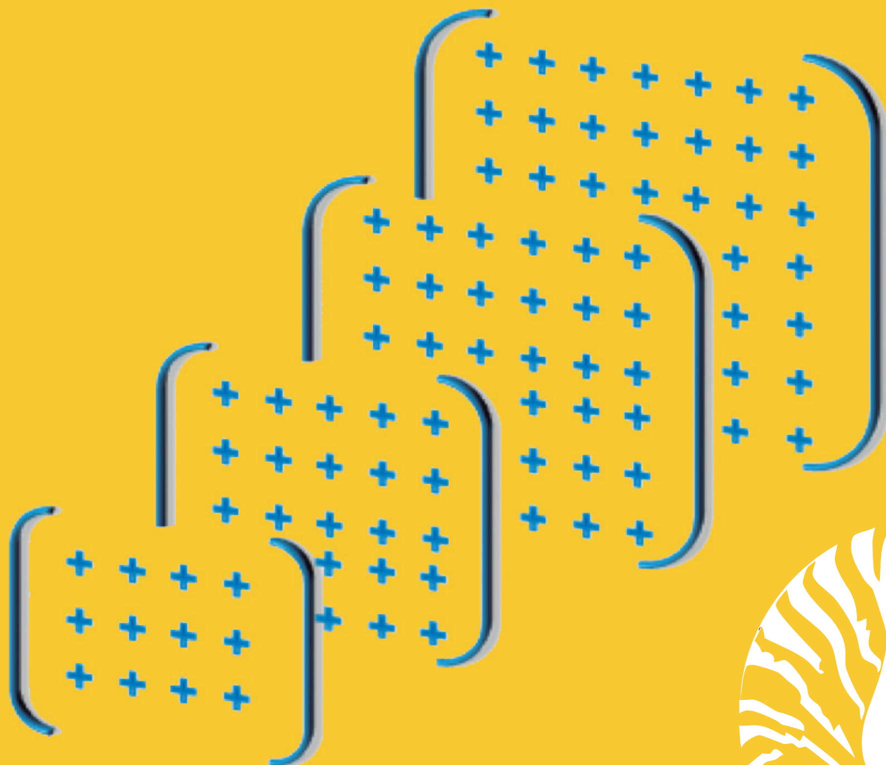
22
CIÈNCIES APLICADES



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

UPCGRAU

Introducción a la teoría de matrices positivas. Aplicaciones

M.Isabel García Planas
José Luís Domínguez García

22

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

iniciativa digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

UPCGRAU

Introducción a la teoría de matrices positivas. Aplicaciones

M.Isabel García Planas
José Luís Domínguez García

Primera edición: abril de 2012

Diseño y dibujo de la cubierta: Jordi Soldevila
Diseño maqueta interior: Jordi Soldevila

Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona Salgado 31,
Edificio Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Depósito legal: B. 7529-2013
ISBN: 978-84-7653-966-8

A Blanca

El olvido de las matemáticas perjudica to-do el conocimiento, ya que quien las igno-ra no puede conocer las otras ciencias ni las cosas de este mundo.

Roger Bacon *(Inglaterra, 1214-1294)*

Presentación

El presente libro trata, de forma comprensiva, de la teoría de matrices positivas y, más generalmente, de la teoría de matrices no negativas. Las matrices cuadradas de este tipo aparecen en una gran variedad de problemas, como pueden ser los estudios de procesos estocásticos, las cadenas de Markov, los modelos económicos y la teoría de la señal, entre otros.

La teoría desarrollada aquí es una parte del álgebra lineal que recientemente ha adquirido un nuevo auge, debido a su alto grado de aplicabilidad, pues algunos de los principales resultados han sido obtenidos en las últimas décadas.

Este libro está estructurado en dos partes. La primera incluye todos los resultados de álgebra matricial y lineal necesarios para que esta obra sea autocontenida. La segunda parte está dedicada propiamente el estudio de las matrices no negativas y sus aplicaciones.

Este texto está pensado, pues, en general, para aquellos estudiantes que necesitan utilizar este tipo de matrices. A tal efecto, proporciona todos los conceptos básicos necesarios para que pueda, más adelante, comprender un texto científico en que estas sean utilizadas. Y, en particular, como apoyo para los estudiantes que cursen la asignatura Introducción a la Teoría de Matrices Positivas, que se imparte en la ETSEIB-UPC.

Quienes, por su formación matemática, dominen los conceptos básicos de álgebra lineal y estén familiarizados con el álgebra matricial pueden directamente abordar el estudio de la segunda parte.

No obstante, puesto que no siempre se dominan dichos conceptos, hemos incluido una primera parte en que se abordan algunos tópicos de álgebra lineal y matricial. Además esta primera parte puede servir como recordatorio para los estudiantes que previamente hayan estudiado esta materia, así como de referencia en caso de desconocer algún concepto.

Asimismo, hemos querido incluir en cada capítulo ejemplos de resolución de algunos ejercicios utilizando el programa MATLAB.

Índice


2
1
3

→ 1

Matrices

1.1. Notaciones y definiciones

Trataremos tan solo las matrices definidas sobre un cuerpo conmutativo K, que será o bien el cuerpo real $\mathbb{R}$, o bien el cuerpo complejo $\mathbb{C}$ (es decir, cuyos coeficientes pertenecen a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$), si bien las matrices se pueden definir sobre cualquier cuerpo, o incluso sobre anillos.

Definición 1.1.1. Denominamos *matriz de orden $n \times m$ a coeficientes en el cuerpo K* a un conjunto de $n \cdot m$ elementos del cuerpo distribuidos en n filas y m columnas, que notaremos por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in K.$$

El elemento a_{ij} está en la fila i y en la columna j. Algunas veces, notaremos una matriz simplemente por $A = (a_{ij})$.

Ejemplo 1.1.1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1{,}01 & 2 & 3{,}2 \\ -1{,}1 & 3 & 2{,}5 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

A_1 es una matriz de orden 2×3 y A_2 es una matriz de orden 3×2.

Las matrices de orden $1 \times m$ (es decir, con una sola fila) reciben el nombre de *vectores fila* y las matrices de orden $n \times 1$ (es decir, con una sola columna) reciben el nombre de *vectores columna*.

Ejemplo 1.1.2. Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

son un vector fila y un vector columna, respectivamente.

Denotamos por $M_{n\times m}(K)$ el conjunto de las matrices de orden $n\times m$ a coeficientes en el cuerpo K. En el caso particular en que $n=m$, denotamos este conjunto simplemente por $M_n(K)$.

1.1.1. Operaciones con matrices

Suma

Definición 1.1.2. Dadas dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$, con $A,B\in M_{n\times m}(K)$ (esto es, del mismo orden), definimos la suma de estas dos matrices como la matriz

$$C=(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}).$$

Proposición 1.1.1. En el conjunto $M_{n\times m}(K)$, la operación suma verifica las propiedades siguientes.

a) Asociativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$.
b) Conmutativa: $A+B=B+A$.
c) Existencia de elemento neutro, que es la matriz 0 (cuyos elementos son todos nulos), ya que $A+0=A$ para cualquier matriz $A\in M_{n\times m}(K)$. Esta matriz se llama matriz nula.
d) Existencia de elemento simétrico: dada una matriz $A=(a_{ij})\in M_{n\times m}(K)$, existe $-A$ de forma que $A+(-A)=0$ (en efecto, basta tomar $-A=(-a_{ij})$).
Se dice, entonces, que el conjunto $M_{n\times m}(K)$ tiene estructura de *grupo abeliano*.

Notación. Dadas dos matrices $A,B\in M_{n\times m}(K)$, la operación $A+(-B)$ la notamos simplemente por $A-B$.

Producto

Definición 1.1.3. Dadas dos matrices $A\in M_{n\times m}(K)$, $B\in M_{m\times p}(K)$, esto es, $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ de órdenes respectivos $n\times m$ y $m\times p$, definimos el producto de estas dos matrices por

$$C=(c_{ij})=\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right)$$

Proposición 1.1.2. La operación producto verifica las propiedades siguientes.
a) Asociativa: $(AB)C=A(BC)$.

b) Distributiva respecto de la suma: $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$.

c) En el caso $n = m$, existe elemento unidad, que es la matriz $I_n = (\delta_{ij})$ con $\delta_{ij} = 0$, si $i \neq j$ y $\delta_{ii} = 1$, ya que $AI_n = I_nA = A$ para cualquier matriz $A \in M_n(K)$. La matriz $I_n \in M_n(K)$ recibe el nombre de matriz identidad de orden n. A veces, si no hay posibilidad de confusión, se denota simplemente por I.

En el caso $n = m$ y, puesto que, dadas dos matrices cualesquiera, siempre se puede obtener su producto, que cumple las propiedades anteriores, además de las propiedades mencionadas anteriormente con la operación suma, se dice que $M_n(K)$ es un *anillo* con *unidad*.

Observación 1. La operación producto no es conmutativa. En realidad, si $A \in M_{n\times m}(K)$ y $B \in M_{m\times p}(K)$, podemos efectuar el producto AB, pero el producto BA puede efectuarse solo si $n = p$. En el caso de dos matrices cuadradas A, B del mismo orden, se pueden efectuar los productos AB y BA, pero las matrices así obtenidas no tienen por qué coincidir. En efecto, podemos considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{1\times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Podemos hacer el producto AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$$

pero, sin embargo, no es posible efectuar el producto BA.

En el caso de dos matrices cuadradas, consideremos, por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso, existen AB y BA, pero estos productos son dos matrices distintas:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Observación 2. Es posible que, sin que ni A ni B sean matrices nulas, el producto AB o BA (o ambos, si tienen sentido) sean la matriz nula. Decimos entonces que las matrices A y B son divisores de cero.

Como ejemplos, podemos considerar los siguientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos también que, sin ser $A = B$, puede ocurrir $AC = BC$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $CA = CB$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Así pues, no es válida la "ley de simplificación ".

Producto por un escalar

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(K)$ y un elemento cualquiera del cuerpo $\lambda \in K$, definimos el producto del escalar λ por la matriz A del siguiente modo:

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

Observación 3. Sea $A \in M_{n\times m}(K)$. Entonces

$$\lambda A = (\lambda I_n)A = A(\lambda I_m)$$

Las matrices de la forma λI_n reciben el nombre de *matrices escalares*.

Proposición 1.1.3. La operación producto por escalares de K verifica las propiedades siguientes.

a) Asociativa: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
b) Distributiva respecto de la suma de matrices: $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
c) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.
d) $1 \cdot A = A$.

El conjunto $M_{m\times n}(K)$ con las operaciones suma y producto por escalares de K que verifican estas propiedades se dice que tiene estructura de *espacio vectorial sobre K*.

1.1.2. Algunos tipos especiales de matrices

Definición 1.1.4. Denominamos *matriz triangular superior* una matriz $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

Denominamos *matriz triangular inferior* una matriz $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Denominamos *matriz diagonal* una matriz $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Denominamos *matriz estrictamente triangular superior* una matriz $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ para todo $i \geq j$.

Denominamos *matriz estrictamente triangular inferior* una matriz $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ para todo $i \leq j$.

Ejemplo 1.1.3. Consideremos las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 2{,}2 & 4{,}2 \\ 0 & 1{,}01 & 4{,}9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2{,}4 & 9{,}1 & 0 \\ 0{,}9 & 2 & 8{,}1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}01 & 2{,}1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2{,}4 & 0 & 0 \\ 0{,}9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A_1 es triangular superior, la matriz A_2 es triangular inferior, la matriz A_3 es diagonal, la matriz A_4 es estrictamente triangular superior y la matriz A_5 es estrictamente triangular inferior.

Las matrices escalares son casos especiales de matrices diagonales.

1.1.3. Trasposición

Definición 1.1.5. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(K)$, denominamos *matriz traspuesta* de A (y la notamos por A^t) la matriz definida de la forma

$$A^t = (a_{ji}) \in M_{m\times n}(K)$$

Es decir, A^t es la matriz que se obtiene a partir de A cambiando filas por columnas.

Ejemplo 1.1.4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(K),$$

su traspuesta es la matriz

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(K)$$

Ejemplo 1.1.5. Si v es un vector fila $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \in M_{1\times m}(K)$, su traspuesta es un vector columna, $v^t = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(K)$. Recíprocamente, la traspuesta de un vector columna es un vector fila.

Las propiedades siguientes se utilizan con frecuencia.

Proposición 1.1.4. Se verifican las igualdades siguientes .

1.- $(A^t)^t = A$
2.- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
3.- $(A+B)^t = A^t + B^t$
4.- $(AB)^t = B^t A^t$

Vamos ahora a limitarnos al caso en que las matrices son cuadradas, es decir, $n = m$. En este caso, A y A^t son ambas matrices cuadradas del mismo orden, y tiene sentido preguntarse si coinciden, o bien si se relacionan de algún modo peculiar.

Definición 1.1.6. Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, decimos que es simétrica si y solo si

$$A = A^t.$$

Ejemplo 1.1.6. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

es simétrica.

En general, dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, se define la matriz A^* como la matriz traspuesta conjugada de la matriz A. Esto es,

$$A^* = (b_{ij}), \quad \text{con } b_{ij} = \overline{a}_{ji}$$

Ejemplo 1.1.7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 2-i & 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que, si A es a coeficientes reales, $A^* = A^t$.

Definición 1.1.7. Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, decimos que es antisimétrica si y solo si

$$A = -A^t$$

Ejemplo 1.1.8. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -0{,}5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0{,}5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

es antisimétrica.

Proposición 1.1.5. Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ cualquiera, existen una matriz $S \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica y una matriz $T \in M_n(\mathbb{R})$ antisimétrica tales que

$$A = S + T.$$

Demostración. Consideremos

$$S = \frac{1}{2}(A + A^t)$$
$$T = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

Es fácil ver que S es simétrica, T es antisimétrica y $A = S + T$. ∎

También es fácil comprobar la afirmación de la proposición siguiente.

Proposición 1.1.6. Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Entonces, $S = A^t A \in M_m(\mathbb{R})$ y $R = AA^t \in M_n(\mathbb{R})$ son matrices simétricas.

Definición 1.1.8. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se dice que A es ortogonal cuando

$$AA^t = A^t A = I_n.$$

Ejemplo 1.1.9. Las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

son ortogonales.

En general, sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Se dice que A es unitaria cuando

$$AA^* = A^*A = I_n$$

Ejemplo 1.1.10. Las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

son unitarias.

1.2. Determinantes

Definición 1.2.1. Dada una matriz cuadrada $A \in M_n(K)$, llamamos determinante de $A = (a_{ij})$ (y lo notaremos por $\det A$) el escalar de K

$$\det A = \sum \varepsilon(h) a_{1h_1} a_{2h_2} \dots a_{nh_n}$$

donde el sumatorio se extiende a todas las permutaciones $h : (h_1, h_2, \dots, h_n)$ del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y $\varepsilon(h)$ vale 1 o -1 según si la permutación es par o impar.

Ejemplo 1.2.1. (a) Sea $A = (a) \in M_1(K)$. Entonces, $\det A = a$.
(b) Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$. Entonces, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Propiedades

1. $\det A^t = \det A$.

2. Si una matriz B se obtiene a partir A mediante el intercambio de dos filas o dos columnas consecutivas, entonces $\det B = -\det A$.

3. Si A es una matriz que tiene dos filas o dos columnas idénticas, $\det A = 0$.

4. Si una matriz B se obtiene a partir de A añadiendo a una fila (o columna) de A una combinación lineal de las otras filas (o columnas) de A, entonces $\det B = \det A$.
5. Si $A, B \in M_n(K)$, $\det AB = \det A \cdot \det B$.

6. El determinante de una matriz triangular superior (o triangular inferior, o diagonal) es igual al producto de los elementos que están sobre la diagonal de la matriz.

De estas propiedades básicas, consecuencia de la definición de determinante, se deducen otras.

7. Si una fila (o columna) de la matriz A es combinación lineal de las otras filas (o columnas) de A, entonces $\det A = 0$.

8. Si A es una matriz estrictamente triangular superior (o estrictamente triangular inferior), $\det A = 0$.

9. Para todo n, $\det I_n = 1$.

Menores y rango de una matriz

Definición 1.2.2. Dada una matriz $A \in M_{n\times m}(K)$, se denomina *menor de orden* r el determinante de una submatriz de A de orden r formada con los elementos que pertenecen simultáneamente a r filas y r columnas fijadas de la matriz A.

Definición 1.2.3. Dada una matriz $A \in M_{n\times m}(K)$, llamamos *rango* de la matriz el orden del mayor menor no nulo de la matriz.

Definición 1.2.4. Una matriz $A \in M_n(K)$ se dice que es *regular* si su determinante es distinto de cero; en caso contrario, se dice que es *singular*.

Ejemplo 1.2.2. Sea $A \in M_n(K)$ regular. Entonces, $\operatorname{rango} A = n$.

Adjunta de una matriz

Definición 1.2.5. Dada $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, se define el adjunto del término a_{ij} (que notaremos por α_{ij}) al determinante de la matriz que resulta al suprimir en A la fila y la columna en que se encuentra el elemento a_{ij} (esto es, la fila i y la columna j) multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

Definición 1.2.6. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, definimos la matriz adjunta de A, $\operatorname{Adj}(A)$, como la matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de la matriz A,

$$\operatorname{Adj}(A) = (\alpha_{ij}).$$

Ejemplo 1.2.3. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Los adjuntos de cada elemento son

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{11} = -4 & \alpha_{12} = 0 & \alpha_{13} = 4 \\ \alpha_{21} = 0 & \alpha_{22} = 0 & \alpha_{23} = -2 \\ \alpha_{31} = 4 & \alpha_{32} = -2 & \alpha_{33} = -4 \end{array}$$

por lo que la matriz adjunta de A es

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

1.3. Inversa de una matriz

Definición 1.3.1. Sea $A \in M_{n\times m}(K)$. Si existe una matriz $B \in M_{m\times n}(K)$ tal que

$$AB = I_n \in M_n(K)$$

se dice que la matriz B es una *inversa por la derecha* de A. Si existe una matriz $C \in M_{m\times n}(K)$ tal que

$$CA = I_m \in M_m(K)$$

se dice que la matriz C es una *inversa por la izquierda* de A.

En caso de que A sea una matriz cuadrada, si existe inversa por la derecha existe también por la izquierda y ambas coinciden. En dicho caso, se dice que la matriz A es *inversible* y esta matriz se denomina la *inversa* de A, que notaremos por A^{-1} (una tal matriz es única).

Proposición 1.3.1. Las matrices regulares son las únicas matrices inversibles.

Proposición 1.3.2. Si $A \in M_n(K)$ es una matriz regular, entonces se cumplen las propiedades siguientes.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Si B es también una matriz regular, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Sea $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Entonces, $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.
4. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
5. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Cálculo de la inversa

La proposición siguiente proporciona un método para obtener la inversa de una matriz.

Proposición 1.3.3. La inversa de una matriz regular $A \in M_n(K)$ es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{Adj}(A))^t.$$

1.4. Inversa generalizada de Moore-Penrose

Definición 1.4.1. Dada una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, denominamos matriz *inversa de Moore-Penrose* de A una matriz de orden $m \times n$ (que notaremos por A^+) que cumple

1. $AA^+A = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
3. $(AA^+)^t = AA^+$
4. $(A^+A)^t = A^+A$

Proposición 1.4.1. Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Entonces, existe una única matriz $A^+ \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ que cumple las cuatro condiciones anteriores.

Demostración. Sea $r = \operatorname{rango} A$. Entonces, existen $P \in M_n(\mathbb{R})$ y $Q \in M_m(\mathbb{R})$ matrices inversibles tales que

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

Particionando las matrices P y Q según la partición de $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{pmatrix} = P_{11}Q_{11}$$

Observamos que P_{11} y Q_{11} son matrices de rango r. Luego, $P_{11}^tP_{11}$ y $Q_{11}Q_{11}^t$ son matrices inversibles de orden r. Es fácil comprobar que la matriz

$$Q_{11}^t(Q_{11}Q_{11}^t)^{-1}(P_{11}^tP_{11})^{-1}P_{11}^t$$

cumple las cuatro condiciones dadas en la definición. ■

Observación. Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ es una matriz inversible, entonces $A^+ = A^{-1}$.
Si la matriz A tiene rango máximo, es fácil obtener la matriz A^+, según se ve en el resultado siguiente.

Proposición 1.4.2. Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ una matriz que tiene rango máximo. Entonces,
(a) si $n \geq m$, $A^+ = (A^tA)^{-1}A^t$.
(b) si $n \leq m$, $A^+ = A^t(AA^t)^{-1}$.

Ejemplo 1.4.1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La inversa de Moore-Penrose de la matriz A viene dada por

$$A^+ = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

lo que se comprueba fácilmente, puesto que la matriz A^+ cumple las cuatro condiciones dadas en la definición.

1.5. Ejercicios resueltos

1. Descompón la matriz

$$A=\begin{pmatrix}5&2&1\\3&1&4\\2&1&3\end{pmatrix}$$

como suma de una matriz S simétrica y una matriz T antisimétrica.

Solución:

$$S=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}5&2&1\\3&1&4\\2&1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&3&2\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10&5&3\\5&2&5\\3&5&6\end{pmatrix}$$

$$T=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}5&2&1\\3&1&4\\2&1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&3&2\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&3\\1&-3&0\end{pmatrix}$$

2. Calcula el determinante de la matriz siguiente.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\4&-1&7\\7&2&-1\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&0&3\\4&-1&7\\7&2&-1\end{vmatrix}=$$
$$1\cdot(-1)\cdot(-1)+4\cdot 2\cdot 3+0\cdot 7\cdot 7-7\cdot(-1)\cdot 3-2\cdot 7\cdot 1-4\cdot 0\cdot(-1)=$$
$$1+24+0-(-21)-14-0=32$$

3. Determina la inversa de la matriz del ejercicio anterior.

Solución:

$$A^{-1}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1&2\\7&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&2\\3&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&-1\\3&7\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}4&7\\7&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&7\\3&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&4\\3&7\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}4&7\\-1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&7\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&4\\0&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}-13&6&3\\53&-22&5\\15&-2&-1\end{pmatrix}$$

4. Determina la inversa de Moore-Penrose de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}$$

Solución:
Observamos que el rango$A = 2 = m < 3 = n$; entonces

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(A^tA)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = (A^tA)^{-1}A^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6. Ejercicios propuestos

1. Sea $A \in M_n(K)$ una matriz estrictamente triangular superior (inferior). Demuestra que $A^n = 0$.

2. Calcula

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2.$$

Deduce de aquí A^n, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in K \text{ cualesquiera.}$$

Solución: $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

3. Sea A una matriz triangular superior (inferior) y regular. Demuestra que A^{-1} es triangular superior (inferior).

4. Calcula el determinante de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 10^{-1} & 1 & 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-1} & 1 & 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-1} & 1 & 10^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución: $\det A = 0{,}9960$, $\det B = -1$

5. Calcula el rango de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Solución: $\operatorname{rango} A = 3$, $\operatorname{rango} B = 2$

6. Calcula las matrices adjuntas de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

7. Calcula las inversas de las matrices del ejercicio anterior.

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3{,}3333 & -2{,}2222 & 0{,}3704 & 0{,}4938 \\ 0 & 3{,}3333 & -2{,}2222 & 0{,}3704 \\ 0 & 0 & 3{,}3333 & -2{,}2222 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}3333 \end{pmatrix}$

8. Calcula la inversa de Moore-Penrose de las matrices siguientes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}2 \\ -2{,}5 & 0 \\ 3{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 10^{-6} & 0{,}5 \\ 6{,}10^{-6} & 0{,}4 \\ 5{,}10^{-6} & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Solución: $A_1^+ = \begin{pmatrix} -0{,}0632 & -0{,}1903 & 0{,}1895 \\ 0{,}8463 & 0{,}2902 & -0{,}0390 \end{pmatrix}$, $A_2^+ = 10^5 \begin{pmatrix} -1{,}4605 & 1{,}0653 & 1{,}0137 \\ 0{,}0000 & -0{,}0000 & -0{,}0000 \end{pmatrix}$.

9. Demuestra que $(A^+)^+ = A$.

10. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demuestra que $A_1^+ = A_2$ y $A_2^+ = A_1$.

1.7. Resolución de ejercicios utilizando MATLAB

1. Para el cálculo del rango de una matriz y del determinante de una matriz cuadrada utilizando MATLAB, basta hacer uso de las instrucciones ***rank*** y ***det***.

Ejemplo 1.7.1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 10^{-1} & 1 & 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-1} & 1 & 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-1} & 1 & 10^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

una de las matrices del ejercicio propuesto 4.

```
>> A=diag([1,1,1,1,1]);
B=diag([0.01,0.01,0.01,0.01],1);
C=diag([0.1,0.1,0.1,0.1],-1);
D=(A+B)+C
D =
     1.0000   0.0100     0        0        0
     0.1000   1.0000   0.0100     0        0
       0      0.1000   1.0000   0.0100     0
       0        0      0.1000   1.0000   0.0100
       0        0        0       0.000   1.0000
>> rank(D)
ans =
    5
>> det(D)
ans =
    0.9960
```

2. Para el cálculo de la matriz inversa, basta hacer uso del comando ***inv*** de MATLAB.

Para evitar problemas numéricos en sistemas muy grandes se recomienda la utilización de la operación ***eye(size(A))/A***.

Ejemplo 1.7.2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

una de las matrices del ejercicio propuesto 7.

```
>> A=[0,0,1,0;1,0,0,0;0,1,0,0;0,0,0,1];
>> inv(A)
ans =
     0   1   0   0
     0   0   1   0
     1   0   0   0
     0   0   0   1
```

En caso de usar el comando eye(size(A))/A obtenemos:

```
>> A=[0,0,1,0;1,0,0,0;0,1,0,0;0,0,0,1];
>> eye(size(A))/A
ans =
     0   1   0   0
     0   0   1   0
     1   0   0   0
     0   0   0   1
```

3. Para el cálculo de la matriz inversa de Moore-Penrose, basta hacer uso del comando ***pinv*** de MATLAB.

Ejemplo 1.7.3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}2 \\ -2{,}5 & 0 \\ 3{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

una de las matrices del ejercicio propuesto 8.

```
>> A= [1,1.2;-2.5,0;3.1,0.4]
>> pinv(A)
A =
      1.0000   1.2000
     -2.5000      0
      3.1000   0.4000
ans =
     -0.0632  -0.1903   0.1895
      0.8463   0.2902  -0.0390
```


2
1
3

→2

Aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

2.1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Subespacios vectoriales

Denotamos por $\mathbb{R}^n$ el conjunto de vectores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. La estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ es la generalización a "dimensión superior" de las propiedades y operaciones habituales con los vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

En $\mathbb{R}^n$, tenemos definida una operación interna, la *suma de vectores*, que se corresponde con la suma de matrices de orden $1 \times n$ y que cumple las propiedades siguientes:

1. $(x+y)+z = x+(y+z)\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$ (propiedad asociativa)

2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x+0 = 0+x = x$ (existencia de elemento neutro)

3. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ existe $-x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x+(-x) = (-x)+x = 0$ (existencia de elemento simétrico)

4. $x+y = y+x\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$ (propiedad conmutativa)

y una operación externa, el *producto por escalares*, que cumple las propiedades siguientes:

5. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x,y \in \mathbb{R}^n$ (propiedad distributiva respecto de la suma de vectores)

6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (propiedad distributiva respecto de la suma de escalares)

7. $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (propiedad asociativa)

8. $1x = x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Algunos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ (aunque no todos) tienen estructura de espacio vectorial. Son los llamados *subespacios vectoriales*.

Definición 2.1.1. Un subconjunto (no vacío) F de $\mathbb{R}^n$ se dice que es un *subespacio vectorial* de $\mathbb{R}^n$ si se cumplen las dos propiedades siguientes:

1. $\forall x, y \in F, x+y \in F$.
2. $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x \in F$.

Ejemplo 2.1.1. (a) Los conjuntos $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n$ son, evidentemente, subespacios vectoriales, que reciben el nombre de subespacios vectoriales triviales.

(b) $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 = 0\}$ es un subespacio vectorial. En efecto. Sean $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ dos vectores cualesquiera de F. Entonces, el vector $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ pertenece también a F:

$$x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) = (x_1 + 2x_2) + (y_1 + 2y_2) = 0 + 0 = 0$$

Por otra parte, si (x_1, x_2, x_3) pertenece a F y λ es un escalar, el vector $\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ pertenece también a F:

$$\lambda x_1 + 2(\lambda x_2) = \lambda(x_1 + 2x_2) = 0$$

2.2. Dependencia lineal y rango de matrices

Definición 2.2.1. Se denomina *combinación lineal de los vectores* $u_1, \ldots, u_m$ *de* $\mathbb{R}^n$ todo vector de la forma $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m$, siendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.2.1. Los siguientes vectores $(2, -3, -1, -1), (-3, -6, 15, -17), (5, 11, -14, -26)$ de $\mathbb{R}^4$ son combinación lineal de los vectores $u_1 = (1, -1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 2, -3, 5)$. En efecto:

$$(2, -3, -1, -1) = 2u_1 - u_2$$

$$(-3, -6, 15, -17) = u_1 + 3u_2 - 4u_3$$

$$(5, 11, -14, 26) = u_2 + 5u_3$$

Definición 2.2.2. Un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ se dice que es *linealmente dependiente* si existe una combinación lineal de estos vectores, con no todos los coeficientes nulos, que es el vector 0:

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0$$

Y, equivalentemente, cuando al menos uno de estos vectores es combinación lineal de los restantes. En caso contrario, decimos que los vectores son *linealmente independientes*.

Ejemplo 2.2.2.
(i) Los vectores $(2,-3,-1,-1),(1,-1,0,0),(0,1,1,1)$ y $(1,2,-3,5)$ de $\mathbb{R}^4$ son linealmente dependientes, ya que

$$(2,-3,-1,-1)-2(1,-1,0,0)+(0,1,1,1)+0(1,2,-3,5)=0$$

(ii) Los vectores $(1,1,1),(1,2,0),(1,0,0)$ de R^3 son linealmente independientes. En efecto. Supongamos que existe una combinación lineal de estos vectores que es el vector cero:

$$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,2,0)+\lambda_3(1,0,0)=(0,0,0)$$

Entonces, los coeficientes de la combinación lineal anterior han de cumplir:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0, \quad \lambda_1+2\lambda_2=0, \quad \lambda_1=0$$

lo que solo es posible si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

Si tenemos un conjunto finito de vectores de $\mathbb{R}^n$, $\{u_1,\dots,u_m\}$, para saber si estos vectores son linealmente independientes o no, basta con calcular el rango de la matriz A cuyas columnas coinciden con los vectores columna formados por las coordenadas de los vectores $u_1,\dots,u_m$.

Proposición 2.2.1. Con las notaciones anteriores, si el rango de la matriz A es igual a m, entonces los vectores dados son linealmente independientes. Si el rango de la matriz A es menor que m, estos vectores son linealmente dependientes.

Demostración. Supongamos que existe una combinación lineal de los vectores dados, que es el vector cero:

$$\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_mu_m=0$$

Basta con observar que la igualdad anterior es equivalente al siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=0$$

Como es bien sabido, la existencia de soluciones no triviales del sistema anterior equivale a que el rango de la matriz A sea estrictamente menor que m. ■

Ejemplo 2.2.3. En el caso de las familias de vectores del ejemplo anterior, habría bastado con calcular los rangos de las matrices correspondientes a cada caso:

$$\text{(i) rg}\begin{pmatrix}2&1&0&1\\-3&-1&1&2\\-1&0&1&-3\\-1&0&1&5\end{pmatrix}=3 \text{ (ii) rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}=3$$

2.3. Bases. Matriz de cambio de base

Sea F un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.3.1. Se dice que un conjunto de vectores $\{u_1,\ldots,u_m\}$ es un *sistema de generadores* de F cuando todo vector de F puede escribirse como combinación lineal de los vectores $u_1,\ldots,u_m$ (de forma no necesariamente única).

Observación 1. Es obvio que todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ admite un sistema de generadores.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos los conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^5$ siguientes:

(a) $\{(1,1,1,0,0),(2,1,3,0,0),(-1,3,1,0,0)\}$

(b) $\{(1,1,1,0,0),(2,1,3,0,0),(1,0,2,0,0)\}$

Como el lector puede comprobar fácilmente, el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^5$

$$F=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\,|x_4=x_5=0\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$, del cual el conjunto (a) es un sistema de generadores, pero no así el conjunto (b). Esto puede probarse del siguiente modo.

Un vector cualquiera de F es de la forma $(x_1,x_2,x_3,0,0)$ para unos ciertos escalares x_1,x_2,x_3 de $\mathbb{R}$. Podemos encontrar coeficientes $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ de $\mathbb{R}$, de modo que

$$(x_1,x_2,x_3,0,0)=\lambda_1(1,1,1,0,0)+\lambda_2(2,1,3,0,0)+\lambda_3(-1,3,1,0,0) \qquad (*)$$

En efecto, basta con tomar

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{8}{6}x_1+\frac{5}{6}x_2-\frac{7}{6}x_3\\ \lambda_2&=-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\\ \lambda_3&=-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{6}x_2+\frac{1}{6}x_3\end{aligned}$$

Estos valores se obtienen a partir de la resolución del sistema asociado a la igualdad $(*)$.

En cambio, si planteamos un sistema análogo, ahora con la igualdad

$$(x_1,x_2,x_3,0,0)=\lambda_1(1,1,1,0,0)+\lambda_2(2,1,3,0,0)+\lambda_3(1,0,2,0,0)$$

observamos que este sistema no tiene solución, por lo que deducimos que el conjunto de vectores (b) no es un sistema de generadores de F.

Para este último caso, habría bastado con encontrar un vector concreto que no fuera posible escribir como combinación lineal de los tres vectores dados; por ejemplo, podríamos considerar el vector $(0,0,1,0,0)$.

Definición 2.3.2. Se denomina *base* de F todo conjunto de vectores que sean linealmente independientes y formen un sistema de generadores de F.

Observación 2. Siempre es posible, para todo subespacio vectorial, encontrar una base. Basta con suprimir, de un sistema de generadores del subespacio, todos aquellos vectores que sean combinación lineal de los anteriores.

A continuación, se enuncia el teorema de Steinitz, que tiene una importancia especial por las múltiples consecuencias que se derivan de él.

Teorema 2.3.1 (Steinitz)**.** Sea $\{u_1,\dots,u_m\}$ una base de un subespacio F de $\mathbb{R}^n$ y sean $v_1,\dots,v_r$ r vectores de F linealmente independientes. Entonces, se pueden sustituir r vectores de la base $\{u_1,\dots,u_m\}$ de F por $v_1,\dots,v_r$ y, de este modo, se obtiene una nueva base de F.

Ejemplo 2.3.2. Sea $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y sean $(1,2,-2,1),(2,1,-1,-2)$ una colección de vectores independientes de $\mathbb{R}^4$. Entonces,

$$\{(1,2,-2,1),(2,1,-1,-2),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

es una nueva base de $\mathbb{R}^4$.

Hemos cambiado los dos primeros vectores de la base por los nuevos vectores y hemos obtenido una nueva base. Habríamos podido cambiar los dos últimos y también obtendríamos una nueva base.

$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,2,-2,1),(2,1,-1,-2)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^4$. Sin embargo, no podemos cambiar el segundo y el tercero por los nuevos, pues en este caso los vectores son dependientes.

$$\{(1,0,0,0),(1,2,-2,1),(2,1,-1,-2),(0,0,0,1)\}$$

es una familia de vectores dependientes.

Como corolario del teorema de Steinitz, se obtiene, entre otros, el resultado siguiente, cuya demostración no se incluye, pero que el lector interesado puede encontrar en la mayor parte de textos de álgebra lineal.

Proposición 2.3.1. Toda base de F consta del mismo número de vectores.

Este resultado da sentido a la definición siguiente.

Definición 2.3.3. Se denomina *dimensión de* F el número de vectores de que consta un conjunto cualquiera de vectores que es base de F.

Observación 3. Es fácil comprobar que el conjunto

$$\{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\}$$

es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$ y que los vectores que lo forman son linealmente independientes. Así pues, estos vectores forman una base de $\mathbb{R}^n$. Esta base recibe el nombre de *base natural* de $\mathbb{R}^n$ (también base canónica o base ordinaria).

En particular, deducimos que la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es igual a n.

Algunos de los enunciados de la siguiente observación son especialmente útiles a la hora de trabajar con bases de subespacios vectoriales.

Observación 4.

(1) Un conjunto de vectores $u = \{u_1,\ldots,u_n\}$ es una *base* del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ si estos vectores forman un conjunto linealmente independiente.

(2) Un conjunto de vectores $u = \{u_1,\ldots,u_n\}$ es una *base* del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ si estos vectores forman un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$.

(3) Más en general: si conocemos la dimensión del subespacio vectorial F, que denotamos por m, un conjunto de m vectores linealmente independientes de F es una base de F. También un sistema de generadores de F formado por m vectores constituye una base de F.

(4) La dimensión de F coincide con el número máximo de vectores linealmente independientes de F que podemos seleccionar.

(5) La dimensión de F coincide con el mínimo número de vectores que ha de contener cualquier sistema de generadores de F.

(6) La dimensión de todo subespacio vectorial F de $\mathbb{R}^n$ es menor o igual a n, e igual a n solo si F coincide con todo $\mathbb{R}^n$. Y si F, G son dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ tales que F está contenido en G, entonces la dimensión de F es menor o igual a la dimensión de G, y sus dimensiones respectivas coinciden solamente si coinciden ambos subespacios.

Convendremos en considerar que la dimensión del subespacio vectorial trivial $\{0\}$ es igual a cero.

Si el conjunto de vectores $u = \{u_1,\ldots,u_m\}$ es una base del subespacio vectorial F, todo vector de F puede escribirse, de forma única, como combinación lineal de estos vectores (en el mismo orden en que han sido dados).

Definición 2.3.4. Los coeficientes de esta combinación lineal se denominan *coordenadas del vector* en la base dada.

Ejemplo 2.3.3. Consideremos la base de $\mathbb{R}^4$ dada por los vectores

$$u_1 = (1,1,1,0),\ u_2 = (1,0,-1,-1),\ u_3 = (0,1,0,1),\ u_4 = (0,0,0,1)$$

Las coordenadas del vector $v = (0,2,2,3)$ en esta base son $(1,-1,1,1)$, puesto que

$$v = 1\cdot(1,1,1,0) + (-1)\cdot(1,0,-1,-1) + 1\cdot(0,1,0,1) + 1\cdot(0,0,0,1)$$

Observemos que, si cambiamos el orden de los vectores de la base considerada, obtenemos una nueva base (son generadores y linealmente independientes) y las coordenadas de un vector cualquiera cambian. Así, los vectores

$$u_3 = (0,1,0,1), u_1 = (1,1,1,0), u_2 = (1,0,-1,-1), u_4 = (0,0,0,1)$$

forman también una base de $\mathbb{R}^4$ y las coordenadas del vector $v = (0,2,2,3)$ en esta nueva base son $(1,1,-1,1)$, puesto que

$$v = 1\cdot(0,1,0,1) + 1\cdot(1,1,1,0) + (-1)\cdot(1,0,-1,-1) + 1\cdot(0,0,0,1)$$

Si $v = (v_1,\ldots,v_n)$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $y_1,\ldots,y_n$ son las coordenadas de x en la base v, es decir,

$$x = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$$

(sabemos ya que estas coordenadas están unívocamente determinadas), entonces la relación entre las coordenadas de x en la base u y sus coordenadas en esta base viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

siendo S la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base v en la base u.

Definición 2.3.5. Esta matriz se llama *matriz del cambio de base* (de la base v a la base u).

Las matrices de cambio de base son siempre matrices inversibles.

Ejemplo 2.3.4. Consideremos las bases de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{l} u = u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1) \\ v = v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0) \end{array}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} v_1 &= 1\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 1\cdot u_3 \\ v_2 &= 1\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 0\cdot u_3 \\ v_3 &= 1\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 0\cdot u_3 \end{aligned}$$

la matriz del cambio de base, de la base v a la base u, es

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado el vector x cuyas coordenadas en la base v son $(2,1,3)$, sus coordenadas en la base u son

$$S\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lo que se comprueba fácilmente, pues $x = 6 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3$.

Definición 2.3.6. Una matriz de cambio de base, obtenida por reordenación de los vectores de la base inicial, recibe el nombre de *matriz permutación*.

Ejemplo 2.3.5. Así, si consideramos las bases de $\mathbb{R}^4$ en el ejemplo (2.3.2), la matriz del cambio de base, de la base $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ respecto a la base $\{u_3,u_1,u_2,u_4\}$, es la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dados dos subespacios vectoriales F y G de $\mathbb{R}^n$, su intersección (es decir, el conjunto formado por los vectores que pertenecen a ambos conjuntos) es, a su vez, un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. En cambio, la unión de estos dos conjuntos no es un subespacio vectorial.

Consideremos, por ejemplo, los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ (es muy fácil comprobar que, en efecto, se trata de subespacios):

$$F = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = 0$$
$$G = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 = 0$$

El vector $(1,1)$ es suma de los vectores $(1,0) \in F$ y $(0,1) \in G$ y, sin embargo, no pertenece a $F \cup G$.

Esto lleva a la introducción de un subespacio vectorial que es importante en muchos ámbitos, el denominado *subespacio vectorial suma* de los subespacios F y G, que viene definido del modo siguiente:

$$F + G = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = x_F + x_G \text{ para todos los vectores } x_F \in F \text{ y } x_G \in G\}$$

Este concepto puede generalizarse al caso de considerar un número arbitrario de subespacios vectoriales (incluso infinito, aunque aquí no lo consideraremos).

Definición 2.3.7. El conjunto

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r \text{ para todos los} \\ \text{vectores } x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2, \ldots, x_r \in F_r \end{array} \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, denominado *subespacio vectorial suma* de los subespacios $F_1, F_2, \ldots, F_r$.

Cuando existe una única posibilidad de escribir un vector x de $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ de la forma $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$, con $x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2, \ldots, x_r \in F_r$, se dice que la suma $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ es *directa*.

En el caso particular en que solo tenemos dos subespacios vectoriales, se tiene la siguiente caracterización de suma directa:

$$F_1 + F_2 \text{ es directa si y solo si } F_1 \cap F_2 = \{0\}$$

Ejemplo 2.3.6. Consideremos los subespacios vectoriales

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\} \\ F_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x-y+z=0\} \end{aligned}$$

La suma de los subespacios F_1, F_2 no es directa, ya que

$$\begin{aligned} F_1 \cap F_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z = x-y+z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+z = y = 0\} = [(1,0,-1)] \end{aligned}$$

Consideremos ahora los subespacios vectoriales

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\} \\ G_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x-y = x-z = 0\} \end{aligned}$$

La suma de los subespacios G_1, G_2 es directa, ya que

$$\begin{aligned} G_1 \cap G_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z = x-y = x-z = 0\} \\ &= \{(0,0,0)\} \end{aligned}$$

2.4. Aplicación lineal y matriz asociada

Definición 2.4.1. Una *aplicación* entre dos conjuntos A y B es una asociación de elementos del conjunto B a los elementos del conjunto A, de modo que a todo elemento del conjunto A le corresponda un solo elemento del conjunto B, que denominamos *imagen* del elemento dado (también se dice que el elemento de A que se corresponde con un elemento determinado de B es su *antiimagen*).

Cuando no hay dos elementos distintos de A con la misma imagen, se dice que la aplicación es *inyectiva*. Cuando todo elemento de B tiene alguna antiimagen, se dice que la aplicación es *exhaustiva*.

Cuando se cumplen ambas condiciones, inyectiva y exhaustiva (es decir, todo elemento de B tiene una única antiimagen), se dice que la aplicación es *biyectiva*. En este caso, tiene sentido considerar la aplicación inversa de la dada como aquella aplicación del conjunto B al conjunto A que a cada elemento de B le hace corresponder su antiimagen.

Pasamos ahora a introducir el concepto de aplicación lineal, de gran importancia en álgebra lineal.

Definición 2.4.2. Una *aplicación lineal* de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es una aplicación f entre estos dos conjuntos, de modo que se cumplen las dos propiedades siguientes:

1. $f(x+y) = f(x)+f(y)\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

En particular, para toda aplicación lineal se cumple que $f(0) = 0$.

Ejemplo 2.4.1. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (x_1,x_2,x_3) &\longrightarrow (x_1-x_2,x_2,x_1+x_2,x_2,x_3) \end{aligned}$$

Dejamos al lector la comprobación de que esta aplicación es lineal, así como de que es inyectiva pero no exhaustiva.

En cambio, la aplicación

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (x_1,x_2,x_3) &\longrightarrow (x_1-x_2+1,x_2,x_1+x_2-1,x_2,x_3) \end{aligned}$$

no es lineal. Basta con observar que $g(0,0,0) = (1,0,-1,0,0)$.

Proposición 2.4.1. Sea A una matriz con m filas y n columnas. La aplicación

$$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

que viene definida del siguiente modo: $f(x)$ es el vector de $\mathbb{R}^m$ cuyas coordenadas, expresadas en una matriz columna, coinciden con AX, siendo X la matriz de orden $1\times n$ cuyos elementos son las coordenadas de x, es una aplicación lineal.

La demostración es consecuencia inmediata de las propiedades de las operaciones con matrices.

El recíproco viene dado por el siguiente resultado.

Proposición 2.4.2. Si f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, la aplicación lineal que se obtiene a partir de la matriz A cuyas columnas son las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base natural de $\mathbb{R}^n$ es precisamente f. Indicamos por $M(f)$ esta matriz.

La demostración se omite porque se trata de una simple comprobación.

Ejemplo 2.4.2. En las bases naturales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^5$, la matriz de la aplicación f del ejemplo (2.4.1) es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una generalización del resultado anterior nos la da la proposición siguiente.

Definición 2.4.3. Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y $\{v_1, \dots, v_m\}$, una base cualquiera de $\mathbb{R}^m$; la matriz B cuyas columnas están constituidas por las coordenadas, en la base $\{v_1, \dots, v_m\}$, de las imágenes por la aplicación lineal f de los vectores $u_1, \dots, u_m$ recibe el nombre de *matriz de la aplicación lineal f en las bases $\{u_1, \dots, u_n\}$ y $\{v_1, \dots, v_m\}$*. Habitualmente, se denota esta matriz de la forma siguiente: $B = M_{u,v}(f)$, donde u y v representan las bases $\{u_1, \dots, u_n\}$ y $\{v_1, \dots, v_m\}$, respectivamente. En el caso de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$, podemos considerar la misma base $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ en el espacio de salida que en el espacio de llegada; en este caso, la matriz de la aplicación en esta base se denota simplemente por $M_u(f)$.

El resultado siguiente es de gran importancia, puesto que permite obtener la relación existente entre las matrices de una misma aplicación lineal en distintas bases.

Proposición 2.4.3. Con las notaciones de los resultados precedentes,

$$B = T^{-1}AS$$

donde S representa la matriz del cambio de base con respecto a la base $\{u_1, \dots, u_n\}$ y T representa la matriz del cambio de base con respecto a la base $\{v_1, \dots, v_m\}$.

En el caso de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$, si consideramos las mismas bases en el espacio de salida y en el espacio de llegada, la relación anterior es de la forma:

$$B = S^{-1}AS$$

Ejemplo 2.4.3. Consideremos la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^5$ del ejemplo (2.4.1), que viene definida por $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2,x_2,x_1+x_2,x_2,x_3)$. En el ejemplo (2.4.2), se ha visto que la matriz de esta aplicación, en las bases naturales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^5$, es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora las bases $u=\{(1,0,1),(1,2,1),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $v=\{(1,0,-1,1,0),(0,1,1,1,0),(1,-1,1,0,0),(0,0,1,0,1),(0,0,1,1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^5$. En estas bases, la matriz de la aplicación f es

$$B=T^{-1}AS=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & 6 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Observación. Una consecuencia especialmente importante de este resultado es que los rangos de las matrices de una misma aplicación lineal han de coincidir necesariamente.

A continuación, definimos dos subespacios vectoriales íntimamente asociados a una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$.

Definición 2.4.4. Se denomina *núcleo de f* el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

$$\operatorname{Ker} f=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,f(x)=0\}$$

La nomenclatura de este subespacio corresponde al término alemán *Kern* ("núcleo").

Ejemplo 2.4.4. En el caso de la aplicación lineal del ejemplo (2.4.1),

$$\operatorname{Ker} f=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,f(x)=0\}=\{(0,0,0)\}$$

Este ejemplo ilustra la caracterización siguiente de las aplicaciones lineales inyectivas.

Una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ es inyectiva si y solo si $\operatorname{Ker} f=\{0\}$.

Definición 2.4.5. Se denomina *imagen de f* el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$

$$\operatorname{Im} f=\{y\in\mathbb{R}^m\,|\,\text{existe un vector } x\in\mathbb{R}^n \text{ con } f(x)=y\}$$

Ejemplo 2.4.5. En el caso de la aplicación lineal del ejemplo (2.4.1),

$$\operatorname{Im} f=\{(x_1-x_2,x_2,x_1+x_2,x_2,x_3)\,|\,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$$

Es fácil comprobar que los vectores $\{(1,0,1,0,0),(-1,1,1,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ forman una base del subespacio vectorial $\operatorname{Im} f$. Así pues, su dimensión es 3.

De hecho, se tiene la siguiente caracterización de las aplicaciones exhaustivas:
una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es exhaustiva si y solo si $\dim \operatorname{Im} f = m$.

El resultado siguiente nos da la relación existente, de gran utilidad, entre las dimensiones de los dos subespacios vectoriales anteriores.

Proposición 2.4.4. Dada una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, se cumple la relación siguiente:

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$$

Finalmente, damos los nombres que suelen recibir las aplicaciones lineales según sus propiedades.

Morfismo = aplicación lineal
Endomorfismo = aplicación lineal en el caso particular en que $n = m$
Monomorfismo = aplicación lineal inyectiva
Epimorfismo = aplicación lineal exhaustiva
Isomorfismo (automorfismo) = aplicación lineal biyectiva

Ejemplo 2.4.6. La aplicación lineal considerada en el ejemplo (2.4.1) es un monomorfismo, pero no es un epimorfismo (por tanto, tampoco podría ser un isomorfismo). Las observaciones de los ejemplos (2.4.4) y (2.4.5) indican que solo las aplicaciones lineales $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pueden ser isomorfismos.

Observación. Dada una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, si u y v son dos bases cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ y de $\mathbb{R}^m$, respectivamente, entonces $\operatorname{rango}(f) = \operatorname{rango} M_{u,v}(f)$. Este escalar recibe el nombre de rango de f y coincide con la dimensión del subespacio vectorial $\operatorname{Im} f$ de $\mathbb{R}^m$.

2.5. Determinante de un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$

Observamos que las matrices asociadas a un endomorfismo son siempre matrices cuadradas, en cualesquiera bases que se considere, por lo que tiene sentido calcular su determinante. Además, si B es la matriz de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^n$ en una base u formada por los vectores $u_1,\dots,u_n$ (consideramos la misma base en el espacio de salida que en el de llegada), se cumple que

$$B = S^{-1}AS$$

si hemos indicado por A la matriz, en la base natural de $\mathbb{R}^n$, del mismo endomorfismo.

Entonces, puede comprobarse fácilmente el resultado siguiente.

Proposición 2.5.1. El determinante de la matriz de f no depende de la base elegida.

Demostración. Puesto que $B = S^{-1}AS$, se cumple que

$$\det B = \det S^{-1} \cdot \det A \cdot \det S = \frac{1}{\det S^{-1}} \cdot \det A \cdot \det S = \det A$$

■

Esto da sentido a la definición siguiente.

Definición 2.5.1. El determinante del endomorfismo f, que denotamos por $\det f$, es igual a $\det A$, con las notaciones anteriores.

Ejemplo 2.5.1. Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\longrightarrow (x_1 + x_2, x_1 - x_2) \end{aligned}$$

La matriz de esta aplicación lineal, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\det f = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

Además, este determinante permite caracterizar los automorfismos.

Proposición 2.5.2. f es un automorfismo si y solo si $det f \neq 0$.

Para finalizar este apartado, podemos relacionar el determinante de un automorfismo y el de su inverso, que es también un automorfismo (la comprobación de esta afirmación se deja como ejercicio para el lector).

Proposición 2.5.3. Sea f un automorfismo de $\mathbb{R}^n$. Indicamos por f^{-1} su aplicación inversa. Entonces, se tiene que

$$\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}$$

2.6. Subespacios invariantes por un endomorfismo

Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y sea F un subespacio vectorial.

Definición 2.6.1. Se dice que el subespacio F es *invariante* por el endomorfismo f cuando la imagen por f de todos los vectores de F pertenece también a F.

Ejemplo 2.6.1. Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3) &= (2x_1+x_2, x_1+2x_2, x_3) \end{aligned}$$

El subespacio vectorial

$$F = \{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1-x_2=x_3=0\}$$

es invariante por el endormorfismo f. En efecto. Dado un vector cualquiera del subespacio vectorial F, que es de la forma $(a,a,0)$ para una cierta $a \in \mathbb{R}$, su imagen por el endomorfismo f es $f(a,a,0) = (3a,3a,0) = 3(a,a,0)$, que, obviamente, pertenece también a F.

El resultado siguiente nos proporciona una forma fácil de comprobar si un subespacio vectorial es, o no, invariante por un endomorfismo.

Proposición 2.6.1. Sea $\{u_1,\ldots,u_n\}$ un sistema de generadores de F. Entonces, F es invariante por f si y solo si las imágenes de todos los vectores del conjunto $\{u_1,\ldots,u_n\}$ pertenecen a F.

Observación. En particular, tenemos que, si $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es una base de F, F es invariante por f si y solo si las imágenes de todos los vectores del conjunto $\{u_1,\ldots,u_n\}$ pertenecen a F.

Observemos que en el ejemplo (2.6.1) habría bastado con considerar una base del subespacio vectorial F, por ejemplo, $\{(1,1,0)\}$, y haber comprobado que $f(1,1,0) = (3,3,0) = 3(1,1,0)$ pertenece a F.

Como forma práctica de averiguar si un subespacio vectorial es invariante por un endomorfismo, o no, tenemos el resultado siguiente.

Proposición 2.6.2. Sea $\{u_1,\ldots,u_n\}$ un sistema de generadores de F. Denominamos A la matriz con vectores columna las coordenadas de los vectores de este sistema de generadores y B la matriz con vectores columna las coordenadas de los vectores anteriores y también de sus imágenes por f. Entonces, F es invariante por f si y solo si solo si

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$$

Ejemplo 2.6.2. Consideremos el caso del endomorfismo del ejemplo (2.6.1). Ya hemos indicado que $\{(1,1,0)\}$ es una base de F y que $f(1,1,0) = (3,3,0)$. Bastaría, en este caso, con comprobar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tienen el mismo rango (en este caso, ambas tienen rango igual a 1).

2.7. Ejercicios resueltos

1. Demuestra que el subconjunto de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$$

es un subespacio vectorial. Proporciona una base y su dimensión.

Solución:

Sean $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F$; entonces, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$ es tal que $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0 + 0 = 0$ y $(x_3 + y_3) + (x_4 + y_4) = (x_3 + x_4) + (y_3 + y_4) = 0 + 0 = 0$, por lo que $x + y \in F$.
Sean ahora $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$; entonces, $\lambda x = (\lambda x_1 . \lambda x_2, \lambda x_3 . \lambda x_4)$ es tal que $\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + \lambda x_2) = \lambda \cdot 0 = 0$ y $\lambda x_3 + \lambda x_4 = \lambda(x_3 + \lambda x_4) = \lambda \cdot 0 = 0$, por lo que $\lambda x \in F$.

Puesto que $\forall x, y \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene $x + y \in F, \lambda x \in F$. Se concluye que F es un subespacio.

Busquemos una base.

$\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F$ es $x_2 = -x_1$ y $x_4 = -x_3$, por lo que $x = (x_1, -x_1, x_3, -x_3) = x_1(1, -1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, -1)$.
Observamos que $(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1) \in F$ generan F y son independientes, luego determinan una base.
Puesto que la base obtenida tiene dos elementos, la dimensión del subespacio es 2.

2. Estudia la dependencia o independencia lineal de las familias de vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes:
(a) $\{(1, -1, 2, 2), (-2, -1, 3, 4), (7, -1, 0, -2)\}$
(b) $\{(1, 1, -2, 3), (2, -1, 0, 4), (5, -1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\}$
(c) $\{(0, -1, 3, 2), (2, 7, -3, 4), (5, 1, 2, -2), (8, 9, 3, 4), (6, 3, 2, 4)\}$

Solución:

Sabemos que, en una colección de vectores $\{u_1, \ldots, u_4\}$, estos son independientes si y solo si

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$$

a) $\lambda_1(1, -1, 2, 2) + \lambda_2(-2, -1, 3, 4) + \lambda_3(7, -1, 0, -2) = (0, 0, 0, 0)$.

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda_1 - 2\lambda_2 + 7\lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \lambda_1 & = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 & = 2\lambda_3 \end{array}\right\}$$

Luego, los tres vectores son dependientes. Concretamente, $(7 - 1, 0, -) = 3(1, -1, 2, 2) - 2(-2, -1, 3, 4)$.

b) $\lambda_1(1,1,-2,3)+\lambda_2(2,-1,0,4)+\lambda_3(5,-1,0,0)+\lambda_4(1,0,1,0)=(0,0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda_1+2\lambda_2+5\lambda_3+\lambda_4 & =0 \\ \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 & =0 \\ -2\lambda_1+\lambda_4 & =0 \\ 3\lambda_1+4\lambda_2 & =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \lambda_1 & =0 \\ \lambda_2 & =0 \\ \lambda_3 & =0 \\ \lambda_4 & =0 \end{array}\right\}$$

Luego, los cuatro vectores son linealmente independientes.

c) Como tenemos cinco vectores en un espacio de dimensión cuatro, podemos asegurar que al menos uno de ellos es dependiente de los cuatro restantes.

3. En $\mathbb{R}^5$, consideremos los subespacios vectoriales seguientes:

$$\begin{array}{ll} F & =[(1,0,2,1,3)] \\ G & =[(1,0,0,1,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,1,0)] \end{array}$$

Encuentra $F+G$. ¿Es directa la suma?

Solución:

La reunión de bases de F y G proporcionan un sistema de generadores de $F+G$ que si, además, son independientes pasarán a ser una base, por lo que, la suma será directa.

Estudiemos pues la independencia

$$\lambda_1(1,0,2,1,3)+\lambda_2(1,0,0,1,0)+\lambda_3(0,1,0,0,0)+\lambda_4(0,0,1,1,0)=(0,0,0,0,0)$$

Resolviendo el sistema, tenemos $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. Por tanto, los vectores son independientes.

Tenemos que una base de $F+G$ es

$$\{(1,0,2,1,3),(1,0,0,1,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,1,0)\}$$

y la suma es directa.

4. Discute si las aplicaciones siguientes son o no lineales:

a) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (3x_1+5x_2, x_2+x_3, x_2-5x_3, x_1+x_2+x_3)$.

b) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_1+a, bx_2)$ con $a,b\in\mathbb{R}$.

Solución:

a) Sean (x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3),
$(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$
$\lambda(x_1,x_2,x_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$

$$\begin{aligned}
&f((x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)=\\
&(3(x_1+y_1)+5(x_2+y_2),(x_2+y_2)+(x_3+y_3),(x_2+y_2)-5(x_3+y_3),\\
&\qquad\qquad(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3))=\\
&(3x_1+5x_2,x_2+x_3,x_2-5x_3,x_1+x_2+x_3)+(3y_1+5y_2,y_2+y_3,y_2-5y_3,\\
&\qquad\qquad y_1+y_2+y_3)=\\
&f(x_1,x_2,x_3)+f(y_1,y_2,y_3),\\
&f(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)=\\
&(3\lambda x_1+5\lambda x_2,\lambda x_2+\lambda x_3,\lambda x_2-5\lambda x_3,\lambda x_1+\lambda x_2+\lambda x_3)=\\
&\lambda(3x_1+5x_2,x_2+x_3,x_2-5x_3,x_1+x_2+x_3)=\\
&\lambda f(x_1,x_2,x_3).
\end{aligned}$$

b) Al igual que en el apartado a

$$\begin{aligned}
&f(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)=\\
&((x_1+y_1)+a,b(x_2+y_2))=(x_1+a,bx_2)+(y_1+a,by_2)-(a,0)=\\
&f(x_1,x_2,x_3)+f(y_1,y_2,y_3)-(a,0).
\end{aligned}$$

Luego, la primera condición se verifica si y solo si $a=0$.

Impongamos $a=0$,

$$\begin{aligned}
&f(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)=(\lambda x_1,b\lambda x_2)=\\
&\lambda(x_1,bx_2).
\end{aligned}$$

Luego, la aplicación es lineal para $a=0$ y para todo b.

5. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Ker} f=[(2,-1,0),(2,0,1)],\quad f(1,0,0)=(2,0,-1).$$

Determina la matriz de f en la base natural de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Puesto que $(2,-1,0),(2,0,1)\in\operatorname{Ker} f$, se tiene que
$f(0,1,0)=2f(1,0,0)$, $f(0,0,1)=-2f(1,0,0)$,
por lo que la matriz de la aplicación es

$$A=\begin{pmatrix}2&4&-4\\0&0&0\\-1&-2&2\end{pmatrix}.$$

6. Calcula el determinante del endomorfismo siguiente.

$$\begin{aligned}
f:\mathbb{R}^4&\longrightarrow\mathbb{R}^4\\
(x_1,x_2,x_3,x_4)&\longrightarrow(x_1+x_2-x_3,x_1-x_2+x_3,x_1-x_4,x_3+x_4)
\end{aligned}$$

Solución: Escribamos la matriz de la aplicación en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Por tanto, $\det f = -2$.

7. Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ tal que $f(e_1) = e_1 + e_2$, $e_1 - e_2 \in \operatorname{Ker} f$. Demuestra que el subespacio vectorial $F = [e_1, e_2]$ es invariante por f y proporciona la matriz de la aplicación lineal restricción $f_{|F}$ de F en F, en la base (e_1, e_2) de F.

Solución:

Puesto que $e_1 - e_2 \in \operatorname{Ker} f$, tenemos que $f(e_2) = f(e_1)$ y, puesto que $f(e_1) = e_1 + e_2$, tenemos que $f(e_1), f(e_2) \in [e_1, e_2]$ y el subespacio es invariante.

La matriz de la aplicación restricción es

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.8. Ejercicios propuestos

1. Considera el subconjunto de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

¿Es F un subespacio vectorial? Justifica la respuesta. En caso afirmativo, halla una base y deduce cuál es su dimensión.

Solución: $\dim F = 3$; base de F: $\{(1,0,0,0), (0,1,-1,0), (0,1,0,-1)\}$

2. Estudia la dependencia o independencia lineal de la familia de vectores de $\mathbb{R}^4$ siguiente:

$$\{(1,1,2,2), (2,1,3,4), (-1,1,0,-2)\}$$

Dar la dimensión del subespacio que engendran, así como una base de este subespacio.

Solución: $(-1,1,0,-2) = 3(1,1,2,2) - 2(2,1,3,4)$, $\dim F = 2$, una base es $\{(1,1,2,2),(2,1,3,4)\}$.

3. Halla el rango de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 0 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: $\operatorname{rango} A = 3$, $\operatorname{rango} B = 2$.

4. Determina si es posible que las matrices del ejercicio anterior sean las matrices de una misma aplicación lineal, en distintas bases.

Solución: No.

5. En $\mathbb{R}^5$, se consideran los subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} F &= [(1,0,2,1,3)] \\ G &= [(1,0,0,1,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,1,0)] \\ H &= [(1,0,2,1,0),(1,0,1,0,1)] \end{aligned}$$

Halla $F+G$, $F+H$, $G+H$ y $F+G+H$.

Solución:

$F+G = [(1,0,2,1,3),(1,0,0,1,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,1,0)]$,
$F+H = [(1,0,2,1,3),(1,0,2,1,0),(1,0,1,0,1)]$,
$G+H = [(1,0,0,1,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,1,0),(1,0,2,1,0),(1,0,1,0,1)] = \mathbb{R}^5$,
$F+G+H = G+H = \mathbb{R}^5$.

6. Considera la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (a,b,c,d) &\longrightarrow (a-b, a-d, b-c, b-d, c-d) \end{aligned}$$

Determina la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^5$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Determina la matriz de la aplicación lineal del ejercicio anterior en las bases $\{(1,1,2,3),(2,1,0,0),(0,0,1,1,),(1,0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $\{(1,1,0,0,0),(1,-1,0,0,0),(0,0,1,1,1),(0,0,0,1,2),(0,0,0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^5$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que viene determinado por $f(1,0,0)=(2,3,1)$, $f(1,1,0)=(2,2,-3)$ y $f(1,1,1)=(4,1,2)$. Halla la matriz de este endomofismo en la base natural de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

9. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2+2x_3,x_1+3x_2-x_3,2x_1+x_2+x_3)$$

Calcula rango f y $\det f$.

Solución: rango $f=2$,$\det f=0$.

10. Considerando el endomorfismo definido en el ejercicio anterior, prueba que el subespacio vectorial $F=[(1,0,1),(1,-1,0)]$ es invariante por f.

Solución:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.9. Resolución de ejercicios utilizando MATLAB

1. Halla una base de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ descrito mediante un sistema homogéneo de ecuaciones supone resolver dicho sistema; para ello, basta escribir la matriz del sistema y utilizar el comando ***rref*** de MATLAB.

Ejemplo 2.9.1. Halla una base de $F = \{(x,y,z) \mid x+y-z=0, 4x-2y+7z=0\}$
Usamos "format rational" para obtener las soluciones en forma de fracción.

```
format rational

>> A=[1,1,-1;4,-2,7]
>> rref(A)
A =
  1   1   -1
  4  -2    7
ans =
      1   0    5/6
      0   1  -11/6
```

lo cual quiere decir que son soluciones todas las ternas de números reales de la forma

$$\begin{aligned} x &= -\frac{5}{6}z \\ y &= \frac{11}{6}z \end{aligned}$$

Por tanto, una base es $[(-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}, 1)]$ y $\dim F = 1$.

2. Para obtener el núcleo de una aplicación lineal, podemos utilizar el comando ***rref(A)*** y tenemos una descripción del núcleo como conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, o utilizar el comando ***null(A)***, en cuyo caso obtenemos una base del subespacio.

Ejemplo 2.9.2. Obtener el núcleo de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es la correspondiente a una del ejercicio propuesto 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

```
>> A=[1,0,2;1,1,3;2,0,4];
>> null(A)
ans =
       0.8165
       0.4082
      -0.4082
```

El núcleo es, pues, el subespacio generado por $v = (0{,}8165, 0{,}4082, -0{,}4082)$.

3. Para obtener la matriz de una aplicación lineal en bases distintas a las canónicas, utilizamos el producto de matrices y el comando ***inv(A)***.

Ejemplo 2.9.3. Resolver el ejercicio propuesto 7.

```
>> A=[1,-1,0,0;1,0,0,-1;0,1,-1,0;0,1,0,-1;0,0,1,-1]
>> P=[1,2,0,1;1,1,0,0;2,0,1,0;3,0,1,1]
>> Q=[1,1,0,0,0;1,-1,0,0,0;0,0,1,0,0;0,0,1,1,1;0,0,1,2,1]
>> D=inv(Q)*A*P
D =
 -1.0000   1.5000  -0.5000   0.5000
  1.0000  -0.5000   0.5000   0.5000
 -1.0000   1.0000  -1.0000        0
  1.0000  -1.0000   1.0000        0
 -2.0000   1.0000  -1.0000  -1.0000
```

→3

Propiedades espectrales

3.1. Polinomio característico de una matriz

El problema espectral consiste, dada una matriz cuadrada A real o compleja, de orden n, en encontrar aquellos valores $\lambda \in \mathbb{C}$ y vectores no nulos v de $\mathbb{C}^n$ tales que $AV = \lambda V$ si V es la matriz de orden $n \times 1$ cuyos elementos son las coordenadas del vector v. El escalar λ recibe el nombre de valor propio de A y v, el de vector propio asociado.

Para hallar dichos valores, es útil calcular el llamado *polinomio característico de la matriz*.

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

Definición 3.1.1. Se llama *polinomio característico de la matriz* A:

$$Q_A(t) = \det(A - tI_n)\,.$$

Ejemplo 3.1.1. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$Q_A(t) = t^2 - 4t + 3, \qquad Q_B(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 2$$

Proposición 3.1.1. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces:

$$Q_A(t) = Q_{A^t}(t)$$

Demostración. Para probar este resultado, basta con aplicar la primera propiedad de los determinantes: $\det(A-tI)=\det(A-tI)^t$ y comprobar que $\det(A-tI)^t$ es igual a $\det(A^t-tI)$. ■

La fórmula siguiente puede resultar útil a la hora de calcular el polinomio característico de una determinada matriz. Su demostración no se incluye, porque su comprobación es ardua.

Proposición 3.1.2. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces:

$$Q_A(t)=(-1)^n t^n+(-1)^{n-1}\Sigma_1 t^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-k}\Sigma_k t^{n-k}+\cdots+\Sigma_n\,,$$

con $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_k,\ldots,\Sigma_n$ las sumas de los menores de orden k de la matriz $A=(a^i_j)_{1\le i,j\le n}$ "sobre la diagonal principal"; es decir, de los menores de la matriz A formados por los elementos pertenecientes a las filas y columnas $\ell_1\ldots\ell_k$, que podemos denotar por $A^{\ell_1\ldots\ell_k}_{\ell_1\ldots\ell_k}$, con $1\le\ell_1<\ell_2<\ldots<\ell_k\le n$.

Observación. En particular:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \operatorname{tr} A = a_{11}+\cdots+a_{nn}\\ \Sigma_n &= \det A\end{aligned}$$

3.2. Valores y vectores propios de una matriz

Las matrices diagonales son especialmente sencillas, desde el punto de vista operativo, para trabajar con ellas.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se dice que una matriz A es diagonalizable cuando es posible encontrar una matriz inversible S de manera que $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal D; es decir, de la forma:

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

El primer paso para saber si existe una matriz S que permite diagonalizar una matriz dada es encontrar los llamados *valores propios* y los correspondientes *vectores propios asociados a la matriz*, que a continuación pasamos a definir. La herramienta que nos permite hallar los valores propios es el polinomio característico de la matriz, puesto que los valores propios coinciden con sus raíces.

Pasamos ahora a dar las definiciones, con más precisión.

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

Definición 3.2.1. Un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ recibe el nombre de *valor propio* de A si $Q_A(\lambda) = 0$, es decir, si λ es una raíz del polinomio característico de la matriz A. Y se llama *espectro* de la matriz A a

$$\operatorname{Spec} A = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \lambda \text{ es valor propio de } A\}.$$

Observamos que una matriz cuadrada real de orden n tiene n valores propios en $\mathbb{C}$ que pueden ser iguales o distintos y que en $\mathbb{R}$ puede tener n, menos de n o incluso no tener ninguno.

Ejemplo 3.2.1. Consideremos las matrices del ejemplo (3.1.1),

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de las cuales ya sabemos que

$$Q_A(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3),$$

$$Q_B(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 2 = (t-2)\left(t - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(t - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

Luego, los valores propios de la matriz A son 1 y 3 (reales), mientras que los valores propios de la matriz B son 2, $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ (solo uno real y los otros dos complejos).

El resultado siguiente nos da una condición equivalente a la enunciada en la definición anterior, que es utilizada con mucha frecuencia.

Proposición 3.2.1. Un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ recibe el nombre de *valor propio* de A si y solo si existe $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$, $x \neq 0$, tal que $Ax = \lambda x$.

La idea de la demostración es considerar las equivalencias siguientes, ninguna de las cuales es difícil de probar.
Son equivalentes:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ es valor } & \text{propio de } A \\ & \Longleftrightarrow x \neq 0 \text{ y } Ax = \lambda x \\ & \Longleftrightarrow x \neq 0 \text{ y } (A - \lambda I_n)x = 0 \\ & \Longleftrightarrow \text{ el sistema } (A - \lambda I_n)x = 0 \text{ es compatible indeterminado} \\ & \Longleftrightarrow \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n \end{aligned}$$

Definición 3.2.2. Un vector columna $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ se dice que es un *vector propio* de A si $x \neq 0$ y existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Ax = \lambda x$.

Se dice, entonces, que *x es un vector propio asociado al valor propio λ* y que *λ es un valor propio asociado al vector propio x.*

Proposición 3.2.2. Sean A, B matrices cuadradas de orden n. Si $B = S^{-1}AS$, entonces $Q_B(t) = Q_A(t)$.

Demostración. Basta con observar que

$$\begin{aligned} Q_B(t) = Q_{S^{-1}AS}(t) &= \det(S^{-1}AS - tI) = \det(S^{-1}AS - S^{-1}(tI)S) \\ &= \det(S^{-1}(A - tI)S) = \det(S^{-1})\det(A - tI)\det(S) \\ &= \frac{1}{\det S}\det(A - tI)\det(S) = \det(A - tI) = Q_A(t) \end{aligned}$$

■

Proposición 3.2.3. En general, dada una matriz A cuadrada de orden n, se cumple que

$$\begin{cases} \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \\ \det A = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n \end{cases}$$

si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de la matriz A.

La demostración no se incluye, puesto que se necesita previamente estudiar la llamada "triangulación" de una matriz, aspecto que no se incluye en este texto.

Así pues, para calcular los valores propios y los vectores propios de una matriz, puede procederse como sigue.

1. Calcular $Q_A(t)$.
2. Buscar las raíces $\lambda \in \mathbb{C}$ de $Q_A(t)$ (son los valores propios).
3. Para cada valor propio λ, los vectores propios asociados a λ son los vectores no nulos cuyas componentes $x_1, \ldots, x_n$ satisfacen:

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad \text{con} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

   Observamos que este sistema es siempre compatible indeterminado, ya que $\det(A - \lambda I) = 0$.

Las observaciones siguientes permiten calcular valores y vectores propios de determinados tipos especiales de matrices.

Observación 1. Observamos que, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz triangular (superior o inferior) con elementos $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ en la diagonal,

$$\det(A - tI) = (a_{11} - t)\ldots(a_{nn} - t) = (-1)^n(t - a_{11})\ldots(t - a_{nn})$$

Es decir, los valores propios de esta matriz son $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. Observamos que, en este caso, son todos reales.

Observación 2. Los vectores propios de A asociados a λ son los vectores no nulos de $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$, puesto que son equivalentes:

(i) Existe $x \neq 0$ y $(A-\lambda I)x = 0$
(ii) Existe un vector $x \neq 0$ en $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$

Observación 3. Vectores propios asociados a valores propios diferentes son linealmente independientes.

Observación 4. Si la suma de todos los vectores columna de A es un vector columna del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}$$

(es decir, el vector $\lambda u_1 + \ldots + \lambda u_n$), entonces λ es un valor propio de A. En efecto:

$$A(u_1) + \cdots + A(u_n) = A(u_1 + \cdots + u_n) = \lambda u_1 + \cdots + \lambda u_n = \lambda(u_1 + \cdots + u_n)$$

es decir,

$$A(u_1 + \cdots + u_n) = \lambda(u_1 + \cdots + u_n)$$

Hemos obtenido, al mismo tiempo, que $u_1 + \cdots + u_n$ es un vector propio asociado al valor propio λ. Lo mismo ocurre si todas las filas de la matriz suman lo mismo: este valor es un valor propio de la matriz.

Ejemplo 3.2.2. Dada la matriz

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

el vector $(1,1,1)$ es un vector propio de M, asociado al valor propio 4.

Dada la matriz

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4 es valor propio de esta matriz (sumando las tres filas, obtenemos el vector $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$), si bien ahora $(1,1,1)$ no es vector propio de dicha matriz.

Observación 5. De forma análoga, si al sumar el vector columna i-simo con el vector columna j-simo obtenemos un nuevo vector columna en que todas sus componentes son el mismo escalar λ en las filas "i" y "j" y el resto son "ceros", este escalar λ es un valor propio y $u_i + u_j$ es un vector propio asociado a este valor propio, ya que

$$A(u_i) + A(u_j) = A(u_i + u_j) = \lambda u_i + \lambda u_j = \lambda(u_i + u_j).$$

Este resultado puede generalizarse a otros criterios similares. Proponemos al lector esta generalización como ejercicio.

Si nos interesamos en el problema de cuando una matriz A es diagonalizable, nos interesamos por los valores propios distintos de la matriz.

Dado un valor propio λ de A, denominamos *multiplicidad geométrica* g de λ el máximo número de vectores propios independientes que se pueden asociar a dicho valor propio, esto es, $g = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$. Su *multiplicidad algebraica* m es igual a la multiplicidad en tanto que raíz del polinomio característico. Se puede demostrar que $g \leq m$. Un valor propio con $m = 1$ recibe el nombre de *simple*; en caso contrario, de *múltiple*. Un valor propio múltiple se dice *semisimple* si y solo si $m = g$, es decir, admite m vectores propios independientes. En caso contrario, se dice *defectivo*.

Finalmente, enunciamos un criterio que permite saber cuándo una matriz es diagonalizable.

Teorema 3.2.1. Una matriz A cuadrada de orden n es diagonalizable si y solo si existen n vectores linealmente independientes de $\mathbb{C}^n$ que son vectores propios de la matriz A.

Es decir, cuando podemos encontrar una base $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, de modo que todos los vectores de esta base sean vectores propios de la matriz A.

La matriz A es, pues, diagonalizable si y solo si sus valores propios son semisimples. Si la matriz no es diagonalizable, recibe el nombre de *defectiva*.

Si interpretamos la matriz A como la matriz de un endomorfismo f_A de $\mathbb{R}^n$ cuya matriz en la base natural de $\mathbb{R}^n$ es la matriz A, la matriz de f_A en la base v es $S^{-1}AS$, siendo S la matriz del cambio de base de la base v a la base natural de $\mathbb{R}^n$, y esta matriz es, obviamente, una matriz diagonal. Así pues, una matriz A es diagonalizable si existe una matriz inversible S de orden n de modo que $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal.

En el caso en que A es una matriz defectiva, se tiene que, si λ es un valor propio de multiplicidad algebraica m, entonces $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) < m$.

Es fácil probar que

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^i = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^{i+1} = \ldots$$

la igualdad se consigue con n pasos a lo sumo, ya que la dimensión de un subespacio es menor o igual que la de todo el espacio. Se obtiene el resultado siguiente.

Proposición 3.2.4. Sea A una matriz cuadrada de orden n y λ un valor propio de multiplicidad algebraica m. Entonces, el menor i para el cual la cadena de subespacios estabiliza es tal que

$$\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^i = m$$

Este valor i recibe el nombre de *índice* del valor propio.

Observación. Si el valor propio λ es semisimple, entonces $i=1$ y es estrictamente mayor que 1 en caso de ser defectivo.

Sea A una matriz compleja con valores propios $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ e índices respectivos $i_1,\dots,i_r$, y tenemos la siguiente definición.

Definición 3.2.3. Denominamos *polinomio mínimo* a

$$(t-\lambda_1)^{i_1}\dots(t-\lambda_r)^{i_r}$$

Observación. El polinomio mínimo es un divisor del polinomio característico y ambos tienen las mismas raíces.

Observación. Si la matriz A es diagonalizable, los factores del polinimio mínimo son todos lineales.

3.3. Radio espectral

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

Definición 3.3.1. Se llama *radio espectral de la matriz A* a

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|,\dots,|\lambda_r|\}$$

si $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{C}$ son los valores propios de la matriz A.

Ejemplo 3.3.1. Consideremos las matrices del ejemplo (3.1.1) y la matriz M del ejemplo (3.2.2)

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\qquad M=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son

$$\begin{array}{rl} 1 \text{ y } 3 & \text{en el caso de la matriz } A\\ 2,\ \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \text{ y } \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} & \text{en el caso de la matriz } B\\ 1,\ 2,\ \text{y } 4, & \text{en el caso de la matriz } M \end{array}$$

Entonces,

$$\rho(A)=3,\qquad \rho(B)=2,\qquad \rho(M)=4$$

Propiedad. Para todo valor propio λ de una matriz A, se cumple

$$|\lambda| \leq \max\{|a_{11}|+\cdots+|a_{1n}|,\ldots,|a_{n1}|+\cdots+|a_{nn}|\}$$

$$|\lambda| \leq \max\{|a_{11}|+\cdots+|a_{n1}|,\ldots,|a_{1n}|+\cdots+|a_{nn}|\}$$

En particular,

$$\rho(A) \leq \max\{|a_{11}|+\cdots+|a_{1n}|,\ldots,|a_{n1}|+\cdots+|a_{nn}|\}$$

$$\rho(A) \leq \max\{|a_{11}|+\cdots+|a_{n1}|,\ldots,|a_{1n}|+\cdots+|a_{nn}|\}$$

3.4. Valores singulares

Como aplicación, vemos en esta sección una descomposición de una matriz A, la llamada *descomposición a valores singulares*, de gran importancia práctica.

Sea A una matriz de m filas y n columnas a coeficientes reales.

Definición 3.4.1. Se denominan *valores singulares* de la matriz A la raíz cuadrada (positiva) de los valores propios de la matriz A^tA.

La proposición siguiente nos da la relación entre el rango de una matriz y sus valores singulares.

Proposición 3.4.1. El número de valores singulares no nulos de la matriz A coincide con el rango de dicha matriz.

No es difícil probar las propiedades siguientes, relativas a los valores singulares de una matriz.

Proposición 3.4.2. (a) Si A es una matriz cuadrada, el cuadrado del producto de los valores singulares de la matriz A es igual al cuadrado del determinante de dicha matriz.

(b) Los valores singulares no nulos de una matriz coinciden con los de su traspuesta.

Pasamos ahora a enunciar la descomposición a valores singulares de una matriz.

Teorema 3.4.1. Dada una matriz A con m filas y n columnas, cuyos valores singulares son $s_1,\ldots,s_r$, existen matrices S y T tales que

$$A = S\cdot\begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ldots & \\ & & s_r \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\cdot T \qquad \text{si } m > n, \text{ y}$$

$$A = S \cdot \begin{pmatrix} s_1 & & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & & \dots \\ & s_r & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot T \qquad \text{si } m < n$$

Esta es la llamada *descomposición a valores singulares* de la matriz A.

Ejemplo 3.4.1. Los valores singulares de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0{,}1 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}01 & 0 \\ 0{,}01 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son 10.00101090, 0.009000212019, 0.00001110972967.

3.5. Normas y cotas para valores propios

Norma

Consideremos un espacio vectorial E sobre el cuerpo K de los números reales o complejos. Una función $\| \ \|$ definida sobre E a valores en $\mathbb{R}$ se dice que es una norma sobre E si y solo si cumple las condiciones siguientes:

1. $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in E$ y $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $x \in E$ y $\lambda \in K$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in E$

Ejemplo 3.5.1. Sea $E = \mathbb{R}^n$, para todo $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$$

es una norma llamada *norma euclidiana*.

Normas de matrices

El conjuto de matrices cuadradas es un espacio vectorial sobre el que se puede definir una norma. La posibilidad de multiplicar dos matrices $A, B \in M_n(K)$ nos plantea la pregunta sobre la relación entre las normas de cada una de las matrices y la norma del producto.

Definición 3.5.1. Decimos que una norma $\| \ \|$ definida sobre $M_n(K)$ es una norma de matriz (también llamada *norma submultiplicativa*) si y solo si se cumple

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Ejemplo 3.5.2. (Norma euclidiana o de Frobenius). En $M_n(K)$, la relación

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}, \quad A = (a_{ij})$$

es una norma de matriz.

Teorema 3.5.1. Sea A una matriz cuadrada y $\rho(A)$ su radio espectral. Entonces,

$$\|A\| \geq \rho(A)$$

para cualquier norma de matriz.

Como ejemplo de matriz para la cual no se da la igualdad, podemos considerar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dicha matriz es no nula, por lo que su norma no puede ser nula; sin embargo, el radio espectral es 0.

A menudo, se presenta el problema de calcular la norma de un vector $x \in E$, que viene dado de la forma Ax. Nos gustaría que se cumpliera

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \|x\|_v$$

($\| \, \|_v$ denota la norma definida sobre los vectores y $\| \, \|$ la norma definida sobre las matrices).

Cuando esta condición se cumple para todo $x \in E$ y para toda matriz $A \in M_n(K)$, se dice que la norma del vector $\| \, \|_v$ y la norma de matriz $\| \, \|$ son *compatibles*.

Ejemplo 3.5.3. La norma de vector definida en 3.5.1 y la norma de matriz definida en 3.5.2 son compatibles.

3.6. Ejercicios resueltos

1. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^6$ en $\mathbb{R}^6$ cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^6$ es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Halla el polinomio característico.

Solución:

$$\det(M-tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1-t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1-t & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-t & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3-t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 1 \\ 0 & -1-t & 0 \\ -1 & 3 & -1-t \end{vmatrix} \cdot (2-t) \cdot \begin{vmatrix} 4-t & 12 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & -1-t \end{vmatrix} \cdot (2-t) \cdot \begin{vmatrix} 4-t & 12 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix}$$

Por tanto, el polinomio característico es $Q(t) = (t+1)t^3(t-2)(t-7)$.

2. Halla los valores propios del endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que viene definido por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 5x_3, 2x_2 - x_4, -x_3 + 8x_4, 2x_4)$$

Solución:

Escribamos la matriz de la aplicación en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es triangular, por lo que los valores propios son los valores de la diagonal. Esto es, los valores propios son $-1, 1,$ y 2 de multiplicidad 2.

3. Consideremos el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$f(e_1 + e_2) = 2(e_1 - e_2)$$
$$f(e_1 - e_2 + e_3) = e_1 - e_2 + 3e_3$$
$$f(2e_2 + e_3) = 2e_1 - 2e_2 + 3e_3$$
$$f(e_4) = 0$$

Halla los valores propios de este endomorfismo y, para cada uno de ellos, halla el subespacio de vectores propios.

Solución:
La matriz de la aplicación en la base $u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_1 - e_2 + e_3, u_3 = 2e_2 + e_3, u_4 = e_4$ en el espacio de salida y la base canónica en el espacio de llegada es

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz en la base canónica es

$$A = \bar{A}S^{-1}$$

con

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y, por tanto,} \quad S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo, pues, el producto tenemos

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \\ -5 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos el polinomio característico

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} \frac{5}{4} - t & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} - t & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 - t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t \end{vmatrix} =$$

$$(3-t)t\begin{vmatrix} \frac{5}{4} - t & \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} - t \end{vmatrix} = (3-t)t^2(\frac{1}{2} - t)$$

Valores propios $\frac{1}{2}$, 3 y 0 de multiplicidad 2.

Busquemos los subespacios de vectores propios
Para el valor propio 0:

$$\operatorname{Ker} A \quad = \{(x,y,z,t) \mid 5x + 3y + 2z = 0, 12z = 0,\} = [(3,-5,0,0),(0,0,0,1)]$$

Para el valor propio $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(A-\frac{1}{2}I) &= \{(x,y,z,t) \mid 3x+3y+2z=0, \frac{5}{2}z=0, -\frac{1}{2}t=0\} = \\ &= [(1,-1,0,0)]\end{aligned}$$

Para el valor propio 3:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ker}(A-3tI) = \\ &\{(x,y,z,t) \mid -7x+3y+2z=0, -5x-15y-2z=0, -3t=0\} = \\ &= [(1,-1,5,0)].\end{aligned}$$

4. Halla el radio espectral de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\det(A-tI) = -(t-1)(t-1-i)(t-1+i)$$

de donde los valores propios son

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1+i,\ \lambda_2 = 1-i$$

y

$$|\lambda_1| = 1,\ |\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{2}$$

Por tanto,

$$\rho = \sqrt{2}$$

5. Halla los valores singulares de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^tA-tI) = t^2-8t+8 = (t-4-2\sqrt{2})(t-4+2\sqrt{2})$$

Luego,

$$\sigma_1 = \sqrt{4+2\sqrt{2}}, \;\; \sigma_2 = \sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$

3.7. Ejercicios propuestos

1. Determina el polinomio característico de las matrices siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & 9 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $\det(M-tI) = t^4 - 11t^3 + 43t^2 - 69t + 36$, $\det(N-tI) = (-1)^5(t^5 - 6t^4 - 7t^3)$.

2. Determina los valores propios y un vector propio, para cada valor propio, de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 12 & 12 \\ 6 & -5 & -9 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución: Los valores propios de A son $\lambda_1 = -21{,}6007$, $\lambda_2 = 1{,}4344$, $\lambda_3 = 10{,}1662$ y los vectores propios correspondientes son $v_1 = (0{,}7997, -0{,}4826, -0{,}3571)$, $v_2 = (-0{,}8081, -0{,}5751, -0{,}1276)$, $v_3 = (0{,}2939, -0{,}3991, 0{,}8685)$. Los valores propios de la matriz B son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$ y los vectores propios correspondientes $w_1 = (0{,}4082, -0{,}4082, -0{,}8165)$, $w_2 = (0{,}7071, 0{,}7071, 0)$, $w_3 = (-0{,}5774, 0{,}5774, -0{,}5774)$.

3. Halla el radio espectral de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Solución: 13.

4. Considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz, en la base natural de $\mathbb{R}^4$, es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que los vectores $(1,0,0,1), (0,1,1,0), (1,0,0,-1), (0,1,-1,0)$ son vectores propios de f y forman una base de $\mathbb{R}^4$. Halla los valores propios asociados a estos vectores propios.

Solución: Los valores propios, son respectivamente, 2,0,0,2.

5. Indica cuáles de las matrices siguientes son diagonalizables y cuáles son defectivas.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}0{,}1&0{,}2&0{,}3\\0{,}2&0{,}3&0{,}4\\0{,}3&0{,}4&0{,}5\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Solución:

A y D son defectivas, B y C son diagonalizables.

6. Halla los valores singulares de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Solución: $\sigma_1=1{,}7321$, $\sigma_2=1{,}4142$.

7. Demuestra que la norma de Hölder definida sobre el espacio de matrices $M_n(K)$, de la manera

$$\|A\|_p=\left(\sum_{ij}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{1/p},\quad A=(a_{ij})$$

es una norma de matriz si y solo si $1\leq p\leq 2$.

8. Demuestra que, para cualquier norma de matriz, se tiene

$$\|I\|\geq 1,\quad \|A^n\|\leq\|A\|^n,\quad \|A^{-1}\|\geq\frac{1}{\|A\|}\ \ (\text{con }\det A\neq 0)$$

3.8. Resolución de ejercicios utilizando MATLAB

1. Para obtener el polinomio característico de una matriz, utilizamos el comando ***poly(A)*** de MATLAB.

Ejemplo 3.8.1. Calcula el polinomio de una de las matrices del ejercicio propuesto 1.

$$N=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\2&-1&-3&0&0\\1&0&-1&0&0\\2&0&8&4&1\\-5&0&9&12&3\end{pmatrix}$$

```
>> A=[1,0,-1,0,0;2,-1,-3,0,0;1,0,-1,0,0;2,0,8,4,1;-5,0,9,12,3];
>> poly(A)
ans =
   1.0000   -6.0000   -7.0000   -0.0000   0.0000   0.0000
```

que representa el polinomio

$$t^5 - 6t^4 - 7t^3.$$

2. Para calcular los valores propios de una matriz, utilizamos el comando ***eig(A)***. Destacamos sin embargo, que utilizando el comando ***poly*** y resolviendo la ecuación se obtienen los valores propios.

Ejemplo 3.8.2. Utilizando la matriz A anterior, tenemos

```
>> A=[1,0,-1,0,0;2,-1,-3,0,0;1,0,-1,0,0;2,0,8,4,1;-5,0,9,12,3];
>> eig(A)
ans =
   -1.0000
   7.0000
   0.0000
   -0.0000 + 0.0000i
   -0.0000 - 0.0000i
```

3. Si, además, queremos obtener los vectores propios, utilizaremos el comando ***[V,D]=eig(A)*** de MATLAB.

Ejemplo 3.8.3. Consideremos una de las matrices del ejercicio propuesto 2.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
>> B=[2,-1,1;-1,2,-1;1,-1,2]
>> [V,D]=eig(B)
B =
    2   -1    1
   -1    2   -1
    1   -1    2
V =
    0.4082   0.7071   -0.5774
   -0.4082   0.7071    0.5774
   -0.8165        0   -0.5774
D =
   1.0000        0        0
        0   1.0000        0
        0        0   4.0000
```

La matriz V es la matriz de cambio de base que nos transforma la matriz B en su forma diagonal.

Si la matriz *B* tuviera valores propios repetidos, estos aparecerían en la matriz *D* tantas veces como su multiplicidad, pero en dicho caso no podríamos asegurar que todos los vectores de V fuesen vectores propios, ya que podría ser que la matriz original no diagonalizara. Esto se puede comprobar calculando el rango de V.

4. Para calcular el radio espectral de una matriz *A*, utilizamos la siguiente combinación de comandos ***max(abs(eig(A)))*** de MATLAB.

Ejemplo 3.8.4. Calcula el radio espectral de la matriz del ejercicio propuesto 3.

```
>> A=[1,0,1,0;0,1,1,0;1,0,1,0;0,0,0,13];
>> max(abs(eig(A)))
ans =
13
```

5. Para obtener los valores singulares de una matriz, utilizamos el comando ***svd(A)*** de MATLAB. Aunque también podrían calcularse, con la combinación de comandos siguiente ***abs(sqrt(eig(A'*A)))***.

Ejemplo 3.8.5. Calcula los valores singulares de la matriz *A* dada en el ejercicio propuesto 6.

```
>> A=[1,0,1;1,-1,1]
>> svd(A)
ans =
   1.7321
   1.4142
```

6. Si, además, queremos obtener los vectores singulares por la izquierda, y los vectores singulares por la derecha de la matriz, utilizamos el comando ***[U,D,V]=svd(A)*** de MATLAB.

Ejemplo 3.8.6. Calculamos los vectores singulares tanto por la izquierda como por la derecha de la matriz anterior.

```
>> A=[1,0,-1;1,-1,1];
>> [U,D,V] = svd(A)
U =
   0   1
   1   0
D =
   1.7321        0   0
        0   1.4142   0
V =
    0.5774    0.7071   -0.4082
   -0.5774         0   -0.8165
    0.5774   -0.7071   -0.4082
```

→4

Matrices no negativas

4.1. Definiciones y propiedades

Definición 4.1.1. Una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ se dice que es *no negativa* (y lo notamos por $A \geq 0$) si todos los elementos de A son no negativos. Esto es, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

es no negativa cuando $a_{ij} \geq 0$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$.

Ejemplo 4.1.1. Consideramos las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz A_1 es no negativa. La matriz A_2 no lo es; sin embargo, lo es $-A_2$. Finalmente, observamos que ni A_3 ni $-A_3$ son matrices no negativas.

Ejemplo 4.1.2. Las matrices

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{1\times 4}(\mathbb{R}), \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

son no negativas. La matriz v_1 se identifica con un vector fila y v_2 con un vector columna. En estos casos, se habla de vectores fila no negativos y vectores columna no negativos (o, simplemente, de vectores no negativos, si no ha lugar a confusión).

Definición 4.1.2. Una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ se dice que es *positiva* (y lo notamos por $A > 0$) si todos los elementos de A son positivos. Esto es, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

se dice que es positiva cuando $a_{ij} > 0$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$.

Ejemplo 4.1.3. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

es positiva.

Ejemplo 4.1.4. Las matrices

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{1\times 4}(\mathbb{R}), \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

son matrices positivas. Análogamente al ejemplo (4.1.2), decimos que v_1 es un vector fila positivo y v_2 un vector columna positivo (o, simplemente, vectores positivos, si no ha lugar a confusión).

Operaciones con matrices no negativas y positivas

Designamos por $MN_{n\times m}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices no negativas de orden $n \times m$ con coeficiente reales y por $MP_{n\times m}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices positivas de orden $n \times m$ con coeficiente reales. En el caso de matrices cuadradas de orden n, notamos estos conjuntos simplemente por $MN_n(\mathbb{R})$ y $MP_n(\mathbb{R})$, respectivamente.

Observamos que, con la suma habitual de matrices, la suma de dos matrices de $MN_{n\times m}(\mathbb{R})$ (respectivamente, de dos matrices de $MP_{n\times m}(\mathbb{R})$) es una matriz que pertenece también a $MN_{n\times m}(\mathbb{R})$ (respectivamente, a $MP_{n\times m}(\mathbb{R})$).

Sin embargo, los conjuntos $MN_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $MP_{n\times m}(\mathbb{R})$ no tienen "estructura de grupo ", puesto que, si $A \in MN_{n\times m}(\mathbb{R})$, entonces su simétrica respecto a la suma, la matriz $-A$, no pertenece a $MN_{n\times m}(\mathbb{R})$, y lo mismo ocurre en el caso del conjunto $MP_{n\times m}(R)$.

Finalmente, observamos que, si $A \in MN_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B \in MN_{m\times p}(\mathbb{R})$ (respectivamente, $A \in MP_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B \in MP_{m\times p}(\mathbb{R})$), la matriz producto AB es una matriz no negativa (respectivamente, positiva). Esto es, $AB \in MN_{n\times p}(\mathbb{R})$ (respectivamente, $MP_{n\times p}(\mathbb{R})$).

Relaciones de orden

En los conjuntos $MN_{n\times m}(R)$ (respectivamente, $MP_{n\times m}(\mathbb{R})$), podemos definir las relaciones siguientes.

Definición 4.1.3. Dadas dos matrices A,B de $MN_{n\times m}(\mathbb{R})$ (respectivamente, de $MP_{n\times m}(\mathbb{R})$), decimos que A es mayor o igual que B (y lo notamos por $A \geq B$) si y solo si $a_{ij} \geq b_{ij}$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ y para todo $j \in \{1,\ldots,m\}$.

Si $A \geq B$ y $A \neq B$, decimos que A es mayor que B (y lo notamos por $A > B$).
Finalmente, decimos que A es estrictamente mayor que B (y lo notamos por $A \gg B$) si y solo si $a_{ij} > b_{ij}$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ y para todo $j \in \{1,\ldots,m\}$.

Observaciones

1. Estas tres relaciones son relaciones de orden (es decir, verifican las propiedades de reflexividad, antisimetría y de transitividad).

2. En ninguno de los tres casos, el orden es total ya que fácilmente podemos encontrar dos matrices que no estén relacionadas. Por ejemplo, basta con considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

que no están relacionadas por ninguna de las tres relaciones descritas anteriormente.

3. Si A es una matriz no negativa, entonces $A \geq 0$. Si, además, $A \neq 0$, entonces $A > 0$. Si A es una matriz positiva, entonces $A \gg 0$.

4.2. Matrices irreducibles

La noción de matriz reducible se da, en general, para matrices cuadradas. Aquí analizamos las propiedades que se pueden deducir en el caso particular en que las matrices sean, además, no negativas o bien positivas.

Definición 4.2.1. Decimos que una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) es *reducible* cuando existe una matriz P cuyas columnas son una reordenación de las columnas de la matriz identidad (una tal matriz la denominamos *matriz permutación*) de modo que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde las matrices B y D son matrices cuadradas.

En caso contrario, se dice que la matriz es *irreducible*.

Observación 1. Algunos autores definen las matrices reducibles como aquellas matrices A para las cuales existe una matriz permutación P tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} D & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Nótese que ambas definiciones son equivalentes ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & I_1 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_1 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_1 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Observación 2. Puesto que la matriz P es una reordenación de las columnas de la matriz identidad, se cumple que $P^{-1} = P^t$ (es decir, P es una matriz ortogonal).

Ejemplo 4.2.1. (a) La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es reducible (basta con considerar $P = I_n$).
(b) La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es reducible. Para ello, basta con considerar

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y comprobar que PAP^{-1} es de la forma deseada. En efecto,

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que, en este caso, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$.
(c) La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es irreducible. En efecto, las posibles matrices permutación son, en este caso,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con ellas, obtenemos las matrices

$$P_1AP_1^{-1} = A, \quad P_2AP_2^{-1} = A^t, \quad P_3AP_3^{-1} = A^t,$$
$$P_4AP_4^{-1} = A^t, \quad P_5AP_5^{-1} = A, \quad P_6AP_6^{-1} = A$$

Observación 3. Se dice que dos matrices A y E son *cogredientes* si y solo si existe una matriz permutación P tal que

$$PAP^{-1} = E$$

En particular, se tiene que una matriz A es reducible si y solo si es cogrediente a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

con B y D matrices cuadradas.

Es fácil probar que la cogrediencia es una relación de equivalencia.

Otra definición equivalente de matriz reducible es la siguiente ([9]).

Definición 4.2.2. Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$. Si el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ puede ser partido en dos subconjuntos complementarios no vacíos

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_\mu\} \text{ y } J = \{j_1, j_2, \ldots, j_\nu\}, \; (\mu + \nu = n),$$

tales que $a_{i_\alpha j_\beta} = 0$, $(\alpha = 1,\ldots,\mu, \beta = 1,\ldots,\beta)$, entonces la matriz A se dice que es reducible.

Ejemplo 4.2.2. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos los conjuntos de índices complementarios $I = \{2,3\}$, $J = \{1,4\}$.
Comprobamos $a_{21} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{34} = 0$. Por tanto, la matriz es reducible.

Teniendo en cuenta que una matriz permutación es una matriz de cambio de base que consiste en una reordenación de los vectores de la base canónica, se tiene la siguiente descripción geométrica de una matriz reducible.

Proposición 4.2.1. Una matriz $A \in MN_n(\mathbb{R})$ es reducible si y solo si existe un subespacio invariante de dimensión $r < n$ generado por r vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Basándonos en esta proposición, es fácil observar que la matriz A del ejemplo (4.2.1) c, anterior, es irreducible ya que el vector propio de valor propio 1 es $(1,1,1)$, que no pertenece a la base canónica, y el subespacio invariante de dimensión 2 es ortogonal a este vector, por lo que tampoco contiene ningún vector de la base canónica.

Ejemplo 4.2.3. La matriz, en la base canónica, de la aplicación lineal que deja invariante el subespacio $F = [(1,0,0,0),(0,0,1,0)]$ es reducible. En efecto, la matriz de la aplicación en la base $v_1 = (0,1,0,0), v_2 = (0,0,0,1), v_3 = (1,0,0,0), v_4 = (0,0,1,0)$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

Observación 4. Considerando el ejemplo anterior, la matriz de la aplicación, en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

Si permutamos las filas y las correspondientes columnas, la matriz A se transforma en

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{42} & a_{44} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{14} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{34} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que el número de elementos nulos de la matriz se mantiene. Esto ocurre, en general, puesto que las transformaciones permitidas son permutaciones de filas y columnas. De aquí se deduce que toda matriz positiva es irreducible, si bien, tal como vemos en el caso de la matriz del ejemplo (4.2.1)-c, el hecho de que la matriz inicial tenga ceros no es condición suficiente para la reducibilidad.

Proposición 4.2.2. Si A es una matriz reducible, cualquier potencia A^p de dicha matriz también es reducible.

Demostración. Sea P la matriz permutación tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

con B y D matrices cuadradas. Entonces,

$$PA^pP^{-1} = (PAP^{-1})^p = \begin{pmatrix} B^p & 0 \\ E & D^p \end{pmatrix}$$

donde la matriz E es
$E = CB + DC$, para $p = 2$
$E = CB^2 + DCB + D^2C$, para $p = 3$
etc.

Así pues, A^p es también reducible. ■

Cualquier potencia A^p de una matriz no negativa A es también no negativa. Queremos ver que, si la matriz A tiene suficientes elementos no nulos, podemos, para un cierto p, conseguir que A^p sea positiva. Para ello, necesitamos previamente la proposición siguiente.

Proposición 4.2.3. Sea A una matriz no negativa irreducible de orden $n > 1$. Entonces,

$$(I + A)^{n-1} > 0.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $x > 0$, y consideremos

$$y = (I + A)x = x + Ax$$

Puesto que A es no negativa, se cumple $Ax \geq 0$ y, por tanto, $y > 0$.

Si x no es positivo, veamos que y tiene, por lo menos, un elemento nulo menos que el vector x. Para ello, consideremos la matriz de permutación P tal que $Px = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$, $u > 0$. Entonces,

$$Py = Px + PAx = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} + PAP^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$$

Partimos ahora la matriz PAP^{-1} según la partición de Py:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

y $A_{12} \neq 0$, ya que A es irreducible.

Tenemos, pues,

$$Py = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{12}u \\ A_{22}u \end{pmatrix}$$

al ser $A_{12} \neq 0$ y $u > 0$, tenemos que $A_{12}u \neq 0$. Luego, Py (y, por tanto, y) tiene, como mínimo, un cero menos que x.

Si y no es positivo, repetimos el proceso con la matriz $(I + A)y$. Observamos que, a lo sumo, tendremos que repetir este proceso $n - 1$ veces. Así pues, si aplicamos esto a los vectores x de la base canónica, tenemos que $(I + A)^{n-1} > 0$, como queríamos demostrar. ■

Ejemplo 4.2.4. Consideremos la matriz irreducible

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (I+A)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} > 0$$

El corolario siguiente nos permite reducir el número de veces que tendríamos que repetir el proceso para conseguir la positividad de $I+A$.

Corolario 4.2.1. Si A es una matriz no negativa irreducible de orden n, entonces

$$(I+A)^{m-1} > 0$$

siendo m el grado del polinomio mínimo de A.

La proposición siguiente nos proporciona un resultado recíproco de este.

Proposición 4.2.4. Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ es tal que $(I+A)^j > 0$, para un cierto j, entonces A es irreducible.

Demostración. Si A fuese reducible, existiría una matriz de permutación P tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

Ahora bien,

$$P(I+A)P^{-1} = (I+PAP^{-1}) = \begin{pmatrix} I+B & 0 \\ C & I+D \end{pmatrix}$$

y, como hemos visto en la proposición (4.2.2), cualquier potencia de esta matriz es de esta forma, por lo que ninguna potencia de $I+A$ podría ser positiva. ■

Veamos ahora algunas propiedades espectrales importantes para matrices no negativas irreducibles.

Proposición 4.2.5. Si $0 \leq A \leq B$, entonces

$$\rho(A) \leq \rho(B)$$

Como corolario, tenemos:

Corolario 4.2.2. Si $0 \leq A$, entonces

$$\rho(A) > 0$$

Demostración. Si $0 < A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon I < A$, por lo que

$$\rho(A) \geq \rho(\varepsilon I) = \varepsilon > 0$$

■

Corolario 4.2.3. Sea B una matriz cuadrada obtenida de A eliminando algunas filas y columnas. Entonces,

$$\rho(B) \leq \rho(A)$$

Teorema 4.2.1 (Perron)**.** Una matriz positiva A tiene siempre un valor propio λ_1 que es simple, real, positivo e igual al radio espectral $\lambda_1 = \rho(A)$. Los demás valores propios tienen módulo estrictamente menor. Para este valor propio, existe un vector propio con todas las componentes estrictamente positivas.

Observación 5. Este teorema falla, en general, si $A \geq 0$ pero no es positiva. Así, por ejemplo, si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

los valores propios son 2 y -2, ambos del mismo módulo e igual al radio espectral.
Este teorema fue generalizado por Frobenius al caso de las matrices no negativas.

Teorema 4.2.2 (Frobenius)**.** Una matriz no negativa e irreducible A tiene siempre un valor propio λ_1, que es simple, real, positivo e igual al radio espectral. Para este valor propio, existe un vector propio con todas las componentes estrictamente positivas. Además, si existen otros valores propios $\lambda_2, \ldots, \lambda_h$, de módulo $\rho(A)$, entonces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_h$ son las h raíces distintas de la ecuación

$$\lambda^h - \rho(A)^h = 0.$$

Proposición 4.2.6. Sean $A \geq 0$ y $x > 0$. Si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\beta x \leq Ax \leq \alpha x$, entonces

$$\beta \leq \rho(A) \leq \beta$$

Ejemplo 4.2.5. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para $x = (1, 1, 1)$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$4x \leq Ax \leq 5x$$

y

$$4 \leq \rho(A) \leq 5$$

De hecho, si calculamos los valores propios, tenemos

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3+\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3-\sqrt{2}$$

y

$$4 \leq 3+\sqrt{2} \leq 5$$

Si tomamos $x = (1{,}4, 2, 1{,}4)$, tenemos

$$4{,}2x \leq Ax \leq 4{,}8x$$

Luego

$$4{,}2 \leq \rho(A) \leq 4{,}8$$

De hecho, si calculamos los valores propios, tenemos

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3+\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3-\sqrt{2}$$

y

$$4 \leq 4{,}2 \leq 3+\sqrt{2} \leq 4{,}8 \leq 5$$

4.3. Matrices primitivas

En este apartado, pretendemos clasificar las matrices no negativas en función del valor propio dominante.

Definición 4.3.1. Sea A una matriz no negativa e irreducible. Decimos que A es una matriz *primitiva* si y solo si tiene un único valor propio de módulo igual a su radio espectral. En caso contrario, se dice que es *imprimitiva*.

Ejemplo 4.3.1. Toda matriz positiva es primitiva.

Ejemplo 4.3.2. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es imprimitiva. En efecto, sus valores propios son $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$, y $\rho(A) = \sqrt{2} = |\lambda_1| = |\lambda_3|$.

Teorema 4.3.1. Una matriz $A \in MN_n(\mathbb{R})$ es primitiva si y solo si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^p \in MP_n(\mathbb{R})$.

Demostración. Supongamos, primero, que $A^p > 0$, en cuyo caso A^p es una matriz irreducible.

Teniendo en cuenta la proposición (4.3.2), la matriz A es irreducible. Si la matriz A fuese imprimitiva, existirían $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ con $\lambda_1=|\lambda_2|=\ldots=|\lambda_r|=\rho(A)$, por lo que $\lambda_1^p,\ldots,\lambda_r^p$ serían valores propios de A^p con $\lambda_1^p=|\lambda_2^p|=\ldots=|\lambda_r^p|=\rho(A^p)$ lo que contradeciría el teorema de Perron, que afirma que el valor propio de módulo igual al radio espectral es único para matrices positivas. Así pues, la matriz A es primitiva.

Se deja para el lector la demostración del recíproco. ■

Observación. Si consideramos la matriz A del ejemplo (4.3.2), tenemos que

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad A^{2m}=2^{m-1}A^2,\quad A^{2m+1}=2^mA,\ \forall m\geq 1$$

por lo que no existe ningún $p\in\mathbb{N}$ para el cual A^p sea positiva.

Corolario 4.3.1. Si A es una matriz primitiva, entonces A^p es también primitiva $\forall p>0$.

Proposición 4.3.1. Dada una matriz primitiva A, el número p para el cual $A^p>0$ está acotado superiormente por n^2-2n+2

$$p\leq n^2-2n+2$$

Ejemplo 4.3.3. Sea

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

En este caso, la cota es $n^2-2n+2=5$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\geq 0,\quad A^3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\geq 0$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\geq 0,\quad A^5=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&2&2\end{pmatrix}>0$$

Observemos que para esta matriz se alcanza la cota.
Si A es positiva, obviamente $p=1$.

Proposición 4.3.2. Sea $A\geq 0$ una matriz primitiva tal que $\rho(A)=1$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}A^n=xy^t$$

con $x,y>0$ dos vectores tales que $<x,y>=1$, $Ax=x$ y $A^ty=y$.

4.4. Matrices estocásticas

Definición 4.4.1. Una matriz $A = (a_{ij}) \in MN_n(\mathbb{R})$ se dice que es *estocástica* (por filas) si la suma de los elementos de cada fila de A valen 1. Es decir,

$$a_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ para cada } i = 1, \ldots, n.$$

Ejemplo 4.4.1. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es estocástica.

Teorema 4.4.1. Una matriz no negativa $A \in MN_n(\mathbb{R})$ es estocástica si y solo si tiene el valor propio $\lambda = 1$ con vector propio asociado $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Demostración. Si A es una matriz estocástica, se tiene $Au = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{pmatrix} = u$, luego u es vector propio de valor propio $\lambda = 1$.

Recíprocamente, si $Au = u$, entonces $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. ■

Teorema 4.4.2. Si una matriz no negativa $A \in MN_n(\mathbb{R})$ es estocástica, entonces su radio espectral es 1.

Demostración. Por el teorema anterior, sabemos que 1 es valor propio de A, por lo que es raíz de su polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Basta ahora comprobar que la función $p(\lambda)$ es creciente a partir de 1, esto es, comprobar que $p'(\lambda) > 0$. También se puede demostrar por reducción al absurdo de la manera siguiente.
Supongamos, por ejemplo, que $\lambda > 1$ es valor propio, y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ un vector propio asociado ($Av = \lambda v$), que sin pérdida de generalidad podemos suponer con componentes de suma la unidad; entonces,

$$1 < \lambda = \sum_{i=1}^{n} (\lambda v)_i = \sum_{i=1}^{n} (Av)_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} aij) v_j = \sum_{j} v_j = 1$$

■

Teorema 4.4.3. Sea $A \in MN_n(\mathbb{R})$ con valor propio maximal λ. Si, para este valor propio, existe un vector propio $x = (x_1, \ldots, x_n) > 0$, entonces llamando

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$A = \lambda X P X^{-1}$$

Demostración. Basta con probar que

$$\frac{1}{\lambda} X^{-1} A X$$

es estocástica.
Observamos que la condición $x > 0$ excluye la posibilidad de que $\lambda = 0$. ∎

Consideremos ahora una matriz A estocástica y la sucesión de potencias de dicha matriz

$$A, A^2, A^3, \ldots$$

y nos preguntamos por la existencia de límite de dicha sucesión. Tenemos el resultado siguiente

Teorema 4.4.4. Si A es una matriz irreducible y estocástica, existe $\lim_{n\to\infty} A^n$ si y solo si A es primitiva.

Definición 4.4.2. Una matriz $A = (a_{ij}) \in MN_n(\mathbb{R})$ se dice que es *doblemente estocástica* si la suma de los elementos de cada fila y de cada columna de A valen 1. Es decir,

$$a_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots n\}.$$

Ejemplo 4.4.2. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es doblemente estocástica.

Matriz de normalización

Vamos a ver ahora cómo, a partir de una matriz positiva, podemos construir una matriz estocástica.

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ positiva, denominamos matriz de *normalización*, que notamos por ΣA, la matriz

$$\Sigma A = \begin{pmatrix} a_{11}+\ldots+a_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{21}+\ldots+a_{2n} & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n1}+\ldots+a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observamos que la matriz ΣA es siempre inversible.

Definición 4.4.3. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ positiva, denominamos *matriz normalizada de* A, que notamos por $N(A)$, la matriz

$$N(A) = (\Sigma A)^{-1}A.$$

La matriz normalizada es tal que la suma de los elementos de cada fila vale 1. Esto es, $N(A)$ es una matriz *estocástica*.

Observación. Se puede generalizar esta definición a matrices no negativas. En este caso, no siempre se puede asegurar que la matriz ΣA sea inversible. Veámoslo con un ejemplo. Consideramos la matriz l

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y su correspondiente "matriz de normalización"

$$\Sigma A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fijamos un valor no nulo $\ell \in \mathbb{R}^+$

$$\overline{\Sigma A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}$$

con lo que $\overline{\Sigma A}$ es ahora inversible. La "matriz normalizada" de A sería

$$N(A) = (\overline{\Sigma A})^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz $N(A)$, en este caso, es tal que la suma de los elementos de todas sus filas no nulas es igual a 1.

4.5. Matrices totalmente no negativas

Consideramos ahora matrices que son, no solamente no negativas, sino tales que todos sus menores (de cualquier orden) son también no negativos. Estas matrices tienen importantes aplicaciones en la teoría de pequeñas oscilaciones de sistemas elásticos.

Definición 4.5.1. Una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ se dice que es *totalmente no negativa* si todos los menores de cualquier orden son no negativos.

Una consecuencia inmediata de la definición es que toda matriz totalmente no negativa es no negativa (los menores de orden 1 son no negativos).

Ejemplo 4.5.1. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

observamos que A_1 es una matriz totalmente no negativa, pero A_2 no es totalmente no negativa, puesto que $\det A_2 = -3 < 0$.

Definición 4.5.2. Una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ se dice que es *totalmente positiva* si todos los menores de cualquier orden son positivos.

Una consecuencia inmediata de la definición es que toda matriz totalmente positiva es positiva (los menores de orden 1 son positivos).

Ejemplo 4.5.2. Las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

son totalmente positivas. Sin embargo, las matrices positivas del ejemplo anterior no son totalmente positivas.

4.6. Ejercicios resueltos

1. Estudia si son o no reducibles las matrices siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:
Analicemos la matriz A. Observamos que el subespacio $F = [e_1, e_3]$ es invariante por la matriz A ya que $A(e_1 = e_1 + 2e_3 \in [e_1, e_3], A(e_3) = 2e_1 + 3e_3 \in [e_1, e_3]$.
De hecho, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

por lo que A es reducible.

Pasemos a analizar la matriz B.

Es fácil observar que ninguno de los subespacios $[e_1]$, $[e_2]$, $[e_3]$,$[e_1,e_2]$,$[e_1,e_3]$, $[e_2,e_3]$ son invariantes, por lo que la matriz B es irreducible.

2. Estudia si son o no primitivas las matrices

$$C=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Solución:

Estudiemos la matriz C.

Primero observamos que la matriz es no negativa ($a_{ij}>0$, $\forall i,j$) y es irreducible ($C=2B$, siendo B la matriz del ejercicio anterior). Los valores propios de la matriz son 2 doble y 8 simple, claramente el radio espectral es 8, por lo que la matriz es primitiva.

Pasemos ahora a analizar la matriz D.

Observamos que

$$(I_3+D)^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

es triangular; por tanto, $(I_3+D)^{n-1}$ no es positiva, por lo que D no puede ser primitiva.

3. Comprueba el teorema de Frobenius para la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Solución:

Observamos que la matriz es no negativa y primitiva. Sus valores propios son las tres raíces de la unidad; por tanto, el radio espectral es 1 e igual a la raíz real (simple).

4. ¿Para qué valores de a,b,c,d la matriz siguiente es estocástica?

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&b&a&c\\c&a&d&b\\b&c&d&a\end{pmatrix}$$

¿Para qué valors es doblemente estocástica?

Solución:
La matriz es estocástica si y solo si

$$a+b+c+d=1, \quad a,b,c,d \geq 0$$

Para que sea doblemente estocástica, tiene además que cumplirse que

$$2b+a+c=1, \quad \text{y} \quad a+c+2d=1$$

por lo que $b=d$.

4.7. Ejercicios propuestos

1. Sea A una matriz cuadrada no negativa de $MN_n(\mathbb{R})$. Demuestra que, si x,y son dos vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $x \geq y$, entonces se cumple $Ax \geq Ay$.

2. Sean $A,B \in MN_n(\mathbb{R})$ tales que $A \geq B$. Demuestra que $\rho(A) \geq \rho(B)$.

3. Sea A una matriz cuadrada no negativa. Demuestra que, si existe un vector x tal que $Ax \leq \lambda x$, entonces $\lambda \geq \rho(A)$.

4. Sea A una matriz cuadrada no negativa. Demuestra que $(\lambda I - A)^{-1}$ es no negativa si y solo si $\lambda > \rho(A)$.

5. Sea $A \in MN_n(\mathbb{R})$ irreducible. Demuestra que para todo $\varepsilon > 0$, la matriz $\varepsilon I_n + A$ es primitiva.

6. Estudia si son, o no, primitivas las matrices siguientes

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{8}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{8}{10} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: Ambas son primitivas.

7. Sean $A,B \in MN_n(\mathbb{R})$ dos matrices estocásticas. Demuestra que la matriz

$$\lambda A + (1-\lambda)B, \quad \text{con } 0 \leq \lambda \leq 1$$

es también estocástica.

Solución: $\sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij} + (1-\lambda) b_{ij}) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1.$

8. Sean $A,B \in MN_n(\mathbb{R})$ dos matrices doblemente estocásticas. ¿Es AB doblemente estocástica?

9. Demuestra que la matriz es doblemente estocástica.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Solución: $2/3 + 1/3 = 1$.

10. Indica si son o no totalmente no negativas las matrices siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución: A es totalmente no negativa; B no es totalmente no negativa.

→ 5

Cadenas de Markov finitas

5.1. Cadenas de Markov a variable discreta

Consideremos un sistema físico que puede existir solamente en uno de un número finito de estados y tal que su estado puede evolucionar solo en puntos discretos del tiempo. Sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots\}$ el conjunto de estados. Utilizamos la expresión $X_k = j$ para indicar que el proceso está en estado j en el tiempo k.

Suponemos que hay una probabilidad (que puede o no depender del tiempo k) de que un sistema que está en el estado j en el tiempo k evolucione hacia el estado i en el tiempo $k+1$. Esta restricción permite utilizar un modelo matemático (matricial) que estudia la evolución a lo largo del tiempo y que vamos a tratar a continuación.

Definición 5.1.1. Una *cadena de Markov* es un proceso aleatorio sin memoria.

Esto es un sistema que evoluciona en el tiempo $(k = 0, 1, \ldots)$ está en el estado i_k en el instante k, si en el instante $k-1$ está en el estado i_{k-1}:

$$
\begin{aligned}
&P(X_k = i_k \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{k-1} = i_{k-1}) = \\
&P(X_k = i_k \mid X_{k-1} = i_{k-1}) = p_{i_{k-1}, i_k}
\end{aligned}
$$

Intuitivamente, esta ecuación implica que, conocido el estado “presente” de un sistema, el estado “futuro”es independiente de su estado “pasado”.

Tal como decíamos al principio, vamos a describir matricialmente este proceso. Sean $p_1(k)$, …, $p_n(k)$ las probabilidades de los n estados en el tiempo k.

Sea$p_{ij}(k)$ la probabilidad de la evolución del estado i al j en el tiempo k, $1 \le i, j \le n$.

Entonces,

$$\left.\begin{aligned} p_1(k+1) &= p_{11}(k)p_1(k)+\ldots+p_{1n}(k)p_n(k) \\ &\vdots \\ p_n(k+1) &= p_{n1}(k)p_1(k)+\ldots+p_{nn}(k)p_n(k) \end{aligned}\right\}$$

lo que puede expresarse matricialmente de la forma:

$$\begin{pmatrix} p_1(k+1) \\ \vdots \\ p_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & \ldots & p_{1n}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(k) & \ldots & p_{nn}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(k) \\ \vdots \\ p_n(k) \end{pmatrix}$$

Definición 5.1.2. Denominamos *matriz de transición de estados* la matriz:

$$A(k) = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & \ldots & p_{1n}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(k) & \ldots & p_{nn}(k) \end{pmatrix}$$

Observación 1.

$$p(k+1) = A(k)p(k)$$

Definición 5.1.3. Si $p_{ij}(k)$ no depende de k para todos los pares (i,j), $1 \leq i,j \leq n$, decimos que la cadena es *homogénea*.

Ejemplo 5.1.1. Consideremos una red de comunicación que consiste en una sucesión de estados de canales de comunicación binarios, donde $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ representa el dígito saliente del estado n-ésimo del sistema y $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, el dígito entrante del primer estado. Supongamos que los canales de comunicación binarios son estocásticamente idénticos. La red de comunicación se representa mediante la relación siguiente:

$$\begin{aligned} x_n &= (1-a)x_{n-1} + by_{n-1} \\ y_n &= ax_{n-1} + (1-b)y_{n-1} \end{aligned}$$

por lo que la matriz de transición de estados es

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$$

De ahora en adelante, supondremos que las cadenas son homogéneas. En dicho caso, tenemos la proposición siguiente:

Proposición 5.1.1. Sea $p(0) = (p_1(0), \ldots, p_n(0))$ una probabilidad inicial. Entonces,

$$p(k) = A^k p(0).$$

Demostración. Vamos a hacer una demostración por inducción. Comprobemos, en primer lugar, que el enunciado es cierto para $k = 1$ y $k = 2$:

$$p(1) = Ap(0), \; p(2) = Ap(1) = AAp(0) = A^2 p(0)$$

Supongamos ahora que $p(k-1) = A^{k-1}p(0)$. Veamos que el enunciado es cierto para k:

$$p(k) = Ap(k-1) = AA^{k-1}p(0) = A^k p(0)$$

■

Observación 2. Puesto que

$$\begin{aligned} p_{11} + \ldots + p_{n1} &= 1 \\ &\vdots \\ p_{1n} + \ldots + p_{nn} &= 1 \end{aligned}$$

y la matriz A es no negativa, vemos que A^t es una matriz estocástica. La matriz A recibe el nombre de *matriz de Markov*.

Comportamiento asintótico

Consideremos una cascada de comunicación binaria libre de error. Esto es, la matriz de transición de estados es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, la cadena nunca cambia de estado y un dígito transmitido es recibido correctamente después de un número arbitrario de estados.

Obviamente, esto no siempre sucede así. Nos interesa conocer la evolución a lo largo del tiempo de una cadena de Markov.

Definición 5.1.4. Denominamos *distribución estacionaria* de una cadena de Markov en caso de existir

$$\pi = \lim_{k\to\infty} p(k)$$

Observación. Si la cadena de Markov es homogénea (como los casos que estamos considerando), la existencia de π equivale a la existencia de $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$.

$$\lim_{k\to\infty} p(k) = \lim_{k\to\infty} A^k p(0) = (\lim_{k\to\infty} A^k)p(0)$$

Proposición 5.1.2. Si A es irreducible, entonces existe π. Además, si A es primitiva, entonces π es independiente de la distribución de probabilidad $p(0)$ inicial. De hecho,

$$\pi = \frac{1}{\sum v_i}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

siendo $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vector propio de valor propio 1.

Demostración. El teorema de Perron-Frobenius nos asegura que 1 es el valor propio igual al radio espectral y es el único con dicho módulo en caso de ser A primitiva. También nos asegura la existencia de un vector propio no negativo para dicho valor propio. ∎

El hecho de que la matriz A sea irreducible se traduce, en términos de cadenas de Markov, en que cada estado puede ser alcanzado por otro estado mediante un número finito de pasos. Esto es, existe $n \geq 0$ para el cual $p_{ij}(n) > 0$. Las cadenas que cumplen esta condición reciben el nombre de *cadenas de Markov irreducibles o ergódicas*. Las cadenas de Markov en que la matriz de transición de estados es primitiva reciben el nombre de *regulares*.

El hecho de que la cadena de Markov no sea primitiva no impide que exista distribución estacionaria, si bien esta dependerá de la distribución inicial.

Ejemplo 5.1.2. Consideremos una cascada de comunicación binaria tan ruidosa que el dígito transmitido siempre es erróneamente interpretado. Esto es, la matriz de transición de estados es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$A^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } k \text{ es par} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Observamos que no existe $\lim_{k\to\infty} A^k$. Sin embargo, para la distribución de probabilidad inicial $p(0) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$, se tiene que $\lim_{k\to\infty} A^k p(0) = p(0)$. (Nótese que $p(0)$ es el único vector propio de valor propio 1 de A con suma de componentes igual a 1.)

Definición 5.1.5. Decimos que un estado i en una cadena de Markov es *absorbente* si, cuando ocurre en una repetición del experimento, entonces ocurre en cada repetición posterior. Es decir, si $p_{ii} = 1$ y $p_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Una cadena de Markov se dice que es *absorbente* si existe algún estado absorbente.

En una cadena de Markov absorbente, los estados que no lo son se denominan *transitorios*.

Ejemplo 5.1.3. Consideremos un sistema aleatorio cuya matriz de transición de estados viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, los estados 4 y 5 son absorbentes y los estados 1,2,3 son transitorios.

Dada una cadena de Markov absorbente, siempre podemos renombrar los estados de forma que la matriz de transición de estados sea de la forma

$$A = \begin{pmatrix} T & 0 \\ Q & I \end{pmatrix}$$

siendo I la matriz identidad de orden el número de estados absorbentes. En el ejemplo anterior,

$$A = \begin{pmatrix} T & 0 \\ Q & I_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Si partimos el vector de probabilidad $p(k) = \begin{pmatrix} p_1(k) \\ \vdots \\ p_n(k) \end{pmatrix}$ en dos vectores según los órdenes de las matrices T e I, respectivamante, tenemos que $p(k) = \begin{pmatrix} u(k) \\ v(k) \end{pmatrix}$ con lo que

$$\begin{pmatrix} u(k+1) \\ v(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ v(k) \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} u(k+1) &= Tu(k) \\ v(k+1) &= v(k) + Qu(k) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} u(k) &= T^k u(0) \\ v(k) &= v(k-1) + QT^{k-1}u(0) = v(0) + \sum_{r=0}^{k-1} QT^r u(0) \end{aligned}$$

En el caso particular en que $\rho(T) < 1$, entonces

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} T^k = 0 \\ &\sum_{r=0}^{\infty} T^r = \lim_{k\to\infty} \sum_{r=0}^{k} T^r = (I-T)^{-1} \end{aligned}$$

y

$$\lim_{k\to\infty} v(k) = v(0) + Q(I-T)^{-1}u(0).$$

Así, en el ejemplo 5.1.3, tenemos

$$\lim_{k\to\infty} v(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Proposición 5.1.3. Si A es la matriz de transición de estados de una cadena de Markov absorbente tal que la matriz $T \in M_r(\mathbb{R})$ es irreducible y Q es no nula, entonces $\lim_{k\to\infty} T^k = 0$ y, por tanto, existe $\lim_{k\to\infty} v(k)$.

Demostración. Puesto que $Q \neq 0$, se tiene $\sum_{i=1}^{r} t_{ij} \leq 1$. La desigualdad es estricta, al menos en el caso de una columna.
Por otra parte, al ser la matriz T irreducible, se tiene que $\rho(T)$ es tal que

$$s = \min_j \left(\sum_{i=1}^{r} t_{ij} \right) \leq \rho(T) \leq \max_j \left(\sum_{i=1}^{r} t_{ij} \right) = S \leq 1$$

En particular, $\rho(T) \leq 1$. Además, $s = \rho(T)$ o $S = \rho(T)$ si y solo si $s = S$, en cuyo caso $\rho(T) < 1$, ya que $s < 1$. Luego, siempre se cumple que $\rho(T) < 1$. ■

Análisis moderno de las cadenas de Markov

Recientes estudios acerca de las cadenas de Markov homogéneas muestran cómo podemos obtener información acerca de dichas cadenas mediante la inversa generalizada de una cierta matriz asociada a la matriz de transición que define la cadena.

Dada una matriz de transición de estados A de una cadena de Markov, observamos que la matriz $B = I - A$ es tal que $b_{ii} \geq 0$ y $b_{ij} \leq 0$. Las matrices B tales que pueden expresarse como $B = sI - A$, con A no negativa y $b_{ii} \geq 0$, $b_{ij} \leq 0$ para un cierto $s \leq \rho(A)$, reciben el nombre de *M-matrices*.

Proposición 5.1.4. Sea A una matriz de transición de estados de una cadena de Markov. Entonces, existe $\lim_{k\to\infty} A^k$ y dicho límite vale

$$L = I - BB^+.$$

(Una M-matriz B que cumple la condición de convergencia "existe $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{s}A\right)^k$", recibe el nombre de *$M$-matriz con propiedad c*.)

Demostración. Al ser $A = (a_{ij})$ una matriz de transición de estados, se tiene que $0 \leq a_{ij} \leq 1$. Luego, $b_{ii} \geq 1$ y $b_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$. ■

Observación. No todas las M-matrices verifican la condición c. Veámoslo con un ejemplo. Sea B la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, B puede representarse como $B = sI - A$, con $s > 0$ y $A = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$. Puesto que A es no negativa, B es una M-matriz. Por otra parte, dada una matriz T, existe $\lim_{k\to\infty} T^k$ si y solo si $\rho(T) < 1$. En nuestro caso, para todo $s > 0$, $\rho\left(\frac{1}{s}A\right) = 1$, por lo que no puede verificarse la condición c.

También cabe destacar que, si B es una M-matriz con $s > \max_i b_{ii}$, entonces verifica la condición c. Así, por ejemplo, sea

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

.
Entonces, la sucesión de término general

$$\left(\frac{1}{s}A\right)^k = \left(\frac{1}{s}\begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}\right)^k$$

no es convergente para $s = 1$. Sin embargo, sí lo es para cualquier $s > 1$.

5.2. Ejercicios resueltos

1. Sea una cadena de Markov a dos variables cuya matriz de transición de estados es

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Calcula $\lim\limits_{k\to\infty} p(k)$.

Solución:

La cadena de Markov es homogénea, por lo que hemos de calcular

$$\lim_{k\to\infty} P^k$$

Tenemos que

$$P = SDS^{-1}$$

con

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\lim_{k\to\infty} P^k = S(\lim_{k\to\infty} D^k)S^{-1}p(0)$$

Calculemos

$$\lim_{k\to\infty} D^k = \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1^k & \\ & 0{,}2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$\lim_{k\to\infty} P^k = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} p(0) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} p(0)$$

2. Una ciudad tiene tres supermercados X, Y, Z. Considerando un determinado período de tiempo, observamos que, por diferentes razones como el precio, la calidad,..., algunos habitantes deciden cambiar de cadena. Queremos analizar y expresar en un modelo matemático el movimiento de clientes de una cadena a otra suponiendo que la proporción de clientes que cambian de supermercado al día se mantiene constante durante un mes.

Aplíquese al caso en que la proporción de clientes de X, Y, Z a 31 de diciembre es $(0{,}2, 0{,}3, 0{,}5) = u(0)$ respecto de la población total y si la proporción de clientes que permanecen en el supermercado o que cambian de uno a otro es

que se mantiene en X, 0,8; que pasa de Y, Z a X es 0,2, 0,1 respectivamente

que se mantiene en Y, 0,7; que pasa de X, Z a Y es 0,1, 0,3 respectivamente

que se mantiene en Z, 0,6; que pasa de X, Y a Z es 0,1, 0,1 respectivamente

Solución:

Supongamos que la proporción de clientes de X, Y, Z a 31 de diciembre es $(x_0, y_0, z_0) = u(0)$ respecto de la población total y que a 31 de enero es $(x_1, y_1, z_1) = u(1)$. Puesto que la totalidad de la población compra en estos tres únicos estableciemientos, tenemos que

$$x_0 + y_0 + z_0 = 1$$
$$x_1 + y_1 + z_1 = 1$$

Ahora bien, la proporción de clientes en enero en cada uno de los supermercados es

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 \\ y_1 &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 \\ z_1 &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 \end{aligned}\right\},$$

donde a_{ij}, con $j \neq i$, es la proporción de clientes del supermercado j que absorbe el supermercado i, y a_{ii} es la proporción de clientes del supermercado i que se mantiene en i.

Puesto que la proporción de clientes que cambia de supermercado se mantiene constante durante un mes, tenemos

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= a_{11}x_k + a_{12}y_k + a_{13}z_k \\ y_{k+1} &= a_{21}x_k + a_{22}y_k + a_{23}z_k \\ z_{k+1} &= a_{31}x_k + a_{32}y_k + a_{33}z_k \end{aligned}\right\},$$

por lo que, en lenguaje matricial, tenemos

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \end{pmatrix}.$$

Si lo aplicamos a nuestro caso concreto y, tenemos

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de A son 1, 0,6, 0,5, y los vectores propios respectivos son

$$v_1 = (0{,}45, 0{,}35, 0{,}20),\ v_2 = (1, -1, 0),\ v_3 = (1, -2, 1).$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que

$$u(0) = 1v_1 + (-0{,}55)v_2 + 0{,}3v_3$$

tenemos que

$$A^k u(0) = 1 \cdot 1^k v_1 + (-0{,}55)(0{,}6)^k v_2 + 0{,}3(0{,}5)^k v_3$$

Finalmente, observamos que

$$\lim_k A^k u(0) = v_1 = (0{,}45, 0{,}35, 0{,}20)$$

3. Revisando la cantidad de socios de un club de una ciudad, se observa que el 80% de las personas que son socias un año lo son también el siguiente y que el 30% de las que no son socias lo son al siguiente. ¿Cuál será la situación a largo plazo de dicho club?

Solución:

Si denominamos por $s(k)$ la cantidad de socios del año k y $n(k)$ la cantidad de personas que no lo son, tenemos la relación siguiente entre los socios $p(k) = \begin{pmatrix} s(k) \\ n(k) \end{pmatrix}$ de un año y el siguiente

$$p(k+1) = \begin{pmatrix} s(k+1) \\ n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(k) \\ n(k) \end{pmatrix} = Ap(k)$$

Hemos de calcular $\lim_{k\to\infty} p(k) = (\lim_{k\to\infty} A^k)p(0)$

$$A = SDS^{-1}, \quad \lim_{k\to\infty} A^k = S(\lim_{k\to\infty} D^k)S^{-1}$$

con

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad \lim_{k\to\infty} D^k = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

4. R. Cyert y G. Thompson [3] propusieron un modelo en tiempo discreto de la cadena de Markov para estimar las pérdidas en cuentas pendientes de cobro. La idea del modelo de cadena de Markov para cuentas pendientes de cobro es una cuenta que se mueve a través de estados de morosidad diferentes cada mes. Por ejemplo, una cuenta que este mes está "al corriente de pago" estará también "al corriente de pago" el próximo mes si se hace un pago en la fecha debida, y estará en los "30 días de demora" si no se recibe el pago. Una característica importante es que el modelo de cadena de Markov mantiene la progresión en el tiempo de las situaciones en el paso de "al corriente de pago" la "pérdida" . Por ejemplo, una cuenta en el estado "al corriente de pago" no se convierte de repente en una "pérdida" . En su lugar, una cuenta mensual ha de progresar desde el estado "al corriente de pago" a los "30 días de demora" a los "90 días de demora" y así sucesivamente hasta que se hayan completado las actividades de ejecución hipotecaria y los activos de garantía se vendan para pagar la deuda pendiente.

La matriz de transición de la cadena de Markov representa el movimiento de mes a mes de los préstamos entre las clasificaciones de morosidad o corriente de pago.

En primer lugar, se divide la cartera de préstamos en segmentos, donde todos los préstamos dentro de un segmento son similares y se espera que tengan la misma matriz de transición.

Consideremos un ejemplo simple de un modelo de cadena de Markov para una cartera de préstamos donde los estados se definen como p_1 ¿estar al corriente de pago?, p_2 ¿moroso?, p_3 ¿pérdida?, p_4 ¿amortizado?. Supongamos que la matriz de transición de estados es

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0{,}98 & 0{,}15 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}01 & 0{,}75 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}07 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{pmatrix}$$

a) Interpreta el valor 0,01 situado en la segunda fila y primera columna de la matriz.

b) Justifica por qué la cadena de Markov es absorbente.

c) Si el estado inicial $p(0)$ es estar al corriente de pago, ¿cuál es la distribución de probabilidad de morosidad al cabo de 24 meses?

Solución:

a) El valor de 0,01 en la primera columna de la segunda fila es la probabilidad de pasar de ``estar al corriente de pago" de este mes a “moroso” el próximo mes.

b) Los estados de “pérdida” y amortizado" son absorbentes ya que, finalmente, todos los préstamos terminan en uno de estos dos estados.

c) Supongamos que el estado inicial es estar al corriente de pago; la distribución de probabilidad de morosidad es $p(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La distribución de probabilidad de estados del préstamo al cabo de 24 meses será

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}15 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}04 & 0{,}75 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}07 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{pmatrix}^{24} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}7002 & 0{,}4439 & 0 & 0 \\ 0{,}0296 & 0{,}0196 & 0 & 0 \\ 0{,}0481 & 0{,}3034 & 1{,}0000 & 0 \\ 0{,}2221 & 0{,}2332 & 0 & 1{,}0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7002 \\ 0{,}0296 \\ 0{,}0481 \\ 0{,}2221 \end{pmatrix}.$$

5. Supongamos que, en un pequeño locutorio cibertelefónico con cinco línas de teléfono, durante un período de tiempo se observa la ocupación de las línias telefónicas a intervalos de 2 minutos y se anota el número de líneas ocupadas en cada instante. En un instante de tiempo dado, puede haber seis estados de ocupación de dichas líneas: ninguna (e_1), una (e_2), dos (e_3) y hasta cinco (e_6) líneas ocupadas.

Denotamos por $p_i(k)$ la probabilidad de que se dé el estado e_i en el período de tiempo k, y p_{ij} la probabilidad de que haya i líneas ocupadas si en el instante anterior había j, (Así, p_{11} es la probabilidad de que no haya ninguna ocupada si en el instante anterior tampoco había ninguna ocupada, y p_{23} es la probabilidad de que haya una línea ocupada si en el instante anterior había dos.)

De los datos observados, y si suponemos que, en el ejemplo del locutorio telefónico, los números de líneas que están siendo utilizadas en los instantes de tiempo $1,2,\ldots$ constituyen una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias, obtenemos la siguiente matriz de transición P

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}20 \end{pmatrix}$$

a) Si las cinco líneas están ocupadas en un instante de tiempo determinado. ¿cuál es la probabilidad de que en el instante siguiente haya exactamente cuatro líneas ocupadas?

b) Si, en un instante de tiempo, no hay ninguna línea ocupada. ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos una línea ocupada en el siguiente instante de tiempo?

c) Si dos líneas están ocupadas en un instante de tiempo concreto, ¿cuál es la probabilidad de que haya cuatro líneas ocupadas dos instantes después?

d) ¿Cuál es la evolución a lo largo del tiempo si inicialmente no hay ninguna línea ocupada?

Solución:

a) Observando la matriz de transición, tenemos que $p_{56} = 0{,}4$.

b) $p_{21} + p_{31} + p_{41} + p_{51} + p_{61} = 1 - p_{11} = 0{,}9$.

c) Debemos observar el término que ocupa el lugar 53 de la matriz P^2.

Calculamos, pues, P^2

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}14 & 0{,}14 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}12 \\ 0{,}19 & 0{,}23 & 0{,}18 & 0{,}16 & 0{,}15 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}21 & 0{,}19 & 0{,}16 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}18 & 0{,}20 & 0{,}18 & 0{,}17 \\ 0{,}16 & 0{,}16 & 0{,}17 & 0{,}20 & 0{,}24 & 0{,}25 \\ 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}15 & 0{,}16 \end{pmatrix}$$

por lo que $p_{53} = 0{,}17$.

d) Para conocer la evolución a lo largo del tiempo, hemos de calcular

$$\lim_{k\to\infty} P^k.$$

Busquemos la forma reducida de la matriz

$\det(P-\lambda I) = (1-\lambda)(0{,}3496-\lambda)(0{,}2220-\lambda)(0{,}0780-\lambda)(-0{,}100-\lambda)(-0{,}0496-\lambda)$

Luego, la matriz diagonaliza y la matriz de cambio de base S es

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}3282 & -0{,}7071 & -0{,}2748 & 0{,}2764 & -0{,}2418 & 0{,}0638 \\ 0{,}4287 & 0{,}7071 & -0{,}4803 & 0{,}3068 & -0{,}0944 & -0{,}0158 \\ 0{,}4500 & -0{,}0000 & -0{,}3741 & -0{,}4551 & 0{,}7462 & -0{,}1678 \\ 0{,}4188 & -0{,}0000 & 0{,}1955 & -0{,}6832 & -0{,}5740 & 0{,}3707 \\ 0{,}4762 & -0{,}0000 & 0{,}6666 & 0{,}3050 & -0{,}0462 & -0{,}7574 \\ 0{,}3223 & -0{,}0000 & 0{,}2671 & 0{,}2501 & 0{,}2101 & 0{,}5064 \end{pmatrix}$$

y la matriz diagonal es

$$D = S^{-1}PS = \begin{pmatrix} 1{,}0000 & & & & & \\ & -0{,}2000 & & & & \\ & & 0{,}3496 & & & \\ & & & 0{,}2220 & & \\ & & & & 0{,}0780 & \\ & & & & & -0{,}0496 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{k\to\infty} P^k = S(\lim_{k\to\infty} D^k)S^{-1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} D^k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = Q,$$

por lo que la situación a largo que se ha plazo, iniciado en el estado “ninguna línea conectada”$p(0) = (1,0,0,0,0,0)$ es

$$P(p(0)) = SQS^{-1}(p(0)) = \begin{pmatrix} 0{,}1354 \\ 0{,}1769 \\ 0{,}1856 \\ 0{,}1728 \\ 0{,}1964 \\ 0{,}1329 \end{pmatrix}$$

6. El viento es una fuente considerable de energía, a la vez que contribuye significativamente en los procesos de intercambio térmico entre la superficie de la tierra y la atmósfera.

El viento puede ser considerado un proceso aleatorio estacionario en una escala corta de tiempo. Por tanto, es de gran interés para evaluar sus características climaticoestadísticas. Estas características pueden ser estudiadas teniendo en cuenta la velocidad del viento y las mediciones de dirección recogidas en varias estaciones meteorológicas. Una manera de valorar las características estadísticas del viento puede ser mediante el uso de cadenas de Markov.

El viento puede soplar en la misma dirección durante un tiempo relativamente largo. Entonces, de repente, aparecen cambios de una dirección a otra; sigue soplando en la nueva dirección hasta un nuevo cambio, y así sucesivamente. La secuencia resultante de datos de la dirección del viento se hace mediante series de tiempo de estados estables y los cambios bruscos entre ellos. Estos estados dependen de la fuerza del viento que puedas tomar todas las direcciones de la veleta. La velocidad y la dirección del viento son erráticas y persistentes. Esto significa que las variaciones del viento en el tiempo se pueden describir mediante cadenas de Markov.

Se pretende analizar la inferencia sobre las probabilidades de cambio de una dirección a otra a partir de una muestra observada de direcciones del viento. De acuerdo con la división en ocho sectores de los puntos cardinales, clasificamos las direcciones del viento en ocho estados

$$\{N, NE, E, SE, S, SO, O, NO\}:$$

Se han realizado mediciones en un lugar de la tierra, y se supone que los datos (basados en los estudios de Martha Cecilia Palafox Duarte [11]) de direcciones del viento obtenidos pueden modelizarse mediante una cadena de Markov. Denominando p_{ij} la probabilidad de que el viento tome la dirección i si en el estado anterior tiene la dirección j, una aproximación de la variación de la dirección del viento viene dada por la siguiente matriz de transferencia P:

$$\begin{pmatrix}
0{,}541 & 0{,}3604 & 0{,}261 & 0{,}18 & 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}37 & 0{,}36 \\
0{,}311 & 0{,}44 & 0{,}281 & 0{,}11 & 0{,}070 & 0{,}057 & 0{,}13 & 0{,}206 \\
0{,}061 & 0{,}11 & 0{,}27 & 0{,}102 & 0{,}031 & 0{,}023 & 0{,}06 & 0{,}033 \\
0{,}034 & 0{,}041 & 0{,}083 & 0{,}311 & 0{,}22 & 0{,}034 & 0{,}02 & 0{,}236 \\
0{,}021 & 0{,}0264 & 0{,}06 & 0{,}181 & 0{,}323 & 0{,}256 & 0{,}1 & 0{,}066 \\
0{,}011 & 0{,}007 & 0{,}03 & 0{,}081 & 0{,}16 & 0{,}27 & 0{,}12 & 0 \\
0{,}008 & 0{,}0062 & 0{,}01 & 0{,}035 & 0{,}07 & 0{,}12 & 0{,}14 & 0{,}033 \\
0{,}013 & 0{,}009 & 0{,}005 & 0 & 0{,}006 & 0{,}08 & 0{,}06 & 0{,}066
\end{pmatrix}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el viento permanezca en la dirección norte (N) si se encuentra en esa misma dirección?

b) Si, en el momento actual, el viento tiene dirección sur, ¿cuál es la probabilidad de que el viento tome la dirección NO al cabo de dos períodos de tiempo?

c) Determina, en caso de que exista, la distribución estacionaria.

Solución:

a) $p_{11} = 0{,}541$

b) Hemos de calcular P^2 (utilizando MATLAB):

$$\begin{pmatrix}
0{,}4387 & 0{,}3995 & 0{,}3454 & 0{,}2673 & 0{,}2303 & 0{,}2663 & 0{,}3709 & 0{,}3640\\
0{,}3318 & 0{,}3460 & 0{,}2981 & 0{,}1891 & 0{,}1431 & 0{,}1504 & 0{,}2357 & 0{,}2603\\
0{,}0890 & 0{,}1059 & 0{,}1315 & 0{,}0919 & 0{,}0639 & 0{,}0497 & 0{,}0713 & 0{,}0838\\
0{,}0550 & 0{,}0605 & 0{,}0842 & 0{,}1591 & 0{,}1573 & 0{,}1070 & 0{,}0721 & 0{,}1276\\
0{,}0406 & 0{,}0447 & 0{,}0725 & 0{,}1518 & 0{,}1987 & 0{,}1815 & 0{,}0994 & 0{,}0867\\
0{,}0200 & 0{,}0205 & 0{,}0386 & 0{,}0860 & 0{,}1238 & 0{,}1339 & 0{,}0736 & 0{,}0400\\
0{,}0124 & 0{,}0120 & 0{,}0188 & 0{,}0413 & 0{,}0612 & 0{,}0728 & 0{,}0480 & 0{,}0242\\
0{,}0125 & 0{,}0109 & 0{,}0110 & 0{,}0135 & 0{,}0217 & 0{,}0383 & 0{,}0288 & 0{,}0134
\end{pmatrix}$$

c) Calculemos los valores propios de P (utilizando MATLAB).

$$\begin{array}{rrr}
\lambda_1 = 1{,}0000, & \lambda_2 = 0{,}5802, & \lambda_3 = 0{,}2627,\\
\lambda_4 = 0{,}0520 + 0{,}0114i, & \lambda_5 = 0{,}0520 - 0{,}0114i, & \lambda_6 = 0{,}1679,\\
\lambda_7 = 0{,}1136, & \lambda_8 = 0{,}1326 &
\end{array}$$

Observamos que $|\lambda_i| < 1$, para todo $i = 2, \dots, 8$, ($\sqrt{0{,}0520^2 + 0{,}0114^2} = \sqrt{0{,}0028} < 1$).

Por tanto, existe distribución estacionaria ($\lim\limits_{k\to\infty} P^k$),

$$\lim_{k\to\infty} P^k p(0) = \frac{1}{1{,}9781}(0{,}7517, 0{,}5882, 0{,}1867, 0{,}1553, 0{,}1440, 0{,}0806, 0{,}0438, 0{,}0278)$$

siendo

$$\frac{1}{1{,}9781}(0{,}7517, 0{,}5882, 0{,}1867, 0{,}1553, 0{,}1440, 0{,}0806, 0{,}0438, 0{,}0278)$$

el vector propio de valor propio 1.

5.3. Ejercicios propuestos

1. Sea A una matriz de Markov positiva. Determina el límite de A^n cuando n crece indefinidamente.

2. Demuestra que, si A es una matriz de Markov positiva, entonces 1 es el único valor propio de módulo 1. Además, $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = 1$.

3. Sea A una matriz de Markov tal que A^2 es positiva. Estudia el límite de A^{2n} y de A^{2n+1} cuando n crece indefinidamente. ¿Qué puede decirse de la convergencia de A^n?

4. Consideremos una cadena de Markov cuya matriz de transición de estados es

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Prueba que la cadena es irreducible.

Solución: A es irreducible.

5. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}$$

que es la matriz de transición de estados de una cadena de Markov absorbente. Calcula $\lim\limits_{k\to\infty} p(k)$.

Solución: $A = \left(\begin{smallmatrix} T & 0 \\ Q & I \end{smallmatrix}\right), I = (1), Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \lim\limits_{k\to\infty} v(k) = v(0) + Q(I-T)^{-1}u(0)$.

6. Calcula π para el caso en que la matriz de transición de estados A de una cadena de Markov sea primitiva y doblemente estocástica.

Solución: $v = (1/n, \ldots, 1/n)$ es vector propio de valor propio 1.

7. Sea A la matriz de transición de estados de una cadena de Markov siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Demuestra que tiene una única distribución de probabilidad estacionaria.

Solución: $\pi = (1/14, 3/14, 6/14, 4714)$.

8. Sea $A(p)$ la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

que, para cada p, es la matriz de transición de estados de una cadena de Markov. Determina para qué valores de p admite distribución estacionaria. Para los valores en que exista ¿es única?

9. Sea

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

la matriz de transición de estados de una cadena de Markov a variable continua. Determina P_t.

10. Se trata de estudiar cómo una noticia es susceptible de ser cambiada al ser propagada de una persona a otra.

Sea $p(k)$ la probabilidad de que la k-ésima persona escucha la noticia correctamente y $q(k)$ la probabilidad de que la k-ésima persona escucha la noticia erróneamente.

Supongamos que la probabilidad de que una persona comunique la noticia correctamente es 0,95 y que la probabilidad de que lo haga erroneamente es 0,05.

a) Describe dicha propagación, mediante un sistema de ecuaciones, de la forma $x(k+1) = Ax(k)$. Indica los puntos de equilibrio. Proporciona los valores propios de A
b) Comprueba que

$$p(k+1) + q(k+1) = p(k) + q(k)$$

y, por tanto, $p(k) + q(k) = p(0) + q(0) = constante$. ¿cual es dicha constante?
c) Deduce del apartado anterior, una ecuación en diferencias de primer orden que describa la probabilidad de transmitir correctamente la noticia.
d) Resuelve la ecuación hallada en c, suponiendo que la primera persona transmite la noticia correctamente.
Determina, en caso de existir, el punto de equilibrio. ¿Es estable?
e) Calcula $q(k)$ y $\lim_{k} q(k)$
f) Interpreta el resultado.

11. Un señor está paseando a lo largo de una calle en un extremo hay un bar y en el otro está su casa y entre medio hay tres travesías.

Bar --- 1 --- 2 --- 3 --- Casa

Llamemos $p_1(n)$, $p_2(n)$, $p_3(n)$ las probabilidades de que el señor, al llegar a una esquina, esta sea 1, 2, 3, respectivamente, y llamemos $p_4(n)$ y $p_5(n)$ la probabilidad de que la esquina sea el bar o su casa.
Este señor se encuentra en una determinada esquina s. Supongamos que la probabilidad de que camine hacia $s-1$ o $s+1$ es $\frac{1}{2}$ y que, cuando llega a la nueva esquina, sigue adelante salvo que esta sea el bar o su casa, en cuyo caso se queda. Suponiendo que, inicialmente, está a mitad de camino entre el bar y su casa (esquina 2) ¿Qué probabilidad hay de que este señor acabe en el bar? ¿Y en su casa?

→6

Modelos de Leontief en economía

En este capítulo, presentamos una aplicación de la teoría de matrices no negativas al campo de las ciencias económicas, concretamente al análisis de Leontief de entradas y salidas (v. más en [1], [12]).

El análisis de Leontief de entradas y salidas trata de la siguiente cuestión: ¿qué nivel de salidas debería producir cada una de n industrias en una situación económica particular, de manera que sea suficiente para poder satisfacer la demanda total del mercado para este producto?

Ejemplo 6.0.1. Consideremos una simple e hipotética economía, que consiste en tres sectores que pueden ser, por ejemplo: (1) pesca, (2) manufacturados y (3) servicios. Cada uno de los sectores produce una clase de salida, a saber: (1) pescado, (2) manufacturados y (3) servicios. Estos tres sectores son independientes. Todos los productos acabados y servicios que revierten en el proceso de producción son utilizados por el sector externo como mercancías, etc.

A partir de todas estas premisas, damos una tabla hipotética de movimiento de capital tanto de productos como de servicios, calculados en miles de euros.

salidas / entradas	pesca	manufacturados	servicios	demanda externa	total
pesca	20	15	35	30	100
manufacturados	25	15	50	110	200
servicios	30	50	--	80	160

Las filas denotan la distribución de entradas de los distintos sectores y usuarios, y las columnas indican las entradas necesarias para la producción. Así, leyendo la primera fila (pesca), vemos que, del total de 100 euros de productos de pesca, 20 se utilizan para una próxima producción, 15 son ventas a manufacturas, 35 son ventas a servicios y, finalmente, 30 satisfacen la demanda externa. Análogamente, leyendo la segunda columna, tenemos que, en orden a producir 200 euros de salidas totales de manufacturados, entran 15 de pesca, 15 de productos propios y 50 de servicios.

Para analizar la tabla, necesitamos la notación siguiente. Denotamos por 1 la pesca, 2 los productos manufacturados, 3 los servicios y

x_i salidas totales del sector i, para $i = 1,2,3$;

x_{ij} ventas del sector i al sector j;

d_i demanda total en el sector i.

Entonces, la relación básica de las filas de la tabla es

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + d_i, \quad \text{para } i = 1,2,3$$

lo que nos dice que la salida total de un sector consiste en las ventas de productos intermedios a varios sectores de producción y la salida final que tiene en cuenta a los consumidores y al sector abierto.

Agrupamos las salidas totales de todos los sectores en el vector

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

y la demanda final en el vector

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Para el análisis de entradas y salidas, es mucho más conveniente que la tabla indique las entradas necesarias para la producción de una unidad de salidas para cada sector. Para construir la nueva tabla, hacemos la división de cada entrada por el total en el sector. Esto es, denominando t_{ij} el coeficiente de entrada que indica la cantidad de producto i necesario para producir una unidad de salida del producto j, tenemos

$$t_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad 1 \leq i,j \leq 3$$

que, en nuestro caso particular, es

$$\begin{aligned}
x_1 &= 100, \\
x_{11} &= 20, \quad x_{12} = 15, \quad x_{13} = 35, \quad d_1 = 30 \\
x_2 &= 200, \\
x_{21} &= 25, \quad x_{22} = 15, \quad x_{23} = 50, \quad d_2 = 110 \\
x_3 &= 150, \\
x_{31} &= 30, \quad x_{32} = 50, \quad x_{33} = 0, \qquad d_3 = 80 \\
t_{11} &= \frac{x_{11}}{x_1} = 0{,}20, \quad t_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = 0{,}075, \quad t_{13} = \frac{x_{13}}{x_3} = 0{,}233 \\
t_{21} &= \frac{x_{21}}{x_1} = 0{,}25, \quad t_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = 0{,}075, \quad t_{23} = \frac{x_{23}}{x_3} = 0{,}333 \\
t_{31} &= \frac{x_{31}}{x_1} = 0{,}30, \quad t_{32} = \frac{x_{32}}{x_2} = 0{,}25, \quad t_{33} = \frac{x_{33}}{x_3} = 0
\end{aligned}$$

y la tabla queda de la manera siguiente:

entradas \ salidas	pesca	manufacturados	servicios
pesca	0,20	0,075	0,233
manufacturados	0,25	0,075	0,333
servicios	0,30	0,25	0

Observamos ahora que, si denominamos T la matriz (t_{ij}), se tiene que

$$x = Tx + d$$

por lo que, llamando $A = I - T$, nos queda el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$Ax = d. \tag{1.1}$$

Suponemos que los datos de la tabla son fijos, aunque la demanda total y la salida total puedan cambiar. Entonces, la pregunta inicial sobre qué nivel de salidas totales x_i para cada uno de los tres sectores se han de tener para satisfacer las entradas requeridas y las demandas externas se traduce en la resolución del sistema (1.1).

6.1. Modelo abierto

El análisis interindustrial del tipo de Leontief se refiere a sistemas en los que factores tales como máquinas, material, etc. son utilizados como factores de producción de otros productos. El modelo abierto de Leontief es el más simple de todos.

Supongamos que la economía está dividida en n sectores, cada uno de los cuales produce una mercancía, de manera que la producción pueda ser consumida por el propio sector, por otras industrias o fuera del sector.
Identificando el sector i con la mercancía i, tenemos
x_i salidas totales del sector i,
x_{ij} ventas del sector i al j,
d_i demanda final en el sector i,
t_{ij} coeficiente de entradas (número de unidades de la mercancía i necesarias para producir una unidad de la mercancía j).

El *balance* global de entradas y salidas de toda la economía puede expresarse de la forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + d_1 \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + d_n \end{aligned}\right\}$$

Suponemos ahora que, si cambia el nivel de salidas, entonces también cambian proporcionalmente los totales de todas las entradas necesarias.

Esto es, suponiendo una proporción fija del factor de entradas, los coeficientes de entradas t_{ij} son constantes y satisfacen la relación

$$t_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Entonces, el sistema de ecuaciones anterior se transforma en

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \ldots + t_{1n}x_n + d_1 \\ &\vdots \\ x_n &= t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \ldots + t_{nn}x_n + d_n \end{aligned}\right\}$$

Denominamos T la matriz (t_{ij}) y $A = I - T$. El balance total de entradas y salidas se expresa como un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$Ax = d \tag{1.2}$$

donde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es el *vector de salidas* y $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ es el *vector de demandas final*.

El modelo descrito aquí recibe el nombre de *modelo de Leontief abierto* y la matriz T, el de *matriz de entradas del modelo*. La matriz A es tal que $a_{ij} \leq 0$, si $i \neq j$. Estas matrices reciben el nombre de *matrices de Leontief* o *matrices esencialmente no positivas*.

La existencia de solución del sistema (1.2) para salidas no negativas para cada $1 \leq i \leq n$ significa la viabilidad del modelo. Esto nos lleva a la definición siguiente.

Definición 6.1.1. Un modelo abierto de Leontief con matriz de entradas T se dice *viable* si el sistema (1.2) tiene una solución no negativa para cada vector de demanda d.

Teniendo en cuenta que una M-matriz (v. definición en página 98) es no singular si y solo si $A = sI - B$, con $s > 0$, $B \geq 0$ y $s > \rho(B)$, tenemos el teorema siguiente .

Teorema 6.1.1. Consideremos un modelo abierto de Leontief con matriz de entradas T y sea $A = I - T$. El modelo es viable si y solo si A es una M-matriz no singular.

Ejemplo 6.1.1. Como ejemplo, estudiemos la viabilidad del sistema presentado en el ejemplo 6.0.1.

La matriz T es la siguiente

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}075 & 0{,}233 \\ 0{,}25 & 0{,}075 & 0{,}333 \\ 0{,}30 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que la matriz $A = I - T$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}80 & -0{,}075 & -0{,}233 \\ -0{,}25 & 0{,}975 & -0{,}333 \\ -0{,}30 & -0{,}25 & 1 \end{pmatrix}$$

es una M-matriz ($s = 1 > \rho(T)$).
Calculamos $\det A \neq 0$, por lo que la matriz A es regular y, en consecuencia, el modelo es viable.

Corolario 6.1.1. (*Condición de Hawkins y Simon*) Un modelo abierto de Leontief con matriz de entradas T es viable si y solo si la matriz $A = I - T$ tiene todos sus menores principales positivos.

Observación. Si la matriz de entradas T de un modelo abierto de Leontief es irreducible, entonces el modelo es viable si y solo si

$$A^{-1} \gg 0$$

6.2. Modelo cerrado

Si el sector externo del modelo abierto es absorbido en un sistema como otra industria, entonces el sistema se convierte en cerrado.

En dichos modelos, no aparecen ni la demanda final ni las entradas primarias; en su lugar, aparecen las entradas requeridas y la salida de la nueva industria considerada.

Todas las mercancías son intermedias, puesto que cada mercancía es producida solamente por las entradas requeridas en los sectores o industrias del propio sistema.

En el modelo cerrado de entradas y salidas de Leontief, el consumidor o sector abierto es visto como un sector de producción. Puesto que no hay variable determinada para las salidas, nos preguntamos lo siguiente: dado un sistema de producción, ¿cuál es el equilibrio de salida y nivel de precios para que no quede demanda por satisfacer?

A diferencia del caso abierto, ahora las demandas finales son consideradas entradas del sector de consumo y cada componente d_i (demanda externa del sector) está relacionada con el *nivel de empleo* $\mathscr{E}$. Definiendo unos coeficientes técnicos c_i de la forma

$$d_i = c_i \mathscr{E},$$

la relación entradas-salidas del modelo cerrado queda descrita por el sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t_{11}x_1 + \ldots + t_{1n-1}x_{n-1} + c_1\mathscr{E} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= t_{n-11}x_1 + \ldots + t_{n-1n-1}x_{n-1} + c_{n-1}\mathscr{E} \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

El nivel de empleo es la suma del trabajo realizado en cada sector

$$\mathscr{E} = L_1 + \ldots + L_n$$

siendo L_i el trabajo realizado en el sector i.

Definiendo los coeficientes (fijos) de trabajo l_i por

$$\begin{aligned} l_i &= L_i/x_i, \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ l_n &= L_n/\mathscr{E} \end{aligned}$$

tenemos que el sistema (1.3) queda

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t_{11}x_1 + \ldots + t_{1n-1}x_{n-1} + c_1\mathscr{E} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= t_{n-11}x_1 + \ldots + t_{n-1n-1}x_{n-1} + c_{n-1}\mathscr{E} \\ \mathscr{E} &= l_1x_1 + \ldots + l_{n-1}x_{n-1} + l_n\mathscr{E} \end{aligned}\right\}$$

llamando

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n-1} & c_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ t_{n-11} & \ldots & t_{n-1n-1} & c_{n-1} \\ l_1 & \ldots & l_{n-1} & l_n \end{pmatrix}$$

y, si renombramos,

$$\begin{aligned} t_{in} &= c_i \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ t_{nj} &= l_i \quad j = 1, \ldots, n \\ x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ \mathscr{E} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la matriz T es (t_{ij}) y la relación de entradas-salidas para el modelo cerrado queda descrito a través del sistema lineal de ecuaciones siguiente:

$$x = Tx \tag{1.4}$$

T recibe el nombre de *matriz de entradas* del modelo.

Si denominamos $A = I - T$ el sistema (1.4) puede describirse de la forma

$$Ax = 0$$

Este sistema es homogéneo, y, por tanto, siempre es compatible. Nos interesarán aquellos sistemas que tengan soluciones positivas (en el modelo abierto, nos interesaban las soluciones no negativas).

Definición 6.2.1. Un modelo cerrado de Leontief con matriz de entradas T se dice que es *viable* si y solo si existe algún vector x tal que

$$Tx \leq x \qquad x \gg 0$$

Si este vector x existe, recibe el nombre de *solución de salida viable* para el modelo.

Ejemplo 6.2.1. Si la matriz de entradas y salidas de un modelo cerrado es

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

observamos que

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \gg 0$$

y es tal que

$$Tx \leq x$$

Definición 6.2.2. Un vector x recibe el nombre de *vector de salida de equilibrio* para el modelo cerrado de Leontief con matriz de entradas T si

$$Tx = x \qquad x \gg 0$$

esto es, x es un vector propio de valor propio 1 de la matriz T y positivo.

Como consecuencia inmediata de esta definición, tenemos el corolario siguente:

Corolario 6.2.1. Un modelo de entradas y salidas cerrado tiene un vector de salida de equilibrio si y solo si el sistema homogéneo

$$Ax = 0$$

tiene una solución positiva.

Al igual que en el modelo abierto, podemos caracterizar los modelos viables mediante M-matrices.

Teorema 6.2.1. Un modelo cerrado de Leontief con matriz de entradas T es viable si y solo si la matriz $A = I - T$ es una M-matriz con la propiedad c.

Corolario 6.2.2. Supongamos que T es irreducible; entonces, el modelo tiene un vector de salida de equilibrio x que es único, salvo múltiplos escalares positivos.

6.3. Ejercicios resueltos

1. Consideremos el modelo abierto de economía con tres sectores, a saber, energía, manufacturados y servicios, en que la matriz T de entradas y salidas viene dada por

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

y el vector demanda d, por

$$d = \begin{pmatrix} 92 \\ 69 \\ 115 \end{pmatrix}$$

Halla el vector de producción.

Solución:

El balance total de entradas y salidas es

$$Ax = d, \quad \text{con } A = I - T$$

por lo que tenemos que resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ 69 \\ 115 \end{pmatrix}$$

cuya solución es

$$x = A^{-1}d = \begin{pmatrix} 235 \\ 335 \\ 525 \end{pmatrix}$$

2. Consideremos una economía abierta, con tres sectores: minería del carbón, generadores de electricidad y una planta de montaje de automóviles. Para producir 1 euro de carbón, la explotación minera ha de adquirir 0,1 euros de su propia producción, 0,30 euros de electricidad y 0,1 euro en automóviles para el transporte. Para producir 1 euro de electricidad, se necesitan 0,25 euros de carbón, 0,4 euros de electricidad y 0,15 euros de automóvil. Por último, para producir 1 euro de valor de automóvil, la planta de montaje debe comprar 0,2 euros de carbón, 0,5 euros de electricidad y el consumo de 0,1 euros de automóvil. Supongamos también que, durante un período de una semana, la economoía tiene un demanda por valor de 50.000 euros de carbón, 75.000 euros de electricidad, y 125.000 euros de automóviles. Halla el nivel de producción de cada una de las tres industrias en ese período de tiempo, con el fin de satisfacer exactamente la demanda.

Solución:

La matriz de entradas y salidas de esta economía es

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

y el vector demanda es

$$d = \begin{pmatrix} 50000 \\ 75000 \\ 125000 \end{pmatrix}$$

La ecuación de entradas en función de la demanda

$$Ax = d$$

con

$$A = (I - T)^{-1}$$

y

$$I - T = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}6 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & -0{,}15 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

$$(I - T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}464 & 0{,}803 & 0{,}771 \\ 1{,}007 & 2{,}488 & 1{,}606 \\ 0{,}330 & 0{,}503 & 1{,}464 \end{pmatrix}$$

Y se obtiene:

$$x = \begin{pmatrix} 1{,}464 & 0{,}803 & 0{,}771 \\ 1{,}007 & 2{,}488 & 1{,}606 \\ 0{,}330 & 0{,}503 & 1{,}464 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50000 \\ 75000 \\ 125000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 229921{,}59 \\ 437795{,}25 \\ 237401{,}57 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la producción total de carbón de la explotación minera ha de ser 229.921,59 euros, la producción total de electricidad de la planta generadora es de 437.795,27 euros, y la producción total para el montaje de automóviles es de 237.401,57 euros.

3. Supongamos que la economía de una determinada región depende de tres sectores: servicios, electricidad y producción de petróleo. Supervisando las operaciones de estas tres industrias durante un período de un año, hemos podido llegar a las observaciones siguientes:

1. Para producir 1 unidad de valor de servicio, la industria de servicios ha de consumir 0,3 unidades de su propia producción, 0,3 unidades de electricidad y 0,3 unidades de aceite para realizar sus operaciones.

2. Para producir 1 unidad de electricidad, el poder de generación de la planta ha de comprar 0,4 unidades de servicio, 0,1 unidades de su propia producción y 0,5 unidades de petróleo.

3. Por último, la compañía de producción de petróleo requiere 0,3 unidades de servicio, 0,6 unidades de electricidad y 0,2 unidades de su propia producción para producir 1 unidad de petróleo.

Halla el nivel de producción de cada una de estas industrias con el fin de satisfacer la demanda, en el supuesto de que el modelo sea cerrado.

Solución:

Consideremos las variables siguientes:
p_1 nivel de producción del servicio
p_2 nivel de producción de electricidad
p_3 nivel de producción de petróleo

Dado que el modelo es cerrado, el consumo total de cada industria ha de ser igual a su producción total. Esto nos proporciona el sistema lineal siguiente:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}3p_1+0{,}3p_2+0{,}3p_3 &= p_1 \\ 0{,}4p_1+0{,}1p_2+0{,}5p_3 &= p_2 \\ 0{,}3p_1+0{,}6p_2+0{,}2p_3 &= p_3 \end{aligned}\right\}$$

La matriz de entradas es

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Este sistema se puede escribir como $(A-I)P=0$. Este sistema es homogéneo, por lo que tiene siempre solución; de hecho, tiene infinitas soluciones, ya que la matriz A^t es estocástica, por lo que 1 es valor propio;

Resolvemos el sistema y obtenemos

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= 0{,}82t \\ p_2 &= 0{,}92t \\ p_3 &= t \end{aligned}\right\}$$

Los valores de las variables en este sistema han de ser no negativos, a fin de que el modelo tenga sentido; en otras palabras, $t \geq 0$. Tomando $t=100$, por ejemplo, tendríamos la solución

$$\left.\begin{array}{ll} p_1 & = 82 \text{ unidades} \\ p_2 & = 92 \text{ unidades} \\ p_3 & = 100 \text{ unidades} \end{array}\right\}$$

6.4. Ejercicios propuestos

1. Analiza la viabilidad del modelo abierto de Leontief cuya matriz de entradas viene dada por

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = I - T$ es una M-matriz (para $s = 1 > \rho(A)$) no singular.

2. Consideremos el modelo de Leontief del ejercicio anterior. Analiza el crecimiento de las salidas suponiendo que aumenta la demanda de un solo producto.

3. Estudia la viabilidad del modelo abierto de Leontief cuya matriz de entradas es

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Obtén las salidas de dicho sistema para las entradas $d_1 = 10$, $d_2 = 5$, $d_3 = 6$.

4. Prueba que, si un modelo abierto de Leontief es viable, entonces alguna de las columnas de la matriz T es tal que la suma de sus componentes es menor que 1. Concluye la no viabilidad del sistema cuya matriz de entradas es

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Solución: Todas las columnas son tales que la suma de sus componentes es superior a 1.

5. Estudia la viabilidad del sistema cerrado de Leontief cuya relación de entradas y salidas viene dado mediante

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0{,}3x_1 + 0{,}3\mathscr{E} \\ x_2 = 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 \\ \mathscr{E} = 0{,}5x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}7\mathscr{E} \end{array}\right\}$$

donde x_1 y x_2 son las salidas de dos sectores internos y $\mathscr{E}$ es el nivel de empleo. ¿Tiene puntos de equilibrio? En caso afirmativo, ¿existe alguno cuya suma de componentes sea 1?

Solución: $x = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 28 \end{pmatrix}$.

6. Una hipotética economía formada por tres sectores (1), (2) y (3) tales que las ventas x_{ij} del sector (i) al sector (j) son

$$\begin{array}{lll} x_{11} = 15 & x_{21} = 10 & x_{31} = 18 \\ x_{12} = 10 & x_{22} = 13 & x_{32} = 21 \\ x_{13} = 20 & x_{23} = 22 & x_{33} = 10 \end{array}$$

y la demanda final d_i en el sector i es

$$d_1 = 13, \quad d_2 = 10, \quad d_3 = 18.$$

Estudia la viabilidad del sistema.

→7

Métodos iterativos para sistemas lineales

En este capítulo, presentamos una aplicación de la teoría de matrices no negativas al estudio de métodos iterativos para resolver un sistema de ecuaciones, de la forma

$$Ax = b \tag{1.5}$$

donde A es una matriz cuadrada de orden n y b es un vector columna de orden $n \times 1$. Así, para $n = 3$, tenemos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

que también se puede escribir de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

Los métodos iterativos consisten, básicamente, en asociar al sistema (1.5) un sistema lineal $x = Bx + c$, que resolvemos de forma iterativa. Esto es, partiendo de un x^0, obtenemos $x^1 = Bx^0 + c$, y así se logra una sucesión $x^0, x^1, \ldots, x^k, \ldots$ mediante la ley de recurrencia

$$x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k \geq 0$$

Si la sucesión $\{x^k\}$ converge hacia el vector $\bar{x}$, entonces este vector es la solución del sistema $x = Bx + c$ y, por tanto, del sistema $Ax = b$, que es el sistema que pretendíamos resolver.

7.1. Métodos iterativos básicos

En esta sección, vamos a describir algunos métodos iterativos básicos tales como el método de Jacobi o el método de Gauss-Seidel.

Supongamos que en el sistema (1.5), se ha realizado la partición siguiente:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q,1} & \dots & A_{q,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

donde $A_{i,j} \in M_{n_i \times n_j}(\mathbb{R})$, con $n_1 + \ldots + n_q = n$ y X_i, b_i son vectores columna de orden n_i para $i = 1, \ldots, q$.

La matriz A puede expresarse como

$$A = D - C_L - C_U \tag{1.7}$$

donde D es la matriz diagonal por bloques

$$D = \begin{pmatrix} A_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{q,q} \end{pmatrix}$$

C_L, la matriz triangular inferior

$$C_L = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{2,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ A_{q,1} & A_{q,2} & A_{q,3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

y C_U, la matriz triangular superior

$$C_U = - \begin{pmatrix} 0 & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,q} \\ 0 & 0 & A_{2,3} & \dots & A_{2,q} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{3,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Observación 1. Para cada $i = 1, \ldots, q$, n_i puede ser igual a 1, en cuyo caso, si la matriz A es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la partición queda del siguiente modo:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$C_L = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_U = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Método de Jacobi

El método de Jacobi relativo a la partición (1.6) viene dado por

$$A_{i,i}X_i^{n+1} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q} A_{i,i}X_j^n + b_i, \quad i = 1,2,\dots,q \tag{1.8}$$

Para que el método de Jacobi sea operativo, es necesario que, dado un y_i, los subsistemas

$$A_{i,i}X_i^{n+1} = y_i$$

puedan resolverse fácilmente.

Si tenemos en cuenta (1.7), el método de Jacobi se expresa de la forma

$$x^{n+1} = B_J x^n + k_J$$

donde

$$B_J = D^{-1}(C_L + C_U) = I - D^{-1}A$$

y

$$x^n = \begin{pmatrix} X_1^n \\ \vdots \\ X_q^n \end{pmatrix}, \qquad k_J = D^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

La matriz B recibe el nombre de *matriz de iteración de Jacobi*.

Ejemplo 7.1.1. Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de iteración es

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$k_J = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Los dos primeros pasos de la iteración a partir de $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x^2 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 13/8 \end{pmatrix}.$$

Método de Gauss-Seidel

Este método, aplicado a la partición (1.6), queda definido por

$$A_{ii}X_i^{n+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}X_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{q} A_{i,j}X_j^{n} + b_i \quad i = 1,2,\ldots,q. \tag{1.9}$$

Como en el caso anterior, cada paso de la iteración de Gauss-Seidel requiere la resolución de un subsistema, de la forma

$$A_{i,i}X_i^{(n+1)} = y_i$$

Utilizando la notación de (1.7), la ecuación (1.9) queda

$$(D - C_L)x^{n+1} = C_U x^n + b$$

por lo que el método de Gauss-Seidel se expresa de la forma

$$x^{n+1} = B_{GS}x^n + k_{GS}$$

donde

$$B_{GS} = (I-L)^{-1}U, \qquad k_{GS} = (I-L)^{-1}D^{-1}b$$

y

$$L = D^{-1}C_L, \qquad U = D^{-1}C_U$$

La matriz B_{GS} recibe el nombre de *matriz de iteración de Gauss-Seidel*.

Ejemplo 7.1.2. Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de iteración es

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

y

$$k_{GS} = \begin{pmatrix} 25/28 \\ 4/7 \end{pmatrix}$$

Los dos primeros pasos de la iteración a partir de $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son 1

$$x^1 = \begin{pmatrix} 25/28 \\ 4/7 \end{pmatrix}, \qquad x^2 = \begin{pmatrix} 29/28 \\ 9/14 \end{pmatrix}$$

Métodos de sobrerrelajación

Estos métodos generalizan el de Gauss-Seidel y se basan en la equivalencia de la ecuación $Ax = b$ con

$$x = x + \omega((D^{-1}C_L - I + D^{-1}C_U)x - D^{-1}b)$$

con ω un parámetro real denominado *factor de relajación*, y que a veces son utilizados para acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel.
Se define el método iterativo de sobrerrelajación con factor ω mediante la ley de recurrencia

$$x^{n+1} = B_\omega x^n + k_\omega$$

donde

$$B_\omega = (I - \omega L)^{-1}(\omega U + (1-\omega)I), \qquad \text{y} \qquad k_\omega = (I - \omega L)^{-1}\omega D^{-1}b$$

Observamos que, si $\omega = 1$, el método coincide con el de Gauss-Seidel.

7.2. No negatividad y convergencia

En esta sección analizamos la convergencia de los métodos iterativos. En todo lo que sigue, supondremos que la matriz A es no singular.

Definición 7.2.1. Un método iterativo se dice convergente si, para x^0, la sucesión $x^1, x^2, \ldots,$ converge hacia $\bar{x}$ solución de $Ax = b$.

Proposición 7.2.1. Una condición necesaria y suficiente para la convergencia es que el radio espectral de la matriz de iteración B sea menor que 1.

$$\rho(B) < 1.$$

Demostración. Restando $\bar{x} = B\bar{x} + k$ a la ecuación $x^{k+1} = Bx^k + k$, tenemos

$$\begin{aligned} x^{k+1} - \bar{x} &= (Bx^k + k) - (B\bar{x} + k) = B(x^k - \bar{x}) \\ &= B^{k+1}(x^0 - \bar{x}) \end{aligned}$$

Entonces, la sucesión $x^0, x^1, \ldots$ converge hacia $\bar{x}$ para cada x^0 si y solo si

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0.$$

Equivalentemente, si y solo si

$$\rho(B) < 1.$$

■

Observación 1. El vector $x^k - \bar{x}$ recibe el nombre de *vector error* y permite medir la velocidad de la convergencia.

Observación 2. La proposición anterior reduce el problema de la convergencia a demostrar que $\rho(B) < 1$.

Observamos cómo la no negatividad de B juega un papel importante en el análisis de dicho problema.

Definición 7.2.2. Consideremos el método de iteración $x^{k+1} = Bx^k + k$ cuya matriz de iteración $B \in M_n(\mathbb{C})$ es tal que $\rho(B) < 1$ y sea $\bar{x} = B\bar{x} + k$. Sea

$$\alpha = \sup\{\lim_{k\to\infty} \|x^k - \bar{x}\|^{1/k} \mid x^0 \in \mathbb{C}^n\},$$

para una norma de matriz cualquiera. El número

$$R_\infty(B) = -\ln \alpha$$

recibe el nombre de *coeficiente asintótico de convergencia* de la iteración.

Observación 3. El coeficiente asintótico de convergencia no depende de la norma escogida.

Proposición 7.2.2. Sea $B \in M_n(\mathbb{R})$ la matriz de iteración de un sistema y supongamos que $\rho(B) < 1$. Entonces,

$$\alpha = \rho(B)$$

y, por tanto

$$R_\infty(B) = -\ln \rho(B).$$

Vamos ahora a dar una condición necesaria y suficiente para garantizar la cota exigida al radio espectral de la matriz de iteración que nos asegura la convergencia.

Proposición 7.2.3. Sea $A = D - (C_L + C_U)$. Supongamos que la matriz D es no singular y que la matriz de iteración de Jacobi B_J es no negativa. Entonces,

$$\rho(B_J) < 1$$

si y solo si

$$A^{-1}(C_L + C_U) \geq 0.$$

En cuyo caso,

$$\rho(B_J) = \frac{\rho(A^{-1}(C_L + CU))}{1 + \rho(A^{-1}(C_L + C_U))}$$

Demostración. Supongamos que $\rho(B_J) \geq 1$

$$\begin{aligned} A^{-1}(C_L + C_U) = (D(I - D^{-1}(C_L + C_U)))^{-1}(C_L + C_U) = \\ (I - D^{-1}(C_L + C_U))^{-1} D^{-1}(C_L + C_U) = \\ (I - B_J)^{-1} B_J = \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_J^k \right) B_J = \sum_{k=1}^{\infty} B_J^k \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se cumple porque $\rho(B_J) < 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} B_J^k$ converge y su suma es $(I - B_J)^{-1}$.

Ahora bien, puesto que la matriz B_J es no negativa, la serie también es no negativa, por lo que $A^{-1}(C_L + C_U)$ es no negativa.

Recíprocamente, supongamos ahora que $A^{-1}(C_L + C_U)$ es no negativa. Puesto que B_J es no negativa, por el teorema de Perron-Frobenius, existe un vector positivo $v > 0$ tal que

$$B_J v = \rho(B_J) v,$$

en cuyo caso,

$$\begin{aligned} A^{-1}(C_L + C_U)v = (I - B_J)^{-1} B_J v = (I - B_J)^{-1}(\rho(B_J)v) = \\ = \frac{\rho(B_J)}{1 - \rho(B_J)} v \end{aligned}$$

Puesto que $A^{-1}(C_L+C_U)v \geq 0$ y $v \geq 0$, se tiene $\dfrac{\rho(B_J)}{1-\rho(B_J)} \geq 0$, por lo que

$$\rho(B_J) < 1.$$

Además, puesto que

$$\rho(A^{-1}(C_L+C_U)) \geq \frac{\rho(B_J)}{1-\rho(B_J)}$$

se sigue que

$$\rho(B_J) \leq \frac{\rho(A^{-1}(C_L+C_U))}{1+\rho(A^{-1}(C_L+C_U))} \tag{1.10}$$

Análogamente, puesto que $A^{-1}(C_L + C_U) \geq 0$, existe $w > 0$ tal que $A^{-1}(C_L+C_U)y = \rho(A^{-1}(C_L+C_U))y$, por lo que

$$B_J y = \frac{\rho(A^{-1}(C_L+C_U))}{1+\rho(A^{-1}(C_L+C_U))} y$$

y

$$\rho(B_J \geq \frac{\rho(A^{-1}(C_L+C_U))}{1+\rho(A^{-1}(C_L+C_U))} \tag{1.11}$$

De (1.10) y (1.11), se concluye el resultado. ■

De forma análoga, se puede demostrar el resultado siguiente para la matriz de iteración de Gauss-Seidel.

Proposición 7.2.4. Sea $A = (D-C_L)-C_U$. Supongamos que la matriz $D-C_L$ es no singular y que la matriz de iteración de Gauss-Seidel B_{GS} es no negativa. Entonces,

$$\rho(B_{GS}) < 1$$

si y solo si

$$A^{-1}C_U \geq 0$$

en cuyo caso,

$$\rho(B_{GS}) = \frac{\rho(A^{-1}C_U)}{1+\rho(A^{-1}C_U)}$$

Con respecto al método iterativo de sobrerrelajación, tenemos la condición siguiente para la convergencia.

Proposición 7.2.5. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ con todos los elementos de la diagonal no nulos. Entonces, el método iterativo de sobrerrelajación converge solo si

$$0 < \omega < 2$$

Demostración. Es fácil ver que

$$\det B_\omega = (1-\omega)^n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

■

Finalizamos dando condiciones a los vectores iniciales de los métodos iterativos, de manera que no solo nos aproximen la solución del sistema (1.5), sino que proporcionen cotas para la solución.

Proposición 7.2.6. Sea $A = D-(C_L+C_U)$, con A y D no singulares. Supongamos que B_J es no negativa. Consideremos el sistema $Ax=b$ y el método iterativo de Jacobi.

(i) Si los vectores v^0 y w^0 son tales que $v^0 \leq v^1$, $v^0 \leq w^0$ y $w^1 \leq w^0$, siendo v^1 y w^1 los vectores obtenidos por el método iterativo de Jacobi a partir de v^0 y w^0, respectivamente, entonces

$$v^0 \leq v^1 \leq \ldots \leq v^i \leq \ldots \leq A^{-1}b \leq \ldots \leq w^i \leq \ldots \leq w^1 \leq w^0$$

y para algún escalar λ se tiene

$$A^{-1}b = \lambda \lim_{i\to\infty} v^i + (1-\lambda) \lim_{i\to\infty} w^i$$

(ii) Si $\rho(B_J) < 1$, entonces existen los vectores v^0 y w^0.

Demostración. Veamos (i). Por hipótesis, $v^0 \leq v^1$. Supongamos que $v^{i-1} \leq v^i$. Entonces, puesto que B_J es no negativa, se tiene

$$B_J v^{i-1} \leq B_J v^i$$

por lo que

$$v^i = B_J v^{i-1} + D^{-1}b \leq B_J v^i + D^{-1}b = v^{i+1}$$

Análogamente, se prueba que

$$v^i \leq w^i \qquad \text{y} \qquad w^{i+1} \leq w^i$$

Luego, ambas sucesiones convergen hacia $A^{-1}b$.

Para (ii), supongamos que $\rho(B_J) < 1$. Entonces, por el teorema de Perron-Frobenius, existe un vector $x > 0$ tal que $B_J x = \rho(B_J)x < x$.

Consideremos

$$v^0 = A^{-1}b - x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} v^1 &= B_J v^0 + D^{-1}b = B_J A^{-1}b - B_J x + D^{-1}b = \\ &= (I - D^{-1}A)A^{-1}b - \rho(B_J)x + D^{-1}b = A^{-1}b - \rho(B_J)x \geq A^{-1}b - x = v^0 \end{aligned}$$

Sea $w^0 = A^{-1}b + x$; entonces,

$$w^1 = B_J w^0 + D^{-1}b = B_J A^{-1}b + B_J x + D^{-1}b =$$
$$= (I - D^{-1}A)A^{-1}b + \rho(B_J)x + D^{-1}b = A^{-1}b + \rho(B_J)x \leq A^{-1}b + x = w^0$$

Además,

$$w^0 - v^0 = 2x \geq 0$$

■

De forma análoga, se demuestra la proposición siguiente, para el método iterativo de Gauss-Seidel.

Proposición 7.2.7. Sea $A = D - (C_L + C_U)$, con A y D no singulares, y supongamos que B_{GS} es no negativa. Consideremos el sistema $Ax = b$ y el método iterativo de Gauss-Seidel.

(i) Si los vectores v^0 y w^0 son tales que $v^0 \leq v^1$, $v^0 \leq w^0$ y $w^1 \leq w^0$, siendo v^1 y w^1 los vectores obtenidos por el método iterativo de Gauss-Seidel a partir de v^0 y w^0, respectivamente, entonces,

$$v^0 \leq v^1 \leq \ldots \leq v^i \leq \ldots \leq A^{-1}b \leq \ldots \leq w^i \leq \ldots \leq w^1 \leq w^0$$

y para algún escalar λ se tiene

$$A^{-1}b = \lambda \lim_{i\to\infty} v^i + (1-\lambda) \lim_{i\to\infty} w^i.$$

(ii) Si $\rho(B_{GS}) < 1$, entonces existen los vectores v^0 y w^0.

7.3. Ejercicios resueltos

1. Supongamos que tenemos la siguiente matriz invertible de segundo orden y con elementos diagonales no nulos,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

.
Las matrices de iteración para los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son, respectivamente:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{b}{a} \\ -\dfrac{c}{d} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{b}{a} \\ 0 & \dfrac{bc}{ad} \end{pmatrix}$$

Determina el radio espctral de cada una de las matrices J y G y analiza la convergencia de ambos métodos. En caso de que ambos converjan ¿cual es más rápido?

Solución:

Calculemos los valores propios de las matrices J y G

Para la matriz J:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{bc}{ad}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{bc}{ad}}$$

luego

$$\rho(J) = \sqrt{\frac{bc}{ad}}$$

Para la matriz G:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{bc}{ad}$$

luego

$$\rho(G) = \frac{bc}{ad}$$

Para que dichos métodos converjan, el radio espectral debe ser menor que 1; y, para ello es necesario que para ambos métodos se cumpla que $bc < ad$.
Observamos que es más rápido el método de GaussñSeidel ya que si $0 < \alpha < 1$, entonces, $\alpha < \sqrt{\alpha}$.

2. Consideremos el sistema de ecuaciones lineal siguiente

$$\left.\begin{aligned} x + \alpha y &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ \beta y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Determina los valores de α y β para que el sistema tenga solución única

b) Determina los valores de α y β para asegurar la convergencia del método de Gauss-Seidel.

Solución:

a) Escribamos el sistema en forma matricial $AX = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible determinado si y solo si el determinante de la matriz A es distinto de cero

$$\det A = 1 - \alpha - \beta \neq 0$$

Por lo tanto el sistema tiene solución única si y solo si $\alpha + \beta \neq 1$.

b) Partiendo de la descomposición $A = D - C_L - C_U$ determinamos la matriz de iteración

$$G = (I - D^{-1}C_L)^{-1}D^{-1}C_U = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 0 & -\alpha\beta & \beta \end{pmatrix}$$

Los valores propios de dicha matriz son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \alpha + \beta$$

de donde $\rho(G) = |\alpha + \beta|$.
Por lo tanto la condición para la convergencia es que $|\alpha + \beta| < 1$.

7.4. Ejercicios propuestos

1. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtén tres iteraciones para los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel a partir del valor inicial $x^0 = (1,1,1,1)$.

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudia para qué valores de a el método de Jacobi converge.

3. Sea

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x + 3y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Calcula el coeficiente asintótico de convergencia para los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel.

4. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudia la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para la resolución del sistema $(A+\lambda I)x=b$, en función del parámetro λ.

5. Sea

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Estudia la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel para estas matrices.

Bibliografía

[1] A. Berman, R.J. Plemmons, *Non-negative Matrices in Mathematical Sciences*, SIAM. Filadelfia (1994).

[2] F. Chatelin, *Valeurs Propres de Matrices*, Ed. Masson. París (1988).

[3] R. Cyert, G. Thompson, Selecting a portfolio of credit risks by Markov chains. Journal of Business 1968; vol. 1, pp. 39--46.

[4] J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM. Filadelfia (1997).

[5] S. N. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, Nueva York (1996).

[6] Gantmacher, *Matrix Theory*, vol. I, II. Chelsea (1977).

[7] M.I. García, M.D. Magret, *Matrices no negativas y aplicaciones*. Editado por las autoras (2002).

[8] L.A. Hageman, D.M. Young, *Applied Iterative Methods*, Academic Press (1981).

[9] P. Lancaster, M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices with Applications*, Academic Press (1985).

[10] C.C. MacDuffee, *The Theory of Matrices*, Chelsea (1946).

[11] Martha Cecilia Palafox Duarte. Inferencia Estadística para Cadenas de Markov, M. Thesis, México, (2009).

[12] P. Ramírez, *El sistema de Leontief y su solución matemática*, Lecturas de economía n. 37, Medellín Colombia, (1992).

[13] K. Sh. Trivedi, *Probability and Statistics with Reliability, Queuing, and Computer Science Applications*, Prentice-Hall. Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1982).

Índice Alfabético