solucions òptimes corresponents a qualsevol valor de la durada total del projecte:



\hat{t}_Ω	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22
Δ cost	0	2	4	6	8	11	19	27	38	50	62	74	86	98	110	122	134	146	158	170	182	194
r_A	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
r_B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12
r_C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
r_D	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
r_E	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
r_F	0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5

Per a algunes durades totals del projecte hi ha òptim múltiple. Mostrem a continuació solucions òptimes alternatives per a $\hat{t}_\Omega = 34, 33, \dots, 22$:

\hat{t}_Ω	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22
Δ cost	50	62	74	86	98	110	122	134	146	158	170	182	194
r_A	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
r_B	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_C	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
r_D	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
r_E	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
r_F	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Encara seria possible reduir la durada d'algunes activitats, però això implicaria un augment de costos i no reduiria la durada del projecte.

Els valors de les variables en les solucions òptimes obtingudes són enters, però també són vàlids valors no enters. Per tant, per a una \hat{t}_Ω donada, podem generar infinites solucions òptimes com a combinacions convexes¹⁶ de les solucions obtingudes. Per exemple, per a $\hat{t}_\Omega = 30$ són també solucions òptimes¹⁷ les següents:

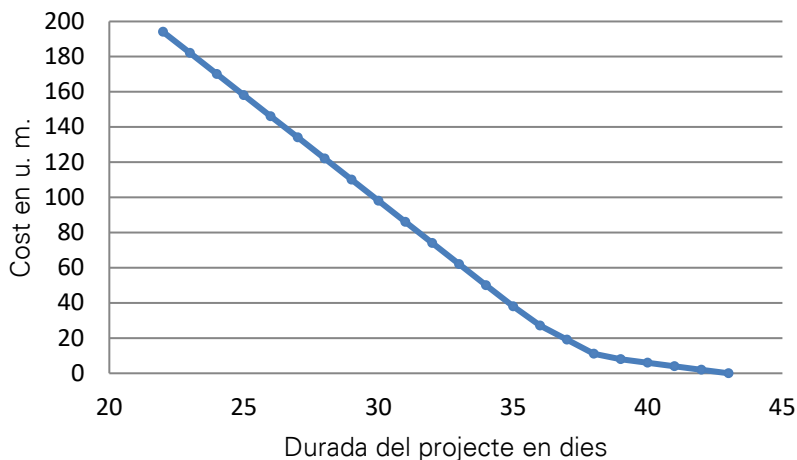
$$(r_A, r_B, r_C, r_D, r_E, r_F)^T = \lambda \cdot (4, 5, 0, 7, 1, 4)^T + (1 - \lambda) \cdot (4, 3, 2, 7, 1, 6)^T = (4, 3 + 2 \cdot \lambda, 2 - 2 \cdot \lambda, 7, 1, 6 - 2 \cdot \lambda)^T$$

¹⁶ Donats K vectors x_1, \dots, x_K , n'és una combinació convexa un vector $\bar{x} = \sum_{k=1}^K \lambda_k \cdot x_k$, amb $\lambda_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, K$) i $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$. Si les x_k són solucions d'un sistema d'equacions i d'inequacions lineals, també n'és solució \bar{x} . D'altra banda, si el valor d'una funció lineal és el mateix per a totes les x_k , aquest valor es manté per a \bar{x} . Per tant, si les x_k són solucions òptimes d'un programa lineal, també ho és qualsevol de llurs combinacions convexes.

¹⁷ Potser n'hi ha d'altres. No hem intentat trobar totes les solucions òptimes; les dues solucions diferents per a una mateixa durada total del projecte són les que hem obtingut en aplicar al model dos resolvents diferents.

Per descomptat, fixada una durada total per a la qual hi ha òptim múltiple en relació amb el cost, podem determinar la solució òptima en relació amb un altre criteri. Només cal imposar el cost òptim total mitjançant una restricció i optimitzar la funció objectiu diguem-ne secundària.

El gràfic següent mostra la relació entre la durada total del projecte i l'increment total del cost associat a les reduccions corresponents de la durada de les tasques. La corba és convexa, perquè passar d'una durada total τ a $\tau - 1$ té un cost marginal igual o superior al de passar de $\tau + 1$ a τ .



Hem passat d'un problema de vinculació (entre activitats i dates) a un de vinculació entre diners i activitats, que també es pot veure com el de distribució d'un recurs (en aquest cas, diners) si ens plantejem quina durada mínima del projecte podem assolir si disposem d'un pressupost donat, P . En aquest darrer cas el model seria:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } t_{\Omega} \\ &2 \cdot r_A + 7 \cdot r_B + 4 \cdot r_C + 5 \cdot r_D + 8 \cdot r_E + 3 \cdot r_F \leq P \\ &t_A + 8 - r_A \leq t_B \\ &t_B + 24 - r_B \leq t_C \\ &t_B + 24 - r_B \leq t_F \\ &t_C + 5 - r_C \leq t_E \\ &t_D + 35 - r_D \leq t_E \\ &t_E + 3 - r_E \leq t_{\Omega} \\ &t_F + 11 - r_F \leq t_{\Omega} \\ &r_A \leq 4, r_B \leq 12, r_C \leq 2, r_D \leq 15, r_E \leq 1, r_F \leq 6 \end{aligned}$$

L'assignació de l'espai en un magatzem és un dels problemes més habituals a la indústria i a molts tipus de serveis. Presenta moltes variants de complexitat



molt diversa, des de l'assignació estàtica (cada producte té reservats uns espais en exclusiva) a la dinàmica (cada vegada que entra una unitat de càrrega al magatzem es decideix on se la situa, en funció de l'estat del magatzem en aquell moment i, potser, en funció de les previsions sobre les futures sortides i entrades). O des dels casos en què les unitats que entren al magatzem en surten sense canvis de configuració als casos que per preparar una comanda s'ha de fer *picking*, o que en el mateix magatzem es duen a terme operacions per acabar el producte de la manera apropiada per al mercat a què va destinat.

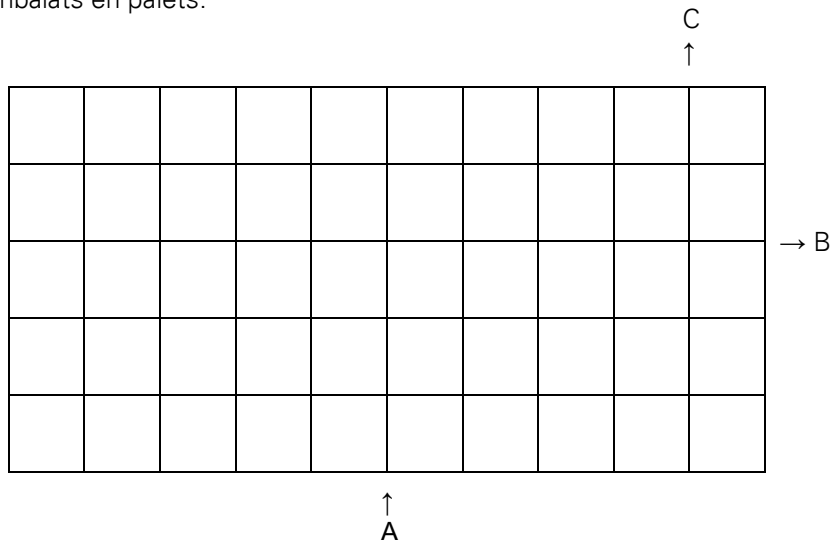
Aquí només considerem el cas estàtic en què les unitats surten del magatzem tal com hi han entrat.

VI12. Magatzem

Tenim un magatzem rectangular dividit en parcel·les, tal com es veu a la figura següent, en la qual també es mostren les posicions dels punts centrals dels molls d'entrada (A) i de sortida (B i C).

El magatzem té passadissos paral·lels a les parets del recinte i es considera que la distància entre un moll i una parcel·la és la distància rectangular entre el centre del moll i el de la parcel·la (és a dir, la suma dels valors absoluts de les diferències entre les abscisses i les ordenades respectives).

Es tracta d'assignar parcel·les a 3 productes, que arriben i surten del magatzem embalats en palets.



Siguin P_i , q_i , k_i ($i = 1, 2, 3$), respectivament, el nombre de parcel·les que requereix el producte, el nombre mitjà d'unitats que entren (i surten) del magatzem en cada període i un coeficient proporcional al cost de moure un palet del producte al llarg d'una unitat de longitud:

Producte	P_i	q_i	k_i	E_i (entra per)	S_i (surten per)
1	20	100	10	A	B
2	15	60	8	A	C
3	10	40	12	A	C

Una vegada més tenim un problema de vinculació, en aquest cas entre productes i parcel·les, en què es tracta de minimitzar el cost total de les vinculacions tot respectant unes condicions.

El cost c_{ij} d'assignar un producte i a una parcel·la j és proporcional a la distància que una unitat del producte assignat a la parcel·la ha de recórrer des que entra al magatzem fins que en surt¹⁸ (en aquest cas, proporcional a la suma de les distàncies de la parcel·la als molls d'entrada i sortida corresponents, siguin $d_j^{E_i}$ i $d_j^{S_i}$), al coeficient k_i i al nombre mitjà de moviments (entrades i sortides) per període de la parcel·la (és a dir, q_i / P_i). Per tant, el valor de c_{ij} és proporcional a:

$$k_i \cdot (d_j^{E_i} + d_j^{S_i}) \cdot \frac{q_i}{P_i}$$

Es tracta, doncs, de:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{50} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ \text{s.a. } &\sum_{j=1}^{50} x_{ij} = P_i \quad i = 1, 2, 3 \\ &\sum_{i=1}^3 x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \dots, 50 \\ &x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 50 \end{aligned}$$

És un cas particular del problema de transport (que es pot generalitzar immediatament al cas amb m productes i n parcel·les) amb més oferta (nombre de parcel·les del magatzem amb oferta igual a 1 en totes elles) que demanda (nombre de parcel·les necessàries per col·locar els productes). Es resol molt ràpidament i les variables, encara que no se'ls imposi el caràcter binari, prenen valors enters a la solució que proporciona el resolvent.

Les distàncies de les parcel·les a A, B i C, respectivament són les indicades en les taules següents:

¹⁸ O a la distància mitjana si es pot donar el cas que les unitats d'un mateix producte puguin seguir camins diferents des que entren fins que surten: per exemple, perquè els molls d'entrada o els de sortida no siguin els mateixos per a totes les unitats.



9	8	7	6	5	5	6	7	8	9
8	7	6	5	4	4	5	6	7	8
7	6	5	4	3	3	4	5	6	7
6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
5	4	3	2	1	1	2	3	4	5

↑
A

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3

→ B

C
↑

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13

La resolució del model, amb les dades de l'enunciat, proporciona la solució representada a la taula següent, amb la funció objectiu igual a 17.050:

C ↑	2	2	2	2	3	2				
		2	2	2	2	1	1	1	1	1
	2	2	2	3	3	1	1	1	1	1
	2	2	3	3	3	1	1	1	1	1
	2	3	3	3	3	1	1	1	1	1
					↑ A					

→ B

Aquesta solució és òptima pel que fa a la funció objectiu del model, però les parcel·les assignades al producte 3 no són contigües, cosa que a la pràctica pot ser un inconvenient. És fàcil retocar la solució obtinguda perquè compleixi la condició de contigüitat, però imposar-la en el model implica un augment considerable en les dimensions d'aquest.

Un cas particular d'aquest tipus de problema és el denominat cas factorial, en el qual c_{ij} es pot expressar com el producte de dos factors, un dels quals només depèn del producte, i , i l'altre de la parcel·la, j , tal com succeeix si els camins que segueixen les unitats des que entren al magatzem fins que en surten són independents del producte de què es tracti.

Si en l'expressió:

$$c_{ij} = k_i \cdot (d_j^E + d_j^S) \cdot \frac{q_i}{P_i}$$

$E_i = E$ i $S_i = S \forall i$, tenim:

$$c_{ij} = k_i \cdot (d_j^E + d_j^S) \cdot \frac{q_i}{P_i} = \left(k_i \cdot \frac{q_i}{P_i} \right) \cdot (d_j^E + d_j^S)$$

amb un primer factor que depèn de i i un segon factor que depèn de j .

En aquest cas, tenim $\sum_{i=1}^m P_i (\leq n)$ factors que depenen de i (P_i factors iguals per

a cada producte i) i n que depenen de j ; si $\sum_{i=1}^m P_i < n$ podem definir un producte

fictici, amb costos de desplaçament nuls i amb $P_0 = n - \sum_{i=1}^m P_i$; per tant, sempre



podem considerar que tenim n factors que depenen de i i n factors que depenen de j , amb la qual cosa el problema de minimitzar els costos totals es redueix al de, donades dues llistes amb el mateix nombre d'elements numèrics, formar parelles constituïdes per un element de la primera llista i un de la segona, amb la condició que cada element figuri en una parella (i només una), per tal que la suma de productes dels elements de les parelles sigui mínima. S'obté una solució òptima ordenant els elements d'una llista de més a menys i els de l'altra de menys a més, i formant les parelles amb els elements que ocupen la mateixa posició a les llistes respectives.

Si suposem que tots els productes entren pel moll A i surten pel moll B, els valors associats a cada parcel·la són els següents:

20	18	16	14	12	11	11	11	11	11
18	16	14	12	10	9	9	9	9	9
17	15	13	11	9	8	8	8	8	8
17	15	13	11	9	8	8	8	8	8
17	15	13	11	9	8	8	8	8	8

↑
A

→ B

Com que els factors associats als productes són iguals, respectivament, a 50, 32 i 48, es pot trobar (manualment, per dir-ho així) una solució com la següent (amb la funció objectiu igual a 19.818):

		2	2	2	3	3	3	3	3
	2	2	2	3	1	1	1	1	1
	2	2	2	3	1	1	1	1	1
	2	2	2	3	1	1	1	1	1
2	2	2	3	3	1	1	1	1	1

↑
A

→ B

Per descomptat, també es pot resoldre el model amb els costos corresponents als supòsits indicats. La solució que vàrem obtenir per aquesta via es la següent:

		2	2	2	3	3	3	2	2
	2	2	2	3	3	3	1	1	1
2	2	2	3	1	1	1	1	1	1
	2	2	3	1	1	1	1	1	1
	2	2	3	3	1	1	1	1	1

↑
A

→ B

Amb el mateix valor de la funció objectiu, però, en aquest cas (hi ha òptim múltiple, per la qual cosa podríem haver arribat a una altra solució equivalent en cost i, en particular, a la que abans hem obtingut manualment) amb una major dispersió del producte 2. En general, l'assignació manual de parcel·les, a partir dels ordres de parcel·les i productes corresponents al cas factorial, permet un millor control de les característiques de la solució.

Sota els supòsits indicats, l'assignació d'espai en un magatzem ha resultat ser un problema fàcil de resoldre, a causa del seu caràcter lineal i de la seva estructura específica. La linealitat prové del fet que el cost d'ubicar un producte en una parcel·la resulta de la relació entre la posició de la parcel·la i les ubicacions dels molls d'entrada i sortida, que estan fixades *a priori*.

Però si els costos de la relació entre dos recursos depenen de les posicions que ocupen i aquestes no estan determinades *a priori*, anem a parar a un problema quadràtic,¹⁹ amb què augmenten la dimensió dels models i la dificultat per resoldre'ls. Això és el que succeeix, entre d'altres, en els problemes de distribució en planta, amb la dificultat afegida que sol haver-hi alguna llibertat en relació amb la forma de les unitats que s'han de situar en el recinte. Per aquests motius, el disseny de distribucions en planta és una activitat que requereix la intervenció humana directa, tot i que es pot dur a terme amb el suport de models de programació matemàtica.²⁰

Entre els problemes de distribució en planta, els més simples són els unidimensionals, com el que veurem a continuació.

¹⁹ El denominat QAP (*Quadratic Assignment Problem*) consisteix a assignar n recursos a n emplaçaments, de manera que es minimitzi el cost de les relacions entre totes les parelles de recursos. És un dels problemes estàndard d'optimització combinatoria més difícils de resoldre.

²⁰ Vegeu Anjos, M. F., Vieira, M. V. C. (2017) Mathematical optimization approaches for facility layout problems: The state-of-the art and future research directions. *European Journal of Operational Research*, 261, 1, 1-16.



VI13. Planta unidimensional

S'ha de determinar la distribució en planta de les 10 màquines necessàries per fabricar 5 productes diferents, però de pes i volum similars.

Cada una de les màquines s'ha de situar en una de les posicions indicades a la figura:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Els components procedeixen del magatzem de materials (MMT), a una distància de 8 metres de la posició 1, i els productes acabats es desen al magatzem d'expedicions (MEX), a 14 metres de la posició 10. La distància entre dues posicions consecutives és de 5 metres.

Les dades relatives als productes són les indicades a la taula següent:

Producte	Unitats per període	Ruta (seqüència en què una unitat ha de visitar les màquines)									
		1	100	2	5	8	3	4	8	4	7
2	200	4	5	1	9	4	7				
3	300	5	3	10	8	4	3				
4	600	3	9	5	1	2	6	7	8	5	3
5	800	2	5	7	8	10	7	6	2		

Hem de començar per determinar la magnitud dels fluxos entre els magatzems i les màquines i dels de les màquines entre si.

En primer lloc, registrarem per a cada parella de recursos els productes que van directament de l'un a l'altre:

De ↓ A→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	MEX
MMT		1, 5	4	2	3						
1		4							2		
2					1, 5	4					5
3				1					4	3	3, 4
4			3		2		1, 2	1			
5	2, 4		3, 4				5	1			
6		5					4				
7						5		4, 5		1	1, 2
8			1	1, 3	4					5	
9				2	4						
10							1, 5	3			

I, tenint en compte la simetria dels costos en relació amb el sentit del desplaçament, obtenim la taula de fluxos, expressats en centenars d'unitats, entre magatzems i posicions i entre les posicions:

De ↓ A→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	MEX
MMT		9	6	2	3						
1		6			8				2		
2					9	14					8
3				4	9			1	6	3	9
4					2		3	5	2		
5							8	7	6		
6							14				
7								14		10	3
8										11	
9											
10											

Siguin $\hat{\varphi}_{gh}$ ($g = 1, \dots, p$ i $h = 1, \dots, n$) els fluxos entre els p recursos amb posició predeterminada (els magatzems, en aquest cas) i les n màquines que s'han de situar en les n posicions lliures, i φ_{hj} ($h = 1, \dots, n-1$; $j = h+1, \dots, n$) els fluxos entre les màquines.

La manera més immediata de modelitzar els problemes d'aquest tipus és definir unes variables binàries x_{hi} ($h, i = 1, \dots, n$) iguals a 1 si i només si la màquina h se situa a la posició i :

$$\begin{aligned} \text{minimitzar} \quad & \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^n \hat{c}_{ghi} \cdot x_{hi} + \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{j=h+1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k(i \neq j)=1}^n c_{hijk} \cdot x_{hi} \cdot x_{jk} \\ & \sum_{h=1}^n x_{hi} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{hi} = 1 \quad h = 1, \dots, n \end{aligned}$$

On \hat{c}_{ghi} és el cost corresponent a una unitat de flux entre el recurs de posició predeterminada g i la màquina h situada a la posició i , i c_{hijk} és el cost corresponent a una unitat de flux entre la màquina h situada a la posició i i la màquina j situada a la posició k . Si \hat{d}_{gi} és la distància entre la posició predeterminada g i la posició lliure i , i d_{ik} la distància entre les posicions lliures i i k , tenim:

$$\hat{c}_{ghi} = \hat{\varphi}_{gh} \cdot \hat{d}_{gi}$$



$$c_{hijk} = \varphi_{hj} \cdot d_{ik}$$

En el nostre cas, amb:

$$\hat{d}_{1i} = 8 + 5 \cdot (i - 1), \hat{d}_{2i} = 14 + 5 \cdot (10 - i); d_{ik} = 5 \cdot |i - k|$$

El model té n^2 variables i $2 \cdot n$ restriccions, com en el problema d'afectació lineal. Però la funció objectiu té una part quadràtica i això en fa més difícil la resolució. Tanmateix, implementat el model en CPLEX, en pocs segons vàrem obtenir la solució següent:

Màquina	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posició	1	2	9	8	4	3	5	6	10	7

amb un cost de 281.

També es pot linealitzar el model si s'hi incorporen les variables binàries y_{hijk} ($h = 1, \dots, n - 1; j = h + 1, \dots, n; \forall (h, j) | \varphi_{hj} > 0; i, k (\neq i) = 1, \dots, n$), iguals a 1 si i no més si la màquina h va a i i la màquina j va a k :

$$\begin{aligned} \text{minimitzar } & \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^n \hat{c}_{ghi} \cdot x_{hi} + \sum_{h,j|\varphi_{hj}>0} \sum_{i=1}^n \sum_{k(\neq i)=1}^n c_{hijk} \cdot y_{hijk} \\ & \sum_{h=1}^n x_{hi} = 1 && i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{hi} = 1 && h = 1, \dots, n \\ & x_{hi} + x_{jk} \leq 1 + y_{hijk} && \forall (h, j) | \varphi_{hj} > 0; i, k (\neq i) = 1, \dots, n \end{aligned}$$

On tenim més restriccions que en el model precedent (41 en comptes de 20) i més variables ($100 + 1.890 = 1.990$, en lloc de les 100). La resolució d'aquest model dona la mateixa solució òptima obtinguda amb el model quadràtic, amb un temps de càlcul similar.

Aquests models es poden adaptar fàcilment als casos en què el nombre de posicions ocupades per una màquina depengui de la màquina i pugui ser un enter més gran que 1.

Un problema diferent és el d'assignació d'unitats d'un recurs a unes diguem-ne entitats que poden compartir-les, en unes condicions determinades, i es vol minimitzar el nombre d'unitats de recurs necessàries perquè totes les entitats quedin ateses.

Segurament, l'exemple més conegut d'aquesta situació és el d'assignació d'interval temporal a exàmens escrits amb l'objectiu de minimitzar el nombre d'interval utilitzats; si no hi ha limitació en la disponibilitat d'aules ni de personal de

vigilància, els exàmens d'assignatures que no tinguin estudiants en comú es poden fer en un mateix interval temporal.

El problema dels exàmens escrits és formalment idèntic a la determinació del nombre cromàtic d'un graf no orientat, és a dir, del nombre mínim de colors necessaris per pintar els vèrtexs d'un graf no orientat de manera que no hi hagi dos vèrtexs adjacents (és a dir, units per una aresta) que tinguin el mateix color. En el cas dels exàmens escrits, cada assignatura correspondria a un vèrtex, hi hauria aresta entre dos vèrtexs si les assignatures tenen estudiants en comú i els colors serien els intervals temporals.

Un altre exemple, molt més popular, és el del *sudoku*. Es pot veure com el problema de determinar una forma d'acolorir, amb 9 colors diferents, els 81 vèrtexs d'un graf, cada un dels quals correspon a una casella de la taula; són adjacents tots els vèrtexs d'una mateixa fila, d'una mateixa columna o d'una mateixa submatriu 3×3 (de les 9 que es consideren en la taula de 9×9).²¹

Hi ha diversos algorismes específics per al problema del nombre cromàtic, però si no es tracta d'exemplars de grans dimensions la solució es pot obtenir també mitjançant la programació matemàtica.

És clar que les solucions d'aquest problema tenen una propietat que se sol denominar de simetria, és a saber, que tota solució amb n colors forma part d'un conjunt de $n!$ solucions equivalents, corresponents a les permutacions dels n colors. Aquesta mena de simetria no és desitjable de cara a la resolució del programa matemàtic i quan no s'evita o no es pot evitar en el plantejament del model pot ser convenient afegir restriccions per trencar la simetria (per exemple, que el nombre de vèrtexs amb el color i sigui més gran o igual que el nombre de vèrtexs amb el color $i + 1$ per a $i = 1, \dots, n - 1$).

VI14. Els colors de les andanes

Els autobusos que uneixen una ciutat determinada amb altres poblacions tenen origen (i destinació, en els viatges de tornada) en una estació central. Conegut l'horari de les diverses línies, és fàcil saber en quins intervals els autobusos han d'estar presents en una andana de l'estació i , per tant, si els autobusos de dues línies poden ser assignats a una mateixa andana, de manera que si m és el nombre de línies es pot obtenir una matriu quadrada, simètrica, de dimensió m i elements binaris en què l'element a_{ij} és igual a 1 si i només si les línies i i j no poden compartir la mateixa andana.

Fins ara, els autobusos aparquen a qualsevol andana que estigui disponible, però això desconcerta els usuaris i per aquest motiu es vol assignar una andana a cada línia de manera que el nombre d'andanes assignades sigui mínim.

²¹ Una altra manera de veure el *sudoku* a JU03.



Es pot plantejar un model de programació matemàtica amb variables $y_k \in \{0,1\}$, iguals a 1 si i només si s'utilitza l'andana k , i $x_{ik} \in \{0,1\}$ ($i = 1, \dots, m$), iguals a 1 si i només si s'assigna a la línia i l'andana k .

En principi, k pot prendre valors entre 1 i m . Aleshores el nombre de variables és igual a $m + m^2$. Però si amb un algorisme heurístic es troba una fita superior $\hat{m} (< m)$ del nombre d'andanes necessàries, el nombre de variables serà menor ($\hat{m} + \hat{m} \cdot m$); \hat{m} també pot ser el nombre d'andanes que hi ha a l'estació.

Aleshores, el model es pot formular de la manera següent:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } n = \sum_{k=1}^{\hat{m}} y_k \\ &\text{s.a } \sum_{k=1}^{\hat{m}} x_{ik} = 1 \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad x_{ik} + x_{jk} \leq 1 \quad \forall (i, j) \mid a_{ij} = 1; k = 1, \dots, \hat{m} \\ &\quad x_{ik} \leq y_k \quad i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, \hat{m} \end{aligned}$$

On les condicions que vinculen les x_{ij} amb les y_j es poden formular també de manera més agregada $\left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq \hat{m} \cdot y_j \right)$. Per trencar la simetria es poden afegir, per exemple, les restriccions $y_{k+1} \leq y_k$ ($k = 1, \dots, \hat{m}$).

Aplicuem el model a un exemple de dimensió 10 amb la matriu d'incompatibilitats següent:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-				1				1	
2		-			1	1	1			1
3			-					1	1	
4				-		1	1	1		
5	1	1			-				1	
6		1		1		-				
7		1		1			-			
8				1				-		1
9	1		1		1				-	1
10		1						1	1	-

Per obtenir una solució es pot aplicar una heurística com la següent: (i) ordenar els vèrtexs; (ii) en l'ordre de la llista, assignar a cada vèrtex (línia d'autobús) el número de color (andana) més baix compatible amb les assignacions anteriors.

El resultat serà diferent segons el criteri d'ordenació adoptat i segons si aquest ordre és estàtic (establert al principi de l'aplicació de l'algorisme i no modificable posteriorment) o dinàmic.

Tot i que no és, per descomptat, el millor que es pot fer, si s'adopta l'ordre (estàtic, és clar) dels codis de les línies obtenim la solució:

Línia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Andana	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4

És a dir, amb 4 colors n'hi ha prou, com en tots els grafs plans (el graf definit per la matriu ho és), però el model proporciona una solució amb 3 colors:

Línia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Andana	2	1	3	3	3	2	2	2	1	3

→ 4



Distribuir

En aquest capítol considerem situacions en què s'ha de determinar la distribució d'un recurs limitat (un pressupost, una renda, un temps, un nombre d'escons en un parlament...) entre opcions diverses. Aquestes situacions es presenten amb freqüència i poden tenir aparences molt variades i requerir l'aplicació de tècniques diferents.

Els problemes amb un sol recurs es poden encabir gairebé sempre en l'esquema on-o-quant. També podríem dir-ne on-o-quant-o-en-què (en què invertim uns estalvis, posem per cas), però respectem el *where-or-when* del llibre de Wagner, tot i que habitualment no sols s'ha de determinar on o quan sinó també quant. Vegem-ne exemples, alguns dels quals es tracten en aquest capítol:

- On-i-quant: quantes unitats, que en total no superin un valor donat, hem de posar a la venda en uns mercats en què, com a conseqüència de les propietats de la corba de demanda, els ingressos són una funció còncava de la quantitat oferta.
- On-i-quant: en quines plantes, que tenen una funció de cost convexa, hem de fabricar un producte, i quina quantitat hi hem de fabricar, per tal d'obtenir-ne una quantitat total donada al mínim cost.
- On-i-quant: en quins focus emissors de pol·lució hem d'actuar i quin pressupost hi hem de dedicar per minimitzar la pol·lució en una àrea determinada, en el supòsit que la reducció de pol·lució és una funció còncava del pressupost que s'hi dedica.
- On-i-quant: quina intensitat de mostreig hem d'aplicar, amb un pressupost limitat, a cada un dels estrats d'una població per estimar-ne una característica de tal manera que l'interval de confiança de l'estimació sigui el menor possible.
- Quan-i-quant: quina quantitat hem d'extraure i posar a la venda, en cada un dels períodes d'un horitzó de planificació, d'un recurs no renovable del qual disposem d'una reserva donada i que té, per a cada període, una corba de



demanda de la qual resulta que els ingressos són una funció còncaua de la quantitat oferta.

Els dos primers d'aquests exemples són molt semblants. De fet, l'única diferència significativa és el sentit dels fluxos: en el primer exemple, tenim una quantitat d'un producte i hem de decidir com el distribuïm (on i quant); en el segon, volem una quantitat d'un producte i hem de decidir com l'obtenim (on i quant). És clar que la resolució de l'un i l'altre són pràcticament idèntiques, però, tot i així, els problemes similars al primer exemple els hem inclòs en aquest capítol ("Distribuir"), mentre que els similars al segon els hem situat en el capítol següent ("Fornir-se").

Amb una excepció (DI09, que es caracteritza precisament perquè les quantitats del recurs assignades a cada opció han de ser enteres), suposem que les quantitats del recurs assignades a cada opció, lloc o període poden ser representades amb variables reals, perquè la naturalesa del recurs permet fraccionar-lo com convingui o perquè l'error que es pot cometre per assumir aquest supòsit és negligible.

El cas més senzill és aquell en què la quantitat necessària de cada recurs és la suma de les quantitats requerides per cada una de les activitats, aquestes quantitats són proporcionals a les intensitats de les activitats (nombre de vegades que es duen a terme o temps que se'ls dedica, per exemple) i el resultat és la suma de les aportacions de cada activitat, que també són proporcionals a les intensitats respectives. En aquest cas, si només hi ha un recurs, el problema és trivial. Si n'hi ha més d'un, és fàcil de plantejar i resoldre mitjançant la programació lineal si les intensitats es poden representar mitjançant variables reals, i és fàcil de plantejar (i potser no tant de resoldre) amb programació lineal entera mixta si les intensitats s'han de representar amb variables binàries o enteres.

Però, com es veurà a continuació, quan intervenen funcions no lineals fins i tot el cas d'un recurs únic pot resultar relativament difícil. En general, per resoldre'l caldrà recórrer als multiplicadors de Lagrange o més sovint a les condicions de Karush, Kuhn i Tucker, a les quals, per abreviar, ens referirem sovint com a KKT, de vegades en singular. Com que de fet les condicions de KKT són una generalització dels multiplicadors de Lagrange, en farem ús en tots els casos apropiats fins i tot quan el problema es podria resoldre amb els multiplicadors de Lagrange.

De Lagrange a Karush, Kuhn i Tucker

Un model de programació matemàtica, si les funcions que hi intervenen tenen les propietats adequades (de seguida discutirem quines són), es pot resoldre numèricament sense dificultats si les dimensions del model no són massa grans.

Però per saber quines propietats són adequades i per obtenir tota la informació rellevant de la solució cal recórrer a les condicions de Karush, Kuhn i Tucker.

La tècnica dels multiplicadors de Lagrange és la primera, històricament, per resoldre problemes d'optimització amb restriccions. La seva limitació principal és que les restriccions han de ser equacions, mentre que en molts casos les condicions del problema impliquen restriccions que cal representar com a inequacions. De vegades, tot i que d'entrada una restricció sigui una inequació es pot demostrar que a l'òptim s'ha de complir com una equació (aleshores es diu que la restricció és activa) i, per tant, es poden aplicar els multiplicadors de Lagrange. Ara bé, quan hi ha més d'una inequació és difícil saber *a priori* quines restriccions han de ser actives a l'òptim.

KKT es refereix a un programa matemàtic, lineal o no lineal, amb variables reals, el qual suposarem, sense pèrdua de generalitat, que és de la forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } f(\mathbf{x}) \\ & \text{s.a } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

(per no allargar més aquest recordatori de KKT, prescindim en la formalització del programa matemàtic de les possibles restriccions de la forma $h_j(\mathbf{x}) = 0$, amb h_j lineals).

O bé (amb $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))^T$):

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } f(\mathbf{x}) \\ & \text{s.a } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Aleshores, en un punt \mathbf{x} es compleix KKT si i només si:

$$(\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}) \wedge (\exists \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0) \wedge (\nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0})$$

És a dir, el punt és factible (ha de satisfer totes les restriccions), els multiplicadors corresponents a les restriccions no actives són nuls i, finalment, el vector $-\nabla f(\mathbf{x})$ es pot expressar com una combinació lineal, amb coeficients no negatius, dels gradients de les equacions corresponents a les restriccions actives (és a dir, $-\nabla f(\mathbf{x})$ pertany al con determinat pels gradients de les restriccions actives a \mathbf{x}).

Una manera menys compacta i més operativa d'expressar la condició $\nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ és:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m u_i \cdot \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$



O, si tenim en compte que només els multiplicadors de les restriccions actives poden ser > 0 i definim el conjunt d'índexs de les restriccions actives a \mathbf{x} , $A(\mathbf{x})$:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i \in A(\mathbf{x})} u_i \cdot \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Si en un punt es compleix KKT no hi ha direccions (és a dir, trajectòries rectilínies) de millora de la funció objectiu, cosa que ja apunta a una relació entre KKT i l'optimitat. Una relació que, tanmateix, no és senzilla; per aclarir-la hem de recordar breument els conceptes de convexitat de conjunts i de funcions.

Un conjunt, S , d'un espai vectorial és convex si i només si, es buit, conté un sol element o per a qualsevol parell d'elements del conjunt, tots els punts del segment que els uneix pertanyen també al conjunt:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in S \Rightarrow [\lambda \cdot \mathbf{x} + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{x}'] \in S, 0 \leq \lambda \leq 1$$

Una funció f definida en un conjunt convex és convexa si i només si:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in S, 0 \leq \lambda \leq 1: f(\lambda \cdot \mathbf{x} + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{x}') \leq \lambda \cdot f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) \cdot f(\mathbf{x}')$$

És clar que les funcions lineals són convexes.

Si una funció g_i és convexa, el conjunt dels punts que satisfan $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ és un conjunt convex i, com que la intersecció de conjunts convexos és un conjunt convex, si totes les g_i ($i = 1, \dots, m$) són convexes, les restriccions $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$) defineixen un conjunt convex. En aquest cas, KKT és condició suficient d'òptim local a \mathbf{x} , perquè si des del punt considerat hi hagués una trajectòria que portés a un punt factible millor, també hi hauria una trajectòria rectilínia de millora, la qual cosa és incompatible amb KKT. Si, a més, la funció objectiu f és convexa, KKT és condició suficient d'òptim global (el supòsit que existeixen dos òptims locals amb un valor diferent de f en un conjunt convex és contradictori amb el supòsit que f és convexa, ja que existeix un segment de recta format per punts factibles que uneix els dos òptims locals). Per tant, en els supòsits expressats, si per a un programa matemàtic com l'indicat trobem una solució que compleixi KKT, la solució és òptima.

Una altra cosa és si KKT és condició necessària d'òptim, és a dir, si en tota solució òptima es compleix KKT. En general no ho és, llevat que les restriccions gaudeixin de determinades propietats, que no sempre són fàcils de verificar. Ara bé, si els gradients de les restriccions actives a l'òptim són linealment independents o bé si f i totes les g_i són convexes i el conjunt de solucions factibles té punts interiors, KKT són condicions necessàries d'òptim.

En definitiva, el cas més favorable és aquell en què totes les funcions involucrades en el programa matemàtic són convexes i el conjunt de solucions factibles

té punts interiors, perquè aleshores KKT és condició necessària i suficient d'òptim global.

Els valors dels multiplicadors a l'òptim poden aportar informació addicional interessant. Si posem les restriccions del programa matemàtic en la forma $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ ($i = 1, \dots, m$), on les b_i són termes independents, en un òptim local estricte $\mathbf{x}^*(\mathbf{b}^0)$ en què se satisfan les condicions KKT amb $u_i > 0 \quad \forall i \in A(\mathbf{x}^*(\mathbf{b}^0))$ es compleix:

$$-u_i = \left[\frac{\delta f(\mathbf{x}^*(\mathbf{b}))}{\delta b_i} \right]_{\mathbf{b}=\mathbf{b}^0}$$

Farem ús de KKT en la resolució del problema següent, tot i que amb els multiplicadors de Lagrange en tindriem prou, com veurem a continuació.

DI01. Estratificar

Es vol estimar la mitjana d'una característica específica en el conjunt d'una població. Aquesta s'ha dividit en m estrats i la proporció de cada estrat en relació amb la població total és w_i ($i = 1, \dots, m$). L'estratificació de la mostra permet fer més observacions de les que correspondrien proporcionalment en els estrats on la variable és més dispersa i, així, millorar l'eficàcia d'un pressupost donat.

L'estimador adoptat és $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^m w_i \cdot \bar{x}_i$, on \bar{x}_i és la mitjana corresponent a les observacions de l'estrat i .

Es disposa d'un pressupost C , el cost d'una observació a l'estrat i ($i = 1, \dots, m$) és c_i i es vol minimitzar la variància de l'estimador, $\sigma_{\hat{\mu}}^2 = \sum_{i=1}^m w_i^2 \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i}$, on σ_i^2 és la variància a l'estrat i ($i = 1, \dots, m$), que suposem coneguda, i n_i el nombre d'observacions en el mateix estrat, que ha de ser un nombre enter (tanmateix, li associarem una variable real, una aproximació que serà vàlida si els valors a l'òptim d'aquestes variables són prou grans).

La formulació d'un programa matemàtic per optimitzar el disseny de la mostra és immediata:

$$\begin{aligned} \text{minimitzar} \quad & \sum_{i=1}^m \frac{w_i^2 \cdot \sigma_i^2}{n_i} \\ & \sum_{i=1}^m c_i \cdot n_i \leq C \quad - n_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$



La funció objectiu és convexa, perquè és la suma de funcions convexes (tenen segona derivada positiva), i les restriccions també són convexes, perquè són lineals, i determinen un conjunt de solucions factibles que té punts interiors (punts en els quals no hi ha cap restricció activa, és a dir, que es compleixi com a igualtat; per exemple, $n_i = \varepsilon > 0 \forall i$, amb $\varepsilon < C / \sum_{i=1}^m c_i$). Per tant, les condicions de KKT són condicions necessàries i suficients d'òptim. És obvi que la restricció $\sum_{i=1}^m c_i \cdot n_i \leq C$ ha de ser activa a l'òptim i les altres no.

Aleshores, podem posar les n_i en funció del multiplicador, u , de la restricció pressupostària i, en substituir les n_i en aquesta mateixa restricció, podem trobar una expressió que ens dóna el valor de u a l'òptim, amb el qual tenim immediatament els valors òptims de les n_i :

$$u^* = \left(\frac{\sum_{i=1}^m w_i \cdot \sigma_i \cdot \sqrt{c_i}}{C} \right)^2 ; n_i^* = \frac{C}{\sum_{i=1}^m w_i \cdot \sigma_i \cdot \sqrt{c_i}} \cdot \frac{w_i \cdot \sigma_i}{\sqrt{c_i}}$$

DIO2. Explotació de mines

S'ha de repartir el temps limitat de què disposa un equip en l'explotació d'unes mines, de cada una de les quals es coneix una funció, còncaua, que dóna el marge econòmic obtingut en funció del temps dedicat (la concavitat de la funció reflecteix que els beneficis per unitat de temps dedicat són decreixents). Suposem que els temps per traslladar-se entre qualsevol parell de mines i els de preparació de l'explotació a cada mina són negligibles.

El temps disponible és T (en les unitats que convingui), hi ha n mines i les funcions que expressen el marge econòmic en funció del temps dedicat a l'explotació són $\varphi_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, amb $\varphi_i'(t) \geq 0$, $\varphi_i''(t) \leq 0$ $0 \leq t \leq \tau_i$, on τ_i és el valor del temps dedicat a la mina i a partir del qual els costos marginals d'explotació superen els ingressos marginals del producte extret ($\varphi_i'(\tau_i) = 0$) i en què, per tant, el marge passa de positiu a negatiu, per la qual cosa no té sentit dedicar-li un temps superior; la condició que la derivada segona sigui no positiva implica la concavitat.

L'optimització del marge econòmic es pot plantejar com un programa matemàtic no lineal amb restriccions lineals:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{i=1}^n \varphi_i(t_i) \\ \text{s.a. } & \sum_{i=1}^n t_i \leq T \\ & -t_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n \\ & t_i \leq \tau_i \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Com que és un problema de maximització i la funció objectiu és còncava,¹ les restriccions són lineals (i, per tant, convexes) i el conjunt de solucions factibles té punts interiors, les condicions de Karush, Kuhn i Tucker (KKT) són condicions necessàries i suficients d'òptim.

Si associem els multiplicadors u a la 1a restricció i v_i a les $-t_i \leq 0$ (per simplificar el raonament, suposem de moment que totes les t_i són menors que les τ_i corresponents), a l'òptim s'ha de complir que $-\varphi_i'(t_i^*) + u^* - v_i^* = 0$. Per tant, com que $t_i^* > 0 \Rightarrow v_i^* = 0$, $\varphi_i'(t_i^*) = u^* \forall i \mid t_i^* > 0$, i com que $\varphi_i'' \leq 0$, $\varphi_i'(0) \geq u^* \forall i \mid t_i^* > 0$ i $\varphi_i'(0) = u^* - v_i^* \leq u^* \forall i \mid t_i^* = 0$; en conseqüència, el temps disponible es reparteix entre totes les mines realment explotades de manera que les primeres derivades de les funcions respectives són iguals entre si i iguals o més grans que les derivades a l'origen de les no explotades. I com que les derivades a l'origen de les funcions de les mines explotades són iguals o més grans que les derivades a l'origen de les mines no explotades, si ordenem les mines de més a menys valor de la derivada a l'origen de les funcions corresponents, a l'òptim es complirà que si una mina és activa ho són totes les que la precedeixen i, si no ho és, no ho són totes les que la segueixen. Suposem d'ara endavant que es compleix la condició $\varphi_1'(0) > \varphi_2'(0) > \dots > \varphi_n'(0)$ (les conclusions són fàcils de generalitzar al cas que hi hagi empats, és a dir, que algunes derivades a l'origen siguin iguals).

De fet, es pot arribar a determinar l'estructura de les solucions òptimes amb un raonament que, potser agosaradament, es pot qualificar d'intuitiu. Si el temps disponible és molt escàs s'ha de dedicar íntegrament a la mina 1; de fet, el temps s'ha de dedicar íntegrament a la mina 1 si T és igual o menor que el valor \hat{T}_1 per al qual $\varphi_1'(\hat{T}_1) = \varphi_2'(0)$. Si T és una mica més gran que \hat{T}_1 , s'ha de distribuir entre les mines 1 i 2, de manera que $t_1 + t_2 = T$ i $\varphi_1'(t_1) = \varphi_2'(t_2)$. La mina 3 no serà explotada si T no és més gran que \hat{T}_2 , per al qual es compleix $t_1 + t_2 = \hat{T}_2$ i $\varphi_1'(t_1) = \varphi_2'(t_2) = \varphi_3'(0)$, i així successivament.

¹ Com que maximitzar una funció f és equivalent a minimitzar $-f$, maximitzar una funció còncava és equivalent a minimitzar una funció convexa, ja que (f còncava) \leftrightarrow ($-f$ convexa).



Per tant, el nombre de mines realment explotades i el temps que s'haurà de dedicar a cada una depenen de T i de les corresponents funcions φ_i , i es poden

determinar uns valors crítics, $\hat{T}_k \mid \left[\varphi_{k+1}'(0) = \varphi_j'(t_j) \forall j \leq k \right] \wedge \left[\sum_{j=1}^k t_j = \hat{T}_k \right]$

($k = 1, \dots, n-1$) i $\hat{T}_n = \sum_{j=1}^n \tau_j$: per a $T \leq \hat{T}_1$ a l'òptim només és activa la mina 1, per a $\hat{T}_{k-1} < T < \hat{T}_k$ ($i = 2, \dots, n$) a l'òptim són actives les mines $1, \dots, k$ i el temps disponible s'ha de repartir de manera que $\varphi_1'(t_1) = \varphi_2'(t_2) = \dots = \varphi_k'(t_k)$, la mateixa conclusió que es dedueix en aplicar KKT.

El raonament anterior es basa en el fet que la funció que es vol optimitzar és separable, és a dir, és una suma de funcions cada una de les quals depèn només d'una variable. Si no, com veurem en altres casos, les coses es compliquen una mica més.

Exemple:

$$n = 2, \varphi_1 = 500(1 - e^{-0,2t}) - 25 \cdot t, \varphi_2 = 400(1 - e^{-0,1t}) - 25 \cdot t$$

En aquestes funcions, el terme $-25 \cdot t$ correspon als costos d'explotació, considerats proporcionals, per tant, al temps dedicat.

$$\varphi_1'(t) = 100e^{-0,2t} - 25, \varphi_1'(0) = 75; \varphi_2'(t) = 40e^{-0,1t} - 25, \varphi_2'(0) = 15$$

Per tant, $\tau_1 = -5 \cdot \ln 0,25 = 6,931472$ i $\tau_2 = -10 \cdot \ln 0,625 = 4,700036$; per sobre de $\tau_1 + \tau_2 = 11,631508$ el temps disponible no té cap utilitat.

$$\varphi_2'(\hat{T}_1) = 100e^{-0,2\hat{T}_1} - 25 = 15; \hat{T}_1 = -\frac{1}{0,2} \cdot \ln 0,4 = 4,581454$$

Per a $0 \leq T \leq 4,581454$ el temps s'ha de dedicar exclusivament a la mina 1. Per a $T > 4,581454$ s'ha de repartir entre les dues mines de manera que es compleixi

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t_1) &= 100e^{-0,2t_1} - 25 = \varphi_2'(t_2) = 40e^{-0,1t_2} - 25 \\ t_1 + t_2 &= T \end{aligned}$$

D'on es dedueix:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{3}T - \frac{1}{0,3} \ln 0,4 \\ t_2 &= \frac{2}{3}T + \frac{1}{0,3} \ln 0,4 \end{aligned} \right\} 4,581454 \leq T \leq 11,631508$$

Aleshores, formular expressions que donin el marge total en funció de T és immediat. Amb aquestes expressions es pot trobar quant temps es necessita per assolir un benefici global determinat.

DI03.1. Publicitat: mercats independents

Una empresa que fabrica i ven productes de consum ha assignat un pressupost, P , a la campanya de publicitat per introduir un nou producte a dues àrees comercials (A i B), amb l'objectiu de maximitzar el nombre d'unitats venudes. Considera inicialment que aquest nombre és funció de la quantitat de diners que hi dediqui (respectivament: x_A, x_B), d'acord amb les expressions següents:

$$n_A(x_A) = 5 \cdot x_A \cdot (52 - x_A) ; 0 \leq x_A \leq 26$$

$$n_A(x_A) = 3.380 ; x_A \geq 26$$

$$n_B(x_B) = 4 \cdot x_B \cdot (60 - x_B) ; 0 \leq x_B \leq 30$$

$$n_B(x_B) = 3.600 ; x_B \geq 30$$

La funció objectiu és separable i és fàcil comprovar que és còncaua. Així doncs, aquest cas és pràcticament idèntic a l'exemple de les mines. El valor de \hat{x}_A és el que compleix $260 - 10 \cdot \hat{x}_A = 240$, és a dir, $\hat{x}_A = 2$.

Per a $0 \leq P \leq 2$ el pressupost s'ha de dedicar íntegrament a A. Per a $2 \leq P \leq 26 + 30 = 56$ s'ha de distribuir entre A i B de manera que es compleixi $260 - 10 \cdot x_A = 240 - 8 \cdot x_B$ i $x_A + x_B = P$. D'on:

$$x_A = \frac{4 \cdot P + 10}{9}, x_B = \frac{5 \cdot P - 10}{9}$$

DI03.2. Publicitat: mercats connexos

Noves informacions sobre el comportament de la clientela potencial revelen que la publicitat que es fa en una de les àrees comercials també té una influència positiva en l'altra, d'acord amb les expressions següents:

$$n_A(x_A, x_B) = [5 \cdot x_A \cdot (52 - x_A)] \cdot \left[1 + \frac{x_B}{300} \right] ; 0 \leq x_A \leq 26 ; 0 \leq x_B \leq 30$$

$$n_A(x_A, x_B) = 3.380 \cdot \left[1 + \frac{x_B}{300} \right] ; x_A \geq 26 ; 0 \leq x_B \leq 30$$

$$n_A(x_A, x_B) = [5 \cdot x_A \cdot (52 - x_A)] \cdot 1,1 ; 0 \leq x_A \leq 26 ; x_B \geq 30$$

$$n_A(x_A, x_B) = 3.718 ; x_A \geq 26 ; x_B \geq 30$$



$$n_B(x_A, x_B) = [4 \cdot x_B \cdot (60 - x_B)] \cdot \left[1 + \frac{x_A}{260}\right]; 0 \leq x_A \leq 26; 0 \leq x_B \leq 30$$

$$n_B(x_A, x_B) = 3.600 \cdot \left[1 + \frac{x_A}{260}\right]; 0 \leq x_A \leq 26; x_B \geq 30$$

$$n_B(x_A, x_B) = [4 \cdot x_B \cdot (60 - x_B)] \cdot 1,1; x_A \geq 26; 0 \leq x_B \leq 30$$

$$n_B(x_A, x_B) = 3.960; x_A \geq 26; x_B \geq 30$$

I es vol saber per a quin interval del valor de P s'ha d'invertir només a A.

Ara la funció objectiu no és separable i no queda altre remei que recórrer més formalment a KKT.

Cal, en primer lloc, comprovar que la funció objectiu, $n_A(x_A, x_B) + n_B(x_A, x_B)$ és còncava. Per a $0 \leq x_A \leq 26, 0 \leq x_B \leq 30$ la matriu hessiana és:

$$\begin{pmatrix} -10 \left(1 + \frac{x_B}{300}\right) & (260 - 10 \cdot x_A)(240 - 8 \cdot x_B) \frac{1}{260} \frac{1}{300} \\ (260 - 10 \cdot x_A)(240 - 8 \cdot x_B) \frac{1}{260} \frac{1}{300} & -8 \cdot \left(1 + \frac{x_A}{260}\right) \end{pmatrix}$$

El primer menor principal és negatiu i el determinant, positiu, perquè el producte dels elements de la diagonal principal és > 80 i el dels de la diagonal secundària < 1 . Per tant, la matriu hessiana és definida negativa i la funció, còncava.

El programa matemàtic és:

$$\text{maximitzar } [5 \cdot x_A \cdot (52 - x_A)] \cdot \left[1 + \frac{x_B}{300}\right] + [4 \cdot x_B \cdot (60 - x_B)] \cdot \left[1 + \frac{x_A}{260}\right]$$

$$\begin{aligned} \text{s.a } & x_A + x_B \leq P \\ & -x_A \leq 0 \\ & -x_B \leq 0 \\ & x_A \leq 26 \\ & x_B \leq 30 \end{aligned}$$

Siguin u, v_A, v_B els multiplicadors associats, respectivament, a les tres primeres restriccions (de moment no considerem la 4a ni la 5a, atès que per a valors de $P < 26$ no poden ser actives i, per tant, els multiplicadors corresponents han de ser nuls). Volem determinar per a quins valors de P és òptima la solució $x_A = P, x_B = 0$, que implica $u \geq 0, v_A = 0, v_B \geq 0$. Aleshores, KKT:

$$10 \cdot P - 260 + u = 0$$

$$\frac{5 \cdot P^2 - 260 \cdot P}{300} - 240 \left(1 + \frac{P}{260} \right) + u - v_B = 0$$

D'on:

$$u = 260 - 10 \cdot P \quad (\geq 0, 0 \leq P \leq 26)$$

$$v_B = \frac{5 \cdot P^2 - 260 \cdot P}{300} - 240 \left(1 + \frac{P}{260} \right) + 260 - 10 \cdot P \geq 0$$

Per determinar el valor màxim de P per al qual $v_B \geq 0$ només cal resoldre l'equació de segon grau que resulta en fer $v_B = 0$: el pressupost s'ha d'invertir exclusivament a A per a $0 \leq P \leq 1,700478$.

Per calcular la distribució del pressupost per a valors més grans de P , suposem que $0 < x_A < 26$, $0 < x_B < 30$ i que $x_A + x_B = P$. Aleshores s'ha de resoldre un sistema de 3 equacions (condicions KKT i $x_A + x_B = P$) amb 3 variables:

$$\frac{4}{260} x_B^2 + \frac{10}{300} x_A \cdot x_B + 10 \cdot x_A - \left(\frac{260}{300} + \frac{240}{260} \right) \cdot x_B - 260 + u = 0$$

$$\frac{5}{300} x_A^2 + \frac{8}{260} x_A \cdot x_B - \left(\frac{260}{300} + \frac{240}{260} \right) \cdot x_A + 8 \cdot x_B - 240 + u = 0$$

$$x_A + x_B = P$$

D'on:

$$\frac{3}{2} x_A^2 - (8416 - 11 \cdot P) \cdot x_A + (7800 + 3818 \cdot P - 6 \cdot P^2) = 0$$

$$x_B = P - x_A \quad \text{i} \quad u = 240 - 8 \cdot P + \frac{1909 - 6 \cdot P}{195} \cdot x_A + \frac{55}{3900} x_A^2$$

La primera d'aquestes tres equacions, de segon grau, proporciona dues solucions, de les quals la pertinent és la que compleix la condició ≤ 26 . Amb aquesta solució i la segona equació s'obtenen les distribucions òptimes del pressupost per a $1,700478 \leq P \leq 55,707027$. Per a valors de P superiors, les dues solucions de l'equació de segon grau anterior són més grans que 26. Per a $55,707027 \leq P \leq 56$ la distribució òptima del pressupost és $x_A = 26$ i $x_B = P - 26$. No tindria sentit que l'empresa assignés un pressupost superior a 56 ja que les vendes serien les mateixes que amb un pressupost de 56.

En els dos supòsits considerats es pot trobar també el pressupost necessari per obtenir unes vendes determinades.



DI04. Dependre

Segons la segona llei de Gossen,² sovint mal enunciació, una persona, com a consumidora, assoleix la màxima satisfacció quan són iguals les utilitats marginals ponderades (és a dir, les utilitats marginals dividides pels preus) dels béns que consumeix i quan aquestes són iguals o superiors a les del béns que no consumeix.

Es tracta de demostrar aquesta llei mitjançant les condicions de KKT, amb la definició prèvia dels supòsits pertinents.

Si la consumidora disposa d'una renda R , pot adquirir qualsevol quantitat de cada un de n béns a uns preus p_i ($i = 1, \dots, n$) i té una funció d'utilitat còncava $U(q_1, \dots, q_n)$ que depèn de les quantitats adquirides de cada bé, la maximització de la seva satisfacció o utilitat es pot plantejar de la manera següent:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } U(q_1, \dots, q_n) \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \cdot q_i \leq T \\ & -q_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Si associem els multiplicadors u a la 1a restricció i v_i a les $-q_i \leq 0$:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} + p_i \cdot u - v_i = 0, \text{ amb } u \geq 0, v_i = 0 \quad \forall i \mid q_i > 0 \text{ i } v_i \geq 0 \quad \forall i \mid q_i = 0$$

Per tant, si tenim dos béns $i, j \mid q_i, q_j > 0$:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} + p_i \cdot u = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + p_j \cdot u = 0; u = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_i}}{p_i} = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_j}}{p_j}$$

és a dir, les utilitats marginals ponderades són iguals.

Però si tenim dos béns $i, j \mid q_i > 0, q_j = 0$:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} + p_i \cdot u = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + p_j \cdot u - v_j = 0; u = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_i}}{p_i} = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_j}}{p_j} + \frac{v_j}{p_j}, \text{ d'on } \frac{\frac{\partial U}{\partial q_i}}{p_i} \geq \frac{\frac{\partial U}{\partial q_j}}{p_j}.$$

² Hermann Heinrich Gossen, 1810-1858. La primera llei diu que la utilitat marginal d'un bé disminueix a mesura que n'augmenta la quantitat consumida (és com dir que la derivada parcial de la funció d'utilitat en relació amb qualsevol variable que representi la quantitat consumida d'un bé és decreixent).

En el cas que la funció U sigui separable, podem trobar fàcilment els valors crítics de R corresponents a l'entrada de cada un dels béns al cistell de consum òptim.

També podríem calcular quina renda cal per assolir un nivell determinat de satisfacció, però ens podem preguntar si això té algun sentit, atès que és poc versemblant que la consumidora sigui conscient de tenir una funció d'utilitat i, si la té, de què significa i de quina mena de funció es tracta.

DI05.1. Monopoli mineral: temps discret, demanda lineal

Es tracta de determinar la política d'explotació òptima, en règim de monopoli i per a un horitzó temporal que comprèn T períodes, d'un mineral que es destrueix o dispersa en usar-lo (combustibles fòssils, aigua fòssil, fosfats...). És a dir, un recurs no renovable i no durador (a diferència de les gemmes, dels metalls preciosos i d'alguns altres metalls, com el coure, que l'ús no destrueix i que pel seu preu elevat solen recuperar-se després d'usar-los).

Suposem conegudes les reserves del mineral, R , i les corbes de demanda de cada període (que per al desenvolupament d'aquest exemple considerem lineals):

$$q = Q_t \cdot \left(1 - \frac{p}{P_t}\right) \quad t = 1, \dots, T, \text{ equivalent a } p = P_t \cdot \left(1 - \frac{q}{Q_t}\right) \quad t = 1, \dots, T$$

on p és el preu, q la quantitat i P_t , Q_t els paràmetres que defineixen la corba de demanda i que corresponen, respectivament, al preu màxim que el mercat pot admetre (a aquest preu, la demanda és nul·la) i a la quantitat que el mercat absorbiria a preu nul.

Si prescindim de l'actualització i dels costos d'explotació,³ la política òptima d'extracció del mineral es pot determinar amb el programa matemàtic següent:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{t=1}^T P_t \cdot \left(1 - \frac{q_t}{Q_t}\right) \cdot q_t \\ & \text{s.a} \quad \sum_{t=1}^T q_t \leq R \\ & \quad \quad -q_t \leq 0 \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

³ Un plantejament més general, que inclou actualització i costos d'explotació, i altres tipus de corbes de demanda, es pot veure a:

Corominas, A., Fossas E. (2015) Optimising the extraction rate of a non-durable non-renewable resource in a monopolistic market: a mathematical programming approach". *SpringerPlus*, 4:503. doi:10.1186/s40064-015-1276-0

Accessible a <https://upcommons.upc.edu/handle/2117/82044?locale-attribute=ca>



La funció objectiu és còncava, perquè és la suma de funcions còncaves (derivades segones negatives) i les restriccions són lineals i defineixen un conjunt de solucions factibles amb punts interiors; per tant, KKT són necessàries i suficients.

L'estructura del programa matemàtic és la mateixa que la del corresponent al problema de les mines (D102). Aquí, les reserves del mineral corresponen al temps disponible i els períodes de l'horitzó de planificació, a les mines de l'exemple esmentat.

Els períodes es poden ordenar d'acord amb el valor de la derivada a l'origen, P_t . A la solució òptima, si no hi ha extracció en un període (direm que és un període no actiu) tampoc no n'hi ha en els que el segueixen en aquesta ordenació (que no necessàriament coincideix amb l'ordre cronològic) i, per tant, si és actiu, n'hi ha en els que el precedeixen.

Si les reserves R són molt grans, la política òptima consisteix a optimitzar els ingressos de cada període (que s'aconsegueix amb $q_t = Q_t / 2, p_t = P_t / 2$) i al final de l'horitzó de planificació queda una reserva igual a $R - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T Q_t$ (és a dir,

“molt gran” és $R \geq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T Q_t$; tots els multiplicadors són nuls a l'òptim i el valor òptim de cada variable és el que anul·la la primera derivada corresponent). Per tant, per determinar la política òptima en cada cas específic, el primer pas consisteix a comprovar si les reserves són o no són molt grans i, si ho són, la política òptima és la mateixa que si el recurs fos inesgotable.

Si les reserves no són molt grans, és a dir, si $R < \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T Q_t$, segons el valor de R

hi haurà més o menys períodes actius, però en tot cas la política òptima durà a exhaurir el jaciment, potser abans de finalitzar l'horitzó de planificació. La determinació de la política òptima es pot fer per dues vies diferents:

1. Suposem, successivament, que el nombre de períodes actius és 1, 2, ... (en l'ordre esmentat abans). Per a cada valor $\tau < T$ del nombre de períodes actius calculem el valor del multiplicador, u , de la restricció de disponibilitat del recurs, que suposem activa, i el comparem amb $P_{\tau+1}$: si $P_{\tau+1} \leq u$, la política òptima és la corresponent a aquests τ primers períodes (recordem: en l'ordre de més a menys de les P); si no, s'ha de provar amb $\tau + 1$. Si s'arriba a $\tau = T$, la política òptima duu a l'exhauriment del recurs al final de l'horitzó de planificació.
2. Determinem, com s'ha vist en problemes anteriors, els intervals dels valors de R per als quals són actius 1, 2, ... períodes. L'interval a què pertany el valor de les reserves disponibles ens diu aleshores quins períodes són actius i la determinació de la política òptima és immediata.

La forma de la política òptima, per tant, pot ser molt variada, segons els valors de R , de T i dels paràmetres que determinen les corbes de demanda. Es pot donar el cas que l'extracció s'interrompi bruscament abans que s'acabi l'horitzó

de planificació (la durada del qual, d'altra banda, decideix el monopolista i no els consumidors) o que alternin intervals, o blocs d'intervals consecutius, amb o sense oferta del mineral.

DI05.2. Monopoli mineral: temps discret, demanda exponencial negativa

A l'enunciat anterior s'ha suposat que la corba de demanda era lineal, per la qual cosa les propietats del programa matemàtic eren les mateixes tant si consideràvem com a variable independent el preu o la quantitat.

Suposem ara que la corba de demanda és $q = e^{-p}$.

Podem plantejar els dos programes no lineals següents:

PNL1

$$\begin{aligned} &\text{maximitzar } \sum_{t=1}^T p_t \cdot e^{-p_t} \\ \text{s.a} \quad &\sum_{t=1}^T e^{-p_t} \leq R \\ &-p_t \leq 0 \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

PNL2

$$\begin{aligned} &\text{maximitzar } -\sum_{t=1}^T q_t \cdot \ln q_t \\ \text{s.a} \quad &\sum_{t=1}^T q_t \leq R \\ &-q_t \leq 0 \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

La funció objectiu de PNL1 és còncava per a $p_t \leq 2 \forall t$; també ho és per a altres combinacions de valors de les variables, però en general no es pot assegurar que sigui còncava en tot el conjunt de solucions factibles. En canvi, la funció objectiu de PNL2 és còncava per a $q_t \geq 0 \forall t$ (de fet, per a $q_t > 0$, ja que $\ln q_t$ no està definit per a $q_t = 0$, tot i que els ingressos per a $q_t = 0$ són nuls), les restriccions són lineals (i, per tant, convexes) i el conjunt de solucions factibles té punts interiors. Aleshores, per al PNL2 les condicions de KKT són necessàries i suficients d'òptim.

L'òptim sense restriccions s'obté igualant a zero les derivades parcials de la funció objectiu, de la qual cosa resulta $q_t \geq e^{-1} \forall t$ i aquesta solució és òptima per a $R \geq T \cdot e^{-1}$ (també es pot iniciar el raonament amb el supòsit que la restricció de disponibilitat del recurs no és activa). Suposem ara que la restricció de disponibilitat és activa; aleshores a l'òptim s'ha de complir KKT, amb $u_0 \geq 0, u_t \geq 0 \forall t$:

$$1 + \ln q_t + u_0 - u_t = 0 \quad \forall t$$

Això implica $q_t > 0 \forall t$ i, per tant, $u_t = 0 \forall t$. D'on $q_t = e^{-(1+u_0)}$ i, de

$$\sum_{t=1}^T q_t = T \cdot e^{-(1+u_0)} = R, \quad q_t = R/T \quad \forall t$$



En els dos problemes anteriors, el temps es considera com una variable discreta: és com si tot passés únicament en els instants que marquen la divisió de l'horitzó temporal en períodes. Això és el més habitual en el tractament de problemes com els inclosos en aquest volum. En canvi, en altres àmbits disciplinaris, com la mecànica o la teoria econòmica, quan es tracten problemes dinàmics el temps es considera sovint com una variable contínua (tot i que de vegades es discretitza per tal de trobar solucions numèriques aproximades quan no és possible o no se sap trobar-ne d'exactes).

Considerar el problema d'extracció òptima d'un recurs no renovable i no durador com una optimització en temps continu ens permet fer una petita incursió en l'interessantíssim territori del control òptim, que té relació amb la programació no lineal convexa, però amb la diferència fonamental que en els problemes de control òptim les solucions són funcions del temps, mentre que en els de programació no lineal d'optimització en temps discret són vectors de components associats als períodes.

El problema del control òptim és el següent:

Amb $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$,

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \int_0^T F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \\ \text{s.a } & \mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ & \mathbf{u}(t) \in K \subseteq \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T \end{aligned}$$

Assumim que les funcions F i f són diferenciables. El vector \mathbf{x} (per brevetat, no sempre farem explícita la dependència de t) descriu l'estat del sistema; \mathbf{u} és el control; l'equació diferencial $\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ ⁴ expressa la dinàmica del sistema i la condició $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$ pot estar present o no. La integral que es tracta de minimitzar correspon a algun tipus de cost (temps, energia, diners...) associat a la trajectòria de l'estat inicial al final mitjançant el control aplicat al sistema.

L'element central de la teoria del control òptim és el principi de Pontriagyn, que defineix les condicions necessàries d'òptim:

Sigui $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, que es denomina l'hamiltonià, on $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ és el vector de multiplicadors, denominats coestats.

Aleshores, si (\mathbf{x}, \mathbf{u}) és un parell òptim per al problema de control existeix $\boldsymbol{\lambda}(t)$ tal que:

⁴ On $\mathbf{x}'(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$.

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= -\frac{\delta H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda)}{\delta \mathbf{x}} \\ H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) &= \min_{\mathbf{v} \in K} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \lambda) \\ \mathbf{x}'(t) &= f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T) \end{aligned}$$

Si la condició $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$ no està present s'ha de complir la denominada condició de transversalitat: $\lambda(T) = \mathbf{0}$.

Aquest sistema d'equacions, que inclou el programa no lineal $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = \min_{\mathbf{v} \in K} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \lambda)$, pot ser molt difícil de resoldre. Però si $K = \mathbb{R}^m$,

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = \min_{\mathbf{v} \in K} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \lambda) \text{ equival a } \frac{\delta H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda)}{\delta \mathbf{u}} = \mathbf{0}.$$

Aquestes condicions necessàries són suficients si $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ és convexa (còncava si el problema és de maximització) en (\mathbf{x}, \mathbf{u}) , $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ és lineal en (\mathbf{x}, \mathbf{u}) i K és convex.

DI05.3. Monopoli mineral: temps continu

Es tracta de determinar, per a temps continu, la política d'explotació òptima, en règim de monopoli i per a un horitzó temporal de T anys, d'un mineral que es destrueix o es dispersa en usar-lo.

Se saben les reserves del mineral, R , el tipus d'interès anual (amb interès continu), i , i la relació, independent del temps, $\rho = \varphi(q)$, entre la taxa d'extracció del recurs i el preu.

Prescindim també aquí dels costos d'explotació.

Si notem $x(t)$ la quantitat de recurs extreta (i posada a la venda) fins a l'instant t , tenim:

$$\begin{aligned} &\text{maximitzar } \int_0^T \varphi(q) \cdot q \cdot e^{-it} dt \\ &\text{s.a } x' = q \quad x(0) = 0, \quad (x(T) = R) \end{aligned}$$

Aquí x correspon a l'estat del sistema i q és el control (que en la teoria del control òptim es representa habitualment amb la lletra u). La condició $x(T) = R$ l'hem posada entre parèntesis perquè, com veurem, l'estat final no sempre ha de complir-la.

També s'han de complir les condicions $x \leq R$ i $q \geq 0$, però d'entrada en prescindirem.



$f(t, x, q) = q$ és lineal, $F(t, x, q) = \varphi(q) \cdot q \cdot e^{-it}$ és còncava si $\frac{d^2[\varphi(q) \cdot q]}{dq^2} = \varphi'' \cdot q + 2 \cdot \varphi' \leq 0$ i el conjunt K , tant si prescindim de la condició $q \geq 0$ com si no, és convex. Per tant, si $\varphi'' \cdot q + 2 \cdot \varphi' \leq 0$, les condicions de Pontryagin són necessàries i suficients d'òptim.

$$H(x, q, t, \lambda) = -\varphi(q) \cdot q \cdot e^{-it} + \lambda \cdot q$$

I s'ha de complir $\lambda' = -\frac{\delta H}{\delta x} = 0$, $\frac{\delta H}{\delta q} = -(\varphi' \cdot q + \varphi) \cdot e^{-it} + \lambda = 0$. D'on $\lambda = c$ (constant a determinar), i si no determinem l'estat final del sistema s'ha de complir la condició de transversalitat $\lambda(T) = 0$ i, per tant, $\lambda = 0$ ($0 \leq t \leq T$), $-(\varphi' \cdot q + \varphi) \cdot e^{-it} = 0$ i $\varphi' \cdot q + \varphi = 0$. Per exemple, per a $\varphi(q) = P - \frac{P}{Q} \cdot q$ (que compleix la condició $\varphi'' \cdot q + 2 \cdot \varphi' \leq 0$) resulta $q = Q/2$. Aquest resultat és òptim a condició que $\frac{Q}{2} \cdot T \leq R$ ($T \leq \frac{R}{Q/2}$); altrament, cal imposar $x(T) = R$ i aleshores tenim $-(\varphi' \cdot q + \varphi) \cdot e^{-it} + c = 0$. Per a $\varphi(q) = P - \frac{P}{Q} \cdot q$:

$$q = \frac{Q}{2} \cdot (P - c \cdot e^{it}) \text{ i, de } \int_0^T q(t) dt = R, \quad c = \frac{P \cdot Q \cdot T - 2 \cdot R}{Q \cdot (e^{iT} - 1)} \cdot i, \quad q = \frac{Q}{2} - \frac{\frac{Q}{2} \cdot T - R}{e^{iT} - 1} \cdot i \cdot e^{it}$$

Amb $P = 100$, $Q = 500$, $R = 2.000$, $i = 0,05$:

$$q = Q/2 = 250 \quad (0 \leq T \leq 8); \quad q(t) = 250 - \frac{12,5 \cdot T - 100}{e^{0,05 \cdot T} - 1} \cdot e^{0,05 \cdot t} \quad (T \geq 8).$$

Per a $T = 10$, per exemple, tenim $q(0) = 211,46$ i $q(10) = 186,46$.

En el cas $i = 0$, $q = Q/2$ ($0 \leq T \leq R/(Q/2)$) i $q = R/T$ ($T \geq R/(Q/2)$).

DIO6. Demanda insatisfeta

La direcció comercial d'una empresa de venda per Internet disposa d'un prestatge P per adquirir, una sola vegada, les quantitats que decideixi de 3 articles de temporada, que compra als preus de 10, 20 i 40, respectivament. La direcció estima que les demandes de cada article, al llarg de la temporada, segueixen lleis $U[0, 3.000]$. L'objectiu és minimitzar l'esperança matemàtica de la demanda insatisfeta.

Observem, en primer lloc, que el nombre d'unitats de cada tipus d'article a la comanda s'hauria de representar amb una variable entera, però farem servir variables reals, atesos els ordres de magnitud de les demandes previstes.

Si la quantitat comprada de l'article i ($i = 1, 2, 3$) és x_i , l'esperança matemàtica de la demanda insatisfeta és:

$$\varphi_i(x_i) = \int_{x_i}^{3.000} \frac{1}{3.000} (y - x_i) dy = \frac{1}{6.000} (3.000 - x_i)^2$$

Per tant, la funció que s'ha de minimitzar és una suma de funcions convexes (tenen segona derivada positiva), i les restriccions són lineals (la de pressupost i les tres de no negativitat de les variables) i determinen un conjunt de solucions factibles amb punts interiors. En conseqüència, les condicions de KKT són necessàries i suficients d'òptim.

El problema, doncs, és molt semblant al d'optimitzar el cistell de consum (DI04). L'única diferència, pràcticament irrellevant, és que aquí es tracta de minimitzar una funció convexa i en el de la renda, de maximitzar una funció còncava. Això sí, aquí la funció objectiu és separable, mentre que en el problema de la renda no fèiem aquest supòsit.

KKT:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - 3.000}{3.000} + 10 \cdot u - v_1 &= 0 \\ \frac{x_2 - 3.000}{3.000} + 20 \cdot u - v_2 &= 0 \\ \frac{x_3 - 3.000}{3.000} + 40 \cdot u - v_3 &= 0 \end{aligned}$$

La solució $x_1 = P/10, x_2 = x_3 = 0$ ($u, v_2, v_3 \geq 0, v_1 = 0$) és òptima per a

$$0 \leq P \leq 15.000.$$

Per a $15.000 \leq P \leq 52.500$: $x_1 = P/50 + 1.200, x_2 = 2 \cdot P/50 - 600, x_3 = 0$.

Per a $52.500 \leq P \leq 210.000$:

$$x_1 = P/210 + 2.000, x_2 = 2 \cdot P/210 + 1.000, x_3 = 4 \cdot P/210 - 1.000.$$

DI07.1. Cartera de valors: actius independents

Es tracta de decidir com hem de repartir uns estalvis entre diferents actius financers, com ara deute públic, accions, obligacions o dipòsits bancaris. És a dir, determinar la composició de la cartera de valors.



El rendiment (anual, per exemple) de cada actiu es pot representar amb una variable aleatòria. En general, com més alta n'és l'esperança matemàtica, més alt és el risc associat a l'actiu, de manera que els actius més segurs tenen esperances matemàtiques molt baixes.

La primera, i principal, dificultat per resoldre aquest problema consisteix a determinar el criteri d'avaluació de les solucions, per a la qual cosa hi ha possibilitats diverses.

Una és establir un compromís entre l'esperança matemàtica del rendiment de la cartera, que es tracta de maximitzar, i el risc, que es tracta de minimitzar. Si no es té en compte el risc, s'ha d'invertir únicament en l'actiu que tingui la major esperança matemàtica, però quan el risc que té associat no es considera assumible s'han de trobar altres solucions, en què hi hagi una major diversitat.

Que per reduir el risc cal diversificar forma part de la saviesa popular: que mai no s'han de posar tots els ous a la mateixa cistella és una expressió que, en aquesta forma o en una d'equivalent, forma part del llenguatge comú en diversos idiomes des de fa molt temps. Perquè és clar que si la cistella cau a terra probablement es faran malbé tots els ous. La diversificació redueix el risc i si a la cartera de valors incloem actius que tinguin entre ells una correlació negativa, encara millor. Una altra cosa és saber com mesurar el risc i quina és la diversificació òptima per reduir-lo.

Markowitz⁵ va proposar com a mesura del risc la variància de la cartera i un model de decisió en què la funció objectiu que s'ha de maximitzar és l'esperança matemàtica del rendiment de la cartera menys la variància d'aquest rendiment multiplicada per un paràmetre no negatiu, λ , que expressa la importància atorgada al risc o aversió al risc ($\lambda = 0$ correspon a no tenir en compte el risc i, per tant, considerar com a únic criteri l'esperança matemàtica de la cartera; $\lambda = \infty$, a considerar únicament el risc). Si hi ha n actius disponibles, amb esperança matemàtica $\mu_i (i = 1, \dots, n)$, V és la variància de la cartera i les variables $x_i (i = 1, \dots, n)$ representen la proporció de l'estalvi invertida en cada actiu:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot x_i - \lambda V \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \\ & -x_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

On V depèn de les variàncies i de les correlacions entre els actius. Observeu que la restricció pressupostària és del tipus \leq (i no $=$) perquè si l'aversió al risc és molt gran la decisió òptima pot ser no invertir tots els estalvis, en el supòsit

⁵ Harry Max Markowitz (1927), premi Nobel d'Economia 1990: "Portfolio Selection" (1952). *Journal of Finance*, 7, 1, 77-91.

que els estalvis no invertits tenen un rendiment nul (es podria imposar la igualtat si a la relació d'actius n'hi hagués un amb esperança matemàtica i variància nul·les).

En aquest apartat suposem que els rendiments dels actius són independents, que totes les seves esperances matemàtiques són diferents i que els hem numerat de manera que $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n$. Aleshores, si σ_i^2 ($i = 1, \dots, n$) són les variàncies dels actius, $V = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cdot x_i^2$ i el model que resulta és:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot x_i - \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cdot x_i^2 \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \\ & -x_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Com en casos anteriors, tenim un problema de maximització d'una funció còncaua amb restriccions lineals que determinen un conjunt de solucions factibles amb punts interiors i, per tant, KKT són condicions necessàries i suficients d'òptim.

Aleshores és immediat, amb un raonament anàleg el que hem vist a DI04, que $(x_i > 0 \wedge x_j = 0) \rightarrow \mu_i > \mu_j$ (en general, seria \geq , però abans hem suposat que totes les esperances matemàtiques són diferents).

Per tant, les solucions òptimes són de la forma (i) $x_1, \dots, x_k > 0$; $x_{k+1}, \dots, x_n = 0$,

amb $k \leq n$ i $\sum_{i=1}^k x_i = 1$ o bé de la forma (ii) $x_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) i $\sum_{i=1}^n x_i < 1$.

En el cas (i) tenim:

$$\begin{aligned} -\mu_i + 2 \cdot \lambda \cdot \sigma_i^2 \cdot x_i + u &= 0 \quad (i = 1, \dots, k) \\ -\mu_j + u - v_j &= 0 \quad (j = k + 1, \dots, n) \end{aligned}$$

$$x_i = \frac{1}{2 \cdot \lambda \cdot \sigma_i^2} (\mu_i - u) \text{ i de } \sum_{i=1}^k x_i = 1 \text{ es dedueix } u = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{\sigma_i^2} - 2 \cdot \lambda}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

$$x_i = \frac{1}{2 \cdot \lambda \cdot \sigma_i^2} \left(\mu_i - \frac{\sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{\sigma_i^2} - 2 \cdot \lambda}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma_i^2}} \right)$$

Per a $j = k + 1, \dots, n$ s'ha de complir $v_j = u - \mu_j \geq 0$, és a dir:



$$v_{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^k \frac{\mu_j}{\sigma_j^2} - 2 \cdot \lambda}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sigma_j^2}} - \mu_{k+1} \geq 0 : \lambda \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\mu_j}{\sigma_j^2} - \mu_{k+1} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sigma_j^2} \right).$$

En el cas (ii):

$$x_j = \frac{1}{2 \cdot \lambda \cdot \sigma_j^2} \cdot \mu_j \text{ i } \lambda > \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j}{\sigma_j^2}$$

Exemple amb $n = 3$;

i	1	2	3
μ_i	0,25	0,15	0,12
σ_i^2	0,0020	0,0050	0,0004

$$0 \leq \lambda \leq 25 : x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0; z = 0,25 - \lambda \cdot 0,0020$$

$$25 \leq \lambda \leq 35,5 : x_1 = \frac{50}{7} \frac{1}{\lambda} + \frac{5}{7}, x_2 = -\frac{50}{7} \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{7}, x_3 = 0;$$

$$z = \frac{5}{7} \frac{1}{\lambda} + \frac{1,55}{7} - \lambda \cdot \frac{1}{49} \left(17,5 \cdot \frac{1}{\lambda^2} + 0,07 \right)$$

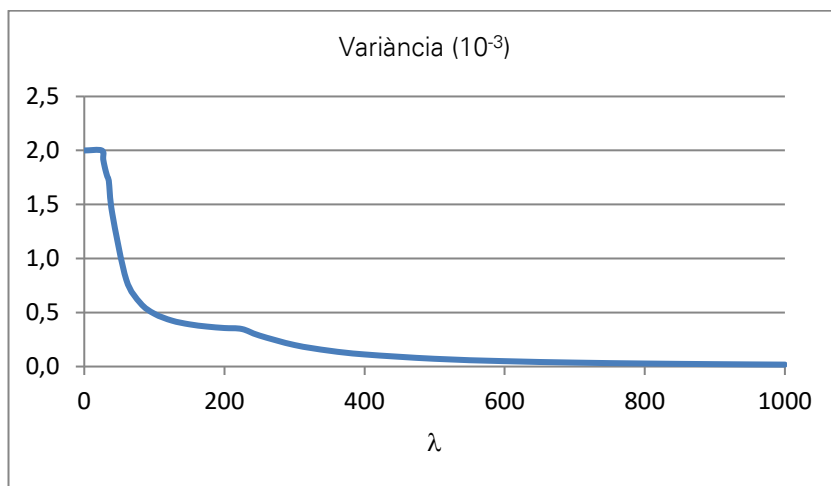
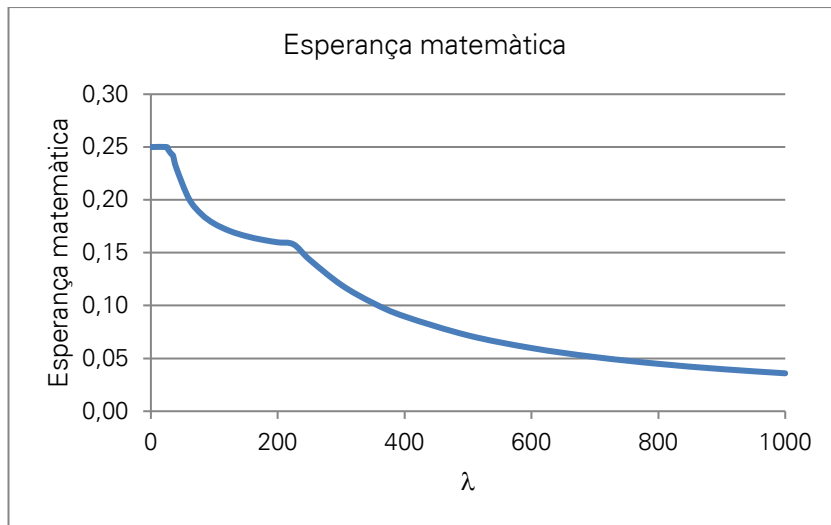
$$35,5 \leq \lambda \leq 227,5 : x_1 = \frac{1.725}{64} \frac{1}{\lambda} + \frac{10}{64}, x_2 = \frac{50}{64} \frac{1}{\lambda} + \frac{4}{64}, x_3 = -\frac{1.775}{64} \frac{1}{\lambda} + \frac{50}{64};$$

$$z = \frac{225,75}{64} \frac{1}{\lambda} + \frac{9,1}{64} - \lambda \cdot \frac{1}{4.096} \left(7.224 \cdot \frac{1}{\lambda^2} + 1,28 \right)$$

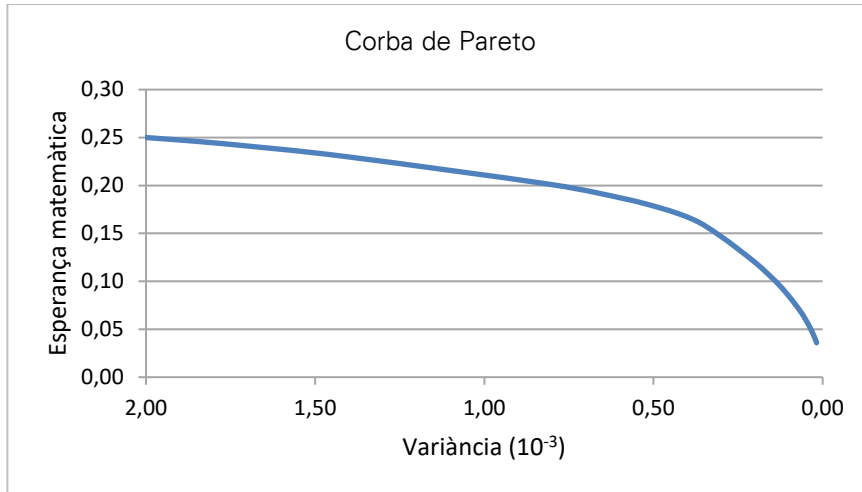
$$227,5 \leq \lambda : x_1 = 62,5 \cdot \frac{1}{\lambda}, x_2 = 15 \cdot \frac{1}{\lambda}, x_3 = 150 \cdot \frac{1}{\lambda};$$

$$z = 35,875 \cdot \frac{1}{\lambda} - \lambda \cdot 17,9375 \cdot \frac{1}{\lambda^2} = 17,9375 \cdot \frac{1}{\lambda}$$

En les gràfiques següents podem veure com el valor de l'esperança matemàtica decreix a mesura que augmenta λ , ja que a la cartera òptima hi van entrant i guanyant pes actius amb esperances matemàtiques menors, i alhora que decreix l'esperança matemàtica també ho fa la variància, encara que l'actiu 2 té una variància més gran que l'actiu 1; tot i així, per la diversificació, tenim, per exemple, variàncies de la cartera iguals a 0,0020, 0,0018 i 0,0017, respectivament, per a λ igual a 25, 30 i 35, amb unes proporcions de l'actiu 2 iguals, també respectivament, a 0, 0,0476 i 0,0816.



Finalment, a la gràfica següent es representa l'esperança matemàtica en funció de la seguretat (considerada com l'oposada al risc i, per tant, a la variància de la cartera). És una corba còncaua que correspon a totes les carteres no dominades o òptimes de Pareto (és a dir, que no hi ha cap cartera que tingui, alhora, més esperança i més seguretat). Les carteres dominades són les representades per punts a l'interior del recinte delimitat per la corba i els eixos de coordenades. Ningú que accepti els criteris del model i actuï racionalment ha d'elegir una cartera que no sigui un òptim de Pareto. Aquesta corba sintetitza la informació rellevant per decidir el pla d'inversió dels estalvis; és inversemblant suposar que una persona pot saber quin és el que podríem denominar el seu valor de λ , però no li ha de ser tan difícil triar un punt en la corba de Pareto.



Finalment, aquest problema, tot i que conceptualment és una mica més complicat, és força semblant a d'altres anteriors d'aquest mateix capítol, en què les condicions KKT permeten trobar les solucions òptimes en funció d'un paràmetre (temps disponible, pressupost, renda, λ) i el procediment es basa a posar les variables suposades positives en funció del multiplicador de la restricció pressupostària, suposada activa. Com en tots els casos esmentats, si la funció objectiu és separable, és fàcil trobar una expressió per al multiplicador i , per substitució, establir les expressions per a les variables suposades positives. En tots el casos, KKT ha permès també establir un ordre de les variables mitjançant la consideració d'un parell en què una és positiva a l'òptim i l'altra no.

DI07.2. Cartera de valors: actius correlacionats

A DI07.1 hem suposat que els rendiments dels actius eren independents i, per tant, $V = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \cdot x_j^2$. Si hi ha correlacions, calculem V , seguint Markowitz, amb

$$l'expressió V = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cdot x_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij} \cdot x_i \cdot x_j .$$

En aquest cas, el plantejament no canvia substancialment en relació amb el de DI07.1 La funció objectiu també és còncava perquè les matrius de covariàncies són semidefinides positives i, per tant, les condicions de KKT també són necessàries i suficients d'òptim. Només es complica una mica la resolució, perquè, en no ser separable la funció objectiu, en cada interval dels valors de λ s'ha de resoldre un sistema d'equacions lineals (com que la funció objectiu és quadràtica, les condicions de KKT ens porten a equacions lineals).

Si considerem només dos actius, si la correlació és negativa la diversificació afaforeix encara més la reducció de la variància.

Vegem-ne alguns exemples, amb les dades de DI07.1 corresponents als actius 1 i 2. El supòsit que s’inverteix la totalitat dels estalvis en l’actiu 1 sols es pot complir per a $\lambda \leq 62,5$, ja que per a valors més grans el multiplicador de la primera restricció es faria negatiu. Per a $\rho_{12} = -0,5$ ($\sigma_{12} = \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 = -0,00158$), l’interval de λ per al qual la solució òptima consisteix a invertir-ho tot en l’actiu 1 passa de $[0, 25]$ per al supòsit de correlació nul·la (vegeu DI07.1) a $[0, 13,96]$. I amb $\rho_{12} = -1,00$, a $[0, 9,69]$. Per a $\rho_{12} = 0,50$ i $\rho_{12} = 1,00$, la solució d’invertir tots els estalvis en l’actiu 1 és òptima per a $0 \leq \lambda \leq 62,5$; per a valors de λ superiors a 62,5, no és òptim invertir la totalitat dels estalvis (s’ha d’invertir, únicament en l’actiu 1, una quantitat que decreix a mesura que augmenta λ). Per a valors de $-1 \leq \rho_{12} \leq 0,379473$, hi ha una $\lambda \leq 62,5$ en què entra a la solució òptima l’actiu 2.

Els escenaris de presa de decisions financeres poden tenir una estructura més complexa que la del problema de selecció de cartera. De fet, la sofisticació dels productes financers ha augmentat significativament, especialment en els anys que precediren l’esclat de la gran crisi financera de 2008. L’enunciat següent correspon al d’un examen de 2009, moment en què hi havia grans turbulències en els mercats financers que alguns economistes atribuïen a la proliferació de productes com ara els *bundles* (feixos) de drets hipotecaris.

DI07.3. Cartera de valors: bundles

Un fons de titulització disposa de 10.000 u. m. i les vol destinar a adquirir *bundles* (feixos) de drets hipotecaris, dels quals n’hi ha de tres tipus (1, 2, 3) que es venen, respectivament, a 100, 150 i 200 u. m. cada feix. L’import total dels drets hipotecaris inclosos en cada feix és el mateix per a tots, independentment del tipus de feix de què es tracti. Els feixos contenen drets sobre tres tipus d’hipoteques: P (*prime*), S (*subprime*) i N (NINJA: *no income, no job, no asset*), en les proporcions (en %) que indica la taula.

	Feix tipus 1	Feix tipus 2	Feix tipus 3
P	40	50	65
S	40	35	10
N	20	15	25

La direcció del fons estima que l’esperança matemàtica dels beneficis que pot obtenir amb la venda dels feixos, a final d’any, és igual a 4, 10 i 20 u. m., per a cada feix dels tipus 1, 2 i 3, respectivament.

Així mateix, la direcció estableix que, en el conjunt de feixos que adquireixi, que han de ser com a mínim de 2 tipus diferents, la proporció d’hipoteques P no ha de ser inferior al 50 %, la d’hipoteques S ha d’estar compresa entre el 20 % i el 25 % i la d’hipoteques N no ha de ser superior al 20 %; si es compren feixos



d'un tipus, se n'han de comprar almenys 3, i si es compren feixos de tipus 1 per un import no inferior a 5.000 u. m. l'import destinat als feixos de tipus 3 no ha de superar els 2.000 u. m.

El plantejament d'un model lineal de programació matemàtica per a aquest problema no presenta gaires dificultats.

$$\begin{aligned}
 &\text{maximitzar } z = 4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 \\
 &100 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2 + 200 \cdot x_3 \leq 10.000 \\
 &0,10 \cdot x_1 - 0,15 \cdot x_3 \leq 0 \text{ (*)} \\
 &-0,20 \cdot x_1 - 0,15 \cdot x_2 + 0,10 \cdot x_3 \leq 0 \\
 &0,15 \cdot x_1 + 0,10 \cdot x_2 - 0,15 \cdot x_3 \leq 0 \\
 &-0,05 \cdot x_2 + 0,05 \cdot x_3 \leq 0; \\
 &3 \cdot y_1 \leq x_1 \leq 100 \cdot y_1 \\
 &3 \cdot y_2 \leq x_2 \leq 66 \cdot y_2 \\
 &3 \cdot y_3 \leq x_3 \leq 50 \cdot y_3 \\
 &y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\
 &x_1 \leq 49 + 51 \cdot r \\
 &x_3 \leq 10 + 40 \cdot (1 - r) \} (**) \\
 &x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (i = 1, 2, 3) \\
 &y_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1, 2, 3) \\
 &r \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

(*) de $0,40 \cdot x_1 + 0,50 \cdot x_2 + 0,65 \cdot x_3 \leq 0,50 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$ i anàlogament les dues restriccions següents

$$\begin{aligned}
 (**) &(100 \cdot x_1 \geq 5.000) \rightarrow (200 \cdot x_3 \leq 2.000); (x_1 \geq 50) \rightarrow (x_3 \leq 10); \\
 &(x_1 < 50) \vee (x_3 \leq 10)
 \end{aligned}$$

La solució òptima que se n'obté és:

$x_1 = 0, x_2 = 29, x_3 = 28$, amb una inversió de 9.950 u. m. i una esperança matemàtica dels beneficis anuals de 850 u. m. (8,54 % sobre la inversió).

Observeu que si imposéssim que la inversió fos igual a la disponibilitat de fons (10.000 u. m), a la solució òptima ($x_1 = 0, x_2 = 32, x_3 = 26$) correspondria una esperança de beneficis de 840 u. m. (8,40 % sobre la inversió).

Els anomenats sistemes experts emulen el comportament de persones o de comissions enteses en la presa de decisions d'un tipus determinat. En veurem dos exemples molt senzills en què es tracta de determinar quin pes s'ha d'atribuir a cada criteri en una funció d'utilitat lineal (en definitiva, es tracta de distribuir un pes total entre els diferents criteris adoptats per avaluar les alternatives).

DI08.1. Sistema expert: preferències binàries

En el procés de disseny d'un producte s'han generat 8 variants que s'han avaluat, mitjançant mesures objectives, segons 7 criteris diferents. Normalitzades les avaluacions en l'escala 0-100, s'ha obtingut la taula següent:

Criteri→ Variant↓	1	2	3	4	5	6	7
1	60	20	50	40	70	0	20
2	80	95	65	30	60	90	90
3	75	90	45	20	30	5	5
4	70	70	50	20	40	80	80
5	65	50	75	80	95	50	75
6	60	10	80	70	90	0	50
7	65	15	50	90	85	0	20
8	90	26	80	59	73	19	79

S'ha demanat al comitè que pren habitualment les decisions sobre nous productes que compari determinades parelles de variants i que manifesti la seva preferència per una de les variants de cada parella. El resultat de la consulta és que el comitè prefereix la variant 2 a la 1, la 4 a la 3, la 6 a la 7 i la 8 a la 3; entre la 2 i la 5 el comitè no manifesta cap preferència.

Es vol determinar el valor dels pesos amb què ponderar els criteris per tal que les notes resultants (entre 0 i 100) siguin coherents amb les preferències manifestades pel comitè, i es considera que perquè la diferència entre dues notes sigui significativa no ha de ser inferior a un llindar δ (per al qual, en aquest cas, s'ha adoptat el valor 1,00).

Les variables són els pesos w_j ($j = 1, \dots, n$), amb $n = 7$ en aquest cas, que ens donaran les notes u_i de cada variant ($i = 1, \dots, m$), amb $m = 8$ en aquest cas, a partir dels valors a_{ij} de la taula:

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot w_j \quad (i = 1, \dots, m)$$

En el model que plantejem, per mor de la claredat, hi figuren explícitament les variables u_i , tot i que no són necessàries, ja que es poden substituir pel segon membre de l'expressió que les defineix.

Si es vol que les notes satisfacin les preferències manifestades pel comitè, les variables u_k i u_l han de complir la restricció $u_k \geq u_l + \delta$ si el comitè prefereix la variant k a la l , i les restriccions $-\delta < u_k - u_l < \delta$ si entre les variants k i l , el



comitè no manifesta preferència per cap de les dues. Qualsevol conjunt de valors dels pesos que satisfaci totes les restriccions anteriors és solució del problema. Una forma de trobar solucions factibles per a un conjunt de restriccions és plantejar un problema d'optimització amb una funció objectiu qualsevol, per exemple, minimitzar w_1 , i resoldre'l. Els mètodes de resolució de problemes d'optimització requereixen, habitualment, que les restriccions que defineixen el conjunt de solucions factibles siguin desigualtats no estrictes. En aquest cas hem aproximat les restriccions $-\delta < u_k - u_l < \delta$ per aquestes altres $-\delta' \leq u_k - u_l \leq \delta'$, amb $\delta' = \delta - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ i petit), i hem resolt el model

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } w_1 \\ \text{s. a } & \sum_{j=1}^n w_j = 1 \\ & u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j \quad i = 1, \dots, m \\ & u_l - u_k + \delta \leq 0 \quad \forall p = (k, l) \in D \\ & u_l - u_k \leq \delta' \quad \forall p = (k, l) \in I \\ & u_k - u_l \leq \delta' \quad \forall p = (k, l) \in I \end{aligned}$$

on el conjunt D és el de les parelles d'alternatives que el primer element de la parella és preferible al segon, i I , com el de les parelles que cap element és preferit a l'altre, i, amb $\varepsilon = 0,001$, hem obtingut els pesos:

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
0,6584	0	0,0835	0	0,2383	0	0,0199

I les notes:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
60,753	74,181	60,381	61,381	73,182	68,619	67,619	84,896

Suposem ara que demanem al comitè que compari les variants 2 i 3, i manifesta que prefereix la 3 a la 2. En resoldre el model veiem que el conjunt de solucions factibles és buit i, per tant, no obtenim cap valor dels pesos. Si ens conformem amb uns valors dels pesos amb què no se satisfacin totes les preferències del comitè, podem relaxar aquesta condició i imposar que els pesos siguin compatibles amb el màxim de preferències possibles. Aleshores, cal definir unes variables $\gamma_p \in \{0,1\} \forall p \in D \cup I$, iguals a 1 si i només si la relació entre les notes de les dues variants que componen la parella p és l'apropiada.

Sigui la parella (k, l) , i suposem que el comitè prefereix k a l ; s'ha de complir:

$$u_k < u_l + \delta \rightarrow \gamma_p = 0$$

És a dir:

$$u_l - u_k + \delta \leq (100 + \delta) \cdot (1 - \gamma_p)$$

o bé

$$u_l - u_k \leq 100 - (100 + \delta) \cdot \gamma_p$$

En canvi, si cap de les dues variants d'una parella no es prefereix a l'altra s'ha de complir que:

$$-\delta < u_k - u_l < \delta$$

I, per tant:

$$u_k - u_l + \delta \leq 0 \rightarrow \gamma_p = 0$$

$$u_k - u_l - \delta \geq 0 \rightarrow \gamma_p = 0$$

D'on:

$$u_l - u_k - \delta' \leq (100 - \delta') \cdot (1 - \gamma_p)$$

$$u_k - u_l - \delta' \leq (100 - \delta') \cdot (1 - \gamma_p)$$

o bé

$$u_l - u_k \leq 100 - (100 - \delta') \cdot \gamma_p$$

$$u_k - u_l \leq 100 - (100 - \delta') \cdot \gamma_p$$

Per tant, podem formular el model següent:

$$\text{maximitzar } \sum_{p=1}^P \gamma_p$$

$$\text{s.a } \sum_{j=1}^n w_j = 1$$

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot w_j \quad i = 1, \dots, m$$

$$u_l - u_k \leq 100 - (100 + \delta) \cdot \gamma_p \quad \forall p \in D$$

$$u_l - u_k \leq 100 - (100 - \delta') \cdot \gamma_p \quad \forall p \in I$$

$$u_k - u_l \leq 100 - (100 - \delta') \cdot \gamma_p \quad \forall p \in I$$

Amb el qual (amb $\varepsilon = 0,001$, $\delta' = 0,999$) s'obtenen els pesos:

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
0,5209	0	0	0,2154	0	0	0,2637

La solució òptima no és única, per la qual cosa en resoldre el model se'n pot obtenir una de diferent.

I les notes:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
45,142	71,867	44,691	61,867	70,868	59,517	58,517	80,421



Que són coherents amb 5 de les 6 preferències i indiferències del comitè, per la qual cosa totes les γ_p són iguals a 1 excepte una, la de la parella (3,2), i el valor òptim de la funció objectiu és 5.

DI08.2. Sistema expert: notes

Ara suposem que el que es demana al comitè és que atribueixi una nota compresa entre 0 i 100 a cada una de les variants, i que es volen determinar els pesos de manera que minimitzin la suma dels quadrats de les diferències entre les notes ponderades i les atribuïdes pel comitè.

Suposem també que les notes del comitè són les següents:

Variant	1	2	3	4	5	6	7	8
Nota	38	72	40	56	72	53	48	58

En aquest cas, si notem q_i ($i = 1, \dots, m$) les qualificacions atorgades pel comitè, el model es pot formular de la manera següent:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } \sum_{i=1}^m (u_i - q_i)^2 \\ \text{s.a. } &\sum_{j=1}^n w_j = 1 \\ &u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot w_j \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

I s'obté:

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
0,0466	0,2220	0,1226	0,1433	0,2314	0,0915	0,1427

amb un valor òptim de la funció objectiu igual a 0,1334.

L'assignació d'escons a les opcions polítiques que s'han presentat a unes eleccions, en funció dels resultats que hi ha obtingut, és un problema d'una gran importància al qual s'ha donat solucions molt diverses. En aquest cas, el recurs són els escons en joc en els comicis corresponents.

DI09. Escons

Si hi ha E escons per assignar, les opcions (diguem-ne partits) que s'han presentat a les eleccions han obtingut n_j ($j = 1, \dots, P$) vots i l'objectiu és atribuir els

escons proporcionalment als resultats, això només és possible si els quocients $q_i = E \cdot n_i / \sum_{i=1}^P n_i$ són enters per a $i = 1, \dots, P$, la qual cosa és força improbable.

Aleshores, en general es tractaria de determinar uns valors enters no negatius, x_i , que sumin E i que s'assemblin tant com sigui possible als q_i .

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{i=1}^P \varphi(x_i, q_i) \\ & \text{s.a. } \sum_{i=1}^P x_i = E \\ & \quad x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad i = 1, \dots, P \end{aligned}$$

on φ és una funció no negativa, tal que $\varphi(q_i, q_i) = 0$ i que, a banda i banda del valor q_i de la variable x_i (q_i no és una variable, sinó un paràmetre de la funció), ha de tenir un valor més gran com més gran és la discrepància entre x_i i q_i ; per exemple, $(x_i - q_i)^2$ o $|1 - x_i / q_i|$.

Aparentment, el programa matemàtic plantejat pot ser difícil de resoldre per moltes de les funcions que hom pot arribar a imaginar. Tanmateix, no és difícil demostrar que per tota $\varphi \mid \varphi(q_i, x_i) \geq 0$ i $\varphi(q_i, q_i) = 0$ i convexa, la solució òptima s'obté amb la regla de les fraccions més grans o de Hamilton,⁶ que consisteix a assignar a cada partit la part entera de q_i i els escons pendents d'assignar, un a un, per l'ordre de major a menor, de les parts fraccionàries d'aquests valors (els empats es poden resoldre arbitràriament).

Aquest procediment té la propietat que la discrepància entre x_i i q_i és sempre menor que 1. Ara bé, es pot donar el cas que presenti la denominada paradoxa d'Alabama, que consisteix en què si passem d' E escons a $E + 1$ algun partit perdi un escó. Per exemple:

$$n_1 = n_2 = 6, n_3 = 1;$$

$$\text{Per } E = 5: q_1 = q_2 = 30/13 = 2 + 4/13, q_3 = 5/13; \quad x_1 = x_2 = 2, x_3 = 1$$

I per $E = 6$: $q_1 = q_2 = 36/13 = 2 + 10/13, q_3 = 6/13$; $x_1 = x_2 = 3, x_3 = 0$. És a dir, quan hi havia 5 escons per assignar al partit 3 n'hi corresponia 1, i amb 6 escons se'n queda sense.

⁶ Alexander Hamilton (1755-1804) va ser el primer secretari del Tresor dels Estats Units i va proposar el mètode de les fraccions més grans per distribuir els escons de la cambra de representants entre els diversos estats. El seu retrat figura en els bitllets de 10 \$ USA, i la seva popularitat s'ha reforçat recentment per l'èxit d'un musical de Broadway inspirat en la seva vida.



Un problema que té una connexió sorprenent amb el de l'assignació d'escons és el de seqüenciació d'unitats de diversos tipus en un recurs que només en pot atendre una en cada període (una línia de producció, una màquina, un emissor de missatges...) amb l'objectiu que la seqüència sigui regular, és a dir, que en qualsevol subseqüència les unitats dels diversos tipus estiguin representades en una proporció similar a la que els correspon en el conjunt d'unitats. En principi, l'aplicació successiva, per a $E = 1, 2, \dots$ d'un procediment d'assignació d'escons, és una forma d'obtenir una seqüència regular, però ha de ser un procediment que no presenti la paradoxa d'Alabama, com els denominats mètodes del divisor, entre els quals es troba el de d'Hondt⁷ (que coincideix amb el que abans va concebre Jefferson)⁸ o el de Webster (que es coneix també com de Sainte-Lagüe, tot i que aquest matemàtic francès el va proposar moltes dècades més tard que Webster).

Des d'un punt de vista abstracte, es pot considerar que aquests dos problemes (l'assignació d'escons i les seqüències regulars) són casos particulars de l'*apportionment problem* (és a dir, el problema del prorrateig).

En el plantejament habitual del problema de regularitat de la seqüència (com ara la seqüència d'unitats que passen per una línia de producció o la seqüència de missatges emesos des d'un dispositiu que en cada instant només pot estar inactiu o enviar un sol missatge) se suposa que cada unitat (cotxe, missatge...) requereix una unitat de temps (si es tracta d'una línia de producció, s'adopta com a unitat de temps el temps de cicle), i que el nombre d'unitats és igual (o, molt menys sovint, menor) que el d'unitats de temps disponibles.

En principi, parlar de regularitat només té sentit si les unitats són de m tipus diferents i, si més no per a alguns tipus, el nombre d'unitats, n_i ($i = 1, \dots, m$), és més gran que 1, però, com es veurà a continuació, segons com es mesuri la regularitat també es pot parlar de regularitat de seqüències en què totes les unitats són diferents.

La mesura de la regularitat d'una seqüència s'ha definit de maneres molt diverses.

Si la mesura es basa en la distància entre la posició de la unitat (és a dir, l'instant en què es completa un cotxe a una línia o l'instant en què es completa l'emissió d'un missatge) i una posició que es considera ideal (és a dir, es considera una penalització creixent amb la distància entre la posició real i la posició ideal de cada unitat; aquesta penalització pot ser lineal o no lineal i les penalitzacions pels avançaments i pels retards poden ser diferents, i també poden ser-ho les penalitzacions corresponents a unes o altres unitats), l'optimització de la regularitat es redueix a un problema d'afectació. És en aquest supòsit de mesura de regularitat basada en les discrepàncies entre posicions reals i posicions ideals que

⁷ Proposat l'any 1878 per Victor d'Hondt (1841-1901). Trobareu una altra connexió entre els procediments d'assignació d'escons i els de programació d'activitats a VI10.

⁸ Thomas Jefferson (1743-1826).

es pot considerar la regularitat d'una seqüència en què totes les unitats són diferents, a condició que estigui definida la posició ideal de cada unitat (que pot ser, per exemple, la data de lliurament compromesa).⁹

En canvi, si la mesura es basa en les distàncies entre dues unitats consecutives del mateix tipus, el problema és de tipus quadràtic i esdevé molt més difícil de resoldre.

No incloem exemples numèrics, perquè quan la determinació de la seqüència òptima es redueix a resoldre un problema d'afectació un exemple no afegiria res als problemes d'aquest tipus inclosos en el capítol "Vincular", i, en el cas quadràtic, hauríem d'anar més enllà dels límits d'aquest text.

⁹ En general, programar unes activitats en una màquina de tal manera que es minimitzi una mesura de la discrepància entre les dates de compleció i les dates compromeses és un problema difícil (excepte per a algunes mesures específiques de discrepància). Però el cas a què ens referim té la particularitat que els temps d'execució de totes les activitats són iguals.

→ 5



Fornir-se

En els problemes del capítol “Distribuir” es tracta d’algú que té un recurs i el vol repartir òptimament. En el present capítol es tracta d’algú que necessita un o més recursos i vol determinar la manera òptima d’aconseguir-los i, de vegades, la quantitat o quantitats que en necessita per assolir un objectiu determinat. Així doncs, en certa manera hi ha una relació especular entre els dos tipus de decisions, però això no treu que, en passar de la definició general a les aplicacions, hi hagi diferències significatives entre les unes i les altres.

FO01.1. Saldos: un article

La Saldadora, SA, es dedica a comprar a la productora i vendre al mercat articles que deixen de fabricar-se.

Suposem que pot adquirir, a c u. m. la unitat, la quantitat que desitgi d’un article determinat, que vendrà, a un preu p u. m., a un ritme uniforme de r unitats per unitat de temps. Adopta com el criteri el VAN, amb un coeficient d’actualització igual a e^{-it} .

Quina quantitat ha d’adquirir de l’article en qüestió?

Sigui q (que suposem real) la quantitat. La Saldadora ha d’optimitzar (maximitzar) la funció:

$$\text{VAN}(q) = \int_0^{q/r} r \cdot p \cdot e^{-it} dt - c \cdot q = \frac{r \cdot p}{i} \cdot \left(1 - e^{-\frac{iq}{r}}\right) - c \cdot q$$

que és còncava (segona derivada < 0), per la qual cosa el valor òptim de q és el que anul·la la primera derivada:

$$q^* = -\frac{r}{i} \cdot \ln \frac{c}{p}$$



Per exemple, amb $c = 10$, $p = 25$, $r = 10$ i $i = 0,01$, resulta $q^* = 916,29$ unitats i la funció objectiu assolix el valor 5.837,09.

La convexitat de la funció permet resoldre el problema d'una manera alternativa: el nombre d'unitats que s'han d'adquirir ha de ser tal que l'ingrés actualitzat de la darrera fracció adquirida sigui igual al cost: $p \cdot e^{-i \cdot \frac{q}{r}} = c$.

Si el nombre d'unitats que s'han d'adquirir ha de ser enter, s'ha de comparar VAN(916) amb VAN(917).

Si es donés el cas que la quantitat que pot subministrar la proveïdora fos inferior, l'òptim seria comprar-li totes les existències.

Si La Saldadora ha de considerar $n (> 1)$ articles en les decisions de compra, ha de resoldre n exemplars com l'anterior i, si no hi ha cap relació que vinculi els articles entre si, l'òptim global és la reunió dels òptims corresponents a cada un dels n articles.

FO01.2. Saldos: dos articles

Habitualment, La Saldadora haurà de considerar més d'un article en les seves decisions de compra i tenir en compte limitacions pressupostàries o de capacitat del magatzem, o ambdues, per exemple. Suposem que pot adquirir dos articles diferents, que les dades del primer són les de l'enunciat anterior i les del segon, $c' = 20$, $p' = 60$, $r' = 5$. A l'espai disponible en el magatzem hi caben 1.500 unitats del primer article o 600 del segon.

Sense la restricció de capacitat del magatzem, la quantitat òptima del segon article seria 549,31 i el valor de la funció objectiu seria 14.850,97. Com que $916,29/1.500 + 549,33/600 > 1$, cal resoldre el problema de manera que es compleixin les restriccions $q/1.500 + q'/600 \leq 1$ (que serà activa a l'òptim), $q, q' \geq 0$ (que no seran actives a l'òptim, perquè els valors òptims d'aquestes variables quan no hi ha restricció de capacitat no arriben, cada un per separat, a omplir el magatzem).

La solució òptima es pot trobar mitjançant la resolució del programa matemàtic següent:

$$\begin{aligned} &\text{maximitzar } \frac{r \cdot p}{i} \left(1 - e^{-i \cdot \frac{q}{r}} \right) - c \cdot q + \frac{r' \cdot p'}{i} \left(1 - e^{-i \cdot \frac{q'}{r'}} \right) - c' \cdot q' \\ &\text{s.a } \frac{q}{1.500} + \frac{q'}{600} \leq 1 \\ &\quad q, q' \geq 0 \end{aligned}$$

O bé trobant la solució del sistema d'equacions següent, en el qual u és el multiplicador associat a la restricció de capacitat del magatzem:

$$-pe^{-i\frac{q}{r}} + q + \frac{u}{1.500} = 0$$

$$-p'e^{-i'\frac{q'}{r'}} + q' + \frac{u}{600} = 0$$

$$\frac{q}{1.500} + \frac{q'}{600} = 1$$

s.a

$$u, q, q' \geq 0$$

La solució òptima és $q = 601,66$, $q' = 359,34$, el valor de la funció objectiu és 13.477,17 i el del multiplicador associat a la restricció de capacitat, 5.546,34. És a dir, un augment de l'1 ‰ en la capacitat del magatzem implicaria un augment de la funció objectiu de 5,546 u. m., si el valor òptim del multiplicador es mantingués constant en l'interval [1,000; 1,001]; com que canvia lleugerament al llarg d'aquest interval, amb l'increment de l'1 ‰, l'augment de la funció objectiu és lleugerament diferent, igual a 5,540.

L'origen de la fórmula del lot econòmic (EOQ: *Economic Order Quantity*) es remunta a 1913, quan va ser publicada per Ford Whitman Harris.¹ Es basa en els supòsits de demanda uniforme (D unitats de producte per unitat de temps), preu d'adquisició al proveïdor constant (independent de la quantitat demanada en cada comanda), cost de llançament (L u. m./lot) cada vegada que es demana un lot al proveïdor i cost de possessió de h u. m. per unitat de producte cada unitat de temps (amb què resulta un cost de possessió proporcional amb $h/2$ al nombre d'unitats, q , del lot, ja que el nivell d'estoc passa linealment de q a 0 des que es rep un lot –que se suposa que entra de cop en el magatzem, a diferència del que succeiria si les unitats, en comptes de procedir d'una proveïdora, fossin de producció pròpia– fins l'instant anterior a aquell en què es rep el següent). Harris, en el seu article planteja la funció que s'ha d'optimitzar, i dona després la fórmula de l'EOQ sense detallar com hi arriba, perquè diu que això requereix matemàtiques avançades ("the solution of this problem involves higher mathematics"). Però com que la funció és convexa i depèn de la variable q , només cal igualar a 0 la derivada en relació amb aquesta variable i aïllar el valor corresponent de la dimensió del lot:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot L}{h}}$$

¹ Harris, F.W. (1913) How many parts to make at once. *Factory, The Magazine of Management*, 10, 2, 135-136, 152. Reimprès a *Operations Research*, 1990, 38, 6, 947-950.



Si el lot s'ha de produir en la mateixa empresa, amb una màquina que té una capacitat de producció coneguda (R unitats de producte per unitat de temps), la fórmula que dona la dimensió òptima del lot (EPO: *Economic Production Quantity*) és molt semblant a la de l'EOQ: només cal reemplaçar-hi h per $\hat{h} = h \left(1 - \frac{D}{R}\right)$. Ara bé, en aquest cas, si per iniciar la producció del lot cal un temps de preparació (τ), s'ha de tenir en compte la limitació en el nombre de lots, de la qual es deriva la fita inferior de la dimensió dels lots: $q \geq \frac{D \cdot R}{R - D} \tau$.

Segurament, i des de fa molts anys, no hi deu haver cap llibre de text sobre direcció d'operacions que no presenti l'EOQ, una de les fórmules més populars, per dir-ho així, en l'àmbit de la direcció d'operacions.

Tanmateix, l'auge del JIT (just-in-time) suscità dures crítiques sobre l'EOQ al voltant dels anys 80 del segle passat: els lots òptims només podien ser els que constaven d'una sola unitat, l'EOQ ignorava els costos de deteriorament i d'obsolescència de l'estoc (tot i que Harris en el seu article es refereix explícitament als costos de "interest and depreciation on stock"²), els costos de llançament s'havien de reduir a valors negligibles, de manera que en resultés $q^* = 1$. Això es pot interpretar com una desqualificació de la fórmula de l'EOQ o bé com una ampliació del punt de vista sobre el problema: el cost de llançament també s'ha de considerar com a variable; però per reduir-lo s'han de fer coses (millorar mètodes, incorporar una tecnologia nova...), i fer-les té un cost. Aleshores, la dimensió òptima no serà necessàriament igual a una unitat, sinó que dependrà dels costos implicats en la reducció, si convé, del cost de llançament.

FO02.1. Variacions Harris: el cost de llançament

Suposem que el cost de llançament es pot reduir d'acord amb l'expressió $L \cdot e^{-\alpha \cdot x}$, on α és un coeficient positiu i x és l'anualitat (si la unitat de temps és l'any; si

² En un article del professor Donald Erlenkotter (Erlenkotter, D. (1989) An Early Classic Misplaced: Ford. W. Harris's Economic Order Quantity Model of 1915. *Management Science*, 35, 7, 898-900) s'expliquen algunes de les vicissituds de les referències als treballs de Harris. Durant molt temps, si més no des de 1931, a causa d'una referència que contenia errors diversos i que es va anar reproduint en articles posteriors, es va creure que la fórmula de l'EOQ s'havia publicat per primera vegada l'any 1915, com a capítol de llibre. Quan Erlenkotter va buscar el llibre, no el va trobar a partir de les dades que figuraven a la referència; finalment, el va localitzar en una secció de documents fora d'ús d'una biblioteca universitària, amb què va poder establir la referència correcta. Aquesta peripècia va fer arribar a Erlenkotter a la conclusió que "the citations to Harris's work over the past 35 years suggest that no one during this period has actually seen his paper". Addicionalment, abans que es publicqués l'article de 1989, el mateix Erlenkotter descobrí que la primera publicació de Harris sobre l'EOQ no era de 1915, sinó de 1913 (vegeu la nota 1).

Més informació sobre aquesta qüestió i sobre la vida i obra de F. W. Harris es troben a Erlenkotter, D. (1990) Ford Withman Harris and the Economic Order Quantity Model. *Operations Research*, 38, 6, 937-946.

no, el cost corresponent a la unitat de temps que s'adopti) corresponent a les accions dutes a terme per a la reducció.

Aleshores, la funció que s'ha d'optimitzar és:

$$z(x, q) = x + \frac{D \cdot L}{q} e^{-\alpha \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot h \cdot q$$

(on es pot substituir, si convé, h per \hat{h}).

És fàcil comprovar que aquesta funció és convexa.

La matriu hessiana és $H_z(x, q) = D \cdot L \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{q} & \frac{\alpha}{q^2} \\ \frac{\alpha}{q^2} & \frac{2}{q^3} \end{pmatrix}$.

I és definida positiva per a $q > 0$ perquè el factor $D \cdot L \cdot e^{-\alpha \cdot x}$ és positiu, $\alpha^2 / q > 0$

i el determinant és $2 \cdot \frac{\alpha^2}{q^4} - \frac{\alpha^2}{q^4} = \frac{\alpha^2}{q^4} > 0$.

Si hi ha limitacions en el volum de la inversió dedicada a reduir el cost de llançament ($x \leq P$) i fem $D \cdot L = A$, $\frac{1}{2} \cdot \hat{h} = B$ i $\frac{D \cdot R}{R - D} \cdot \tau = Q$, el programa matemàtic que s'ha de resoldre és

$$\begin{aligned} \text{minimitzar } z(x, q) &= x + \frac{A}{q} e^{-\alpha \cdot x} + B \cdot q \\ \text{s. a} \quad -x &\leq 0 && (u_x) \\ x &\leq P && (u_p) \\ -q &\leq -Q && (u_Q) \end{aligned}$$

On s'ha prescindit de la condició $q > 0$ (que, com es veurà més endavant, es compleix sense que calgui preocupar-se'n) i s'ha indicat la notació adoptada per als multiplicadors (≥ 0) associats a les restriccions.

En tractar-se d'un programa matemàtic amb 2 variables i 3 restriccions, hi ha diverses maneres, relativament senzilles, d'obtenir-ne la solució òptima. La més expeditiva, per descomptat, és fer servir un resolvent (si, com en aquest cas, es donen les condicions per fer-ho de manera fiable –convexitat de la funció objectiu i de les funcions que defineixen les restriccions–). Però això no permet aprofundir els coneixements sobre l'optimització no lineal ni establir propietats generals de les solucions d'aquest tipus de problema.

L'enfocament més general consisteix a fer ús de les condicions de Karush, Kuhn i Tucker (KKT), que en aquest cas són condicions necessàries i suficients d'òptim



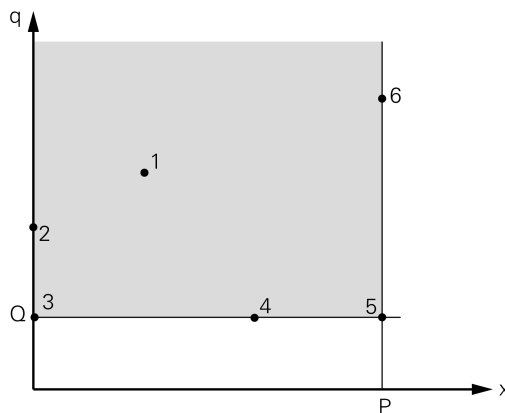
perquè la funció objectiu és convexa, i les restriccions, que són lineals, determinen un conjunt de solucions factibles amb punts interiors:

$$1 - \alpha \frac{A}{q} e^{-\alpha x} - u_x + u_p = 0$$

$$-\frac{A}{q^2} e^{-\alpha x} + B - u_Q = 0$$

En general, *a priori* no sabem quines són les restriccions actives o inactives a l'òptim i aquesta és la dificultat principal per trobar-lo. Fixat el conjunt de restriccions actives, perquè es compleixi KKT els multiplicadors corresponents a les restriccions no actives han de ser nuls, i això determina un sistema d'equacions (amb les variables originals del programa matemàtic i els multiplicadors de les restriccions actives) i a la seva solució es compleix KKT si es compleixen les restriccions considerades com a no actives i tots els multiplicadors són no negatius; si KKT és condició suficient d'òptim, la solució, per tant, és òptima.

El nombre de conjunts possibles de restriccions inactives pot ser molt gran i aleshores no és viable resoldre el problema d'optimització via l'enumeració d'aquests conjunts. Però en el cas que ens ocupa només hi ha 6 combinacions possibles de restriccions actives i no actives, perquè, tot i que hi ha 3 restriccions, les dues primeres no poden ser actives simultàniament (vegeu la figura). A continuació analitzem cada un dels 6 casos, d'acord amb la numeració de la figura.



Cas 1:

$$(0 < x < P, q > Q) \Rightarrow (u_x = u_p = u_Q = 0)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha \frac{A}{q} e^{-\alpha x} &= 0 \\ -\frac{A}{q^2} e^{-\alpha x} + B &= 0 \end{aligned} \right\} x = \frac{1}{\alpha} \ln(\alpha^2 \cdot A \cdot B), q = \frac{1}{\alpha \cdot B}$$

I s'han de complir les condicions:

$$\begin{aligned} C_1 & \alpha^2 \cdot A \cdot B > 1 \\ C_2 & \frac{1}{\alpha} \cdot \ln(\alpha^2 \cdot A \cdot B) < P \\ C_3 & \alpha \cdot B \cdot Q < 1 \end{aligned}$$

Cas 2:

$$(x = 0, q > Q) \Rightarrow (u_x \geq 0, u_p = u_Q = 0)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha \cdot \frac{A}{q} - u_x &= 0 \\ -\frac{A}{q^2} + B &= 0 \end{aligned} \right\} q = \sqrt{\frac{A}{B}}, u_x = 1 - \alpha \cdot \sqrt{A \cdot B}$$

I s'han de complir les condicions:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 & \alpha^2 \cdot A \cdot B \leq 1 \\ C_4 & Q < \sqrt{\frac{A}{B}} \end{aligned}$$

Cas 3:

$$(x = 0, q = Q) \Rightarrow (u_x, u_Q \geq 0, u_p = 0)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha \cdot \frac{A}{Q} - u_x &= 0 \\ -\frac{A}{Q^2} + B - u_Q &= 0 \end{aligned} \right\} u_x = 1 - \alpha \cdot \frac{A}{Q}, u_Q = -\frac{A}{Q^2} + B$$

I s'han de complir les condicions:

$$\begin{aligned} \bar{C}_4 & Q \geq \sqrt{\frac{A}{B}} \\ C_5 & Q \geq \alpha \cdot A \end{aligned}$$

Cas 4:

$$(0 < x < P, q = Q) \Rightarrow (u_x = u_p = 0, u_Q \geq 0)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha \cdot \frac{A}{Q} e^{-\alpha x} &= 0 \\ -\frac{A}{Q^2} e^{-\alpha x} + B - u_Q &= 0 \end{aligned} \right\} x = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\alpha \cdot A}{Q}, u_Q = B - \frac{1}{\alpha \cdot Q}$$

I s'han de complir les condicions:

$$\begin{aligned} \bar{C}_3 & \alpha \cdot B \cdot Q \geq 1 \\ \bar{C}_5 & Q < \alpha \cdot A \\ C_6 & \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{\alpha \cdot A}{Q} < P \end{aligned}$$



Cas 5:

$$(x = P, q = Q) \Rightarrow (u_x = 0, u_p, u_Q \geq 0)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha \frac{A}{Q} e^{-\alpha P} + u_p &= 0 \\ -\frac{A}{Q^2} e^{-\alpha P} + B - u_Q &= 0 \end{aligned} \right\} u_p = -1 + \alpha \frac{A}{Q} e^{-\alpha P}, u_Q = -\frac{A}{Q^2} e^{-\alpha P} + B$$

I s'han de complir les condicions:

$$\begin{aligned} \bar{C}_6 \quad \alpha \frac{A}{Q} e^{-\alpha P} &\geq 1 \quad \left(\frac{1}{\alpha} \ln \frac{\alpha \cdot A}{Q} \geq P \right) \\ C_7 \quad B \cdot Q^2 &\geq A e^{-\alpha P} \end{aligned}$$

Cas 6:

$$(x = P, q > Q) \Rightarrow (u_x = u_Q = 0, u_p \geq 0)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha \frac{A}{q} e^{-\alpha P} + u_p &= 0 \\ -\frac{A}{q^2} e^{-\alpha P} + B &= 0 \end{aligned} \right\} u_p = -1 + \alpha \sqrt{A \cdot B \cdot e^{-\alpha P}}, q = \sqrt{\frac{A}{B} e^{-\alpha P}}$$

I s'han de complir les condicions:

$$\begin{aligned} \bar{C}_7 \quad B \cdot Q^2 &< A e^{-\alpha P} \\ \bar{C}_2 \quad \alpha^2 \cdot A \cdot B \cdot e^{-\alpha P} &\geq 1 \quad \left(\frac{1}{\alpha} \ln(\alpha^2 \cdot A \cdot B) \geq P \right) \end{aligned}$$

Així doncs, hi ha 7 condicions rellevants:

$$\begin{aligned} C_1 \quad \alpha^2 \cdot A \cdot B &> 1 & C_2 \quad \frac{1}{\alpha} \ln(\alpha^2 \cdot A \cdot B) &< P & C_3 \quad \alpha \cdot B \cdot Q &< 1 \\ C_4 \quad Q &< \sqrt{\frac{A}{B}} & C_5 \quad \alpha \cdot A &\leq Q & C_6 \quad \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\alpha \cdot A}{Q} &< P \\ C_7 \quad B \cdot Q^2 &\geq A e^{-\alpha P} \end{aligned}$$

Aquestes condicions permeten determinar el cas d'acord amb la taula següent (1 si i només si la condició es compleix):

Cas	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
1	1	1	1	*	*	*	*
2	0	*	*	1	*	*	*
3	*	*	*	0	1	*	*
4	*	*	0	*	0	1	*
5	*	*	*	*	*	0	1
6	*	0	*	*	*	*	0

La inversió òptima per reduir el cost de llançament i de la dimensió del lot òptim es pot obtenir mitjançant l'avaluació de les 7 condicions indicades: identificat en quin dels 6 casos es troba l'òptim, el valor de les variables es calcula amb les fórmules corresponents. També es pot resoldre numèricament el programa matemàtic que s'ha formulat abans; com que la funció objectiu és convexa, les restriccions són lineals i només té 2 variables, la resolució no presenta cap dificultat.

A la taula següent presentem els resultats per a combinacions diverses dels valors de les dades:

$$R = 30.000, D = 10.000, L = 5.000, h = 100 \left(\hat{h} = h \left(1 - \frac{D}{R} \right) = \frac{200}{3} \right)$$

Dades			Q	Cas	x	q	Cost
τ	α	P					
0,010	0,00010	30.000	150	1	28.134,11	300,00	48.134,11
0,050	0,00001	15.000	750	2	0	1.224,74	81.649,66
0,100	0,00001	15.000	1.500	3	0	1.500,00	83.333,33
0,050	0,00010	20.000	750	4	18.971,20	750,00	53.971,20
0,050	0,00010	15.000	750	5	15.000,00	750,00	54.875,34
0,005	0,00010	15.000	75	6	15.000,00	578,53	53.568,57

L'ús de KKT complica una mica les coses, però proporciona un marc molt general per abordar els problemes d'optimització no lineal i en la resolució s'obté el valor de les variables originals i també, si es vol, el dels multiplicadors, que donen informació sobre la sensibilitat de la solució òptima en relació amb els paràmetres del model. Per exemple, en el cas 6, el valor a l'òptim del multiplicador u_p és el de la derivada parcial, canviada de signe, del valor òptim de la funció objectiu en relació amb P . A l'exemple numèric corresponent al cas 6, $u_p = 0,9284$ (si $P = 15.000 + \varepsilon$, amb $\varepsilon > 0$, $0,9284 \cdot \varepsilon$ és una aproximació lineal de la reducció del valor òptim de la funció objectiu en relació amb el valor corresponent a $P = 15.000$).

FO02.2. Variacions Harris: cost i temps de llançament

Fins aquí hem suposat que mitjançant una inversió es podia reduir el cost de llançament, però que el temps de preparació, τ , i, per tant, la dimensió mínima del lot, Q , no canviaven. Tanmateix, el més probable és que una reducció del



cost de llançament estigui associada a la disminució del temps de preparació³ i aquest és el supòsit que assumim.

Suposem que $Q = \frac{D \cdot R}{R - D} \cdot \tau \cdot e^{-\beta \cdot x} = Q_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$, on β és un coeficient positiu.

Aleshores el programa matemàtic que cal resoldre queda plantejat així:

$$\begin{aligned} \text{minimitzar } z(x, q) &= x + \frac{A}{q} \cdot e^{-\alpha \cdot x} + B \cdot q \\ \text{s. a} \quad -x &\leq 0 && (u_x) \\ x &\leq P && (u_P) \\ Q_0 \cdot e^{-\beta \cdot x} - q &\leq 0 && (u_Q) \end{aligned}$$

Les dues primeres restriccions són lineals; la tercera, convexa, i el conjunt de solucions factible té punts interiors. Per tant, les condicions de KKT són, també en aquest supòsit, condicions necessàries i suficients d'òptim.

El programa matemàtic s'ha complicat una mica, però, com en el cas anterior, es pot resoldre numèricament o bé recórrer a l'anàlisi de les combinacions de restriccions actives i no actives. De fet, dels 6 casos considerats anteriorment, només un, el cas 4, és significativament diferent i és l'únic que es tracta a continuació.

Atès que en aquest cas $q = Q_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$, resulta:

$$\begin{aligned} 1 + (\beta - \alpha) \frac{A}{Q_0} e^{(\beta - \alpha) \cdot x} - \beta \cdot B \cdot Q_0 \cdot e^{-\beta \cdot x} &= 0 \\ u_Q &= B - \frac{A}{Q_0^2} e^{(2 \cdot \beta - \alpha) \cdot x} \end{aligned}$$

Per tant, s'ha de resoldre la primera d'aquestes dues equacions i, si s'obté un valor entre 0 i P , comprovar que $u_Q \geq 0$.

Per exemple, si a les dades de l'exemple numèric corresponent al cas 4 canviem el valor de α i fem $\alpha = 0,0005$ i $\beta = 0,0001$, obtenim $x = 11.834,68$, $q = 229,66$ i $u_Q = 30,78$, amb un cost de 20.076,21. En canvi, amb $\beta = 0,0003$ resulta $u_Q = -313,83$ (per tant, l'òptim no correspon aleshores al cas 4).

³ És clar que pot no ser així. I també pot ser que una reducció del temps de llançament impliqui un augment del cost de llançament, compensable per la reducció del cost de possessió en poder reduir la dimensió dels lots, com a conseqüència de la reducció del temps de llançament.

FO02.3. Variacions Harris: aprenentatge

A l'enunciat anterior s'ha suposat que el cost de llançament es podia reduir mitjançant una inversió. Ara tornem a l'EOQ, però amb horitzó finit, que, sense pèrdua de generalitat, suposem igual a 1 (unitats de temps), demanda uniforme de D unitats de producte per unitat de temps i amb un cost de llançament que es redueix per l'efecte de l'aprenentatge, de manera que el cost del llançament n -èsim és igual a $L \cdot n^{-\alpha}$, amb $\alpha > 0$.

És fàcil demostrar que, per a un nombre donat de lots en l'horitzó de programació, els costos de possessió es minimitzen en igualar les dimensions de tots els lots. Aleshores, el cost total es pot posar en funció del nombre de lots, $N (\in \mathbb{Z}_{>0})$:

$$\text{minimitzar } z(N) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{D}{N} + L \cdot \sum_{n=1}^N n^{-\alpha}$$

Per tant, d'entrada el problema es pot resoldre per mera enumeració, però cal una fita superior del valor de N o alguna propietat de la funció z que ens permeti saber quan podem aturar els càlculs amb la certesa d'haver obtingut l'òptim.

$$z(N+1) - z(N) = \frac{h \cdot D}{2} \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N} \right) + L \cdot (N+1)^{-\alpha} - L \cdot N^{-\alpha} = L \cdot (N+1)^{-\alpha} - \frac{h \cdot D}{2} \cdot \frac{1}{N \cdot (N+1)}$$

(a mesura que augmenta N , augmenta el cost total dels llançaments i disminueix el cost de possessió). La funció decreix si aquesta diferència és < 0 , el que és equivalent, si $N \cdot (N+1)^{1-\alpha} < \frac{h \cdot D}{2 \cdot L}$ o si fem $\frac{h \cdot D}{2 \cdot L} = C$, $N \cdot (N+1)^{1-\alpha} < C$.

L'expressió $N \cdot (N+1)^{1-\alpha}$ és igual a $2^{1-\alpha}$ per a $N = 1$ i és creixent per a $\alpha \leq 2$ (amb límit igual a 1 per a $\alpha = 2$). Per a $\alpha > 2$ pren el valor màxim per a $\left\lfloor \frac{1}{\alpha-2} \right\rfloor$ o per a $\left\lceil \frac{1}{\alpha-2} \right\rceil$ (a la funció $x \cdot (x+1)^{1-\alpha}$, on x és real, la derivada s'anul·la a $x = (\alpha-2)^{-1}$, que separa l'interval de derivada positiva del de derivada negativa); per tant, per a $\alpha \geq 3$ és decreixent. Aleshores, es poden presentar els casos següents (tot i que $\alpha > 2$ resulta més aviat inversemblant):

- $\alpha < 2$:
 - $C \leq 2^{1-\alpha}$, $N^* = 1$
 - $2^{1-\alpha} < C$: calcular $N \cdot (N+1)^{1-\alpha}$ per a valors successius de N fins que $N \cdot (N+1)^{1-\alpha} > C$; aleshores $N^* = N$



- $\alpha = 2$:
 - $C \leq 2^{-1}$, $N^* = 1$.
 - $2^{-1} < C$
 - $C < 1$: calcular $N \cdot (N+1)^{1-\alpha}$ per a valors successius de N fins que $N \cdot (N+1)^{1-\alpha} > C$; aleshores $N^* = N$
 - $C \geq 1$; $N^* = \infty$
- $2 < \alpha \leq 3$:
 - $C \leq 2^{1-\alpha}$: comparar $z(1)$ amb $z(\infty) = L \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ (el valor òptim de N és 1 o ∞ , ja que, a mesura que N augmenta, el cost primer creix i després disminueix)
 - $2^{1-\alpha} < C$:
 - $C \leq \max \left[\left\lfloor \frac{1}{\alpha-2} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{1}{\alpha-2} \right\rfloor + 1 \right)^{1-\alpha}, \left\lceil \frac{1}{\alpha-2} \right\rceil \cdot \left(\left\lceil \frac{1}{\alpha-2} \right\rceil + 1 \right)^{1-\alpha} \right]$:
 comparar $z(\hat{N})$ (on \hat{N} és el menor enter per al qual es compleix $z(\hat{N}+1) > z(\hat{N})$), amb $z(\infty) = L \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ (a mesura que augmenta N , el cost disminueix primer, creix després i finalment tornar a decreixer)
 - $\max \left[\left\lfloor \frac{1}{\alpha-2} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{1}{\alpha-2} \right\rfloor + 1 \right)^{1-\alpha}, \left\lceil \frac{1}{\alpha-2} \right\rceil \cdot \left(\left\lceil \frac{1}{\alpha-2} \right\rceil + 1 \right)^{1-\alpha} \right] \leq C$: $N^* = \infty$
 (el cost decreix a mesura que N augmenta)
- $\alpha > 3$:
 - $C \leq 2^{1-\alpha}$: comparar $z(1)$ amb $z(\infty)$
 - $2^{1-\alpha} < C$: $N^* = \infty$

Per descomptat, $N^* = \infty$ significa que el cost decreix indefinidament a mesura que N augmenta; en un cas real, el valor de N estaria fitat superiorment per raons pràctiques.⁴

⁴ Això eximiria de calcular $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$, és a dir, la funció zeta de Riemann, $\zeta(\alpha)$, per a la qual no hi ha, en general, una expressió tancada. Per exemple, $\zeta(3)$ és igual a la denominada constant d'Apéry, en honor del matemàtic que, l'any 1979, demostrà que era un nombre irracional (1,2020569...). A més, insistim que valors de $\alpha > 2$ són inversemblants (el cost de llançament es reduiria més de la meitat a cada nou llançament).

En la taula següent presentem els resultats per combinacions diverses dels paràmetres h/L i α , amb $D = 10.000$. A cada casella es mostra el valor òptim N^* corresponent als valors de h/L i α que figuren, respectivament, a la seva fila i a la seva columna.⁵

h/L ($\cdot 10^5$)	$\rightarrow \alpha$ $\downarrow C$	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50
1	0,05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0,10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0,15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
4	0,20	1	1	1	1	1	1	1	1	∞	∞
5	0,25	1	1	1	1	1	1	1	∞	∞	∞
6	0,30	1	1	1	1	1	1	∞	∞	∞	∞
7	0,35	1	1	1	1	1	∞	∞	∞	∞	∞
8	0,40	1	1	1	1	1	∞	∞	∞	∞	∞
9	0,45	1	1	1	1	2	∞	∞	∞	∞	∞
10	0,50	1	1	1	1	2	∞	∞	∞	∞	∞
11	0,55	1	1	1	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
12	0,60	1	1	2	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
13	0,65	1	1	2	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
14	0,70	1	1	2	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞
15	0,75	1	2	2	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞
16	0,80	1	2	2	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
17	0,85	2	2	2	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞
18	0,90	2	2	3	10	∞	∞	∞	∞	∞	∞
19	0,95	2	2	3	20	∞	∞	∞	∞	∞	∞
20	1,00	2	2	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
21	1,05	2	2	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
22	1,10	2	2	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
23	1,15	2	2	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
24	1,20	2	3	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
25	1,25	2	3	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Com s'ha vist, la determinació del lot òptim és molt senzilla amb els supòsits que va assumir Harris, però qualsevol desviació d'aquests supòsits pot complicar molt les coses. És el que passa si considerem l'actualització. Amb demanda

⁵ Hi pot haver dos valors òptims de N . Si $\hat{N} > 1$ és òptim i $(\hat{N} - 1) \cdot \hat{N}^{1-\alpha} = C$, aleshores $\hat{N} - 1$ també és òptim; si 1 és òptim i $2^{1-\alpha} = C$, aleshores 2 també és òptim. En tot cas, a la taula només se n'indica un.



uniforme i costos constants, com en el model de l'EOQ, però amb actualització, fins i tot el cas de 2 lots amb horitzó finit resulta complicat (si més no conceptualment; computacionalment no presenta, tanmateix, gaires dificultats, perquè el cost finalment depèn d'una sola variable, com ara el nombre d'unitats del primer lot) i molt més complicat encara per a un nombre de lots superior a 2.

Amb horitzó finit, la discretització del temps, en el supòsit de demanda determinista, permet alliberar-se de tots els supòsits restrictius (demanda uniforme, costos constants, no actualització). Aquest enfocament el varen proposar Wagner i Within⁶ que, considerant una demanda no uniforme, demostraren que en una solució òptima les comandes s'han de rebre just en l'instant que l'estoc s'anul·la, per la qual cosa el volum de les comandes ha de correspondre a un nombre (enter) de períodes consecutius. Per tant, les decisions que cal considerar, en cada instant dels que separen dos períodes, són les que corresponen a no fer comandes o fer-les per cobrir 1, 2,... períodes; el cost de cada una d'aquestes decisions es pot calcular per a qualsevol supòsit relatiu a la demanda, als costos i a l'actualització, i, determinats els costos, el problema, com es veurà a continuació, es redueix a trobar el camí mínim entre l'inici i el final d'un graf sense circuits.

FO02.4. Variacions Harris: horitzó finit i actualització

Suposem un horitzó temporal finit dividit en T períodes d'igual durada, amb una taxa de demanda $\delta(\tau)$ per a $0 \leq \tau \leq T$ (és a dir, la demanda en l'interval $[\tau, \tau + d\tau]$ és $\delta(\tau) \cdot d\tau$), costos de llançament L_t ($t = 0, \dots, T-1$), cost de possessió per unitat de producte i unitat de temps igual a h i coeficients d'actualització iguals a $e^{-i \cdot t}$ ($0 \leq \tau \leq T$).

El cost actualitzat de llançar, en l'instant t , una comanda que cobreixi k períodes és:

$$c(t, t+k) = e^{-i \cdot t} \cdot L_t + h \cdot \int_t^{t+k} \left(\int_t^{t+k} \delta(u) du - \int_t^{\tau} \delta(u) du \right) e^{-i \cdot \tau} d\tau$$

O bé, si fem $\Delta(t) = \int_0^t \delta(u) du$:

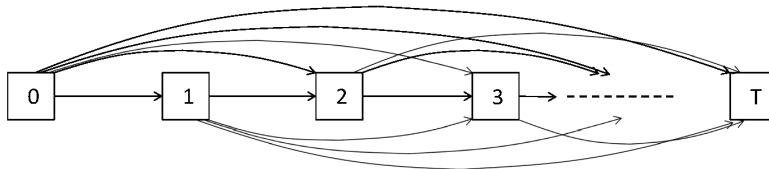
$$c(t, t+k) = e^{-i \cdot t} \cdot L_t + h \cdot \int_t^{t+k} [\Delta(t+k) - \Delta(t) - \Delta(\tau) + \Delta(t)] e^{-i \cdot \tau} d\tau = e^{-i \cdot t} \cdot L_t + h \cdot \int_t^{t+k} [\Delta(t+k) - \Delta(\tau)] e^{-i \cdot \tau} d\tau$$

Per tal de no complicar els càlculs, suposem una demanda uniforme $\delta(\tau) = \rho$ ($0 \leq \tau \leq T$); $\Delta(t) = \rho \cdot t$ i $L_t = L$ ($t = 0, \dots, T-1$):

⁶ Wagner, H. M.; Within, T. M. (1958) Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, 5, 89-96.

$$c(t, t+k) = e^{-i \cdot t} \cdot L + h \cdot \rho \cdot \int_t^{t+k} [(t+k) - \tau] e^{-i \cdot \tau} d\tau = e^{-i \cdot t} \cdot \left[L + \frac{h \cdot \rho}{i^2} (i \cdot k + e^{-i \cdot k} - 1) \right]$$

Definits aquests costos, si discretitzem l'horitzó de programació, impossem que les comandes s'han de rebre a l'inici d'un període per cobrir un nombre (a determinar) de períodes, i considerem un graf amb $T + 1$ vèrtexs $(0, 1, \dots, T)$ en què un arc de t a $t+k$ correspon a una comanda que arriba a l'instant t i cobreix la demanda des de t a $t+k$ (és a dir, la demanda dels k períodes subsegüents a l'instant t), el problema de trobar la política òptima es redueix al de trobar un camí mínim de 0 a T en el graf considerat (la qual cosa és particularment senzilla perquè es tracta d'un graf sense circuits i amb una estructura peculiar; (vegeu la figura). Aquest enfocament, com es veu a RE01, també és aplicable a la determinació de la política òptima de renovació d'un equipament, amb horitzó finit.



El càlcul del camí mínim es pot fer de la manera següent:

$$v_0 = 0; t = 1, \dots, T : v_t = \min_{0 \leq \tau \leq t-1} (v_\tau + c_{\tau t}), \text{ ant}_t = \arg \min_{0 \leq \tau \leq t-1} (v_\tau + c_{\tau t})$$

El cost del camí mínim és v_T i el camí mateix s'identifica anant des de T a 0 segons el que indiquen els valors de ant_t .

Amb $\rho = 100, T = 10, L = 500, h = 1, i = 0,10$, resulta:

$\rightarrow k \downarrow t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Cost 0 a k	De
0	548,37	687,31	908,18	1.203,20	1.565,31	1.988,12	2.465,85	2.993,29	3.565,70	4.178,79	0	0
1		496,19	621,90	821,76	1.088,70	1.416,35	1.798,92	2.231,20	2.708,44	3.226,38	548,37	0
2			448,97	562,72	743,56	985,10	1.281,56	1.627,73	2.018,87	2.450,70	687,31	0
3				406,25	509,17	672,80	891,35	1.159,61	1.472,83	1.826,75	908,18	0
4					367,59	460,72	608,77	806,53	1.049,26	1.332,67	1.203,20	0
5						332,61	416,87	550,84	729,78	949,41	1.417,35	3
6							300,95	377,20	498,42	660,33	1.580,98	3
7								272,31	341,31	450,99	1.799,54	3
8									246,40	308,83	1.958,18	6
9										222,95	2.079,40	6
10											2.241,31	6



La política òptima consisteix a fer una comanda de 300 unitats en l'instant 0, una de 300 unitats en l'instant 3 i una de 400 unitats en l'instant 6, amb un cost total de $908,18 + 672,80 + 660,33 = 2.241,31$.

També podem arribar al mateix resultat per altres vies.

Per exemple, resolent el problema del camí mínim mitjançant la programació lineal binària. Per fer-ho definim les variables $x_{\tau t} \in \{0,1\}$ ($\tau = 0, \dots, T-1$; $t = \tau + 1, \dots, T$), iguals a 1 si i només si l'arc (τ, t) forma part del camí, i imposarem que del vèrtex 0 surt un arc, que al vèrtex T només n'hi arriba un i que en els altres vèrtexs el nombre d'arcs que hi arriben és igual al nombre d'arcs que en surten (com que els arcs tenen associat un cost positiu, a la solució òptima aquest nombre d'arcs que entren o surten no prendrà altre valor que 0 o 1):

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar} \sum_{\tau=0}^{T-1} \sum_{t=\tau+1}^T c_{\tau t} \cdot x_{\tau t} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{t=1}^T x_{0t} = 1 \\ & \sum_{\tau=0}^{t-1} x_{\tau t} = \sum_{\tau=t+1}^T x_{t\tau} \quad t = 1, \dots, T-1 \\ & \sum_{\tau=1}^{T-1} x_{\tau T} = 1 \end{aligned}$$

I també es pot enfocar com un problema de cobertura (tots els períodes han d'estar coberts; vegeu SE01.1 i SE01.2) o, millor, com un problema de partició⁷ (partir el conjunt de períodes en trams). Amb les mateixes variables definides per al problema del camí mínim, el model per al problema de partició és el següent (per al problema de cobertura les restriccions haurien de ser inequacions \geq en comptes d'equacions):

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar} \sum_{\tau=0}^{T-1} \sum_{t=\tau+1}^T c_{\tau t} \cdot x_{\tau t} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{\tau'=t}^T x_{\tau\tau'} = 1 \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

És a dir, cerquem una partició de mínim cost del conjunt de períodes. La partició la defineixen els arcs elegits, cada un dels quals té associat un subconjunt de períodes (consecutius): l'arc que va de τ a τ' té associats els períodes $\tau + 1, \tau + 2, \dots, \tau'$. Les restriccions imposen que cada període forma part d'un i

⁷ Els problemes de cobertura, de partició i de camí mínim són diferents. Però en el problema d'aquest enunciat, plantejat com a problema de cobertura, tota solució òptima seria una partició; i el camí mínim entre 0 i T defineix una partició en el conjunt de períodes.

només un dels subconjunts elegits (arcs, en aquest cas); en els problemes de cobertura, cada element ha de formar part d'almenys un dels subconjunts.

En tots els problemes anteriors hem considerat implícitament que només hi havia una sola font de subministrament de l'article requerit. Tanmateix, en general hi pot haver diverses empreses proveïdores. Cada proveïdora pot tenir una tarifa per trams (amb costos unitaris constants en cada tram i decreixents en passar d'un tram al següent), un cost fix per comanda i unes fites inferior i superior de la dimensió (nombre d'unitats) de la comanda. El problema següent es refereix a l'optimització de l'aprovisionament en aquestes circumstàncies.

FO03. Aprovisionament

Es tracta d'obtenir una quantitat donada, Q , d'un component que ens poden subministrar n proveïdores. Aquestes han estat avaluades prèviament i compleixen totes les condicions de qualitat, fiabilitat en el termini de lliurament, etc. En general, tenen una tarifa amb un cost unitari decreixent per trams, per la qual cosa el cost d'una comanda és una funció còncava i lineal per trams de la seva dimensió.

Siguin:

- K_j Nombre de trams de la tarifa de la proveïdora j ($j = 1, \dots, n$).
- q_{jk} Valors enters ($0 \leq q_{j0} < q_{j1} < \dots < q_{jK_j}$) que defineixen els intervals de la tarifa de la proveïdora j ($j = 1, \dots, n; k = 0, \dots, K_j$). $q_{j0} > 0$ significa que la proveïdora no admet comandes de menys de q_{j0} unitats; q_{jK_j} coincideix amb la quantitat màxima que la proveïdora pot subministrar en un període.
- c_{jk} Preu d'una unitat ($j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_j$) corresponent al tram k (és a dir, s'aplica, per a comandes de dimensió $x > q_{j,k-1}$, a $\min(x - q_{j,k-1}, q_{jk} - q_{j,k-1})$).
Amb $c_{j1} > c_{j2} > \dots > c_{jK_j}$.
- F_j Cost de les primers q_{j0} unitats ($j = 1, \dots, n$) subministrades per la proveïdora j .
- h Cost de possessió d'una unitat fins al període següent.

Observem que el cost d'una ordre de dimensió x , pertanyent a l'interval k del proveïdor j , es pot expressar de la manera següent:

$$f_{jk} + c_{jk} \cdot x$$

on

$$f_{j1} = F_j - c_{j1} \cdot q_{j0} \geq 0 \text{ i } f_{j,k+1} = f_{jk} + (c_{jk} - c_{j,k+1}) \cdot q_{jk} \quad (k = 1, \dots, K_j - 1).$$



A les restriccions obligades per imposar que s'assoleix la quantitat Q i per linealitzar els costos afegim fites inferior i superior (L i U) del nombre de proveïdores a què s'envia comanda, per tal de tenir en compte condicions de fiabilitat en la recepció d'unitats i de limitació en la complexitat de la gestió, respectivament.

Podem resoldre el problema amb un model de programació matemàtica.

Variables:

$x_{jk} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ Nombre d'unitats de la comanda a la proveïdora j ($j = 1, \dots, n$) que pertanyen a l'interval k de la tarifa ($k = 1, \dots, K_j$).

$y_j \in \{0, 1\}$ = 1 si i només si es fa una comanda a la proveïdora j ($j = 1, \dots, n$).

$s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ Nombre d'unitats que excedeixen les necessàries i que no s'utilitzaran fins al període següent.

$r_{jk} \in \{0, 1\}$ = 1 si i només si la dimensió de la comanda a la proveïdora j pertany a l'interval de la seva tarifa.

$$\text{minimitzar } \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{K_j} (f_{jk} \cdot r_{jk} + c_{jk} \cdot x_{jk}) + h \cdot s$$

$$\text{s. a } \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{K_j} x_{jk} - s = Q \tag{1}$$

$$x_{jk} \leq q_{jk} \cdot r_{jk} \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_j \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{K_j} r_{jk} = y_j \quad j = 1, \dots, n \tag{3}$$

$$q_{j,k-1} \cdot r_{jk} \leq x_{jk} \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_j \tag{4}$$

$$L \leq \sum_{j=1}^n y_j \leq U \tag{5}$$

La restricció (1) correspon a la satisfacció de les necessitats. Les (2) i (3) linealitzen les funcions de costos de les proveïdores. Les (5) imposen les fites inferior i superior del nombre de proveïdores a què s'envia comanda. Les (4), per a $k = 1$, imposen la fita inferior del nombre d'unitats de la comanda, en cas que es faci; per a $k > 1$ només són necessàries si s'imposa, mitjançant (5), una fita inferior del nombre de proveïdores actives (sense aquestes restriccions, les variables y_j poden prendre el valor 1 encara que no hi hagi cap $x_{jk} > 0$).

Si la tarifa de la proveïdora té un sol tram, la variable r corresponent no és necessària, perquè coincideix amb la y . Considerem el cas següent:

$$Q = 10, 25, 50, 75, 100, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1.000; n = 5; h = 0,01$$

Prov.	K_j	q_{j0}	q_{j1}	q_{j2}	q_{j3}	F_j	c_{j1}	c_{j2}	c_{j3}	f_{j1}	f_{j2}	f_{j3}
1	3	50,0	100,0	300,0	700,0	1.000,0	10,0	9,0	8,0	500,0	600,0	900,0
2	1	50,0	500,0			1.000,0	7,0			650,0		
3	2	25,0	150,0	400,0		300,0	12,0	11,0		0,0	150,0	
4	3	100,0	300,0	800,0	1.000,0	3.300,0	8,0	7,0	6,0	2.500,0	2.800,0	3.600,0
5	1	100,0	600,0			850,0	8,5			0,0		

l, per començar, $L = 1$, $U = 5$ (és a dir, sense restringir el nombre de proveïdors actives).

Les polítiques òptimes i costos totals corresponents figuren a la taula següent:

Q	Prov. 1	Prov. 2	Prov. 3	Prov. 4	Prov. 5	s	Cost
10			25			15	300,15
25			25				300,00
50			50				600,00
75					100	25	850,25
100					100		850,00
400					400		3.400,00
500		500					4.150,00
600		500			100		5.000,00
700		500			200		5.850,00
800		500			300		6.700,00
900		500			400		7.550,00
1.000		500			500		8.400,00

Fixem ara $Q = 1.000$ i augmentem progressivament el valor de L . Les polítiques òptimes que resulten són:

L	Prov. 1	Prov. 2	Prov. 3	Prov. 4	Prov. 5	s	Cost
2		500			500		8.400,00
3		500	25		475		8.487,50
4	50	500	25		425		9.062,50
5	50	50	25	775	100		11.375,00

F004. Economia i hisenda: Cobb-Douglas

La funció de producció de Cobb-Douglas⁸ és un model que dona el valor de la producció en funció de les quantitats dels inputs (factors de producció) necessaris per obtenir-la:

$$p \cdot \prod_{i=1}^n q_i^{\alpha_i}$$

⁸ Cobb, C.W., Douglas, P. H. (1928) A Theory of Production. *American Economic Review*, 18, (suplement), 139-165.

Vegeu: https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_producci%C3%B3n_de_Cobb-Douglas



On α_i i ρ són constants positives.

En un sistema econòmic en què el valor de l'output correspon a una funció de Cobb-Douglas i els costos dels factors de producció són c_i ($i = 1, \dots, n$), es tracta de determinar la producció òptima i les quantitats dels factors de producció necessaris per obtenir-la, amb la condició que el cost total de producció no pot ser més gran que C .

Es tracta de:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } p \cdot \prod_{i=1}^n q_i^{\alpha_i} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n c_i \cdot q_i \leq C \\ & -q_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

La funció objectiu d'aquest programa no és còncava per a tots els valors que poden prendre els paràmetres. Però el programa matemàtic anterior és equivalent a:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \ln p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \ln q_i \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n c_i \cdot q_i \leq C \\ & -q_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

En el qual, com que la funció objectiu és còncava (suma de funcions còncaves), les restriccions són lineals i el conjunt de solucions factibles té punts interiors, les condicions de Karush, Kuhn i Tucker són condicions necessàries i suficients d'òptim. L'estructura del model és similar als de DI04 i de DI05.2, però en aquest cas, a l'òptim, totes les restriccions de no negativitat són inactives (ja que totes les q_i han de ser > 0 perquè ho sigui el valor de la producció) i la de costos ha de ser activa a l'òptim, perquè les derivades parcials primeres de la funció de Cobb-Douglas són positives i, per tant, no pot ser òptima una solució de cost inferior al màxim admissible, C .

Aleshores tenim:

$$-\frac{\alpha_i}{q_i} + c_i \cdot u = 0; \quad q_i = \frac{\alpha_i}{c_i} \frac{1}{u}$$

I, tenint en compte que $\sum_{i=1}^n c_i \cdot q_i = C$, resulta:

$$q_i = \frac{\alpha_i \cdot C}{c_i \sum_{j=1}^n \alpha_j}, u = \frac{C}{\sum_{j=1}^n \alpha_j}, c_i \cdot q_i = \alpha_i \cdot \frac{C}{\sum_{j=1}^n \alpha_j}$$

És a dir, el cost de cada factor de producció a l'òptim és el que resulta de repartir el cost total, C , proporcionalment als valors dels exponents α_i .

El valor de la producció és, per tant:
$$p \cdot \left(\frac{C}{\sum_{j=1}^n \alpha_j} \right)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{c_i} \right)^{\alpha_i} .$$

Si la funció de Cobb-Douglas és homogènia ($\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$), el valor de la producció és proporcional al cost total dels factors.

Si totes les q_i es multipliquen per un mateix coeficient positiu, γ , el valor de la producció es multiplica per $\gamma^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$. Per tant, hi ha economies o deseconomies d'escala si $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ és, respectivament, > 1 o < 1 ; si és igual a 1, no hi ha economies ni deseconomies d'escala: el valor de la producció es multiplica pel mateix coeficient, γ , que els factors de producció.

Passem dels recursos abstractes de la funció de Cobb-Douglas a dos recursos específics bàsics en la indústria: la capacitat de producció i la capacitat d'emmagatzemament necessària per encabir-hi els estocs.

La demanda dels productes, siguin béns o serveis, presenta sempre una estacionalitat més o menys acusada. És a dir, varia segons les hores del dia, els dies de la setmana o les estacions de l'any. Aquest fet complica el disseny dels sistemes productius, la gestió de la producció i, si és el cas, dels estocs.

Si el producte no es pot emmagatzemar, com en el cas dels serveis, només es pot fer front a l'estacionalitat amb accions sobre la demanda orientades a atenuar-la (preus més baixos per als períodes de menys demanda, campanyes –sobre els encisos de les platges a l'hivern, per exemple–, cartera de productes amb estacionalitat complementària, cita prèvia) i amb una capacitat variable (que es pot aconseguir bàsicament mitjançant l'organització del temps de treball) que s'adapti el millor possible a les fluctuacions de la demanda.

Quan el producte es pot emmagatzemar, es pot fer front a les demandes més altes mitjançant la creació d'estocs en els períodes en què la demanda està per sota de la capacitat productiva. Dintre d'uns límits, la demanda es pot satisfer



amb combinacions diverses de les capacitats de producció i d'emmagatzement i la qüestió és quina d'aquestes combinacions és la de menor cost. Així doncs, ambdues capacitats són parcialment complementàries i els seus dimensionaments s'han de considerar conjuntament.

FO05. Capacitat o estocs?

Un estudi de mercat indica que la demanda mensual potencial d'un refresc en una àrea comercial en què fins ara no es distribuïa és la que s'indica a la taula següent (en desenes de milers d'ampolles) i que es mantindrà estable durant els propers anys:

Gen	Feb	Març	Abr	Maig	Juny	Jul	Ag	Set	Oct	Nov	Des
25	20	25	40	60	80	110	130	90	70	40	30

S'ha de determinar la capacitat de la planta d'envasament i del magatzem annex de producte envasat, que iniciaran l'activitat el proper més de novembre. Els costos anuals actualitzats de la planta i del magatzem creixen linealment amb les capacitats respectives: pel que fa a la planta, l'increment és de 30.000 u. m. per a un augment de capacitat de 10.000 ampolles/mes; quant al magatzem, de 10.000 u. m. per a un augment de capacitat de 10.000 ampolles. El cost de possessió dels estocs és de 100 u. m./mes per a 10.000 ampolles.

La demanda mensual mitjana és 60 i la màxima, 130. Per tant, la capacitat de producció ha d'estar compresa entre aquests dos valors. Si és igual a 60, la producció ha de ser igual a la capacitat els 12 mesos de l'any; de novembre a final d'abril es constituirà un estoc de 180 que permetrà satisfer la demanda dels mesos restants. Si és igual a 130, no caldrà estoc, a costa de tenir capacitat ociosa 11 dels 12 mesos de l'any.

La capacitat òptima es pot obtenir, si més no aproximadament, per enumeració, mitjançant el càlcul, per a diferents valors de la capacitat de producció, de la capacitat d'emmagatzematge necessària i els costos de les capacitats i de la possessió d'estocs.

Tanmateix, resulta més còmode i més precís recórrer a un model de programació matemàtica (suposem, i en aquest cas és raonable fer-ho, que s'ha de complir la condició de satisfer tota la demanda, per la qual cosa és correcte plantejar com a objectiu la minimització de costos):

Variables:

- P Capacitat mensual de producció
- M Capacitat del magatzem
- q_t Producció mensual ($t = 1, \dots, 12$)

s_t Estoc al final del mes t ($t = 1, \dots, 12$)

Model (notem d_t la demanda del mes t):

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } 30.000 \cdot P + 10.000 \cdot M + 100 \cdot \sum_{t=1}^{12} s_t \\ \text{s.a} \quad & s_t = s_{t-1} + q_t - d_t & t = 2, \dots, 12 \\ & s_1 = s_{12} + q_1 - d_1 \\ & q_t \leq P & t = 1, \dots, 12 \\ & s_t \leq M & t = 1, \dots, 12 \\ & s_t, q_t \geq 0 & t = 1, \dots, 12 \end{aligned}$$

Amb el qual obtenim una solució òptima amb un cost total de 3.317.000 u. m., amb $P = 90$, $M = 60$ i:

t	Gen	Feb	Març	Abr	Maig	Juny	Jul	Ag	Set	Oct	Nov	Des
q_t	25	20	25	60	90	90	90	90	90	70	40	30
s_t	0	0	0	20	50	60	40	0	0	0	0	0

Aquest problema il·lustra la necessitat de tenir en compte la compensació entre capacitat de producció i capacitat d’emmagatzemament en la planificació estratègica de la capacitat, que és un problema més complex del que suggereix l’enunciat⁹ (entre altres coses, perquè en aquest se suposa que la demanda, amb les seves fluctuacions estacionals, és estable al llarg del temps). Caldria explorar altres possibilitats, particularment en relació amb l’organització del temps de treball. Per exemple, hores extres en els mesos de demanda més alta, anualització de la jornada (distribuir al llarg de l’any les hores de la jornada anual de manera que hi hagi més hores de producció en els mesos amb demanda alta i menys en els de demanda baixa) o implantació d’un o més torns addicionals en els mesos de demanda alta.

El problema de les aixetes és un clàssic de les matemàtiques de l’ensenyament secundari. Donades n aixetes i el temps que necessita cada una per omplir un dipòsit, es tracta de saber quant de temps cal per omplir el dipòsit si s’obren simultàniament totes les aixetes (amb el supòsit implícit que el cabal d’una aixeta és independent de si les altres estan obertes o tancades). La solució, ben coneguda, és:

$$T = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}}$$

⁹ Cfr.: Benedito, E., Corominas, A., Martínez, C., Mas-Machuca, M. (2016) Single-site strategic capacity planning considering renewal, maintenance, inventory, taxes and cash flow management. *Journal of the Operational Research Society*, 67, 970-981.



A partir d'aquest enunciat bàsic es poden generar diverses variants.

Però a continuació se'n proposa una versió més complexa en què, com a la vida, cal tenir en compte els costos.

FO06.1. Retorn a les aixetes: temps mínim, amb pressupost

S'ha d'omplir, en el menor temps possible, un dipòsit de capacitat K m³. Per fer-ho es compta amb un pressupost de P u. m. i amb la possibilitat de fer ús de n aixetes, que poden proporcionar uns cabals de k_i m³/h amb un cost d'obertura de F_i u. m. i de c_i u. m./m³.

Per formular un model matemàtic per a aquest problema calen les variables següents:

$y_i \in \{0,1\}$ ($i = 1, \dots, n$), igual a 1 si i només si fem ús de l'aixeta i .

$x_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($i = 1, \dots, n$), m³ subministrats per l'aixeta i .

t , temps necessari per omplir el dipòsit.

I podem plantejar el model:

minimitzar t

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^n x_i = K$$

$$\sum_{i=1}^n (F_i \cdot y_i + c_i \cdot x_i) \leq P$$

$$\frac{x_i}{k_i} \leq t \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i \leq K \cdot y_i \quad i = 1, \dots, n$$

Considerem l'exemplar en què els valors associats a les aixetes són:

Aixeta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k_i	5,0	4,7	2,8	7,3	1,5	9,0	3,6	8,1	1,2	2,9	6,7	7,0	8,4	3,1	5,4
F_i	100,0	80,0	60,0	140	35,0	125,0	65,0	140,0	40,0	50,0	135,0	160,0	180,0	65,0	110,0
c_i	1,8	1,9	2,1	2,0	1,7	1,6	1,5	2,2	1,6	1,2	1,4	1,3	1,1	0,9	1,0

La taula següent recull les solucions òptimes per a valors diversos de K i de P .

<i>K</i>	<i>P</i>	Cost	<i>t</i>	A01	A02	A03	A04	A05	A06	A07	A08	A09	A10	A11	A12	A13	A14	A15
100,000	2765,00	1.641,31	1,3	6,5	6,1	3,7	9,5	2,0	11,7	4,7	10,6	1,6	3,8	8,7	9,1	11,0	4,0	7,0
500,000		2.266,55	6,5	32,6	30,6	18,3	47,6	9,8	58,7	23,5	52,8	7,8	18,9	43,7	45,6	54,8	20,2	35,2
818,884		2.765,00	10,7	53,4	50,2	29,9	77,9	16,0	96,1	38,4	86,5	12,8	31,0	71,5	74,7	89,7	33,1	57,7
819,000		2.765,00	10,7	53,4	50,2	29,9	78,0	16,0	96,1	38,4	86,2	12,8	31,0	71,6	74,8	89,7	33,1	57,7
824,221		2.765,00	10,9	54,6	51,3	30,6	79,7	16,4	98,3	39,3	75,3	13,1	31,7	73,1	76,4	91,7	33,8	59,0
824,222		2.732,86	10,9	54,6	51,3	30,6	79,7	16,4	98,3	39,3	88,4	0,0	31,7	73,1	76,4	91,7	33,8	59,0
1.000,000		2.751,03	15,2	75,9	71,3	42,5	110,8	0,0	136,6	54,6	0,0	0,0	44,0	101,7	106,2	127,5	47,0	81,9
1.500,000		2.765,00	34,9	0,0	0,0	0,0	0,0	15,0	314,5	0,0	0,0	0,0	101,3	234,1	244,6	293,5	108,3	188,7
2.000,000		2.765,00	82,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	240,2	0,0	360,2	695,7	256,7	447,2
2.500,000		2.765,00	228,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	554,7	0,0	0,0	0,0	709,5	1235,8
3.000,000		2.765,00	967,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3000,0	0,0
3.000,000	3.000,00	3.000,00	564,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1750,0	1250,0
	3.500,00	3.500,00	176,1	0,0	0,0	0,0	0,0	23,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1479,3	545,9	951,0
	4.000,00	4.000,00	109,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	74,3	316,6	0,0	764,2	917,0	338,4	589,5
	4.500,00	4.479,27	77,7	0,0	0,0	0,0	0,0	116,6	0,0	279,8	0,0	0,0	225,4	520,7	544,0	652,8	240,9	419,7
	5.000,00	4.993,33	58,7	293,5	0,0	0,0	0,0	0,0	528,4	211,4	0,0	0,0	170,3	393,3	411,0	493,2	182,0	317,0
	5.500,00	5.485,75	48,9	244,7	230,0	137,0	0,0	73,4	440,5	176,2	0,0	58,7	141,9	327,9	342,6	411,1	151,7	264,3
	5.522,70	5.485,75	48,9	244,7	230,0	137,0	0,0	73,4	440,5	176,2	0,0	58,7	141,9	327,9	342,6	411,1	151,7	264,3
	5.522,80	5.522,80	48,9	244,7	230,0	0,0	269,6	0,0	440,4	176,2	0,0	0,0	141,9	327,8	342,5	411,0	151,7	264,2
	5.550,00	5.550,00	48,1	240,7	226,3	0,0	313,6	0,0	433,3	173,3	0,0	0,0	139,6	322,6	337,0	404,4	149,2	260,0
	5.600,00	5.600,00	47,1	235,5	221,3	0,0	301,5	70,6	423,8	169,5	0,0	0,0	136,6	315,5	329,7	395,6	146,0	254,3
	6.000,00	6.000,00	41,5	207,4	195,0	0,0	302,8	62,2	373,4	149,3	320,1	0,0	120,3	277,9	290,4	348,5	128,6	224,0
6.500,00	6.174,31	39,1	195,6	183,8	109,5	285,5	58,7	352,0	140,8	316,8	46,9	113,4	262,1	273,8	328,6	121,3	211,2	

Els resultats il·lustren les configuracions que adopta la solució òptima segons la relació entre el pressupost disponible i la capacitat del dipòsit que s’ha d’omplir.

A la meitat superior de la taula es veu com evoluciona la solució òptima a mesura que augmenta la capacitat del dipòsit. Quan el pressupost és folgat, l’estructura de la solució òptima és molt senzilla: obrir totes les aixetes (amb un cost fix de 1.485 u. m.) fins que s’ompli el dipòsit; així s’obté un cabal de 76,7 m³/h, amb un cost de 119,89 u. m./h, que es pot mantenir durant $(2.765 - 1.485) / 119,89 = 10,6765$ h, amb què es pot omplir un dipòsit de capacitat no superior a $10,6765 \cdot 76,7 = 818,8840$ m³; per valors més grans de la capacitat, fins a 824,221, se segueixen assumint els costos fixos de totes les aixetes, però es redueix l’aportació total de l’aixeta 8, que és la de preu més alt per m³; per a una capacitat de 824,222 es prescindeix totalment de l’aixeta 9 i l’estalvi del seu cost fix permet una reducció del cost total, en relació amb el corresponent a la capacitat 824,221; a mesura que augmenta la capacitat, a la solució òptima hi va havent menys aixetes actives, fins que per a $K = 3.000$ només s’obre l’aixeta 14. Amb el pressupost de 2.765 u. m. no és possible omplir dipòsits de capacitat superior a 3.000 m³.



A la meitat inferior de la taula, en canvi, es veu com la solució òptima, per a una capacitat donada $K = 3.000$, va incorporant noves aixetes a mesura que augmenta el pressupost, el qual no sempre s'esgota. Amb un pressupost de $(3.000 / 76,7) \cdot 119,89 + 1.485 = 6.174,31$ es retroba l'estructura de fer servir ininterrompudament totes les aixetes fins que s'omple el dipòsit; òbviament, pressupostos superiors no permeten reduir el temps necessari per fer-ho.

A les dues parts de la taula es pot veure que, tant si augmenta la capacitat amb un pressupost fix com si augmenta el pressupost per a una capacitat donada, es pot donar el cas que una aixeta que "surts" de la solució hi torni a entrar i viceversa.

FO06.2. Retorn a les aixetes: cost mínim

En el mateix escenari (i també amb les mateixes dades sobre les aixetes) es poden plantejar altres variants, com ara minimitzar el cost d'omplir un dipòsit d'una capacitat donada, sense o amb restricció temporal.

La modificació del model de FO06.1 és immediata (ara, t passa de ser una variable a ser una dada; si no hi ha limitació de temps se'n pot prescindir, i també, és clar, de les restriccions en què intervé):

$$\text{minimitzar } \sum_{i=1}^n (F_i \cdot y_i + c_i \cdot x_i)$$

$$\text{s.a } \sum_{i=1}^n x_i = K$$

$$\frac{x_i}{k_i} \leq t \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i \leq K \cdot y_i \quad i = 1, \dots, n$$

K	t	Cost	A01	A02	A03	A04	A05	A06	A07	A08	A09	A10	A11	A12	A13	A14	A15
3.000,000	968	2.765,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.000	0
	950	2.831,50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	55	0	0	0	2.945	0
	900	2.878,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	210	0	0	0	2.790	0
	800	2.927,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.480	520
	700	2.958,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.170	830
	600	2.989,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.860	1.140
	500	3.020,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.550	1.450
	400	3.051,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.240	1.760
	300	3.222,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	450	0	0	0	930	1.620
	200	3.423,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1300	620	1.080
	100	4.111,00	0	0	0	0	0	0	320	0	0	290	0	700	840	310	540
	39,11	6.174,31	195,6	183,8	109,5	285,5	58,7	352,0	140,8	316,8	46,9	113,4	262,1	273,8	328,6	121,3	211,2

I la taula anterior mostra les solucions òptimes per a diferents valors del temps màxim acceptable.

És prou conegut que quan un recurs s'utilitza en combinació amb d'altres sol tenir rendiments marginals monòtonament decreixents (aquests rendiments poden ser constants per a quantitats petites del recurs, però estrictament decreixents a partir d'un llindar determinat). És a dir, fixades les quantitats dels altres recursos, cada unitat que s'afegeix del recurs en qüestió dona lloc a un increment del resultat menor (o igual) que l'obtingut amb la unitat anterior.

Aquest comportament és el més habitual, però hi ha excepcions. De vegades, un recurs no comença a ser efectiu fins que se'n disposa d'una quantitat donada, de manera que el rendiment marginal pot començar sent molt baix o fins i tot nul i augmentar bruscament en assolir-se l'esmentada quantitat crítica.

En qualsevol cas, molt sovint la quantitat d'output que es pot obtenir amb una combinació de recursos és una funció no lineal de les quantitats disponibles d'aquests, la qual cosa dificulta l'optimització del procés.

Els dos problemes següents il·lustren aquestes situacions. Es tracta de dues variacions del clàssic problema d'assignació de màquines, en contextos determinista i aleatori, respectivament. L'assignació de màquines és un tema de llarga tradició en el camp de l'organització industrial que, per raons que no sabem, ha anat desapareixent progressivament dels llibres de text i dels programes de moltes de les assignatures en què encaixaria. Una llàstima, perquè l'estudi dels problemes d'assignació de màquines ajuda a comprendre aspectes poc intuïtius dels sistemes productius.

Les dificultats dels problemes d'assignació de màquines provenen principalment del fet que les màquines mai no funcionen contínuament, perquè s'han de parar per preparar i tancar un cicle productiu, o fins i tot en moments diversos del cicle productiu, o perquè hi ha incidències aleatòries (una tremuja d'alimentació que s'embussa, un fil que es trenca, una ampolla que es desvia de la posició correcta en el procés d'envasament d'un líquid...).

El primer d'aquests dos casos sol tenir un caràcter determinista: els temps de les diverses fases del cicle productiu (tant les que estan a càrrec de la màquina com de les que ha de fer la persona o robot –que al cap i a la fi també és una màquina– que se n'ocupa) tenen valors fixos o amb una dispersió negligible.

El segon té caràcter aleatori. El comportament del sistema depèn de les lleis que regeixen l'aparició de les incidències i els temps per resoldre-les, i de quantes màquines s'ocupa la persona encarregada de resoldre'n les incidències.

Tant en el cas determinista com en l'aleatori, la clau per preveure el comportament del sistema, en règim permanent, és el càlcul de l'esperança matemàtica del nombre de màquines en funcionament (sigui A). És a dir, es tracta de determinar quantes màquines perfectes (de funcionament ininterromput) tindria



un sistema amb una capacitat de producció per unitat de temps igual a l'esperança matemàtica de la producció per unitat de temps del sistema real, format per màquines diguem-ne imperfectes (perquè requereixen preparacions, etc., o perquè generen incidències). En el cas determinista, el càlcul de A és molt fàcil si el cicle productiu consta d'una sola fase amb la màquina parada i una amb la màquina en funcionament; però si l'estructura del cicle és més complexa, el càlcul pot arribar a ser difícil.

FO07.1. Assignació de màquines: deterministes

S'ha de dissenyar el sistema productiu de fabricació d'una peça. El sistema ha de tenir una capacitat nominal no inferior a Q peces/hora i ha de constar de cel·les en cada una de les quals hi haurà unes màquines servides per un robot que hi carregarà i descarregarà les peces. El temps que necessita el robot per atendre una màquina és de 20 s (durant els quals la màquina està aturada) i el temps que li cal a una màquina per fabricar una peça és de 50 s. El cost per hora d'un robot és de 50 u.m. i el d'una màquina, 100.

Es tracta de determinar quantes cel·les de cada tipus calen (en el benentès que el tipus de cel·la es defineix pel nombre de màquines que conté i que han de ser servides pel robot) per assolir la capacitat de producció desitjada al mínim cost.

En primer lloc, cal determinar les capacitats de producció i els costos corresponents a cel·les amb n màquines, que, com és fàcil comprovar, prenen els valors que figuren a la taula:

n	Cost	Capacitat de producció (peces/hora)
1	150	$360/7$
2	250	$720/7$
3	350	$1.080/7$
≥ 4	$450 (n = 4)$	180

Si notem x_n ($n = 1, \dots, 4$) el nombre enter no negatiu de cel·les amb n màquines, podem resoldre el problema mitjançant el programa lineal enter següent:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } 150 \cdot x_1 + 250 \cdot x_2 + 350 \cdot x_3 + 450 \cdot x_4 \\ \text{s.a. } & \frac{360}{7} \cdot x_1 + \frac{720}{7} \cdot x_2 + \frac{1.080}{7} \cdot x_3 + 180 \cdot x_4 \geq Q \\ & x_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad n = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

En ser les variables enteres (i no negatives), no podem fer ús de KKT. El programa matemàtic s'ha de resoldre numèricament per al valor pertinent de Q . A

la taula següent es mostren les solucions òptimes obtingudes i algunes de les seves característiques per a tres valors de Q :

Q	x_1	x_2	x_3	x_4	Capacitat (peces/h)	Cost total	Cost per peça	N. robots	N. màquines
900	0	0	6	0	925,71	2.100	2,33	6	18
1.000	0	1	6	0	1.028,57	2.350	2,35	7	20
1.100	0	0	6	1	1.105,74	2.550	2,32	7	22

Com es pot veure, la productivitat de cada un dels dos recursos depèn de la disponibilitat de l'altra i, per tant, la capacitat del sistema no és estrictament proporcional a la quantitat de cap dels dos recursos, considerats separatament.

S'ha de tenir en compte que la capacitat nominal, corresponent al supòsit de màquines i robots que no s'avarien ni presenten cap mena d'incidència, i no necessiten manteniment, és més gran que la capacitat efectiva. Si es tracta de dissenyar un sistema que ha de subministrar D peces/hora, $Q (> D)$ s'ha d'estimar tenint en compte els factors que determinen la capacitat efectiva per a una capacitat nominal donada.

FO07.2. Assignació de màquines: aleatòries

Grancasa té una planta d'envasament de fruita seca, en un format únic per a totes les varietats i combinacions.

La planta té 18 màquines automàtiques d'envasament, idèntiques, i una plantilla de 3 persones, que s'encarreguen de resoldre les incidències.

Les màquines omplen i tanquen un envàs en 6 segons, però generen incidències segons una llei de Poisson d'esperança matemàtica 3 h^{-1} . Resoldre una incidència requereix 216 segons per part de la persona que s'encarrega de la màquina.

El cost mensual d'una màquina és de 2.000 u. m. i el d'una persona de la plantilla, 12.800 u. m. El mes té 160 hores laborables. El cost de l'envàs, el contingut i l'energia consumida en el procés d'envasament és de 0,6 u. m. per envàs ple i tancat.

Quina producció mensual es pot assolir amb aquests recursos?

Quin és el cost per a Grancasa d'un envàs ple i tancat?

Quant val la càrrega dels operaris?

Donat el nombre de 18 màquines, quantes persones haurien de compondre la plantilla perquè el cost unitari fos mínim?



En el cas aleatori, com el de l'enunciat, el càlcul, d'entrada, sempre és més o menys difícil. Si l'aparició d'incidències i els temps per resoldre-les segueixen lleis exponencials, el càlcul de A , en règim permanent, es pot fer, tant si és una sola persona com si en són més les que s'ocupen de les N màquines, mitjançant les fórmules per al càlcul de L (esperança matemàtica del nombre d'unitats en el sistema, que en aquest correspon al nombre de màquines avariades) que es troben en els textos, fins i tot introductoris, a la teoria de cues. Aleshores:

$$A(N) = N - L$$

Segueixen la llei exponencial les aparicions d'incidències en sistemes sense memòria, és a dir, en què la probabilitat d'aparició d'una incidència és independent del temps que el procés ha funcionat sense incidències. Per tant, en molts casos és raonable suposar que l'aparició d'incidències segueix una llei exponencial, tot i que la hipòtesis sempre s'ha de contrastar estadísticament. Però la llei exponencial és una llei molt dispersa i en què els valors més alts de la densitat de probabilitat corresponen als valors de la variable pròxims a zero; és poc versemblant, doncs, que els temps de resolució de les incidències s'ajustin a una llei exponencial.

Per al cas d'incidències exponencials, temps constants i un sol operari a càrrec de les N màquines, H. Ashcroft¹⁰ va desenvolupar un model amb el qual va calcular els valors de $A(N)$, coneguts en aquest cas com a nombres d'Ashcroft, per a diversos valors de N i d'un paràmetre $\rho = \lambda \cdot \tau$, on λ és el paràmetre que defineix la llei exponencial de les incidències, igual a l'esperança matemàtica del nombre d'incidències per unitat de temps, i τ el temps que cal per resoldre una avaria, suposat constant. Per tant, ρ és l'esperança matemàtica del temps que haurà de dedicar a resoldre incidències, per cada unitat de temps de funcionament de les màquines, la persona que se n'encarrega; aleshores, la càrrega de treball de la persona –és a dir, la proporció de temps que està ocupada– és igual a $\lambda \cdot A(N) \cdot \tau = \rho \cdot A(N)$, i com que aquesta proporció no pot ser ≥ 1 ¹¹ es compleix la condició $A(N) < \rho^{-1}$. El càlcul dels nombres d'Ashcroft no es pot fer amb una simple fórmula i, d'altra banda, no hem trobat un programa disponible que incorpori l'algorisme corresponent; si se n'ha de fer ús, cal elaborar un programa *ad hoc* o bé consultar les taules amb els nombres d'Ashcroft que alguns llibres de text inclouen (a continuació podem veure els nombres d'Ashcroft per a $N = 1, \dots, 10$ i per a $\rho = 0,00, 0,01, 0,02, \dots, 0,20$; per a valors intermedis de ρ es pot interpolar linealment sense error considerable).¹²

¹⁰ Ashcroft, H. (1950) The Productivity of Several Machines Under the Care of One Operator. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 12, 1, 145-151.

¹¹ Si qui s'ocupa de les màquines és una persona, ha de ser < 1 , perquè una persona no pot estar ocupada el 100 % del temps, i si és un robot, també, perquè l'exponencialitat de les incidències, unida a una ocupació del 100 %, implicaria cues i temps d'espera per a la resolució d'avaries inacceptables (matemàticament, tendents a infinit).

¹² Una generalització del model d'Ashcroft (incidències exponencials i temps de servei aleatoris, idènticament i independentment distribuïts segons una funció de densitat qualsevol) a: Corominas,

ρ	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$	$N=9$	$N=10$
0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
0,01	0,99	1,98	2,97	3,96	4,95	5,94	6,93	7,92	8,91	9,90
0,02	0,98	1,96	2,94	3,92	4,90	5,88	6,85	7,83	8,81	9,78
0,03	0,97	1,94	2,91	3,88	4,84	5,81	6,77	7,74	8,70	9,66
0,04	0,96	1,92	2,88	3,84	4,79	5,74	6,69	7,64	8,58	9,52
0,05	0,95	1,90	2,85	3,79	4,74	5,67	6,61	7,53	8,45	9,37
0,06	0,94	1,88	2,82	3,75	4,68	5,60	6,51	7,42	8,31	9,19
0,07	0,93	1,86	2,79	3,71	4,62	5,52	6,42	7,29	8,15	8,99
0,08	0,93	1,85	2,76	3,67	4,56	5,44	6,31	7,16	7,98	8,76
0,09	0,92	1,83	2,73	3,62	4,50	5,36	6,20	7,01	7,78	8,50
0,10	0,91	1,81	2,70	3,58	4,44	5,28	6,08	6,85	7,57	8,21
0,11	0,90	1,79	2,67	3,53	4,38	5,19	5,96	6,68	7,33	7,89
0,12	0,89	1,77	2,64	3,49	4,31	5,10	5,83	6,50	7,08	7,55
0,13	0,88	1,76	2,61	3,44	4,24	5,00	5,69	6,31	6,81	7,19
0,14	0,88	1,74	2,58	3,40	4,18	4,90	5,55	6,10	6,53	6,83
0,15	0,87	1,72	2,55	3,35	4,11	4,80	5,40	5,90	6,25	6,48
0,16	0,86	1,71	2,52	3,31	4,04	4,70	5,25	5,68	5,97	6,14
0,17	0,85	1,69	2,50	3,26	3,97	4,59	5,10	5,47	5,70	5,82
0,18	0,85	1,67	2,48	3,22	3,90	4,48	4,94	5,26	5,44	5,52
0,19	0,84	1,66	2,44	3,17	3,83	4,37	4,79	5,05	5,19	5,24
0,20	0,83	1,64	2,41	3,12	3,75	4,26	4,63	4,65	4,95	4,99

El model d'Ashcroft, com tots els models de teoria de cues, ajuda a comprendre el funcionament de sistemes en què intervé l'atzar. A la taula es pot observar que el nombre d'Ashcroft (és a dir, l'esperança matemàtica del nombre de màquines en funcionament) creix de manera pràcticament proporcional al nombre de màquines per a valors baixos de ρ (estrictament proporcional, fins a les centèsimes i per als valors de N que figuren a la taula, per a $\rho = 0,01$), i, en canvi, per a valors alts, el rendiment marginal d'una màquina disminueix sensiblement a mesura que augmenta N (per a $\rho = 0,20$, es passa de 0,83 a 1,64 des de $N = 1$ a $N = 2$ i només de 4,95 a 4,99 des de $N = 9$ a $N = 10$; de fet, el nombre d'Ashcroft tendeix a ρ^{-1} quan N tendeix a infinit i els valors de la columna corresponent a $N = 10$ s'aproximen al límit a mesura que augmenta ρ . Si la càrrega de la persona que s'ocupa de les màquines és molt alta, l'esperança matemàtica

A. (1988) Cálculo del número medio de máquinas activas en un grupo de un operario y N máquinas, con incidencias poissonianas y tiempos de servicio aleatorios. *Qüestió*, 12, 2, 251-258.

<http://www.raco.cat/index.php/Questiio/article/view/26526/26360>



del nombre de màquines aturades per incidències és una proporció molt alta del nombre de màquines total.

Dit tot això, abordem la resolució del problema enunciat a partir de les premisses següents, que permeten aplicar els nombres d'Ashcroft:

- Es considera el comportament del sistema en règim permanent, al qual es pot considerar que tendirà si funciona prou temps. Ara bé, com que el taller només funciona 160 hores al mes (per tant, segurament amb un sol torn de treball), l'aproximació al règim permanent serà més acurada si al final del torn de treball s'aturen les màquines que estan funcionant i s'interrompen les reparacions que estiguin en curs; d'aquesta manera (a diferència, per exemple, del cas que al final del torn es reparen totes les màquines amb incidència i es deixen totes en disposició de funcionar a l'inici del torn del dia laborable següent), el sistema es comportaria com si no hi hagués un temps d'inactivitat entre torn i torn.
- La llei d'aparició d'incidències és exponencial. L'enunciat diu que el nombre d'incidències per unitat de temps de funcionament d'una màquina segueix una llei de Poisson i això és compatible, però no és equivalent, amb el caràcter exponencial del temps de funcionament fins que hi ha avaria. En un procés, dit poissonià o de Poisson, que en cada petit interval de temps, dt , hi ha una probabilitat λdt que es produeixi una incidència, el temps de funcionament fins que hi ha una incidència segueix una llei exponencial i el nombre d'incidències per unitat de temps de funcionament, una llei de Poisson. És a dir, temps exponencial de funcionament fins a incidència implica nombre d'incidències per unitat de temps de funcionament Poisson, però la recíproca no és certa (es pot donar el cas que en un procés el nombre d'unitats per unitat de temps sigui Poisson encara que el temps corresponent a la generació d'una unitat no sigui exponencial, o fins i tot que el concepte de temps per generar una incidència, una avaria o un defecte no tingui sentit, perquè no hi ha un procés temporal, com quan es tracta del nombre de defectes que presenta una unitat d'un producte). Per tant, assumim incidències exponencials i temps de resolució d'incidències, constants, com en el model d'Ashcroft.
- De cada grup de màquines s'ocupa una sola persona. Aquest supòsit, amb els dos anteriors, justifica l'ús del model d'Ashcroft. Ara bé, això no significa que la configuració en què cada persona s'ocupa de les, diguem-ne, seves màquines sigui la millor possible. Si les màquines són idèntiques (per tant, no hi ha persones especialitzades en un o altre tipus de màquines) i els temps de desplaçament són negligibles, és millor que el conjunt de persones de la plantilla s'ocupi del conjunt de totes les màquines; si els temps de desplaçament són significatius, pot ser millor la configuració amb tants grups de màquines com persones a la plantilla, o configuracions, diguem-ne, intermèdies (per exemple, 2 persones s'ocupen d'un grup de màquines i 1 persona, d'un altre). Però amb la informació que ens dona l'enunciat i en el marc del model d'Ashcroft, no podem fer un supòsit diferent.

Amb les dades de l'enunciat tenim:

$$\rho = \frac{216}{3.600} \cdot 3 = 0,18$$

La consulta de la taula amb els nombres d'Ashcroft permet deduir que en una solució òptima cap persona, si n'hi ha més d'una, s'haurà de fer càrrec de més de 9 màquines, ja que en total n'hi ha 18, i que $2 \cdot A(9) > A(8) + A(10)$. A partir d'aquesta observació, si el nombre total de màquines fos qualsevol, podríem plantejar un programa matemàtic com el del problema FO07.1. En aquest cas no cal, perquè el nombre de màquines (18) és divisible pel nombre de persones (3), i, donat que els rendiments marginals de les màquines són decreixents, el millor és dividir-les en 3 grups d'igual nombre.

El nombre de màquines equivalent és, aleshores:

$$3 \cdot A(6) = 3 \cdot 4,48 = 13,44$$

Amb una capacitat de producció mensual igual a:

$$13,44 \cdot \frac{3.600}{6} \cdot 160 = 1.290.240 \text{ unitats}$$

Amb un cost per unitat igual a:

$$0,6 + \frac{18 \cdot 2.000 + 3 \cdot 12.800}{1.290.240} = 0,657664 \text{ u. m.}$$

I una càrrega de treball de cada persona igual a:

$$4,48 \cdot 0,18 = 0,8064$$

Vegem ara si amb un nombre diferent de persones a la plantilla es podria reduir el cost unitari. Amb una sola persona, que estaria pròxima a la saturació, i amb una capacitat de producció molt baixa (aproximadament, $600 \cdot 160 / 0,18 = 533.333$), el cost seria 0,691500. Amb dues persones, la capacitat de producció és $600 \cdot 160 \cdot 2 \cdot 5,44 = 1.044.480$ (5,44 és $A(9)$ per a $\rho = 0,18$) i el cost unitari és 0,658977, més gran que el corresponent a tres persones. Amb quatre, el millor és formar dos grups de 4 màquines i dos de 5, de la qual cosa resulta un cost unitari 0,663787; el cost unitari és encara més gran per a valors superiors del nombre de persones a la plantilla. Per tant, la plantilla òptima, per al criteri de cost unitari mínim, és la formada per tres persones.

Es tractava de calcular la capacitat de producció i el cost unitari corresponents a una configuració donada. Altra cosa és dissenyar el sistema perquè produeixi una quantitat donada (1.000.000 d'unitats mensuals, posem per cas) a cost mínim.



En aquest cas, és aplicable el programa matemàtic plantejat en el problema FO07.1 i que ja hem esmentat abans.

Siguin x_i ($i = 1, \dots, 10$), enteres no negatives, els nombres de grups de i màquines ateses per una persona. El cost i la capacitat de producció mensual de cada grup són iguals, respectivament i per a $i = 1, \dots, 10$, a:

$$12.800 + 2.000 \cdot i$$

$$A(i) \cdot \frac{3.600}{6} \cdot 160 = 96.000 \cdot A(i),$$

on $A(i)$ són els nombres d'Ashcroft corresponents a $\rho = 0,18$.

Per tant, podem plantejar:

$$\text{minimitzar } \sum_{i=1}^{10} (12.800 + 2.000 \cdot i) \cdot x_i$$

$$\text{s.a } 96.000 \cdot \sum_{i=1}^{10} A(i) \cdot x_i \geq 1.000.000$$

Amb què s'obté la solució de 2 grups de 8 màquines, amb un cost igual a 57.600 u. m./mes (cost unitari de 0,6576 u. m.), una capacitat de producció mensual d'1.009.920 unitats i una càrrega de $5,26 \cdot 0,18 = 0,9468$. És una càrrega molt alta (que resulta de no haver restringit la càrrega de treball en el model i del fet que el cost d'una màquina és molt inferior al d'una persona) que té com a conseqüència que la proporció mitjana de temps que les màquines no funcionen és $(8-5,26)/8 = 0,3425$. Si s'imposa la condició que la càrrega de treball no superi el 90 % només són admissibles els grups amb no més de 7 màquines. Amb aquesta condició obtindrem la solució amb 1 grup de 3 màquines, 1 de 4 i 1 de 7 (14 màquines en total, 2 menys que en la solució anterior i 3 persones, 1 més), amb un cost de 66.400 u. m./mes (un 15,28 % superior al de la solució anterior), una capacitat d'1.021.440 unitats/mes i un cost unitari de 0,6664 u. m. per a una producció d'1.000.000 d'unitats. De tota manera, aquesta solució és òptima pel que fa al cost entre totes les que assoleixen la capacitat de producció requerida, però no és la que s'aplicaria a la pràctica, perquè, entre les de cost òptim, no és la que millor equilibra les càrregues de treball ni proporciona la major capacitat de producció; en maximitzar la capacitat de producció amb la restricció que el cost no superi les 66.400 u. m./mes obtenim 1 grup de 4 màquines i 2 de 5, amb una capacitat de producció igual a 1.057.920 unitats/mes.

Pot quedar el dubte de si no podria formar part d'una solució òptima un grup de més de 10 màquines. Una manera de resoldre'l és considerar un grup fictici amb el cost corresponent a 11 màquines i un nombre d'Ashcroft igual a $\rho^{-1} = 1/0,18 = 5,5$, és a dir, el valor límit del nombre quan el nombre de màquines tendeix a infinit. Ampliat el model amb aquest grup, les solucions no es modifiquen.

El fet que les càrregues de treball del personal siguin heterogènies (pel fet de fer-se càrrec d'un nombre diferent de màquines) implica un problema de gestió (potser el personal hauria de rotar entre els diversos grups de màquines). Càrregues molt baixes fan possible que el personal assumeixi altres tasques, en el ben entès que aquestes s'han d'interrompre en el moment que aparegui una incidència en una màquina (altrament, els supòsits en què es basa el càlcul del nombre d'Ashcroft no es compleixen).

Una forma alternativa d'abordar la resolució del problema és emprar la simulació discreta per esdeveniments que, a més, permet tractar supòsits diferents dels corresponents al model d'Ashcroft. Per fer la simulació es pot utilitzar programari especialitzat (per exemple, Witness, Arena, SAS o Simul8), o bé desenvolupar-ne un en algun llenguatge de programació com ara Python, C++ o Java. Els principals avantatges de desenvolupar un programa informàtic per fer la simulació, respecte d'utilitzar un programa especialitzat, són la flexibilitat i el cost baix del programari a utilitzar. En canvi, el principal inconvenient és l'esforç de desenvolupament. Nosaltres hem optat per fer un programa en Python per implementar un model de simulació específic, ja que l'esforç de programació és baix en tractar-se d'un sistema relativament senzill. El elements principals del model són els descrits a continuació:

- Variables d'estat: nombre de màquines avariades a cada grup de màquines, nombre d'operaris lliures per atendre cada grup de màquines.
- Esdeveniments: fi de reparació d'una màquina, avaria d'una màquina, fi de la jornada.
- Comptadors estadístics: unitats produïdes, nombre de dies.

Els supòsits de l'execució són que el sistema està en règim permanent, que cada persona atén un únic grup de màquines, que la llei d'aparició d'incidències és exponencial i el temps de reparació, constant.

En primer lloc, vàrem simular el sistema amb un únic grup de màquines, amb un nombre de màquines des de 1 a 10, ateses per una única persona. Com es pot veure, els supòsits de la simulació són els mateixos que aquells en què es basen els nombres d'Ashcroft. D'aquesta manera, podem comparar els resultats obtinguts per cada procediment. Per cada valor del nombre de màquines vàrem fer 10.000 simulacions de 6 dies de 8 hores laborables, i consideràrem com a temps de *warm-up* (temps necessari perquè el comportament del sistema s'aproximi al del règim permanent) els 5 primers. Per tant, amb cada simulació vàrem obtenir el nombre d'unitats produïdes en un dia. Els resultats es mostren a la taula de la pàgina següent.

A la taula es pot observar que els valors del nombre de màquines equivalent coincideixen pràcticament amb els nombres d'Ashcroft per a $\rho = 0,18$. El resultat de la simulació ens permet estimar la desviació típica de les unitats produïdes



durant un dia (tercera columna) i, per tant, la dispersió en les quantitats produïdes en cada cas.

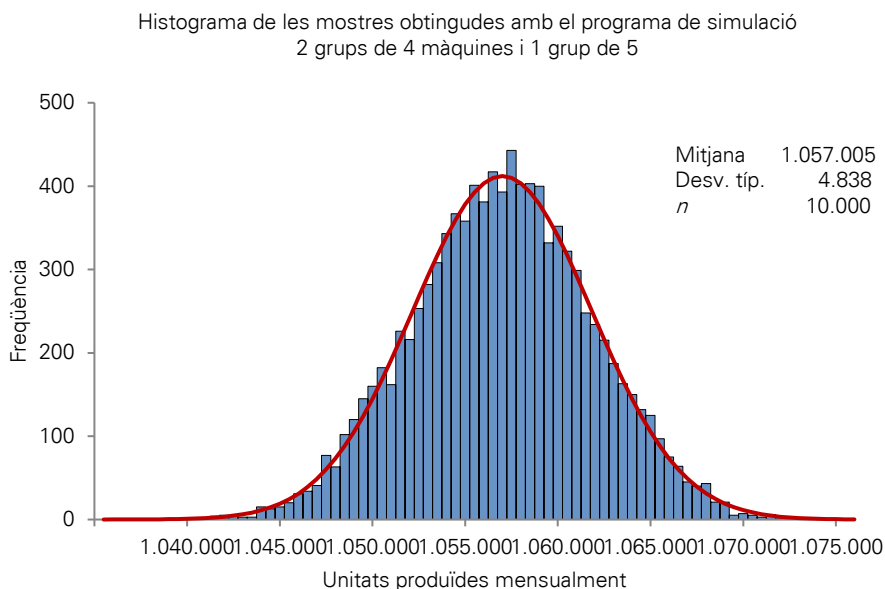
Nombre de màquines	Mitjana de la producció diària	Desviació típica unitats diàries	Nombre de màquines equivalent (nombre d'Ashcroft)	Estimació de la capacitat de producció mensual (20 dies)	Estimació de la desviació típica, unitats mensuals
1	4.067	138	0,85 (0,85)	81.345	618
2	8.033	225	1,67 (1,67)	160.652	1.005
3	11.845	336	2,47 (2,48)	236.906	1.501
4	15.435	473	3,22 (3,22)	308.697	2.116
5	18.706	675	3,90 (3,90)	374.118	3.017
6	21.515	948	4,48 (4,48)	430.304	4.241
7	23.710	1285	4,94 (4,94)	474.196	5.747
8	25.243	1633	5,26 (5,26)	504.862	7.302
9	26.150	1962	5,45 (5,44)	522.995	8.776
10	26.488	2147	5,52 (5,52)	529.768	9.603

A partir del resultat de les simulacions hem estimat la mitjana i la desviació típica de les unitats produïdes durant 20 dies (cinquena i sisena columna, respectivament), mitjançant les expressions següents, amb $n = 20$:

$$\bar{x}_n = n \cdot \bar{x}_1, \quad s_n = \sqrt{n} \cdot s_1$$

On \bar{x}_n i s_n són, respectivament, els estimadors de la mitjana i la desviació típica de les unitats produïdes en n dies. Observem que amb aquests càlculs estimen la mitjana i desviació típica de la producció mensual (considerant un mes de 20 dies) en el supòsit que la producció d'un dia és estadísticament independent de la dels altres dies. A partir del resultat de les simulacions també podem estimar la mitjana i la desviació típica de les unitats produïdes durant 20 dies, per a configuracions del sistema que consisteixen en diversos grups de màquines atesos per una persona cada un. Per tant, podem analitzar la capacitat del sistema amb 14 màquines distribuïdes en 3 grups, un amb 4 màquines i els altres dos amb 5, que hem obtingut, mitjançant els nombres d'Ashcroft, com a solució òptima d'un sistema amb capacitat no inferior a 1.000.000 d'unitats mensuals i amb càrregues de treball no superiors al 90 %. Segons els nombres d'Ashcroft, la seva capacitat mitjana seria d'1.057.920 bosses/mes, i l'estimació a partir dels resultats de la simulació és un valor molt pròxim (1.056.933). La simulació ens permet estimar també, amb l'expressió $\sqrt{20 \cdot (473^2 + 2 \cdot 675^2)}$, la desviació típica de la producció mensual (4.764 unitats/mes), sempre amb el supòsit d'independència entre els valors de la producció diària. Com que, de fet, no es compleix, vàrem simular també el comportament del sistema al llarg d'un mes. Concretament, vàrem fer 10.000 simulacions de 25 dies de 8 hores, i considerarem com

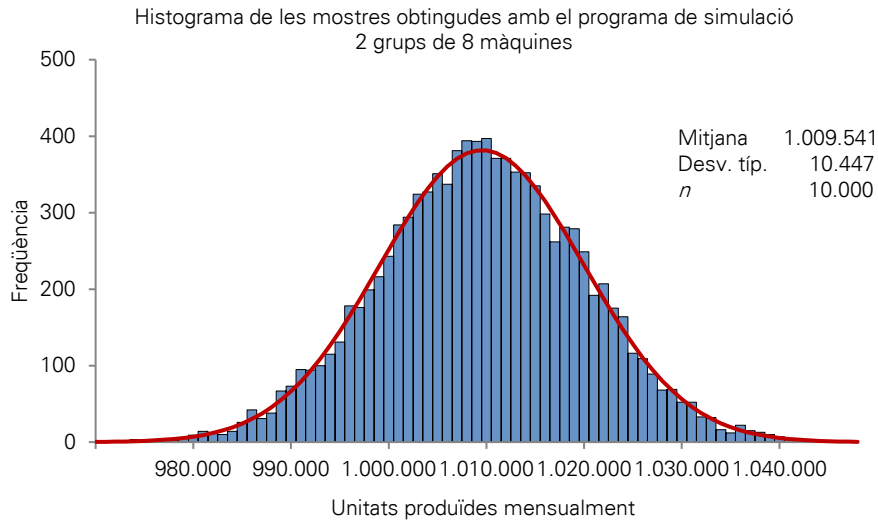
a temps de *warm-up* els 5 primers. Les estimacions de l'esperança matemàtica del nombre d'unitats produïdes mensualment i de la seva desviació típica resultaren ser, respectivament, 1.057.005 i 4.838, molt pròximes a les indicades anteriorment. El gràfic següent és l'histograma dels valors obtinguts en les simulacions. Es pot observar que el nombre d'unitats produïdes mensualment en cap cas ha estat inferior a 1.000.000.



La corba vermella és la funció de densitat de probabilitat d'una llei normal d'esperança matemàtica i desviació típica corresponents a les de la mostra.

També hem simulat la producció mensual d'un sistema amb 2 grups de 8 màquines cadascun i hem obtingut uns valors d'1.009.541 i 10.447, respectivament, per a les estimacions de l'esperança matemàtica i de la desviació típica de la producció mensual. En aquest cas, el nombre d'unitats produïdes ha estat inferior a 1.000.000 en el 17,8 % de les mostres obtingudes. Per tant, tot i que per a aquesta configuració l'esperança matemàtica de la producció mensual és superior a la requerida, implica un risc molt significatiu de no assolir-la, a causa de l'aleatorietat pròpia del sistema considerat. El gràfic següent és l'histograma dels valors obtinguts en les simulacions.

Aquest exemple il·lustra el fet obvi, però potser no sempre tingut prou en compte, que, en general, és insuficient considerar únicament les esperances matemàtiques de les variables aleatòries, ja que la dispersió més o menys gran els és inherent.



La corba vermella és la funció de densitat de probabilitat d'una llei normal d'esperança matemàtica i desviació típica corresponents a les de la mostra.

Com hem indicat anteriorment, el programa de simulació també permet estudiar el funcionament del sistema amb configuracions que no s'ajusten als supòsits d'Ashcroft. Així, per exemple, podem analitzar el comportament de sistemes en què una persona pot atendre més d'un grup de màquines o en què un grup de màquines pot ser atès per més d'una persona. El cas extrem és aquell en què totes les persones poden atendre qualsevol màquina.

Hem simulat un sistema amb 14 màquines i 3 persones que se n'ocupen conjuntament, en el supòsit que els temps de desplaçament son negligibles. Igual que en els casos anteriors, hem simulat 10.000 vegades el funcionament del sistema durant 25 dies, amb un temps de *warm-up* de 5 dies. Les estimacions de l'esperança matemàtica i de la desviació típica han resultat ser, respectivament, 1.250.458 i 4.934. La capacitat mitjana és més d'un 18 % superior a la corresponent a les 14 màquines distribuïdes en 1 grup de 4 i 2 de 5.

Com en aquest exemple, en general agrupar recursos és millor, pel que fa al funcionament del sistema, que segregar-los i que la polivalència és millor que l'especialització. Però cal tenir en compte els costos de l'agrupació (en el nostre cas seria l'augment dels temps de desplaçament) i de la polivalència.

Fins ara hem vist com es pot calcular la capacitat de producció d'un sistema donat, dissenyar un sistema que assoleixi una capacitat de producció donada al mínim cost i dissenyar un sistema que assoleixi la màxima capacitat de producció sense ultrapassar un cost donat.

L'enunciat següent demana el dimensionament òptim de la plantilla en cas que la demanda augmenti considerablement i no sigui possible adquirir més màquines, la qual cosa cal interpretar-la com que el mercat absorbirà qualsevol quantitat que es pugui produir amb les 18 màquines disponibles en aquest cas. Per tant, l'objectiu no és dissenyar el sistema de cost mínim, sinó el que maximitzi la diferència entre els ingressos per la venda del producte i els costos per obtenir-lo.¹³

FO07.3. Assignació de màquines: maximitzar el marge econòmic

Com a conseqüència d'una campanya publicitària per impulsar el consum de fruita seca, la demanda dels productes de Grancasa experimenta un augment considerable. A curt termini no és possible adquirir més màquines, però sí ampliar la plantilla. El preu a què Grancasa ven el producte a les distribuïdores és 1,00 u. m.

Quantes persones haurien de compondre la plantilla en aquest supòsit?

Les modificacions en el model són òbvies: la funció objectiu és la diferència entre ingressos per vendes i costos de producció (inclosos els corresponents a les màquines i a les persones), amb la restricció que el nombre de màquines no pot ser superior a 18.

El resultat és un sistema format per 2 grups amb 3 màquines i 3 grups amb 4 (per tant, amb una plantilla de 5 persones), amb una producció total d'1.403.520 unitats/mes, un marge econòmic de 461.408 u. m./mes i un cost unitari de 0,6712 u. m.

És clar que amb petits canvis en el model es poden tractar altres situacions, com ara si s'ha de produir una quantitat donada a cost mínim, amb un nombre de màquines fix o bé si el nombre de persones és fix, o si el nombre de màquines o el de persones tenen fites superiors.

FO08. Molta roba i poc sabó

Es tracta de determinar les màquines rentadores-assecadores que cal adquirir per equipar una nova planta de bugaderia industrial que ha de processar no menys de 20.000 kg/dia de roba, i que està previst que funcioni 16 hores diàries tots els dies de l'any, per a la qual cosa s'establirà un sistema de torns de treball.

¹³ Una discussió sobre la diversitat d'objectius en els problemes d'assignació de màquines, extrapolable a altres problemes, la trobem a: Corominas, A. (1990) What must we optimize? *Production and Inventory Management Journal*, 32, 85.



Els costos dels detergents, suavitzants i desinfectants, així com els laborals i els de manteniment i embalatge, són aproximadament proporcionals als kg de roba tractats, per la qual cosa els que s'han de tenir en compte per establir el disseny òptim són, a més dels corresponents a l'adquisició de les màquines, els de l'aigua i els de l'energia elèctrica.

Pel que fa a l'aigua, l'empresa compta amb pous de capacitat suficient i els costos d'extracció i tractament són proporcionals a la quantitat d'aigua utilitzada, a raó d'1,20 u. m./m³.

L'estructura dels costos de l'energia elèctrica, que es factura mensualment, és més complexa. D'una banda, hi ha un cost fix de 250 u. m. per cada 25 kW de potència contractada, que ha de ser múltiple de 25. D'altra banda, hi ha el cost de l'energia consumida igual a 0,12, 0,10 i 0,07 u. m./kWh, respectivament, per a consums compresos entre 0 i 250.000 kWh, entre 250.000 i 500.000 kWh i, finalment, per a consums superiors a 500.000 kWh.

Un estudi previ ha permès seleccionar 3 tipus de màquines que l'empresa considera adequades, les característiques de les quals es recullen a la taula següent:

Tipus	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	50	25	150	2,0	40	0,15
2	100	45	250	3,2	75	0,25
3	150	70	400	4,0	110	0,40

Característiques de les màquines:

- (1) kg de roba màxims per cycle de rentatge
- (2) potència màxima, en kW
- (3) cost fix mensual
- (4) durada en hores del cycle de rentatge
- (5) kWh per cycle de rentatge
- (6) m³ d'aigua per cycle de rentatge

Abans de formular un model cal determinar per a quina capacitat nominal es vol dimensionar el sistema (per tenir en compte les avaries de les màquines i la irregularitat en la demanda, la capacitat ha de ser superior als 20.000 kg/dia indicats; altrament, es podrien produir llargs períodes d'espera, inadmissibles en un servei d'aquestes característiques, ja que la manca de fiabilitat en el temps de lliurament obliga els clients a augmentar els estocs de roba), i quin coeficient de reducció s'ha d'aplicar a la suma de potències màximes de les màquines per tenir en compte que és improbable que totes les màquines instal·lades requereixin, simultàniament, la potència màxima. Suposem que la capacitat nominal no ha de ser inferior als 30.000 kg/dia, però els costos de funcionament els calculem per a una producció de 20.000 kg/dia. Pel que fa a la potència màxima, apliquem un coeficient de reducció igual a 0,80.

A partir de la taula amb les dades es fàcil obtenir-ne una altra amb la capacitat mensual de cada tipus de màquina i amb els consums mensuals d'aigua i d'energia elèctrica, per a un mes de 30 dies, en el supòsit que treballen sense interrupció i sempre a plena càrrega:¹⁴

Tipus	(1)	(2)	(3)	(4)
1	240	12.000	9.600	36,0
2	150	15.000	11.250	37,5
3	120	18.000	13.200	48,0

(1) nombre màxim de cicles mensuals

(2) capacitat en kg/mes

(3) kWh/mes

(4) m³/mes d'aigua

Per plantejar el model que es mostra a continuació fem servir les variables:

- $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($i = 1, 2, 3$) Nombre de màquines disponibles de cada tipus.
- $y_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($i = 1, 2, 3$) Nombre de màquines utilitzades de cada tipus.
- $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ Nombre de trams de 25 kW de potència contractats.
- $t_i \geq 0, r_i \in \{0,1\}$ Variables per modelitzar el cost del consum energètic.
- ($i = 1, 2, 3$)

$$\text{minimitzar } 150 \cdot x_1 + 250 \cdot x_2 + 400 \cdot x_3 + 1,2 \cdot 36 \cdot y_1 + 1,2 \cdot 37,5 \cdot y_2 + 1,2 \cdot 48 \cdot y_3 + 250 \cdot p + 5.000 \cdot r_2 + 20.000 \cdot r_3 + 0,12 \cdot t_1 + 0,10 \cdot t_2 + 0,07 \cdot t_3$$

$$\text{s.a } \begin{aligned} 12.000 \cdot x_1 + 15.000 \cdot x_2 + 18.000 \cdot x_3 &\geq 900.000 \\ 12.000 \cdot y_1 + 15.000 \cdot y_2 + 18.000 \cdot y_3 &\geq 600.000 \\ 0,8(25 \cdot x_1 + 45 \cdot x_2 + 70 \cdot x_3) &\leq 25 \cdot p \\ t_1 + t_2 + t_3 &= 9.600 \cdot y_1 + 11.250 \cdot y_2 + 13.200 \cdot y_3 \\ t_1 &\leq 250.000 \cdot r_1 \\ t_2 &\leq 500.000 \cdot r_2 \\ t_3 &\leq 2.000.000 \cdot r_3 \\ r_1 + r_2 + r_3 &= 1 \\ y_i &\leq x_i \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

¹⁴ Certament, les màquines no treballen sense interrupcions (per avaries, per manca de roba per rentar...), però això ja es té en compte en imposar una capacitat nominal superior a la demanda mitjana. En canvi, el supòsit que les màquines treballen sempre a plena càrrega pot no ser vàlid en molts casos, en els quals caldria modificar el càlcul dels costos, en relació amb el que està incorporat en el model que proposem; efectivament, per les característiques de volum, composició i procedència de la demanda pot ser que hi hagi cicles de rentatge en què la màquina operi parcialment carregada: aleshores caldria informació sobre la distribució de les càrregues i sobre la relació dels costos d'un cicle de rentatge amb la càrrega de la màquina.



La interpretació de les 3 primeres i les 3 darreres restriccions és immediata. De la 4a a la 7a, ambdues incloses, linealitzen la funció còncava corresponent al cost del consum d'energia elèctrica; les variables t_i són iguals al consum total si aquest se situa en el tram i de la tarifa i les r_i indiquen el darrer tram actiu.

La solució òptima consisteix a adquirir 75 màquines de tipus 1, de les quals funcionaran, de mitjana, 50. S'ha de contractar una potència de 1.500 kW. El consum mensual d'aigua seria de 1.800 m³ i el d'energia, 480.000 kWh. El cost total que resulta, per als costos considerats en el model, és de 81.410 u. m., és a dir, 0,13568 u. m./kg.

L'objectiu de l'enunciat següent és il·lustrar com es pot plantejar un model matemàtic per optimitzar el finançament d'un projecte. S'hi té en compte, per centrar-nos en el finançament, la repercussió d'aquest, via pagament d'interessos i amortització de deutes, sobre el moviment de fons, però prescindim de la repercussió dels interessos sobre els beneficis i, per tant, sobre l'impost de societats.

FO09. Finançament

Es tracta de comparar, amb un horitzó de 6 anys, dos projectes, A i B, basats en tecnologies diferents, per a una planta industrial.

Els moviments de fons corresponents són (en u. m. corrents):

t	1	2	3	4	5	6
A	-400	-600	100	400	600	800
B	-300	-500	90	350	530	720

Com que inicialment només es disposa de 500 u. m., cal finançament, que es pot obtenir mitjançant els instruments següents:

F1. Préstecs a 1 any, al 10 % d'interès, amb un límit de 300 u. m./any. Disponibles entre l'any 2 i l'any 5, ambdós inclosos.

F2. Préstecs a 2 anys, amb un interès del 12 % i amortització del 50 % anual. Se'n pot demanar, sense límit d'import, un l'any 2 i un altre, l'any 3.

F3. Pagarés d'empresa a 3 anys, al 8 % d'interès, amb interessos abonats anualment. Només es poden emetre l'any 2, sense límit d'import.

Els excedents de tresoreria es poden col·locar en actius líquids que rendeixen un 6 %.

No es considera prudent que el deute de l'empresa superi les 500 u. m.

En les dues opcions, A i B, la disponibilitat inicial permet cobrir els moviments de fons negatius de l'any 1, però són insuficients per a l'any 2 (falten 500 i 300 u. m., respectivament).

Cada instrument financer activat en el període τ el podem caracteritzar per dues llistes de coeficients que ens donin, per a cada un dels períodes posteriors i per cada u. m. obtinguda, per una banda, els interessos que cal pagar en els períodes posteriors i, per una altra, els imports que cal tornar.

En aquest cas:

Any	Préstecs a 1 any		Préstecs a 2 anys		Pagarés	
	(i)	(ii)	(i)	(ii)	(i)	(ii)
$\tau + 1$	0,10	1,00	0,12	0,50	0,08	-
$\tau + 2$	-	-	0,06	0,50	0,08	-
$\tau + 3$	-	-			0,08	1,00

(i) interessos per 1 u. m., (ii) retorn per 1 u. m.

A partir d'aquesta taula es dedueix fàcilment la següent, en què es considera separatament cada un dels anys d'emissió d'F1 i d'F2:

Import	F1 $t = 2$		F1 $t = 3$		F1 $t = 4$		F1 $t = 5$		F2 $t = 2$		F2 $t = 3$		F3 ($t = 2$)	
	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{22}	x_{23}	x_3							
t	(i)	(ii)	(i)	(ii)	(i)	(ii)	(i)	(ii)	(i)	(ii)	(i)	(ii)	(i)	(ii)
2														
3	0,10	1,00							0,12	0,50			0,08	
4			0,10	1,00					0,06	0,50	0,12	0,50	0,08	
5					0,10	1,00					0,06	0,50	0,08	1,00
6							0,10	1,00						

I és pràcticament immediat plantejar un programa lineal per maximitzar el saldo al final de l'horitzó. Les variables, a més de les indicades en la taula anterior, són els saldos al final de cada període. Les restriccions, els balanços monetaris de cada un dels períodes i les que imposen que l'endeutament no superi el màxim especificat.

El model que es formula a continuació correspon a l'opció A (per a la B, només cal substituir-hi els valors dels moviments de fons):

maximitzar s_6

s.a $-500 + x_{12} + x_{22} + x_3 = s_2$

$$100 + 1,06 \cdot s_2 + x_{13} + x_{23} - 1,10 \cdot x_{12} - 0,62 \cdot x_{22} - 0,08 \cdot x_3 = s_3$$

$$400 + 1,06 \cdot s_3 + x_{14} - 1,10 \cdot x_{13} - 0,56 \cdot x_{22} - 0,62 \cdot x_{23} - 0,08 \cdot x_3 = s_4$$

$$600 + 1,06 \cdot s_4 + x_{15} - 1,10 \cdot x_{14} - 0,56 \cdot x_{23} - 1,08 \cdot x_3 = s_5$$

$$800 + 1,06 \cdot s_5 - 1,10 \cdot x_{15} = s_6$$



$$x_{12} + x_{22} + x_3 \leq 500$$

$$x_{13} + 0,5x_{22} + x_{23} + x_3 \leq 500$$

$$x_{14} + 0,5x_{23} + x_3 \leq 500$$

$$x_{15} \leq 500$$

$$x_{12} \leq 300, x_{13} \leq 300, x_{14} \leq 300, x_{15} \leq 300$$

La restricció corresponent al límit d'endeutament de l'any 5 és supèrflua, perquè la domina la de fita superior de la variable x_{15} .

El finançament a la solució òptima per a l'opció A queda definit per $x_{12} = 58,82$, $x_3 = 441,18$ i el valor de la funció objectiu és 1.340,72.

Per a l'opció B, $x_{12} = 64,71$, $x_3 = 235,29$ i el valor de la funció objectiu és 1.384,5 (lleugerament superior al de l'opció A, perquè els costos del finançament són menors en la B).

Tot i que el tipus d'interès menor correspon als pagarés, una part del finançament es fa amb crèdits a un any, ja que en el cas dels pagarés s'han de pagar interessos durant 3 anys, perquè no es tornen fins l'any 5 (endeutar-se molt inicialment amb pagarés implica un excés de liquiditat en anys posteriors per una part de la qual es paga el 8 % i només se n'obté el 6 %).

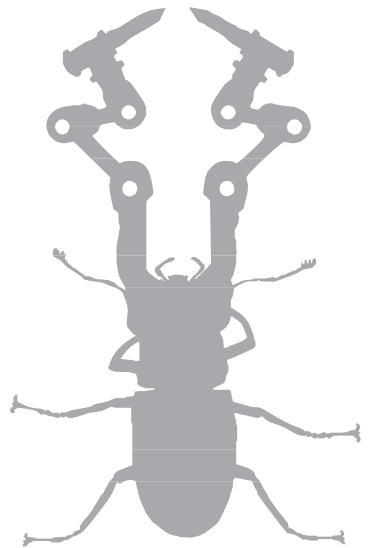
Si els rendiments de tresoreria baixen (per exemple al 3 %), el finançament amb pagarés encara resulta menys interessant. Amb aquest supòsit obtenim:

$$\text{Opció A: } x_{12} = 300,00, x_{13} = 246,00, x_3 = 200,00; s_6 = 1.315,83$$

$$\text{Opció B: } x_{12} = 300,00, x_{13} = 240,00; s_6 = 1.357,14$$

Per tant, l'òptim és molt sensible a canvis en els paràmetres i, malgrat que es tracta d'un cas molt senzill, els resultats no es pot dir que siguin intuïtius, tot i que, naturalment, es poden explicar una vegada vistos.

També és clar que en una situació com la descrita en l'enunciat d'aquest problema, l'aplicació del VAN resultaria problemàtica i inadequada. Si deixem de banda les consideracions relatives a la incertesa, el criteri principal per comparar A i B seria el valor de s_6 , i també es tindria en compte l'evolució de l'endeutament en cada una de les opcions.



→ 6



Concatenar

Hi ha situacions en què per assolir un òptim cal prendre decisions de forma seqüencial o en què la solució òptima consisteix en un cert nombre de decisions que s'han de dur a terme seqüencialment.

En aquests casos, el punt de partida és un estat d'un sistema. En cada etapa, cada decisió possible ens condueix a un altre estat, (i) de manera determinista i amb un cost (positiu o negatiu) també determinat o bé (ii) d'acord amb una llei de probabilitat, a un estat d'un conjunt finit o infinit d'estats, amb un cost, potser també aleatori, que en general depèn de la decisió i de l'estat a què s'arriba en conseqüència.

En el cas determinista, una vegada establerta la política òptima, la trajectòria que se seguirà en l'espai dels estats quan s'apliqui és totalment previsible. De fet, la resolució de problemes amb aquesta estructura i amb caràcter determinista consisteix essencialment a trobar un camí mínim entre el punt que representa l'estat inicial i el de l'estat final. Quan les variables corresponents a les decisions són discretes la solució òptima es calcula molt fàcilment amb un algorisme de camins mínims en un graf, que és particularment eficient per l'estructura polietàpica d'aquest. Quan són contínues, les coses es compliquen una mica, o força, però sempre queda el recurs de recórrer a la discretització.

El càlcul del camí mínim es pot fer des de l'inici cap al final o viceversa, i no presenta cap avantatge fer-ho d'una manera o d'una altra.

En canvi, en els casos aleatoris, només es pot fer des del final cap al principi, perquè quan només queda una etapa determinar la decisió òptima és relativament fàcil (o fins i tot molt fàcil) i, en canvi, en el punt de partida i, en general, quan falta més d'una etapa, és molt complicat decidir, sense més, quin camí s'ha d'emprendre.¹ En aquests casos aleatoris, només es pot preveure què s'ha de fer en cada un dels estats del sistema a què es pot arribar a cada final d'etapa

¹ Com descrivim amb més detall en el capítol *Parar*.



(a l'aplicació del conjunt de parells etapa-estat en el conjunt de decisions en diem una *estratègia*), però no, òbviament, la trajectòria que en resultarà. Com que l'aplicació d'aquesta estratègia no conduirà sempre a un mateix resultat el criteri d'optimització no és obvi; en els textos acadèmics se sol suposar que s'adopta l'esperança matemàtica del resultat, però aquest criteri no és sempre el més apropiat. De fet, en aquest cas aleatori no hi ha cap criteri universal, perquè que un criteri sigui més adequat que un altre depèn de les característiques de la persona o del col·lectiu que ha de prendre les decisions i de les seves circumstàncies.

La programació dinàmica i el càlcul de variacions solen ser instruments adequats per resoldre aquesta mena de problemes, però no sempre cal recórrer-hi.²

CO01. Canvi d'estat

S'ha de comprimir un gas des d'una pressió inicial I a una pressió final $F (> I)$. El procés es pot dividir en un nombre qualsevol d'etapes, n , cada una de les quals té un cost fix, c , i un cost que depèn de la relació entre la pressió final i inicial a l'etapa, d'acord amb l'expressió:

$$k \cdot \left(\sqrt{\frac{p_i}{p_{i-1}}} - 1 \right) \quad i = 1, \dots, n$$

amb $p_0 = I$ i $p_n = F$ (sigui $R = F/I > 1$). L'objectiu és minimitzar el cost del canvi d'estat.³

El problema d'optimització es pot plantejar mitjançant el programa matemàtic següent:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } (c - k)n + k \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{p_i}{p_{i-1}}} \\ \text{s.a} \quad & n \in \mathbb{N} \\ & p_i > 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Que, formulat així, no té cap propietat favorable (la funció objectiu és la suma d'un terme lineal en la variable entera n i de funcions no convexes de $n-1$ variables reals). Tanmateix, si considerem donat el valor de n el problema es redueix a:

² Sobre la programació dinàmica i la seva aplicació a la resolució de problemes de decisions seqüencials, vegeu els llibres de R. Companys a què es fa referència a la nota 10, a la pàgina 14.

³ Aquí es parla de canvi d'estat en el sentit indicat anteriorment, i no en el sentit habitual en física.

$$\begin{aligned} \text{minimitzar } z_n &= k \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_{i-1}}} \\ \text{s.a } \rho_i &> 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

El programa matemàtic per optimitzar z_n és un programa geomètric, per al qual és conegut que el canvi de variables $\rho_i = e^{x_i}$ ($i = 1, \dots, n-1$) converteix les funcions involucrades (en aquest cas, únicament la funció objectiu) en funcions convexes. A més, com que no hi ha altres restriccions que les de positivitat de les variables, el problema que en resulta és d'optimització sense restriccions ja que $e^x > 0$ i la condició $\nabla z_n = \vec{0}$ és necessària i suficient d'òptim. A partir d'aquesta condició s'arriba fàcilment a:

$$\frac{\rho_1}{l} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \dots = \frac{F}{\rho_{n-1}}$$

és a dir, la relació de compressió, sigui r , ha de ser la mateixa en totes les etapes i, per tant, $r = R^{1/n}$ i $z_n = k \cdot n \cdot R^{1/(2 \cdot n)}$.

També es pot plantejar el problema amb variables, y_i , que representin la relació de compressió a cada etapa o, millor encara, l'arrel quadrada de la relació de compressió, amb què resulta:

$$\begin{aligned} \text{minimitzar } z_n &= k \cdot \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{s.a } \prod_{i=1}^n y_i &= \sqrt{F/l} \\ y_i &> 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Que també és un programa geomètric al qual es pot aplicar el canvi $y_i = e^{x_i}$ i linealitzar la restricció prenent logaritmes (o bé prendre logaritmes en la restricció i aplicar KKT).

Segui com sigui, la funció que hem d'optimitzar és:

$$z = c \cdot n + k \cdot n \cdot (R^{1/(2 \cdot n)} - 1)$$

I la manera més pràctica de fer-ho és calcular el valor d'aquesta expressió per a valors successius de n , fins que passi de decreixent a creixent. De tota manera, és més elegant relaxar la condició d'integritat de n i derivar la funció dues vegades:

$$z' = c - k + k \cdot R^{1/(2 \cdot n)} \cdot \left(1 - \frac{\ln R}{2 \cdot n}\right); \quad z'' = k \cdot R^{1/(2 \cdot n)} \cdot \frac{(\ln R)^2}{4 \cdot n^3}$$



Per a $n > 0$ la segona derivada és positiva i, per tant, la funció és convexa. Sigui \hat{n} el valor que anul·la la primera derivada. Aquest valor és positiu, per a tots els valors de k i de R , com es pot demostrar fàcilment (la derivada tendeix a $-\infty$ i a $c (> 0)$ quan n tendeix a 0 i a ∞ , respectivament). Aleshores, si $\hat{n} \leq 1$, el valor òptim, n^* , és igual a 1; si $\hat{n} > 1$, i no és enter, s'ha de calcular z per a $\lfloor \hat{n} \rfloor$ i $\lceil \hat{n} \rceil$ i comparar els dos resultats.

Per a $R = 10$, $c = 100$, $k = 800$:

$$\hat{n} = 2,67; z(\lfloor 2,67 \rfloor) = z(2) = 1.445,25; z(\lceil 2,67 \rceil) = z(3) = 1.422,72; n^* = 3$$

En el llibre de problemes de Robert Faure⁴ hi apareix un enunciat, d'origen molt antic, però no especificat, que després es recull en el llibre de problemes de Sarabia Viejo,⁵ i que reproduïm a continuació, amb lleugeres adaptacions (a l'original, els papers del vehicle i el carburant corresponen, respectivament, a un ase i al farratge que l'animal consumeix).

CO02. On podem anar a parar?

Un vehicle que consumeix 0,05 litres de carburant per km i pot transportar-ne un màxim de 100 litres es troba, amb el dipòsit buit, en un punt en què disposa de 500 litres de carburant.

A quina distància màxima pot arribar?

Suposem, d'acord amb l'enunciat, que el consum del vehicle és directament proporcional als quilòmetres recorreguts, sense que la càrrega ni les condicions del terreny hi influeixin.

És clar que, per arribar el més lluny possible, cal constituir dipòsits intermedis entre l'origen i la destinació final (òbviament, si la disponibilitat de carburant a l'origen no supera la capacitat de càrrega del vehicle, s'ha de carregar tot l'estoc i circular fins que s'exhaureixi el dipòsit; però aquest no és el cas descrit en l'enunciat). També és clar que podem anar més lluny si no deixem carburant en el dipòsit de l'origen que si n'hi deixem (perquè l'estoc inicial és múltiple de la capacitat del vehicle; però això també és cert encara que no es compleixi aquesta darrera condició: això sí, si els dipòsits es poden situar en el lloc que més convingui, perquè si són únicament en llocs preestablerts pot ser convenient abandonar a l'origen una part de l'estoc).

⁴ Faure, R. (1968) *Éléments de la recherche opérationnelle*. Gauthier-Villars.

⁵ Sarabia Viejo, Á. (s. d.) *Problemas de investigación operativa*. Librería ICAI.

De moment (ja ho discutirem més endavant) suposem també que hi ha una política òptima en què l'estoc en els dipòsits intermedis és múltiple de la capacitat del vehicle.

El problema es pot abordar com l'optimització d'una decisió polietàpica en un context determinista en què en cada fase es determina on es col·loca, si és el cas, el següent dipòsit. L'estat en cada fase és l'estoc disponible en el dipòsit i el valor associat a l'estat, el punt quilomètric en què s'ubica el dipòsit. Aleshores, des de l'origen es faran 9 recorreguts fins al primer dipòsit intermedi (4 anades i tornades i una anada final des de l'origen fins al dipòsit intermedi) i s'haurà de decidir si en aquest s'hi deixen 400, 300, 200 o 100 litres, amb què el dipòsit s'haurà de situar, respectivament a:

$$\frac{500 - 400}{0,05 \cdot 9} = \frac{2.000}{9}, \quad \frac{500 - 300}{0,05 \cdot 9} = \frac{4.000}{9}, \quad \frac{500 - 200}{0,05 \cdot 9} = \frac{6.000}{9}, \quad \frac{500 - 100}{0,05 \cdot 9} = \frac{8.000}{9}$$

En les etapes successives el nombre d'estats es va reduint progressivament. Si l'estoc és igual a k vegades la capacitat del vehicle, C , s'han de fer $2 \cdot k - 1$ viatges entre el dipòsit i el següent. Podem omplir, per tant, una taula de distàncies entre un dipòsit i el següent, en funció de l'estoc disponible i l'estoc que queda:

Estoc fi → Estoc inici ↓	400	300	200	100	0
500	2.000/9	4.000/9	6.000/9	8.000/9 (+2.000)*	2.000**
400		2.000/7	4.000/7	6.000/7 (+2.000)	2.000
300			2.000/5	4.000/5 (+2.000)	2.000
200				2.000/3 (+2.000)	2.000
100					2.000

*En un dipòsit amb un estoc igual a la capacitat del vehicle, l'única decisió raonable és carregar el vehicle i fer un viatge sense retorn (amb les dades de l'enunciat, de $100/0,05 = 2.000$ km).

**Passar directament d'un estoc $k \cdot C$ ($k \geq 2$) a un estoc nul no té cap sentit, perquè correspon a fer $2 \cdot k - 2$ viatges d'anada i tornada sense deixar res en un dipòsit imaginari situat, amb les dades de l'exemple, en el km 1.000 i fer un viatge final, sense retorn, des l'origen al km 2.000; per arribar a aquest punt val més fer un sol viatge inicial sense retorn.

Amb aquests valors és fàcil calcular el camí màxim entre l'estat inicial i l'estat final (estoc 0 a l'etapa 5) que resulta ser 500 - 400 - 300 - 200 - 100 - 0 amb un valor de:

$$\frac{2.000}{9} + \frac{2.000}{7} + \frac{2.000}{5} + \frac{2.000}{3} + \frac{2.000}{1} = 2.000 \cdot \frac{1.689}{945} = 3.574,60 \text{ km}$$

- Si en un dipòsit tenim un estoc $(k + f) \cdot C$ (amb $0 < f < 1$) i passem directament a un dipòsit amb estoc igual a $(k - f') \cdot C$ (amb $0 < f' < k$), la distància entre els dos dipòsits és menor que si ho fem a través d'un dipòsit intermedi amb $k \cdot C$.

Per tant, si en el dipòsit inicial l'estoc és $(k + f) \cdot C$ (amb $0 < f < 1$), una política òptima consisteix a establir un dipòsit amb estoc $k \cdot C$ a una distància $f / [\alpha \cdot (2 \cdot k - 1)]$ km i, des d'aquest dipòsit, aplicar la política descrita anteriorment per al cas que els estocs són múltiples de C .

Exposem a continuació una via alternativa per arribar al resultat.

Suposem que inicialment el vehicle es troba en un punt amb $(k + f) \cdot C$ litres de carburant ($k \geq 1$ i enter, i $0 < f \leq 1$).⁶ El vehicle pot deixar $D - \alpha \cdot (2 \cdot m - 1) \cdot \delta$ litres de carburant en un dipòsit situat a una distància $\delta < C / (2 \cdot \alpha)$, on D és la quantitat de carburant que surt de l'estoc en origen i m el nombre de viatges que fa el vehicle entre el punt on es troba i el dipòsit. D , m i δ han de satisfer les condicions $\alpha \cdot (2 \cdot m - 1) \cdot \delta \leq D \leq \min(m \cdot C, (k + f) \cdot C)$. $C / (2 \cdot \alpha)$ és la distància màxima a què es pot situar el dipòsit per tal que el vehicle pugui anar-hi i tornar al punt on es troba a recollir més carburant (però a aquesta distància necessitarà tota la càrrega de carburant per anar i tornar i no podrà deixar res en el dipòsit). Per a un valor de δ fixat, la quantitat de carburant màxima transportada serà o bé $(k + f) \cdot C - \alpha \cdot (2 \cdot m - 1) \cdot \delta$, quantitat que s'assoleix amb $m = k + 1$, o bé $k \cdot C - \alpha \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot \delta$, que s'assoleix amb $m = k$. La quantitat màxima serà l'una o l'altra segons el valor de δ :

- Si $0 < \delta \leq f \cdot C / (2 \cdot \alpha)$, la quantitat màxima és $(k + f) \cdot C - \alpha \cdot (2 \cdot k + 1) \cdot \delta$ litres i s'assoleix amb $m = k + 1$ i $D = (k + f) \cdot C$.

Per a $\hat{\delta} = \frac{f \cdot C}{(2 \cdot k + 1) \cdot \alpha}$, la quantitat màxima és $k \cdot C$. Aquesta distància té un paper clau en la configuració de les solucions òptimes.

- Si $f \cdot C / (2 \cdot \alpha) < \delta \leq C / (2 \cdot \alpha)$, la quantitat màxima de carburant és $k \cdot C - \alpha \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot \delta$ litres (amb $m = k$, $D = k \cdot C$ i, per tant, deixant en el dipòsit inicial $f \cdot C$ litres).

Per valors de δ entre $C / (2 \cdot \alpha)$ i C / α , el vehicle només podrà fer un viatge entre el punt on es troba i el dipòsit; i hi podrà deixar $C - \alpha \cdot \delta$ litres de combustible. El vehicle no podrà arribar al dipòsit si aquest es troba a una distància del punt inicial superior a C / α .

⁶ Si la disponibilitat inicial de carburant no supera la capacitat de càrrega del vehicle, s'ha de carregar tot l'estoc i circular fins que s'esgoti, com s'ha indicat anteriorment.



Demostrem a continuació que sempre hi ha una política òptima en què el primer dipòsit, des de l'origen, es troba a una distància $\hat{\delta}$.

D'una banda, una solució en què el primer dipòsit és a $\delta > \hat{\delta}$ no pot ser òptima, perquè es pot fer arribar més carburant a δ si es constitueix un dipòsit intermedi a $\hat{\delta}$ que si es fa directament. Efectivament, si es fa directament la quantitat de carburant que es pot deixar a δ és igual a $(k+f) \cdot C - \alpha \cdot (2k+1) \cdot \delta$ o a $k \cdot C - \alpha \cdot (2k-1) \cdot \delta$, segons si δ compleix la condició *a* o la *b*, respectivament. Si es constitueix un dipòsit intermedi a $\hat{\delta}$, en aquest es disposarà de $k \cdot C$ litres de carburant i, des de $\hat{\delta}$, es pot deixar a δ $k \cdot C - \alpha \cdot (2k-1) \cdot (\delta - \hat{\delta})$ litres de carburant. Per tant, la diferència entre constituir un dipòsit a $\hat{\delta}$ i no constituir-lo és:

En el cas *a*, $[k \cdot C - \alpha \cdot (2k-1) \cdot (\delta - \hat{\delta})] - [(k+f) \cdot C - \alpha \cdot (2k+1) \cdot \delta] = 2 \cdot \alpha \cdot (\delta - \hat{\delta}) > 0$ i

en el cas *b*, $[k \cdot C - \alpha \cdot (2k-1) \cdot (\delta - \hat{\delta})] - [k \cdot C - \alpha \cdot (2k-1) \cdot \delta] = \frac{2k-1}{2k+1} \cdot C \cdot f > 0$.

D'una altra banda, entre les solucions òptimes n'hi ha una en què el primer dipòsit des de l'origen és a $\hat{\delta}$, perquè si n'hi ha un a $\delta < \hat{\delta}$ és fàcil comprovar que des de δ es pot fer arribar a $\hat{\delta} + \eta$ ($\eta > 0$) la mateixa quantitat de carburant que des de $\hat{\delta}$. Per tant, pot haver-hi solucions òptimes en què el primer dipòsit estigui a $\delta < \hat{\delta}$, i fins i tot pot haver-n'hi més d'un abans de $\hat{\delta}$, però es pot prescindir d'aquests dipòsits i ubicar el primer a $\hat{\delta}$.

Per tant, la configuració següent és òptima: un dipòsit, Δ_1 , situat a una distància $f \cdot C / [(2k+1) \cdot \alpha]$ del punt inicial; un altre dipòsit, Δ_2 , situat a una distància $C / [(2k-1) \cdot \alpha]$ de Δ_1 ; un altre, Δ_3 , situat a $C / [(2k-3) \cdot \alpha]$ de Δ_2 , i així successivament fins al dipòsit Δ_k situat a una distància $C / (3 \cdot \alpha)$ del dipòsit Δ_{k-1} . Els estocs de carburant que transportarà el vehicle a cada dipòsit són $k \cdot C$, $(k-1) \cdot C, \dots, C$ i la distància màxima a l'origen a què arribarà el vehicle serà:

$$\frac{C}{\alpha} \left(\frac{f}{2k+1} + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k-3} + \dots + 1 \right)$$

En el cas de l'enunciat, $k = 4$ i $f = 1$, la distància màxima recorreguda pel vehicle és de 3.574,60 km.

Fins ara hem suposat que l'objectiu era arribar el més lluny possible, però també podria ser deixar la màxima quantitat de carburant en un dipòsit situat a una distància donada de l'origen. Per exemple, quina quantitat màxima de carburant es pot fer arribar a 1.000 km del dipòsit inicial?

Suposem que tenim dipòsits en els km 2.000/9, 2.000/9 + 2.000/7, 2.000/9 + 2.000/7 + 2.000/5 = 907,94, etc. Amb la política òptima que hem trobat abans,

podem fer arribar 200 L al km 907,94 i, des d'allí, $200 - 3 \cdot (1.000 - 907,94) \cdot 0,05 = 186,19$ L al km 1.000.

Suposem ara que la ubicació dels dipòsits, de capacitat suficient, està prefixada, en les coordenades $0, x_1, \dots, x_n$, i que volem determinar la màxima quantitat de carburant que podem arribar a dur a x_n . D'entrada, es tracta de dur des de cada dipòsit al següent la màxima quantitat de carburant que sigui possible. S'ha de tenir en compte que si en un dipòsit tenim $(k + f) \cdot C$ litres de carburant i la distància al dipòsit següent és δ ($< C / (2 \cdot \alpha)$), cal comparar la quantitat que quedarà en el dipòsit següent si fem $2 \cdot k - 1$ viatges per carregar k vegades C litres o si en fem $2 \cdot k + 1$ per carregar $k + 1$ vegades $(k + f) \cdot C / (k + 1)$ litres (la qual cosa només és possible si $\delta \leq [C / \alpha] \cdot [(k + f) / (2 \cdot k + 1)]$). Aquestes quantitats són iguals, respectivament, a $C \cdot k - (2 \cdot k - 1) \cdot \delta \cdot \alpha$ i $C \cdot (k + f) - (2 \cdot k + 1) \cdot \delta \cdot \alpha$ i, per tant, és millor deixar $C \cdot f$ litres en el dipòsit inicial si $f < (2 \cdot \delta \cdot \alpha) / C$. Si en fer els càlculs es detecta que en un dipòsit serà millor abandonar-hi $C \cdot f$ litres de carburant, és clar que no caldrà transportar-los-hi i, per tant, caldrà revisar els valors precedents.

El problema del ruc i el farratge és molt fàcil d'enunciar, però analitzar-lo i resoldre'l no resulten trivials. De fet, es pot veure com un problema elemental de logística, militar o civil, un àmbit en què n'hi ha d'estructura molt més complicada, com ara el que s'enuncia a continuació.

CO03. Logística humanitària

Suposem que ha tingut lloc una catàstrofe natural en un territori i que, entre les mesures necessàries per atendre les necessitats immediates de la zona afectada, cal constituir uns estocs de carburant en uns dipòsits situats en els punts 7, 8, 9 i 10.

Els dipòsits principals 1 i 2 tenen, cada un, una capacitat per a 10 unitats de carburant (UC) i inicialment estan plens. S'ha programat un subministrament addicional de carburant a aquests dipòsits d'un màxim de 6 i 5 UC, respectivament, que hi estarien disponibles a l'inici del dia 3. També hi ha 4 dipòsits secundaris (3, 4, 5, 6) inicialment buits, amb una capacitat de 3 UC cada un. Es vol fer arribar als dipòsits 7, 8, 9 i 10, tots amb capacitat suficient, unes quantitats de carburant iguals, respectivament, a 4, 5, 6 i 3 UC. Per fer-ho es disposa de 3 dies i l'objectiu és aconseguir-ho amb el mínim consum de carburant.

El transport del carburant es duu a terme amb vehicles amb una capacitat d'1 UC, que inclou el que consumeix en els desplaçaments, compreses tant l'anada com la tornada i independentment de la quantitat de carburant transportada, a raó de 0,02 UC per unitat de distància entre l'origen i la destinació. L'anada i la



tornada requereixen un dia en tots els casos i per a cada parell origen-destinació es disposa únicament d'un vehicle.

La taula següent mostra les distàncies per a les parelles origen-destinació que tenen assignat un vehicle per al transport. Sigui D el conjunt d'aquestes parelles i d_{ij} la distància entre i i j .

De↓ A→	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	2	5	-	-	6	3	-
2	6	11	3	3	7	-	9	-
3	-	4	4	4	8	5	6	4
4	4	-	-	-	-	7	5	8
5	4	-	-	5	-	-	6	-
6	4	-	5	-	5	-	9	6

Plantegem un model amb les variables:

a_i ($i = 1,2$) subministrament addicional de carburant a i a l'inici del dia 3

$x_{ijt} \in \{0,1\}$ = 1 si i només si el dia t es transporta carburant de i a j
 $t = 1, \forall (i, j) \in D \mid i = 1,2$ i $t = 2,3; \forall (i, j) \in D$

$q_{ijt} \geq 0$ quantitat que, des de i , arriba a j el dia t ; $t = 1, \forall (i, j) \in D \mid i = 1,2$ i $t = 2,3; \forall (i, j) \in D$

$\hat{s}_{kt} \geq 0$ estoc de carburant en el dipòsit k el dia t , després que en surtin els vehicles que porten carburant cap a altres dipòsits;
 $k = 3, \dots, 6; t = 2,3$

$s_{kt} \geq 0$ estoc de carburant en el dipòsit k al final del dia t ; $k = 1, \dots, 10$;
 $t = 1, \dots, 3$.

I el model:

$$\text{minimitzar } 0,02 \cdot \sum_{(i,j) \in D} \sum_{t=1}^3 d_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\text{s. a } s_{11} = 10 - \sum_{j|(1,j) \in D} (q_{1j1} + 0,02 \cdot d_{1j} \cdot x_{1j1})$$

$$s_{12} = s_{11} - \sum_{j|(1,j) \in D} (q_{1j2} + 0,02 \cdot d_{1j} \cdot x_{1j2})$$

$$s_{13} = s_{12} + a_1 - \sum_{j|(1,j) \in D} (q_{1j3} + 0,02 \cdot d_{1j} \cdot x_{1j3})$$

$$\begin{aligned}
 s_{21} &= 10 - \sum_{j|(2,j) \in D} (q_{2j1} + 0,02 \cdot d_{2j} \cdot x_{2j1}) \\
 s_{22} &= s_{21} - \sum_{j|(2,j) \in D} (q_{2j2} + 0,02 \cdot d_{2j} \cdot x_{2j2}) \\
 s_{23} &= s_{22} + a_2 - \sum_{j|(2,j) \in D} (q_{2j3} + 0,02 \cdot d_{2j} \cdot x_{2j3}) \\
 s_{k1} &= \sum_{(i,k) \in D | i=1,2} q_{ik1} && k = 3, \dots, 10 \\
 \hat{s}_{k2} &= s_{k1} - \sum_{j|(k,j) \in D} (q_{kj2} + 0,02 \cdot d_{kj} \cdot x_{kj2}), && s_{k2} = \hat{s}_{k2} + \sum_{i|(i,k) \in D} q_{ik2} && k = 3, \dots, 6 \\
 s_{k2} &= s_{k1} + \sum_{i|(i,k) \in D} q_{ik2} && k = 7, \dots, 10 \\
 \hat{s}_{k3} &= s_{k2} - \sum_{j|(k,j) \in D} (q_{kj3} + 0,02 \cdot d_{kj} \cdot x_{kj3}), && s_{k3} = \hat{s}_{k3} + \sum_{i|(i,k) \in D} q_{ik3} && k = 3, \dots, 6 \\
 s_{k3} &= s_{k2} + \sum_{i|(i,k) \in D} q_{ik3} && k = 7, \dots, 10 \\
 q_{ijt} &\leq (1 - 0,02 \cdot d_{ij}) \cdot x_{ijt} && t = 1, \forall (i,j) \in D \mid i = 1,2; t = 2,3; \forall (i,j) \in D \\
 a_1 &\leq 6, a_2 \leq 5 \\
 s_{13} &\leq 10, s_{23} \leq 10, s_{kt} \leq 3 && k = 3, \dots, 6; t = 1, \dots, 3 \\
 s_{73} &\geq 4, s_{83} \geq 5, s_{93} \geq 6, s_{10,3} \geq 3
 \end{aligned}$$

Hem suposat que el dia 3, en els dipòsits 1 i 2, es pot carregar tant l'estoc de carburant al final del dia 2 com el subministrament addicional que arriba a l'inici del mateix dia 3. Com que aquest subministrament addicional no figura a la funció objectiu, pot ser que hi hagi òptims múltiples corresponents a diferents valors de les variables a_1 i a_2 . Per desempatar entre aquests òptims múltiples caldria optimitzar, entre totes les solucions que minimitzin el consum de carburant, un criteri en què intervinguessin les dues variables esmentades (per exemple, minimitzar-ne la suma, si es vol minimitzar el cost d'adquisició del subministrament addicional, o maximitzar-la, si es vol tenir estocs tan alts com sigui possible en els dipòsits principals, de cara a incidències futures).

Hem resolt el model amb CPLEX i hem obtingut els resultats següents: $a_1 = 0$, $a_2 = 1,9$, $s_{73} = 4,1$, $s_{83} = 5$, $s_{93} = 6$, $s_{10,3} = 3$. En les tres taules següents es mostren els valors de q_{ij1} , q_{ij2} i q_{ij3} , respectivament.

$i \downarrow j \rightarrow$	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
1	0,54	0,96	0,00	-	-	0,88	0,94	-	3,32
2	0,88	0,00	0,94	0,94	0,86	-	0,82	-	4,44
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total	1,42	0,96	0,94	0,94	0,86	0,88	1,76	0,00	



$i \setminus j \rightarrow$	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
1	0,92	0,96	0,00	-	-	0,88	0,94	-	3,70
2	0,88	0,00	0,84	0,94	0,86	-	0,82	-	4,34
3	-	0,00	0,00	0,00	0,00	0,84	0,00	0,40	1,24
4	0,00	-	-	-	-	0,00	0,00	0,80	0,80
5	0,00	-	-	0,84	-	-	0,00	-	0,84
6	0,00	-	0,00	-	0,62	-	0,00	0,00	0,62
Total	1,80	0,96	0,84	1,78	1,48	1,72	1,76	1,20	

$i \setminus j \rightarrow$	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
1	0,00	0,00	0,00	-	-	0,88	0,94	-	1,82
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,86	-	0,82	-	1,68
3	-	0,00	0,00	0,00	0,00	0,70	0,00	0,92	1,62
4	0,00	-	-	-	-	0,82	0,00	0,00	0,82
5	0,00	-	-	0,00	-	-	0,72	-	0,72
6	0,00	-	0,00	-	0,90	-	0,00	0,88	1,78
Total	0,00	0,00	0,00	0,00	1,76	2,40	2,48	1,80	

Observem que la quantitat de carburant en el dipòsit 7 al final del dia 3 és superior a la quantitat desitjada (4,1 vs. 4). Podria semblar que en un pla de transport òptim l'estoc al final del dia 3 no hauria de superar la quantitat desitjada en cap dels dipòsits 7 a 10. Però no té perquè, ja que s'ha suposat que el consum de carburant només depèn de la distància recorreguda pels vehicles i no de la càrrega que porten i, per tant, si hi ha prou estoc en els dipòsits inicials i en els secundaris, els vehicles poden portar, sense cost addicional, més carburant que l'estrictament necessari.

Dins del marc més ampli de l'optimització de decisions seqüencials, hi ha una família de problemes en què la persona que ha de prendre la decisió pot obtenir, a canvi d'un cost, informació complementària.

Suposem que hi ha dues urnes, indistingibles externament, en què la 1 només conté boles blanques mentre que la 2 només conté boles negres. Un personatge que anomenarem Crupier llança una moneda, sense que la veiem i, si surt cara, elegeix l'urna 1 i, si no, la 2. Si un altre personatge, que anomenarem Visitant, que té la informació sobre el contingut de les urnes i el procediment amb què Crupier elegeix l'urna, vol endevinar l'urna elegida, té una probabilitat d'encertar igual a $1/2$. Si Crupier treu i mostra una bola de l'urna elegida, si la bola és blanca es pot assegurar que procedeix de l'urna 1 i, si és negra, de la 2. L'extracció de la bola permet passar d'unes probabilitats *a priori* ($1/2$, $1/2$) a unes probabilitats *a posteriori* (1 , 0) si la bola és blanca i (0 , 1) si és negra. Si es tracta d'un joc en què Visitant guanya 100 u. m. si encerta quina urna ha elegit Crupier, l'esperança

matemàtica del guany de Visitant passa de 50 a 100 u. m. i, per tant, el valor de la informació aportada per l'extracció de la bola és $100 - 50 = 50$ u. m.

Si la composició de les boles contingudes en cada urna no fos la suposada, les coses no estarien tan clares. Tot i així, si l'urna 1 conté 99 boles blanques i 1 de negra i l'urna 2, 1 de blanca i 99 de negres, si la bola extreta i mostrada és blanca sembla raonable que Visitant atorgui una probabilitat pròxima a 1 a l'urna 1 i anàlogament, en relació amb l'urna 2, si la bola és negra. Però en aquest cas, quantificar aquestes probabilitats requereix un teorema, el de Bayes, i uns càlculs.

El teorema esmentat dona la probabilitat de les causes d'un resultat donat. Si tenim un conjunt de m causes ($C_i, i = 1, \dots, m$) de n resultats ($r_j, j = 1, \dots, n$), i les probabilitats *a priori* d'intervenció de les causes són p_i ($i = 1, \dots, m$) i la probabilitat que una causa i doni un resultat j és $\pi(r_j | C_i)$, aleshores la probabilitat d'obtenir un resultat donat, j , és igual a $q_j = \sum_{i=1}^m p_i \cdot \pi(r_j | C_i)$. Sigui \hat{p}_{ij} la probabilitat que el resultat r_j l'hagi produït la causa C_i . La probabilitat de l'esdeveniment "causa C_i i resultat r_j " és igual, per una banda, a $p_i \cdot \pi(r_j | C_i)$ i, d'una altra, a $q_j \cdot \hat{p}_{ij}$; per tant, $p_i \cdot \pi(r_j | C_i) = q_j \cdot \hat{p}_{ij}$ i:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{p_i \cdot \pi(r_j | C_i)}{q_j} = \frac{p_i \cdot \pi(r_j | C_i)}{\sum_{i=1}^m p_i \cdot \pi(r_j | C_i)}$$

Aquesta expressió és el teorema de Bayes, amb el qual podem resoldre els problemes en què s'ha de decidir quina causa ha intervingut i es pot optar entre prendre la decisió abans o després de fer un experiment. L'aplicació del teorema ens dona les ja conegudes probabilitats *a posteriori* (1, 0) i (0, 1) per als casos de bola blanca i bola negra, respectivament, quan l'urna 1 conté només boles blanques i l'urna 2, només boles negres. Si l'urna 1 conté 99 boles blanques i 1 de negra i l'urna 2, 1 de blanca i 99 de negres, les probabilitats *a posteriori* que proporciona el teorema de Bayes per als resultats bola blanca i bola negra són, respectivament, (0,99, 0,01) i (0,01, 0,99). En aquest supòsit, el valor de la informació aportada per l'extracció de la bola és $0,99 \cdot 100 - 50 = 49$ u. m. Si les dues urnes tinguessin continguts idèntics, l'extracció de la bola no aportaria cap informació.

Si l'experiment és únic, es tracta bàsicament de calcular les probabilitats de les causes per a cada resultat possible de l'experiment. Si hi ha la possibilitat de fer diversos experiments, pot ser, per exemple, que fer un segon experiment sigui convenient o no en funció del resultat del primer i, per tant, la resolució esdevé més complexa.



Les causes (sovint denominades en aquests contextos *estats de la naturalesa*) poden ser urnes que contenen diferents proporcions de boles de colors, màquines que produeixen peces o terrenys amb diferents proporcions de contingut de petroli, per posar-ne només tres exemples. Els resultats poden ser, respectivament, el color d'una bola extreta a l'atzar, la qualitat (determinada mitjançant una inspecció) d'una de les peces fabricades i una característica del terreny determinada mitjançant una anàlisi de les ones sísmiques produïdes per l'explosió d'una càrrega subterrània. En tots aquests casos, i tots els anàlegs, el tractament sempre és el mateix.

C004. Casino

Ara Crupier disposa de 4 urnes, el contingut de les quals és el que s'indica a la taula:

Urna	Boles blanques	Boles negres
1	3	0
2	2	1
3	1	2
4	0	3

Visitant paga una quantitat preestablerta per participar en el joc, que consisteix a endevinar quina urna ha triat Crupier, sabent que ho fa a l'atzar, amb una probabilitat igual a 0,25 per a cada una de les urnes. Si Visitant l'encerta, obté un premi de 100 u. m. (altrament, no res). Opcionalment, pot demanar que Crupier extregui i li mostri una bola de l'urna elegida (experiment 1) o bé que n'extregui, amb reposició,⁷ i li mostri dues boles (experiment 2).

Es tracta de calcular l'esperança matemàtica dels diners obtinguts com a premi per Visitant en els tres casos possibles: sense experiment, amb l'experiment 1 o amb l'experiment 2.

No hem especificat l'import a pagar per participar en el joc. D'una banda, i d'entrada, no pot ser inferior a l'esperança matemàtica del valor del premi, ja que això, a la llarga, implicaria la ruïna del casino. D'una altra banda, el preu que estigui disposat a pagar Visitant depèn del que atribueixi al fet de passar l'estona amb el joc (pel que fa a la comparació de preus i premis, l'esperança matemàtica de Visitant no pot ser positiva, perquè aleshores seria negativa la de Crupier).

Sense experiment, la probabilitat d'encertar és 0,25 i l'esperança matemàtica del premi, $0,25 \cdot 100 = 25$ u. m.

⁷ És a dir, extreu i mostra una bola, la torna a introduir a l'urna i torna a extreure i mostrar una bola.

Si Visitant tingués informació perfecta sobre l'urna elegida per Crupier (o sigui, si sabés amb seguretat quina urna és), obtindria 100 u. m. Per tant, el valor de la informació perfecta és $100 - 25 = 75$ u. m., valor que constitueix una fita superior del preu que Visitant pot estar disposat a pagar per qualsevol experiment o conjunt d'experiments.

Experiment 1:

Els resultats són blanca (b) i negra (n), amb les probabilitats:

Urna → ↓ Resultat	1	2	3	4
b ($q_b = 1/2$)	1	2/3	1/3	0
n ($q_n = 1/2$)	0	1/3	2/3	1

I el teorema de Bayes ens proporciona les probabilitats següents:

Resultat → ↓ Urna	b	n
1	1/2	0
2	1/3	1/6
3	1/6	1/3
4	0	1/2

Si la bola és blanca (negra), Visitant apostarà per l'urna 1 (4) i l'esperança matemàtica del premi serà igual a $(0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5) \cdot 100 = 50$ u. m.

Experiment 2:

Els resultats són dues de blanques (2b), una de blanca i una de negra (1b1n) o dues de negres (2n), amb les probabilitats:

Urna → ↓ Resultat	1	2	3	4
2b ($q_{2b} = 7/18$)	1	4/9	1/9	0
1b1n ($q_{1b1n} = 4/18$)	0	4/9	4/9	0
2n ($q_{2n} = 7/18$)	0	1/9	4/9	1

I les probabilitats *a posteriori*:

Resultat → ↓ Urna	2b	1b1n	2n
1	9/14	0	0
2	4/14	1/2	1/14
3	1/14	1/2	4/14
4	0	0	9/14



Esperança matemàtica del premi:

$$\left(\frac{7}{18} \frac{9}{14} + \frac{4}{18} \frac{1}{2} + \frac{7}{18} \frac{9}{14} \right) 100 = \frac{11}{18} \cdot 100 = 61,11 \text{ u. m.}$$

Pel que fa a aquest experiment 2, és clar que una extracció sense reposició donaria més informació i l'esperança matemàtica corresponent seria superior.

Les probabilitats *a posteriori* corresponents a cada una de les 4 urnes s'han calculat mitjançant el teorema de Bayes a partir de les probabilitats inicials (1/4 per a cada urna) i de les probabilitats corresponents a cada urna de cada un dels 3 resultats possibles en una extracció de 2 boles. Ara bé, com que després d'extreure una bola i, segons el resultat, les probabilitats corresponents a les urnes són diferents de les inicials, també podem calcular les probabilitats de les urnes en funció del resultat de l'experiment 2 de la manera següent.

Recordem que les probabilitats de les urnes, segons que, extreta una bola, sigui blanca o negra són:

Urna → ↓ Resultat	1	2	3	4
b	1/2	1/3	1/6	0
n	0	1/6	1/3	1/2

I les probabilitats d'extreure bola blanca o bola negra de cada urna:

Urna → ↓ Resultat	1	2	3	4
b	1	2/3	1/3	0
n	0	1/3	2/3	1

Per tant, després d'una primera bola blanca ($q_b = 1/2$), les probabilitats de les urnes, segons que la segona sigui blanca o negra, són:

Urna → ↓ Resultat	1	2	3	4
(b) b ($q_b = 14/18$)	9/14	4/14	1/14	0
(b) n ($q_n = 4/18$)	0	1/2	1/2	0

I, després d'una primera bola negra:

Urna → ↓ Resultat	1	2	3	4
(n) b ($q_b = 4/18$)	0	1/2	1/2	0
(n) n ($q_n = 14/18$)	0	1/14	4/14	9/14

En conseqüència, arribem als mateixos valors de les probabilitats de les urnes després de l'experiment 2 que hem obtingut abans.

Suposem ara que, després de dur a terme l'experiment 2, Crupier ofereix a Visitant la possibilitat de treure una tercera bola. Com canviaria l'esperança matemàtica del premi de Visitant?

Depèn del resultat de l'experiment 2. Si han sortit dues boles del mateix color (siguin 2 blanques, per fixar idees), les probabilitats *a posteriori* de les urnes, segons els resultats de la tercera extracció, són:

Urna → ↓ Resultat	1	2	3	4
(bb)b ($q_b = 36 / 42$)	27/36	8/36	1/36	0
(bb)n ($q_n = 6 / 42$)	0	2/3	1/3	0

I l'esperança matemàtica del premi:

$$\left(\frac{36}{42} \cdot \frac{27}{36} + \frac{6}{42} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot 100 = \frac{31}{42} \cdot 100 = 73,81 \text{ u. m.}$$

Mentre que després de l'experiment 2, amb el resultat 2b, l'esperança matemàtica del premi és

$$\frac{9}{14} \cdot 100 = 64,29 \text{ u. m.}$$

La diferència és $\frac{4}{42} \cdot 100 = 9,52 \text{ u. m.}$

Si les boles són de color diferent, les úniques urnes que cal tenir en compte són la 2 i la 3, amb la mateixa probabilitat (0,5), i l'esperança matemàtica del premi és $0,5 \cdot 100 = 50$. Les probabilitats que la tercera bola sigui blanca o sigui negra són també iguals a 0,5. Les probabilitats *a posteriori* són:

Urna → ↓ Resultat	2	3
(1b1n)b ($q_b = 1/2$)	2/3	1/3
(1b1n)n ($q_n = 1/2$)	1/3	2/3

I l'esperança matemàtica del premi és $\frac{2}{3} \cdot 100 = 66,67 \text{ u. m.}$ (i la diferència amb el que s'obtidria sense la tercera extracció és $100/6 = 16,67 \text{ u. m.}$).

Com era d'esperar, la tercera bola és més o menys valuosa segons el resultat de l'experiment anterior. Quan les dues primeres boles són del mateix color, la probabilitat es decanta fortament cap a l'urna 1 (o la 4). En canvi, quan són de



color diferent, les urnes 2 i 3 són equiprobables i la tercera bola trenca aquesta simetria.

Ara ja sabem quant podria pagar Visitant per l'experiment 1, per l'experiment 2 o per l'extracció d'una tercera bola, segons el resultat de l'experiment 2.

Deixem com a exercici determinar quant podria pagar per l'experiment n ($n = 1, 2, \dots$) que consisteix a extreure amb reposició i mostrar a Visitant n boles.

Fins aquí hem considerat el cas que el conjunt dels estats de la naturalesa es pot representar amb una variable discreta. Però també pot ser que es representi mitjançant una variable real (o, potser, unes variables reals). Aleshores els estats no tenen associada una probabilitat, sinó una densitat de probabilitat. Vegem-ne un exemple en què l'estat es representa amb una variable real i el resultat de l'experiment, amb una d'entera (en altres casos, el resultat de l'experiment es representa amb una variable real).

C005. Busos

Ens situem en una ciutat sense informació en temps real sobre els temps previstos per a l'arribada d'autobusos a les parades. Sabem que els autobusos de la línia L passen a intervals exactes d'1 unitat de temps. I també sabem que les persones que agafen la línia arriben a una parada P, en què només s'aturen els autobusos de la línia L, separades per temps que segueixen una llei exponencial de paràmetre λ . Es vol estimar l'esperança matemàtica del temps d'espera de l'autobús si veiem que a P hi ha k persones.

Una k baixa (alta) indica que fa poc (molt) que ha passat el darrer autobús i que, per tant, falta molt (poc) perquè passi el següent. Com que les persones arriben a la parada separades per temps exponencials de paràmetre λ , el nombre de persones que esperen l'autobús, entre dos passos consecutius per la parada, segueix, quan ha transcorregut un temps t ($0 \leq t \leq 1$) des del pas del darrer autobús, una llei de Poisson de paràmetre $\lambda \cdot t$ (que coincideix amb la seva espe-

rança matemàtica): $p_k = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}$.

La funció de densitat de probabilitat *a priori* de t és $f(t) = 1$ ($0 \leq t \leq 1$).

Els estats de la naturalesa són els valors que pot prendre t . La probabilitat total

de k és $\int_0^1 e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} dt$; amb el canvi de variable $\lambda t = x$: $\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{k!} \int_0^\lambda e^{-x} \cdot x^k dx$.

Notem $I(k, \lambda)$ la integral $\int_0^\lambda e^{-x} \cdot x^k dx$.

En integrar per parts tenim: $I(k, \lambda) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k + k \cdot \int_0^\lambda e^{-x} \cdot x^{k-1} dx = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k + I(k-1, \lambda)$,

amb $I(0, \lambda) = 1 - e^{-\lambda}$. Per tant, $\int_0^1 e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dt = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{k!} \int_0^\lambda e^{-x} \cdot x^k dx = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{k!} I(k, \lambda)$ i,

pel teorema de Bayes:

$$f(t | k) = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^k}{I(k, \lambda)}$$

Per tant:

$$\operatorname{argmax}_{0 \leq t \leq 1} f(t | k) = \min\left(\frac{k}{\lambda}, 1\right)$$

i l'esperança matemàtica del temps d'espera:

$$E(\tau) = 1 - \int_0^1 f(t | k) \cdot t dt = 1 - \frac{1}{I(k, \lambda)} \int_0^1 \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^k \cdot t dt = 1 - \frac{1}{\lambda} \frac{I(k+1, \lambda)}{I(k, \lambda)}$$

A la taula següent podeu veure uns resultats, a tall d'exemple:

k		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda = 0,5$	$E(\tau)$	0,54	0,36	0,27	0,21	0,18	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,09
$\lambda = 10$	$E(\tau)$	0,90	0,80	0,70	0,61	0,52	0,44	0,37	0,32	0,27	0,23	0,20

→7



Parar

En contextos aleatoris sovint es planteja la qüestió de quin és el millor moment per parar o retirar-se. El cantautor Raimon anuncià, cap a finals de 2016, que s'acomiadaria del públic l'any següent perquè "volia *finire in bellezza*" i pensava que era "millor deixar un bon record que no que després que pensin, 'que malament estava'"; el 2017, el cantant Al Bano anuncià que es retirava pel mateix motiu: volia *finire in bellezza*. El pianista Vladimir Aïxkenazi expressava una idea similar l'any 2013: "Tinc gairebé 76 anys. Molta gent toca fins més endavant i deixen de fer-ho bé. Jo no vull arribar a això. No em vull arriscar". El criteri és clar, però la decisió és difícil. És el que es coneix com l'*optimal stopping problem*. La gent que pot decidir en quin moment es jubila, la que juga al set i mig, la del món de l'art, de l'esport, de l'espectacle, de l'acadèmia, de la política... han de resoldre aquest problema. I no tothom en troba la solució òptima.

En els exemples següents veurem com abordar el problema en entorns que, tot i que poden arribar a ser molt complicats, són incomparablement més senzills que la vida mateixa.

En molts problemes d'aquest estil, es tracta de decidir si et retires o no després d'haver superat un cert nombre de proves. Retirar-se implica una recompensa; seguir, la possibilitat d'obtenir una recompensa més alta, a canvi del risc de perdre la totalitat o la major part del que s'havia aconseguit.

Encaixen en aquest esquema molts concursos radiofònics o televisius ("¿Se lo lleva o repite?", "¿Lo toma o lo deja?") o televisius ("Lascia o raddoppia?", "Quitte ou double?", "The \$64,000 question?"...), en els quals la persona concursant se sotmet a unes proves de dificultat creixent i quan en supera una que no sigui l'última prevista (diguem-ne la prova i) pot decidir retirar-se amb el premi assolit, que va creixent a cada prova, o passar a la prova següent; no superar una prova implica l'eliminació del concurs amb un premi de consolació de valor c_i , que pot ser nul.

També són del mateix tipus els problemes relatius als monstruosos exàmens del professor Frank N. Stein, famós personatge que apareix en els exercicis del



llibre de H. M. Wagner que hem esmentat a la Presentació (p. 12, nota 3). La situació admet moltes variants, segons el nombre de proves que l'estudiant pot fallar abans que Stein doni per acabat l'examen o si Stein comunica o no a l'estudiant el resultat de cada prova. El cas més senzill és aquell en què l'examen s'ajusta a l'esquema de *lo toma o lo deja*: imaginem un examen oral que consta de 10 preguntes successives i eliminatòries de dificultat creixent i en què l'estudiant es pot retirar quan ho consideri oportú després de respondre encertadament una pregunta, amb una nota igual al nombre de preguntes encertades. Fallar en una pregunta implica l'eliminació de l'examen, amb una nota igual al nombre de preguntes encertades menys 1. Les probabilitats d'encertar seran diferents per a cada estudiant i segurament també ho serà el criteri d'optimització (exemples: maximitzar la probabilitat d'aprovar, cas en què la política òptima és trivial: retirar-se després de respondre encertadament la pregunta 5, si s'hi arriba; assolir una nota determinada, perquè la necessita per aconseguir un valor mitjà del seu expedient o per mantenir la seva reputació; o, potser, maximitzar l'esperança matemàtica de la nota).

L'exemple de l'examen del professor Stein ens ha servit per posar de manifest que en aquest tipus de problemes, com en general en tots els que es plantegen en un context aleatori, l'elecció de criteri no és trivial i que el de l'esperança matemàtica, tot i que és raonable i adequat en moltes situacions i que és el que adoptarem en la resolució dels problemes d'aquest bloc, no és universal ni únic.

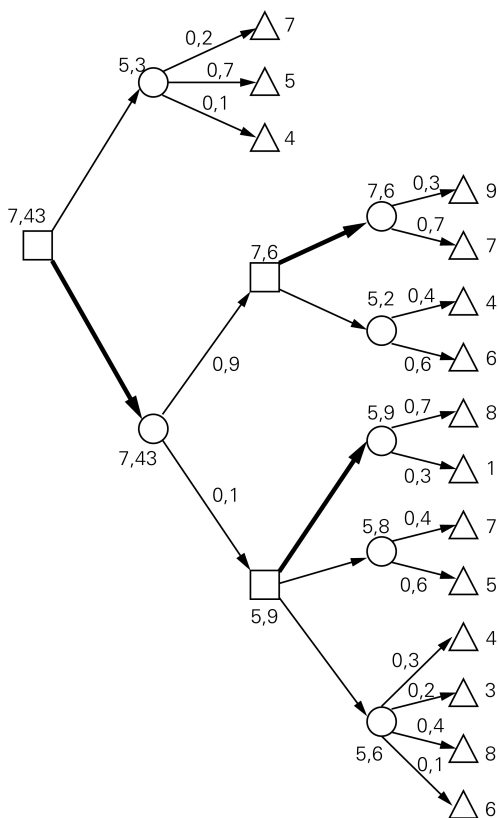
Arbres de decisió

Uns instruments molts útils per tractar problemes d'aquesta mena són els arbres de decisió. Un arbre de decisió és un graf que té les propietats d'una *arborescència*, és a dir, un graf en què hi ha un vèrtex especial, que es denomina arrel i en què hi ha un camí i només un entre l'arrel i qualsevol altre vèrtex del graf (la qual cosa implica que tot vèrtex diferent de l'arrel té un sol arc entrant i que el graf és acíclic). Podem dir, doncs, que un arbre de decisió és una arborescència; però no totes les arborescències són arbres de decisió. En un arbre de decisió cada vèrtex correspon a un estat del sistema o a un esdeveniment i n'hi ha de 3 tipus: de decisió (que es representen amb quadrats), d'atzar (que es representen amb cercles) i terminals (que es representen amb triangles). Els arcs del graf corresponen a les transicions entre vèrtexs i, en el cas dels que tenen l'origen en vèrtexs d'atzar, tenen associada una probabilitat. Tots els elements del graf poden tenir (els vèrtexs terminals *han* de tenir) associats costos o les magnituds pertinents per al problema que es consideri en cada cas.

A partir de la descripció del problema de decisió es pot establir l'arbre corresponent i fer-lo servir de suport per als càlculs. Si es tracta de determinar una estratègia que optimitzi l'esperança matemàtica (dels costos, dels beneficis o de la magnitud que interressi en cada cas), el càlculs consisteixen a determinar el valor associat a cada vèrtex a partir dels valors dels seus vèrtexs successors: si el vèrtex és d'atzar, el valor es calcula com la suma de productes de les probabilitats de cada arc pel valor associat al successor corresponent; si és de decisió, el valor que se li assigna és el millor (el mínim o el màxim, segons el cas) dels

associats als seus successors. És clar, doncs, que per assignar un valor a un vèrtex cal haver-lo assignat a tots els seus successors, la qual cosa obliga a fer els càlculs des del final cap al principi. Els càlculs acaben quan s'assigna un valor al vèrtex arrel: aquest valor és l'esperança matemàtica òptima i l'estratègia òptima la defineixen les millors decisions des de cada vèrtex d'aquest tipus.

Aquí en tenim un exemple, corresponent a un problema de maximització (els arcs amb traç gruixut indiquen l'estratègia òptima):

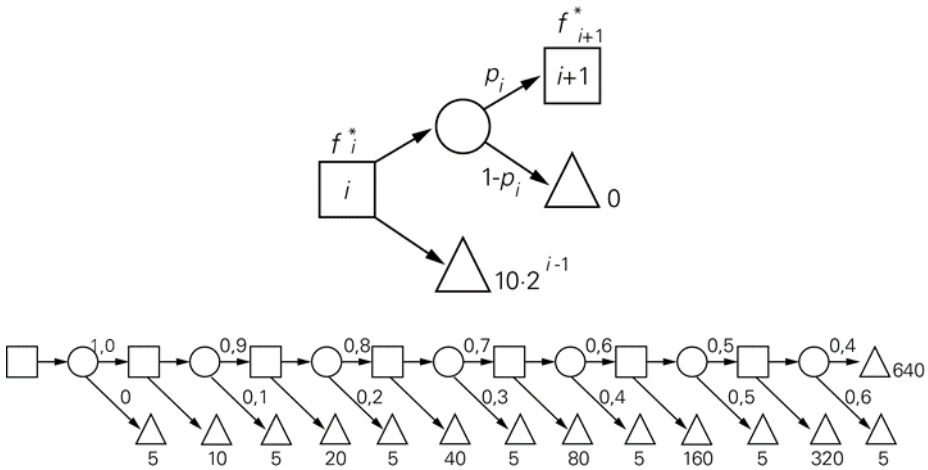


PA01.1. ¿Lo toma o lo deja?: el concurs

Un concurs consta de 7 proves eliminatòries. Si la concursant es retira després de superar la prova i , obté un premi $v_i = 10 \cdot 2^{i-1}$ u. m. ($i = 1, \dots, 7$). Si no supera una prova, queda eliminada, amb un premi de consolació valorat en 5 u. m. La concursant estima que les probabilitats de superar les proves són iguals a $p_i = 1,1 - 0,1i$ ($i = 1, \dots, 7$) i té l'objectiu de maximitzar l'esperança matemàtica del valor del premi.

Superada una prova, la concursant ha de decidir si es retira o passa a la següent, per la qual cosa ha de comparar el valor del premi corresponent a la prova amb l'esperança matemàtica dels premis que pot obtenir si segueix, i pren la millor decisió en cada una de les situacions en què es podria trobar. La clau, per tant, és saber com calcular aquesta esperança matemàtica.

Això, després de superar la pregunta 6 (en general, quan només queda una decisió per prendre, quan només falta una etapa per arribar a un estat en què el procés no pot continuar) és immediat: només cal comparar el premi que obté si es retira ($10 \cdot 2^5 = 320$) amb l'esperança matemàtica corresponent a la pregunta 7: $p_7 \cdot 10 \cdot 2^6 + (1 - p_7) \cdot 5 = 0,4640 + 0,65 = 259$. De la comparació es dedueix que, amb el criteri de l'esperança matemàtica, si la concursant supera la pregunta 6 la decisió òptima és retirar-se amb un premi de 320. Si diem que la concursant es troba inicialment en l'estat 0 i que es troba en l'estat i ($i = 1, \dots, 7$) després de superar la prova i , podem associar a cada estat un valor $f_i^* = \max(v_i, p_{i+1} \cdot f_{i+1}^* + (1 - p_{i+1}) \cdot c_{i+1})$; si $v_i > p_{i+1} \cdot f_{i+1}^* + (1 - p_{i+1}) \cdot c_{i+1}$, la decisió òptima és retirar-se; si $v_i < p_{i+1} \cdot f_{i+1}^* + (1 - p_{i+1}) \cdot c_{i+1}$, la decisió òptima és seguir (si els dos valors són iguals, tant retirar-se com seguir són decisions òptimes). L'esperança matemàtica corresponent a la política òptima és f_0^* .



En els supòsits considerats els resultats són els que recull la taula de la pàgina següent.

És a dir, la concursant s'ha de retirar una vegada hagi superat la prova 6, tot i que pot ser que no la superi o que sigui eliminada abans. En el moment que comença el concurs, l'esperança matemàtica corresponent a la política òptima és 52,628. Amb la política òptima hi ha una probabilitat igual a $1 \cdot 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,1512$ de guanyar 320 i igual a $1 - 0,1512 = 0,8488$ de guanyar 5: $0,1512 \cdot 320 + 0,8488 \cdot 5 = 52,628$.

i	v_i	$p_{i+1} \cdot f_{i+1}^* + (1 - p_{i+1}) \cdot c_{i+1}$	f_i^*
7	640	-	640,000
6	320	$0,4 \cdot 640 + 0,6 \cdot 5 = 259$	320,000
5	160	$0,5 \cdot 320 + 0,5 \cdot 5 = \mathbf{162,5}$	162,500
4	80	$0,6 \cdot 162,5 + 0,4 \cdot 5 = \mathbf{99,5}$	99,500
3	40	$0,7 \cdot 99,5 + 0,3 \cdot 5 = \mathbf{71,15}$	71,150
2	20	$0,8 \cdot 71,15 + 0,2 \cdot 5 = \mathbf{57,92}$	57,920
1	10	$0,9 \cdot 57,92 + 0,1 \cdot 5 = \mathbf{52,628}$	52,628
0	0	$1 \cdot 52,628 + 0,0 \cdot 5 = \mathbf{52,628}$	52,628

Però, adoptaria tothom aquesta política? És òptima en relació amb el criteri de l'esperança matemàtica, però una concursant podria considerar que la probabilitat d'obtenir una suma substancial és molt baixa o bé podria preferir parar abans de la pregunta 6 si considera prou satisfactori el premi corresponent a una prova anterior i no vol arriscar-se a perdre'l. Una altra pot estar interessada únicament a superar el nivell màxim assolit anteriorment en el concurs o en acabar-lo sense fallar cap prova, per la notorietat que això li pot reportar.

Una forma alternativa de determinar la política òptima és calcular el valor de l'esperança matemàtica, $E(n)$, dels guanys en el supòsit que la política de la concursant sigui retirar-se després de la prova n , encara que la superi, o abans, evidentment si falla una prova anterior. Si p_i és la probabilitat de superar la prova i (si s'hi arriba, és clar), p_n , el premi que obté la concursant si es retira després d'haver superat la prova n i c_i , el premi de consolació que obté si fracassa en la prova i :

$$E(n) = p_n \cdot \prod_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n [c_i \cdot (1 - p_i) \cdot \prod_{k=1}^{i-1} p_k]$$

I amb aquesta expressió s'obtenen els valors següents:

n	1	2	3	4	5	6	7
$E(n)$	10,0000	18,5000	30,2000	42,8000	51,8720	52,6280	43,4048

I la política òptima, que consisteix a retirar-se després de la prova 6, té associada una esperança matemàtica igual a 52,6280 u. m.

També s'ajusten a l'esquema els enunciats d'exàmens de la sèrie de Nadir, pescador de perles de l'òpera de Bizet, acompanyat de vegades pel seu cap, Zurga.¹

¹ Nadir i Zurga són els dos protagonistes masculins de l'òpera *Les pêcheurs de perles*, de Georges Bizet. Tots els enunciats de la sèrie varen ser deguts al professor Ramon Companys, expert en òpera i en optimització de decisions seqüencials. Els dos problemes que hi ha a continuació hi estan inspirats; el primer és una versió, menys cruenta, d'un enunciat d'examen de gener de 1985.



PA01.2. *¿Lo toma o lo deja?: Les pêcheurs de perles (Nadir i el tauró)*

Nadir ha localitzat 10 perles en una cala d'aigües profundes. Quan hi fa una immersió obté una de les perles, a condició que no l'ataqui un tauró. En aquest cas no obté la perla i les ferides que li causa el tauró no li permeten fer més immersions ni impedir que li robin les p perles obtingudes anteriorment. Nadir atribueix a aquests perjudicis, tenint en compte les expectatives de la seva qualitat de vida futura, un valor p^2 . La probabilitat d'atac d'un tauró en la immersió n -èsima és $1 - 0,95^n$.

Nadir vol determinar la seva política òptima i la corresponent esperança matemàtica del valor de la seva funció objectiu.

Com que es tracta d'una versió de *Lo toma o lo deja*, amb un fracàs molt penalitzat, la resolució és immediata. La política òptima de Nadir és limitar-se a 3 immersions, amb una esperança matemàtica d'1,6235.

Es pot comprovar el valor de l'esperança matemàtica amb l'expressió següent:

$$0,95 \cdot 0,95^2 \cdot 0,95^3 \cdot 3 - (1 - 0,95) \cdot 0 - 0,95 \cdot (1 - 0,95^2) \cdot 1 - 0,95 \cdot 0,95^2 \cdot (1 - 0,95^3) \cdot 4$$

Canviaria la solució òptima si el nombre de perles (i d'immersions de Nadir) fos il·limitat?

Aquesta història dels pescadors de perles pot originar moltes variants. Nadir pot fer immersions successives, amb un cost que pot ser nul o no, en cada una de les quals la probabilitat de trobar una perla pot dependre del nombre d'immersions ja realitzades, del nombre de perles que ha trobat prèviament o de totes dues coses, si més no. El fet de no trobar-la no implica que no pugui fer més immersions: aquesta és la principal diferència amb els exemples del concurs i de l'examen. A cada immersió hi ha una probabilitat coneguda que Nadir sigui atacat per un tauró; l'atac implica que en aquella immersió Nadir no aconsegueix cap perla i el final del procés, amb un resultat que pot ser la pèrdua total de Nadir i de les perles que havia obtingut abans de l'atac o la pèrdua, per part de Nadir, d'una part de les perles, que ha de donar a Zurga com a recompensa per haver-lo salvat de l'atac del tauró. L'objectiu de Nadir consisteix a maximitzar l'esperança matemàtica de la utilitat de les perles obtingudes en el conjunt d'immersions menys el cost de les immersions o altres costos, si n'hi ha; la utilitat pot ser proporcional o menys que proporcional al nombre de perles obtingudes.

PA01.3. ¿Lo toma o lo deja?: Les pêcheurs de perles (Nadir, el tauró i Zurga)

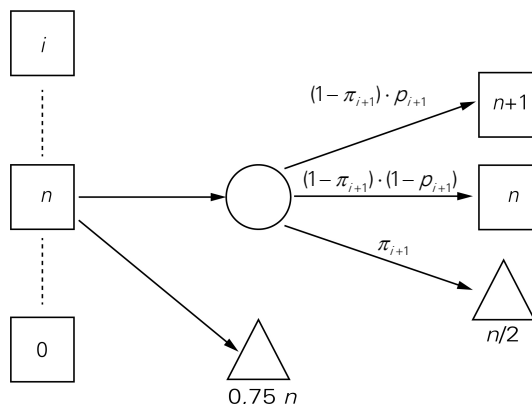
Suposem que Nadir pot arribar a fer un màxim de 4 immersions, que les probabilitats de trobar una perla són $p_i = 1,1 - 0,1 \cdot i$ ($i = 1, \dots, 4$) i les que hi hagi un atac del tauró $\pi_i = 0,1 \cdot 2^{i-1}$ ($i = 1, \dots, 4$). Si es produeix l'atac, Zurga, des de la barca, salva Nadir i, en aquest cas, es quedarà amb la meitat de l'import obtingut amb la venda en el mercat de Batticaloa de les perles aconseguides per Nadir. Si Nadir es retira sense que el tauró l'hagi atacat, ha de donar a Zurga, pel seu suport logístic, la quarta part de l'import de la venda de les perles. Inicialment, suposem que el preu de venda de les perles no depèn del nombre que Nadir i Zurga n'ofereixin en el mercat i, per tant, que l'import total que n'obtenen és proporcional al nombre de perles que posen a la venda, per la qual cosa podem parlar indistintament de l'import obtingut per la venda de les perles o del nombre de perles obtingudes.

Es tracta de determinar la política òptima de Nadir i l'esperança matemàtica del nombre de perles que es queda Nadir i del que es queda Zurga.

La diferència principal entre aquest exemple i els anteriors (sugerits o resolts) és que en aquells al final de cada etapa la persona que prenia les decisions quedava eliminada o en un estat que només depenia de l'etapa en què es trobava. En canvi, Nadir, després de fer i immersions sense haver estat atacat pel tauró pot haver obtingut $0, 1, 2, \dots, i-1, i$ perles, i la decisió òptima al final de cada etapa pot dependre del nombre de perles obtingudes. Per tant, en cada etapa cal considerar, en principi, $i+1$ estats, en cada un dels quals Nadir ha de prendre la decisió de seguir o retirar-se, i haurem de calcular $f_i^*(n)$ $i = 1, \dots, 4$; $n = 0, \dots, i$, a partir dels valors de $f_4^*(n)$, $n = 0, \dots, 4$, que són immediats, amb les expressions:

$$f_i^*(n) = \max \left[0, 75 \cdot n, \pi_{i+1} \cdot n / 2 + p_{i+1} \cdot (1 - \pi_{i+1}) \cdot f_{i+1}^*(n+1) + (1 - p_{i+1}) \cdot (1 - \pi_{i+1}) \cdot f_{i+1}^*(n) \right]$$

$$i = 0, n = 0; i = 1, \dots, 3, n = 1, \dots, i$$





(el valor de n només pot ser 0 per a $i = 0$, ja que la probabilitat d'obtenir una perla a la immersió 1, si no hi ha atac del tauró, és igual a 1).

Els resultats es mostren a la taula següent:

i	n	$0,75 \cdot n$	$\pi_{i+1} \cdot n / 2 +$ $\rho_{i+1}(1 - \pi_{i+1})f_{i+1}^*(n+1) +$ $(1 - \rho_{i+1})(1 - \pi_{i+1})f_{i+1}^*(n)$	$f_i^*(n)$
4	4	3,00	-	3,0000
	3	2,25	-	2,2500
	2	1,50	-	1,5000
	1	0,75	-	0,7500
3	3	2,25	1,7550	2,2500
	2	1,50	1,2050	1,5000
	1	0,75	0,6550	0,7500
2	2	1,50	1,6600	1,6600
	1	0,75	1,0100	1,0100
1	1	0,75	1,3760	1,3760
0	0	0,00	1,2384	1,2384

Per tant, la política òptima de Nadir consisteix a fer 3 immersions, si abans no l'ataca el tauró, i retirar-se. L'esperança matemàtica del nombre de perles que li quedaran al final és 1,2384.

Amb les dades que hem suposat, la política òptima ha resultat molt fàcil de descriure, ja que la decisió de seguir o retirar-se només depèn del nombre d'immersions dutes a terme per Nadir i no del nombre de perles obtingudes.

És fàcil comprovar que la decisió de retirar-se després de la tercera immersió és correcta, ja que si Nadir té aleshores n perles i es retira obtindrà l'import corresponent a $0,75 \cdot n$ perles, mentre que si fa una quarta immersió el pot atacar el tauró (amb probabilitat 0,8) i aleshores s'haurà de conformar amb l'equivalent a $0,5 \cdot n$ perles i, si el tauró no l'ataca, té una probabilitat 0,7 d'aconseguir una perla addicional i la probabilitat complementària, 0,3, de quedar-se només amb les que ja tenia. Per tant, l'esperança matemàtica del resultat de Nadir si decideix fer una quarta immersió és $0,80 \cdot 0,50 \cdot n + 0,20 \cdot 0,75 \cdot [0,7 \cdot (n + 1) + 0,3 \cdot n] = 0,55 \cdot n + 0,105$, que és menor que $0,75 \cdot n$ per a tots els valors positius de n .

L'esperança matemàtica de les perles obtingudes en les immersions és $0,9 \cdot 1 + 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 1,8936$. L'esperança matemàtica del nombre de perles que acabaran en mans de Zurga és, per tant, $1,8936 - 1,2384 = 0,6552$.

Si $\pi_4 = 0,6$ i les altres dades no canvien, el resultat dels càlculs és el següent:

i	n	$0,75 \cdot n$	$\pi_{i+1} \cdot n / 2 +$ $\rho_{i+1}(1 - \pi_{i+1})f_{i+1}^*(n+1) +$ $(1 - \rho_{i+1})(1 - \pi_{i+1})f_{i+1}^*(n)$	$f_i^*(n)$
4	4	3,00	-	3,0000
	3	2,25	-	2,2500
	2	1,50	-	1,5000
	1	0,75	-	0,7500
3	3	2,25	2,0100	2,2500
	2	1,50	1,4100	1,5000
	1	0,75	0,8100	0,8100
2	2	1,50	1,6600	1,6600
	1	0,75	1,0172	1,0172
1	1	0,75	1,3766	1,3766
0	0	0,00	1,2389	1,2389

La política òptima és més complexa: Nadir ha de seguir, si pot, fins a la tercera immersió; quan l'hagi feta, s'ha de retirar si ha aconseguit més d'una perla i seguir si només en té una.

Tornem ara a les probabilitats originals, però suposem que les condicions d'oferta i demanda en el mercat de Batticaloa donen com a resultat que el preu de les perles decreix a mesura que augmenta l'oferta de Nadir i Zurga. Concretament, els imports per la venda d'1, 2, 3 o 4 perles són proporcionals a 100, 180, 210 i 240:

i	n	$0,75 \cdot n$	$\pi_{i+1} \cdot n / 2 +$ $\rho_{i+1}(1 - \pi_{i+1})f_{i+1}^*(n+1) +$ $(1 - \rho_{i+1})(1 - \pi_{i+1})f_{i+1}^*(n)$	$f_i^*(n)$
4	4	1,800	-	1,8000
	3	1,575	-	1,5750
	2	1,350	-	1,3500
	1	0,750	-	0,7500
3	3	1,575	1,1865	1,5750
	2	1,350	1,0215	1,3500
	1	0,750	0,6340	0,7500
2	2	1,350	1,2780	1,3500
	1	0,750	0,9380	0,9380
1	1	0,750	1,1470	1,1470
0	0	0,000	1,0323	1,0323



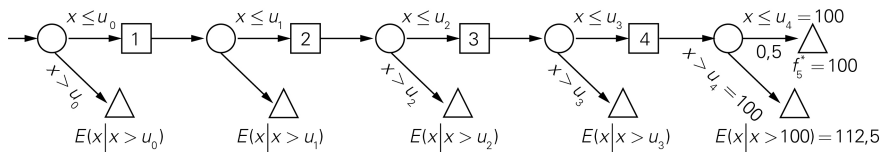
En aquest cas, la política òptima consisteix a fer sempre que sigui possible la segona immersió i, si en aquesta no ha atacat el tauró, retirar-se si ja s'han obtingut 2 perles i, altrament, seguir. Feta la tercera immersió, retirar-se incondicionalment.

PA02.1. Bombolla immobiliària: qui en dóna més?²

Una agència té un solar a la venda per al qual ha rebut una oferta de 100 u. m., que venç dintre de 5 dies. L'agència preveu que rebrà cada dia una oferta, que haurà d'acceptar o rebutjar immediatament. El valor de cada una de les 5 ofertes, que són independents entre si, segueix una llei uniforme entre 75 i 125.

Si l'oferta del dia 5 és superior a 100, l'acceptarà, i si és inferior (o igual), la rebutjarà. El que vol saber l'agència són els valors límits per acceptar o rebutjar les ofertes dels dies 1, 2, 3 i 4, en el supòsit que vol maximitzar l'esperança matemàtica del preu de venda.

L'estructura d'aquest problema és força similar a la del pescadors de perles, però sense taurons i, sobretot, amb variables reals. Notem u_t ($t = 0, \dots, 4$) els valors límits per als instants t d'inici dels dies 1 a 5; l'agència acceptarà l'oferta si iguala o supera el valor u_t i, si no, la rebutjarà.



A partir de l'arbre de decisió (vegeu la figura) és immediat plantejar l'equació de recurrència. Si $h(x)$ és la funció de densitat de probabilitat del valor de les ofertes, tenim (amb $t = 0, \dots, 4$ i $f_5^* = 100$):

$$f_t^* = \max_{u_t} \left[\Pr(x \geq u_t) \cdot \int_{u_t}^{\infty} x \cdot \frac{h(x)}{\Pr(x \geq u_t)} dx + f_{t+1}^* \cdot \int_{-\infty}^{u_t} h(x) dx \right]$$

$$= \max_{u_t} \left[\int_{u_t}^{\infty} x \cdot h(x) dx + f_{t+1}^* \cdot \int_{-\infty}^{u_t} h(x) dx \right]$$

On, en el cas que ens ocupa, podem substituir $-\infty$ per 0.

² La situació que considerem en aquest apartat procedeix d'un enunciat del llibre de H. M. Wagner esmentat.

En l'expressió $\Pr(x \geq u_t) \cdot \int_{u_t}^{\infty} x \cdot \frac{h(x)}{\Pr(x \geq u_t)} dx + f_{t+1}^* \cdot \int_{-\infty}^{u_t} h(x) dx$, el primer terme és el producte de la probabilitat que el valor de l'oferta sigui més gran que u_t (i, per tant, sigui acceptada) per l'esperança matemàtica dels valors de l'oferta quan només considerem els que són més grans que u_t ; el segon terme és el producte de l'esperança matemàtica corresponent a l'instant $t + 1$ per la probabilitat que el valor de l'oferta sigui menor que u_t (i, per tant, sigui rebutjada).

L'expressió $\int_{u_t}^{\infty} x \cdot h(x) dx + f_{t+1}^* \cdot \int_{-\infty}^{u_t} h(x) dx$ es dedueix immediatament de l'anterior. També s'hi pot arribar directament, com a esperança matemàtica d'una variable aleatòria que val x si $x \geq u_t$ i f_{t+1}^* si $x < u_t$.

El valor òptim de u_t s'obté derivant i igualant a 0:

$$-u_t \cdot h(u_t) + f_{t+1}^* \cdot h(u_t) = 0; u_t^* = f_{t+1}^*$$

En el cas corresponent a les dades indicades a l'enunciat $h(x) = 0$ ($x < 75$, $x > 125$); $h(x) = 1/50$ ($75 \leq x \leq 125$):

$$f_t^* = \max_{u_t} \left[\frac{125 - u_t}{50} \int_{u_t}^{125} x \cdot \frac{1}{125 - u_t} dx + f_{t+1}^* \cdot \int_{75}^{u_t} \frac{1}{50} dx \right] = \max_{u_t} \left[\int_{u_t}^{125} x \cdot \frac{1}{50} dx + f_{t+1}^* \cdot \int_{75}^{u_t} \frac{1}{50} dx \right]$$

Amb $f_5^* = 100$ i, per tant, $u_4^* = f_5^* = 100$, d'on:

t	f_t^*	u_t^*
5	100	-
4	106,25	100
3	109,77	106,25
2	112,09	109,77
1	113,75	112,09
0	115,02	113,75

Així doncs, l'esperança matemàtica del preu de venda del solar, amb la política òptima, és 115,02.

El procediment de resolució és vàlid per a qualsevol funció de densitat de probabilitat, però el cas en què el càlcul de les integrals és més senzill és el de la llei uniforme.

Amb aquesta política òptima, la probabilitat de no obtenir més de 100 u. m. és 0,1249. Amb altres polítiques menys ambicioses s'assolirà una esperança matemàtica inferior, però es pot reduir el risc de quedar-se només amb 100 u. m. Per exemple, la política d'acceptar ofertes iguals o superiors a 105 els dies 1 a



4 i superiors a 100 el dia 5 té associada una esperança matemàtica de 113,87, amb una probabilitat de no obtenir més de 100 u. m. igual a 0,0648.

PA02.2. Bombolla immobiliària: impost a la no venda

El Departament d'Hisenda de Taxlàndia ha dissenyat un impost innovador a la no venda d'habitatges (INV), per tal de combatre les bombolles immobiliàries. Quan algú posa un habitatge a la venda ha de fixar-ne lliurement el preu, el qual ha de mantenir durant tot l'exercici fiscal. Transcorregut aquest, si no l'ha venut ha de renunciar a vendre'l en tot l'exercici següent o bé pagar l'INV, l'import del qual és proporcional al preu de venda inicial (igual a $\gamma \cdot x$, on x és el preu de venda inicial i γ , el tipus de l'impost) i fixar el preu vigent durant el nou exercici. L'efecte esperat és una abaixada general dels preus de l'habitatge.

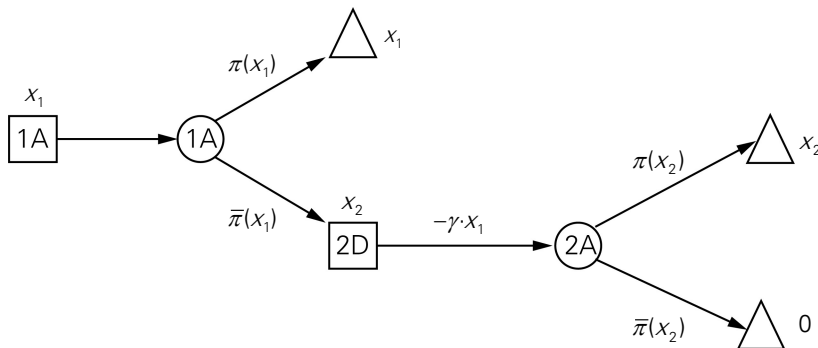
Per tal de centrar-nos en l'aspecte principal del problema, prescindim de l'actualització i d'altres impostos que puguin estar involucrats en la possible operació de compra-venda.

Considerem el cas en què la propietària de l'habitatge el vol vendre en l'exercici fiscal actual o en el següent (si no ha aconseguit vendre'l al final de l'exercici següent, el retirarà del mercat per un temps indefinit) i adopta el criteri de l'esperança matemàtica.

La propietària estima que, en els dos exercicis concernits, si el preu és igual o inferior a m , la probabilitat de vendre l'habitatge és igual a 1, i si és igual o més gran que M , és igual a 0. Sense tenir-ne més informació, decideix adoptar una variació lineal entre m i M de la probabilitat de venda:

$$\pi(x) = 1 - \frac{x - m}{M - m} = \frac{M}{M - m} - \frac{1}{M - m} \cdot x = \alpha - \beta \cdot x, \text{ amb } \alpha = \frac{M}{M - m} \text{ i } \beta = \frac{1}{M - m}$$

Així doncs, la propietària ha de fixar el preu de venda en cada un dels dos exercicis (x_1 i x_2 , respectivament) per tal de maximitzar l'esperança matemàtica dels ingressos nets. El problema de decisió es pot representar amb l'arbre següent:



L'esperança matemàtica corresponent al vèrtex 2A és:

$$\pi_2(x_2) \cdot x_2 = \alpha \cdot x_2 - \beta \cdot x_2^2$$

d'on $x_2^* = \max\left(m, \frac{\alpha}{2 \cdot \beta}\right) = \max\left(m, \frac{M}{2}\right)$. Per tant:

$$x_2^* = m \left(m \geq \frac{M}{2}\right), x_2^* = \frac{M}{2} \left(m < \frac{M}{2}\right)$$

I les esperances matemàtiques dels ingressos per venda de l'habitatge a l'exercici 2 (que notarem E_{2A}) són:

$$m \left(m \geq \frac{M}{2}\right), \frac{M^2}{4 \cdot (M - m)} \left(m < \frac{M}{2}\right)$$

Així doncs, amb els supòsits expressats, el preu de venda de l'habitatge en el segon exercici no depèn de la taxa de l'INV.

Pel que fa al vèrtex 1A, l'esperança matemàtica és:

$$\pi_1(x_1) \cdot x_1 + \bar{\pi}_1(x_1) \cdot (E_{2A} - \gamma \cdot x_1) = -\beta \cdot (1 + \gamma) \cdot x_1^2 + [\alpha \cdot (1 + \gamma) - \gamma + \beta \cdot E_{2A}] \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot E_{2A}$$

D'on $x_1^*(\gamma) = \max\left(m, \frac{\alpha \cdot (1 + \gamma) - \gamma + \beta \cdot E_{2A}}{2 \cdot \beta \cdot (1 + \gamma)}\right)$ que, amb $\gamma = 0$ (és a dir, sense INV)

es redueix a $x_1^*(0) = \frac{\alpha + \beta \cdot E_{2A}}{2 \cdot \beta} = \frac{M}{2} + \frac{E_{2A}}{2}$, és a dir:

$$x_1^*(0) = \frac{m + M}{2} \left(m \geq \frac{M}{2}\right), x_1^*(0) = \frac{M}{2} + \frac{M^2}{8 \cdot (M - m)} \left(m < \frac{M}{2}\right)$$

El valor òptim del preu de venda en el primer exercici, si no hi ha INV, és més gran que si n'hi hi ha, com es dedueix de la comparació entre $x_1^*(0)$ i $x_1^*(\gamma)$ (amb $\gamma > 0$).

Vegem amb dos exemples numèrics quin seria l'impacte de l'impost sobre el preu de venda en el primer exercici:

γ	$m = 250 \quad M = 400$	$m = 250 \quad M = 600$
0,00	325,00	428,57
0,05	315,48	414,12
0,10	306,82	400,97
0,15	298,91	388,98
0,20	291,67	377,98
0,25	285,00	367,86



En el segon exercici, els preus de venda serien 250,00 i 300,00.

El supòsit que el preu no es pot modificar en tot l'exercici implica una subvaloració dels efectes de l'INV sobre la rebaixa dels preus de l'habitatge (la qual cosa està relacionada amb el problema anterior, PA02.1).

No diguis mai *aquí me quedo*, aconsellava José Agustín Goytisolo a la seva filla Julia en relació amb el curs de la vida. Però ja hem vist que, en un sentit diferent, hi ha circumstàncies en què cal decidir el millor moment per a la retirada, com en el cas de la venda del solar, força similar al de collir i vendre una producció d'hortalisses. Hi ha un cas més difícil, que es coneix amb noms diversos, el més habitual dels quals és el de *the secretary problem*. L'abordem a continuació.

PA03. Amb qui ens quedem?

S'ha de dur a terme un procés de selecció per a un lloc de treball. Les persones candidates, en nombre conegut, n , seran entrevistades en un ordre aleatori i en acabar l'entrevista corresponent seran acceptades o rebutjades irrevocablement (per tant, una vegada s'ha acceptat una candidata no es fan més entrevistes). Se suposa que totes les persones candidates tenen nivells professionals diferents, sobre el valor dels quals no es té *a priori* cap informació,³ i que es vol contractar la de nivell més alt (contractar-la és un èxit; no contractar-la, un fracàs).

Es tracta de determinar l'estratègia per maximitzar l'esperança matemàtica del resultat.⁴

Aquest problema va ser proposat fa gairebé seixanta anys i ara mateix se'n troba informació abundant a Internet. Té algunes variants més complexes, com ara aquella en què n no és conegut *a priori*, però aquí ens limitarem a l'enunciat bàsic indicat anteriorment.

Tot i que l'enunciat del problema és antic, segueix d'actualitat. Nigel Cummings se'n feia ressò no fa gaire⁵ en un breu article en què comentava el llibre *Algorithms to Live by: The Computer Science of Human Decisions*,⁶ en el qual s'indica que la decisió òptima és la que resulta en aplicar la regla del 37 %, és a dir, rebutjar el primer 37 % de les candidates i després seleccionar la primera que sigui millor que totes les que l'hagin precedida. Per cert, amb aquesta regla de

³ No seria aquest el cas si es tractés, per exemple, de seleccionar una persona per jugar a bàsquet i el criteri fos contractar la més alta; en aquest cas, se sap en quin interval es poden situar les alçades de les candidates.

⁴ Considerat al peu de la lletra, aquest enunciat és més aviat inversemblant. Tanmateix, no és difícil pensar en situacions de la vida real que, tot just amb un canvi de terminologia, s'hi ajusten prou.

⁵ Cummings, N. (2016) Marriage – an optimal stopping problema. *Inside O.R.*, n. 549, p. 11.

⁶ Christian, B., Griffiths, T. (2015) *Algorithms to Live by: The Computer Science of Human Decisions*. Henry Holt and Company, Nova York.

vegades no se selecciona ningú, i, quan se selecciona algú, no se sap si és o no la persona més idònia.

Amb $n = 2$ el problema és trivial, i les polítiques de seleccionar incondicionalment la primera candidata o deixar-la passar i seleccionar la segona si té més nivell que la primera tenen associada la mateixa esperança matemàtica igual a $1/2$.

Com més gran és n , més difícil és que la selecció sigui encertada, però l'esperança matemàtica del resultat, si s'aplica la política òptima, no es redueix tant com podria semblar.

El cas $n = 3$ es pot analitzar per mera enumeració. El que resulta és que seleccionar, a partir de la segona persona inclusivament, la que tingui més nivell que totes les anteriors té associada una esperança matemàtica igual a $1/2$, com en el cas $n = 2$.

Per a $n = 4$, l'esperança matemàtica òptima, que s'obté amb una política com la del cas $n = 3$, és igual a $11/24$. Per a $n = 5$, la política òptima consisteix a seleccionar, a partir de la tercera persona inclusivament, la que tingui més nivell que totes les anteriors i té associada una esperança matemàtica de $26/60$.

Per aquests valors baixos de n , la regla del 37 % es compleix aproximadament (el 37 % de 2, 3, 4 i 5, respectivament, és 0,74, 1,11, 1,48, 1,85), però, a mesura que creix n , esdevé més ajustada, com veurem més endavant.

Però què té de particular el 37 %? Doncs que 0,37 és aproximadament l'invers del nombre e :

$$\frac{1}{e} = 0,367879$$

i el valor del nombre de candidates que s'han de deixar passar en la política òptima i l'esperança matemàtica del resultat tendeixen, respectivament, a n/e i a $1/e$ quan $n \rightarrow \infty$. És a dir, per gran que sigui n , la probabilitat d'èxit, si s'aplica la política òptima, no baixa d' $1/e$. S'ha de reconèixer que tot plegat no deixa de ser sorprenent.⁷

⁷ El nombre e apareix en llocs que no se l'espera. Per exemple, si col·loquem a l'atzar n objectes numerats d'1 a n en caselles numerades de la mateixa manera, la probabilitat que no hi hagi cap coincidència entre el nombre d'una casella i el de l'objecte que hi va a parar tendeix a $1/e$ quan $n \rightarrow \infty$.

Una altra situació en què apareix el nombre e : suposem que una màquina necessita, per poder funcionar, un element amb un temps de vida que segueix una llei uniforme entre 0 i 1 i que volem determinar l'esperança matemàtica del nombre d'elements que necessitem perquè la màquina funcioni durant un temps $t \leq 1$ (o, el que és el mateix, determinar quants valors d'una variable aleatòria $U[0,1]$ hem de sumar per assolir o superar el valor t). Aquesta esperança matemàtica



Hi ha diverses formes d'arribar a aquest resultat,⁸ aquí ho fem amb un enfocament similar al dels problemes anteriors d'aquest bloc.

$E(n,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n(t)$, on n és el nombre d'elements necessaris i $p_n(t)$ la probabilitat corresponent) és igual a e^t i s'arriba a aquest resultat tal com s'exposa a continuació.

Les funcions de densitat de probabilitat de la suma de les vides corresponents a 1, 2, ..., n elements són, per a $0 \leq t \leq 1$ (observeu que $h_1(t) = 1 (0 \leq t \leq 1)$ implica $h_1(t-u) = 1 (0 \leq u \leq t)$):

$$h_1(t) = 1, h_2(t) = \int_0^t h_1(u) \cdot h_1(t-u) du = t, h_3(t) = \int_0^t h_2(u) \cdot h_1(t-u) du = \frac{t^2}{2}, \dots,$$

$$h_n(t) = \int_0^t h_{n-1}(u) \cdot h_1(t-u) du = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Perquè el nombre d'elements necessaris sigui n , la vida total, sigui u , dels primers $n-1$ elements ha de ser $< t$ i la vida de l'element n -èsim ha de ser $\geq t-u$. Aleshores:

$$p_1(t) = 1-t, p_2(t) = \int_0^t h_1(u) \cdot p_1(t-u) du = \int_0^t h_1(u) \cdot (1-t+u) du = \frac{t}{1!} - \frac{t^2}{2!}, p_3(t) = \int_0^t h_2(u) \cdot (1-t+u) du = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!}, \dots$$

$$p_n = \int_0^t h_{n-1}(u) \cdot (1-t+u) du = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{t^n}{n!}$$

Per tant, $E(n,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n(t) = 1+t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots = e^t$ i $E(n,1) = e$.

Aquesta propietat permet estimar el valor d' e per simulació, la qual cosa constitueix un exercici interessant en relació amb els intervals de confiança de variables *output* del model de simulació.

Una altra via per arribar a aquest resultat és considerar una llei uniforme discreta en què la variable pren els valors $1/N, 2/N, \dots, (N-1)/N, 1$ i suposar que farem una substitució si l'element s'avaría en un d'aquests instants. Aleshores, si notem π_τ ($\tau = 1, \dots, N$) la probabilitat d'haver de fer una substitució en l'instant τ , tenim, amb $\pi_0 = 1$ (ja que a $\tau = 0$ és segur que s'ha d'instal·lar un element):

$$\pi_1 = \frac{1}{N}, \quad \pi_2 = \frac{1}{N}(\pi_0 + \pi_1), \dots, \quad \pi_{\tau-1} = \frac{1}{N}(\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_{\tau-2}), \quad \pi_\tau = \frac{1}{N}(\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_{\tau-2} + \pi_{\tau-1}) = \left(1 + \frac{1}{N}\right) \pi_{\tau-1};$$

per tant, atès que $\pi_1 = \frac{1}{N}$, $\pi_\tau = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{\tau-1}$ ($\tau = 1, \dots, N$), d'on l'esperança matemàtica del nombre d'elements necessaris perquè la màquina funcioni durant un temps t ($0 \leq t \leq 1$) és (només compten l'element inicial i els que cal substituir a $\tau < \lceil t \cdot N \rceil$):

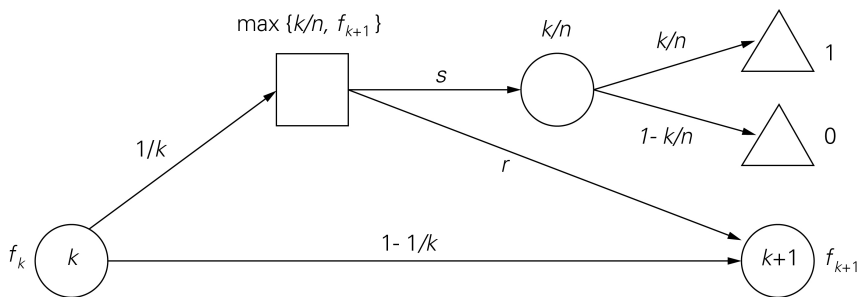
$$\pi_0 + \sum_{\tau=1}^{\lceil t \cdot N \rceil - 1} \frac{1}{N} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{\tau-1} = 1 + \frac{1}{N} \frac{\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{\lceil t \cdot N \rceil - 1} - 1}{1 + \frac{1}{N} - 1} = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{\lceil t \cdot N \rceil - 1},$$

que tendeix a e^t quan N tendeix a ∞ .

A https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_e hi ha molta informació interessant sobre e .

⁸ Una estratègia d'actuació queda definida en aquest problema per una llista de nombres naturals (j_0, j_1, \dots, j_p) amb $j_0 < j_1 < \dots < j_p$: en aquestes posicions, elegim la persona que les ocupa a condició que tingui més nivell que totes les anteriors. És obvi que $j_p = n$. Aleshores, la probabilitat de seleccionar la persona de més nivell és

Si s'arriba a entrevistar la persona k -èsima, pot ser que tingui més nivell que les anteriors (amb probabilitat $1/k$), o que no. En aquest darrer cas (per a $1 \leq k \leq n-1$.) s'ha de passar a entrevistar la persona $(k+1)$ -èsima. Si té més nivell que les anteriors s'ha de prendre la decisió de rebutjar-la incondicionalment (r) i passar a entrevistar la persona $(k+1)$ -èsima, o seleccionar-la (s), amb què el procés finalitza, amb èxit si es tracta de la persona de més nivell entre les n , o amb fracàs, si no. La probabilitat d'èxit és la de que la persona k -èsima, tenint en compte que és la que té més nivell entre les k primeres, sigui la de més nivell entre les n (és a dir, k/n).



La decisió s és òptima si $f_{k+1} \leq \frac{k}{n}$ (equivalent a $\frac{f_{k+1}}{k} \leq \frac{1}{n}$).

A diferència de problemes anteriors, el graf no és una arborescència. Això no obstant, podem escriure l'equació de recurrència:

$$f_k = \frac{1}{k} \max(k/n, f_{k+1}) + \frac{k-1}{k} \cdot f_{k+1} = f_{k+1} + \max\left(0, \frac{1}{n} - \frac{f_{k+1}}{k}\right)$$

$(k = 1, \dots, n-1)$, amb $f_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n} + \frac{j_0-1}{j_0} \frac{1}{n} + \frac{j_0-1}{j_0} \frac{j_1-1}{j_1} \frac{1}{n} + \dots + \frac{j_0-1}{j_0} \frac{j_1-1}{j_1} \dots \frac{j_{p-1}-1}{j_{p-1}} \frac{1}{n}$$

($\frac{j_i-1}{j_i}$ és la probabilitat que la persona en la posició j_i no sigui la que té més nivell entre les j_i primeres). Com que $\frac{j_i-1}{j_i}$ creix amb j_i , $j_{p-1} = n-1$ i així successivament; és a dir, entre les estratègies amb $p+1$ posicions dominen aquelles en què les posicions són consecutives. Per tant, les estratègies que cal considerar són del tipus $(k, k+1, k+2, \dots, n)$, amb les quals la probabilitat de seleccionar la persona de més nivell és $\frac{1}{n} \left(1 + \frac{k-1}{k} + \frac{k-1}{k} \frac{k-1}{k+1} + \dots + \frac{k-1}{k} \frac{k-1}{k+1} \dots \frac{n-2}{n-1} \right)$; a partir d'aquesta expressió s'arriba sense grans dificultats al mateix resultat que s'exposa en el cos del text.



Vegem-ne els resultats per a $n = 2, 3, 4, 5$:

n	f_n	f_{n-1}	f_{n-2}	f_{n-3}	f_{n-4}	k^*
2	1/2 (s)	1/2 (r,s)				1,2
3	2/6 (s)	3/6 (s)	3/6 (r)			2
4	6/24 (s)	10/24 (s)	11/24 (s)	11/24 (r)		2
5	24/120 (s)	42/120 (s)	52/120 (s)	52/120 (r)	52/120 (r)	3

De l'equació de recurrència es desprèn que (i) $f_k \geq f_{k+1}$; (ii) per tant, els valors de les f formen una seqüència no creixent; (iii) per a valors baixos de k , la decisió òptima és r , i per a valors alts, s . En conseqüència, la política òptima té, per a qualsevol valor de n , una estructura molt senzilla: rebutjar incondicionalment les primeres $k^* - 1$ candidates i seleccionar, des de la k^* -èsima, la primera que tingui un nivell més alt que totes les que l'han precedida.

El valor de k^* és el més petit de k per al qual $\frac{f_{k+1}}{k} \leq \frac{1}{n}$. S'ha de complir, doncs:

$$\frac{f_{k^*+1}}{k^*} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{f_{k^*}}{k^*-1}$$

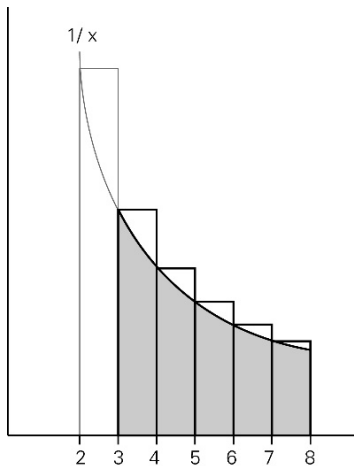
A més, l'equació de recurrència permet establir que, per als valors de k en què la decisió òptima és seleccionar, es compleix:

$$f_k = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{k-1}{k} + \frac{k-1}{k+1} + \dots + \frac{k-1}{n-1} \right)$$

Aleshores, la condició que defineix k^* queda de la manera següent:

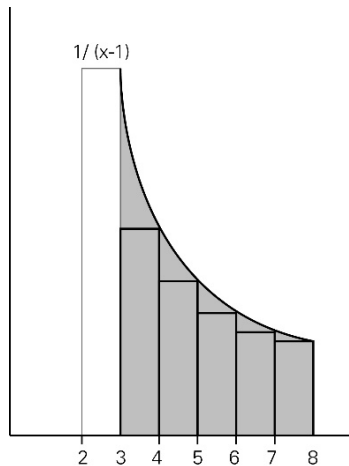
$$\frac{1}{k^*} + \frac{1}{k^*+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 \leq \frac{1}{k^*-1} + \frac{1}{k^*} + \frac{1}{k^*+1} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

Ara bé:



$$\int_k^1 \frac{1}{x} dx < \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

Exemple : $k = 3, n = 8$



$$\int_{k-1}^1 \frac{1}{x-1} dx > \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

Exemple : $k = 4, n = 8$

$$\int_{k^*}^n \frac{1}{x} dx = \ln \frac{n}{k^*} < \frac{1}{k^*} + \frac{1}{k^*+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 \quad \text{i}$$

$$1 \leq \frac{1}{k^*-1} + \frac{1}{k^*} + \frac{1}{k^*+1} + \dots + \frac{1}{n-1} < \int_{k^*-1}^n \frac{1}{x-1} dx = \ln \frac{n-1}{k^*-2}$$

$$\ln \frac{n}{k^*} < 1 < \ln \frac{n-1}{k^*-2}$$

d'on:

$$\frac{n}{e} < k^* < \frac{n}{e} + 2 - \frac{1}{e}$$

$$\text{i} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^*}{n} = \frac{1}{e}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k^*} = \frac{1}{e}.$$

→ 8



Renovar

En els problemes de renovació es tracta de determinar el moment òptim per retirar un equipament¹ (en un sentit molt ampli: pot ser fins i tot una persona) i substituir-lo per un altre. Tenen molta relació amb els de manteniment (una operació de manteniment modifica les característiques de l'equipament, i això ho podem veure com la substitució d'un equipament en un cert estat per un altre en un estat diferent). També tenen relació amb els problemes en què es tracta de decidir en quin moment ens hem de retirar (com a concursants, com a alumnes del professor Stein, com a Nadir, etc.) i que, com a problemes de *parar*, hem vist en el capítol anterior; la diferència és que en els de renovar se substitueix el que es retira, mentre que en els de parar el procés es tanca amb la retirada.

Els models de renovació tradicionals són poc realistes per a molts escenaris perquè consideren un horitzó il·limitat i absència de canvi tecnològic (per tant, l'equipament que es retira se substitueix per un altre d'idèntic). Només s'ajusten vagament a aquests supòsits la renovació d'elements de tecnologia molt consolidada i d'una durada petita en relació amb l'horitzó temporal que, implícitament o no, es consideri. Però les decisions les prenen les persones, que generalment tenen en compte la finitud de l'horitzó temporal en què cal considerar els resultats de les decisions preses; i la política òptima depèn significativament de la durada de l'horitzó. D'altra banda, els progressos tecnològics ara afecten fins i tot productes que en semblaven immunes (pensem, per exemple, en les bombetes d'incandescència que, més de cent anys després d'aparèixer, han estat substituïdes ràpidament per les de baix consum i, de moment, per les que contenen LED).

¹ La paraula *equipament* segurament suggereix més aviat un component important d'un sistema productiu que no pas un element com una junta tòrica, un circuit imprès, una vàlvula, etc. Tanmateix, aquí l'emprem en tots aquests sentits: pot tractar-se d'una premsa per fer peces de carrosseries o d'unes pastilles de fre, posem per cas.



Tot i que els problemes de renovació sovint es consideren, exclusivament, en el marc de les decisions tàctiques o operatives,² les decisions sobre la renovació dels equipaments són un element molt important en la planificació estratègica; per elegir un tipus d'equipament o un altre s'ha de tenir en compte la política de renovació en l'horitzó de planificació.

La renovació, com el manteniment, pot ser curativa (quan l'equipament ha deixat de funcionar) o preventiva (abans que l'equipament falli o abans que tingui un rendiment massa baix o uns costos de funcionament massa alts). Tradicionalment, la variable considerada en les decisions de renovació i de manteniment preventiu era l'edat de l'equipament (mesurada en el temps transcorregut o en l'ús: hores de funcionament, quilòmetres recorreguts...). Actualment es pot dur a terme un manteniment (o renovació), denominat predictiu, basat en la informació obtinguda en el curs del funcionament de l'equipament (per exemple, les vibracions d'una màquina).

En alguns casos, els models per optimitzar la renovació predictiva es podrien assimilar als de renovació preventiva, però en general el tractament de la renovació predictiva depèn molt de l'equipament concret de què es tracti. Ens centrem, per tant, en la renovació preventiva.

En el marc dels supòsits d'horitzó il·limitat i de manca de canvi tecnològic, determinar l'edat òptima de renovació dóna lloc bàsicament a dos models, corresponents al cas determinista i al cas aleatori. En el primer, s'assumeix que els equipaments, mitjançant el manteniment oportú, poden continuar funcionant fins que s'implementa la decisió de renovar-los (l'edat per fer-ho pot tenir una fita superior, derivada de qüestions tècniques, com ara la manca de disponibilitat de recanvis, o legals, per raons de seguretat o mediambientals, per exemple). En el segon, s'assumeix que l'equipament s'avaria, d'acord amb una llei de supervivència $v(t)$,³ i que aleshores s'ha de substituir, amb un cost addicional que

² Si en un moment donat, t_0 , disposem d'un equipament nou i en aquell moment no té alternatives, és clar que no té sentit plantejar-se'n la substitució. En aquesta situació, determinar la política òptima de renovació pot ser interessant a efectes de fer una previsió de tresoreria, susceptible de ser corregida més endavant, però no per decidir què hem de fer a t_0 . Si tenim un equipament usat sí que hi ha, si més no, la possibilitat de substituir-lo per un de nou igual o diferent o per un de segona mà en més bon estat i, per tant, és pertinent plantejar-se quina decisió s'ha de prendre a t_0 i implementar la que sigui òptima.

³ La llei de supervivència, $v(t)$, té un paper fonamental en molts problemes de renovació i de fiabilitat. És una funció que dóna la probabilitat que l'equipament funcioni quan té una edat t (l'edat pot ser el temps transcorregut des que es va estrenar —és a dir, el que s'entén habitualment per edat—, el temps de funcionament, el nombre de vegades que s'ha accionat —un interruptor, per exemple—, el nombre de quilòmetres recorreguts, el nombre d'aterratges, de pàgines impreses...). La llei de supervivència és monòtonament decreixent o estrictament decreixent (per tant, si és derivable, $v'(t) \leq 0$), amb $v(0) = 1$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$. La densitat de probabilitat d'avaría, si $v(t)$ és derivable, és $f(t) = -v'(t)$, ja que $v(t) = 1 - F(t)$. La taxa d'avaría (densitat de probabilitat d'avaría a t si l'equipament ha arribat viu a t) és $\lambda(t) = f(t) / v(t) = -v'(t) / v(t)$.

té una esperança matemàtica igual a a . En els dos casos té un paper clau el concepte de cicle de renovació.

Denominem cicle de renovació a la successió d'esdeveniments transcorreguts entre l'instant en què l'equipament està disponible i comença a funcionar i l'instant en què l'equipament que el substitueix està disponible i comença a funcionar (és a dir, l'estat de l'equipament és el mateix en els instants d'inici dels cicles); el temps δ (que pot ser determinista o aleatori) transcorregut des que s'atura l'equipament vell fins que el nou comença a funcionar, forma part, per tant, del temps del cicle.

Suposem que el cost de la renovació, C , inclou el de l'equipament nou i el de les operacions necessàries per instal·lar-lo i posar-lo a punt; suposem també que els costos de manteniment (que poden incloure costos derivats de la disminució de rendiment) entre t i $t + dt$ són iguals a $\varphi(t)dt$, amb $\varphi(t)$ creixent (estrictament creixent: $\varphi(t)$ constant vol dir que el comportament de l'equipament no depèn de l'edat i, per tant, no té sentit renovar-lo; $\varphi(t)$ monòtona però no estrictament creixent és un supòsit poc versemblant).

En el cas determinista, si no hi ha actualització, els costos d'un cicle són:

$$C + \int_0^{\tau} \varphi(t)dt$$

I el cost per unitat de temps, que és el que interessa minimitzar:

$$\gamma(\tau) = \frac{C + \int_0^{\tau} \varphi(t)dt}{\tau + \delta}$$

Aquesta funció té un terme, $C / (\tau + \delta)$, amb derivada negativa que decreix asimptòticament amb límit 0, i un $(\int_0^{\tau} \varphi(t)dt / (\tau + \delta))$, amb derivada positiva (pel supòsit que $\varphi(t)$ és creixent). Per tant, si descartem el cas que $\gamma(\tau)$ és creixent des de $\tau = 0$, hi ha un valor de τ en que s'anul·la la derivada de $\gamma(\tau)$:

$$C = (\tau + \delta) \cdot \varphi(\tau) - \int_0^{\tau} \varphi(t)dt$$

Amb un tipus d'interès instantani igual a i , els costos d'un cicle de renovació, actualitzats a l'instant d'inici del cicle, són, si la renovació es fa a l'edat τ :

Quan l'edat és una variable discreta (per la seva índole o perquè la discretitzem per conveniència), la notació més habitual és $v(t)$ per a la probabilitat de supervivència a l'edat t , $p_t (= v_{t-1} - v_t)$ per a la probabilitat d'avaría entre les edats $t - 1$ i t (és a dir, en el període t si l'edat correspon a temps discret), i $\lambda_t = p_t / v_t$ per a la taxa d'avaría.



$$C + \int_0^{\tau} e^{-i \cdot t} \cdot \varphi(t) dt$$

El que interessa minimitzar és la taxa de cost, $\gamma(\tau)$, és a dir, el cost constant per unitat de temps al qual correspon, en un cicle, un valor actualitzat igual al cost actualitzat per cicle i que, per tant, es determina amb l'expressió:

$$C + \int_0^{\tau} e^{-i \cdot t} \cdot \varphi(t) dt = \gamma(\tau) \cdot \int_0^{\tau+\delta} e^{-i \cdot t} dt = \frac{1 - e^{-i \cdot (\tau+\delta)}}{i} \cdot \gamma(\tau)$$

D'on:

$$\gamma(\tau) = C \cdot \frac{i}{1 - e^{-i \cdot (\tau+\delta)}} + \frac{i}{1 - e^{-i \cdot (\tau+\delta)}} \cdot \int_0^{\tau} e^{-i \cdot t} \cdot \varphi(t) dt$$

Amb un raonament anàleg al que hem exposat per a quan no hi ha actualització, s'arriba també a la conclusió que $\gamma(\tau)$ primer decreix i després creix, i a l'òptim s'ha de complir la condició de derivada nul·la.

Tant si hi ha actualització com si no, $\gamma(\tau)$ és una funció d'una sola variable i , per tant, és molt fàcil determinar el valor òptim de τ . En molts casos, el temps s'ha de tractar com una variable discreta, perquè la renovació només és possible en moments específics (per exemple, a final d'any); aleshores, l'optimització s'obté per mera enumeració.

El cas aleatori amb actualització i temps continu necessita un tractament complex, però es pot abordar discretitzant el temps i fent ús d'arbres de decisió.

Si no hi ha actualització, l'esperança matemàtica del cost per període és igual al quocient de l'esperança matemàtica del cost per cicle per l'esperança matemàtica de la durada del cicle:⁴

$$\gamma(\tau) = \frac{C + \int_0^{\tau} \varphi(t) \cdot v(t) dt + a \cdot [1 - v(\tau)]}{\int_0^{\tau} v(t) dt + \delta}$$

Aquesta expressió, en el cas $\varphi(t) = 0$, es redueix a:

$$\gamma(\tau) = \frac{C + a \cdot [1 - v(\tau)]}{\int_0^{\tau} v(t) dt + \delta}$$

⁴ L'esperança matemàtica de la durada d'un cicle és igual a l'esperança matemàtica de la vida de l'equipament més δ . L'esperança matemàtica de la vida de l'equipament, si $f(t)$ és la funció de densitat de probabilitat d'avaría, és $\int_0^{\tau} t \cdot f(t) dt + \tau \cdot v(\tau)$. Com que $v(t) - v(t + dt) = f(t) \cdot dt$, $f(t) = -v'(t)$, i de la integració per parts de $\int_0^{\tau} t \cdot v'(t) dt$ es dedueix que l'esperança matemàtica de la vida de l'element és $\int_0^{\tau} v(t) dt$.

L'anàlisi de les propietats de la funció $\gamma(t)$ en el cas aleatori queda fora dels objectius d'aquest text. Si $\varphi(t) = 0$, es pot donar el cas que la renovació preventiva no sigui convenient, és a dir, que sigui millor renovar l'equipament només quan tingui lloc una avaria (si la llei de supervivència és exponencial, l'equipament no té memòria i les probabilitats d'avaría *a posteriori* no depenen de l'edat, és a dir, que el comportament de l'equipament, tingui l'edat que tingui, és el mateix que si fos nou; és clar, per tant, que en aquest supòsit només té sentit canviar l'equipament en cas d'avaría).

Però, tornem una mica enrere, aquests models es deriven dels supòsits d'horitzó il·limitat i absència de canvi tecnològic, i, per tant, difícilment encaixen en escenaris reals. La consideració d'horitzons limitats permet tenir en compte fàcilment qualsevol supòsit sobre l'evolució de la tecnologia i dels costos, tant en marcs deterministes com aleatoris, i fins i tot permet determinar la política òptima de renovació de conjunts d'equipaments relacionats entre si. Ho veurem a través dels problemes d'aquest capítol.

RE01. Més fusta

Gestionem, per obtenir fusta, una plantació d'arbres d'una espècie determinada.

El volum de fusta utilitzable que proporciona un arbre depèn de la seva edat segons l'expressió $V_t = V_M \cdot (1 - e^{-\mu t})$, on V_M (m^3) i μ són constants i t és l'edat de l'arbre, expressada en anys. El cost de plantar un arbre és C i les despeses anuals de manteniment (esporgar, adobs i tractaments antiparàsits) són iguals a αV_t u. m. El cost de talar l'arbre i serrar-ne la fusta per comercialitzar-la és $k + k \cdot V_t$ u. m. La fusta es ven a p u. m./ m^3 .

Els arbres es planten cap a principis de gener i es talen cap a finals d'any. Les despeses de manteniment es paguen també a final d'any.

Es tracta de determinar, amb horitzó il·limitat, l'edat òptima per talar els arbres, sense i amb actualització (amb un tipus d'interès del 10 %), amb les dades següents:

$$V_M = 10 \text{ m}^3, \mu = 0,2 \text{ anys}^{-1}, C = 10.000 \text{ u. m.}, \alpha = 400 \text{ u. m. / m}^3$$

$$K = 5.000 \text{ u. m.}, k = 2.000 \text{ u. m.}, p = 11.000 \text{ u. m./m}^3$$

En aquest cas, és versemblant, pel que fa l'equipament que s'ha de renovar, el supòsit d'absència de canvi tecnològic.

Sense actualització, l'edat òptima per talar l'arbre és la que maximitza el marge mitjà anual entre ingressos i despeses:



$$\Gamma_\tau = \frac{\rho V_\tau - \left(C + \alpha \cdot \sum_{t=1}^{\tau} V_t + K + k V_\tau \right)}{\tau}, \text{ amb } V_t = V_M \cdot (1 - e^{-\mu \cdot t})$$

L'òptim es troba per enumeració: $(\tau = 1, 2, \dots) \tau^* = 3, \Gamma^* = \Gamma_3 = 7.252,80$ u. m./any

Amb actualització, l'edat òptima de renovació és la que maximitza l'anualitat, a (és a dir, el moviment de fons anual constant que té el mateix valor actualitzat que la successió de moviments de fons derivats de plantar, mantenir, talar i preparar l'arbre):

$$a \cdot \sum_{t=1}^{\tau} \frac{1}{(1+i)^t} = a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^\tau}{i} = -C - \alpha \cdot \sum_{t=1}^{\tau} \frac{V_t}{(1+i)^t} + \frac{-K - k V_\tau + \rho V_\tau}{(1+i)^\tau}$$

I l'edat òptima és $\tau^* = 3$, amb $a^* = 5.487,69$ u. m./any.

Si suposem un horitzó de 10 anys, sense actualització, la política òptima es pot determinar amb els mateixos procediments que hem vist a FO02.4 per resoldre el problema dels lots òptims amb horitzó limitat.

En aquest cas, la taula de guanys és la següent:

De ↓ a →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13	36.517,58	38.417,72	39.248,35	39.203,33	38.441,40
1		589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13	36.517,58	38.417,72	39.248,35	39.203,33
2			589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13	36.517,58	38.417,72	39.248,35
3				589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13	36.517,58	38.417,72
4					589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13	36.517,58
5						589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13
6							589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16
7								589,16	12.627,40	21.758,40
8									589,16	12.627,40
9										589,16

I la política òptima consisteix a talar els arbres al final dels anys 3, 6 i 10 (com que no hi ha actualització, també són òptimes 4-7-10 i 3-7-10), i el valor corresponent de la funció objectiu és 72.025,96 (7.202,60 per any).

Amb càlculs anàlegs podríem comparar els resultats econòmics que podríem obtenir amb diferents espècies arbòries.

Amb aquest esquema es pot tractar el canvi tecnològic o estats inicials diferents.

Pel que fa al diguem-ne canvi tecnològic (és a dir, a la possibilitat de substituir un equipament per un altre de característiques diferents), suposem que des del final de l'any 2 es pot plantar una varietat transgènica que creix més de pressa ($\mu = 0,3 \text{ anys}^{-1}$), però és una mica més cara ($C = 12.000 \text{ u. m.}$), i que les altres dades no canvien.

Aleshores, els guanys de talar l'arbre transgènic a edat 1, 2, ... són els següents:

Edat	1	2	3	4	5	6	7	8
Guany	5.289,633	20.765,47	31.193,53	37.882,1	41.800,38	43.666,39	44.012,04	43.231,37

Per a totes les edats, els guanys són més elevats que els corresponents a la varietat no transgènica, per la qual cosa la taula de guanys que en resulta és la següent:

De↓ a→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13	36.517,58	38.417,72	39.248,35	39.203,33	38.441,40
1		589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13	36.517,58	38.417,72	39.248,35	39.203,33
2			5.289,63	20.765,47	31.193,53	37.882,10	41.800,38	43.666,39	44.012,04	43.231,37
3				5.289,63	20.765,47	31.193,53	37.882,10	41.800,38	43.666,39	44.012,04
4					5.289,63	20.765,47	31.193,53	37.882,10	41.800,38	43.666,39
5						5.289,63	20.765,47	31.193,53	37.882,10	41.800,38
6							5.289,63	20.765,47	31.193,53	37.882,10
7								5.289,63	20.765,47	31.193,53
8									5.289,63	20.765,47
9										5.289,63

Les polítiques òptimes, amb un guany total de 95.779,93 u. m. (9.577,99 u. m./any), consisteixen a talar l'arbre no transgènic a edat 2 i 3 arbres transgènics a edats 3-3-2, 3-2-3 o 2-3-3.

Finalment, deixem de banda la varietat transgènica i suposem que a l'instant inicial tenim un arbre d'edat 2. En aquest cas, hem de comparar les dues opcions següents:

- Talar l'arbre (obtenim 24.671,20 u. m.), plantar-ne un d'edat 0 i aplicar la política òptima calculada anteriorment (amb un guany de 72.025,96 u. m.). El guany total és, per tant, de 96.697,16 u. m.
- No talar l'arbre en l'instant inicial i aplicar la política òptima corresponent a aquesta situació. Per determinar-la hem de canviar la primera fila de la taula de guanys, que queda així:



De↓ a→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	23.802,20	30.552,96	35.354,93	38.561,38	40.461,52	4.1292,14	41.247,13	40.485,19	39.136,30	37.306,84
1		589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13	36.517,58	38.417,72	39.248,35	39.203,33
2			589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13	36.517,58	38.417,72	39.248,35
3				589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13	36.517,58	38.417,72
4					589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13	36.517,58
5						589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16	33.311,13
6							589,16	12.627,40	21.758,40	28.509,16
7								589,16	12.627,40	21.758,40
8									589,16	12.627,40
9										589,16

La política òptima consisteix a talar l'arbre inicial al cap d'un any (és a dir, a edat 3) i 3 arbres més a edat 3, amb un guany total de 89.077,41 u. m.

Per tant, l'opció preferible és la (i): renovar l'arbre d'edat 2 a l'instant inicial.

El problema es pot estendre al cas que cada any, abans de talar l'arbre, hi hagi, amb probabilitat igual per exemple a 0,1 i amb independència del que hagi passat els anys anteriors, una glaçada que mati l'arbre i obligui a talar-lo i a vendre la fusta a 1.000 u. m./m³.

RE02. Au voleur!

L'empresa 6A fabrica, instal·la i es cuida del manteniment d'un aparell antirobatoris que funciona amb una bateria d'alta capacitat, que té un cost de 100 u. m. i una funció de densitat de probabilitat d'avaría uniforme entre 2.000 i 3.000 hores. L'adquisició de l'aparell implica la subscripció d'un contracte de manteniment i d'una pòlissa d'assegurança contra robatoris i altres contingències.

La bateria es pot canviar a una edat determinada, si hi arriba, i, si no, abans, quan s'avaría. En qualsevol cas, el cost del canvi, addicional al de la bateria, és de 50 u. m. si es fa en el moment programat i de 80 u. m. si el canvi és per una avaría. En aquest cas, el temps mitjà que transcorre entre l'avís automàtic a la central i l'inici de la reposició és de 4 hores, durant les quals el local corresponent queda sense protecció. La probabilitat que tingui lloc un robatori durant aquestes 4 hores és 0,0001 i el cost mitjà del robatori per a 6A és de 4.000 u. m. El temps necessari per canviar la bateria usada o avariada per una de nova és d'1 hora,

durant la qual el local segueix protegit, tot i que l'aparell queda fora de servei, per la presència del personal que fa la substitució.

Si es considera horitzó il·limitat i es prescindeix de l'actualització, el criteri habitual per optimitzar la política de renovació és l'esperança matemàtica del cost per unitat de temps. En casos de sistemes crítics en què la disponibilitat és primordial, el criteri principal, que s'ha de maximitzar, pot ser la proporció del temps que l'aparell està en condicions de funcionar.

Aquest darrer criteri s'optimitza, en el cas dels aparells considerats, mitjançant renovacions programades de les bateries a les 2.000 hores de funcionament, amb un cost mitjà per hora de:

$$\frac{100 + 50}{2.000 + 1} = 0,0750 \text{ u. m./h}$$

Si l'objectiu és minimitzar l'esperança del cost per hora, s'ha de considerar la possibilitat de programar la renovació de la bateria a una edat, $\tau \geq 2.000$ hores.

Com que la llei de supervivència de la bateria és $v(t) = 1 (0 \leq t \leq 2.000)$ i $v(t) = 1 - \int_{2.000}^t 0,001 dx = 1 - 0,001 \cdot (t - 2.000) = 3 - 0,001 \cdot t (2.000 \leq t \leq 3.000)$, l'esperança matemàtica del cost per període (amb $\tau \geq 2.000$) és:

$$\Gamma(\tau) = \frac{150 + (30 + 0,0001 \cdot 4.000) \cdot (0,001 \cdot \tau - 2)}{\int_0^{\tau} v(t) dt + 1 + 4 \cdot (0,001 \cdot \tau - 2)} = \frac{89,2 + 0,0304 \cdot \tau}{-0,0005 \cdot \tau^2 + 3,004 \cdot \tau - 2.007}$$

I el mínim és 0,0694 u. m./hora, per a $\tau = 2.566,00$ hores. El cost és menor que el corresponent a la renovació cada 2.000, però la disponibilitat també és menor, perquè ara l'esperança matemàtica de la durada del cycle de renovació és 2.409,01 (el valor del denominador de $\Gamma(\tau)$ per a $\tau = 2.566,00$), mentre que l'esperança matemàtica del temps que hi ha protecció és la suma de la vida de la bateria (2.405,82) i el temps de reposició; per tant, la proporció de temps que hi ha protecció antibacteris és:

$$\frac{2.405,82 + 1}{2.409,01} = 0,99906$$

És a dir, la proporció de temps sense protecció és $1 - 0,99906 = 0,00094$.

La probabilitat que un cycle acabi a causa d'una avaria és 0,566 (molt alta). Segurament, el cost per hora no és l'únic criteri que s'hauria de tenir en compte i seria raonable plantejar la minimització de la suma de l'esperança matemàtica del cost horari amb el producte d'un paràmetre no negatiu per la proporció de temps sense protecció. El paràmetre esmentat permetria donar més o menys importància a un dels criteris en relació amb l'altre.



RE03. Rejuveniment

Una empresa consultora es disposa a aplicar un pla permanent de rejuveniment de la plantilla. El pla consisteix a acomiadar els membres sènior després d'un nombre determinat d'anys d'exercici (que denomina període de rejuveniment) i substituir-los per un membre júnior que esdevindrà sènior amb el pas del temps.

Cada vegada que es fa una substitució hi ha unes despeses d'1 u. m., corresponents al procés de selecció, més una indemnització equivalent a 2 anys dels costos laborals del darrer any de contracte per a la persona acomiadada. El costos laborals anuals inicials són de 6 u. m. per cada un dels 3 primers anys, de 7 u. m. per al 4t, 5è i 6è i així successivament, amb un augment d'1 u. m. cada 3 anys. Els ingressos que aporta la persona contractada són de 16 u. m. el primer any i 22, 24, 26, 26, 26, 24, 22, 20, 18, 16... els següents.

Es tracta de determinar la durada del període de rejuveniment.

No considerem l'actualització, per no complicar els càlculs. Si fos necessari, ens caldria saber el tipus d'interès aplicable.

Amb horitzó il·limitat, només s'ha de calcular la diferència mitjana anual entre ingressos i costos corresponents a 1, 2, 3... anys d'exercici (de les diferències entre ingressos i costos en direm guanys). És clar que no cal anar més enllà de l'any 14, ja que a l'any 15 els ingressos aportats pel sènior són inferiors als seus costos laborals.

Any	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
(1)	-3,00	13,00	31,00	48,00	67,00	86,00	100,00	114,00	126,00	133,00	140,00	145,00	147,00	147,00
(2)	-3,00	6,50	10,33	12,00	13,40	14,33	14,29	14,00	13,33	12,73	12,08	11,31	10,50	9,67

(1) Ingressos - costos des de la contractació fins a l'acomiadament

(2) (1)/anys

Per tant, la política òptima és fer la substitució cada 6 anys, amb 14,33 u. m./any de diferència mitjana entre ingressos i despeses.

Ara bé, si l'horitzó és finit i determinat (suposem, per exemple, de 10 anys), s'ha de veure si és millor un sol contracte de 10 anys o una combinació de contractes de menys durada.

La política òptima es pot obtenir amb els mateixos procediments que hem vist a FO02.4 i a RE01. Amb les dades indicades hi ha 3 polítiques òptimes (6 + 4, 4 + 6 i 5 + 5), amb un valor de 134 u. m.

Tanmateix, a causa de l'estrès originat per les exigències de l'exercici professional, les persones contractades causen baixa per llarga malaltia i han de deixar l'empresa al final de l'any t , si no l'han abandonada voluntàriament al final de l'any $t - 1$ o abans, amb una probabilitat $0,1t$ ($t \leq 10$). El fet que es produeixi

aquesta circumstància implica perturbacions en projectes en curs i en la relació amb les empreses clientes, amb un cost mitjà de 30 u. m.

Determinem la durada del període de rejuveniment que maximitzi l'esperança matemàtica dels guanys per període, igual al quocient de l'esperança matemàtica dels guanys per cycle per l'esperança matemàtica de la durada del cycle.

Suposem que la baixa per llarga malaltia es produeix al final del període, i que si el període és el darrer del període de rejuveniment, el cost és el corresponent a la indemnització per fi de contracte.

Siguin v_t els valors de la llei de supervivència (a l'empresa) de la persona contractada. Les probabilitats d'abandonar l'empresa indicades abans corresponen a les denominades taxes d'avaria (és a dir, la probabilitat de fallada –en aquest cas, deixar l'empresa al final del període– en el supòsit que no hi ha hagut fallada abans):

$$\lambda_1 = 0,1; \lambda_2 = 0,2; \lambda_3 = 0,3...$$

Els valors de la llei de supervivència (amb $v_0 = 1$) els podem calcular amb l'expressió:

$$v_t = \prod_{\tau=1}^t (1 - \lambda_\tau)$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_t	1,0000	0,9000	0,7200	0,5040	0,3024	0,1512	0,0605	0,0181	0,0036	0,0004	0,0000

Si notem g_t i c_t els guanys i els costos laborals del període t , respectivament, l'esperança matemàtica dels guanys en un cycle contractual és:

$$-1 + \sum_{t=1}^{\tau} v_{t-1} \cdot g_t - (1 - v_{\tau-1}) \cdot 30 - v_{\tau-1} \cdot 2 \cdot c_\tau = -31 + \sum_{t=1}^{\tau} v_{t-1} \cdot g_t + (30 - 2 \cdot c_\tau) \cdot v_{\tau-1}$$

I l'esperança matemàtica de la durada del cycle (si negligim el temps que cal a l'empresa per substituir la persona que ha causat baixa):

$$\sum_{t=0}^{\tau-1} v_t$$

Els resultats dels càlculs els recull la taula de la pàgina següent.

L'òptim correspon, per tant, a un període de rejuveniment de 5 anys. L'esperança matemàtica dels guanys per període és sensiblement inferior a la calculada sense el supòsit que el sènior es retiri abans de la finalització del període de rejuveniment, perquè el cost d'aquesta incidència és molt alt i la probabilitat que tingui lloc és significativa.



τ	Esp. guanys	Esp.durada	Esp. guanys per any
1	-3,0000	1,0000	-3,0000
2	9,6000	1,9000	5,0526
3	19,3200	2,6200	7,3741
4	24,0000	3,1240	7,6825
5	26,5200	3,4264	7,7399
6	26,9736	3,5776	7,5396
7	26,3688	3,6381	7,2480
8	26,0301	3,6562	7,1194
9	25,8704	3,6599	7,0687
10	25,8273	3,6602	7,0562

La renovació d'un equipament en horitzó finit i determinat, T , i temps discret també es pot abordar com a problema de camí màxim en un graf polietàpic, en què cada etapa correspon a l'instant de l'inici d'un període (que coincideix amb el final del període anterior) i en què els vèrtexs corresponen a l'estat (en aquest cas, edat de l'equipament) a l'inici (o, alternativament, al final) del període. Si l'equipament es troba en l'estat τ a l'inici del període t , a l'inici del període $t+1$ pot passar a l'estat 0, si decidim renovar-lo al final del període t (inici del $t+1$), o a l'estat $\tau+1$. Els arcs del graf corresponen a les transicions factibles d'estats d'una etapa a estats de la següent; adicionalment, al pas dels vèrtexs de T a un vèrtex, ω , de sortida del graf. Els arcs que representen transicions entre estats tenen associat un valor, que és el guany per l'activitat de l'equipament en l'estat de partida en el període i , si l'estat és 0 (hi ha hagut renovació), més el valor residual de l'equipament menys el cost d'adquisició del nou equipament; el valor dels arcs que van a ω és el valor residual de l'equipament. Configurat aquest graf, es tracta de trobar-hi el camí màxim entre el vèrtex inicial i ω , la qual cosa és particularment senzilla en tractar-se d'un graf polietàpic.

El procediment permet tenir en compte l'actualització i el canvi tecnològic, però això també és possible amb el graf que hem fet servir, explícitament o implícita, a FO02.4, RE01 i RE03, per la qual cosa en el cas d'un sol equipament el graf polietàpic no ofereix cap avantatge, més aviat al contrari, perquè aquest graf té més vèrtexs que l'altre, tot i que aquest inconvenient no sigui gaire rellevant.

Ara bé, si es tracta de determinar la política òptima de renovació, en horitzó finit i determinat i temps discret, dels equipaments que formen un sistema el comportament del qual depèn del conjunt de les seves edats, només podem recórrer al graf polietàpic. Si suposem, per no complicar la notació, que el sistema comprèn dos equipaments, A i B, l'estat es defineix amb el parell de valors (τ_A, τ_B) de les edats dels equipaments. De (τ_A, τ_B) es pot passar a (τ_A+1, τ_B+1) , $(0, \tau_B+1)$, $(\tau_A+1, 0)$ o a $(0, 0)$, segons si no renovem cap equipament, renovem només A, renovem només B o renovem A i B, respectivament. Com més gran

és el nombre d'equipaments, més creix el nombre de vèrtexs, però en qualsevol cas es tracta de determinar el camí òptim entre el vèrtex inicial i ω .

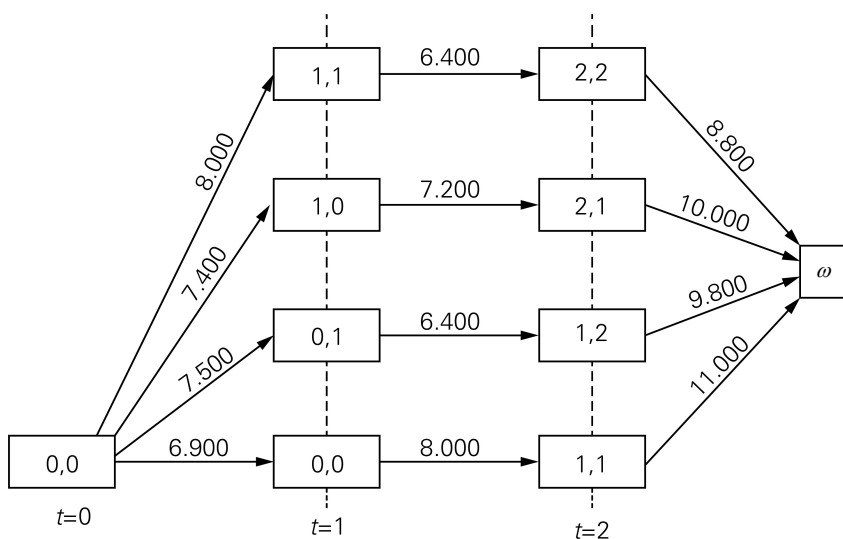
RE04. *The light that burns twice as bright burns half as long*⁵

Un sistema per a la fabricació automàtica d'un producte de moda amb un cicle de vida estimat de 2 anys consta de dues màquines en sèrie, A i B, cada una de les quals duu a terme una de les dues operacions necessàries per obtenir el producte. Per tal de satisfer la gran demanda, el sistema funciona 8.000 hores l'any i les 760 hores restants es dediquen a reparacions i al complex manteniment de les màquines. Aquest ús tan intens causa una pèrdua significativa de la capacitat de les màquines. La màquina A, si comença l'any nova, pot produir a una mitjana de 1.000 unitats/hora; però quan té un any, només 900 unitats/hora; els valors anàlegs per a la màquina B són 1.000 i 800 unitats/hora.

Cada unitat de producte aporta un marge d'1 u. m. Adquirir una màquina A (B) costa 1.000.000 (1.200.000) u. m. i el seu valor residual, quan té un any, és de 500.000 (600.000) u. m., i quan en té 2, és de 400.000 (480.000) u. m.

Convé renovar alguna màquina, o les dues, al final del primer any?

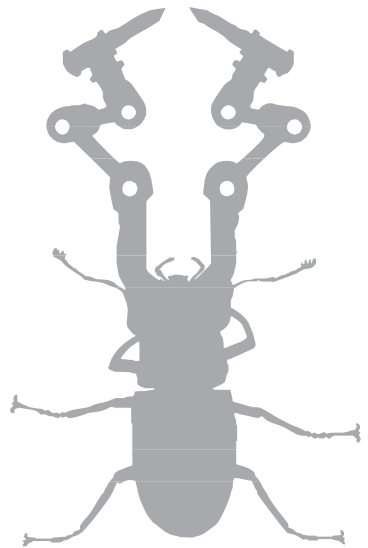
De l'estat inicial (0,0) es pot passar, a l'inici del 2n any, a (0,0), (0,1), (1,0) i (1,1). Des de cada un d'aquests estats s'arriba, respectivament, als estats (1,1), (1,2), (2,1) i (2,2) al final del 2n any, que és també el final de l'horitzó de planificació. El graf polietàpic es representa a la figura, amb els valors en milers d'u. m.



⁵ Sentència popularitzada per la pel·lícula *Blade Runner* i que s'atribueix a Laozi (conegut també com Lao Tse).



El càlcul del camí mínim és trivial, perquè els 4 camins que uneixen l'estat inicial $(0,0)$ amb el vèrtex ω no tenen arcs comuns. El camí màxim (amb un marge econòmic total, tenint en compte el cost de les màquines inicials, de 13.800.000 u. m.) és $(0,0) - (0,0) - (1,1) - \omega$, és a dir, la política òptima consisteix a renovar les dues màquines al final del primer any (la recuperació de la capacitat inicial de les màquines compensa sobradament la diferència entre els costos d'adquisició i els valors residuals respectius).



→ 9



arriba sense entrebancs i un dels seus li pregunta com ho sabia; Stewart li respon "No ho sabia. Vaig pensar que podia passar i ho vaig encertar". Mentrestant, una allau causa baixes en el grup de Roman, la qual finalment és acollida, amb els altres supervivents, per Stewart i els seus. Roman diu a Stewart: "Em vaig equivocar"; i ell li respon "No es va equivocar. Va prendre una decisió i no va tenir sort".

De fet, molts llibres de text de l'àmbit d'organització no fan cap referència a la fiabilitat i per això no és estrany que l'estudiant, quan passa a l'exercici professional, no la tingui en compte.

La fiabilitat dels elements depèn de la tecnologia o de la medicina, segons si es tracta d'objectes o de persones. Aquí ens interessem per la fiabilitat dels sistemes, donada la dels elements que els componen o que poden compondre'ls. Amb els enunciats, de dificultat molt diversa, s'il·lustra la varietat de situacions en què la fiabilitat és altament rellevant (en uns es tracta d'enrobar un sistema i en uns altres, només d'avaluar-ne la fiabilitat, però ens ha semblat prou raonable incloure'ls tots en el mateix capítol).

Durant molts anys hem iniciat les classes de fiabilitat amb un exercici molt senzill que reproduïm a continuació.

EN01. Gran final

Quants autocars de 50 places calen per formar una corrua amb capacitat per traslladar 10.000 persones de α a ω ?

Formulada la pregunta, la reacció general és de perplexitat. L'estudiant és conscient que la resposta que sembla òbvia ($10.000/50 = 200$ autocars) és inversemblant perquè és massa fàcil de trobar.

Com que l'enunciat és molt obert, hi ha diverses respostes possibles.

Una és imposar que la probabilitat que tothom pugui arribar a ω amb un autocar de la corrua no sigui inferior a la probabilitat que hi arribi un autocar sol.

Sigui p aquesta darrera probabilitat. Assumim que les probabilitats que els autocars arribin a ω són independents (la qual cosa és un supòsit fort, perquè el fet que els autocars formin una caravana implica que si un autocar té una avaria augmenten les probabilitats que els altres en tinguin³). Aleshores, si n és el

³ El cas més famós en què l'avaria d'un vehicle propicia les avaries d'uns altres és l'operació *Eagle Claw*, de 1980, dissenyada per rescatar els ostatges de l'ambaixada dels Estats Units a Teheran, sobre la qual hi ha referències nombroses a Internet.

nombre d'autocars que formen la caravana, el nombre d'autocars que arribaran a ω segueix una llei binomial (n, p) . Per tant, volem determinar el menor de n per al qual es compleix:

$$\sum_{k=200}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \geq p$$

Per trobar el valor de n només cal comprovar si es compleix la condició anterior per a $n = 201, 202, \dots$

Per exemple, per a $p = 0,999$ tenim $n^* = 203$, amb una probabilitat que arribin a ω almenys 200 autocars igual a 0,999941396.

Generalment, el càlcul de la fiabilitat d'un sistema, com el disseny d'un sistema perquè tingui una fiabilitat donada, són problemes de probabilitats més o menys complexos segons els casos. Ho hem vist en l'enunciat anterior i ho anirem veient amb els que hi ha tot seguit.

El que hi ha a continuació és peculiar, perquè es tracta només d'opinar sobre les declaracions d'un directiu d'una empresa elèctrica arran de la caiguda d'una línia causada per un fortíssim temporal de neu.

EN02. Grandíssima torbonada

Doneu la vostra opinió sobre la frase en negreta del text següent:

“¿Con la MAT se hubiese evitado el desastre?

Unas instalaciones cuanto más malladas están, más seguridad dan. [...] Lo que necesitamos es redundancia, más líneas. Si un punto en vez de alimentarlo con una línea lo hacemos con dos, cuando se cae una, tienes la del otro lado. Y, relacionadas con la MAT y la interconexión con Francia, que no depende de nosotros, hay otros proyectos de Endesa que, de estar en servicio, hubiesen dado más redundancia.

¿Pero habrían resistido el temporal?

No podemos asegurar al cien por cien que no hubiese pasado lo mismo, pero, evidentemente, **con esta redundancia la probabilidad hubiera bajado a la mitad.**”⁴

Però podem trobar molts exemples relatius a sistemes que ens són més familiars, com les xarxes elèctriques o de distribució de fluids: una avaria en un element de la xarxa genera sobrecàrregues en altres elements i això incrementa la probabilitat que s'avarïin.

⁴ Entrevista d'Óscar Muñoz a José Damián Bogas, director general d'Endesa per a Espanya i Portugal, arran del temporal de neu del mes de març de 2010 (*La Vanguardia*, 15/03/2010, “Vivir”, p. 3).



Certament, no es podia assegurar al cent per cent que no hagués passat el mateix, per més redundància que hi hagués a la xarxa.

Una altra cosa és que la redundància hagués baixat exactament a la meitat la probabilitat del desastre. Al contrari, això és altament improbable.

Suposem que passem d'una sola línia a n línies.

En un extrem, si les línies estiguessin molt a prop les unes de les altres, el temporal segurament les hauria afectat totes de la mateixa manera. És a dir, la probabilitat del desastre seria la mateixa amb o sense redundància, a causa de la dependència total entre les probabilitats d'avaría de les línies.

En un altre extrem, si totes les línies tinguessin probabilitats d'avaría independents i iguals a p , la probabilitat de desastre passaria de p a p^n i s'hauria de complir $p^n = \frac{1}{2}p$, o sigui, $p^{n-1} = 1/2$. Aquesta equació només té una solució real positiva per a cada valor de n ; a la taula següent figuren els corresponents a $n = 2, \dots, 10$ (poc versemblants com a probabilitat d'avaría d'una línia):

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,5000	0,7071	0,7937	0,8409	0,8706	0,8909	0,9057	0,9170	0,9259

En casos intermedis, pel que fa a la independència de les probabilitats d'avaría, arribaríem, amb més o menys dificultats de càlcul, a resultats anàlegs.

EN03. Garantia

PEELSA fabrica petits electrodomèstics, que garanteix per 2 anys. Si un aparell s'avaría abans que expiri la garantia, PEELSA l'ha de reparar o l'ha de substituir per un aparell nou, i assumir el cost corresponent.

En un dels productes de PEELSA, pràcticament totes les avaries, amb un cost per a l'empresa de 100 u. m. per avaría, són degudes a la fallada d'un element que té un cost de 3 u. m. i una durada que, expressada en anys de funcionament, segueix una llei $N(2,4, 0,04)$. PEELSA estudia la possibilitat d'incloure a cada aparell dos exemplars de l'element d'un model diferent que segueix la llei $N(2,3, 0,04)$. Els dos exemplars funcionarien simultàniament, però l'avaría d'un dels dos no impediria que l'aparell seguís funcionant.

Quin cost pot admetre PEELSA per a cada unitat d'aquest model de l'element?

La probabilitat que un element falli en el període de garantia és 0,023 en el cas del model actual i 0,067 en el cas del model nou. Per tant, la probabilitat que

l'aparell deixi de funcionar en el període de garantia ara és de 0,023 i seria, en el supòsit que els dos exemplars tinguessin comportaments independents:

$$1 - (0,933 + 0,933 - 0,933^2) = 0,067^2 = 0,0045$$

Si x és el cost d'un exemplar del nou model de l'element, el valor màxim de x que PEELSA pot admetre és la solució de:

$$3 + 0,023 \cdot (97 + 3) = 2 \cdot x + 0,0045 \cdot (97 + x)$$

és a dir, $x = 2,426$ u. m.

No s'ha tingut en compte la possibilitat que després de reparar la primera avaria se'n produeixi una altra dins del període de garantia, perquè la probabilitat associada a aquest fet és negligible. Tampoc no s'ha tingut en compte que, amb la mateixa esperança matemàtica dels costos, el fet de passar de més d'un 2 % d'avaries en el període de garantia a un 0,4 % implicaria una millora significativa de la imatge del producte i de l'empresa.

EN04. Voleu si voleu

En el procés de disseny del nou aeroport internacional d'Everlateness s'han plantejat dues opcions per al parc de vehicles de transport entre les aeronaus i la terminal:

A: autobusos, amb un cost unitari de 12 u. m. i una probabilitat de funcionament igual a 0,95.

B: unitats tractores i remolcs, amb costos unitaris i probabilitats de funcionament iguals, respectivament a 8 i 6 u. m. i a 0,96 i 0,98.

Es pretén que la probabilitat que hi hagi almenys 3 vehicles disponibles no sigui inferior a 0,99, i que la probabilitat que hi hagi almenys un vehicle no sigui inferior a 0,999.

Opció A:

Amb 3 autobusos, la probabilitat que n'hi hagi almenys un de disponible és $1 - 0,05^3 = 0,999875$. La probabilitat que n'hi hagi 3 és $0,95^3 = 0,857$; per tant, el nombre d'autobusos ha de ser > 3 . Els càlculs són anàlegs als del problema EN01 i el resultat és que calen 5 autobusos, amb un cost de 60 u. m. i una probabilitat que almenys 3 autobusos funcionin igual a 0,9988.

Opció B:

Amb 3 tractores, la probabilitat que en funcioni almenys una és $1 - 0,04^3 = 0,999936$; amb 3 remolcs, la probabilitat que en funcioni almenys 1,



$1 - 0,02^3 = 0,999992$. Per tant, la probabilitat de poder formar almenys un conjunt tractora-remolc és de $0,999936 \cdot 0,999992 = 0,999928 > 0,999$. Però per assolir l'objectiu de fiabilitat corresponent a no menys de 3 vehicles en funcionament cal tenir-ne més unitats. Amb 4 de cada no és suficient, però sí amb 4 tractores i 5 remolcs (62 u. m. i probabilitat 0,9908), o 5 tractores i 4 remolcs (64 u. m. i probabilitat 0,9971).

Per tant, la solució més econòmica que satisfà les condicions de fiabilitat és tenir un parc de 5 autobusos.

EN05. Just-on-time

Una de les plantes de l'empresa manufacturera MANJOT treballa amb n dies d'estoc d'un component que li envia diàriament, en la quantitat necessària per a un dia, la proveïdora PROJOT. La probabilitat que PROJOT subministri el component a MANJOT un dia qualsevol és p i, si un dia falla el subministrament, la probabilitat que falli durant k dies seguits és π_k ($k = 1, \dots, K$). Quan es reprèn el subministrament es restableix immediatament l'estoc de n dies. El cost de possessió d'un dia d'estoc del component és α u. m./dia i els cost diari de no poder produir per manca del component és β u. m./dia.

Es tracta de plantejar una expressió que permeti determinar el nombre de dies d'estoc del component que minimitza l'esperança matemàtica dels costos.

És clar que n , que considerarem enter, ha de ser $0 \leq n \leq K$.

En el transcurs del temps se succeiran cicles amb una fase de dies de subministrament del component i una de dies de no subministrament.

L'esperança matemàtica de la durada de la diguem-ne primera fase (la probabilitat que duri 1 és $1 - p$, és a dir, la probabilitat que l'endemà del dia que s'inicia la primera fase falli el subministrament) és:

$$1 \cdot (1 - p) + \sum_{t=2}^{\infty} t \cdot p^{t-1} \cdot (1 - p) = 1 - p + p \cdot \frac{2 - p}{1 - p} = \frac{1}{1 - p}$$

I l'esperança matemàtica del cost d'aquesta fase:

$$\alpha \cdot n \cdot \frac{1}{1 - p}$$

Quant a la segona fase, l'esperança matemàtica de la durada és:

$$\sum_{k=1}^K \pi_k \cdot k$$

I la del cost:

$$\alpha \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \left[(n-j) \cdot \sum_{k=j}^K \pi_k \right] + \beta \cdot \sum_{k=n+1}^K \pi_k \cdot (k-n)$$

Per tant, l'esperança matemàtica del cost diari és:

$$E(n) = \frac{\alpha \cdot n \cdot \frac{1}{1-\rho} + \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \left[(n-j) \cdot \sum_{k=j}^K \pi_k \right] + \beta \cdot \sum_{k=n+1}^K \pi_k \cdot (k-n)}{\frac{1}{1-\rho} + \sum_{k=1}^K \pi_k \cdot k}$$

Podem arribar al mateix resultat modelitzant el comportament del sistema com una cadena de Màrkov en temps discret, en la qual els estats del sistema representen el nombre de dies transcorreguts des de l'últim subministrament. Amb aquesta representació, considerant l'estat del sistema al final de cada dia, tenim que l'espai dels estats és $\{0, \dots, K\}$, i les probabilitats de transició entre l'estat al final d'un dia i l'estat al final del dia següent, ρ_{ij} , són:

$$\rho_{00} = \rho, \quad \rho_{i0} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \dots + \pi_K}, \quad i = 1, \dots, K$$

$$\rho_{i,i+1} = 1 - \rho_{i,0}, \quad i = 0, \dots, K-1$$

$$\rho_{ij} = 0, \quad i = 0, \dots, K, \quad j = 1, \dots, i, i+2, \dots, K$$

En tractar-se d'una cadena de Markov amb un espai d'estats finit, irreducible (es pot assolir qualsevol estat des de qualsevol altre) i aperiòdica, la distribució de probabilitat dels estats del sistema quan $t \rightarrow \infty$ es pot obtenir resolent els sistema d'equacions següent:

$$\rho_j = \sum_{i=0}^K \rho_{ij} \cdot \rho_i \quad j = 1, \dots, K$$

$$\sum_{j=0}^K \rho_j = 1$$

I, en substituir les expressions de ρ_{ij} anteriors, obtenim:

$$\rho_0 = \frac{1}{1 + (1-\rho) \cdot \sum_{k=1}^K k \cdot \pi_k}, \quad \rho_j = \rho_0 \cdot (1-\rho) \cdot \sum_{k=j}^K \pi_k \quad j = 1, \dots, K$$

Com que el cost és $\alpha \cdot (n-j)$ o β si $j \leq n$ o $j > n$, respectivament, resulta la mateixa expressió d'abans per a $E(n)$.

El valor òptim de n es pot trobar per enumeració (per a $n = 0, \dots, K$).

Per exemple, per a:



$$\frac{1}{1-\rho} = 100, \alpha = 1, \beta = 100, K = 5, \pi_1 = 0,2, \pi_2 = 0,3, \pi_3 = 0,2, \pi_4 = 0,2, \pi_5 = 0,1$$

tenim:

n	0	1	2	3	4	5
$E(n)$	2,2690	2,2690	2,8335	3,3379	4,0419	4,9435

La redundància d'elements augmenta la fiabilitat d'un sistema. Però també l'enrobusteix la polivalència dels elements, tant si són objectes com si són persones.

EN06. Relleus

S'ha de formar un equip de natació per competir en la modalitat de 4 x 100 estils. Una condició necessària per formar part de l'equip, en una especialitat determinada, és tenir-hi una marca acreditada. Hi ha disponibles 5 persones amb marques acreditades en les especialitats indicades a la taula:

Persona→ Estil↓	A	B	C	D	E
Crol	X				
Esquena		X			
Braça			X		X
Papallona				X	X

Es vol calcular la probabilitat de poder formar un equip si les probabilitats que aquestes persones estiguin disponibles són independents i iguals a 0,9.

Aquest també és un problema de càlcul de probabilitats, però no tan senzill com els anteriors. En aquest cas, ens convé seguir un mètode característic de l'estudi de la fiabilitat de sistemes a partir de les dels seus elements, en el supòsit d'independència de les probabilitats d'avaría:

- A cada element del sistema s'associa una variable binària (variable d'estructura) igual a 1 si i només si l'element està en condicions de funcionar (per tant, es considera que un element està o no està en condicions de funcionar, sense possibilitats intermèdies).
- S'estableix la xarxa de fiabilitat, que és un graf amb una entrada i un o més vertèx per a cada un d'aquests elements del sistema, enllaçats de manera que si hi ha una connexió entre l'entrada i la sortida formada per vèrtexs corresponents a elements que funcionen, el sistema funciona, i que si la supressió o avaría d'un subconjunt d'elements implica que el sistema no

funciona, la supressió dels vèrtexs del graf corresponents a aquests elements deixa sense connexió l'entrada i la sortida. En general, la xarxa de fiabilitat d'un sistema donat no és única, és a dir, pot haver-hi diverses xarxes de fiabilitat que el representin correctament.

- Un *camí* és un conjunt d'elements tal que si tots ells funcionen, el sistema funciona. Un *camí* és *mínim* si no se'n pot suprimir cap element sense que deixi de ser *camí*.

Si un *camí* consta de n elements amb probabilitats de funcionar independents i iguals a p_i ($i = 1, \dots, n$), la probabilitat que funcionin tots els elements del *camí* (la qual cosa és suficient perquè el sistema funcioni)

és igual a $\prod_{i=1}^n p_i$.

- Un *tall* és un conjunt d'elements tal que si cap d'ells no funciona, el sistema no funciona. Un *tall* és *mínim* si no se'n pot suprimir cap element sense que deixi de ser *tall*.

Si un *tall* consta de n elements amb probabilitats de funcionar independents i iguals a p_i ($i = 1, \dots, n$), la probabilitat que no funcionin tots els elements del *tall* (la qual cosa és suficient perquè el sistema no funcioni) és igual a $\prod_{i=1}^n (1 - p_i)$ i, per tant, la probabilitat que el *tall* no

impedeixi el funcionament del sistema és $1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$.

La fiabilitat del *camí* més fiable és una fita inferior de la fiabilitat del sistema (la probabilitat que el sistema funcioni, si hi ha més d'un *camí*, és igual o més gran que la que funcioni el *camí* de màxima fiabilitat, perquè encara que aquest *camí* falli n'hi pot haver d'altres que funcionin). Anàlogament, la fiabilitat del *tall* menys fiable és una fita superior de la fiabilitat del sistema (la probabilitat que el sistema funcioni, si hi ha més d'un *tall*, és igual o menor que la que funcioni el *tall* de mínima fiabilitat, perquè encara que aquest *tall* funcioni n'hi pot haver d'altres que fallin).

Entre les diverses maneres d'establir la xarxa de fiabilitat d'un sistema n'hi ha dues de singulars i aplicables a qualsevol sistema:

- Tots els *camins* mínims en paral·lel.
- Tots els *talls* mínims en sèrie.

L'una i l'altra tenen relació, respectivament, amb les formes normals disjuntiva i conjuntiva de l'àlgebra de proposicions, però aquí ens limitem a apuntar aquesta connexió, sense desenvolupar-la.



- A partir de la xarxa de fiabilitat s'estableix la funció d'estructura. És una funció binària de les variables d'estructura, igual a 1 si el sistema funciona i igual a 0 si no funciona.
- La funció de fiabilitat, que dóna la probabilitat que el sistema funcioni, s'obté mitjançant la substitució, a la funció d'estructura desenvolupada i simplificada⁵, de les variables d'estructura per les probabilitats de funcionament dels elements (si les substituïm per les lleis de supervivència, obtenim la llei de supervivència del sistema).

El dos casos més senzills són els sistemes amb elements *en sèrie*, és a dir, en què el sistema funciona si i només si funcionen tots els seus elements, i els sistemes *en paral·lel*, en què el sistema no funciona si i només si no funciona cap element. Un sistema es pot representar sempre com un conjunt de subsistemes en sèrie, formats cada un d'ells per elements en paral·lel, o com un conjunt de subsistemes en paral·lel, formats cada un d'ells per elements en sèrie.

En un sistema en sèrie (en paral·lel), la xarxa de fiabilitat té el mateix aspecte que l'esquema d'un circuit amb els elements en sèrie (en paral·lel). I les funcions d'estructura, amb n elements, són:

$$\varphi_S(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$$

$$\varphi_P(x_1, \dots, x_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

on les x són les variables d'estructura dels elements del sistema.

En desenvolupar l'expressió corresponent a la funció d'estructura d'un sistema en paral·lel, s'obté la suma de les variables d'estructura menys els seus productes binaris (és a dir, de dues variables), més els productes ternaris, menys els quaternaris i així successivament.

Dit tot això, tornem al problema de l'equip de natació. El sistema està format per 3 subsistemes en sèrie (crol, esquena i braça-papallona: aquest darrer s'ha de considerar com un subsistema únic, ja que E vincula braça i papallona). El subsistema crol està format per A i el subsistema esquena, per B; el subsistema braça-papallona, per C, D i E.

Per descomptat, podem aplicar el càlcul de probabilitats. La de poder formar l'equip és:

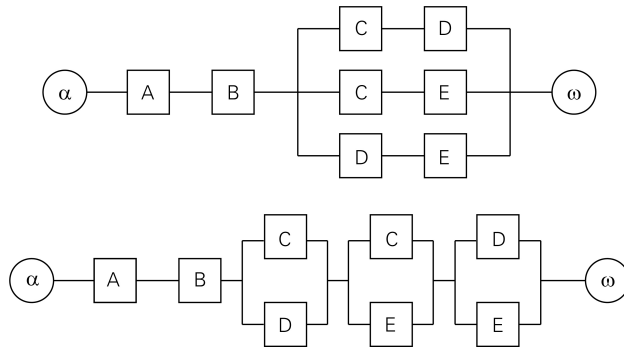
$$\begin{aligned} p_A \cdot p_B \cdot [p_E \cdot (p_C + p_D - p_C \cdot p_D) + (1 - p_E) \cdot p_C \cdot p_D] = \\ = p_A \cdot p_B \cdot (p_C \cdot p_D + p_C \cdot p_E + p_D \cdot p_E - 2 \cdot p_C \cdot p_D \cdot p_E) \end{aligned}$$

⁵ Tenint en compte que les potències d'una variable binària són iguals a la variable binària mateixa, i que, per tant, es pot prescindir dels exponents (i cal fer-ho per obtenir correctament la funció de fiabilitat).

Però també podem aplicar el mètode que hem descrit abans.

En el subsistema braça-papallona hi ha 3 camins mínims (CD, CE, DE) i 3 talls mínims (les mateixes parelles CD, CE, DE).

Podem dibuixar aleshores les xarxes de fiabilitat següents:



A partir de les quals obtenim dues expressions de la funció d'estructura del sistema:

$$\varphi(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = x_A \cdot x_B \cdot (x_C \cdot x_D + x_C \cdot x_E + x_D \cdot x_E - x_C \cdot x_D \cdot x_C \cdot x_E - x_C \cdot x_D \cdot x_D \cdot x_E - x_C \cdot x_E \cdot x_D \cdot x_E + x_C \cdot x_D \cdot x_C \cdot x_E \cdot x_D \cdot x_C \cdot x_E)$$

$$\varphi(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = x_A \cdot x_B \cdot (x_C + x_D - x_C \cdot x_D) \cdot (x_C + x_E - x_C \cdot x_E) \cdot (x_D + x_E - x_D \cdot x_E)$$

Les quals, desenvolupades i simplificades, condueixen a la mateixa expressió:

$$\varphi(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = x_A \cdot x_B \cdot (x_C \cdot x_D + x_C \cdot x_E + x_D \cdot x_E - 2 \cdot x_C \cdot x_D \cdot x_E)$$

Que, en substituir les variables d'estructura per les probabilitats de funcionament corresponents, dóna la probabilitat que es pugui constituir l'equip (0,78732); el camí més fiable –tots ho són igualment– té una probabilitat de 0,6561 i els talls menys fiables del sistema (A i B), de 0,9 (els talls del subsistema braça-papallona, de 0,99).

EN07. Travessa del desert

Amb vista a fer la travessa del desert, de 2.000 km, s'ha equipat un automòbil amb 2 circuits de fre i 2 rodes de recanvi.

Las taxes d'avaría dels circuits i de les rodes muntades es poden considerar constants, per a una travessa relativament curta com la plantejada, i iguals, respectivament, a 0,0002 avaries/km i 0,001 avaries/km. No és possible reparar les avaries en el curs de la travessa.

Amb quina probabilitat aquest automòbil pot fer la travessa sense ajuts externs?



La taxa d'avaría constant correspon a la llei de supervivència exponencial.

Per tant, podem aproximar les lleis de supervivència dels elements amb lleis de supervivència exponencials. I per calcular la probabilitat que el cotxe pugui acabar la travessa hem de determinar la llei de supervivència del sistema format per dos subsistemes en sèrie: el dels circuits de fre i el de les rodes.

El subsistema dels circuits de fre està format per dos elements en paral·lel. Per tant, si f_1, f_2 són les variables d'estructura dels dos elements, la funció d'estructura del subsistema, si suposem independència en les probabilitats d'avaría dels dos elements, és $f_1 + f_2 - f_1 \cdot f_2$. I obtenim la llei de supervivència del subsistema de frens en substituir les variables d'estructura dels elements per les lleis de supervivència corresponents ($e^{-0,0002 \cdot t}$ per a cada un dels dos elements). Per tant, resulta:

$$2 \cdot e^{-0,0002 \cdot t} - e^{-0,0004 \cdot t}$$

que per a $t = 2.000$ és igual a 0,891311.

Pel que fa a les rodes, com que el temps entre avaries és exponencial, el nombre d'avaries, en cas de disposar d'un nombre il·limitat de rodes de recanvi, segueix una llei de Poisson amb una esperança matemàtica igual a $0,001 \cdot 2.000 = 2$ avaries. I el cotxe, en allò que depèn de les rodes, podrà arribar al final de la travessa si el nombre d'avaries no és superior a 2:

$$\sum_{k=0}^2 e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} \right) = 5 \cdot e^{-2} = 0,676676$$

Per tant, amb el supòsit d'independència entre les avaries, la probabilitat que el cotxe completi la travessa és $0,891311 \cdot 0,676676 = 0,603129$.

EN08. Destination Moon⁶

La tripulació d'un vol espacial ha d'estar formada per 3 persones, cada una de les quals tindrà assignada una de les funcions A, B, C.

S'estima que la probabilitat que una de les persones preparades per a la missió estigui preparada en el moment previst per a l'enlairament és 0,90. Atesa aquesta consideració, hi ha 2 persones preparades per a cada una de les funcions.

Tot i així, la direcció no troba suficient la probabilitat que el vol pugui sortir en el moment programat i estudia dues possibilitats:

⁶ Pel·lícula d'Irving Pichel (1950), en què un dels quatre astronautes entrenats per a la missió contreu una apendicitis poc abans del moment previst per a la sortida de l'expedició i ha de ser substituït per un tècnic que no n'estava preparat, la qual cosa ocasiona incidències en el decurs del viatge.

- (i) Formar les 6 persones perquè a més de la funció per a la qual ja estan preparades ho estiguin per una altra, de manera que, de les 2 persones que ja estan preparades per a una funció, una sigui apta també per a una altra i l'altra per a una altra de diferent (per exemple: que de les 2 persones preparades per a A una sigui apta per a B i l'altra, per a C).
- (ii) Augmentar el nombre de persones preparades (únicament) per a cada una de les funcions.

Amb una persona per funció, la probabilitat de poder sortir és $0,9^3 = 0,729$.

Amb 2 per funció: $[1 - (1 - 0,9)^2]^3 = 0,970299$.

En el cas (i) és fàcil comprovar que qualsevol subconjunt de 3 persones de les 6 pot formar una tripulació apropiada per al vol. Per tant, la probabilitat que aquest pugui sortir és la que hi hagi 3 o més persones disponibles:

$$20 \cdot 0,9^3 \cdot (1 - 0,9)^3 + 15 \cdot 0,9^4 \cdot (1 - 0,9)^2 + 6 \cdot 0,9^5 \cdot (1 - 0,9) + 0,9^6 = 0,99873$$

En el cas (ii) es pot augmentar la probabilitat tant com es vulgui, però sense assolir mai el valor 1, a condició que el nombre de persones preparades per a cada funció sigui prou alt. Per exemple, amb 3 persones per funció, la probabilitat de sortir és:

$$[1 - (1 - 0,9)^3]^3 = 0,997003$$

Si es tracta d'assolir una probabilitat determinada, P , pot haver-hi solucions diverses, ja que no necessàriament el nombre de persones preparades ha de ser el mateix per a totes les funcions. Per tal de determinar com es pot assolir amb el nombre mínim de persones una probabilitat determinada, podem plantejar un programa lineal binari tal com es descriu a continuació.

Com que la probabilitat que surti el vol sempre és inferior a la probabilitat que hi hagi almenys una persona disponible en cada una de les funcions, el nombre de persones de cada funció té una fita inferior, k_m , que és el menor enter per al qual $1 - (1 - 0,9)^{k_m} > P$ (si fem $P = 0,9999$, $k_m = 5$). Cal també una fita superior, k_M , a la qual donem el valor 8 (que s'ha de reconsiderar a la vista dels resultats).

Variables: $x_{ik} \in \{0, 1\}$ ($i = 1, \dots, 3$; $k = k_m, \dots, k_M$), on els valors 1, 2 i 3 de i podem considerar que corresponen, respectivament, a A, B i C; $x_{ij} = 1$ si i només si el nombre de persones preparades per a la funció i és igual a j .

Siguin $\pi_k = 1 - (1 - 0,9)^k$ ($k = k_m, \dots, k_M$) les probabilitats que en un grup de k persones n'hi hagi almenys una de disponible. Aleshores, la probabilitat que en cada un dels grups d'especialistes hi hagi almenys una persona disponible és:



$$\sum_{k=k_m}^{k_M} \pi_k \cdot X_{ik} \quad (i = 1, \dots, 3)$$

La probabilitat que el vol pugui sortir en el moment previst:

$$\prod_{i=1}^3 \sum_{k=k_m}^{k_M} \pi_k \cdot X_{ik}$$

I el logaritme d'aquesta probabilitat (atès que $\sum_{k=k_m}^{k_M} x_{ik} = 1, i = 1, \dots, 3$):

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=k_m}^{k_M} \ln \pi_k \cdot X_{ik}$$

Aleshores podem formular el model lineal següent:

$$\begin{aligned} \text{minimitzar} \quad & \sum_{i=1}^3 \sum_{k=k_m}^{k_M} k \cdot X_{ik} \\ & \sum_{i=1}^3 \sum_{k=k_m}^{k_M} \ln \pi_k \cdot X_{ik} \geq \ln P \\ & \sum_{k=k_m}^{k_M} X_{ik} = 1 \quad i = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

Amb la probabilitat individual igual a 0,9 i $P = 0,99999$ obtenim una probabilitat de sortir a l'hora igual a 0,999997, amb un total de 18 persones (6 de cada especialitat).

EN09. Androides?

Una cel·la de fabricació en què es duu a terme una de les fases d'un procés de producció de compressors està equipada amb tres robots (R1, R2 i R3), els quals tenen assignades, respectivament, les tasques:

1. d'agafar i col·locar en la posició adequada la peça base,
2. posar tapa i
3. soldar.

Es disposa d'un robot de reserva, R4, que pot substituir R2 si aquest falla. Una persona, P, supervisa tot el procés i pot substituir R1 o R2 (o R4).

La demanda del producte és alta i es pot vendre tota la producció; s'estima que cada hora d'interrupció en el funcionament de la cel·la té un cost de 1.000 u. m.

Supòsit 1. Per a un instant, elegit a l'atzar, les probabilitats que R1, R2, R3, R4 i P estiguin en condicions d'actuar són, respectivament, 0,95, 0,90, 0,97, 0,999 i 0,92. Volem determinar si és convenient o no adquirir un robot R5, idèntic a R3.

Supòsit 2. Suposem ara que no disposem de R4 ni de R5. Per als elements R1, R2, R3 i P el temps que transcorre des del moment que s'inicia la producció fins que s'avarïen (en sentit ampli) segueix distribucions exponencials amb esperances matemàtiques respectivament iguals a 125, 500, 100 i 200 hores. Volem determinar l'esperança matemàtica del temps de producció ininterrompuda d'aquest sistema (la substitució de R1 o R2 per P requereix un temps negligible i no la considerem com una interrupció).

Tenim dos subsistemes en sèrie. Els elements del primer són R1, R2, R4 i P. El segon és R3.

Els camins mínims del primer subsistema són R1-R2, R1-R4, R1-P, P-R2 i P-R4.

I els tall mínims: R1-P, R2-R4-P i R1-R2-R4.

Tant per la via dels camins mínims com per la dels talls mínims, els desenvolupaments són una mica feixucs. Per alleugerir-los considerem com un element, E, el conjunt format per R2 i R4.

Aleshores, els talls mínims són R1-P, E-P i R1-E, i la funció d'estructura del primer subsistema:

$$\varphi(r_1, e, p) = (r_1 + p - r_1 \cdot p) \cdot (e + p - e \cdot p) \cdot (r_1 + e - r_1 \cdot e) = r_1 \cdot e + r_1 \cdot p + e \cdot p - 2 \cdot r_1 \cdot e \cdot p$$

I la de tot el sistema:

$$\varphi(r_1, e, p, r_3) = (r_1 \cdot e + r_1 \cdot p + e \cdot p - 2 \cdot r_1 \cdot e \cdot p) \cdot r_3$$

amb $e = r_2 + r_4 - r_2 \cdot r_4$.

Per tant, en el supòsit 1, la probabilitat que el sistema funcioni resulta de substituir a la funció d'estructura les variables per les probabilitats corresponents (amb la probabilitat del conjunt R2-R4 igual a $0,900 + 0,999 - 0,900 \cdot 0,999 = 0,9999$):

$$(0,95 \cdot 0,9999 + 0,95 \cdot 0,92 + 0,9999 \cdot 0,92 - 2 \cdot 0,95 \cdot 0,9999 \cdot 0,92) \cdot 0,97 = 0,966$$

Amb un robot R5, idèntic a R3, la probabilitat de poder soldar seria $0,97 + 0,97 - 0,97 \cdot 0,97 = 0,9991$, amb la qual cosa la probabilitat de funcionament del sistema seria 0,995. Per tant, amb R5, la disminució de l'esperança matemàtica del cost anual per no funcionament de la línia seria (suposant que la planta funciona tot l'any i totes les hores del dia) $8.760 \cdot (0,995 - 0,966) \cdot 1.000 = 254.040$ u. m./any, amb què, si tinguéssim dades sobre la vida útil dels robots



i de la planta, i sobre els tipus d'interès en l'horitzó de planificació, podríem determinar el cost admissible per a R5.

En el supòsit 2, cal considerar dos casos (2.1 i 2.2), en què, respectivament, hi ha possibilitat d'*avaria* de P des del moment que el sistema comença a funcionar, o que aquesta possibilitat només existeix des del moment que P substitueix R1 o R2 per avaria d'un d'aquests dos robots (és a dir, l'edat t de P és -2.1 – el temps transcorregut des que s'engega el sistema o -2.2 – el temps transcorregut des que P substitueix un robot).

En el cas 2.1, la funció d'estructura del sistema és la que resulta de substituir e per r_2 (perquè no es disposa de R4) a la funció d'estructura corresponent al supòsit 1 (sense R5):

$$\varphi(r_1, r_2, \rho, r_3) = (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot \rho + r_2 \cdot \rho - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \rho) \cdot r_3$$

I la llei de supervivència del sistema s'obté mitjançant la substitució de les variables d'estructura dels elements per les lleis de supervivència corresponents:

$$\begin{aligned} v(t) &= (e^{-t/125} \cdot e^{-t/500} + e^{-t/125} \cdot e^{-t/200} + e^{-t/500} \cdot e^{-t/200} - 2 \cdot e^{-t/125} \cdot e^{-t/500} \cdot e^{-t/200}) \cdot e^{-t/100} = \\ &= e^{-0,020t} + e^{-0,023t} + e^{-0,017t} - 2 \cdot e^{-0,025t} \end{aligned}$$

Per tant, l'esperança matemàtica del temps de funcionament ininterromput és:

$$\int_0^{\infty} v(t) dt = \frac{1}{0,020} + \frac{1}{0,023} + \frac{1}{0,017} - 2 \cdot \frac{1}{0,025} = 72,302 \text{ hores .}$$

El cas 2.2 és més difícil de tractar, tot i que el fet que en aquest problema les lleis de supervivència siguin exponencials simplifica notablement els càlculs, ja que la taxa d'avaría per a una llei de supervivència exponencial és constant, és a dir, correspon a elements en què la probabilitat condicional d'avaría no depèn de l'edat.

En aquest cas, l'esperança matemàtica del temps de funcionament del sistema és la suma de dues esperances matemàtiques: la d'una primera fase amb un sistema format per R1, R2 i R3 en sèrie (i P en reserva no carregada) i la d'una segona fase en què P substitueix R1 o R2.

Quant a la primera fase tenim $\varphi(r_1, r_2, r_3) = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$, $v(t) = e^{-t/125} \cdot e^{-t/500} \cdot e^{-t/100} = e^{-0,020t}$, a la qual correspon una esperança matemàtica de 50.

A la segona fase hi ha tres possibilitats corresponents a les tres causes de finalització de la primera fase (avaries de R1, R2 o R3, respectivament). Siguin π_1, π_2, π_3 les probabilitats de cada una d'aquestes 3 causes i $E_i (i = 1, \dots, 3)$ les respectives esperances matemàtiques del temps de funcionament del sistema

en la segona fase (amb $E_3 = 0$, ja que P no pot substituir R3); aleshores, l'esperança matemàtica de la segona fase és $\pi_1 \cdot E_1 + \pi_2 \cdot E_2$, amb:⁷

$$\pi_1 = \frac{1/125}{1/125 + 1/500 + 1/100} = 0,4; \pi_2 = \frac{1/500}{1/125 + 1/500 + 1/100} = 0,1$$

i $E_1 = 1/0,017$, $E_2 = 1/0,023$ (ja que corresponen respectivament als sistemes en sèrie formats per P-R2-R3 i R1-P-R3, i tenint en compte que, com que els robots supervivents tenen lleis de supervivència exponencials, comencen la segona fase amb la mateixa llei amb què varen començar la primera). D'on:

$$\pi_1 \cdot E_1 + \pi_2 \cdot E_2 = 27,877.$$

i l'esperança conjunta de les dues fases del cas 2.2 és igual a $50 + 27,877 = 77,877$ (que, com era d'esperar, és més gran que la corresponent al cas 2.1).

EN10. Encadenament

KYHAN és una empresa de serveis de manteniment de la llar. Té, en diversos punts del territori, equips de 3 persones per atendre reparacions d'urgència, que requereixen algunes de les capacitats A, B o C. D'acord amb la política de polivalència de KYHAN, cada persona està formada per tenir 2 capacitats, de manera encadenada (P1: AB, P2: BC, P3: CA). D'aquesta manera, KYHAN pot atendre la majoria de comandes encara que alguna de les 3 persones de l'equip estigui de baixa, cosa que té una probabilitat igual a 0,1 per a cada persona (i de manera independent).

Hi ha 4 tipus de serveis, que requereixen les capacitats ABC, AB, AC i BC, amb probabilitats iguals, respectivament, a 0,20, 0,40, 0,25 i 0,15.

KYHAN considera que la probabilitat d'atendre un servei és massa baixa actualment i vol saber quina de les 3 persones ha de formar i en quina capacitat per augmentar tant com pugui la robustesa del sistema.

⁷ En general, si tenim n processos exponencials de paràmetre λ_i ($i = 1, \dots, n$) que funcionen simultàniament, el resultat és un procés exponencial de paràmetre $\sum_{i=1}^n \lambda_i$, i la probabilitat que el primer

esdeveniment observat a partir d'un instant qualsevol correspongui al procés k és $\lambda_k / \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

També arribem a aquest resultat si considerem 2 processos exponencials i calculem la probabilitat que el primer esdeveniment correspongui al procés 1: $\int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$. I la generalització a n processos és immediata.



Per als serveis ABC hi ha 3 camins (P1-P2, P1-P3 i P2-P3). Per a AB, AC i BC, 2 (respectivament: P1, P2-P3; P3, P1-P2; P2, P1-P3).

Segui per càlcul de probabilitats directe o mitjançant les funcions d'estructura corresponents, s'obtenen les probabilitats 0,972 per a ABC i 0,981 per a cada un dels altres 3 tipus de serveis. Per tant, la probabilitat d'atendre un servei és:

$$0,20 \cdot 0,972 + (0,40 + 0,25 + 0,15) \cdot 0,981 = 0,9792$$

La fiabilitat d'un sistema augmenta amb la polivalència dels elements. D'entrada, sembla que la capacitat que es requereix més sovint és A, per la qual cosa el millor seria formar P2 perquè l'adquireixi. Però és millor fer els càlculs corresponents a les tres possibilitats.

Per exemple, si P1 adquireix la capacitat C, els camins mínims per a ABC, AB, BC i CA són, respectivament, P1 i P2-P3, P1 i P2-P3, P1 i P3, P1 i P2. Anàlogament, podem enumerar els camins mínims per als supòsits de formar P2 en A i P3 en B.

La taula següent recull les probabilitats respectives.

Servei→	ABC	AB	BC	CA	Tots
Probabilitat	0,200	0,400	0,250	0,150	1,00000
Situació actual	0,972	0,981	0,981	0,981	0,97920
P1 + C	0,981	0,981	0,990	0,990	0,98460
P2 + A	0,981	0,990	0,990	0,981	0,98685
P3 + B	0,981	0,990	0,981	0,990	0,98595

Per tant, es confirma que per augmentar la probabilitat d'atendre un servei el millor és formar P2 en la capacitat A, amb què pujaria de 0,97920 a 0,98685, és a dir, 0,00765. Una altra cosa és si això seria rendible o si seria preferible mantenir la situació actual, però per respondre aquesta qüestió caldrien dades sobre ingressos i despeses.

EN11. Cadenes i baules

CABASA fabrica material per a la manutenció. Dos dels seus productes (A i B) es munten en sengles línies que consten de 5 estacions de treball cada una, amb una persona a càrrec de cada estació. La planta funciona 250 dies l'any, amb una jornada laboral de 7 hores i 50 minuts, i cada persona està present a la seva estació 6 hores i 50 minuts, ja que altres activitats i els descansos requereixen 1 hora. Per tal que les línies puguin funcionar tota la jornada, a cada una hi ha una persona *tapaforats* que substitueix les altres quan no estan presents a les seves estacions. Quan una persona d'una línia (inclosa la tapaforats) està de baixa, la línia funciona únicament durant 6 hores i 50 minuts, i si n'hi ha dues o més, la línia no funciona durant tot el torn i les persones que no estan de baixa

es dediquen a altres tasques. La probabilitat que una persona estigui de baixa un dia qualsevol és 0,05 i les probabilitats de baixa de les diverses persones són independents. La directora de producció estima que una línia parada durant una hora implica una pèrdua de 200 u. m.

Actualment, totes les persones assignades a una línia poden fer-se càrrec de qualsevol estació d'aquella línia, però no de l'altra.

La directora, després de llegir l'article "Polivalència: un concepte clau per a la fiabilitat, la competitivitat i la supervivència", estudia la possibilitat d'un pla de formació que facultaria el personal de les línies per encarregar-se indistintament de les estacions d'A i de B, i que es completaria al final del present exercici. Estima que, una vegada assolida la polivalència, els costos laborals augmentaran 0,2 u. m. per persona i hora, i es pregunta quin cost màxim pot admetre per al pla de formació, amb un tipus d'interès del 10 %.

Actualment, la probabilitat que una línia funcioni 7 hores i 50 minuts és la probabilitat que cap persona assignada a la línia estigui de baixa:

$$p_0(6, 0,05) = 0,95^6 = 0,7351$$

La que funcioni 6 hores i 50 minuts:

$$p_1(6, 0,05) = \binom{6}{1} 0,05 \cdot 0,95^5 = 0,2321$$

I la que no funcioni:

$$p_{\geq 2}(6, 0,05) = 1 - p_0 - p_1 = 1 - 0,7351 - 0,2321 = 0,0328$$

I, per tant, l'esperança matemàtica de les pèrdues anuals per inactivitat de les dues línies és:

$$2 \cdot 250 \cdot 200 \cdot \left(0,2321 + 0,0328 \cdot \frac{470}{60} \right) = 48.903,33 \text{ u.m./any}$$

Amb polivalència: si no hi ha cap baixa, les dues línies funcionaran tota la jornada; si n'hi ha una, una línia podrà funcionar tota la jornada i l'altra haurà d'estar inactiva durant 38 minuts (la persona que faci de tapaforats necessitarà 5 hores per a una línia i podrà dedicar 1 hora i 50 minuts a l'altra, la qual cosa permetrà que funcioni durant $110/5 = 22$ minuts més que les 6 hores 50 que funcionaria sense la contribució del tapaforats); si hi ha dues baixes, les dues línies funcionaran 6 hores i 50 minuts; si el nombre de baixes està comprès entre 3 i 6, ambdós inclosos, funcionarà una sola línia durant tota la jornada laboral; si hi ha 7 baixes, funcionarà una línia durant 6 hores i 50 minuts; finalment, si hi ha 8 o més baixes, les dues línies restaran inactives tota la jornada.

Aleshores, l'esperança matemàtica de les pèrdues anuals per inactivitat seria:



$$250 \cdot 200 \cdot [p_1(12, 0,05) \frac{38}{60} + p_2(12, 0,05) \cdot 2 + \sum_{k=3}^6 p_k(12, 0,05) \frac{470}{60} + p_7(12, 0,05) \frac{470+60}{60} + \sum_{k=8}^{12} p_k(12, 0,05) \cdot 2 \frac{470}{60}] = 28.350,63 \text{ u. m.}$$

Amb una reducció de $48.903,33 - 28.350,63 = 20.552,70$ en relació amb la situació actual. I tenint en compte l'augment dels costos laborals:

$$0,2 \cdot \frac{470}{60} \cdot 250 \cdot 12 = 4.700,00 \text{ u. m.}$$

resulta que la polivalència implica un estalvi anual de $15.852,70$ u. m.

El cost màxim admissible per al pla de formació depèn del nombre d'anys, T , de l'horitzó de planificació; amb el tipus d'interès del 10 %, si fer servir el VAN és apropiat, és igual a:

$$15.852,70 \cdot \sum_{t=1}^T \frac{1}{1,10^t}$$

EN12. Transports col·lectius

Per anar de P a T amb tren es pot anar a E, i allà agafar el tren R1, que passa per S i per T, o anar a C i allà agafar el tren R2 que va a S (i després, anar de S a T amb R1) o bé el tren R3 que va directament a T. A E i a C s'hi pot arribar amb diverses línies de transport col·lectiu i fins i tot a peu. Amb quina probabilitat es pot anar de P a T amb tren si la probabilitat de funcionament de R2 i R3 és 0,98 i les del trams E-S i S-T de R1 són independents i iguals, respectivament, a 0,93 i 0,96?

Hi ha 3 camins mínims (R3, R2-ST i ES-ST) i 2 talls mínims (R3-ST i R2-R3-ES). Partint dels uns o dels altres s'arriba a la següent funció d'estructura desenvolupada i simplificada. Les variables d'estructura corresponents a R2, R3, ES i ST són, respectivament, r_2, r_3, e i s .

$$r_3 + r_2 \cdot s + e \cdot s - r_2 \cdot r_3 \cdot s - r_3 \cdot e \cdot s - r_2 \cdot e \cdot s + r_2 \cdot r_3 \cdot e \cdot s$$

I la substitució de les variables d'estructura per les probabilitats dona una probabilitat igual a 0,999 de poder viatjar de P a T en transport col·lectiu.

EN13. El ram de la construcció

Una universitat ha decidit construir 4 mòduls (M1, M2, M3, M4) amb unes superfícies útils de 2.000, 4.000, 2.000 i 6.000 m². Considera dues possibilitats:

- U: adjudicar tots els mòduls a una empresa única.
- D: adjudicar cada mòdul a una empresa diferent.

Estima que la probabilitat que una obra estigui disponible és igual a $0,9 + 0,1 \cdot t$ ($0 \leq t \leq 1$), on t és el temps, mesurat en trimestres, comptat a partir de la data d'inici d'activitats del curs proper.

Per a l'inici del curs es considera indispensable disposar almenys de 6.000 m².

La direcció de la universitat vol saber, per a cada una de les dues possibilitats considerades, les probabilitats de:

- Disposar de 6.000 m² o més a l'inici del curs.
- Disposar dels 4 mòduls.
- Els valors de t per als quals les probabilitats esmentades són iguals a 0,999.

Per a l'opció U les respostes són immediates: la probabilitat de disposar del conjunt dels mòduls és 0,9 i el valor de t per al qual la probabilitat és 0,999 és 0,99 ($0,9 + 0,1 \cdot 0,99 = 0,999$).

En el cas de l'opció D, hem de distingir la probabilitat corresponent a 6.000 o més m² de la de 4 mòduls.

Per a 6.000 m² o més, els camins mínims són M1-M2, M2-M3 i M4, i els talls mínims, M2-M4 i M1-M3-M4. D'on resulta la funció d'estructura:

$$m_4 + m_1 \cdot m_2 + m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_2 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 + m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4$$

En substituir les variables d'estructura per la probabilitat que cada mòdul estigui acabat a $t = 0$ (0,9) obtenim el valor 0,9891. Perquè la probabilitat sigui igual a 0,999 s'ha de complir (amb $p = 0,9 + 0,1t$):

$$p^4 - 3 \cdot p^3 + 2 \cdot p^2 + p = 0,999$$

I s'obté $p = 0,9 + 0,1t = 0,9689$; $t = 0,689$.

Per als 14.000 m² dels 4 mòduls, la probabilitat que estiguin acabats a $t = 0$ és $0,9^4 = 0,6561$, i el valor de t per al qual la probabilitat és igual a 0,999 és la solució de $(0,9 + 0,1t)^4 = 0,999$, és a dir, $t = 0,998$.

Per disposar de 6.000 m² o més, el millor és diversificar l'adjudicació de l'obra, però per tenir més probabilitats de disposar del conjunt complet de mòduls, el millor és adjudicar-los tots a una mateixa empresa.



En el problema següent el càlcul de la fiabilitat del sistema en diferents supòsits presenta menys dificultat que en els anteriors, però s'insereix en un context més ampli.

EN14. Més val prevenir

Una empresa industrial, TECONSA, ha decidit contractar a RESASA les revisions de salut del seu personal.

Les revisions consten de 4 operacions (A, B, C, D) que s'han de dur a terme en aquest ordre. RESASA té previst destacar a TECONSA un equip de 4 persones (3 de nivell 2 i 1 de nivell 1). Cada una de les 3 primeres s'encarregarà, respectivament, d'una de les operacions A, B, D, i la de nivell 1, de l'operació C. Amb aquesta assignació els temps per dur a terme les operacions són, respectivament, 6, 5, 10 i 8 minuts.

Perquè l'equip pugui dur a terme la revisió cal la presència dels 4 membres i la probabilitat de cada un d'ells de no estar disponible és del 2 %.

RESASA només acceptarà el contracte per a un temps nominal de presència del seu equip a les instal·lacions de TECONSA de 1.500 hores/any.

El cost per a RESASA d'una persona de tipus 1 és de 40.000 u. m./any i la d'una de tipus 2, 25.000 u. m./any. TECONSA pagarà a RESASA 15 u. m. per cada revisió. Cada un dels membres de la plantilla de TECONSA, quan és objecte de la revisió, està absent del seu lloc de treball 15 minuts (desplaçament i preparació) més el temps que cal per a la revisió mateixa; l'absència implica un cost per a TECONSA de 18 u. m./hora.

Es tracta de comparar les 4 opcions següents:

- a. La que s'ha descrit.
 - b. Llogar un aparell, amb un cost de 30.000 u. m./any, que pagarien a mitges TECONSA i RESESA, amb el qual el temps de l'operació C es reduiria a 7,5 minuts.
 - c. Incorporar a l'equip un 5è membre de nivell 1. Així, quan estiguessin presents els 2 membres de nivell 1 es podrien fer 2 operacions C en paral·lel i, en cas de faltar un dels 2, l'equip podria seguir funcionant com en la situació descrita.
 - d. Passar de 3 a 2 membres de nivell 2, i encarregar a un dels dos les operacions A i B, amb una prima de 5.000 u. m./any i un cost de formació negligible.
-

Per a RESESA, el criteri rellevant és la diferència entre l'esperança matemàtica dels ingressos i els costos; per a TECONSA, és una decisió multicriteri, ja que ha de tenir en compte el cost i també l'esperança matemàtica del nombre de

revisions, de la qual resulta la freqüència amb què revisarà cada membre de la plantilla.

Per calcular el valor d'aquests criteris per a cada una de les 4 opcions s'ha de determinar:

- L'esperança matemàtica del nombre d'hores que funcionarà l'equip de RE-SASA (els càlculs es basen en el supòsit d'independència de la manca de disponibilitat dels membres de l'equip; si hi hagués dependència total –per exemple, perquè l'absència pogués ser deguda a una malaltia que patissin simultàniament tots els membres de l'equip–l'esperança matemàtica del nombre d'hores de funcionament seria més alta: $0,98 \cdot 1.500 = 1.470$):

a i b : $0,98^4 \cdot 1.500 = 1.383,55$; c : $0,98^2 \cdot 0,98^3 \cdot 1.500 = 1.355,88$ (amb 2 persones de nivell 1) i $2 \cdot 0,98 \cdot 0,02 \cdot 0,98^3 \cdot 1.500 = 55,34$ (amb 1 persona de nivell 1); d : $0,98^3 \cdot 1.500 = 1.411,79$.

- El temps de cycle de la revisió:
 a : 10; b : 8; c : 8 quan hi ha 2 persones de nivell 1 i 10 quan només n'hi ha una; d : $6 + 5 = 11$.
- El temps que passa en el sistema cada membre de la plantilla:
 a , c i d : $15 + 6 + 5 + 10 + 8 = 44$; b : $15 + 6 + 5 + 7,5 + 8 = 41,5$.

Aleshores, és immediat calcular els valors que figuren a la taula següent:

Opció	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
a	115.000	8.301,30	9.519,50	6.087,62	234.096,66
b	115.000	10.376,63	25.649,38	7.177,17	299.838,51
c	155.000	10.501,14	2.517,10	7.700,84	296.132,22
d	95.000	7.700,67	20.510,09	5.647,16	217.158,93

(1) Cost de l'equip per a RESESA

(2) Esperança matemàtica del nombre de serveis/any

(3) Ingressos - costos RESESA

(4) Hores de personal de TECONSA en servei de revisió

(5) Cost total per a TECONSA

És clar que l'ordre de preferència de RESESA és b , d , a , c (amb molta diferència entre la segona i la tercera). Quant a TECONSA, no disposem de prou informació per saber quina opció preferiria, perquè les de més cost tenen associat un nombre de revisions més alt, el que suposa una major freqüència en el control de la salut de cada un dels membres de la plantilla.⁸

⁸ "Empleat sa, empleat productiu", titulava *La Vanguardia* (6/01/2018, p. 22) un reportatge que il·lustra "Noves estratègies per gestionar el capital humà".



I arribats a aquest punt, fem una petita incursió en un altre àmbit.

Es considera normal que l'1 % dels membres de la plantilla pateixin una determinada dolència i alarmant que la proporció arribi al 5 %. Per aquest motiu s'ha decidit comptar el nombre de vegades que es detecta la dolència en cada grup de 100 revisions i prendre mesures si aquest nombre és igual superior a k .

Es tracta de determinar el valor de k per detectar la situació alarmant, quan es produeix, amb probabilitat no inferior a 0,90.

Quina és aleshores la probabilitat de considerar que la situació és alarmant quan realment és normal?

El nombre de vegades que es detecta la dolència en un grup de 100 revisions segueix una distribució binomial amb $n = 100$ i $\omega = 0,01$ si la situació és normal, i $\omega = 0,05$ si és alarmant.

Es tracta de trobar, per a la situació alarmant, el valor més gran de k per al qual es compleix $p_k + p_{k+1} + \dots + p_{100} \geq 0,90$, és a dir, $p_0 + p_1 + \dots + p_{k-1} < 0,10$. Resulta $k = 2$, amb $p_2 + p_3 + \dots + p_{100} = 0,9629$. Per a la situació normal, aquesta suma, que és la probabilitat de considerar que la situació és alarmant quan realment és normal, és igual a 0,2642.

Amb la regla de considerar que la situació és alarmant quan $k \geq 2$, la probabilitat d'incórrer en l'error de tipus I (és a dir, la probabilitat de no detectar la situació alarmant) és 0,0371, mentre que la de l'error de tipus II (probabilitat de considerar que la situació és alarmant quan realment és normal) és, com s'ha indicat, 0,2642.

Amb $k \geq 3$ les probabilitats de l'error de tipus I i de tipus II passen a 0,1183 (no gaire superior a $1 - 0,90 = 0,10$) i 0,0794.



→ 10



Capgirar

La idea del món al revés és molt present a la literatura.¹ I és fructífera en àmbits molt diversos, perquè ajuda a veure o a descobrir aspectes inèdits dels objectes i dels processos.

Molts productes són el resultat de diverses operacions de muntatge, però també hi ha processos de desmuntatge. Actualment, en el marc de la logística inversa, per al tractament de productes fora d'ús, per recuperar-ne components o materials o per eliminar-los amb el mínim impacte mediambiental possible. I des de fa molt temps les operacions de desmuntatge s'han practicat massivament en la indústria alimentària: l'especejament dels animals per al consum de carn requereix operacions de desmuntatge ben estudiades (industrialitzades, podem dir). Quant a l'organització de les operacions, el desmuntatge no presenta problemes essencialment diferents dels associats al muntatge, però el concepte de disseny per al desmuntatge és relativament nou i constitueix un camp en què encara hi ha molta feina per fer.

La mateixa logística inversa, com el seu nom suggereix, genera fluxos de materials i de components que van en el sentit contrari al tradicional (és a dir, van dels mercats al sistema productiu i no d'aquest als mercats).

Es parla molt del llançament de nous productes, però tots, a la curta o a la llarga, s'han d'acabar retirant del mercat i aquest també és un procés que cal gestionar.

I en la planificació agregada de la producció es considera habitualment que resulta, en darrera instància, de la demanda. Però hi ha casos en què depèn principalment del ritme en què poden arribar les matèries primeres o els components.

¹ El poeta José Agustín Goytisolo somniava en un món al revés en què hi havia "un lobito bueno al que maltrataban todos los corderos". Eduardo Galeano va escriure *Patás arriba, la escuela del mundo al revés*; Avel·lí Artís-Gener, *Les paraules d'Opòtom el Vell*. I molts segles abans Mateu, fill d'Alfeu, el Sermó de la Muntanya. Podríem trobar altres exemples literaris, però segurament són més abundants en la vida real.



Fer càlculs des del final cap al principi, i no del principi cap al final, de vegades resulta molt útil, o fins i tot indispensable. Pensem en la determinació de l'estratègia òptima a partir d'un arbre de decisió amb esdeveniments aleatoris (vegeu el capítol "Concatenar") o de l'estratègia òptima en un joc determinista.

En aquest capítol adoptem un punt de vista oposat a l'habitual, amb la intenció d'obrir noves perspectives.

CA01. El *Newsvendor Problem* capgirat

El *Newsvendor Problem* o problema de la (persona) venedora de diaris de paper és clàssic.² La venedora coneix la llei de densitat de probabilitat ($h(x), x \geq 0$) de la demanda d'un diari (representada per una variable real, x , tot i que la demanda del diari és entera) i ha de determinar la quantitat que en demanarà a l'editora, sabent que compra un diari a c u. m., el ven a v u. m. i l'editora li recompra els exemplars sobrants a r u. m./unitat (per descomptat, $r < c < v$). L'esperança matemàtica del moviment de fons diari de la venedora, si només ven el diari en qüestió i en demana q exemplars, és:

$$\begin{aligned} \bar{f}_V(q) &= v \cdot \left(\int_0^q x \cdot h(x) dx + q \cdot \int_q^\infty h(x) dx \right) + r \cdot \int_0^q (q - x) \cdot h(x) dx - c \cdot q = \\ &= (v - c) \cdot q + (v - r) \cdot \left[\int_0^q x \cdot h(x) dx - q \cdot H(q) \right] \end{aligned}$$

On $H(q) = \int_0^q h(x) dx$ és la funció de distribució de la demanda del diari. La funció $\bar{f}_V(q)$ té derivada segona negativa (per tant, és estrictament còncaua). La condició de derivada primera nul·la és, doncs, necessària i suficient per a l'optimitat i d'això es dedueix que el valor òptim de q ha de complir:

$$H(q^*) = \frac{v - c}{v - r}$$

Si la distribució de la demanda és $U[0,500]$ ($h(x) = 1/500, 0 \leq x \leq 500$), $v = 1,50$, $c = 1,30$, $r = 0,10$, s'obté:

$$H(q^*) = \frac{1,50 - 1,30}{1,50 - 0,10} = \frac{1}{7}, \quad q^* = 500 \cdot H(q) = 71,43$$

i l'esperança matemàtica del moviment de fons de la venedora és de 7,14 u. m./dia.

² Conegut inicialment com a *Newsboy Problem*, ha donat lloc a moltes variants. Al respecte: Choi, T.-M., ed. (2012) *Handbook of Newsvendor Problems*. Springer, Nova York.

Quant a l'editora, l'esperança matemàtica del moviment de fons diari que li genera la venedora és (si u és el cost variable unitari d'un exemplar del diari):

$$\bar{f}_E(q) = (c - u) \cdot q - r \cdot \int_0^q (q - x) \cdot h(x) dx =$$

$$(c - u) \cdot q + r \left[\int_0^q x \cdot h(x) dx - q \cdot H(q) \right]$$

que, amb $u = 0,30$, és igual a 70,92.

És a dir, en el *Newsvendor Problem* hi ha un marc definit per l'editora (regles i valors) i, en aquest marc, la venedora adopta la decisió que més li convé. Però a continuació adoptem el punt de vista de l'editora, que pot fixar els valors de c i de r per tal d'optimitzar la seva esperança matemàtica.

Considerem que els valors de v i u no són modificables (el de v ve determinat per les condicions del mercat de la premsa diària; el de u , per les condicions en què es produeix el diari).

En el supòsit que la venedora optimitza el seu moviment de fons en el marc definit per l'editorial, hem vist que:

$$H(q^*) = \frac{v - c}{v - r}, \quad q^* = 500 \cdot \frac{v - c}{v - r}$$

Aleshores, l'expressió entre claudàtors que figura a les equacions que defineixen $\bar{f}_E(q)$ i $\bar{f}_V(q)$ val

$$-250 \cdot \frac{(v - c)^2}{(v - r)^2}$$

i resulta

$$\bar{f}_E(q^*) = 250 \cdot \frac{v - c}{v - r} \cdot \left(2 \cdot c - 2 \cdot u - r \cdot \frac{v - c}{v - r} \right), \quad \bar{f}_V(q^*) = 250 \cdot \frac{(v - c)^2}{v - r}$$

L'editora, per determinar $c^*(r)$ (el millor valor de c , donat r) i $r^*(c)$ (el millor valor de r , donat c) ha d'igualar a 0 les respectives derivades parcials (aquesta condició és suficient, en tots dos casos: en el de $c^*(r)$ perquè la derivada parcial segona és negativa; en el de $r^*(c)$ perquè només hi ha un valor de r que anul·la la derivada i que separa els valors amb derivades positives i negatives, a la seva esquerra i a la seva dreta, respectivament). Els valors corresponents són:



$$c^*(r) = v - \frac{(v-u) \cdot (v-r)}{2v-r}$$

$$r^*(c) = \max\left(0, v - \frac{2v \cdot (v-c)}{v+c-2u}\right)$$

Si es compleixen les condicions $r < c < v$, $c^*(r) > 0$. En canvi, no es pot descartar que l'expressió $v - \frac{2v \cdot (v-c)}{v+c-2u}$ sigui < 0 i, en aquest cas, $r^*(c) = 0$.

Amb els valors numèrics de l'enunciat:

$$c^*(r) = 0,92069; q^* = 206,90; \bar{f}_E(q^*) = 124,14; \bar{f}_V(q^*) = 59,93$$

$$r^*(c) = 1,22727; q^* = 366,67; \bar{f}_E(q^*) = 201,67; \bar{f}_V(q^*) = 36,67$$

En tots dos casos, tant l'editora com la venedora obtenen unes esperances matemàtiques dels moviments de fons superiors a les corresponents a les dades inicials. Però l'editora encara pot millorar la seva esperança matemàtica si actua alhora sobre c i sobre r , i trobar l'òptim en aquestes condicions és una mica més complicat. Es pot plantejar un programa matemàtic per maximitzar \bar{f}_E amb les restriccions $r < c < v$ i les de no negativitat de r i c (la de c es pot considerar supèrflua, perquè la no negativitat de r implica la de c), però per a les desigualtats estrictes cal introduir uns marges $\varepsilon, \eta > 0$, i petits, per tal de substituir les restriccions de tipus $<$ per restriccions \leq : $r \leq c - \varepsilon$, $c \leq v - \eta$; com que el programa matemàtic que en resulta només té 3 restriccions, no és difícil, però sí una mica laboriós, resoldre'l via condicions KKT.

Alternativament, com que tenim l'expressió de c^* com a funció de r , podem expressar \bar{f}_E com a funció exclusivament de r mitjançant la substitució de c per

$c^*(r)$ en l'expressió $250 \cdot \frac{v-c}{v-r} \cdot \left(2c - 2u - r \cdot \frac{v-c}{v-r}\right)$, amb què obtenim:

$$\bar{f}_E = 250 \cdot \frac{(v-u)^2}{2v-r}$$

que creix amb r . Per tant, r ha de prendre el valor més alt possible compatible amb les restriccions $r < c < v$, la qual cosa implica que c ha de prendre el valor més alt compatible amb la restricció $c < v$ (el supòsit $r = c = v$ és inviable, perquè en aquest cas la venedora té un moviment de fons nul amb independència del nombre de diaris que adquireixi a l'editora).

Amb $r = v - \varepsilon$ resulta $c^*(r) = v - \frac{v-u}{v+\varepsilon} \cdot \varepsilon$, $\bar{f}_E = 250 \cdot \frac{(v-u)^2}{v+\varepsilon}$, $\bar{f}_V = 250 \cdot \frac{(v-u)^2}{(v+\varepsilon)^2} \cdot \varepsilon$

i $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{f}_E = 240$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{f}_V = 0$. Per tant, en el límit, l'editora podria assolir una esperança matemàtica de 240 si no fos perquè seria a costa de la ruïna de la venedora, que abandonaria el negoci i deixaria l'editora sense canal per vendre el diari.

Aleshores, si l'editora estima que el valor que ha d'assolir l'esperança matemàtica del moviment de fons de la venedora perquè aquesta segueixi exercint la seva funció és P u. m./dia, haurà de maximitzar \bar{f}_E amb la restricció $\bar{f}_V \geq P$. Una altra possibilitat és que maximitzi

$$\bar{f}_E + \bar{f}_V = 250 \cdot \left(2 \cdot (v - u) \cdot \frac{v - c}{v - r} - v \cdot \left(\frac{v - c}{v - r} \right)^2 \right)$$

Aquesta expressió és òptima, igual a 240 u. m., per a $\frac{v - c}{v - r} = \frac{v - u}{v}$, que amb les dades de l'enunciat és equivalent a $r = 1,25 \cdot c - 0,375$; aleshores,

$$H(q^*) = \frac{v - c}{v - r} = \frac{v - u}{v} = 0,8 \text{ i } q^* = 400,$$

$$\bar{f}_V = 250 \cdot \frac{(v - c)^2}{v - r} = 250 \cdot \frac{(v - c)^2}{1,25v - 1,25c} = 200 \cdot (v - c) = P, \text{ i } c = v - \frac{P}{200}$$

Per exemple, amb $P = 5$, $c = 1,475$, $r = 1,46875$, $\bar{f}_E = 235$.

Així doncs, la part de la cadena de subministrament formada per l'editora i la venedora pot aportar un moviment de fons conjunt amb una esperança matemàtica de 240 u. m./dia, però una política de preus equivocada pot tenir com a conseqüència una esperança matemàtica molt inferior. En l'enunciat i en la resolució d'aquest problema s'ha suposat implícitament que la venedora no té capacitat de negociació i ha resultat que el millor que pot fer l'editora és fixar c i r , de manera que la venedora obtingui un moviment de fons amb una esperança matemàtica suficient perquè segueixi en el negoci, P , i que l'esperança del moviment de fons total sigui igual a 240, amb la qual cosa l'esperança de l'editora serà³ $240 - P$.

Tanmateix, no hem considerat,⁴ en adoptar el criteri de l'esperança matemàtica, la dispersió dels moviments de fons a què dona lloc el caràcter aleatori de la

³ Per determinar el repartiment de les 240 u. m. com a resultat d'una negociació (per exemple, si la venedora fos una empresa distribuïdora), caldria recórrer a la teoria de la negociació de John Nash, però aquest ja seria un altre problema.

⁴ Tampoc no hem tingut en compte que les persones que pretenen comprar el diari també formen part de la cadena de subministrament i que l'esperança matemàtica del nombre de demandes que la venedora no podrà satisfer per manca d'estoc és $250 + q^{*2} / 1.000 - q^*$ (183,67 en la situació inicial; 10 si $q^* = 400$). En els càlculs d'optimització que hem exposat no hem tingut en compte la



demanda. Pel que fa a l'editora, podem suposar que té una estructura financera que li permet absorbir les fluctuacions, però en el cas de la venedora probablement aquestes fluctuacions poden causar-li dificultats importants, ja que alguns dies el seu moviment de fons pot ser molt inferior al valor P i fins i tot negatiu.

Els moviments de fons diaris f_E, f_V, f_T , de l'editora, la venedora i el conjunt, respectivament, són:

$$f_E = \begin{cases} r \cdot x + (c - u - r) \cdot q & x \leq q \\ (c - u) \cdot q & x > q \end{cases}$$

$$f_V = \begin{cases} (v - r) \cdot x + (r - c) \cdot q & x \leq q \\ (v - c) \cdot q & x > q \end{cases}$$

$$f_T = \begin{cases} v \cdot x - u \cdot q & x \leq q \\ (v - u) \cdot q & x > q \end{cases}$$

On x és la demanda diària de diaris, que tractem com una variable aleatòria de funció de densitat de probabilitat $h(x)$ i funció de distribució $H(x)$. Aleshores, les esperances matemàtiques i les variàncies dels moviments de fons diaris són:

$$\begin{aligned} \bar{f}_E &= r \cdot \varphi_\mu(q) + (c - u) \cdot q & \sigma_E^2 &= r^2 \cdot \varphi_\sigma(q) \\ \bar{f}_V &= (v - r) \cdot \varphi_\mu(q) + (v - c) \cdot q & \sigma_V^2 &= (v - r)^2 \cdot \varphi_\sigma(q) \\ \bar{f}_T &= v \cdot \varphi_\mu(q) + (v - u) \cdot q & \sigma_T^2 &= v^2 \cdot \varphi_\sigma(q) \end{aligned}$$

On:

$$\varphi_\mu(q) = \int_0^q x \cdot h(x) dx - q \cdot H(q)$$

$$\varphi_\sigma(q) = q^2 \cdot H(q) \cdot (1 - H(q)) - 2 \cdot q \cdot (1 - H(q)) \cdot \int_0^q x \cdot h(x) dx + \int_0^q x^2 \cdot h(x) dx - \left(\int_0^q x \cdot h(x) dx \right)^2$$

En el cas particular considerat a l'enunciat, amb $h(x) = 1/500$, $H(x) = x/500$ ($0 \leq x \leq 500$):

$$\varphi_\mu(q) = -\frac{q^2}{1.000}, \quad \varphi_\sigma(q) = \frac{2.000 \cdot q^3 - 3 \cdot q^4}{3.000.0000}$$

frustració generada per les demandes no satisfetes, una de les conseqüències de la qual pot ser que la clientela habitual del diari en qüestió es passi a un altre mitjà.

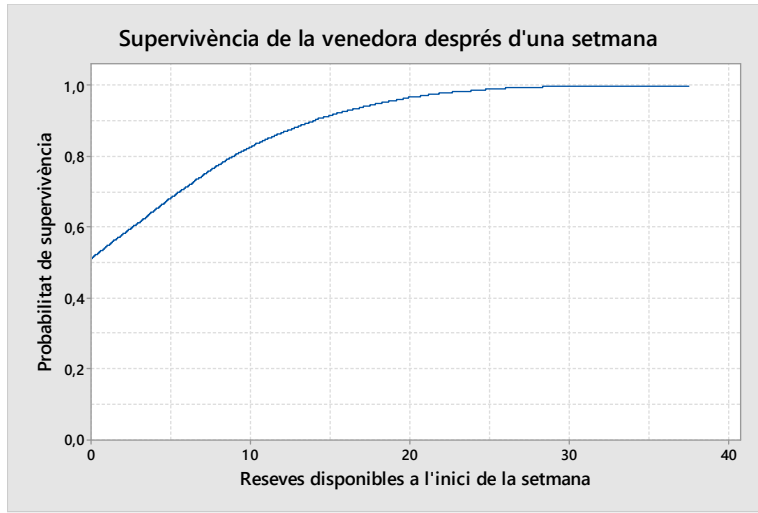
Com hem vist (amb $\nu = 1,5$, $u = 0,3$, $c = 1,475$ i $r = 1,46875$), $q^* = 400$ i $\bar{f}_V = 5$. Tenim també que $\sigma_V^2 = 16,6$, $\sigma_V = 4,0825$. L'esperança matemàtica del moviment de fons en n dies és $5 \cdot n$ i la desviació típica, atès que les demandes diàries són independents, $4,0825 \cdot \sqrt{n}$. Ara bé, si les despeses diàries de la venedora són iguals a 5, l'esperança matemàtica del saldo entre ingressos i despeses (moviment de fons net) és igual a 0 per a tots els valors de n .

Si la venedora té la necessitat estricta de 5 u. m. per seguir en el negoci, la probabilitat que desisteixi al cap d'un dia és 0,48, ja que per aconseguir uns ingressos no inferiors a 5 u. m. cal que la demanda no baixi de 240 diaris, i la probabilitat que això passi és 0,52. Podríem calcular fàcilment la reserva monetària que ha de tenir la venedora per tal de tenir la certesa de subsistir al final del primer dia; si la demanda és nul·la, el seu moviment de fons f_V serà -2,5 u. m. i li caldria una reserva de 7,5 u. m.

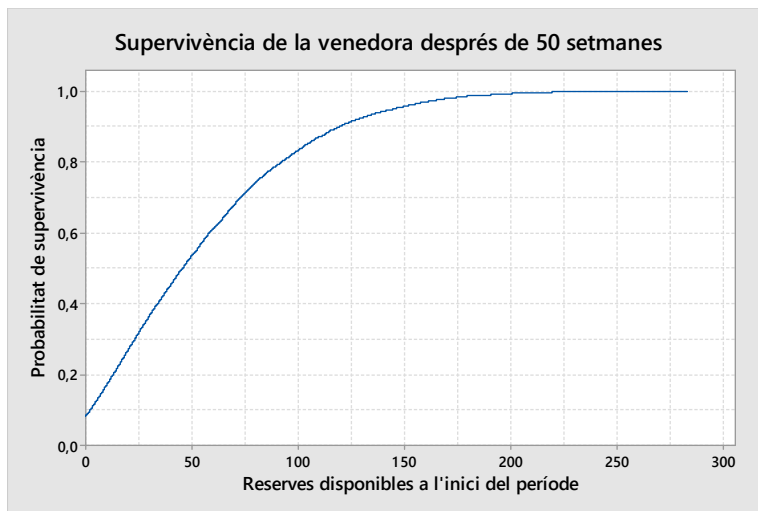
En cas que els períodes de liquidació a l'editora fossin de n dies (és a dir, si els pagaments per compra i els cobraments per devolució de diaris de la venedora a l'editora es fessin cada n dies), amb n prou gran la distribució del moviment de fons net de la venedora per al conjunt dels n dies s'aproximaria (segons el teorema del límit central) a una llei normal d'esperança matemàtica nul·la i desviació típica igual a $4,0825 \cdot \sqrt{n}$. Per tant, si la venedora no té reserves, la probabilitat de no poder seguir en el negoci en acabar un període de n dies, amb n gran, no supera 0,5 (aquesta probabilitat és menor que la d'acabar el període amb un saldo no negatiu, perquè una successió desafortunada de moviments de vendes inferiors a 5 u. m. pot implicar l'exhauriment de les reserves abans del final del període). Com que la desviació típica creix amb n , com més gran és n més grans han de ser les reserves de la venedora per a una mateixa probabilitat de subsistir en acabar el període.

Si la liquidació es fa setmanalment ($n = 7$) tindrem una desviació típica igual 10,8013. Com que el nombre de dies no és prou gran per fer ús de l'aproximació mitjançant la llei normal i tenir en compte la probabilitat d'exhauriment de reserves abans del final del període és complicat en un tractament analític, vàrem recórrer a la simulació.

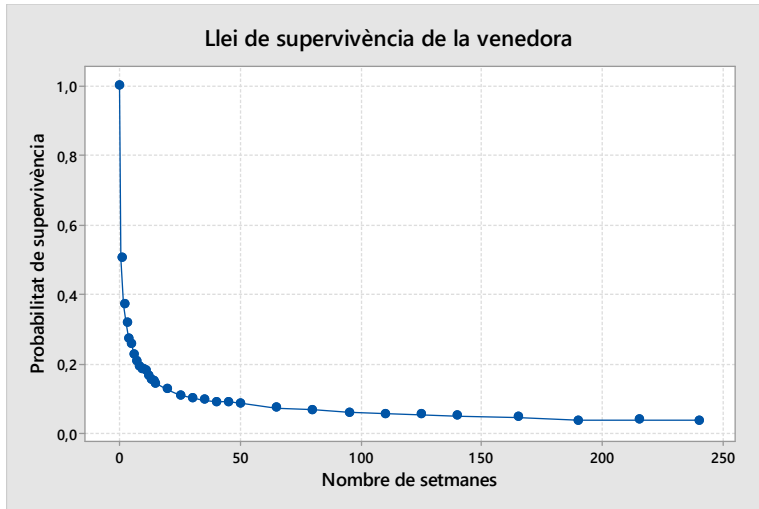
Concretament, vàrem simular 10.000 setmanes i per a cada una d'elles vàrem determinar el major valor absolut dels moviments de fons nets negatius en el curs de la setmana i en el moment de la liquidació. Amb aquests 10.000 valors vàrem estimar la probabilitat que la venedora no abandoni el negoci en acabar la setmana tenint en compte les reserves de què disposa a l'inici de la setmana; la figura següent mostra el valor estimat de la probabilitat de supervivència de la venedora, després d'una setmana, en funció de les reserves disponibles a l'inici de la setmana.



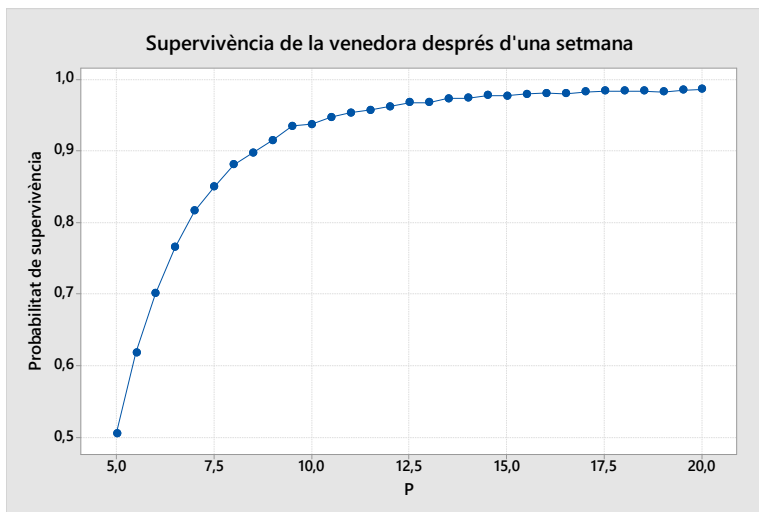
A continuació vàrem simular 10.000 períodes de 50 setmanes per estimar la probabilitat que la venedora sobrevisqui 50 setmanes en funció de les reserves disponibles a l'inici del període.

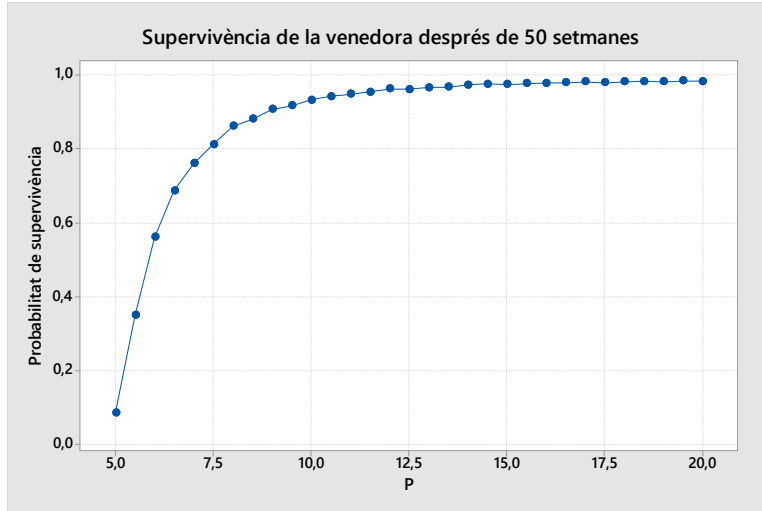


La llei de supervivència de la venedora per a un valor fixat de la disponibilitat inicial es pot estimar simulant repetidament el sistema. Hem suposat que les reserves inicials de la venedora són nul·les i, per tal d'estimar la probabilitat que la venedora sobrevisqui, hem simulat 10.000 cops el funcionament del sistema per a 32 valors diferents, compresos entre 1 i 240, del nombre de setmanes. La figura mostra els resultats obtinguts.



Per tant, amb la seva política de preus, l'editora corre el perill de quedar-se sense venedora, a més o menys curt termini. Per tal reduir aquest risc hauria d'augmentar P . Per exemple, amb $P = 6$, que pot aconseguir amb $c = 1,47$ i $r = 1,4625$, les estimacions de les probabilitats de supervivència de la venedora després d'1 i 50 setmanes, en el supòsit que no té reserves, passen a 0,70 i 0,56, respectivament. Les figures mostren l'estimació de les probabilitats de supervivència de la venedora després d'una i de 50 setmanes obtingudes per simulació per a valors de P entre 5 i 20.





Per evitar la fallida, també es podria establir un sistema de concessió de crèdit a la venedora amb què aquesta pogués subsistir en períodes adversos. Alternativament, l'editora podria contactar la venedora com a assalariada.

CA02. Desmuntar i reciclar

RECRECSA (Recicladora de Recanvis, SA) recupera productes usats per tal de desmuntar-los i vendre'n els components. Un d'aquests productes té un cost unitari per a RECRECSA de p u. m. (que inclou les despeses de desmuntatge) i n'obté, per cada unitat de producte, $k_i (i = 1, \dots, n)$ unitats de cada un dels n components. El cost de reciclar un component és c_i ; el preu de venda, π_i ; i la demanda, d_i . RECRECSA ven com a ferralla els components que el mercat no pot absorbir, a un preu f_i .

Es tracta de determinar quantes unitats ha de recuperar RECRECSA per maximitzar la diferència entre ingressos i costos.

D'entrada, convé distingir entre els components reciclables i els no reciclables. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que els reciclables són els components $1, \dots, \hat{n}$ (amb $\hat{n} \leq n$) i que els no reciclables (per impossibilitat tècnica o perquè $c_i \geq \pi_i - f_i$) són els restants ($\hat{n} + 1, \dots, n$).

Podem plantejar un programa lineal del problema (amb $\hat{\pi}_i = \pi_i - c_i$):

Variables:

x unitats recuperades del producte usat.

v_i unitats reciclades (i venudes) del component $i (i = 1, \dots, \hat{n})$.

s_i unitats no reciclades del component reciclable i ($i = 1, \dots, \hat{n}$).

Estrictament, totes aquestes variables són enteres no negatives.

Model:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{i=1}^{\hat{n}} (\hat{\pi}_i \cdot v_i + f_i \cdot s_i) + \left(\sum_{i=\hat{n}+1}^n f_i \cdot k_i \right) \cdot x - p \cdot x \\ \text{s. a } & \quad v_i + s_i = k_i \cdot x \quad i = 1, \dots, \hat{n} \\ & \quad v_i \leq d_i \quad i = 1, \dots, \hat{n} \end{aligned}$$

I, si eliminem les variables $s_i = k_i \cdot x - v_i$:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{i=1}^{\hat{n}} (\hat{\pi}_i - f_i) \cdot v_i + \left(\sum_{i=1}^n f_i \cdot k_i \right) \cdot x - p \cdot x \\ \text{s. a } & \quad v_i \leq k_i \cdot x \quad i = 1, \dots, \hat{n} \\ & \quad v_i \leq d_i \quad i = 1, \dots, \hat{n} \end{aligned}$$

És clar que si $\sum_{i=1}^n f_i \cdot k_i > p$ a RECRECSA li interessa comprar totes les unitats disponibles del producte.

Si particularitzem el model per al joc de dades següent (amb $\hat{n} = 5$ i $p = 50$):

i	1	2	3	4	5	6
k_i	2	4	1	1	5	2
$\hat{\pi}_i$	10	12	8	16	7	-
f_i	2	1	1	3	1	4
d_i	100	200	150	300	800	-

Obtenim

x	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
160	100	200	150	160	800

Amb uns ingressos nets de 6.930 u. m.

La resolució d'aquest problema mitjançant la programació lineal resulta còmoda i ràpida, però també es pot recórrer a instruments més elementals. Els quocients d_i / k_i ($i = 1, \dots, \hat{n}$), que denominarem valors crítics i que suposarem ordenats de menor a major, corresponen als nombre d'unitats a partir dels quals s'han de vendre com a ferralla les unitats del component i que s'obtenen en desmuntar el producte. Els ingressos nets que proporciona la primera unitat del producte (si el



primer valor crític no és <1) són iguals a $\sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{\pi}_i \cdot k_i + \sum_{i=\hat{n}+1}^n f_i \cdot k_i - p$; quan x arriba a un valor crític els ingressos nets es redueixen, per a les unitats següents, en $(\hat{\pi}_i - f_i) \cdot k_i$ i el valor òptim de x és, per tant, aquell a partir del qual els ingressos nets d'una unitat serien negatius (o nuls: en aquest cas hi hauria un òptim múltiple).

Es diu, però no hi ha unanimitat, que Henry Ford es va inspirar en el procés d'especejament en els escorxadors de Chicago per al projecte de la línia de muntatge mòbil del Ford T. En els primers anys del segle XX, el procés havia assolit una gran eficiència, amb molt avantatge sobre l'aleshores incipient indústria automobilística.

El problema següent es refereix a l'especejament i, per tant, té punts de contacte amb l'anterior, però amb la característica addicional que els preus són funció de les quantitats.

CA03. Especejament

Estruços de l'Empordà, SA (ESTEMPSPA) cria estruços amb un cost de c u. m./estruç i té una capacitat de producció que, en relació amb la demanda, es pot considerar pràcticament il·limitada. Ven estruços sencers a un preu p_0 que depèn de la quantitat que ESTEMPSPA posa en el mercat. ESTEMPSPA disposa d'un escorxador propi en què pot especejar els animals, amb un cost e u. m./estruç. De l'especejament de cada estruç obté una unitat⁵ de cada un dels n productes que comercialitza, els quals ven als preus p_i ($i = 1, \dots, n$), que també depenen de la quantitat de cada producte que ESTEMPSPA posa en el mercat. Són negligibles els costos de preparació de cada producte, i els costos i els ingressos per les unitats de producte obtingudes en l'especejament que no es posen en el mercat i que es destinen a farines per a l'alimentació animal.

Concretament, tots els preus són funció lineal de les quantitats posades en el mercat mensualment, q_i , segons l'expressió:

$$p_i = a_i - b_i \cdot q_i \quad (\text{amb } a_i, b_i > 0; i = 0, 1, \dots, n)$$

Es tracta d'estudiar les propietats de les solucions òptimes d'aquest problema i d'obtenir la corresponent a les dades següents:

$$n = 3, c = 120, e = 60$$

⁵ Aquest supòsit d'obtenir una unitat de cada producte simplifica les formulacions i no implica pèrdua de generalitat, ja que perquè es compleixi només cal utilitzar una unitat de mesura apropiada (per exemple, una unitat de producte poden ser dues ales o dues potes).

i	0	1	2	3
a_i	200	100	270	500
b_i	0,50	0,25	0,30	0,40

Suposem que el que es vol optimitzar és la diferència entre ingressos i despeses mensuals.

En principi, la dificultat prové del fet que els ingressos són una funció quadràtica de les quantitats.

La diferència entre ingressos i despeses corresponents als estruços sencers ($i = 0$) és $a_0 \cdot q_0 - b_0 \cdot q_0^2 - c \cdot q_0$, independents dels productes obtinguts amb l'especejament, i , per tant:

$$q_0^* = \frac{a_0 - c}{2 \cdot b_0}$$

Amb les dades indicades $q_0^* = \frac{200 - 120}{2 \cdot 0,5} = 80$, que contribuiran a la funció objectiu amb $(200 - 80 \cdot 0,5) \cdot 80 - 120 \cdot 80 = 3.200$ u. m.

El nombre d'unitats òptim és aquell per al qual la derivada dels ingressos iguala la dels costos, que en aquest cas és constant, igual a c . Com que el valor de q_0 ha de ser enter, si el resultat no ho fos caldria comparar els valors de la diferència entre ingressos i costos per als dos enters més pròxims (un per defecte i l'altre per excés) al valor en què s'igualen les derivades.

Aquestes observacions ens permeten resoldre, amb un raonament anàleg al que hem exposat a DI02, el problema d'optimitzar el nombre d'estruços especejats i del nombre d'unitats de cada component que cal dur al mercat.

Si el nombre d'estruços especejats (sigui x) és molt baix, cal posar a la venda tots els productes obtinguts (a condició, naturalment, que la derivada dels ingressos totals sigui superior a la dels costos, que en aquest cas es considera constant, igual a $c + e$). Si x augmenta, la derivada dels ingressos disminueix fins que s'iguali a la dels costos; però s'ha de tenir en compte que quan la derivada dels ingressos corresponents a un producte s'anul·la, no se n'han de posar més unitats en el mercat (les que sobrin, com diu l'enunciat, es destinaran a fabricar farines per a l'alimentació animal).

Amb les dades de l'exemple, les derivades dels ingressos obtinguts per la venda dels productes s'anul·len per a $q_1 = 200$, $q_2 = 450$, $q_3 = 625$. La suma de les derivades a l'origen és $100 + 270 + 500 = 870 > 120 + 60 = 180$; per a $x = 200$, $0 + 150 + 340 = 490 > 180$; per a $x = 450$, $(0) + 0 + 140 < 180$. Per tant, el valor òptim de x es troba entre 200 i 450 i és aquell per al qual



$270 - 0,6 \cdot x + 500 - 0,8 \cdot x = 180$. Com que resulta $x = 421,43$, cal comparar els valors de la diferència entre ingressos i despeses per a $x = 421$ i $x = 422$, tenint en compte que en els dos casos es posaran en el mercat 200 unitats del producte 1 i x unitats dels productes 2 i 3. El resultat és 134.321,3 u. m. per a $x = 421$ i 134.321,2 u. m. per a $x = 422$.

En resum, la política òptima d'ESTREMPESA consisteix a produir mensualment 501 estruços, posar-ne en el mercat 80, especejar-ne 421, posar en el mercat 200, 421 i 421 unitats dels productes 1, 2 i 3, respectivament, i destinar a la producció de farines per a l'alimentació animal $421 - 200 = 221$ unitats del producte 1. Amb aquesta política, el marge entre ingressos i despeses és $3.200 + 134.321,3 = 137.521,3$ u. m.

Podem arribar al mateix resultat, d'una manera més formal, mitjançant la formulació d'un programa matemàtic i fent ús de les condicions de KKT que, com es veurà, en aquest cas són condicions necessàries i suficients d'òptimitat.

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{i=1}^n (a_i \cdot q_i - b_i \cdot q_i^2) - (c + e) \cdot x \\ \text{s.a } & q_i \leq x \quad i = 1, \dots, n \quad (u_i) \\ & q_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (v_i) \end{aligned}$$

A la dreta de les restriccions hi figuren els multiplicadors de KKT que hi estan associats. Aleshores, les condicions de KKT són:

$$\begin{aligned} u_i, v_i & \geq 0 & i = 1, \dots, n \\ (q_i - x) \cdot u_i & = 0 & i = 1, \dots, n \\ q_i \cdot v_i & = 0 & i = 1, \dots, n \\ 2 \cdot b_i \cdot q_i - a_i + u_i - v_i & = 0 & i = 1, \dots, n \\ c + e - \sum_{i=1}^n u_i & = 0 \end{aligned}$$

Per començar, comprovem si la solució $q_i = x > 0$ ($i = 1, \dots, n$) és òptima o no. En aquest supòsit $v_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), $u_i = a_i - 2 \cdot b_i \cdot x$ ($i = 1, \dots, 3$) i, de

$c + e - \sum_{i=1}^n u_i = 0$ resulta:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i - (c + e)}{2 \cdot \sum_{i=1}^3 b_i}$$

Com que amb les dades de l'exemple, resulta $x = 690 / 1,9 = 363,16$, que implica $u_1 < 0$ i el consegüent incompliment de KKT, provem amb $0 < q_1 < x$ ($u_1, v_1 = 0$), $q_i = x$ ($i = 2, 3$):

$$x = \frac{\sum_{i=2}^3 a_i - (c + e)}{2 \cdot \sum_{i=2}^3 b_i}, q_1 = \frac{a_1}{2 \cdot b_1}$$

I, amb les dades de l'exemple, $x = 421,43$, $q_1 = 200$ i tots els multiplicadors són no negatius, per la qual cosa es compleix KKT i, per tant, la solució $q_1 = 200$, $q_2 = q_3 = x$ és òptima (retrobem el resultat a què ja havíem arribat).

Observem que amb aquest enfocament podem determinar la solució òptima per a qualsevol valor de la capacitat d'especejament d'ESTEMPSA (o de la capacitat de producció d'estruços si incorporem al programa matemàtic els ingressos per la venda d'estruços sencers, cosa que deixem com a exercici).

La logística inversa (és a dir, les operacions relacionades amb la recollida, l'aprofitament i l'eliminació dels productes usats) és una realitat des de fa molt temps, amb una importància quantitativa i qualitativa creixent per la relació que té amb el medi ambient (això no obstant, i sorprenentment, encara es publiquen definicions de logística i de cadena de subministrament que no en parlen, com si fos una qüestió secundària). Les operacions de recollir i eliminar productes usats formen part de la logística inversa, tot i que pròpiament no generin fluxos de material que vagin en un sentit oposat als d'aprovisionament, producció i distribució (es pot dir, per tant, que CA02 és un problema de logística inversa). Es diu que la cadena de subministrament és en bucle (*closed loop supply chain*⁶) quan el producte usat o un dels components o materials que en formen part van a parar a algun punt del sistema d'aprovisionament-producció-distribució per tal de convertir-se en (mitjançant la remanufactura), o incorporar-se a, un producte que es distribuirà en els mercats.

La logística inversa, i especialment la logística en bucle, complica força la gestió, perquè implica incertesa quant al moment, el lloc, la quantitat i la qualitat de les devolucions.

Els productes remanufacturats poden ser diferents o indistingibles dels originals. En tot cas, el més habitual és que el procés d'elaboració de les unitats remanufacturades sigui diferent del de les originals, fins al punt que unes i altres es poden produir en instal·lacions diferents. A l'enunciat del problema següent suposem que les unitats originals i les remanufacturades són indistingibles i que es produeixen en la mateixa instal·lació; a més, suposem que els fluxos de retorn són deterministes.⁷

⁶ De vegades es diu "en bucle tancat", potser perquè es tradueix *closed loop* paraula per paraula, però nosaltres optem per "en bucle", perquè la paraula *bucle* ja inclou la idea de tancament.

⁷ El problema dels tovallons (VI05) es pot incloure també en els de *closed loop supply chain*.



CA04. Bucle

Planifiquem la capacitat per al primer any de funcionament d'una planta de producció de tòner per a impressores làser domèstiques, amb la condició que s'ha de satisfer, sense diferir-ne, tota la demanda.

La demanda estimada, en milers d'unitats, per als 12 mesos següents a l'inici d'activitat és:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Demanda	50	60	80	90	100	130	170	150	110	90	80	70

S'estima també que dels envasos de les unitats venudes el mes t , se'n recuperaran el 15 %, el 45 % i el 30 % els mesos $t+3$, $t+4$ i $t+5$, respectivament. Els envasos es reomplen a la mateixa planta i les unitats que s'obtenen així són indistingibles de les originals. La capacitat productiva necessària per obtenir una unitat reciclada és només un terç de la corresponent a una unitat nova. Tenint en compte els costos de recuperació i de producció, el cost d'una unitat reciclada és la meitat que el d'una unitat nova, que és d'1 u. m.

El magatzem té prou capacitat per a quantitats qualssevol de producte i d'envasos. Els costos de possessió del producte i dels envasos són, respectivament, 0,010 i 0,005 u. m. per unitat i mes.

La capacitat de producció s'ha de fixar al principi i s'ha de mantenir durant els 12 mesos següents. El fet de disposar d'una capacitat determinada té un cost igual a una constant K més un terme proporcional, amb coeficient 10,00, a la capacitat expressada en milers d'unitats de producte nou.

Aquest problema té molts punts de contacte amb FO05, però aquí les coses es compliquen una mica a causa de la recuperació d'envasos i la remanufactura.

Expressem les quantitats en milers d'unitats i milers d' u. m.

A partir de les dades, és immediat calcular el nombre d'envasos recuperats cada mes:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Retorns	0	0	0	7,5	31,5	54	67,5	79,5	91,5	114	138	135

Com que s'ha de complir la condició de satisfer tota la demanda, és correcte adoptar els costos com a funció objectiu que s'ha de minimitzar. Plantegem un model de programació lineal, amb la notació següent:

Dades:

d_t ($t = 1, \dots, 12$) demanda del mes t .

r_t ($t = 4, \dots, 12$) retorns del mes t .

Variables:

q capacitat.

x_t^N ($t = 1, \dots, 12$) producció d'unitats noves del mes t .

x_t^R ($t = 4, \dots, 12$) producció d'unitats reciclades del mes t .

s_t^N ($t = 1, \dots, 12$) estoc de producte a final del mes t .

s_t^R ($t = 4, \dots, 12$) estoc d'envasos del mes t .

l el model:

$$\text{minimitzar } 10 \cdot q + 1 \cdot \sum_{t=1}^{12} x_t^N + 0,5 \cdot \sum_{t=4}^{12} x_t^R + 0,010 \cdot \sum_{t=1}^{12} s_t^N + 0,005 \cdot \sum_{t=4}^{12} s_t^R$$

$$\begin{aligned} \text{s.a } x_1^N &= d_1 + s_1^N \\ s_{t-1}^N + x_t^N &= d_t + s_t^N & t = 2, \dots, 3 \\ s_{t-1}^N + x_t^N + x_t^R &= d_t + s_t^N & t = 4, \dots, 12 \\ r_4 &= x_4^R + s_4^R \\ s_{t-1}^R + r_t &= x_t^R + s_t^R & t = 5, \dots, 12 \\ x_t^N &\leq q & t = 1, \dots, 3 \\ x_t^N + \frac{x_t^R}{3} &\leq q & t = 4, \dots, 12 \end{aligned}$$

Si es prescindeix del cost de la capacitat, s'obté $q^* = 125$, amb una funció objectiu igual a 895,52 i:

t	1,0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_t^N	50,0	60,0	80,0	82,5	68,5	76,0	102,5	70,5	18,5	0,0	0,0	0,0
x_t^R				7,5	31,5	54,0	67,5	79,5	91,5	90,0	80,0	70,0
s_t^N	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
s_t^R				0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	24,0	82,0	147,0

Amb el cost de la capacitat indicat a l'enunciat tenim $q^* = 83,75$, amb una funció objectiu igual a 1.736,22 i:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_t^N	83,75	83,75	83,75	83,75	83,75	80,00	40,625	50,625	18,50	0,00	0,00	0,00
x_t^R				0,00	0,00	11,25	129,38	99,375	91,50	90,00	80,00	70,00
s_t^N	33,75	57,50	61,25	55,00	38,75	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
s_t^R				7,50	39,00	81,75	19,875	0,00	0,00	24,00	82,00	147,00



En un sistema com el que hem descrit es podria donar el cas que no convingués acceptar tots els envasos retornats. Per tenir en compte aquesta possibilitat, caldria introduir en el model unes noves variables (y_t , $t = 4, \dots, 12$) corresponents als retorns del mes t i les restriccions $y_t \leq r_t$ ($t = 4, \dots, 12$):

$$\text{minimitzar } 10 \cdot q + 1 \cdot \sum_{t=1}^{12} x_t^N + 0,5 \cdot \sum_{t=4}^{12} x_t^R + 0,010 \cdot \sum_{t=1}^{12} s_t^N + 0,005 \cdot \sum_{t=4}^{12} s_t^R$$

$$\begin{aligned} \text{s.a } x_1^N &= d_1 + s_1^N \\ s_{t-1}^N + x_t^N &= d_t + s_t^N & t = 2, \dots, 3 \\ s_{t-1}^N + x_t^N + x_t^R &= d_t + s_t^N & t = 4, \dots, 12 \\ y_4 &= x_4^R + s_4^R \\ s_{t-1}^R + y_t &= x_t^R + s_t^R & t = 5, \dots, 12 \\ x_t^N &\leq q & t = 1, \dots, 3 \\ x_t^N + \frac{x_t^R}{3} &\leq q & t = 4, \dots, 12 \\ y_t &\leq r_t & t = 4, \dots, 12 \end{aligned}$$

Sense cost de la capacitat, s'obté també $q^* = 125$, però amb una funció objectiu igual a 894,25 (lleugerament inferior a l'obtinguda en el supòsit que cal acceptar tots els retorns) i:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t				7,5	31,5	54,0	67,5	79,5	91,5	90,0	80,0	70,0
x_t^N	50,0	60,0	80,0	82,5	68,5	76,0	102,5	70,5	18,5	0,0	0,0	0,0
x_t^R				7,5	31,5	54,0	67,5	79,5	91,5	90,0	80,0	70,0
s_t^N	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
s_t^R				0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Amb cost de la capacitat, $q^* = 83,75$, com en el primer supòsit, amb una funció objectiu igual a 1.734,95 (lleugerament inferior a la corresponent al primer supòsit) i:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t				7,50	31,50	54,0	67,50	79,50	91,50	90,00	80,00	70,00
x_t^N	83,75	83,75	83,75	83,75	83,75	80,0	40,625	50,625	18,50	0,00	0,0	0,00
x_t^R				0,00	0,00	11,25	129,375	99,375	91,50	90,00	80,0	70,00
s_t^N	33,75	57,5	61,25	55,00	38,75	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0	0,00
s_t^R				7,50	39,00	81,75	19,875	0,00	0,00	0,00	0,0	0,00

CA05. Retirada

L'empresa PROINN ha decidit substituir el producte P pel producte P' i estudia la millor manera d'aprofitar els components de P que té en estoc, ja que no serveixen per a l'elaboració de P'. PROINN no té unitats de P en estoc, però encara pot vendre qualsevol quantitat que produeixi, dintre dels límits de disponibilitat de recursos.

Una unitat de P inclou n_c ($c = 1, \dots, C$) unitats de cada un dels C components que incorpora. Els estocs disponibles són s_c ($c = 1, \dots, C$) unitats de cada component. PROINN ven les unitats de P a g u. m.; pot adquirir unitats addicionals dels components a un preu (per unitat) de k_c u. m. ($c = 1, \dots, C$), i també pot vendre-les a raó de v_c u. m. ($\leq k_c$, $c = 1, \dots, C$) cada unitat. Els costos de muntatge dels components per obtenir el producte són negligibles. La direcció de PROINN ha destinat K u. m. a finançar el procés de canvi de P per P'.

PROINN també pot elaborar els components per si mateixa, amb un únic equip que té disponibles T unitats de temps (UT), amb un cost fix F_c ($c = 1, \dots, C$) i un cost unitari f_c ($c = 1, \dots, C$). El temps de preparació de l'equip és τ_c UT ($c = 1, \dots, C$) i el d'elaboració d'una unitat, t_c UT ($c = 1, \dots, C$).

Variables:

- q unitats de P produïdes i venudes.
- x_c unitats comprades de component c ($c = 1, \dots, C$).
- y_c unitats venudes de component c ($c = 1, \dots, C$).
- r_c unitats fabricades de component c ($c = 1, \dots, C$).
- $\delta_c \in \{0, 1\}$ variable que indica si s'elabora el component c o no ($c = 1, \dots, C$).

$$\begin{aligned} &\text{maximitzar } g \cdot q + \sum_{c=1}^C v_c \cdot y_c - \sum_{c=1}^C k_c \cdot x_c - \sum_{c=1}^C f_c \cdot r_c - \sum_{c=1}^C F_c \cdot \delta_c \\ \text{s. a } & s_c + r_c + x_c - y_c = n_c \cdot q && c = 1, \dots, C \\ & \sum_{c=1}^K k_c \cdot x_c + \sum_{c=1}^C f_c \cdot r_c + \sum_{c=1}^C F_c \cdot \delta_c \leq K + \sum_{c=1}^C v_c \cdot y_c \\ & \sum_{c=1}^C \tau_c \cdot \delta_c + \sum_{c=1}^C t_c \cdot r_c \leq T \\ & r_c \leq M_c \cdot \delta_c && c = 1, \dots, C \\ & q, x_c, y_c \in \mathbb{Z}_{\geq 0} && c = 1, \dots, C \\ & \delta_c \in \{0, 1\} && c = 1, \dots, C \\ \text{Amb } M_c &= \left\lfloor \frac{T - \tau_c}{t_c} \right\rfloor && c = 1, \dots, C \end{aligned}$$



Les M_c són fites superiors del nombre d'unitats fabricades del component c , que es poden calcular a partir del temps disponible i del pressupost.

No hem inclòs en el model les restriccions $y_c \leq s_c$, perquè es podria donar el cas que convingués fabricar unitats d'un component per vendre-les (i no per incorporar-les a una unitat de producte), cosa que pot passar, a l'òptim, si $\exists c \mid f_c < v_c$.

Amb les dades següents:

$g = 400$ $K = 5.000$ $T = 300$	c	1	2	3	4	5
	n_c	2	3	1	5	6
	s_c	50	23	18	100	90
	k_c	10	20	50	19	16
	v_c	5	10	25	9	8
	F_c	30	60	110	20	40
	f_c	8	16	40	15	13
	τ_c	20	15	35	40	45
	t_c	2	1	3	5	4

S'obté la solució òptima, amb la funció objectiu igual a 8.076 u. m. i $q = 32$, i en què s'usen 4.724 u. m. dels 5.000 disponibles i 298 UT de les 300 disponibles. Les altres variables adopten els valors indicats a la taula:

c	1	2	3	4	5
x_c	14	0	14	26	102
y_c	0	0	0	0	0
r_c	0	73	0	34	0
δ_c	0	1	0	1	0

Com hem indicat al principi d'aquest capítol, en els models de planificació agregada de la producció se suposa habitualment que es disposa d'una previsió de la demanda i que no hi ha limitacions en el subministrament de matèries primeres i components. Tanmateix, també es dona el cas que la disponibilitat d'unes i altres sigui limitada i que això condicioni la planificació de la producció. És el que suposem en el problema següent.

CA06. Melmelada

ALVECSA elabora i comercialitza diversos productes vegans i ecològics. En destaca la melmelada de caqui, que es ven tot l'any fins que s'exhaureix i que es produeix en una planta especialitzada que es dedica exclusivament a la producció de la melmelada de caqui durant $T = 5$ setmanes.

La fruita li subministren 3 proveïdores, cada una de les quals li pot vendre fins a q_{it} tones de fruita ($i = 1, \dots, 3; t = \hat{t}_i^{\min}, \dots, \hat{t}_i^{\max}$), a c_{it} u. m./tona, en cada un dels períodes de la campanya de recol·lecció del caqui. La fruita que arriba a la planta la setmana t es pot fer servir per a la producció de la mermelada en qualsevol dels períodes $t, \dots, t + \delta$.

La planta pot processar setmanalment fins a Q tones de caquis i el magatzem té capacitat per a S tones de la fruita.

Es tracta de plantejar un model per planificar l'aprovisionament de caquis i la producció de la mermelada i d'aplicar-lo amb les dades següents:

$$S = 15.000, Q = 10.000, d = 2$$

$i \downarrow t \rightarrow$	1	2	3	4	5
1	7.000 600	7.000 700	7.000 700	-	-
2	-	10.000 650	10.000 650	-	-
3	4.000 500	4.000 600	4.000 700	4.000 800	-

$q_{it} | c_{it}$

De l'enunciat es desprèn que tota la producció es pot vendre amb un marge positiu. Per tant, l'objectiu és maximitzar la producció, i obtenir-la amb el menor cost possible. Podríem determinar primer la màxima producció assolible i després, amb la restricció que la producció sigui la màxima, minimitzar-ne el cost. Més senzill, suposem un preu de venda de la mermelada obtinguda amb una tona de caquis, P , prou gran (només cal que superi el preu més gran de compra dels caquis: > 800 u. m./tona), ja que el cost de producció, en l'escenari descrit, és irrellevant.

Com a variables del model adoptem les tones de fruita adquirides a la proveïdora i en el període t i utilitzades per a la producció de mermelada en el període τ :

$$x_{it\tau} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 3; t = \hat{t}_i^{\min}, \dots, \hat{t}_i^{\max}; \tau = t, \dots, \min(t + \delta, T))$$

I el model:

$$\begin{aligned} &\text{maximitzar } P \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{t=\hat{t}_i^{\min}}^{\hat{t}_i^{\max}} \sum_{\tau=t}^{\min(t+\delta, T)} x_{it\tau} - \sum_{i=1}^3 \sum_{t=\hat{t}_i^{\min}}^{\hat{t}_i^{\max}} c_{it} \sum_{\tau=t}^{\min(t+\delta, T)} x_{it\tau} \\ \text{s.a} \quad &\sum_{\tau=t}^{\min(t+\delta, T)} x_{it\tau} \leq q_{it} \quad i = 1, \dots, 3; t = \hat{t}_i^{\min}, \dots, \hat{t}_i^{\max} \\ &\sum_{i=1}^3 \sum_{t=\max(\hat{t}_i^{\min}, \tau-\delta)}^{\min(\hat{t}_i^{\max}, \tau)} x_{it\tau} \leq Q \quad \tau = 1, \dots, T \\ &\sum_{i=1}^3 \sum_{t=\max(\hat{t}_i^{\min}, t'-\delta+1)}^{\min(\hat{t}_i^{\max}, t')} \sum_{\tau=t'+1}^{\min(t+\delta, T)} x_{it\tau} \leq S \quad t' = 1, \dots, T-1 \end{aligned}$$



Els tres grups de restriccions corresponen, respectivament, a les limitacions en l'aprovisionament, la producció i l'emmagatzematge.

El resultat que s'obté amb les dades indicades és una producció de 49.000 t, amb:

x_{111}	x_{112}	x_{113}	x_{122}	x_{123}	x_{124}	x_{133}	x_{134}	x_{135}		
6.000	0	1.000	0	0	0	0	7.000	0		
			x_{222}	x_{223}	x_{224}	x_{233}	x_{234}	x_{235}		
			6.000	1.000	3.000	8.000	0	2.000		
x_{311}	x_{312}	x_{313}	x_{322}	x_{323}	x_{324}	x_{333}	x_{334}	x_{335}	x_{344}	x_{345}
4.000	0	0	4.000	0	0	0	0	3.000	0	4.000

Com que el volum potencial d'aprovisionament de la fruita ($21.000 + 20.000 + 16.000 = 57.000$ t) superava la capacitat productiva en les 5 setmanes ($5 \cdot 10.000 = 50.000$) ja sabem que no compraríem tots els caquis possibles (a la proveïdora 1, $14.000 < 21.000$; a la 2, $20.000 = 20.000$; a la 3, $15.000 < 16.000$). La producció total, 49.000, és inferior a la potencial (la setmana 5 la producció és de 9.000 t). I això és degut a la capacitat insuficient del magatzem, que se satura la setmana 3; amb $S = 16.000$ ja es pot assolir la màxima producció de 50.000 t.

Hi ha altres solucions òptimes, perquè els valors d'algunes variables són intercanviables (per exemple, $x_{112} = 1.000$, $x_{113} = 0$, $x_{222} = 5.000$, $x_{223} = 2.000$). Segurament, a la pràctica aquestes solucions no són equivalents, perquè la qualitat del producte deu dependre del temps que la matèria primera ha passat al magatzem; això es podria tenir en compte en el model, però no cal, perquè les persones responsables de la gestió de la producció poden ocupar-se que la fruita s'incorpori al procés en l'ordre més apropiat.

CA07. Vacunes

Vist l'increment en el nombre de casos d'una determinada malaltia infecciosa, les autoritats sanitàries de Nomai han decidit que s'ha de procedir a la vacunació massiva de la població si els casos registrats superen els 65 per milió d'habitants.

De les persones que contrauen la malaltia, un 90 % es cura mitjançant un tractament que té un cost de 1.000 u. m., mentre que en el 10 % restant es produeix un desenllaç fatal després d'una primera fase del tractament, que té un cost de 250 u. m.

Administrar una vacuna té un cost de 7 u. m., de les quals 5 corresponen a processos administratius i la resta, 2 u. m., al cost de la dosi. La vacuna protegeix totalment de la malaltia a un 80 % de les persones vacunades i és completament inoperant en el 20 % restant.

Si les autoritats sanitàries de Nomai decideixen d'acord amb el criteri de l'esperança matemàtica, quin cost atribueixen implícitament a una vida humana?

Quin preu estarien disposades a pagar per cada dosi d'una vacuna que fos efectiva en el 100 % dels casos?

Es pot dir que aquest és un problema invers, perquè no es tracta de determinar què s'ha de decidir, atès que la decisió ja està presa, sinó, vista la decisió i suposat el criteri (l'esperança matemàtica en aquest cas), de trobar el valor implícit d'una dada.

Sigui V el cost implícit d'una vida humana.

L'esperança matemàtica del cost d'una persona infectada és:

$$0,9 \cdot 1.000 + 0,1(250 + V) = 925 + 0,1V$$

Quan la proporció de persones infectades, γ , és igual al valor per al qual es duu a terme la vacunació massiva ($65 \cdot 10^{-6}$), s'ha de complir:

$$\gamma \cdot (925 + 0,1V) = 7 + 0,2 \cdot \gamma \cdot (925 + 0,1V)$$

D'on $V = 1.336.903,85$ u. m.

Amb una vacuna 100% eficaç, amb un cost x :

$$\gamma \cdot (925 + 0,1V) = 5 + x$$

D'on $x = 3,75$ u. m.

Acabem el capítol amb un problema que tant podria anar en aquest com en l'últim ("Jugar"), i que fa d'enllaç entre tots dos. Es tracta d'una de les variants més senzilles del Nim.⁸ El Nim és un joc per a dues persones, en què hi ha uns objectes (escuradents, mistos, botons, monedes, naips...) que formen un o més grups; cada jugadora, alternativament, elegeix un grup i en treu com a mínim un objecte i com a màxim un nombre especificat (en moltes variants, tanmateix, s'admet que els tregui tots); guanya la jugadora que treu l'últim objecte o, en la modalitat *miserere*, perd la que es veu obligada a agafar l'últim objecte. El Nim es va fer relativament popular arran de l'estrena, l'any 1961, de la impenetrable pel·lícula d'Alain Resnais *L'année dernière a Marienbad*, en la qual el personatge interpretat per Sacha Pitoëff guanyava sempre i sense immutar-se

⁸ <https://en.wikipedia.org/wiki/Nim>



una variant amb 4 grups d'1, 3, 5 i 7 objectes, en la modalitat *miserere*. "Puc perdre, però guanyo sempre", diu Pitoëff en el film.

CA08. Mini Marienbad

Hi ha una sola pila de 27 escuradents. Hi ha 2 jugadores, A, que comença, i B. A cada torn, la jugadora corresponent n'ha d'agafar entre 1 i 5. Guanya la jugadora que s'enduu el darrer escuradents.

Hi ha una estratègia guanyadora per a A?

S'ha de començar pel final. Si queden 6 escuradents, la persona que juga necessàriament en deixarà entre 1 i 5 i no pot evitar que guanyi la seva rival. Per tant, A guanyarà la partida si a la penúltima jugada aconsegueix deixar exactament 6 escuradents a la pila i per això només cal que a la jugada anterior en deixi 12, cosa que pot aconseguir deixant-ne 18 a la jugada precedent i 24 a l'anterior.

En definitiva, A ha de començar agafant 3 escuradents, per deixar-ne 24. B en pot agafar entre 1 i 5, és a dir, deixar-ne entre 19 i 23: en qualsevol cas, A agafarà en el proper torn, el nombre que calgui per deixar-ne 18 i així successivament fins a l'inexorable victòria de la jugadora A, que podria així fer-se seva la frase de Pitoëff.



→ 11



Totum Revolutum

En aquest capítol hem inclòs petits grups formats per problemes afins entre si i no prou nombrosos i problemes singulars (és a dir, que no hem pogut o no hem sabut relacionar amb cap altre). Per tant, a diferència d'altres capítols, en aquest els grups i els problemes singulars no tenen relació amb els altres del capítol i es poden estudiar per separat i en un ordre diferent d'aquell en què els presentem.

TR01.1. Economia i hisenda: autarquia o coordinació?¹

En un país denominat Sildàvia viuen cinc comunitats. Cada una produeix diàriament el pa que li cal per al consum propi, per a la qual cosa usa, exclusivament, farina de la mateixa comunitat. Per obtenir una fogassa calen 2 lliures de farina. La taula següent indica la capacitat de producció de cada comunitat si es dediqués únicament a obtenir farina o a fornejar fogasses (en el supòsit que disposés de tota la farina necessària).

Comunitat	a_i (lliures de farina/dia)	b_i (fogasses de pa/dia)
1	21	4,20
2	21	5,25
3	27	9
4	10	5
5	10,5	7

¹ Basat en un exemple del llibre de M. Ricketts, *The Economics of Business Enterprise* (Wheatshaf Books, 1987), recollit a *L'empresa: fonaments econòmics*, d'A. Serra Ramoneda (Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1989).



Actualment cada comunitat assigna els seus recursos a obtenir farina o pa per tal de maximitzar el nombre diari de fogasses de què disposa (és a dir, respectivament: 3, 3,5, 5,4, 2,5 i 3 fogasses; en total, 17,4).

El govern de Sildàvia, a la vista d'aquestes dades, preveu que es pot augmentar la quantitat de pa disponible mitjançant la divisió del treball i la coordinació entre les comunitats.

En conseqüència, el govern planteja el programa lineal següent (en què les variables α_i corresponen a la producció de farina i les ω_i , a la de pa):

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \sum_{i=1}^5 \omega_i \\ \text{s.a. } & \alpha_i / a_i + \omega_i / b_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, 5 \\ & 2 \cdot \sum_{i=1}^5 \omega_i \leq \sum_{i=1}^5 \alpha_i \\ & \alpha_i, \omega_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

A l'òptim, les variables no nul·les tenen els valors següents:

$$\alpha_1 = 21, \alpha_2 = 21, \omega_3 = 9, \omega_4 = 5, \omega_5 = 7$$

i el valor òptim de la funció objectiu és 21. Per tant, la producció de fogasses de Sildàvia augmentaria en un 20,69 % si les comunitats renunciessin a la política autàrquica que segueixen espontàniament fins ara i s'especialitzessin.

Observeu que la relació a_i / b_i entre les capacitats de producció de farina i de pa és igual a 5, 4, 3, 2 i 1,5, respectivament, per a les comunitats 1 a 5. Les que s'especialitzen en la producció de farina són les que tenen aquest quocient més alt (la 1 i la 2).

El problema per al govern de Sildàvia és com aconseguir que les comunitats s'especialitzin de la manera més convenient per al conjunt del país i s'assoleixi així l'objectiu de produir 21 fogasses cada dia. Debatudes i descartades altres propostes, el govern decideix crear l'Institut Agrícola Comercial de Sildàvia (IACS), que tindrà la funció de comprar i vendre farina i pa a uns preus determinats.

La qüestió és donar uns valors apropiats a aquests preus.

És clar que el que importa és la relació entre els preus del pa i de la farina i no els seus valors absoluts. Notarem γ aquesta relació. El valor de γ ha de ser tal que cada comunitat, en maximitzar els ingressos obtinguts per la seva activitat econòmica, conclouï que el que l'interessa és adoptar l'especialització corresponent a la solució que és òptima per al conjunt.

Gràcies a l'IACS, ara cada comunitat pot produir, vendre i comprar farina; té, per tant, la possibilitat de vendre la farina produïda i comprar pa amb els ingressos obtinguts o bé té la possibilitat de fer pa sense necessitat de produir farina (ja que la pot comprar amb els ingressos obtinguts amb la venda de pa a l'IACS). Per tant, a més de α_i i ω_i necessita variables corresponents a les lliures de farina comprades i venudes, que notarem, respectivament, κ_i i ν_i ($i = 1, \dots, 5$):

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } \gamma \cdot \omega_i + \nu_i - \kappa_i \\ \text{s.a} \quad & \alpha_i / a_i + \omega_i / b_i \leq 1 \\ & 2 \cdot \omega_i - \alpha_i - \kappa_i + \nu_i \leq 0 \\ & \nu_i - \alpha_i \leq 0 \\ & -\alpha_i \leq 0 \\ & -\omega_i \leq 0 \\ & -\nu_i \leq 0 \\ & -\kappa_i \leq 0 \end{aligned}$$

Aleshores, es tracta de determinar quina condició o quines condicions ha de complir γ perquè la solució òptima sigui (ometem les variables nul·les):

$$\omega_i = b_i, \kappa_i = 2 \cdot \omega_i \quad (\text{solució P, de pa})$$

o bé:

$$\alpha_i = \nu_i = a_i \quad (\text{solució F, de farina})$$

Per determinar les condicions esmentades farem ús de les de Karush, Kuhn i Tucker, que són condicions necessàries i suficients d'òptim per al programa lineal que ha de resoldre cada comunitat per tal de maximitzar els seus ingressos.

Si notem u_j ($j = 1, \dots, 7$) els multiplicadors associats a les restriccions del programa lineal, amb $u_j \geq 0$ ($i = 1, \dots, 7$), tenim:

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{a_i} - u_2 - u_3 - u_4 &= 0 \\ -\gamma + \frac{u_1}{b_i} + 2 \cdot u_2 - u_5 &= 0 \\ -1 + u_2 + u_3 - u_6 &= 0 \\ 1 - u_2 - u_7 &= 0 \end{aligned}$$

En el cas de la solució P tenim $\omega_i, \kappa_i > 0$ i, per tant, $u_5 = u_7 = 0$. Aleshores resulta:

$$u_2 = 1, u_6 = u_3, u_1 = (\gamma - 2) \cdot b_i, (\gamma - 2) \cdot \frac{b_i}{a_i} = 1 + u_3 + u_4$$



D'on:

$$\gamma \geq 2 + \frac{a_i}{b_i}$$

En la solució F, $\alpha_i, v_i > 0$ i, per tant, $u_4 = u_6 = 0$. Aleshores resulta:

$$u_2 = 1 - u_3, u_7 = u_3, u_1 = a_i, -\gamma + \frac{a_i}{b_i} + 2 - 2 \cdot u_3 - u_5 = 0 \Rightarrow -\gamma + \frac{a_i}{b_i} + 2 \geq 0$$

D'on es desprèn, com era d'esperar, la condició:

$$\gamma \leq 2 + \frac{a_i}{b_i}$$

Si $\gamma = 2 + \frac{a_i}{b_i}$, tant la solució P com la F són òptimes. Per tant, per assegurar que les comunitats 1 i 2 només fan farina i les 3, 4 i 5 només fan pa, s'ha de complir:

$$\gamma < 2 + \frac{a_i}{b_i} \quad i = 1, 2; \quad \gamma > 2 + \frac{a_i}{b_i} \quad i = 3, 4, 5$$

Per tant, de 1, 2, 3, 4 i 5, respectivament, es desprèn:

$$\gamma < 7, \gamma < 6, \gamma < 5, \gamma > 4, \gamma > 3, 5$$

i, finalment:

$$5 < \gamma < 6.$$

Es pot arribar a les mateixes conclusions amb la teoria de la dualitat en programació lineal (que es pot deduir de les propietats dels programes lineals i també com una aplicació de les condicions KKT).

Per a tots els valors de γ pertanyents a aquest interval s'assoleix una producció global de 42 lliures de farina amb què s'obtenen 21 fogasses. Però la distribució final de les fogasses entre comunitats no és independent del valor de γ , com es pot veure en la taula següent, que recull quantes fogasses tindrà cada comunitat segons el valor d'aquest paràmetre:

Comunitat	1	2	3	4	5
$\gamma = 5$	4,20	4,20	5,40	3,00	4,20
$\gamma = 5,5$	3,82	3,82	5,73	3,18	4,45
$\gamma = 6$	3,50	3,50	6,00	3,33	4,67
Amb autarquia	3,00	3,50	5,40	2,50	3,00

Hi ha altres formes de coordinació possibles, com explica Serra Ramoneda en el llibre esmentat.

Una empresa intermediària pot comprar farina a les comunitats 1 i 2, amb un pagament d'una fogassa per cada 5,8 lliures de farina, i oferir 5,1 lliures de farina per fogassa a les comunitats 3, 4 i 5. Així, amb un capital inicial de $42/5,8 = 7,241$ fogasses obtindria 42 lliures de farina (les comunitats 1 i 2 obtindran així 3,62 fogasses cada una, més de les 3,0 i 3,5 de què gaudeixen en la solució autàrquica) i, amb elles, comprar $42/5,1 = 8,235$ fogasses a les comunitats 3, 4 i 5, que així disposarien per al consum de $21 - 8,235 = 12,765$ fogasses, més de les $5,40 + 2,50 + 3,00 = 10,90$ que poden produir en el marc de l'autarquia (totes les comunitats estaran interessades en la transacció perquè, respectivament, es quedaran amb $9 - 18/5,1 = 5,471$, $5 - 10/5,1 = 3,039$ i $7 - 14/5,1 = 4,255$ fogasses, més de les que obtenen amb autarquia). Totes les comunitats en sortiran beneficiades (això sí, les unes més que les altres) gràcies a la intermediària, la qual obtindria, a cada cicle de producció-consum, $8,235 - 7,241 = 0,994$ fogasses, això sí a costa de reunir la informació necessària i fer els càlculs pertinents, coses que li donen avantatge sobre cada comunitat, que només disposa de dades referents a ella mateixa. Si les comunitats s'adonen de la situació i es posen d'acord poden prescindir de l'intermediari, però la relació d'intercanvi fogassa/farina s'haurà d'unificar i tornem a la situació anterior amb l'IACS.

La intermediària no pot oferir menys de 5 lliures de farina per fogassa a les comunitats 3, 4 i 5, perquè aleshores a la comunitat 3 no li interessaria el tracte i a la intermediària li sobriarien lliures de farina de les compres a 1 i 2. Ara bé, un representant de la comunitat 3, en comptes de comprar i vendre farina i fogasses, pot comprar força de treball i pagar, per exemple, un salari de 3,60 fogasses a cada una de les comunitats 1 i 2 perquè facin farina, i un de 3,20 a les comunitats 4 i 5 perquè elaborin fogasses. Totes les comunitats esmentades hi estaran interessades, perquè hi surten guanyant en relació amb l'autarquia i, així, el representant de 3 (que produirà exclusivament fogasses amb part de la farina provinent de 1 i 2) esdevindrà empresari, amb un increment de $21 - 2 \cdot 3,60 - 2 \cdot 3,20 - 5,40 = 2$ fogasses en relació amb les 5,40 que tenia en l'autarquia.

L'expressió "canons o mantega"² s'ha utilitzat des de fa molts anys per referir-se, sintèticament i simplificada, a la varietat d'opcions que ofereix la frontera de possibilitats de producció d'un sistema econòmic. És aquesta la qüestió a què es refereix el problema que hi ha a continuació.

² Com expliquen T. Torres i M. A. Vidal (*Economia per a enginyers/es*, Publicacions URV, 2016), aquesta alternativa es va plantejar al poble alemany abans de la Segona Guerra Mundial i Paul A. Samuelson popularitzà l'expressió, d'ús molt corrent durant la denominada guerra freda, a través del llibre *Economics: An Introductory Analysis* (McGraw-Hill, 1948), que, traduït per José Luis Sampedro, va ser publicat en castellà, l'any 1951, per l'editorial Aguilar (*Curso de Economía moderna*, 1951). Des d'aleshores desenes de generacions d'estudiants es varen iniciar en l'economia amb aquest llibre de text.



TR01.2. Canons o mantega?

Els recursos del país de Caplloc permeten produir canons i mantega. Una unitat de canons requereix 0,1 unitats de treball i 10,1 unitats de sòl, mentre que per a una unitat de mantega en calen 10 de cada recurs. Una unitat de canons proporciona uns ingressos nets de 25 u. m. i una de mantega, 2.000 u. m.

Per tal d'optimitzar els ingressos totals del proper exercici econòmic s'ha plantejat i resolt el programa lineal següent:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar } 25 \cdot x + 2.000 \cdot y \\ \text{s.a} \quad & 0,1 \cdot x + 10 \cdot y \leq 2.000 \\ & 10,1 \cdot x + 10 \cdot y \leq 10.000 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

amb el qual s'ha obtingut la solució òptima $x^* = 800$, $y^* = 192$, que implica un ús dels dos recursos (treball i sòl) igual a les disponibilitats respectives; les variables duals associades a les restriccions de treball i de sòl valen, respectivament, 199,5 u. m./unitat de treball i 0,5 u. m./unitat de sòl.

El Gabinet de Planificació Macroeconòmica de Caplloc (GPMC) es pregunta, ateses les grans fluctuacions en els preus dels canons i de la mantega, entre quins límits de la relació entre els ingressos nets unitaris d'un i altre producte seguiria sent òptim produir-los tots dos.

Així mateix, el GPMC està interessat a saber a partir de quin valor de la relació esmentada l'optimització dels ingressos totals causaria atur.

Finalment, el GPMC, en la perspectiva de diversificar la producció de Caplloc, vol saber quin és el valor mínim dels ingressos nets produïts per una unitat de turisme (que requereix 2 unitats de treball i 50 de sòl) perquè aquesta activitat sigui econòmicament interessant.

L'anàlisi de sensibilitat en programació lineal es pot estudiar específicament o com un cas particular d'aplicació de les condicions de Karush, Kuhn i Tucker.

Aquestes condicions de KKT, si notem α la relació entre els ingressos que proporciona una unitat de canons i els d'una unitat de mantega, es concreten, per al problema en qüestió, en les equacions següents (i en les condicions de no negativitat i de complementarietat per als multiplicadors):

$$\begin{aligned} -\alpha + 0,1 \cdot u_T + 10,1 \cdot u_S - u_X &= 0 \\ -1 + 10 \cdot u_T + 10 \cdot u_S - u_Y &= 0 \end{aligned}$$

Com que $x > 0 \Rightarrow u_X = 0$ i $y > 0 \Rightarrow u_Y = 0$, per a $x, y > 0$ resulta un sistema lineal de 2 equacions amb 2 incògnites que dona:

$$u_T = -0,100\alpha + 0,101, u_S = 0,100\alpha - 0,001$$

I de les condicions $u_T, u_S \geq 0$ es dedueix:

$$0,01 \leq \alpha \leq 1,01$$

Per a $\alpha = 1,01$, $u_T = 0$ i per a $\alpha > 1,01$, la restricció corresponent al treball disponible esdevé no activa, és a dir, apareix atur, perquè el treball necessari és menor que el disponible.

Quant al turisme, interessa econòmicament si el valor dels recursos necessaris per obtenir-ne una unitat, valorats als preus ombra, és menor que els ingressos nets que proporciona. Els valors de les variables duals de les restriccions de treball i de sòl són els preus ombra d'aquests recursos, atès que la solució és no degenerada. Per tant, els ingressos unitaris del turisme han de ser més grans que:

$$199,5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 50 = 424 \text{ u. m.}$$

I ens acomiadem de l'àmbit de l'economia amb un problema relatiu al sistema fiscal.

TR01.3. IVA

El Ministeri d'Hisenda de Nihaprou, fins ara paradís fiscal, es disposa a introduir l'impost sobre el valor afegit (IVA) per tal de complir una de les condicions necessàries per presentar la candidatura com a membre de la UE.

Amb aquesta finalitat, ha elaborat un model en què el conjunt de productes gravables es representa mitjançant tres productes ficticis, cada un dels quals correspon als productes de primera necessitat, normals i de luxe.

Estima que la quantitat venuda, en un any, de cada un d'aquests tres productes depèn del preu de venda, segons l'expressió:

$$q_i = a_i - b_i \cdot p_i \text{ (amb } 0 \leq p_i \leq a_i / b_i) \text{ } i = 1, \dots, 3$$

I amb $p_i = (1 + \alpha_i) \cdot v_i$ ($i = 1, \dots, 3$), on v_i és la base de l'impost i α_i el tipus, que s'ha de determinar.

El Ministeri vol saber els tipus que ha d'aplicar en cada un del supòsits següents:

- Maximitzar la recaptació per IVA.
- Maximitzar el valor monetari de les vendes anuals de productes, amb la condició que l'import de l'IVA sigui almenys igual a P .
- Minimitzar α_i amb la condició que la recaptació per IVA no sigui inferior a P .



Els valors estimats dels paràmetres són:

$$P = 40.000$$

i	1	2	3
a_i	800	400	80
b_i	1,0	0,5	0,1
v_i	500	400	350

Es dedueix immediatament que la recaptació corresponent a cada producte és igual a $A_i \cdot \alpha_i - B_i \cdot \alpha_i^2$, amb $A_i = (a_i - b_i \cdot v_i) \cdot v_i$ i $B_i = b_i \cdot v_i^2$, per la qual cosa, si no hi ha restriccions addicionals:

$$\alpha_i^* = \frac{A_i}{2 \cdot B_i}$$

Per tant, els valors que maximitzen la recaptació són:³

i	1	2	3
α_i^*	0,30	0,50	15.750/24.500*

$$* 15.750/24.500 = 0,64857\dots$$

l'import total de l'IVA és $22.500 + 20.000 + 5.062,50 = 47.562,10$ u. m., amb unes vendes totals de $97.500 + 60.000 + 12.937,50 = 170.437,50$ u. m. (sense l'impost: $150.000 + 80.000 + 15.750 = 245.750$ u. m.).

Per maximitzar el valor de les vendes totals amb la condició que la recaptació sigui ≥ 40.000 , s'ha de resoldre el programa matemàtic següent:

$$\begin{aligned} &\text{maximitzar } \sum_{i=1}^3 [a_i - b_i \cdot v_i \cdot (1 + \alpha_i)] \cdot v_i \cdot (1 + \alpha_i) \\ &\text{s.a } \sum_{i=1}^3 (A_i \cdot \alpha_i - B_i \cdot \alpha_i^2) \geq P \\ &\alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

En el qual estrictament caldria afegir les condicions que els preus finals pertanyin als intervals en què estan definides les funcions de demanda (les vàrem ometre en suposar que a la solució òptima es complirien, ja que valors massa grans dels

³ A la pràctica, els tipus impositius de l'IVA, expressats com un tant per cent, són valors enters o, molt rarament, amb un o dos decimals. Aquí no considerem aquesta condició i, quan cal, donem el resultat obtingut per als tipus impositius amb quatre decimals.

tipus de l'impost donarien lloc, en substituir-los a les equacions, a valors negatius de la demanda i , per tant, de les vendes i de la recaptació).

La resolució numèrica del model (amb l'opció GRG d'Excel, per exemple) proporciona els valors següents (que indiquem amb quatre decimals):

i	1	2	3
α_i^*	0,1514	0,3514	0,4940

als quals corresponen unes vendes totals de 213.740,51 i una recaptació de 40.004,01 u. m.

Finalment, si es vol minimitzar α_1 amb la condició que la recaptació per IVA no sigui inferior a 40.000 u. m., només cal canviar la funció objectiu del programa matemàtic i s'obté:

i	1	2	3
α_i^*	0,1261	0,5004	0,6432

Als valors indicats (amb quatre decimals) corresponen unes vendes totals de 206.315,98 u. m. i una recaptació de 40.002,18 u. m.

Els problemes de tall (obtenir per tall de barres, plaques o objectes tridimensionals, peces de dimensions especificades) i els d'empaquetament (col·locar en uns espais unidimensionals, bidimensionals o tridimensionals uns objectes donats) són molt semblants des d'un punt de vista formal, tot i que els criteris per avaluar les solucions puguin ser diferents en un cas o l'altre, i que també puguin ser diferents les condicions que han de respectar les solucions (en un problema d'empaquetament, per exemple, hi pot haver restriccions derivades de les limitacions que tinguin alguns objectes per suportar pes).

A més, com veurem, hi pot haver situacions en què el tractament pot ser el mateix que en un problema de tall o d'empaquetament, encara que no es tracti estrictament de cap d'aquestes dues coses.

Comencem amb un problema unidimensional, és a dir, en què en els objectes que cal tallar, des del punt de vista del problema que s'ha de resoldre, només hi ha una dimensió rellevant (perfils metàl·lics o de PVC per a fusteria; rodets de moqueta, film adhesiu, etc.).

TR02.1. Tallar o col·locar: al tall 1D

Anomenarem *barres* als objectes que cal tallar i *peces* a les que volem obtenir com a resultat de l'operació de tallar. Suposem que totes les barres tenen la



mateixa longitud, L , que hi ha m tipus de peces, caracteritzades per una longitud l_j ($j = 1, \dots, m$), que cal obtenir almenys d_j peces de tipus j ($j = 1, \dots, m$) i que l'objectiu és fer ús del nombre mínim de barres.

Es tracta de formular models generals per a aquest tipus de problema i de resoldre'n l'exemplar següent:

$$L = 25, m = 9$$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
l_j	2	3	5	7	11	13	17	19	23
d_j	9	2	9	3	1	1	8	6	3

Es defineix un esquema o patró de tall com una de les maneres possibles d'obtenir peces en tallar una barra. Formalment, es pot definir un esquema de tall, i , com una llista de m valors enters n_{ij} ($j = 1, \dots, m$) tals que $\sum_{j=1}^m l_j \cdot n_{ij} \leq L$ (n_{ij} es el nombre de peces de tipus j corresponents a l'esquema de tall i).

Establerta la llista d'esquemes de tall, es planteja un model lineal en què les variables, x_i , enteres no negatives, són el nombre de vegades que s'ha d'usar l'esquema de tall i ; la funció objectiu, que s'ha de minimitzar, és la suma d'aquestes variables i les m restriccions imposen que el nombre de peces de cada tipus no sigui inferior a d_j .

El model que resulta d'aquest enfocament és molt senzill (l'ús d'esquemes de tall incorpora la condició que no es porti ultrapassar la longitud de la barra i, per tant, ja no cal imposar-la en el model). Sigui T el nombre d'esquemes de tall:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } \sum_{i=1}^T x_i \\ \text{s.a } &\sum_{i=1}^T n_{ij} \cdot x_i \geq d_j \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

En general, si T no és molt gran, el model es resol sense dificultats.

En el nostre exemplar, si ens limitem als esquemes de tall tals que $L - \sum_{j=1}^m l_j \cdot n_{ij} < \min_{j=1, \dots, m} l_j$, $T = 98$. La taula següent mostra la llista d'esquemes de tall i la solució òptima obtinguda, amb 18 barres (la producció de cada tipus de peça, p_j , cobreix –en un cas, amb excés– la demanda de totes les peces):

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
l_j	23	19	17	13	11	7	5	3	2	
d_j	3	6	8	1	1	3	9	2	9	
p_j	3	6	8	1	1	3	9	2	12	
$i \downarrow$	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}	n_{i4}	n_{i5}	n_{i6}	n_{i7}	n_{i8}	n_{i9}	x_i
1	1								1	3
2		1					1			4
3		1						2		
4		1						1	1	
5		1							3	2
6			1			1				3
7			1				1	1		2
8			1				1		1	3
9			1					2	1	
10			1					1	2	
11			1						4	
12				1	1					1
13				1		1	1			
14				1		1		1	1	
15				1		1			2	
16				1			2		1	
17				1			1	2		
18				1			1	1	2	
19				1			1		3	
20				1				4		
21				1				3	1	
22				1				2	3	
23				1				1	4	
24				1					6	
25					2			1		
26					2				1	
27					1	2				
28					1	1	1		1	
29					1	1		2		
30					1	1		1	2	
31					1	1			3	
32					1		2	1		
33					1		2		2	
34					1		1	3		
35					1		1	2	1	
36					1		1	1	3	
37					1		1		4	
38					1			4	1	
39					1			3	2	
40					1			2	4	
41					1			1	5	
42					1				7	



$i \downarrow$	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}	n_{i4}	n_{i5}	n_{i6}	n_{i7}	n_{i8}	n_{i9}	x_i
43						3		1		
44						3			2	
45						2	2			
46						2	1	2		
47						2	1	1	1	
48						2	1		3	
49						2		3	1	
50						2		2	2	
51						2		1	4	
52						2			5	
53						1	3	1		
54						1	3		1	
55						1	2	2	1	
56						1	2	1	2	
57						1	2		4	
58						1	1	4		
59						1	1	3	2	
60						1	1	2	3	
61						1	1	1	5	
62						1	1		6	
63						1		6		
64						1		5	1	
65						1		4	3	
66						1		3	4	
67						1		2	6	
68						1		1	7	
69						1			9	
70							5			
71							4	1	1	
72							4		2	
73							3	3		
74							3	2	2	
75							3	1	3	
76							3		5	
77							2	5		
78							2	4	1	
79							2	3	3	
80							2	2	4	
81							2	1	6	
82							2		7	
83							1	6	1	
84							1	5	2	
85							1	4	4	
86							1	3	5	
87							1	2	7	
88							1	1	8	
89							1		10	

$i \downarrow$	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}	n_{i4}	n_{i5}	n_{i6}	n_{i7}	n_{i8}	n_{i9}	x_i
90								8		
91								7	2	
92								6	3	
93								5	5	
94								4	6	
95								3	8	
96								2	9	
97								1	11	
98									12	

La solució obtinguda no és l'única que permet satisfer la demanda amb 18 barres. Entre totes les solucions amb 18 barres podem desempatar amb un altre criteri. Si volem minimitzar el nombre d'esquemes de tall, amb la qual cosa minimitzarem el nombre de preparacions de la màquina, hem d'afegir unes variables $y_i \in \{0,1\}$ ($i = 1, \dots, T$), iguals a 1 si i només si es fa servir l'esquema de tall i , i modificar el model de la manera següent:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } \sum_{i=1}^T y_i \\ \text{s.a. } & \sum_{i=1}^T n_{ij} \cdot x_i \geq d_j \quad j = 1, \dots, m \\ & x_i \leq 18 \cdot y_i \quad i = 1, \dots, T \\ & \sum_{i=1}^T x_i = 18 \end{aligned}$$

El nombre d'esquemes de tall mínim per les dades de l'enunciat és 5, utilitzant els esquemes 1, 2, 4, 6, 8, i 12 per tallar, respectivament, 3, 4, 2, 3, 5 i 1 barres.

TR02.2. Tallar o col·locar: atracaments

Sis vaixells volen atracar en un moll de 9 dam, on han de fer operacions de càrrega i descàrrega. La taula mostra (en dam) les eslors dels vaixells (que atraquen en el moll de manera que aquest és paral·lel a l'eix de la nau) i el temps (en dies) que necessiten romandre en el moll per dur a terme les operacions pertinents.

Vaixell	1	2	3	4	5	6
Eslora (e_i)	2	2	3	4	5	2
Temps (τ_i)	1	3	1	1	4	5

Es tracta d'assignar espai i temps als vaixells per tal que el conjunt de les operacions de càrrega i descàrrega es completi en el menor temps possible.



En uns eixos de coordenades ortogonals, amb els metres de la línia del moll en abscisses i el temps en ordenades, l'estada del vaixell es pot representar mitjançant un rectangle de base igual a e_i i d'altura igual a τ_i .

Es tracta, doncs, d'empaquetar aquests rectangles de manera que l'altura màxima de la figura que formin sigui la menor possible. El problema és quasi idèntic (més endavant veurem el motiu del "quasi") al de tallar uns rectangles d'una banda de material d'una amplada donada i de longitud il·limitada de tal manera que la longitud del tros utilitzat sigui la menor possible.

Per definir una solució cal fixar les coordenades (x_i, t_i) de, per exemple, el vèrtex inferior esquerre de cada rectangle. Perquè la solució sigui factible no hi ha d'haver superposició entre cap parell de rectangles (és a dir, donada una parella de rectangles, un d'ells ha d'estar per sobre, per sota, a la dreta o a l'esquerra de l'altre); per expressar aquesta condició calen 4 variables binàries $(r_{ijk}, k = 1, \dots, 4)$ per a cada parella (i, j) , amb $i = 1, \dots, 5$ i $j > i$.

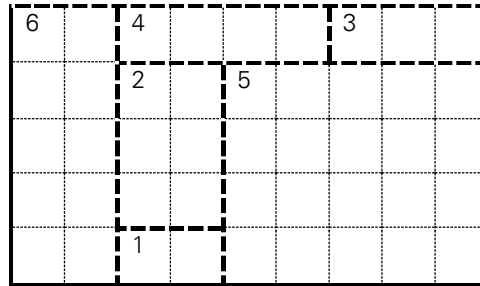
Aleshores, el model:

$$\begin{array}{l}
 \text{minimitzar } T \\
 \text{s. a } T \geq t_i + \tau_i \quad i = 1, \dots, 6 \\
 \left. \begin{array}{l}
 x_i + e_i \leq x_j + 9 \cdot r_{ij1} \\
 x_i \geq x_j + e_j - 9 \cdot r_{ij2} \\
 t_i + \tau_i \leq t_j + \sum_{k=1}^6 \tau_k \cdot r_{ij3} \\
 t_i \geq t_j + \tau_j - \sum_{k=1}^6 \tau_k \cdot r_{ij4} \\
 \sum_{k=1}^4 r_{ijk} \leq 3
 \end{array} \right\} i = 1, \dots, 5; j > i
 \end{array}$$

Amb el qual vàrem obtenir la solució, amb $T = 5$:

Vaixell	1	2	3	4	5	6
x_i	2	2	6	2	4	0
t_i	0	1	4	4	0	0

que es representa a continuació (per descomptat, no és l'única solució òptima; a partir de la representació gràfica és fàcil deduir-ne d'altres):



En molts problemes de tall i d'empaquetament, l'orientació de la peça no està determinada, és a dir, en el cas de tall de peces rectangulars d'una placa rectangular, els papers de la base i l'altura de cada peça són intercanviables (no sempre és així, alguns materials, com la fusta, son anisòtrops i les peces s'han de tallar en una orientació determinada). Això els diferencia del problema dels atracaments, en el qual l'eslora i el temps necessari per a càrrega i descàrrega no són intercanviables.

TR02.3. Tallar o col·locar: al tall 2D

Siguin 6 peces de les dimensions indicades a la taula:

Peça	1	2	3	4	5	6
Base (b_i)	2	2	1	4	5	2
Altura (a_i)	1	3	3	1	4	5

Cal obtenir-les per tall d'una placa d'amplada 9 i prou llarga, en relació amb les dimensions de les peces, de tal manera que es faci ús de la mínima longitud de la placa.

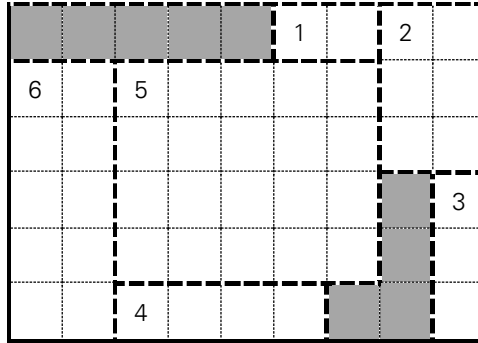
Suposem primer que no hi ha cap peça orientable i, després, que totes ho són.

Si l'orientació de les peces està determinada, no hi ha cap diferència amb el problema dels atracaments. Les dades són les mateixes, excepte pel que fa a la peça 3, en la qual la base té el valor que tenia el temps en el vaixell 3 i l'altura, el corresponent a l'eslora.

El resultat obtingut, amb $T^* = 6$, és:

Peça	1	2	3	4	5	6
x_i	5	7	8	2	2	0
t_i	5	3	0	0	1	0

que es representa a continuació (és clar que no és única):

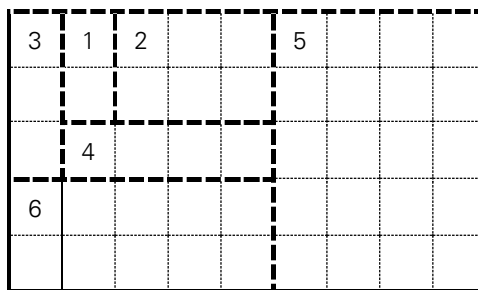


Si l'orientació de la peça no està determinada, per a cada peça cal una variable binària més, sigui h_j ($j = 1, \dots, m$), igual a 1 si i només si la peça es talla en posició horitzontal (és a dir, amb el costat que considerem com a "base" paral·lel a l'eix d'abscisses). En el model s'ha de substituir e_j per $e_j \cdot h_j + \tau_j \cdot (1 - h_j)$, t_j per $\tau_j \cdot h_j + e_j \cdot (1 - h_j)$ i $\sum_{k=1}^6 \tau_k$ per $\sum_{k=1}^6 \max(\tau_k, e_k)$.

La solució obtinguda, amb $T^* = 5$, és:

Peça	1	2	3	4	5	6
x_j	1	2	0	1	5	0
t_j	3	3	2	2	0	0
h_j	0	0	1	1	0	0

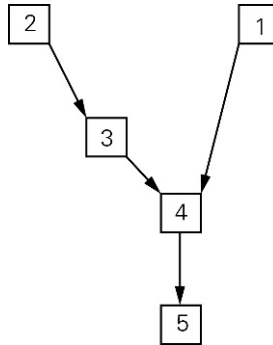
que es representa a continuació:



TR03.1. Depurar: tàctica

En una conca fluvial hi ha 5 aglomeracions residencials i industrials que generen diàriament un volum d'aigües residuals A_i m³ ($i = 1, \dots, 5$). L'aigua es canalitza d'1 a 4, de 2 a 3, de 3 a 4 i de 4 a 5 (vegeu la figura). Al costat de cada aglomeració hi

ha una depuradora amb una capacitat C_i m³/dia ($i = 1, \dots, 5$) i un cost de tractament de c_i u. m./m³ ($i = 1, \dots, 5$). Les aigües residuals es poden tractar en la depuradora situada al costat de l'aglomeració o bé en les que hi ha aigües avall; en aquest darrer cas, les aigües residuals no depurades es canalitzen, amb un cost negligible, per unes conduccions de capacitat F_{ij} m³/dia $\forall (i, j) \in T = \{(1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$.



S'ha de determinar la gestió del sistema que minimitzi el cost d'exploració diari.

Ho podem fer mitjançant un programa lineal:

Variables:

$x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, 5$) m³ depurats diàriament a i

$f_{ij} \forall (i, j) \in T$ m³ d'aigua no depurada que s'envien diàriament de i a j

$$\text{minimitzar } \sum_{i=1}^5 c_i \cdot x_i$$

$$\begin{aligned} \text{s. a } \quad & x_1 + f_{14} = A_1 \\ & x_2 + f_{23} = A_2 \\ & x_3 + f_{34} = A_3 + f_{23} \\ & x_4 + f_{45} = A_4 + f_{14} + f_{34} \\ & x_5 = A_5 + f_{45} \\ & 0 \leq x_i \leq C_i \quad i = 1, \dots, 5 \\ & 0 \leq f_{ij} \leq F_{ij} \quad \forall (i, j) \in T \end{aligned}$$

Suposem ara que les dades són les que es mostren a la taula següent:

i	1	2	3	4	5
A_i	700	600	400	500	800
C_i	800	600	500	700	900
c_i	2,0	1,8	1,5	1,6	1,4



i $F_{14} = 300, F_{23} = 200, F_{34} = 400, F_{45} = 600$.

La solució òptima té un cost d'exploració de 4.830 u. m./dia,

i	1	2	3	4	5
x_i	400	500	500	700	900

i $f_{14} = 300, f_{23} = 100, f_{34} = 0, f_{45} = 100$.

I si, per motius ecològics, cal que pel tram 4-5 passin cada dia almenys D m³ d'aigua depurada?

S'ha d'afegir la restricció $\sum_{i=1}^4 x_i \geq D$. Amb $D = 2.150$, la solució òptima té un cost d'exploració de 4.860 u. m./dia,

i	1	2	3	4	5
x_i	450	500	500	700	850

i $f_{14} = 250, f_{23} = 100, f_{34} = 0, f_{45} = 50$.

TR03.2. Depurar: estratègia

Ara suposem que en la mateixa conca de l'enunciat anterior no hi ha cap depuradora ni cap conducte per a les aigües residuals i que es tracta de determinar la infraestructura òptima del sistema de depuració. Simplifiquem molt les dades per centrar-nos en la modelització i la resolució.

A cada aglomeració es pot instal·lar, o no, una depuradora. Les depuradores poden ser de tipus 1 o de tipus 2, amb una capacitat de 450 o de 1.000 m³/dia i amb un cost fix diari de 175 i 300 u. m., respectivament. Els respectius costos de tractament de les aigües residuals són de 2,00 i 1,85 u. m./m³. L'equivalent diari dels costos de la inversió és de 125 i 200 u. m.

Les conduccions per a les aigües residuals poden ser de tipus 1 o de tipus 2, amb una capacitat de 200 o de 400 m³/dia i amb un equivalent diari dels costos de la inversió igual, respectivament, a 20 i 30 u. m. Els costos d'exploració són negligibles.

Sense perjudici de les diferències significatives que els distingeixen, és clar, ja d'entrada, que aquest problema té molts punts de contacte amb SE03.

Necessitem les mateixes variables de flux que en el problema anterior i, a més:

$y_{ik} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 5; k = 1, 2 = 1$ si i només si s'instal·la una depuradora de tipus k a i

$r_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{T}; k = 1, 2 = 1$ si i només si s'instal·la una conducció de tipus k en el tram (i, j)

Aleshores, a partir del model de TR03.1, tenim:

$$\text{minimitzar } \sum_{i=1}^5 [(175 + 125) \cdot y_{i1} + (300 + 200) \cdot y_{i2} + 2,0 \cdot x_{i1} + 1,85 \cdot x_{i2}] + \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} (20 \cdot r_{ij1} + 30 \cdot r_{ij2})$$

$$\begin{aligned} \text{s. a} \quad & x_{11} + x_{12} + f_{14} = A_1 \\ & x_{21} + x_{22} + f_{23} = A_2 \\ & x_{31} + x_{32} + f_{34} = A_3 + f_{23} \\ & x_{41} + x_{42} + f_{45} = A_4 + f_{14} + f_{34} \\ & x_{51} + x_{52} = A_5 + f_{45} \\ & y_{i1} + y_{i2} \leq 1 \quad i = 1, \dots, 5 \\ & r_{ij1} + r_{ij2} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{T} \\ & 0 \leq x_{i1} \leq 450 \cdot y_{i1} \quad i = 1, \dots, 5 \\ & 0 \leq x_{i2} \leq 1.000 \cdot y_{i2} \quad i = 1, \dots, 5 \\ & 0 \leq f_{ij} \leq 200 \cdot r_{ij1} + 400 \cdot r_{ij2} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{T} \\ & y_{ik} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 5; k = 1, 2 \\ & r_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{T}; k = 1, 2 \end{aligned}$$

La solució òptima té un cost diari de 7.490 u. m./dia,

i	1	2	3	4	5
x_i	400	600	0	1.000	1.000

i $f_{14} = 300, f_{23} = 0, f_{34} = 400, f_{45} = 200$, amb les capacitats mínimes de depuradores i conduccions compatibles amb els valors indicats, és a dir, una depuradora de tipus 1 a 1, depuradores de tipus 2 a 2, 4 i 5, una conducció de tipus 1 entre 4 i 5 i conduccions de tipus 2 entre 1 i 4 i entre 3 i 4.

TR04.1. Cremar benzina: *volare*

Unes línies aèries han assignat un avió per fer el circuit A-B-C-D-A. Les distàncies, en km, dels segments d'aquesta ruta són 1.500 (AB), 1.700 (BC), 1.300 (CD) i 2.700 (DA). A cada escala l'avió pot carregar un màxim de 40.000 litres de combustible, amb uns costos per litre iguals a 88, 15, 105 i 95 u. m. a A, B, C i D, respectivament. La capacitat del dipòsit de l'avió és de 48.000 litres. Al final de cada tram, per raons de seguretat, el dipòsit ha de contenir un mínim de



2.400 litres de combustible. El consum de combustible per km és igual a $4 + (\text{nivell mitjà de combustible durant el vol})/2.000$ litres.

Es tracta de determinar el pla òptim d'aprovisionament de combustible, primer en el supòsit que el circuit només es fa una vegada i, després, en el supòsit que es fa diàriament.

Aproximem el nivell mitjà de combustible durant el vol amb la mitjana entre el valor inicial i el valor final.

Comencem pel cas que el circuit només es fa una vegada i suposem que el dipòsit conté inicialment 2.400 litres.

Variables (totes ≥ 0):

x_A, x_B, x_C, x_D litres de combustible carregats a cada escala.

s_A, s_B, s_C, s_D contingut del dipòsit en arribar a cada escala.

Model:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } 88 \cdot x_A + 15 \cdot x_B + 105 \cdot x_C + 95 \cdot x_D \\ \text{s.a. } & s_B = 2.400 + x_A - 1.500 \cdot \left[4 + \frac{(2.400 + x_A + s_B) / 2}{2.000} \right] \\ & s_C = s_B + x_B - 1.700 \cdot \left[4 + \frac{(s_B + x_B + s_C) / 2}{2.000} \right] \\ & s_D = s_C + x_C - 1.300 \cdot \left[4 + \frac{(s_C + x_C + s_D) / 2}{2.000} \right] \\ & s_A = s_D + x_D - 2.700 \cdot \left[4 + \frac{(s_D + x_D + s_A) / 2}{2.000} \right] \\ & 2.400 + x_A \leq 48.000 \\ & s_* + x_* \leq 48.000 \quad (* = B, C, D) \\ & x_* \leq 40.000 \quad (* = A, B, C, D) \\ & s_* \geq 2.400 \quad (* = A, B, C, D) \end{aligned}$$

On la 5ª restricció és supèrflua, ja que $x_A \leq 40.000$.

La solució òptima té un cost de 6.165.983 u. m., amb:

x_A	x_B	x_C	x_D	s_B	s_C	s_D	s_A
12.480	40.000	6.359,45	40.000	2.400	12.336,84	5.600	2.400

Si el circuit es repeteix diàriament, el contingut de combustible a A passa a ser una variable (és a dir, s'ha de modificar la 1ª restricció del model, substituint-hi

2.400 per s_A). La solució òptima coincideix amb la corresponent al supòsit que el circuit es recorre una sola vegada.

La navegació marítima és una activitat amb un alt consum de combustible que genera emissions importants de partícules i de gasos d'efecte hivernacle. Com que el consum i les emissions augmenten més que proporcionalment amb la velocitat del vaixell, reduir-la tant com sigui possible afavoreix la reducció de l'un i de les altres. Tanmateix, és clar que la velocitat de navegació està condicionada pels terminis i pels costos, que augmenten amb la durada dels trajectes.

TR04.2. Cremar benzina: solcar els mars

Donada una ruta marítima que consisteix en una seqüència determinada de n ports, amb una finestra temporal per a l'arribada del vaixell associada a cada port $([e_k, l_k], k = 1, \dots, n$, amb $e_1 = l_1 = 0$) i amb una distància d_k ($k = 1, \dots, n-1$) d'un port al següent en la seqüència, es pot obtenir estalvis mitjançant l'optimització de la velocitat a cada tram de la ruta.⁴ Aquesta velocitat ha de pertànyer a l'interval $[V_m, V_M]$, dintre del qual el consum de combustible per unitat de temps és una funció cúbica de la velocitat i, per tant, el consum per unitat de longitud és una funció quadràtica (i convexa), $f(x)$.

S'hauria de tenir en compte un temps de servei a cada port, però com que a l'article de Fagerholt *et al.* en prescindeixen nosaltres tampoc no el tindrem en compte, tot i que no costaria gaire.

Tal com s'ha descrit el problema, el més immediat és adoptar com a variables les velocitats entre cada port i el següent, v_k ($k = 1, \dots, n-1$), i els instants d'arribada a cada port, t_k ($k = 1, \dots, n$), amb $t_1 = 0$:

Mvt

$$\text{minimitzar } \sum_{k=1}^{n-1} d_k \cdot f(v_k)$$

$$\text{s. a } \begin{array}{ll} t_{k+1} \geq t_k + d_k / v_k & k = 1, \dots, n-1 \\ V_m \leq v_k \leq V_M & k = 1, \dots, n-1 \\ e_k \leq t_k \leq l_k & k = 2, \dots, n \end{array}$$

Es tracta, per tant, d'un programa no lineal (funció objectiu i restriccions) convex.

⁴ Aquest problema es descriu i es tracta a Fagerholt, K., Laporte, G., Norstad, I. (2010), "Reducing fuel emissions by optimizing speed on shipping routes". *Journal of the Operational Research Society*, 61, 523-529. Les diferents formes de resoldre'l que s'exposen a continuació són un resum de les proposades en l'article, amb canvis lleugers en la notació.



Ara bé, en comptes de les v_k podem fer ús de unes noves variables τ_k ($k = 1, \dots, n-1$), corresponents al temps de desplaçament entre un port i el que el segueix a la seqüència:

$$\begin{aligned} & \text{M}\tau\text{t} \\ & \text{minimitzar } \sum_{k=1}^{n-1} d_k \cdot g_k(\tau_k) \\ \text{s.a } & t_{k+1} \geq t_k + \tau_k && k = 1, \dots, n-1 \\ & d_k / V_M \leq \tau_k \leq d_k / V_m && k = 1, \dots, n-1 \\ & e_k \leq t_k \leq l_k && k = 2, \dots, n \end{aligned}$$

on les funcions g_k , que també són convexes, s'obtenen a partir de la funció f mitjançant la relació $d_k = v_k \cdot \tau_k$.

Aquest model també és no lineal, però les restriccions són lineals.

Un enfocament alternatiu i completament diferent es basa a discretitzar el intervals $[e_k, l_k]$ i construir un graf polietàpic en què cada nivell correspon a un port i en què els vèrtexs de cada nivell són els instants que, en nombre finit, representen la finestra temporal corresponent (a la primera etapa només hi ha un vèrtex, corresponent a l'estat inicial). Els arcs van dels vèrtexs d'un nivell als del següent, però només en el cas que l'interval de velocitats disponibles permeti anar des de l'instant i del port k a l'instant j del port $k+1$. Cada arc té associat un cost que es calcula multiplicant la distància entre els ports pel valor de la funció f corresponent a la velocitat requerida per anar de k a $k+1$ en un temps $j-i$. Aleshores, es tracta de calcular el camí mínim, en aquest graf polietàpic, entre l'únic vèrtex del primer nivell i els de l'últim. Aquest càlcul és fàcil i ràpid, i és vàlid amb independència de les propietats de la funció f . La contrapartida de tots aquests avantatges és que, en discretitzar, la solució òptima obtinguda no sempre coincideix (de fet, és molt poc probable que coincideixi) amb la solució òptima del problema plantejat amb variables contínues, i la diferència tendeix a ser més gran com més gran és el valor dels intervals temporals adoptats en la discretització.

A l'article es descriu un experiment computacional del qual es desprenen les conclusions següents: (i) el model M τ t es resol amb menys temps que el Mvt; (ii) per a $n = 16$ a M τ t varen caldre 430 ms; (iii) amb una discretització de 20 punts per cada finestra, el temps de càlcul fou d'uns 2 ms, amb una diferència de només el 0,4 % entre el valor òptim del model discretitzat i el del model de programació no lineal. És clar que si només es tracta de resoldre aquest problema aquesta diferència en el temps de càlcul és irrellevant; però no ho és si aquest problema és un subproblema, que s'ha de resoldre un nombre elevat de vegades, en el marc d'un problema més general: donats uns ports i unes finestres temporals, determinar la ruta òptima i les velocitats de navegació en cada tram de la ruta.

Una possibilitat no explorada en l'article a què ens referim és linealitzar el model M π t mitjançant la tècnica de programació separable convexa (vegeu VI06), que consisteix essencialment a substituir la corba no lineal i convexa per una línia poligonal. A costa d'augmentar el nombre de variables i d'obtenir un valor òptim possiblement no coincident amb el que proporciona M π t, convertim el programa no lineal en un programa lineal. La discrepància amb l'òptim de M π t es pot reduir tant com convingui augmentant el nombre de trams de la línia poligonal i, per tant, el nombre de variables.

Els dos problemes següents tenen en comú que es refereixen a la localització d'un recurs en un espai unidimensional,⁵ per la qual cosa la resolució en resulta particularment senzilla i, en conseqüència, l'interès que puguin tenir es deriva bàsicament de la situació que s'hi planteja. Tanmateix, en el TR05.1 es pot apreciar la diferència entre optimitzar una decisió individual, en un context donat considerat estable, i el resultat a què pot conduir un conjunt de decisions individuals prou nombroses per modificar el context.

TR05.1. Localització: un lloc per viure

P ha aconseguit un lloc de treball que considera estable i en el qual pensa romandre fins que es jubili. Ara vol decidir la localització del seu habitatge permanent. El cost anual equivalent d'un habitatge depèn de la distància, x quilòmetres, al quilòmetre 0 del país, segons una funció convexa, diferenciable, positiva i decreixent, $\varphi_H(x)$. D'una altra banda, el cost que P considera equivalent al temps invertit anualment en els desplaçaments d'anada i tornada des del seu domicili al lloc de treball segueix una funció, $\varphi_T(x)$, convexa, diferenciable, positiva i creixent. P fa sempre aquests desplaçaments amb transport col·lectiu, la qual cosa li suposa un cost anual c_i si $z_{i-1} \leq x < z_i$ ($i = 1, \dots, n$), amb $z_0 = 0$, on les z són els límits de les zones tarifàries 1 a n (P exclou la possibilitat d'anar a viure més enllà de z_n) i $c_i > c_{i-1}$ ($i = 2, \dots, n$).

P ha de trobar el valor òptim de x , x^* , en l'interval $[0, z_n]$ de la funció definida per les expressions:

$$\varphi_H(x) + \varphi_T(x) + c_i \quad (z_{i-1} \leq x < z_i) \quad i = 1, \dots, n$$

Com que la suma de funcions convexes és convexa, l'òptim de cada una d'aquestes expressions s'obté en resoldre l'equació $\varphi'_H(x) + \varphi'_T(x) = 0$. Sigui \hat{x} el valor que anul·la aquesta suma de derivades i x_i^* , el valor òptim en l'interval $z_{i-1} \leq x < z_i$:

⁵ Com en el OP05.



$$\hat{x} < z_{i-1} \Rightarrow x_i^* = z_{i-1}; z_{i-1} \leq \hat{x} < z_i \Rightarrow x_i^* = \hat{x}; \hat{x} > z_i \Rightarrow x_i^* = z_i - \varepsilon$$

(on $\varepsilon > 0$ per a $i = 1, \dots, n$ evita que la residència se situï en la zona tarifària $i + 1$ quan això no convé).

Aleshores, només cal comparar els valors òptims de les n zones tarifàries per trobar la millor localització residencial per a P.

Per exemple, amb $\varphi_H(x) = e^{-0,01x}$, $\varphi_T(x) = 0,27 \cdot e^{0,02x}$, $c_i = 0,02 \cdot i$ i $n = 4$ (amb $z_1 = 15$, $z_2 = 30$, $z_3 = 45$, $z_4 = 60$), resulta que el mínim de $\varphi_H(x) + \varphi_T(x)$ és per a $x = 20,5395$ i, per tant, $x_1^* = 15 - \varepsilon$, $x_2^* = 20,5395$, $x_3^* = 30$, $x_4^* = 45$ amb uns costos anuals respectivament iguals a 1,2452, 1,2615, 1,2928 i 1,3817. Per tant, la localització òptima de l'habitatge de P és just abans del quilòmetre 15, en el límit de la zona 1.

Mesures per reduir els costos associats als desplaçaments (transports col·lectius més ràpids i còmodes, reducció de tarifes, promoció del teletreball) tindrien l'efecte, si no canviés $\varphi_H(x)$, d'allunyar del quilòmetre 0 l'emplaçament òptim de la residència de P.

Ara bé, si les persones que es troben en una situació com la de P, o similar, i determinen l'emplaçament òptim amb procediments semblants són prou nombroses, amb mesures com les indicades la demanda d'habitatge es desplaçaria del centre cap a la perifèria, la corba de costos de l'habitatge es reduiria prop de l'origen i augmentaria a partir d'algun valor de la distància al centre. Per tant, la decisió que seria òptima en el supòsit que les dades inicials no es modifiquen podria no ser-ho a la llarga.

TR05.2. Localització: i un lloc per consolidar els residus orgànics

S'ha de decidir la localització òptima d'un centre de consolidació, C, per a la recollida dels residus orgànics que es generen uniformement al llarg de la carretera coneguda com a Eix Longitudinal.

Els residus es recullen amb furgonetes, les quals poden portar els continguts al centre de tractament, T, situat a l'extrem occidental de l'Eix, o a C. Els residus acumulats a C seran transportats en camions de gran tonatge a T. La relació entre el cost de transport per unitat de pes i unitat de longitud amb camions de gran tonatge i el cost de transport amb furgonetes és igual a ρ (< 1).

La diferència entre els costos de transport amb furgoneta i el costos amb camions de gran tonatge és el que justifica l'existència del centre de consolidació.

Considerem, sense pèrdua de generalitat, que la longitud de l'Eix és igual a 1.

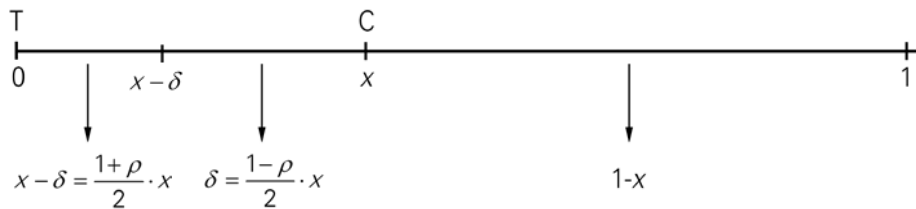
Les furgonetes han d'anar a T o a C, segons el que sigui millor pel que fa al cost de transport.

Si C se situa en el punt d'abscissa x s'hi han de descarregar tots els residus generats a la seva dreta i una part dels generats a la seva esquerra (és a dir, els generats entre $x - \delta$ i x , on $x - \delta$ és el punt en què és indiferent portar els residus a C o a T. Els compresos entre 0 i $x - \delta$ aniran directament a T.

En el punt $x - \delta$ és indiferent dur els residus directament a T o dur-los a C i des de C a T: $x - \delta = \delta + \rho \cdot x$, d'on $\delta = \frac{1}{2}(1 - \rho) \cdot x$ i $x - \delta = \frac{1}{2}(1 + \rho) \cdot x$

Per tant, l'Eix es pot considerar dividit en tres trams:

- De 0 a $x - \delta$, els residus del qual aniran directament a T.
- De $x - \delta$ a x , els residus del qual aniran a C, des de l'esquerra.
- De x a 1, els residus del qual aniran a C des de la dreta.



El cost total de transport serà la suma dels corresponents a aquests tres trams més el de dur a T els residus acumulats a C.

Si la funció de densitat de distribució dels residus és $h(u)$ ($0 \leq u \leq 1$), el cost de portar els residus a un dels extrems d'un tram de longitud L ($L \leq 1$) és igual al producte del cost unitari del transport per $\int_0^L h(u) \cdot u \, du$, que amb $h(u) = 1$ és igual a $\frac{1}{2} \cdot L^2$.

Per tant, els cost total de transport (dividit pel cost unitari de transport amb furgoneta) és:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \rho}{2} \cdot x \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \rho}{2} \cdot x \right)^2 + \frac{1}{2} (1 - x)^2 + \rho \left(1 - x + \frac{1 - \rho}{2} \cdot x \right) \cdot x = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{4} \rho^2 \right) \cdot x^2 - (1 - \rho) \cdot x + \frac{1}{2}$$



Aquesta expressió correspon a una paràbola convexa, el mínim de la qual es troba en el punt de derivada nul·la (en el supòsit que hem exclòs, $\rho = 1$, aquesta expressió és igual a $1/2$, independentment de la posició de C , que, en aquest cas, no resultaria de cap utilitat amb vistes a la reducció dels costos de transport):

$$x^* = \frac{1 - \rho}{2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{4} \rho^2 \right)}$$

La taula següent mostra els valors de x^* i dels costos corresponents (dividits pel cost unitari de transport amb furgoneta):

ρ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
x^*	0,667	0,645	0,625	0,606	0,588	0,571	0,556	0,541	0,526	0,513	[0, 1]
Cost	0,167	0,210	0,250	0,288	0,324	0,357	0,389	0,419	0,447	0,474	0,500

Avaluada la repercussió en el cost del transport implicada per la instal·lació de C , se'n podria determinar la rendibilitat, sabuts els costos d'inversió i d'exploració del centre.

TR06. Piscicultura

La piscifactoria TRUFLUSA cria i ven truites de riu. L'empresa disposa d'unes instal·lacions amb 3 piscines. Els peixos romanen T dies a cada una, transcorreguts els quals es venen o, en el cas de les piscines 1 i 2, passen a la piscina següent per continuar creixent. La demanda de truites és suficient per absorbir qualsevol quantitat que TRUFLUSA pugui posar a la venda als preus del mercat.

Les dades (per a $i = 1, \dots, 3$) són:

ρ_0 preu dels alevins

N_i capacitat de la piscina, en nombre de peixos

m_i taxa de mortalitat, per al període de T dies

p_i preu de venda dels peixos que surten de la piscina

q_i quilo de pinso que consumeix un peix en el període de T dies

c_i cost per a TRUFLUSA d'un quilo de pinso

TRUFLUSA desitja un model que li permeti determinar la política òptima en règim permanent i aplicar-lo amb les dades següents:

$$\rho_0 = 0,10$$

i	1	2	3
N_i	10.000	9.000	8.500
m_i	0,10	0,05	0,01
p_i	0,5	1,5	4,0
q_i	0,8	1,4	2,0
c_i	0,4	0,3	0,2

Variables:

x_i - entrada a la piscina i (nombre d'alevins o de peixos)

v_i - vendes de peixos

Model:

$$\text{maximitzar } \sum_{i=1}^3 p_i v_i - p_0 \cdot x_1 - \sum_{i=1}^3 \kappa_i \cdot x_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.a } x_2 &= (1 - m_1) \cdot x_1 - v_1 \\ x_3 &= (1 - m_2) \cdot x_2 - v_2 \\ v_3 &= (1 - m_3) \cdot x_3 \\ x_i &\leq N_i \quad i = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

On $\kappa_i \cdot x_i = c_i \cdot \frac{q_i}{T} \int_0^T s(x_i, m_i, t) dt$; $\kappa_i = \frac{1}{x_i} \left(c_i \cdot \frac{q_i}{T} \int_0^T s(x_i, m_i, t) dt \right)$, amb $s(x_i, m_i, t)$

igual a l'estoc de peix a la piscina a l'instant t ($0 \leq t \leq T$). Aquesta funció té com a paràmetres l'estoc inicial, x_i , i la taxa de mortalitat en T dies, m_i . La forma

de la funció depèn de la distribució al llarg del temps de les morts dels peixos, sobre la qual l'enunciat no dóna cap indicació. Si suposem que l'estoc decreix

linealment, tenim $s(x_i, m_i, t) = x_i \cdot \left(1 - \frac{t}{T} m_i \right)$ i $\kappa_i = c_i \cdot q_i \cdot \left(1 - \frac{m_i}{2} \right)$. Si suposem

que la taxa de mortalitat al llarg del temps és constant, igual a μ , tenim:

$$ds = -\mu \cdot dt; s = x_i \cdot e^{-\mu t}; x_i \cdot (1 - m_i) = x_i \cdot e^{-\mu T}; \mu = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{1 - m_i}; \kappa_i = -c_i \cdot q_i \cdot \frac{m_i}{\ln(1 - m_i)}$$

Amb aquest darrer supòsit s'obté la solució òptima:

i	1	2	3
x_i	10.000	9.000	8.500
v_i	0	50	8.415

amb la funció objectiu igual a 23.630,15 u. m. (cada T dies).



La planificació de plantilles és d'una gran importància en totes les organitzacions que requereixen persones amb nivells d'expertesa alts i que sovint s'han de formar, si més no en part, dins de l'organització mateixa. És el cas d'universitats, centres de recerca, consultores estratègiques o clubs esportius, per exemple. La manca de planificació pot produir una crisi més o menys greu a l'organització, perquè es pot trobar mancada d'elements fonamentals en la seva estructura o per la necessitat de contractar personal extern ja format, possiblement amb costos alts i amb alguna dificultat d'integració en el sistema.

TR07. Cicles de vida

El personal del centre de recerca Eureka està classificat en 3 categories. Eureka compta ara amb n_i ($i = 1, \dots, 3$) persones de cada categoria i aquesta plantilla és l'adequada per a l'activitat prevista per a l'exercici actual. La direcció del centre ha establert unes fites mínimes per a les esperances matemàtiques del nombre de persones de cada categoria a la plantilla en els dos exercicis següents (r_{ij} $t = 2, 3; i = 1, \dots, 3$). Els costos de contractar, mantenir en plantilla durant un exercici i acomiadar són, respectivament, per a cada persona de la categoria i , c_i, m_i, a_i ($i = 1, \dots, 3$).

Al final de cada exercici, algunes persones abandonen voluntàriament el centre. Les altres són avaluades per la direcció d'Eureka, la qual determina, en el cas de les categories 1 i 2, si tenen o no mèrits suficients per passar a la categoria immediatament superior. Per experiència, la direcció té una estimació de les probabilitats corresponents a les persones de la categoria i que es volen quedar i no tenen mèrits suficients per passar a la categoria $i + 1$ ($\pi_{ii}, i = 1, \dots, 3$; en el cas de la categoria 3 són totes les que es volen quedar, ja que no hi ha una categoria més alta) i a les que es volen quedar i tenen els mèrits per ser promogudes ($\pi_{i,i+1}, i = 1, 2$). La direcció té la facultat d'acomiadar, al final de cada exercici, les persones que considera convenient; les que no són acomiadades i tenen mèrits per ser promogudes passen, l'exercici següent, a la categoria immediatament superior a la que tenien.

Els valors numèrics són els següents:

i	1	2	3
n_i	400	100	30
r_{1i}	300	120	40
r_{2i}	350	200	70
c_i	5	40	60
m_i	15	50	70
a_i	0	200	300

π_{ij} $i \downarrow j \rightarrow$	1	2	3
1	0,60	0,20	-
2	-	0,80	0,10
3	-	-	0,95

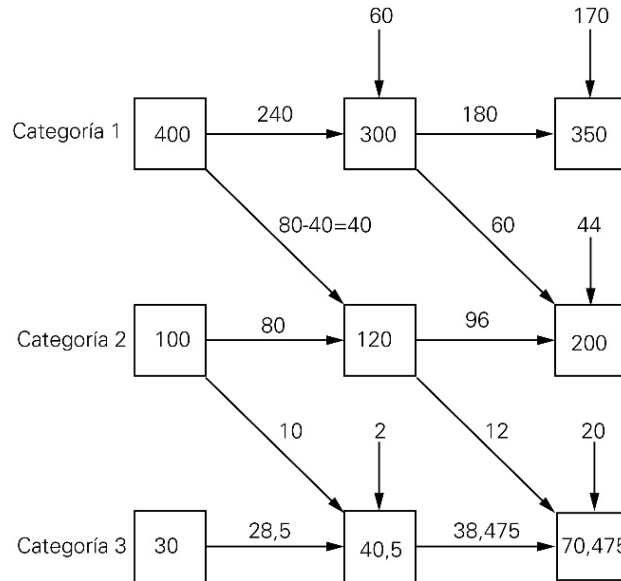
Variables:

- $x_{ti} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ nombre de persones de categoria i contractades a l'inici de l'exercici t ($t = 1, \dots, 3; i = 1, \dots, 3$)
- $y_{ti} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ nombre de persones de categoria i que no podrien ser promogudes a la categoria $i+1$ acomiadades al final de l'exercici t ($t = 1, 2; i = 1, \dots, 3$)
- $\hat{y}_{ti} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ nombre de persones de categoria i que podrien ser promogudes a la categoria $i+1$ acomiadades al final de l'exercici t ($t = 1, 2; i = 1, 2$)
- $s_{ti} \geq 0$ esperança matemàtica del nombre de persones de categoria i en plantilla durant l'exercici t ($t = 1, \dots, 3; i = 1, \dots, 3$)

$$\text{minimitzar } \sum_{t=1}^3 \sum_{i=1}^3 c_i \cdot x_{ti} + \sum_{t=1}^3 \sum_{i=1}^3 m_i \cdot s_{ti} + \sum_{t=1}^2 \left(\sum_{i=1}^3 a_i \cdot y_{ti} + \sum_{i=1}^2 a_i \cdot \hat{y}_{ti} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & s_{ti} = n_i + x_{ti} && i = 1, \dots, 3 \\ & s_{t1} = \pi_{11} \cdot s_{t-1,1} + x_{t1} - y_{t-1,1} && t = 2, 3 \\ & s_{ti} = \sum_{k=i-1}^i \pi_{ki} \cdot s_{t-1,k} + x_{ti} - \hat{y}_{t-1,i-1} - y_{t-1,i} && t = 2, 3; i = 2, \dots, 3 \\ & s_{ti} \geq r_{ti} && t = 2, 3; i = 1, \dots, 3 \\ & y_{ti} \leq \pi_{ij} \cdot s_{ti} && t = 1, 2; i = 1, \dots, 3 \\ & \hat{y}_{ti} \leq \pi_{i,i+1} \cdot s_{ti} && t = 1, 2; i = 1, \dots, 2 \end{aligned}$$

La solució òptima obtinguda té un cost de 50.848,25 u. m., i consisteix a acomiadar, al final del 1r exercici, 40 persones de la categoria 1 entre les que passarien a categoria 2, contractar-ne 60 i 2 de les categories 1 i 3, respectivament, en el 2n exercici, i 170, 44 i 20 de les categories 1, 2 i 3, respectivament, en el 3r exercici.



Aquest problema té una certa relació amb RE03, en la mesura que tots dos es refereixen a la planificació de plantilles. Tanmateix, els sistemes i les regles de gestió són ben diferents.

Hi ha empreses que, si més no per a alguns dels seus productes (maquinetes d'afaitar de capçals renovables, per exemple), adopten una estratègia que consisteix a vendre a un preu molt baix, fins i tot inferior al de cost, un producte que implica unes despeses significatives al llarg de la seva vida útil. Un cas similar és el de la venda de cafeteres de càpsules o de col·leccions amb lliuraments setmanals, en què és habitual oferir el primer lliurament a un preu molt baix (però en aquest cas, només una proporció de les persones que adquireixin el primer lliurament adquiriran els successius). Un cas en certa manera simètric és el de negocis que es basen en el cobrament anticipat (o en el compromís de compres futures) de productes o de serveis, dels quals potser la compradora no n'arribarà a fer ús.

TR08. La fidelització tenia un preu

IMPRICAR ven, sense intermediàries, impressores domèstiques d'un sol model i, a un preu de 25 u. m., els únics cartutxos de tinta amb què funcionen. L'experiència d'IMPRICAR indica que la vida útil d'una impressora és de 3 anys i que la venda d'una impressora origina la venda d'un cartutx al cap d'1, 7, 13, 19, 25 i 31 mesos.

Els costos fixos són de 3 milions d'u. m./any; les vendes previstes per a la impressora, 500.000 unitats/any; el cost variable unitari de la impressora, 50 u. m., i el dels cartutxos, 3 u. m.

A quin preu mínim ha de vendre les impressores per assolir un VAN = 0, amb un tipus d'interès anual del 4 %?

Suposem que les previsions de venda de cartutxos han de correspondre a valors mitjans, ja que no és versemblant que el ritme del consum de tinta sigui el mateix per a totes les impressores.

Perquè el VAN sigui nul, els ingressos actualitzats associats a una impressora han de ser iguals als costos (imputació de cost fix més cost variable; suposem que es paguen un mes abans de la venda de la impressora i suposem també que el cost variable dels cartutxos es paga un mes abans de vendre'ls). Si P és el preu de venda de la impressora, amb els supòsits indicats s'ha de complir:

$$\frac{P}{1+j} + 25 \left[\frac{1}{(1+j)^2} + \frac{1}{(1+j)^8} + \frac{1}{(1+j)^{14}} + \frac{1}{(1+j)^{20}} + \frac{1}{(1+j)^{26}} + \frac{1}{(1+j)^{32}} \right] - \frac{3.000.000}{500.000} - 50 - 3 \left[\frac{1}{(1+j)} + \frac{1}{(1+j)^7} + \frac{1}{(1+j)^{13}} + \frac{1}{(1+j)^{19}} + \frac{1}{(1+j)^{25}} + \frac{1}{(1+j)^{31}} \right] = 0$$

on j és el tipus d'interès mensual, igual a $1,04^{\frac{1}{12}} - 1$.

El resultat és $P = -69,11$. És a dir, IMPRICAR podria regalar la impressora o fins i tot afegir-hi uns diners, però aleshores no podria assegurar que la persona que comprés la impressora la faria servir, per la qual cosa cal que la cobri a un preu que no sigui insignificant, com ara 49,99 u. m.

TR09. En una galàxia molt llunyana

En el número de desembre de 1997 de la revista *IIE Solutions* (precursora de l'actual *ISE Magazine*) es va publicar l'article "Cutting queues reduces costs and generates cash", signat per un professor d'una universitat estatunidenca, un fragment del qual traduïm a continuació, amb lleugeres adaptacions.⁶

La responsable d'una planta industrial es disposa a comprar una nova màquina per produir unes plaques per a ordinadors. Considera dues màquines. La màquina A costa 20.000 \$ i pot produir 10 plaques per hora; la màquina B costa 60.000 \$ i pot produir 11 plaques per hora. El material

⁶ En un examen de 1998 es donava aquest fragment a l'estudiant i se li demanava que indiqués els supòsits implícits que feia l'autor del text, que digués la seva opinió sobre els supòsits implícits i explícits i, finalment, que enunciés uns supòsits que li semblessin més raonables i digués, d'acord amb aquests supòsits, quina màquina consideraria més recomanable.



per a cada placa arriba a una taxa de 8 h^{-1} i el cost per a l'empresa de cada hora d'espera d'aquest material és igual a 20 \$.

Moltes responsables, en aquesta situació, optarien per la màquina A, tenint en compte que la màquina B és tres vegades més cara i malgrat això produeix només un 10 % més, o una placa per hora més. Mitjançant la utilització d'un model de cues la responsable es podria adonar que és el contrari: la màquina A és molt més cara que la màquina B. Amb la màquina A, una placa passa un total de 30 minuts en el sistema; amb la màquina B, una placa hi passa únicament 20 minuts. Si la planta opera en tres torns, 360 dies l'any, el cost de la màquina A (costos d'espera més el cost de la màquina) és de 711.200 \$/any, mentre que el de la màquina B és només de 520.800 \$/any. Així doncs, la companyia pot recuperar el cost de la màquina en el primer any i encara estalviarà 190.400 \$ en el mateix any. En els anys següents, ja recuperat el cost de la màquina, els estalvis amb la màquina B pujaran a 230.400 \$/any.

Fins i tot si la màquina B pogués produir només 10,5 plaques per hora, seguiria sent més econòmica que la màquina A.

La producció no pot passar de les 8 unitats per hora, ja que per més capacitat que tingui la màquina només pot treballar amb el material que li arriba.

Si el material arriba regularment (a intervals de 7,5 minuts) i el temps de procés és constant (i no superior a 7,5 minuts), que és el que més raonablement es pot suposar en un context industrial, les unitats només estaran en el sistema mentre siguin processades ($6 \text{ i } 60/11 = 5,45$ minuts en les màquines A i B, respectivament).

Per tant, els valors dels temps d'estada en el sistema que figuren a l'article han de respondre a altres supòsits. Si els temps entre arribades i els temps de procés segueixen lleis exponencials, l'esperança matemàtica del temps d'estada en el sistema de les unitats és:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

on μ és la capacitat de producció de la màquina (esperança matemàtica del nombre d'unitats que pot produir per unitat de temps, en el supòsit que no li manca el subministrament del material i que, per tant, treballa ininterrompudament) i λ la taxa d'arribades (esperança matemàtica del nombre de vegades que arriba material en una unitat de temps). Amb aquests supòsits tenim:

$$W_A = \frac{1}{\mu_A - \lambda} = \frac{1}{10 - 8} = 0,5 \text{ h} = 30 \text{ minuts}$$

$$W_B = \frac{1}{\mu_A - \lambda} = \frac{1}{11-8} = \frac{1}{3} \text{ h} = 20 \text{ minuts}$$

Per tant, sembla que l'autor va suposar, sense fer-ho explícit, que arribades i procés tenien caràcter exponencial. Fa uns anys, el butlletí de l'*Operational Research Society* (la societat científica més antiga del món en l'àmbit de la investigació operativa, del Regne Unit) va publicar un article segons el qual les persones que arribaven a les caixes d'un supermercat seguien, sense saber-ho, tant pel que fa a les arribades com al procés, lleis exponencials; lamentablement, l'autor de l'article no sabia que una cosa i l'altra tenen molt poques possibilitats, si en tenen alguna, de regir-se per una llei d'aquesta mena. Però resulta que els models bàsics de la teoria de cues assumeixen lleis exponencials i, per motius que sens dubte mereixerien ser analitzats, hi ha qui acaba confonent els models matemàtics basats en supòsits molt específics amb la realitat mateixa.

Aleshores, sota aquests supòsits, si el cost d'estada d'una unitat en el sistema és el que indica l'article, els càlculs són correctes.

Cost corresponent a A el primer any:

$$20.000 + 360 \cdot 24 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 = 20.000 + 691.200 = 711.200 \text{ \$}$$

Cost corresponent a B el primer any:

$$60.000 + 360 \cdot 24 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 20 = 60.000 + 460.800 = 520.800 \text{ \$}$$

En el cas d'una màquina, B', amb una capacitat de 10,5 unitats hora tindriem:

$$W_{B'} = \frac{1}{\mu_A - \lambda} = \frac{1}{10,5 - 8} = 0,4 \text{ h} = 24 \text{ minuts}$$

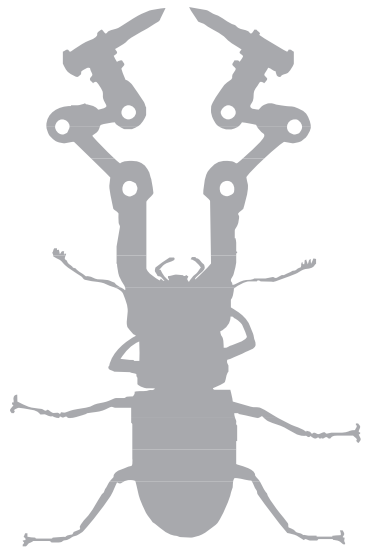
amb uns costos, el primer any, de:

$$60.000 + 360 \cdot 24 \cdot 8 \cdot 0,4 \cdot 20 = 60.000 + 552.960 = 612.960 \text{ \$}$$

Amb altres supòsits sobre les distribucions del temps entre arribades i del temps de procés, arribaríem a altres resultats. Amb temps entre arribades i temps de processos constants, cada una de les $360 \cdot 24 \cdot 8 = 69.120$ plaques produïdes en un any passarien, respectivament, 1/10, 1/11 i 1/10,5 hores en el sistema (és a dir, estrictament el temps de procés a cada màquina, amb la qual cosa els costos corresponents serien, també respectivament, 138.240, 125.672 i 131.657,1 u. m., i per decidir quina màquina seria més recomanable caldria més informació (vida útil de les màquines i tipus d'interès).



Tot això suposant que tenir una placa esperant durant 1 hora tingui un cost de 20 \$. En aquest cas, el cost de tenir una placa les 24 hores dels 360 dies suposats laborables de l'any seria de 172.800 \$, amb els quals podríem comprar 8,64 màquines A o 2,88 màquines B. Francament, no és raonable. L'afany per predicar a favor de la reducció d'estocs i de treball en curs, molt intens en el darrer quart del segle passat, de vegades incorria en la desmesura.



→ 12



Jugar

Gairebé tots els mitjans de comunicació escrits, tant si són en paper com si són digitals, publiquen passatemps de tipus diversos, com ara jeroglífics, mots encreuats o *sudokus*. També, si més no de tant en tant, problemes lògics de dificultat diversa, que sovint estan emparentats amb els mateixos *sudokus*. No solen ser extraordinàriament difícils per a cap persona avesada a aquest tipus d'entreteniments, però resoldre'ls via modelització matemàtica pot resultar una mica ardu o, si més no, laboriós. Per això, aquesta mena de passatemps, més enllà d'entretenir-nos, poden ser molt útils com a instruments per a aprendre a modelitzar.

En primer lloc en veurem un exemple senzill i un altre de gens trivial pel que fa a la definició de les variables i la formulació de les restriccions. Després, considerarem els *sudokus* i d'aquests, que no són altra cosa que casos particulars dels quadrats llatins, passarem, per acabar, als quadrats grecollatins, que varen començar com un entreteniment i es revelaren, ja cap a finals del segle XVIII, com una classe de problemes combinatoris de gran dificultat i d'interès teòric i pràctic.

JU01. Minimastermind: la combinació del cademat¹

Es tracta de determinar la combinació (estrictament: la variació) de 3 nombres que permet obrir un cademat. En tenim la informació següent:

835: Dos nombres d'aquests tres formen part de la clau, però estan mal col·locats.

604: Hi ha, mal col·locat, un sol nombre que forma part de la clau.

326: Hi ha un nombre que forma part de la clau i està ben col·locat.

310: No hi ha res correcte.

425: Hi ha un nombre que forma part de la clau, però està mal col·locat.

Definim dos tipus de variables:

¹ Publicat a l'edició digital del diari *La Vanguardia* (setembre de 2017).



$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3; j = 0,\dots,9 = 1$ si i només si a la clau del cademat el dígit j ocupa la posició i .

$y_j \in \{0,1\} \quad j = 0,\dots,9 = 1$ si i només si el dígit j forma part de la clau.

Aleshores, es tracta de trobar la solució del sistema d'equacions i inequacions:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^9 x_{ij} &= 1 & i &= 1,2,3 \\ y_j &\leq \sum_{i=1}^3 x_{ij} \leq 3y_j & j &= 0,\dots,9 \\ x_{18} + x_{23} + x_{35} &= 0 \\ x_{16} + x_{20} + x_{34} &= 0 \\ x_{13} + x_{22} + x_{36} &= 1 \\ x_{13} + x_{21} + x_{30} &= 0 \\ x_{14} + x_{22} + x_{35} &= 0 \\ y_3 + y_5 + y_8 &= 2 \\ y_0 + y_4 + y_6 &= 1 \\ y_2 + y_3 + y_6 &= 1 \\ y_0 + y_1 + y_3 &= 0 \\ y_2 + y_4 + y_5 &= 1 \end{aligned}$$

El resultat que s'obté en aplicar un algorisme d'optimització amb una funció objectiu qualsevol (fins i tot igual a 0) és $x_{15} = x_{28} = x_{36} = 1$ i, per tant, $y_5 = y_6 = y_8 = 1$, amb totes les altres variables iguals a 0. És a dir, la clau del cademat és: 586

I aquesta solució és única, perquè en afegir la restricció $x_{15} + x_{28} + x_{36} \leq 2$ el conjunt de solucions factibles és buit.

JU02. L'anomenat Enigma d'Einstein²

En un mateix costat d'un carrer hi ha 5 cases contigües (cases 1 a 5, d'esquerra a dreta). Les cases són de 5 colors diferents, a cada una hi ha un terminal, hi viu

² Publicat a l'edició digital del diari *La Vanguardia* (setembre de 2017). El cercador *Google* ofereix (25/09/2017) 13.700.000 resultats a partir de "Einstein's puzzle". L'atribució al popular científic no sembla que estigui justificada. Se suposa que costa molt resoldre'l, però realment no n'hi ha per tant, no és gaire més difícil que un *sudoku*. En canvi, modelitzar-lo com un programa matemàtic és, com es veurà, una mica espinós.

L'enunciat no coincideix totalment amb els que es troben habitualment a la xarxa. Per una banda, hem procurat que la interpretació sigui unívoca. Per una altra, l'hem modernitzat en dos sentits: no s'hi especifica el gènere de les persones que viuen a les cases i hem substituït les marques de tabac per tipus de terminals (actualment és més versemblant suposar que a totes les cases hi ha un terminal, que no pas que totes les persones que hi viuen són fumadores).

una persona que té un animal de companyia i pren una beguda determinada. Els 5 terminals, les 5 begudes i els 5 animals són diferents, i les 5 persones (cada una de les quals té una nacionalitat única) tenen nacionalitats diferents.

Es disposa de les dades següents:

- D01. La britànica viu a la casa vermella.
- D02. La sueca té un gos.
- D03. La danesa beu te.
- D04. La noruega viu a la primera casa.
- D05. L'alemanya té un PC.
- D06. La casa verda és la que hi ha immediatament a l'esquerra de la blanca.
- D07. La persona que viu a la casa verda beu cafè.
- D08. A la casa on hi ha una tauleta hi ha un ocell.
- D09. A la casa groga hi ha un telèfon intel·ligent.
- D10. La persona que viu a la casa del mig beu llet.
- D11. La casa que té un telèfon fix és al costat de la que hi viu el gat.
- D12. El cavall és al costat de la casa on hi ha un telèfon intel·ligent.
- D13. La persona que viu a la casa on hi ha un mòbil beu cervesa.
- D14. La persona que viu a la casa que té un telèfon fix viu al costat de la que beu aigua.
- D15. La noruega viu al costat de la casa blava.

I es tracta de dir de quina nacionalitat és la persona que té un peix com a animal de companyia.

Els valors que pot prendre cada una de les variables (color, nacionalitat, beguda, terminal i animal) són els següents:

Color	Blanc	Blau	Groc	Verd	Vermell
Nacionalitat	Alemanya	Britànica	Danesa	Noruega	Sueca
Beguda	Aigua	Cafè	Cervesa	Llet	Te
Terminal	Telèfon fix	Mòbil	Telèfon intel·ligent	Tauleta	PC
Mascota	Cavall	Gat	Gos	Ocell	Peix



Representem, per a cada variable, cada un d'aquests valors amb els números 1 a 5, des del valor de l'esquerra fins al de la dreta.

Es tracta d'omplir, de manera coherent amb les dades, una taula com la següent:

Casa	1	2	3	4	5
1. Color					
2. Nacionalitat					
3. Beguda					
4. Terminal					
5. Mascota					

Per tant, s'ha de posar a cada casella, respectant les condicions indicades, un número de l'1 al 5. Totes les caselles han d'estar plenes, perquè a cada casa correspon un color, una nacionalitat, una beguda, un terminal i una mascota. Com que les condicions inclouen que tots els colors, etc. són diferents, a cada fila de la taula hi ha d'haver, una vegada i una sola, cada un dels valors de l'1 al 5.

La taula plena defineix, per tant, per a cada casa, de quin color és i què conté.

Podríem fer servir variables enteres i propagació de restriccions (vegeu JU03), però l'enfocament que hem adoptat, com en tants altres problemes, és formular un model de programació lineal binària amb la peculiaritat de no tenir funció objectiu (com el de JU01).

Per a cada casella definim 5 variables $x_{ijk} \in \{0,1\}$ ($i, j, k = 1, \dots, 5$) que són iguals a 1 si i només si la casella (i, j) pren el valor k .

S'ha de complir:

$$\sum_{k=1}^5 x_{ijk} = 1 \quad i, j = 1, \dots, 5$$
$$\sum_{j=1}^5 x_{ijk} = 1 \quad i, k = 1, \dots, 5$$

És a dir, a cada casella hi ha d'haver un valor i només un i cada valor ha d'aparèixer una vegada i només una a cada fila.

Aquestes restriccions no tenen en compte les dades D01 a D015. Aquestes són de 4 tipus diferents:

- D04 i D10 vinculen la posició d'una casa amb una característica; per tant, permeten definir directament el valor de dues variables ($x_{214} = 1, x_{334} = 1$) i,

de retruc, el de les altres variables de les restriccions en què intervenen aquestes dues (que han de ser iguals a 0, perquè la suma de les 5 de cada restricció és igual a 1).

- D01, D02, D03, D05, D07, D08, D09 i D13 vinculen dos atributs a una casa (és a dir, a una posició) que no sabem quina és; en aquests casos, és útil expressar la posició de la casa que té l'atribut amb l'expressió $\sum_{j=1}^5 j \cdot x_{ijk}$, que ens dona la posició de la casa en què la variable i té el valor k . Per exemple, la condició D01 es formula així: $\sum_{j=1}^5 j \cdot x_{1j5} = \sum_{j=1}^5 j \cdot x_{2j2}$ (les altres, és clar, anàlogament).
- D06 vincula inequívocament la posició d'un atribut a la d'una altre; és a dir, la posició de la casa verda és igual a la posició de la casa blanca menys 1: $\sum_{j=1}^5 j \cdot x_{1j4} = \sum_{j=1}^5 j \cdot x_{1j1} - 1$ (aquesta condició, per cert, implica que la casa verda no pot ser la 5 i que la blanca no pot ser la 1).
- D11, D12, D14 i D15 vinculen la posició d'un atribut a la d'un altre, però no unívocament. Per exemple (D11), la casa on hi ha un telèfon fix està al costat de la casa on viu un gat, però no saben si està immediatament a l'esquerra o immediatament a la dreta. S'ha d'imposar, doncs, que la posició d'una casa és igual a la d'una altra menys 1 o bé igual a la d'aquesta darrera més 1; això es pot fer mitjançant les expressions que ens donen la posició, però resulta una mica complicat. Una formulació més senzilla és la següent (l'exemple correspon a D11):

$$x_{411} \leq x_{522}, x_{4j1} \leq x_{5,j-1,2} + x_{5,j+1,2} \quad (j = 2, \dots, 4), x_{451} \leq x_{542}$$

El model té 125 variables i, sense comptar les dues igualtats corresponents a D04 i D10, 79 restriccions.

Com ja hem indicat, en aquest cas no hi ha funció objectiu i es tracta únicament de trobar una solució factible, que s'obté immediatament i és la següent:

Casa	1	2	3	4	5
1. Color	Groc	Blau	Vermell	Verd	Blanc
2. Nacionalitat	Noruega	Danesa	Britànica	Alemanya	Sueca
3. Beguda	Aigua	Te	Llet	Cafè	Cervesa
4. Terminal	Telèfon intel·ligent	Telèfon fix	Tauleta	PC	Mòbil
5. Mascota	Gat	Cavall	Ocell	Peix	Gos



Aquesta solució és única, com es pot comprovar mitjançant l'addició al model d'una restricció que imposi que la suma de les 25 variables iguals a 1 en aquesta solució és igual o menor que 24.

Per tant, la persona que té el peix com a animal de companyia és alemanya.

El popular passatemps conegut com a *sudoku* és una aplicació lúdica del concepte de quadrat llatí, que es remunta a Leonhard Euler. Un quadrat llatí és una matriu quadrada d'ordre n en què cada casella conté un, i només un, dels n símbols d'un conjunt i de manera que, a cada fila i a cada columna, cada símbol hi figura exactament una vegada. Aquests quadrats es diuen llatins perquè Euler va fer servir com a símbols lletres de l'alfabet llatí. Ronald Fisher va incorporar el concepte en el disseny d'experiments (en el qual també poden intervenir els quadrats grecolatins, dels quals tracta el problema JU04).

Construir quadrats llatins és molt fàcil i el seu nombre creix molt ràpidament amb n . Les dificultats apareixen en imposar condicions addicionals, com ara que algunes caselles tinguin un contingut predeterminat o que els continguts d'alguns conjunts de caselles tinguin una propietat especificada. En el *sudoku* es tracta de trobar un quadrat llatí d'ordre 9 en què cada una de les 9 matrius de 3×3 en què es divideix, la de 9×9 contingui tots el dígit de l'1 al 9 i que les caselles especificades a l'enunciat tinguin el contingut que s'hi indica.

JU03. Sudoku

Es tracta de formular models matemàtics per a la resolució de *sudokus*.

Podem formular un model de programació lineal amb variables binàries:

Model S1

$x_{ijk} \in \{0,1\}$ = 1 si i només si el contingut de la casella (i, j) és k ($i, j, k = 1, \dots, 9$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 x_{ijk} &= 1 && \forall i, \forall j \\ \sum_{j=1}^9 x_{ijk} &= 1 && \forall i, \forall k \\ \sum_{i=1}^9 x_{ijk} &= 1 && \forall j, \forall k \\ \sum_{i=h}^{h+2} \sum_{j=l}^{l+2} x_{ijk} &= 1 && \forall k; h = 1, 4, 7; l = 1, 4, 7 \end{aligned}$$

Amb $9^3 = 729$ variables i $4 \cdot 9^2 = 324$ restriccions. El primer bloc de restriccions imposa que a cada casella hi va un dígit i només un; el segon i el tercer blocs

corresponen a les condicions que caracteritzen el quadrat llatí; el quart, a les que caracteritzen el *sudoku* com a cas particular del quadrat llatí.

Per resoldre el *sudoku* cal fer iguals a 1 les variables corresponents a les caselles plenes de l'enunciat i aleshores trobar una solució factible (que, si el *sudoku* està ben plantejat, ha de ser única).

Ara bé, el *sudoku* es pot modelitzar també d'una manera molt compacta si fem ús de la condició "totes diferents" (*dif* en la versió d'Excel en català; *alldiff* en altres programaris), que, com el seu nom indica, imposa que totes les variables enteres d'un conjunt determinat i amb rangs de valors especificats tinguin valors diferents).

Aquesta condició no és lineal, però es pot linealitzar (com en el model S1 i en molts dels models d'altres problemes considerats en aquest text). També es pot tractar directament amb algorismes de propagació de restriccions (*constraint programming*), alguns elements dels quals segurament apliquen moltes de les persones que resolen *sudokus*, de la mateixa manera que *Monsieur Jourdain* parlava en prosa sense saber-ho.

Podem fer-nos una primera idea del funcionament dels algorismes de propagació de restriccions a partir de les consideracions següents. D'entrada, les caselles buides d'un *sudoku* són susceptibles de contenir qualsevol nombre de l'1 al 9, però les condicions característiques del joc permeten anar eliminant possibilitats (tots els nombres que ja figuren a la mateixa fila o columna o en alguna altra casella de la submatriu de 3 x 3 a què pertany la casella considerada). Quan només en queda una, podem fixar el contingut de la casella i això permet eliminar possibilitats d'altres caselles. O bé, si queden poques possibilitats, podem explorar les conseqüències d'adoptar cada una d'elles i descartar les que desemboquin en una impossibilitat.

Amb la condició *alldiff* podem formular el model següent:

Model S2

$x_{ij} \in \{1, 2, \dots, 9\}$ contingut de la casella (i, j) $i, j = 1, \dots, 9$

$$alldiff(x_{ij}; j = 1, \dots, 9) \quad \forall i$$

$$alldiff(x_{ij}; i = 1, \dots, 9) \quad \forall j$$

$$alldiff(x_{ij}; i = h, \dots, h + 2; j = l, \dots, l + 2) \quad h = 1, 4, 7; j = 1, 4, 7$$

Com en el model S1, els dos primers blocs de restriccions són les condicions que caracteritzen el quadrat llatí; el tercer, les que caracteritzen el *sudoku* com a cas particular del quadrat llatí.



Tant el model S1 com l'S2 es resolen ràpidament amb un programari apropiat, sense diferències significatives entre els *sudokus* que a la premsa o a les col·leccions de passatemps són presentats com a fàcils o com a difícils, com es pot comprovar amb els dos *sudokus* següents ("fàcil" i "difícil", respectivament, de *La Vanguardia* del 28/05/2018):

				6				7
8	3			7		1		
1		5	8					
			5		4	9		2
	2						1	
4		9	2		6			
					7	3		4
		4		9			2	1
7				2				

6	4			5				
		5	8			9		
3			7				2	
			1	9				
1		9	6		7	8		2
				2	8			
	1				3			4
		6			9	3		
				1			7	8

Les solucions dels quals són:

9	4	2	1	6	5	8	3	7
8	3	6	9	7	2	1	4	5
1	7	5	8	4	3	2	6	9
3	6	7	5	1	4	9	8	2
5	2	8	7	3	9	4	1	6
4	1	9	2	8	6	5	7	3
2	8	1	6	5	7	3	9	4
6	5	4	3	9	8	7	2	1
7	9	3	4	2	1	6	5	8

6	4	1	9	5	2	7	8	3
7	2	5	8	3	1	9	4	6
3	9	8	7	6	4	5	2	1
8	6	2	1	9	5	4	3	7
1	3	9	6	4	7	8	5	2
5	7	4	3	2	8	1	6	9
2	1	7	5	8	3	6	9	4
4	8	6	2	7	9	3	1	5
9	5	3	4	1	6	2	7	8

Un quadrat grecollatí d'ordre n resulta de la superposició de dos quadrats llatins: un amb símbols del conjunt G i un altre amb símbols del conjunt L (amb $|G|=|L|=n$) i ortogonals entre si (és a dir, tals que cada parella del producte cartesià $G \times L$ figura una vegada i una sola en les n^2 caselles de la matriu).

L'origen dels quadrats grecollatins, com un mer passatemps, es remunta almenys a 1725, però el nom procedeix del fet que Leonhard Euler, en estudiar-los anys més tard, va fer servir com a elements dels conjunts G i L , respectivament, lletres dels alfabetos grec i llatí.

Euler va arribar a trobar procediments per construir-los per a valors de n senars o múltiples de 4. Però, com que per a $n = 2$ és immediat que no existeix cap

quadrat grecolatí i Euler no en va poder obtenir d'ordre 6, va conjeturar, cap el 1780, que no n'existien per a valors de $n = 4 \cdot k + 2$ ($k = 0, 1, \dots$). Euler tenia raó pel que fa a $n = 6$, però això no es va poder demostrar fins l'any 1901 (Gaston Tarry, amb un procediment d'enumeració molt laboriós).³ Més tard encara, el 1960, es va poder demostrar que la conjectura d'Euler no era correcta per a $n = 4 \cdot k + 2$ ($k = 2, 3, \dots$) i que, per tant, existeixen quadrats grecolatins per a qual-sevol n diferent de 2 i de 6.

El que havia començat com un passatemps va resultar ser un problema combinatori extremament difícil i que té aplicació en el disseny d'experiments i l'organització de competicions. No sempre és així, és clar, però moltes recerques que comencen sense cap connexió aparent amb possibles aplicacions pràctiques acaben resultant molt útils.

JU04. Quadrats grecolatins

Es tracta de formular la construcció d'un quadrat grecolatí d'ordre n com un problema de programació lineal amb variables binàries o amb restriccions *alldiff*, anàlogament a com s'ha fet en el cas del *sudoku*.

Model QGL1

$x_{ijk} \in \{0, 1\} = 1$ si i només si a la casella (i, j) hi ha el símbol "grec" h i el símbol "latí" k

$$\sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad \forall i \forall j$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad \forall h \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad \forall i \forall h$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad \forall j \forall h$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n x_{ijk} = 1 \quad \forall i \forall k$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n x_{ijk} = 1 \quad \forall j \forall k$$

³ Una carta de Heinrich Schumacher a Gauss, de 1842, permet suposar que Thomas Clausen, ajudant de Schumacher, va trobar una primera demostració de la conjectura per a $n = 6$, però no hi ha prou documentació per tenir-ne la certesa (vegeu Brutau, J. M. *Euler: idees seminals en combinatoria*, a https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.2/342/342_Article.pdf?).



Amb n^4 variables i $6 \cdot n^2$ restriccions.

El primer bloc de restriccions imposa que a cada casella hi hagi una i una sola parella grecolatina; el segon, que cada parella grecolatina figurei una vegada i una sola en el quadrat; el tercer i el quart, són les condicions de quadrat llatí per als símbols "grecs" i el cinquè i el sisè, les condicions de quadrat llatí per als símbols "llatins".

Model QGL2

$g_{ij} \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ símbol "grec" a la casella (i, j) $i, j = 1, \dots, n$

$r_{ij} \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ símbol "llatí" a la casella (i, j) $i, j = 1, \dots, n$

$p_{ij} \in \{0, 1, \dots, n^2-1\}$ parella "grecoromana" a la casella (i, j) $i, j = 1, \dots, n$

$$\text{alldiff}(g_{ij}; j = 1, \dots, n) \quad \forall i$$

$$\text{alldiff}(g_{ij}; i = 1, \dots, n) \quad \forall j$$

$$\text{alldiff}(r_{ij}; j = 1, \dots, n) \quad \forall i$$

$$\text{alldiff}(r_{ij}; i = 1, \dots, n) \quad \forall j$$

$$p_{ij} = n \cdot g_{ij} + r_{ij} \quad \forall i \forall j$$

$$\text{alldiff}(p_{ij}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n)$$

Tant en un model com en l'altre podem reduir variables i simetries si fixem una fila, per exemple, la primera:

α A	β B	γ C	δ D	ε E	...
------------	-----------	------------	------------	-----------------	-----

i una columna d'un dels dos quadrats llatins (per exemple, els símbols "grecs" de la primera columna).

Els procediments de modelització i de càlcul que han resultat molt eficients per resoldre la immensa majoria dels problemes presentats en aquest text, no ens han donat sempre tan bon resultat en intentar trobar quadrats grecolatins (obtenir-ne un d'ordre 10 requereix, amb qualsevol dels dos models proposats, molt temps de càlcul). I és perquè els algorismes d'optimització, en aquest cas, acaben funcionant com a procediments d'enumeració. El bàlsam de Ferabràs, remei infal·libre i universal en què creia el Quixot, encara no s'ha inventat. I tampoc el seu equivalent en el camp dels algorismes.

De tota manera, es pot dedicar molt temps de càlcul a trobar un quadrat grecolatí d'un ordre determinat, perquè una vegada el tenim es pot desar i ja no caldrà que repetim mai més els càlculs.

Tot això no obstant, amb CPLEX 12.8 i un PC, amb el QGL1 (que ha funcionat millor que el QGL2) hem trobat un quadrat grecolatí d'ordre 8 amb 1 minut i 21

segons, i un d'ordre 9 amb 2 segons (aquests temps, òbviament, seran diferents amb un altre PC o amb un altre resolutori).

En tot aquest text hem procurat aplicar procediments de resolució com més genèrics millor, independents de les característiques específiques dels exemples numèrics tractats. Ara bé, en el cas dels quadrats grecollatins,⁴ resulten més eficients procediments constructius basats en les seves propietats específiques. Els més senzills són per als d'ordre senar, que podem obtenir, per exemple, amb les expressions següents:

$$g_{ij} = [(i - 1) + (j - 1)] \bmod n$$

$$r_{ij} = [(n - 1) \cdot (i - 1) + (j - 1)] \bmod n$$

amb $g_{ij}, r_{ij} \in \{0, \dots, n - 1\}$, de les quals, per a $n = 9$, resulta:

00	11	22	33	44	55	66	77	88
18	20	31	42	53	64	75	86	07
7	38	40	51	62	73	84	05	16
36	47	58	60	71	82	03	14	25
45	56	67	78	80	01	12	23	34
54	65	76	87	08	10	21	32	43
63	74	85	06	17	28	30	41	52
72	83	04	15	26	37	48	50	61
81	02	13	24	35	46	57	68	70

Per descomptat, a partir d'aquest quadrat grecollatí en podem generar molts altres, per permutació de files o columnes (o de files i columnes), fins i tot si fixem la primera fila.

Pel que fa al quadrats grecollatins d'ordre 6, amb el model QGL1 i CPLEX 12.8 i un PC, en 2 segons hem comprovat el que Euler va conjecturar cap el 1780 i ningú no va poder demostrar fins que Tarry ho va fer el 1901, és a dir, que no existeixen. Ja ho deia, i fa molts anys, aquell personatge de sarsuela: *hoy las ciencias adelantan que es una barbaridad.*

⁴ A Internet hi ha molta informació al respecte, però s'ha d'usar amb prudència, perquè no sempre és fiable.