

POLITEXT

Eusebi Jarauta Bragulat

Análisis matemático de una variable

Fundamentos y aplicaciones

EDICIONS UPC

POLITEXT

Eusebi Jarauta Bragulat

Análisis matemático de una variable

Fundamentos y aplicaciones

EDICIONS UPC

La presente obra fue galardonada en el primer concurso
“Ajuts a l’elaboració de material docent”, convocado por la UPC.

Primera edición: septiembre de 2000

Diseño de la cubierta: Manuel Andreu

© Eusebi Jarauta, 2000

© Edicions UPC, 2000
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.es

Producción: CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)
La Cup. Gran Capità s/n, 08034 Barcelona

Depósito legal: B-36.489-00
ISBN: 84-8301-410-6

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

Les êtres nous sont d'habitude si indifférents que, quand nous avons mis dans un d'eux de telles possibilités de souffrance et de joie pour nous, il nous semble appartenir à un autre univers, il s'entoure de poésie, il fait de notre vie comme une étendue emouvante où il sera plus ou moins rapproché de nous.

*Marcel Proust,
A la recherche du temps perdu, 1. Du côté de chez Swann.*

(La mayoría de personas que conocemos no nos inspiran más que indiferencia; de modo que cuando en un ser depositamos grandes esperanzas de pena o de alegría para nuestro corazón, se nos figura que pertenece a otro mundo, se envuelve en poesía, convierte nuestra vida en una llanura donde nosotros no apreciamos más que la distancia que de él nos separa).

A los protagonistas de mi llanura proustiana,
a quienes debo mis mejores vivencias,
artífices de mis sentimientos más profundos
y que han llenado de vida mis años.
A todos ellos, mi sincera y eterna gratitud.

PRESENTACIÓN

*“... ha de saber matemáticas,
porque a cada paso
se le ofrecerá tener necesidad dellas”.*

Miguel de Cervantes, “Don Quijote de la Mancha”

En esta época de cambios, de aceleración vertiginosa del ritmo de cambios según se nos hace observar, debe ser relajante recordar la inmutabilidad de algunos principios. En nuestro caso, en los estudios técnicos, todos los planes de estudio viejos o nuevos, de ciclo corto o largo, incluyen un curso de Cálculo Infinitesimal, con un programa que incluye esencialmente la diferenciación e integración de funciones de una variable real. Además conviene recordar que las matemáticas tienen un gran carácter formativo, que habitúa a plantearse los problemas con rigor y contribuye al desarrollo de un auténtico método científico de trabajo para el ingeniero. El tratamiento concreto de una disciplina puede variar, y este texto elige un enfoque formal que, si bien no tiene por qué seguirse al pie de la letra en la exposición oral, permite al estudiante disponer de un buen material docente con el que asentar su formación.

Refrescando la memoria, recuerdo cuando durante el curso 1990-91, y a fin de mejorar la docencia, se inició en la UPC la convocatoria de ayudas a la elaboración de material docente. El objetivo fundamental era mejorar la calidad del material de uso más frecuente entre los estudiantes. Se sabía que en la UPC había materia prima suficiente para que surgieran una buena colección de proyectos de elaboración de textos docentes. A aquella primera convocatoria se presentaron un gran número de propuestas, por lo que el concurso fue especialmente selectivo. La primera versión de este texto fue el resultado de uno de los pocos proyectos premiados en ella.

Esta nueva versión, además de incorporar las mejoras habituales que el paso del tiempo dejan como poso, llega en un momento clave: en Cataluña se ha completado la reforma educativa consecuencia de la LOGSE y ya la totalidad de los alumnos que llegan a la universidad han cursado el nuevo Bachillerato. Ellos serán por tanto los principales usuarios de este texto. La diversidad de itinerarios seguidos en la enseñanza secundaria hace previsible que los alumnos accedan a la universidad con conocimientos de Cálculo muy dispares. En el texto no sólo hay materia suficiente para que cada centro docente pueda seleccionar la que mejor se adapta a su programa y objetivos, sino también para que cada estudiante pueda recuperar el tiempo perdido por los vericuetos de la LOGSE.

Barcelona, abril de 2000

J. Luis A. Yebra

PRÓLOGO

La reforma en profundidad abordada recientemente en los planes de estudios de las carreras universitarias ha producido, en lo que a las matemáticas se refiere, múltiples efectos, entre los cuales cabe destacar, por un lado, la compactación de contenidos de asignaturas de estructura anual a asignaturas de estructura cuatrimestral con objetivos similares y, por otro, una cierta ruptura entre los contenidos de las materias en la enseñanza no universitaria respecto a las materias de la enseñanza universitaria. Son múltiples y cotidianas las observaciones al respecto que formula el profesorado, así como las que, justificadas o no, se refieren a un cierto descenso del nivel de los estudiantes que acceden a la universidad.

Lo que parece meridianamente claro es que la enseñanza de las matemáticas en la universidad se ha transformado sustancialmente, derivando desde las clásicas “clases magistrales” a otro tipo de sesiones más interactivas en las que se presentan y discuten los puntos básicos de cada tema, dejando al trabajo personal del estudiante la posterior asimilación de dichos conceptos y una profundización hasta donde su tiempo y sus preferencias personales le permitan, consultando para ello el material facilitado o referenciado por el profesorado de la asignatura. Pero está claro que esta nueva metodología necesita de otro tipo de apoyos; hace falta un material docente elaborado para que el estudiante pueda desarrollar satisfactoriamente esta actividad fuera de las aulas; cada vez se le exige más y, precisamente por ello, el objetivo de este texto es ser un compañero de viaje del estudiante en su aprendizaje del Análisis Matemático de una Variable, implementado en los contenidos de una asignatura del plan de estudios de su centro docente universitario.

Con este objetivo y con las reflexiones sobre el tema que he podido llevar a cabo durante mi experiencia de más de veinte años en la docencia de la materia en la Universitat Politècnica de Catalunya, he escrito esta obra por encargo de Edicions UPC, aceptando el enorme reto que ello supone por un doble motivo: en primer lugar por el número y la calidad de los textos ya existentes sobre la materia, que hacen de la originalidad una utopía y del nivel de contenidos un listón difícilmente igualable; en segundo lugar por el compromiso ante mis colegas en la docencia de la materia, a los que en modo alguno pretendo dar lecciones sobre cómo debe impartirse la asignatura y a los que ofrezco este texto como fruto de mi propia experiencia como docente, dándome por enteramente satisfecho si les puede ser de alguna utilidad en su actividad docente y siendo plenamente consciente de que su paciente y cuidada labor en las aulas será la responsable principal del aprendizaje de los estudiantes.

Los contenidos que se desarrollan en este texto pueden considerarse divididos en cuatro partes: Fundamentos, Funciones y límites, Cálculo diferencial y Cálculo integral; se han distribuido a lo largo de once capítulos, cuyo resumen se encontrará en la primera página de cada uno de ellos. Cada una de las partes mencionadas abarca los contenidos que se describen brevemente a continuación.

- *Parte 1: Fundamentos.*

Comprende los tres primeros capítulos. En el capítulo 1 se estudian los conjuntos \mathbb{R} de los números reales y \mathbb{C} de los números complejos; el conjunto \mathbb{R} se introduce de forma axiomática como un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y completo, estudiándose a continuación las propiedades más relevantes de los números reales. Se justifica a continuación la necesidad de definir el conjunto \mathbb{C} , se define en él una estructura de cuerpo conmutativo, se ve que no puede ordenarse de manera análoga a los reales y se estudia \mathbb{C} como espacio métrico.

El capítulo 2 está dedicado a las sucesiones numéricas y sus propiedades en relación a un concepto fundamental: el de límite de una sucesión. Así, se estudian las propiedades de las sucesiones convergentes, las sucesiones monótonas, las sucesiones parciales y su aplicación al estudio de la convergencia de una sucesión, y las sucesiones de Cauchy y su relación con la convergencia. Se ve asimismo la generalización del concepto de límite al caso infinito y, por último, se trata la equivalencia de sucesiones, noción que proporciona una metodología muy útil para el cálculo de límites.

El capítulo 3 trata de las series numéricas, esto es, las sucesiones obtenidas mediante adición ordenada de los términos de una sucesión; se estudian básicamente las propiedades que caracterizan la convergencia de las series, las series de términos positivos, las series alternadas, la convergencia absoluta, la convergencia condicional y, finalmente, las series de números complejos.

- *Parte 2: Funciones y límites.*

Consta de los capítulos 4, 5 y 6. El capítulo 4 inicia el estudio de un elemento básico del Análisis Matemático: las funciones; así, se define el concepto de función, los elementos que la caracterizan y las operaciones con funciones. A continuación se entra en otro concepto esencial: el de límite de una función en un punto, sus propiedades y metodología de cálculo. El capítulo se completa con la extensión de la noción de límite a valores de la recta real ampliada, las formas indeterminadas, la equivalencia local de funciones y las sucesiones y series de funciones, particularizando luego el caso de las series de potencias.

El capítulo 5 está dedicado a otra noción esencial: la de continuidad de una función en un punto y su extensión a un conjunto. Se define este concepto, se caracteriza adecuadamente y se estudian las propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado; por último se estudia la continuidad uniforme y la continuidad de las funciones límite de sucesiones y series funcionales.

El capítulo 6 contiene un estudio exhaustivo de las denominadas funciones elementales y sus propiedades más importantes. Se estudian con detalle la función exponencial real, el logaritmo neperiano, las funciones exponenciales y logarítmicas generalizadas, las funciones potenciales de exponente real, la función exponencial compleja, las funciones trigonométricas y, por último, las funciones hiperbólicas.

- *Parte 3: Cálculo diferencial.*

El Cálculo diferencial se desarrolla en los capítulos 7 y 8. El capítulo 7 está dedicado

básicamente a la noción de derivada de una función en un punto, sus propiedades y al cálculo de derivadas. Así, el capítulo se inicia con esta definición, las propiedades de la derivada relacionadas con las operaciones entre funciones, relación entre derivabilidad y continuidad y criterios de derivabilidad y reglas de derivación. Lo anterior se aplica a continuación al estudio de la derivabilidad de las funciones elementales y se sigue con la noción de diferencial de una función y su aplicación a cálculos aproximados, terminando con un breve estudio de las funciones definidas implícitamente y su derivación.

En el capítulo 8 se desarrollan las propiedades más importantes de las funciones derivables en un intervalo de \mathbb{R} : determinación de los extremos de una función a partir de la derivada, teorema de Rolle, teorema del valor medio de Lagrange (o fórmula del incremento finito) y teorema del valor medio generalizado de Cauchy. Este teorema se aplica a la demostración de las conocidas reglas de L'Hôpital para calcular límites de indeterminaciones en las que intervienen funciones derivables. A continuación se aborda la aproximación local de una función derivable mediante una función polinómica, aproximación que se conoce como fórmula de Taylor. Para terminar el capítulo se estudia la relación entre convergencia uniforme de una sucesión de funciones derivables y la derivabilidad de la función límite, el desarrollo de una función en serie de potencias y, finalmente, se dedica un apartado a desarrollar algunas aplicaciones de interés de la derivada en los campos de la geometría, cinemática, dinámica de fluidos y dinámica de poblaciones.

- *Parte 4: Cálculo integral.*

Esta última parte comprende los capítulos 9, 10 y 11. En el capítulo 9 se introducen los conceptos básicos de la teoría de la integral de Riemann que hacen posible la definición rigurosa de integral de una función en un intervalo cerrado; a continuación se estudian y se caracterizan las funciones integrables y las propiedades básicas de la integral de Riemann respecto a las operaciones con funciones, el intervalo, el valor absoluto, culminando con los teoremas del valor medio integral. Se estudia por último la expresión de la integral como límite de unas determinadas sumas (de Riemann) y la relación entre convergencia uniforme de una sucesión funcional e integrabilidad de la función límite.

El capítulo 10 tiene como objetivo básico el cálculo de integrales mediante el concepto de primitiva de una función y dos teoremas esenciales: la fórmula de integración por partes y el teorema del cambio de variable; se ha procurado reducir al mínimo indispensable el cálculo de primitivas, ya que es pura casuística. Se estudian a continuación las integrales dependientes de un parámetro o funciones definidas por integrales y, para terminar, se desarrollan esquemáticamente algunos métodos de integración aproximada y algunas aplicaciones de la integral, centradas esencialmente en el cálculo de áreas y volúmenes.

En el capítulo 11 y último se desarrolla la generalización del concepto de integral de una función en un intervalo cerrado, en el sentido de ampliar alguna de las condiciones que intervienen en la definición de integral: cuando el intervalo no es acotado, o bien, cuando la función no es acotada. Por último, se estudian las funciones eulerianas y algunas de sus aplicaciones.

En cuanto a la estructura de cada capítulo, se ha adoptado un modelo estándar, subdividiéndolo en apartados y éstos en secciones, indicadas mediante tres dígitos que se utilizan como referencia en el texto para ayudar a localizarlas; el primer número corresponde al capítulo, el segundo al apartado y el tercero a la sección. Siguiendo las directrices de Edicions UPC, en la

parte superior de cada página par se indica el capítulo y en la de cada página impar el apartado correspondiente, lo cual facilita enormemente la rápida localización del texto concreto que se desee. Al final de cada capítulo se ha incluido una colección de ejercicios y problemas propuestos que complementan las cuestiones tratadas. Es imprescindible abordar la solución de los mismos para comprobar el grado de aprendizaje; en matemáticas es completamente utópico esperar un aprendizaje completo de los temas sin “perder el tiempo” resolviendo ejercicios. Si, además, se organizan debates para comparar soluciones y criticar su planteamiento, el grado de aprendizaje se optimiza sin ningún género de dudas. También se ha incluido un conjunto de referencias bibliográficas comentadas, con el objetivo de facilitar una relación de textos que, a juicio de este autor, permiten ampliar conocimientos así como contrastar otros planteamientos alternativos de los diversos temas, lo cual recomendamos de forma especial. Por supuesto, asumimos completamente que ninguna lectura que no se realice con interés proporciona provecho alguno, así como que los únicos conocimientos inútiles son aquellos que no se poseen. Al final del texto se incluye la lista completa de referencias citadas en el mismo, así como un índice alfabético sobre los conceptos y resultados expuestos en el texto, con indicación de la sección en la que se han introducido o desarrollado.

Quiero terminar estas líneas dejando constancia explícita de mi agradecimiento a algunas personas que han intervenido directamente en la elaboración de este texto, revisando paciente y minuciosamente los originales y aportando valiosas sugerencias y comentarios sobre sus contenidos, lo cual me ha permitido mejorarlo sustancialmente, así como eliminar numerosas imprecisiones y erratas que me habían pasado inadvertidas. A mi buen amigo Josep Ferrer Llop, director del departamento de Matemática Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya; a mi amigo y compañero de departamento durante tantos años Josep Gelonch Anyé, profesor titular del departamento de Matemática de la Universitat de Lleida; a mi compañera Anna Maria Serra Tort, Catedrática del departamento de Matemàtica Aplicada III de la UPC y, por último, a mi compañero Ernest Garriga Valle, profesor titular del departamento de Matemática Aplicada y Telemática de la UPC. También quiero agradecer muy especialmente a mi amigo José Luis Andrés Yebra, director de l'Escola Universitària Politècnica del Baix Llobregat de la UPC, que haya aceptado escribir una presentación a este texto y las palabras amables e inmerecidas que me dedica. Por último quiero dejar constancia de mi agradecimiento a Edicions UPC por su esmerada labor en la edición del texto y a la Universitat Politècnica de Catalunya, por haberme encargado escribirlo.

Sant Joan Despí, mayo de 2000
Eusebi Jarauta

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1. Números reales y números complejos	
1.1 Preliminares	12
1.2 Axiomas de los números reales	14
1.3 Propiedades de los números reales	19
1.4 Representación decimal de los números reales	20
1.5 Valor absoluto. Topología de \mathbb{R}	23
1.6 Los números complejos	29
1.7 Ejercicios	36
1.8 Guía de referencias bibliográficas	41
Capítulo 2. Sucesiones numéricas	
2.1 Sucesiones. Operaciones con sucesiones	44
2.2 Límite de una sucesión	45
2.3 Propiedades de la convergencia	48
2.4 Sucesiones monótonas	52
2.5 Sucesiones parciales o subsucesiones	54
2.6 Sucesiones de Cauchy. Sucesiones contractivas	56
2.7 Extensión del concepto de límite. Criterios de convergencia	61
2.8 Equivalencia de sucesiones	67
2.9 Ejercicios	72
2.10 Guía de referencias bibliográficas	78
Capítulo 3. Series numéricas	
3.1 Concepto de serie numérica. Convergencia	80
3.2 Propiedades de la convergencia	83
3.3 Series de términos positivos	85
3.4 Series alternadas	93
3.5 Convergencia absoluta	95
3.6 Series de números complejos	101
3.7 Ejercicios	103
3.8 Guía de referencias bibliográficas	108

Capítulo 4. Funciones. Límites de funciones	
4.1 Concepto de función. Ejemplos	112
4.2 Límite de una función en un punto. Propiedades	122
4.3 Extensión del concepto de límite. Indeterminaciones	131
4.4 Equivalencia local de funciones	137
4.5 Sucesiones y series de funciones	142
4.6 Series de potencias	150
4.7 Ejercicios	156
4.8 Guía de referencias bibliográficas	162
Capítulo 5. Funciones continuas	
5.1 El concepto de continuidad	164
5.2 Propiedades de la continuidad	168
5.3 Funciones continuas en un intervalo cerrado	172
5.4 La continuidad uniforme	179
5.5 Convergencia uniforme y continuidad	182
5.6 Ejercicios	183
5.7 Guía de referencias bibliográficas	187
Capítulo 6. Funciones elementales	
6.1 La función exponencial real	190
6.2 La función logaritmo neperiano	192
6.3 Funciones exponenciales y logarítmicas generalizadas	193
6.4 Las funciones potenciales	197
6.5 La función exponencial compleja	199
6.6 Funciones trigonométricas	201
6.7 Las funciones hiperbólicas	210
6.8 Ejercicios	215
6.9 Guía de referencias bibliográficas	219
Capítulo 7. Derivación de funciones	
7.1 Derivada de una función. Funciones derivables	222
7.2 Criterios de derivabilidad. Reglas de derivación	230
7.3 Derivación de las funciones elementales	235
7.4 Diferencial de una función	239
7.5 Funciones implícitas. Derivación de funciones implícitas	246
7.6 Ejercicios	250
7.7 Guía de referencias bibliográficas	253
Capítulo 8. Propiedades de las funciones derivables	
8.1 Extremos de una función en un intervalo	256
8.2 Teoremas del valor medio	260
8.3 Reglas de L'Hôpital	267
8.4 La fórmula de Taylor	275
8.5 Convergencia uniforme y derivabilidad	282
8.6 Desarrollos en series de potencias	286

8.7 Algunas aplicaciones de la derivada	291
8.8 Ejercicios	303
8.9 Guía de referencias bibliográficas	307
Capítulo 9. Integración de funciones: fundamentos	
9.1 La integral de Riemann: conceptos básicos	310
9.2 La integral de Riemann: propiedades	319
9.3 Sumas de Riemann	326
9.4 Convergencia uniforme e integrabilidad	328
9.5 Ejercicios	330
9.6 Guía de referencias bibliográficas	332
Capítulo 10. Integración de funciones: cálculo y aplicaciones	
10.1 Integrales y primitivas	334
10.2 Cálculo de primitivas	341
10.3 Funciones definidas por integrales	351
10.4 Cálculo aproximado de integrales	356
10.5 Algunas aplicaciones de la integral	365
10.6 Ejercicios	378
10.7 Guía de referencias bibliográficas	383
Capítulo 11. Integrales impropias	
11.1 Integración de funciones no acotadas en intervalos acotados	386
11.2 Integración de funciones acotadas en intervalos no acotados	399
11.3 Integración de funciones no acotadas en intervalos no acotados	405
11.4 Funciones definidas por integrales impropias	406
11.5 Las funciones “Gamma” y “Beta”	411
11.6 Ejercicios	418
11.7 Guía de referencias bibliográficas	421
Referencias bibliográficas generales	423
Índice alfabético	425

CAPÍTULO 1

NÚMEROS REALES Y NÚMEROS COMPLEJOS

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este primer capítulo se dedica al estudio de los conjuntos \mathbb{R} de los números reales y \mathbb{C} de los números complejos, como conjuntos de números en los que se definen las nociones del Análisis Matemático que se desarrollan en los capítulos siguientes.

En el apartado 1.1 haremos un breve repaso de las nociones básicas relativas a otros conjuntos numéricos importantes: los números naturales, los números enteros y los números racionales. En el apartado 1.2 estudiaremos los axiomas de los números reales, esto es, ciertas propiedades que aceptaremos como ciertas y de las cuales obtendremos el conjunto de propiedades operativas de \mathbb{R} que desarrollaremos en el apartado 1.3, entre las cuales destacamos la arquimedeanidad, la densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} , la representación decimal y otras cuestiones topológicas básicas.

El apartado 1.4 se dedica al estudio de la representación decimal de los números reales, que es la forma más habitual de expresarlos; se justifica dicha representación y se ilustra con algunos ejemplos. En el apartado 1.5 se define una noción esencial en Análisis Matemático: la de valor absoluto de un número real, que permite definir la distancia e introducir la topología en \mathbb{R} , las bolas o entornos y los intervalos; en este apartado se estudian también otras nociones básicas como los puntos de acumulación, se demuestra el importante teorema de Bolzano-Weierstrass y se completa con la ampliación de la recta real mediante los “infinitos”.

Para terminar, en el apartado 1.6 se justifica la necesidad de definir los números complejos, poniendo de manifiesto las insuficiencias algebraicas de \mathbb{R} ; se define el conjunto \mathbb{C} , se le dota de estructura de cuerpo conmutativo y se estudian sus propiedades básicas. Se prueba que no puede ordenarse \mathbb{C} de manera análoga a \mathbb{R} y se estudia \mathbb{C} como espacio métrico.

1.1 PRELIMINARES

1.1.1 Para desarrollar los conceptos y los métodos del Análisis Matemático, es preciso tener definido con rigor el concepto de número. Se supone que el lector conoce los números naturales, los números enteros y los números racionales, su manejo y propiedades operativas. En este apartado, no obstante, se recapitulan las propiedades básicas más importantes relativas a dichos conjuntos de números.

1.1.2 NÚMEROS NATURALES. El conjunto \mathbb{N} de los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, se supone conocido de forma intuitiva, como aquel cuyos elementos “sirven para contar objetos o elementos”. Se exponen a continuación sus propiedades básicas.

(N1) En el conjunto \mathbb{N} están definidas dos operaciones internas: suma (+) y producto (\cdot) que tienen las propiedades:

1. Asociativa: $(m + n) + p = m + (n + p)$, $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$;
2. Conmutativa: $m + n = n + m$, $m \cdot n = n \cdot m$;
3. El producto tiene elemento neutro (elemento unidad): $n \cdot 1 = n$;
4. El producto es distributivo respecto de la suma: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$;

cualesquiera que sean $m, n, p \in \mathbb{N}$. Habitualmente se escribe mn para indicar el producto $m \cdot n$.

(N2) \mathbb{N} es un conjunto bien ordenado, con la relación \leq (que se lee “menor o igual”), de modo que se cumple: $1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \dots$. Es equivalente escribir $n \leq m$ o bien $m \geq n$, cualesquiera que sean $m, n \in \mathbb{N}$.

(N3) Las operaciones internas definidas en \mathbb{N} son compatibles con dicha ordenación, es decir, si $m, n \in \mathbb{N}$ son tales que $m \leq n$, entonces se cumplen: $m + p \leq n + p$ y $mp \leq np$, cualquiera que sea $p \in \mathbb{N}$.

(N4) Todo subconjunto no vacío de \mathbb{N} admite un primer elemento.

(N5) Todo número natural n tiene un *siguiente*, designado $n + 1$.

(N6) Todo número natural $n \neq 1$ tiene un *anterior*, designado $n - 1$.

(N7) (*Principio de inducción completa*). Si \mathcal{P} es una propiedad relativa a los números naturales tal que $\mathcal{P}(1)$ es cierta y el hecho de ser ciertas $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n - 1)$ implica que $\mathcal{P}(n)$ también lo es, entonces puede afirmarse que $\mathcal{P}(n)$ es cierta para todo número natural n .

(N8) En muchas ocasiones resulta cómodo considerar 0 como un número natural, esto es, definir los números naturales como el conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, en cuyo caso se modifican las propiedades (N1), ya que entonces la suma tiene elemento neutro que es el 0, (N6) y (N7). En este contexto, se escribe $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

(N9) Hemos comentado que, intuitivamente, los números naturales “sirven para contar elementos”; veamos que, en efecto, es así.

- Se dice que dos conjuntos son *equipotentes* cuando es posible establecer una biyección entre ellos. Si los conjuntos son finitos, es claro que su equipotencia indica que contienen el mismo número de elementos; en el caso de infinitud, la equipotencia generaliza esta idea.
- Un conjunto A se dice que es *finito* si existe una biyección entre A y el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$; el número natural n se denomina entonces *cardinal de A* , notándose $\text{card}A$. Cuando un conjunto no es finito, se dice que es *infinito*.
- Un conjunto infinito A se dice que es *numerable* si es equipotente a \mathbb{N} . Dicho de otro modo, un conjunto es numerable cuando sus elementos se pueden numerar, esto es, el conjunto puede expresarse de la forma $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$. Son ejemplos de conjuntos numerables: \mathbb{N} , el conjunto de los naturales impares $\{2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de los múltiplos de 5, $\{5n, n \in \mathbb{N}\}$. Si un conjunto

infinito no es numerable, se dice que es *no numerable*.

1.1.3 EJEMPLO. Se trata de probar por inducción que la suma de los n primeros números naturales impares es n^2 , esto es, de probar la igualdad: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ la igualdad es evidente, así como para $n = 2$. Supongámosla cierta hasta $n - 1$, es decir, que se cumple: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3) = (n - 1)^2$. Veamos que ello implica la igualdad para n . En efecto:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) &= (1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3)) + (2n - 1) = \\ &= (n - 1)^2 + (2n - 1) = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2, \end{aligned}$$

con lo que la igualdad queda probada.

1.1.4 OBSERVACIÓN. El conjunto de los números naturales es insuficiente para ciertos propósitos; por ejemplo, para medir la longitud de un segmento s tomando como unidad la medida de cierto segmento u . Ello sólo es posible y tiene sentido cuando s contiene un número “exacto” de veces la longitud de u y no es posible en caso contrario. También resulta insuficiente para resolver ecuaciones algebraicas del tipo $x + n = 0$, siendo $n \in \mathbb{N}$.

1.1.5 NÚMEROS ENTEROS. Para avanzar en la resolución de la insuficiencia del conjunto de los números naturales, se definen los números enteros. El conjunto \mathbb{Z} de los números enteros,

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

se supone también conocido de forma intuitiva. Se detallan a continuación sus propiedades básicas.

(Z1) El conjunto \mathbb{Z} tiene estructura de anillo conmutativo. Ello significa la existencia de dos operaciones internas definidas en dicho conjunto: suma (+) y producto (\cdot), que tienen las propiedades siguientes:

1. Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2. Conmutativa: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$;
3. Elemento neutro: $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$;
4. Elemento opuesto respecto a la suma: para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe un único elemento notado $-a$ tal que $a + (-a) = 0$;
5. El producto es distributivo respecto de la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

cualesquiera que sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(Z2) \mathbb{Z} es un conjunto bien ordenado, con la relación \leq , de modo que se cumple:

$$\cdots \leq -3 \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq \cdots$$

(Z3) Las operaciones de \mathbb{Z} son compatibles con dicha ordenación, esto es, si $a, b \in \mathbb{Z}$ son tales que $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$ cualquiera que sea $c \in \mathbb{Z}$, y si además $0 \leq c$, entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$.

(Z4) Todo número entero a tiene un *siguiente*, designado $a + 1$.

(Z5) Todo número entero a tiene un *anterior*, designado $a - 1$.

(Z6) Puede incluirse \mathbb{N} en \mathbb{Z} , mediante la aplicación inyectiva definida por: $f(n) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$; con ello se cumple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

(Z7) El conjunto \mathbb{Z} es numerable; para verlo basta considerar la aplicación de \mathbb{Z} en \mathbb{N} definida por:

$$f(a) = 2a, \quad \text{si } a \geq 0, \quad \text{y} \quad f(a) = 2(-a) - 1, \quad \text{si } a < 0,$$

siendo inmediato comprobar que f es biyectiva.

1.1.6 OBSERVACIÓN. Tampoco el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros resulta suficiente para muchos propósitos. Por ejemplo, para resolver ecuaciones algebraicas de la forma $ax = b$, con $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.

1.1.7 NÚMEROS RACIONALES. El conjunto \mathbb{Q} de los números racionales,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

se construye como el conjunto cociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ($\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$) mediante la relación de equivalencia:

$$(a, b) \sim (a', b') \iff ab' = a'b.$$

Recapitemos las propiedades operativas más importantes de \mathbb{Q} .

(Q1) El conjunto de los racionales \mathbb{Q} tiene estructura de cuerpo conmutativo. Ello significa que en \mathbb{Q} están definidas dos operaciones internas:

$$\text{Suma: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \quad \text{Producto: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

La suma cumple las propiedades: asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y cada número racional tiene un único elemento opuesto; el producto cumple las propiedades: asociativa, conmutativa, distributiva respecto de la suma, tiene elemento neutro y todo racional no nulo tiene elemento simétrico (inverso) respecto al producto. Redáctense como ejercicio los detalles de estas propiedades.

(Q2) El conjunto \mathbb{Q} es totalmente ordenado; se define en \mathbb{Q} una relación de orden mediante:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff ad \leq bc.$$

La ordenación de \mathbb{Q} con esta relación es total, esto es, dados dos racionales cualesquiera $x, y \in \mathbb{Q}$ siempre es cierta una de las dos desigualdades: $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

(Q3) Compatibilidad entre el orden y las operaciones internas definidas en \mathbb{Q} . Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ tales que $x \leq y$, entonces para todo $z \in \mathbb{Q}$ se cumple $x + z \leq y + z$ y si $0 \leq z$, entonces se cumple $xz \leq yz$.

(Q4) Inclusión de \mathbb{Z} en \mathbb{Q} . Puede incluirse \mathbb{Z} en \mathbb{Q} mediante la aplicación definida por $f(a) = \frac{a}{1}$, para cada $a \in \mathbb{Z}$; con ello puede identificarse cada entero con su imagen mediante dicha aplicación. Estúdiense como ejercicio las propiedades de la aplicación f en relación con las operaciones internas de \mathbb{Z} y \mathbb{Q} .

1.2 AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES

1.2.1 Los números reales aparecen de forma natural para dar respuesta a diversos problemas. Así, por ejemplo, para medir segmentos mediante números racionales se toma un segmento u como unidad y cada vez que se quiere medir un segmento s se procede así: si se puede subdividir u en q partes iguales de tal manera que sumando p veces una de estas partes se obtenga exactamente s , entonces la medida de s utilizando u como unidad es el número racional p/q . Así, por ejemplo, en la figura 1.1, si el segmento unidad u se divide en tres partes iguales, la medida del segmento s es 7 de esas partes, con lo cual su medida es $7/3$.

1.2.2 Sin embargo, este proceso no siempre es posible llevarlo a cabo. Así, por ejemplo, la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles no se puede medir tomando como unidad uno de los catetos. La razón estriba en que, si se designa por x la medida de la hipotenusa, en virtud del teorema de Pitágoras, x debería verificar la ecuación $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, y no hay ningún número racional que la cumpla. En efecto, para verlo, supóngase que un número racional $x = p/q$ satisface dicha ecuación, tomando los enteros p y q primos entre sí; entonces, debería cumplirse $x^2 = p^2/q^2 = 2$, es decir, $p^2 = 2q^2$ y por lo tanto, p^2 es par y en consecuencia p debe serlo también. Si se escribe $p = 2\alpha$, entonces se cumple $2\alpha^2 = q^2$ y, aplicando idéntico razonamiento, q ha de ser par. Esto contradice la hipótesis adoptada de que p y q sean primos entre sí. En definitiva, se ha probado que la ecuación $x^2 = 2$ no puede ser satisfecha por ningún número racional (véase una demostración diferente en el ejercicio 18) y con ello, que los números racionales resultan insuficientes para medir ciertas magnitudes.

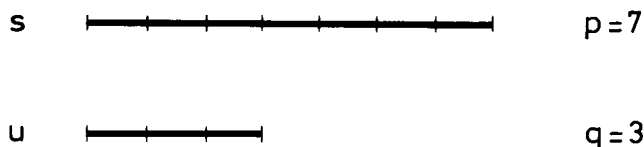


Figura 1.1. Medida de un segmento con números racionales

1.2.3 El problema de la incommensurabilidad de segmentos puede expresarse de un modo alternativo: fijado un segmento unidad, cualquier otro segmento puede representarse como un punto de una recta con origen fijado (véase la figura 1.2). Desde este punto de vista, el problema anterior se expresaría diciendo que los números racionales no “llenen” toda la recta; precisamente, los números reales surgen para dar respuesta a este problema. Tal como se verá más adelante, esto puede formularse también en términos de representación decimal: los números racionales tienen siempre una expresión decimal finita o periódica, mientras que la de los números reales puede ser infinita no periódica.

1.2.4 A continuación se estudian las propiedades que caracterizan el conjunto de los números reales \mathbb{R} , propiedades que se denominan *axiomas* y que pueden resumirse en la afirmación siguiente: \mathbb{R} es un *cuerpo conmutativo totalmente ordenado y completo*. Estos axiomas pueden agruparse en tres grandes bloques: el primero corresponde a la estructura algebraica de \mathbb{R} , el segundo al orden en \mathbb{R} y en el tercero se encuentra una propiedad que ha de ser considerada como esencial en Análisis Matemático: la completitud.

1.2.5 Axioma 1: \mathbb{R} es un cuerpo conmutativo.

En el conjunto \mathbb{R} se consideran definidas dos operaciones internas: la suma (+) y el producto (\cdot), las cuales satisfacen las propiedades siguientes:

(R1) La suma es *asociativa*: cualesquiera que sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumple $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(R2) La suma tiene *elemento neutro*: existe un elemento de \mathbb{R} , notado 0, tal que cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se cumple $x + 0 = x = 0 + x$.

(R3) Existencia de *elemento opuesto*: para cada $x \in \mathbb{R}$, existe un número real, notado $-x$ y denominado *elemento opuesto de x* , tal que $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

(R4) La suma es *conmutativa*: cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple $x + y = y + x$.

(R5) El producto es *distributivo* respecto de la suma: cualesquiera que sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, se tiene $x(y + z) = xy + xz$.

(R6) El producto es *asociativo*: cualesquiera que sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, se verifica $x(yz) = (xy)z$.

(R7) El producto tiene *elemento neutro* (denominado *elemento unidad*): existe un elemento de \mathbb{R} , notado 1, tal que cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se cumple $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$.

(R8) Existencia de *elemento inverso*: si $x \neq 0$, existe un número real, notado x^{-1} y denominado *elemento inverso de x* , tal que $x(x^{-1}) = 1 = (x^{-1})x$.

(R9) El producto es *conmutativo*: cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple $x \cdot y = y \cdot x$.

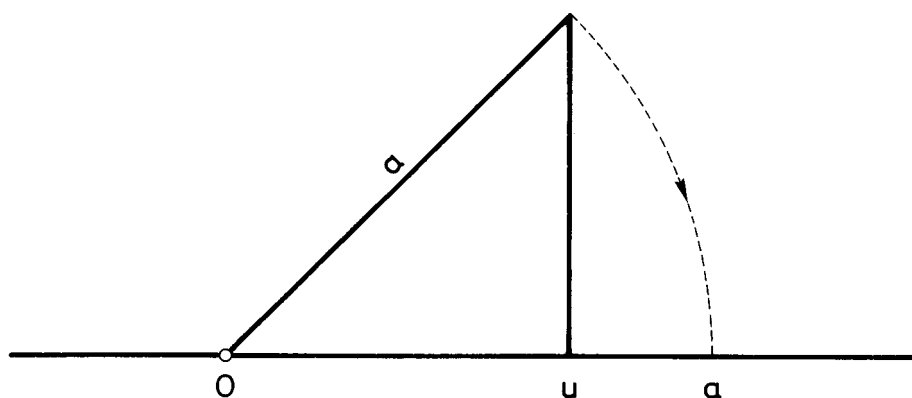


Figura 1.2. Representación de la incommensurabilidad de segmentos

1.2.6 Axioma 2: \mathbb{R} es un conjunto totalmente ordenado.

Vista la descripción de \mathbb{R} desde el punto de vista algebraico, se introducen ahora las propiedades de orden. El enunciado de este segundo axioma significa la existencia en \mathbb{R} de una relación de orden, notada \leq y leída “menor o igual que”, la cual satisface las propiedades que se detallan a continuación.

(R10) Propiedad *reflexiva*: cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se cumple $x \leq x$.

(R11) Propiedad *antisimétrica*: dados $x, y \in \mathbb{R}$, si se cumplen $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.

(R12) Propiedad *transitiva*: si $x, y, z \in \mathbb{R}$ son tales que $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

(R13) La relación de orden es *total*: dados dos números reales cualesquiera x, y , una de las dos afirmaciones es siempre cierta: o bien $x \leq y$, o bien $y \leq x$.

(R14) El orden es *compatible con la suma*: si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x \leq y$, entonces para cualquier $z \in \mathbb{R}$ se cumple $x + z \leq y + z$.

(R15) El orden es *compatible con el producto*: si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x \leq y$, entonces para cualquier número real z tal que $0 \leq z$, se cumple $xz \leq yz$.

1.2.7 OBSERVACIÓN.

- Es conveniente recordar que la notación $x < y$ significa que se cumplen dos propiedades: $x \leq y$ y $x \neq y$. Por otra parte, cabe indicar que se escribe $x \geq y$ (“ x es mayor o igual que y ”) de forma equivalente a $y \leq x$.
- Teniendo en cuenta el orden definido en \mathbb{R} , pueden considerarse los siguientes subconjuntos:

Números reales positivos: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x\}$;

Números reales positivos estrictos: $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R} - \{0\} = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x\}$;

Números reales negativos: $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$,

cumpliéndose la llamada *propiedad de tricotomía*: dado $x \in \mathbb{R}$, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta: $x \in \mathbb{R}_0^+$, o bien, $x = 0$, o bien, $x \in \mathbb{R}^-$. En ocasiones se utiliza la denominación “conjunto de números reales no negativos” para designar el conjunto \mathbb{R}^+ .

1.2.8 DEFINICIÓN. (*Cota superior, cota inferior, supremo e ínfimo. Conjuntos acotados*). Antes de enunciar el último de los axiomas de \mathbb{R} , hay que introducir algunos conceptos previos.

- Si X es un subconjunto de \mathbb{R} , un número real β se dice que es una *cota superior* de X si, para cualquier elemento $x \in X$, se cumple $x \leq \beta$.
- Análogamente, un número real α se dice que es una *cota inferior* de X si, para cualquier elemento $x \in X$, se cumple $\alpha \leq x$.
- Un subconjunto X de \mathbb{R} se denomina *acotado superiormente* (respectivamente, *acotado inferiormente*), si X tiene alguna cota superior (respectivamente, inferior). Se dice que X es *acotado* si lo es superior e inferiormente.
- Si X es un subconjunto de \mathbb{R} acotado superiormente, una cota superior s de X se denomina *supremo* de X , escribiéndose $s = \sup X$, si s es menor que cualquier otra cota superior de X , esto es, si satisface las dos condiciones siguientes:

1) $x \leq s$ para todo $x \in X$,

2) si $x \leq b$ para todo $x \in X$, entonces $s \leq b$.

Estas condiciones pueden enunciarse de forma equivalente,

1') $x \leq s$ para todo $x \in X$,

2') cualquiera que sea $c < s$ existe algún $x \in X$ tal que $c < x$.

- De forma análoga, si $X \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto de \mathbb{R} acotado inferiormente, una cota inferior i de X se denomina *ínfimo* de X , escribiéndose $i = \inf X$, si i es mayor que cualquier otra cota inferior de X , es decir, si verifica las dos condiciones siguientes:

1) $i \leq x$ para todo $x \in X$,

2) si $b \leq x$ para todo $x \in X$, entonces $b \leq i$.

- Cuando el supremo s de un conjunto X cumple $s \in X$, se dice que el supremo de X es *accesible* y se denomina entonces *máximo* de X , escribiéndose $\max X$. Si el ínfimo de un subconjunto X pertenece a dicho conjunto, se denomina *mínimo* de X y se escribe $\min X$.

1.2.9 EJEMPLO.

- 1) El conjunto $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x\}$, no está acotado superiormente ya que no existe ningún número

real β tal que $x \leq \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$. No obstante, dicho conjunto está acotado inferiormente, pues todo número real negativo α es cota inferior de \mathbb{R}_0^+ , ya que se cumple $\alpha < 0 < x$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$.

- 2) El subconjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 1\} \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, puesto que para cualquier número real $\beta \geq 1$ se cumple $x \leq \beta$, para todo $x \in A$; por otra parte, este subconjunto también está acotado inferiormente por cualquier número real negativo. Además, se cumple $\sup A = 1$; en efecto, se cumple la primera propiedad, pues $x \leq 1$ para todo $x \in A$. Si $b \in \mathbb{R}$ es otra cota superior distinta de 1 del conjunto A , esto es, tal que $x \leq b$ para todo $x \in A$, únicamente puede ser $b > 1$, o bien, $b < 1$; si $b > 1$, ya no es la menor de las cotas superiores, luego no puede ser el supremo y si $b < 1$, existe $x \in A$ tal que $b < x \leq 1$, por ejemplo $x = \frac{b+1}{2}$, con lo que b no es cota superior de A . En definitiva se ha probado que, efectivamente, se cumple $\sup A = 1$. Pruébese como ejercicio que se verifica $\inf A = 0$.

1.2.10 PROPOSICIÓN. (*Unicidad del supremo y del ínfimo*). El supremo y el ínfimo de un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , si existen, son únicos.

Demostración:

Se hará para el supremo; para el ínfimo es completamente análoga. En efecto, si se supone que hay dos supremos distintos s, s' , necesariamente debe cumplirse $s < s'$ o bien $s' < s$, lo cual es contradictorio con la definición de supremo, ya que entonces el mayor de ellos no puede cumplir ser la menor de las cotas superiores. ■

1.2.11 Axioma 3: \mathbb{R} es completo.

Vista la definición de supremo y de ínfimo de un subconjunto de \mathbb{R} , ilustrada con algunos ejemplos y probada su unicidad cuando existen, podemos enunciar el tercer axioma de los números reales, denominado *axioma del supremo o de completitud*, con el cual se termina la descripción axiomática del conjunto \mathbb{R} de los números reales. El enunciado de este tercer axioma se establece mediante la propiedad siguiente:

(R16) Todo subconjunto no vacío de \mathbb{R} acotado superiormente tiene supremo.

1.2.12 TEOREMA. (*Existencia y unicidad del conjunto de los números reales*). Existe un cuerpo ordenado y completo, que es único salvo isomorfismos. Dicho cuerpo se denomina *cuerpo de los números reales*.

Demostración:

La demostración de la existencia y la unicidad de tal cuerpo es una cuestión que no trataremos aquí, dada su complejidad y extensión. Pueden consultarse, por ejemplo, las referencias [Li], [Or] o bien [Spv], detalladas al final del capítulo. ■

1.2.13 OBSERVACIÓN. Queremos destacar que todas las propiedades que se utilizan habitualmente sobre los números reales pueden deducirse fácilmente de los axiomas anteriores; en los ejercicios 5 y 6 se propone la justificación de algunas de ellas. Veamos, no obstante, una muestra de dicha justificación. Se trata de probar que para cualquier número $x \in \mathbb{R}$ se cumple $x0 = 0$; a partir de los axiomas, puede razonarse como sigue:

- (a) $0 = 0 + 0$, por (R2);
- (b) $x0 = x(0 + 0)$, multiplicando por x en (a);
- (c) $x(0 + 0) = x0 + x0$, por (R5);
- (d) $x0 = x0 + x0$, por (b) y (c);
- (e) $0 = x0 + (-x0)$, por (R3);

- (f) $x0 + (-(x0)) = (x0 + x0) + (-(x0))$, sumando $-(x0)$ a (d);
 (g) $(x0 + x0) + (-(x0)) = x0 + (x0 + (-(x0)))$, por (R1);
 (h) $x0 + (x0 + (-(x0))) = x0$, por (e) y (R2);
 (i) $0 = x0$, por (e), (f), (g) y (h).

1.2.14 OBSERVACIÓN. No es difícil ver que la axiomática de \mathbb{R} lo distingue claramente de los otros conjuntos numéricos estudiados brevemente en el apartado anterior: \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} . Así, por ejemplo, es sabido que la suma no dota a \mathbb{N} de una estructura de grupo, ya que no se satisface la propiedad (R3); también se sabe que \mathbb{Z} tiene estructura de anillo, pero no de cuerpo, puesto que no satisface la propiedad (R8); finalmente, \mathbb{Q} es un cuerpo totalmente ordenado, pero no es completo, lo cual se justifica inmediatamente: si se considera, por ejemplo, el subconjunto de \mathbb{Q} definido por $X = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\}$, dicho conjunto no es vacío, está acotado superiormente y, sin embargo, no tiene supremo en \mathbb{Q} , mientras que su supremo en \mathbb{R} es $\sqrt{2}$ (véase el ejercicio 18).

1.3 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

1.3.1 Hemos comentado ya en 1.2.13 que todas las propiedades del conjunto \mathbb{R} se deducen fácilmente de los axiomas vistos en el apartado anterior. En este apartado se estudian algunas propiedades de los números reales, haciendo especial énfasis en las más importantes y de mayor utilidad en los capítulos posteriores; se destaca en ellas la importancia del axioma de completitud de \mathbb{R} . En primer lugar, se hace notar que la aparente asimetría del axioma de completitud no es tal, es decir, que \mathbb{R} satisface una propiedad análoga a (R16) para el ínfimo. A continuación veremos una consecuencia importante del axioma de completitud, denominada *propiedad arquimediana* de los números reales, la cual, en síntesis, afirma que los números naturales no tienen ninguna cota superior en \mathbb{R} . Para concluir, veremos la propiedad de densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} .

1.3.2 PROPOSICIÓN. Todo subconjunto no vacío de números reales acotado inferiormente, tiene ínfimo.

Demostración:

Sea X un subconjunto no vacío de \mathbb{R} y supongamos que es acotado inferiormente. Considerando el conjunto $Y = \{-x / x \in X\}$, es evidente que Y no es vacío y que los opuestos de las cotas inferiores de X son cotas superiores de Y . Por la propiedad de completitud (R16), el conjunto Y tiene un supremo, $s = \sup Y$. Es inmediato comprobar que $-s = \inf X$. ■

1.3.3 PROPOSICIÓN. El conjunto \mathbb{N} no está acotado superiormente en \mathbb{R} .

Demostración:

Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que \mathbb{N} estuviera acotado superiormente; al ser un conjunto no vacío, en virtud del axioma de completitud existiría un número real s tal que $s = \sup \mathbb{N}$. Consideremos el número real $s - 1$; este número no puede ser cota superior de \mathbb{N} , pues el supremo es la menor de ellas, con lo que existe algún número natural n tal que $s - 1 < n$, es decir, $s < n + 1$, y al ser $n + 1 \in \mathbb{N}$, el número real s no puede ser una cota superior de \mathbb{N} , lo cual contradice la condición $s = \sup \mathbb{N}$. ■

1.3.4 TEOREMA. (*Arquimedeanidad de \mathbb{R} .*) Dados dos números reales cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, existe algún número natural n tal que $y < nx$.

Demostración:

Dado que $x \neq 0$, puede considerarse el número real y/x ; en virtud de la proposición 1.3.3, y/x no puede ser una cota superior de \mathbb{N} , con lo que existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{y}{x} < n$. Puesto que $x > 0$, n satisface la desigualdad enunciada, $y < nx$. ■

1.3.5 COROLARIO. Se cumple $\inf \mathbb{R}_0^+ = 0$.

Demostración:

Sea $x > 0$ un número real positivo estricto cualquiera; vamos a probar que no puede ser el ínfimo de \mathbb{R}_0^+ . En efecto, tomando $y = 1$ en el teorema anterior, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < nx$, es decir, $\frac{1}{n} < x$, con lo que x no es la menor de las cotas inferiores. Tampoco puede ser el ínfimo un número real negativo, pues de modo análogo se prueba que hay cotas inferiores mayores. Puesto que el ínfimo de \mathbb{R}_0^+ existe en virtud de (1.3.2) y no puede ser ni $\inf \mathbb{R}_0^+ > 0$ ni $\inf \mathbb{R}_0^+ < 0$, necesariamente debe ser $\inf \mathbb{R}_0^+ = 0$. ■

Las propiedades que siguen afirman que los conjuntos \mathbb{Q} de los números racionales y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ de los números irracionales, son densos en \mathbb{R} . La propiedad de densidad de \mathbb{Q} (respectivamente, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) se enuncia diciendo que entre dos números reales cualesquiera, siempre hay números racionales (respectivamente, irracionales). Este importante resultado será muy utilizado en lo que sigue, puesto que en esencia implica que se pueden encontrar números racionales (respectivamente, irracionales) “tan cerca como se quiera” de un número real arbitrario.

1.3.6 TEOREMA. (*Densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} .*) Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existe un número racional r tal que $x < r < y$.

Demostración:

Dado que $x < y$, se cumple $y - x > 0$; por la propiedad arquimediana (1.3.4), existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n(y - x) = ny - nx$. Si la diferencia entre los números reales ny y nx es mayor que 1, necesariamente existe algún número entero m entre ambos, esto es, $nx < m < ny$; en consecuencia, se cumple $x < \frac{m}{n} < y$ y, en definitiva, $r = \frac{m}{n}$ es el número racional buscado. ■

1.3.7 COROLARIO. Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existe un número irracional z tal que $x < z < y$.

Demostración:

Aplicando la propiedad de densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} a los números $\frac{x}{\sqrt{2}}$ y $\frac{y}{\sqrt{2}}$, se obtiene la existencia de un número racional $r \neq 0$ tal que $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$. En consecuencia, $x < r\sqrt{2} < y$, de manera que $z = r\sqrt{2}$ es el número irracional buscado (obsérvese que no se ha justificado que el número $r\sqrt{2}$ sea irracional, cuestión que se propone como ejercicio al final de capítulo; véase el ejercicio 9). ■

1.4 REPRESENTACIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS REALES

1.4.1 DEFINICIÓN. (*Representación decimal de un número real*). Sea $x \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera; supondremos que $x \geq 0$, sin que esto suponga pérdida de generalidad en el razonamiento que sigue. Es fácil probar (véase el ejercicio 8) que existe un número natural $a \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq x < a + 1$.

Si se divide el conjunto $\{t \in \mathbb{R} / a \leq t < a + 1\}$ en 10 partes iguales, existe un número natural $a_1 \in \mathbb{N}$ con $0 \leq a_1 \leq 9$ tal que

$$a + \frac{a_1}{10} \leq x < a + \frac{a_1 + 1}{10}.$$

Procediendo análogamente con el conjunto $\left\{t \in \mathbb{R} / a + \frac{a_1}{10} \leq t < a + \frac{a_1 + 1}{10}\right\}$, se obtiene la existencia de $a_2 \in \mathbb{N}$ con $0 \leq a_2 \leq 9$ tal que

$$a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}.$$

Iterando el razonamiento se deduce que dado $x \in \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $n + 1$ números naturales a, a_1, a_2, \dots, a_n con $0 \leq a_i \leq 9$ para $i = 1, 2, \dots, n$, tales que se cumple

$$a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Con las notaciones anteriores, la expresión

$$x = a, a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad (\text{o bien } x = a.a_1 a_2 \dots a_n \dots)$$

se denomina *representación decimal* de x . De manera un tanto informal, se acaba de probar que todo número real tiene una representación decimal.

- La representación decimal de un número real se dice que es *finita*, cuando existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_m = 0$ para todo $m > n$, es decir, cuando la representación decimal es de la forma

$$x = a, a_1 a_2 \dots a_n$$

La representación decimal se denomina *periódica* cuando dicha representación es de la forma

$$a, a_1 a_2 \dots a_n b_1 \dots b_m b_1 \dots b_m b_1 \dots b_m \dots,$$

siendo entonces habitual la notación,

$$a, a_1 a_2 \dots a_n \overline{b_1 \dots b_m}.$$

1.4.2 PROPOSICIÓN. Todo número racional tiene una representación decimal finita o periódica. Recíprocamente, toda expresión decimal finita o periódica representa un número racional.

Demostración:

Sea $x = p/q$ un número racional escrito en forma de fracción irreducible y supongamos que es positivo. El algoritmo de la división de p por q es el que produce su representación decimal: es sabido que, en cada paso, el resto ha de ser un entero entre 0 y $q - 1$. Si en algún paso es igual a 0, la representación decimal es finita; si no es así, el algoritmo continúa y tras, a lo sumo, q iteraciones, aparece un mismo resto por segunda vez: a partir de aquí, los números naturales a_n de la representación decimal se van repitiendo indefinidamente y, en consecuencia, la representación decimal es periódica.

Recíprocamente, sea x un número real con representación decimal periódica (posiblemente finita) $x = a, a_1 a_2 \dots a_n \overline{b_1 b_2 \dots b_m}$. Entonces, el número $p = (10^{n+m} - 10^n)x$ es un entero, ya que

$$\begin{aligned} (10^{n+m} - 10^n)x &= 10^{n+m}x - 10^n x = \\ &= aa_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m, \overline{b_1 b_2 \dots b_m} - aa_1 a_2 \dots a_n, \overline{b_1 b_2 \dots b_m} = \\ &= aa_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m - aa_1 a_2 \dots a_n \end{aligned}$$

con lo cual $x = \frac{p}{10^{n+m} - 10^n} \in \mathbb{Q}$. ■

1.4.3 EJEMPLO.

- 1) La representación decimal del número racional $5/2$ es $2,5$.
- 2) La representación decimal del número racional $5/3$ es $1,\overline{6}$.
- 3) La representación decimal $5,\overline{234}$ corresponde al número racional $\frac{5234 - 52}{1000 - 10} = \frac{5182}{990} = \frac{2591}{495}$.

1.4.4 OBSERVACIÓN. En el apartado anterior se ha comentado que la completitud es la única propiedad descrita en los axiomas de \mathbb{R} que distingue \mathbb{Q} de \mathbb{R} ; obsérvese que acabamos de expresar esta diferencia en términos de representaciones decimales, esto es, que la representación decimal de los elementos de \mathbb{Q} es, o bien finita, o bien infinita periódica, mientras que en \mathbb{R} hay también elementos con representación decimal infinita no periódica.

Otra característica que distingue \mathbb{Q} de \mathbb{R} es el “número de elementos” que contiene cada uno de estos conjuntos: vamos a ver que \mathbb{Q} es un conjunto infinito numerable, mientras que \mathbb{R} es un conjunto infinito no numerable.

1.4.5 PROPOSICIÓN. El conjunto \mathbb{Q} de los números racionales, es numerable.

Demostración:

Se demostrará que el conjunto de todas las fracciones positivas es numerable; se propone como ejercicio ver que ello es suficiente para demostrar la propiedad enunciada.

Es conveniente disponer dichas fracciones en forma de “tabla infinita”,

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 1/4 & 2/4 & 3/4 & 4/4 & \dots & & \\ 1/3 & 2/3 & 3/3 & 4/3 & \dots & & \\ 1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & \dots & & \\ 1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & \dots & & \end{array}$$

y proceder a su numeración siguiendo las “diagonales finitas” de dicha tabla, eliminando los valores repetidos:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1/1 & 2/1 & 1/2 & 3/1 & 1/3 & 4/1 & 3/2 & 2/3 & 1/4 & 5/1 & \dots \end{array}$$

y así sucesivamente. ■

1.4.6 PROPOSICIÓN. El conjunto \mathbb{R} de los números reales, es no numerable.

Demostración:

Se demostrará que el intervalo $[0, 1]$ es no numerable; se propone como ejercicio ver que es suficiente para demostrar la propiedad. Si se supone que todas las expresiones decimales de la forma $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ forman un conjunto numerable, entonces se cumpliría,

$$\begin{array}{l} x_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\ x_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\ x_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\ \vdots \end{array}$$

Con ello, se podría formar un nuevo número $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ con todos los $a_i \neq 9$ del modo siguiente: $a_1 \neq a_{11}$, $a_2 \neq a_{22}$, $a_3 \neq a_{33}$, y así sucesivamente. El resultado sería un número x del intervalo en cuestión, que sin embargo sería distinto de todos los x_n , es decir, que la numeración de $[0, 1]$ no sería biyectiva. ■

1.4.7 OBSERVACIÓN. Las dos proposiciones anteriores permiten afirmar que no es posible establecer una biyección entre \mathbb{Q} y \mathbb{R} , esto es, que el conjunto de los racionales \mathbb{Q} contiene “menos elementos” que el de los reales \mathbb{R} . Esta afirmación no ha de resultar chocante con la propiedad de densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} , como a primera vista podría parecer; en efecto, la densidad se refiere a la “disposición” de los números racionales sobre la recta y no a su “cantidad”.

1.5 VALOR ABSOLUTO. TOPOLOGÍA DE \mathbb{R}

1.5.1 Este apartado tiene como objetivo la definición de una métrica en el conjunto \mathbb{R} , esto es, de una metodología que permita medir distancias entre elementos del conjunto; para ello se utilizará el valor absoluto de un número real. Se definirán a continuación ciertas nociones topológicas: las bolas y los intervalos en \mathbb{R} , los puntos de acumulación de un conjunto y su caracterización y, finalmente, se enuncia y demuestra el teorema de Bolzano-Weierstrass. Para terminar el apartado, se introduce la noción de recta real ampliada.

1.5.2 DEFINICIÓN. (*Valor absoluto de un número real*). Sea x un número real; se define el *valor absoluto* de x , notado $|x|$, mediante: $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0; \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1.5.3 PROPOSICIÓN. (*Propiedades del valor absoluto*). Si x, y son números reales cualesquiera, se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) $|x| \geq 0$;
- 2) $|x| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$;
- 3) $|x| = \max\{x, -x\}$;
- 4) $|xy| = |x||y|$.
- 5) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

Demostración:

Las propiedades 1) y 2) son evidentes.

3) Si $x > 0$, entonces $-x < x = |x|$, y si $x < 0$, entonces $x < -x = |x|$, y de ahí la propiedad.

4) Se pueden considerar los casos siguientes:

- si $x \geq 0, y \geq 0$, entonces $xy \geq 0$, con lo que $|xy| = xy = |x||y|$;
- si $x \geq 0, y < 0$, entonces $xy \leq 0$, con lo que $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$;
- si $x < 0, y < 0$, entonces $xy > 0$, con lo que $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.
- El caso $x < 0, y \geq 0$ es análogo al segundo.

5) Se tiene $|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$, de donde resulta inmediatamente la propiedad. ■

1.5.4 OBSERVACIÓN. Las propiedades 4) y 5) de la proposición anterior pueden generalizarse a

un número finito de términos; así, si x_1, x_2, \dots, x_n son números reales cualesquiera, se tienen las propiedades:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|;$$

$$|x_1 x_2 \dots x_n| = |x_1| |x_2| \dots |x_n|.$$

Se propone como ejercicio su justificación rigurosa por inducción.

1.5.5 COROLARIO. De las propiedades establecidas en la proposición anterior, puede deducirse fácilmente que, si x, y, z son números reales cualesquiera, se cumplen las siguientes propiedades:

- 1) $|x - y| \leq |x| + |y|$;
- 2) $|x - y| \geq ||x| - |y||$;
- 3) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$;
- 4) $-|x| \leq x \leq |x|$.

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

1.5.6 DEFINICIÓN. (*Distancia en \mathbb{R}*). Si $x, y \in \mathbb{R}$, se denomina *distancia de x a y* , y se designa $d(x, y)$, el número real positivo:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Obsérvese que d es una aplicación de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^+ . La proposición que sigue estudia las propiedades más importantes de esta aplicación.

1.5.7 PROPOSICIÓN. La distancia entre dos números reales definida en 1.5.6 cumple las propiedades siguientes: si x, y, z son números reales cualesquiera, entonces

- 1) $d(x, y) \geq 0$;
- 2) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$;
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$;
- 4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

1.5.8 DEFINICIÓN. (*Métrica. Espacio métrico*). Cuando en un conjunto X hay definida una aplicación con las propiedades de d , ésta se denomina una *métrica*, o bien, una *distancia en X* , y la pareja (X, d) se denomina un *espacio métrico*. Así pues, (\mathbb{R}, d) es un espacio métrico; la distancia d definida en 1.5.6 se denomina *distancia euclídea*.

1.5.9 DEFINICIÓN. (*Bolas o entornos simétricos en \mathbb{R}*). En un espacio métrico, pueden definirse unos conjuntos que, como se podrá ver a lo largo del texto, resultan de gran utilidad en Análisis Matemático; dichos conjuntos se denominan *bolas* o *entornos simétricos* y se definen a continuación.

- Si a es un número real cualquiera y $r > 0$ es un número real estrictamente positivo, se define la *bola abierta de centro a y radio r* , notada $B(a; r)$, o bien, $B_r(a)$, como el siguiente conjunto:

$$B(a; r) = B_r(a) = \{x \in \mathbb{R} / |x - a| < r\}.$$

Se define la *bola cerrada de centro a y radio r* , notada $\overline{B}(a; r)$, o bien, $\overline{B}_r(a)$ como el conjunto,

$$\overline{B}(a; r) = \overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R} / |x - a| \leq r\}.$$

- Obsérvese que se cumple la igualdad,

$$\overline{B}(a; r) = B(a; r) \cup \{a - r, a + r\}.$$

- En algunos casos interesa considerar las bolas sin el centro (que a menudo se denominan *bolas pinchadas*), esto es, los conjuntos:

$$B^*(a; r) = B(a; r) - \{a\}; \quad \overline{B}^*(a; r) = \overline{B}(a; r) - \{a\}.$$

- Obsérvese que las bolas, de cualquier tipo, son conjuntos acotados.

1.5.10 DEFINICIÓN. (*Intervalos en \mathbb{R}*). Otro tipo de subconjuntos notables de \mathbb{R} son los denominados *intervalos*, que se definen a continuación.

- Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a \leq b$, se denomina *intervalo abierto de origen a y extremo b* el conjunto definido por

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\};$$

- Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a \leq b$, se denomina *intervalo cerrado de origen a y extremo b* , el conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}.$$

- Pueden definirse *intervalos de tipo mixto* $[a, b[$ y $]a, b]$, de manera evidente.
- Obsérvese que si $a = b$, el intervalo abierto $]a, a[$ es el conjunto vacío y el intervalo cerrado $[a, a]$ es el conjunto $\{a\}$.
- En cualquiera de las definiciones anteriores, el número real $|a - b| = b - a$ se denomina *amplitud del intervalo*. Por otra parte, está claro que los intervalos de cualquier tipo son conjuntos acotados.
- Para designar los extremos abiertos de un intervalo, en ocasiones se emplea el paréntesis en lugar del corchete, esto es, se escribe (a, b) para indicar el intervalo abierto de origen a y extremo b . En ese caso, debe prestarse atención para no confundir un intervalo abierto (a, b) con un par ordenado. En este texto se empleará la notación mediante corchetes.

1.5.11 OBSERVACIÓN. En \mathbb{R} , pueden relacionarse fácilmente las bolas y los intervalos. En efecto, si se considera la bola abierta $B(a; r)$ y se toma un elemento cualquiera x de la misma, en virtud de la definición de bola abierta, debe cumplirse $|x - a| < r$, es decir, $-r < x - a < r$, lo cual es equivalente a afirmar que $a - r < x < a + r$, esto es, que $x \in]a - r, a + r[$. Se ha probado, pues, la igualdad:

$$B(a; r) =]a - r, a + r[.$$

De modo análogo, es fácil establecer las igualdades siguientes:

$$\overline{B}(a; r) = [a - r, a + r]; \quad]a, b[= B\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right); \quad [a, b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right).$$

Obsérvese que las dos últimas igualdades tienen sentido únicamente si $b - a > 0$, en virtud de la definición de bola.

1.5.12 DEFINICIÓN. (*Entornos*). Veamos a continuación una definición esencial en Análisis: la de entorno de un punto. Si $a \in \mathbb{R}$, se denomina *entorno* del punto a , cualquier conjunto U tal que exista

una bola abierta $B_r(a)$ contenida en U . Así, el intervalo cerrado $[-0.2, 0.2]$ es un entorno del punto $a = 0$, ya que, por ejemplo, se cumple $0 \in]-0.1, 0.1[\subset [-0.2, 0.2]$. En cambio, el intervalo $[0, 0.2]$ no es un entorno de $a = 0$, ya que no existe ningún $r > 0$ tal que $] -r, r[\subset [0, 0.2]$. Es habitual designar mediante $U(a)$ un entorno de un punto a .

Nuestro próximo objetivo es enunciar y demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass. Sin embargo, antes debemos ver algunos conceptos previos, relativos a intervalos encajados y puntos de acumulación.

1.5.13 DEFINICIÓN. (*Intervalos encajados*). Si $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos de \mathbb{R} , dichos intervalos se denominan *encajados*, si se cumple

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

Son ejemplos de sucesiones de intervalos encajados, las siguientes:

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right], \quad n \in \mathbb{N}; \quad J_n = [n, +\infty[, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$K_n = \left] 0, \frac{1}{n} \right[, \quad n \in \mathbb{N}; \quad L_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Una cuestión de gran interés es el estudio de la intersección $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$; concretamente, se trata de saber cuándo se puede asegurar que esta intersección no es vacía. Obsérvese que en los ejemplos anteriores se cumple: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n = \emptyset$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$, y, finalmente, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n = [1, 2]$. La clave está en el carácter de los intervalos y en una propiedad de su amplitud, tal y como establece la proposición que sigue.

1.5.14 TEOREMA. (*De los intervalos encajados*.)

- 1) Si $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de intervalos encajados en \mathbb{R} , entonces su intersección no es vacía, esto es, existe al menos un elemento $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\xi \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Si además se cumple la condición: $\inf\{b_n - a_n / n \in \mathbb{N}\} = 0$, entonces el número ξ es único.

Demostración:

- 1) Se tienen las inclusiones $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$, de las cuales se desprende que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

En consecuencia, el conjunto $\{a_n / n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente (cualquier b_m es una cota superior del mismo) y el conjunto $\{b_n / n \in \mathbb{N}\}$ está acotado inferiormente (cualquier a_m es una cota inferior del mismo). Por tanto, existen sus respectivos supremo e ínfimo (axioma 3): $\xi = \sup\{a_n / n \in \mathbb{N}\}$ y $\eta = \inf\{b_n / n \in \mathbb{N}\}$ que satisfacen $a_n \leq \xi \leq \eta \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y esto demuestra que $\bigcap I_n \neq \emptyset$.

- 2) Si suponemos que se cumple la condición $\inf\{b_n - a_n / n \in \mathbb{N}\} = 0$, entonces $\bigcap I_n$ contiene un único elemento, ya que si se supone que $t_1, t_2 \in \bigcap I_n$, entonces $t_1, t_2 \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que se cumple $0 \leq |t_1 - t_2| \leq b_n - a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde $0 \leq |t_1 - t_2| \leq \inf\{b_n - a_n\} = 0$ y en consecuencia, $t_1 = t_2$. ■

1.5.15 OBSERVACIÓN. El teorema que se acaba de exponer es, tal como se habrá podido comprobar, la generalización de una metodología que ya ha sido utilizada al estudiar la representación decimal de los números reales, representación que se encuentra mediante el encaje de intervalos de amplitud 10^{-n} .

1.5.16 DEFINICIÓN. (*Puntos de acumulación. Conjunto derivado*).

- Si X es un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , se dice que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación o punto límite* del conjunto X , si se cumple $B^*(x; r) \cap X \neq \emptyset$, para todo $r > 0$, esto es, si cualquier entorno simétrico del punto x contiene por lo menos un punto de X diferente del propio x .
- El conjunto de los puntos de acumulación de X se denomina *conjunto derivado de X* y se designa X' .

1.5.17 EJEMPLO. Si se considera el conjunto $X = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$, el número real $x = 0$ es un punto de acumulación de X , ya que cualquiera que sea $r > 0$, existe un número natural n tal que $n > \frac{1}{r}$ y, por tanto, $0 < \frac{1}{n} < r$, es decir, $\frac{1}{n} \in]-r, r[$. Dicho de otro modo, cualquiera que sea $r > 0$, $\frac{1}{n} \in B^*(0; r) \cap X$, y por tanto $B^*(0; r) \cap X \neq \emptyset$.

1.5.18 OBSERVACIÓN.

- Nótese que en la definición no se requiere que $x \in X$ para que x pueda ser un punto de acumulación de X , tal como se desprende del ejemplo anterior, esto es, en general X' no es un subconjunto de X . Por otra parte, también puede darse el caso que un elemento de X no sea punto de acumulación de X : por ejemplo, considérese el conjunto $X = [1, 3] \cup \{4\}$; el punto $x = 4$ pertenece a X y no obstante no es de acumulación de X , como es inmediato comprobar. Los elementos de un conjunto que no son puntos de acumulación del mismo se denominan *puntos aislados*.
- Un subconjunto no vacío $X \subset \mathbb{R}$ se dice que es *cerrado* si contiene todos sus puntos de acumulación, es decir, si se cumple $X' \subset X$. Un subconjunto no vacío X se denomina *abierto* si su complementario $\mathbb{R} - X$ es cerrado. Obsérvese que esto justifica la terminología adoptada en relación con las bolas y los intervalos en \mathbb{R} .

1.5.19 PROPOSICIÓN. Un número real x es un punto de acumulación de X si, y solamente si, cualquiera que sea $r > 0$, la bola $B^*(x; r)$ contiene infinitos puntos de X .

Demostración:

La condición es necesaria: si x es un punto de acumulación del conjunto X y para un cierto $r > 0$ se cumpliera que $B^*(x; r) \cap X$ es un conjunto finito, por ejemplo, $B^*(x; r) \cap X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, designando por δ el valor $\delta = \min\{|x - \alpha_i| / 1 \leq i \leq m\} > 0$, la bola $B(x; \delta)$ no contendría ningún punto de X , lo cual sería una contradicción con el hecho de que x es un punto de acumulación de X .

La condición es suficiente: inmediato, en virtud de la propia definición de punto de acumulación. ■

1.5.20 COROLARIO. Un subconjunto finito de \mathbb{R} no tiene puntos de acumulación, o dicho de otro modo, si un subconjunto de \mathbb{R} es finito, su conjunto derivado es vacío.

Demostración:

Inmediata. ■

1.5.21 OBSERVACIÓN. La afirmación del corolario anterior no debe inducir a creer que si un conjunto es infinito, entonces debe tener por lo menos un punto de acumulación, lo cual no es cierto: hay subconjuntos infinitos de \mathbb{R} que no tienen ningún punto de acumulación, como, por ejemplo, cualquier conjunto de puntos aislados como el conjunto de los números naturales \mathbb{N} o el de los enteros \mathbb{Z} . El teorema que sigue proporciona una condición suficiente para la existencia de puntos de acumulación.

1.5.22 TEOREMA. (De Bolzano-Weierstrass.) Todo subconjunto infinito y acotado de \mathbb{R} tiene, al menos, un punto de acumulación.

Demostración:

Sea X un subconjunto de \mathbb{R} , acotado y con infinitos elementos. Por ser acotado, existe un intervalo $I_0 = [a, b]$, de amplitud $l_0 = b - a$, tal que $X \subset [a, b]$. Se trata de construir una sucesión (I_n) de intervalos encajados que cumpla las condiciones del teorema 1.5.14, y con un punto común que, como se verá, es de acumulación de X .

Si se indica por c el punto medio del intervalo I_0 , entonces al menos uno de los dos intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ ha de contener infinitos puntos de X , ya que si no fuera así, X no podría ser infinito; designemos por I_1 aquel que lo cumpla, cuya amplitud es $l_1 = \frac{b-a}{2}$. Si se divide ahora I_1 análogamente a como

se ha hecho con I_0 , se obtiene otro intervalo I_2 , de amplitud $l_2 = \frac{b-a}{2^2}$, tal que $I_2 \cap X$ contiene infinitos puntos de X . El proceso se va continuando de forma análoga, obteniéndose así una sucesión de intervalos encajados I_n , de amplitud respectiva $l_n = \frac{b-a}{2^n}$, y cada uno de los cuales contiene infinitos puntos de X . Esta sucesión cumple las condiciones del teorema 1.5.14 y, por lo tanto, existe un único número x tal que $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se trata de ver finalmente que x es un punto de acumulación de X . En efecto, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $l_n = \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$, con lo que se cumple $I_n \subset]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, y puesto que I_n contiene infinitos puntos de X , la bola $B^*(x; \varepsilon)$ contiene también infinitos puntos de X , esto es, x es un punto de acumulación de X . ■

1.5.23 LA RECTA REAL AMPLIADA. Para finalizar, vamos a definir y estudiar brevemente la llamada *recta real ampliada*. En determinados casos es conveniente considerar “los números reales mayores que un número dado a ”, o bien, “los números reales menores que un número dado a ”, esto es, considerar conjuntos como, por ejemplo, $\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$ o bien $\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$. Para referirnos a estos conjuntos, es útil definir el denominado *conjunto ampliado de los números reales o recta real ampliada*, que se define mediante: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, en el cual, $-\infty$ y $+\infty$ son dos símbolos, denominados respectivamente *menos infinito* y *más infinito*, tales que $-\infty < x < +\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}$,

1.5.24 DEFINICIÓN. (*Operaciones algebraicas en la recta real ampliada*). Las operaciones algebraicas con estos símbolos y los números reales se definen como sigue: si x es un número real cualquiera, entonces,

$$\begin{array}{ll} x + (+\infty) = +\infty, & \frac{x}{+\infty} = 0, \\ x + (-\infty) = -\infty, & \frac{x}{-\infty} = 0, \\ x - (+\infty) = -\infty, & \\ x - (-\infty) = +\infty, & (+\infty) + (+\infty) = +\infty, \\ x \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ si } x > 0, & (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \\ x \cdot (-\infty) = -\infty, \text{ si } x > 0, & (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \\ x \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ si } x < 0, & (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \\ x \cdot (-\infty) = +\infty, \text{ si } x < 0, & (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty. \end{array}$$

1.5.25 OBSERVACIÓN. Conviene insistir en que la manipulación algebraica de $+\infty$ y $-\infty$ no es trivial ni sigue las mismas reglas de juego que en \mathbb{R} ; concretamente, obsérvese que no se han definido

expresiones tales como $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, o bien, $\frac{+\infty}{+\infty}$. Obsérvese asimismo que el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ no tiene estructura de cuerpo.

1.5.26 Definidos los símbolos $+\infty$ y $-\infty$, en la recta real pueden considerarse los intervalos no acotados:

$$\begin{aligned} [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}, &]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}; \\]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}, &]-\infty, a[&= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}. \end{aligned}$$

Como puede verse, se trata de semirectas; si contienen al extremo real se suelen denominar *cerradas* y, en caso contrario, *abiertas*. El intervalo $]a, +\infty[$ se denomina habitualmente *entorno de $+\infty$ asociado al punto a* y el intervalo $]-\infty, a[$, se denomina *entorno de $-\infty$* .

1.5.27 OBSERVACIÓN. En \mathbb{R} todo intervalo acotado $]a, b]$ es equipotente al intervalo no acotado $[b, +\infty[$. En efecto, definamos la aplicación $f :]a, b] \rightarrow [b, +\infty[$ mediante $f(x) = a + \frac{b-a}{x-a}(b-a)$ y veamos que es biyectiva. La inyectividad es inmediata, bastando considerar dos elementos distintos $x, x' \in]a, b]$ y deducir que $f(x) \neq f(x')$. Para la exhaustividad, basta tomar un elemento cualquiera $y \in [b, +\infty[$ y ver inmediatamente que su antiimagen es el elemento $x = a + \frac{b-a}{y-a}(b-a) \in]a, b]$, lo cual completa el razonamiento.

1.6 LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1.6.1 Análogamente a que, como se ha puesto de manifiesto, los números racionales resultan insuficientes para resolver algunas cuestiones, con los números reales no basta para la formulación de ciertos problemas físicos, geométricos o algebraicos. Así, por ejemplo, la sencilla ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real, ya que el cuadrado de un número real no puede ser nunca negativo. Esto motiva que se plantee la ampliación del cuerpo de los números reales, tal como se ve a continuación.

1.6.2 DEFINICIÓN. Se define el conjunto \mathbb{C} de los números complejos como el producto cartesiano:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{z = (x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}.$$

El número real x se denomina *parte real* de z y se escribe $x = \Re z$; el número real y se denomina *parte imaginaria* de z , indicado mediante $y = \Im z$.

1.6.3 Para dotar de estructura algebraica al conjunto \mathbb{C} , se definen en él dos operaciones internas, escritas $+$ y \cdot , denominadas respectivamente *suma* y *producto*, mediante:

$$\begin{aligned} z + z' &= (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \\ z \cdot z' &= (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx'), \end{aligned}$$

cualesquiera que sean los elementos $z, z' \in \mathbb{C}$. Como es habitual, se escribirá simplemente zz' , en lugar de $z \cdot z'$, para indicar el producto de dos elementos de \mathbb{C} .

Estas operaciones cumplen las propiedades que recoge la proposición que sigue.

1.6.4 PROPOSICIÓN. Con las operaciones definidas en 1.6.3, el conjunto \mathbb{C} tiene estructura de cuerpo conmutativo, esto es, se cumplen las propiedades:

- 1) La suma es asociativa: $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$, cualesquiera que sean $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.
- 2) La suma tiene elemento neutro: si se escribe $0 = (0, 0)$, entonces $z + 0 = z = 0 + z$, cualquiera que sea $z \in \mathbb{C}$.
- 3) Existencia de elemento opuesto para la suma: para cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, existe un único elemento $-z = (-x, -y)$ tal que $z + (-z) = 0 = (-z) + z$.
- 4) La suma es conmutativa: $z + z' = z' + z$, cualesquiera que sean $z, z' \in \mathbb{C}$.
- 5) El producto es distributivo respecto de la suma: $z(z' + z'') = zz' + zz''$, cualesquiera que sean $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.
- 6) El producto es asociativo: $z(z'z'') = (zz')z''$, cualesquiera que sean $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.
- 7) El producto tiene elemento neutro: si se escribe $1 = (1, 0)$, entonces $z1 = z = 1z$, cualquiera que sea $z \in \mathbb{C}$.
- 8) Existencia de elemento inverso para el producto: si $z = (x, y) \neq 0$, existe un único elemento escrito z^{-1} tal que $zz^{-1} = 1 = z^{-1}z$. Compruébese que dicho elemento es el número complejo: $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$,
- 9) El producto es conmutativo: $zz' = z'z$, cualesquiera que sean $z, z' \in \mathbb{C}$.

Demostración:

Se propone como ejercicio; todas las propiedades se comprueban inmediatamente aplicando las definiciones de las operaciones internas en \mathbb{C} dadas en 1.6.3; veamos, no obstante, la demostración de la propiedad 1):

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2)) = \\ &= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)) = \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2) = ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) = (x + y) + z, \end{aligned}$$

y la propiedad queda probada. ■

1.6.5 DEFINICIÓN. Dados dos números complejos $z, z' \in \mathbb{C}$ tales que $z' \neq 0$, el producto $z(z')^{-1}$ se denomina *cociente* de z con z' , y se escribe $\frac{z}{z'}$, o bien, z/z' .

1.6.6 Completada la caracterización algebraica de \mathbb{C} , es conveniente proceder a la inclusión de \mathbb{R} en \mathbb{C} , lo cual permitirá la identificación de cada número real con un determinado número complejo. Se define una aplicación f de \mathbb{R} en \mathbb{C} , mediante $f(x) = (x, 0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Es inmediato comprobar que f es inyectiva y que se cumplen las propiedades:

$$\begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y), \\ f(xy) = f(x)f(y), \end{cases}$$

cualquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$ (se dice que f es un homomorfismo inyectivo de cuerpos). Ello permite identificar cualquier elemento $x \in \mathbb{R}$ con su imagen $(x, 0) \in \mathbb{C}$ y considerar que \mathbb{R} es un subconjunto de \mathbb{C} .

1.6.7 DEFINICIÓN. Se designa por i el número complejo $i = (0, 1)$ (observación: en Ingeniería Eléctrica se escribe $j = (0, 1)$). Si $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, puede escribirse entonces:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi = x + iy,$$

que es una forma muy habitual de expresar los números complejos, denominada *forma binómica*.

1.6.8 OBSERVACIÓN. Se cumple la igualdad:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 \in \mathbb{R},$$

es decir, $i^2 + 1 = 0$, con lo que el número complejo $i = (0, 1)$ es una solución de la ecuación algebraica $x^2 + 1 = 0$. Ello pone de manifiesto que los números complejos permiten “hacer más cosas” que los reales, con lo cual nuestro objetivo de ampliar las propiedades del conjunto \mathbb{R} parece que se va cumpliendo.

1.6.9 Sin embargo, algo se ha perdido: el conjunto de los números complejos no puede ordenarse tal como se ha hecho con los reales, esto es, no se puede definir en \mathbb{C} una relación de orden compatible con las operaciones internas suma y producto de \mathbb{C} y tal que cumpla propiedades análogas a las vistas en el axioma 2 de \mathbb{R} .

En efecto: si se escribe \leq una relación de orden en \mathbb{C} y se supone que cumple las propiedades del citado axioma y dado que $i \neq 0$, se debería cumplir, o bien, $0 < i$, o bien, $i < 0$. Si suponemos cierta la primera, se tendría entonces $0 < i^2 = -1$, es decir, $0 + 1 < -1 + 1 = 0$; por otra parte, si $0 < -1$, entonces $0(-1) < (-1)(-1)$, es decir, $0 < 1$. Así pues, se cumplirían simultáneamente las desigualdades $1 < 0$ y $0 < 1$, lo cual es una contradicción con la propiedad (R11). Con ello se ha probado que no es posible que se cumpla $0 < i$.

Se demuestra de forma totalmente análoga que tampoco es posible que se cumpla la desigualdad $i < 0$. En resumen, se ha probado la imposibilidad de ordenar el conjunto \mathbb{C} de forma análoga al conjunto \mathbb{R} .

1.6.10 DEFINICIÓN. (*Conjugado de un número complejo*). Si $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ es un número complejo cualquiera, se le puede asociar otro complejo denominado el *conjugado* de z y notado \bar{z} , definido por: $\bar{z} = (x, -y) = x - yi$. En la proposición que sigue se estudian las propiedades más importantes del conjugado de un complejo, así como las que relacionan un número complejo con su conjugado.

1.6.11 PROPOSICIÓN. (*Propiedades del conjugado*). Cualesquiera que sean los complejos $z, z' \in \mathbb{C}$, se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) $z + \bar{z} = 2\Re z$; $z - \bar{z} = 2i\Im z$;
- 2) $z\bar{z} \in \mathbb{R}$ y si $z \neq 0$, entonces $z\bar{z} > 0$;
- 3) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$.

Demostración:

Se propone como ejercicio. Todas las propiedades se deducen inmediatamente de la definición de conjugado y de las propiedades elementales de las operaciones internas definidas en \mathbb{C} . ■

1.6.12 DEFINICIÓN. (*Módulo de un número complejo*). Si $z = x + yi \in \mathbb{C}$ es un número complejo cualquiera, se le puede asociar un número real positivo denominado *módulo* de z , y escrito $|z|$, definido por:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Veamos a continuación las propiedades más importantes que cumple el módulo de un complejo.

1.6.13 PROPOSICIÓN. (*Propiedades del módulo*). Si $z, z' \in \mathbb{C}$, se verifican las propiedades siguientes:

- 1) $|z| \geq 0$; $|z| = 0$ si, y sólo si, $z = 0$;

- 2) $|\bar{z}| = |z|$; $z\bar{z} = |z|^2$;
 3) $|\Re z| \leq |z|$; $|\Im z| \leq |z|$;
 4) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$; $|zz'| = |z||z'|$;
 5) si $z' \neq 0$, entonces $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Demostración:

Vamos a probar la primera parte de 4); la demostración del resto de propiedades resulta inmediata de la definición de módulo de un complejo y se propone como ejercicio. Se tiene:

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = z\bar{z} + z'\bar{z}' + z\bar{z}' + z'\bar{z} = \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z} = |z|^2 + |z'|^2 + 2\Re(z\bar{z}') \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\bar{z}'| = \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2, \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. ■

1.6.14 DEFINICIÓN. (*Distancia en \mathbb{C}*). La noción de módulo de un número complejo permite definir una distancia en \mathbb{C} de modo análogo a como se ha hecho en \mathbb{R} . Se denomina *distancia euclídea* en \mathbb{C} , la aplicación $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$d(z, z') = |z - z'|, \quad \text{para todo } z, z' \in \mathbb{C}.$$

Es un ejercicio sencillo comprobar que, en efecto, la aplicación d así definida cumple las propiedades de una distancia (véase 1.5.7), con lo que la pareja (\mathbb{C}, d) es un espacio métrico. Esta distancia generaliza la topología de \mathbb{R} .

Pueden definirse otras distancias, como por ejemplo

$$\delta_1(z, z') = \max\{|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|\}, \quad \delta_2(z, z') = |x_1 - x'_1| + |x_2 - x'_2|,$$

cualesquiera que sean $z = (x_1, x_2), z' = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{C}$; véase el ejercicio 40.

1.6.15 DEFINICIÓN. (*Entornos simétricos en \mathbb{C}*). Los entornos simétricos en el espacio métrico (\mathbb{C}, d) se definen del modo siguiente: si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ es un número real estrictamente positivo, se denominan respectivamente *bola abierta de centro z_0 y radio r* y *bola cerrada de centro z_0 y radio r* , los subconjuntos de \mathbb{C} definidos por

$$B(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < r\} \quad \text{y} \quad \bar{B}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| \leq r\}.$$

En la figura 1.3 se ha representado una bola cerrada $\bar{B}(z_0; r)$ en \mathbb{C} , tomando como distancia d la euclídea definida en 1.6.14.

Nuestro siguiente objetivo es definir el argumento de un número complejo, para lo cual debemos ver previamente la noción de exponencial de un complejo.

1.6.16 DEFINICIÓN. (*Exponencial de un número complejo*). Si $z = x + yi \in \mathbb{C}$, se define la *exponencial de z* , como el número complejo dado por

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Obsérvese que en esta definición intervienen la función exponencial real (\exp) y las funciones trigonométricas coseno (\cos) y seno (\sin), que se suponen conocidas y que, por otra parte, se definirán rigurosamente en el capítulo 6. Obsérvese que si z es real, esto es, si $x_2 = 0$, entonces coincide la exponencial de z como número complejo con su exponencial real, ya que $\cos 0 = 1$ y $\sin 0 = 0$. Las propiedades más importantes de la exponencial de un número complejo se recogen en la proposición que sigue.

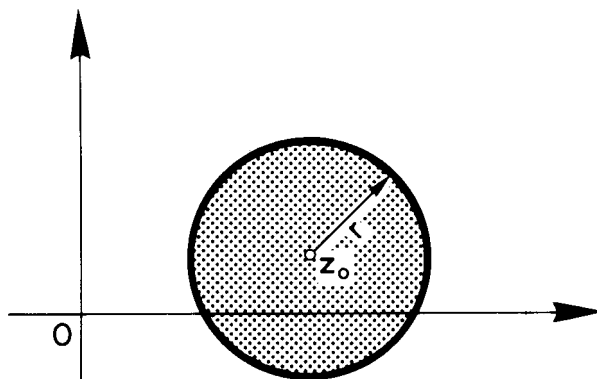


Figura 1.3. Representación de una bola cerrada en \mathbb{C}

1.6.17 PROPOSICIÓN. (*Propiedades de la exponencial de un complejo*). Si $z, z' \in \mathbb{C}$ son números complejos cualesquiera, se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$;
- 2) $\exp(0) = 1$.
- 3) $\exp(z) \exp(-z) = 1$;
- 4) $|\exp(z)| = e^{\Re z}$;
- 5) Si $z = x \in \mathbb{R}$, entonces $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$.
- 6) Si $z = x \in \mathbb{R}$, entonces $|\exp(ix)| = 1$.
- 7) $\exp(z + k(2\pi i)) = \exp(z)$, cualquiera que sea el entero $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

Se propone como ejercicio. Todas ellas resultan fácilmente de la definición dada en 1.6.16 y teniendo en cuenta propiedades elementales de las funciones exponencial real y las trigonométricas \sin y \cos . En cualquier caso, se verá con detalle en el capítulo 6. ■

1.6.18 DEFINICIÓN. (*Argumento de un número complejo*). Si $z = x + yi$ es un número complejo, se define el *argumento principal* de z , escrito $\arg z$, como el único número real θ tal que:

$$x = |z| \cos \theta, \quad y = |z| \sin \theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

(En la figura 1.4 se ha representado gráficamente el argumento principal de un número complejo).

Obsérvese que entonces se cumple:

$$z = x + yi = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z| \exp(i(\theta + 2k\pi)),$$

cualquiera que sea el entero $k \in \mathbb{Z}$.

- Si z es un complejo de argumento principal θ , se tiene,

$$z = |z| \exp(i\theta) = |z|e^{i\theta},$$

expresión denominada *forma exponencial de z* .

- Se denomina *argumento de z* , cualquier elemento del conjunto $\{\arg z + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. En la proposición que sigue se establecen sus propiedades más importantes.

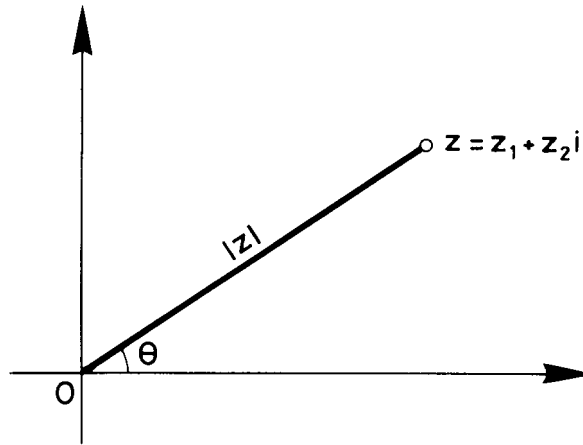


Figura 1.4. Representación gráfica del argumento de un complejo

1.6.19 PROPOSICIÓN. (*Propiedades del argumento*). Si z, z' son dos números complejos cualesquiera, se tienen las siguientes igualdades:

- 1) $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$;
- 2) si $z \neq 0$, entonces $\arg(z^{-1}) = -\arg z$;
- 3) si $z' \neq 0$, entonces $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$.

(En todos los casos, debe entenderse que el argumento pertenece al intervalo $]-\pi, \pi[$).

Demostración:

- 1) Por una parte se tiene que

$$zz' = |zz'| \exp(i \arg(zz')),$$

y por otra se cumple que

$$zz' = (|z| \exp(i \arg z))(|z'| \exp(i \arg z')) = |z||z'| \exp(i(\arg z + \arg z')).$$

Igualando ambas expresiones, resulta la propiedad.

- 2) Inmediata, teniendo en cuenta que $z(z)^{-1} = 1$ y que $\arg 1 = 0$.
- 3) Inmediata. ■

1.6.20 OBSERVACIÓN. Si $z \in \mathbb{C}$ es un número complejo cualquiera, de módulo $|z|$ y argumento principal θ , suele escribirse también $z = |z|e^{i\theta}$, denominada *forma polar o módulo-argumental de z* . Teniendo en cuenta las proposiciones 1.6.13 y 1.6.19, el producto y el cociente de complejos z_1, z_2 (con $z_2 \neq 0$) puede escribirse en forma polar, mediante:

$$z_1 z_2 = (|z_1|e^{i\theta_1})(|z_2|e^{i\theta_2}) = (|z_1||z_2|)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

siendo el argumento un elemento del intervalo $]-\pi, \pi[$.

1.6.21 DEFINICIÓN. (*Potencias y raíces de números complejos*).

- Si z es un número complejo y p es un número entero, se define inductivamente la *potencia p -ésima* de z , mediante:

$$\begin{cases} z^0 = 1, \\ z^p = (z^{p-1})z, & \text{si } p > 0 \\ z^p = (z^{-1})^{-p}, & \text{si } p < 0 \text{ y } z \neq 0 \end{cases}$$

- Si $z \in \mathbb{C}$ y $p, q \in \mathbb{Z}$, se cumplen las siguientes propiedades:

- 1) $z^{p+q} = z^p z^q$, $(z^p)^q = z^{pq}$;
- 2) $|z^p| = |z|^p$, $\arg z^p = p \arg z \in]-\pi, \pi[$,

cuya demostración se propone como ejercicio.

1.6.22 DEFINICIÓN. (*Raíz n -ésima de un número complejo*). Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se dice que el número complejo u es una *raíz n -ésima de z* , si se cumple $z = u^n$. Entonces, si $\theta = \arg z$ y $\varphi = \arg u$, se debe cumplir:

$$|z| \exp(i(\theta + 2k\pi)) = |u|^n \exp(in\varphi), \text{ para todo } k \in \mathbb{Z},$$

y, por tanto,

$$\begin{cases} |z| = |u|^n \\ \theta + 2k\pi = n\varphi, & \text{para todo } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} |u| = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, & \text{para todo } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Las soluciones distintas de esta ecuación se obtienen para $k = 0, 1, \dots, n-1$, con lo cual puede afirmarse que todo número complejo tiene n raíces n -ésimas distintas.

1.6.23 EJEMPLO. Las cuatro raíces cuartas del número complejo

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$$

son los complejos siguientes:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \cdot \exp\left(i \frac{\pi}{12}\right), & u_2 &= 1 \cdot \exp\left(i \frac{7\pi}{12}\right), \\ u_3 &= 1 \cdot \exp\left(i \frac{13\pi}{12}\right), & u_4 &= 1 \cdot \exp\left(i \frac{19\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

1.7 EJERCICIOS

1. Aplicando el método de inducción en el conjunto de los números naturales \mathbb{N} , pruébese que:

a) para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple: $(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

b) para todo $n \geq 1$, se verifica que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es múltiplo de 9.

c) para todo $n \geq 1$, se cumple: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

d) dado $p \in \mathbb{N}$ fijo, para todo $n \geq 1$ se cumple: $1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p + n^p \leq n^{p+1}$.

2. a) Por el método de inducción probar que, para todo $n \geq 1$, se cumple $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1$.

b) A partir de las igualdades: $1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}$, y $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}$, deducir si existe una “ley general” al respecto, para cualquier $n \geq 1$. En caso afirmativo, enunciarla y demostrarla por inducción.

3. Sobre una mesa se tienen unas urnas y un recipiente que contiene unas bolas; si en cada urna se introduce una bola, quedan tantas bolas en el recipiente como urnas quedarían vacías si en cada una de ellas se introducen tantas bolas como quedaron antes en el recipiente. Calcular el número de urnas y bolas que hay.

4. Ocho caballos han pastado durante siete semanas en una pradera de 400 m² y se han comido no sólo la hierba que había, sino también la que ha podido crecer en ese tiempo. En las mismas condiciones, 9 caballos hubieran encontrado alimento durante 8 semanas en una pradera de 500 m². Calcular cuántos caballos podrán alimentarse, en las mismas condiciones, durante 12 semanas en una pradera de 600 m².

5. A partir de los axiomas del conjunto \mathbb{R} , demuéstrense las propiedades siguientes:

a) el elemento neutro de la suma es único;

b) el opuesto de cada $x \in \mathbb{R}$ es único;

c) para cada $x \in \mathbb{R}$, el opuesto del opuesto de x es x ;

d) el elemento neutro del producto es único;

e) el inverso de cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ es único;

f) para cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, el inverso del inverso de x es x ;

g) cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple: $xy = 0$ si, y sólo si, $x = 0$, o bien, $y = 0$.

h) $x(-y) = -(xy)$, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$.

6. Demuéstrase, utilizando tan solo los axiomas de \mathbb{R} , las siguientes propiedades:

- a) si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x \leq y$, entonces $-y \leq -x$;
 b) si $x \in \mathbb{R}$ es positivo, entonces su opuesto es negativo y viceversa;
 c) si $x, y, z \in \mathbb{R}$, con $z \leq 0$ i $x \leq y$, entonces $xz \geq yz$;
 d) si $x < y$ son números reales no nulos, encontrar qué relación hay entre $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$.
 e) cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se tiene $x^2 \geq 0$, y además $x^2 = 0 \iff x = 0$;
 f) cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se verifican las implicaciones:

$$0 < x < 1 \implies x^2 < x \quad \text{y} \quad 1 < x \implies x < x^2.$$

7. Dado $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < x$; deducir de aquí que, si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces debe ser $x = 0$.

8. Demuéstrase que para todo número real positivo $x \geq 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

9. Sean $a, b \in \mathbb{Q}$ dos números racionales cualesquiera y sean $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionales también arbitrarios; razónese cómo son los números: $a + b$, $x + y$, $a + x$, ab , xy , ax .

10. Si p es un número primo, pruébese que \sqrt{p} es irracional.

11. Razónese que el número real $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

12. Si x es irracional y a, b, c, d son racionales, pruébese que $a + bx = c + dx$ si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$.

13. Sean x, y dos números reales positivos cualesquiera; probar que se cumple: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

14. Sean a_1, a_2, \dots, a_n y b_1, b_2, \dots, b_n números reales; probar que se cumple:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}.$$

15. Determinar el supremo y el ínfimo, si existen, de los subconjuntos siguientes de \mathbb{R} :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x + 2 < 0\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 - 10x + 3 < 0\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} / x^4 > 2\},$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0, \quad a < b < c < d\},$$

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, n, m > 0 \right\},$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} / x = 2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r}, \quad p, q, r \in \mathbb{N}\}.$$

16. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} ; se definen:

$$A + B = \{x + y / x \in A, y \in B\} \quad \text{y} \quad A \cdot B = \{xy / x \in A, y \in B\}.$$

Pruébense las propiedades siguientes:

- a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$; $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$;
 b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

17. Sean A y B dos subconjuntos acotados de números reales. Se dice que $A \leq B$ cuando, para cada elemento $x \in A$, existe un $y \in B$ tal que $x \leq y$. Razónense si son o no ciertas las afirmaciones siguientes, dando un contraejemplo en caso de falsedad:

- a) si $A \leq B$, entonces $\sup A \leq \sup B$;
 b) si $A \leq B$, entonces $\inf A \leq \inf B$.

18. En el primer apartado de este ejercicio se demuestra que \mathbb{Q} no es completo. El resto, conduce a la demostración que en \mathbb{R} todo número positivo tiene raíz n -ésima, haciendo modificaciones sucesivas de un mismo razonamiento.

- a) Probar que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\}$ no tiene supremo en \mathbb{Q} . Indicación: se procede por reducción al absurdo; si existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que $a = \sup_{\mathbb{Q}} A$, entonces $a^2 \neq 2$, ya que a es racional. Por tanto, o bien $a^2 < 2$, o bien $a^2 > 2$; suponiendo $a^2 < 2$, demuéstrese que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \frac{2 - a^2}{2a + 1}$ y que entonces $a + \frac{1}{n} \in A$. Se procede de forma análoga para descartar la posibilidad $a^2 > 2$.
 b) Adáptese la demostración del apartado anterior para probar que el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 2\}$ tiene por supremo en \mathbb{R} un número a tal que $a^2 = 2$.
 c) Quiere obtenerse el resultado siguiente: cualquiera que sea $b \in \mathbb{R}$, tal que $b > 0$, existe un número $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 = b$. Modificar adecuadamente la demostración del apartado b).
 d) La misma cuestión para probar la existencia de la raíz n -ésima de un real positivo cualquiera.

19. Determinar: a) la representación decimal de $\frac{19}{8}$ y $\frac{23}{29}$; b) los números racionales que tienen por representación decimal $2,3\overline{292}$ y $0,9\overline{17}$.

20. En un pueblo que inicialmente contaba con 4000 habitantes se ha producido una epidemia de una enfermedad infecciosa mortal. Se realiza una encuesta entre las personas supervivientes, resultando que, de ellas, el $56,5\overline{6}$ % no fuman y el $56,75\overline{6}$ % no beben alcohol. Calcular el número de víctimas de la epidemia.

21. Demostrar las afirmaciones siguientes:

- a) \mathbb{Z} es numerable;
 b) si A y B son conjuntos numerables entonces el producto cartesiano $A \times B$, es numerable;
 c) la reunión de dos conjuntos numerables es numerable;
 d) si $A \subseteq B$, siendo A numerable y B no, entonces $B - A$ es no numerable;
 e) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es no numerable.

22. Demostrar las propiedades del valor absoluto de un número real, que se enuncian en el corolario 1.5.5.

23. Demostrar las propiedades siguientes del valor absoluto de un número real:

- a) si $x, y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$, se cumple $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$;
 b) $|x|^2 = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
 c) $|x| = \sqrt{x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

24. Demostrar las propiedades de la distancia que aparecen en la proposición 1.5.7.

25. Si a, b son números reales cualesquiera, probar que se cumplen las igualdades:

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

26. Determinar los números reales x tales que:

- | | |
|------------------------------|---|
| a) $ x - 3 = 2$; | e) $ 2x + 7 \geq 3$; |
| b) $ x - 1 + x + 3 = 4$; | f) $ x - 1 + x + 1 = 0$; |
| c) $ x + 1 < 4$; | g) $ x - 1 x + 2 = 3$; |
| d) $ x + 1 + x + 2 < 2$; | h) $ x + 1 x - 2 = -(x + 1)(x - 2)$. |

27. Probar que, cualesquiera que sean los números $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple: $x = y$ si, y sólo si, $|x - y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

28. Demostrar las afirmaciones siguientes:

- a) el conjunto derivado de un intervalo abierto $]a, b[$ es el intervalo cerrado $[a, b]$;
 b) el conjunto derivado de un intervalo $]a, +\infty[$ es el intervalo $[a, +\infty[$;
 c) el conjunto derivado de la bola $B^*(a; r)$ es $\overline{B}(a; r)$;
 d) el conjunto derivado del subconjunto $A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$ es $A' = \{1\}$.

29. a) Calcular $z = \frac{3}{i} + \frac{2i}{2+i} + \frac{2+3i}{1+2i}$

b) Calcular $a, b \in \mathbb{R}$, sabiendo que $(-5 + ai)(b + 19i) = 3 + 2i$.

c) Calcular $a \in \mathbb{R}$ para que $z = \frac{3 - 2ai}{4 - 3i}$ esté en la bisectriz del primer cuadrante.

30. Efectuar las operaciones que se indican:

a) $\frac{2 - 3i}{(2 + 3i)(1 + i)} - \frac{3 + i}{4(2 - i)}$; b) $(1 - 2i)^{52}$; c) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{12}$.

31. Determinar una condición necesaria y suficiente para que dos números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cumplan la igualdad: $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

32. Escribir los números complejos siguientes:

a) en forma polar: $1 - i$, $i - \sqrt{3}$, -2.45 , $-\frac{i}{3}$, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) en forma binómica: 3π , $8 \exp(\frac{\pi}{3}i)$, $\sqrt{2} \exp(i\frac{\pi}{4})$, $5 \exp(\frac{3\pi}{5}i)$.

33. Calcular: a) $\sqrt[5]{1 - \sqrt{3}i}$; b) $(1 - i)^{5/4}$; c) $\frac{\sqrt[3]{-1 + i}}{\sqrt{1 + \sqrt{3}i}}$.

34. a) Determinar los complejos z_1 y z_2 , sabiendo que su cociente es 3, la suma de sus argumentos es $\pi/3$ y la suma de sus módulos es 8.

b) Una de las raíces cúbicas de un cierto número complejo z es $3i$; calcular dicho complejo y el resto de raíces cúbicas de z .

35. Resolver en \mathbb{C} las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + ix + 1 = 0$; b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$;

c) $z^3 - iz + (-1 + i) = 0$; d) $z^3 + (1 + i)z^2 + (-2 + i)z - 2i = 0$.

36. Determinar los complejos z tales que:

a) $|z| = \frac{1}{|z|} = |1 - z|$; b) $\bar{z} = z^{-1}$;

c) $|1 - z|^2 \leq 1 - |z|^2$; d) $|z - \alpha| = |z - \beta|$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

37. Tres números complejos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ son tales que: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$; $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Probar que estos complejos son vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de radio unidad con centro en el origen.

38. Un espacio métrico (M, d) se dice *separado* o *separable* si dos puntos distintos cualesquiera tienen entornos disjuntos. Probar que los espacios métricos (\mathbb{R}, d) y (\mathbb{C}, d) son separados, siendo d la distancia euclídea en cada caso.

39. Sea A un conjunto no vacío; se define el *diámetro de A* , mediante:

$$\text{diam}A = \sup\{d(x, y), \text{ para todo } x, y \in A\},$$

donde d es la distancia en el espacio métrico que se considere. Probar que, tanto si A es subconjunto de \mathbb{R} como si lo es de \mathbb{C} , se cumple la equivalencia: A es acotado si, y sólo si, su diámetro es finito.

40. Se definen las aplicaciones de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ en \mathbb{R}^+ mediante:

$$\delta_1(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \quad \delta_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

cualesquiera que sean $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}$. Probar que ambas aplicaciones cumplen las propiedades de una distancia y calcular y dibujar para cada caso la bola abierta de centro el origen y radio 1.

1.8 GUÍA DE REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[Ap] **APOSTOL, T.M.** *Análisis Matemático.*

El capítulo 1 de este libro trata conjuntamente los números reales y los números complejos. Comienza enunciando los axiomas de cuerpo y de orden en \mathbb{R} , estudia después los números racionales y los irracionales, las cotas superiores e inferiores y el axioma de completitud; a continuación, estudia las aproximaciones decimales finita y infinita de los números reales y, para terminar, estudia la extensión del sistema de los números reales. Las nociones topológicas en \mathbb{R} se estudian en el capítulo 3.

[Ba] **BARTLE, R.G. y D.R. SHERBERT.** *Introducción al Análisis Matemático de una variable.*

Los números reales se estudian en el capítulo 2, que está estructurado como sigue: comienza con las propiedades algebraicas (cuerpo conmutativo), sigue con el orden en \mathbb{R} y sus propiedades, el valor absoluto y sus propiedades y el axioma del supremo. Se estudian a continuación los intervalos acotados, los intervalos no acotados y la representación decimal de los números reales. Finalmente, se estudian cuestiones topológicas tales como los conjuntos abiertos, los conjuntos cerrados y su caracterización.

[Bu] **de BURGOS, Juan.** *Cálculo Infinitesimal de una variable.*

Excelente texto con una edición muy cuidada y de gran pedagogía visual y conceptual. Se recomienda la lectura del capítulo 1, apartados 1.1, 1.2, 1.5 y 1.6, dedicados a los números racionales y números reales, con un enfoque similar al presentado aquí, aun cuando introduce ya conceptos sobre sucesiones de números reales.

[Di] **DIXMIER, J.** *Matemáticas Generales*

El capítulo 13 está dedicado a la construcción rigurosa de \mathbb{R} a partir de los racionales \mathbb{Q} . Consiste en considerar el conjunto de las sucesiones de Cauchy (o regulares) de números racionales y definir en él una relación de equivalencia mediante la cual se contruye \mathbb{R} como el conjunto cociente. A continuación, se definen las operaciones algebraicas en \mathbb{R} , se sumergen los racionales dentro de los reales y se introduce un orden en \mathbb{R} . Aun cuando esta metodología es diferente de la que se ha utilizado aquí, se recomienda su lectura para complementar nuestra exposición.

[Li] **LINÉS, E.** *Principios de Análisis Matemático.*

Esta es, sin duda, una de las referencias más completas para estudiar la construcción detallada del cuerpo de los números reales. Comienza en el capítulo 2, el cual trata las sucesiones convergentes y fundamentales en un cuerpo ordenado K , como por ejemplo los racionales \mathbb{Q} , y muestra que \mathbb{Q} no es completo. El capítulo siguiente trata el método de Cantor para completar un cuerpo ordenado, a partir del anillo de las sucesiones fundamentales. El capítulo 4 se dedica a la construcción del cuerpo de los números reales, se ve su unicidad y se enuncian los axiomas. Los capítulos 5 y 6 están dedicados al estudio de la recta real y los teoremas de topología. Los complejos se estudian en el capítulo 8.

[Or] **ORTEGA, J.M.** *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.*

Este excelente texto dedica el capítulo I al estudio de los números reales. Comienza estudiando las propiedades algebraicas de los números racionales y las sucesiones de números racionales. Pone de manifiesto la insuficiencia de los racionales para cuestiones tales como la medida de diversas magnitudes físicas, problemas algebraicos (resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$) y nociones adecuadas de proximidad (funciones continuas). Ello motiva la introducción de los números reales, que se hace en dos apartados: axiomática de los reales y propiedades y representación decimal de los reales. Al final del capítulo I, se incluye un apéndice dedicado a la construcción y unicidad de \mathbb{R} , también a partir de las sucesiones de Cauchy en \mathbb{Q} .

[Spv] SPIVAK, M. *Calculus*.

La originalidad es, además de su indudable calidad, una de las características de esta obra. La parte I se dedica a una introducción de los números reales, que se hace en dos capítulos: el primero recuerda las propiedades operativas básicas de los números, basándose en los conocimientos previos que se suponen conocidos. El segundo capítulo pone énfasis en las diferentes clases de números, según sus propiedades. Los ejercicios que se proponen son sumamente interesantes. La parte V del texto recoge otra metodología de construcción del conjunto \mathbb{R} , a partir de las denominadas *cortaduras de Dedekind*; después de la construcción, se definen las operaciones algebraicas y el orden, estableciéndose sus propiedades.

CAPÍTULO 2

SUCESIONES NUMÉRICAS

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo está dedicado al estudio de las sucesiones numéricas, es decir, de aplicaciones del conjunto \mathbb{N} de los números naturales en los conjuntos \mathbb{R} o \mathbb{C} .

En el apartado 2.1 se ve la definición de sucesión numérica, ilustrada con algunos ejemplos, las sucesiones definidas por recurrencia y las operaciones algebraicas con sucesiones. En el apartado 2.2 se define el concepto de límite de una sucesión numérica, las sucesiones convergentes y se prueba la unicidad del límite de una sucesión, cuando éste existe; se completa el apartado con el estudio de unos ejemplos ilustrativos.

El apartado 2.3 tiene como objetivo el estudio de las propiedades generales de las sucesiones convergentes: convergencia y acotación, álgebra de límites de sucesiones y relación entre la convergencia y el orden en \mathbb{R} (signo del límite, criterio de compresión, etc.). En el apartado 2.4 se tratan las sucesiones monótonas y sus propiedades, en especial la caracterización de su convergencia: teorema de la convergencia monótona.

En el apartado 2.5 se estudian las sucesiones parciales o subsucesiones y su aplicación al estudio de la convergencia de una sucesión, destacando como resultado principal el teorema de Bolzano-Weierstrass; se definen también los límites de oscilación de una sucesión. El apartado 2.6 está dedicado al estudio de las sucesiones de Cauchy o regulares y su relación con la convergencia, probándose la equivalencia entre ambas; se acaba este apartado con el estudio de las sucesiones contractivas y la caracterización de su convergencia.

En el apartado 2.7 se aborda la generalización del concepto de límite al caso infinito, en el cual se estudian también unos criterios para establecer la convergencia de una sucesión. Por último, el apartado 2.8 se dedica a la equivalencia de sucesiones, con el objeto de proporcionar una metodología útil para el cálculo de límites de sucesiones.

2.1 SUCESIONES. OPERACIONES CON SUCESIONES.

2.1.1 DEFINICIÓN. (*Sucesión numérica*). Se denomina *sucesión infinita* o simplemente *sucesión* de números reales, a cualquier aplicación f de \mathbb{N} en \mathbb{R} , de modo que a cada número natural n se le hace corresponder un número real $f(n)$. Si la aplicación f es de \mathbb{N} en \mathbb{C} , la sucesión se denomina *compleja* o *de números complejos*.

2.1.2 Si f es una sucesión, el conjunto $\text{Im}f = f(\mathbb{N})$ es, o bien finito, o bien infinito numerable; por ello, es habitual notar cada imagen $f(n)$ con una letra y un subíndice que expresa el número natural mediante el cual se calcula dicha imagen. Así, por ejemplo, se escribe $f(n) = x_n, n \in \mathbb{N}$. También es habitual identificar la sucesión con la familia de imágenes y, en consecuencia, para indicar una sucesión se escribe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o simplemente (x_n) , especificando el conjunto de pertenencia de las imágenes, es decir, indicando si x_n es real o complejo, cuando conviene hacerlo. El elemento x_n se denomina *término n -ésimo* de la sucesión.

2.1.3 OBSERVACIÓN. No debe confundirse la sucesión propiamente dicha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con el conjunto de los términos de dicha sucesión $X = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$; obsérvese que una sucesión consta de infinitos elementos presentados en un cierto orden, mientras que el conjunto X no tiene los elementos ordenados, puede ser finito e, incluso, puede constar de un único elemento: tal es el caso de las *sucesiones constantes*, para las cuales $f(n) = x_n = \lambda$, para todo $n \in \mathbb{N}$; con ello, una de tales sucesiones es $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda, \dots)$, pero el conjunto de los términos de la misma es $X = \{\lambda\}$.

2.1.4 EJEMPLO.

1) Considérese la aplicación f de \mathbb{N} en \mathbb{R} , definida por $f(n) = \frac{2n-1}{3n+2}$; designando $f(n) = x_n$, resulta la sucesión real:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \frac{7}{14}, \dots, \frac{2n-1}{3n+2}, \dots \right)$$

2) Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ es la sucesión real definida por $f(n) = x_n = (-1)^n$, se obtiene:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots)$$

3) Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ es la sucesión compleja dada por $f(n) = z_n = \frac{1+2i}{2^n}$, resulta:

$$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2} + i, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{8} + \frac{1}{4}i, \dots, \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}i, \dots \right)$$

2.1.5 OBSERVACIÓN. En los ejemplos anteriores se ha dado la sucesión expresando su término n -ésimo como una función de n ; es lo que se denomina expresar el *término general de la sucesión* y permite conocer cada uno de los términos de la sucesión, substituyendo el valor de n que corresponda. Debe observarse, no obstante, que el conocimiento de unos cuantos términos de una sucesión no permite deducir el término general de la misma.

2.1.6 EJEMPLO. (*Sucesiones definidas por recurrencia*). Una sucesión se dice recurrente o definida por recurrencia, si el término n -ésimo x_n de la misma se define mediante una expresión que permite obtenerlo a partir de los anteriores x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Un ejemplo clásico de sucesión recurrente es la denominada *sucesión de Fibonacci*, que se define mediante:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_n = x_{n-2} + x_{n-1}, \quad \text{para } n \geq 3.$$

Otro ejemplo de sucesión recurrente es la definida por:

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, \quad \text{para } n \geq 2,$$

que se verá de nuevo más adelante.

2.1.7 DEFINICIÓN. (*Operaciones algebraicas con sucesiones*). Vistos los conceptos básicos sobre sucesiones numéricas, podemos entrar en otra cuestión importante: las operaciones algebraicas con sucesiones. En efecto, pueden definirse operaciones algebraicas con sucesiones para obtener otras, empleando para ello las operaciones definidas en \mathbb{R} o \mathbb{C} aplicadas entre sus términos n -ésimos respectivos; el nombre de la operación entre los términos generales da nombre al proceso de obtención de la nueva sucesión.

Así, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones numéricas y $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\lambda \in \mathbb{C}$ en el caso de sucesiones complejas), pueden obtenerse las sucesiones siguientes:

- 1) *sucesión suma*: término n -ésimo dado por $x_n + y_n$;
- 2) *sucesión diferencia*: término n -ésimo dado por $x_n - y_n$;
- 3) *sucesión producto*: término n -ésimo dado por $x_n y_n$;
- 4) *sucesión producto por escalar*: término n -ésimo dado por λx_n ;
- 5) *sucesión cociente*: término n -ésimo dado por $\frac{x_n}{y_n}$;

En el último caso se requiere, evidentemente, que se cumpla $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o que, cuando menos, la sucesión (y_n) tenga únicamente un número finito de términos nulos, que pueden sustituirse por otros no nulos.

2.1.8 OBSERVACIÓN. Si $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números complejos, su término n -ésimo z_n puede escribirse en forma binómica mediante: $z_n = a_n + ib_n$ con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta las operaciones definidas en 2.1.7, resulta que toda sucesión compleja puede expresarse mediante dos sucesiones de números reales: $(z_n) = (a_n) + i(b_n)$ $n \in \mathbb{N}$.

2.2 LÍMITE DE UNA SUCESIÓN.

2.2.1 DEFINICIÓN. (*Límite de una sucesión. Sucesiones convergentes*). Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, se dice que el número $x \in \mathbb{R}$ es *el límite de la sucesión* (x_n) , si cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe un número natural $n_0(\varepsilon)$, tal que $|x_n - x| < \varepsilon$, si $n > n_0(\varepsilon)$.

- Se ha definido *el límite* de una sucesión numérica; con ello anticipamos su unicidad que se probará en 2.2.6.
- Se ha escrito $n_0(\varepsilon)$ para especificar que este número natural depende de ε ; habitualmente se escribe simplemente n_0 , ya que dicha dependencia se sobreentiende y no es preciso indicarla.
- Si una sucesión tiene límite, se dice que es una *sucesión convergente*; en caso contrario, la sucesión se denomina *divergente*.
- Si una sucesión (x_n) tiene por límite $x \in \mathbb{R}$, ello se indica con una de las notaciones siguientes:

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n); \quad x = \lim(x_n); \quad x = \lim x_n; \quad (x_n) \rightarrow x.$$

2.2.2 OBSERVACIÓN. Queremos destacar el hecho de que si una sucesión (x_n) tiene límite x , éste depende únicamente de la llamada *cola de la sucesión*, esto es, de los términos x_n con n “grande” y que

los términos iniciales de la sucesión no tienen influencia alguna sobre el límite; dichos términos podrían incluso ser reemplazados por otros, sin que ello implicara ninguna modificación sobre el límite de la sucesión, supuesto que éste exista. Dicho con todo rigor: el límite de una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$, si existe, es exactamente el mismo que el de la sucesión $(x_n)_{n \geq n_0}$, sea cual sea $n_0 \in \mathbb{N}$.

2.2.3 OBSERVACIÓN. Si (z_n) es una sucesión de números complejos, la definición de $\lim(z_n)$ se formula análogamente a la que se ha enunciado en 2.2.1, teniendo en cuenta que entonces $|\cdot|$ significa el módulo de un complejo. Si el término n -ésimo de la sucesión se escribe $z_n = a_n + b_n i$, $n \in \mathbb{N}$, puede relacionarse la convergencia de la sucesión compleja con la de las sucesiones reales (a_n) y (b_n) , tal como se ve a continuación.

2.2.4 PROPOSICIÓN. Una condición necesaria y suficiente para que la sucesión compleja $(z_n) = (a_n + b_n i)$ sea convergente es que lo sean las sucesiones reales (a_n) y (b_n) . Además, se cumple

$$\lim z_n = \lim a_n + (\lim b_n)i.$$

Demostración:

Si suponemos que $(z_n) \rightarrow z = a + bi$, por definición de límite de una sucesión, para cada $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que, si $n > n_0$, entonces $|z_n - z| < \varepsilon$, es decir, se cumple

$$|z_n - z| = |(a_n + b_n i) - (a + bi)| = |(a_n - a) + (b_n - b)i| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. En consecuencia, se tendrá que

$$|a_n - a| = \sqrt{(a_n - a)^2} \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0,$$

es decir $\lim a_n = a$. Se prueba de forma análoga que $\lim b_n = b$, con lo que la condición es necesaria.

Para ver que es suficiente, si $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad \text{si } n > n_1; \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad \text{si } n > n_2.$$

Por lo tanto, si $n > \max\{n_1, n_2\}$, se tiene,

$$|z_n - (a + bi)| = |(a_n - a) + (b_n - b)i| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon,$$

lo cual prueba que la condición es suficiente. ■

2.2.5 La proposición anterior muestra que el estudio de la convergencia de una sucesión compleja se reduce al estudio de la convergencia de dos sucesiones reales. Por tanto, en lo que resta de capítulo trataremos únicamente sucesiones de números reales. En la proposición que sigue se prueba un resultado importante del límite de una sucesión: su unicidad; a continuación se desarrollan tres ejemplos que servirán, por un lado, para profundizar en la mecánica ε, n_0 y, por otro, para poner de manifiesto que la definición de límite de una sucesión numérica no es suficientemente útil para el cálculo efectivo del límite de la misma.

2.2.6 PROPOSICIÓN. (*Unicidad del límite*). Si una sucesión (x_n) es convergente, entonces su límite es único.

Demostración:

Si se supone que la sucesión pudiera tener dos límites distintos $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)$, $x' = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)$, cada uno de ellos cumpliría la definición de límite de una sucesión, esto es, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existirían dos números naturales n_1, n_2 tales que

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si } n > n_1 \quad \text{y} \quad |x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si } n > n_2.$$

Por lo tanto, para todo $n > \max\{n_1, n_2\}$, se cumpliría:

$$0 \leq |x - x'| \leq |x - x_n| + |x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ implica la igualdad $x = x'$. ■

2.2.7 EJEMPLO. Se trata de probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right) = \frac{2}{3}$, aplicando la definición de límite de una sucesión. Debe plantearse, pues:

$$\left| \frac{2n+1}{3n+2} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{1}{3(3n+2)} \right| = \frac{1}{3(3n+2)} < \varepsilon,$$

lo cual es cierto si $1 < 9n\varepsilon + 6\varepsilon$, es decir, si se cumple $n > \frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}$. Por lo tanto, tomando n_0 como la parte entera de esta última fracción, queda probado que $\frac{2}{3}$ es el límite de la sucesión, en virtud de su unicidad.

2.2.8 EJEMPLO. La sucesión $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es convergente. Si lo fuese, existiría $x = \lim(-1)^n$ y se cumpliría la condición que establece la definición de límite: dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número natural n_0 de tal manera que $|(-1)^n - x| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. En particular, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$,

$$\|x| - 1| = \|x| - |(-1)^n|| \leq |(-1)^n - x| < \varepsilon,$$

esto es, $\|x| - 1| = 0$, o sea, $|x| = 1$. Por lo tanto, debe ser $x = 1$, o bien $x = -1$. Ahora bien, si fuera $x = 1$, se observa que $|(-1)^n - 1| = 2$, para todo $n = 2p + 1 \in \mathbb{N}$; si $x = -1$, se observa que $|(-1)^n - (-1)| = 2$, para todo $n = 2p \in \mathbb{N}$. Así pues, para ningún número real positivo $\varepsilon < 2$ se puede satisfacer la definición de límite y, por tanto, la sucesión $((-1)^n)$ es divergente (es un tipo de sucesión de las denominadas *oscilantes*).

2.2.9 EJEMPLO. Se quiere demostrar que, sean cuales sean los números reales a, b, c con $b \neq 0$, se cumple: $\lim \left(\frac{a}{bn+c} \right) = 0$. Si $a = 0$, la igualdad es cierta de forma trivial, con lo que se supone que $a \neq 0$. Si se supone ahora que $b > 0$ y que $c \geq 0$, entonces, para $\varepsilon > 0$ cualquiera, se cumplirá

$$\left| \frac{a}{bn+c} \right| = \frac{|a|}{bn+c} < \varepsilon, \quad \text{si } n > \frac{|a| - c\varepsilon}{b\varepsilon}.$$

Por tanto, puede tomarse n_0 como la parte entera del número real $\frac{|a| - c\varepsilon}{b\varepsilon}$ y la igualdad es cierta. Complétese el razonamiento según el signo de b y c .

Obsérvese que, en particular, se ha demostrado que $\lim \frac{1}{n} = 0$.

2.2.10 OBSERVACIÓN. A partir de los ejemplos anteriores, se aprecia que la definición de límite de una sucesión presenta dos grandes inconvenientes a la hora del cálculo efectivo de límites:

- en primer lugar, dada una sucesión (x_n) , no hay ningún procedimiento que ayude a intuir, de un modo general, el valor de su límite y ni siquiera a saber si éste existe o no;
- en segundo lugar, incluso si se conoce de antemano el valor de x , no resulta fácil demostrar la igualdad $x = \lim x_n$ con la metodología ε, n_0 . Por ello, el cálculo de límites se basará en propiedades de la convergencia que se estudian en los apartados que siguen.

2.3 PROPIEDADES DE LA CONVERGENCIA.

2.3.1 En este apartado se estudian unas primeras propiedades de las sucesiones convergentes, consistentes en relacionar la convergencia con acotación, las operaciones con sucesiones y el orden en \mathbb{R} . Estas propiedades permitirán, tal y como se verá más adelante, desarrollar métodos de cálculo del límite de una sucesión convergente.

2.3.2 DEFINICIÓN. (*Sucesión acotada*). Una sucesión numérica $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se denomina *acotada* si el conjunto de los términos de la sucesión $X = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto acotado de \mathbb{R} . Ello significa la existencia de un número real $k > 0$ tal que $|x_n| < k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Son ejemplos de sucesiones acotadas: $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. En cambio, las sucesiones: $(n^2+1)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(2n-5)_{n \in \mathbb{N}}$ no son acotadas. En la proposición que sigue, se establece la relación entre convergencia y acotación de una sucesión.

2.3.3 PROPOSICIÓN. Si una sucesión numérica es convergente, entonces es acotada.

Demostración:

Sea (x_n) una sucesión convergente de números reales, de límite $x \in \mathbb{R}$; entonces dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número natural $n_0(\varepsilon)$ tal que, si $n > n_0(\varepsilon)$, se cumple $|x_n - x| < \varepsilon$. Si se toma, por ejemplo, $\varepsilon = 1$, entonces $|x_n - x| < 1$ para todo $n > n_0(1)$. Por lo tanto, se cumple $|x_n| - |x| \leq |x_n - x| < 1$, es decir, $|x_n| < 1 + |x|$ para todo $n > n_0(1)$. Si se designa por $k = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0(1)}|, 1 + |x|\} > 0$, puede afirmarse que $|x_n| < k$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión (x_n) es acotada. ■

2.3.4 OBSERVACIÓN. El recíproco del enunciado anterior no tiene por qué ser cierto de un modo general, esto es, una sucesión puede ser acotada y, sin embargo, no ser convergente. En efecto, basta considerar por ejemplo la sucesión $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, que es acotada puesto que se cumple $|x_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y sin embargo no es convergente, según se ha probado en 2.2.8.

2.3.5 PROPOSICIÓN. (*Álgebra de los límites de sucesiones.*) Si las sucesiones $(x_n), (y_n)$ son convergentes y de límites $\lim(x_n) = x$ y $\lim(y_n) = y$, entonces se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) $\lim(x_n \pm y_n) = x \pm y$.
- 2) $\lim(x_n y_n) = xy$.
- 3) $\lim(\lambda x_n) = \lambda x$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 4) $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$, si $y \neq 0$.

Demostración:

- 1) Sea $\varepsilon > 0$, arbitrario; dada la convergencia de las sucesiones (x_n) , (y_n) , existen dos números naturales n_1, n_2 tales que

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n > n_1; \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n > n_2.$$

Por tanto, para todo $n > \max\{n_1, n_2\}$, se cumplirá que

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

con lo que $\lim(x_n + y_n) = x + y$. La segunda igualdad se prueba análogamente; redáctese la demostración como ejercicio.

- 2) Puesto que la sucesión (y_n) es convergente, en virtud de 2.3.3, es acotada, es decir, existe $k > 0$, tal que $|y_n| < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por definición de límite, para cada $\varepsilon > 0$ existen n_1, n_2 tales que:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2k}, \text{ para todo } n > n_1; \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2|x|}, \text{ para todo } n > n_2.$$

Por lo tanto, para todo $n > \max\{n_1, n_2\}$ se cumple:

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n y_n - x y_n| + |x y_n - xy| = |x_n - x| |y_n| + |x| |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2k} k + \frac{\varepsilon}{2|x|} |x| = \varepsilon.$$

es decir, $\lim(x_n y_n) = xy$. Obsérvese que se ha supuesto que $x \neq 0$; si $x = 0$, es inmediato ver que $\lim x_n y_n = 0$.

- 3) Inmediato, a partir de 2).
 4) Para probar esta afirmación deben antes acotarse inferiormente los términos $|y_n|$: puesto que $y \neq 0$, entonces $|y| > 0$ y, si se toma $\varepsilon = \frac{|y|}{2}$, existe un natural n_1 tal que $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ para todo $n > n_1$, de modo que se cumple:

$$|y_n| > |y| - |y_n - y| > |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2} > 0 \text{ para todo } n > n_1.$$

Por otro lado, como que $y = \lim y_n$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un natural n_2 tal que $|y_n - y| < \frac{\varepsilon|y^2|}{2}$ para todo $n > n_2$. Entonces, se tendrá:

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|y_n - y|}{|y||y_n|} < \frac{\frac{\varepsilon|y^2|}{2}}{|y| \frac{|y|}{2}} = \varepsilon \text{ para todo } n > \max\{n_1, n_2\},$$

es decir, $\lim \left(\frac{1}{y_n} \right) = \frac{1}{y}$. Aplicando finalmente 2), se completa la demostración. ■

2.3.6 OBSERVACIÓN. El límite de la suma y del producto de sucesiones convergentes puede extenderse sin dificultad a un número finito de sucesiones; de este modo, la proposición 2.3.5 permite establecer la convergencia de una sucesión cuando ésta se obtiene como resultado de operaciones entre diversas sucesiones convergentes y de límites conocidos, tal como se muestra a continuación.

2.3.7 EJEMPLO. Considérese la sucesión de término general $x_n = \frac{7n^2 + 9n - 1}{6n^2 + 13n + 6}$, el cual puede expresarse también como sigue:

$$x_n = \frac{7n^2 + 9n - 1}{6n^2 + 13n + 6} = \frac{7 + 9\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{6 + 13\frac{1}{n} + 6\frac{1}{n}}$$

Dado que $\lim \frac{1}{n} = 0$, aplicando 2.3.5 se obtiene

$$\lim x_n = \frac{7 + 9 \cdot 0 - 0 \cdot 0}{6 + 13 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 0} = \frac{7}{6}.$$

2.3.8 PROPOSICIÓN. Sea (x_n) una sucesión convergente tal que $\lim(x_n) = 0$ y sea (y_n) una sucesión acotada; entonces, la sucesión producto $(x_n y_n)$ es convergente y además se cumple $\lim(x_n y_n) = 0$.

Demostración:

Por ser (y_n) acotada, existe un número real $k > 0$ tal que $|y_n| < k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $(x_n) \rightarrow 0$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \frac{\varepsilon}{k}$ para todo $n > n_0$. Por tanto, se cumplirá

$$|x_n y_n| = |x_n| |y_n| < \frac{\varepsilon}{k} \cdot k = \varepsilon, \quad \text{para todo } n > n_0,$$

lo cual prueba que $(x_n y_n)$ es convergente y de límite 0. ■

2.3.9 EJEMPLO. La sucesión $\left((-1)^n \frac{3}{n+2}\right)$ es convergente y de límite 0, puesto que es el producto de las sucesiones $\left(\frac{3}{n+2}\right)$, que tiene límite 0, y $((-1)^n)$, que es acotada.

2.3.10 PROPOSICIÓN. Si (x_n) es una sucesión convergente de límite x , entonces la sucesión $(|x_n|)$ también es convergente, y además se cumple: $\lim |x_n| = |x|$.

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Entonces, se cumple (recuérdese 1.5.5):

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > n_0$$

es decir, $\lim |x_n| = |x|$. ■

2.3.11 OBSERVACIÓN. El recíproco de la proposición anterior no tiene por qué ser cierto, esto es, puede que $(|x_n|)$ sea una sucesión convergente, en tanto que (x_n) no lo sea; tal es el caso de la sucesión $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. A continuación se estudia la relación entre la convergencia de sucesiones y el orden en \mathbb{R} (obsérvese que esto no tiene sentido en \mathbb{C}).

2.3.12 PROPOSICIÓN. Sea (x_n) una sucesión convergente tal que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$; se cumple entonces que $\lim x_n \geq 0$.

Demostración:

Sea pues $(x_n) \rightarrow x$, con $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supóngase que la conclusión fuese falsa, esto es, que se cumpliera $x < 0$; tomando, por ejemplo, entonces $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$, existiría un número natural n_0 tal que

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon < 0 \quad \text{para todo } n > n_0,$$

es decir, no todos los términos de la sucesión serían positivos, lo cual es contradictorio. ■

2.3.13 OBSERVACIÓN. Nótese que si los términos de la sucesión son números reales estrictamente positivos y la sucesión es convergente, la proposición anterior únicamente afirma que el límite es positivo, pero no debe pensarse que necesariamente deba ser también estrictamente positivo. Para verlo, basta considerar la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, cuyos términos son números reales estrictamente positivos y cuyo límite es 0. La proposición anterior permite, no obstante, extraer conclusiones interesantes, que se estudian a continuación.

2.3.14 COROLARIO. Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones convergentes tales que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se cumple entonces que $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Demostración:

Si $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$, considerando la sucesión $(y_n - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ésta es de términos positivos y, en virtud de la proposición 2.3.5, es convergente y de límite $y - x$. Aplicando ahora la proposición 2.3.12, se obtiene $y - x \geq 0$ o, equivalentemente, $x \leq y$. ■

2.3.15 COROLARIO. Sea (x_n) una sucesión convergente, tal que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se cumple entonces que $a \leq \lim x_n \leq b$.

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

2.3.16 PROPOSICIÓN. (*Criterio de compresión*). Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones convergentes de números reales tales que $\lim x_n = \lim y_n = x$ y sea (z_n) una sucesión tal que $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces, la sucesión (z_n) es convergente y además se cumple $\lim z_n = x$.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario; existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon, \text{ para todo } n > n_1 \quad \text{y} \quad x - \varepsilon < y_n < x + \varepsilon, \text{ para todo } n > n_2.$$

En consecuencia, para todo $n > \max\{n_1, n_2\}$ se cumple:

$$x - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < x + \varepsilon,$$

lo cual prueba que $\lim(z_n) = x$ y que (z_n) es una sucesión convergente. ■

2.3.17 EJEMPLO. La sucesión $\left(\frac{\text{sen } n}{2n+1}\right)$ es convergente y de límite 0, ya que se cumple:

$$\frac{-1}{2n+1} \leq \frac{\text{sen } n}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

y se sabe (ejemplo 2.2.9) que $\lim \frac{-1}{2n+1} = \lim \frac{1}{2n+1} = 0$.

2.3.18 OBSERVACIÓN. Es conveniente recordar ahora lo que se ha dicho en 2.2.2 respecto a las colas de las sucesiones: la convergencia de una sucesión (x_n) hacia su límite x depende del comportamiento de la sucesión a partir de un n_0 tan grande como se quiera. En particular, pues, para la validez de la

proposición 2.3.16 no es necesario que se cumpla $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sino que basta con que ello sea cierto para todo $n > n_0 \in \mathbb{N}$. Compruébese que esto es cierto repasando la demostración y extiéndase también esta puntualización, si es posible, al resto de resultados de este apartado.

2.4 SUCESIONES MONÓTONAS.

2.4.1 DEFINICIÓN. (*Sucesiones monótonas. Tipos de monotonía*). Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales;

- se dice que (x_n) es una sucesión *monótona creciente* si se cumple: $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- se dice que (x_n) es una sucesión *monótona decreciente* si se cumple: $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- se habla en general de *sucesiones monótonas* para indicar ambos tipos de monotonía.
- Si en las definiciones anteriores puede substituirse \leq por $<$, (respectivamente, \geq por $>$), entonces la sucesión se denomina *estrictamente creciente* (respectivamente, *estrictamente decreciente*).

2.4.2 EJEMPLO. Considérese la sucesión (x_n) definida en 2.1.6, mediante:

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, \quad \text{si } n \geq 2.$$

Los primeros términos de la sucesión cumplen que $x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = x_2$. Supongamos que $x_{n-1} < x_n$; entonces, puede afirmarse que $2 + x_{n-1} < 2 + x_n$, de donde $\sqrt{2 + x_{n-1}} < \sqrt{2 + x_n}$, y por tanto $x_n < x_{n+1}$. Así pues, se cumple $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, la sucesión considerada es monótona creciente.

2.4.3 EJEMPLO. Considérese la sucesión de números reales de término general dado por $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El primer término es $x_1 = 2$, el segundo término es $x_2 = 9/4$, y por tanto, se cumple $x_1 < x_2$. Desarrollando por el binomio de Newton, se obtiene:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{n!} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

La expresión de x_n contiene $n + 1$ sumandos positivos y la de x_{n+1} contiene $n + 2$; además, cada término de x_n es menor que el término correspondiente de x_{n+1} . Así pues, puede afirmarse que $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, que la sucesión considerada es estrictamente creciente.

2.4.4 OBSERVACIÓN. La convergencia de una sucesión depende, tal como ya se ha comentado, del comportamiento de su cola; por lo tanto, si una sucesión no es monótona pero existe un número natural n_0 tal que $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n > n_0$, o bien, $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n > n_0$, entonces también son válidas las propiedades que se establezcan para las sucesiones monótonas. De hecho, es equivalente substituir los n_0 primeros términos de la sucesión, de modo que resulte una sucesión monótona. Vistas, pues, las definiciones, puede procederse a estudiar las propiedades de las sucesiones monótonas relacionadas con su convergencia.

2.4.5 TEOREMA. (*De la convergencia monótona.*) Sea x_n una sucesión monótona de números reales; se cumplen entonces las propiedades:

- 1) si la monotonía es creciente, una condición necesaria y suficiente para que la sucesión sea convergente es que sea acotada superiormente, cumpliéndose entonces que $\lim(x_n) = \sup\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$.
- 2) si la monotonía es decreciente, una condición necesaria y suficiente para que la sucesión sea convergente es que sea acotada inferiormente, cumpliéndose entonces $\lim(x_n) = \inf\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración:

- 1) Debe probarse tan solo que la condición es suficiente, puesto que ya es sabido que toda sucesión convergente es acotada. Supóngase, pues, que la sucesión (x_n) es acotada superiormente; existe entonces $x = \sup\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$. La convergencia de la sucesión se probará viendo que $x = \lim(x_n)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario; el número real $x - \varepsilon$ no puede ser una cota superior del conjunto de términos de la sucesión, con lo que existe un término x_{n_0} tal que $x - \varepsilon < x_{n_0}$. Puesto que la sucesión (x_n) es monótona creciente, se cumple:

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x, \quad \text{para todo } n > n_0,$$

es decir

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon, \quad \text{para todo } n > n_0,$$

lo cual prueba que $x = \lim(x_n)$.

- 2) Se propone como ejercicio. ■

2.4.6 EJEMPLO. Considérese nuevamente la sucesión del ejemplo 2.4.2, de la cual se sabe que es monótona creciente; se verá a continuación que está acotada superiormente por cualquier número real tal que $k \geq 2$. En efecto: el primer término cumple $\sqrt{2} < 2 \leq k$ y, si se supone que $x_{n-1} \leq k$, entonces resulta que $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} \leq \sqrt{2 + k} \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, la sucesión es convergente en virtud del teorema anterior. Para determinar su límite, vemos que se puede escribir $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + x_{n-1}} = \sqrt{2 + x}$, es decir, $x^2 = 2 + x$; las soluciones de esta ecuación son 2 y -1 . Es evidente que -1 no puede ser el límite de una sucesión monótona creciente y de números positivos, con lo que debe cumplirse $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$.

2.4.7 EJEMPLO. Considémos ahora la sucesión del ejemplo 2.4.3, de término n -ésimo $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Para ver que es acotada superiormente y, por lo tanto, que es convergente, se observa que:

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \\ &= 1 + \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \end{aligned}$$

Así pues, se cumple $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que prueba que la sucesión es acotada y, en definitiva, que es convergente. Se escribe $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, y en virtud de las propiedades del límite de una sucesión, se cumple: $2 < e \leq 3$, pudiendo probarse fácilmente que $e < 2,75$ y que su expresión decimal es $e = 2,7182882846 \pm 10^{-9}$. Más adelante se probará que e es un número irracional (véase 3.3.20).

2.5 SUCESIONES PARCIALES O SUBSUCESIONES.

2.5.1 En este apartado se desarrolla la noción de sucesión parcial o subsucesión de una sucesión dada; el estudio de las sucesiones parciales es muy útil para determinar el comportamiento de una sucesión, especialmente si ésta no es convergente. Se tratarán las propiedades de convergencia de las subsucesiones y se verá finalmente la noción de límites de oscilación de una sucesión.

2.5.2 DEFINICIÓN. (*Sucesión parcial o subsucesión*). Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales, esto es, que cumple $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Se denomina *sucesión parcial o subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$* a la sucesión $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

- Obsérvese que una subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es más que el resultado de componer la propia sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con una aplicación estrictamente creciente de \mathbb{N} en \mathbb{N} , es decir

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{N} \xrightarrow{(a_n)} \mathbb{R} \\ k & \longmapsto & n_k \longmapsto a_{n_k} \end{array}$$

lo que justifica el uso frecuente de la notación $(a_{\sigma(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ para indicar una sucesión parcial.

- El motivo de la denominación *sucesión parcial* es evidente: $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ no es más que una sucesión formada por una parte de los términos de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cuyo índice viene dado por la sucesión estrictamente creciente de números naturales $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Obsérvese que se cumple $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, en virtud del crecimiento estricto de la sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- Es habitual decir simplemente que (a_{n_k}) es una *parcial* de (a_n) . Por otra parte, obsérvese que toda sucesión (a_n) tiene dos subsucesiones evidentes: la de los términos de índice par $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ y la de los términos de índice impar $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$.

2.5.3 EJEMPLO.

- 1) Sea la sucesión real $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$; son subsucesiones de la misma:

$\left(\frac{1}{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, obtenida considerando los términos de índice par, $2 < 4 < 6 < \dots$;

$\left(\frac{(-1)^n}{n+4}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, obtenida considerando los términos $n_k = k + 4$, $k \in \mathbb{N}$;

$\left(\frac{-1}{2^n + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, obtenida considerando los términos $n_k = 2^k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

- 2) La sucesión $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \dots$ no es una parcial de la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$, ya que tan solo se

ha producido una alteración en el orden de los términos.

2.5.4 PROPOSICIÓN. Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión numérica sea convergente es que todas sus parciales sean convergentes y tengan el mismo límite.

Demostración:

La condición es necesaria: sea (a_n) una sucesión convergente, tal que $\lim a_n = a$ y sea $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una parcial de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > N_0$. En particular, si $k > N_0$ entonces $n_k \geq k > N_0$ y, por lo tanto, $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, con lo que $a = \lim a_{n_k}$.

La condición es suficiente: evidente, ya que toda sucesión es parcial de ella misma. ■

2.5.5 OBSERVACIÓN. Como es fácil intuir, la proposición anterior tiene una aplicación inmediata y muy efectiva: la demostración de la divergencia de una sucesión, en caso de poder encontrar dos parciales de límites diferentes, o bien, una parcial no convergente. Así, por ejemplo, la sucesión $\left(E\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es divergente, ya que la parcial de sus términos pares tiene límite 0, mientras que la parcial de los términos impares tiene límite -1 . Pero esa no es la única implicación relevante de la proposición anterior: permite relacionar la acotación de una sucesión con la convergencia de, al menos, una sucesión parcial de la misma, tal como establece el importante teorema que sigue.

2.5.6 TEOREMA. (*De Bolzano-Weierstrass para sucesiones.*) Toda sucesión acotada tiene, al menos, una sucesión parcial convergente.

Demostración:

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada; con ello, el conjunto $X = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. Se tienen entonces dos posibilidades:

- si X es finito, la sucesión tiene alguna sucesión parcial constante, la cual sería convergente;
- si X es infinito, X tiene un punto de acumulación x (en virtud del teorema 1.5.22); por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, la bola $B(x; \frac{1}{k})$ contiene infinitos puntos de X (proposición 1.5.19). Si $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} / x_n \in B(x; \frac{1}{k})\}$, la sucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una parcial de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ya que la sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ está contruida de tal manera que $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$; además, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tiene límite x , ya que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene $x_{n_k} \in B(x; \frac{1}{k})$ y, por tanto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $k_0 (= \frac{1}{\varepsilon})$ tal que $x_{n_k} \in B(x; \frac{1}{k}) \subset B(x; \frac{1}{k_0}) = B(x; \varepsilon)$, para todo $k > k_0$, lo cual concluye la demostración del teorema. ■

2.5.7 OBSERVACIÓN. La demostración del teorema anterior se ha desarrollado basándonos en el teorema 1.5.22; recíprocamente, el teorema 1.5.22 puede ser demostrado a partir del anterior. Es por esto que ambos se conocen con el mismo nombre, ya que son dos versiones de una misma propiedad. Obsérvese también que el teorema anterior no afirma nada en relación con la coincidencia del límite de las posibles parciales convergentes de una sucesión acotada; de hecho, la acotación no basta para tal coincidencia: en efecto, considérese la sucesión $(a_n)_{n \geq 1} = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$; dicha sucesión tiene parciales convergentes hacia límites diferentes: $\lim a_{3n} = 3$, $\lim a_{3n+1} = 1$, $\lim a_{3n+2} = 2$.

2.5.8 DEFINICIÓN. (*Límites de oscilación*). En ocasiones resulta conveniente conocer, si existen, el supremo o el ínfimo de todos los límites de las sucesiones parciales de una sucesión dada, cuestión que da lugar a la definición de *límites de oscilación* de una sucesión, que se definen a continuación. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada:

- se denomina *límite superior* de (a_n) , notado $\limsup (a_n)$ o bien $\overline{\lim}(a_n)$, al supremo, si existe, del

conjunto de límites de todas las parciales de (a_n) ;

- se denomina *límite inferior* de (a_n) , notado $\liminf(a_n)$ o bien $\underline{\lim}(a_n)$, al ínfimo, si existe, del conjunto de límites de todas las parciales de (a_n) .
- Si la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada, el supremo y/o el ínfimo del conjunto de límites de las parciales de (a_n) puede que no existan; sin embargo, es habitual considerar también este caso. Así, si el conjunto de límites parciales no está acotado superiormente, se escribe $\limsup(a_n) = +\infty$, y si el conjunto de límites parciales no está acotado inferiormente, se escribe entonces $\liminf(a_n) = -\infty$.

2.5.9 PROPOSICIÓN. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales; una condición necesaria y suficiente para que la sucesión (a_n) sea convergente es que sus límites de oscilación existan y coincidan:

$$\limsup a_n = \liminf a_n = a,$$

cumpliéndose entonces que $\lim a_n = a$.

Demostración:

La condición es necesaria: si $\lim a_n = a$, todas las parciales de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tienen límite a , y por tanto, $\limsup a_n = \liminf a_n = a$.

La condición es suficiente: supóngase que $\limsup a_n = \liminf a_n = a$; dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, la sucesión (a_n) no puede tener más que un número finito de términos $a_n > a + \varepsilon$, ya que $a = \limsup a_n$, pero tampoco puede tener más que un número finito de términos $a_n < a - \varepsilon$, ya que $a = \liminf a_n$ (véase el ejercicio 26). Así pues, para cada $\varepsilon > 0$ se cumple $a_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ para todo $n \in \mathbb{N}$ excepto para un número finito de términos, de donde puede afirmarse que $\lim a_n = a$. ■

2.6 SUCESIONES DE CAUCHY. SUCESIONES CONTRACTIVAS.

2.6.1 En este apartado se estudia una cuestión esencial en Análisis Matemático: la regularidad o condición de Cauchy; se trata de una propiedad que permite caracterizar la convergencia de una sucesión teniendo en cuenta únicamente su término general, es decir, sin que aparezca referencia alguna al límite de la sucesión. Se estudia también una caracterización equivalente del axioma 3 del conjunto \mathbb{R} , denominada *completitud por sucesiones*. Por último, se definen las sucesiones contractivas, se caracteriza su convergencia y se ve una metodología para el cálculo aproximado de su límite y una aplicación a la obtención de algoritmos para el cálculo aproximado de las raíces de determinadas ecuaciones.

2.6.2 DEFINICIÓN. (*Sucesiones de Cauchy o sucesiones regulares*). Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales; se dice que dicha la sucesión es *regular* o *de Cauchy* si cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe un natural $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{para todo } m, n > n_0.$$

De forma equivalente, la condición anterior puede escribirse:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{para todo } m > n > n_0,$$

y también se puede expresar así:

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > n_0 \text{ y para todo } k > 0.$$

Dicho en términos coloquiales: una sucesión es de Cauchy siempre y cuando tenga una cola cuyos términos están tan cerca entre ellos como se quiera.

2.6.3 EJEMPLO.

- La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, puesto que $\lim \frac{1}{n} = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $n > n_0$; si tomamos $m, n > n_0$, resulta entonces:

$$\left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{m} \right| + \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que prueba la afirmación.

- La sucesión $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ no es de Cauchy, ya que siempre que m y n tienen paridad diferente, se cumple $\left|(-1)^m - (-1)^n\right| = 2$, con lo que estas diferencias no pueden hacerse tan pequeñas como se quiera.

2.6.4 A continuación se verá que, tal como se puede intuir a través de los ejemplos anteriores, la condición de Cauchy caracteriza las sucesiones convergentes. En las proposiciones que siguen se estudia la relación entre regularidad, acotación y convergencia de una sucesión en \mathbb{R} .

2.6.5 PROPOSICIÓN. Si una sucesión de números reales es convergente, entonces también es de Cauchy.

Demostración:

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real convergente, y sea $a = \lim a_n$; por definición, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > n_0$. Si tomamos $m, n > n_0$, entonces:

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

con lo que la sucesión es de Cauchy. ■

2.6.6 PROPOSICIÓN. Si una sucesión de números reales es de Cauchy, entonces también es acotada.

Demostración:

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión regular en \mathbb{R} . Por definición, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_m - a_n| < \varepsilon$ cualesquiera que sean $m, n > n_0$. Si tomamos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$, se obtiene

$$|a_m| - |a_{n_0+1}| \leq |a_m - a_{n_0+1}| < 1 \quad \text{para todo } m > n_0,$$

es decir, que se cumple $|a_m| < 1 + |a_{n_0+1}|$ para cualquier $m > n_0$. Ahora, es suficiente considerar

$$M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0+1}|\} > 0,$$

para obtener una cota de la sucesión, puesto que entonces se cumple $|a_m| \leq M$ para todo $m \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión es acotada. ■

2.6.7 PROPOSICIÓN. (*Completitud de \mathbb{R} por sucesiones.*) Si una sucesión de números reales es de Cauchy, entonces también es convergente.

Demostración:

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de números reales. En virtud de la proposición anterior, la sucesión ha de ser acotada y, por tanto, el teorema de Bolzano-Weierstrass (2.5.6), permite asegurar

que la sucesión tiene una parcial convergente; sea ésta, $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Si se designa $a = \lim a_{n_k}$, puede utilizarse la condición de Cauchy para concluir que $a = \lim a_n$. En efecto, si $\varepsilon > 0$ es arbitrario, puesto que $a = \lim a_{n_k}$, existe un natural k_0 tal que:

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } k > k_0;$$

pero por otro lado, puesto que la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } m, n > n_0.$$

Fijando ahora $k > \max\{k_0, n_0\}$ y recordando que por definición de sucesión parcial se cumple $n_k > k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, resulta finalmente que

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{para todo } n > n_0,$$

lo cual prueba que $\lim a_n = a$, esto es, que la sucesión es convergente. \blacksquare

2.6.8 OBSERVACIÓN. Reuniendo los resultados de las proposiciones 2.6.5 y 2.6.7, resulta la equivalencia entre convergencia y regularidad para sucesiones de números reales. Esto permite estudiar el comportamiento de algunas sucesiones, lo cual se muestra a continuación en los ejemplos que siguen.

2.6.9 EJEMPLO. Se trata de probar que la sucesión de números reales de término general dado por $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ es convergente, demostrando que es de Cauchy. En efecto, en primer lugar se observa que $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{(n+1)!}$, de modo que, cualquiera que sea $k > 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &\leq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{(n+k)!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} = \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{(n+k) \cdots (n+1)} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right) \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{(n+1)^k} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{n!} \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^{k+1}}}{1 - \frac{1}{n+1}} < \frac{1}{n!} \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

Puesto que $\lim \frac{1}{n!n} = 0$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_{n+k} - a_n| < \frac{1}{n!n} < \varepsilon \quad \text{para todo } n > n_0 \quad \text{y } k > 0.$$

Así pues, la sucesión considerada es de Cauchy y, por lo tanto, es convergente.

2.6.10 EJEMPLO. Se considera la sucesión real de término general $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Se trata de probar que no es convergente, viendo que no satisface la condición de Cauchy; en efecto, basta observar que si $k > 0$, se cumple:

$$\begin{aligned} |b_{n+k} - b_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+k} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k} + \cdots + \frac{1}{n+k} = \frac{k}{n+k}, \end{aligned}$$

que, en el caso $k = n$, se convierte en $|b_{2n} - b_n| \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, lo cual nos dice que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no cumple con las condiciones de la definición dada en 2.6.2.

2.6.11 OBSERVACIÓN. Queremos comentar una cuestión importante: el ejemplo 2.6.9 podría inducir a creer que la condición de Cauchy para una sucesión (a_n) puede simplificarse exigiendo tan solo que las diferencias entre términos consecutivos de la sucesión sean tan pequeñas como se quiera, esto es, que la sucesión de diferencias $|a_{n+1} - a_n|$, tenga por límite 0. Esto no es cierto, como muestra el caso de la sucesión (b_n) considerada en el ejemplo anterior, cuya sucesión de diferencias $|b_{n+1} - b_n| = \frac{1}{n+1}$ tiene límite 0 y, no obstante, la sucesión (b_n) no es de Cauchy tal como se acaba de probar.

2.6.12 OBSERVACIÓN. La propiedad que se cumple en \mathbb{R} , según la cual todas las sucesiones de Cauchy son convergentes, se denomina *completitud por sucesiones*, por cuanto esta propiedad guarda cierta relación con la completitud que se introdujo en el capítulo anterior (véase el Axioma 3 de los números reales). No se entrará aquí en los detalles de la vinculación entre estas dos nociones de completitud, pero no puede dejarse de destacar que, del mismo modo que el axioma de completitud (“todo subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo”) se satisface en \mathbb{R} y no en \mathbb{Q} , la propiedad de completitud por sucesiones (“toda sucesión de Cauchy es convergente”) se satisface asimismo en \mathbb{R} pero no en \mathbb{Q} . En efecto, considérese la sucesión recurrente de números racionales definida por

$$a_1 = 2, \quad a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right) \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Es fácil ver que esta sucesión es de Cauchy en \mathbb{Q} , pero no tiene límite racional, aunque sí lo tiene considerada como sucesión en \mathbb{R} , y éste es $\sqrt{2}$, que es, como sabemos, un número irracional (véase el ejercicio 9).

2.6.13 DEFINICIÓN. (*Sucesiones contractivas*). Para terminar este apartado, se estudia un tipo particular de sucesiones, denominadas *contractivas*, sobre las cuales se basan algunos métodos de aproximación de ceros de funciones, como se ve más adelante. En las dos proposiciones que siguen, se estudia su convergencia y se realiza una acotación del valor absoluto de la diferencia entre el límite y el término n -ésimo de una sucesión contractiva.

Una sucesión numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se denomina *contractiva* si existe una constante $K \in \mathbb{R}$ con $0 \leq K < 1$, denominada *constante o coeficiente de contracción*, tal que:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq K|a_n - a_{n-1}| \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

2.6.14 PROPOSICIÓN. Toda sucesión contractiva es convergente.

Demostración:

De hecho, se prueba que toda sucesión contractiva es de Cauchy. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión contractiva con constante de contracción K ; por definición, se tiene que,

$$|a_{n+1} - a_n| \leq K|a_n - a_{n-1}| \leq \cdots \leq K^n|a_1 - a_0|.$$

En consecuencia, si $m > n$ puede escribirse,

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq (K^{m-1} + \cdots + K^n)|a_1 - a_0| = \\ &= K^n(K^{m-n-1} + \cdots + 1)|a_1 - a_0| = K^n \frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} |a_1 - a_0| < K^n \frac{1}{1 - K} |a_1 - a_0|. \end{aligned}$$

Puesto que $0 \leq K < 1$, se cumple entonces que $\lim \frac{K^n}{1-K} |a_1 - a_0| = 0$, con lo que, aplicando un razonamiento que ya ha sido utilizado anteriormente, se concluye que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. ■

2.6.15 EJEMPLO. Se trata de ver cómo las sucesiones contractivas pueden aplicarse a la resolución aproximada de determinadas ecuaciones. Considérese la ecuación $x^3 - 5x + 1 = 0$, la cual puede escribirse en la forma: $x = \frac{x^3 + 1}{5}$. Definiendo ahora la sucesión recurrente,

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{a_{n-1}^3 + 1}{5}, \quad \text{para todo } n \geq 1,$$

si ésta es convergente, su límite será una de las raíces de la ecuación dada, ya que si $a = \lim a_n$, ha de cumplirse $a = \frac{a^3 + 1}{5}$. Vamos, pues, a comprobar que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, para lo cual se probará que es contractiva. En efecto, obsérvese en primer lugar que todos los términos de la sucesión se encuentran dentro del intervalo $]0, 1[$, puesto que se ha tomado a_0 para que así suceda y, por inducción, un cálculo sencillo permite establecer que $0 < a_n < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, es sencillo probar que la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ es decreciente, con lo cual puede afirmarse que

$$|a_n^2 + a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2| < |a_0^2 + a_0 a_0 + a_0^2| = \frac{3}{4} < 1, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Dicho esto, puede pasarse ya a comprobar que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión contractiva (y, por tanto, convergente); en efecto:

$$|a_{n+1} - a_n| = \left| \frac{a_n^3 + 1}{5} - \frac{a_{n-1}^3 + 1}{5} \right| = \frac{1}{5} |a_n^3 - a_{n-1}^3| = \frac{1}{5} |a_n^2 + a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2| |a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{5} |a_n - a_{n-1}|,$$

que prueba que la sucesión (a_n) cumple la definición dada en 2.6.13 con constante de contracción $K = 1/5$. Con ello, un modo de aproximar el valor de una solución de la ecuación de partida, $x^3 - 5x + 1 = 0$, consiste en ir obteniendo términos de la sucesión (a_n) ; así: $a_0 = 0.5$, $a_1 = 0.225$, $a_2 = 0.202278$, $a_3 = 0.201655$, $a_4 = 0.201640$, ... son aproximaciones de una solución de la ecuación dada.

2.6.16 OBSERVACIÓN. Se plantea inmediatamente la cuestión de la precisión: todo cálculo aproximado lleva aparejado un error, esto es, una diferencia entre el valor “exacto” buscado y el “aproximado” que se va obteniendo en cada iteración. En una sucesión contractiva, no es difícil estimar el error cometido en la aproximación; en la proposición que sigue se establecen dos acotaciones muy útiles: la primera, a partir de los dos primeros términos de la sucesión; la segunda, a partir de los dos últimos términos calculados en cada iteración.

2.6.17 PROPOSICIÓN. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión contractiva con constante de contracción K y límite a ; se cumplen:

- 1) $|a - a_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |a_1 - a_0|$;
- 2) $|a - a_n| \leq \frac{K}{1-K} |a_n - a_{n-1}|$.

Demostración:

1) Por la demostración de la proposición anterior, se sabe que:

$$|a_m - a_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |a_1 - a_0|, \quad \text{para todo } m > n.$$

Tomando ahora límite respecto de m , se obtiene $|a - a_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |a_1 - a_0|$.

- 2) Fijado n , se considera la cola de la sucesión: $(a_m)_{m \geq n-1}$; aplicándole ahora el resultado del apartado anterior, se obtiene finalmente $|a - a_n| \leq \frac{K}{1-K} |a_n - a_{n-1}|$. ■

2.6.18 EJEMPLO. La precisión de la aproximación realizada en el ejemplo 2.6.15 con $n = 4$, es de milésimas, ya que:

$$|a - a_4| \leq \frac{(0.2)^4}{1-0.2} |0.225 - 0.5| = 0.00055 < 10^{-3}.$$

Calcúlese como ejercicio la precisión de la aproximación con $n = 10$ y con $n = 50$.

2.7 EXTENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE. CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

2.7.1 DEFINICIÓN. (*Sucesiones de límite infinito*). Hay sucesiones de números reales que no son convergentes, en el sentido que establece (2.2.1), pero que, no obstante, tienen la propiedad siguiente: el valor absoluto de su término general es arbitrariamente grande. Son ejemplos de este tipo de sucesiones, las siguientes: $(3n^2 + 5n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$; $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$; $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Tiene, pues, sentido definir formalmente esta propiedad.

- Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales; se dice que esta sucesión tiene límite $+\infty$ si cualquiera que sea $\alpha > 0$, existe un número natural n_0 , que evidentemente depende de α , tal que

$$x_n > \alpha, \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Si (x_n) cumple esta propiedad, se escribe entonces: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = +\infty$, o bien, $(x_n) \rightarrow +\infty$.

- De forma análoga, se dice que una sucesión (x_n) tiene límite $-\infty$ si cualquiera que sea $\alpha > 0$, existe un natural n_0 tal que

$$x_n < -\alpha, \quad \text{para todo } n > n_0,$$

escribiéndose entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = -\infty$ o bien $(x_n) \rightarrow -\infty$.

- Por último, se dice que (x_n) tiene límite ∞ , escribiéndose entonces $\lim x_n = \infty$, si cualquiera que sea $\alpha > 0$, existe $n_0(\alpha) \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n| > \alpha, \quad \text{para todo } n > n_0(\alpha).$$

- Es importante observar que, si se cumplen $\lim(x_n) = +\infty$, o bien, $\lim(x_n) = -\infty$, entonces se cumple $\lim(x_n) = \infty$, pero el recíproco no es cierto. También es importante decir que las sucesiones con límite infinito no son sucesiones convergentes.

2.7.2 PROPOSICIÓN. (*Álgebra de los límites infinitos*.) Sean (x_n) , (y_n) , (z_n) sucesiones de números reales tales que: $\lim(x_n) = x \in \mathbb{R}$, $\lim(y_n) = +\infty$ y $\lim(z_n) = +\infty$. Se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) $\lim(x_n + y_n) = +\infty$; $\lim(x_n - y_n) = -\infty$;
- 2) $\lim(x_n y_n) = +\infty$, si $x > 0$; $\lim(x_n y_n) = -\infty$, si $x < 0$;
- 3) $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$;

$$4) \lim(y_n + z_n) = +\infty; \quad \lim(y_n z_n) = +\infty.$$

(Se tienen enunciados análogos para sucesiones con límite $-\infty$ o ∞).

Demostración:

- 1) Puesto que (x_n) es convergente, es acotada; esto es, existe un número real $k > 0$ tal que $|x_n| < k$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, se cumple $-k < x_n < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, puesto que $\lim y_n = +\infty$, si $\alpha > 0$, existe un n_0 tal que $y_n > \alpha + k$ para todo $n > n_0$. En consecuencia, se verifica $x_n + y_n > (-k) + (\alpha + k) = \alpha$, para todo $n > n_0$, lo cual prueba que $\lim(x_n + y_n) = +\infty$. Se demuestra de forma análoga que se cumple $\lim(x_n - y_n) = -\infty$.
- 2) Supongamos $x > 0$; existen entonces $\delta \in \mathbb{R}$ y $n_1 \in \mathbb{N}$, tales que $0 < \delta < x$ para todo $n > n_1$. Por ser $(y_n) \rightarrow +\infty$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n > \frac{\alpha}{\delta}$, para todo $n > n_2$. Finalmente, puede afirmarse que $x_n y_n > \delta \frac{\alpha}{\delta} = \alpha$, para todo $n > \max\{n_1, n_2\}$. esto es, $\lim(x_n y_n) = +\infty$. El caso $x < 0$ es análogo.

La demostración del resto de propiedades, se propone como ejercicio. ■

2.7.3 OBSERVACIÓN. (*Indeterminaciones*). Debe prestarse atención especial a la manipulación algebraica de términos generales de sucesiones, alguna de las cuales tenga límite 0 o infinito, esto es, deben respetarse en todo momento las “reglas de juego” enunciadas en la proposición anterior. Así, debe tenerse especial cuidado con las expresiones que se dan a continuación, denominadas *indeterminaciones*, y en las cuales no puede afirmarse nada de antemano sobre la sucesión que se obtiene mediante la operación que se indica en cada caso, en las condiciones especificadas.

- Estas indeterminaciones son las siguientes:

- 1) Indeterminación “ $\infty - \infty$ ”:

si se quiere calcular $\lim(x_n - y_n)$ y se cumple $\lim x_n = +\infty$ y $\lim y_n = +\infty$;

- 2) Indeterminación “ $0 \cdot \infty$ ”:

si se quiere calcular $\lim(x_n y_n)$ y se cumple $\lim x_n = 0$ y $\lim y_n = \infty$;

- 3) Indeterminación “ $\frac{0}{0}$ ”:

si se quiere calcular $\lim \frac{x_n}{y_n}$ y se cumple $\lim x_n = 0$ y $\lim y_n = 0$;

- 4) Indeterminación “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”:

si se quiere calcular $\lim \frac{x_n}{y_n}$ y se cumple $\lim x_n = +\infty$ y $\lim y_n = +\infty$;

- 5) Indeterminación “ 1^∞ ”:

si se quiere calcular $\lim_a (x_n)^{y_n}$ y se cumple $\lim x_n = 1$ y $\lim y_n = +\infty$.

- 6) Indeterminación “ 0^0 ”:

si se quiere calcular $\lim_a (x_n)^{y_n}$ y se cumple $\lim x_n = 0$ y $\lim y_n = 0$.

- 7) Indeterminación “ ∞^0 ”:

si se quiere calcular $\lim_a (x_n)^{y_n}$ y se cumple $\lim x_n = +\infty$ y $\lim y_n = 0$.

- Vamos a comentar brevemente cómo puede abordarse el cálculo del límite en cada caso.

- 1) En general, basta con multiplicar y dividir por la suma $x_n + y_n$. Por ejemplo:

$$\lim(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0.$$

- 2) Los casos 2), 3) y 4) son en realidad equivalentes y puede pasarse de uno a otro mediante

transformaciones algebraicas sencillas; se estudiará una forma de resolverlos mediante sucesiones equivalentes en el próximo apartado.

- 3) Se aborda recordando que $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Por ejemplo:

$$\lim \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{2n} = \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{3}}\right)^{2n} = \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{3}}\right)^{\frac{n-1}{3} \cdot \frac{3}{n-1} 2n} = e^{\lim \frac{6n}{n-1}} = e^6.$$

- 4) Se pueden reducir al tipo 2), aplicando logaritmos neperianos y recordando que $\ln a^b = b \ln a$.

2.7.4 PROPOSICIÓN. Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones de números reales; se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) si $x_n \leq y_n$ para todo $n > n_0$ y $\lim(x_n) = +\infty$, entonces $\lim(y_n) = +\infty$;
- 2) si $x_n \leq y_n$ para todo $n > n_0$ y $\lim(y_n) = -\infty$, entonces $\lim(x_n) = -\infty$;
- 3) si $|x_n| \leq |y_n|$ para todo $n > n_0$ y $\lim(x_n) = \infty$, entonces $\lim(y_n) = \infty$.

Demostración:

- 1) Si $\lim x_n = +\infty$, por definición dado $\alpha > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \alpha$, para todo $n > n_0$; por lo tanto, se cumplirá $y_n > x_n > \alpha$, para todo $n > n_0$, es decir, $\lim(y_n) = +\infty$.

La demostración de 2) y 3) se propone como ejercicio. ■

2.7.5 OBSERVACIÓN.

- En relación con las sucesiones parciales, se cumple un resultado análogo al de la proposición 2.5.9: una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$) si, y sólo si, toda sucesión parcial de (a_n) tiene límite $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$).
- También pueden extenderse al caso de límites infinitos las definiciones de límites de oscilación: así, si A es el conjunto de los límites de todas las subsucesiones de una sucesión no acotada (a_n) , se definen

$$\limsup(a_n) = \sup A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \liminf(a_n) = \inf A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Así pues, si (a_n) es una sucesión no acotada de números reales, se cumple $\lim(a_n) = \infty$ si, y sólo si, $\limsup(a_n) = \liminf(a_n) = \infty$.

2.7.6 Lo que resta de este apartado se dedica a estudiar unos criterios cuya aplicación permite decidir sobre el carácter convergente o divergente de una determinada sucesión y, en algunos casos, establecer su límite en caso de convergencia. Estos criterios completan los que se han visto en el apartado 2.4 relativos a las sucesiones monótonas y se formulan partiendo de un resultado general, del cual se extraen luego resultados particulares en forma de corolario.

2.7.7 PROPOSICIÓN. Sean $(a_n), (b_n)$ dos sucesiones de números reales, tales que:

- 1) $\lim(a_n) = a \in \mathbb{R}$;
- 2) $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = +\infty$.

En estas condiciones, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = a.$$

Demostración:

Se trata de probar que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número natural n_0 tal que

$$\left| \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} - a \right| < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Puesto que la sucesión (a_n) es convergente y tal que $\lim(a_n) = a$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n > n_1$.

Puesto que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = +\infty$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n > \frac{2}{\varepsilon} ((a_1 - a)b_1 + (a_2 - a)b_2 + \cdots + (a_{n_1} - a)b_{n_1}), \quad \text{para todo } n > n_2.$$

En consecuencia, se tendrá:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} - a \right| = \left| \frac{(a_1 - a)b_1 + (a_2 - a)b_2 + \cdots + (a_n - a)b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \right| = \\ & = \left| \frac{(a_1 - a)b_1 + \cdots + (a_{n_1} - a)b_{n_1} + (a_{n_1+1} - a)b_{n_1+1} + \cdots + (a_n - a)b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \right| \leq \\ & \leq \frac{|(a_1 - a)b_1 + \cdots + (a_{n_1} - a)b_{n_1}|}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} + \frac{|(a_{n_1+1} - a)b_{n_1+1} + \cdots + (a_n - a)b_n|}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, lo que completa la demostración. ■

2.7.8 COROLARIO. (*Criterio de la media aritmética.*) Sea (a_n) una sucesión real convergente de límite $a \in \mathbb{R}$; se cumple entonces que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$$

Demostración:

Inmediata, tomando en la proposición anterior $b_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

2.7.9 COROLARIO. (*Criterio de la media geométrica.*) Sea (a_n) una sucesión convergente de números reales, tal que $\lim a_n = a > 0$ y tal que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se cumple entonces que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = a$$

Demostración:

Inmediata, aplicando 2.7.8 a la sucesión $(\ln a_n)$ y teniendo en cuenta las propiedades elementales de la función logarítmica. ■

2.7.10 COROLARIO. (*Criterio de la raíz n -ésima.*) Sea (a_n) una sucesión de números reales estrictamente positivos tal que existe el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L > 0$. Se cumple entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Demostración:

Se considera la sucesión (b_n) definida por

$$b_1 = a_1, \quad b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Está claro que la sucesión (b_n) cumple las hipótesis del corolario anterior, con lo cual se cumplirá:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

como se quería probar. ■

2.7.11 PROPOSICIÓN. (*Primer criterio de Stolz.*) Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales tales que:

1) (y_n) es estrictamente creciente y $\lim y_n = +\infty$;

2) existe el límite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

En estas condiciones se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.

Demostración:

Añadimos a las sucesiones $(x_n)_{n \geq 1}$ y $(y_n)_{n \geq 1}$ los términos $x_0 = y_0 = 0$. Se aplicará la proposición 2.7.7, tomando

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \quad \text{y} \quad b_n = y_n - y_{n-1}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Por hipótesis, se tiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$; por otra parte, obsérvese que también se cumple,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + \cdots + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty,$$

con lo que en definitiva resulta

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x_1}{y_1} y_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} (y_2 - y_1) + \cdots + \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} (y_n - y_{n-1})}{y_1 + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n}, \end{aligned}$$

tal como se quería probar. ■

2.7.12 PROPOSICIÓN. (*Segundo criterio de Stolz.*) Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales tales que:

1) (y_n) es estrictamente decreciente y $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$;

2) existe el límite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

En estas condiciones se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.

Demostración:

Supondremos que L es finito; el caso en que $L = \infty$ se propone como ejercicio.

En virtud de la hipótesis 2), dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que, cualquiera que sea $n > n_0$ se cumple

$$L - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < L + \varepsilon,$$

con lo que, para todo $n > n_0$ y todo $p \geq 1$ se verifica

$$L - \varepsilon < \frac{x_{n+p} - x_n}{y_{n+p} - y_n} < L + \varepsilon.$$

Manteniendo n fijo, pasando al límite cuando $p \rightarrow +\infty$ y teniendo en cuenta la hipótesis 1), se obtiene

$$L - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < L + \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0,$$

lo que prueba que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$. ■

2.7.13 EJEMPLO.

- 1) Por aplicación del criterio de la media aritmética se obtiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} = 0$, puesto que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

- 2) Aplicando el criterio de la media geométrica a la sucesión (a_n) con $a_n = \frac{2n}{n+1}$, $n \geq 1$, se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)} \right)^{1/n} = 2,$$

puesto que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$.

- 3) Por aplicación del criterio de la raíz n -ésima a la sucesión $(n^2+1)_{n \in \mathbb{N}}$, se obtiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$, puesto que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{(n-1)^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^2-2n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} = 1$$

- 4) Sea $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ un número real positivo estricto; aplicando el criterio de la raíz n -ésima a la sucesión (a_n) con $a_n = \lambda > 0$ para todo $n \geq 1$, se obtiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^{1/n} = 1$.

- 5) Para calcular el límite $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n}$, puede aplicarse el primer criterio de Stolz con $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, $y_n = \ln n$, obteniéndose

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \ln \frac{n}{n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln e} = 1. \end{aligned}$$

- 4) Sea $k \in \mathbb{N}$ un número natural, con $k \geq 2$; para calcular el límite

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k}}{\ln \frac{n+1}{n}},$$

puede aplicarse el segundo criterio de Stolz con $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+k}$, $y_n = \ln \frac{n+1}{n}$, obteniéndose

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n-1}}{\ln \frac{n+1}{n} - \ln \frac{n}{n-1}} = -(1+k) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+k)(n-1) \ln \frac{n^2-1}{n^2}} \\ &= -(1+k) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{(n+k)(n-1)}} = -(1+k) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln e^{-1}} = 1+k. \end{aligned}$$

2.8 EQUIVALENCIA DE SUCESIONES.

2.8.1 En este apartado se desarrolla un concepto de notable interés práctico, el de las sucesiones equivalentes, que permite realizar ciertas manipulaciones en el término general y calcular el límite de una sucesión a partir de otras sucesiones de límites conocidos. Se estudian y clasifican también los infinitos (sucesiones de límite ∞) y los infinitésimos (sucesiones de límite 0).

2.8.2 DEFINICIÓN. (*Sucesiones equivalentes*). Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de número reales; se dice que la sucesión (a_n) es *equivalente* a la sucesión (b_n) , si se cumple $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Habitualmente, se indica mediante la notación $(a_n) \sim (b_n)$ que la sucesión (a_n) es equivalente a la sucesión (b_n) . Queremos explicitar que ésta no es la definición más general de sucesiones equivalentes, pero es suficiente para cubrir los objetivos de este texto. No obstante, obsérvese que de la definición se deduce que la sucesión (b_n) debe tener un número finito de términos nulos para poder plantearla.

2.8.3 EJEMPLO.

- 1) La sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ es equivalente a la sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $b_n = \frac{n+2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, puesto que se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{2n-1}}{\frac{n+2}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{2n^2 + 3n - 2} = 1.$$

- 2) La sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = n-1$, $n \in \mathbb{N}$ es equivalente a la sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $b_n = n+5$, $n \in \mathbb{N}$, puesto que se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+5} = 1.$$

Obsérvese que la equivalencia puede darse, por tanto, entre sucesiones convergentes y entre sucesiones divergentes, aspecto en el que entraremos más adelante.

2.8.4 PROPOSICIÓN. La relación \sim es de equivalencia en el conjunto de las sucesiones de números reales.

Demostración:

Si (a_n) es una sucesión de números reales, es trivial que se cumple $(a_n) \sim (a_n)$, lo cual prueba que la relación \sim es reflexiva. Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de números reales, tales que $(a_n) \sim (b_n)$, por definición se cumple que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, con lo que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n/b_n} = 1$, lo cual prueba que se

cumple $(b_n) \sim (a_n)$, esto es, que la relación \sim es simétrica. Se propone como ejercicio razonar que \sim es transitiva, es decir, que si $(a_n) \sim (b_n)$ y $(b_n) \sim (c_n)$, se cumple entonces que $(a_n) \sim (c_n)$. ■

2.8.5 Vista la definición de equivalencia de sucesiones y establecido que, efectivamente, se trata de una relación de equivalencia, se estudian a continuación las propiedades que relacionan la equivalencia de sucesiones y la convergencia, viendo cómo puede deducirse la segunda a partir de la primera y a la inversa.

2.8.6 PROPOSICIÓN. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes, tales que $\lim(a_n) = \lim(b_n) = L \neq 0$; se cumple entonces que las sucesiones (a_n) y (b_n) son equivalentes.

Demostración:

Evidente, puesto que $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{L}{L} = 1$. ■

2.8.7 OBSERVACIÓN. Dos cuestiones importantes acerca de lo que acabamos de ver: en primer lugar, el resultado de la proposición anterior no es cierto si $L = 0$. En efecto, considérense, por ejemplo, las sucesiones $\left(\frac{2}{n^3}\right)_{n \geq 1}$ y $\left(\frac{1}{3n^2}\right)_{n \geq 1}$, las cuales tienen el mismo límite 0 y, no obstante, no son equivalentes, puesto que se cumple $\lim \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{3n^2}} = \lim \frac{6}{n} = 0 \neq 1$. En segundo lugar, el recíproco del enunciado de la proposición anterior no tiene por qué ser cierto, es decir, puede que dos sucesiones sean equivalentes y, no obstante, no tengan el mismo límite y que ni siquiera sean convergentes. En efecto, considérense por ejemplo las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por:

$$\begin{cases} a_{2n-1} = \frac{1}{n} & \text{y} & a_{2n} = 1, & \text{para todo } n \geq 1; \\ b_{2n-1} = \frac{1}{n+1} & \text{y} & b_{2n} = 1, & \text{para todo } n \geq 1. \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que ambas sucesiones son equivalentes y, sin embargo, ninguna de ellas es convergente. No obstante, es suficiente la existencia de uno de los límites para poder afirmar que, entonces, sí que es cierto el recíproco, tal como se ve en la proposición que sigue.

2.8.8 PROPOSICIÓN. Si dos sucesiones (a_n) y (b_n) son equivalentes, sólo caben dos alternativas: o bien ambas son convergentes al mismo límite, o bien ambas son divergentes.

Demostración:

Supongamos que $\lim(a_n) = L \in \mathbb{R}$; por ser ambas sucesiones equivalentes, se cumple $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{b_n}{a_n} = 1$, con lo que $\lim b_n = \lim \left(a_n \cdot \frac{b_n}{a_n}\right) = L \cdot 1 = L$, lo cual prueba que (b_n) es convergente y del mismo límite.

Si (a_n) es divergente y $(a_n) \sim (b_n)$, la sucesión (b_n) no puede ser convergente, ya que si lo fuera, entonces (a_n) debería serlo también por el razonamiento anterior, lo cual es contradictorio. ■

2.8.9 PROPOSICIÓN. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que $\lim a_n b_n = L \in \mathbb{R}$; si la sucesión (a'_n) es tal que $(a'_n) \sim (a_n)$, se cumple entonces que $\lim a'_n b_n = L$.

(En otras palabras: si $(a'_n) \sim (a_n)$, entonces debe cumplirse $(a'_n b_n) \sim (a_n b_n)$, cualquiera que sea la sucesión (b_n)).

Demostración:

Si las sucesiones (a_n) y (a'_n) son equivalentes, se cumple $\lim \frac{a'_n}{a_n} = 1$, con lo que

$$\lim(a'_n b_n) = \lim \left(\frac{a'_n}{a_n} \cdot a_n b_n \right) = 1 \cdot L = L,$$

lo que completa la demostración. ■

2.8.10 OBSERVACIÓN. La proposición anterior puede ser muy útil para el cálculo efectivo de límites, por cuanto permite la sustitución de los términos de una sucesión por otras equivalentes, en productos y cocientes, tal como se mostrará en los ejemplos 2.8.15 y 2.8.16. No se cumple una proposición similar a 2.8.9 para la suma o diferencia de sucesiones; así, si $\lim(a_n + b_n) = L$ y $(a_n) \sim (a'_n)$, no puede afirmarse nada acerca del límite de $(a'_n + b_n)$. En efecto, considérense las sucesiones $a_n = n$ y $b_n = 5 - n$; es evidente que $\lim(a_n + b_n) = \lim(n + 5 - n) = 5$, se cumple la equivalencia (inmediata de justificar) $(n) \sim (n + 2)$ y, sin embargo, la sucesión $(a'_n + b_n) = ((n + 2) + (5 - n)) = (7)$ no tiene límite 5.

2.8.11 DEFINICIÓN. (*Infinitos. Equivalencia de infinitos*). A continuación, vamos a proceder al estudio y clasificación de las sucesiones de límite infinito; a partir de esta clasificación se verán unos ejemplos de sucesiones equivalentes de gran interés práctico.

- Una sucesión (a_n) se dice que es un *infinito* si se cumple $\lim(a_n) = +\infty$, $-\infty$ o bien ∞ .
- Si (a_n) y (b_n) son dos infinitos de la misma naturaleza, esto es, ambos tienen límite $+\infty$, $-\infty$ o ∞ , pueden relacionarse de la forma siguiente:

- 1) Si se cumple $(a_n) \sim (b_n)$, esto es, $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$, se dice que los dos infinitos son *equivalentes*.
- 2) Si se cumple $\lim \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}_0$, $L \neq 1$, se dice entonces que los infinitos son *del mismo orden*.
- 3) Si se cumple $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ o, equivalentemente, $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$, se dice entonces que (a_n) es un infinito de *orden superior* a (b_n) , escribiéndose entonces $(a_n) \gg (b_n)$.

2.8.12 EJEMPLO.

- 1) De acuerdo con lo visto en el ejemplo 2.7.13 (epígrafe 5)), los infinitos $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$ y $(\ln n)$, son equivalentes, pues el límite de su cociente es 1.
- 2) Sean $p + 1$ números reales $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}$, con $a_p \neq 0$; se cumple entonces la equivalencia de infinitos $(a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0) \sim (a_p n^p)$, ya que se verifica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0}{a_p n^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a_{p-1}}{a_p} \frac{1}{n} + \dots + \frac{a_0}{a_p} \frac{1}{n^p} \right) = 1.$$

- 3) Si $p, q \in \mathbb{N}$ son tales que $p > q$, $a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ con $a_p \neq 0$ y $b_0, b_1, \dots, b_q \in \mathbb{R}$ con $b_q \neq 0$, entonces se cumple $(a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0) \gg (b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0)$. En efecto, basta observar que se verifica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_p}{b_q} n^{p-q} = +\infty,$$

teniendo en cuenta 2.8.9 y que $p - q > 0$.

- 4) Teniendo en cuenta 3), resulta inmediatamente que, si $p < q$, se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} = 0.$$

- 5) Si $p = q$, los infinitos $(a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0)$ y $(b_p n^p + \dots + b_1 n + b_0)$, son del mismo orden, puesto que se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_p n^p + \dots + b_1 n + b_0} = \frac{a_p}{b_p} \neq 0.$$

- 6) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, $b, c > 1$ y $0 < p < 1$, se cumple $(a_n)^{a_n} \gg b^{a_n} \gg a_n^c \gg a_n \gg a_n^p \gg \ln a_n$.
- 7) (*Equivalencia de Stirling*). Se cumple $(n!) \sim (n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})$, equivalencia que enunciamos sin demostración.

2.8.13 DEFINICIÓN. (*Infinitésimos. Equivalencia de infinitésimos*). En esta sección se ve la definición y la clasificación de las sucesiones de límite nulo, estudiando a continuación algunos ejemplos de sucesiones equivalentes de gran interés práctico.

- Una sucesión (x_n) se dice que es un *infinitésimo*, si se cumple $\lim(x_n) = 0$.
- Si $(x_n), (y_n)$ son dos infinitésimos, pueden relacionarse de la forma siguiente:
 - 1) Si se cumple $(x_n) \sim (y_n)$, esto es, si $\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$, se dice que los dos infinitésimos son *equivalentes*.
 - 2) Si se cumple $\lim \frac{x_n}{y_n} = L \in \mathbb{R}_0, L \neq 1$, se dice entonces que los infinitésimos son *del mismo orden*.
 - 3) Si se cumple $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$, o, equivalentemente, $\lim \frac{y_n}{x_n} = \infty$, se dice entonces que (x_n) es un infinitésimo *de orden superior* a (y_n) , escribiéndose en ese caso $(x_n) \ll (y_n)$.

2.8.14 EJEMPLO.

- 1) Si (x_n) es un infinitésimo, entonces $(\operatorname{sen} x_n)$ y (x_n) son dos infinitésimos equivalentes. En efecto, si se supone que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, debemos ver que la sucesión (λ_n) de término n -ésimo dado por $\lambda_n = \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}$, tiene límite 1. Para verlo nos ayudaremos de la representación gráfica de la figura 2.1; en ella se observa que $\operatorname{area}(OAC) < \operatorname{area}(OBC) < \operatorname{area}(OBD)$, siempre que $x_n \neq 0$. Por otra parte, se tienen las relaciones geométricas siguientes

$$OC = OB = 1; \quad AC = \operatorname{sen} x_n; \quad OA = \cos x_n; \quad DB = \tan x_n = \frac{\operatorname{sen} x_n}{\cos x_n},$$

con lo que $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x_n \cos x_n < \pi \frac{x_n}{2\pi} = \frac{1}{2} x_n < \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x_n}{\cos x_n}$, es decir, $\frac{1}{\cos x_n} > \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} = \lambda_n > \cos x_n$.

Pasando al límite cuando $n \rightarrow +\infty$, resulta $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\cos x_n} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos x_n$, con lo que finalmente se obtiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} = 1$. Si la sucesión (x_n) tiene un número finito de términos nulos, se pueden eliminar y sigue siendo válida la misma demostración. Si (x_n) tiene un número infinito de términos nulos, basta considerar la subsucesión (x'_n) de términos no nulos, que evidentemente es también un infinitésimo y para la cual es entonces válido el resultado establecido, con lo que también lo es para (x_n) (complétense los detalles del razonamiento).

- 2) Si (x_n) es un infinitésimo, se tiene la equivalencia $\left(\frac{x_n^2}{2}\right) \sim (1 - \cos x_n)$. En efecto, considerando el infinitésimo $\left(\frac{x_n}{2}\right)$, teniendo en cuenta la equivalencia anterior y aplicando fórmulas de trigonometría elemental, puede escribirse:

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{x_n}{2}}{\frac{x_n}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1 - \cos x_n}{\frac{x_n^2}{2}}},$$

y por tanto se tiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x_n}{\frac{x_n^2}{2}} = 1$, lo cual prueba la equivalencia formulada.

3) Si (x_n) es un infinitésimo, se cumple la equivalencia $(x_n) \sim (\tan x_n)$, que se justifica fácilmente ya que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tan x_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} \frac{1}{\cos x_n} = 1$.

4) De las equivalencias anteriores, se deducen inmediatamente las siguientes:

$$(x_n) \sim (\arcsen x_n) \quad \text{y} \quad (x_n) \sim (\arctan x_n).$$

5) Si (x_n) es un infinitésimo, se tienen las equivalencias:

$$(x_n) \sim (\ln(1 + x_n)) \quad \text{y} \quad (e^{x_n}) \sim (1 + x_n).$$

En efecto, veamos la primera:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + x_n)^{1/x_n} = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + x_n)^{1/x_n} \right) = \ln e = 1.$$

La segunda se deduce inmediatamente de ésta.

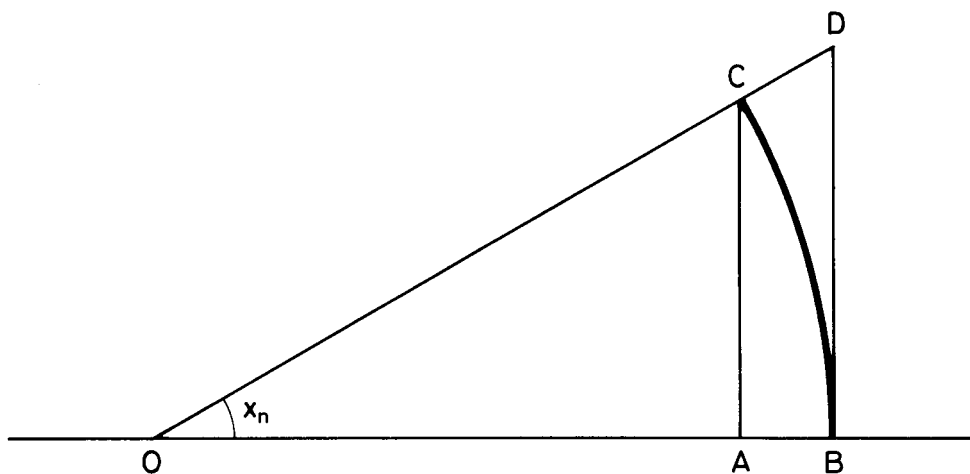


Figura 2.1. Ilustración de la equivalencia $(x_n) \sim (\sen x_n)$.

2.8.15 EJEMPLO. Para calcular el límite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!e^n}$, pueden aplicarse la proposición 2.8.9 y la equivalencia de Stirling, obteniéndose

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0.$$

2.8.16 EJEMPLO. El límite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 \sen^2 \frac{1}{n}}{(n+2) \cos \frac{\pi n}{4n+1}}$ puede calcularse aplicando la proposición 2.8.9 y las equivalencias de los ejemplos 2.8.12 y 2.8.14. En efecto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 \sen^2 \frac{1}{n}}{(n+2) \cos \frac{\pi n}{4n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 (\frac{1}{n})^2}{(n) \cos \frac{\pi n}{4n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\cos \frac{\pi n}{4n+1}} = \frac{3}{\cos \frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}.$$

2.9 EJERCICIOS.

1. Sea (x_n) una sucesión numérica (real o compleja). Probar la equivalencia entre las dos afirmaciones siguientes:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$;

b) cualquier entorno $U(x)$ del punto x contiene todos los términos de la sucesión exceptuando, acaso, un número finito de ellos.

2. Sea (z_n) una sucesión convergente de números complejos. Probar que, entonces, la sucesión real $(|z_n|)$, también es convergente y calcular su límite. Estudiar si el recíproco también es cierto, dando un contraejemplo que justifique la respuesta.

3. Dadas dos sucesiones (a_n) y (b_n) , estudiar su convergencia, sabiendo que:

a) $(a_n + b_n)$ y $(a_n - b_n)$ son convergentes.

b) $(a_n b_n)$ y (a_n/b_n) son convergentes.

4. Si E indica la “parte entera”, estudiar en qué condiciones es cierta la siguiente afirmación: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n) = a$ si, y sólo si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(a_n)) = E(a)$.

5. Suponiendo que (a_n) es una sucesión convergente, tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n) = a \neq 0$, probar que la sucesión (b_n) de término n -ésimo dado por $b_n = a_n + (-1)^n a_n$, no es convergente.

6. Probar que si (a_n) es una sucesión convergente de números reales positivos ($a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$), con $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, entonces se cumple: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

7. Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de números reales, tales que $a_n > 0$, $b_n > 0$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. Probar que:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} = 0$.

b) Discutir si, en a), la hipótesis $a_n > 0$, $b_n > 0$ es imprescindible; en tal caso, justifíquese y detállese en qué paso de a) se ha utilizado.

8. Demostrar que la sucesión $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y dar un intervalo de longitud menor o igual a $1/2$ dentro del cual se encuentre su límite.

9. Demostrar que las siguientes sucesiones definidas por recurrencia, son convergentes y calcular el límite en cada caso:

a) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$; b) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2}$; c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$.

10. Sea (a_n) la sucesión real definida por: $a_1 \in \mathbb{R}_0^+$ y $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(a_{n-1})^2}$, si $n \geq 2$; se pide:

- a) probar que (a_n) es estrictamente creciente y no es acotada superiormente;
- b) probar que $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ es convergente; c) calcular $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n}$.
- 11.** Si $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}}$, para todo $n \geq 1$, demostrar que la sucesión (x_n) es convergente y calcular su límite con un error menor que $1/2$.
- 12.** Probar que si a es un número real tal que $0 < a < 2$, entonces se cumple: $a < \sqrt{2a} < 2$. Teniendo en cuenta este resultado, probar que la sucesión recurrente dada por $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$ es convergente y calcular su límite.
- 13.** Sea (x_n) la sucesión definida por $x_1 \in]0, 1[$; $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$, si $n \geq 1$. Demostrar que:
- a) $x_n \in]0, 1[$, para todo $n \in \mathbb{N}$; b) la sucesión es monótona decreciente;
- c) la sucesión es convergente y calcular su límite; d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$.
- 14.** Se considera la sucesión recurrente definida por: $x_1 = 1$, $x_n = \sqrt{3x_{n-1}}$, para todo $n \geq 2$.
- a) Probar que $(x_n)_{n \geq 1}$ es monótona creciente.
- b) Probar que $(x_n)_{n \geq 1}$ está acotada superiormente.
- c) Deducir que $(x_n)_{n \geq 1}$ es convergente y calcular su límite.
- 15.** Se define la sucesión recurrente $(a_n)_{n \geq 1}$ mediante $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = a_{n-1}^2 + \frac{4}{25}$, para todo $n \geq 2$.
- a) Probar que $\frac{1}{5} < a_n < \frac{4}{5}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- b) Probar que (a_n) es una sucesión monótona.
- c) Deducir que (a_n) es convergente y calcular su límite.
- 16.** Sean dos números reales $a, b > 0$; se define la sucesión recurrente (x_n) , mediante:
- $$x_1 = a; \quad x_n = \frac{b}{1 + x_{n-1}}, \text{ para todo } n \geq 2.$$
- a) Probar que $(x_{2p})_{p \geq 1}$ es monótona creciente y está acotada.
- b) Probar que $(x_{2p-1})_{p \geq 1}$ es monótona decreciente y está acotada.
- c) Justificar la convergencia de ambas sucesiones y demostrar que tienen el mismo límite. Calcular dicho límite.
- 17.** Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión recurrente definida por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$, si $n \geq 2$.
- a) Probar que $a_n \in]0, 1[$, para todo $n \in \mathbb{N}$; b) Probar que (a_n) es una sucesión de Cauchy;
- c) Calcular $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)$. (Indicación: considérese la subsucesión de los términos impares y demuéstrase que $a_{2n+1} = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{1}{4^n} \right)$).

18. Se considera una sucesión de Fibonacci genérica, esto es, si $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq 0, b \neq 0$, una sucesión (F_n) definida por:

$$F_1 = a; F_2 = b; F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ para todo } n \geq 3.$$

Probar que la sucesión (x_n) con $x_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ es convergente y calcular su límite A . Obsérvese que se ha probado que para *todas* las sucesiones de Fibonacci, calculando el cociente de términos consecutivos se tiene el mismo límite A ; dicho número A se conoce como *número áureo* o *razón áurea*.

19. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a \leq b$; se define la sucesión (x_n) mediante:

$$x_1 = a + b, \quad x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión y, en su caso, hallar su límite.

20. Sean dos números reales $a, b > 0$. Discutir la convergencia de la sucesión (x_n) dada por $x_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, en función de los valores de a y b . Calcular $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ cuando éste exista.

21. Sea (x_n) una sucesión de números reales, tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n-1}) = \lambda \in \mathbb{R}$. Probar que entonces se cumple: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = \lambda$.

22. Demostrar que toda sucesión monótona creciente (respectivamente, decreciente) y no acotada, tiene límite $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$).

23. Demostrar que si una sucesión monótona tiene una sucesión parcial convergente, entonces es convergente.

24. Dar ejemplos de sucesiones numéricas que tengan subsucesiones convergentes hacia los siguientes límites:

a) 0 y 1; b) $\pi, e, \sqrt{2}$ y 17; c) n , para todo $n \in \mathbb{N}$;

e) a , para todo $a \in \mathbb{Q}$, tal que $0 < a < 1$.

25. El teorema de Bolzano-Weierstrass afirma que *toda sucesión acotada tiene una parcial convergente* (teorema 2.5.6). Demostrar que si una sucesión no es acotada, entonces existe una subsucesión de la misma con límite $+\infty$ o bien $-\infty$.

26. Sea (a_n) una sucesión real. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n) = a$, es que las dos sucesiones parciales $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ y $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, sean convergentes y tengan el mismo límite a .

27. Se considera la sucesión de números reales $(x_n)_{n \geq 1}$, definida por:

$$x_1 = 2; \quad x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}, \text{ para todo } n \geq 2.$$

- (a) Calcular los términos x_2, x_3, x_4, x_5 de esta sucesión.
- (b) Probar por inducción que la sucesión parcial (x_{2p}) es monótona decreciente; probar análogamente que la sucesión parcial (x_{2p+1}) es monótona creciente.
- (c) Probar por inducción que $x_1 < x_{2p}$, $p = 1, 2, \dots$, es decir, que la sucesión (x_{2p}) está acotada inferiormente. Deducir que esta sucesión es convergente.
- (d) Probar por inducción que $x_{2p+1} < x_2$, $p = 0, 1, 2, \dots$, es decir, que la sucesión (x_{2p+1}) está acotada superiormente. Deducir que esta sucesión es convergente.
- (e) Si se designan por $a = \lim x_{2p}$ y $b = \lim x_{2p+1}$, probar que $a = b$, teniendo en cuenta que:

$$x_{2p} = 2 + \frac{1}{x_{2p-1}}, \quad x_{2p+1} = 2 + \frac{1}{x_{2p}}.$$

- (f) Razonar finalmente la convergencia de la sucesión (x_n) y calcular su límite.

28. Demostrar las propiedades siguientes:

- 1) $a > 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$;
- 2) $|a| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ (discutir qué sucede si $|a| > 1$ o bien $|a| = 1$);
- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

29. Discutir la existencia y calcular, en su caso, el valor del límite, según los valores de la constante $a \in \mathbb{R}$:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n^3 + n^2}{a(n^3 - 1)} \right)^{n+1}$, c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{an + 1} \right)^n$,
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + an + 1}{n^2} \right)^{an}$, d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 2} - an \right)$.

30. Calcular los límites:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right)^n$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} \right)^n$.

31. Sea $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado $k > 0$ y de coeficientes reales positivos, esto es, $a_k > 0$ y $a_j \geq 0$, $0 \leq j \leq k-1$; calcular el límite de las sucesiones siguientes:

- a) $P(n)$, c) $\frac{\ln P(n)}{n}$, i) $\frac{P(n+1) - P(n)}{n^{k-1}}$,
- b) $P(1/n)$, f) $\sqrt[k]{P(n)}$, j) $\frac{P(1) + P(2) + \dots + P(n)}{n^{k+1}}$,
- c) $\frac{P(n+1)}{P(n)}$, g) $P(n+1) - P(n)$, k) $\frac{P(1) + P(2) + \dots + P(n)}{1^k + 2^k + \dots + n^k}$,
- d) $\frac{\ln P(n)}{\ln n}$, h) $\left(\frac{P(n+1)}{P(n)} \right)^n$.

32. Calcular el límite de las siguientes sucesiones de números reales, cuyo término n -ésimo se da en cada caso:

- a) $\frac{\operatorname{sen} n}{n}$;
- b) $\frac{6n^3 + 4n + 1}{2n}$;
- c) $\frac{n^2 - 6n - 2}{3n^2 - 9n}$;
- d) $\frac{1}{1/n^2 + 1/n} - \frac{1}{1/n^4 + 1/n}$;
- e) $\sqrt{n\sqrt{n} - \sqrt{n}}$;
- f) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n + \frac{1}{2}}$;
- g) $\frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$;
- h) $\left(\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\right)^{\frac{2n-1}{3n-1}}$;
- i) $\ln\left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n$;
- j) $\frac{5(n+1)^{n+1}}{(3n^2+1)n^{n-1}}$;
- k) $\left(\frac{n^2 + an + 1}{n^2}\right)^n$;
- l) $\frac{\ln(e^n + e^{-n})}{n}$;
- m) $\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}\right)^{\frac{n^2 + 2}{n + 1}}$;
- n) $\frac{n!}{n^n}$;
- o) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$;
- p) $\frac{a^n}{\ln n!}$;
- q) $(1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\sqrt{n}}$;
- r) $\left(\frac{n+2}{2n}\right)^{\operatorname{sen}(1/n)}$;
- s) $\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n}$;
- t) $\left(\frac{\ln na}{\ln nb}\right)^{\ln n}$;
- u) $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;
- v) $\left(\sqrt[5]{\frac{2n+3}{3n+4}}\right)^{\left(\frac{n^3+1}{n^3+n}\right)^{n^2+1}}$;
- v) $\frac{\sqrt{3n^3+2n+1} - \sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+3n} - \sqrt{n^3+n^2-3n}}$;
- y) $\frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$;
- z) $\frac{\sqrt{1/2} + \sqrt{2/3} + \sqrt{3/4} + \cdots + \sqrt{n/(n+1)}}{\sqrt{n+1}}$.

33. Calcular en cada caso los valores de las constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que se cumplan las igualdades:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - an^2}{3n^2 - 2}\right)^{1 - bn^2} = \sqrt{e}$;
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+a}{n+2}\right)^{an+b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+b}{n+2}\right)^{2n+a}$;
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(n+c)}{\ln n}\right)^{n \ln n} = 2$.

34. Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones reales tales que:

$$0 < x_1 < y_1; \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Probar que

- 1) $0 < x_n < y_n$ para todo $n \geq 1$;

- 2) la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ es monótona creciente;
- 3) la sucesión $(y_n)_{n \geq 1}$ es monótona decreciente;
- 4) para todo $n \geq 1$ se cumple: $x_1 \leq x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n \leq y_1$;
- 5) las sucesiones (x_n) , (y_n) son convergentes;
- 6) se cumple $y_n - x_n \leq \frac{y_1 - x_1}{2^n}$, para todo $n \geq 1$; deducir de aquí que ambas sucesiones tienen el mismo límite.

35. Demostrar la siguiente equivalencia entre infinitésimos $\sqrt{1+n} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

36. Teniendo en cuenta las equivalencias establecidas en el apartado 2.8, calcular los límites siguientes:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{3n}}{(n!)^3}}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 \ln(1 + \frac{1}{n^2})}{(2n^3 - 5)(1 - \cos \frac{1}{n})}.$$

37. Sean dos sucesiones (x_n) , (y_n) tales que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$. Se pide:

- 1) Probar que si (x_n) y (y_n) son infinitos equivalentes, esto es, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, entonces los infinitos $(\ln x_n)$ y $(\ln y_n)$ son también equivalentes.
- 2) Probar que el recíproco no es cierto, esto es, que si $(\ln x_n)$ y $(\ln y_n)$ son infinitos equivalentes, ello no implica que (x_n) y (y_n) deban serlo también. (Sugerencia. Estudiar el siguiente contraejemplo: ver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n^n}{\ln n!} = 1$, aplicando por ejemplo el criterio de Stolz y ver que, no obstante, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} \neq 1$).
- 3) Deducir del apartado anterior que si (x_n) y (y_n) son infinitos equivalentes, tampoco puede afirmarse que (e^{x_n}) y (e^{y_n}) deben ser necesariamente infinitos equivalentes.

38. Calcular los límites superior e inferior de las sucesiones que tienen como término n -ésimo:

$$(-1)^n, \quad \frac{(-1)^n}{n}, \quad (-1)^n + \frac{1}{n}, \quad \operatorname{sen} n.$$

39. Demostrar que si $L = \limsup a_n$, entonces se tiene que: dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, únicamente puede haber un número finito de términos de la sucesión tales que $a_n > L + \varepsilon$. Enunciar y demostrar la propiedad análoga para el límite inferior.

40. Generalícese el corolario 2.7.10, en el sentido siguiente: demostrar que si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple:

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \text{y} \quad \liminf \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Para ello, debe demostrarse que, para todo $a > \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$, se tiene $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq a$: véase en primer lugar que existe un n_0 tal que $a > \frac{a_{n+1}}{a_n}$ para todo $n > n_0$, y a continuación que $a_n \leq a_{n_0} a^{n-n_0}$; finalmente, calcúlese la raíz n -ésima y tómense límites.

2.10 GUÍA DE REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[Ba] **BARTLE, R.G. y D.R. SHERBERT.** *Introducción al Análisis Matemático de una variable.* La estructura del capítulo *Sucesiones*, es semejante a la del presente capítulo. Empieza definiendo las sucesiones numéricas, las operaciones con sucesiones, el límite de una sucesión y la cola de una sucesión. El apartado siguiente trata los teoremas sobre límites, algunos de los cuales se presentan en forma de ejercicios. Se estudian a continuación las sucesiones monótonas, las sucesiones parciales y el criterio de Cauchy; para terminar, se estudian las sucesiones propiamente divergentes, de forma muy esquemática. Contiene una colección de ejercicios, interesante y variada.

[Bu] **BURGOS, Juan de.** *Cálculo Infinitesimal de una variable.* De esta obra excelente se recomienda especialmente la lectura del capítulo 1, apartados 1.3, 1.4, y 1.6 (última parte), dedicados a las sucesiones de números reales, aun cuando el enfoque adoptado es ligeramente distinto al que hemos presentado aquí. Se recomiendan asimismo los interesantes ejercicios resueltos y propuestos.

[Di] **DIXMIER, J.** *Matemáticas Generales.* Si bien el capítulo 14 de esta obra está dedicado básicamente a los límites de funciones, los primeros apartados del mismo se dedican a las sucesiones numéricas. El tratamiento es esquemático, pero bastante completo y muy interesante.

[Or] **ORTEGA, J.M.** *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.* El capítulo II de este texto, *Límits de successions*, se corresponde básicamente con el contenido de nuestro capítulo 2, aun cuando en el capítulo I ya se han tratado las sucesiones de números racionales, el concepto de límite y algunas propiedades elementales de la convergencia. El capítulo está estructurado en cuatro apartados: sucesiones convergentes, potencias de base real positiva; infinitos e infinitésimos, sucesiones parciales y teorema de Bolzano-Weierstrass. Hay que destacar asimismo la nota histórica al final del capítulo y los interesantes ejercicios que contiene.

[Ru] **RUDIN, W.** *Principios de Análisis Matemático.* Del capítulo 3 de esta obra, *Sucesiones numéricas y series*, los tres primeros apartados se desarrollan en el marco general de un espacio métrico X ; ello comprende los conceptos básicos de sucesiones (convergencia, unicidad del límite, convergencia y acotación, etc.), las subsucesiones y sus propiedades y, por último, las sucesiones de Cauchy. Se estudian en \mathbb{R} los límites de oscilación y algunas sucesiones especiales.

[Spv] **SPIVAK, M.** *Calculus.* La estructura de esta obra es bastante diferente a la habitual y, así, las sucesiones se tratan en el capítulo 21, *Sucesiones infinitas*; también el tratamiento es diferente, puesto que previamente ya se han tratado muchas de las cuestiones relacionadas con el tema. Comienza, pues, el capítulo definiendo las sucesiones convergentes, se relaciona con las funciones y luego se definen las sucesiones monótonas y se establece el teorema de la convergencia monótona. A continuación, trata las sucesiones parciales y el teorema de Bolzano-Weierstrass. Se estudian otros aspectos relacionados en la colección, muy completa, de interesantes ejercicios que acompañan el texto.

CAPÍTULO 3

SERIES NUMÉRICAS

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo está dedicado al estudio de las series numéricas, es decir, las sucesiones obtenidas mediante adición ordenada de los términos de una sucesión dada. El capítulo se centra en el estudio de las series de números reales y, en el último apartado, se estudian las series de números complejos.

En el apartado 3.1 se definen los conceptos básicos y la terminología más utilizada habitualmente; se establece el teorema de Cauchy y se estudia la serie geométrica. En el apartado 3.2 se estudian las propiedades que resultan de la convergencia de una serie: condición necesaria, suma y producto por un escalar y las asociaciones de términos.

El apartado 3.3 está dedicado al estudio de las series de términos positivos y los criterios de convergencia específicos de dichas series. A continuación, se estudian las series alternadas, se discute su convergencia y se trata la metodología general para aproximar la suma de una serie alternada.

En el apartado 3.5 se trata la convergencia absoluta y su relación con la convergencia ordinaria, la convergencia condicional y el producto de series. Por último, el apartado 3.6 trata brevemente de las series de números complejos.

3.1 CONCEPTO DE SERIE NUMÉRICA. CONVERGENCIA.

3.1.1 Las series surgen para dar respuesta al siguiente problema: generalizar el concepto de suma a un número infinito de términos. Para empezar, se intuye que esta cuestión no es trivial, ya que con sólo las palabras anteriores se incurre en un sinsentido matemático e, incluso, filosófico, puesto que no puede definirse una operación que requiera un número infinito de procesos intermedios. Por otra parte, habrá que ver qué propiedades tiene el concepto que se quiere definir, concretamente en qué condiciones puede aplicarse la conmutatividad, la asociatividad, etc. que se aplica con facilidad en la suma ordinaria. Para ir entrando en materia, nada mejor que unos ejemplos que nos permitan ilustrar la situación.

3.1.2 EJEMPLO.

- 1) Considérese la “suma infinita”: $(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+\dots$, que en primera instancia y suponiendo que pueden aplicarse las propiedades de la suma ordinaria, podría afirmarse que vale 0, ya que $((-1)+1)+((-1)+1)+((-1)+1)+\dots=0$. Pero si se aplica la propiedad asociativa de otro modo, el resultado que se obtiene es diferente: $(-1)+(1+(-1))+(1+(-1))+(1+(-1))+\dots=-1$. Empieza a vislumbrarse la necesidad de definir con rigor esta idea intuitiva de “suma infinita”.
- 2) Considérese la “suma infinita” $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$; si se designa por A el valor de la suma y se considera que se pueden aplicar todas las manipulaciones habituales en la suma de números reales, tales como asociar o conmutar términos, entonces se cumpliría,

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ &= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots) = \frac{1}{2}A, \end{aligned}$$

con lo cual debería ser $A = 0$. Pero, por otro lado, si asociamos los términos dos a dos, observamos que se debe cumplir,

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \dots > 0.$$

Estos ejemplos ponen de manifiesto claramente la necesidad y la importancia de formalizar de manera rigurosa y precisa el concepto de “suma infinita”, así como el indudable interés de estudiar sus propiedades. Este es nuestro objetivo en este capítulo, para lo cual contaremos con una ayuda muy valiosa como es la teoría de sucesiones desarrollada en el capítulo anterior.

3.1.3 DEFINICIÓN. (*Series de números reales. Series convergentes*). Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales; por adición ordenada de sus términos, puede definirse una nueva sucesión, notada (A_n) , de la siguiente forma:

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = a_0 + a_1, \quad \dots \quad A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad \dots$$

La pareja de sucesiones $(a_n), (A_n)$ se denomina *serie asociada a la sucesión (a_n)* . Para cada $n \in \mathbb{N}$, el número real a_n se denomina *término n -ésimo* de la serie (lo cual no deja de ser un tanto chocante) y, entonces, A_n se denomina *suma parcial n -ésima* de la serie. La notación habitual para designar una

serie es $\sum_{n \geq 0} a_n$, o simplemente $\sum a_n$. En otros casos se escribe $\sum_{n \geq k} a_n$ si el conjunto de índices empieza por ese valor.

Si la sucesión de sumas parciales (A_n) es convergente, entonces se dice que la sucesión (a_n) es *sumable* y que la serie $\sum a_n$ es *convergente*. En caso contrario, se dice que la serie es *divergente*. Si $\sum a_n$ es una serie convergente, el límite de la sucesión (A_n) de sumas parciales se denomina *suma de la serie* y se escribe $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. La diferencia $R_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n - \sum_{n=0}^p a_n$, se denomina *resto de orden p* de la serie. Resulta evidente que una serie es convergente si, y sólo si, se cumple $\lim_{p \rightarrow +\infty} R_p = 0$.

3.1.4 EJEMPLO.

1) La sucesión $((-1)^n)_{n \geq 1}$ no es sumable, puesto que la sucesión de sumas parciales (A_n) es:

$$A_{2p} = 0 \quad \text{y} \quad A_{2p+1} = -1 \quad \text{para todo } p \in \mathbb{N},$$

que no es convergente; dicho de otro modo, la “suma infinita” : $(-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots$, no existe.

2) La sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n(n+1)} \right)_{n \geq 1}$ es sumable, puesto que puede escribirse

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad \text{para todo } n \geq 1$$

y, por lo tanto, la suma parcial n -ésima de la serie es:

$$A_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

cumpliéndose $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 1$, es decir, se verifica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

3.1.5 EJEMPLO. (*La serie geométrica.*) Vamos a estudiar a continuación una serie numérica muy importante, denominada *serie geométrica*, que se utilizará en algunas demostraciones posteriores. Sea x un número real cualquiera; la sucesión de potencias naturales de x es: $(1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots)$. Se denomina *serie geométrica* a la serie asociada a dicha sucesión, esto es, $\sum x^n$, cuya suma parcial n -ésima es $X_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$. Se trata ahora de estudiar la convergencia de esta serie, en función del número real x considerado. Para ello, escribamos:

$$\begin{aligned} X_n &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n \\ xX_n &= x + x^2 + \dots + x^{n+1}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene $X_n - xX_n = 1 - x^{n+1}$ es decir, $X_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, si $x \neq 1$. Con ello, puede estudiarse el carácter de la sucesión (X_n) , según el valor absoluto de x . En efecto:

- si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$, de manera que $\lim X_n = \frac{1}{1-x}$ y, por tanto, la serie geométrica es convergente;

- si $|x| > 1$, la sucesión (X_n) no es convergente, puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x^{n+1}| = \infty$;
- si $x = 1$, entonces $X_n = n$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, y su límite es $+\infty$;
- si $x = -1$, se cumple $X_{2m} = 1$ y $X_{2m+1} = -1$, para todo $m \in \mathbb{N}$, con lo que la sucesión (X_n) no es convergente.

En resumen, se ha probado que dado $x \in \mathbb{R}$, su serie geométrica asociada $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ es convergente si, y solamente si, $|x| < 1$, cumpliéndose entonces que la suma de dicha serie es $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

3.1.6 OBSERVACIÓN. Vistas las definiciones básicas respecto a las series numéricas y estudiados algunos ejemplos, surge de modo natural un objetivo inmediato: investigar qué condiciones deben cumplirse para que una serie sea convergente mediante criterios que afecten a la sucesión de partida, sin necesidad de calcular (lo cual puede ser difícil en no pocas ocasiones) la suma parcial n -ésima de la serie. Empezaremos por una caracterización muy importante de la convergencia de una serie, importancia de índole más bien teórica (esto es, muy útil para la demostración de teoremas), aún cuando su utilidad práctica para establecer el carácter de una determinada serie es un tanto escasa: se trata de la denominada *condición de Cauchy*.

3.1.7 PROPOSICIÓN. (*Condición de Cauchy*.) Una condición necesaria y suficiente para que una serie numérica $\sum a_n$ sea convergente es que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, exista un número $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > n_0 \text{ y para todo } p \geq 1.$$

Demostración:

La convergencia de una serie es, por definición, la convergencia de la sucesión de las sumas parciales, (A_n) . Recuérdese que, en \mathbb{R} , la convergencia de una sucesión equivale a su regularidad o condición de Cauchy, definida en 2.6.2. Así, el hecho de que (A_n) sea convergente equivale a que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|A_m - A_n| < \varepsilon$, para todo $m > n > n_0$. Escribiendo $m = n+p$, $p \geq 1$, se tendrá:

$$\begin{aligned} |A_m - A_n| &= |(a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) - (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)| = \\ &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}|. \end{aligned}$$

Reescribiendo la regularidad de (A_n) resulta la condición enunciada. ■

3.1.8 EJEMPLO. (*La serie armónica*.) Vamos a aplicar la proposición anterior al estudio de la denominada *serie armónica*, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, cuya divergencia ya se ha probado en 2.6.10, aun cuando no se había mencionado que se trataba de una serie. Escribiendo la condición de Cauchy para $p = n$, resulta:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

con lo que la serie es divergente, por cuanto para $0 < \varepsilon \leq 1/2$, no se cumple la condición de Cauchy, esto es, si $0 < \varepsilon \leq 1/2$, no es posible encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \right| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$ y $p \geq 1$.

3.1.9 OBSERVACIÓN. Cabe destacar por último una consecuencia importante que resulta inmediatamente de la proposición 3.1.7 y es la siguiente: si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones que difieren únicamente

en un número finito de términos, entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter, es decir, son ambas convergentes o ambas divergentes.

3.2 PROPIEDADES DE LA CONVERGENCIA.

3.2.1 En el apartado anterior se ha visto la definición de serie numérica y se ha caracterizado su convergencia con la condición de Cauchy (proposición 3.1.6). En este apartado se estudian las consecuencias más importantes que pueden deducirse de la convergencia de una serie: en primer lugar, la condición necesaria de convergencia, que hace referencia al límite de la sucesión de partida; le sigue el criterio de comparación, que establece un criterio de convergencia de una serie a partir del carácter conocido (convergente o divergente) de otra serie; a continuación se estudia la relación entre operaciones algebraicas con series y convergencia y, para terminar, se ve el concepto de asociación de series.

3.2.2 PROPOSICIÓN. (*Condición necesaria de convergencia.*) Sea $\sum a_n$ una serie numérica; una condición necesaria para que dicha serie sea convergente es que se cumpla $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, esto es, que la sucesión (a_n) sea un infinitésimo.

Demostración:

Inmediata: basta tomar $p = 1$ en la condición de Cauchy. También puede verse directamente a partir del hecho siguiente: puesto que $a_n = A_n - A_{n-1}$, se cumple entonces que $\lim a_n = \lim A_n - \lim A_{n-1} = 0$. ■

3.2.3 OBSERVACIÓN.

- La condición necesaria de convergencia que se acaba de establecer no es suficiente; en efecto, basta considerar la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$, cuya divergencia ya ha sido establecida en 2.6.10 y, no obstante, dicha serie cumple la condición necesaria de convergencia, puesto que se verifica $\lim \frac{1}{n} = 0$.
- La condición necesaria establecida en 3.2.2 se utiliza a menudo para demostrar la divergencia de una serie; así, por ejemplo, la divergencia de la serie $\sum (-1)^n$ vista en el ejemplo 3.1.4, puede establecerse ahora sin más que ver que la sucesión $((-1)^n)$ no tiene límite 0. Otro tanto puede decirse de la serie geométrica $\sum x^n$, cuya divergencia en el caso en que $|x| \geq 1$ resulta al no cumplirse la condición necesaria de convergencia establecida en la proposición anterior.

3.2.4 PROPOSICIÓN. (*Criterio general de comparación.*) Sea $\sum a_n$ una serie numérica; se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) Si $\sum c_n$ es una serie convergente y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leq c_n$ para todo $n > n_0$, entonces la serie $\sum a_n$ también es convergente.
- 2) Si $\sum d_n$ es una serie divergente y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq d_n \geq 0$ para todo $n > n_0$, entonces la serie $\sum a_n$ también es divergente.

Demostración:

- 1) La haremos aplicando la condición de Cauchy. Como que $\sum c_n$ es una serie convergente, dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_1 \geq n_0$ tal que

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p}| = c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p} < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > n_1, p \geq 1.$$

Teniendo en cuenta ahora la hipótesis, se obtiene

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p} < \varepsilon,$$

para todo $n > n_1, p \geq 1$. Así, pues, la serie $\sum a_n$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es

convergente.

- 2) Obsérvese ante todo que el enunciado puede aplicarse únicamente si $a_n \geq 0$. Para efectuar la demostración, se procederá por reducción al absurdo: si $\sum a_n$ fuera convergente, aplicando 1) lo sería también $\sum d_n$, lo cual es una contradicción con la hipótesis sobre el carácter de dicha serie. ■

3.2.5 EJEMPLO.

- 1) La serie $\sum (-1)^n \frac{\operatorname{sen} n}{3^n}$ es convergente, puesto que $\left| (-1)^n \frac{\operatorname{sen} n}{3^n} \right| \leq \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, y la serie $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ es una serie geométrica convergente.
- 2) La serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente, ya que $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} > 0$, para todo $n \geq 1$, y la serie $\sum \frac{1}{n}$ es divergente (serie armónica).

3.2.6 DEFINICIÓN. (*Operaciones algebraicas con series*). Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series numéricas, de sumas parciales n -ésimas respectivas $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ y $B_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$. Se definen las operaciones siguientes:

- 1) *Suma*. Se denomina *serie suma* de ambas a la asociada a la sucesión suma $(a_n + b_n)$, esto es, la que tiene por suma parcial n -ésima: $S_n = A_n + B_n$, $n \in \mathbb{N}$.
- 2) *Producto por un escalar*. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, es la serie asociada a la sucesión (λa_n) , es decir, la que tiene como suma parcial n -ésima: $\Lambda_n = \lambda A_n$, $n \in \mathbb{N}$.
- 3) *Producto*. Se denomina *serie producto* de las dos series dadas a la serie asociada a la sucesión (p_n) definida por:

$$p_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

esto es, la serie que tiene por suma parcial n -ésima:

$$P_n = A_n \cdot B_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=0}^j a_k b_{j-k} \right).$$

Obsérvese que el procedimiento mediante el cual se ha definido el término p_n recuerda el mecanismo de multiplicación de polinomios.

3.2.7 PROPOSICIÓN. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series convergentes de sumas respectivas A y B , y sea $\lambda \in \mathbb{R}$; entonces, las series $\sum (a_n + b_n)$ y $\sum (\lambda a_n)$ son convergentes y de sumas respectivas $A + B$ y λA .

Demostración:

Inmediata, sin más que aplicar las propiedades correspondientes vistas en el capítulo anterior a las sucesiones de sumas parciales. ■

3.2.8 OBSERVACIÓN. No se ha establecido nada en la proposición anterior en relación a la serie producto, precisamente porque esta cuestión no es tan inmediata por lo que respecta a este caso y se verá más adelante. Por otra parte, se hace notar que podría interesar conocer la convergencia de la serie $\sum (a_n b_n)$, pero su estudio no resulta tan sencillo como el visto para la serie suma, puesto que la suma parcial n -ésima de esta serie no es igual al producto de las respectivas sumas parciales n -ésimas de las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$, ya que $a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \neq (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n)$. Este tipo de series se estudian en el apartado 3.5.

3.2.9 DEFINICIÓN. (*Asociación de series*). Sea $\sum a_n$ una serie numérica y sea $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales; puede considerarse entonces la sucesión definida mediante

$$b_0 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0}, \quad b_1 = a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots + a_{n_1}, \quad \cdots \quad b_j = a_{n_{j-1}+1} + a_{n_{j-1}+2} + \cdots + a_{n_j}, \quad \cdots$$

En estas condiciones, la serie $\sum b_j$ se dice que es una *asociación* de la serie $\sum a_n$. En la proposición que sigue se estudia la relación entre la convergencia de ambas series.

3.2.10 PROPOSICIÓN. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de suma A y sea $\sum b_j$ una asociación de $\sum a_n$; se cumple entonces que $\sum b_j$ es una serie convergente y de la misma suma.

Demostración:

Las sumas parciales B_j cumplen:

$$B_j = b_0 + \cdots + b_j = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0}) + \cdots + (a_{n_{j-1}+1} + a_{n_{j-1}+2} + \cdots + a_{n_j}) = A_{n_j}$$

con lo que la sucesión (B_j) es una sucesión parcial de (A_n) . Puesto que (A_n) es convergente, todas sus parciales lo son también y al mismo límite, esto es, la serie $\sum b_j$ es convergente y de suma A . ■

3.2.11 OBSERVACIÓN.

- La proposición anterior es una generalización de la propiedad asociativa de la suma para las series. No obstante, debe tenerse muy presente que no se puede afirmar un enunciado recíproco para *disociar* una serie, es decir (manteniendo notaciones de antes): si $\sum b_j$ es una asociación convergente de $\sum a_n$, no se puede afirmar nada sobre la convergencia de $\sum a_n$. La razón es conocida: una sucesión no convergente puede tener una parcial convergente. Así, por ejemplo, la serie $\sum_{n \geq 0} a_n = \sum_{n \geq 0} 3 \cdot (-1)^n$ puede asociarse tomando la sucesión de naturales impares $n_j = (2j+1)_{j \in \mathbb{N}}$; con ello resulta $b_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$; la serie $\sum b_j$ es convergente y, sin embargo, $\sum a_n$ no lo es (no cumple la condición necesaria).
- Debe hacerse notar que no existe un resultado análogo para la propiedad conmutativa, el cual sólo se obtiene bajo ciertas restricciones; esto será estudiado en el apartado 3.5.

3.3 SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS.

3.3.1 DEFINICIÓN. (*Serie de términos positivos*). En este apartado se estudia un tipo particular y muy importante de series numéricas denominadas *de términos positivos*; cabe destacar que, para estas series numéricas, existe un gran número de criterios de convergencia específicos para las mismas.

- Una serie numérica $\sum a_n$ se dice que es una *serie de términos positivos* si los términos de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cumplen la condición: $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, la sucesión (A_n) de las sumas parciales n -ésimas también cumple $A_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Obsérvese que, en este caso, la sucesión de sumas parciales (A_n) es monótona creciente, ya que se cumple $A_n - A_{n-1} = a_n \geq 0$, es decir, $A_n \geq A_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.3.2 EJEMPLO. (*Series de Riemann o series armónicas generalizadas*). Sea α un número real positivo estricto, esto es, $\alpha > 0$; se denominan *series armónicas generalizadas o de Riemann*, las series

numéricas asociadas a la sucesión $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \geq 1}$. El estudio de la convergencia de estas series debe hacerse, lógicamente, en función de los valores de α . Así pues:

- si $\alpha = 1$, este caso ya se ha estudiado pues no es más que la serie armónica, de la cual se sabe que es divergente.
- si $0 < \alpha < 1$, el criterio de comparación permite concluir que la serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ es divergente, puesto que: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ para todo $n \geq 1$.
- si $\alpha > 1$, veamos que la serie es convergente. En efecto, las sumas parciales de esta serie son:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geq 1,$$

de modo que (H_n) es una sucesión creciente, con lo cual será suficiente demostrar que tiene una parcial convergente para poder asegurar que es convergente. Considérese, pues, la parcial dada por:

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^n)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}\right) = \\ &< 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^n)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^n)^\alpha}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^n)^{\alpha-1}} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k = \sum_{k=0}^n (2^{1-\alpha})^k. \end{aligned}$$

Al ser $\alpha > 1$, se tiene $0 \leq 2^{1-\alpha} < 1$, con lo que $(H_{2^{n+1}-1})$ está mayorada por la suma parcial n -ésima de una serie geométrica convergente y, en consecuencia, $(H_{2^{n+1}-1})$ es convergente.

A continuación se aborda el estudio de las propiedades de las series de términos positivos y se caracteriza su convergencia.

3.3.3 PROPOSICIÓN. Una condición necesaria y suficiente para que una serie de términos positivos sea convergente es que la sucesión de sumas parciales sea acotada superiormente.

Demostración:

Que la condición es necesaria es evidente, puesto que toda sucesión convergente es acotada (proposición 2.3.3). Que la condición es suficiente también es inmediato, por cuanto si la sucesión de sumas parciales es acotada superiormente, al ser monótona creciente, será convergente, en virtud del teorema de la convergencia monótona (2.4.5); además, se cumple que la suma de la serie es el supremo del conjunto de sumas parciales. ■

3.3.4 PROPOSICIÓN. (*Criterio de comparación por paso al límite.*) Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series numéricas de términos positivos, tales que existe el límite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \overline{\mathbb{R}}$; se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) si $0 < L < +\infty$, las dos series tienen el mismo carácter, esto es, son ambas convergentes o ambas divergentes;
- 2) si $L = 0$ y la serie $\sum b_n$ es convergente, entonces la serie $\sum a_n$ es también convergente;
- 3) si $L = +\infty$ y la serie $\sum b_n$ es divergente, entonces la serie $\sum a_n$ es también divergente.

Demostración:

- 1) Sea $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$; existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{L}{2}$ para todo $n > n_0$, es decir: $\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$ para todo $n > n_0$, o lo que es lo mismo

$$b_n < \frac{2}{L}a_n \quad \text{y} \quad a_n < \frac{3L}{2}b_n \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Aplicando finalmente el criterio general de comparación 3.2.4, se completa el razonamiento.

- 2) Si $L = 0$, entonces dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < 1$ para todo $n > n_0$, es decir: $a_n < b_n$ para todo $n > n_0$. Aplicando el criterio general de comparación resulta inmediatamente la conclusión.
- 3) Si $L = +\infty$, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $\left| \frac{b_n}{a_n} \right| < 1$ para todo $n > n_0$, es decir: $b_n < a_n$ para todo $n > n_0$, y se acaba como antes. ■

3.3.5 COROLARIO. Sean (a_n) y (b_n) dos infinitésimos tales que $a_n, b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$; se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) si (a_n) y (b_n) son infinitésimos equivalentes o del mismo orden (véase 2.8.13), las series numéricas $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter;
- 2) si $a_n \ll b_n$, es decir, (a_n) es un infinitésimo de orden superior a (b_n) y la serie $\sum b_n$ es convergente, entonces la serie $\sum a_n$ también es convergente;
- 3) si $b_n \ll a_n$ y la serie $\sum b_n$ es divergente, entonces la serie $\sum a_n$ es también divergente.

Demostración:

Evidente. ■

3.3.6 EJEMPLO. Vamos a probar la convergencia de la serie numérica $\sum \frac{2\sqrt{3n+1}}{\sqrt{5n^5+3n^3+1}}$ aplicando el criterio de comparación por paso al límite con una serie cuya convergencia es conocida: la serie $\sum \frac{1}{n^2}$; se obtiene

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\sqrt{3n+1}}{\sqrt{5n^5+3n^3+1}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3n^5+n^4}}{\sqrt{5n^5+3n^3+1}} = 2\sqrt{\frac{3}{5}} \neq 0,$$

con lo que la serie dada tiene el mismo carácter que la del denominador y, por tanto, es convergente. La aplicación que se acaba de hacer de la proposición 3.3.4, en la cual se compara una serie dada con una serie armónica conveniente, es muy habitual; es más, dicha comparación da lugar a un importante criterio de convergencia que se estudia a continuación.

3.3.7 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Pringsheim.*) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos; si existe un número real $\beta > 0$ tal que existe el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\beta a_n = L_P \in \overline{\mathbb{R}}$, se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) si $L_P \in \mathbb{R}$ y $L_P \neq 0$, entonces
 - si $0 < \beta \leq 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente;
 - si $\beta > 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente;
- 2) si $L_P = 0$ y $\beta > 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente.

3) si $L_P = +\infty$ y $0 < \beta \leq 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente.

Demostración:

Es inmediata, teniendo en cuenta que $n^\beta a_n = \frac{a_n}{1/n^\beta}$ y aplicando entonces el criterio de comparación por paso al límite (proposición 3.3.5) con series de Riemann, vistas en el ejemplo 3.3.2. ■

3.3.8 EJEMPLO.

1) La convergencia de la serie vista en el ejemplo 3.3.6 es ahora inmediata aplicando el criterio de Pringsheim con $\beta = 2$.

2) Considérese la serie: $\sum \frac{3\sqrt{3n-5}}{\sqrt{7n^3-9n+6}}$; si se calcula el límite,

$$L_P = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\beta \frac{3\sqrt{3n-5}}{\sqrt{7n^3-9n+6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{3} n^{\frac{1}{2}+\beta}}{\sqrt{7} n^{\frac{3}{2}}},$$

se observa que si $\beta = 1$, entonces $L_P = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \neq 0$, con lo que la serie considerada es divergente.

Nótese que $\beta = 1$ es el único valor tal que el límite anterior es finito y no nulo.

3.3.9 PROPOSICIÓN. (*Criterio de la raíz o de Cauchy.*) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos; si existe el límite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L_R \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces se cumple:

- 1) si $L_R > 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente;
- 2) si $L_R < 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente;
- 3) si $L_R = 1$, el criterio no permite afirmar nada sobre el carácter de la serie $\sum a_n$.

Demostración:

1) Supongamos que $L_R > 1$; por definición de límite de una sucesión, existe entonces un número natural n_0 tal que $\sqrt[n]{a_n} > 1$, para todo $n > n_0$; en consecuencia, debe cumplirse $a_n > 1$ para todo $n \geq n_0$, de modo que $\lim a_n \neq 0$ y no se cumple la condición necesaria de convergencia.

2) Si $L_R < 1$ existe un número real r tal que $L_R < r < 1$, con lo que existe un natural n_1 tal que $\sqrt[n]{a_n} < r$ para todo $n > n_1$, es decir, $a_n < r^n$ para todo $n \geq n_1$. Aplicando ahora el criterio general de comparación, la serie $\sum a_n$ debe ser convergente, pues, al ser $r < 1$, dicha serie está mayorada por una serie geométrica convergente.

3) Para ver que, en este caso, el criterio no decide, basta observar que, siendo la serie $\sum \frac{1}{n}$ divergente y la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente, en ambos casos se obtiene $L_R = 1$. ■

3.3.10 EJEMPLO. La serie $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ es convergente, ya que, aplicando el criterio de la raíz,

$$\text{resulta } L_R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

3.3.11 PROPOSICIÓN. (*Criterio del cociente o de D'Alembert.*) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos; si existe el límite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L_C \in \overline{\mathbb{R}}$, se cumple entonces:

- 1) si $L_C > 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente;

- 2) si $L_C < 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente;
 3) si $L_C = 1$, el criterio no permite afirmar nada sobre el carácter de la serie $\sum a_n$.

Demostración:

Inmediata, teniendo en cuenta la proposición anterior y el corolario 2.7.10, según el cual, si $L_C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, entonces se cumple también que $L_C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$. ■

3.3.12 EJEMPLO. La serie $\sum \frac{2^n}{n}$ es divergente, puesto que, en virtud del criterio del cociente, resulta

$$L_C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1.$$

Cuando el criterio del cociente no permite decidir sobre el carácter de una determinada serie y, por lo tanto, tampoco lo permite la aplicación del criterio de la raíz, puede ser útil aplicar el denominado *criterio de Raabe*, que se establece en la proposición que sigue.

3.3.13 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Raabe.*) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que existe el límite $L_r = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \in \overline{\mathbb{R}}$; entonces se cumple:

- 1) si $L_r > 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente;
 2) si $L_r < 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente.
 3) si $L_r = 1$, el criterio no permite decidir.

Demostración:

1) Supongamos que existe L_r y que $L_r > 1$; dado $k > 0$ arbitrario, existe un natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 + k \quad \text{para todo } n > n_0,$$

es decir,

$$(n-1)a_n - na_{n+1} > ka_n \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Escribamos unas cuantas de estas desigualdades:

$$\begin{aligned} n_0 a_{n_0+1} - (n_0+1)a_{n_0+2} &> ka_{n_0+1} \\ (n_0+1)a_{n_0+2} - (n_0+2)a_{n_0+3} &> ka_{n_0+2} \\ (n_0+2)a_{n_0+3} - (n_0+3)a_{n_0+4} &> ka_{n_0+3} \\ &\dots \\ (n_0+p-1)a_{n_0+p} - (n_0+p)a_{n_0+p+1} &> ka_{n_0+p}, \end{aligned}$$

donde $p \in \mathbb{N}$; sumándolas, se obtiene

$$n_0 a_{n_0+1} > n_0 a_{n_0+1} - (n_0+p)a_{n_0+p+1} > k(a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+p})$$

para todo $p \in \mathbb{N}$, es decir,

$$a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+p} < \frac{n_0}{k} a_{n_0+1} \quad \text{para todo } p \in \mathbb{N}.$$

Con ello, se ha probado que la sucesión de sumas parciales es acotada superiormente y, por lo tanto, en virtud de la proposición 3.3.3, la serie es convergente.

2) Si $L_r < 1$, existe un natural n_1 tal que $n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$ para todo $n > n_1$, es decir

$$(n-1)a_n - na_{n+1} < 0 \text{ para todo } n > n_1 \iff (n-1)a_n < na_{n+1} \text{ para todo } n > n_1,$$

esto es, la sucesión $((n-1)a_n)$ es estrictamente creciente y, en consecuencia, se tiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1)a_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$, con $x \neq 0$. Aplicando finalmente el criterio de Pringsheim, resulta la divergencia de la serie $\sum a_n$. ■

3.3.14 EJEMPLO. Es sabido que la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente; no obstante, si se aplica a dicha serie el criterio del cociente, se tiene $\lim \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = 1$, con lo cual dicho criterio no permite decidir. No obstante, si aplicamos ahora el criterio de Raabe, se obtiene

$$\lim n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim n \left(1 - \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1}\right) = \lim \frac{2n^2 + n}{n^2 + 2n + 1} = 2 > 1,$$

con lo que la serie es, efectivamente, convergente.

3.3.15 EJEMPLO. Considérese la serie de términos positivos: $\sum \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$. Aplicando el criterio del cociente, se obtiene,

$$L_C = \lim \frac{\frac{(2(n+1))!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = 1,$$

con lo que no se puede afirmar nada sobre el carácter de la serie, por aplicación del criterio del cociente ni por el criterio de la raíz. Calculemos ahora el límite,

$$L_r = \lim n \left(1 - \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}\right) = \lim \frac{n(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{1}{2} < 1;$$

por lo tanto, puede afirmarse que la serie considerada es divergente, en virtud del criterio de Raabe.

3.3.16 OBSERVACIÓN. Vale la pena destacar que se dispone ya de una buena cantidad de criterios para establecer el carácter de una serie de términos positivos y que no ha sido difícil hacerlo. No obstante, no es tan sencillo establecer una metodología para calcular la suma de una serie, aun cuando en el apartado 3.1 se ha visto una serie de la cual puede calcularse la suma cuando ésta existe: la serie geométrica. A continuación se muestran algunas técnicas para calcular la suma de series, mediante algunos ejemplos; queremos insistir, no obstante, en que obtener el valor de la suma de una serie no es, en general, una tarea fácil, y en muchas ocasiones se opta por buscar valores aproximados; concretamente, se aproxima la suma de la serie por el valor de una de sus sumas parciales.

3.3.17 EJEMPLO. Sea x un número real tal que $-1 < x < 1$. Se considera la serie numérica: $\sum_{n \geq 1} nx^n$; se propone como ejercicio probar que esta serie es convergente. Nuestro objetivo es calcular

su suma: $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$. La suma parcial n -ésima es $A_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$, con lo que $xA_n = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots + nx^{n+1}$. Restando miembro a miembro, se obtiene $(1-x)A_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - nx^{n+1}$, de donde, $A_n = \frac{1}{1-x}(x + x^2 + \cdots + x^n) - n\frac{x^{n+1}}{1-x}$. Finalmente, se obtiene el resultado que buscábamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \lim A_n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \lim \left(n \frac{x^{n+1}}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x} \frac{x}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \text{si } |x| < 1,$$

puesto que si $|x| < 1$, se cumple $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$.

3.3.18 EJEMPLO. Es inmediato ver que cualquier serie de la forma,

$$\sum \frac{1}{P(n)} \quad \text{con } P(n) = a_0 + a_1n + \cdots + a_pn^p, \quad a_p \neq 0, \quad p \geq 2,$$

es convergente sin más que aplicar el criterio de Pringsheim. Un método posible a aplicar para calcular la suma de series de este tipo es la descomposición de la fracción racional $\frac{1}{P(n)}$ en suma de fracciones simples. Veamos un caso concreto: si $P(n) = n(n+1)(n+2)$, entonces:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}.$$

Puesto que $a + b + c = 0$, al calcular las sumas parciales se van eliminando las fracciones

$$\frac{c}{(k-2)+2} + \frac{b}{(k-1)+1} + \frac{a}{k}, \quad \text{para todo } n \geq 3,$$

con lo cual, se cumple

$$A_n = \frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{n+1} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} = \frac{1}{4} - \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}.$$

Finalmente, resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{4}.$$

3.3.19 EJEMPLO. En el ejemplo 2.4.8 se ha probado que la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es convergente y su límite se ha designado por e . Se trata ahora de probar la igualdad

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

La convergencia de la serie $\sum \frac{1}{n!}$ es inmediata de establecer aplicando, por ejemplo, el criterio del cociente. Para calcular su suma, utilizaremos el desarrollo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Así, se obtiene la desigualdad,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!},$$

que permite establecer,

$$(*) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n \frac{1}{p!} = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Por otra parte, del desarrollo anterior se obtiene también la desigualdad

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right),$$

para todo m fijado, con $m \leq n$. De ella resulta

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\right) = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} = \sum_{p=0}^m \frac{1}{p!}, \end{aligned}$$

para cualquier $m \in \mathbb{N}$, de modo que se cumple:

$$(**) \quad e \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_0^m \frac{1}{p!} = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Las dos desigualdades (*) y (**) obtenidas para e permiten concluir la igualdad que se quería probar.

3.3.20 EJEMPLO. (e es irracional). Podemos abordar ahora una cuestión que había quedado pendiente en 2.4.7: la irracionalidad del número e . En efecto, puesto que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, puede calcularse el resto de orden n para un cierto $n \in \mathbb{N}$, obteniéndose:

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{k} < \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

Vamos a probar que e es irracional por reducción al absurdo, esto es, viendo que no puede ser racional. Si suponemos que fuera posible $e = \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{N}$, teniendo en cuenta la desigualdad anterior para

cada $n \in \mathbb{N}$, se cumpliría $0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!n}$; en particular, tomando $n = b$ en esta desigualdad, se

tiene que $0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^b \frac{1}{k!} < \frac{1}{b!b}$, y multiplicando ahora por $b!$, resulta

$$0 < a(b-1)! - (1 + b + b(b-1) + \cdots + 2b!) < \frac{1}{b}.$$

Pero el número $a(b-1)! - (1 + b + b(b-1) + \cdots + 2b!)$ debe ser natural y no existe ninguno que cumpla esta desigualdad. Esta contradicción implica que e no puede ser racional, esto es, se trata de un número irracional.

3.4 SERIES ALTERNADAS.

3.4.1 En este apartado se estudia un tipo de series numéricas denominadas *alternadas* y se establecen criterios de convergencia que pueden aplicarse de manera específica en este caso; cabe destacar que la condición necesaria de convergencia, unida a una nueva condición, se convierte en suficiente para la misma y que puede calcularse de manera aproximada la suma de la serie a partir de la sucesión de sumas parciales. Más adelante, al estudiar las series de potencias, se verá el interés de las series alternadas.

3.4.2 DEFINICIÓN. (*Series alternadas*). Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos; se denominan *series alternadas*, las series numéricas dadas por

$$\sum (-1)^n a_n \quad \text{y} \quad \sum (-1)^{n+1} a_n.$$

Obsérvese que los términos de una y otra series son opuestos. Son ejemplos de series alternadas

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}; \quad \sum (-1)^n \frac{2^n}{n!}; \quad \sum (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} 2^n.$$

3.4.3 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Leibniz*). Sea (a_n) una sucesión monótona decreciente y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$; en estas condiciones, las series alternadas definidas en 3.4.2, son convergentes.

Demostración:

Supongamos que la serie alternada es $\sum (-1)^n a_n$; entonces, la suma parcial n -ésima de la misma es

$$A_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pueden considerarse las sucesiones parciales de índice par, esto es, $(A_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$, y de índice impar, $(A_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$; de esta consideración y teniendo en cuenta la monotonía de la sucesión (a_n) , puede deducirse lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_{2p} - A_{2p-2} &= a_{2p} - a_{2p-1} \leq 0, & \implies & A_{2p} \leq A_{2p-2}; \\ A_{2p+1} - A_{2p-1} &= -a_{2p+1} + a_{2p} \geq 0, & \implies & A_{2p+1} \geq A_{2p-1}, \end{aligned}$$

esto es, la sucesión (A_{2p}) es monótona decreciente y la sucesión (A_{2p+1}) es monótona creciente; la situación sería, pues, la que se ilustra en la figura 3.1. En consecuencia, debe cumplirse:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (A_{2p}) = L_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad \text{y} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} (A_{2p+1}) = L_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Pero, por hipótesis, se tiene que $\lim a_n = 0$, con lo que $\lim(A_{2p+1} - A_{2p}) = \lim(a_{2p+1}) = 0$, es decir $L_1 = L_2 \in \mathbb{R}$, de modo que la serie $\sum(-1)^n a_n$ es convergente, al serlo las parciales de índices par e impar y al mismo límite.

Se obtiene el mismo resultado para la serie $\sum(-1)^{n+1} a_n$, ya que es la opuesta de la serie anterior. ■



Figura 3.1. Ilustración de la convergencia de una serie alternada

3.4.4 OBSERVACIÓN. Tal como se ha dicho en el apartado 3.3, es muy frecuente aproximar el valor de la suma de una serie convergente por una suma parcial adecuada; como es sabido, el problema en estos casos es obtener una cota del error cometido al hacer una tal aproximación. En el caso de las series alternadas, es posible obtener una acotación muy sencilla, en función del término general de la serie, tal como se expone en la proposición que sigue.

3.4.5 PROPOSICIÓN. Sea (a_n) una sucesión que cumple las condiciones del criterio de Leibniz; se cumple entonces,

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración:

Al cumplir las hipótesis del criterio de Leibniz, las series alternadas definidas en 3.4.2 son convergentes; asimismo, la demostración de dicho criterio muestra que la suma de la serie alternada $\sum(-1)^n a_n$ es mayor o igual que cualquier suma parcial de índice impar y, también, que dicha suma es menor o igual que cualquier suma parcial de índice par. En consecuencia, la suma de la serie $\sum(-1)^n a_n$ se encuentra siempre entre dos sumas parciales consecutivas cualesquiera, con lo que, empleando la misma notación de antes, se obtiene

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right| \leq |A_{n+1} - A_n| = a_{n+1}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

como se quería probar. ■

3.4.6 EJEMPLO. La acotación establecida en 3.4.5 puede ser útil para saber, dada una cierta tolerancia, qué suma parcial debe determinarse para obtener el valor de la suma de la serie con un error no superior a una cota dada. En concreto, si ε es la tolerancia o error máximo admitido, es suficiente imponer $a_{n+1} < \varepsilon$ para garantizar que se cumplirá $|A - A_n| < \varepsilon$. Veamos una muestra de ello:

consideremos la serie alternada $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$; esta serie es convergente, puesto que cumple las condiciones del criterio de Leibniz. Si se quiere aproximar su suma con un error, por ejemplo, menor que $\varepsilon = 0.05$, deberá averiguarse qué suma parcial hay que calcular para tener dicha aproximación, para lo cual, debe plantearse $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < 0.05$ lo cual será cierto si $n+1 > \frac{1}{0.05} = 20$, es decir, debe calcularse la suma parcial A_{20} . En definitiva, se obtiene $A_{20} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{20} = -0.668$, que es el valor aproximado de la suma de la serie, con un error menor que $\varepsilon = 0.05$. Hágase como ejercicio la aproximación de la suma de esta serie con un error menor que $\varepsilon = 0.01$.

3.5 CONVERGENCIA ABSOLUTA.

3.5.1 Con lo visto en los apartados anteriores, se dispone ya de una buena colección de criterios para estudiar el carácter de una serie numérica; en particular, el tipo de series para las que hay un mayor número de opciones es el de las series de términos positivos. Pues bien, si $\sum a_n$ es una serie numérica, hay una serie de términos positivos directamente relacionada con la misma de un modo natural: la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$. En este apartado trataremos de las interrelaciones entre la convergencia de ambas series, así como algunas consecuencias que se pueden deducir de dicho estudio.

3.5.2 DEFINICIÓN. (*Convergencia absoluta de una serie numérica*). Sea $\sum a_n$ una serie numérica; se dice que dicha serie *converge absolutamente*, o bien, que es *absolutamente convergente*, si la serie de términos positivos $\sum |a_n|$ es convergente. Así, por ejemplo, la serie numérica $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$ converge absolutamente, ya que la serie de valores absolutos es una serie geométrica convergente. En cambio, la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ no converge absolutamente, ya que la serie de valores absolutos es la serie armónica, la cual es divergente.

3.5.3 PROPOSICIÓN. Si una serie numérica converge absolutamente, entonces dicha serie es convergente (en otras palabras: la convergencia es condición necesaria para la convergencia absoluta).

Demostración:

Se verá aplicando la condición de Cauchy (3.1.7). Sea $\sum a_n$ una serie absolutamente convergente; teniendo en cuenta que entonces la serie $\sum |a_n|$ es convergente, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| = \||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|\| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ y para todo $p \geq 1$, con lo que la serie dada cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. ■

3.5.4 OBSERVACIÓN. (*Convergencia condicional de una serie numérica*). El recíproco de la proposición anterior no es cierto, esto es, puede que una serie sea convergente, pero no lo sea absolutamente. En efecto, ya se ha visto en 3.5.2 que la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente (puesto que es una serie alternada y cumple las condiciones del criterio de Leibniz) y, no obstante, no converge absolutamente. Una serie que cumpla estas condiciones se denomina *condicionalmente convergente*, esto es, una serie $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, cuando la serie $\sum a_n$ es convergente pero la serie $\sum |a_n|$ es divergente.

3.5.5 OBSERVACIÓN. Además de la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$, hay otras dos series de términos positivos relacionadas de modo natural con una serie numérica y que permiten caracterizar su convergencia absoluta: son las series notadas $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ y definidas mediante,

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{si } a_n \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & \text{si } a_n < 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es habitual denominar a $\sum a_n^+$ “la serie de los términos positivos” asociada a $\sum a_n$ y a $\sum a_n^-$, “la serie de los términos negativos” de $\sum a_n$. La relación entre la convergencia de estas series y la de $\sum a_n$ se establece en la proposición que sigue.

3.5.6 PROPOSICIÓN. Una condición necesaria y suficiente para que una serie $\sum a_n$ converja absolutamente es que las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ sean convergentes, cumpliéndose entonces que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-.$$

Demostración:

Supongamos que $\sum a_n$ converge absolutamente, esto es, las series $\sum |a_n|$ y $\sum a_n$ son convergentes. En virtud de la definición de a_n^+ y a_n^- , se tienen las igualdades,

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{y} \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

de donde resulta inmediatamente la convergencia de las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$, en virtud de 3.2.8.

Recíprocamente, supongamos que las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ son convergentes. Puesto que también puede escribirse $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, la convergencia de dichas series implica la de la serie $\sum |a_n|$, esto es, la convergencia absoluta de $\sum a_n$.

Por último, es evidente que $a_n = a_n^+ - a_n^-$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que se cumple $A_n = A_n^+ - A_n^-$, y de aquí resulta inmediatamente la igualdad entre las sumas respectivas de dichas series. ■

3.5.7 OBSERVACIÓN. Lo visto hasta ahora sobre convergencia absoluta de series numéricas ha puesto claramente de manifiesto el interés del estudio de dicha propiedad, dada la diversidad de criterios para analizar el carácter de las series de términos positivos. Además, la convergencia absoluta, al ser una condición más fuerte de convergencia, resulta muy potente, tal como se pondrá de manifiesto en los resultados que siguen. No obstante, antes de abordarlos veremos un tema que habíamos dejado pendiente: el de la reordenación de los términos de una serie.

3.5.8 DEFINICIÓN. (*Reordenación de series numéricas*). Sea $\sum a_n$ una serie numérica y sea σ una biyección de \mathbb{N} en \mathbb{N} ; se denomina *reordenación* de la serie dada a la serie $\sum a_{\sigma(n)}$. La proposición que sigue muestra una propiedad importante de las reordenaciones.

3.5.9 PROPOSICIÓN. (*Propiedad conmutativa de las series de términos positivos*.) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos convergente; entonces cualquier reordenación $\sum a_{\sigma(n)}$ de dicha serie es convergente y, además, tiene la misma suma.

Demostración:

Designemos por A la suma de la serie $\sum a_n$; es evidente que las sumas parciales de cualquier reordenación $\sum a_{\sigma(n)}$ están acotadas superiormente por A , puesto que todos los términos son positivos. En consecuencia, toda reordenación $\sum a_{\sigma(n)}$ es convergente y su suma B satisface $B \leq A$.

Por otra parte, tomando la aplicación inversa de σ , σ^{-1} , puede considerarse la serie $\sum a_n$ como una reordenación de $\sum a_{\sigma(n)}$, y mediante un razonamiento análogo al anterior, se concluye que $A \leq B$, lo que completa la demostración. ■

3.5.10 COROLARIO. Si una serie es absolutamente convergente, entonces todas sus reordenaciones son convergentes y tienen la misma suma.

Demostración:

Inmediata, considerando las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ y aplicando la proposición anterior. ■

3.5.11 OBSERVACIÓN. Vamos a poner de manifiesto más aún la fuerza de la convergencia absoluta de una serie. Recuérdese que en 3.5.4 se han definido las series condicionalmente convergentes, como aquellas que son convergentes pero no lo son absolutamente; pues bien, es importante saber que en este tipo de series no sólo no se cumple la propiedad establecida en el corolario anterior, sino que es posible reordenarla con el objeto de obtener una suma cualquiera, tal como se prueba a continuación.

3.5.12 PROPOSICIÓN. (*Teorema de Riemann sobre reordenaciones.*) Sea $\sum a_n$ una serie condicionalmente convergente; dado un número real cualquiera A , es posible encontrar una reordenación

$\sum a_{\sigma(n)}$ de la serie dada, tal que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = A$.

Demostración:

Hay que observar en primer lugar que por el hecho de ser $\sum a_n$ convergente y $\sum |a_n|$ divergente, las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ son divergentes. En consecuencia, si se supone $A > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$

tal que $\sum_{n=0}^{n_0} a_n^+ > A$, mientras que $\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n^+ < A$. A continuación, es posible encontrar un $m_0 \in \mathbb{N}$

tal que $\sum_{n=0}^{n_0} a_n^+ - \sum_{n=0}^{m_0} a_n^- < A$, mientras que $\sum_{n=0}^{n_0} a_n^+ - \sum_{n=0}^{m_0-1} a_n^- > A$. Procediendo de este modo reiteradamente, se obtiene una serie

$$a_0^+ + \cdots + a_{n_0}^+ - a_0^- - \cdots - a_{m_0}^- + a_{n_0+1}^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_{m_0+1}^- - \cdots - a_{m_1}^- + \cdots$$

que no es más que una reordenación de $\sum a_n$. La serie así obtenida es convergente y su suma es A , ya que está construida de manera que, si designamos por

$$A_0^+ = \sum_{n=0}^{n_0} a_n^+, \quad A_{k+1}^+ = A_k^+ + \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^+, \quad A_0^- = A_0^+ - \sum_{n=0}^{m_0} a_n^-, \quad A_{k+1}^- = A_k^- + \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^-,$$

se cumple entonces $|A_k^+ - A| \leq a_{n_k}^+$ y $|A_k^- - A| \leq a_{m_k}^-$. Puesto que la serie $\sum a_n$ es convergente, la sucesión (a_n) tiene límite 0, y lo mismo las sucesiones $(a_{n_k}^+)$ y $(a_{m_k}^-)$, con lo que la nueva serie tiene, efectivamente, suma A . ■

3.5.13 Vamos a abordar a continuación una cuestión que quedó pendiente en 3.2.6 cuando se definió el producto de dos series numéricas y, sin embargo, no se estableció criterio alguno para estudiar el carácter del producto de series; esto se trata a continuación y, como se verá, la convergencia absoluta juega un papel esencial.

3.5.14 PROPOSICIÓN. (*Teorema de Mertens.*) Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series numéricas y sea $\sum p_n$ la serie producto de las anteriores, de acuerdo con la definición dada en 3.2.6. Entonces:

- 1) Si las dos series dadas son convergentes y de sumas respectivas A y B y por lo menos una de ellas converge absolutamente, entonces la serie producto es convergente y de suma AB .
- 2) Si, además, las dos series dadas son absolutamente convergentes, la serie producto también lo es.

Demostración:

- 1) Supondremos que la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente. Si se designan por (A_n) , (B_n) y (P_n) las respectivas sucesiones de sumas parciales, se tiene por hipótesis: $\lim(A_n) = A$ y $\lim(B_n) = B$. El término general P_n de la sucesión producto, puede escribirse:

$$\begin{aligned} P_n &= p_1 + p_2 + \cdots + p_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_n + \cdots + a_n b_1) = \\ &= a_1(b_1 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_1 = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1 = \\ &= a_1(B + B_n - B) + a_2(B + B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B + B_1 - B) = \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)B + (a_1(B_n - B) + a_2(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_1 - B)) = \\ &= A_n B + (a_1(B_n - B) + a_2(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_1 - B)) = A_n B + r_n \end{aligned}$$

Se trata de probar ahora que se cumple $\lim r_n = 0$. En efecto: sea \bar{A} la suma de la serie $\sum |a_n|$, que es convergente por serlo absolutamente $\sum a_n$; puesto que la sucesión $(B_n - B)$ tiene límite 0, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un natural n_0 tal que $|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(\bar{A} + 1)}$ para todo $n > n_0$; por otra parte, para n_0 fijo, existe un n_1 tal que

$$|(B_1 - B)a_n + \cdots + (B_{n_0} - B)a_{n-n_0+1}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n > n_1,$$

ya que, por la condición necesaria de convergencia, se cumple $\lim(a_n) = 0$ y hay un número finito de términos. Ahora, se puede afirmar que, para todo $n > \max\{n_0, n_1\}$, se tiene

$$\begin{aligned} |r_n| &\leq |(B_1 - B)a_n + \cdots + (B_{n_0} - B)a_{n-n_0+1}| + |(B_{n_0+1} - B)a_{n-n_0} + \cdots + (B_n - B)a_1| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(\bar{A} + 1)}(|a_{n-n_0}| + \cdots + |a_1|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual prueba que, en efecto, $\lim r_n = 0$ y, por lo tanto, que se cumple $\lim P_n = \lim(A_n B) = AB$.

- 2) Vamos a ver que, si las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son ambas absolutamente convergentes, entonces la serie producto $\sum p_n$ es también absolutamente convergente. En efecto, es suficiente establecer que la sucesión de sumas parciales $(|p_1| + \cdots + |p_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, lo cual es inmediato:

$$\begin{aligned} |p_1| + \cdots + |p_n| &\leq |a_1||b_1| + (|a_1||b_2| + |a_2||b_1|) + \cdots + (|a_1||b_n| + \cdots + |a_n||b_1|) \leq \\ &\leq (|a_1| + \cdots + |a_n|)(|b_1| + \cdots + |b_n|), \end{aligned}$$

quedando probada la convergencia absoluta de la serie $\sum p_n$. ■

3.5.15 EJEMPLO. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dos números reales cualesquiera. Es inmediato ver que la serie numérica $\sum c_n$ con $c_n = \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!}$ es absolutamente convergente, aplicando por ejemplo el criterio de la raíz. Veamos que esta serie puede escribirse como la serie producto de otras dos series absolutamente convergentes. En efecto, se tiene:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta + \cdots + \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k + \cdots + \beta^n \right) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^{n-k} \beta^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} \frac{\beta^k}{k!} = \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\beta}{1} + \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} \frac{\beta^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha}{1} \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\beta^n}{n!}. \end{aligned}$$

Hemos probado, pues, que $\sum \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!} = \left(\sum \frac{\alpha^n}{n!}\right) \left(\sum \frac{\beta^n}{n!}\right)$ y hemos expresado la serie dada como producto de dos series absolutamente convergentes. En particular, tomando $\alpha = \beta = 1$ hemos establecido que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$.

3.5.16 EJEMPLO. (*Fórmula de sumación parcial de Abel*). En ocasiones, para estudiar la convergencia de una serie numérica $\sum \alpha_n$ es útil expresar su término general como un producto de dos factores a_n y b_n , esto es, escribir: $\alpha_n = a_n b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que no se trata de un producto de series, tal y como se ha definido en 3.2.6. Para que la serie $\sum a_n b_n$ sea convergente, debe cumplirse la condición de Cauchy, es decir, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > n_0, \text{ para todo } p \geq 1.$$

Para ver que se cumple esta condición, tiene interés escribir la expresión $a_n b_n + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}$ de manera conveniente: concretamente, si se escribe $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ y, teniendo en cuenta que $b_n = B_n - B_{n-1}$, resulta

$$\begin{aligned} & a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p} = \\ & = a_n (B_n - B_{n-1}) + a_{n+1} (B_{n+1} - B_n) + \cdots + a_{n+p} (B_{n+p} - B_{n+p-1}) = \\ & = -a_n B_{n-1} + (a_n - a_{n+1}) B_n + \cdots + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) B_{n+p-1} + a_{n+p} B_{n+p}, \end{aligned}$$

es decir,

$$a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p} = a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_{n-1} + \sum_{r=0}^{p-1} B_{n+r} (a_{n+r} - a_{n+r+1})$$

para todo $n > n_0$ y $p \geq 1$. Esta expresión se conoce como la *fórmula de sumación parcial de Abel*.

3.5.17 OBSERVACIÓN. En el ejemplo anterior se constata que falta establecer condiciones que permitan garantizar que la suma $|a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}|$ puede ser tan pequeña como se quiera y, por lo tanto, permita establecer la convergencia de la serie $\sum a_n b_n$, mediante la fórmula de Abel. Estas condiciones (criterios de Dirichlet y de Abel) se estudian en las dos proposiciones que siguen.

3.5.18 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Dirichlet.*) Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones numéricas tales que se cumplen las tres condiciones siguientes:

- 1) las sumas parciales B_n de la serie $\sum b_n$ están acotadas;
- 2) la sucesión (a_n) es monótona decreciente;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$.

En estas condiciones, la serie $\sum a_n b_n$ es convergente.

Demostración:

En virtud de 1), existe $K > 0$ tal que se cumple $|B_n| < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En virtud de 3), dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < \frac{\varepsilon}{2K}$ para todo $n > n_0$. Ahora puede ya

aplicarse la fórmula de sumación parcial de Abel para acotar la suma; en efecto:

$$\begin{aligned}
|a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}| &\leq |a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_{n-1} + \sum_{r=0}^{p-1} B_{n+r} (a_{n+r} - a_{n+r+1})| \leq \\
&\leq |a_{n+p}| |B_{n+p}| + |a_n| |B_{n-1}| + \sum_{r=0}^{p-1} |B_{n+r}| |a_{n+r} - a_{n+r+1}| \leq \\
&\leq K \left(a_{n+p} + a_n + \sum_{r=0}^{p-1} (a_{n+r} - a_{n+r+1}) \right) = K(2a_n) < 2K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $n > n_0$ y para todo $p > 0$. Obsérvese que se ha utilizado que $a_n \geq 0$ y que (a_n) es monótona decreciente. ■

3.5.19 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Abel.*) Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones numéricas tales que cumplen las siguientes propiedades:

- 1) la serie $\sum b_n$ es convergente;
- 2) la sucesión (a_n) es monótona y acotada.

En estas condiciones, la serie $\sum a_n b_n$ es convergente.

Demostración:

Que la sucesión (a_n) es acotada significa que existe $K > 0$ tal que $|a_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supondremos que, además, esta sucesión es decreciente. Por ser la serie $\sum b_n$ convergente, cumple la condición de Cauchy, esto es, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{4K}, \quad \text{para todo } n > n_0 \text{ y para todo } p \geq 1.$$

Considérese la serie $\sum_{p \geq 0} b_{n+p}$, de sumas parciales $(B_{n+p})_{p \geq 0}$. En virtud de la fórmula de sumación parcial de Abel, para todo $n > n_0$ y todo $p \geq 1$ se cumple:

$$\begin{aligned}
|a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}| &\leq |a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_{n-1} + \sum_{r=0}^{p-1} B_{n+r} (a_{n+r} - a_{n+r+1})| \leq \\
&\leq |a_{n+p}| |B_{n+p}| + |a_n| |B_{n-1}| + \sum_{r=0}^{p-1} |B_{n+r}| |a_{n+r} - a_{n+r+1}| < \\
&< \frac{\varepsilon}{4K} \left(|a_{n+p}| + |a_n| + \sum_{r=0}^{p-1} |a_{n+r} - a_{n+r+1}| \right) = \frac{\varepsilon}{4K} \left(|a_{n+p}| + |a_n| + \sum_{r=0}^{p-1} (a_{n+r} - a_{n+r+1}) \right) = \\
&= \frac{\varepsilon}{4K} (|a_{n+p}| + |a_n| + a_n - a_{n+p}) \leq \frac{\varepsilon}{4K} (|a_{n+p}| + |a_n| + |a_n| + |a_{n+p}|) \leq \frac{\varepsilon}{4K} 4K = \varepsilon,
\end{aligned}$$

con lo cual, se prueba que la serie $\sum a_n b_n$ cumple la condición de Cauchy y, por lo tanto, es convergente. ■

3.5.20 EJEMPLO. Se trata de ilustrar la aplicación del criterio de Dirichlet para estudiar la convergencia de la serie numérica: $\sum \frac{\text{sen } 2n}{n}$. Para ello, escribamos el término general de la serie

como: $\frac{\operatorname{sen} 2n}{n} = \left(\frac{1}{n}\right) (\operatorname{sen} 2n) = a_n b_n$. En estas condiciones, la sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ es monótona decreciente y de límite 0 y la sucesión $(b_n) = (\operatorname{sen} 2n)$, cumple:

$$B_n = \operatorname{sen} 2 + \operatorname{sen} 4 + \cdots + \operatorname{sen} 2n = \frac{(\operatorname{sen} n)(\operatorname{sen}(n+1))}{\operatorname{sen} 1}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esta última afirmación, puede probarse por inducción; en efecto: el caso $n = 1$ es trivial; supuesto cierto para un n cualquiera, se ha de comprobar para $n + 1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2n+2) &= 2 \operatorname{sen}(n+1) \cos(n+1) = \frac{2 \operatorname{sen}(n+1) \cos(n+1) \operatorname{sen} 1}{\operatorname{sen} 1} = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}(n+1) \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(n+2) - \operatorname{sen} n)}{\operatorname{sen} 1} = \frac{\operatorname{sen}(n+1) \operatorname{sen}(n+2) - \operatorname{sen}(n+1) \operatorname{sen} n}{\operatorname{sen} 1}, \end{aligned}$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2 + \operatorname{sen} 4 + \cdots + \operatorname{sen} 2n + \operatorname{sen}(2n+2) &= \\ &= \frac{(\operatorname{sen} n)(\operatorname{sen}(n+1))}{\operatorname{sen} 1} + \frac{\operatorname{sen}(n+1) \operatorname{sen}(n+2) - \operatorname{sen}(n+1) \operatorname{sen} n}{\operatorname{sen} 1} = \frac{\operatorname{sen}(n+1) \operatorname{sen}(n+2)}{\operatorname{sen} 1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, puede afirmarse que $|B_n| = |\operatorname{sen} 2 + \cdots + \operatorname{sen} 2n| \leq \frac{1}{\operatorname{sen} 1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, las sumas parciales B_n están acotadas. En definitiva, se ha visto que se cumplen las tres hipótesis del criterio de Dirichlet (3.5.18), con lo cual, en virtud de dicho criterio, puede afirmarse que la serie numérica considerada es convergente.

3.5.21 EJEMPLO. Para ver una aplicación del criterio de Abel, vamos a probar que la serie $\sum \frac{1}{n 3^n}$ es convergente. En efecto, si se escribe $\frac{1}{n 3^n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = a_n b_n$, la sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ es monótona y convergente (y por tanto, acotada) y la serie $\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$, es una serie geométrica convergente. Así pues, la serie considerada es convergente.

3.6 SERIES DE NÚMEROS COMPLEJOS.

3.6.1 DEFINICIÓN. (*Series complejas*). Sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos; de forma análoga al caso en que la sucesión es real, puede definirse una nueva sucesión $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de término n -ésimo definido por,

$$Z_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

El par de sucesiones $(z_n), (Z_n)$ se denomina serie asociada a la sucesión (z_n) y se designa por $\sum_{n \geq 0} z_n$ o bien $\sum z_n$; el número complejo z_n se denomina término n -ésimo de la serie y Z_n , suma parcial n -ésima.

El límite de la sucesión (Z_n) , si existe, se denomina suma de la serie y se escribe $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$. De forma similar al caso e las sucesiones complejas, puede relacionarse fácilmente una serie compleja con dos series reales, puesto que si $z_n = a_n + b_n i, n \in \mathbb{N}$, entonces la suma parcial n -ésima Z_n vale,

$$Z_n = (z_0 + z_1 + \cdots + z_n) = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + (b_0 + b_1 + \cdots + b_n)i = A_n + B_n i$$

y, en virtud de 2.2.4, la serie compleja $\sum z_n$ es convergente si, y solamente si, lo son las series reales $\sum a_n$ y $\sum b_n$, cumpliéndose además la igualdad:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) i$$

3.6.2 El concepto de convergencia absoluta es asimismo válido en el caso de las series de números complejos: se dice que la serie $\sum z_n$ *converge absolutamente o que es absolutamente convergente*, si la serie de módulos $\sum |z_n|$, que es real y de términos positivos, es convergente. La convergencia absoluta de la serie compleja $\sum z_n$ puede relacionarse fácilmente con la de las series reales $\sum a_n$ y $\sum b_n$, tal y como se ve a continuación.

3.6.3 PROPOSICIÓN. Una condición necesaria y suficiente para que una serie compleja $\sum z_n = \sum (a_n + b_n i)$ sea absolutamente convergente es que las series reales $\sum a_n$ y $\sum b_n$ sean absolutamente convergentes.

Demostración:

La condición es necesaria, puesto que $a_n = \Re z_n$ y $b_n = \Im z_n$ y por 1.6.13 se sabe que se cumplen las desigualdades: $|a_n| \leq |z_n|$ y $|b_n| \leq |z_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$; en consecuencia, si la serie $\sum |z_n|$ es convergente, aplicando el criterio de comparación 3.2.4, resulta la convergencia de las series $\sum |a_n|$ y $\sum |b_n|$.

El recíproco es inmediato, sin más que tener en cuenta la acotación $|z_n| = |a_n + b_n i| \leq |a_n| + |b_n|$ y aplicando nuevamente el criterio de comparación. ■

3.6.4 COROLARIO. Si una serie de números complejos converge absolutamente, entonces es convergente.

Demostración:

Inmediata. ■

3.6.5 EJEMPLO. Teniendo en cuenta 3.6.3 y 3.6.4, el estudio de la convergencia de una serie compleja puede abordarse de dos formas diferentes: la primera, a partir de las series reales correspondientes a las partes real e imaginaria del término n -ésimo de la serie; la segunda, a partir de la convergencia absoluta, que resulta especialmente indicada si es difícil obtener las partes real e imaginaria del término n -ésimo de la serie, tal como se ilustra en los ejemplos que siguen.

1) Considérese la serie compleja $\sum \frac{1+2i}{2^n}$. El término n -ésimo de la serie es:

$$z_n = a_n + b_n i = \frac{1}{2^n} + \frac{2}{2^n} i = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ello permite afirmar que la serie considerada es convergente, ya que las series reales asociadas son dos series geométricas convergentes. También puede obtenerse en este caso la suma de la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2i}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2i \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} 2i = 2 + 4i$$

2) Para estudiar la convergencia de la serie compleja dada por $\sum \frac{(1+i)^n}{2^n}$, es mucho mejor probar su convergencia absoluta que aplicar el método anterior; en efecto, se cumple

$$\left| \frac{(1+i)^n}{2^n} \right| = \left| \frac{\sqrt{1+1}}{2^n} \right|^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n,$$

con lo que aplicando ahora el criterio de la raíz a esta serie de términos positivos, se obtiene

$$L_R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right)^{1/n} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

lo cual permite concluir que la serie compleja es absolutamente convergente y, por lo tanto, que es convergente.

3.7 EJERCICIOS.

1. Aplicando la condición necesaria de convergencia, o bien, el criterio de comparación, estudiar el carácter de las series numéricas siguientes:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}; & \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{10n+1}; & \text{c)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}; & \text{d)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n - n}; \\ \text{e)} \sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{2n+1}; & \text{f)} \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n^2+1}; & \text{g)} \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}; & \text{h)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1}; \end{array}$$

2. Sea $R(x)$ una función racional, es decir, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n \geq 1} R(n)$ según los grados de los polinomios P y Q , utilizando los resultados conocidos sobre la serie armónica.

3. Discutir, según el valor de $a \in \mathbb{R}$, la convergencia de la serie numérica: $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$.

4. Sea $\sum_{n \geq 1} a_n$ una serie numérica; se dice que dicha serie es *telescópica* si existe una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que $a_n = x_n - x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

a) demostrar que la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge si, y solamente si, la sucesión (x_n) converge;

b) demostrar que si $\sum a_n$ es convergente, se cumple: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = x_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

c) utilizando los apartados anteriores, probar que se cumple:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (1+n) \right)}{n (\ln n) \ln (n+1)^{n+1}} = \frac{1}{2 \ln 2}.$$

5. Estudiar la convergencia y calcular la suma, en su caso, de las series numéricas:

$$\text{a)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \quad \text{b)} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

6. Discutir el carácter de las siguientes series numéricas:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}; & \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1}; & \text{c)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n - n}; & \text{d)} \sum_{n \geq 0} (-1)^n; \\ \text{e)} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}; & \text{f)} \sum_{n \geq 1} n e^{-n^2}; & \text{g)} \sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{2^n}; & \text{h)} \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^n}; \\ \text{i)} \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}; & \text{j)} \sum_{n \geq 1} \frac{2+(-1)^n}{2^n}; & \text{k)} \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; & \text{l)} \sum_{n \geq 1} e^{-n^2}; \end{array}$$

7. Discutir el carácter de las siguientes series numéricas:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(n+2)!}; & \text{b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; & \text{c)} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}; \\ \text{d)} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}; & \text{e)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}; & \text{f)} \sum_{n \geq 1} \frac{2n-1}{2^n}; \\ \text{g)} \sum_{n \geq 1} \frac{3^n n!}{n^n}; & \text{h)} \sum_{n \geq 2} \frac{(1000)^n}{n!}; & \text{i)} \sum_{n \geq 1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}; \end{array}$$

8. Demostrar la convergencia de las series siguientes, y calcular su suma:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}; & \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; & \text{c)} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1}; & \text{d)} \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}; \\ \text{e)} \sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}; & \text{f)} \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}; & \text{g)} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}; & \text{h)} \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{2n^2(n-1)(n+1)}; \\ \text{i)} \sum_{n \geq 1} \frac{2}{3^{n-1}}; & \text{j)} \sum_{n \geq 1} \frac{2^n+3^n}{6^n}; & \text{k)} \sum_{n \geq 1} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}; & \text{l)} \sum_{n \geq 1} \frac{e^n+\pi^n}{(e+\pi)^n}. \end{array}$$

9. Encontrar una cota del error que se comete al aproximar $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ por la suma de los N primeros términos. Calcúlese, en particular, esta cota cuando $N = 10$. Determinar cuantos términos deben sumarse para obtener una aproximación con un error menor que 10^{-10} .

10. Determinar el valor de $a, b, c \in \mathbb{R}$, de modo que para todo $n \geq 3$, se cumpla:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{a}{(n-1)!} + \frac{b}{(n-2)!} + \frac{c}{(n-3)!},$$

y calcular la suma de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{n!}$ sabiendo que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

11. Sabiendo que: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ y que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, calcular la suma de las series siguientes:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)^2}; \quad \text{c) } \sum_{n \geq 2} \frac{n+2}{n^2(n^2-1)}; \quad \text{d) } \sum_{n \geq 1} \frac{n^2+n+1}{n!}.$$

12. Sea $\sum a_n$ una serie numérica tal que la sucesión (a_n) es monótona decreciente. Probar que, si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces se cumple $\lim na_n = 0$. Dar un contraejemplo que ponga de manifiesto que el recíproco no es cierto.

13. Sea $\sum u_n$ una serie de términos positivos divergente. Demostrar que la serie $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ es también divergente.

14. Dada una serie de números reales positivos, $\sum_{n \geq 1} x_n$, se define una nueva serie, $\sum_{n \geq 1} y_n$, mediante:

$$y_n = \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

Pruébese que ambas series tienen el mismo carácter.

15. Sea (x_n) una sucesión decreciente de números reales positivos. Probar que una condición necesaria y suficiente para que la serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ sea convergente es que la serie $\sum_{n \geq 1} 2^n x_{2^n}$ sea convergente. Esta propiedad se conoce como *criterio de condensación de Cauchy*. Aplíquese dicha propiedad para estudiar el comportamiento de las series que tienen por término general:

$$\text{a) } x_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}, \quad \text{b) } y_n = \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^\alpha},$$

donde α es un número real arbitrario.

16. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y supóngase que existe el límite,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 1/a_n}{\ln n}, \quad (L \in \overline{\mathbb{R}}).$$

Probar que:

- a) si $L > 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente;
- b) si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente;
- c) estudiar el caso $L = 1$.

17. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y sea (A_n) la sucesión de sumas parciales correspondiente. Entonces,

- a) probar que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{A_n A_{n-1}}$ es convergente y calcular su suma;

b) aplicarlo al cálculo de la suma: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

18. Sea $\sum_{n \geq 1} a_n$ una serie de términos positivos convergente. Se pide:

a) probar que se cumple: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$;

b) si $u_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$, $n \geq 1$, probar que la serie $\sum u_n$ es convergente;

c) se cumple la igualdad: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

19. Para cada número natural p , se define el número real $a_n^{(p)}$ mediante $a_n^{(p)} = \frac{n^p}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Entonces,

1) probar que la serie $\sum_{n \geq 1} a_n^{(p)}$ es convergente, cualquiera que sea $p \in \mathbb{N}$;

2) si se designa mediante $S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, encontrar una relación de recurrencia que permita el cálculo de S_p , para cualquier $p \geq 1$, sabiendo que $S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

20. Razonar si son ciertas o no cada una de las implicaciones que siguen, dando un contraejemplo en el caso en que sea falsa la afirmación:

a) si una serie $\sum a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum \frac{1}{a_n}$ es divergente;

b) si una serie $\sum a_n$ es tal que $\sum a_n^2$ es convergente, entonces la serie $\sum |a_n|$ es convergente;

c) si una serie de términos positivos $\sum a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ es convergente.

21. Discutir el carácter (convergente o divergente) de las series siguientes; en caso de convergencia, establézcase si dicha convergencia es absoluta o condicional:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}; & \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}; & \text{c)} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}; \\ \text{d)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}; & \text{e)} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2}; & \text{f)} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n^{37}}{(n+1)!}. \end{array}$$

22. Demostrar que la serie $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$ es convergente. Estimar el error que se comete al aproximar la suma de la serie por la suma parcial S_9 . Determinar qué suma parcial debe calcularse con el objetivo de asegurar un error menor que 10^{-3} .

23. Dadas las series que siguen, determinar en cada caso cuantos términos deben sumarse con el objeto de obtener el valor de su suma con un error menor que 10^{-6} :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}; \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^2}; \quad \text{d) } \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

24. Calcular, con un error menor que una milésima, la suma de las series siguientes:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

25. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las series siguientes:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{\text{sen}(1/n)}{n}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{(1/2) + (-1)^{n+1}(3/2)}{E((n+1)/2)}; \quad \text{c) } \sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)(\ln \ln n)}; \quad \text{d) } \sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)(\ln \ln n)^2}.$$

(En b), E indica la “parte entera”).

26. a) Demostrar que si las series $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ y $\sum_{n \geq 1} b_n^2$ son convergentes, entonces la serie $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ es absolutamente convergente.

b) Haciendo uso del apartado anterior, demostrar que si la serie $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ converge, entonces la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$$

también es convergente.

27. Si $(a_n)_{n \geq 0}$ es una progresión aritmética de diferencia d (esto es, $a_n = a_0 + nd, n \in \mathbb{N}$) y $(b_n)_{n \geq 0}$ una progresión geométrica de razón $r < 1$ (es decir, $b_n = b_0 r^n, n \in \mathbb{N}$), pruébese que la serie $\sum_{n \geq 0} a_n^k b_n$ es convergente para cualquier entero positivo k .

28. Demostrar que si la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es absolutamente convergente y (b_n) es una sucesión acotada, entonces la serie $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ converge absolutamente.

29. Demostrar que si $\sum_{n \geq 1} a_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2}{1 + a_n^2}$ es también absolutamente convergente. Aplíquese dicho resultado para demostrar que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{sen}^2 n}{n^4 + \text{sen}^2 n}$ es convergente.

30. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las series complejas siguientes:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{(\cos \theta + i \text{sen} \theta)^n}{n^2}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+1} + i \frac{n^2}{2^n(n+2)^2} \right); \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{n} + i \frac{1}{n!} \right).$$

31. De las series que se dan a continuación estudiar su convergencia y, en caso afirmativo, calcular su suma con un error menor que 10^{-3} :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{3}{n!}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n^4+1}; \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} 2ne^{-n}; \quad \text{d) } \sum_{n \geq 2} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^4}.$$

32. Se considera la gráfica de la función $f(x) = 2^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Tomando como base las ordenadas de dicha gráfica en los puntos de abscisa $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ se construyen cuadrados. Calcular la suma de las áreas de dichos cuadrados, probando que es finita.

33. Calcular la suma de las áreas de los rectángulos R_0, R_1, R_2, \dots , donde R_0 es el rectángulo de lados 1 y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y R_n es el rectángulo que se obtiene al suprimir del rectángulo R_{n-1} el cuadrado de lado menor de dicho rectángulo.

34. Sea un cuadrado de lado L ; uniendo los puntos medios de dos lados consecutivos, se obtiene otro cuadrado. Si se repite indefinidamente el proceso, discutir si es finita o no la suma de las áreas de los cuadrados así obtenidos y calcularla, caso de ser finita.

35. Sea un triángulo equilátero de lado L ; uniendo los puntos medios de sus lados, se obtiene otro triángulo equilátero. Si se repite indefinidamente el proceso, discutir si es finita o no la suma de las áreas de los triángulos así obtenidos y calcular dicha suma, caso de ser finita.

36. Se considera una circunferencia de radio R ; en ella se inscribe un cuadrado, en éste una circunferencia, en ésta un cuadrado, y así sucesivamente. Estudiar si es finita la suma de las áreas de los círculos y de los cuadrados, respectivamente, así construidos. Caso de serlo, calcular dicha suma.

37. Se lanza una bola elástica desde el nivel del suelo, con un ángulo de tiro de 60° respecto a la vertical y con una velocidad inicial de 10 m/s. Las condiciones de su movimiento son tales que, en cada contacto con el suelo, la bola pierde el 10% de su velocidad. Calcular la distancia que recorrerá la bola. (Nota: tómese el valor de la aceleración de la gravedad, $g = 10 \text{ m/s}^2$).

3.8 GUÍA DE REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

[Ap] **APOSTOL, T.M.** *Análisis Matemático*.

Aun cuando el orden en la presentación del tema no es exactamente el mismo que se ha seguido en este capítulo, se trata de un excelente texto para consulta y/o ampliación de conocimientos. El capítulo 8 de la obra (*“Series infinitas y productos infinitos”*) incluye, además de lo que se ha expuesto aquí, nuevos aspectos referidos a series de números complejos, un breve tratamiento de las series parciales, el estudio de la convergencia de las series dobles y las reiteradas, y también una introducción a la teoría de los productos infinitos.

[Di] **DIXMIER, J.** *Matemáticas Generales*.

Este texto trata conjuntamente las series numéricas y las series de funciones en el capítulo 39. Comienza por los conceptos generales y las operaciones elementales con series; a continuación se tratan las series

de términos positivos y la convergencia absoluta, la cual se estudia con cierta extensión. Se dedica un apartado al estudio del producto de series y, finalmente, se estudian las series alternadas. Los ejercicios que propone son interesantes y de nivel alto.

[Gu] GUZMAN, M. DE y B. RUBIO *Análisis Matemático*.

Esta obra está estructurada de una forma un tanto atípica, pero, no obstante, su lectura es sin duda una actividad que puede resultar muy útil al estudiante. El capítulo 2 trata las series numéricas, junto con las sucesiones; se establecen las definiciones básicas y algunos ejemplos interesantes. El capítulo 3 dedica un apartado a las series convergentes, especialmente las de términos positivos. El capítulo 4 trata algunos métodos de sumación y la fórmula de sumación de Abel. Los ejercicios propuestos están muy cuidadosamente seleccionados.

[Li] LINÉS, E. *Principios de Análisis Matemático*.

Las series de números reales se abordan en los capítulos 9 (“Series numéricas”) y 10 (“Convergencia absoluta y producto de series”). Como es norma en este autor, el tratamiento es riguroso, detallado y completo. La presentación está estructurada de forma semejante a la que hemos llevado a cabo en este capítulo y, además, la situación relativa del tema dentro del conjunto de la obra es la misma.

[Or] ORTEGA, J.M. *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica*.

El capítulo IX (“Series numéricas”) tiene un esquema parecido al que se ha desarrollado en este capítulo. Sin embargo, su inserción dentro del conjunto del texto es distinto y, en consecuencia, presenta ciertas diferencias. Así, por ejemplo, expone el criterio que relaciona la convergencia de ciertas series con la convergencia de integrales impropias, que aquí no veremos hasta el capítulo 11. Son muy interesantes los apéndices relativos a métodos de sumación y de productos infinitos. Destacan asimismo los ejercicios propuestos, muy bien seleccionados y que complementan perfectamente el desarrollo de la exposición.

[Spv] SPIVAK, M. *Calculus*.

Tal como es habitual en este autor, el tratamiento de las series numéricas, que se lleva a cabo en el capítulo 22, es muy claro, aún cuando no es exhaustivo en relación a lo visto aquí. Se recomienda su lectura al estudiante, ya que constituye un buen complemento a lo que se ha visto en este capítulo, respecto del cual presenta algunas diferencias, debidas esencialmente a las relaciones que establece entre las series numéricas y las funciones, las cuales han sido estudiadas con anterioridad.

CAPÍTULO 4

FUNCIONES. LÍMITES DE FUNCIONES

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo trata diversos conceptos que son elementos fundamentales de trabajo para el Cálculo diferencial y el Cálculo integral, que se verán posteriormente; se trata concretamente de las funciones y de los límites de funciones.

En el apartado 4.1 se definen las funciones, los elementos que las caracterizan y las operaciones elementales entre funciones. El apartado 4.2 trata del límite de una función en un punto, las propiedades y la metodología de su cálculo; también se definen los límites laterales en un punto y se estudian sus propiedades.

En el apartado 4.3 se desarrolla la extensión del concepto de límite de una función en un punto en dos sentidos: el límite infinito y el límite en el infinito, y se estudian las formas indeterminadas o indeterminaciones. El apartado 4.4 trata de la equivalencia local de dos funciones, las propiedades de la equivalencia local y su aplicación al cálculo de límites; se estudian también los infinitésimos y los infinitos.

El apartado 4.5 se dedica a las sucesiones y las series de funciones, la convergencia y las propiedades de esta convergencia. Ello permitirá (apartado 4.6) el estudio de las series de potencias o series enteras funcionales, de gran importancia en Análisis Matemático; se estudia especialmente la convergencia y la caracterización del dominio de convergencia de estas series.

4.1 CONCEPTO DE FUNCIÓN. EJEMPLOS.

4.1.1 DEFINICIÓN.

- Se denomina *función o aplicación* a cualquier terna (A, B, f) formada por dos conjuntos no vacíos A y B y una correspondencia f entre ambos, tal que para cada elemento $x \in A$ existe un único elemento asignado $f(x) \in B$. El conjunto A se denomina *dominio o campo de existencia* de la función, notándose $A = \text{Dom} f$; B se denomina *conjunto de llegada* de la función. Si (A, B, f) es una función, se dice habitualmente que f es una *función de A en B* , notándose $f: A \rightarrow B$ o bien $A \xrightarrow{f} B$, notación que presenta algunas ventajas que se verán más adelante.
- Si $A \subset \mathbb{R}$, la función se dice que es *de variable real o de una variable*; si $A \subset \mathbb{C}$, la función se denomina *de variable compleja*, o bien, *de dos variables* (reales). Si $B \subset \mathbb{R}$, la función se dice que es *real*, y si $B \subset \mathbb{C}$, se denomina *compleja*. Nuestro objetivo básico en este texto es estudiar las funciones reales de variable real, esto es, $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y, en particular, el caso $A = [a, b]$; cuando una función no sea de este tipo lo indicaremos expresamente.
- Otros elementos destacables en una función $f: A \rightarrow B$ son los siguientes:
 - El subconjunto $f(A) = \{y \in B \mid y = f(x), x \in A\}$, denominado *recorrido o imagen* de f , designado también mediante $\text{Im} f$.
 - Para funciones reales de una variable, resulta de interés el subconjunto $G_f = \{(t, f(t)) \mid t \in A\} \subset A \times B$, denominado *gráfica de f* ; dibujando este conjunto, pueden ilustrarse algunas propiedades de la función.
 - Si $y \in B$, se denomina *antiimagen o imagen inversa de y* el subconjunto de A dado por $f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$; dicho conjunto puede ser vacío (si $y \notin f(A)$), o bien constar de uno o varios elementos. Nótese que si en un solo caso, dado $y \in f(A)$, el conjunto $f^{-1}(y)$ consta más de un elemento, la correspondencia $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ no es entonces una función.
 - Si $B' \subset B$, se denomina *antiimagen o imagen inversa de B'* el subconjunto de A dado por $f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$; dicho conjunto puede ser vacío.
 - Si $X \subset A$, se denomina *restricción de f a X* la aplicación $f|_X: X \rightarrow B$ definida por $f|_X(t) = f(t)$.
- Se designarán $\mathcal{F}(A; \mathbb{R})$ y $\mathcal{F}(A; \mathbb{C})$, respectivamente, los conjuntos de todas las funciones reales y las funciones complejas tales que su dominio es o contiene al conjunto A .

4.1.2 OBSERVACIÓN.

- Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, entonces para cada $x \in A$ el elemento $f(x)$ es un número complejo que puede escribirse $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, es decir, toda función compleja de variable real puede definirse con un par ordenado de funciones reales de una variable.
- Si $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces para cada $z = (x, y) \in A$ su imagen $f(z) = f(x, y) \in f(A)$ depende de la parte real y de la parte imaginaria de z . Para cada $(a, b) \in A$, se pueden definir dos funciones reales de una variable notadas $f(a, \cdot)$ y $f(\cdot, b)$, cuyo interés se verá posteriormente, del modo siguiente:

$$f(a, \cdot)(y) = f(a, y), \quad y \in \{y \in \mathbb{R} \mid (a, y) \in A\} \quad \text{y} \quad f(\cdot, b)(x) = f(x, b), \quad x \in \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in A\}.$$

Así, por ejemplo, si f es la función definida por $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$, de dominio el subconjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid |(x, y)| \leq 1\}$, y se toma el punto $(0, 1/2) \in A$, se pueden considerar las funciones $f(0, \cdot)$ y $f(\cdot, 1/2)$ que estarán definidas mediante

$$f(0, \cdot)(y) = \sqrt{1 - y^2} \quad y \in [-1, 1] \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f(\cdot, 1/2)(x) = \sqrt{\frac{3}{4} - x^2} \quad x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \subset \mathbb{R}.$$

- Conviene recordar que, a partir de ahora, se tratarán básicamente funciones reales de una variable y que todas las definiciones que tengan sentido con operaciones en \mathbb{C} pueden extenderse de modo natural.

4.1.3 OBSERVACIÓN. El modo más habitual de dar una función es mediante una expresión analítica de las operaciones con el elemento del dominio que permiten obtener el elemento del conjunto imagen, así como una especificación acerca del dominio de la función. Concretamente:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2t+1}{t^2-1}, \quad A = \{t \in \mathbb{R} / |t| \neq 1\}; \\ g(x, y) &= \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{C} / |(x, y)| \leq 1\}; \\ \varphi(x) &= (x, x^2), \quad A = [-2, 2]; \\ \psi(z) &= z^2 + i, \quad A = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}, \end{aligned}$$

son ejemplos de funciones definidas en la forma en que se hace habitualmente.

Por otra parte, cuando se habla de determinar el dominio de una función dada mediante una cierta expresión analítica, se trata de encontrar el mayor conjunto para el cual dicha expresión tiene sentido; si se limita ese conjunto, se obtiene entonces una restricción de la función dada inicialmente.

4.1.4 EJEMPLO. Vamos a estudiar a continuación unas cuantas funciones, que aparecerán a menudo a lo largo del texto y que, de paso, nos van a permitir recapitular los conceptos expuestos hasta ahora. Concretamente, se tratará de definir las, caracterizar su dominio y recorrido y en algunos casos, su gráfica.

1) La función coordenada de \mathbb{R} . Se denomina *función coordenada de \mathbb{R}* a la aplicación idéntica en \mathbb{R} , es decir, la función real de variable real notada $I_{\mathbb{R}}$ y definida en \mathbb{R} mediante,

$$I_{\mathbb{R}}(a) = a \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

El recorrido de esta función es también \mathbb{R} ; su gráfica es una recta que forma un ángulo de $\pi/4$ con el semieje positivo de abscisas (véase la figura 4.1(a)). Las notaciones habituales para designar esta función son x, t .

2) Las funciones coordenadas de \mathbb{C} . Se denominan *funciones coordenadas de \mathbb{C}* , las funciones reales de variable compleja notadas x_1, x_2 y definidas en \mathbb{C} por:

$$x_1(z) = \Re z, \quad x_2(z) = \Im z, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

El recorrido de estas funciones es \mathbb{R} . Habitualmente, se indican también por x, y , respectivamente.

3) Funciones constantes. Si λ es un número real cualquiera, puede considerarse la función real de variable real, que se designa igualmente por λ , definida en \mathbb{R} mediante,

$$\lambda(t) = \lambda, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

El recorrido de una función constante es el conjunto unitario $\{\lambda\}$ y su gráfica es una recta horizontal, como la de la figura 4.1(b). Se definen análogamente las funciones constantes en el caso en el que $\lambda \in \mathbb{C}$, que en este caso son complejas y de variable compleja.

4) La función signo. Se define la función signo, notada sgn , como la función real de variable real dada por:

$$\begin{cases} \text{sgn}(t) = 1, & \text{si } t > 0, \\ \text{sgn}(t) = -1, & \text{si } t < 0, \\ \text{sgn}(0) = 0. \end{cases}$$

y cuyo dominio es \mathbb{R} ; su recorrido es el conjunto $\{0, -1, 1\}$. La gráfica de esta función está formada por dos semirectas horizontales y un punto aislado (véase la figura 4.1(c)).

5) La función *salto unitario en un punto*. Si a es un número real cualquiera, se define la función salto unitario en el punto a , notada u_a , como la función real de variable real, definida en \mathbb{R} mediante,

$$\begin{cases} u_a(x) = 1, & \text{si } x \geq a, \\ u_a(x) = 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

El recorrido de esta función es el conjunto $\{0, 1\}$ y su gráfica está formada por dos semirectas horizontales (véase la figura 4.1(d)).

6) La función *parte entera*. Se denomina *parte entera* y se designa E , la función real de una variable de dominio \mathbb{R} y definida por

$$E(x) = m, \quad \text{si } x \in [m, m + 1[\text{ para todo } m \in \mathbb{Z}.$$

El recorrido de esta función es \mathbb{Z} ; su gráfica es la representada en la figura 4.1(e).

7) *Función característica* de un conjunto. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} o \mathbb{C} ; se define la *función característica* de A , notada χ_A , mediante,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

El campo de existencia de esta función es \mathbb{R} o \mathbb{C} , según el caso, y su recorrido es el conjunto $\{0, 1\}$. En la figura 4.1(f) se ha representado la función característica de un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

4.1.5 DEFINICIÓN. (*Operaciones algebraicas con funciones*). Dado que las funciones operan con elementos de conjuntos (dominio e imagen), resulta natural plantear que, teniendo en cuenta las operaciones definidas en dichos conjuntos, puedan definirse operaciones con funciones, es decir, la construcción de nuevas funciones a partir de unas funciones iniciales. En el caso de \mathbb{R} y de \mathbb{C} se tienen definidas una suma y un producto, con lo cual esas serán las operaciones que intervendrán en las operaciones entre funciones.

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos y no disjuntos de \mathbb{R} o de \mathbb{C} ; sean f y g dos funciones definidas, respectivamente, en los conjuntos A y B . Pueden definirse las siguientes operaciones algebraicas con funciones.

- *Suma*. Se denomina función *suma de f y g* , la función definida en el conjunto $A \cap B$ mediante,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in A \cap B.$$

Obsérvese que esta definición puede extenderse a un número finito de funciones:

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_p)(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_p(x), \quad x \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_p,$$

donde $A_j = \text{Dom } f_j$, $j = 1, 2, \dots, p$.

- *Producto por escalar*. Si λ es un escalar (real o complejo según el caso), se denomina función *producto por escalar* a la función definida en A mediante:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in A.$$

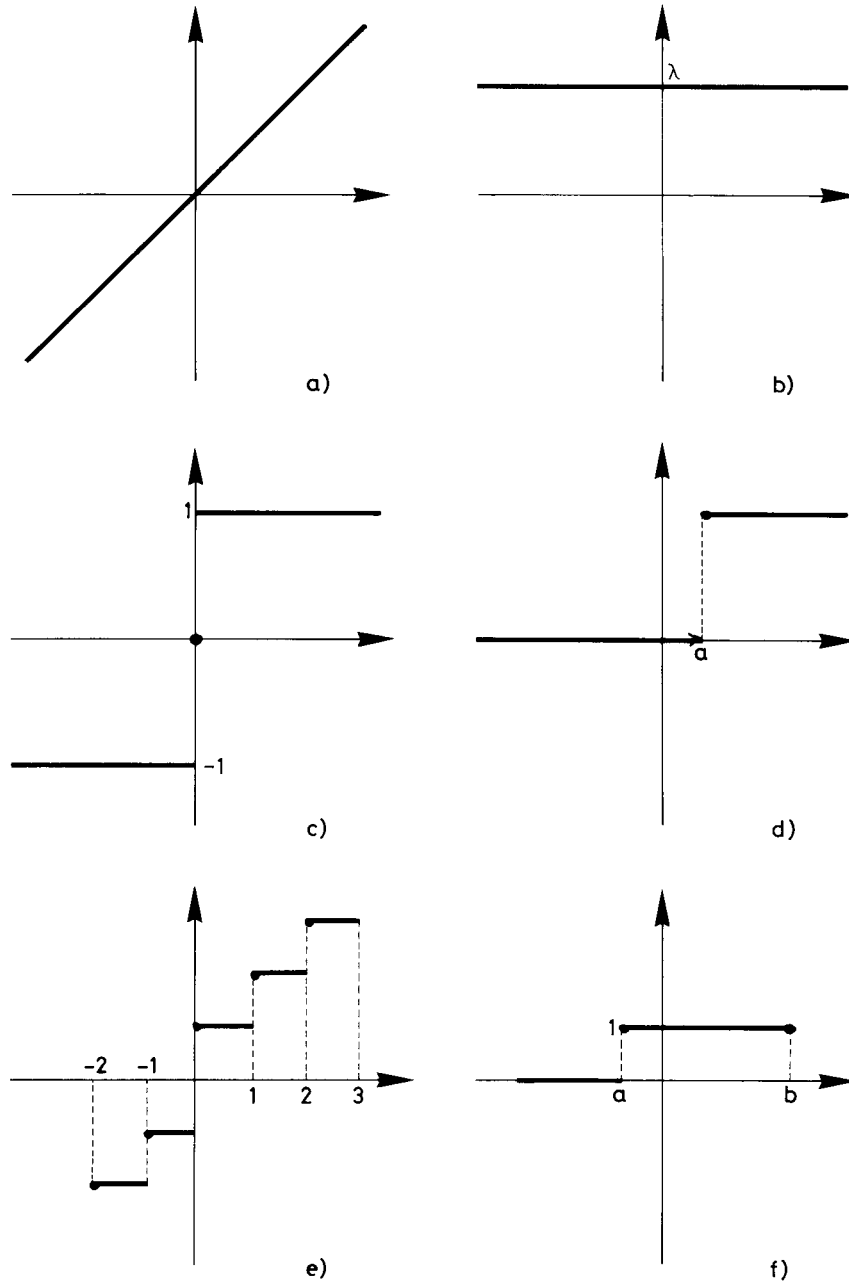


Figura 4.1. Gráficas de las funciones del ejemplo 4.1.4

- *Producto.* Se denomina *producto de f y g* a la función definida en $A \cap B$ mediante:

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad x \in A \cap B;$$

Obsérvese que, análogamente al caso de la suma, esta definición es generalizable a un número finito

de funciones.

- *Cociente.* Se denomina función *cociente de f y g* a la función notada f/g y definida en el conjunto $\{x \in A \cap B / g(x) \neq 0\}$, mediante:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in A \cap B, \quad g(x) \neq 0.$$

- Se propone como ejercicio establecer las propiedades de que gozan las operaciones con funciones (asociativa, conmutativa, elemento neutro, . . .). Con ellas se obtiene una estructura para los conjuntos de funciones como $\mathcal{F}(A; \mathbb{R})$.

4.1.6 EJEMPLO. Funciones polinómicas y funciones racionales.

- Se denomina *función polinómica de grado n* , la función $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$$

- Si se considera el cociente de dos funciones polinómicas, resulta lo que se denomina una *función racional*, esto es, la función definida por:

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}.$$

cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R} - \{x / Q(x) = 0\}$, es decir, \mathbb{R} exceptuando las raíces de la función polinómica denominador.

4.1.7 DEFINICIÓN. (*Composición de funciones*). Vamos a definir a continuación una nueva operación con funciones, que juega un papel esencial en Análisis: la composición. Sean dos funciones $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ tales que se cumple $f(A) \subset B$; se define la *función compuesta de f y g* , notada $g \circ f$, mediante:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A = \text{Dom } f.$$

Cuando no se cumple la condición $f(A) \subset B$, se considera la restricción de f al subconjunto de su dominio dado por $A' = A \cap f^{-1}(B)$, si este conjunto no es el vacío, siendo entonces dicho conjunto el campo de existencia de la función compuesta $g \circ f$. Si $A' = \emptyset$, carece de sentido definir la función compuesta $g \circ f$. Como es fácil ver, la composición de funciones no es conmutativa, es asociativa y tiene elemento neutro, que es la aplicación idéntica en el conjunto correspondiente.

4.1.8 EJEMPLO.

- Se consideran las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = 2x^2 - 5, \quad x \in A = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x-1}, \quad x \in B = [1, +\infty[;$$

el recorrido de f es el conjunto $f(A) = [-5, +\infty[$, el cual no es subconjunto del dominio de g ; por lo tanto, debe determinarse el conjunto $A' = A \cap f^{-1}(B)$, esto es, el conjunto de elementos $x \in A$ tales que $f(x) \in B$. Los elementos de dicho conjunto deben cumplir $f(x) = 2x^2 - 5 \geq 1$, es decir, $x^2 \geq 3$, con lo cual se tiene que la función compuesta $g \circ f$ está definida mediante:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^2 - 5) = \sqrt{(2x^2 - 5) - 1} = \sqrt{2x^2 - 6},$$

y su dominio es el conjunto $A' =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$.

- Obsérvese que, por otra parte, se cumple $g(B) = [0, +\infty[\subset A$, con lo que tiene sentido considerar la función compuesta de g y f , $f \circ g$, cuyo dominio es el conjunto $B = [1, +\infty[$ y está definida en él mediante:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(g(x))^2 - 5 = 2(\sqrt{x-1})^2 - 5 = 2x - 7.$$

Nótese también que, en este caso, no sería correcto afirmar, a partir de la expresión analítica de la función $f \circ g$, que su campo de existencia es \mathbb{R} , aún cuando dicha expresión analítica tiene sentido para cualquier número real.

4.1.9 DEFINICIÓN. (*Inversa de una función*). Cuando una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene la propiedad de que la aplicación de A en $f(A)$ es biyectiva, entonces puede definirse la denominada *función inversa* de f respecto de la composición, designada por f^{-1} , y definida en $f(A)$ mediante:

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{si, y solamente si,} \quad f(x) = y.$$

Resulta evidente que, en virtud de su definición, se cumplen las igualdades:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = I_{f(A)}.$$

Puesto que la gráfica de la función f es el conjunto dado por $G_1 = \{(x, f(x)) / x \in A\} \subset \mathbb{R}^2$, la gráfica de la función inversa f^{-1} será el conjunto: $G_2 = \{(y, f^{-1}(y)) / y \in f(A)\} = \{(f(x), x) / x \in A\}$, es decir, G_2 es el “conjunto simétrico” de G_1 respecto a la recta $y = x$, bisectriz de los cuadrantes primero y tercero (véase la figura 4.2).

4.1.10 DEFINICIÓN. (*Funciones monótonas*). Vamos a ver a continuación una propiedad que pueden cumplir algunas funciones y que, aparte su importancia por sí misma, puede relacionarse con la existencia de la función inversa.

- Se dice que una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *monótona creciente* en un intervalo $I \subset A$ si, cualesquiera que sean los elementos x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, sus imágenes cumplen la condición $f(x_1) \leq f(x_2)$. Si esta última desigualdad es estricta, la función se denomina *estrictamente creciente*. Invertiendo en cada caso las segundas desigualdades, se obtienen las definiciones de funciones *monótonas decrecientes* y *estrictamente decrecientes*, respectivamente.
- En algunos casos puede no ser fácil establecer el crecimiento o decrecimiento de una función aplicando únicamente la definición dada; más adelante se verá una caracterización muy cómoda para las funciones derivables. En el caso de funciones estrictamente crecientes o decrecientes, puede afirmarse la existencia de la función inversa, tal como se demuestra a continuación.

4.1.11 PROPOSICIÓN. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente (respectivamente, decreciente) en un intervalo $I \subset A$; entonces existe su función inversa f^{-1} , la cual, además, también es estrictamente creciente (respectivamente, decreciente) en $f(I)$.

Demostración:

Es evidente que la aplicación $f: I \rightarrow f(I)$ es exhaustiva. Para ver que es también inyectiva, se consideran dos elementos cualesquiera $a, b \in I$ tales que $a < b$; por ser f estrictamente creciente, se debe cumplir $f(a) < f(b)$ y, por tanto, $f(a) \neq f(b)$, lo que prueba que f es inyectiva. En definitiva, f es biyectiva y tiene inversa f^{-1} .

Para establecer el crecimiento estricto de la función inversa, considérense dos elementos u, v de $f(I)$ tales que, por ejemplo, $u < v$. En virtud de la biyectividad de f , existen dos únicos elementos α y β de I , de tal modo que $u = f(\alpha)$ y $v = f(\beta)$, con lo que se tiene $f(\alpha) < f(\beta)$. Pero, teniendo en

cuenta que f es estrictamente creciente, resulta que debe ser $\alpha < \beta$, es decir $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$, lo cual establece el crecimiento estricto de la función inversa de f , f^{-1} . ■

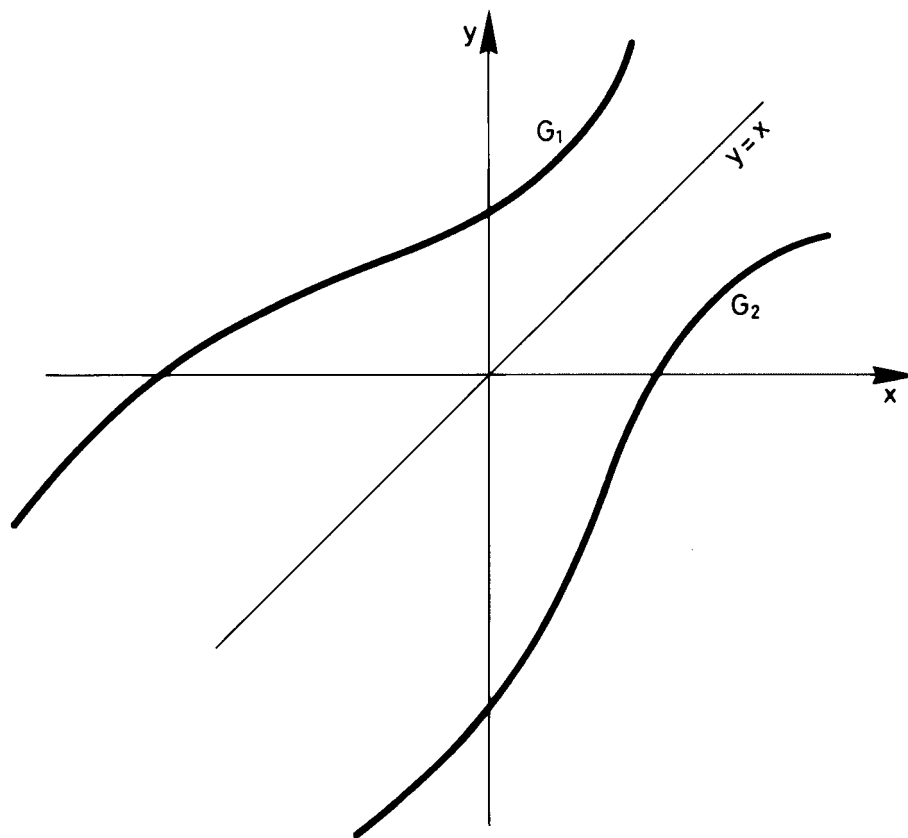


Figura 4.2. Relación entre las gráficas de una función y su inversa

4.1.12 EJEMPLO. Funciones potenciales y funciones raíces n -ésimas.

- Sea $n \geq 1$ un número natural; se denomina *función potencial de exponente natural*, la función f definida por:

$$f(x) = x \cdots x = x^n, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Si n es impar, la función x^n es estrictamente creciente en \mathbb{R} ; si n es par, la función x^n es estrictamente decreciente en \mathbb{R}^- y estrictamente creciente en \mathbb{R}^+ .

- Para las funciones x^n , en virtud de la proposición anterior, existe la correspondiente función inversa en uno de los intervalos de crecimiento o decrecimiento estricto; dicha función inversa se denomina *función raíz n -ésima*, notada $x^{1/n}$ o bien $\sqrt[n]{x}$ y que, en el caso de $[0, +\infty[$, está definida por:

$$x^{1/n} = t \quad \text{si, y solamente si,} \quad t^n = x, \quad x \in [0, +\infty[.$$

El campo de existencia de la función raíz n -ésima es el conjunto imagen por la función potencial correspondiente del intervalo $[0, +\infty[$, que es el mismo intervalo $[0, +\infty[$.

- Visto lo anterior, pueden definirse fácilmente las denominadas *funciones potenciales de exponente racional*. Si $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, se tiene que $\frac{m}{n} = p \in \mathbb{Q}$ y entonces se define:

$$\begin{cases} x^p = x^{m/n} = (x^{1/n})^m, & x \in [0, +\infty[; \\ x^{-p} = x^{-m/n} = \frac{1}{(x^{1/n})^m}, & x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

- Con ello, es inmediato definir la función potencial x^p , si p es un número racional cualquiera de la forma $p = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Esta función cumple las siguientes propiedades, cuya justificación se propone como ejercicio:

- 1) $x^p x^q = x^{p+q}$; $p, q \in \mathbb{Q}, x > 0$.
- 2) $(x^p)^q = x^{pq} = (x^q)^p$; $p, q \in \mathbb{Q}, x > 0$.

4.1.13 DEFINICIÓN. Para terminar este primer apartado, vamos a ver la definición de algunas propiedades que pueden cumplir las funciones reales de una variable, que son de utilidad en su estudio y que tienen numerosas e interesantes aplicaciones.

- Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; se dice que f es una *función par*, si se cumple:

$$f(-x) = f(x), \text{ para todo } x \in A,$$

y se dice que f es una *función impar*, si

$$f(-x) = -f(x), \text{ para todo } x \in A.$$

- Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina *periódica* si existe un número real $T > 0$ tal que

$$f(x + T) = f(x), \text{ para todo } x \in A.$$

El número real T recibe el nombre de *período de la función*. Obsérvese que, si T es el período de una función f , entonces $T' = nT$ también lo es para cualquier número natural n ; el menor número T que cumple la definición se denomina *período propio o fundamental* de la función.

- Se dice que una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es *acotada*, si su recorrido $\text{Im} f$ es un conjunto acotado; en particular, pues, puede hablarse del supremo y del ínfimo de f , notados $\sup f$ y $\inf f$, que no son más que el supremo y el ínfimo, respectivamente, del conjunto $\text{Im} f$.
- Cuando el supremo y el ínfimo de una función en un cierto dominio pertenecen a $\text{Im} f$, entonces se denominan *extremos absolutos de la función*. Así, si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, se dice que f tiene un *máximo absoluto en el punto* $a \in A$, si se cumple:

$$f(a) \geq f(x), \text{ para todo } x \in A.$$

De modo análogo, se dice que f tiene un *mínimo absoluto en el punto* $a \in A$, si se verifica:

$$f(a) \leq f(x), \text{ para todo } x \in A.$$

- También tiene interés considerar extremos en subconjuntos del dominio de una función, denominados *extremos locales o relativos*. Se dice que la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un *máximo local o relativo* en el punto $a \in A$, si existe un entorno $U(a)$ de dicho punto, tal que se cumple

$$f(a) \geq f(x), \text{ para todo } x \in U(a) \cap A.$$

De modo análogo, se definen los *mínimos locales o relativos*. En la figura 4.3, se ha representado una función de dominio $[0, +\infty[$ la cual tiene dos máximos locales en los puntos x_1 y x_3 y dos mínimos locales en los puntos 0 y x_2 ; además, f alcanza un máximo absoluto en x_1 y no alcanza ningún mínimo absoluto.

- Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; dados dos puntos de su gráfica $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, se denomina *secante* la recta que pasa por dichos puntos y cuya ecuación es

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

El segmento de una recta secante que une los dos puntos de la gráfica de f se denomina *cuerda*.

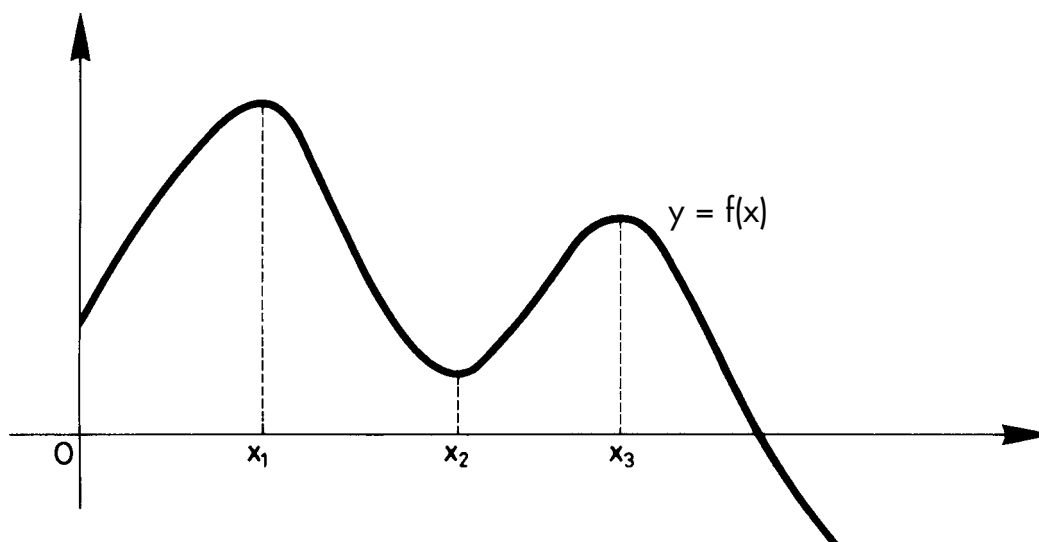


Figura 4.3. Ilustración de los extremos locales de una función

- Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; se dice que f es *convexa* en $I \subset A$ si cualesquiera que sean $x, y \in I$ se cumple:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

esto es, si dados dos puntos cualesquiera de la gráfica de f cuya abscisa sea de I , el segmento que une los dos puntos está por encima de la gráfica de la función (véase la figura 4.4). Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *cóncava* en $I \subset A$ si cualesquiera que sean $x, y \in I$ se cumple:

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

es decir, si dados dos puntos cualesquiera de la gráfica de f cuya abscisa sea de I , el segmento que une los dos puntos está por debajo de la gráfica de la función (véase la figura 4.5). Si las desigualdades

anteriores son estrictas, la función se dice que es *estrictamente convexa* o bien *estrictamente cóncava*, respectivamente. Se verá la importancia de esta propiedad al estudiar la unicidad de extremos de una función en un intervalo.

- Cualquiera de las propiedades definidas anteriormente (monotonía, concavidad, ...) que involucren un subconjunto del dominio, se dice que se cumplen en un punto si existe un entorno de dicho punto en el que se cumple la propiedad.

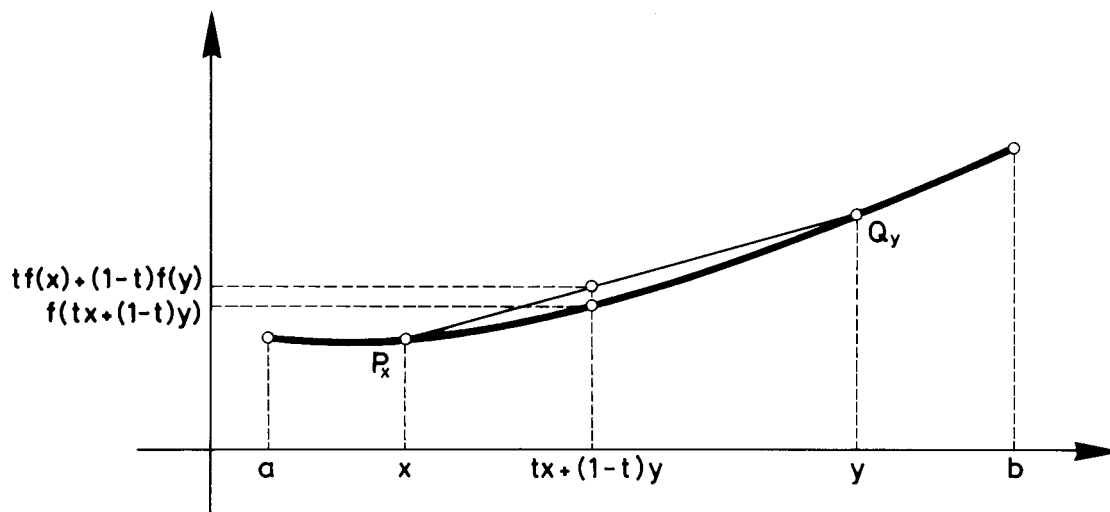


Figura 4.4. Función convexa en un intervalo

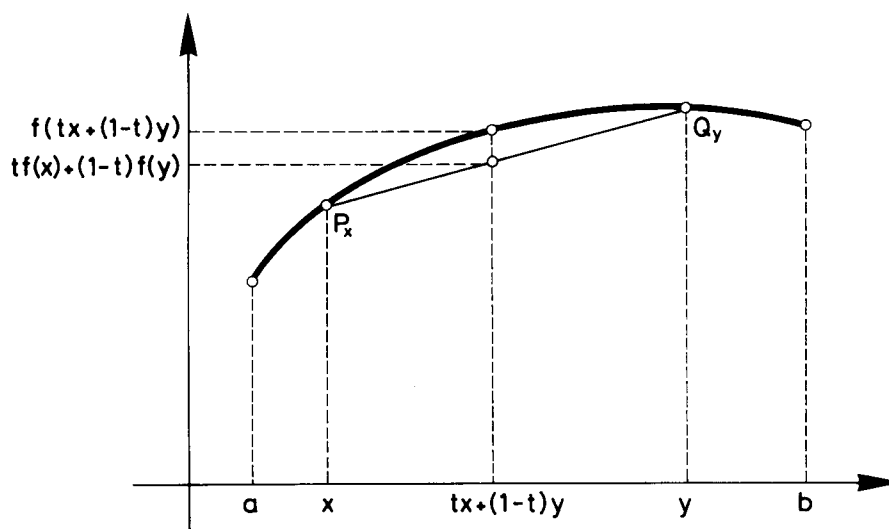


Figura 4.5. Función cóncava en un intervalo

4.1.14 EJEMPLO. Ilustremos estas propiedades con algunas funciones sencillas.

- Las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^{2p}$, $p = 1, 2, 3, \dots, x \in \mathbb{R}$, son pares, no son periódicas, no están acotadas superiormente y tienen un mínimo absoluto en el origen.
- Las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^{2p+1}$, $p = 0, 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}$, son impares, no son periódicas, no están acotadas y no tienen extremos absolutos.
- La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (denominada “diente de sierra”) definida por $f(x) = x - E(x)$, $x \in \mathbb{R}$ no tiene simetría par ni impar, es periódica y su período fundamental es $T = 1$, es acotada cumpliéndose que $\text{Im}f = [0, 1[$, alcanza un mínimo absoluto en los naturales y, por último, no tiene máximo absoluto.
- Las funciones potenciales de exponente natural $x^n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son estrictamente convexas si n es par. Si n es impar, son estrictamente cóncavas en \mathbb{R}^- y estrictamente convexas en \mathbb{R}^+ .
- La función $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = x^2, \text{ si } -2 \leq x \leq -1, \quad f(x) = 1, \text{ si } -1 \leq x \leq 1, \quad f(x) = x^2, \text{ si } 1 \leq x \leq 2,$$

es convexa en su dominio pero no es estrictamente convexa; sí lo es, en cambio, en los intervalos $[-2, -1]$ y $[1, 2]$ contenidos en su dominio.

4.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. PROPIEDADES.

4.2.1 El concepto de límite de una función en un punto es, sin duda, uno de los conceptos clave del Análisis Matemático. Tiene como objetivo caracterizar la variación de las imágenes de los puntos “próximos” a un punto dado, sin importar, no obstante, lo que haga la función en dicho punto, en el cual es posible que ni tan siquiera esté definida.

4.2.2 DEFINICIÓN. (*Límite de una función en un punto*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real y sea a un punto de acumulación de A (que, recordémoslo, es un punto que puede pertenecer o no pertenecer al conjunto A). Se dice que la función f tiene *límite* $L \in \mathbb{R}$ en el punto a , si dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ de tal modo que cualquiera que sea $t \in A$ tal que $0 < |t - a| < \delta$, entonces se cumple $|f(t) - L| < \varepsilon$. En la figura 4.6 se ha ilustrado gráficamente el concepto de límite de una función en un punto.

- La condición anterior puede escribirse también así:

$$\text{si } t \in B^*(a; \delta) \cap A, \text{ entonces } f(t) \in B_\varepsilon(L)$$

o bien, de forma equivalente:

$$\text{si } t \in (]a - \delta, a + \delta[\cap A) - \{a\}, \text{ entonces } f(t) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[.$$

- En muchos casos resulta útil la “versión incremental” de la definición anterior, en la cual los puntos t se caracterizan por su diferencia respecto del punto a . Así pues, se dice que la función f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto a , si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ de tal modo que, cualquiera que sea $t = a + h \in A$ tal que $0 < |h| < \delta$, se cumple $|f(a + h) - L| < \varepsilon$.
- Para indicar que $L \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f en el punto a , se utilizan indistintamente las notaciones siguientes:

$$L = \lim_a f; \quad L = \lim_{t \rightarrow a} f(t); \quad f(t) \rightarrow L \text{ si } t \rightarrow a.$$

En este texto utilizaremos preferentemente las dos primeras que, por otra parte, son las más habituales.

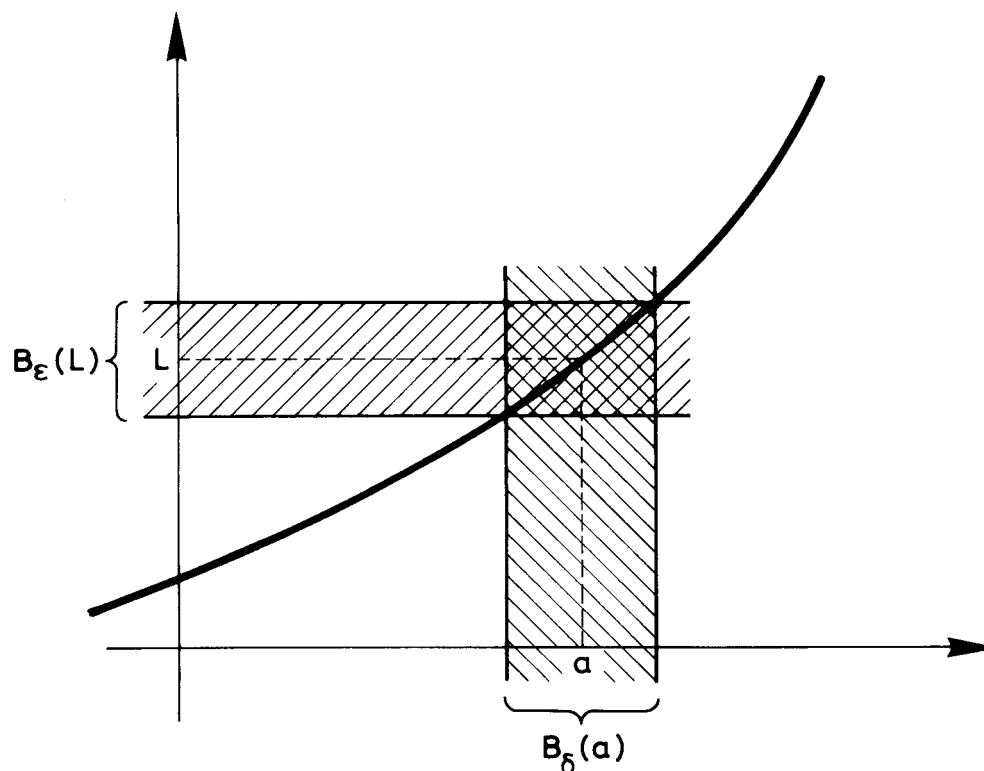


Figura 4.6. Ilustración gráfica del límite de una función en un punto

4.2.3 OBSERVACIÓN.

- El número real δ de la definición de límite de una función en un punto depende, evidentemente, del número ε elegido, así como del punto a en que se estudie la existencia el límite de f ; con ello, cuando sea preciso explicitar esta dependencia, se escribirá $\delta(\varepsilon; a)$. Se verá un caso concreto en el ejemplo 4.2.6. Esto significa que, para diferentes puntos, puede conseguirse una misma aproximación al límite, si éste existe, con entornos de radio diferente. Más adelante se estudiará un caso en el cual δ depende únicamente de ε , pero no del punto a (funciones uniformemente continuas).
- La negación de la condición de límite de una función en un punto se enuncia así: si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A'$, f no tiene por límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto a si existe $\varepsilon > 0$ tal que cualquiera que sea $\delta > 0$ se cumple $|f(x) - L| \geq \varepsilon$ para algún $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.
- La definición de límite de una función en un punto se extiende de modo natural al caso de funciones complejas o de variable compleja; está claro que, entonces, $| \cdot |$ indicará, según el caso, el valor absoluto de un número real, o bien, el módulo de un número complejo. Por otra parte, si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, se ha comentado ya que, para cada $x \in A \subset \mathbb{R}$, entonces $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in \mathbb{C}$; en este

caso, es fácil ver que si a es un punto de acumulación de A , se cumple $\lim f = L = (L_1, L_2) \in \mathbb{C}$ si, y sólo si, $\lim_a f_1 = L_1 \in \mathbb{R}$ y $\lim_a f_2 = L_2 \in \mathbb{R}$. Los detalles de la justificación de esta propiedad se proponen como ejercicio.

4.2.4 PROPOSICIÓN. El límite de una función en un punto, si existe, es único.

Demostración:

Sea una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y supongamos que pudieran existir dos números reales distintos L, L' tales que: $L = \lim_a f$ y $L' = \lim_a f$. Entonces, por definición, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existirían dos números reales $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que;

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &< \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_1; \\ |f(x) - L'| &< \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2. \end{aligned}$$

Si designamos por $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces se cumple

$$|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{si } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < \delta.$$

En consecuencia, dada la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, se cumple $|L - L'| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, lo cual implica $L = L'$. ■

4.2.5 EJEMPLO.

- Sea $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función constante real de variable real y sea a un número real; dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, se cumple

$$|\lambda(x) - \lambda(a)| = |\lambda - \lambda| = 0 < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

lo cual prueba que $\lim_a \lambda = \lambda$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

- Sea $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función coordenada de \mathbb{R} y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto cualquiera; dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t - a| < \delta$ con $\delta \leq \varepsilon$, se cumple

$$|x(t) - x(a)| = |t - a| < \varepsilon,$$

con lo cual puede afirmarse que $\lim_a x = a$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$ El número real $L = 0$ no es límite de f en el punto $a = 0$ puesto que cualquiera que sea $0 < \varepsilon < 1$, para todo $\delta > 0$ existen números reales tales que $0 < |x| < \delta$ que cumplen $|f(x) - 0| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon$. Compruébese que ningún otro número real cumple la definición de límite de esta función en el origen, esto es, pruébese que $\lim_0 f$ no existe.

4.2.6 EJEMPLO. Se considera la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en el subconjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1\}$. Vamos a probar que se cumple: $\lim_1 \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$. Para ello, utilizaremos la versión incremental de la definición 4.2.2 y, así, pondremos de manifiesto su utilidad; en este caso, obsérvese

que si $x = 1 + h$, entonces $f(1 + h) = \frac{1}{2 + h}$. Con el objetivo de ilustrar el mecanismo ε, δ inherente a la definición de límite de una función en un punto, comenzaremos haciendo algunas tentativas con valores concretos de ε .

- Si, por ejemplo, se toma inicialmente $\varepsilon = 0.5$, en virtud de la definición, debemos plantear:

$$|f(a + h) - L| = \left| \frac{1}{2 + h} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-h}{2(2 + h)} \right| < 0.5.$$

Si $h > 0$, entonces debe cumplirse $\frac{h}{2(2 + h)} < 0.5$, es decir, $h < 2 + h$, lo cual es cierto siempre.

Si $h < 0$, debe cumplirse $\frac{-h}{2(2 + h)} < 0.5$, esto es, $-h < 2 + h$, o sea $h > -1$; en definitiva, puede tomarse $\delta(0.5; 1) = 1$.

- Si se procede análogamente, tomando $\varepsilon = 0.1$, resulta:

$$\begin{aligned} \text{para } h > 0, \text{ se cumple } & \left| f(1 + h) - \frac{1}{2} \right| < 0.1, \quad \text{si } h < \frac{1}{2}, \\ \text{para } h < 0, \text{ se cumple } & \left| f(1 + h) - \frac{1}{2} \right| < 0.1, \quad \text{si } h > -\frac{1}{3}; \end{aligned}$$

es decir, puede tomarse $\delta(0.1; 1) = \frac{1}{3}$.

- Generalizando para $\varepsilon > 0$ arbitrario, resulta:

$$\begin{aligned} \text{para } h > 0, \text{ se cumple } & \left| f(1 + h) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \quad \text{si } h < \frac{4\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}; \\ \text{para } h < 0, \text{ se cumple } & \left| f(1 + h) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \quad \text{si } h > \frac{-4\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}, \end{aligned}$$

se obtiene finalmente: $\delta(\varepsilon; 1) = \min \left\{ \frac{4\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}, \frac{4\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \right\} = \frac{4\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$. Con ello queda probado que $L = 1/2$ cumple la definición (4.2.2) en el punto $a = 1$ para la función dada, con lo que puede afirmarse que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$.

- Se propone como ejercicio repetir los cálculos anteriores con el objetivo de comprobar que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{4}$, obteniéndose en este caso $\delta(\varepsilon; 3) = \frac{16\varepsilon}{1 + 4\varepsilon}$.
- La diferencia entre $\delta(\varepsilon; 1)$ y $\delta(\varepsilon; 3)$ pone de manifiesto la dependencia de δ respecto del punto a , además de la obvia respecto de ε .

4.2.7 OBSERVACIÓN. La definición de límite de una función en un punto, análogamente al caso de las sucesiones, no proporciona un método práctico para el cálculo de dicho límite, por cuanto el valor del propio límite interviene en la definición. Ello aconseja establecer métodos alternativos de cálculo que estén basados en propiedades del límite de una función en un punto, objetivo al que nos dedicaremos lo que resta de este apartado.

4.2.8 PROPOSICIÓN. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea a un punto de acumulación del conjunto A . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- 1) $L = \lim_a f$;
- 2) para cualquier sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A que cumpla las condiciones siguientes:
- $\lim u_n = a$;
 - $u_n \neq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- se verifica que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$.

Demostración:

1) \Rightarrow 2). Por definición de límite de una función en un punto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un $\delta > 0$ de tal modo que si $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Si (u_n) es una sucesión que cumple las condiciones de 2), existirá un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_1$ se cumple $0 < |u_n - a| < \delta$, con lo que, en virtud de lo anterior, se tendrá $|f(u_n) - L| < \varepsilon$ para todo $n > n_1$, es decir, $\lim f(u_n) = L$.

2) \Rightarrow 1). Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que L no fuera el límite de f en el punto a . Por definición, esto significa que existe un $\varepsilon > 0$ tal que, cualquiera que sea $\delta > 0$, existe algún $x \in B^*(a; \delta) \cap A$ tal que $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Tomando $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, se obtiene una sucesión (z_n) de puntos tales que $z_n \in B^*(a; \delta) \cap A$ y $|f(z_n) - L| \geq \varepsilon$, esto es, una sucesión (z_n) que cumple las propiedades de 2) y, no obstante, la sucesión $(f(z_n))$ no tiene límite L . Esta contradicción con la hipótesis sobre una tal sucesión nos dice que 1) no puede dejar de cumplirse y, en consecuencia, que la implicación 2) \Rightarrow 1) es cierta. ■

4.2.9 OBSERVACIÓN. La proposición que acabamos de ver permite resolver la dificultad, ya comentada, del desconocimiento inicial del valor del límite de una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $a \in A'$, para ser sometido al cumplimiento de la condición que se establece en la definición. En efecto:

- Si (α_n) es una sucesión que cumple las condiciones de la proposición 4.2.8, entonces $\lim(f(\alpha_n))$ es el único valor posible de $\lim_a f$, si éste existe; si $\lim f(\alpha_n) = L$ existe, la definición de límite de una función en un punto lo confirmará o bien negará que ello es cierto.
- Si el límite de la sucesión $(f(\alpha_n))$ no existe, ya se ha terminado: no existe el límite de f en el punto a .
- Si se encuentran dos sucesiones $(\alpha_n) \rightarrow a$ y $(\beta_n) \rightarrow a$ tales que $\lim f(\alpha_n) \neq \lim f(\beta_n)$, puede concluirse entonces que $\lim_a f$ no existe.

Debemos insistir, pues, en que 4.2.8 tiene dos utilidades fundamentales: por un lado, encontrar un posible valor del límite; por otro, probar que el límite de una función en un punto no existe. En ningún caso, sin embargo, puede emplearse 4.2.8 para demostrar que $\lim_a f = L$.

4.2.10 EJEMPLO.

- Consideremos de nuevo la función f del ejemplo 4.2.6. Para calcular el límite $\lim_1 f$, considérese la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$, que cumple las condiciones de 4.2.8; con ello, se tendrá,

$$\lim \left(f\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1} = \lim \frac{n}{2n + 1} = \frac{1}{2}.$$

Así pues, el único valor posible del límite buscado es $1/2$, lo cual ya se ha probado que es cierto en 4.2.4.

- Considérese la función definida por: $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_0$. Es claro que el origen es un punto de acumulación de \mathbb{R}_0 , con lo que tiene sentido plantear el cálculo de $\lim_0 f$. Aplicando

la proposición 4.2.8, se considera en primer lugar la sucesión $(\alpha_n) = \left(\frac{1}{2\pi n}\right) \rightarrow 0$, que cumple $\alpha_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$; la sucesión de imágenes es $(f(\alpha_n)) = (\sin(2\pi n)) = (0) \rightarrow 0$. Por tanto, $L = 0$ es el único posible valor de $\lim_0 f$, si éste existe. Considérese ahora la sucesión $(\beta_n) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right) \rightarrow 0$, que cumple $\beta_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y cuya sucesión de imágenes verifica: $(f(\beta_n)) = (\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)) = (1) \rightarrow 1$. Con ello, puede concluirse que $\lim_0 f$ no existe.

4.2.11 PROPOSICIÓN. Sea una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\lim_a f = L \neq 0$; existe entonces un entorno reducido del punto a en el cual f conserva el signo (esto es, todas las imágenes de los puntos de dicho entorno tienen el mismo signo).

Demostración:

Supóngase que se cumple $L > 0$; que f conserva el signo en algún entorno de a , significa que existe un $r > 0$, tal que para todo $x \in B^*(a; r) \cap A$, se cumple $f(x) > 0$.

Por definición de límite de una función en un punto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$. Si se toma, por ejemplo, $\varepsilon = L/2 > 0$ y se designa por $r = \delta(L/2; a)$, entonces si $x \in A$ es tal que $0 < |x - a| < r$, se tiene $|f(x) - L| < L/2$, es decir, $-L/2 < f(x) - L < L/2$, o equivalentemente, $0 < L/2 < f(x) < 3L/2$. ■

4.2.12 PROPOSICIÓN. Si una función tiene límite en un punto, entonces existe un entorno de dicho punto en el cual la función es acotada.

Demostración:

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de A tal que $L = \lim_a f$; si $\varepsilon > 0$ es arbitrario, por definición existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Pero, por las propiedades del valor absoluto, se tiene que $|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < \varepsilon$, de modo que $|f(x)| < |L| + \varepsilon$, para todo $x \in B^*(a; \delta) \cap A$, es decir, f es acotada en dicho entorno. ■

4.2.13 PROPOSICIÓN. (*Álgebra de límites de funciones*). Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales y sea a un punto de acumulación de A . Si dichas funciones son tales que $\lim_a f = L_1$ y $\lim_a g = L_2$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

- 1) $\lim_a (f + g) = L_1 + L_2$;
- 2) $\lim_a (\lambda f) = \lambda L_1$, cualquiera que sea $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 3) $\lim_a (fg) = L_1 L_2$;
- 4) $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{L_1}{L_2}$, si $L_2 \neq 0$.

Demostración:

Todas son consecuencia inmediata de la relación entre el límite de una función y los límites de sucesiones y las propiedades de éstas en relación a las operaciones definidas en \mathbb{R} .

También pueden probarse estas igualdades aplicando directamente la definición de límite de una función en un punto, cuestión que se propone como ejercicio. ■

4.2.14 OBSERVACIÓN. No puede hacerse una afirmación análoga para la composición de funciones,

esto es, si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ son tales que $\lim_a f = b$, $\lim_b g = L$ y la función $g \circ f$ tiene sentido, entonces no se puede afirmar que $\lim_a (g \circ f) = L$.

En efecto, considérense las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(t) = \lambda; \quad g(x) = \begin{cases} L, & \text{si } x \neq \lambda, \\ L_1, & \text{si } x = \lambda, \end{cases} \quad \text{con } L_1 \neq L.$$

Si $a \in \mathbb{R}$, se cumple $\lim_a f = \lambda$ y $\lim_\lambda g = L$; por otra parte, la función compuesta $g \circ f$ existe y está definida por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\lambda) = L_1, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

con lo que se cumple: $\lim_a (g \circ f) = L_1 \neq L$, cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$.

En el capítulo siguiente se verá qué hipótesis adicional debe introducirse para que la afirmación $\lim_a (g \circ f) = L$ sea cierta.

4.2.15 DEFINICIÓN. (*Función valor absoluto*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; se define la función *valor absoluto de f* , escrita $|f|$, mediante

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad x \in A.$$

A continuación, se estudian propiedades que relacionan el valor absoluto y el orden en \mathbb{R} , con el límite de una función en un punto.

4.2.16 PROPOSICIÓN. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A'$ un punto de acumulación de A ; si $\lim_a f = L$, entonces se cumple $\lim_a |f| = |L|$. (Nótese que el recíproco no es cierto; puede verse fácilmente con la función sgn definida en 4.1.4, en el origen).

Demostración:

Por definición de límite de una función en un punto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$. Aplicando ahora la definición de límite de una función en un punto y teniendo en cuenta las propiedades del valor absoluto, se cumplirá:

$$||f|(x) - |L|| = ||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon, \quad \text{si } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < \delta,$$

lo cual prueba que $\lim_a |f| = |L|$. ■

4.2.17 PROPOSICIÓN. Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales tales que

- 1) existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in B^*(a; r) \cap A$;
- 2) $\lim_a f = L_1$, $\lim_a g = L_2$.

Se cumple entonces que $L_1 \leq L_2$.

Demostración:

Inmediata; basta tener en cuenta que la función $g - f$ es ≥ 0 en $B^*(a; r) \cap A$, que en virtud de 4.2.13 se cumple $\lim_a (g - f) = L_2 - L_1$ y que, por 4.2.11, debe ser $L_2 - L_1 \geq 0$. ■

4.2.18 PROPOSICIÓN. (*Criterio de compresión.*) Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales de variable real tales que:

- 1) existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in B^*(a; r) \cap A$;

$$2) \lim_a f = \lim_a g = L.$$

En estas condiciones, si $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ para todo $x \in B^*(a; r) \cap A$, se cumple entonces que $\lim_a \varphi = L$.

Demostración:

Por definición de límite de una función en un punto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} |f(x) - L| < \varepsilon & \text{ si } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_1, \\ |g(x) - L| < \varepsilon & \text{ si } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2. \end{aligned}$$

No es restrictivo considerar los casos en que $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \leq r$, con lo que entonces puede afirmarse que

$$\begin{aligned} L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon & \text{ si } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < \delta, \\ L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon & \text{ si } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < \delta, \end{aligned}$$

con lo que se tendrá

$$L - \varepsilon < f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x) < L + \varepsilon, \text{ para todo } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < \delta,$$

esto es, $\lim_a \varphi = L$. ■

4.2.19 PROPOSICIÓN. Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

- 1) $\lim_a f = 0$;
- 2) g es acotada en un entorno reducido de a .

En estas condiciones, se cumple que: $\lim_a fg = 0$.

Demostración:

El hecho de ser g acotada en un entorno reducido del punto a , significa que existen $k > 0$ y $r > 0$ tales que,

$$|g(x)| \leq k, \text{ para todo } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < r.$$

Si se cumple $\lim_a f = 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{k}, \text{ para todo } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < \delta.$$

Planteemos para la función producto fg la condición de límite de una función en un punto; si designamos por $r' = \min\{r, \delta\}$, se tendrá:

$$|(fg)(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{k} \cdot k = \varepsilon, \text{ para todo } x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < r',$$

esto es, $\lim_a fg = 0$. ■

4.2.20 EJEMPLO. Como aplicación del resultado anterior, puede afirmarse que $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$, ya que, en primer lugar se cumple $\lim_0 x = 0$ y, por otro lado, la función $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es acotada en un entorno del origen, ya que $\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}_0$.

4.2.21 DEFINICIÓN. (*Límites laterales de una función en un punto*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea a un punto de acumulación de A ; se dice que $L^+ \in \mathbb{R}$ es el *límite por la derecha* de la función f en el punto a , si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ de tal modo que si $x \in A$ y $a < x < a + \delta$, entonces $|f(x) - L^+| < \varepsilon$.

- Se define de modo análogo el *límite por la izquierda* de f en el punto a , escrito L^- .
- El límite por la izquierda y el límite por la derecha, reciben conjuntamente la denominación de *límites laterales*. Su interpretación gráfica se ha representado esquemáticamente en la figura 4.7.
- La notación utilizada habitualmente para designar los límites laterales es la siguiente:

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow a^+} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \quad L^- = \lim_{x \rightarrow a^-} f = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

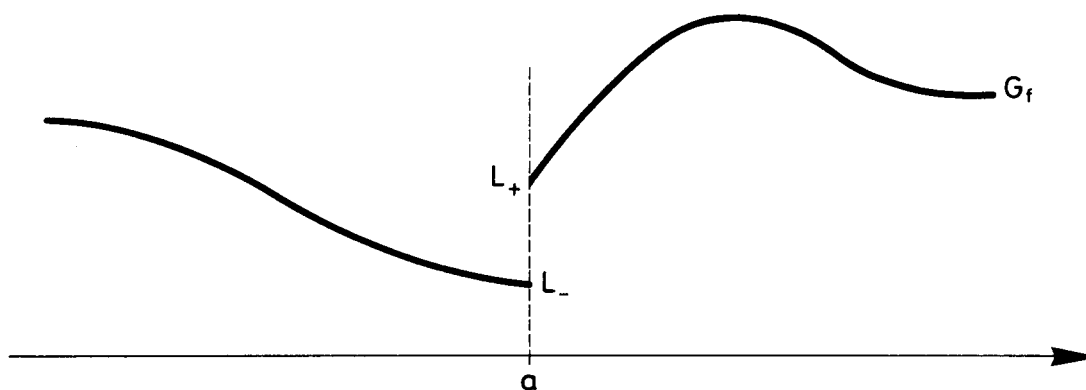


Figura 4.7. Ilustración de los límites laterales de una función en un punto

4.2.22 PROPOSICIÓN. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea a un punto de acumulación de A ; las propiedades siguientes son equivalentes:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a^+} f = \lim_{x \rightarrow a^-} f = L$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f = L$.

Demostración:

Es inmediata aplicando las definiciones respectivas y se propone como ejercicio. ■

4.2.23 EJEMPLO. Si E es la función “parte entera” y $m \in \mathbb{Z}$ es un entero cualquiera, se cumple $\lim_{m^+} E = m$ y $\lim_{m^-} E = m - 1$. Así pues, en virtud de la proposición anterior la función parte entera no tiene límite en los puntos enteros de su dominio.

Por otro lado, si $a \in \mathbb{R}$ con $m < a < m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$, se cumple $\lim_{a^+} E = m$ y $\lim_{a^-} E = m$, con lo que en estas condiciones $\lim_a E = m$ para todo $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

4.2.24 PROPOSICIÓN. (*Propiedades de los límites laterales*). Los límites laterales de una función en un punto cumplen las propiedades que se detallan a continuación, las cuales se enuncian para el límite por la derecha y que, naturalmente, tienen una formulación equivalente con el límite por la izquierda.

- 1) Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea a un punto de acumulación de A ; son equivalentes las dos afirmaciones siguientes:
 - (1.1) $L^+ = \lim_{a^+} f$;
 - (1.2) Toda sucesión (u_n) que verifique: $\lim_{a^+} (u_n) = a$ con $u_n \in]a, +\infty[\cap A$ para todo $n > n_0$, para un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, cumple entonces $\lim_{a^+} (f(u_n)) = L^+$.
- 2) Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que existe el límite $\lim_{a^+} f = L^+$ y dicho límite es estrictamente positivo o estrictamente negativo, entonces existe un intervalo $]a, a + \delta[$ en el cual la función f conserva el signo.
- 3) Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existe el límite por la derecha de f en un punto $a \in A'$, $L^+ = \lim_{a^+} f \in \mathbb{R}$; entonces, existe un intervalo $]a, a + \delta[$ en el cual la función f es acotada.
- 4) Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{a^+} f = L_1^+$ y $\lim_{a^+} g = L_2^+$. Se tienen entonces las siguientes igualdades:
 - (4.1) $\lim_{a^+} (f + g) = L_1^+ + L_2^+$;
 - (4.2) $\lim_{a^+} (\lambda f) = \lambda L_1^+$, cualquiera que sea $\lambda \in \mathbb{R}$;
 - (4.3) $\lim_{a^+} (fg) = L_1^+ L_2^+$;
 - (4.4) $\lim_{a^+} \frac{f}{g} = \frac{L_1^+}{L_2^+}$, siempre que se cumpla $L_2^+ \neq 0$.
- 5) Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y a es un punto de acumulación de A tal que $\lim_{a^+} f = L^+$, entonces $\lim_{a^+} |f| = |L^+|$.
- 6) Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{a^+} f = L_1^+$, $\lim_{a^+} g = L_2^+$ y existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in]a, a + \delta[\cap A$; en estas condiciones, se cumple: $L_1^+ \leq L_2^+$.

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

4.3 EXTENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE. INDETERMINACIONES.

4.3.1 En los apartados precedentes de este capítulo se ha estudiado el concepto de límite de una función en un punto y se han establecido sus propiedades más importantes. Hay situaciones que no encajan exactamente con los términos precisos de la definición dada de límite de una función en un punto tal y como se ha visto, pero que, no obstante, resulta muy conveniente definir las, estudiarlas y desarrollar sus propiedades. Se trata, en concreto, de la generalización del límite de una función en un punto cuando o bien éste o bien el valor del límite, no son números reales. Aclaremos ideas con unos ejemplos introductorios.

- Considérese la función real $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, $x \in A = \mathbb{R} - \{1\}$; tiene sentido

estudiar la existencia de su límite en el punto $a = 1$, por cuanto éste es un punto de acumulación de $\text{Dom} f$. Si se toma la sucesión $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ de límite 1 y se estudia la convergencia de la correspondiente sucesión de imágenes, se obtiene:

$$\left(f\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \left(\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} - 1\right)^2}\right) = (n^2) \rightarrow +\infty$$

es decir, que esta sucesión no tiene límite real y, por lo tanto, no existe el límite $\lim_1 f$, de acuerdo con la definición conocida hasta ahora.

- Veamos otra situación posible a considerar; sea la función real $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{3x+1}{2x-2}$, $x \in A = \mathbb{R} - \{1\}$; nos podemos preguntar qué ocurre cuando el punto x “se mueve indefinidamente” en uno de los dos sentidos de la recta real, esto es, cuando x aumenta o disminuye indefinidamente; esto puede analizarse tomando sucesiones de límite $+\infty$ o $-\infty$, respectivamente. En el caso de la función g considerada, puede verse fácilmente que cualquier sucesión de límite $+\infty$ tiene una sucesión de imágenes convergente de límite $3/2$.
- Así pues, estas consideraciones justifican el objetivo de extender la noción de límite de una función en un punto en dos sentidos: el primero, corresponde al caso en que el límite pertenece a la recta real ampliada (límite infinito) y el segundo, al caso en que el punto en el que se estudia el límite es de la recta real ampliada (límite en el infinito).

4.3.2 DEFINICIÓN. (*Límites infinitos de una función en un punto*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real y sea a un punto de acumulación de A .

- Se dice que f tiene *límite $+\infty$ en el punto a* , si dado $k > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ de tal modo que, cualquiera que sea $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, se cumple $f(x) > k$. Si f cumple esta propiedad, se escribe $\lim_a f = +\infty$.
- Se define de modo análogo el *límite $-\infty$ en el punto a* de f , escribiéndose $\lim_a f = -\infty$.
- Debe observarse que, análogamente al caso del límite de una función en un punto, el valor de δ depende de k y del punto a , lo cual se especifica, cuando conviene, escribiendo $\delta(k; a)$.
- En la figura 4.8(a) se ha representado una función de límite $+\infty$ en un punto; en la figura 4.8(b) lo mismo con $-\infty$.

4.3.3 EJEMPLO. La función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ considerada en (4.3.1) definida por,

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad x \in A = \mathbb{R} - \{1\},$$

cumple la definición anterior en $a = 1$, esto es, tiene límite $+\infty$ en el punto $a = 1$, puesto que si $0 < |x - 1| < 1/\sqrt{k} = \delta(k; 1)$, se cumple $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{\delta^2} = k$.

Las propiedades del límite infinito de una función en un punto, se corresponden de modo natural con las propiedades del límite de una función en un punto, con las modificaciones oportunas. Estas propiedades, para el caso $+\infty$, se enuncian en las dos proposiciones que siguen. Obviamente existen enunciados análogos para el caso $-\infty$, cuya redacción concreta se propone como ejercicio.

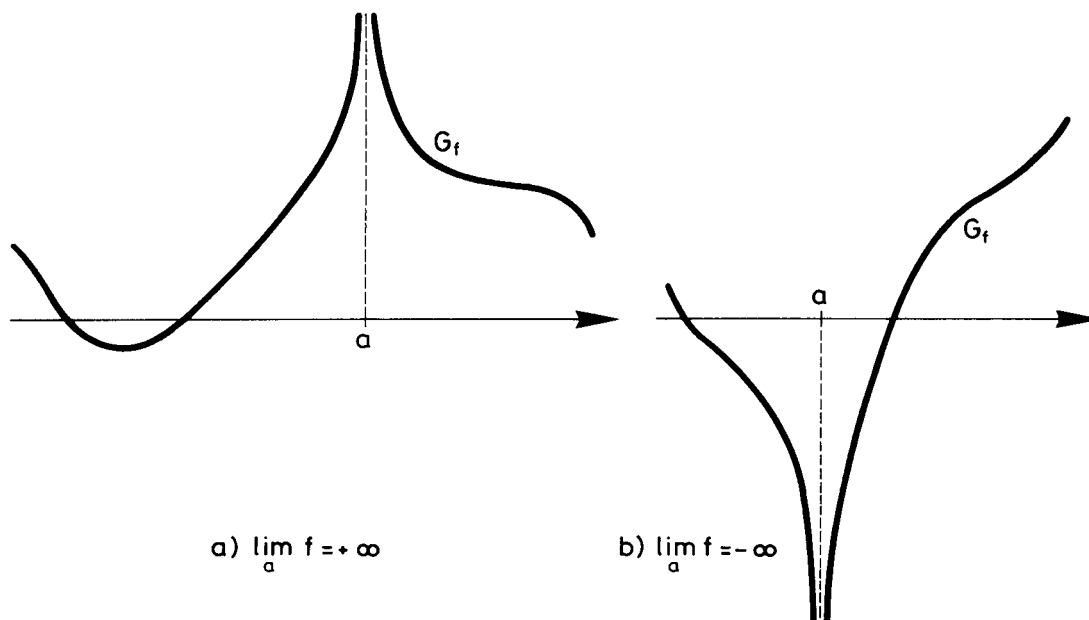


Figura 4.8. Ilustración de límite $+\infty$ y $-\infty$ de una función en un punto

4.3.4 PROPOSICIÓN. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea a un punto de acumulación del conjunto A . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- 1) $\lim_a f = +\infty$;
- 2) para cualquier sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A que cumpla las condiciones siguientes:
 - $\lim u_n = a$;
 - $u_n \neq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
 se verifica: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(u_n)) = +\infty$.

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

4.3.5 PROPOSICIÓN. (*Propiedades algebraicas de los límites infinitos*). Sean $f, g, h: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sea a un punto de acumulación de A y supongamos que se cumplen:

$$\lim_a f = L \in \mathbb{R}, \quad \lim_a g = +\infty, \quad \lim_a h = +\infty.$$

Entonces pueden afirmarse las propiedades siguientes:

- 1) $\lim_a (f \pm g) = \pm\infty$;
- 2) $\lim_a (\lambda g) = +\infty$, si $\lambda > 0$;
- 3) $\lim_a (\lambda g) = -\infty$, si $\lambda < 0$;

- 4) $\lim_a (fg) = +\infty$, si $L > 0$;
 5) $\lim_a (fg) = -\infty$, si $L < 0$;
 6) $\lim_a \frac{f}{g} = 0$;
 7) $\lim_a (g+h) = +\infty$;
 8) $\lim_a (gh) = +\infty$.

Demostración:

Todas ellas resultan inmediatamente y se proponen como ejercicio. ■

4.3.6 DEFINICIÓN. (*Límites laterales infinitos de una función en un punto*). De forma análoga a los límites laterales de una función en un punto, pueden definirse los *límites laterales infinitos* de una función en un punto. En efecto, sea f una función real definida en el subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ y sea a un punto de acumulación de A .

- Se dice que f tiene límite $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$) por la derecha en el punto a si dado $k > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in]a, a + \delta[\cap A$, se cumple $f(x) > k$ (respectivamente, $f(x) < -k$).
- De modo análogo se define el límite infinito por la izquierda en un punto.
- Obviamente, si f cumple $\lim_{a^+} f = \lim_{a^-} f = +\infty$, entonces se tiene $\lim_a f = +\infty$, (y lo mismo para $-\infty$). También resulta evidente ser diferentes los límites laterales en un punto (ya sean finitos o infinitos) implica la no existencia de límite de la función en dicho punto.

4.3.7 EJEMPLO. Se tienen las igualdades siguientes:

$$\lim_{0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_0 \frac{1}{x} \text{ no existe}$$

$$\lim_{2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty, \quad \lim_{2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty, \quad \lim_2 \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty,$$

4.3.8 DEFINICIÓN. (*Límite de una función en el infinito*). Se define a continuación la extensión del concepto de límite de una función en un punto a de la recta real ampliada, esto es, cuando $a = +\infty$ o bien cuando $a = -\infty$.

- Sea f una función real definida en un intervalo $[x_0, +\infty[$ de \mathbb{R} ; se dice que esta función *tiene límite* $L \in \mathbb{R}$ en $a = +\infty$, notándose $\lim_{+\infty} f = L$ o bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x > \max\{\lambda, x_0\}$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- De manera análoga se define el límite de f en $a = -\infty$, que se designa $\lim_{-\infty} f = L$ o bien $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.
- Ambos límites se denominan *límites en el infinito*; la redacción concreta de las propiedades del límite en el infinito en relación con las sucesiones y las operaciones con funciones, se propone como ejercicio.

4.3.9 EJEMPLO. Considérese la función $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{3x+1}{2x+7}$; vamos a estudiar la existencia del límite $\lim_{+\infty} g$. Para ello, consideremos la sucesión (n) de límite $+\infty$, cuya sucesión de

imágenes tiene límite $L = 3/2$. En consecuencia, aplicando ahora la definición correspondiente con este valor, se tendrá

$$\left| \frac{3x+1}{2x+7} - \frac{3}{2} \right| = \frac{19}{2(2x+7)} < \varepsilon;$$

esto se cumplirá si $19 < 4\varepsilon x + 14\varepsilon$, es decir, si $x > \frac{19-14\varepsilon}{4\varepsilon} = \lambda(\varepsilon)$. Con ello se ha probado, pues, la igualdad $\lim_{+\infty} \frac{3x+1}{2x+7} = \frac{3}{2}$.

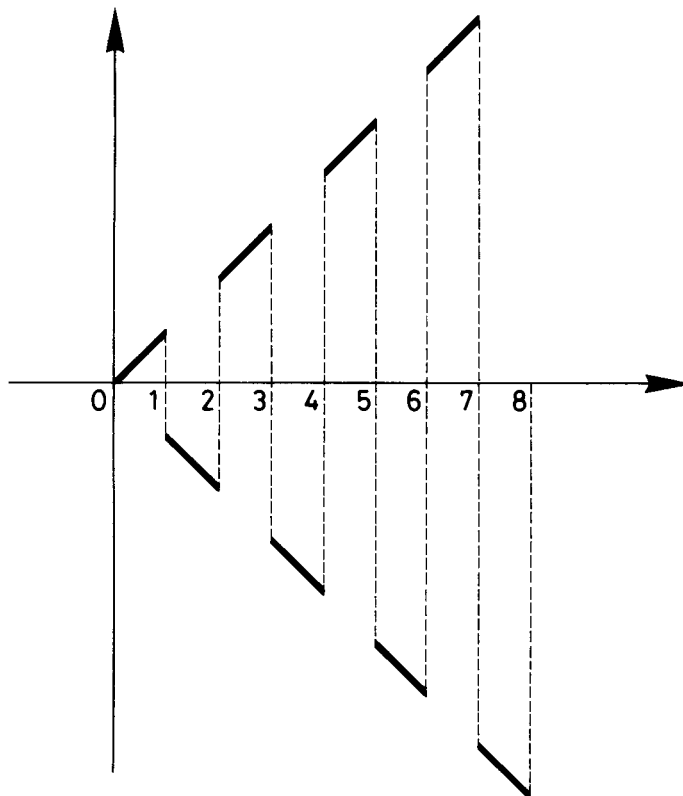


Figura 4.9. Ilustración de $\lim_a |f| = \infty$

4.3.10 OBSERVACIÓN.

- Como última extensión del límite de una función en un punto, parece natural plantearse la coincidencia de las dos extensiones de la definición vistas en este apartado, esto es, extender la noción de límite de una función en un punto al caso en que ambos (punto y límite) sean de la recta real ampliada. Se propone como ejercicio definir rigurosamente y enunciar las propiedades de expresiones tales como: $\lim_{+\infty} f = +\infty$, $\lim_{-\infty} f = +\infty$ y otras que pueden surgir en dicha extensión.
- Se escribe $\lim_a f = \infty$, con $a \in \overline{\mathbb{R}}$, para indicar que se cumple $\lim_a |f| = +\infty$; obsérvese que puede

cumplirse $\lim_a f = \infty$, sin que se cumplan ni $\lim_a f = +\infty$ ni $\lim_a f = -\infty$, de modo análogo al caso de límites de sucesiones. Por ejemplo, la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [2n, 2n+1[, \\ -x, & \text{si } x \in [2n+1, 2n+2]; \end{cases}$$

cumple que $\lim_{+\infty} f = \infty$, pero $\lim_{+\infty} f \neq +\infty$ y $\lim_{+\infty} f \neq -\infty$ (véase la figura 4.9). A partir de ahora, pues, la expresión $\lim_a f = L$ se entenderá en sentido amplio, es decir, que tanto a como L pueden ser de la recta real ampliada, siempre y cuando la expresión tenga sentido para la función f .

4.3.11 DEFINICIÓN. (*Formas indeterminadas o indeterminaciones.*) Hay situaciones en las cuales no es fácil intuir el valor del límite de una función, ya que no es posible aplicar las propiedades del límite en relación con las operaciones con funciones de manera automática. Así, por ejemplo, si se considera la función f definida por,

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty[,$$

puede plantearse el cálculo del límite $\lim_{+\infty} f$, límite que no es posible conocer aplicando de forma directa los teoremas sobre límites y operaciones con funciones que se han visto hasta ahora.

- Los casos como el anterior, en los cuales no puede determinarse el límite de una función en un punto aplicando los teoremas al respecto, se denominan *formas indeterminadas* o también *indeterminaciones*. En algunos casos, basta una sencilla manipulación algebraica en la expresión analítica de la función para resolver el problema; en efecto, en el caso de antes, la expresión de $f(x)$ puede transformarse mediante:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x}) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}},$$

lo cual permite concluir que:

$$\lim_{+\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) = \lim_{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = 0$$

En otros casos, el cálculo de límites de formas indeterminadas no puede resolverse de una manera tan fácil, tal y como tendremos ocasión de ver; sin embargo, es útil tener presente que las indeterminaciones se pueden clasificar en los tipos que se detallan a continuación.

- Las formas indeterminadas se clasifican en los tipos siguientes:
 - 1) Indeterminación “ $\infty - \infty$ ”:
si se quiere calcular $\lim_a (f - g)$ y se cumple $\lim_a f = +\infty$ y $\lim_a g = +\infty$;
 - 2) Indeterminación “ $0 \cdot \infty$ ”:
si se quiere calcular $\lim_a (fg)$ y se cumple $\lim_a f = 0$ y $\lim_a g = \infty$;
 - 3) Indeterminación “ $\frac{0}{0}$ ”:
si se quiere calcular $\lim_a \frac{f}{g}$ y se cumple $\lim_a f = 0$ y $\lim_a g = 0$;
 - 4) Indeterminación “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”:
si se quiere calcular $\lim_a \frac{f}{g}$ y se cumple $\lim_a f = \infty$ y $\lim_a g = \infty$;

- 5) Indeterminación “ 1^∞ ”:
 si se quiere calcular $\lim_a(f^g)$ y se cumple $\lim_a f = 1$ y $\lim_a g = \infty$.
- 6) Indeterminación “ 0^0 ”:
 si se quiere calcular $\lim_a(f^g)$ y se cumple $\lim_a f = 0$ y $\lim_a g = 0$.
- 7) Indeterminación “ ∞^0 ”:
 si se quiere calcular $\lim_a(f^g)$ y se cumple $\lim_a f = \infty$ y $\lim_a g = 0$.

4.3.12 OBSERVACIÓN. En relación a la clasificación de indeterminaciones, vale la pena destacar que los tipos 2), 3) y 4) son, en realidad, expresiones diferentes de una misma forma indeterminada y puede pasarse de un caso a otro fácilmente. Así, por ejemplo, en el caso 3) si $\lim_a f = \lim_a g = 0$, entonces se cumple $\lim_a \frac{1}{g} = \infty$, con lo cual, calcular $\lim_a \frac{f}{g}$ es lo mismo que calcular $\lim_a f \cdot \frac{1}{g}$, expresión que es una forma indeterminada del tipo 2). Razónese como ejercicio la equivalencia entre las indeterminaciones de los tipos 3) y 4).

4.4 EQUIVALENCIA LOCAL DE FUNCIONES.

4.4.1 En este apartado se trata la equivalencia local de dos funciones; es esta una propiedad que caracteriza las funciones cuyo comportamiento en el entorno de un punto (que puede ser de $\overline{\mathbb{R}}$), es idéntico desde el punto de vista del límite. Como se verá, dicha propiedad tiene aplicaciones interesantes y prácticas para el cálculo del límite de una función en un punto.

4.4.2 DEFINICIÓN. (*Equivalencia local de funciones*). Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A . Se dice que las funciones f y g son *localmente equivalentes en el punto a* , o simplemente *equivalentes en el punto a* , si se cumple $\lim_a \frac{f}{g} = 1$. Para indicar que dos funciones f y g son localmente equivalentes en el punto a , se escribe: $(f \sim g)(a)$, o simplemente, $f \sim g$ si el punto a se sobreentiende. Queremos decir también que la definición dada no es la más general de equivalencia local de funciones, aun cuando es suficiente para los objetivos de este texto.

4.4.3 EJEMPLO.

- 1) Las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$, son localmente equivalentes en el origen (punto de acumulación de su dominio común), puesto que se cumple $\lim_0 \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
- 2) Las funciones $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = \frac{1}{3x+1}, \quad x \in A = \mathbb{R} - \{-1/3\}, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x \in B = \mathbb{R} - \{-1\},$$

son localmente equivalentes en el origen, ya que están definidas en un entorno de dicho punto y se

$$\text{cumple } \lim_0 \frac{\frac{1}{3x+1}}{\frac{1}{x+1}} = 1.$$

- 3) Las funciones $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad x \in]-1, +\infty[, \quad g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

- 5) Indeterminación “ 1^∞ ”:
 si se quiere calcular $\lim_a(f^g)$ y se cumple $\lim_a f = 1$ y $\lim_a g = \infty$.
- 6) Indeterminación “ 0^0 ”:
 si se quiere calcular $\lim_a(f^g)$ y se cumple $\lim_a f = 0$ y $\lim_a g = 0$.
- 7) Indeterminación “ ∞^0 ”:
 si se quiere calcular $\lim_a(f^g)$ y se cumple $\lim_a f = \infty$ y $\lim_a g = 0$.

4.3.12 OBSERVACIÓN. En relación a la clasificación de indeterminaciones, vale la pena destacar que los tipos 2), 3) y 4) son, en realidad, expresiones diferentes de una misma forma indeterminada y puede pasarse de un caso a otro fácilmente. Así, por ejemplo, en el caso 3) si $\lim_a f = \lim_a g = 0$, entonces se cumple $\lim_a \frac{1}{g} = \infty$, con lo cual, calcular $\lim_a \frac{f}{g}$ es lo mismo que calcular $\lim_a f \cdot \frac{1}{g}$, expresión que es una forma indeterminada del tipo 2). Razónese como ejercicio la equivalencia entre las indeterminaciones de los tipos 3) y 4).

4.4 EQUIVALENCIA LOCAL DE FUNCIONES.

4.4.1 En este apartado se trata la equivalencia local de dos funciones; es esta una propiedad que caracteriza las funciones cuyo comportamiento en el entorno de un punto (que puede ser de $\overline{\mathbb{R}}$), es idéntico desde el punto de vista del límite. Como se verá, dicha propiedad tiene aplicaciones interesantes y prácticas para el cálculo del límite de una función en un punto.

4.4.2 DEFINICIÓN. (*Equivalencia local de funciones*). Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A . Se dice que las funciones f y g son *localmente equivalentes en el punto a* , o simplemente *equivalentes en el punto a* , si se cumple $\lim_a \frac{f}{g} = 1$. Para indicar que dos funciones f y g son localmente equivalentes en el punto a , se escribe: $(f \sim g)(a)$, o simplemente, $f \sim g$ si el punto a se sobreentiende. Queremos decir también que la definición dada no es la más general de equivalencia local de funciones, aun cuando es suficiente para los objetivos de este texto.

4.4.3 EJEMPLO.

- 1) Las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$, son localmente equivalentes en el origen (punto de acumulación de su dominio común), puesto que se cumple $\lim_0 \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
- 2) Las funciones $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = \frac{1}{3x+1}, \quad x \in A = \mathbb{R} - \{-1/3\}, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x \in B = \mathbb{R} - \{-1\},$$

son localmente equivalentes en el origen, ya que están definidas en un entorno de dicho punto y se

$$\text{cumple } \lim_0 \frac{\frac{1}{3x+1}}{\frac{1}{x+1}} = 1.$$

- 3) Las funciones $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad x \in]-1, +\infty[, \quad g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

son localmente equivalentes en el origen, puesto que: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln e = 1$.

4.4.4 OBSERVACIÓN.

- Es fácil ver que, dado un subconjunto $A \in \mathbb{R}$ y un punto $a \in A'$, la relación \sim definida en el conjunto $\mathcal{F}(A; \mathbb{R})$ es, efectivamente, una relación de equivalencia, esto es, que se cumplen las propiedades siguientes:
 - 1) $(f \sim f)(a)$;
 - 2) si $(f \sim g)(a)$, entonces $(g \sim f)(a)$;
 - 3) si $(f \sim g)(a)$ y $(g \sim h)(a)$, entonces $(f \sim h)(a)$,
 cualesquiera que sean las funciones $f, g, h \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R})$.
- Teniendo presente que la relación \sim es de equivalencia en el conjunto $\mathcal{F}(A; \mathbb{R})$ y en virtud de la definición dada en 4.4.2, se pueden establecer las propiedades de la equivalencia local de funciones que posibilitan sus interesantes aplicaciones.

4.4.5 PROPOSICIÓN. Sean dos funciones $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sea a un punto de acumulación de A y supongamos que se cumple: $\lim_a f = \lim_a g = L \neq 0$; en estas condiciones, las funciones f y g son localmente equivalentes en a .

Demostración:

Inmediata, pues entonces se cumple: $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g} = \frac{L}{L} = 1$. ■

4.4.6 OBSERVACIÓN.

- El resultado de la proposición anterior no es cierto si $L = 0$; así, por ejemplo, si se consideran las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3, x \in \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$, se cumple que $\lim_0 f = 0$ y $\lim_0 g = 0$ y no obstante no son localmente equivalentes en ese punto, ya que $\lim_0 \frac{f}{g} = 0$.
- El recíproco de la proposición anterior no tiene por qué ser cierto de un modo general, es decir, es posible que dos funciones f y g sean localmente equivalentes en el punto a y sin embargo, sus límites respectivos en dicho punto no existan. Considérense, por ejemplo, las funciones $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, en $A = \mathbb{R}$ y $B =]-1, +\infty[$ por,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } x \geq 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0, \\ \ln(1+x), & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Estas dos funciones son localmente equivalentes en el origen y, no obstante, ninguna de ellas tiene límite en este punto. Sin embargo, tal como se prueba en la proposición que sigue, es suficiente la existencia de uno de los dos límites, para poder afirmar que entonces sí es cierto el recíproco de (4.4.5).

4.4.7 PROPOSICIÓN. Si dos funciones $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son localmente equivalentes en el punto a , sólo caben dos alternativas: o bien ambas tienen el mismo límite en dicho punto o bien ninguna de ellas lo tiene.

Demostración:

Supongamos que existe el límite $\lim_a f = L \in \mathbb{R}$; si las funciones son localmente equivalentes en el punto a , se cumple $\lim_a \frac{g}{f} = 1$, con lo que $\lim_a g = \lim_a \left(f \cdot \frac{g}{f} \right) = \lim_a f \cdot \lim_a \frac{g}{f} = L$, esto es, ambas funciones tienen el mismo límite en el punto a .

Si, por el contrario, $\lim_a f$ no existe, tampoco puede existir el límite de g en el punto a , ya que si se cumpliera $\lim_a g = L \in \mathbb{R}$, por un razonamiento similar al anterior se concluiría que $\lim_a f = L$, lo cual es contradictorio. ■

4.4.8 OBSERVACIÓN. La importancia de este resultado es evidente: permite afirmar la existencia y el valor del límite en un punto de una función si se conoce el límite en dicho punto de una función equivalente.

La proposición que sigue es también muy útil para la aplicación práctica de la equivalencia local al cálculo de límites de funciones, puesto que permite la sustitución de unas funciones por otras equivalentes en productos y cocientes, con el objetivo de facilitar el cálculo de límites. Conviene insistir en que, no obstante, no se cumple una propiedad análoga para sumas o diferencias de funciones.

4.4.9 PROPOSICIÓN. Sea $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones equivalentes en el punto a ; si $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $\lim_a fh = L$, se cumple entonces que $\lim_a gh = L$.

(Dicho de otro modo: si dos funciones $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ son localmente equivalentes en a se cumple $\lim_a fh = \lim_a gh$, cualquiera que sea la función $h: A \rightarrow \mathbb{R}$).

Demostración:

Por ser $(f \sim g)(a)$ se cumple $\lim_a \frac{f}{g} = 1$, con lo que

$$\lim_a (gh) = \lim_a \frac{f}{g} \cdot \lim_a gh = \lim_a \left(\frac{f}{g} \cdot gh \right) = \lim_a fh,$$

como se quería probar. ■

4.4.10 EJEMPLO. Para calcular el límite en el origen de la función $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \frac{2(1 - \cos x)^2}{\ln^4(1+x)}, \quad x \in A =]-1, 0[\cup]0, +\infty[,$$

puede aplicarse la proposición anterior, teniendo en cuenta que se cumplen las siguientes equivalencias locales en el punto $a = 0$ $\left((1 - \cos x) \sim \frac{x^2}{2} \right) (0)$ y $(\ln(1+x) \sim x) (0)$. Con ello se obtiene

$$\lim_0 F = \lim_0 \frac{2(1 - \cos x)^2}{\ln^4(1+x)} = \lim_0 \frac{2 \left(\frac{x^2}{2} \right)^2}{\ln^4(1+x)} = \lim_0 \frac{2 \left(\frac{x^2}{2} \right)^2}{x^4} = \frac{1}{2}.$$

4.4.11 DEFINICIÓN. (*Equivalencia de funciones en el infinito*). El concepto de equivalencia local de funciones en un punto $a \in \mathbb{R}$, puede extenderse de modo natural a puntos de la recta real ampliada; esta extensión da lugar a las *funciones equivalentes en el infinito*. Sean $f, g: [x_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$; se dice que dichas funciones son *equivalentes en $+\infty$* , si se cumple $\lim_{+\infty} \frac{f}{g} = 1$. Se define de modo análogo la

equivalencia de funciones en $-\infty$. Para designar que las funciones f, g son equivalentes en $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente, se escribe:

$$(f \sim g)(+\infty), \quad (f \sim g)(-\infty).$$

La equivalencia en el infinito es, efectivamente, una relación de equivalencia en el correspondiente conjunto de funciones. Razónense los detalles como ejercicio.

4.4.12 PROPOSICIÓN. (*Propiedades de la equivalencia en el infinito*). La equivalencia de funciones en el infinito cumple propiedades análogas a la equivalencia local en $a \in \mathbb{R}$. Se enuncian con la equivalencia en $+\infty$, existiendo propiedades análogas para la equivalencia en $-\infty$.

- 1) Si dos funciones reales $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ son tales que $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} g = L \neq 0$, entonces se cumple la equivalencia $(f \sim g)(+\infty)$.
- 2) Si dos funciones $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ son tales que $(f \sim g)(+\infty)$ y existe el límite $\lim_{+\infty} f = L$, entonces se cumple $\lim_{+\infty} g = L$.
- 3) Si las funciones $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ son tales que $(f \sim g)(+\infty)$ y $\lim_{+\infty} (fh) = L$, entonces se cumple $\lim_{+\infty} (gh) = L$.

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

4.4.13 EJEMPLO.

- 1) Las funciones $f: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_0$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, son equivalentes en $+\infty$, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

- 2) Sea P una función polinómica de coeficientes reales:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{R} \ (0 \leq j \leq n), \ a_n \neq 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Está claro que si los coeficientes de dicha función polinómica $a_j, 1 \leq j \leq n$, no tienen todos el mismo signo, el límite $\lim_{+\infty} P$ es una forma indeterminada. Observemos, no obstante, que la función polinómica P es equivalente en el infinito a la función polinómica $P_1(x) = a_n x^n, a_n \neq 0, x \in \mathbb{R}$, puesto que se cumple

$$\lim_{+\infty} \frac{P(x)}{P_1(x)} = \lim_{+\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} x^{-n}\right) = 1.$$

Por otra parte, es evidente que el límite en $+\infty$ de la función P_1 vale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P_1(x) = +\infty, \text{ si } a_n > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P_1(x) = -\infty, \text{ si } a_n < 0,$$

con lo que, en virtud de 4.4.12 puede afirmarse que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = +\infty, \text{ si } a_n > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = -\infty, \text{ si } a_n < 0.$$

3) El límite en el infinito de una función racional:

$$\rho(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad x \in \mathbb{R} - \{Q(x) = 0\},$$

donde: $a_j \in \mathbb{R}$ ($0 \leq j \leq n$), $b_i \in \mathbb{R}$ ($0 \leq i \leq m$), $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, puede calcularse aplicando el resultado (3) de la proposición 4.4.12. En efecto, teniendo en cuenta las equivalencias: $(P(x) \sim a_n x^n)(+\infty)$ y $(Q(x) \sim b_m x^m)(+\infty)$, resulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{si } n > m, \\ 0, & \text{si } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{si } n = m. \end{cases}$$

4.4.14 DEFINICIÓN. (*Infinitésimos. Equivalencia de infinitésimos*).

- Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A ; se dice que f es un *infinitésimo en el punto a* , si se cumple $\lim_a f = 0$. Como ejemplos sencillos de infinitésimos en el origen, se tienen las funciones x^p , $p \in \mathbb{N}$ y también las funciones λx^p , con $\lambda \neq 0$. Hay que notar que, de hecho, basta considerar infinitésimos en el origen, por cuanto si una función f es un infinitésimo en el punto a , la función $g(t) = f(x - a)$ es un infinitésimo en el origen $t = 0$ y viceversa, con lo cual las propiedades respectivas se trasladan de una función a otra.
- Se dice que dos infinitésimos f y g son *equivalentes en un punto a* si son localmente equivalentes en dicho punto, esto es, si $(f \sim g)(a)$. Por ejemplo, las funciones $\sin x$ y x son dos infinitésimos equivalentes en el origen.

4.4.15 DEFINICIÓN. (*Parte principal y Orden de un infinitésimo*). Sea f un infinitésimo en el origen tal que $(f \sim \lambda x^p)$; se dice entonces que λx^p es la *parte principal del infinitésimo f* y que f es un *infinitésimo de orden p* . Así, por ejemplo, $\sin x$ es un infinitésimo de orden 1, $1 - \cos x$ es un infinitésimo de orden 2 y λx^p , ($\lambda \neq 0$) es un infinitésimo de orden p .

El interés de estas definiciones reside en la propiedad siguiente: si f es un infinitésimo de orden p , esto es, tal que $(f \sim \lambda x^p)$, entonces λ y p son los únicos que satisfacen esta condición. En efecto, si pudiera ser cierto que $(f \sim \mu x^q)$, por ser \sim una relación de equivalencia, se cumpliría $(\lambda x^p \sim \mu x^q)(0)$, es decir, $\lim_0 \frac{\lambda x^p}{\mu x^q} = 1$, lo cual es cierto únicamente si se cumple $p = q$ y $\lambda = \mu$.

4.4.16 DEFINICIÓN. (*Infinitos. Infinitos equivalentes*).

- Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea a un punto de acumulación de A . Si se cumple $\lim_a f = \infty$, entonces se dice que f es un *infinito en el punto a* . Así, por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{(x-a)^{2p}}$, es un infinito en el punto a , cualquiera que sea $p = 1, 2, 3, \dots$
- Si f y g son dos infinitos en el punto a , se dice que son *equivalentes* si se cumple $\lim_a \frac{f}{g} = 1$. Así, por ejemplo, las funciones $f: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}_0$ y $g(x) = \frac{1}{|\sin x|}$, $x \in \mathbb{R}_0$, son dos infinitos equivalentes en el origen.
- Se prueba de forma análoga al caso de los infinitésimos, que si f es un infinito equivalente a uno de la forma λx^p , ($\lambda \neq 0$), entonces λ y p son únicos.

4.5 SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES.

4.5.1 Este apartado tiene como objetivo el estudio de las cuestiones básicas relacionadas con sucesiones y series cuyos términos son funciones. Este estudio tiene mucho interés, por cuanto permite ver una forma nueva de definir una función: por paso al límite en una sucesión de funciones. Tiene asimismo interés estudiar las condiciones mediante las cuales las propiedades de las funciones de la sucesión “se trasladan” a la función límite. El estudio se hace con funciones reales de una variable y se indica finalmente qué resultados son válidos para funciones complejas definidas en \mathbb{C} .

4.5.2 DEFINICIÓN. (*Sucesiones funcionales*). Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} ; una *sucesión funcional* o *sucesión de funciones* definidas en A es cualquier aplicación Φ del conjunto \mathbb{N} de los números naturales en $\mathcal{F}(A; \mathbb{R})$, de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, su imagen $\Phi(n) = f_n$ es una función real de dominio A . Como es habitual, se identifica la sucesión con la familia de imágenes $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la cual también se indica abreviadamente por (f_n) . La función f_n , se denomina *término n -ésimo* o *general de la sucesión*.

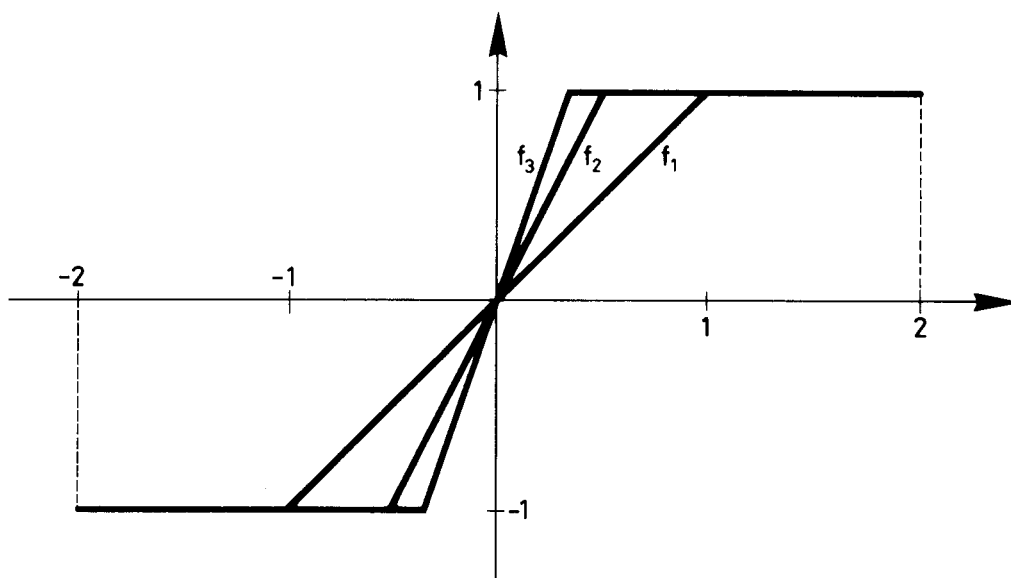


Figura 4.10. Gráficas de algunas funciones de la sucesión del ejemplo 4.5.3

4.5.3 EJEMPLO. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran las funciones $f_n: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$\begin{cases} f_n(x) = +1, & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 2; \\ f_n(x) = nx, & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ f_n(x) = -1, & \text{si } -2 \leq x < -\frac{1}{n}. \end{cases}$$

Con ello, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones definidas en el intervalo $[-2, 2]$. En la figura 4.10 se han representado algunos elementos de esta sucesión.

4.5.4 DEFINICIÓN. (*Convergencia puntual de una sucesión funcional. Función límite*). Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$ y $x \in A$, entonces $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales; si esta sucesión numérica es convergente, se dice entonces que la sucesión de funciones (f_n) converge en el punto $x \in A$.

- Si la sucesión numérica $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para todo punto $x \in D \subset A$, se dice entonces que la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente en el conjunto D , el cual recibe el nombre de *dominio de convergencia puntual* de la sucesión funcional $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- En virtud de la definición de dominio de convergencia puntual de una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puede definirse una función $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma siguiente:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x)), \quad x \in D.$$

La función f así definida, se denomina *función límite (puntual)* de la sucesión funcional $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y se designa mediante las notaciones,

$$(f_n) \rightarrow f, \quad f = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n), \quad f = \lim f_n.$$

Obsérvese que, en virtud de la definición de límite de una sucesión numérica, si $f = \lim f_n$ y $x \in D$ (manteniendo significado y notaciones), dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número natural $n_0(\varepsilon; x)$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ para todo } n > n_0(\varepsilon; x).$$

Nótese que se ha escrito detalladamente $n_0(\varepsilon; x)$, para poner de manifiesto la dependencia del número natural n_0 respecto de ε y del punto $x \in D$.

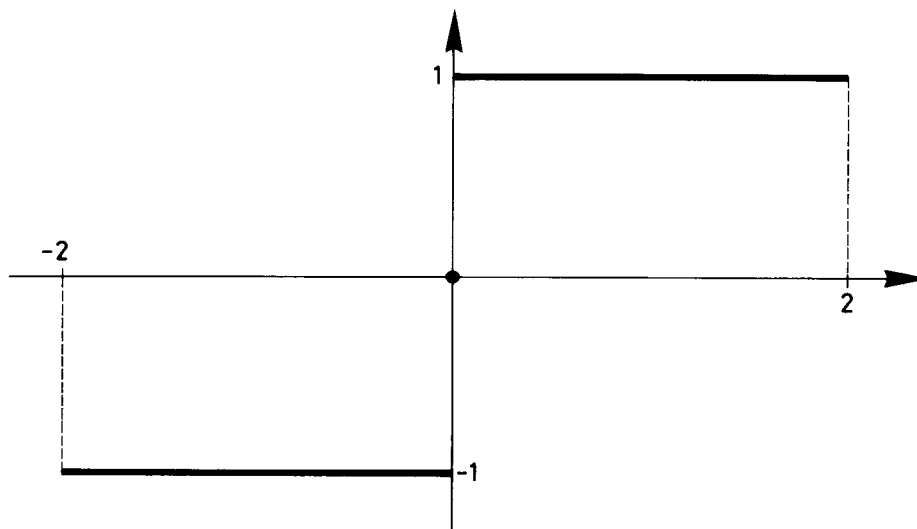


Figura 4.11. Gráfica de la función límite del ejemplo 4.5.5

4.5.5 EJEMPLO. Se trata de estudiar la convergencia puntual de la sucesión funcional definida en el ejemplo 4.5.3; para ello, si $x \in A = [-2, 2]$, debe considerarse la sucesión numérica $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$

y estudiar su carácter. Visto el dominio de $f_n, n \in \mathbb{N}$ y su definición, dividiremos el estudio en los apartados siguientes:

- Si $1 < x \leq 2$, entonces $f_n(x) = 1$ para todo $n \geq 1$, es decir, la sucesión de imágenes es convergente (sucesión constante) y tiene límite 1.
- Si $-2 \leq x < -1$, se cumple $f_n(x) = -1$ para todo $n \geq 1$, con lo que, en este caso, el límite de la sucesión de imágenes es -1 .
- Si $0 < x \leq 1$, existe un número natural p de tal manera que $\frac{1}{p+1} < x \leq \frac{1}{p}$, y entonces se tiene,

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{si } n \leq p, \\ 1, & \text{si } n > p, \end{cases}$$

es decir, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$. Se prueba análogamente que si $-1 \leq x < 0$, la sucesión de imágenes tiene límite -1 .

- Finalmente, en el origen se cumple $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.
- Así pues, la sucesión funcional considerada es puntualmente convergente en el conjunto $D = A = [-2, 2]$ y la función límite de dicha sucesión funcional, es la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x \leq 2; \\ 0, & \text{si } x = 0; \\ -1, & \text{si } -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

(Véase la figura 4.11).

- Para constatar la dependencia de $n_0(\varepsilon; x)$ respecto al punto x , tomemos, por ejemplo, $\varepsilon = 0.1$ y consideremos los puntos $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 0.1$. Por un lado se cumple: $f_1(0.5) = 0.5$, $f_n(0.5) = 1$, para todo $n \geq 2$, es decir, $n_0(0.1; 0.5) = 1$. Por lo que respecta al punto x_2 , se cumple: $f_1(0.1) = 0.1$, $f_2(0.1) = 0.2$, \dots , $f_9(0.1) = 0.9$, $f_n(0.1) = 1$ para todo $n \geq 10$, con lo que $n_0(0.1; 0.1) = 9$.

El estudio de la convergencia de una sucesión funcional hacia su función límite puede profundizarse en el siguiente sentido: viendo si es posible eliminar la dependencia del número natural n_0 respecto al punto x del dominio de convergencia puntual, es decir, estudiando si para cada $\varepsilon > 0$ existe un único número natural $n_0(\varepsilon)$ que cumpla dicha condición para todo punto del dominio de convergencia. Más adelante se verá que esta independencia de n_0 respecto al punto x , reporta grandes ventajas.

4.5.6 DEFINICIÓN. (*Convergencia uniforme de una sucesión funcional*). Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$, tal que es puntualmente convergente a la función f en $D \subset A$. Se dice que esta sucesión es *uniformemente convergente* a f en el subconjunto D' de A si, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe un número natural $n_0(\varepsilon)$ tal que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0(\varepsilon) \text{ y para todo } x \in D'.$$

El conjunto D' se denomina *dominio de convergencia uniforme* de la sucesión funcional.

- La condición que establece la definición anterior, equivale a decir que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que:

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0(\varepsilon) \text{ y para todo } x \in D',$$

que se puede interpretar geoméricamente como se muestra en la figura 4.12: si la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en D' , entonces la gráfica de las funciones f_n está entre las gráficas de $f - \varepsilon$ y $f + \varepsilon$, cualquiera que sea $n > n_0$.

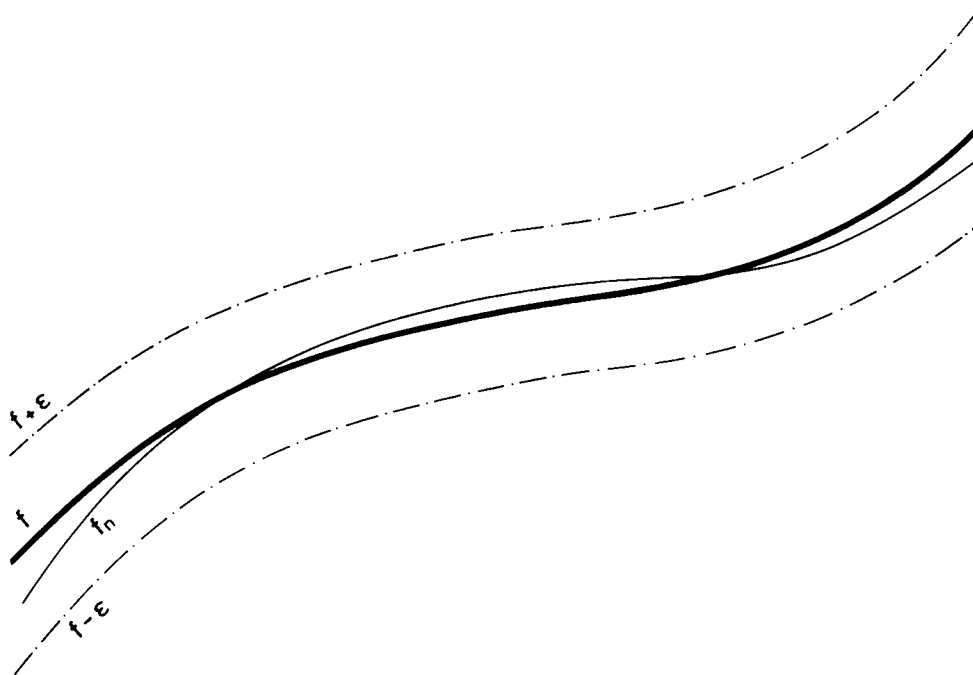


Figura 4.12. Interpretación geométrica de la convergencia uniforme de una sucesión funcional

4.5.7 EJEMPLO. Vamos a completar el estudio de 4.5.5 viendo que la convergencia de la sucesión funcional (f_n) a la función límite f no es uniforme. Para ello, veremos que la definición no puede cumplirse para todo x del dominio de convergencia puntual; en efecto, si se considera por ejemplo $\varepsilon = 1/3$ y se toma $x = \frac{1}{2n} > 0$, entonces cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, se cumple,

$$\left| f_n \left(\frac{1}{2n} \right) - f \left(\frac{1}{2n} \right) \right| = \left| n \cdot \frac{1}{2n} - 1 \right| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon.$$

Ello nos dice que no puede desvincularse n_0 del punto x o, en otras palabras, no puede encontrarse n_0 tal que se cumpla la condición de la definición dada en 4.5.6. En la figura 4.13 puede verse la interpretación geométrica de este ejemplo.

En las proposiciones que se estudian a continuación se estudian las propiedades más importantes de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones.

4.5.8 PROPOSICIÓN. Toda sucesión funcional uniformemente convergente es, en particular, puntualmente convergente; el recíproco no es cierto (esto es, la convergencia puntual es condición necesaria para la convergencia uniforme, pero no es condición suficiente).

Demostración:

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$ y tal que es uniformemente convergente a una función f en $D' \subset A$. La propia definición de convergencia uniforme vista en (4.5.6) dice que, en particular, dicha sucesión converge puntualmente a f en D' , por cuanto se cumple la definición 4.5.4. Dicho de otro modo: la convergencia puntual de una sucesión funcional es condición necesaria para su convergencia uniforme.

Lo visto en el ejemplo 4.5.7 pone de manifiesto que el recíproco no es cierto, esto es, que la convergencia puntual no garantiza la convergencia uniforme. ■

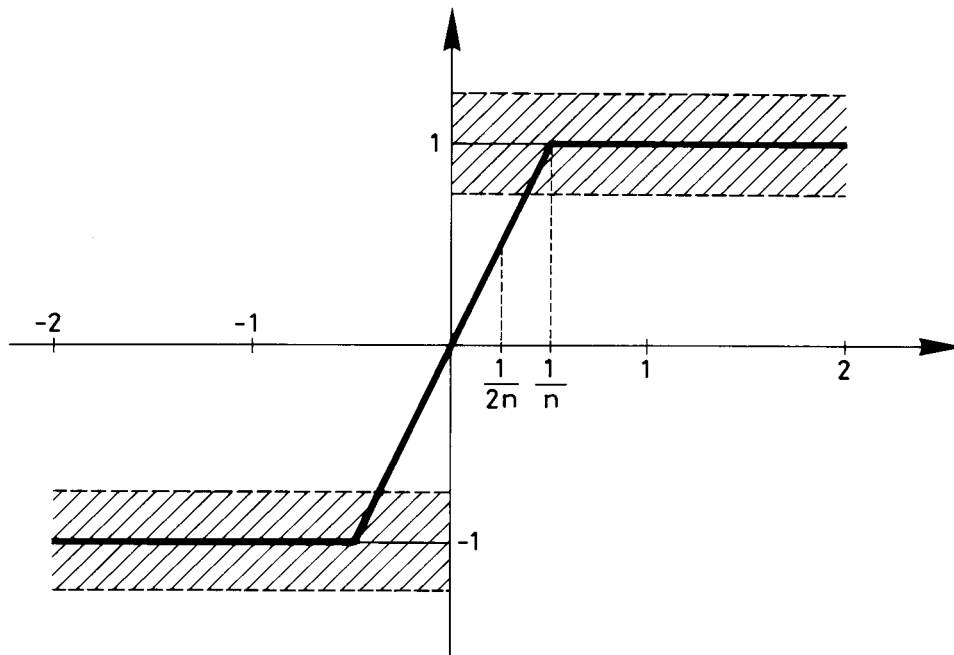


Figura 4.13. Interpretación geométrica del ejemplo 4.5.7

4.5.9 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Cauchy para sucesiones funcionales.*)

Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$; una condición necesaria y suficiente para que dicha sucesión sea uniformemente convergente en $D' \subset A$, es que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, exista un número natural n_0 tal que:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0, \text{ para todo } p > 0 \text{ y para todo } x \in D'.$$

Demostración:

- La condición es necesaria. Si se designa por f la función límite uniforme de la sucesión (f_n) y en virtud de la definición de convergencia uniforme, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } n > n_0 \text{ y para todo } x \in D'.$$

Por tanto, cualesquiera que sean $p \geq 0$, $x \in D$ y $n > n_0$, se cumplirá:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo cual prueba que la condición es cierta.

- La condición es suficiente. Cualquiera que sea $x \in D$, la sucesión numérica $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy y, por tanto, convergente. Si se define la función f mediante,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x)), \quad x \in D',$$

entonces, por definición, la sucesión (f_n) converge puntualmente a la función f ; hay que ver ahora que la convergencia es, además, uniforme. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario; puesto que suponemos que la condición de Cauchy es cierta, existirá un natural n_0 tal que,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0, \text{ para todo } p > 0 \text{ y para todo } x \in D'.$$

Pasando al límite cuando $p \rightarrow +\infty$ y dejando n fijo, resulta finalmente:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0 \text{ y para todo } x \in D',$$

es decir, $f = \lim(f_n)$, uniformemente. ■

4.5.10 OBSERVACIÓN. Nótese la importancia de la proposición anterior, puesto que permite probar la convergencia uniforme de una sucesión funcional sin conocer explícitamente su función límite. En la proposición que sigue, se establece la relación entre la convergencia uniforme y la acotación de funciones; este es un primer resultado que nos indica una cuestión muy importante: que la convergencia uniforme preserva las “buenas propiedades” de las funciones, en el sentido que las transmite de las funciones de la sucesión a la función límite, tal como se verá en capítulos posteriores con las propiedades de continuidad, derivabilidad e integrabilidad.

4.5.11 PROPOSICIÓN. Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$ y uniformemente convergente hacia una función f en $D' \subset A$. Si las funciones f_n son acotadas en D' , entonces f también es una función acotada en D' .

Demostración:

Por definición de convergencia uniforme, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número natural $n_0(\varepsilon)$ tal que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0(\varepsilon) \text{ y para todo } x \in D'.$$

Si se toma, por ejemplo, $\varepsilon = 1$, existe entonces un número natural $n_1 = n_0(1)$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < 1, \text{ para todo } n > n_1 \text{ y para todo } x \in D'.$$

Puesto que las funciones f_n son acotadas, existe un número real $k_n > 0$ tal que,

$$|f_n(x)| < k_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y para todo } x \in D'.$$

Fijando ahora $n > n_1$, resulta

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + k_n, \text{ para todo } x \in D',$$

que prueba que la función f es acotada en D' . ■

4.5.12 OBSERVACIÓN. La proposición anterior no es válida si únicamente se asume la hipótesis de convergencia puntual, tal como puede verse a continuación. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f_n(0) = 0 \quad \text{y} \quad f_n(x) = \min \left\{ n, \frac{1}{x} \right\} \quad \text{si } 0 < x \leq 1.$$

Es fácil comprobar que (f_n) tiene por límite puntual la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por,

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si } 0 < x \leq 1.$$

Como resulta inmediatamente de su propia definición, todas las funciones f_n son acotadas en su dominio, mientras que la función f no lo es. La causa de este hecho reside en la no uniformidad de la convergencia de la sucesión (f_n) hacia la función f (Véase la figura 4.14).

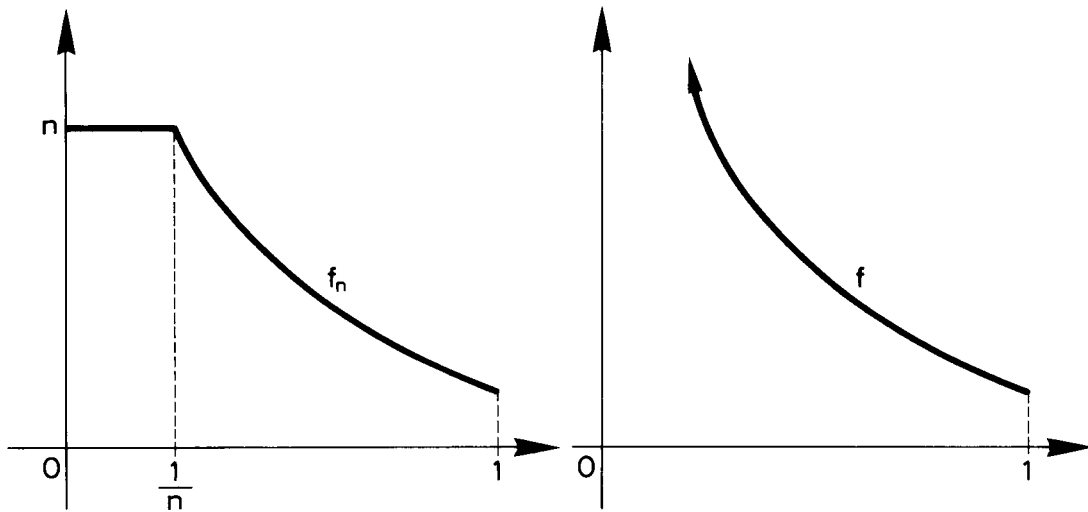


Figura 4.14. Ilustración de la observación 4.5.12

4.5.13 DEFINICIÓN. (*Serie funcional*). Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$; a partir de ella, puede construirse una nueva sucesión de funciones, de forma análoga al caso de las series numéricas, mediante adición ordenada de sus términos. Si se designa por $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la nueva sucesión, sus términos, denominados *sumas parciales n -ésimas*, se definen mediante:

$$F_0 = f_0, \quad F_1 = f_0 + f_1, \quad \dots \quad F_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n = \sum_{k=0}^n f_k, \quad \dots$$

Resulta evidente, dada su propia definición, que el campo de existencia de las funciones F_n , $n \in \mathbb{N}$, es el mismo conjunto A de la sucesión (f_n) a partir de la cual ha sido construida. La pareja de sucesiones

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se denomina *serie de funciones o serie funcional* asociada a la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y se designa por $\sum_{n \geq 0} f_n$, o abreviadamente, $\sum f_n$.

4.5.14 EJEMPLO. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea $x_0 \in \mathbb{R}$; puede considerarse la sucesión (f_n) de funciones polinómicas definidas por:

$$f_n(x) = a_n(x - x_0)^n, \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

La serie funcional asociada a esta sucesión de funciones, $\sum a_n(x - x_0)^n$, se denomina *serie de potencias o serie entera centrada en x_0* . Obsérvese que las sumas parciales de esta serie funcional, son polinomios de la forma $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$; con ello se justifica la denominación clásica de una serie de potencias como un “polinomio de grado infinito”.

Los conceptos de convergencia puntual y de convergencia uniforme definidos para sucesiones de funciones pueden aplicarse de forma evidente a las series de funciones. Asimismo, resulta útil estudiar criterios de convergencia uniforme para las series de funciones, cuestión que se aborda en las proposiciones que siguen.

4.5.15 DEFINICIÓN. (*Convergencia puntual y convergencia uniforme de una serie de funciones*).

- Sea $\sum f_n$ una serie de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$; se dice que dicha serie es *simplemente o puntualmente convergente* en $D \subset A$, si la serie numérica $\sum f_n(x)$ es convergente para todo $x \in D \subset A$.
- Se denomina *función suma* de la serie funcional $\sum f_n$ a la función límite F definida por,

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$

En virtud de su definición, la función suma F de la serie funcional $\sum f_n$, cumple la condición siguiente: si $x \in D$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número natural $n_0(\varepsilon; x)$, tal que:

$$\left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right| = |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon \text{ para todo } n > n_0(\varepsilon; x).$$

- Si la condición anterior se cumple para todo $x \in D'$ con n_0 dependiente sólo de ε , la convergencia se dice que es *uniforme* en D' y entonces se cumple:

$$\left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right| = |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon \text{ para todo } n > n_0(\varepsilon) \text{ y para todo } x \in D'.$$

4.5.16 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Cauchy para series de funciones*). Sea $\sum f_n$ una serie de funciones definidas en el subconjunto A de \mathbb{R} ; una condición necesaria y suficiente para que dicha serie sea uniformemente convergente en $D \subset A$, es que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, exista un natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p \geq 0$, se cumpla:

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \text{ para todo } n > n_0 \text{ y para todo } x \in D.$$

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

4.5.17 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Weierstrass*). Sea $\sum f_n$ una serie de funciones definidas en el subconjunto A de \mathbb{R} . Si existe una serie numérica convergente $\sum M_n$, que cumpla la condición:

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y para todo } x \in D \subset A,$$

entonces la serie funcional $\sum f_n$ es uniformemente convergente en D .

Demostración:

El criterio de Cauchy para series numéricas permite afirmar que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|M_n + M_{n+1} + \cdots + M_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > n_0 \text{ y para todo } p \geq 0.$$

Se trata ahora de aplicar la proposición anterior, teniendo en cuenta la acotación de f_n por la sucesión M_n , para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, cualquiera que sea $x \in D$, se cumple:

$$\begin{aligned} |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| &\leq |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \leq \\ &\leq M_n + M_{n+1} + \cdots + M_{n+p} = |M_n + M_{n+1} + \cdots + M_{n+p}| < \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$ y para todo $p \geq 0$, con lo que, en virtud del criterio de Cauchy, la serie funcional $\sum f_n$ es uniformemente convergente en D . ■

4.5.18 OBSERVACIÓN. (*Sucesiones y series funcionales complejas*). Si se consideran funciones $f_n: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, se definen de forma completamente análoga, sucesiones y series de funciones complejas. Los conceptos de convergencia puntual y de convergencia uniforme son también análogos en este caso y se extienden de forma natural todos los resultados que caracterizan la convergencia de sucesiones y series funcionales; en particular los criterios de Cauchy y el criterio de Weierstrass. La redacción concreta de todas estas definiciones y propiedades se propone como ejercicio.

4.6 SERIES DE POTENCIAS.

4.6.1 Las series de potencias o series enteras son una generalización de las funciones polinómicas, lo cual hace que sus propiedades sean especialmente interesantes, tal y como se tendrá ocasión de ver a lo largo de este apartado y en capítulos sucesivos. Concretamente, se estudiará y se caracterizará el dominio de convergencia de las series de potencias, se estudiará su convergencia uniforme y, por último, se verán las funciones suma de series de potencias, denominadas funciones definidas por series de potencias. El estudio se lleva a cabo inicialmente con series de potencias reales y se completa con un breve estudio de las series de potencias complejas.

4.6.2 DEFINICIÓN. (*Series de potencias o series enteras. Dominio de convergencia*). Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea $x_0 \in \mathbb{R}$; si se consideran las funciones polinómicas $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ definidas por $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $x \in \mathbb{R}$, se denomina *serie entera o serie de potencias de coeficientes a_n , $n \in \mathbb{N}$ centrada en el punto x_0* , a la serie de funciones asociada a la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$; esto es, la sucesión funcional $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cuyo de término n -ésimo es la función $F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

- Siguiendo la notación habitual para las series funcionales, la serie entera anterior se designa mediante $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$, o simplemente, $\sum a_n(x - x_0)^n$.
- El estudio de las series de potencias puede llevarse a cabo con las series de potencias centradas en el origen, puesto que el caso general se deduce de éste aplicando simplemente la traslación $x - x_0$. Así pues, estudiaremos las series de potencias de la forma $\sum a_n x^n$.
- Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias; si el punto $\xi \in \mathbb{R}$ es tal que la serie numérica $\sum a_n \xi^n$ es convergente, se dice entonces que la serie de potencias $\sum a_n x^n$ es *puntualmente convergente en el punto ξ* . El conjunto D formado por todos los puntos en los cuales una serie de potencias es convergente se denomina *dominio de convergencia* de dicha serie. Obsérvese que el dominio de convergencia de una serie de potencias cualquiera nunca puede ser el conjunto vacío, puesto que el origen es siempre un elemento de dicho conjunto. A continuación se caracteriza el dominio de convergencia de una serie de potencias.

4.6.3 PROPOSICIÓN. Sea $\sum a_n x^n$ una la serie de potencias y supongamos que dicha serie es convergente en un punto $\xi \neq 0$. Se cumple entonces que la serie numérica $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente para cualquier x tal que $|x| < |\xi|$.

Demostración:

Por ser convergente la serie numérica $\sum a_n \xi^n$, en virtud de la condición necesaria de convergencia de las series numéricas, se debe cumplir $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \xi^n = 0$, es decir, que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n \xi^n| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Sea ahora un número real x tal que $|x| < |\xi|$, esto es, tal que $\left| \frac{x}{\xi} \right| < 1$; se tendrá entonces que:

$$|a_n x^n| = |a_n \xi^n| \left| \frac{x}{\xi} \right|^n < \varepsilon \left| \frac{x}{\xi} \right|^n \quad \text{para todo } n > n_0,$$

con lo cual se prueba que la serie $\sum |a_n x^n|$ está mayorada por una serie geométrica convergente y, por lo tanto, es convergente; en definitiva, se ha probado que la serie $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente. ■

4.6.4 DEFINICIÓN. (*Radio de convergencia de una serie de potencias*). Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias de dominio de convergencia el subconjunto $D \subset \mathbb{R}$; si se designa por $D_m = \{|x| / x \in D\}$, se define el *radio de convergencia* de la serie dada mediante

$$\rho = \begin{cases} \sup D_m, & \text{si } D_m \text{ es acotado} \\ +\infty, & \text{si } D_m \text{ no es acotado} \end{cases}$$

Mediante el concepto de radio de convergencia, puede caracterizarse con comodidad el dominio de convergencia de una serie de potencias. Cabe observar que, por su propia definición, el radio de convergencia de una serie de potencias verifica la condición $0 \leq \rho \leq +\infty$.

4.6.5 PROPOSICIÓN. Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias de radio de convergencia $\rho > 0$ (supondremos que se cumple $\rho > 0$, puesto que si $\rho = 0$ la serie de potencias $\sum a_n x^n$ es convergente únicamente en el origen). Se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) La serie $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente si $|x| < \rho$;
- 2) La serie $\sum a_n x^n$ es divergente si $|x| > \rho$;

3) ρ es el único que satisface las condiciones anteriores.

Demostración:

- 1) Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $|x| < \rho$, por definición de supremo de un conjunto, existe un número real ξ del dominio de convergencia de la serie, tal que $|x| < |\xi| < \rho$ y la serie $\sum a_n \xi^n$ es convergente, con lo que, en virtud de 4.6.3, la serie $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente.
- 2) Inmediato: si $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > \rho$ cumpliera que la serie numérica $\sum a_n x^n$ fuera convergente, ello sería una contradicción con la definición del radio de convergencia de la serie de potencias.
- 3) Supongamos que dos números distintos ρ_1 y ρ_2 , pudiesen ser radios de convergencia de la serie de potencias y, por tanto, cumplieran ambos las dos condiciones anteriores; si suponemos que, por ejemplo, se cumple $\rho_1 < \rho_2$, es suficiente considerar un número real x tal que $\rho_1 < |x| < \rho_2$, para llegar a una contradicción, puesto que por ser $\rho_1 < |x|$ la serie $\sum a_n x^n$ sería divergente y por ser $|x| < \rho_2$, dicha serie sería absolutamente convergente. ■

4.6.6 DEFINICIÓN. (*Intervalo de convergencia de una serie de potencias*). Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias de radio de convergencia $\rho > 0$; el intervalo $] -\rho, \rho[\subseteq \mathbb{R}$, se denomina *intervalo de convergencia de la serie de potencias*.

Debe notarse que la proposición anterior no afirma nada sobre el carácter de la serie en los puntos tales que $|x| = \rho$; en dichos puntos, se ha de estudiar directamente el carácter de la serie numérica correspondiente (véase más adelante 4.6.10).

4.6.7 PROPOSICIÓN. Toda serie de potencias es uniformemente convergente en cualquier intervalo cerrado contenido en su intervalo de convergencia.

Demostración:

Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias de radio de convergencia $\rho > 0$ y sea un intervalo cerrado cualquiera $[a, b] \subset] -\rho, \rho[$. Si se designa por $r = \max(|a|, |b|)$, se sabe que la serie $\sum |a_n r^n|$ es convergente y, puesto que $|a_n x^n| \leq |a_n r^n|$ cualquiera que sea $x \in [a, b]$, la serie de potencias $\sum a_n x^n$ es uniformemente convergente en el intervalo $[a, b]$ en virtud del criterio de Weierstrass (4.5.17). ■

4.6.8 OBSERVACIÓN. La caracterización de la convergencia de una serie de potencias se realiza, tal como hemos visto, mediante su radio de convergencia. Hay no obstante un inconveniente: la definición del radio de convergencia no es un método práctico para su cálculo efectivo, con lo que deben buscarse propiedades que permitan hacerlo de otra forma. En la proposición que sigue se establece una metodología para el cálculo del radio de convergencia de una serie de potencias, en la cual los coeficientes de la serie juegan un papel esencial.

4.6.9 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Cauchy-Hadamard*.) Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias; si existe el límite

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

se cumple entonces

- 1) si L es finito y $L > 0$, el radio de convergencia de la serie dada es $\rho = \frac{1}{L}$;
- 2) si $L = 0$, el radio de convergencia de la serie dada es $\rho = +\infty$;
- 2) si $L = +\infty$, el radio de convergencia de la serie dada es $\rho = 0$.

Demostración:

- Supongamos que $L \in]0, +\infty[$. Considérese un número real x tal que $0 < |x| < \frac{1}{L}$; aplicando el criterio de la raíz a la serie numérica $\sum |a_n x^n|$, se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|L < 1,$$

con lo que, por aplicación de dicho criterio, la serie $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente. Considerando ahora un x tal que $|x| > \frac{1}{L}$ y aplicando un razonamiento idéntico, se prueba que en ese caso la serie $\sum a_n x^n$ es divergente. La demostración se completa teniendo en cuenta 4.6.5, quedando probado que $\rho = \frac{1}{L}$.

- Supongamos que $L = 0$. Si x es un número real cualquiera, se cumple entonces:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = |x|L = 0 < 1,$$

y, aplicando de nuevo el criterio de la raíz, se establece la convergencia absoluta de la serie $\sum a_n x^n$, para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que $\rho = +\infty$.

- Si $L = +\infty$ el límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = |x| \cdot (+\infty)$$

es $+\infty$ si $x \neq 0$, lo que prueba que la serie de potencias es divergente en este caso; la serie es convergente únicamente si $x = 0$. En definitiva, se tiene $\rho = 0$. ■

4.6.10 OBSERVACIÓN. El criterio de la raíz n -ésima para sucesiones numéricas, establece que si una sucesión de números reales $(|a_n|)$ es tal que existe el límite, $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, entonces también se cumple $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Así pues, de forma análoga al caso de las series numéricas de términos positivos, ello proporciona un método alternativo para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias, ya que muy a menudo, el límite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ es más sencillo de calcular que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

4.6.11 EJEMPLO. Vamos a aplicar lo anterior al estudio concreto de algunas series de potencias; en este estudio se podrá observar la diversidad de intervalos de convergencia, así como constatar la disparidad de comportamiento en los extremos del intervalo de convergencia.

- 1) Considérese la serie de potencias $\sum n! x^n$; para calcular su radio de convergencia, tendremos en cuenta 4.6.10 y, así, calcularemos el límite,

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty,$$

con lo que el radio de convergencia de esta serie de potencias es $\rho = 0$.

- 2) Considérese la serie de potencias $\sum \frac{1}{n!} x^n$; si se calcula el límite

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

se deduce de ello que el radio de convergencia de esta serie de potencias es $\rho = +\infty$.

- 3) Dada la serie de potencias $\sum x^n$, se cumple,

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1} = 1,$$

con lo que el radio de convergencia de esta serie de potencias es $\rho = 1$. Procede ahora estudiar el comportamiento de la serie en los puntos $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, esto es, estudiar la convergencia de las series numéricas $\sum (-1)^n$ y $\sum 1^n$. Puesto que ambas son series geométricas divergentes, la serie de potencias no es convergente en estos puntos. En definitiva, el dominio de convergencia de la serie de potencias considerada es $] - 1, 1[$.

- 4) Sea ahora la serie de potencias $\sum \frac{1}{n} x^n$; el valor del límite $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, permite afirmar que el radio de convergencia de la serie es $\rho = 1$. Para el estudio de los extremos del intervalo, observamos que la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente y la serie $\sum \frac{1}{n}$ es divergente, con lo que el dominio de convergencia de la serie es $[-1, 1[$.

- 5) Si se considera la serie de potencias $\sum \frac{1}{n^2} x^n$, y se calcula el límite $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, se deduce que el radio de convergencia es, en este caso, $\rho = 1$; además, las series $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ son ambas convergentes, de modo que el dominio de convergencia de esta serie de potencias es $[-1, 1]$.

4.6.12 DEFINICIÓN. (*Funciones definidas por series de potencias*). Si $\sum a_n x^n$ es una serie de potencias de radio de convergencia $\rho > 0$, entonces la serie numérica $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < \rho$ y, por tanto, existe la suma de dicha serie numérica, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En estas condiciones, puede definirse una función f mediante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ para todo } x \in] - \rho, \rho[.$$

La función f así definida, recibe el nombre de *función definida por serie de potencias* y su dominio es el intervalo $] - \rho, \rho[$ de convergencia absoluta de la serie de potencias considerada.

- Obsérvese que se ha supuesto $\rho > 0$, ya que si $\rho = 0$, la definición carece de interés.
- En el caso 3) del ejemplo 4.6.11, la función definida por serie de potencias asociada a la serie dada es: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, cuyo campo de existencia es el intervalo $] - 1, 1[$. Más adelante (capítulo 6), se aplicarán las funciones definidas por series de potencias para definir rigurosamente funciones tan importantes como la exponencial y las trigonométricas.

4.6.13 DEFINICIÓN. (*Serie enteras complejas*). Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números complejos y $z_0 \in \mathbb{C}$, pueden considerarse para cada $n \in \mathbb{N}$ los polinomios complejos definidos por $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n, z \in \mathbb{C}$. La serie funcional asociada a la sucesión (f_n) , recibe el nombre de *serie entera (compleja) o serie (compleja) de potencias con centro en z_0* , notándose $\sum a_n(z - z_0)^n$. Se especifica que una serie de potencias es compleja cuando dicha condición no se sobreentiende; en caso contrario,

se omite dicha especificación. Del mismo modo que en el caso real, es suficiente estudiar las series de potencias centradas en el origen, $\sum a_n z^n$.

- Se prueba análogamente al caso real que si $\sum a_n z^n$ es una la serie entera compleja y dicha serie es convergente en un punto $u \neq 0$, se cumple entonces que la serie compleja $\sum a_n z^n$ es absolutamente convergente, cualquiera que sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < |u|$.
- Sea $\sum a_n z^n$ una serie de potencias; se denomina *dominio de convergencia* de la serie, el conjunto D de los puntos en que es convergente. Si se designa por $D_m = \{|z| / z \in D\}$, se define (de modo análogo al caso real) el *radio de convergencia* de la serie mediante:

$$\rho = \begin{cases} \sup D_m, & \text{si } D_m \text{ es acotado} \\ +\infty, & \text{si } D_m \text{ no es acotado,} \end{cases}$$

que cumple $0 \leq \rho \leq +\infty$.

- Si $\sum a_n z^n$ es una serie entera compleja de radio de convergencia $\rho > 0$, la bola abierta $B(0; \rho)$ se denomina *círculo de convergencia* de dicha serie; obsérvese que, como en el caso real, no se afirma nada de los puntos z tales que $|z| = \rho$.

4.6.14 PROPOSICIÓN. (Propiedades de las series enteras complejas).

- 1) Si la serie de potencias $\sum a_n z^n$ tiene un radio de convergencia $\rho > 0$, se cumplen:
 - la serie $\sum a_n z^n$ converge absolutamente, si $|z| < \rho$;
 - la serie $\sum a_n z^n$ diverge, si $|z| > \rho$;
 - ρ es el único que satisface las condiciones anteriores.
- 2) Si una serie de potencias $\sum a_n z^n$ tiene un radio de convergencia $\rho > 0$, dicha serie es uniformemente convergente en cualquier bola cerrada $D = \overline{B}(a; r)$ contenida en su círculo de convergencia.

Demostración:

- 1) Es análoga al caso real y se propone como ejercicio.
- 2) Sean $a \in B(0; \rho)$ y $r > 0$ tales que $D = \overline{B}(a; r) \subset B(0; \rho)$; es inmediato ver que se cumple $|a| + r < \rho$, con lo que la serie numérica $\sum a_n (|a| + r)^n$ es convergente. Si z es un elemento cualquiera de D , se tiene $|z| \leq |a| + |z - a| \leq |a| + r < \rho$, con lo que $|a_n z^n| \leq |a_n (|a| + r)^n|$; aplicando finalmente el criterio de Weierstrass (4.5.17), se obtiene la convergencia uniforme de $\sum a_n z^n$ en D . ■

4.6.15 DEFINICIÓN. (*Funciones definidas por series enteras complejas*). Análogamente al caso real, tiene interés considerar las *funciones definidas por series enteras complejas*. Si $\sum a_n z^n$ es una serie entera compleja de radio de convergencia $\rho > 0$, la serie numérica $\sum a_n z^n$ converge absolutamente para cualquier $z \in B(0; \rho)$, siendo entonces finita la suma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Con ello, puede definirse una función $f : B(0; \rho) \rightarrow \mathbb{C}$, mediante: $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$; la función así

definida se denomina *función definida por serie de potencias (compleja)*. Por ejemplo, la serie $\sum \frac{1}{n!} z^n$ tiene radio de convergencia $\rho = +\infty$, con lo que puede definirse una función, denominada *exponencial compleja* mediante

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

4.7 EJERCICIOS.

1. Determinar el dominio de las funciones cuya expresión analítica figura a continuación:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = x^2 + 1; & \text{b)} f(x) = \frac{x}{x+1}; & \text{c)} f(x) = \sqrt{x^2 - 1}; \\ \text{d)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & \text{e)} f(x) = \frac{x-3}{x^2(x^2-4)}; & \text{f)} f(x) = \sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-2)(x+3)}}; \\ \text{g)} f(x) = \sqrt{2+x-x^2}; & \text{h)} f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{2+x}; & \text{i)} f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}; \end{array}$$

2. En el Ejemplo 4.1.4 se ha definido la función característica de un subconjunto A de \mathbb{R} , χ_A .

- a) Expresar la función característica de los conjuntos: $A \cup B$, $A \cap B$ y $\mathbb{R} - A$, en función de χ_A .
 b) Si f es una función tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$, se cumple $f(t) = 0$ o bien $f(t) = 1$, demuéstrese que existe un subconjunto A de \mathbb{R} tal que $f = \chi_A$.

3. Dígase cuáles de las siguientes funciones son periódicas y calcúlese el período propio de aquellas que lo sean:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = 10 \operatorname{sen} 3x; & \text{b)} f(x) = a \operatorname{sen} \alpha x + b \cos \alpha x; & \text{c)} f(x) = \sqrt{\tan x}; \\ \text{d)} f(x) = \operatorname{sen}^2 x; & \text{e)} f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{|x|}. \end{array}$$

4. Considérense las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$, definidas en \mathbb{R} . Determinar las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$; comparar los resultados obtenidos.

5. Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 3x - 1$ y $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$, determinar: $f \circ f \circ f$, $(h \circ g) \circ f$, $h \circ (g \circ f)$.

6. Demostrar las propiedades siguientes o bien, caso de no ser cierta, dar un contraejemplo:

$$\text{a)} (f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h), \quad \text{b)} \frac{1}{f \circ g} = f \circ \frac{1}{g}, \quad \text{c)} \frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{f} \circ g.$$

7. Para la función f definida en cada caso, encontrar la inversa f^{-1} si existe y, si es así, especificar su dominio:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = 2x - 1; & \text{b)} f(x) = \frac{1}{x-5}; & \text{c)} f(x) = x^2; \\ \text{d)} f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1; & \text{e)} f(x) = \sqrt[5]{2 - \sqrt[3]{x}}; & \text{f)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; \\ \text{g)} f(x) = \operatorname{sen} 3x; & \text{h)} f(x) = \ln \frac{x}{2}; & \text{i)} f(x) = x^2 - 1; \\ \text{j)} f(x) = 3^{5x}; & \text{k)} f(x) = \arctan 3x; & \text{l)} f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}. \end{array}$$

8. (a) Encontrar todas las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que cumplen:

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

(b) Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que cumplen:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

9. Si una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es monótona creciente, demostrar que f tiene un punto fijo, esto es, existe un $x \in [0, 1]$, tal que $f(x) = x$.

10. Dado un conjunto finito de puntos del plano, si existe una función que pase por todos ellos, dicha función se denomina una *función de interpolación* de tales puntos; las funciones más sencillas y de mayor aplicación como funciones de interpolación, son las funciones polinómicas. En este ejercicio se trata de establecer una metodología de cálculo de un polinomio de interpolación, denominado *polinomio de interpolación de Lagrange*.

- Sean x_0, x_1 dos números reales; puede considerarse por un lado la recta que pasa por los puntos $(x_0, 1)$ y $(x_1, 0)$ y, por otro, la que pasa por los puntos $(x_0, 0)$ y $(x_1, 1)$ y cuyas ecuaciones respectivas son:

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad \text{y} \quad y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Las funciones polinómicas definidas por estas rectas, designadas respectivamente por L_0 y L_1 , son:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Estas funciones cumplen las igualdades siguientes:

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0; \quad L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1.$$

Si se consideran ahora los puntos del plano: $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$, la función polinómica (de grado 1) definida por la recta que pasa por P_0 y P_1 , será:

$$\pi_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Esta es la función polinómica de interpolación más sencilla que se puede considerar con dos puntos del plano.

- A partir de lo anterior, se pide: generalizarlo al caso de $n + 1$ puntos del plano, $P_j = (x_j, y_j)$, $0 \leq j \leq n$, definiendo $n + 1$ funciones polinómicas L_j , $0 \leq j \leq n$ de grado n , tales que

$$L_j(x_j) = 1, \quad \text{y} \quad L_j(x_i) = 0, \quad \text{si } i \neq j.$$

La función polinómica de grado n :

$$\pi_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j(x), \quad \text{tal que } P(x_j) = y_j, \quad 0 \leq j \leq n,$$

se denomina *polinomio de interpolación de Lagrange* asociado a los puntos $P_j, 0 \leq j \leq n$.

- Como aplicación, calcúlese el polinomio de interpolación de Lagrange, en cada uno de los casos siguientes
a) $(1, 1); (2, 3); (3, 4)$. b) $(-2, -1); (-1, 7); (1, 3); (2, 6)$. c) $(-2, 5); (-1, 7); (0, 3); (1, 2); (2, -1)$.

11. Como continuación del ejercicio anterior, si se conoce el polinomio de interpolación de Lagrange, π_n , asociado a $n + 1$ puntos del plano, $P_j = (x_j, y_j), 0 \leq j \leq n$, se puede calcular el valor $\pi_n(t)$ en un punto $t \in]x_j, x_{j+1}[$, valor que se denomina *interpolación polinómica en el punto t*; ello permite realizar estimaciones de funciones desconocidas en puntos en los cuales no se tiene información exacta sobre su valor, como muy a menudo sucede, por ejemplo, en el tratamiento de datos experimentales. Pues bien, se pide:

- a) Partiendo de los valores: $\log 2 = 0.301029995$, $\log 4 = 0.602059999$, $\log 5 = 0.698970004$ y $\log 7 = 0.84509804$, calcular aproximadamente el valor de $\log 3$ y de $\log 6$.
- b) Sabiendo que $\text{sen } 29^\circ = 0.484809$, $\text{sen } 30^\circ = 0.5$, $\text{sen } 31^\circ = 0.515038$, y $\text{sen } 32^\circ = 0.529919$, calcular aproximadamente el valor de $\text{sen } 30^\circ 15' 20''$ y de $\text{sen } 31^\circ 31' 31''$.

12. A partir de la definición de límite de una función en un punto, probar las siguientes igualdades:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x} = \frac{3}{2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \text{sen}^2 x} = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen} \frac{1}{x} = 0$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{sen} \frac{1}{x} = 0$;
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x+5} = \frac{2}{3}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0$; g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$; h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{x-2} = \infty$;
 i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} = \infty$; j) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$; k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0$; l) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

13. Demostrar las equivalencias siguientes:

- (a) $(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n)(+\infty)$,
 (b) $(\sqrt{1+x} - \sqrt{x} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}})(+\infty)$,
 (c) $(\frac{1}{1+x} \sim 1-x)(0)$,
 (d) $(\sqrt{a^2+x} \sim a + \frac{x}{2a})(0)$, ($a > 0$),
 (e) $((1+x)^n \sim 1+nx)(0)$.

14. Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, calcular los límites siguientes:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\text{sen } x}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{sen } x}{\pi - x}$;
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen} \frac{1}{x}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x^2}{x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;
 g) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - 2\pi)^2}$; h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x - \text{sen } 3x}{x}$; i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$;
 j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 4x^2}{1 - \cos x}$; k) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x-a)}{x^2 - a^2}$; l) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a}$.

15. Estudiar la existencia de los límites siguientes:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} x|x|$;
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan kx}{x}$.

16. Calcular los límites siguientes:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$;
- 2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2} \right)^{\frac{1}{x^2 + 2}}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos 2x}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arctan x}{x \operatorname{sen}^2 x}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$;
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$;
- 18) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 + 1)(1 - \cos 1/x)}{(x^2 - 2x) \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}$;
- 19) $\lim_{x \rightarrow y} \frac{x^n - y^n}{x - y}$;
- 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$;
- 21) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$;
- 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - 1) \ln(1 - x^2)}{((1 - x^2)^n - 1) \operatorname{arcsen} x}$;
- 23) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$;
- 24) $\lim_{x \rightarrow 1/2} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$;
- 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$;
- 26) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} \right)$;
- 27) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} \right)$;
- 28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+ax)(1+bx)} - 1}{x}$;
- 29) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$;
- 30) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x}}}$;
- 31) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$;
- 32) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} \right)^x$;
- 33) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \right)^{1+x}$;
- 34) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$;
- 35) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$;
- 36) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)^{\cot 3x}$;
- 37) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$;
- 38) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x - 1}$;
- 39) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;
- 40) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{(1+a_1x)(1+a_2x) \cdots (1+ax)} - 1}{x}$

17. Calcular los siguientes límites laterales:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x-1|}, & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{|x-1|}; \\ \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3}, & \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}; \\ \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \operatorname{sen} x}{|x|}, & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{sen} x}{|x|}; \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x^2-5x+6}, & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x^2-5x+6}; \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan x, & \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan x; \\ \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}; \\ \text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} E(x), & \lim_{x \rightarrow 1^+} E(x). \end{array}$$

18. Calcular los límites: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

19. Considérense las funciones: $f(x) = e^{1/x}$, para todo $x \neq 0$ y $g(x) = \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} - 1}$, para todo $x \neq 0$. Discutir la existencia de los límites laterales en el origen de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $xg(x)$.

20. Determinar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para que se cumplan las igualdades:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - (ax+b) \right) = 0; \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2+1} - (ax+b) \right) = 0.$$

Interpretación geométrica de las igualdades anteriores.

21. a) Demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h)$. b) Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x-a)$.
 c) Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$.
 d) Dar un ejemplo de función f tal que exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ y, en cambio, no exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 e) Si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^2 = L$, demostrar que: (i) si $L = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$; (ii) si $L \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ puede no existir.

22. Supóngase que las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cumplen $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty$. Dígase razonadamente si, a partir de estas hipótesis, pueden deducirse cada una de las afirmaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = +\infty; & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = 0; \\ \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = +\infty; & \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \end{array}$$

23. Considérense las dos afirmaciones siguientes:

$$\text{a)} \quad \lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x)| = 0 \quad \text{y} \quad \text{b)} \quad \lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x-h)| = 0.$$

Demostrar que a) \Rightarrow b), pero que b) $\not\Rightarrow$ a).

24. Determinar los límites siguientes, si existen:

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}; \quad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}; \quad \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} \frac{1}{x}); \quad \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}; \quad \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} x.$$

25. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = A + B \ln x, \quad \text{si } x > 0; \quad f(x) = C, \quad \text{si } x = 0; \quad f(x) = De^{3x} + \frac{E}{x^3}, \quad \text{si } x < 0,$$

donde $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$, son parámetros. Determinar condiciones sobre dichos parámetros, para que se cumplan las tres condiciones siguientes: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = C$.

26. Dadas las sucesiones funcionales cuyo término n -ésimo, $n \in \mathbb{N}$, se indica en cada caso, se pide determinar su dominio de convergencia puntual y estudiar si dicha convergencia es también uniforme en tal dominio o en algún subdominio del mismo.

$$\begin{aligned} \text{a) } f_n(x) &= x^n; & \text{b) } f_n(x) &= \frac{x^2 + nx}{n}; & \text{c) } f_n(x) &= \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx + n); \\ \text{d) } f_n(x) &= 7x + \frac{3 \operatorname{sen}^2(3nx + 2)}{\sqrt{n} + 2n}; & \text{e) } f_n(x) &= \frac{x}{n}. \end{aligned}$$

27. Determinar el dominio de convergencia (puntual) de las siguientes series de funciones:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}; & & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}; & & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} n^n(x+3)^n; \\ \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}; & & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}; & & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}; \end{aligned}$$

28. Calcular el radio de convergencia y estudiar qué sucede en los extremos del intervalo de convergencia, de las series de potencias $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$, donde:

$$\begin{aligned} \text{a) } a_n &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; & \text{c) } a_n &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}; & \text{e) } a_n &= \frac{3^n + 2n}{4^n + 5}; \\ \text{b) } a_n &= \frac{n-1}{n!}; & \text{d) } a_n &= \frac{1}{n^k}, \quad k \in \mathbb{Z}; & \text{f) } a_n &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}. \end{aligned}$$

29. Calcular el intervalo de convergencia de las series de potencias siguientes:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^n} (x-3)^n, \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x}{2} - 1\right)^n, \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} (x-10)^n.$$

30. Sean $\sum a_n x^n$ y $\sum b_n x^n$ dos series de potencias de radios de convergencia respectivos $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$.

- 1) Probar que la serie suma de ambas $\sum (a_n + b_n)x^n$ tiene radio de convergencia $r_S \geq \min\{r_1, r_2\}$.
- 2) Probar que la serie producto de ambas $\sum (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n$ tiene radio de convergencia $r_P \geq \min\{r_1, r_2\}$.

4.8 GUÍA DE REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[Ba] **BARTLE, R.G. y D.R. SHERBERT.** *Introducción al Análisis Matemático de una variable.*

La materia correspondiente al capítulo 4 que acabamos de ver, se puede encontrar distribuida en tres capítulos diferentes de esta obra: el capítulo 4, que en la primera parte desarrolla los límites de funciones; el capítulo 7, que trata las sucesiones de funciones y, por último, el capítulo 8, que dedica el último apartado a las series de funciones. El nivel y los contenidos son comparables a los presentados aquí y contiene una buena colección de ejercicios.

[Di] **DIXMIER, J.** *Matemáticas Generales.*

El capítulo 14 del primer volumen de esta obra está dedicado al estudio de los límites, en particular de las funciones y de las sucesiones de funciones; destaca por su claridad y rigor el tema de la equivalencia de funciones. Las series de funciones se estudian en el capítulo 39 (segundo volumen), junto con las series numéricas, y el capítulo 40 está dedicado completamente a las series de potencias.

[Fe] **FERRER, J. y F. PUERTA.** *Càlcul Diferencial.*

De este excelente texto, se recomienda la lectura de los capítulos 8 (Successions i sèries funcionals) y 5 (Sèries de potències). Aun cuando el marco de la obra es diferente, funciones vectoriales y series de potencias en \mathbb{C} , resulta una lectura complementaria de gran interés.

[Or] **ORTEGA, J.M.** *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.*

Los conceptos relativos a funciones y límites de funciones se desarrollan en el capítulo III, junto con las funciones continuas. El capítulo X se dedica a las sucesiones y series de funciones y las series de potencias; contiene asimismo un estudio breve de los números complejos y de funciones complejas definidas por series de potencias. Los contenidos están magistralmente presentados y su lectura es francamente amena y recomendable.

[Ru] **RUDIN, W.** *Principios de Análisis Matemático.*

Las cuestiones generales sobre funciones y límites de funciones se tratan en el capítulo 4, dentro del marco general de los espacios métricos. Las sucesiones y series funcionales se estudian en el capítulo 7; el planteamiento es más general que el que hemos visto aquí, pero su lectura es amena e instructiva. Asimismo, resultan muy interesantes los ejemplos que ilustran las exposiciones, así como los ejercicios que se proponen, algunos de los cuales son de nivel muy elevado.

[Spv] **SPIVAK, M.** *Calculus.*

El capítulo 5 se dedica a los límites de funciones; el marco es el de las funciones reales de una variable y el tratamiento del tema es muy didáctico, dentro de lo que es habitual en este autor. El capítulo 23 trata las sucesiones de funciones, las series de funciones y las series de potencias reales; se dedican dos capítulos más a los números complejos y las series complejas de potencias. Contiene muchos ejemplos y ejercicios, todos ellos muy bien seleccionados y que complementan adecuadamente las exposiciones del texto.

CAPÍTULO 5

FUNCIONES CONTINUAS

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo se dedica al estudio de las funciones continuas, es decir, aquellas cuya gráfica no presenta “cortes” ni “discontinuidades”, en el sentido que se precisa rigurosamente en la definición correspondiente.

Se empieza definiendo la continuidad de una función en un punto, es decir, localmente, y a continuación se extiende dicha noción a un subconjunto del dominio de la función; el concepto de continuidad lateral, que se estudia a continuación, es útil para clasificar el tipo de discontinuidad que puede presentar una función en un punto.

En el apartado 5.2 se estudian las propiedades de las funciones continuas en un punto: acotación, conservación del signo y relación con las operaciones con funciones (criterios de continuidad). el apartado 5.3 trata de las propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ de \mathbb{R} , destacando como resultados más importantes los teoremas de Bolzano, de los valores intermedios y de los valores extremos.

La continuidad uniforme, que se estudia en el apartado 5.4, es un concepto muy interesante que resulta de añadir una condición a la continuidad en un intervalo y será de utilidad en temas posteriores. Finalmente, en el apartado 5.5 se trata la continuidad de las funciones límite de sucesiones y series de funciones; se observará el papel esencial que juega la convergencia uniforme de la sucesión funcional hacia su función límite.

5.1 EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD.

5.1.1 En este primer apartado se estudia la noción de continuidad de una función como una propiedad local, esto es, como una condición que satisface una función en el entorno de un punto de su campo de existencia; más adelante, se extiende esta noción a un subconjunto del dominio de la función, cuando la condición de continuidad se cumple en cada punto del mismo. A continuación se define la noción de discontinuidad de una función en un punto y se estudian y clasifican los distintos tipos de discontinuidad.

5.1.2 DEFINICIÓN. (*Continuidad de una función en un punto*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de una variable; si a es un punto no aislado de A , se dice que la función f es *continua en el punto* a si se cumple la igualdad $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. En otras palabras, la función f es continua en a si, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que cualquiera que sea $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta$, se cumple $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Esta condición puede escribirse también de otras formas equivalentes, análogamente a como se formularon en la definición de límite de una función en un punto (véase el apartado 4.1); concretamente:

- la función f es continua en a si, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que, cualquiera que sea $x = a + h \in A$ con $|h| < \delta$, se cumple $|f(a + h) - f(a)| < \varepsilon$.
- la función f es continua en a si, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta) \cap A) \subset B(f(a); \varepsilon)$.

5.1.3 OBSERVACIÓN.

- En la definición de función continua en un punto a se ha especificado que dicho punto ha de ser un punto no aislado del campo de existencia de la función; esto es así puesto que, en caso contrario, la noción definida carece de interés. Es más, puede admitirse por convenio, que toda función es continua en los puntos aislados de su dominio.
- Conviene destacar otro detalle: en la condición de continuidad de una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto a , no se exige que se cumpla $0 < |x - a|$, a diferencia de la definición de límite en un punto; el motivo es obvio: para que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sea continua en el punto a , es condición necesaria que f esté definida en dicho punto.
- Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ no es continua en $a \in A$, se dice que la función es *discontinua* en dicho punto (ver 5.1.11). En tal caso, existe $\varepsilon > 0$ tal que cualquiera que sea $\delta > 0$ se cumple $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ para algún $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta$.

5.1.4 Análogamente a la noción de límite en un punto, puede darse una interpretación gráfica de la condición de continuidad de una función en un punto a , viendo que si f cumple dicha condición, ello significa que la gráfica de f no está “rota” en un entorno de ese punto. La figura 5.1(a) ilustra la gráfica de una función continua en un punto x_0 ; la figura 5.1(b) ilustra la propiedad de continuidad de una función f en un punto x_0 .

5.1.5 DEFINICIÓN. (*Continuidad de una función en un conjunto. Campo de continuidad*). Cuando una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cumple la condición de continuidad en todo punto de un subconjunto X de su dominio A , entonces se dice que la función f es *continua en el conjunto* X . Así pues, se tiene:

$$f \text{ es continua en } X \subset A \iff f \text{ es continua en } a \text{ para todo } a \in X.$$

El mayor subconjunto del dominio en el cual una función es continua, recibe el nombre de *campo de continuidad* de la función. Para indicar que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $X \subset A$, se escribe $f \in \mathcal{C}^0(X)$, o simplemente, $f \in \mathcal{C}(X)$ y se dice que f es de clase \mathcal{C}^0 en X . Es evidente que si el campo de continuidad

de $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto $X \subset A$, entonces la función también es continua en todo subconjunto de X ; en otras palabras, si $Y \subset X$, entonces $\mathcal{C}^0(X) \subset \mathcal{C}^0(Y)$. Un aspecto de gran interés y que se verá con detalle en el apartado 5.3, es el estudio de funciones reales definidas y continuas en un intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

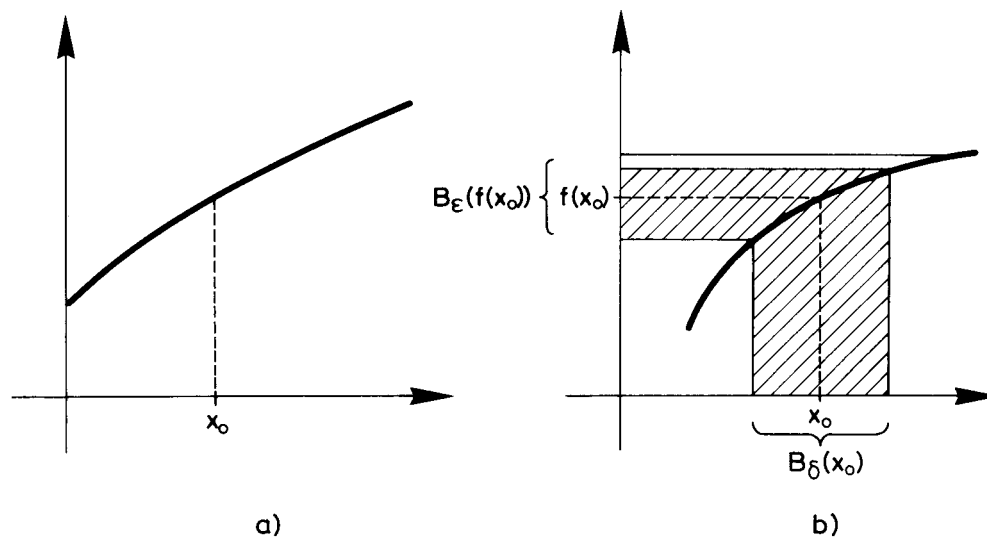


Figura 5.1. Ilustración de la noción de continuidad de una función en un punto.

5.1.6 EJEMPLO.

- 1) Sea $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función coordenada de \mathbb{R} ; el campo de continuidad de esta función es su dominio \mathbb{R} , esto es, $x \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, puesto que en todo punto $a \in \mathbb{R}$ se cumple $\lim_a x = a = x(a)$.
- 2) El campo de continuidad de una función constante $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathbb{R} , ya que en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$, se cumple $\lim_a \lambda = \lambda = \lambda(a)$.
- 3) La función “parte entera” E es continua en todo punto $a \in \mathbb{R}$ que no sea entero; en efecto, si $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, existe un entorno de a en el cual la función E es constante, luego es continua en ese punto. En cambio, recuérdese que si $m \in \mathbb{Z}$, no existe el límite $\lim_{x \rightarrow m} E(x)$, con lo que E no puede ser continua en los puntos de \mathbb{Z} . Así pues, se verifica $E \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} - \mathbb{Z})$.
- 4) La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$, no tiene límite en ningún punto $a \in \mathbb{R}$, puesto que cualquiera que sea $0 < \varepsilon < 1$, para todo $\delta > 0$ se cumple $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$, para algún $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta$.

5.1.7 Las nociones de continuidad de una función en un punto y en un conjunto pueden definirse asimismo para funciones complejas o de variable compleja; se propone como ejercicio, redactar la definición en cada caso. Para las funciones complejas de variable real, esto es $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ con $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ para cada $x \in A$, se cumple que f es continua en $X \subset A$ si, y sólo si, las funciones reales f_1 y f_2 son continuas en X . Para las funciones reales de variable compleja, si $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ y f es continua en $X \subset A$, entonces, para cada $(a, b) \in X$, las funciones $f(a, \cdot)$ y $f(\cdot, b)$ definidas en 4.1.2

son continuas en su dominio (atención: el recíproco no es cierto).

5.1.8 DEFINICIÓN. (*Continuidad lateral de una función*). De modo análogo a la noción de límites laterales (véase el apartado 4.2), puede definirse la *continuidad lateral* de una función en un punto.

Sea una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea a un punto no aislado de A ; se dice que f es *continua por la derecha en el punto a* si se cumple la igualdad $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, y que f es *continua por la izquierda en el punto a* si se cumple $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Así como los límites laterales de una función en un punto pueden relacionarse con la existencia o no del límite de la función en dicho punto, la continuidad lateral puede relacionarse de manera natural con la continuidad de la función en un punto.

5.1.9 PROPOSICIÓN. Una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en un punto $a \in A$, si, y solamente si, dicha función es continua por la derecha y por la izquierda en ese punto.

Demostración:

Inmediata, teniendo en cuenta la definición de continuidad de una función en un punto y la proposición 4.2.22. ■

5.1.10 EJEMPLO.

1) Sea u_a la función “salto unitario” en un punto $a \in \mathbb{R}$ (véase el ejemplo 4.1.4); la función u_a es continua en cualquier punto $x_0 \neq a$, puesto que es una función constante en un entorno conveniente del punto x_0 . En el punto a , la función es continua por la derecha, ya que se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a^+} u_a(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} 1 = 1 = u_a(a)$$

No obstante, esta función no es continua por la izquierda en el punto a , por cuanto se cumple $\lim_{x \rightarrow a^-} u_a(x) = 0 \neq u_a(a)$.

2) La función “parte entera” E es continua por la derecha en cualquier punto $m \in \mathbb{Z}$, ya que se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow m^+} E(x) = m = E(m).$$

No obstante, esta función no es continua por la izquierda en $m \in \mathbb{Z}$, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow m^-} E(x) = m - 1 \neq E(m).$$

3) La función f definida por $f(t) = \begin{cases} \frac{|t|}{t}, & \text{si } t \neq 0 \\ 0, & \text{si } t = 0, \end{cases}$ no es continua ni por la derecha ni por la izquierda en el origen, ya que se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1 \neq f(0); \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = -1 \neq f(0).$$

5.1.11 DEFINICIÓN. (*Discontinuidades de una función; clasificación*). Si una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no cumple la condición de función continua en un punto $a \in A$, se dice entonces que f es *discontinua en a* , o bien, que tiene una *discontinuidad en a* . En tal caso, la gráfica de la función estará “rota” en ese

punto, tal como se muestra en la figura 5.2. La condición de continuidad de una función en un punto puede dejar de cumplirse por tres motivos, lo cual permite clasificar las discontinuidades tal como se expone a continuación.

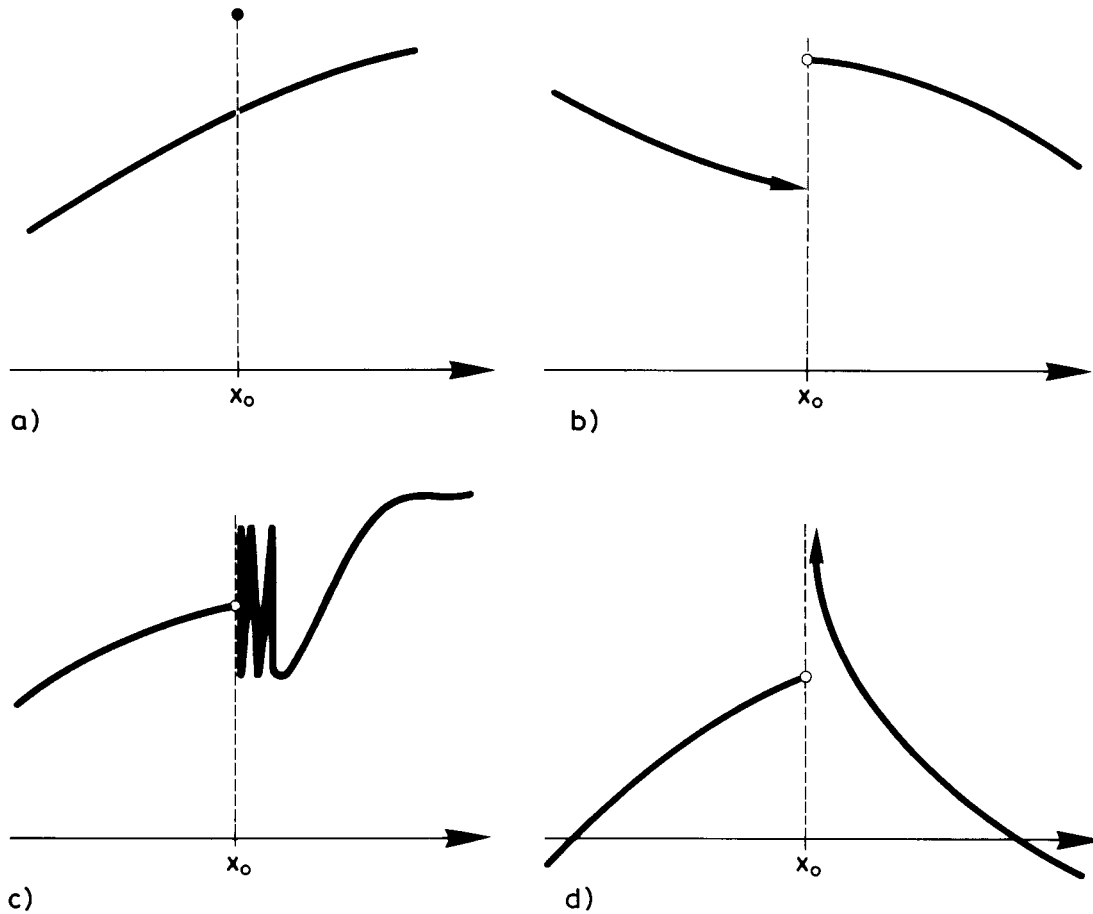


Figura 5.2. Ilustración gráfica de la discontinuidad de una función en un punto.

- *Discontinuidad evitable.* Se dice que la discontinuidad de f en un punto a es *evitable*, si se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a),$$

esto es, si existiendo el límite de f en a , éste no coincide con el valor $f(a)$ de la función en el punto a , el cual puede que ni siquiera exista; es el caso que ilustra la figura 5.2(a). Obsérvese que la justificación de la denominación de este tipo de discontinuidad es clara: basta modificar el valor de la función en el punto a , definiendo $f(a) = \lim_a f$, para que sea posible “evitar” la discontinuidad de la función en dicho punto.

- *Discontinuidad de salto.* Se dice que la discontinuidad de f en a es *de salto* si se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

es decir, no existe el límite de f en a pero existen los límites laterales de f en a , siendo finitos y distintos. Es el caso que ilustra la figura 5.2(b), la cual pone asimismo de manifiesto la justificación de la denominación de este tipo de discontinuidad.

- *Discontinuidad esencial.* Se dice que una función f tiene una *discontinuidad esencial* en un punto a cuando al menos uno de los límites laterales en dicho punto no existe o es infinito; corresponde a los casos que se ilustran en (c) y (d) de la figura 5.2.

5.1.12 EJEMPLO.

- 1) La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 2$ es continua en su dominio y es discontinua en el origen $a = 0$. No obstante, se trata de una discontinuidad evitable, ya que se cumple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, con lo cual definiendo $f(0) = 1$ puede evitarse la discontinuidad de f en el origen. Así pues, la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ g(0) = 1, \end{cases}$$

es continua en \mathbb{R} .

- 2) La función salto unitario u_a tiene una discontinuidad de salto en el punto a .
- 3) La función $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \text{ y } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x > 0 \text{ y } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ es tal que no existe el límite lateral por la derecha de φ en el origen, con lo que en dicho punto la función tiene una discontinuidad esencial.

- 4) La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq -1 \\ \frac{1}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ tiene dos discontinuidades esenciales: una en el origen, puesto que no existe el límite $\lim_{0^+} f$ y otra en el punto $a = -1$, ya que se cumple $\lim_{(-1)^+} f = +\infty$.

5.2 PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD.

5.2.1 En este apartado se estudian algunas propiedades de las funciones continuas en un punto, relativas básicamente a la equivalencia con el límite de sucesiones, la acotación en un entorno y la relación entre continuidad y las operaciones elementales con funciones.

5.2.2 PROPOSICIÓN. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y a un punto no aislado de A ; las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- 1) La función f es continua en a .

- 2) Para cualquier sucesión numérica $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ se cumple $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$, es decir, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n)$.

Demostración:

Se deduce inmediatamente de la proposición 4.2.8, sin más que tener en cuenta que $\lim_a f = f(a)$. ■

5.2.3 COROLARIO. Una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es discontinua en un punto $a \in A$ si es posible encontrar una sucesión $(u_n) \rightarrow a$, con $u_n \in A$ para todo $n > n_0$, tal que $\lim f(u_n) \neq f(a)$.

Demostración:

Inmediata. ■

5.2.4 PROPOSICIÓN. (*Conservación del signo*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el punto $a \in A$ tal que $f(a) \neq 0$; existe entonces un entorno del punto a en el cual f conserva el signo.

Demostración:

Se deduce inmediatamente de la proposición 4.2.11. ■

5.2.5 COROLARIO. Sean $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en un punto $a \in A$, tales que $f(a) < g(a)$; existe entonces $r > 0$, tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in B(a; r)$.

Demostración:

Inmediata. ■

5.2.6 PROPOSICIÓN. Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en un punto $a \in A$, entonces existe $r > 0$ tal que la función es acotada en $B(a; r)$.

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de la proposición 4.2.12. ■

5.2.7 PROPOSICIÓN. (*Criterios de continuidad*.) Sean dos funciones $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continuas en el punto $a \in A$; se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) la función suma $f + g$ es continua en el punto a ;
- 2) la función producto fg es continua en el punto a ;
- 3) la función producto por escalar λf es continua en el punto a , cualquiera que sea $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 4) la función cociente $\frac{f}{g}$ es continua en el punto a , si $g(a) \neq 0$.

Demostración:

Basta aplicar la proposición 4.2.13, sabiendo que se cumple $\lim_a f = f(a)$ y $\lim_a g = g(a)$.

Obsérvese que 1) y 2) de esta proposición, pueden generalizarse a un número finito de funciones. ■

5.2.8 EJEMPLO.

- 1) Sea $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función coordenada de \mathbb{R} ; teniendo en cuenta la propiedad 2) de la proposición anterior para un número finito de funciones, puede afirmarse que la función potencial de exponente natural x^n es continua en \mathbb{R} , cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Teniendo en cuenta el ejemplo anterior y aplicando las propiedades 3) y 1) de la proposición 5.2.7

con un número finito de funciones, puede afirmarse que cualquier función polinómica de grado n :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_j \in \mathbb{R} \quad (0 \leq j \leq n), \quad a_n \neq 0,$$

es continua en \mathbb{R} .

- 3) En virtud del criterio 4) de la proposición anterior y teniendo en cuenta la continuidad de las funciones polinómicas, se deduce que cualquier función racional $\rho(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ es continua en $X = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / Q_m(x) = 0\}$.

5.2.9 OBSERVACIÓN. Los criterios de continuidad establecidos en 5.2.7 deben aplicarse con rigor para no formular conclusiones equivocadas. Así, por ejemplo, no sería correcto deducir de ellos que, si la suma de dos funciones dadas es una función continua en un punto a , entonces cada una de las funciones también es continua en dicho punto; para verlo, basta considerar el paradigmático contraejemplo siguiente: si se consideran las funciones f y g definidas por,

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}; \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

la función suma $f + g$ está definida mediante $(f + g)(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, es una función constante y, por lo tanto, continua en su campo de existencia, que es \mathbb{R} . No obstante, ni f ni g son continuas en ningún punto de su dominio.

Como se recordará, en el apartado 4.2 se comentó la relación entre la composición de funciones y el límite en un punto; ahora se puede completar el estudio de esta cuestión, introduciendo la hipótesis adicional que garantiza el resultado: la continuidad de una de las funciones que se componen.

5.2.10 PROPOSICIÓN. Sean $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(A) \subset B$; si en un punto no aislado $a \in A$ se cumplen:

- existe el límite $\lim_a f = b \in B$,
- la función g es continua en b ,

entonces existe el límite de la función compuesta $g \circ f$ en el punto a , verificándose que $\lim_a (g \circ f) = g(b)$.

Demostración:

Por ser la función g continua en b , dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(t) - g(b)| < \varepsilon, \quad \text{si } |t - b| < \delta_1.$$

Puesto que $\lim_a f = b$, cualquiera que sea $\delta_1 > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \delta_1, \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta.$$

En definitiva, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|g(f(x)) - g(b)| = |(g \circ f)(x) - g(b)| < \varepsilon, \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta,$$

es decir, se cumple $\lim_a (g \circ f) = g(b)$.

Puede hacerse la demostración de este resultado aplicando la equivalencia entre límite de una función en un punto y límites de sucesiones. Redáctese como ejercicio. ■

A partir de esta proposición, puede establecerse inmediatamente la continuidad en un punto de la función compuesta de dos funciones continuas.

5.2.11 COROLARIO. Sean dos funciones $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tales que existe la función compuesta $F = g \circ f$; entonces, si f es continua en un punto $a \in A$ y g es continua en $f(a) \in B$, la función F es continua en el punto a .

Demostración:

Inmediata. ■

5.2.12 EJEMPLO. Para calcular el límite en el origen de la función $\varphi: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$\varphi(x) = E\left(\frac{3x + 2 \operatorname{sen} x}{2x}\right),$$

puede considerarse la función φ como la composición $g \circ f$ de las funciones:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_0; \quad g(x) = E(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Por un lado, en el origen $a = 0$ que es un punto de acumulación del dominio de f , esta función cumple:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2},$$

y, por otro, la función g es continua en el punto $b = 5/2$, puesto que este punto no pertenece a \mathbb{Z} ; con ello, en virtud de 5.2.10, puede afirmarse que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} E\left(\frac{3x + 2 \operatorname{sen} x}{2x}\right) = E\left(\frac{5}{2}\right) = 2.$$

5.2.13 PROPOSICIÓN. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f es continua en $a \in A$; se cumple entonces que la función $|f|$ es continua en ese punto.

Demostración:

Inmediata, aplicando la proposición 4.2.16. ■

5.2.14 OBSERVACIÓN. El recíproco de la proposición anterior no es cierto, esto es, puede que $|f|$ sea continua en un punto a y que f no lo sea; como ejercicio, encuéntrase un contraejemplo (sencillo) que lo justifique.

5.2.15 PROPOSICIÓN. (*Propiedades de la continuidad lateral*). Se enuncian a continuación las propiedades más importantes de la continuidad lateral, en relación con la equivalencia con límites de sucesiones, conservación del signo, acotación en un entorno, relación con las operaciones con funciones y valor absoluto. Se enuncian con la continuidad por la derecha de una función en un punto; se tienen, obviamente, resultados análogos para la continuidad lateral por la izquierda.

- 1) Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$ un punto no aislado; las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:
- (a) la función f es continua por la derecha en el punto a ;
 - (b) Para cualquier sucesión (u_n) de elementos de A con $u_n > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim u_n = a$ se cumple $\lim f(u_n) = f(a)$.

- 2) Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua por la derecha en el punto $a \in A$ y se cumple $f(a) > 0$, o bien, $f(a) < 0$, existe un $r > 0$ tal que f conserva el signo en el intervalo $[a, a + r[$.
- 3) Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua por la derecha en un punto $a \in A$, existe un $r > 0$ tal que la función f es acotada en el intervalo $[a, a + r[$.
- 4) Si dos funciones $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas por la derecha en el punto $a \in A$, entonces se verifican las propiedades siguientes:
- la función suma $f + g$ es continua por la derecha en a ;
 - la función producto fg es continua por la derecha en a ;
 - la función producto per escalar λf es continua por la derecha en a ;
 - la función cociente $\frac{f}{g}$ es continua por la derecha en a , si $g(a) \neq 0$.
- 5) Si f es continua por la derecha en a y g es continua por la derecha en $f(a)$, no se cumple que la función compuesta $g \circ f$ (suponiendo que exista) sea continua por la derecha en a . Para verlo, considérense, por ejemplo, las funciones f y g dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- 6) Si f es continua por la derecha en a , entonces $|f|$ es continua por la derecha en a .

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

5.3 FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO CERRADO.

5.3.1 Este apartado tiene como principal objetivo el estudio de las propiedades más importantes de las funciones reales de variable real definidas y continuas en un intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, en el sentido que se precisa en la definición que sigue. Entre estas propiedades, cabe destacar tres teoremas: el de Bolzano, el de los valores intermedios y el de los valores extremos.

5.3.2 DEFINICIÓN. (*Continuidad de una función en un intervalo cerrado de \mathbb{R}*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; se dice que f es *continua en el intervalo* $[a, b]$, si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

- f es continua en el punto x para todo $x \in]a, b[$;
- f es continua por la derecha en el punto a ;
- f es continua por la izquierda en el punto b .

De acuerdo con la notación introducida en 5.1.5, si f es continua en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se escribe $f \in \mathcal{C}^0[a, b]$, o simplemente, $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

El primer resultado importante relativo a funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado es el teorema de Bolzano; veremos que, además, este teorema es de gran utilidad para localizar y aproximar ceros de funciones continuas.

5.3.3 TEOREMA. (*De Bolzano.*) Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua en el intervalo $[a, b]$ y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$; existe entonces al menos un punto $\xi \in]a, b[$ tal que $f(\xi) = 0$.

Demostración:

Supongamos que $f(a) < 0 < f(b)$ y calculemos el punto medio del intervalo $I_0 = [a, b]$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Si se cumple $f(x_1) = 0$, ya se ha acabado; en caso contrario, de los dos subintervalos $[a, x_1]$ y $[x_1, b]$, se toma aquel en el cual la función f toma valores de signo opuesto en sus extremos. Con ello, se obtiene un nuevo intervalo que designaremos $I_1 = [a_1, b_1] \subset I_0$, tal que $f(a_1) < 0 < f(b_1)$.

El proceso se va repitiendo de forma análoga, de modo que, o bien finaliza al encontrar un punto en el cual f se anula, o bien se obtiene una sucesión de intervalos encajados $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ tal que, para todo $n \geq 1$, se cumple $I_n = [a_n, b_n]$ con $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ y, además, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Aplicando finalmente el Teorema de los intervalos encajados (1.5.14), existe un único $\xi \in \bigcap_{n \geq 0} I_n$, que

se obtiene como

$$\xi = \inf b_n = \lim b_n = \sup a_n = \lim a_n.$$

Ahora bien, por ser f continua en $[a, b]$ y $f(b_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, debe cumplirse $f(\xi) = \lim f(b_n) \geq 0$; pero, por otra parte, también debe cumplirse $f(\xi) = \lim f(a_n) \leq 0$, con lo que, en conclusión, debe ser $f(\xi) = 0$. ■

En la figura 5.3(a) puede verse una interpretación gráfica del teorema de Bolzano; en la figura 5.3(b), que muestra la gráfica de la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ 2, & \text{si } 3 < x \leq 4, \end{cases}$ puede verse que la condición de continuidad de la función f es esencial en este teorema.

5.3.4 EJEMPLO. (El método de la bipartición para aproximar ceros de funciones).

- Vamos a ver una aplicación muy importante del teorema de Bolzano: el cálculo aproximado de ceros de una función continua, conocida como *método de la bipartición o de la bisección*. En efecto, si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ de \mathbb{R} y tal que toma valores de signo opuesto en los extremos de dicho intervalo, sabemos por 5.3.3 que existe por lo menos un cero de la función en este intervalo; si se considera una sucesión de intervalos obtenidos por bipartición de subintervalos en los cuales se cumplan las hipótesis del teorema de Bolzano, se obtiene una sucesión de números reales que converge hacia el cero de la función y, en consecuencia, puede aproximarse éste con la precisión que se desee. El error cometido en dicha aproximación está acotado por la semiamplitud del intervalo de la bipartición n -ésima en la cual se detenga el proceso.
- Así, por ejemplo, la función definida por $f(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$ tiene un cero en el intervalo $[1, 2]$, que es el número irracional $\sqrt{2}$, puesto que f es continua en dicho intervalo cerrado y, además, se cumple $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 2 > 0$. Para calcular aproximadamente el valor del cero de f , afinando más el intervalo que contiene dicho cero, se observa que $f(1.5) = 0.25 > 0$ y que $f(1.4) = -0.04 < 0$, con lo que puede afirmarse que $\sqrt{2} \in]1.4, 1.5[$. Aplicando ahora el método de la bipartición a este intervalo, se obtienen las siguientes aproximaciones de $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} f(1.45) &= 0.1025 > 0, & f(1.425) &= 0.03062 > 0, \\ f(1.4125) &= -0.0048 < 0, & f(1.41875) &= 0.01285 > 0, \\ f(1.415625) &= 0.00399 > 0, & f(1.414063) &= -0.000427 < 0, \\ f(1.414844) &= 0.00178 > 0, & f(1.414453) &= 0.00067 > 0. \end{aligned}$$

Así, pues, se tiene $\sqrt{2} \approx 1.414258$, con un error menor que $\frac{1.414453 - 1.414063}{2} < 4 \cdot 10^{-4}$.

- Como puede observarse, este método requiere un elevado número de iteraciones si se quiere conseguir una aproximación del cero de la función con una precisión “buena”. Más adelante (capítulo 8) se

verá un método para funciones derivables que consigue una buena precisión con un número menor de iteraciones.

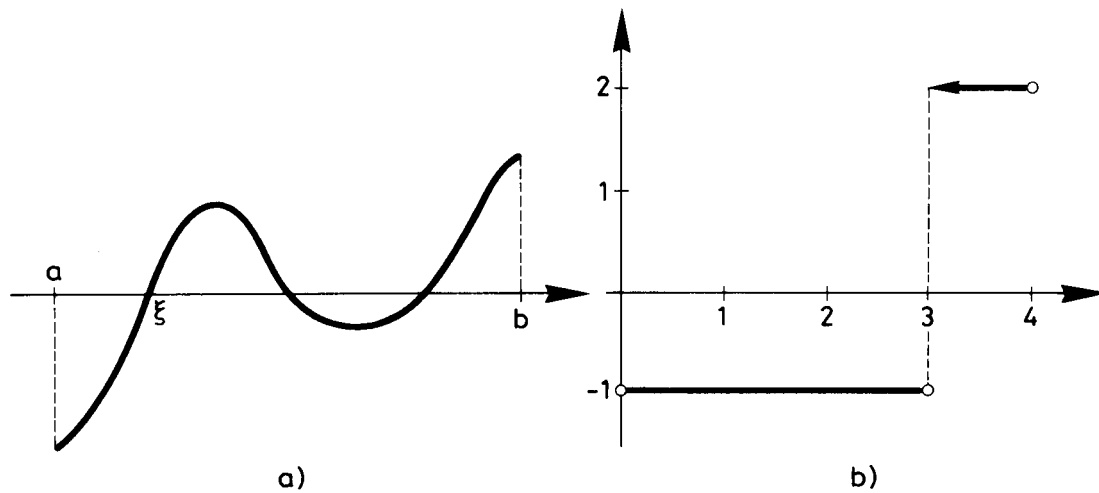


Figura 5.3. Ilustración gráfica del teorema de Bolzano

5.3.5 EJEMPLO. Vamos a probar que todo número real estrictamente positivo tiene raíz cuadrada, esto es, que cualquiera que sea $a > 0$, existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $t^2 = a$ (obsérvese que el caso $a = 0$ es trivial). Para ello, aplicaremos el teorema de Bolzano considerando la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^2 - a$, que es continua en \mathbb{R} . Podemos considerar ahora los casos siguientes:

- Si $0 < a < 1$, entonces f satisface las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 1]$, ya que $f(0) = -a < 0$ y $f(1) = 1 - a > 0$; en consecuencia, existe un $t \in]0, 1[$ tal que $f(t) = 0$, esto es, tal que $t^2 = a$.
- Si $a > 1$, entonces f satisface también las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, a]$, puesto que $f(0) = -a < 0$ y $f(a) = a^2 - a = a(a - 1) > 0$; por lo tanto, existe un $t \in]0, a[$ tal que $f(t) = 0$, esto es, tal que $t^2 = a$.

5.3.6 TEOREMA. (De los valores intermedios.) Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y tal que $f(a) < f(b)$; cualquiera que sea el número real c tal que $f(a) < c < f(b)$, existe un $t \in]a, b[$ tal que $f(t) = c$ (véase la figura 5.4). Se tiene un enunciado análogo si $f(a) > f(b)$.

Demostración:

Basta aplicar el teorema de Bolzano a la función $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - c$, en el intervalo $[a, b]$. ■

5.3.7 OBSERVACIÓN. Los teoremas de Bolzano y de los valores intermedios son equivalentes, puesto que no sólo éste se ha demostrado a partir de aquél, sino que el primero es un caso particular del segundo para $c = 0$. Los resultados que se presentan a continuación también están relacionados entre sí y constituyen propiedades muy características de las funciones continuas en intervalos cerrados y acotados.

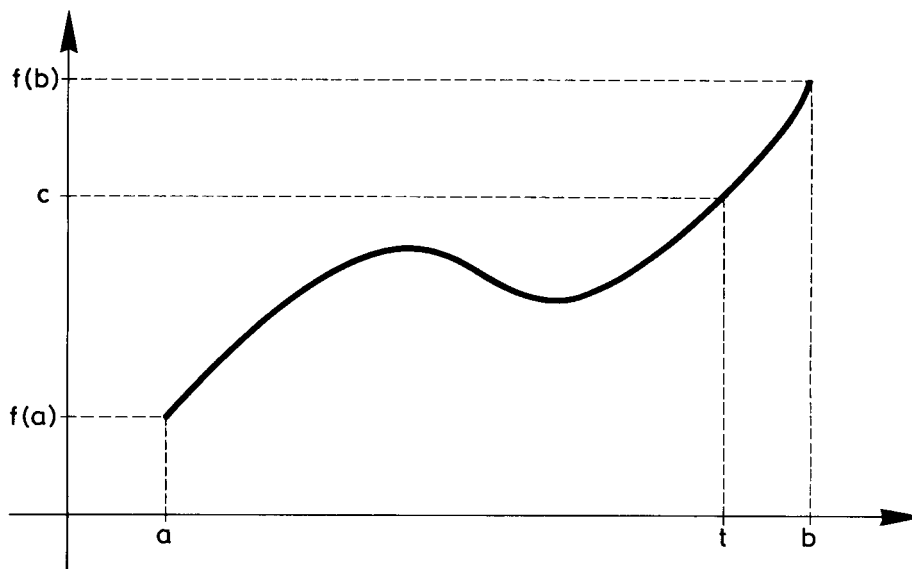


Figura 5.4. Ilustración del teorema de los valores intermedios.

5.3.8 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$; entonces, f es acotada en dicho intervalo.

Demostración:

Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que la función f no fuera acotada en el intervalo $[a, b]$; entonces, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, dicho número natural no puede ser una cota de $\text{Im}f$, de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a, b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. La sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se encuentra dentro del intervalo $[a, b]$, con lo que está acotada; el teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones (teorema 2.5.6) permite asegurar la existencia de una sucesión parcial convergente, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Si designamos por $x = \lim x_{n_k}$, debe cumplirse $x \in [a, b]$ y, en virtud de la continuidad de f , se tiene $f(x) = \lim f(x_{n_k})$, lo cual nos dice que la sucesión $(f(x_{n_k}))$ es convergente y, por lo tanto, acotada en contradicción con la hipótesis supuesta. Esta contradicción implica, por tanto, que no se puede negar la acotación de la función f en $[a, b]$ ■

5.3.9 EJEMPLO. Vamos a comprobar con ejemplos concretos que el resultado de la proposición anterior no es necesariamente cierto si el campo de continuidad de la función no es un intervalo cerrado $[a, b]$, o bien, si dicho intervalo no es cerrado y acotado.

- 1) Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ no es continua en $[a, b]$, no puede afirmarse que sea acotada en dicho intervalo; en efecto, considérese por ejemplo la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - \frac{1}{2}}, & \text{si } x \neq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Véase la figura 5.5(a).

- 2) Si el intervalo de definición de f no es cerrado, aun siendo acotado, la función f puede ser continua

en dicho intervalo, sin ser acotada. Considérese, por ejemplo, la función $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Véase la figura 5.5(b).

- 3) Si el intervalo de definición de f no es acotado, la función f puede ser continua en el mismo pero puede no ser acotada; tal es el caso, por ejemplo, de la función $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$. Véase la figura 5.5(c).

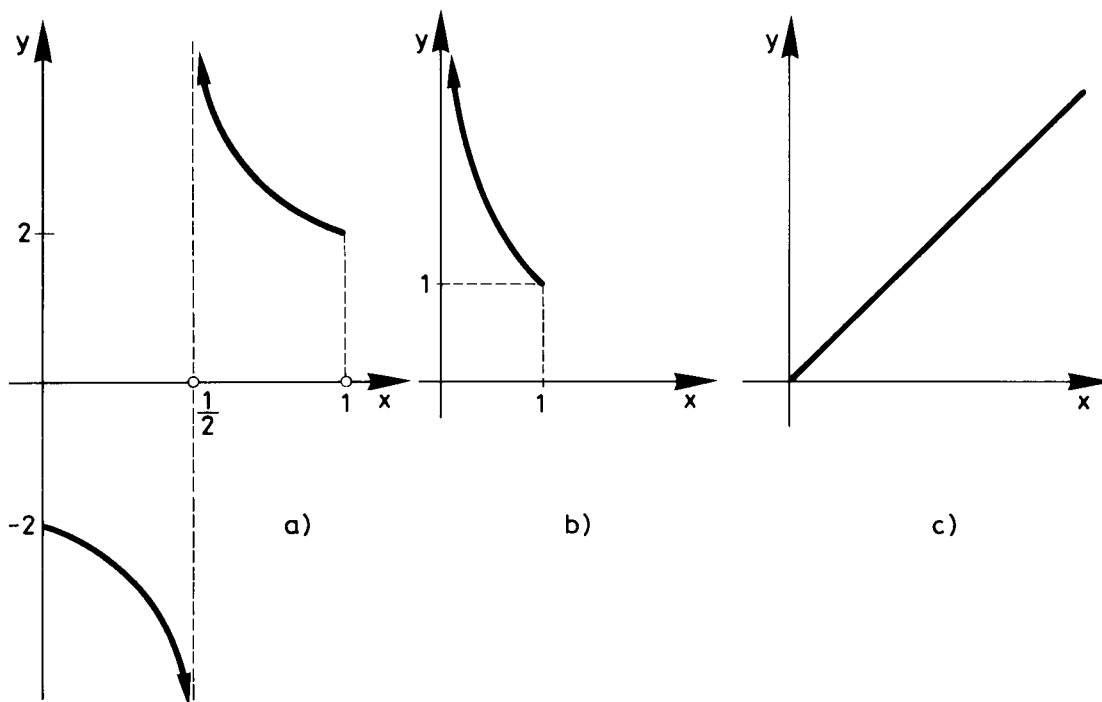


Figura 5.5. Funciones del Ejemplo 5.3.9.

5.3.10 TEOREMA. (Del máximo y del mínimo.) Si una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f alcanza un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo.

Demostración:

Se demostrará que f alcanza un máximo absoluto; el caso del mínimo absoluto es completamente análogo. En virtud de 5.3.8, se sabe que, si f es continua en $[a, b]$, entonces está acotada y, en particular, que lo está superiormente, con lo que el conjunto $f([a, b])$ tiene supremo: $M = \sup\{f(x) / x \in [a, b]\}$. Se trata de ver ahora que el valor de dicho supremo M se alcanza en algún punto del intervalo $[a, b]$, esto es, que existe un $t \in [a, b]$ tal que $f(t) = M$.

En efecto: cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, el número real $M - \frac{1}{n}$ no puede ser una cota superior de

$f[a, b]$, por ser M la menor de las cotas superiores. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in [a, b]$ tal que $M - \frac{1}{n} < f(t_n) \leq M$. Pero la sucesión (t_n) está contenida en el intervalo $[a, b]$, con lo que dicha sucesión está acotada y, en virtud del teorema 2.5.6, tiene una parcial convergente, (t_{n_k}) . Si designamos por $t = \lim t_{n_k}$, se cumple $t \in [a, b]$ y, por la continuidad de f , $f(t) = \lim f(t_{n_k})$, de modo que $M = \lim \left(M - \frac{1}{n_k} \right) \leq \lim f(t_{n_k}) \leq M$, es decir, $f(t) = M$. ■

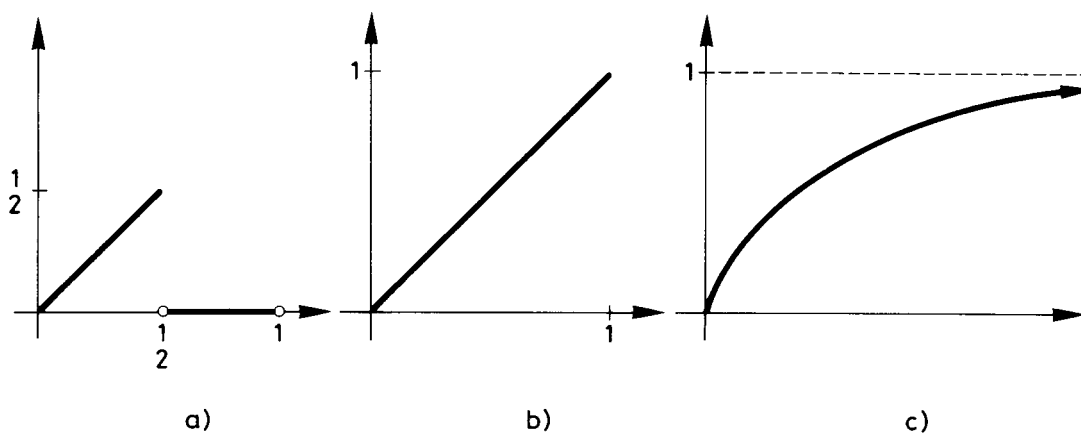


Figura 5.6. Funciones del ejemplo 5.3.11.

5.3.11 EJEMPLO. Este ejemplo tiene por objeto hacer notar la importancia de las hipótesis sobre f y sobre su campo de continuidad en el teorema anterior.

- 1) Si f no es continua en $[a, b]$, puede estar incluso acotada sin que alcance un máximo o un mínimo absolutos. Considérese, por ejemplo, la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 0, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

cuya gráfica se representa en la figura 5.6(a).

- 2) Si el intervalo no es cerrado, f puede ser continua y acotada en el mismo, sin alcanzar un máximo o un mínimo absolutos; tal es el caso, por ejemplo, de la función $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ (véase la figura 5.6(b)).
- 3) Si el intervalo no es acotado, la función f puede ser continua y acotada, pero no alcanzar un máximo o un mínimo absolutos. Considérese, por ejemplo, la función $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x}{x+1}$, cuya gráfica se representa en la figura 5.6(c).

El resultado que se expone a continuación se obtiene combinando los teoremas del máximo y del mínimo y de los valores intermedios.

5.3.12 COROLARIO. (*Teorema de Weierstrass*). Sea una función $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en el intervalo $[a, b]$; se cumple entonces que el conjunto $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado de \mathbb{R} .

Demostración:

En virtud del teorema del máximo y del mínimo, f alcanza un máximo y un mínimo absolutos en $[a, b]$; si se designan mediante: $M = \max\{f(x) / x \in [a, b]\}$ y $m = \min\{f(x) / x \in [a, b]\}$, cualquiera que sea x tal que $a \leq x \leq b$, se cumple $m \leq f(x) \leq M$, con lo que $f([a, b]) \subset [m, M]$. Por otra parte, en virtud del teorema de los valores intermedios, dado $c \in [m, M]$ cualquiera, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$, esto es, se cumple $[m, M] \subset f([a, b])$. Las dos inclusiones implican la igualdad que se deseaba probar (véase la figura 5.7). ■

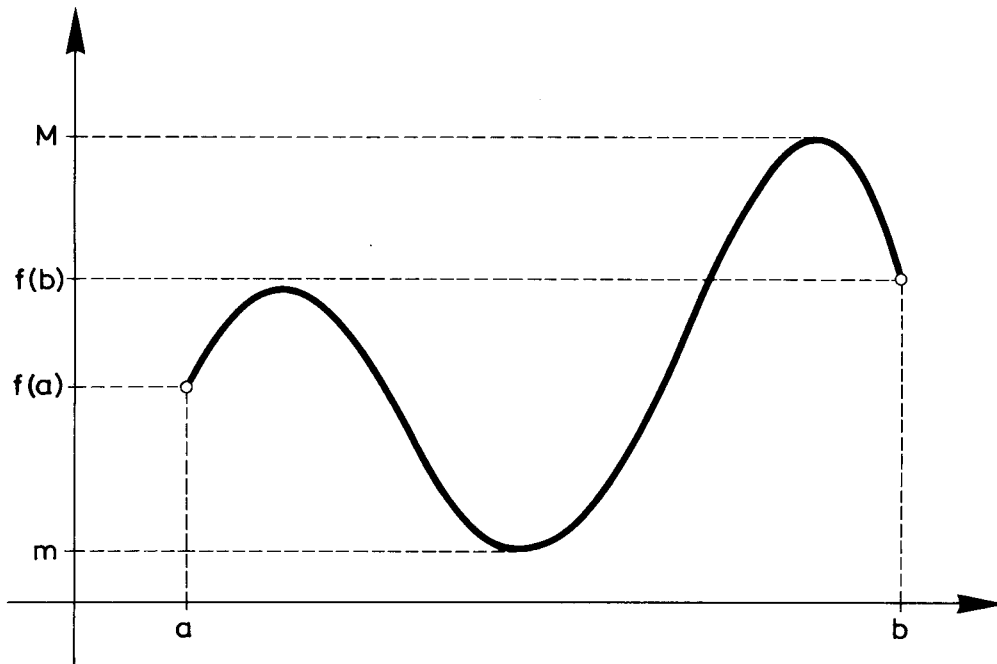


Figura 5.7. Ilustración del resultado del corolario 5.3.12.

Como último de los resultados que se estudian en este apartado, en la proposición que sigue se relaciona la continuidad de una función con la de su correspondiente función inversa, en el supuesto que ésta existe.

5.3.13 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f es estrictamente monótona y continua en $[a, b]$; entonces, su función inversa f^{-1} también es continua en su campo de existencia.

Demostración:

Supondremos que f es estrictamente creciente en $[a, b]$; la demostración es completamente análoga si f es estrictamente decreciente. Recordemos en primer lugar que, en (4.1.11), se probó que toda

función estrictamente monótona tiene función inversa y que ésta tiene el mismo carácter, en cuanto a monotonía, que la función dada. Observemos también que, en virtud de 5.3.12, el conjunto imagen por f del intervalo $[a, b]$, es el intervalo $[f(a), f(b)]$, de modo que la función $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$, es biyectiva y su inversa es $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$, que además es estrictamente creciente en $[f(a), f(b)]$.

Vamos a probar que esta función es continua en su dominio. Para ello, habrá que probar lo siguiente: que se cumple $\lim_{y_0} f^{-1} = f^{-1}(y_0)$ si $y_0 \in]f(a), f(b)[$, que f^{-1} es continua por la derecha en $f(a)$ y finalmente que f^{-1} es continua por la izquierda en $f(b)$.

Sea, pues, $y_0 \in]f(a), f(b)[$ un elemento cualquiera de ese intervalo; existe un único $x_0 \in [a, b]$, tal que $y_0 = f(x_0)$, esto es, $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y designemos por $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, |x_0 - a|, |x_0 - b|\} \leq \varepsilon$. En virtud de 5.3.12, se cumplirá

$$f[x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1] = [y_1, y_2] \subset [f(a), f(b)].$$

Designando por $\delta = \min\{|f(x_0 - \varepsilon_1) - y_0|, |f(x_0 + \varepsilon_1) - y_0|\} > 0$, se tiene que $[y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset [y_1, y_2]$, con lo que cualquiera que sea $y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, se tiene que $f^{-1}(y) = x$ es tal que $|x - x_0| < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$. En definitiva, se ha probado de dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que, cualquiera que sea $y \in B(y_0; \delta)$, se cumple $f^{-1}(y) \in B(f^{-1}(y_0); \varepsilon)$, que es la condición de continuidad de la función f^{-1} en el punto y_0 .

Se propone como ejercicio probar la continuidad lateral que corresponda de f^{-1} en los extremos de su intervalo de definición. ■

5.4 LA CONTINUIDAD UNIFORME.

5.4.1 En este apartado se estudian las funciones que cumplen una condición más exigente que la continuidad estudiada hasta ahora y que se denomina *continuidad uniforme*; esta propiedad se caracteriza como una equivalencia con la continuidad sobre intervalos cerrados y acotados. También se estudian las funciones denominadas *de Lipschitz o lipschitzianas* y, en particular, las contracciones, para las cuales se da un teorema del punto fijo.

5.4.2 DEFINICIÓN. (*Funciones uniformemente continuas*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en A ; ello equivale a afirmar que, cualquiera que sea $a \in A$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta$. Como ya es sabido, el número real $\delta > 0$ depende de ε y también del punto a ; la definición que se ve a continuación impone una condición más fuerte sobre la continuidad, en el sentido que exige que un mismo valor de $\delta > 0$ sirva para todos los puntos de A .

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; se dice que f es *uniformemente continua* en A si, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que cualesquiera que sean $x, y \in A$ que cumplan $|x - y| < \delta$, se verifica entonces que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

5.4.3 EJEMPLO. Vamos a ver tres ejemplos que ilustren la propiedad que acabamos de definir y que, de paso, nos van a permitir poner de manifiesto que la continuidad uniforme de una función en un conjunto depende de su propia continuidad y también del dominio que se considere.

- 1) Considérese la función $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x$; vamos a ver que f es uniformemente continua en $]0, 1[$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, arbitrario, si tomamos $\delta = \varepsilon/3 > 0$, cualesquiera que sean $x, y \in]0, 1[$ tales que $|x - y| < \delta$, se cumple:

$$|f(x) - f(y)| = |3x - 3y| = 3|x - y| < 3\delta = 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

- 2) Consideremos ahora la función $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$; vamos a ver que esta función no es uniformemente continua en $]0, 1[$. Para ello, debemos probar la existencia de un $\varepsilon > 0$ tal que, cualquiera que sea $\delta > 0$, existen puntos $x, y \in]0, 1[$ con $|x - y| < \delta$ tales que $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \geq \varepsilon$. En efecto, sea $0 < \varepsilon \leq 1$; para cualquier $\delta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\delta > \frac{1}{n} > 0$. Si tomamos $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n+1}$, se cumple entonces,

$$|x - y| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} < \delta,$$

pero no obstante, se tiene que $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = |n - (n+1)| = 1 \geq \varepsilon$, lo que prueba que la función no es uniformemente continua en $]0, 1[$.

- 3) Si $0 < a < 1$, considérese la función $f :]a, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$; vamos a ver que f es uniformemente continua en $]a, 1[$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, basta tomar $\delta = a^2\varepsilon > 0$, para que cualesquiera que sean $x, y \in]a, 1[$ tales que $|x - y| < \delta$, entonces:

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy} < \frac{\delta}{a^2} = \frac{a^2\varepsilon}{a^2} = \varepsilon.$$

Vista la definición de función uniformemente continua en un conjunto y algunos ejemplos ilustrativos, vamos a caracterizar la condición de continuidad uniforme.

5.4.4 PROPOSICIÓN. Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A , entonces f es continua en A (el recíproco no es cierto).

Demostración:

Es una consecuencia directa de la definición y se propone como ejercicio. Por otro lado, el segundo ejemplo de 5.4.3 permite ilustrar que el recíproco no es cierto, esto es, que la continuidad es condición necesaria pero no suficiente para la continuidad uniforme. ■

5.4.5 TEOREMA. (De Heine-Cantor.) Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, entonces es uniformemente continua en dicho intervalo.

Demostración:

Procederemos por reducción al absurdo. Si f no fuera uniformemente continua en el intervalo $[a, b]$, existiría un $\varepsilon > 0$ tal que, cualquiera que fuese $\delta > 0$, existirían puntos $x, y \in [a, b]$ tales que $|x - y| < \delta$, para los cuales se cumpliría $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = 1/n > 0$, existirían $x_n, y_n \in [a, b]$ tales que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Pero las sucesiones (x_n) y (y_n) están acotadas, con lo que en virtud del teorema 2.5.6, dichas sucesiones tienen al menos una parcial convergente, (x_{n_k}) y (y_{n_k}) , respectivamente.

Pero como $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$, se tiene $\lim x_{n_k} = \lim y_{n_k} = L \in [a, b]$ y, por la continuidad de f en $[a, b]$, debe cumplirse $\lim f(x_{n_k}) = \lim f(y_{n_k}) = f(L)$, lo cual es contradictorio con la condición $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. ■

5.4.6 DEFINICIÓN. (*Funciones lipschitzianas*). Una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina *de Lipschitz* o *lipschitziana* en A si existe una constante $K > 0$, denominada *constante de Lipschitz* de f , tal que cualesquiera que sean $x, y \in A$, se cumple $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

Así, por ejemplo, la función $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, es lipschitziana en $]0, 1[$, con constante de Lipschitz $K = 2$, puesto que cualesquiera que sean $x, y \in]0, 1[$, se cumple:

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)| \leq 2|x - y|.$$

El interés de esta definición lo pone de manifiesto el resultado que sigue.

5.4.7 PROPOSICIÓN. Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es lipschitziana en A , entonces es uniformemente continua en A (el recíproco no es cierto).

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$ para que, cualesquiera que sean $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$, se cumpla

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K\delta = K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

lo cual prueba la continuidad uniforme de f en A . ■

5.4.8 DEFINICIÓN. (*Funciones contractivas*). Hay un tipo de funciones lipschitzianas de interés especial: son las denominadas *funciones contractivas* o *contracciones*. Se dice que una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función contractiva* (o *contracción*) si existe una constante $0 < K < 1$, denominada *coeficiente* o *constante de contracción* de f , tal que, cualesquiera que sean $x, y \in A$, se cumple $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

Así, por ejemplo, la función $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2/3$, es contractiva con coeficiente de contracción $K = 2/3$, puesto que, cualesquiera que sean $x, y \in]0, 1[$, se cumple

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} \right| = \left| \frac{1}{3}(x - y)(x + y) \right| \leq \frac{2}{3}|x - y|.$$

5.4.9 TEOREMA. (*Del punto fijo para contracciones*). Toda contracción $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de \mathbb{R} en \mathbb{R} tiene un único punto fijo, esto es, existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$.

Demostración:

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función contractiva de coeficiente de contracción K y sea x_0 un número real cualquiera; vamos a construir una sucesión convergente a un punto fijo de f . Para ello definamos la sucesión numérica $x_n = f(x_{n-1})$, para todo $n \geq 1$. Esta sucesión (x_n) es contractiva (véase 2.6.13), puesto que

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq K|x_n - x_{n-1}|, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Pero, en virtud de la proposición 2.6.14, toda sucesión contractiva es convergente; si designamos por $x = \lim x_n$, dada la continuidad de f , se cumplirá:

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x,$$

esto es, x es un punto fijo de la función f .

Ahora debemos probar la unicidad de dicho punto fijo. Si se supone que $x' \in \mathbb{R}$ es otro punto fijo distinto de f y dado que $0 < K < 1$, se debería cumplir

$$0 < |x - x'| = |f(x) - f(x')| \leq K|x - x'| < |x - x'|,$$

lo cual es imposible. ■

5.5 CONVERGENCIA UNIFORME Y CONTINUIDAD.

5.5.1 En este último apartado del presente capítulo se estudia la continuidad de las funciones obtenidas por paso al límite en una sucesión o en una serie de funciones continuas. Se constatará, una vez más, que la convergencia puntual no es suficiente para preservar las “buenas propiedades” de las funciones involucradas, en particular, la continuidad.

Veamos, para comenzar, un ejemplo que nos permitirá situar la cuestión. Considérese la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en la cual, para cada $n \in \mathbb{N}$, el término n -ésimo es la función $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n$. Se sabe que cada elemento f_n (función potencial de exponente natural n) de esta sucesión es una función continua en su dominio, el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$; calculando el límite puntual de esta sucesión funcional, se obtiene la función f definida por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1, & \text{si } x = 1, \end{cases}$ que no es continua en el intervalo $[0, 1]$, su campo de existencia. Esto demuestra claramente que, en general, el límite puntual de una sucesión de funciones continuas no es una función continua, con lo que, si se quiere garantizar que lo sea, debe exigirse más a la convergencia de la sucesión de funciones, tal como se demuestra en la proposición que sigue.

5.5.2 PROPOSICIÓN. El límite uniforme de funciones continuas, es una función continua.

Demostración:

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función límite uniforme de la sucesión (f_n) . Para probar que, efectivamente, la función f es continua en A , debe probarse que, si a es un punto cualquiera de A , se cumple $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Puesto que la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en A , dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, cualquiera que sea $x \in A$ y para todo $n \geq n_0$, se cumple:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, dado que f_{n_0} es continua en A , cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo } x \in B(a; \delta) \cap A.$$

En definitiva, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

cualquiera que sea $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta$, lo cual prueba la continuidad de la función f en A . ■

5.5.3 COROLARIO. La función suma de una serie de funciones continuas que converge uniformemente es una función continua.

Demostración:

Basta aplicar la proposición anterior a la sucesión de sumas parciales de la serie. ■

En el caso concreto de las series de potencias, se obtiene un resultado muy importante: las funciones definidas por series de potencias siempre son continuas en el interior del intervalo de convergencia.

5.5.4 PROPOSICIÓN. Sea $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ una serie de potencias; la función suma de dicha serie $f(x) =$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ es continua en todo el dominio de convergencia de la serie.

Demostración:

Immediata, teniendo en cuenta 5.5.3 y la continuidad de las funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$. ■

5.6 EJERCICIOS.

1. Estudiar la continuidad de las funciones cuya expresión analítica se da en cada caso:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 8x + 15}; & \text{e) } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}; & \text{i) } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0; \end{cases} \\ \text{b) } f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}; & \text{f) } f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}; & \text{j) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & \text{si } x \neq 2 \\ 3, & \text{si } x = 2; \end{cases} \\ \text{c) } f(x) = \frac{x - 5}{(x + 1)^2}; & \text{g) } f(x) = \frac{|x - 2| + (x - 2)}{(x - 2)^2}; & \\ \text{d) } f(x) = \frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 2x - 3}; & \text{h) } f(x) = \frac{|x|}{x} + 4; & \end{array}$$

2. Determinar el campo de continuidad de las siguientes funciones y, cuando proceda, clasificar las discontinuidades que se observen:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } x < 0, \\ x - 2, & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ \frac{x^2 - x}{6}, & \text{si } 3 \leq x; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} E(x), & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^2}{6} - 1, & \text{si } 0 \leq x < 6, \\ x - 1, & \text{si } 6 \leq x. \end{cases}$$

3. (a) Demostrar que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}; \end{cases}$ es discontinua en todo punto de \mathbb{R} .

(b) Estudiar la continuidad de la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$

(c) Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1/x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} - \{0\}, \\ x, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$ probar que f es biyectiva y

que únicamente es continua en dos puntos.

4. Se sabe que cierta función f es continua en \mathbb{R} y es tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Determinar qué valores debe tomar f en el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

5. Determinar, si existen, los valores de las constantes a, b, A y B que hacen continuas en su dominio las funciones:

$$(1) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x \leq c, \\ ax + b, & \text{si } x > c; \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2, \\ A, & \text{si } x = 2; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ B, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

6. Dar un ejemplo, si es posible, de función f de \mathbb{R} en \mathbb{R} , que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en \mathbb{R} .

7. Supóngase que una función f satisface la condición siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x-h)) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Razonar si ello implica que f sea continua en \mathbb{R} .

8. Probar que si una función f cumple la condición $|f(x)| \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces dicha función es continua en el origen $a = 0$.

9. (1) Sea una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$. Probar que f es continua en \mathbb{R} si, y sólo si, f es continua en el origen $a = 0$.

(2) Sea una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que: $f(x+y) = f(x)f(y)$, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$. Probar que f es continua en \mathbb{R} si, y sólo si, f es continua en el origen $a = 0$.

10. 1) Demostrar la continuidad en su dominio de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = E(x+1) - E(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Estudiar la continuidad en su dominio de la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = E(x+1) + (-1)^{E(x)} E(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Sean f, g dos funciones reales definidas en \mathbb{R} , tales que:

$$f(x) = x + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}; \quad \text{y} \quad g(1) = 0, \quad g(x) = 2 \text{ para todo } x \neq 1.$$

- 1) Demostrar que se cumple: $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$.
- 2) Razonar si ello contradice el teorema sobre la continuidad de la función compuesta.
- 12.** Probar que el polinomio $x^3 - 3x + 1$ tiene una raíz real en el intervalo $]1, 2[$ de \mathbb{R} .
- 13.** Demostrar que la ecuación $\sin x = x - 1$ tiene una solución real.
- 14.** Comprobar que las funciones: a) $f(x) = x^3 - x - 2$; b) $g(x) = x^4 - 3x^3 + 1$, cumplen las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2] \subset \mathbb{R}$ y determinar un cero de cada una de ellas con un error menor que 10^{-1} .
- 15.** Demostrar que todo polinomio de coeficientes reales y de grado impar, tiene al menos una raíz real.
- 16.** Aplicando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación $x^n - a = 0$, donde a es un número real positivo, tiene al menos una solución real.
- 17.** 1) Demostrar que para toda función continua $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, existe un punto fijo $x_0 \in [0, 1]$, esto es, tal que $f(x_0) = x_0$.
2) Análogamente, demostrar que existe un $x_1 \in [0, 1]$, tal que $f(x_1) = 1 - x_1$.
3) Interpretar gráficamente los apartados anteriores.
- 18.** Sea una función $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, tal que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, para todo $x, y \in [a, b]$. Demuéstrase que f es continua y que tiene un único punto fijo.
- 19.** Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y tal que solamente toma valores racionales, probar que f es una función constante.
- 20.** 1) Si $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(0) = f(1)$, demostrar que existe $x \in [0, 1]$, tal que $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.
2) Generalizar el resultado anterior a un intervalo cualquiera $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
3) Generalizar el apartado 1), tomando $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, en lugar de $1/2$.
- 21.** 1) Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función periódica y continua en \mathbb{R} , entonces es acotada.
2) Razonar si es cierto que toda función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica y acotada es continua en \mathbb{R} . Poner un contraejemplo en caso de falsedad.
- 22.** Sean a y b números reales estrictamente positivos; se definen las funciones $f, g: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $f(x) = \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$ y $g(x) = \frac{a}{x} E\left(\frac{x}{b}\right)$, para todo $x \neq 0$.
1) Razonar si puede definirse el valor de f en el origen, de modo que f sea continua en dicho punto.
2) Misma cuestión para la función g .

23. Supóngase que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y que se cumple $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1) Demostrar que la función f es acotada y que alcanza un máximo o un mínimo absolutos.

2) Dar un ejemplo que ilustre que no necesariamente debe alcanzar ambos.

24. Si $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, definimos la función $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, mediante $g(x) = 2^n f(x - n)$, si $n \leq x < n + 1$. 1) Estudiar la continuidad de la función g . 2) Dar una condición necesaria y suficiente para que la función g sea continua en su dominio. 3) Si $f(x) = ax + b, x \in [0, 1]$, discutir cómo han de ser a y b para que la función g sea continua.

25. Sea la función $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Demostrar que:

1) La función f es uniformemente continua en $[0, 2]$. 2) La función f no es de Lipschitziana en $[0, 2]$.

26. Sea $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ una contracción de coeficiente K (recuérdese que $0 < K < 1$), es decir, una función que satisface la condición $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$, cualesquiera que sean $x, y \in [a, b]$. Demostrar que f tiene un único punto fijo en $[a, b]$, adaptando la demostración del teorema 5.4.9.

27. Calcular el límite de las sucesiones funcionales siguientes y comprobar que no se mantiene la continuidad de las funciones involucradas:

1) $f_n(x) = x^n, x \in]-1, 1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

2) $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}, x \in [0, 1], \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$

28. Calcular el límite de las siguientes sucesiones de funciones, indicando en cada caso: 1) si se trata de un límite uniforme; 2) si son continuas las funciones de la sucesión; 3) si la función límite es continua; 4) si las respuestas a las cuestiones anteriores contradicen de alguna forma el teorema sobre continuidad y convergencia uniforme.

$$(a) \quad f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ \frac{1}{nx}, & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[; \end{cases} \quad (b) \quad g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

29. De cada una de las sucesiones de funciones f_n que se dan a continuación, se pide: 1) determinar el dominio D , en el cual convergen puntualmente; 2) calcular el límite puntual en dicho dominio; 3) decir si la convergencia en D es uniforme o no.

a) $f_n:]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 + x^n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$

b) $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (1 - x)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$

c) $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (1 - x)^n g(x), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ siendo } g \text{ una función continua en } [0, 1] \text{ tal que } g(0) = 0.$

5.7 GUÍA DE REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[Ba] **BARTLE, R.G. y D.R. SHERBERT.** *Introducción al Análisis Matemático de una variable.* En este texto se dedica al estudio de las funciones continuas la segunda parte del capítulo 4. Se define en primer lugar la continuidad en un punto y luego las discontinuidades y su clasificación; a continuación se estudian los criterios de continuidad y las funciones continuas en intervalos cerrados y acotados de \mathbb{R} y sus propiedades específicas. El apartado siguiente se dedica al estudio de la continuidad uniforme y a una cuestión muy interesante: la aproximación de una función uniformemente continua en un intervalo por una sucesión de funciones escalonadas (“constantes a trozos”), por un polinomio (teorema de aproximación de Weierstrass) y, finalmente, el teorema de Bernstein. Por último, se estudia la relación entre monotonía y continuidad y se establece la continuidad de la función inversa de una función biyectiva y continua.

[Or] **ORTEGA, J.M.** *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.*

Las funciones continuas se estudien en el capítulo III, segundo apartado. Se definen en primer lugar las funciones continuas en un punto y se relaciona la continuidad con las operaciones elementales entre funciones; a continuación, se tratan las funciones continuas en intervalos cerrados de \mathbb{R} (funciones continuas y el problema del máximo), el teorema del valor intermedio de Bolzano y, para terminar, la continuidad uniforme de funciones.

[Ru] **RUDIN, W.** *Principios de Análisis Matemático.*

En el capítulo 4 de esta obra, se tratan conjuntamente los límites de funciones y las funciones continuas, en el marco general de funciones definidas entre dos espacios métricos y, dentro del cual, el caso real se trata como un ejemplo o un caso particular. No obstante, se recomienda su lectura por ser muy interesante e ilustrativa; asimismo, cabe destacar la excelente colección de ejercicios propuestos que contiene dicho capítulo.

[Spv] **SPIVAK, M.** *Calculus.*

El estudio de las funciones continuas y sus propiedades se lleva a cabo a lo largo de tres capítulos. En primer lugar, el capítulo 6 (muy breve), en el cual se da la definición de función continua en un punto, la relación entre continuidad y operaciones con funciones y la propiedad de conservación del signo. A continuación, se estudian las funciones continuas en un intervalo cerrado de \mathbb{R} , el teorema de Bolzano y el problema del máximo, pero la demostración de dichos teoremas se hace en el capítulo siguiente, después de haber enunciado el axioma del supremo en \mathbb{R} . Es especialmente recomendable la excelente colección de ejercicios que contienen los tres capítulos referidos.

CAPÍTULO 6

FUNCIONES ELEMENTALES

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo se dedica al estudio de las denominadas funciones elementales, cuya importancia reside en que, junto con las funciones definidas en el capítulo 4 (coordenada de \mathbb{R} , constantes, polinómicas, racionales y potenciales de exponente racional), intervienen en los modelos matemáticos básicos en Ingeniería. Es imprescindible un buen conocimiento de las funciones elementales y sus propiedades ya que, en los capítulos dedicados al cálculo diferencial y al cálculo integral, los aspectos prácticos se desarrollan básicamente con funciones elementales.

El apartado 6.1 se dedica al estudio de la función exponencial real, que se define como la suma de una serie de potencias y se establecen sus propiedades básicas (continuidad, homomorfismo de grupos, crecimiento, límites en el infinito, etc). A partir de la exponencial real se define su función inversa: el logaritmo neperiano (apartado 6.2) y mediante estas dos funciones se construyen las funciones exponenciales y logarítmicas generalizadas. (apartado 6.3) y las potenciales de exponente real (apartado 6.4). Estas últimas generalizan las potenciales de exponente racional introducidas en el capítulo 4.

En el apartado 6.5 se estudia la función exponencial compleja, que se define como la extensión a \mathbb{C} de la exponencial real. La restricción de esta función a los complejos de parte real nula permite definir las funciones trigonométricas seno y coseno (apartado 6.6) como sumas de series de potencias; estas funciones resultan ser periódicas y ello permite definir el número π como la mitad de su período fundamental. En este mismo apartado se estudian las restantes funciones trigonométricas que se definen a partir de coseno y seno, así como las funciones trigonométricas inversas.

Por último, el apartado 6.7 se dedica al estudio de las funciones hiperbólicas, su definición y propiedades más importantes.

6.1 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL REAL.

6.1.1 DEFINICIÓN. Se denomina *exponencial real* a la función $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

El dominio de esta función es \mathbb{R} , puesto que el radio de convergencia de la serie de potencias que la define es $+\infty$, como es inmediato comprobar. En la proposición que sigue se establecen las propiedades más importantes de esta función.

6.1.2 PROPOSICIÓN. (*Propiedades de la función exp*). La función exponencial real \exp cumple las propiedades siguientes:

- 1) Es continua en su dominio.
- 2) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$.
- 3) $\exp(0) = 1$; $\exp(1) = e$.
- 4) $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- 5) $\exp(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- 6) $\exp(x) > 1$, para todo $x > 0$; $\exp(x) < 1$, para todo $x < 0$.
- 7) Es estrictamente creciente en \mathbb{R} .
- 8) $\exp(px) = (\exp(x))^p$, cualesquiera que sean $p \in \mathbb{Q}$ y $x \in \mathbb{R}$.
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$; $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$.

Demostración:

- 1) Inmediato, teniendo en cuenta la definición de \exp y la proposición 5.5.4, sobre continuidad de la función suma de una serie de potencias.
- 2) Ya ha sido probado en 3.5.15.
- 3) Que $\exp(0) = 1$ resulta de la propia definición de la función exponencial; que $\exp(1) = e$, es inmediato por definición de \exp y teniendo presente el ejemplo 3.3.19, en el cual se definió el número e .
- 4) Inmediato, aplicando la propiedad 2) con $y = -x$ y teniendo presente que $\exp(0) = 1$.
- 5) De la propiedad anterior se deduce que $\exp(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; puesto que $\exp(0) = 1$, por la propiedad de conservación del signo de las funciones continuas, se deduce que debe ser $\exp(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- 6) Por definición de \exp , se cumple $\exp(x) > 1$, cualquiera que sea $x > 0$; si se considera $x < 0$, entonces $-x > 0$, con lo cual $\exp(-x) > 1$ y, finalmente, resulta $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} < 1$. En consecuencia, puede afirmarse que $\exp(x) > 1$, si $x > 0$ y $0 < \exp(x) < 1$, si $x < 0$.
- 7) Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario; si $h > 0$, entonces se cumple $\exp(h) > 1$, con lo que $\exp(x + h) = \exp(x) \cdot \exp(h) > \exp(x)$, lo cual demuestra el crecimiento estricto de la función \exp en \mathbb{R} .
- 8) Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario; si $x \in \mathbb{R}$, aplicando reiteradamente la propiedad 2), se cumple

$$\exp(nx) = \exp(x + \cdots + x) = \exp(x) \cdots \exp(x) = (\exp x)^n.$$

Si n es un entero negativo, $-n$ es un número natural y entonces:

$$(\exp(x))^n = \frac{1}{(\exp(x))^{-n}} = \frac{1}{\exp(-nx)} = \exp(nx).$$

Si n es un entero no nulo, se cumple $\exp(x) = \exp\left(n\frac{x}{n}\right) = \left(\exp\frac{x}{n}\right)^n$, es decir, $\exp\left(\frac{x}{n}\right) = (\exp(x))^{1/n}$. Finalmente, si $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ es un número racional cualquiera, se cumple:

$$\exp(px) = \exp\left(\frac{mx}{n}\right) = (\exp(mx))^{1/n} = (\exp(x))^{m/n} = (\exp(x))^p.$$

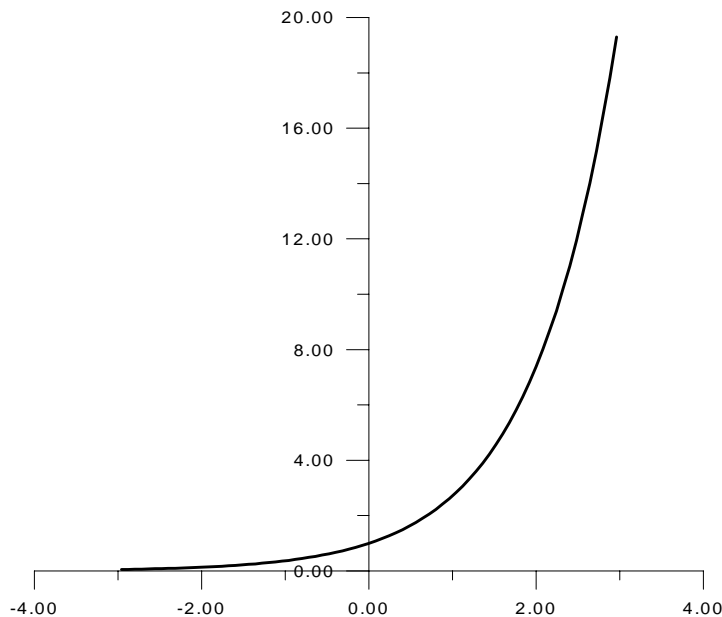


Figura 6.1. Gráfica de la función exponencial real

9) Por definición de la función exponencial real, cualquiera que sea $x > 0$, se cumple

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) > 1 + x,$$

con lo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x) = +\infty$. Teniendo presente ahora la propiedad 4), resulta inmediatamente que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$. Estas dos condiciones, junto con la continuidad de la función \exp en su dominio, permiten concluir que se cumple: $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$, tal como se afirmaba. ■

6.1.3 OBSERVACIÓN. Si $p \in \mathbb{Q}$ es un número racional cualquiera, entonces se cumple:

$$\exp(p) = \exp(p \cdot 1) = (\exp 1)^p = e^p,$$

lo que permite afirmar que la función exponencial es la prolongación a \mathbb{R} de la potenciación de base e y exponente racional y, en consecuencia, se justifica la notación habitual:

$$\exp(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En la figura 6.1 se ha representado la gráfica de la función exponencial real.

6.2 LA FUNCIÓN LOGARITMO NEPERIANO.

6.2.1 DEFINICIÓN. (*La función logaritmo neperiano*). En la proposición 6.1.2, se ha probado que la función exponencial real es estrictamente creciente en \mathbb{R} y que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$. Con ello, y en virtud de 4.1.9, puede afirmarse que existe la correspondiente función inversa de la exponencial real, que se denomina *logaritmo neperiano* y se designa habitualmente \ln o bien \log . Se denomina *logaritmo neperiano (o natural)* a la función $\ln : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida como sigue: cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}_0^+$, se dice que $\ln(x) = t$ si, y sólo si, se cumple $\exp(t) = x$.

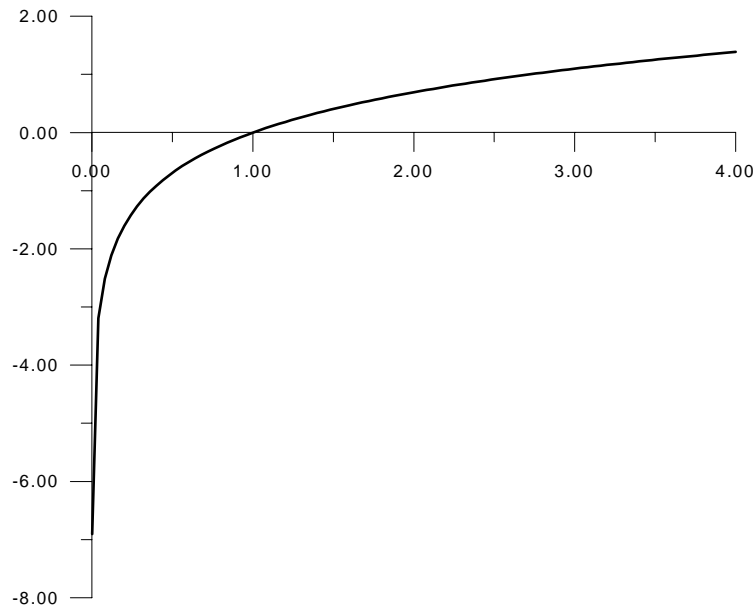


Figura 6.2. Gráfica de la función logaritmo neperiano.

Se estudian a continuación las propiedades más importantes de esta función, que son consecuencia de su propia definición y de las propiedades de la función exponencial real.

6.2.2 PROPOSICIÓN. La función logaritmo neperiano cumple las propiedades siguientes:

- 1) Es continua en su dominio.
- 2) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, cualesquiera que sean $x, y > 0$.
- 3) $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$.
- 4) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, cualquiera que sea $x > 0$.
- 5) $\ln(x) < 0$, para todo $x \in]0, 1[$; $\ln(x) > 0$, para todo $x > 1$.
- 6) $\ln(x^p) = p \ln(x)$, cualesquiera que sean $x > 0$ y $p \in \mathbb{Q}$.
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\ln(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}$.

Demostración:

- 1) Inmediato, en virtud de 5.2.10 y teniendo presente que la función \ln se define como la función inversa de una función continua.
- 2) Obsérvese que se cumple

$$xy = (\exp(\ln x))(\exp(\ln y)) = \exp(\ln x + \ln y);$$

aplicando ahora la definición de \ln se completa el razonamiento.

- 3) Evidente.
- 4) Inmediata, escribiendo $\ln\left(x\frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$ y aplicando la propiedad 2).
- 5) Consecuencia inmediata del apartado 6) de la proposición 6.1.2.
- 6) Si $\ln(x^p) = t$, entonces por definición se tiene que $x^p = \exp(t)$; en consecuencia, se cumple entonces $x = (\exp(t))^{1/p}$ y teniendo ahora en cuenta el apartado 8) de 6.1.2, resulta finalmente que $t = p \ln(x)$, lo cual completa la demostración.
- 7) Inmediato, en virtud de la definición de \ln y aplicando la propiedad 9) de 6.1.2. ■

En la figura 6.2 se representa la gráfica de la función logaritmo neperiano.

6.3 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS GENERALIZADAS.

6.3.1 DEFINICIÓN. (*Funciones exponenciales generalizadas*). Vamos a generalizar la función exponencial a una base real estrictamente positiva cualquiera, a partir del siguiente hecho: si $a > 0$ es un número real estrictamente positivo arbitrario y $p \in \mathbb{Q}$ es un número racional cualquiera, se cumple $\ln(a^p) = p \ln a$ en virtud de la propiedad 6) de la proposición 6.2.2, con lo que, por definición de la función logaritmo neperiano, se tendrá $a^p = \exp(p \ln(a))$. Esto permite generalizar de un modo natural la función exponencial real, tal como se define a continuación.

- Sea $a > 0$; se denomina *exponencial generalizada o exponencial de base a* la función $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$\exp_a(x) = \exp(x \cdot \ln(a)).$$

Es habitual emplear la notación: $\exp_a(x) = a^x$. Obsérvese que la función exponencial generalizada es la composición de la función producto del escalar $\ln(a)$ por la función coordenada de \mathbb{R} y la función exponencial real; en consecuencia, su campo de existencia es \mathbb{R} . Obsérvese que si $a = 1$, la exponencial generalizada no es más que la constante 1 y carece de interés. En consecuencia, en la definición vista, además de imponer que $a > 0$, se entenderá que también se cumple $a \neq 1$.

En la proposición que sigue se enuncian las propiedades más importantes de las funciones exponenciales generalizadas.

6.3.2 PROPOSICIÓN. Sean a, b números reales estrictamente positivos y distintos de 1; las funciones exponenciales generalizadas definidas en 6.3.1 cumplen las propiedades siguientes:

- 1) Son continuas en \mathbb{R} .
- 2) $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$.
- 3) $\exp_a(0) = 1$; $\exp_a(1) = a$.
- 4) $\exp_a(x) \cdot \exp_a(-x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

- 5) $\exp_a(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
 6) Si $a > 1$, la función \exp_a es estrictamente creciente en \mathbb{R} y se cumplen:

$$\lim_{+\infty} \exp_a = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{-\infty} \exp_a = 0.$$

Si $0 < a < 1$, la función \exp_a es estrictamente decreciente en \mathbb{R} y se cumplen:

$$\lim_{+\infty} \exp_a = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{-\infty} \exp_a = +\infty.$$

- 7) $\exp_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$.
 8) $\exp_a(px) = (\exp_a(x))^p$, cualesquiera que sean $x \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{Q}$.
 9) $\exp_a(x) \cdot \exp_b(x) = \exp_{ab}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

- 1) Inmediata, teniendo en cuenta el dominio de la función exponencial real y la continuidad de la composición de funciones continuas.
 2) Si $x, y \in \mathbb{R}$ son cualesquiera, aplicando la definición de la exponencial generalizada, se obtiene:

$$\begin{aligned} \exp_a(x+y) &= \exp((x+y)\ln(a)) = \exp(x\ln(a) + y\ln(a)) = \\ &= (\exp(x\ln(a)))(\exp(y\ln(a))) = (\exp_a(x))(\exp_a(y)). \end{aligned}$$

- 3) Evidente.
 4) Si $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario y se tiene en cuenta la propiedad 3), resulta:

$$1 = \exp_a(x + (-x)) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(-x).$$

- 5) Inmediato, teniendo en cuenta la definición de exponencial generalizada y la propiedad 5) de 6.1.2.
 6) Inmediato por las propiedades del límite en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función exponencial real.
 7) Evidente.
 8) Sea p un número racional arbitrario y sea $x \in \mathbb{R}$; entonces se verifica

$$\exp_a(px) = \exp((px)\ln(a)) = (\exp(x\ln(a)))^p = (\exp_a(x))^p.$$

- 9) Sean $a, b > 0$ y $a, b \neq 1$; si $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario, se cumple

$$\begin{aligned} \exp_a(x) \cdot \exp_b(x) &= (\exp(x\ln(a)))(\exp(x\ln(b))) = \exp(x\ln(a) + x\ln(b)) = \\ &= \exp(x(\ln(a) + \ln(b))) = \exp(x\ln(ab)) = \exp_{ab}(x), \end{aligned}$$

como se quería probar. ■

6.3.3 OBSERVACIÓN. Algunas de las propiedades establecidas en la proposición anterior se escriben como sigue en la notación habitual:

- 2) $a^{x+y} = a^x a^y$.
 3) $a^0 = 1, a^1 = a$.
 4) $a^x a^{-x} = 1$.

- 5) $a^x > 0$.
- 8) $a^{px} = (a^x)^p$.
- 9) $a^x b^x = (ab)^x$.

En la figura 6.3 se representa la gráfica de la función \exp_2 y en la Figura 6.4, la gráfica de la función $\exp_{1/2}$; compárense ambas gráficas.

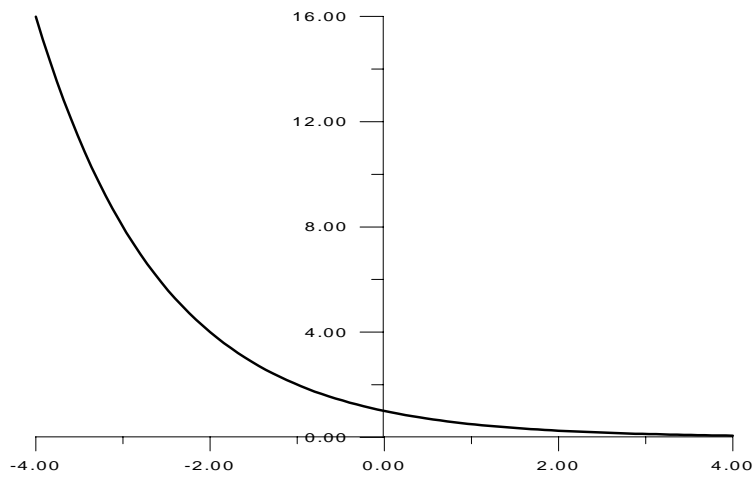
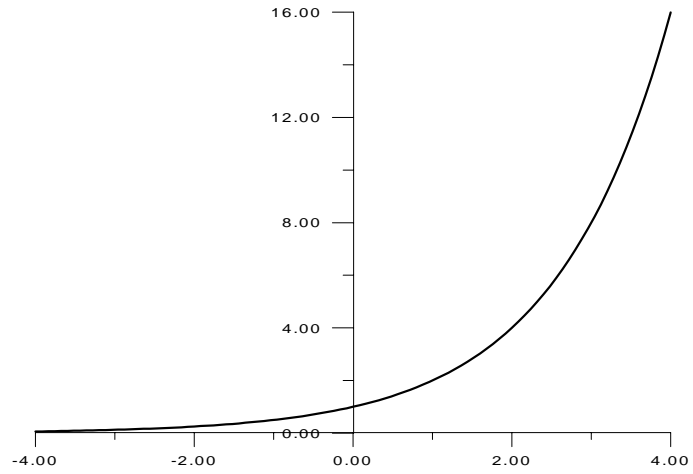


Figura 6.3 y 6.4. Gráficas de las funciones \exp_2 y $\exp_{1/2}$.

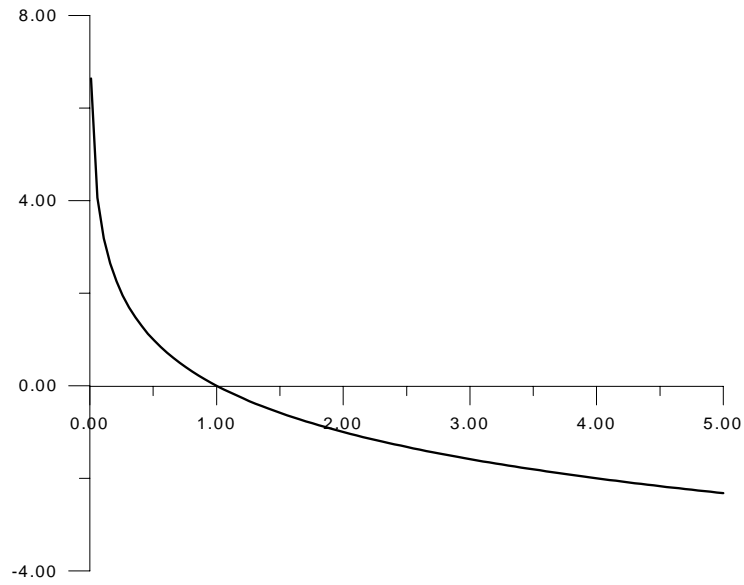
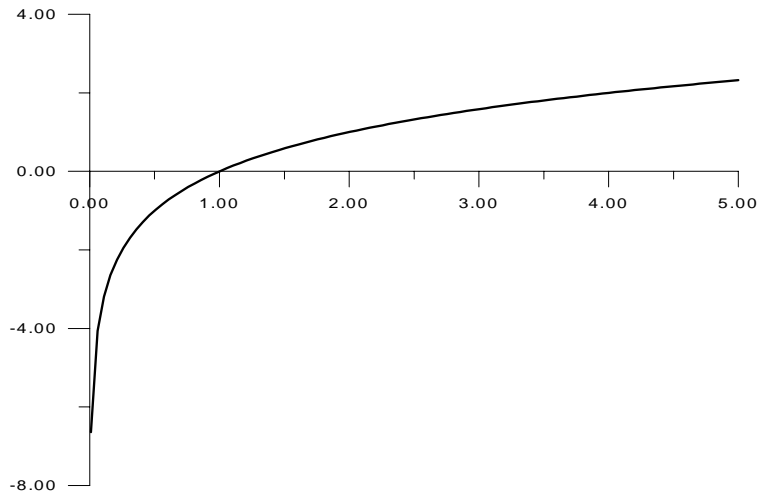


Figura 6.5 y 6.6. Gráfica de las funciones \log_2 y $\log_{1/2}$.

6.3.4 DEFINICIÓN. (*Funciones logarítmicas generalizadas*). De forma análoga a como se hizo en el apartado anterior para la función logaritmo neperiano, vamos a definir las funciones logarítmicas generalizadas. La propiedad 6) de 6.3.2 permite afirmar, para cada función exponencial generalizada $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, la existencia de la correspondiente función inversa, que se denomina *función logarítmica generalizada*, designada \log_a .

De forma precisa: para cada $a > 0$, $a \neq 1$, se define la función logarítmica generalizada de base a , como la función:

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longrightarrow \log_a(x) = t \iff \exp_a(t) = x. \end{aligned}$$

Para establecer las propiedades de las funciones logarítmicas generalizadas, resulta muy cómodo basarse en el resultado que se estudia en la proposición que sigue y que relaciona la función logarítmica generalizada con la función logaritmo neperiano.

6.3.5 PROPOSICIÓN. (*Cambio de base en funciones logarítmicas.*) Si $a > 0$, $a \neq 1$, se verifica la siguiente igualdad:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \quad \text{para todo } x > 0.$$

Demostración:

Por definición de función logarítmica generalizada, si $\log_a(x) = t$, entonces se cumple $x = \exp_a(t) = \exp(t \ln(a))$, con lo que, por definición de logaritmo neperiano, se tiene $\ln(x) = t \ln(a)$, es decir, $t = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, como se quería probar. ■

6.3.6 OBSERVACIÓN. El resultado probado en la proposición anterior permite considerar la función logarítmica generalizada de base a , simplemente como el producto de la función logaritmo neperiano por la constante $\frac{1}{\ln(a)}$. A partir de este hecho, es inmediato establecer las propiedades de la función \log_a ; enúnciense como ejercicio.

En las figuras 6.5 y 6.6 se han representado las gráficas de las funciones \log_2 y $\log_{1/2}$, respectivamente. Compárense ambas gráficas.

6.4 LAS FUNCIONES POTENCIALES.

En este apartado, nuestro objetivo es generalizar las funciones potenciales de exponente racional definidas en el capítulo 4 al caso de un exponente real.

6.4.1 DEFINICIÓN. (*Funciones potenciales.*)

- Sea a un número real cualquiera; se denomina *función potencial de exponente a* , la aplicación $x^a: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$x^a = \exp(a \ln(x))$$

- Obsérvese que la función potencial x^a es la composición de tres funciones: el logaritmo neperiano, el producto por la constante a y la exponencial, lo cual justifica que su dominio es \mathbb{R}_0^+ . Obsérvese asimismo que con esta generalización se restringe el dominio de la función potencial x^a cuando $a \in \mathbb{Q}$, ya que en este caso dicho dominio es \mathbb{R} ; no obstante, si $a \in \mathbb{N}$ el dominio de la función x^a es \mathbb{R} y si $a \in \mathbb{Z}^-$, entonces dicho dominio es \mathbb{R}_0 .

Nótese también, que si $a = 0$, la función potencial es la constante 1, esto es, $x^0 = 1$, para todo $x > 0$.

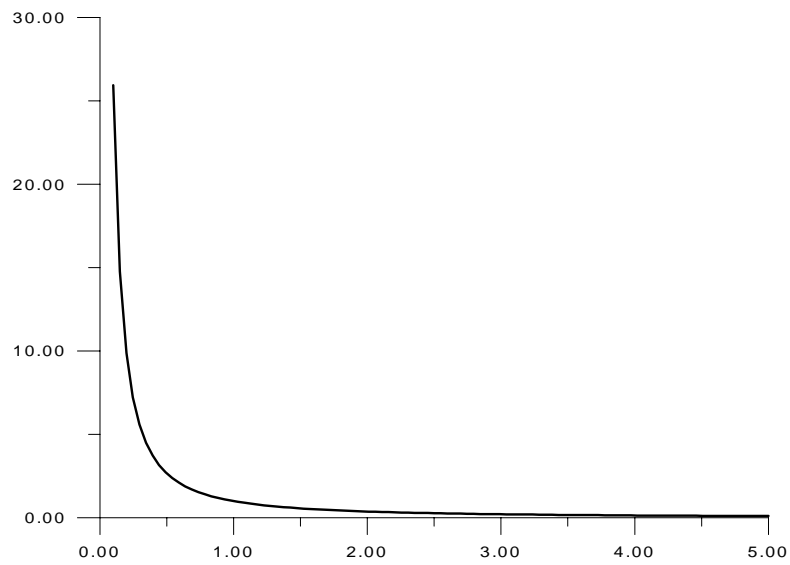
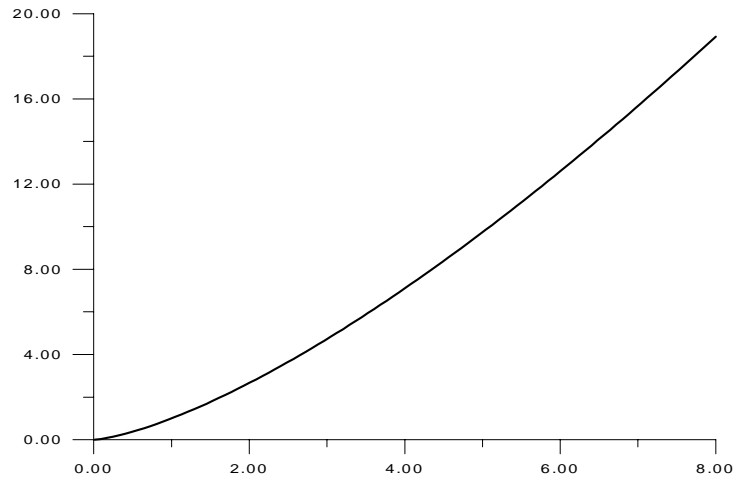


Figura 6.7 y 6.8. Gráficas de las funciones potenciales $x^{\sqrt{2}}$ y $x^{-\sqrt{2}}$

En la proposición que sigue se enuncian las propiedades más importantes de las funciones potenciales.

6.4.2 PROPOSICIÓN. Sea $a \in \mathbb{R}_0$; la función potencial x^a cumple las propiedades siguientes:

- 1) Es continua en su dominio.

- 2) $1^a = 1$.
- 3) $x^a > 0$, para todo $x > 0$.
- 4) $(x^a)(x^{-a}) = 1$, para todo $x > 0$.
- 5) $(xy)^a = (x^a)(y^a)$, cualesquiera que sean $x, y > 0$.
- 6) Si $a > 0$, la función potencial x^a es estrictamente creciente en \mathbb{R}_0^+ ; si $a < 0$, la función potencial x^a es estrictamente decreciente en \mathbb{R}_0^+ .

Demostración:

- 1) Inmediato, por ser la función potencial la composición de tres funciones continuas en sus respectivos dominios.
- 2) Evidente.
- 3) Inmediato, sin más que tener en cuenta la definición de la función potencial x^a y la propiedad 5) de 6.1.2.
- 4) Basta aplicar la definición de la función potencial x^a y la propiedad 4) de 6.1.2.
- 5) Sean $x, y \in \mathbb{R}_0^+$; se cumple entonces

$$\begin{aligned} (xy)^a &= \exp(a \ln(xy)) = \exp(a(\ln(x) + \ln(y))) = \exp(a \ln(x) + a \ln(y)) = \\ &= (\exp(a \ln(x)))(\exp(a \ln(y))) = (x^a)(y^a). \end{aligned}$$

- 6) Supongamos $a > 0$ y sean $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ tales que $x < y$; puesto que la función \ln es estrictamente creciente en su dominio, se cumple $\ln(x) < \ln(y)$ y dado que $a > 0$, se verifica $a \ln(x) < a \ln(y)$. Teniendo en cuenta finalmente el crecimiento estricto en \mathbb{R} de la función exponencial, resulta:

$$\exp(a \ln(x)) < \exp(a \ln(y)) \iff x^a < y^a,$$

lo cual prueba el crecimiento estricto de la función potencial x^a en el caso $a > 0$. Si $a < 0$, la demostración es completamente análoga. ■

En la figura 6.7 se ha representado la gráfica de la función potencial $x^{\sqrt{2}}$ y en la figura 6.8, la función potencial $x^{-\sqrt{2}}$.

6.5 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL COMPLEJA.

6.5.1 DEFINICIÓN. Se define la *función exponencial compleja* como la prolongación a \mathbb{C} de la función exponencial real, esto es, la función $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} \right).$$

Es inmediato comprobar que el radio de convergencia de la serie de potencias es $+\infty$, con lo que, efectivamente, el dominio de la función exponencial compleja es \mathbb{C} .

A pesar de que esta función se escribe igual que la función exponencial real, no hay peligro de confundirlas, pues el contexto o una indicación expresa evita la posible confusión. Obsérvese, por otra parte, que si $z = x \in \mathbb{R}$, entonces la exponencial compleja coincide con la exponencial real. Las propiedades más importantes de esta función se enuncian en la proposición que sigue.

6.5.2 PROPOSICIÓN. La función exponencial compleja definida en 6.5.1 cumple las propiedades siguientes:

- 1) Es continua en su dominio.
- 2) $\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$, cualesquiera que sean $z, z' \in \mathbb{C}$.
- 3) $\exp(0) = 1$.
- 4) $\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- 5) $\exp(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- 6) $\exp(pz) = (\exp(z))^p$, cualesquiera que sean $p \in \mathbb{Q}$ y $z \in \mathbb{C}$.
- 7) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- 8) $|\exp(z)| = e^{\Re z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- 9) Es una función periódica.

Demostración:

- 1) Evidente, en virtud de su definición.
- 2) Análoga al caso real.
- 3) Evidente.
- 4) Inmediato, aplicando 2) con $z' = -z$ y teniendo en cuenta la propiedad 3).
- 5) Consecuencia inmediata de 4).
- 6) Completamente análoga al caso real.
- 7) Sea $z \in \mathbb{C}$ un complejo cualquiera; se cumple entonces

$$\exp(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\bar{z})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \overline{z^n} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n} = \overline{\exp(z)},$$

como se quería probar.

- 8) Sea $z = x + iy$ un complejo cualquiera; entonces se tiene

$$\begin{aligned} |\exp(z)|^2 &= \exp(z) \cdot \overline{\exp(z)} = \exp(z) \cdot \exp(\bar{z}) = \\ &= \exp(z + \bar{z}) = \exp(2\Re z) = (\exp(\Re z))^2, \end{aligned}$$

con lo que $|\exp(z)| = e^{\Re z}$. Obsérvese ahora que, en virtud de las propiedades de la función exponencial real, se cumple lo siguiente:

- si $\Re z > 0$, entonces $|\exp(z)| > 1$;
- si $\Re z = 0$, entonces $|\exp(z)| = 1$;
- si $\Re z < 0$, entonces $|\exp(z)| < 1$.

Hágase una interpretación geométrica de estas consideraciones.

- 9) Se verá en el apartado que sigue. ■

6.6 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Las funciones que se estudian en este apartado son, suponemos, conocidas en cierto modo; aparecen en la medida de ángulos y en el estudio de relaciones entre ángulos y medidas de lados de triángulos, esto es, en la Trigonometría y, por este motivo, se las denomina genéricamente *funciones trigonométricas* o *circulares*.

6.6.1 DEFINICIÓN.

- Se definen dos funciones reales, denominadas *coseno* y *seno*, y notadas, respectivamente, \cos y sen , mediante:

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \operatorname{sen} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \cos x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} & x &\longrightarrow \operatorname{sen} x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}. \end{aligned}$$

- Se trata, pues, de dos funciones definidas por series de potencias; se comprueba inmediatamente que el radio de convergencia de cada una de dichas series es $+\infty$, con lo que el dominio de ambas funciones es, efectivamente, \mathbb{R} .

6.6.2 OBSERVACIÓN.

- Es inmediato relacionar las funciones trigonométricas \cos y sen con la función exponencial compleja; en efecto: si $z \in \mathbb{C}$ es un número complejo de parte real nula, esto es, tal que $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\exp(iy) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} y^{2p} + i \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} y^{2p+1} \right) = \cos y + i \operatorname{sen} y,$$

es decir, cualquiera que sea $y \in \mathbb{R}$ se cumplen:

$$\cos y = \Re \exp(iy), \quad \operatorname{sen} y = \Im \exp(iy),$$

lo cual permite afirmar que las funciones \cos y sen no son más que las componentes de la restricción de la función exponencial compleja al conjunto de los números complejos de parte real nula. A partir de las igualdades anteriores, es inmediato establecer un método sencillo de cálculo de la exponencial compleja; en efecto, si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, es un complejo cualquiera, se tendrá:

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = (e^x \cos y) + i(e^x \operatorname{sen} y).$$

- Comprendemos perfectamente una posible reacción de estupefacción al leer por primera vez las definiciones dadas de las funciones $\cos x$ y de $\operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$ y que se plantee una cierta duda acerca de si lo que se acaba de definir tiene algo que ver o no con lo que se sabía hasta ahora acerca del coseno y del seno de un ángulo. En efecto, claro que tiene que ver: son las mismas funciones que ya se conocen, aunque definidas de un modo distinto; de hecho hay varias formas de definir $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, por ejemplo, la referencia [Spv] contiene otra completamente distinta. En el capítulo siguiente probaremos que son únicas dos funciones que cumplen las propiedades que se establecerán en este apartado para las funciones \cos y sen y que, en cierto sentido, ya son conocidas, con lo cual justificaremos esta unicidad. Otra duda comprensible que puede surgir al respecto es si el número real x expresa la medida del ángulo en grados, radianes u otra medida de la amplitud de una región angular; en efecto, corresponde a la “unidad natural” de medir ángulos que es el radián, esto es, el ángulo que en un círculo de radio cualquiera abarca un arco de longitud igual al radio.

Nuestro siguiente objetivo es estudiar las propiedades de las funciones \cos y \sin ; empezaremos por un primer grupo de estas propiedades, que se enuncian en la proposición que sigue.

6.6.3 PROPOSICIÓN. Se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) Las funciones \cos y \sin son continuas en \mathbb{R} .
- 2) Se cumplen las igualdades $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$; $\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$.
- 3) La función \cos tiene simetría par y la función \sin tiene simetría impar, esto es, para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumplen las igualdades $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$.
- 4) Cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se cumplen las desigualdades siguientes:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24};$$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

- 5) Cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se tiene: $|\cos x| \leq 1$ y $|\sin x| \leq 1$.
- 6) Cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se cumplen las igualdades (denominadas *fórmulas de Euler*):

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}; \quad \sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}.$$

- 7) Cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$ se cumplen las igualdades (denominadas *fórmulas de adición*):

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y; \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.$$

- 8) Cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se cumplen las igualdades:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

- 9) Cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se cumplen las igualdades:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Demostración:

- 1) Por ser funciones definidas como sumas de series de potencias.
- 2) Por una parte, en virtud de la propiedad 8) de 6.5.2, se cumple $|\exp(ix)| = e^{\Re(ix)} = e^0 = 1$, y por otra, recordando que $\cos x = \Re \exp(ix)$ y que $\sin x = \Im \exp(ix)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta inmediatamente la primera igualdad. Las otras dos son evidentes, a partir de la definición de las funciones \cos y \sin .
- 3) Basta aplicar la definición de las funciones \cos y \sin .
- 4) Considerando las tres primeras sumas parciales de las series alternadas que definen \cos y \sin y teniendo en cuenta la propiedad de las sumas parciales de dichas series (proposición 3.4.5), se obtienen inmediatamente las desigualdades.
- 5) Inmediata, teniendo en cuenta la propiedad 3) de 1.6.13.
- 6) Según acabamos de ver en 6.6.2 se cumple $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$, para todo $x \in \mathbb{R}$; teniendo en cuenta ahora la simetría de las funciones \cos y \sin establecida en la propiedad 3), se tiene:

$$\exp(-ix) = \exp(i(-x)) = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x.$$

Sumando y restando miembro a miembro las dos igualdades, se obtienen inmediatamente las fórmulas de Euler.

- 7) Si $x, y \in \mathbb{R}$ son números reales cualesquiera, se sabe que $\exp(i(x+y)) = \cos(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y)$. Teniendo en cuenta la propiedad 2) de la función exponencial compleja vista en (6.5.2), se verifica:

$$\exp(i(x+y)) = \exp(ix + iy) = \exp(ix) \exp(iy) = (\cos x + i \operatorname{sen} y)(\cos x + i \operatorname{sen} y).$$

Efectuando el producto del segundo miembro en esta última igualdad e igualando después las partes reales y las partes imaginarias respectivas, resultan las igualdades enunciadas.

- 8) Inmediata, aplicando la propiedad anterior, con $y = x$.
 9) Inmediata, aplicando las primeras igualdades de 2) y de 8). ■

La propiedad 2) de la proposición anterior justifica también la denominación de estas funciones; en efecto, el conjunto de puntos del plano definido por $\{(x = \cos t, y = \operatorname{sen} t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$, es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, esto es, de radio unidad y centrada en el origen $(0, 0)$.

En la proposición que sigue se define un número real muy importante en Análisis Matemático y en Geometría, y que suponemos que ha de resultar familiar: el número π .

6.6.4 PROPOSICIÓN. Existe un número real estrictamente positivo, escrito $\frac{\pi}{2}$, que cumple las siguientes propiedades:

- 1) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$,
- 2) $0 < \frac{\pi}{2} < 2$,
- 3) $\frac{\pi}{2}$ es el menor número positivo que cumple la propiedad 1).

Demostración:

Considérese el intervalo cerrado $[0, 2]$ de \mathbb{R} ; en el extremo inferior del mismo, se cumple $\cos 0 = 1 > 0$ y en el extremo superior, por definición de \cos se cumple que $\cos 2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} 2^{2p}$. Las primeras sumas parciales de la serie son: $A_0 = 1$, $A_1 = 1 - \frac{4}{2!} = -1$, $A_2 = -1 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3}$, con lo que en virtud de las desigualdades establecidas en la propiedad 4) de la proposición 6.6.3, puede afirmarse que $-1 < \cos 2 < -\frac{1}{3} < 0$. En consecuencia, teniendo en cuenta ahora la continuidad de la función \cos y el teorema de Bolzano, existe al menos un $x_0 \in]0, 2[$ tal que $\cos x_0 = 0$; pero el conjunto de puntos de $]0, 2[$ en los cuales se anula la función \cos debe ser un conjunto acotado y, por lo tanto, tiene un ínfimo que ha de ser estrictamente positivo debido a $\cos 0 = 1$ y a la continuidad de la función \cos ; si se designa dicho ínfimo por $\frac{\pi}{2}$, cumple entonces las condiciones enunciadas. ■

El número π definido en la proposición anterior permite abordar una primera caracterización de la monotonía de las funciones \cos y sen , tal como se ve en la proposición que sigue.

6.6.5 PROPOSICIÓN. Se cumplen las siguientes propiedades:

- 1) La función sen es estrictamente creciente en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- 2) La función \cos es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$,

Demostración:

- 1) A partir de las fórmulas de adición vistas en el punto 7) de la proposición 6.6.3, es fácil demostrar que, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = 2 \cos \frac{y+x}{2} \operatorname{sen} \frac{y-x}{2};$$

(véase también el ejercicio 13). En virtud de la continuidad de la función coseno y de la definición de π , se verifica que $\cos x > 0$ para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; por otra parte, si se tienen en cuenta las desigualdades $x - \frac{x^3}{6} \leq \operatorname{sen} x \leq x$, tomando $x \in [0, 2[$, resulta que $0 < x - \frac{x^3}{6} \leq \operatorname{sen} x$, es decir, $0 < \operatorname{sen} x \leq 1$, para todo $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\subset]0, 2[$. Si se consideran dos elementos x, y , tales que $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$, entonces se cumple

$$\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = 2 \cos \frac{y+x}{2} \operatorname{sen} \frac{y-x}{2} > 0$$

es decir, $\operatorname{sen} y > \operatorname{sen} x$, lo que demuestra el crecimiento estricto de la función sen en ese intervalo.

- 2) Teniendo en cuenta el crecimiento de la función sen en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ y la igualdad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta inmediato el decrecimiento estricto de la función \cos en este intervalo, puesto que en él la función \cos es positiva. ■

6.6.6 COROLARIO. Se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$;
- 2) $\cos \pi = -1, \quad \operatorname{sen} \pi = 0,$
 $\cos \frac{3\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1,$
 $\cos 2\pi = 1, \quad \operatorname{sen} 2\pi = 0;$
- 3) Las funciones \cos y sen son periódicas y su período fundamental es 2π , esto es, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se cumplen las igualdades:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x.$$

- 4) El conjunto de ceros de la función \cos es $\{n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$. El conjunto de ceros de la función sen es $\{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

Demostración:

- 1) Evidente.
- 2) Inmediatas.
- 3) Resultan inmediatamente sin más que tener en cuenta las fórmulas de adición establecidas en 6.6.3 y los valores de $\cos 2\pi$ y $\operatorname{sen} 2\pi$.
- 4) Es consecuencia inmediata de la periodicidad de las funciones \cos y sen y de los valores que anulan a dichas funciones en el intervalo $[0, 2\pi]$. ■

La periodicidad de las funciones \cos y sen establecida en el corolario anterior, permite abordar una cuestión que habíamos dejado pendiente en 6.5.2: probar la periodicidad de la función exponencial compleja, lo cual se resuelve en la proposición que sigue.

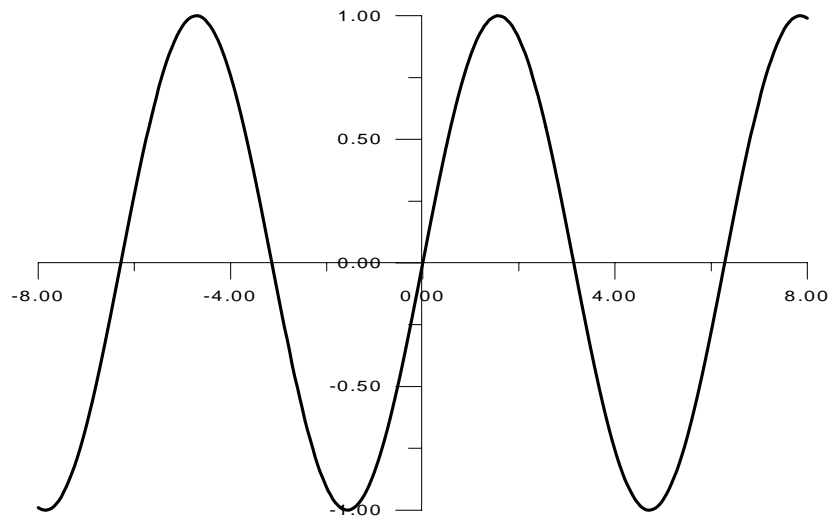
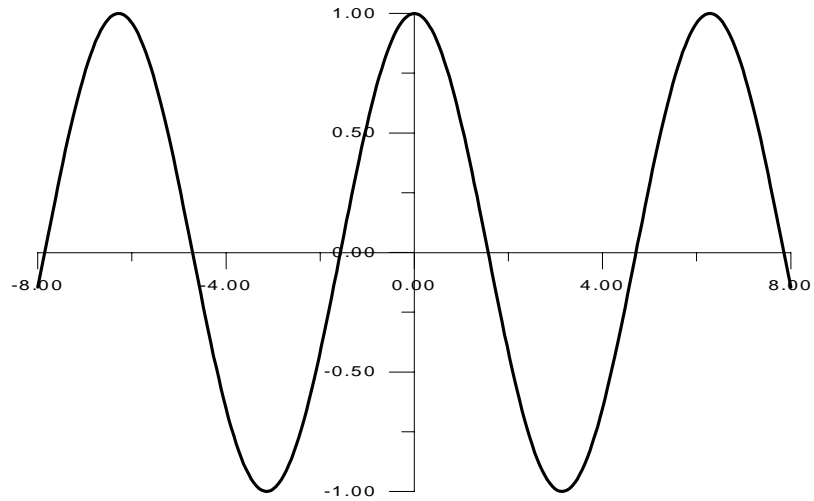


Figura 6.9 y 6.10. Gráficas de las funciones \cos y \sin

6.6.7 PROPOSICIÓN. La función exponencial compleja es periódica; su período fundamental es $2\pi i$.

Demostración:

Sea $z \in \mathbb{C}$ un complejo arbitrario; teniendo en cuenta 6.6.2, se cumple

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \cdot \exp(2\pi i) = \exp(z)(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = \exp(z),$$

según queríamos probar. ■

Para completar el estudio de la monotonía de las funciones \cos y \sin , debemos estudiar ésta en los intervalos $[0, 2\pi]$ y $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, respectivamente, tema que se aborda en la proposición que sigue.

6.6.8 PROPOSICIÓN. Se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) La función \cos es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ y estrictamente creciente en el intervalo $[\pi, 2\pi]$.
- 2) La función \sin es estrictamente creciente en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y estrictamente decreciente en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Demostración:

- 1) Sea $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ arbitrario; puesto que se cumple

$$\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \pi, \quad \pi \leq x + \pi \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} \leq x + \frac{3\pi}{2} \leq 2\pi,$$

teniendo presentes ahora las fórmulas de adición (propiedad 7) de 6.6.3), en cada uno de estos intervalos se cumple:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x,$$

que permiten concluir la monotonía enunciada sobre la función \cos , teniendo en cuenta 6.6.5.

- 2) Se propone como ejercicio. ■

En las figuras 6.9 y 6.10 se representan, respectivamente, las gráficas de las funciones \cos y \sin .

6.6.9 DEFINICIÓN. (La función *tangente*).

- A partir de las funciones trigonométricas \cos y \sin se define otra función trigonométrica muy importante, denominada *tangente* y notada \tan o también tg , mediante:

$$\begin{aligned} \tan : A \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{aligned}$$

- El dominio de esta función es el conjunto de números reales en los que no se anule la función \cos , esto es, el conjunto $A = \mathbb{R} - \{n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$.

6.6.10 PROPOSICIÓN. La función *tangente* cumple las propiedades siguientes:

- 1) Es continua en su dominio.
- 2) Tiene simetría impar, es decir, se cumple $\tan(-x) = -\tan x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- 3) Es una función periódica; su periodo fundamental es π .
- 4) Es estrictamente creciente en los intervalos $\left] \frac{(2n+1)\pi}{2}, \frac{(2n+3)\pi}{2} \right[$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 5) $\lim_{\frac{(2n+1)\pi}{2}^+} \tan = -\infty$, $\lim_{\frac{(2n+3)\pi}{2}^-} \tan = +\infty$.
- 6) $\tan \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[= \mathbb{R}$.
- 7) Se cumplen las igualdades: $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$; $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R} - \{n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$.

Demostración:

Se propone como ejercicio (todas ellas se deducen fácilmente de la definición de la función y de las propiedades de las funciones \cos y \sin , ya conocidas). ■

En la figura 6.11 se representa la gráfica de la función tangente.

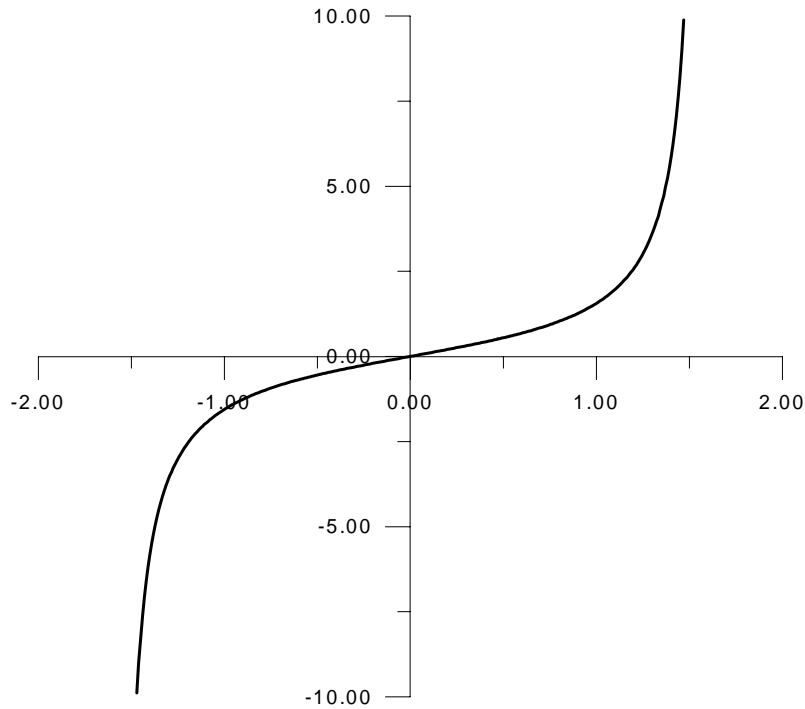


Figura 6.11. Gráfica de la función tangente.

6.6.11 DEFINICIÓN. (Las funciones cotangente, secante y cosecante).

- Se define la función *cotangente*, notada \cot , mediante $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \in \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.
- Se define la función *secante*, notada \sec , mediante $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Se define la función *cosecante*, notada \csc , mediante $\csc x = \frac{1}{\sin x}$, $x \in \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

Se propone como ejercicio enunciar y demostrar las propiedades de estas funciones (véase ejercicios 18, 19 y 20).

6.6.12 DEFINICIÓN. (Las funciones arco-coseno y arco-seno). Como se ha visto en apartados anteriores, las funciones trigonométricas \cos y \sin no son biyectivas en \mathbb{R} , con lo que no tienen función inversa a menos que se haga una restricción de la función a un subconjunto de su dominio en el cual sí

se cumpla un crecimiento o decrecimiento estricto de la función.

- En la proposición 6.6.8, se ha establecido que la función \cos es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ y, además, se cumple $\cos[0, \pi] = [-1, 1]$; en consecuencia, restringiendo la función a ese intervalo, puede definirse en $[-1, 1]$ la función inversa de \cos , que se denomina *arco-coseno* y se designa \arccos . Concretamente, esta función se define mediante:

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longrightarrow \arccos t = x \iff \cos x = t. \end{aligned}$$

- De forma análoga, la función \sin es estrictamente creciente en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y, además, se cumple $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = [-1, 1]$; en consecuencia, restringiendo la función a ese intervalo, puede definirse en $[-1, 1]$ la función inversa de \sin , que se denomina *arco-seno* y se nota \arcsen . Así pues, esta función se define mediante:

$$\begin{aligned} \arcsen : [-1, 1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longrightarrow \arcsen t = x \iff \sen x = t. \end{aligned}$$

6.6.13 PROPOSICIÓN. Las funciones \arccos y \arcsen , cuya gráfica se ilustra en las figuras 6.12 y 6.13, cumplen las propiedades siguientes:

- 1) Son continuas en su dominio.
- 2) La función \arccos es estrictamente decreciente en $[-1, 1]$; la función \arcsen es estrictamente creciente en $[-1, 1]$.

Demostración:

Se propone como ejercicio; se deducen sin dificultad a partir de de la definición respectiva y de las propiedades de las funciones \cos y \sin . ■

6.6.14 DEFINICIÓN. (*La función arco-tangente*). Puesto que la función tangente es estrictamente creciente en el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, puede definirse la correspondiente función inversa, que se denomina *arco-tangente* y se designa \arctan . Concretamente, esta función se define mediante

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\longrightarrow \arctan(x) = t \iff \tan(t) = x \end{aligned}$$

Las propiedades más importantes de la función arco tangente, cuya gráfica se representa en la figura 6.14, se enuncian en la proposición que sigue.

6.6.15 PROPOSICIÓN. La función arco-tangente cumple las propiedades siguientes:

- 1) Es continua en su dominio.
- 2) Es estrictamente creciente en \mathbb{R} .
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

Demostración:

Se propone como ejercicio, pues todas ellas se deducen inmediatamente de la definición y de las propiedades de la función \tan . ■

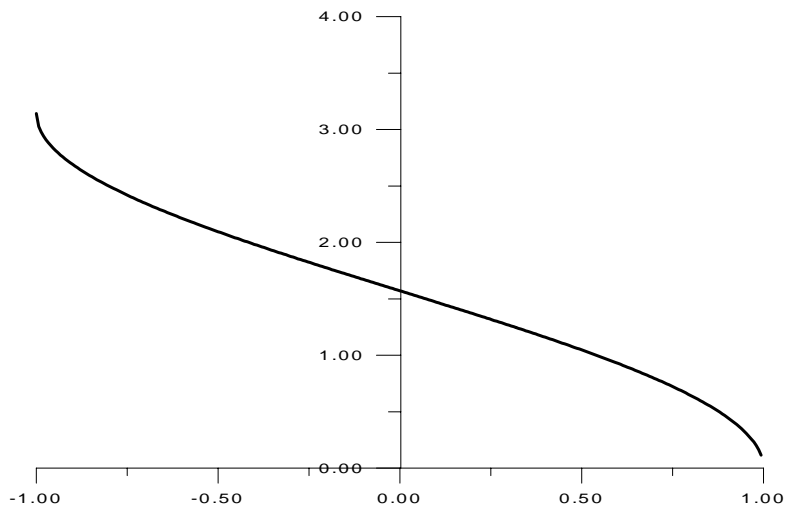
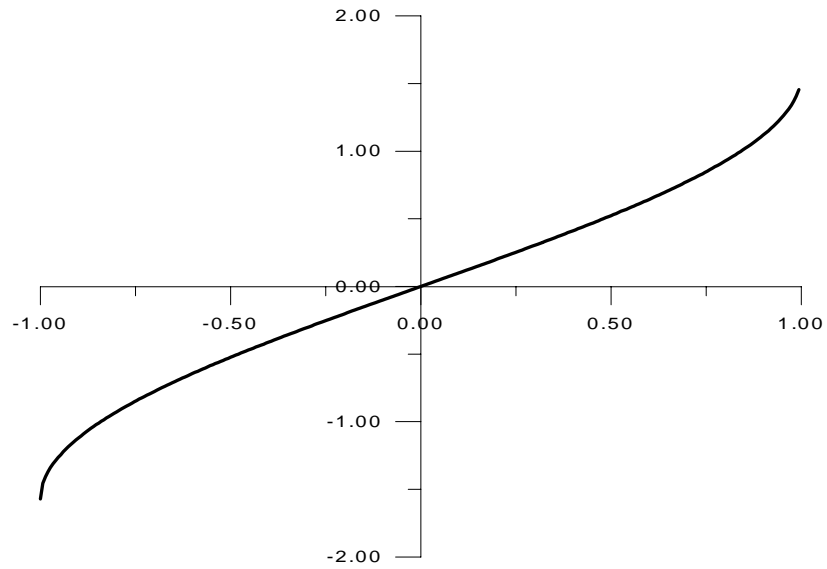


Figura 6.12 y 6.13. Gráficas de las funciones arco-coseno y arco-seno.

6.6.16 DEFINICIÓN. (La función arco-cotangente). La inversa de la función $\cot:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ se denomina *arco-cotangente*, se designa arccot y se define mediante

$$\operatorname{arccot}(x) = t \iff \cot(t) = x.$$

Se propone como ejercicio establecer su dominio y propiedades más importantes, de modo análogo a la función arco-tangente.

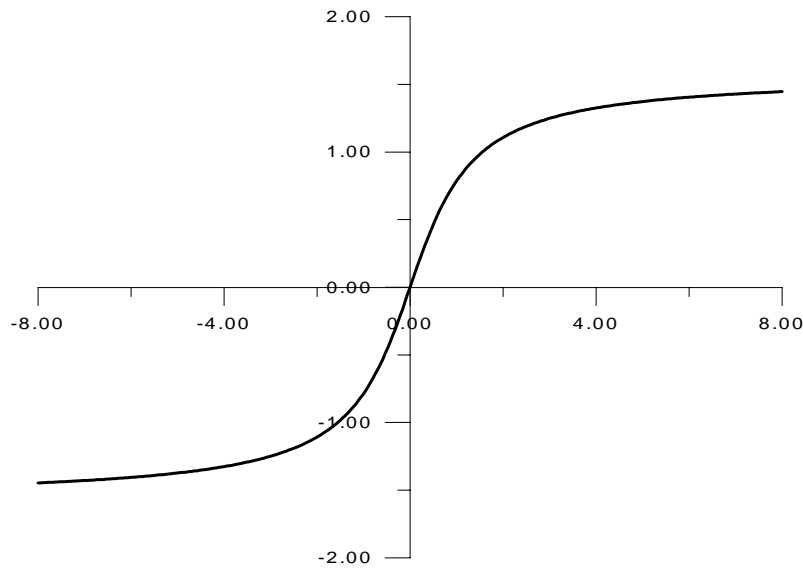


Figura 6.14. Gráfica de la función arco-tangente.

6.7 LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

6.7.1 DEFINICIÓN. (*Las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico*). Si en las series de potencias que definen las funciones trigonométricas coseno y seno (véase 6.6.1) se suprime el factor que hace que dichas series sean alternadas, resultan dos funciones de gran interés, denominadas *funciones hiperbólicas*, que se estudian a continuación. Se definen las funciones *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico*, notadas respectivamente *cosh* y *sinh*, mediante:

$$\begin{aligned} \cosh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \sinh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \cosh(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} & x &\longrightarrow \sinh(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que el dominio de estas funciones es \mathbb{R} , puesto que el radio de convergencia de ambas series de potencias es $+\infty$.

Las funciones hiperbólicas pueden relacionarse fácilmente con la función exponencial real (de modo análogo a como las trigonométricas se relacionan con la exponencial compleja mediante las fórmulas de Euler vistas en 6.6.2), similitud que motiva parcialmente el nombre de las funciones hiperbólicas.

En efecto, a partir de las igualdades

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right),$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} \right),$$

sumando miembro a miembro resulta

$$e^x + e^{-x} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + \cdots + 2\frac{x^{2p}}{(2p)!} \right) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!},$$

esto es $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De modo análogo se prueba que $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De ambas igualdades resulta inmediatamente que

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x), \quad e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x).$$

En la proposición que sigue, se establecen las propiedades más importantes de estas funciones.

6.7.2 PROPOSICIÓN. Las funciones \cosh y \sinh cumplen las siguientes propiedades:

- 1) Son continuas en su dominio.
- 2) $\cosh(0) = 1$; $\cosh(x) > 1$, para todo $x \in \mathbb{R}_0$.
 $\sinh(0) = 0$; $\sinh(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$; $\sinh(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^-$.
- 3) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- 4) Cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$, se cumplen:

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y), \\ \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y). \end{aligned}$$

- 5) La función \cosh tiene simetría par y la función \sinh tiene simetría impar, esto es, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\cosh(-x) = \cosh(x), \quad \sinh(-x) = -\sinh(x).$$

- 6) La función \cosh es estrictamente creciente en el intervalo $[0, +\infty[$ y estrictamente decreciente en el intervalo $] -\infty, 0]$. La función \sinh es estrictamente creciente en \mathbb{R} .
- 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = +\infty$.

(Obsérvese que las propiedades de las funciones \cosh y \sinh coinciden en algún caso con las de \cos y \sin , pero en otros son completamente diferentes, por lo cual es peligroso actuar mecánicamente al respecto).

Demostración:

- 1) En virtud de su definición.
- 2) Inmediatas, sin más que tener en cuenta las igualdades

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

- 3) Inmediata, multiplicando las dos últimas igualdades de 6.7.1.

- 4) Se propone como ejercicio.
 5) Inmediatas, en virtud de las definiciones respectivas.
 6) Sean $x, t > 0$; en virtud de 2) se tendrá que $\sinh(x) > 0$, $\cosh(t) > 1$ y $\sinh(t) > 0$, con lo que, en virtud de 4), se cumplirá

$$\cosh(x+t) = \cosh(x)\cosh(t) + \sinh(x)\sinh(t) > \cosh(x)\cosh(t) > \cosh(x).$$

Se propone como ejercicio probar el crecimiento estricto en \mathbb{R} de la función \sinh .

- 7) Teniendo en cuenta la relación entre las funciones \cosh y exponencial real y recordando las propiedades de esta función, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \right) = +\infty.$$

La simetría par de la función \cosh permite afirmar que se cumple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = +\infty$. Se propone como ejercicio probar las igualdades relativas a la función \sinh . ■

Para justificar la denominación de las funciones \cosh y \sinh , basta fijarse en la igualdad $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ que se acaba de probar en la propiedad 3) de la proposición anterior y observar que el conjunto de puntos del plano definido por $\{(x = \cosh(t), y = \sinh(t)), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$, es una rama de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$. En las figuras 6.15 y 6.16 se representan las gráficas de estas funciones.

6.7.3 DEFINICIÓN. (*La función tangente hiperbólica*). Análogamente a las funciones circulares o trigonométricas, a partir de las funciones \cosh y \sinh puede definirse otra función mediante el cociente de ambas; esta función se denomina *tangente hiperbólica*, se designa \tanh y se define mediante

$$\begin{aligned} \tanh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}. \end{aligned}$$

Se propone como ejercicio enunciar y demostrar las propiedades más importantes de esta función, dibujando aproximadamente su gráfica.

6.7.4 DEFINICIÓN. (*La función cotangente hiperbólica*). Se define la función *cotangente hiperbólica*, notada \coth , mediante

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}, \quad x \in \mathbb{R}_0.$$

Se propone como ejercicio enunciar y demostrar las propiedades más importantes de esta función y dibujar su gráfica aproximada (véase ejercicio 26).

6.7.5 DEFINICIÓN. (*La función argumento-coseno hiperbólico*). El crecimiento estricto de la función \cosh en el intervalo $[0, +\infty[$ y el hecho que $\cosh(\mathbb{R}^+) = [1, +\infty[$ permiten afirmar la existencia de la correspondiente función inversa, la cual se denomina *argumento-coseno hiperbólico*, se designa $\operatorname{argcosh}$ y se define mediante:

$$\begin{aligned} \operatorname{argcosh} : [1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow \operatorname{argcosh}(x) = t \iff \cosh(t) = x. \end{aligned}$$

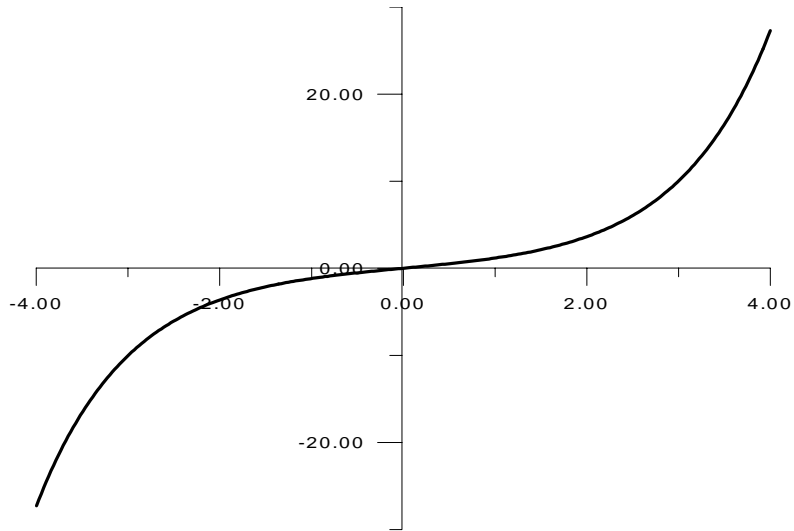
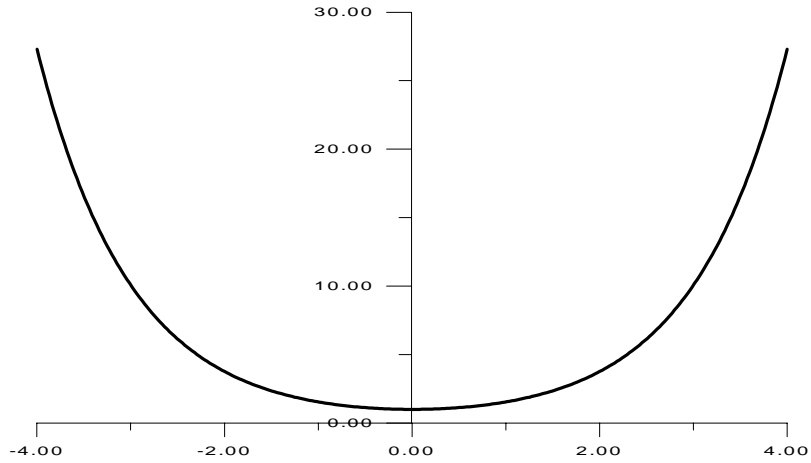


Figura 6.15 y 6.16. Gráficas de las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico.

Puede obtenerse una expresión analítica explícita de la función $\operatorname{argcosh}$; en efecto, si $x \geq 1$ y $\operatorname{argcosh}(x) = t \geq 0$, esto es, $x = \cosh(t) \geq 1$, puede escribirse

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t} + 1}{2e^t},$$

es decir, $e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0$. En consecuencia, se cumple

$$e^t = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

o equivalentemente $t = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \geq 0$. Para que pueda cumplirse $t \geq 0$ debe ser $x \pm \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$ y como son raíces de la ecuación de segundo grado $e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0$, el producto de ambas es 1, con lo cual la raíz conveniente es la mayor de ellas, esto es $x + \sqrt{x^2 - 1}$. Así pues, se tiene

$$\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{para todo } x \in [1, +\infty[.$$

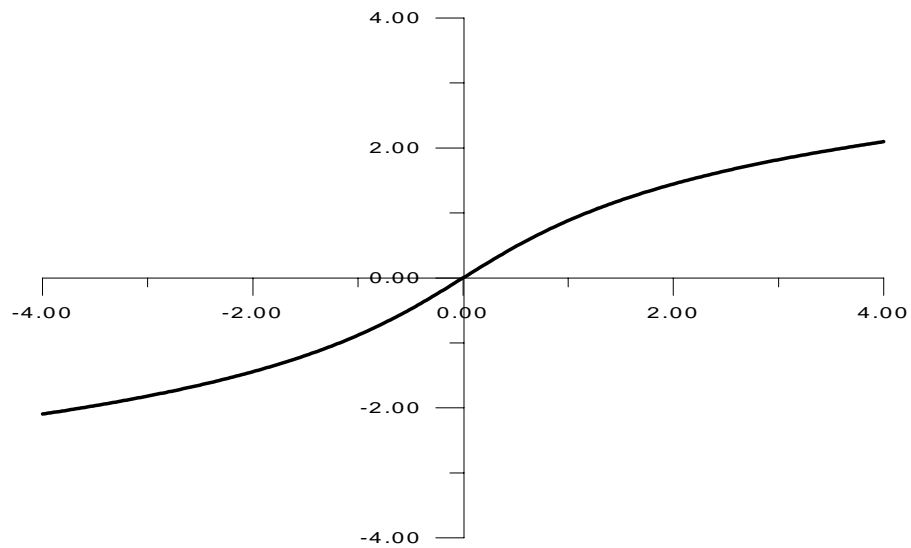
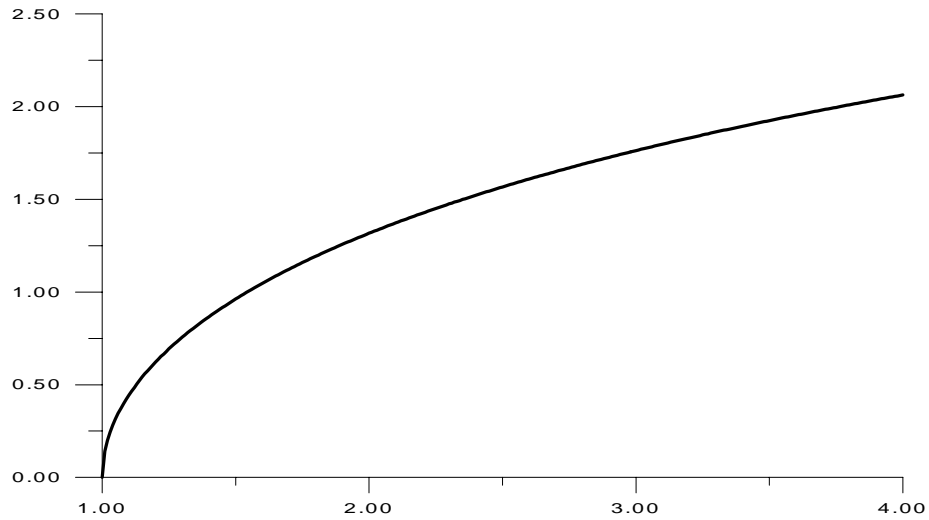


Figura 6.17 y 6.18. Gráfica de las funciones $\operatorname{argcosh}$ y $\operatorname{argsinh}$.

6.7.6 DEFINICIÓN. (*La función argumento-seno hiperbólico*). El crecimiento estricto en \mathbb{R} de la función \sinh y el hecho que $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ permiten afirmar la existencia de la correspondiente función inversa, la cual se denomina *argumento-seno hiperbólico*, se designa arsenh y se define mediante:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsenh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \operatorname{arsenh}(x) = t \iff \sinh(t) = x. \end{aligned}$$

Se propone como ejercicio obtener la expresión analítica explícita de la función arsenh , mediante un razonamiento similar al anterior.

6.7.7 PROPOSICIÓN. Las funciones $\operatorname{argcosh}$ y arsenh cumplen las propiedades siguientes:

- 1) Son continuas en su respectivo dominio.
- 2) La función $\operatorname{argcosh}$ es estrictamente creciente en $[1, +\infty[$ y la función arsenh es estrictamente creciente en \mathbb{R} .
- 3) $\operatorname{argcosh}(1) = 0$, $\operatorname{arsenh}(0) = 0$.

Demostración:

Se propone como ejercicio; todas ellas son consecuencia inmediata de la definición respectiva de cada una de las funciones. ■

En las figuras 6.17 y 6.18 se representan las gráficas de las funciones $\operatorname{argcosh}$ y arsenh .

6.7.8 DEFINICIÓN. (*Las funciones argumento-tangente hiperbólica y argumento-cotangente hiperbólica*). Se define la función *argumento-tangente hiperbólica*, notada artanh , mediante

$$\operatorname{artanh}(x) = t \iff \tanh(t) = x.$$

Se define la función *argumento-cotangente hiperbólica*, notada arcoth , mediante

$$\operatorname{arcoth}(x) = t \iff \coth(t) = x.$$

Se propone como ejercicio enunciar y demostrar las propiedades más importantes de estas funciones (véase ejercicio 27).

6.8 EJERCICIOS.

1. Enunciar las propiedades más importantes de la función logarítmica generalizada o logaritmo de base a , \log_a , (donde $a > 0, a \neq 1$) y demostrarlas a partir de la definición formulada en 6.3.4.

2. Estudiar los siguientes límites laterales:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}}.$$

3. Estudiar los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tan x} + 1}{e^{\tan x} - 1}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2 + 1)(1 - \cos \frac{1}{x})}{(x^2 - 2x) \ln(1 + \frac{1}{x^2})};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \ln(1+x)} - \sqrt{1 - \ln(1+x)}}{x}.$$

4. Calcular los límites laterales en el origen de la función $f: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$. Razonar qué se puede afirmar acerca del límite de esta función en el origen.

5. Calcular, si existen, los límites laterales en el origen de las funciones $f, g: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, definidas mediante $f(x) = e^{1/x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$; $g(x) = (e^{1/x} + 1)e^{-1/x}$.

6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran las funciones $f_n: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = x^n \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_0$. Estudiar el límite en el origen de f_n , según los valores de $n \in \mathbb{N}$.

7. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones reales, estableciendo previamente (si procede) su campo de existencia:

$$a) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x};$$

$$b) f(x) = \frac{1}{1 - e^{1/x}};$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

$$e) f(x) = e^{1/x};$$

$$f) f(x) = x - |x|;$$

$$g) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ \ln x, & \text{si } 1 \leq x < 2; \end{cases}$$

$$h) f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|x|}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

8. Probar que las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$a) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

son continuas en su dominio.

9. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } x \leq 0, \\ \operatorname{sen} x, & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$b) g: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } g(x) = \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}.$$

10. Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} \operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \operatorname{senh}(x) + 1, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- a) Determinar su campo de continuidad. b) Calcular los límites de f en $-\infty$ y $+\infty$.
 c) Razonar si es posible conseguir la continuidad de f en \mathbb{R} , modificando convenientemente su definición en el origen.

11. Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x \leq c, \\ ax + b, & \text{si } x > c, \end{cases}$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son parámetros. Estudiar qué relación debe haber entre dichos parámetros para que la función f sea continua en \mathbb{R} .

12. Estudiar la continuidad uniforme de la función logaritmo neperiano \ln , en los casos siguientes:

- a) el intervalo $]0, 1[\subset \mathbb{R}$;
 b) el intervalo $]1, 2[\subset \mathbb{R}$; dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, calcular en este caso el valor de $\delta > 0$ en función de ε tal que si $x, x' \in]1, 2[$ y además se cumple $|x - x'| < \delta$, entonces se verifica $|\ln x - \ln x'| < \varepsilon$.

13. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones:

- a) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$;
 b) $f(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$ en el intervalo $]1, 2[$; dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, calcular el valor de $\delta > 0$ en función de ε tal que si $x, x' \in]1, 2[$ y además se cumple $|x - x'| < \delta$, entonces se verifica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

14. Probar las propiedades siguientes de las funciones potenciales:

- a) $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$; b) si $a < b$, entonces $x^a < x^b$,

cualesquiera que sean $x, y > 0$.

15. Probar que, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$, se cumplen las igualdades siguientes:

- a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,
 b) $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$,
 c) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,
 d) $\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$,
 e) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$,
 f) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$,
 g) $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y))$.

16. Calcular los siguientes valores: $\cos 0.2$, $\operatorname{sen} 0.3$, $\cos 1$ y $\operatorname{sen} 1$, con cuatro cifras decimales exactas.

17. Sea $x > 0$ arbitrario; probar que se verifica $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

18. Se define la función *cotangente*, como una función real notada \cot y definida en $A \subset \mathbb{R}$ mediante: $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, para todo $x \in A$. Se pide:

- 1) Precisar su campo de existencia $A \subset \mathbb{R}$.
- 2) Demostrar sus propiedades más importantes, que se enuncian a continuación:
 - i) Es continua en su dominio.
 - ii) Tiene simetría impar, esto es, se cumple $\cot(-x) = -\cot x$, para todo $x \in A$.
 - iii) Es una función periódica cuyo periodo fundamental es π .
 - iv) Es decreciente en los intervalos $]n\pi, (n+1)\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$.
 - v) $\lim_{n\pi^+} \cot = +\infty$, $\lim_{(n+1)\pi^-} \cot = -\infty$.
 - vi) $\cot]0, \pi[= \mathbb{R}$, $\text{Im } \cot = \mathbb{R}$.
 - vii) Tomando como referencia estas propiedades, dibujar esquemáticamente la gráfica de esta función.

19. Analizando el decrecimiento estricto de la función cotangente (ver ejercicio 18), definir si procede su función inversa y establecer sus propiedades (sugerencia: proceder de forma análoga a la función arco-tangente, definida y caracterizada en 6.6.14 y 6.6.15).

20. Se definen las funciones *secante* y *cosecante*, notadas respectivamente \sec y \csc , mediante:

$$\sec : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad x \in A;$$

$$\csc : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad x \in B.$$

- a) Estudiar estas funciones, determinando: campo de existencia, recorrido, campo de continuidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, etc... Representar aproximadamente las gráficas de estas funciones.
- b) Estudiar la existencia y definir, si procede, las funciones inversas correspondientes, estableciendo sus propiedades más importantes.

21. Demostrar las propiedades de la función tangente, enunciadas en la proposición 6.6.10.

22. Demostrar las propiedades de las funciones arco-coseno y arco-seno, establecidas en la proposición 6.6.13.

23. Demostrar las propiedades de la función arco-tangente, enunciadas en la proposición 6.6.14.

24. Resolver las ecuaciones a) $2 \arcsen x = \arcsen 2x\sqrt{1-x^2}$, b) $\arcsen 2x - \arcsen x\sqrt{3} = \arcsen x$.

25. Establecer las propiedades más importantes de la función tangente hiperbólica, \tanh , definida en 6.7.3. En particular, determinar su dominio, recorrido, estudiar su continuidad, crecimiento, decrecimiento, signo, acotación, etc.

26. Se define la función *cotangente hiperbólica*, notada \coth , mediante:

$$\coth : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}, \quad x \in A.$$

Determinar su dominio, recorrido, estudiar su continuidad, crecimiento, decrecimiento, signo, acotación, etc.

27. Estudiar la existencia y definir, si procede, las funciones inversas respectivas de las funciones \tanh y \coth , estableciendo en cada caso sus propiedades más importantes.

28. a) Obtener las expresiones de $\sinh(2x)$ y $\cosh(2x)$ en función de $\sinh(x)$ y $\cosh(x)$.

b) Hágase lo propio para $\sinh(\frac{x}{2})$ y $\cosh(\frac{x}{2})$.

29. Obtener una expresión analítica explícita para la función $\operatorname{argsinh}$. Establecer las propiedades más importantes de esta función.

30. Demostrar las propiedades de las funciones argumento-coseno hiperbólico y argumento-seno hiperbólico, establecidas en la proposición 6.7.7.

31. Dadas las sucesiones de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cuyo término n -ésimo está dado por:

$$\text{a) } f_n :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1 + x \ln x}{x + nx};$$

$$\text{b) } f_n :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{nx},$$

se pide, en cada caso, lo siguiente:

1) determinar el dominio D en el cual convergen puntualmente;

2) calcular el límite puntual en dicho dominio;

3) discutir si la convergencia en D es o no de tipo uniforme.

6.9 GUÍA DE REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[Ba] **BARTLE, R. G. y D. R. SHERBERT.** *Introducción al Análisis Matemático de una variable.* El tratamiento de las funciones elementales es distinto al desarrollado en este capítulo. El estudio de las funciones exponencial y logarítmica se lleva a cabo en el capítulo 7 (“Sucesiones de funciones”) y dichas funciones se introducen bajo otro enfoque, utilizando conceptos de Cálculo diferencial y Cálculo integral. En ese mismo capítulo, se estudian a continuación las funciones trigonométricas, las cuales no se definen a partir de series de potencias como se ha hecho aquí, sino mediante relaciones entre sus funciones derivadas. Se echa de menos, quizá, un estudio algo más extenso de las funciones elementales y, en particular, de las funciones hiperbólicas, aspecto que se enfoca meramente como un ejercicio.

[Li] **LINÉS, E.** *Principios de Análisis Matemático.*

Las funciones elementales se estudian en los capítulos 15 (“Funciones elementales”) y 16 (“Funciones circulares”); el enfoque es más detallado y completo que el que hemos hecho aquí, por lo cual se recomienda su lectura, ya que resulta muy interesante. Debe hacerse ésta con especial atención, puesto que en algunos párrafos el nivel es bastante elevado.

[Or] **ORTEGA, J. M.** *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.*

En este texto, el autor no dedica un bloque temático específico al estudio de las funciones elementales. Introduce la función exponencial en el capítulo II y más adelante, en el capítulo III, lleva a cabo una descripción de tipo más general, junto con el estudio de las funciones logarítmicas y las funciones potenciales. Las funciones trigonométricas y las funciones hiperbólicas se estudian en el capítulo X,

dentro del apartado dedicado a las series de potencias, en el cual también se presentan bajo el mismo enfoque las funciones arctan y la función potencial.

[Spv] SPIVAK, M. *Calculus* .

Como ya hemos dicho en ocasiones anteriores, esta obra es, aparte de muy interesante, bastante original en algunos de sus planteamientos, y el estudio de las funciones elementales es uno de ellos. En primer lugar, se estudian las funciones trigonométricas (capítulo 15), después de haber desarrollado el cálculo diferencial y el cálculo integral; la introducción se lleva a cabo mediante conceptos geométricos, cuya lectura recomendamos especialmente. Más adelante (capítulo 17), se estudia la función logarítmica \ln y luego la función exponencial real \exp , que se define como la función inversa de \ln , justo al contrario de lo que se ha hecho aquí (lo que, por otra parte, es lo más habitual). El estudio de las funciones hiperbólicas se plantea como un ejercicio. Queremos destacar que la definición de las funciones se hace sin mencionar en absoluto las series de potencias, puesto que todavía no se han estudiado en estos capítulos.

CAPÍTULO 7

DERIVACIÓN DE FUNCIONES

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo está dedicado al estudio de la derivada de una función, que es el concepto básico del Cálculo diferencial. En el campo de la geometría, la derivada surge en el estudio del problema del cálculo de la recta tangente a una curva plana en un punto; en el campo de la mecánica, el concepto de derivada tiene su origen en el problema de la determinación de la velocidad instantánea de un móvil. En cierto modo, puede decirse que retomamos el estudio de las propiedades de las funciones que se inició en el capítulo 5 con la continuidad, ya que esta propiedad caracteriza las funciones “bien enlazadas” en un punto mientras que la derivabilidad añade la “suavidad” de esta unión.

En el apartado 7.1 se define el concepto de derivada de una función en un punto y se generaliza a un conjunto; a continuación, se relaciona la derivabilidad con la continuidad y, finalmente, se define la derivada de funciones complejas y de funciones de variable compleja.

En el apartado 7.2 se estudian los criterios de derivabilidad y las reglas de derivación, es decir, la relación entre las operaciones con funciones y la derivabilidad. A continuación, Apartado 7.3, se aplican las reglas de derivación al estudio de la derivabilidad de las funciones elementales y al cálculo de sus derivadas.

En el apartado 7.4 se estudia el concepto de diferencial de una función y su aplicación a cálculos aproximados. Finalmente, en el apartado 7.5 se estudia la derivación de las funciones definidas implícitamente.

7.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN. FUNCIONES DERIVABLES.

7.1.1 DEFINICIÓN. (*Derivada de una función en un punto*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real y sea a un punto interior de A ; entonces, existe $r > 0$, tal que $B(a; r) =]a - r, a + r[\subset A$, con lo que cualquiera que sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < r$ se cumple $B(a; |h|) \subset]a - r, a + r[\subset A$. Cuando en adelante pongamos $a + h$, entenderemos que se cumple lo anterior para que las expresiones tengan sentido.

- En las condiciones anteriores, si $h \neq 0$, se denomina *variación o desplazamiento asociado a h* al punto $x = a + h$ y entonces tiene sentido considerar los intervalos $[a, a + h]$ (o bien $[a + h, a]$ si $h < 0$), que estarán contenidos en A . La diferencia $f(a + h) - f(a)$, notada $\Delta_a f(h)$ o bien $\Delta f(a; h)$, se denomina *incremento de f en el punto a asociado al desplazamiento h* ; el incremento relativo de f en el punto a respecto a h es el cociente $\frac{\Delta f(a; h)}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$, que tiene sentido puesto que $h \neq 0$.
- El concepto de derivabilidad de una función en un punto se refiere a la existencia del límite del incremento relativo cuando el desplazamiento se hace “tan pequeño como se quiera”. Concretamente, si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y a es un punto interior de A , se dice que f es *derivable en el punto a* , si existe un número real notado $Df(a)$ o bien $f'(a)$ y denominado *derivada de f en el punto a* , tal que

$$Df(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- Dicho en otros términos, una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el punto a , si existe un número real $Df(a)$ tal que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |h| = |x - a| < \delta$, se cumple entonces

$$\left| \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - Df(a) \right| = \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - Df(a) \right| < \varepsilon.$$

7.1.2 OBSERVACIÓN.

- Está claro que para cualquier función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y a un punto interior de A , siempre se puede calcular el incremento relativo $\frac{\Delta f(a; h)}{h}$ si $a + h \in A$. En cambio, el límite de dicho incremento relativo cuando $h \rightarrow 0$ no existe siempre; en efecto, basta considerar por ejemplo la función definida por $f(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y el punto $a = 0$, interior de su dominio; el incremento relativo en $a = 0$ es $\frac{|h|}{h}$, cuyo límite cuando $h \rightarrow 0$ no existe.
- Si la función f es el modelo matemático de una magnitud física variable con el tiempo (como, por ejemplo, el desplazamiento de un móvil respecto de un punto, la carga eléctrica en una sección de un conductor, etc.), la derivada es la “variación instantánea” de esta magnitud (la velocidad, la intensidad de corriente, etc.). En el campo de la Geometría, la interpretación de la derivada corresponde al problema del cálculo de la recta tangente a una curva plana en un punto; en la figura 7.1 se ha representado la interpretación geométrica de la noción de derivada de una función en un punto a : es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, en el punto $(a, f(a))$, recta cuya ecuación es entonces $y - f(a) = Df(a)(x - a)$.

Para ilustrar el concepto de función derivable y de derivada de una función en un punto, vamos a estudiar a continuación la derivabilidad de algunas funciones sencillas.

7.1.3 EJEMPLO.

- 1) Función coordenada de \mathbb{R} . Sea $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función coordenada de \mathbb{R} ; si $a \in \mathbb{R}$ es un número real

arbitrario, se cumple $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(a+h) - x(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$. En consecuencia, la función coordenada de \mathbb{R} es derivable en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$, verificándose $Dx(a) = 1$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

- 2) Funciones constantes. Sea $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función constante real; si $a \in \mathbb{R}$ es un número real cualquiera, se tiene $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(a+h) - \lambda(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda - \lambda}{h} = 0$, lo que prueba que dicha función es derivable en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y que, además, se cumple $D\lambda(a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- 3) Funciones potenciales de exponente natural. Sea $x^n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función potencial de exponente $n \in \mathbb{N}$, y sea a un número real cualquiera; se cumple

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{x^n(t) - x^n(a)}{t - a} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{t^n - a^n}{t - a} = \lim_{t \rightarrow a} (t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + \dots + a^{n-1}) = na^{n-1}.$$

Así pues, toda función potencial de exponente natural x^n es derivable en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$, cumpliéndose $Dx^n(a) = na^{n-1}$ cualesquiera que sean $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

- 4) La función valor absoluto. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Si $a > 0$ es inmediato ver que $Df(a) = 1$, que si $a < 0$ se cumple $Df(a) = -1$ y que si $a = 0$ la función no es derivable en este punto, ya que se cumple

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \end{aligned}$$

lo cual prueba que el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ no existe, esto es, que la función no es derivable en el origen.

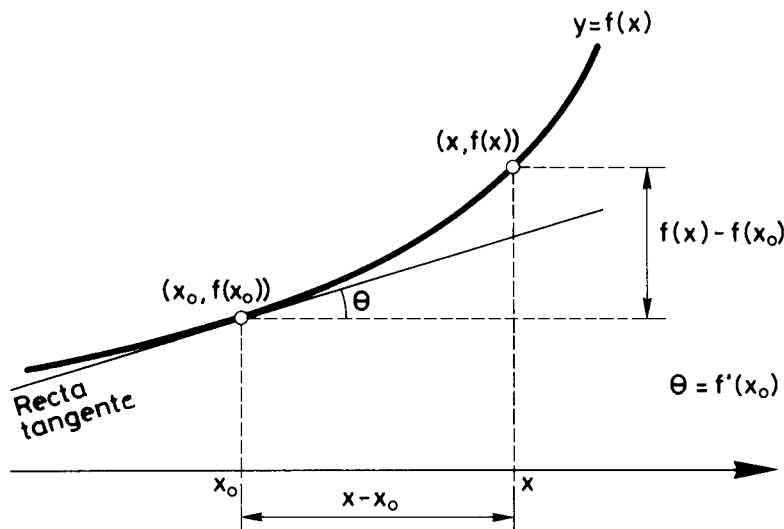


Figura 7.1. Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

7.1.4 DEFINICIÓN. (Derivabilidad en un conjunto. Campo de derivabilidad). La derivabilidad de una función es, por definición, una propiedad local, es decir, se refiere a una condición que se cumple en el

entorno de un punto; con el objetivo de hacerla más operativa, es deseable extenderla a un conjunto, que no puede ser otro que aquel en el cual se cumple la propiedad en cuestión. Así pues, si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, se denomina *campo de derivabilidad de f* el subconjunto Ω de su dominio, formado por todos los puntos en los cuales f es derivable. Es muy habitual el caso en el que el campo de derivabilidad de una función es un intervalo abierto $]a, b[$ de \mathbb{R} .

Se indica mediante $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones reales derivables en $\Omega \subset \mathbb{R}$, esto es, el conjunto formado por las funciones reales cuyo campo de derivabilidad es o contiene al conjunto Ω .

7.1.5 DEFINICIÓN. (*Función derivada. Operador derivación*). La definición de campo de derivabilidad de una función permite introducir otro concepto de gran interés: el de *función derivada* o simplemente *derivada* de una función. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real, de campo de derivabilidad $\Omega \subset A$; se denomina *función derivada de f* , la función notada Df (o bien f'), definida por:

$$\begin{aligned} Df : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow Df(x) \end{aligned}$$

Es conveniente destacar la gran importancia de la noción de función derivada: permite calcular la derivada de una función f en un punto $x \in \Omega$, simplemente como la imagen de dicho punto por la función derivada Df , sin necesidad de aplicar punto a punto la definición de derivada de una función. Esto es, la función derivada contiene la información necesaria para calcular la derivada de f en cualquier punto de su campo de derivabilidad.

A partir de la definición anterior tiene sentido definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} D : \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{F}(\Omega; \mathbb{R}) \\ f &\longrightarrow D(f) = Df, \end{aligned}$$

que asigna a cada función su derivada; esta aplicación se denomina *operador derivación* y más adelante se verá su interés e importancia.

7.1.6 EJEMPLO.

- 1) El campo de derivabilidad de la función coordenada de \mathbb{R} es el propio \mathbb{R} ; su función derivada Dx es la constante 1.
- 2) El campo de derivabilidad de cualquier función constante real λ es \mathbb{R} y su función derivada $D\lambda$ es la función nula de \mathbb{R} .
- 3) El campo de derivabilidad de cualquier función potencial de exponente natural x^n , $n \in \mathbb{N}$, es \mathbb{R} ; su función derivada es $Dx^n = nx^{n-1}$.
- 4) El campo de derivabilidad de la función $|x|$ es \mathbb{R}_0 ; su función derivada, definida en este conjunto, es $D|x| = \frac{|x|}{x}$.

Vamos a ver a continuación dos cuestiones importantes relacionadas con la derivada de una función: el concepto de derivabilidad lateral y la extensión de la derivada a valores no finitos.

7.1.7 DEFINICIÓN. (*Derivadas laterales. Funciones derivables lateralmente*). Si se analiza la derivabilidad de una función f en un punto a , puede resultar que no exista el límite que establece la definición de derivada, pero que, no obstante, existan los límites laterales correspondientes; tal es el caso, por ejemplo, de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, en el origen (véase 7.1.3). Tiene sentido pues, establecer las definiciones que se dan a continuación.

- Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea a un punto interior de A ; se define la *derivada de f en el punto a por la derecha*, escrita $D_+f(a)$, como el límite:

$$D_+f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

si tal límite existe y es finito. Se utilizan también las notaciones: $Df(a+)$, $f'_+(a)$ y $f'(a+)$. Se define de forma análoga la *derivada de f en el punto a por la izquierda*, mediante:

$$D_-f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

que se escribe también $Df(a-)$, $f'_-(a)$ y $f'(a-)$.

- Una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *derivable lateralmente* en un punto a si existen sus derivadas laterales por la derecha y por la izquierda en dicho punto. Es inmediato comprobar que una función es derivable en un punto si, y sólo si, es derivable lateralmente y las derivadas laterales coinciden.
- Si una función no es derivable en un punto pero lo es lateralmente, esto puede interpretarse geoméricamente (véase la figura 7.2), como que, en el punto en cuestión, la gráfica de la función tiene dos semirectas tangentes como límites de las rectas secantes a la gráfica por la derecha y por la izquierda, siendo distintas ambas semirectas tangentes.

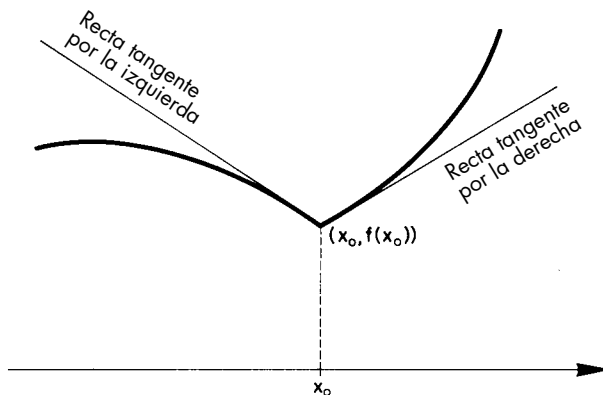


Figura 7.2. Interpretación geométrica de una función no derivable pero derivable lateralmente.

7.1.8 DEFINICIÓN. (*Derivada infinita*). Vamos a extender la derivada a valores de la recta real ampliada, en las condiciones que se detallan a continuación. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sea a un punto interior de A y supongamos que f es continua en a . Entonces

- se dice que f tiene derivada $+\infty$ en el punto a , lo cual indicaremos por $Df(a) = +\infty$, si se cumple $D_+f(a) = D_-f(a) = +\infty$ (véase la figura 7.3(a));

- se dice que f tiene derivada $-\infty$ en el punto a , lo cual indicaremos por $Df(a) = -\infty$, si se cumple $D_+f(a) = D_-f(a) = -\infty$ (véase la figura 7.3(b));
- se dice que f tiene derivada ∞ en el punto a , lo cual indicaremos por $Df(a) = \infty$, si se cumple $D_+f(a) = \pm\infty$ y $D_-f(a) = \mp\infty$ (véase la figura 7.3(c)).

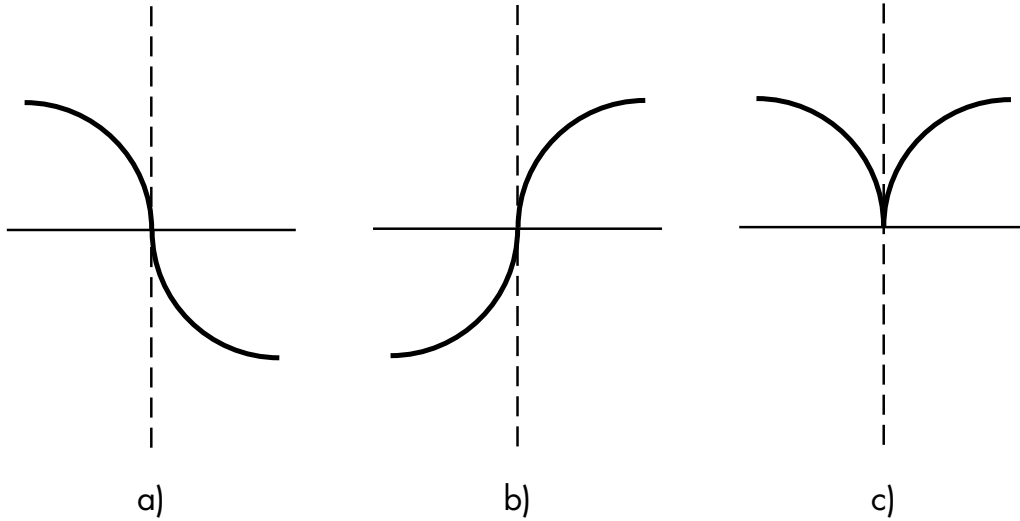


Figura 7.3. Ilustración de la derivada infinita.

7.1.9 DEFINICIÓN. (*Derivadas sucesivas o derivadas de orden superior*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\Omega \subset A$; puesto que su función derivada Df es una función definida en Ω , puede plantearse su derivabilidad en dicho conjunto y, en su caso, definir la *derivada segunda de f en el punto $a \in \Omega$* , notada $D^2f(a)$, o bien, $f''(a)$, mediante

$$D^2f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Df(x) - Df(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Df(a+h) - Df(a)}{h},$$

si este límite existe y es finito.

Si la función $Df: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $\Omega_1 \subset \Omega$, puede definirse la *función derivada segunda de f* , o simplemente *derivada segunda de f* , de forma análoga a la función derivada (primera).

Si $k \in \mathbb{N}$, se define inductivamente la *derivada k -ésima de f en un punto a* , escrita $D^k f(a)$, o bien, $f^{(k)}(a)$, mediante:

$$D^k f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{D^{k-1}f(x) - D^{k-1}f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D^{k-1}f(a+h) - D^{k-1}f(a)}{h}.$$

Estas derivadas, si existen, se denominan *derivadas sucesivas* o bien *derivadas de orden superior* de f .

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\Omega \subset A$; si su función derivada Df es continua en Ω , se dice entonces que f es *continuamente derivable* en Ω o bien que es *de clase \mathcal{C}^1 en Ω* , escribiéndose $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. De forma análoga, si $k \in \mathbb{N}$ se definen las funciones de clase \mathcal{C}^k en Ω : son funciones derivables k veces en un conjunto Ω y cuyas funciones derivadas sucesivas hasta el orden k son continuas en dicho

conjunto. Si $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se dice entonces que f es una función *infinitamente* (o *indefinidamente*) *derivable* o bien *de clase* \mathcal{C}^∞ y se escribe $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

7.1.10 EJEMPLO.

- 1) La función coordenada de \mathbb{R} es infinitamente derivable en \mathbb{R} , cumpliéndose

$$D^k x = 0, \text{ para todo } k \geq 2.$$

- 2) Toda función constante real λ es infinitamente derivable en \mathbb{R} y se verifica

$$D^k \lambda = 0, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

- 3) Toda función potencial de exponente natural x^n , $n \in \mathbb{N}$, es infinitamente derivable en \mathbb{R} , cumpliéndose:

$$D^k x^n = n(n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k}, \text{ si } k \leq n;$$

$$D^k x^n = 0, \text{ si } k > n.$$

Antes de entrar en el estudio de las propiedades de la derivada, cuestión que se aborda en los apartados que siguen y también en el próximo capítulo, es conveniente establecer la relación entre dos propiedades muy importantes de las funciones: la derivabilidad y la continuidad, relación que se establece en la proposición que sigue.

7.1.11 PROPOSICIÓN. Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en $a \in A$, entonces f es continua en a . (El recíproco no es cierto, esto es, la continuidad es condición necesaria pero no suficiente para la derivabilidad).

Demostración:

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$; se trata de establecer su continuidad en dicho punto. En efecto, por ser f derivable en a , existe $Df(a) \in \mathbb{R}$ cumpliendo la definición de derivada en un punto, con lo que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = Df(a) \cdot 0 = 0,$$

es decir, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, lo cual prueba que f es continua en el punto a . ■

7.1.12 OBSERVACIÓN.

- Ya se ha especificado en el enunciado de la proposición anterior que, en general, el recíproco no es cierto, es decir, una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser continua en $a \in A$ y no ser derivable dicho punto. Para verlo, basta considerar la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, que es continua en el origen pero no es derivable en ese punto (véase el ejemplo 7.1.3).
- Así pues, la derivabilidad de una función añade una información adicional a la aportada por su continuidad: corresponde a la idea de una función “bien enlazada y con suavidad” en los puntos en que se cumpla dicha propiedad (campo de derivabilidad). Geométricamente indica la existencia de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto.
- Como consecuencia inmediata de la proposición anterior, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, puede afirmarse que se tiene la cadena de inclusiones:

$$\mathcal{C}^0(\Omega) \supset \mathcal{C}^1(\Omega) \supset \mathcal{C}^2(\Omega) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^k(\Omega) \supset \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

Así pues, se tiene $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ si la función derivada k -ésima $D^k f$ existe y es continua en Ω , puesto que entonces también lo es cualquier otra derivada sucesiva de orden inferior a k .

7.1.13 DEFINICIÓN. (*Derivada de funciones complejas de variable real*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de variable real. Por definición, para cada $x \in A$ se cumple $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + if_2(x) \in \mathbb{C}$. Si a es un punto interior de A , se dice que f es derivable en a si, y sólo si, las funciones componentes f_1 y f_2 son derivables en a y se define la derivada de f en el punto a , mediante

$$Df(a) = (Df_1(a), Df_2(a)) = Df_1(a) + iDf_2(a) \in \mathbb{C}$$

En virtud de esta definición, si la función f_1 es derivable en el subconjunto $\Omega_1 \subset A$ y la función f_2 es derivable en el subconjunto $\Omega_2 \subset A$, entonces f es derivable en $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

7.1.14 EJEMPLO. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x^3, |x|)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. La primera componente $f_1(x) = x^3$ es derivable en \mathbb{R} y la segunda componente $f_2(x) = |x|$ es derivable en \mathbb{R}_0 , cumpliéndose que $Df_1(x) = 3x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $Df_2(x) = \frac{|x|}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}_0$. Así pues, en virtud de 7.1.13, f es derivable en \mathbb{R}_0 y se cumple $Df(x) = \left(3x^2, \frac{|x|}{x}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}_0$.

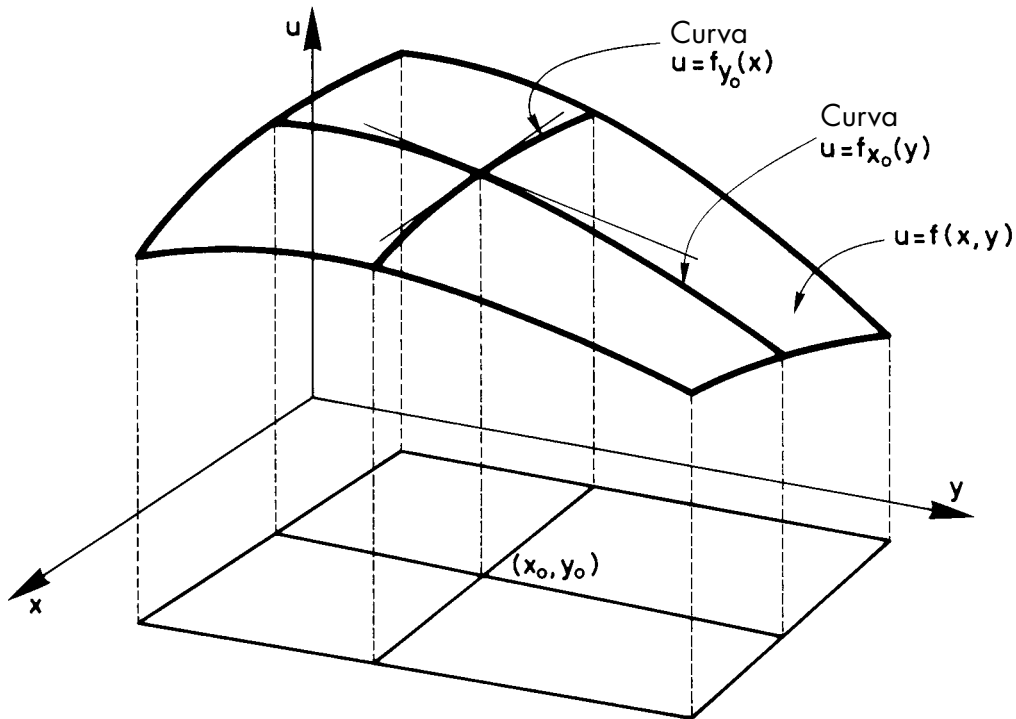


Figura 7.4. Interpretación geométrica de las derivadas parciales.

7.1.15 DEFINICIÓN. (Derivadas parciales de funciones reales de dos variables).

- Sea $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales; se definen las *derivadas parciales* de f en un punto $(x_0, y_0) \in A$, mediante:

$$D_1 f(x_0, y_0) = Df(\cdot, y_0)(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h};$$

$$D_2 f(x_0, y_0) = Df(x_0, \cdot)(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

esto es, son las derivadas de las funciones reales de una variable $f(\cdot, y_0)$ y $f(x_0, \cdot)$ que se definieron en el apartado 4.1.

- Se dice que la función $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ es *derivable* en un punto si existen las dos derivadas parciales de f en dicho punto. Al ser las derivadas parciales de f derivadas de funciones reales de una variable, pueden considerarse sus funciones derivadas respectivas, que se denominan *funciones derivadas parciales* de f y se designan mediante $D_1 f$ y $D_2 f$, respectivamente (también es habitual la notación $D_x f, D_y f$, respectivamente).
- La interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $(x_0, y_0) \in A$ es sencilla: son las pendientes de las rectas tangentes a las curvas $u = f(x, y_0)$, $u = f(x_0, y)$ que se obtienen sobre la superficie $u = f(x, y)$, manteniendo constante $y = y_0$ o bien $x = x_0$, respectivamente (véase la figura 7.4).

7.1.16 EJEMPLO.

- 1) Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, para todo $(x, y) \in \mathbb{C}$; si $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}$, entonces se cumple:

$$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^2 + 2y_0^2) - (x_0^2 + 2y_0^2)}{x - x_0} = 2x_0.$$

Análogamente se prueba que $D_2 f(x_0, y_0) = 4y_0$. En definitiva, f es derivable parcialmente en todo punto $(x, y) \in \mathbb{C}$, cumpliéndose: $D_1 f(x, y) = 2x$ y $D_2 f(x, y) = 4y$.

- 2) La función $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el conjunto $A = \mathbb{C} - \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ mediante $f(x, y) = x^3 y - \frac{x}{y}$, para todo $(x, y) \in A$, es derivable parcialmente en A , puesto que por una parte se cumple:

$$D_1 f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((x+h)^3 y - \frac{x+h}{y}) - (x^3 y - \frac{x}{y})}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(3x^2 y + 3xhy + h^2 y - \frac{1}{y} \right) = 3x^2 y - \frac{1}{y}, \text{ para todo } (x, y) \in A,$$

y por otra parte se obtiene de forma análoga:

$$D_2 f(x, y) = x^3 + \frac{x}{y^2}, \text{ para todo } (x, y) \in A.$$

7.2 CRITERIOS DE DERIVABILIDAD. REGLAS DE DERIVACIÓN.

El objetivo de este apartado es estudiar la relación entre la derivada y las operaciones con funciones, con una doble finalidad: por un lado obtener unos criterios que permitan saber de antemano si una función es derivable o no, a partir de la propia definición de la función; por otro, establecer unas reglas que permitan obtener la derivada de una función, una vez se haya determinado su derivabilidad. Partiendo de igualdades “punto a punto”, se obtendrán expresiones de las funciones derivadas, que son las de mayor interés.

7.2.1 PROPOSICIÓN. Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in A$; se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) La función suma $f + g$ es derivable en el punto a y se verifica:

$$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a).$$

(Se tiene un resultado análogo para la función diferencia $f - g$).

- 2) La función producto fg es derivable en el punto a , cumpliéndose:

$$D(fg)(a) = Df(a)g(a) + f(a)Dg(a).$$

- 3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria, la función producto por escalar λf es derivable en a y se cumple:

$$D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a).$$

- 4) Si $g(a) \neq 0$, la función cociente f/g es derivable en a , verificándose:

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{Df(a)g(a) - f(a)Dg(a)}{(g(a))^2}.$$

Demostración:

- 1) En virtud de la definición de derivada de una función en un punto, se tiene:

$$\begin{aligned} D(f + g)(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = Df(a) + Dg(a). \end{aligned}$$

- 2) Por definición de derivada de una función en un punto:

$$\begin{aligned} D(fg)(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) \right) + \lim_{x \rightarrow a} \left(f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = Df(a)g(a) + f(a)Dg(a). \end{aligned}$$

Obsérvese que además de la derivabilidad de las funciones, se ha aplicado que g es continua en el punto a , por ser derivable en dicho punto.

- 3) Inmediata, teniendo en cuenta la propiedad anterior y que $D\lambda = 0$.

- 4) Teniendo en cuenta la propiedad 2), es suficiente ver que se verifica $D\left(\frac{1}{g}\right)(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$. En efecto:

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{(x - a)g(x)g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{-1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = -\frac{Dg(a)}{g(a)^2}.$$

Obsérvese que se ha tenido en cuenta la continuidad de g en el punto a y que si $g(a) \neq 0$, la función $1/g$ está definida en un entorno del punto a . ■

7.2.2 COROLARIO. Sean $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales, derivables respectivamente en los conjuntos $\Omega_1 \subset A$ y $\Omega_2 \subset B$; se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) La función suma $f + g$ es derivable en el conjunto $\Omega_1 \cap \Omega_2$, verificándose

$$D(f + g)(x) = Df(x) + Dg(x), \text{ para todo } x \in \Omega_1 \cap \Omega_2;$$

- 2) La función producto fg es derivable en el conjunto $\Omega_1 \cap \Omega_2$, verificándose

$$D(fg)(x) = (Df(x))g(x) + f(x)(Dg(x)), \text{ para todo } x \in \Omega_1 \cap \Omega_2;$$

- 3) Si λ es una constante cualquiera, la función producto por escalar λf es derivable en el conjunto Ω_1 , verificándose

$$D(\lambda f)(x) = \lambda Df(x), \text{ para todo } x \in \Omega_1;$$

- 4) La función cociente f/g es derivable en el conjunto $\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2 - \{x / g(x) = 0\}$, verificándose

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(Df(x))g(x) - f(x)(Dg(x))}{g(x)^2}, \text{ para todo } x \in \Omega_0.$$

Demostración:

Inmediata. ■

Los resultados 1) y 2) de la proposición anterior pueden generalizarse a un número finito de términos, tal como se enuncia en la proposición que sigue.

7.2.3 PROPOSICIÓN. Sean f_1, f_2, \dots, f_p , ($p \in \mathbb{N}$) funciones definidas en $A_j \subset \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, p$ y derivables respectivamente en $\Omega_j \subset A_j$, $j = 1, 2, \dots, p$. Si $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \dots \cap \Omega_p$, se cumplen las propiedades:

- 1) La función $f = f_1 + f_2 + \dots + f_p$ es derivable en Ω y se verifica:

$$Df(x) = Df_1(x) + Df_2(x) + \dots + Df_p(x), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

- 2) La función $g = f_1 f_2 \dots f_p$ es derivable en Ω y para todo $x \in \Omega$, se cumple

$$Dg(x) = Df_1(x)f_2(x) \dots f_p(x) + f_1(x)Df_2(x) \dots f_p(x) + \dots + f_1(x)f_2(x) \dots Df_p(x).$$

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

7.2.4 OBSERVACIÓN.

- A partir de la proposición anterior y de 7.2.2, se deduce inmediatamente que cualquier función polinómica $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad (0 \leq j \leq n), \quad a_n \neq 0,$$

es derivable en \mathbb{R} , cumpliéndose:

$$DP_n(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

Se observa que la función derivada DP_n es también una función polinómica, continua y derivable en \mathbb{R} . En definitiva, puede afirmarse que toda función polinómica es infinitamente derivable en \mathbb{R} y para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$D^{(k)} P_n(x) = \begin{cases} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k} + \cdots + k! a_k, & \text{si } k \leq n, \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

- Análogamente, cualquier función racional $r(x): A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m), \quad a_n, b_m \neq 0,$$

es derivable en $A = \mathbb{R} - \{x / Q(x) = 0\}$, cumpliéndose:

$$Dr(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}, \quad x \in A.$$

En la proposición que sigue se establece una igualdad fundamental para el cálculo de derivadas: la relación entre derivabilidad y la composición de funciones, conocida como *regla de la cadena*.

7.2.5 PROPOSICIÓN. (*Regla de la cadena*). Sean $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales tales que $f(A) \subset B$; si la función f es derivable en $a \in A$ y la función g es derivable en $b = f(a) \in B$, la función compuesta $F = g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$, es derivable en a y se cumple:

$$DF(a) = Dg(b) \cdot Df(a).$$

Demostración:

Para probar la derivabilidad de la función compuesta F , deberá probarse que, en virtud de la definición 7.1.1 existe y es finito el límite dado por

$$DF(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(b)}{x - a}.$$

La cosa parece fácil, pues no hay más que escribir

$$\frac{g(f(x)) - g(b)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(b)}{f(x) - b} \cdot \frac{f(x) - b}{x - a} = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

donde se ha escrito $y = f(x)$ para $x \in A$, para ir preparando el paso al límite y, en definitiva, probar el resultado. Pero no es tan sencillo, pues no está garantizado que podamos hacer limpiamente estas operaciones, esto es, que siempre se cumpla $f(x) - b \neq 0$. Deberemos elaborar un poco más el razonamiento; para ello, observamos que f es derivable en el punto a y, por tanto, existe en un entorno $U(a)$ de dicho punto, con lo que tiene sentido definir una función $\varphi : U(a) \rightarrow \mathbb{R}$, mediante

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{g(f(x)) - g(b)}{f(x) - b}, & \text{si } f(x) \neq b, \\ \varphi(x) = Dg(b), & \text{si } f(x) = b. \end{cases}$$

La clave de la demostración está en establecer la continuidad de esta función, esto es, que $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a) = Dg(b)$, propiedad que se probará fácilmente a partir de la derivabilidad de g en el punto b y la continuidad de f en el punto a ; en efecto:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a, f(x) \neq b} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a, f(x) \neq b} \frac{g(f(x)) - g(b)}{f(x) - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = Dg(b); \\ \lim_{x \rightarrow a, f(x) = b} \varphi(x) = Dg(b). \end{cases}$$

Finalmente, teniendo en cuenta la igualdad:

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \varphi(x) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ para todo } x \in U(a) - \{a\},$$

y pasando al límite en el punto a , resulta:

$$\begin{aligned} DF(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\varphi(x) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = Dg(b)Df(a), \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. ■

7.2.6 COROLARIO. Sean dos funciones $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tales que $f(A) \subset B$. Si f es derivable en todo punto $x \in \Omega \subset A$ y g es derivable en todo punto $y = f(x)$, entonces, la función compuesta $F = g \circ f$, es derivable en Ω y se cumple:

$$DF(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x) = ((Dg \circ f)Df)(x), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Demostración:

Inmediata en virtud de la proposición anterior. ■

7.2.7 EJEMPLO. Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = (x^4 + 3x)^5$; está claro que F es la composición $F = g \circ f$ de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + 3x$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^5$. Si, por ejemplo, se quiere calcular la derivada $DF(1)$, en virtud de 7.2.5, se tendrá:

$$DF(1) = Dg(f(1)) \cdot Df(1) = Dg(4) \cdot Df(1) = (5 \cdot 4^4) \cdot (4 \cdot 1^3 + 3) = 8960.$$

Por otra parte, aplicando 7.2.6, la función derivada de F es la función $DF: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$DF(x) = ((Df) \circ g)Dg(x) = (((5x^4) \circ (x^4 + 3x)) \cdot (4x^3 + 3))(x) = 5(x^4 + 3x)^4(4x^3 + 3).$$

A continuación y para terminar este apartado, se estudia la derivabilidad de la función inversa.

7.2.8 PROPOSICIÓN. (*Derivabilidad de la función inversa*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva y continua; si f es derivable en $a \in A$ y se cumple $Df(a) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ es derivable en el punto $b = f(a)$ y se cumple

$$Df^{-1}(b) = \frac{1}{Df(a)}.$$

Demostración:

Por ser f continua en A , su función inversa f^{-1} es continua en $f(A)$, en virtud de 5.3.13. Si $V(b)$ es un entorno del punto $b = f(a) \in f(A)$, la inyectividad de f y la continuidad de las funciones f y f^{-1} permite afirmar que $f^{-1}(V(b)) = U(a)$ es un entorno del punto a ; por otra parte, dada la continuidad de las funciones f y f^{-1} , escribir $x \rightarrow a$ con $x \in U(a)$ es equivalente a escribir $f(x) = y \rightarrow b$ con $y \in V(b)$.

En consecuencia se cumplirá

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{Df(a)}, \end{aligned}$$

lo que prueba que la función inversa $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ es derivable en el punto $b = f(a)$ y que se cumple $Df^{-1}(b) = \frac{1}{Df(a)}$, como se quería probar. ■

7.2.9 COROLARIO. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva y continua; si además es derivable en $\Omega \subset A$ y se cumple $Df(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$, entonces su función inversa $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ es derivable en $\Omega' = f(\Omega)$, verificándose

$$Df^{-1}(y) = \left(\frac{1}{(Df) \circ f^{-1}} \right)(y), \text{ para todo } y \in \Omega'.$$

Demostración:

Aplicando el resultado de 7.2.8, tomando un punto cualquiera $y = f(x) \in \Omega'$, con $x \in \Omega$, se obtiene:

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{Df(x)} = \frac{1}{Df(f^{-1}(y))} = \frac{1}{((Df) \circ f^{-1})(y)} = \left(\frac{1}{(Df) \circ f^{-1}} \right)(y),$$

que es la igualdad que se quería demostrar. ■

7.2.10 EJEMPLO.

1) Para calcular la derivada de la función potencial $x^{1/3}$ en el punto $b = 2$, puede aplicarse el resultado de 7.2.8, tomando: $f(x) = x^3$, $f^{-1}(x) = x^{1/3}$, $a = 2^{1/3}$, $b = 2$; se obtiene:

$$D(x^{1/3})(2) = \frac{1}{Dx^3(2^{1/3})} = \frac{1}{(3x^2)(2^{1/3})} = \frac{1}{3 \cdot 2^{2/3}}.$$

- 2) De un modo más general: la función raíz n -ésima $x^{1/n}$ definida en \mathbb{R}_0^+ es la inversa de la función potencial x^n , restringida a \mathbb{R}_0^+ ; dado que esta función potencial es inyectiva, estrictamente creciente y derivable en su dominio, en virtud de 7.2.9 resulta que la función $x^{1/n}$ es derivable en su dominio y, además, se cumple:

$$Dx^{1/n} = \frac{1}{Dx^n \circ x^{1/n}} = \frac{1}{(nx^{n-1}) \circ x^{1/n}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

7.3 DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES.

En este apartado se estudia la derivabilidad de las funciones elementales, se establece su campo de derivabilidad y se calculan sus funciones derivadas. El conocimiento de las reglas de derivación de las funciones elementales es muy importante, tanto por lo que respecta a las aplicaciones de la derivación (capítulo 8) como para el cálculo de primitivas (capítulo 9).

7.3.1 PROPOSICIÓN. (Derivada de exponenciales, potenciales y logaritmos).

- 1) La función exponencial real es derivable en su dominio; se cumple

$$De^x = e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

- 2) La función logaritmo neperiano es derivable en su dominio y se cumple

$$D \ln x = \frac{1}{x}, \text{ para todo } x > 0.$$

- 3) Las funciones exponenciales y logarítmicas generalizadas son derivables en su dominio respectivo; se verifica:

$$Da^x = a^x \cdot \ln a, \text{ para todo } x \in \mathbb{R};$$

$$D \log_a x = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \text{ para todo } x > 0.$$

- 4) Las funciones potenciales son derivables en su dominio y se tiene:

$$Dx^a = ax^{a-1}, \text{ para todo } x > 0.$$

Demostración:

- 1) Sea $a \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera; escribiendo

$$\frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \frac{t}{x - a},$$

esto es, $e^{x-a} - 1 = t$ y, por lo tanto, $x - a = \ln(1 + t)$, se tiene entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + t)^{1/t}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Aplicando finalmente la definición de derivada en un punto, resulta

$$D \exp(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + t)^{1/t}} = e^a, \text{ para todo } a \in \mathbb{R},$$

lo cual prueba que $D \exp = \exp$.

- 2) El logaritmo neperiano es, por definición, la función inversa de la exponencial real, con lo que su derivabilidad es consecuencia de 7.2.9, que permite también el cálculo de su derivada:

$$D \ln(x) = \left(\frac{1}{(D \exp) \circ \ln} \right) (x) = \left(\frac{1}{\exp \circ \ln} \right) (x) = \frac{1}{x}.$$

- 3) Por definición, la función exponencial generalizada de base a , es la composición: $a^x = \exp(x \ln a)$, con lo que su derivabilidad es consecuencia de 7.2.6; su derivada se obtendrá aplicando la regla de la cadena:

$$Da^x = D(\exp(x \ln a)) = (D \exp(x \ln a)) \cdot D(x \ln a) = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

La derivabilidad de la función logarítmica generalizada \log_a , es inmediata teniendo en cuenta el cambio de base en funciones logarítmicas (6.3.5) y las reglas de derivación establecidas en el apartado 7.1.

- 4) La derivabilidad de la función potencial $x^a = \exp(a \ln x)$ es consecuencia de 7.2.6, que también proporciona el método para calcular su derivada:

$$Dx^a = D(\exp(a \ln x)) = (D \exp(a \ln x)) \cdot D(a \ln x) = (x^a) \cdot \left(a \frac{1}{x} \right) = ax^{a-1},$$

lo cual completa la demostración. ■

7.3.2 PROPOSICIÓN. (Derivación de las funciones trigonométricas).

- 1) Las funciones trigonométricas: sen, cos, tan y cot, son derivables en su dominio y se cumplen las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} D \operatorname{sen} x &= \cos x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}; \\ D \operatorname{cos} x &= -\operatorname{sen} x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}; \\ D \operatorname{tan} x &= 1 + \operatorname{tan}^2 x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} - \left\{ n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}; \\ D \operatorname{cot} x &= -1 - \operatorname{cot}^2 x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}; \\ D \operatorname{sec} x &= \operatorname{sec} x \cdot \operatorname{tan} x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} - \left\{ n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}; \\ D \operatorname{csc} x &= -\operatorname{csc} x \cdot \operatorname{cot} x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

- 2) Las funciones trigonométricas inversas son derivables en su dominio y se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned} D \arccos x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, & D \operatorname{arcsen} x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ para todo } x \in]-1, 1[; \\ D \arctan x &= \frac{1}{1+x^2}, & D \operatorname{arccot} x &= \frac{-1}{1+x^2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demostración:

- 1) Sea $x \in \mathbb{R}$ un número real arbitrario; recordando que $\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, y teniendo en cuenta 7.3.1, resulta

$$D \operatorname{sen} x = \frac{1}{2i} D e^{ix} - \frac{1}{2i} D e^{-ix} = \frac{1}{2i} i e^{ix} + \frac{1}{2i} i e^{-ix} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{cos} x.$$

El resto de igualdades se prueba fácilmente teniendo en cuenta la definición de cada una de las funciones y la proposición 7.2.1.

- 2) Teniendo en cuenta que arccos es la función inversa de cos, su derivabilidad en su dominio $] -1, 1[\subset \mathbb{R}$ es consecuencia de (7.2.9); su derivada es:

$$\begin{aligned} D \operatorname{arccos}(x) &= \left(\frac{1}{(D \cos) \circ \operatorname{arccos}} \right) (x) = \left(\frac{1}{(-\operatorname{sen}) \circ \operatorname{arccos}} \right) (x) = \\ &= \left(\frac{1}{(-\sqrt{1 - \cos^2}) \circ \operatorname{arccos}} \right) (x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ para todo } x \in] -1, 1[. \end{aligned}$$

La derivabilidad de la función arcsen y el cálculo de su derivada se razonan de forma análoga.

La derivabilidad de la función arctan en \mathbb{R} es consecuencia de su definición y de 7.2.9; el cálculo de su derivada se efectúa aplicando la regla de derivación de la función inversa:

$$\begin{aligned} D \operatorname{arctan}(x) &= \left(\frac{1}{(D \tan) \circ \operatorname{arctan}} \right) (x) = \\ &= \left(\frac{1}{(1 + \tan^2) \circ \operatorname{arctan}} \right) (x) = \frac{1}{1 + x^2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La derivada de la función arccot se obtiene de forma completamente análoga.

7.3.3 PROPOSICIÓN. (Derivación de la funciones hiperbólicas).

- 1) Las funciones hiperbólicas son derivables en su dominio \mathbb{R} y, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumplen las igualdades siguientes:

$$D \cosh x = \operatorname{senh} x, \quad D \operatorname{senh} x = \cosh x, \quad D \tanh x = 1 - \tanh^2 x, \quad D \operatorname{coth} x = 1 - \operatorname{coth}^2 x.$$

- 2) Las funciones hiperbólicas inversas son derivables en su dominio y se cumplen las igualdades:

$$\begin{aligned} D \operatorname{argcosh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \text{ para todo } x > 1, & D \operatorname{argsenh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}; \\ D \operatorname{argtanh} x &= \frac{1}{1 - x^2}, \text{ para todo } x \in]1, 1[. \end{aligned}$$

Demostración:

- 1) Tanto la derivabilidad como el cálculo de las derivadas es consecuencia inmediata de la definición respectiva y se propone como ejercicio.
- 2) La derivabilidad de la función argcosh es consecuencia inmediata de su definición como la función inversa de cosh y de 7.2.9; su derivada vendrá dada por:

$$\begin{aligned} D \operatorname{argcosh}(x) &= \left(\frac{1}{(D \cosh) \circ \operatorname{argcosh}} \right) (x) = \left(\frac{1}{(\operatorname{senh}) \circ \operatorname{argcosh}} \right) (x) = \\ &= \left(\frac{1}{(\sqrt{\cosh^2 - 1}) \circ \operatorname{argcosh}} \right) (x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \text{ para todo } x > 1. \end{aligned}$$

La derivabilidad y el cálculo de la derivada de las restantes funciones se razona de forma análoga. ■

Una vez se ha establecido la derivabilidad y se han calculado las derivadas de las funciones elementales, interesa estudiar la derivabilidad sucesiva de dichas funciones, calculando en su caso las correspondientes derivadas n -ésimas. Esta cuestión se aborda en la proposición que sigue.

7.3.4 PROPOSICIÓN. (*Derivadas sucesivas de las funciones elementales*).

- 1) Las funciones exponenciales, logarítmicas y potenciales, son infinitamente derivables en su respectivo dominio. Se verifican las igualdades:

$$\begin{aligned} D^n \exp x &= \exp x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}, \\ D^n \ln x &= \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}, \text{ para todo } x > 0 \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}, \\ D^n a^x &= (\ln a)^n \cdot a^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}, \\ D^n \log_a x &= \frac{(-1)^{n-1}}{\ln a \cdot x^n}, \text{ para todo } x > 0 \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}, \\ D^n x^a &= a(a-1) \cdots (a-n+1) \cdot x^{a-n}, \text{ para todo } x > 0 \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- 2) Las funciones sen y cos son infinitamente derivables en \mathbb{R} ; se cumplen las igualdades:

$$\begin{aligned} D^n \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} \left(x + n \frac{\pi}{2} \right), \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}, \\ D^n \operatorname{cos} x &= -\operatorname{sen} \left(x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right), \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- 3) Las funciones cosh y sinh son infinitamente derivables en \mathbb{R} y se tienen las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} D^{2p} \operatorname{cosh} x &= \operatorname{cosh} x, & D^{2p+1} \operatorname{cosh} x &= \operatorname{senh} x, \\ D^{2p} \operatorname{senh} x &= \operatorname{senh} x, & D^{2p+1} \operatorname{senh} x &= \operatorname{cosh} x, \end{aligned}$$

cualesquiera que sean $x \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Todas ellas se deducen inmediatamente aplicando las reglas de derivación y teniendo en cuenta las propiedades de cada una de las funciones. Se propone como ejercicio. ■

7.3.5 OBSERVACIÓN. Teniendo en cuenta lo que acabamos de ver acerca de la derivabilidad de las funciones elementales y sus derivadas sucesivas, algunas de ellas pueden definirse como sigue:

- La función exponencial real es la única función derivable en \mathbb{R} que cumple las condiciones

$$Df(x) - f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f(0) = 1.$$

(Véase ejercicio 19).

- La función seno es la única función derivable en \mathbb{R} que cumple las condiciones

$$D^2 f(x) + f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f(0) = 0.$$

(Véase ejercicio 20).

- La función coseno es la única función derivable en \mathbb{R} que cumple las condiciones

$$D^2 f(x) + f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f(0) = 1.$$

(Véase ejercicio 20).

- La función seno hiperbólico es la única función derivable en \mathbb{R} que cumple las condiciones

$$D^2 f(x) - f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f(0) = 0.$$

- La función coseno hiperbólico es la única función derivable en \mathbb{R} que cumple las condiciones

$$D^2 f(x) - f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f(0) = 1.$$

7.4 DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN.

En este apartado abordamos una cuestión de gran interés: la aproximación de los incrementos de una función derivable mediante una aplicación lineal. En el caso de funciones reales de una variable esta propiedad coincide con la derivabilidad, pero ello no es así para funciones de más de una variable. Como se verá, esta aproximación tiene un notable interés teórico y un no menos interesante abanico de aplicaciones.

7.4.1 DEFINICIÓN. (*Funciones diferenciables*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real y sea $a \in A$; se dice que f es *diferenciable en el punto a* si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (\alpha + \beta h)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (\alpha + \beta(x-a))}{x-a} = 0,$$

diciéndose entonces que f es aproximable localmente por un polinomio de primer grado.

- Equivalentemente, f es diferenciable en a si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, entonces $|f(a+h) - (\alpha + \beta h)| < \varepsilon|h|$
- La definición dada es consistente, puesto que si f es diferenciable en a , los números reales α y β son los únicos que cumplen la condición de diferenciable en el punto a . En efecto, si suponemos que existen otros números reales $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (\alpha' + \beta'h)}{h} = 0$, entonces se cumple

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (\alpha + \beta h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (\alpha' + \beta'h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\alpha' - \alpha) + (\beta' - \beta)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha' - \alpha}{h} + (\beta' - \beta), \end{aligned}$$

lo cual es cierto si, y sólo si, se cumple $\beta' = \beta$ y $\alpha' = \alpha$.

En la proposición que sigue se establece la equivalencia entre diferenciable y derivabilidad en un punto, para funciones reales de variable real.

7.4.2 PROPOSICIÓN. Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in A$ si y sólo si es derivable en ese punto, cumpliéndose (notaciones de 7.4.1) que $\alpha = f(a)$ y $\beta = Df(a)$.

Demostración:

A partir de la definición de derivada en un punto, se tiene la equivalencia

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = Df(a) \quad \iff \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + Df(a)h)}{h} = 0,$$

que no es más que la condición de diferenciabilidad de f en a con $\alpha = f(a)$ y $\beta = Df(a)$. La unicidad de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ prueba la equivalencia enunciada. ■

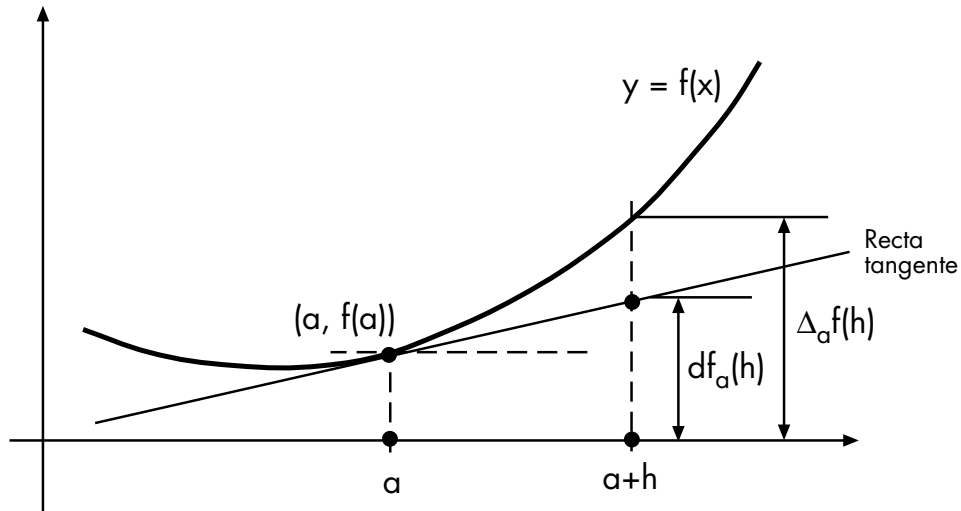


Figura 7.5. Interpretación geométrica de la diferencial de una función en un punto.

7.4.3 DEFINICIÓN. (*Diferencial de una función*). Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $a \in A$; se denomina *diferencial de f en el punto a* la aplicación lineal $df_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$df_a(h) = Df(a)h, \text{ para todo } h \in \mathbb{R}.$$

En virtud de esta definición, la condición de diferenciabilidad de f en el punto a puede escribirse

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + df_a(h))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a; h) - df_a(h)}{h} = 0,$$

y por tanto, se tiene la aproximación

$$f(a+h) \approx f(a) + df_a(h) = f(a) + Df(a)h, \text{ si } h \rightarrow 0,$$

que justifica la aplicación de la diferencial a cálculos aproximados, tal como se verá en 7.4.5.

- Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $a \in A$, puede considerarse la función $\varphi_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi_a(x) = f(a) + Df(a)(x-a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es, la función cuya gráfica es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$; entonces, por ser f diferenciable en el punto a se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \varphi_a(x)}{x-a} = 0,$$

es decir, $f(x) - \varphi_a(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $x-a$.

En la figura 7.5 se ha representado la interpretación geométrica de la diferencial de una función.

7.4.4 EJEMPLO.

- 1) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por $\begin{cases} f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$ Sabemos que esta función es derivable en \mathbb{R} y que se cumple

$$\begin{cases} Df(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ Df(0) = 0. \end{cases}$$

En consecuencia, la diferencial de esta función en cada punto $a \in \mathbb{R}$ será la aplicación lineal $df_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} df_a(h) = \left(2a \operatorname{sen} \frac{1}{a} + \cos \frac{1}{a}\right) h, & \text{si } a \neq 0, \\ df_0(h) = 0. \end{cases}$$

- 2) Toda función polinómica $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$P_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_n \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

es diferenciable en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$, cumpliéndose

$$d(P_n)_a(h) = (nb_n a^{n-1} + (n-1)b_{n-1} a^{n-2} + \cdots + b_1)(h), \quad \text{para todo } h \in \mathbb{R};$$

en particular, en el origen se cumple $d(P_n)_0(h) = b_1 h$, para todo $h \in \mathbb{R}$.

- 3) Toda aplicación lineal $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, todo polinomio de grado 1 con término independiente nulo, definido por $f(x) = \lambda x$, $x \in \mathbb{R}$ es diferenciable en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$, cumpliéndose $df_a(h) = Df(a)h = \lambda h = f(h)$, para todo $h \in \mathbb{R}$, esto es, f coincide con su diferencial.

7.4.5 EJEMPLO. (Aplicación de la diferencial a cálculos aproximados).

Vamos a ver cómo puede aplicarse la aproximación

$$f(a+h) \approx f(a) + df_a(h) = f(a) + Df(a)h, \quad \text{si } h \rightarrow 0,$$

vista en (7.4.3) a cálculos aproximados con funciones diferenciables.

- 1) Para calcular aproximadamente $\sqrt{623}$, consideraremos la función potencial $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{1/2}$, para todo $x \geq 0$, que es diferenciable en \mathbb{R}_0^+ y se cumple $Df(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $x > 0$. Teniendo en cuenta que en el punto $a = 625$ se cumple $f(a) = 25$ y puesto que $623 = 625 + (-2)$, tomando $h = -2$ se cumplirá

$$\sqrt{623} \approx 25 + \frac{1}{2} (625)^{-1/2} \cdot (-2) = 25 - 0.04 = 24.96$$

- 2) Para calcular aproximadamente $\arctan 1.07$, consideraremos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$ que es diferenciable en \mathbb{R} y que en el punto $a = 1$ verifica $f(a) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Puesto que $1.07 = 1 + 0.07$, tomando $h = 0.07$ se tendrá

$$\begin{aligned} \arctan 1.07 &\approx \arctan(1) + (D \arctan(1))0.07 = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{1+x^2}(1)\right) \cdot 0.07 = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0.07 = \frac{\pi + 0.14}{4} \simeq 0.82039816. \end{aligned}$$

7.4.6 OBSERVACIÓN.

- Hay que destacar que en los cálculos aproximados que se han realizado en el ejemplo anterior no se conoce una acotación del error que se comete en los mismos, esto es, no se conoce un $k > 0$ tal que $\lambda < f(a+h) < \mu$, con $\mu - \lambda < k$. En el próximo capítulo se verán otros métodos de cálculo aproximado basados en propiedades de las funciones derivables que permiten acotar el error cometido.
- Sea $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función coordenada de \mathbb{R} ; dado un número real arbitrario $a \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\Delta x(a; h) = x(a+h) - x(a) = h,$$

es decir, el incremento respecto del desplazamiento h es independiente del punto a , con lo que en virtud de esta independencia, puede escribirse $\Delta x = h$. Por otra parte, la función coordenada de \mathbb{R} es diferenciable en \mathbb{R} y su función diferencial en un punto cualquiera $a \in \mathbb{R}$ vendrá dada por

$$dx_a(h) = Dx(a)h = 1 \cdot h = h,$$

que también es independiente del punto a , con lo que puede escribirse $h = dx$. Con ello, la definición de diferencial de una función en un punto puede escribirse ahora $df_a(h) = Df(a)h = Df(a)dx$, lo que justifica la notación habitual $Df(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

7.4.7 PROPOSICIÓN. (*Diferenciabilidad y operaciones algebraicas*). Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables en $a \in A$; se cumplen las propiedades siguientes

- 1) La función suma $f + g$ es diferenciable en el punto a y se verifica:

$$d(f+g)_a = df_a + dg_a.$$

- 2) La función producto fg es diferenciable en el punto a , cumpliéndose:

$$d(fg)_a = g(a)df_a + f(a)dg_a.$$

- 3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante, la función producto por escalar λf es diferenciable en a y se cumple:

$$d(\lambda f)_a = \lambda df_a.$$

- 4) Si $g(a) \neq 0$, la función cociente f/g es diferenciable en a , verificándose:

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_a = \frac{1}{(g(a))^2} \left(g(a)df_a - f(a)dg_a \right).$$

Demostración:

Inmediata, teniendo en cuenta la equivalencia entre diferenciabilidad y derivabilidad. ■

7.4.8 PROPOSICIÓN. (*Regla de la cadena para diferenciación*). Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(A) \subset B$, f es derivable en $a \in A$ y g es derivable en $b = f(a) \in B$. Entonces, la función compuesta de f y g es diferenciable en a y se cumple

$$d(g \circ f)_a = dg_b \circ df_a.$$

Demostración:

Sabemos que la función compuesta $g \circ f$ es derivable y se cumple $D(g \circ f)(a) = Dg(b) \cdot Df(a)$, con lo que

$$d(g \circ f)_a(h) = D(g \circ f)(a)h = Dg(b)Df(a)h = dg_b(df_a(h)) = (dg_b \circ df_a)(h), \text{ para todo } h \in \mathbb{R},$$

como se quería probar. ■

7.4.9 PROPOSICIÓN. (*Diferenciabilidad de la función inversa*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva, derivable en $a \in A$ y tal que $Df(a) \neq 0$; entonces, la función inversa $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ es diferenciable en $b = f(a)$ y se cumple

$$d(f^{-1})_b = (df_a)^{-1}.$$

Demostración:

Sabemos que la función inversa f^{-1} es derivable en $b = f(a)$ y se cumple $Df^{-1}(b) = \frac{1}{Df(a)}$, con lo cual

$$d(f^{-1})_b(h) = Df^{-1}(b)h = \frac{1}{Df(a)}h = (df_a)^{-1}(h), \text{ para todo } h \in \mathbb{R},$$

como se quería probar. ■

7.4.10 DEFINICIÓN. (*Diferenciabilidad de una función compleja de una variable*).

Sea $f = (f_1, f_2): A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de variable real; sabemos que entonces la función se expresa mediante $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ para todo $x \in A$, donde las funciones f_1 y f_2 son funciones reales de variable real. Si f es derivable en $a \in A$, ello equivale por definición a que las funciones f_1 y f_2 son derivables en dicho punto, es decir, diferenciables puesto que son funciones reales de una variable, cumpliéndose que

$$d(f_1)_a(h) = Df_1(a)h \quad \text{y} \quad d(f_2)_a(h) = Df_2(a)h, \text{ para todo } h \in \mathbb{R}.$$

Se define la función diferencial de f en el punto $a \in A$ como la aplicación lineal $df_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$df_a(h) = (Df_1(a)h, Df_2(a)h), \text{ para todo } h \in \mathbb{R},$$

y puesto que se cumplen las igualdades

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(a+h) - (f_1(a) + Df_1(a)h)}{h} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(a+h) - (f_2(a) + Df_2(a)h)}{h} = 0,$$

se tendrá que

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_1(a+h), f_2(a+h)) - \left((f_1(a), f_2(a)) + (Df_1(a)h, Df_2(a)h) \right)}{h} = \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + df_a(h))}{h} = (0, 0), \end{aligned}$$

que expresa la condición de diferenciabilidad de la función f en términos análogos al caso de las funciones reales de una variable.

La matriz asociada a la aplicación lineal df_a en las bases naturales de \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 es

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} Df_1(a) \\ Df_2(a) \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(2, 1),$$

que recibe el nombre de *matriz jacobiana* de f en el punto a .

7.4.11 EJEMPLO. Considérese la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x) = (x^3, 3x^2 + 2x + 1) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Las funciones componentes de f son las funciones reales de variable real dadas por

$$f_1(x) = x^3 \quad \text{y} \quad f_2(x) = 3x^2 + 2x + 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Estas funciones son diferenciables en todo punto $a \in \mathbb{R}$, cumpliéndose:

$$d(f_1)_a(h) = Df_1(a)h = (3a^2)h \quad \text{y} \quad d(f_2)_a(h) = Df_2(a)h = (6a + 2)h, \text{ para todo } h \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, la diferencial de f en un punto cualquiera $a \in \mathbb{R}$ es la aplicación lineal $df_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$df_a(h) = (3a^2h, (6a + 2)h), \text{ para todo } h \in \mathbb{R},$$

y la matriz jacobiana de f en $a \in \mathbb{R}$ es

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} 3a^2 \\ 6a + 2 \end{pmatrix}.$$

7.4.12 DEFINICIÓN. (*Diferenciabilidad de una función real de dos variables*). Sea $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $a = (a_1, a_2) \in A$; si f es derivable en el punto a , esto es, existen las dos derivadas parciales $D_1f(a)$ y $D_2f(a)$, se define la diferencial de f en el punto a , como la aplicación lineal $df_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$df_a(h) = D_1f(a)h_1 + D_2f(a)h_2, \text{ para todo } h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2;$$

se dice que f es diferenciable en el punto a si se cumple además la *condición de diferenciabilidad* siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - (D_1f(a)h_1 + D_2f(a)h_2)}{|h|} = 0.$$

La matriz asociada a la aplicación lineal df_a en las bases naturales de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R} es

$$Jf(a) = (D_1f(a) \quad D_2f(a)) \in M_{\mathbb{R}}(1, 2),$$

denominada matriz jacobiana de f en el punto a .

Obsérvese que además de la existencia de las derivadas parciales de la función en el punto, se exige que se cumpla la condición enunciada, es decir, para funciones reales de dos variables, diferenciable no es estrictamente equivalente a derivable, ya que se exige algo más que la mera existencia de las derivadas parciales para que una función sea diferenciable (la existencia de las derivadas parciales es condición necesaria, pero no suficiente, para la diferenciabilidad). De hecho, si las derivadas parciales

son continuas (es decir, f es de tipo \mathcal{C}^1) se cumple la condición de diferenciabilidad, propiedad que enunciaremos sin demostración.

7.4.13 EJEMPLO. Vamos a desarrollar dos ejemplos para ilustrar la definición anterior. En el primero se probará la diferenciabilidad de una función; en el segundo se verá como, aun existiendo las derivadas parciales, la función no es diferenciable en el punto.

1) La función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2, \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

es diferenciable en todo punto $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, puesto que $D_1f(a) = 2a_1$, $D_2f(a) = 4a_2$, con lo que $df_a(h) = 2a_1h_1 + 4a_2h_2$, para todo $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ y además se cumple:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a_1 + h_1)^2 + 2(a_2 + h_2)^2 - (a_1^2 + 2a_2^2) - (2a_1h_1 + 4a_2h_2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1^2 + 2h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}} = 0.$$

2) La función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

es derivable en el origen y se cumple $D_1f(0, 0) = D_2f(0, 0) = 0$, pero no es diferenciable en dicho punto puesto que no existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - D_1f(0, 0)h_1 - D_2f(0, 0)h_2}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}.$$

7.4.14 PROPOSICIÓN. (*Regla de la cadena generalizada*). Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ con $f = (f_1, f_2)$ y sea $g: B \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(A) \subset B$. Si f es diferenciable en $a \in A$ y g es diferenciable en $b = f(a) \in B$, se cumple

$$D(g \circ f)(a) = D_1g(b)Df_1(a) + D_2g(b)Df_2(a).$$

Demostración:

Para realizar con rigor esta demostración deberíamos disponer de un resultado previo: la diferenciabilidad de la función compuesta $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto a y que se cumple la igualdad $d(g \circ f)_a = dg_b \circ df_a$. Admitiremos que ello es cierto (para la demostración, véase por ejemplo la referencia [Or]).

Entonces, por un lado se cumplirá:

$$d(g \circ f)_a(h) = D(g \circ f)(a)h, \text{ para todo } h \in \mathbb{R},$$

y por otro,

$$\begin{aligned} d(g \circ f)_a(h) &= dg_b(df_a(h)) = dg_b(Df_1(a)h, Df_2(a)h) = D_1g(b)Df_1(a)h + D_2g(b)Df_2(a)h = \\ &= (D_1g(b)Df_1(a) + D_2g(b)Df_2(a))h, \text{ para todo } h \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De ambas igualdades resulta la proposición. ■

7.4.15 EJEMPLO. Sean las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = (x, \operatorname{sen} x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad g(x, y) = x^3 + xy^2 \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

La función compuesta $F = g \circ f$ estará definida por

$$F(x) = g(f(x)) = g(x, \operatorname{sen} x) = (x^3 + xy^2)(x, \operatorname{sen} x) = x^3 + x \operatorname{sen}^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Puesto que

$$Df_1(x) = 1, \quad D_1g(x, y) = 3x^2 + y^2, \quad Df_2(x) = \cos x, \quad D_2g(x, y) = 2xy$$

se tendrá finalmente que

$$DF(x) = (3x^2 + y^2)(x, \operatorname{sen} x) + (2xy)(x, \operatorname{sen} x) \cos x = 3x^2 + \operatorname{sen}^2 x + 2x \operatorname{sen} x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Puede verse también que el resultado es correcto, derivando directamente la expresión analítica de la función compuesta.

7.5 FUNCIONES IMPLÍCITAS. DERIVACIÓN DE FUNCIONES IMPLÍCITAS.

7.5.1 En el capítulo 4 se ha definido una función $f : A \rightarrow B$ como una terna formada por dos conjuntos no vacíos y una correspondencia entre ambos tal que a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo; si la imagen se expresa de forma explícita mediante operaciones elementales con la antiimagen, la función se dice que está definida *explícitamente*. Por otra parte, hemos visto otras vías para definir funciones de forma explícita, por ejemplo como límites de sucesiones de funciones y también como sumas de series de funciones. En este apartado vamos a estudiar una nueva forma de definir una función real de variable real, de gran interés en Análisis: se trata de las funciones definidas implícitamente por una ecuación de dos variables; estudiaremos también las propiedades de estas funciones así definidas. El enfoque es necesariamente sucinto por cuanto el nivel de este texto no permite efectuar un tratamiento teórico en profundidad a este respecto.

7.5.2 DEFINICIÓN. (*Funciones implícitas o definidas implícitamente*). Consideremos la ecuación en dos variables reales $f(x, y) = 0$, donde $f : A \times B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real de dos variables y A, B son subconjuntos de \mathbb{R} . Si para cada $a \in A$ existe el único $b \in B$ tal que $f(a, b) = 0$, puede considerarse entonces una función definida del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow \varphi(x) \quad \iff \quad f(x, \varphi(x)) = 0 \end{aligned}$$

Esta función se dice que está *definida implícitamente* por la ecuación $f(x, y) = 0$, o bien, que es una *función implícita* definida por ella.

Vamos a ver algunos ejemplos que permitan ilustrar esta definición y comentar algunos detalles al respecto.

7.5.3 EJEMPLO.

- 1) Sea la ecuación $x^2 - y = 0$; si $f : [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función real definida por $f(x, y) = x^2 - y$, dado $a \in [0, 1]$ existe un único $b \in [0, 1]$ tal que $a^2 - b = 0$. Puede definirse la siguiente función

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longrightarrow \varphi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - \varphi(x) = 0. \end{aligned}$$

Esta es, pues, una función definida implícitamente por la ecuación $x^2 - y = 0$.

- 2) Si se considera la ecuación $x^3 - y^3 + 1 = 0$, para cada $a \in \mathbb{R}$ existe un único $b \in \mathbb{R}$ tal que $a^3 - b^3 + 1 = 0$, ya que el número real $b = (1 + a^3)^{1/3}$ es el único que cumple la ecuación dada, una vez fijado a . Así pues, puede definirse la función implícita

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \varphi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 - (\varphi(x))^3 + 1 = 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, puesto que para cada $b \in \mathbb{R}$ existe un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^3 - b^3 + 1 = 0$, ya que el número real $a = (1 + b^3)^{1/3}$ es el único que cumple la ecuación dada una vez fijado b , puede definirse implícitamente la función

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longrightarrow \psi(y) \quad \Longleftrightarrow \quad (\psi(y))^3 - y^3 + 1 = 0. \end{aligned}$$

- 3) En ocasiones, una ecuación puede dar lugar a más de una función definida implícitamente. Así, por ejemplo, considérese la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$; si $a \in [-1, 1]$ existen dos números reales distintos que cumplen la ecuación anterior, dados por $b_1 = +\sqrt{1 - x^2}$ y $b_2 = -\sqrt{1 - x^2}$. En consecuencia, pueden definirse implícitamente dos funciones:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : [-1, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longrightarrow \varphi_1(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + (\varphi_1(x))^2 - 1 = 0, \\ \varphi_2 : [-1, 1] &\longrightarrow [-1, 0] \\ x &\longrightarrow \varphi_2(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + (\varphi_2(x))^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

- 4) En otros casos, sin embargo, dada una ecuación $f(x, y) = 0$ no puede definirse implícitamente ninguna función, ya sea por razones inherentes a la ecuación misma, o bien, por consideraciones sobre el conjunto A en el que se considera definida la primera variable. Así, por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no define ninguna función implícita ya que no tiene ninguna solución y la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$ no define ninguna función implícita si $|x| > 1$.
- 5) Si la ecuación $f(x, y) = 0$ define implícitamente una función $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ y puede obtenerse a partir de dicha ecuación una expresión explícita de φ , ésta se denomina *expresión local* de φ . Así, por ejemplo, las expresiones locales de las funciones implícitas definidas en 3) son

$$\varphi_1(x) = +\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in B(x_0; r) \quad \text{y} \quad \varphi_2(y) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad y \in B(x_0; r),$$

donde $x_0 \in]-1, 1[$ y $r > 0$. Cuando se tiene una expresión local (explícita) de la función definida implícitamente por una ecuación, pueden estudiarse sus propiedades (continuidad, derivabilidad, etc.) a partir de esta expresión local. Sin embargo, son escasas las ocasiones en las que es posible obtener la expresión local de la función definida implícitamente, con lo que dichas propiedades deberán ser establecidas por un teorema al efecto.

Vista la definición de función implícita y los ejemplos ilustrativos anteriores puede abordarse el siguiente paso: enunciar un teorema que establezca en qué condiciones una ecuación $f(x, y) = 0$ define una función implícita φ y qué propiedades pueden afirmarse sobre dicha función a partir de las propiedades de la función f .

7.5.4 TEOREMA. (*De la función implícita*). Sea una ecuación en dos variables $f(x, y) = 0$ que admite una solución $(x_0, y_0) \in A \times B \subset \mathbb{R}^2$ y en la que la función $f: A \times B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cumple las propiedades siguientes

- 1) es de tipo \mathcal{C}^1 en $A \times B$;
- 2) $D_2f(x_0, y_0) \neq 0$.

Existen entonces un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0 \in A$, un entorno $V(y_0)$ del punto $y_0 \in B$ y una función $\varphi: U(x_0) \rightarrow V(y_0)$, tales que

- 1) para cada $x \in U(x_0)$, $\varphi(x)$ es el único elemento de $V(y_0)$ tal que $f(x, \varphi(x)) = 0$, cumpliéndose en particular que $\varphi(x_0) = y_0$;
- 2) la función φ es de tipo \mathcal{C}^1 en $U(x_0)$ y su derivada satisface la ecuación

$$D_1f(x, \varphi(x)) + D_2f(x, \varphi(x))D\varphi(x) = 0, \text{ para todo } x \in U(x_0).$$

En particular se cumple:

$$D\varphi(x_0) = -\frac{D_1f(x_0, y_0)}{D_2f(x_0, y_0)}.$$

Demostración:

Omitimos la demostración de este teorema puesto que requiere conocimientos que no han sido desarrollados en este texto. No obstante, la persona interesada en la demostración puede consultar las referencias [Ap] y [Fe].

Se puede, no obstante, razonar la ecuación que satisface la función derivada $D\varphi$. En efecto, aplicando 7.4.14 a la función $F: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = f(x, \varphi(x))$, para todo $x \in U(x_0)$, se obtiene:

$$DF(x) = D_1f(x, \varphi(x)) + D_2f(x, \varphi(x))D\varphi(x) \text{ para todo } x \in U(x_0).$$

Teniendo en cuenta la ecuación dada resulta

$$D_1f(x, \varphi(x)) + D_2f(x, \varphi(x))D\varphi(x) = 0, \text{ para todo } x \in U(x_0).$$

Aplicando finalmente al punto (x_0, y_0) se obtiene

$$D_1f(x_0, y_0) + D_2f(x_0, y_0)D\varphi(x_0) = 0 \quad \implies \quad D\varphi(x_0) = -\frac{D_1f(x_0, y_0)}{D_2f(x_0, y_0)},$$

como se quería probar. ■

7.5.5 EJEMPLO.

- 1) Considérese la ecuación $x^2 - y = 0$ y sea $f: [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por $f(x, y) = x^2 - y$. El punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ es solución de la ecuación dada y, además, se cumple $D_1f(x, y) = 2x$, $D_2f(x, y) = -1$ con lo que f es de tipo \mathcal{C}^1 en el interior de su dominio. Por último, se verifica $D_2f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) = -1 \neq 0$. Así pues, se cumplen todas las hipótesis establecidas en el teorema

de la función implícita, con lo que puede afirmarse que existen dos entornos $U(\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $V(\frac{1}{2})$ y una función $\varphi : U(\frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow V(\frac{1}{2})$ definida por $y = \varphi(x) \in V(\frac{1}{2}) \iff x^2 - \varphi(x) = 0$, que es de tipo \mathcal{C}^1 en $U(\frac{\sqrt{2}}{2})$ y se cumple

$$\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad D\varphi(x) = 2x, \text{ para todo } x \in U\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } D\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

- 2) Considérese la ecuación $x^3 - y^3 + 1 = 0$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3 - y^3 + 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. El punto $(0, 1)$ es solución de la ecuación dada, la función f es de tipo \mathcal{C}^1 en su dominio y, por último, se cumple $D_2f(0, 1) = -3 \neq 0$, con lo que existen dos entornos $U(0)$ y $V(1)$ y una función $\varphi : U(0) \rightarrow V(1)$ definida por

$$y = \varphi(x) \in V(1) \iff x^3 - (\varphi(x))^3 + 1 = 0,$$

que es de tipo \mathcal{C}^1 en $U(0)$ y se cumple

$$\varphi(0) = 1, \quad D\varphi(x) = x^2(1 + x^3)^{-2/3}, \text{ para todo } x \in U(0) \text{ y } D\varphi(0) = 0.$$

- 3) Si se considera la ecuación $x^2 - y^2 = 0$ y el punto $x_0 = 0$, la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tiene derivadas parciales continuas en \mathbb{R}^2 , pero $D_2f(0, 0) = 0$, es decir, no se cumplen las condiciones del teorema. No obstante, la ecuación considerada tiene al menos las soluciones $y = x$, $y = -x$, $y = |x|$, $y = -|x|$. Con ello se observa que el teorema establece condiciones suficientes para la existencia de una función definida implícitamente por la ecuación, pero si éstas no se cumplen no puede afirmarse que la ecuación no defina ninguna función implícita.

7.5.6 EJEMPLO.

- Considérese la ecuación $x^3 - xy + y^3 - 1 = 0$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3 - xy + y^3 - 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. El punto $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ es solución de la ecuación dada, se cumple $D_1f(x, y) = 3x^2 - y$, $D_2f(x, y) = -x + 3y^2$, luego la función f es de tipo \mathcal{C}^1 en su dominio y, por último, se cumple $D_2f(1, 0) = -1 \neq 0$, con lo que existen dos entornos $U(1)$ y $V(0)$ y una función $\varphi : U(1) \rightarrow V(0)$ definida por

$$y = \varphi(x) \in V(0) \iff x^3 - x\varphi(x) + (\varphi(x))^3 - 1 = 0,$$

que es de tipo \mathcal{C}^1 en $U(1)$ y se cumple

$$\varphi(1) = 0, \quad (3x^2 - \varphi(x)) + (-x + 3(\varphi(x))^2)D\varphi(x) = 0 \text{ para todo } x \in U(1) \text{ y } D\varphi(1) = 3.$$

- Ahora es sencillo calcular, por ejemplo, la ecuación de la recta tangente a la curva plana dada por la ecuación $x^3 - xy + y^3 - 1 = 0$ en el punto $(1, 0)$; en efecto, dicha ecuación es

$$y - 0 = D\varphi(1)(x - 1) \Rightarrow 3x - y - 3 = 0,$$

ecuación que no sería tan fácil de obtener si se quisiera calcular primero la expresión local de la función implícita φ definida por la ecuación.

- A partir de la ecuación de la que se ha obtenido la derivada primera de φ , pueden calcularse las derivadas sucesivas de esta función; en efecto, derivando de nuevo en dicha ecuación se obtiene

$$6x - 2D\varphi(x) - xD^2\varphi(x) + 6\varphi(x)(D\varphi(x))^2 + 3\varphi(x)^2D^2\varphi(x) = 0,$$

con lo que

$$D^2\varphi(x) = \frac{2D\varphi(x) - 6x - 6\varphi(x)(D\varphi(x))^2}{3\varphi(x)^2 - x};$$

en particular, se cumple $D^2\varphi(1) = \frac{2D\varphi(1) - 6 - 0}{-1} = 0$.

7.6 EJERCICIOS.

1. Estudiar la derivabilidad de las funciones que se indican, calculando su campo de derivabilidad. Escribir la expresión de la función derivada correspondiente, caso de que exista.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot E(x)$; b) $f(x) = x|x|$; c) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x}, & \text{si } x > 0; \end{cases}$ d) $f(x) = x^2 - E(x^2)$.

2. Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2ax + 3, & \text{si } x < 1, \\ 3, & \text{si } x = 1, \\ \frac{x^2 - bx}{x + 5}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$ Estudiar la continuidad y la derivabilidad de esta función, según los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 0, \\ -x^2, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$ Probar que f es derivable en \mathbb{R} y calcular su derivada. Estudiar la existencia de la derivada segunda de f .

4. Estudiar la continuidad y la derivabilidad de las funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$ según los valores de $n \in \mathbb{N}$.

5. Estudiar la derivabilidad de las funciones $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $g_n(x) = |x^n|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, según los valores de $n \in \mathbb{N}$. Calcular la función derivada primera.

6. Calcular las derivadas laterales de las funciones que siguen en los puntos que se indican:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$ en el punto $a = 0$.

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} (x-2) \arctan \frac{1}{x-2}, & \text{si } x \neq 2, \\ 0, & \text{si } x = 2, \end{cases}$ en el punto $a = 2$.

7. Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$ Probar que f es continua tan solo en un punto. Estudiar la derivabilidad de f .

8. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in A$ y tal que $f(x_0) = 0$. Probar que la función $|f|$ es derivable en el punto x_0 si, y sólo si, se cumple $Df(x_0) = 0$.

9. Si $a, b > 0$, probar las siguientes igualdades

$$1) D \left(-\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right) = \frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}}; \quad 2) D \left(-\frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan(x\sqrt{\frac{a}{b}}) \right) = \frac{1}{ax^2 + b}.$$

10. a) Calcular los puntos de la curva plana definida por la ecuación $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$, en los cuales la tangente a la curva es paralela al eje de abscisas.

b) Calcular, si existen, la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva de ecuación $y = \sqrt[3]{x-1}$, en el punto $(1, 0)$.

c) Calcular los puntos de la curva plana definida por la ecuación $y = x - \frac{1}{x}$, en los que la recta tangente a dicha curva es paralela a la recta $2x - y = 5$.

d) Determinar los puntos de la curva plana definida por la ecuación $y = (x+2)^2$, en los que la recta tangente a la curva pasa por el origen de coordenadas.

e) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \arcsen \frac{x-1}{2}$, en el punto en que dicha curva corta al eje de abscisas.

f) Determinar la parábola de ecuación $y^2 = ax + b$ que es tangente a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $(1, 1)$.

11. Calcular las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $(x^2 + 1)\sqrt{x^3 - 1}$;	b) $\frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}$;	c) $\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$;
d) $\frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x$;	e) $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$;	f) $e^{\cos x^2}$;
g) $e^{\cos^2 x}$;	h) $\cot x - \tan x$;	i) $\frac{x^2}{\ln x}$;
j) $\ln x \log x - \ln a \log_a x$;	k) $\sqrt{\cos x} a^{\sqrt{\cos x}}$;	l) $\frac{1}{3 \cos^2 x} - \frac{1}{\cos x}$;
m) $\cos \left(x + \frac{1}{\ln(x^2 + 1)} \right)$;	o) $(x + \cos^6 x + \operatorname{sen}^6 x)^5$;	p) $\operatorname{argtanh}(\operatorname{sen}^2 e^x)$;
q) $\arctan(\ln x) + \ln(\arctan x)$;	r) $\ln^2 \left(\arctan \frac{2x+1}{3x} \right)$;	s) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

12. Pruébese que en la parábola de ecuación $y = Ax^2 + Bx + C$, la cuerda que une los puntos de abscisa $x = a$ y $x = b$, es paralela a la recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = \frac{a+b}{2}$.

13. Probar que las funciones siguientes satisfacen, en cada caso, la ecuación (diferencial) que se indica:

a) $y = xe^{-x}$, $xy' = (1-x)y$; b) $y = \frac{1}{2}x^2e^x$, $y'' - 2y' + y = e^x$;

c) $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$, $xy' = -y^2(1+x)$;

d) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$, $y'' + 3y' + 2y = 0$, cualesquiera que sean $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

14. Calcular la derivada segunda de las funciones

a) $f(x) = \exp x^2$, b) $h(x) = (1+x^2) \arctan x$, c) $g(x) = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$, d) $i(x) = a \cosh \frac{x}{a}$.

15. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x < 1, \\ ax^2 + bx + c, & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$ determinar los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que dicha función sea dos veces derivable en el punto $x_0 = 1$. Obtener en ese caso la derivada segunda de f .

16. Calcular la derivada k -ésima de las funciones siguientes:

a) $\sin 2x$; b) $\cos^2 x$; c) $\frac{1+x}{1-x}$; d) $\frac{\ln x}{x}$; e) $e^x \cos x$; f) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

17. Se considera la función $F: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \log_{f(x)} g(x)$, para todo $x \in A$, siendo f y g funciones derivables en \mathbb{R} , tales que $f(x), g(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcular la derivada de la función F , aplicando la regla de la cadena.

18. a) Se trata de estudiar la relación entre derivabilidad y simetría par de una función; en concreto, se trata de probar que si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene simetría par, entonces su derivada Df tiene simetría impar. Recíprocamente, probar que si f tiene simetría impar, entonces su derivada Df tiene simetría par.

b) Probar que si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función periódica y derivable, su función derivada Df también es periódica.

19. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real derivable en \mathbb{R} y tal que $Df(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y tal que $f(0) = 1$. Probar que entonces se cumplen las propiedades siguientes:

1) $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$; (sugerencia: ver que el producto $f(x)f(-x)$ es constante, derivándolo).

2) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3) no puede haber dos funciones distintas cumpliendo las condiciones enunciadas; (sugerencia: supóngase que existe otra función g que cumple las mismas condiciones y dévese el cociente f/g).

4) $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

5) $f(x+y) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$; (sugerencia: probar que para y fijo, la función $\varphi(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$ es constante y determinar la constante).

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; (sugerencia: considerar la sucesión $(2n) \rightarrow +\infty$ y ver que $f(2n) \rightarrow +\infty$).

7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

(En este ejercicio se muestra una forma axiomática de definir la función exponencial real, a partir de pocos axiomas, pero de gran potencia.)

20. Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en \mathbb{R} , tales que $Df = g$, $Dg = -f$, $f(0) = 0$ y $g(0) = 1$. Probar que se cumplen las propiedades siguientes

- 1) $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$; (sugerencia: derivar el primer miembro);
- 2) no puede haber otro par de funciones distintas que cumplen estas propiedades;
- 3) f tiene simetría impar y g tiene simetría par;
- 4) $f(x + y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$, $g(x + y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(En este ejercicio se muestra una forma axiomática de definir las funciones trigonométricas \sin y \cos a partir de pocos axiomas, pero de gran potencia.)

21. Calcular aproximadamente: a) $\sqrt[3]{124}$; b) $\ln 1.012$; c) $\sin 60^\circ 1'$; d) $\sqrt[5]{36}$.

22. Determinar el subconjunto de \mathbb{R} en el cual puede aproximarse $\sqrt[3]{x}$ por $\sqrt[5]{x+1}$ con un error menor que 0.001.

23. A partir de la ley de Ohm $I = \frac{V}{R}$, probar que una pequeña variación en la intensidad de corriente (I) debida a una pequeña variación de la resistencia (R) puede aproximarse mediante $\Delta I \simeq -I \frac{\Delta R}{R}$.

24. La resistencia eléctrica R de un alambre es inversamente proporcional al cuadrado de su radio r . Estimar el porcentaje de error en la medida de R si en el radio se comete un error máximo del 5 por ciento.

25. Demostrar que un error relativo del 1% en la determinación de la longitud del radio, produce un error relativo aproximado del 2% en el cálculo del área del círculo y de la superficie de la esfera.

26. Probar que la ecuación $3x^3y - y^4 + 5x^2 + 5 = 0$ define en un entorno del punto $(1, 2)$ una función implícita derivable f tal que $f(1) = 2$. Calcular $Df(1)$, la función derivada Df y obtener la ecuación de la recta tangente a la curva plana definida por la ecuación dada en el punto $(1, 2)$.

27. Demostrar que a partir de la ecuación $e^x - 4xy + y^2 - 1 = 0$, puede definirse implícitamente en un entorno del punto $(0, 1)$ una función derivable f tal que $f(0) = 1$. Calcular $Df(0)$ y las derivadas Df y D^2f .

28. Probar que la ecuación $2x^2 - y^3 + 4xy - 2x = 0$ define en un entorno del punto $(1, -2)$ una función implícita derivable g tal que $g(-2) = 1$. Calcular $Dg(-2)$ y las derivadas Dg y D^2g .

7.7 GUÍA DE REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[Ap] APOSTOL, T.M. *Análisis Matemático*.

En el capítulo 5 de este texto se pueden encontrar, a grandes rasgos, los conceptos que han sido tratados en el capítulo precedente, aún cuando su desarrollo allí es mucho más conciso y se echan de menos cuestiones de interés como la derivación de las funciones elementales y ejemplos que ilustren los conceptos expuestos. Al final de dicho capítulo se trata la derivación de funciones vectoriales y de

funciones complejas.

[Ba] **BARTLE, R.G. y D.R. SHERBERT.** *Introducción al Análisis Matemático de una variable.* El contenido de nuestro capítulo 7 se corresponde básicamente con la primera parte del capítulo 5 (“Diferenciación”). Es de gran interés la introducción histórica que los autores presentan al principio del capítulo sobre el concepto de derivada y del Cálculo diferencial e integral; el desarrollo y secuencia de los conceptos que se incluyen son muy similares a los que hemos visto aquí, aun cuando no se incluye la derivación de las funciones elementales y se echa de menos una referencia más amplia a la diferencial de una función.

[Fe] **FERRER, J. y F. PUERTA.** *Càlcul Diferencial.* De este texto nos interesa recomendar especialmente la lectura del tema 18, dedicado a las funciones implícitas. Se inicia el tema con la definición de función definida implícitamente, que se ilustra con numerosos ejemplos muy bien seleccionados y a continuación se desarrolla el tema en el marco de las funciones vectoriales de diversas variables. Se lleva a cabo asimismo un estudio del concepto de dependencia funcional y su caracterización.

[Li] **LINÉS, E.** *Principios de Análisis Matemático.* Al igual que en temas anteriores, ésta es una de las referencias más completas y cuya lectura resulta más recomendable. La derivación de funciones se trata en el capítulo 17, en el cual se lleva a cabo una introducción al tema a partir de razonamientos geométricos, esto es, del problema de la recta tangente a una curva plana en un punto; a continuación se discute la derivabilidad de una función, las derivadas laterales y la derivada infinita. Se estudian luego las reglas de cálculo de derivadas, la derivabilidad de la función inversa y las derivadas de las funciones elementales. El esquema de desarrollo es, pues, bastante similar al que hemos utilizado aquí en el capítulo precedente; se incluyen otras cuestiones que nosotros trataremos más adelante, tales como los extremos locales y el criterio de monotonía. Contiene una excelente colección de ejercicios propuestos.

[Or] **ORTEGA, J.M.** *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.* En la primera parte del capítulo IV de este texto se trata la derivada de funciones reales de variable real y a continuación se introduce el concepto de diferencial de una función y se discuten sus propiedades. Las derivadas de las funciones elementales se desarrollan como ejemplos. Se completa el capítulo con las fórmulas de derivación, regla de la cadena y derivada de la función inversa. Tiene una buena colección de ejercicios propuestos. Se recomienda especialmente su lectura, por cuanto ésta es muy agradable y tiene la virtud de exponer las ideas de forma muy clara.

[Spv] **SPIVAK, M.** *Calculus.* De todos los textos que se comentan en esta Guía de Referencias, este excelente texto es el que trata la derivada con más detalle, extensión y profusión de comentarios ilustrativos; dedica a ello los capítulos 9, 10 y parte del 12. El capítulo 9 se dedica a definir el concepto de derivada con una introducción de tipo geométrico que justifica la definición de derivada de una función en un punto; a continuación se realiza una interpretación física de la derivada relacionándola con el concepto físico de “velocidad instantánea” de una partícula. Es interesante la lectura de la justificación de la notación clásica de la derivada ($\frac{df(x)}{dx}$), que se complementa con ejemplos ilustrativos. El capítulo 10 trata de las fórmulas de derivación y, con especial detalle, la regla de la cadena para derivación de funciones compuestas. El capítulo 12 contiene el estudio de la derivabilidad de la función inversa. Se recomienda una lectura atenta de estos capítulos, lectura que como siempre es muy amena, así como abordar la resolución de los ejercicios que contienen, todos ellos muy bien seleccionados y que complementan los conceptos que se han desarrollado.

CAPÍTULO 8

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se desarrollan las propiedades fundamentales de las funciones derivables en un intervalo de \mathbb{R} . Se empieza con los extremos de una función (apartado 8.1), estableciendo una condición necesaria a partir de la derivada y completando con una condición suficiente, una vez visto el teorema del valor medio. En el apartado 8.2 se estudian los teoremas del valor medio de Lagrange y de Cauchy; el primero (conocido también como fórmula del incremento finito), establece la relación entre la variación de una función derivable en un intervalo con la derivada en un punto interior del mismo y es uno de los teoremas más importantes del Cálculo Diferencial; el segundo es una generalización del teorema de Lagrange, motivo por el cual se le conoce también como teorema del valor medio generalizado.

En el apartado 8.3 se trata uno de los teoremas más conocidos del Cálculo Diferencial: la regla de L'Hôpital para calcular límites de indeterminaciones en las cuales intervienen funciones derivables. En el apartado 8.4 se desarrolla un tema muy importante: la aproximación local de una función derivable mediante una función polinómica, conocida como fórmula de Taylor; se trata sin duda de una de las cuestiones más importantes del Análisis Matemático y se verá cómo, a partir de esta aproximación, pueden estudiarse propiedades locales de las funciones y aplicarse al cálculo de límites de indeterminaciones.

En el apartado 8.5 se estudia la derivabilidad de las funciones definidas como límite de una sucesión de funciones derivables y de las funciones definidas como suma de una serie de funciones derivables; se estudia en particular la derivabilidad de las funciones definidas por series de potencias; el apartado se completa con el estudio del desarrollo de una función en serie de potencias en el entorno de un punto. Por último, en el apartado 8.6 se estudian algunas aplicaciones del Cálculo Diferencial de interés en el ámbito de la Ingeniería, alguna de las cuales sea ya posiblemente conocida; concretamente, se tratan algunas aplicaciones geométricas (estudio local de curvas planas) y algunas aplicaciones físicas y técnicas (cinemática, dinámica de fluidos, dinámica de poblaciones).

8.1 EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO.

En el estudio de las propiedades de las funciones derivables, el caso que en la práctica tiene mayor interés es aquel en que la función está definida en un intervalo cerrado de \mathbb{R} y es derivable en el abierto correspondiente. En este capítulo nos ceñiremos a este caso, siendo evidente cualquier generalización del mismo.

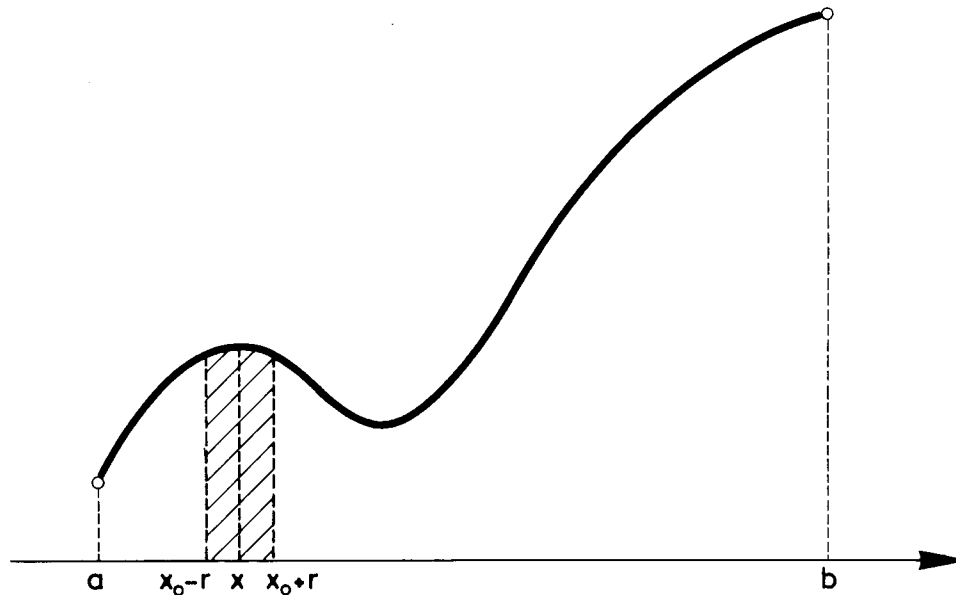


Figura 8.1. Ilustración de un máximo local de una función.

8.1.1 DEFINICIÓN. (*Extremos absolutos de una función*). Sea I un intervalo de \mathbb{R} y sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de una variable definida en ese intervalo. Se denominan *máximo absoluto de f en I* y *mínimo absoluto de f en I* los números reales M y m , si existen, definidos respectivamente por

$$M = \sup\{f(x), \text{ para todo } x \in I\}, \quad \text{y} \quad m = \inf\{f(x), \text{ para todo } x \in I\}.$$

En virtud de su definición, el máximo absoluto y el mínimo absoluto de f , si existen, son únicos. Si se cumple $M = f(x_0)$ para un $x_0 \in I$, se dice que el máximo absoluto de f se alcanza en ese punto; evidentemente, puede existir más de un punto del intervalo en el cual esto suceda. Vale una consideración análoga para el mínimo absoluto de f .

El máximo y el mínimo absolutos de una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se denominan de modo general *extremos absolutos* de la misma en el intervalo considerado. Obsérvese que si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tiene máximo absoluto, el conjunto $f(I)$ ha de ser un subconjunto de \mathbb{R} acotado superiormente de \mathbb{R} ; análogamente, si f tiene mínimo absoluto, el conjunto $f(I)$ ha de ser un subconjunto de \mathbb{R} acotado inferiormente y si f tiene ambos extremos absolutos, entonces el conjunto $f(I)$ ha de ser necesariamente un subconjunto acotado de \mathbb{R} .

8.1.2 DEFINICIÓN. (*Extremos locales o relativos de una función*). Sea $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de una variable, definida en un intervalo I de \mathbb{R} .

- Se dice que f tiene un *máximo local o relativo* en un punto $x_0 \in I$, si existe un $r > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in B(x_0; r) \cap I$ (véase la figura 8.1). Si se cumple $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in B^*(x_0; r) \cap I$, entonces el máximo local se dice que es *estricto*.
- De modo análogo, se dice que $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un *mínimo local o relativo* en un punto $x_0 \in I$, si existe un $r > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in B(x_0; r) \cap I$; si se cumple $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in B^*(x_0; r) \cap I$, entonces el mínimo local se dice que es *estricto*.
- De un modo general, los máximos y los mínimos locales de f en un intervalo I se denominan *extremos locales o relativos* de la función, respecto de dicho intervalo. Por otra parte, es evidente que los extremos absolutos de una función, si existen, son también extremos locales, pero no a la inversa.

8.1.3 EJEMPLO.

- 1) La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ alcanza su mínimo absoluto en el origen y no tiene máximo absoluto, a menos que su dominio se restrinja a un subconjunto acotado de \mathbb{R} (véase la figura 8.2(a)).
- 2) La función $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, tiene máximo absoluto $M = 1$ que se alcanza en el punto $x_0 = 1$, no tiene mínimo absoluto y tampoco tiene ningún mínimo relativo (véase la figura 8.2(b)).
- 3) La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, no tiene extremos absolutos ni extremos relativos (véase la figura 8.2(c)).
- 4) La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos x$ tiene máximos relativos en los puntos $x_n = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, en los cuales se alcanza el máximo absoluto de la función $M = 1$; tiene también mínimos relativos en los puntos $x_m = (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$, en los cuales se alcanza el mínimo absoluto de $f, m = -1$.
- 5) Las funciones exponencial real (exp) y logaritmo neperiano (ln) carecen de extremos absolutos y de extremos relativos en sus respectivos dominios, \mathbb{R} y \mathbb{R}_0^+ .

8.1.4 DEFINICIÓN. (*Punto crítico de una función derivable*). Sea $f:]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]a, b[$; se denomina *punto crítico* de f todo punto $x_0 \in]a, b[$ tal que $Df(x_0) = 0$.

8.1.5 PROPOSICIÓN. (*Condición necesaria de extremo relativo*). Sea $f:]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]a, b[$; todo extremo local de f que se alcance en un punto de $]a, b[$ es también punto crítico de f ; el recíproco no es cierto.

Demostración:

Si x_0 es un punto en el que f tiene un extremo local, deberemos probar que se cumple $Df(x_0) = 0$. Supondremos que el extremo local de f en x_0 se trata de un mínimo; en el caso de un máximo el razonamiento es completamente análogo. Por definición, existe un $r > 0$ tal que para todo $x \in B(x_0; r) \subset]a, b[$, se cumple $f(x_0) \leq f(x)$, esto es, $f(x) - f(x_0) \geq 0$. Entonces, cualquiera que sea x tal que $x_0 < x < x_0 + r$, se cumple $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$; por otra parte, cualquiera que sea x tal que $x_0 - r < x < x_0$, se tiene $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. La derivabilidad de f en el punto x_0 implica la existencia del límite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, el cual necesariamente debe ser $Df(x_0) = 0$. Para ver que el recíproco no es cierto, esto es, que un punto crítico no necesariamente debe ser extremo local, basta considerar la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (véase la figura 8.2(c)); el punto $x_0 = 0$ es un punto crítico de f y no obstante la función no tiene extremo local en él (de hecho, la función es estrictamente creciente en su dominio). ■

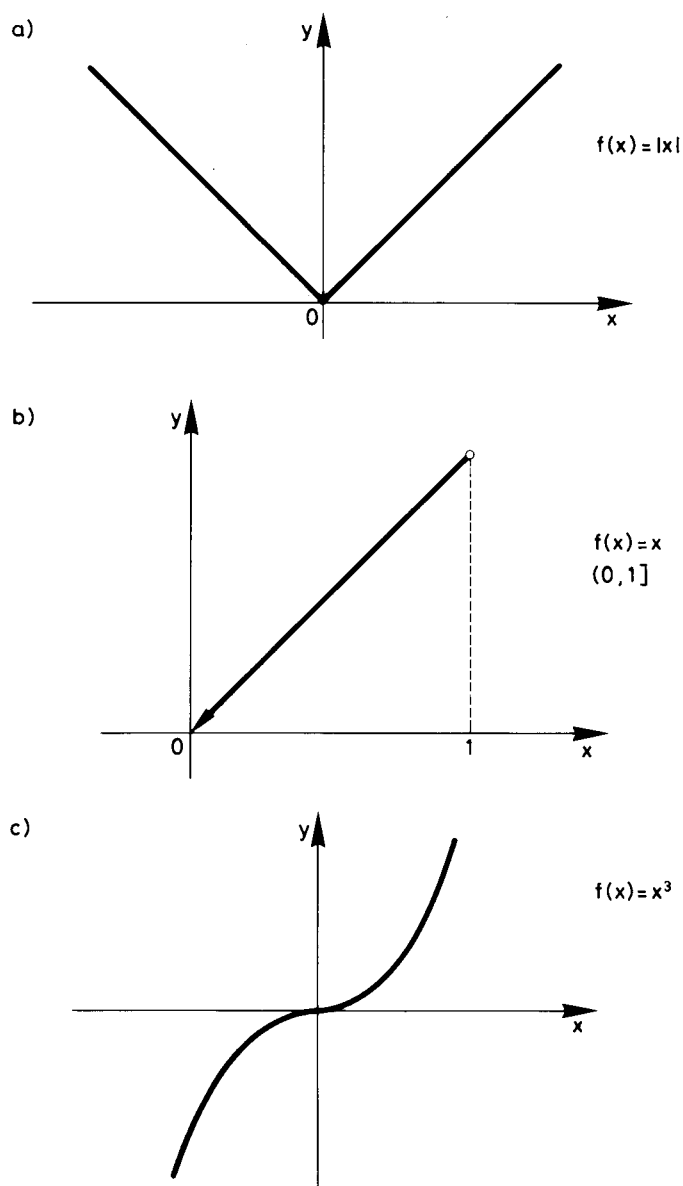


Figura 8.2. Ilustración de las funciones del ejemplo 8.1.3.

8.1.6 OBSERVACIÓN. (*Determinación de los extremos relativos de una función*). A la vista del resultado de la proposición anterior, para determinar los extremos relativos de una función derivable $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lo primero que hay que hacer es determinar sus puntos críticos. Pero hay otras consideraciones que vamos a comentar.

Puede darse el caso de que en un punto x_0 la función f tenga un extremo local y, no obstante, la

función no sea derivable en dicho punto (por ejemplo, la función $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ en el origen); esto pone de manifiesto que, para localizar los extremos de una función, hay que investigar también los puntos del dominio en los cuales la función no es derivable. Pero cabe otro caso: la existencia de un extremo local en uno de los extremos del intervalo de definición de la función, que no necesariamente sea punto crítico; tal caso sería, por ejemplo, la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{2/3}$ para todo $x \in [0, 1]$ en el origen.

En definitiva, la determinación de los extremos relativos de una función derivable $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ debe hacerse mediante los pasos siguientes:

- 1) estudiar los puntos críticos de f en el intervalo $]a, b[$;
- 2) estudiar los puntos del intervalo $]a, b[$ en los cuales la función no es derivable;
- 3) estudiar los extremos del intervalo $[a, b]$ en el que esté definida la función.

8.1.7 EJEMPLO. Considérese la función definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$, $x \in [-6, 8]$, cuya gráfica se representa en la figura 8.3. La función derivada de f es:

$$Df(x) = \frac{1}{3}(x^2(6-x))^{-2/3}(2x(6-x) + x^2(-1)) = \frac{4-x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}, \quad x \neq 0, x \neq 6.$$

La derivada de f se anula en el punto $x_1 = 4$, en el cual la función tiene un máximo local. La función alcanza el máximo absoluto en el extremo inferior de su dominio y alcanza el mínimo absoluto en el extremo superior de dicho intervalo. La función no es derivable en los puntos $x_2 = 0$ y $x_3 = 6$; en el primero, la función tiene un mínimo local y, por el contrario, en el punto x_3 la función no presenta extremo relativo de ningún tipo.

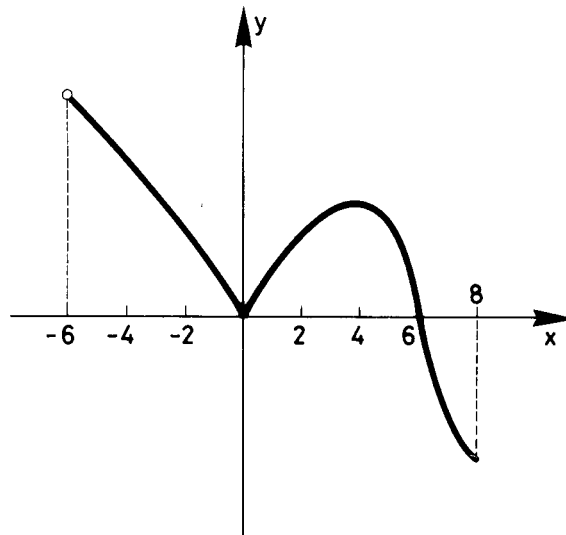


Figura 8.3. Gráfica de la función del ejemplo 8.1.7

8.2 TEOREMAS DEL VALOR MEDIO.

En este apartado se estudian unos teoremas muy importantes que caracterizan las propiedades de las funciones derivables en intervalos abiertos de \mathbb{R} y que genéricamente se denominan *teoremas del valor medio*; establecen la existencia de al menos un punto interior del intervalo con unas propiedades determinadas. Se constatará más adelante la importancia de todos estos teoremas por sus aplicaciones y por las conclusiones que permiten deducir.

8.2.1 TEOREMA. (*De Rolle.*) Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio, derivable en el intervalo $]a, b[$ y tal que $f(a) = f(b)$; existe entonces al menos un punto $\xi \in]a, b[$ tal que $Df(\xi) = 0$.

Demostración:

- Si la función es constante en el intervalo, entonces cualquier punto cumple la condición.
- Si la función no es constante, en virtud del teorema del máximo y del mínimo (5.3.10), f tiene máximo y mínimo absolutos en dicho intervalo. Uno de esos extremos debe darse en un punto $\xi \in]a, b[$, con lo que la derivabilidad de f y en virtud de la proposición 8.1.5, dicho extremo debe ser un punto crítico y por lo tanto debe cumplirse $Df(\xi) = 0$. ■

La interpretación geométrica del teorema es la siguiente: si una función es continua y derivable en un intervalo y toma el mismo valor en los extremos de su dominio, existe al menos un punto en el cual la recta tangente a la gráfica es horizontal; véase la figura 8.4.

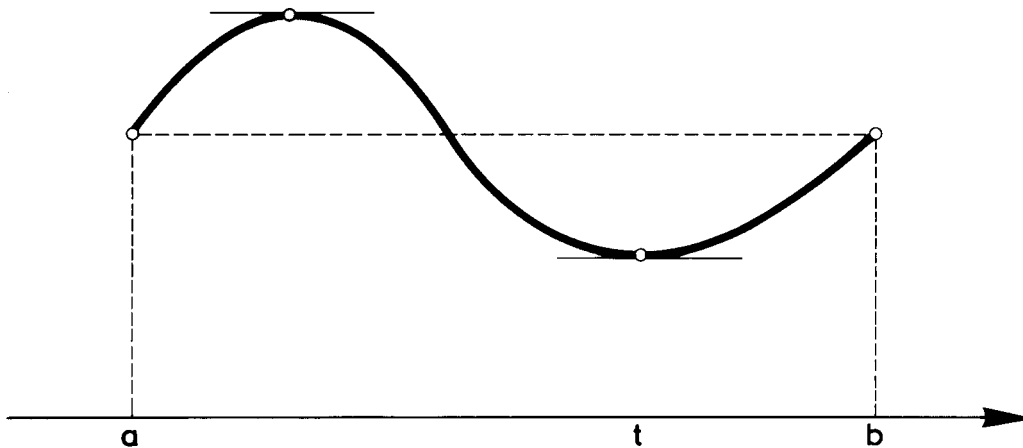


Figura 8.4. Interpretación geométrica del teorema de Rolle.

8.2.2 OBSERVACIÓN. Debemos destacar que la hipótesis de derivabilidad de f en $]a, b[$ es esencial para poder afirmar la conclusión del teorema anterior; en la figura 8.5 se representa la gráfica de una función que no tiene derivada nula en ningún punto del intervalo, con lo que aparentemente contradice el teorema de Rolle. Obsérvese que dicha función no cumple la hipótesis de derivabilidad en todo el intervalo $]a, b[$, con lo que no es cierta tal contradicción.

Una forma habitual de escribir el intervalo de definición de una función es utilizando la notación incremental $[a, a + h]$; en este caso, un punto del intervalo $]a, a + h[$ se designa por $\xi = a + \theta h$, $0 < \theta < 1$. Con ello, el teorema anterior se enuncia así: si $f: [a, a + h] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en su dominio, es derivable

en el intervalo $]a, a + h[$ y se cumple $f(a) = f(a + h)$, entonces existe al menos un $\theta \in]0, 1[$ tal que $Df(a + \theta h) = 0$.

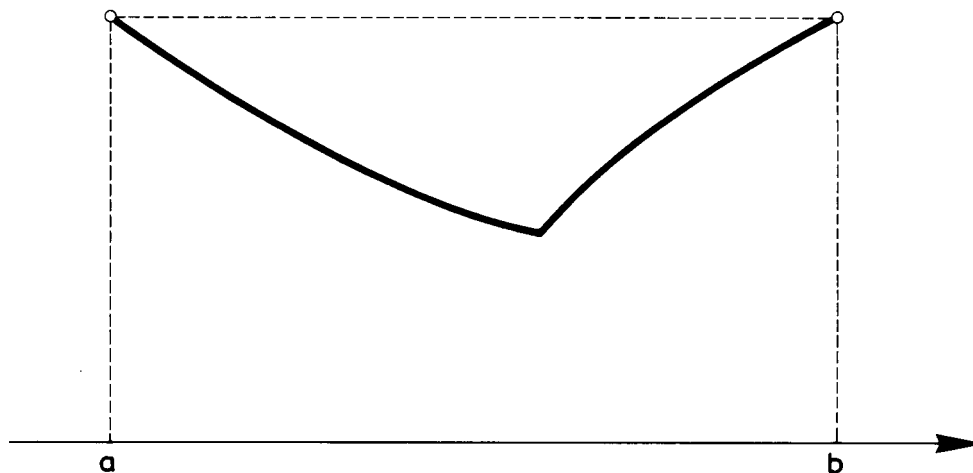


Figura 8.5. Observación al teorema de Rolle.

Cuando no se cumple necesariamente la condición $f(a) = f(b)$, puede deducirse la existencia de un punto de $]a, b[$ con otra propiedad de interés; el resultado se conoce como *teorema de Lagrange* y es una generalización del teorema de Rolle.

8.2.3 TEOREMA. (*Del valor medio de Lagrange o fórmula del incremento finito*). Sea una función $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$; existe entonces al menos un punto $\xi \in]a, b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = (b - a)Df(\xi).$$

Demostración:

Consideremos la función $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = (b - a)f(x) - (f(b) - f(a))x, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Por los criterios de continuidad esta función es continua en $[a, b]$ y, en virtud de los criterios de derivabilidad de funciones, es derivable en $]a, b[$; además, cumple

$$\varphi(a) = bf(a) - af(b); \quad \varphi(b) = -af(b) + bf(a),$$

esto es, $\varphi(a) = \varphi(b)$. Así pues, la función φ verifica las hipótesis del teorema de Rolle, con lo que puede afirmarse la existencia de al menos un punto $\xi \in]a, b[$, tal que $D\varphi(\xi) = 0$. Pero la derivada de φ es la función definida por

$$D\varphi(x) = (b - a)Df(x) - (f(b) - f(a)), \text{ para todo } x \in]a, b[,$$

con lo que finalmente resulta $0 = (b - a)Df(\xi) - (f(b) - f(a))$, como se quería probar. ■

La interpretación geométrica del teorema es la siguiente: existe por lo menos un punto $a < \xi < b$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(\xi, f(\xi))$, es paralela a la recta que une los puntos

$(a, f(a))$ y $(b, f(b))$; véase la figura 8.6, en la cual se muestra una función con dos puntos de su gráfica en la que se cumple la condición.

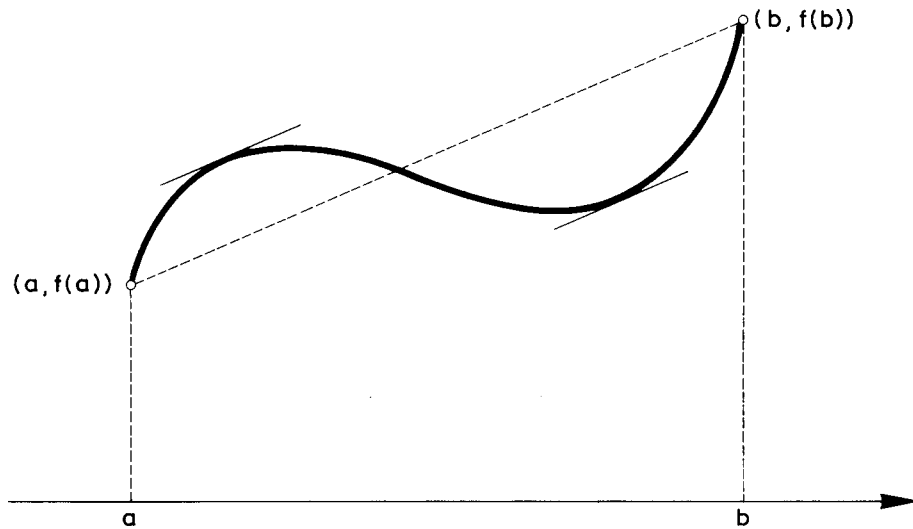


Figura 8.6. Interpretación geométrica del teorema de Lagrange.

8.2.4 OBSERVACIÓN. (*Aplicación de la fórmula del incremento finito a cálculos aproximados con funciones derivables*). Como se irá viendo en apartados sucesivos, el teorema de Lagrange (8.2.3) tiene numerosas aplicaciones; a continuación vamos a ver una de ellas: la que se refiere a cálculos aproximados en los que intervienen funciones derivables y que permite obtener una cota superior del error cometido al efectuar la aproximación.

Utilizando la notación incremental, el teorema de Lagrange se enuncia como sigue: si $f: [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en su dominio y es derivable en $]a, a+h[$, existe por lo menos un $\theta \in]0, 1[$ tal que $f(a+h) - f(a) = hDf(a+\theta h)$, esto es, $f(a+h) = f(a) + hDf(a+\theta h)$, con $0 < \theta < 1$. Cualquier modificación en alguno de estos elementos convierte la igualdad en una desigualdad, de modo que si λ_1 y λ_2 son una cota inferior y superior, respectivamente, de la función Df en el intervalo $]a, a+h[$, esto es, si se cumple $\lambda_1 \leq Df(x) \leq \lambda_2$, para todo $x \in]a, b[$, entonces $f(a) + h\lambda_1 \leq f(a+h) \leq f(a) + h\lambda_2$, de donde puede escribirse la aproximación

$$f(a+h) \approx f(a) + h \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

la cual conlleva un error acotado por $h \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$.

En particular, si Df es una función monótona creciente y f es derivable lateralmente en los extremos del intervalo, se cumplirá:

$$D_+f(a) \leq Df(x) \leq D_-f(a+h), \text{ para todo } x \in]a, a+h[.$$

Si Df es monótona decreciente, entonces

$$D_-f(a+h) \leq Df(x) \leq D_+f(a), \text{ para todo } x \in]a, a+h[.$$

8.2.5 EJEMPLO. Se desea aplicar lo anterior al cálculo aproximado de $\arctan(1/2)$ y acotar el error cometido en dicha aproximación. En primer lugar, comprobaremos que podemos aplicar la fórmula del incremento finito: sabemos que la función $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y derivable en su dominio, luego también lo será su restricción a un intervalo; además, se cumple $\arctan 0 = 0$. En consecuencia, puede aplicarse la fórmula del incremento finito a esta función en el intervalo $[0, 1/2]$ y afirmar que existe al menos un punto $t \in]0, 1/2[$ tal que $\arctan(1/2) - \arctan 0 = \frac{1}{2} D \arctan t$, esto es, tal que $\arctan(1/2) = \frac{1}{2(1+t^2)}$. Ahora hay que acotar la derivada $D \arctan$ en el intervalo $[0, 1/2]$ para afinar la aproximación; puesto que $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, esta función es estrictamente decreciente en \mathbb{R}^+ , con lo que en el intervalo $[0, 1/2]$ se cumple:

$$\frac{1}{1+(1/2)^2} < D \arctan(t) < \frac{1}{1+0}, \text{ para todo } 0 < t < 1/2.$$

En consecuencia, puede afirmarse que

$$\frac{1}{2(1+(1/2)^2)} = 0.4 < \arctan(1/2) < \frac{1}{2} = 0.5,$$

con lo que finalmente puede establecerse la aproximación $\arctan(1/2) \approx 0.45$, con un error inferior a 0.05.

8.2.6 EJEMPLO. Vamos a calcular aproximadamente $\ln(102)$, sabiendo que $\ln(100) = 4.60517$. Teniendo en cuenta que la función \ln es continua y derivable en $]0, +\infty[$, aplicaremos la fórmula del incremento finito a esta función en el intervalo $[100, 102]$, pudiendo entonces afirmar que existe al menos un punto $t \in]100, 102[$ tal que $\ln(102) - \ln(100) = 2 D \ln(t) = 2 \cdot \frac{1}{t}$. Puesto que la derivada $D \ln x = \frac{1}{x}$, $x > 0$ es estrictamente decreciente en \mathbb{R}_0^+ , puede afirmarse que

$$\frac{1}{102} < D \ln(t) < \frac{1}{100}, \text{ para todo } t \in]100, 102[.$$

con lo que

$$\ln(100) + 2 \cdot \frac{1}{102} < \ln(102) < \ln(100) + 2 \cdot \frac{1}{100}.$$

Así pues, se tiene la aproximación

$$\ln(102) \approx \ln(100) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{100} + \frac{2}{102} \right) = 4.62497,$$

con un error acotado mediante $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{102} \right) < 10^{-4}$.

8.2.7 EJEMPLO. (*Aplicación de la fórmula del incremento finito a la obtención de desigualdades funcionales*). Además de su aplicación a cálculos numéricos aproximados, la fórmula del incremento finito puede aplicarse para obtener desigualdades con funciones derivables, tal como se muestra a continuación.

- 1) Sea la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in A$. Esta función es continua y derivable en su dominio; si $x > 0$ es un número real estrictamente positivo cualquiera, aplicando la fórmula del incremento finito a f en el intervalo $[0, x] \subset A$ se obtiene

$$\ln(1+x) - \ln 1 = x \frac{1}{1+t}, \quad \text{con } 0 < t < x.$$

Puesto que la derivada $D \ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in A$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, x]$, se tendrá $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+t} < 1$, con lo que se obtiene la desigualdad

$$\frac{x}{1+x} < x \frac{1}{1+t} = \ln(1+x) < x,$$

cualquiera que sea $x > 0$.

- 2) Aplicando un razonamiento análogo a la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$, se obtiene por un lado que $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$, cualquiera que sea $x > 0$, y por otro que $x < \arctan x < \frac{x}{1+x^2}$, cualquiera que sea $x < 0$.

Además de la aplicación a cálculos aproximados, que acabamos de ilustrar en los ejemplos anteriores, la fórmula del incremento finito puede aplicarse para caracterizar la monotonía y los extremos locales de funciones derivables en un intervalo, tal como se ve a continuación.

8.2.8 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio y derivable en $]a, b[$; se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) Si la derivada tiene signo constante en todo punto de $]a, b[$, la función es monótona en $]a, b[$ cumpliéndose que
 - * si $Df(x) \geq 0$ para todo $x \in]a, b[$ entonces f es monótona creciente;
 - * si $Df(x) \leq 0$ para todo $x \in]a, b[$ entonces f es monótona decreciente.
- 2) Si las desigualdades anteriores se cumplen en sentido estricto, el crecimiento o decrecimiento de la función es también estricto.
- 3) Si la derivada se anula en todo punto de $]a, b[$, entonces f es constante en dicho intervalo.

Demostración:

- 1) Supondremos que $Df(x) \geq 0$ para todo $x \in]a, b[$; el otro caso se razona análogamente. Sean dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in]a, b[$, tales que $x_1 < x_2$; la restricción de f al intervalo $[x_1, x_2]$ es continua y derivable, con lo que puede aplicarse el teorema de Lagrange a f en dicho intervalo, obteniéndose

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)Df(t), \quad \text{con } x_1 < t < x_2.$$

Pero $Df(t) \geq 0$, con lo cual

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \iff f(x_2) \geq f(x_1),$$

lo que prueba la monotonía de f en $]a, b[$ dada la arbitrariedad de los puntos x_1 y x_2 .

- 2) Inmediato.
- 3) Evidente. ■

8.2.9 OBSERVACIÓN.

- Se cumple un enunciado recíproco de 1) de la proposición anterior, esto es,
 - * si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $]a, b[$ y es monótona creciente en dicho intervalo, se cumple entonces que $Df(x) \geq 0$ para todo $x \in]a, b[$;
 - * si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $]a, b[$ y es monótona decreciente en dicho intervalo, se cumple entonces que $Df(x) \leq 0$ para todo $x \in]a, b[$.
- No es cierto, sin embargo, el recíproco del enunciado 2), esto es, que si una función es estrictamente creciente (respectivamente, decreciente) y derivable en $]a, b[$, se verifique $Df(x) > 0$ (respectivamente, $Df(x) < 0$) para todo $x \in]a, b[$. En efecto, basta considerar, por ejemplo, la función $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, que es estrictamente creciente en su dominio, es derivable en $] - 1, 1[$ y no obstante se cumple $Df(0) = 0$. Sin embargo, se cumple que si $Df(x) \geq 0$ y únicamente se anula la derivada en un conjunto finito de puntos, entonces f es estrictamente creciente (razónense los detalles como ejercicio).
- El recíproco de 3) es trivialmente cierto.
- Se ha visto en 8.2.8 que si en todo punto de un intervalo abierto y acotado la derivada es positiva, entonces la función es creciente en dicho intervalo. Sin embargo, no debe pensarse que si en un punto la derivada es estrictamente positiva, entonces la función es creciente en dicho punto, es decir, existe un entorno en el cual la función es creciente. En efecto, basta considerar la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} f(x) = x + 2x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Esta función es derivable en su dominio; en particular, en el origen se cumple

$$Df(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1 > 0.$$

En cualquier otro punto $x \neq 0$ se verifica

$$Df(x) = 1 + 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Si se consideran los puntos $p_n = \frac{1}{2\pi n}$, $n = 1, 2, \dots$, se cumple

$$Df(p_n) = 1 + 0 + (-2) = -1 < 0 \text{ para todo } n = 1, 2, \dots;$$

si se consideran los puntos $q_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$, $n = 1, 2, \dots$, se cumple entonces

$$Df(q_n) = 1 + 0 + 2 = 3 > 0 \text{ para todo } n = 1, 2, \dots$$

Cualquiera que sea $r > 0$ todo entorno $B(0; r)$ del origen contiene puntos p_n y q_n , con lo cual la derivada de f no tiene signo constante en dicho entorno. En definitiva, la función no es monótona en ningún entorno del origen.

8.2.10 COROLARIO. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio y derivable en $]a, b[$; se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) si $x_0 \in]a, b[$ es un punto crítico de f , entonces la función tiene un máximo local en dicho punto si existe $r > 0$ tal que $Df(x) > 0$ para todo $x \in]x_0 - r, x_0]$ y $Df(x) < 0$ para todo $x \in [x_0, x_0 + r[$;
- 2) si $x_0 \in]a, b[$ es un punto crítico de f , entonces la función tiene un mínimo local en dicho punto, si existe $r > 0$ tal que $Df(x) < 0$ para todo $x \in]x_0 - r, x_0]$ y $Df(x) > 0$ para todo $x \in [x_0, x_0 + r[$.

Demostración:

Inmediata, teniendo presente las definiciones de máximo y de mínimo relativos y lo establecido en la proposición 8.2.8. ■

8.2.11 COROLARIO. Sean dos funciones $f, g:]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en su dominio y derivables en $]a, b[$; si se cumple $Df(x) = Dg(x)$ para todo $x \in]a, b[$, entonces existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$, para todo $x \in]a, b[$.

Demostración:

Inmediata, aplicando la proposición 8.2.8 a la función $f - g$. ■

Vamos a generalizar el teorema del valor medio de Lagrange, considerando dos funciones derivables en un intervalo abierto $]a, b[\subset \mathbb{R}$; el resultado es el *teorema de Cauchy* que se ve a continuación.

8.2.12 TEOREMA. (*De Cauchy o del valor medio generalizado.*)

- 1) Sean $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales continuas en $]a, b[$ y derivables en $]a, b[$; existe por lo menos un punto $t \in]a, b[$ tal que

$$(f(b) - f(a))Dg(t) = (g(b) - g(a))Df(t).$$

- 2) Si además se cumple $Dg(x) \neq 0$, para todo $x \in]a, b[$ y $g(a) \neq g(b)$, entonces

$$\frac{Df(t)}{Dg(t)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \quad a < t < b.$$

Demostración:

- 1) Consideremos la función $\varphi:]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x);$$

por su definición y en virtud de los criterios de continuidad, φ es continua en su dominio y derivable en $]a, b[$, cumpliéndose además que $\varphi(a) = \varphi(b)$; en consecuencia y por el teorema de Rolle, existe un $t \in]a, b[$ tal de $D\varphi(t) = 0$. Pero la derivada de φ es la función definida por

$$D\varphi(x) = (f(b) - f(a))Dg(x) - (g(b) - g(a))Df(x), \quad \text{para todo } x \in]a, b[,$$

de donde se obtiene la igualdad enunciada.

- 2) La segunda igualdad es evidente a partir de las propiedades adicionales de la función g . ■

8.2.13 OBSERVACIÓN. Queremos comentar que se podría haber realizado la demostración del teorema anterior inmediatamente después del teorema de Rolle, pues de hecho 8.2.12 se demuestra aplicando únicamente dicho teorema. En tal caso, el teorema del valor medio de Lagrange resulta como un caso particular del teorema de Cauchy, simplemente tomando como función g la función coordenada de \mathbb{R} .

Si una función es derivable en un intervalo abierto y acotado, su derivada no tiene por qué ser una función continua en dicho intervalo. Sin embargo, pueden establecerse dos propiedades importantes que vamos a ver a continuación: la primera de ellas hace referencia a los valores intermedios de la derivada en el intervalo de derivabilidad; la segunda es una caracterización del tipo de discontinuidad de la derivada.

8.2.14 TEOREMA. (*De los valores intermedios de la derivada*). Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio y derivable en $]a, b[$; si x_1, x_2 son dos puntos cualesquiera de $]a, b[$, la derivada de f toma todos los valores intermedios entre sus valores en dichos puntos.

Demostración:

Sean $x_1, x_2 \in]a, b[$ dos puntos cualesquiera y supongamos que $x_1 < x_2$ y que $Df(x_1) < Df(x_2)$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $Df(x_1) < \alpha < Df(x_2)$ un valor intermedio cualquiera entre ambas derivadas. Definamos la función $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mediante $\varphi(x) = f(x) - \alpha x$, para todo $x \in [a, b]$; esta función es continua en el intervalo $[a, b]$ y es derivable en el intervalo $]a, b[$, verificándose que $D\varphi(x) = Df(x) - \alpha$, para todo $x \in]a, b[$, y, en particular, que $D\varphi(x_1) = Df(x_1) - \alpha < 0$, $D\varphi(x_2) = Df(x_2) - \alpha > 0$. Pero, por definición de derivada de una función en un punto, se tiene

$$D\varphi(x_1) = \lim_{t \rightarrow x_1} \frac{\varphi(t) - \varphi(x_1)}{t - x_1} < 0,$$

con lo que debe existir $t_1 > x_1$ tal que $\varphi(t_1) < \varphi(x_1)$; análogamente se concluye la existencia de $t_2 < x_2$ tal que $\varphi(t_2) < \varphi(x_2)$. En consecuencia, la restricción de φ al intervalo compacto $[x_1, x_2] \subset]a, b[$ alcanza un mínimo absoluto en algún punto ξ interior de dicho intervalo y, puesto que φ es derivable, debe tratarse de un punto crítico, esto es, debe cumplirse $D\varphi(\xi) = 0$, con lo que finalmente se tiene $Df(\xi) = \alpha$, como se quería probar. ■

8.2.15 COROLARIO. Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio y derivable en el intervalo $]a, b[$; su derivada Df no puede tener discontinuidades de salto en dicho intervalo.

Demostración:

Inmediata a partir de la proposición anterior. ■

8.3 REGLAS DE L'HÔPITAL.

8.3.1 En el capítulo 4 se han establecido los teoremas que relacionan los límites de funciones y las operaciones con ellas y se han definido las formas indeterminadas o indeterminaciones (véase el apartado 4.3). En este apartado se estudia una metodología para calcular límites de formas indeterminadas cuando en ellas intervienen funciones derivables; el conjunto de resultados a este respecto se conoce como “reglas de L'Hôpital”.

Se estudian detalladamente las indeterminaciones $0/0$ y ∞/∞ , esto es, el cálculo del límite en un punto de un cociente de funciones derivables, cuando ambas tienen límite 0 o ∞ en dicho punto; el resto de formas indeterminadas se reducen a las anteriores mediante simples transformaciones algebraicas.

(A) Formas indeterminadas $0/0$.

8.3.2 PROPOSICIÓN. Sean $f, g: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en su dominio y derivables en el intervalo $]a, b[$ y que cumplan las propiedades siguientes

i) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$

- ii) $Dg(x) \neq 0$, para todo $x \in]a, b[$,
 iii) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = L$ ($L \in \overline{\mathbb{R}}$).

En estas condiciones, se cumple: $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Demostración:

Se dividirá en dos partes, según que sea $L \in \mathbb{R}$ o bien $L = \infty$.

- 1) El límite L es finito. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, la hipótesis iii) permite afirmar que existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in]a, a + \delta[$, entonces se cumple $\left| \frac{Df(x)}{Dg(x)} - L \right| < \varepsilon$. Sean dos puntos distintos cualesquiera $x, y \in]a, a + \delta[$ y supongamos que $x < y$; aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a las funciones f y g en el intervalo $[x, y]$, puede afirmarse que existe $t \in]x, y[$ (recuérdese que Dg es no nula en $]a, b[$ y que, en consecuencia, puede afirmarse que si $x \neq y$, entonces $g(x) - g(y) \neq 0$) tal que $\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{Df(t)}{Dg(t)}$; pasando al límite en el punto a por la derecha, se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} = \frac{Df(t)}{Dg(t)}, \quad a < t < y < a + \delta,$$

con lo que puede afirmarse que $\left| \frac{f(y)}{g(y)} - L \right| < \varepsilon$, $a < y < a + \delta$, lo que completa la demostración de este caso.

- 2) El límite L es infinito. Se supondrá que se cumple $L = -\infty$; si se cumple $L = +\infty$, el razonamiento es completamente análogo y los detalles se proponen como ejercicio. Supongamos, pues, que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = -\infty$; entonces, cualquiera que sea $k \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que $\frac{Df(x)}{Dg(x)} < k$, para todo $x \in]a, a + \delta[$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ números reales arbitrarios y tales que $[x, y] \subset]a, a + \delta[$; aplicando entonces el teorema del valor medio de Cauchy a las funciones f y g en el intervalo $[x, y]$, puede afirmarse que existe un $t \in]x, y[$ tal que $\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{Df(t)}{Dg(t)} < k$; pasando al límite en el punto a por la derecha, se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} \leq k, \quad \text{para todo } y \in]a, a + \delta[,$$

es decir, $\lim_{y \rightarrow a^+} \frac{f(y)}{g(y)} = -\infty$, con lo que la proposición queda completamente probada. ■

La proposición anterior es válida también cuando el límite se calcula en el extremo superior del intervalo, resultado que se enuncia a continuación.

8.3.3 PROPOSICIÓN. Sean $f, g: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en su dominio y derivables en el intervalo $]a, b[$ y tales que cumplen las propiedades siguientes

- i) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$
 ii) $Dg(x) \neq 0$, para todo $x \in]a, b[$,
 iii) $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = L$ ($L \in \overline{\mathbb{R}}$).

En estas condiciones, se cumple $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Demostración:

Completamente análoga a la de la proposición anterior. ■

A partir de las dos proposiciones anteriores, es inmediato considerar el caso del límite en un punto cualquiera del intervalo de derivabilidad de las funciones.

8.3.4 PROPOSICIÓN. Sean $f, g:]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en su dominio y derivables en el intervalo $]a, b[$ y tales que

- i) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$
- ii) $Dg(x) \neq 0$, para todo $x \in]a, b[$,
- iii) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = L$ ($L \in \overline{\mathbb{R}}$).

En estas condiciones, se cumple $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Demostración:

Es suficiente aplicar las dos proposiciones anteriores en los intervalos $]a, c[$ y $]c, b[$. ■

En las proposiciones anteriores, las funciones consideradas eran derivables en un intervalo abierto y acotado de \mathbb{R} ; es conveniente ampliar esta condición y considerar el caso en el cual el intervalo no es acotado, tal como se enuncia en la proposición que sigue.

8.3.5 PROPOSICIÓN. Sean $f, g:]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas y derivables en su dominio, que cumplen las siguientes propiedades

- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$
- ii) $Dg(x) \neq 0$, para todo $x \in]a, +\infty[$,
- iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = L$ ($L \in \overline{\mathbb{R}}$).

En estas condiciones, se cumple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

(Se tiene un enunciado análogo al considerar funciones derivables en $] - \infty, a[$).

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

8.3.6 EJEMPLO.

- 1) En virtud de la regla de L'Hôpital se cumple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, puesto que se verifica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D \text{sen } x}{Dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.
- 2) Se cumple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{3x - x^2} = \frac{2}{3}$, puesto que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D \text{sen } 2x}{D(3x - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{3 - 2x} = \frac{2}{3}$, en virtud de la regla de L'Hôpital.

- 3) El límite $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} \operatorname{sen} ax}{e^{bx} \operatorname{sen} bx}$, siendo $a, b \in \mathbb{R}_0$ y $a \neq b$, puede calcularse aplicando la regla de L'Hôpital, resultando $L = a/b$, puesto que

$$D(e^{ax} \operatorname{sen} ax)(0) = (ae^{ax} \operatorname{sen} ax + ae^{ax} \cos ax)(0) = a.$$

- 4) Para calcular el límite $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{e^x - 1}$, habrá que precisar antes que nada de qué función se trata en el numerador, pues el denominador está claro que es la función definida por $g(x) = e^x - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si suponemos que en el numerador tenemos la función definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, entonces se cumplen las hipótesis de la regla de L'Hôpital, pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0,$$

es decir, la función f es derivable en el origen (que lo es en \mathbb{R}_0 es inmediato por los criterios de derivabilidad); la función g también es derivable en su dominio (criterios de derivabilidad), su derivada es no nula en \mathbb{R} y, finalmente, se cumple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Df(x)}{Dg(0)} = \frac{0}{1} = 0$, con lo que $L = 0$.

8.3.7 EJEMPLO. En algunos casos debe aplicarse el método más de una vez para llegar al resultado final; todo ello, viendo que se cumplen en cada paso las hipótesis de la regla de L'Hôpital.

- 1) Para calcular el límite $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x + e^{-x} - 2}$, designando por $f(x) = 1 - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = e^x + e^{-x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$, se cumple $Df(0) = Dg(0) = 0$, esto es, el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Df(x)}{Dg(x)}$ es, de nuevo, indeterminado. Designando por $F(x) = Df(x)$, $x \in \mathbb{R}$ y $G(x) = Dg(x)$, $x \in \mathbb{R}$, se cumple que estas funciones son derivables (criterios de derivabilidad), la derivada $DG(x) = e^x + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ es no nula en su dominio y, por último, se cumple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{DF(x)}{DG(x)} = \frac{1}{2}$, con lo que, en virtud de la regla de L'Hôpital, puede afirmarse que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{1}{2}$, lo que, teniendo en cuenta la definición de las funciones F y G y aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital, permite concluir finalmente que $L = 1/2$.

En la práctica, la aplicación de la regla de l'Hôpital se hace realizando consecutivamente las aplicaciones sucesivas que se requieran:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}.$$

- 2) Para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$, deberá aplicarse también consecutivamente la regla de L'Hôpital; en efecto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x} = 0.$$

8.3.8 OBSERVACIÓN.

- Para aplicar la regla de l'Hôpital debe verificarse que se cumplen las hipótesis correspondientes, esto es, que los cocientes son realmente formas indeterminadas, las funciones son derivables, la derivada

del denominador no se anula en un entorno del punto y , finalmente, que el cociente de derivadas tiene límite.

- Debe notarse asimismo, que no sería correcto deducir la existencia del límite $L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Df(x)}{Dg(x)}$, a partir de que se cumpliera $L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Baste para ello observar que se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \right) = 0 \cdot 1 = 0,$$

mientras que, por otra parte, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\cos x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

no existiendo el segundo de los límites.

(B) Formas indeterminadas ∞/∞ .

8.3.9 PROPOSICIÓN. Sean $f, g: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en su dominio y derivables en el intervalo $]a, b[$ y tales que

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$,
- $Dg(x) \neq 0$, para todo $x \in]a, b[$,
- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

En estas condiciones, se cumple $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Demostración:

- 1) El límite L es finito. En virtud de la hipótesis i), existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$, para todo $x \in]a, a + \delta[$; si tomamos un intervalo $[x, y] \subset]a, a + \delta[$, en virtud del teorema de Cauchy, existe $t \in]x, y[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{Df(t)}{Dg(t)};$$

el primer miembro puede escribirse

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}.$$

Con ello, la primera igualdad puede ponerse en la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Df(t)}{Dg(t)} \cdot \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}.$$

Fijando el punto y y pasando al límite cuando $x \rightarrow a^+$, se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left(1 - \frac{f(y)}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a^+} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)} \right) = 1,$$

con lo cual $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{Df(t)}{Dg(t)} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1 - \frac{g(x)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x)}{f(x)}} \right) = L \cdot 1 = L$.

- 2) El límite es $L = +\infty$. En este caso se verifica $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{Dg(x)}{Df(x)} = 0$ y, en virtud del apartado anterior, se obtiene que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, con lo que finalmente resulta $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, lo que completa la demostración. ■

Análogamente al caso de las formas indeterminadas $0/0$, la proposición anterior debe extenderse al caso en que el límite se calcula en el extremo superior del intervalo, al caso en que el límite se calcula en un punto interior del intervalo y, por último, cuando el intervalo no es acotado. En todos estos casos, cuyos enunciados se ven a continuación, los detalles de la demostración correspondiente se proponen como ejercicio.

8.3.10 PROPOSICIÓN. Sean $f, g: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en su dominio y derivables en el intervalo $]a, b[$ y tales que

- i) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty$,
- ii) $Dg(x) \neq 0$, para todo $x \in]a, b[$,
- iii) $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = L$ ($\in \overline{\mathbb{R}}$).

En estas condiciones, se cumple $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

8.3.11 PROPOSICIÓN. Sean $f, g: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en su dominio y derivables en el intervalo $]a, b[$ y sea $c \in]a, b[$; si las funciones son tales que

- i) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$,
- ii) $Dg(x) \neq 0$, para todo $x \in]a, b[$,
- iii) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = L$ ($\in \overline{\mathbb{R}}$),

en estas condiciones se cumple $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$,

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

8.3.12 PROPOSICIÓN. Sean $f, g:]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas y derivables en su dominio y tales que

- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$
- ii) $Dg(x) \neq 0$, para todo $x \in]a, +\infty[$,
- iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = L$ ($\in \overline{\mathbb{R}}$).

En estas condiciones, se cumple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

(Se tiene un enunciado análogo al considerar funciones derivables en $] - \infty, a[$).

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

8.3.13 EJEMPLO.

1) Para calcular el límite $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan x}{1/x}$, aplicaremos la proposición 8.3.9, resultando

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\cos 2x} = 0.$$

2) Para calcular el límite $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, aplicaremos la proposición 8.3.12, resultando

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

(C) Otras formas indeterminadas.

El método para calcular límites de otras formas indeterminadas diferentes de las anteriores $0/0$, o bien, ∞/∞ , consiste en transformar las expresiones para reducirlas a dichas formas indeterminadas, tal como se muestra a continuación.

8.3.14 Formas indeterminadas $0 \cdot \infty$.

Para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$, si se cumple $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, puede escribirse

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{g(x)}{1}}{\frac{1}{f(x)}},$$

lo cual reduce la indeterminación a los casos $0/0$, o bien, ∞/∞ , respectivamente.

8.3.15 Formas indeterminadas $\infty - \infty$.

Para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$, si se cumple: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, puede escribirse:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}},$$

que transforma la indeterminación en una del tipo $0/0$.

8.3.16 Formas indeterminadas ∞^0 .

Para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$, si se verifica: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, puede escribirse:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln(f(x))),$$

y entonces calcular el límite $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) \ln(f(x)))$, que es una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.

8.3.17 Formas indeterminadas 0^0 .

Para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$, si se cumple: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, puede escribirse:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln(f(x))),$$

y la indeterminación se reduce a una del tipo $0 \cdot \infty$.

8.3.18 Formas indeterminadas 1^∞ .

Para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, puede escribirse

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln(f(x))),$$

y calcular entonces el límite $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) \ln(f(x)))$, que es una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$.

8.3.19 EJEMPLO.

- 1) Para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2$, observamos que se trata de una indeterminación de tipo $0 \cdot \infty$, con lo que aplicando 8.3.14, se tendrá:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^2}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\ln x) \frac{1}{x}}{-1/x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

- 2) Si se trata de calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$, se observa que se trata de una indeterminación de tipo $\infty - \infty$, con lo que, aplicando 8.3.15, se tendrá:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

- 3) Para calcular el límite $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$, se observa que se trata de una indeterminación de tipo 0^0 ; aplicando 8.3.17, se escribirá $x^x = \exp(x \ln x)$ y, entonces, se calcula el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Por lo tanto, resulta finalmente $L = \exp(0) = 1$.

- 4) Para calcular el límite $L = \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, se constata que la expresión indeterminada es del tipo 1^∞ , con lo que se escribirá:

$$x^{\frac{1}{1-x}} = \exp\left(\frac{1}{1-x} \ln x\right),$$

y entonces hay que calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = -1$, de donde resulta finalmente que $L = \exp(-1) = 1/e$.

8.4 LA FÓRMULA DE TAYLOR.

8.4.1 El objetivo de este apartado es presentar una de las propiedades más interesantes de las funciones derivables “unas cuantas veces”, que se conoce como *fórmula de Taylor*. Se trata de la aproximación local de dichas funciones mediante una función polinómica, cuyo grado depende de la derivabilidad sucesiva de la función; el hecho de que en dicha aproximación local intervengan las derivadas sucesivas de la función motiva que la fórmula de Taylor pueda ser considerada como una generalización de los teoremas del valor medio con derivadas sucesivas. Se verán asimismo unas primeras aplicaciones de la fórmula de Taylor: aproximaciones numéricas, obtención de desigualdades entre funciones y cálculo de límites, que se completarán en el apartado 8.6.

8.4.2 DEFINICIÓN. (*Fórmula de Taylor para funciones polinómicas*). Sea $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función polinómica de grado n con coeficientes reales, definida por

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es un número real arbitrario, puede considerarse la expresión de la función polinómica anterior en potencias de $x - x_0$, esto es

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n, \quad b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \quad b_n \neq 0.$$

El cálculo de los coeficientes b_k , $k = 0, 1, \dots, n$ es inmediato: basta observar que se cumple

$$P_n(x_0) = b_0, \quad DP_n(x_0) = b_1, \quad D^2P_n(x_0) = 2b_2, \quad \dots, \quad D^kP_n(x_0) = k(k-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot b_k,$$

con lo que si se escribe, como es habitual, $D^0P_n(x_0) = P_n(x_0)$, se tiene finalmente

$$b_k = \frac{1}{k!} D^k P_n(x_0), \quad 0 \leq k \leq n,$$

En definitiva, dada una función polinómica cualquiera $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y un número real arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{DP_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{D^2P_n(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{D^nP_n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Esta expresión se conoce como *fórmula de Taylor de la función polinómicas P_n en el punto x_0* .

8.4.3 EJEMPLO. Sea la función polinómica de grado 2 definida por $P(x) = 1 - 2x + 3x^2$ y sea $x_0 = 2$. Se cumplen entonces las igualdades siguientes $P(2) = 1 - 4 + 12 = 9$, $DP(2) = (-2 + 6x)(2) = 10$, $D^2P(2) = 6$. En consecuencia se obtiene

$$P(x) = 9 + 10(x - 2) + 3(x - 2)^2, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

que es la fórmula de Taylor de la función polinómica dada en el punto $x_0 = 2$.

8.4.4 DEFINICIÓN. (*Aproximación de grado n de una función en un punto*). Al principio de este apartado se ha dicho que se planteaba como objetivo del mismo el estudio de la aproximación local de una función derivable sucesivamente por una función polinómica; vamos a precisar esta idea y a definir con rigor qué entendemos por aproximación local de una función.

- Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real, derivable sucesivamente al menos n veces en el intervalo $]a, b[$ y sea $x_0 \in]a, b[$; se dice que la función polinómica $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *aproximación de grado n de f en el punto x_0* , si se cumple

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

esto es, si la diferencia $f(x) - P_n(x)$ entre la función f y la función polinómica es un infinitésimo de orden superior a $(x - x_0)^n$ en ese punto.

- Así, por ejemplo, la función polinómica definida por $P(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ es una aproximación de grado 2 de la función exponencial real en un entorno del origen, puesto que se cumple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0.$$

- Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $a \in A$, la diferencial de f en el punto a , es una aproximación de grado 1 del incremento de f en el punto a , puesto que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a; h) - df_a(h)}{h} = 0.$$

8.4.5 DEFINICIÓN. (*Polinomio de Taylor asociado a una función derivable sucesivamente*). Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real, continua en su dominio y derivable sucesivamente p veces en el intervalo $]a, b[$ y sea $x_0 \in]a, b[$. Se denomina *polinomio de Taylor de grado n ($\leq p$) asociado a f en el punto x_0* la función polinómica $T_n(f; x_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$T_n(f; x_0)(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{D^2 f(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{D^n f(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Obsérvese que, en virtud de su definición, si $k \in \mathbb{N}$ se cumple

$$D^k T_n(f; x_0)(x_0) = D^k f(x_0), \text{ si } k \leq n \quad \text{y} \quad D^k T_n(f; x_0)(x_0) = 0, \text{ si } k > n.$$

El primer término no nulo del polinomio $T_n(f; x_0)$ se denomina *término principal de Taylor* de la función f en el punto x_0 ; más adelante se podrá apreciar su importancia al estudiar las aplicaciones al cálculo de límites.

En la proposición que sigue se pone de manifiesto la importancia del polinomio de Taylor de una función en un punto, viendo que se trata de una aproximación local de grado n de la función en dicho punto.

8.4.6 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio y derivable sucesivamente en el intervalo $]a, b[$ y sea $x_0 \in]a, b[$; entonces, el polinomio de Taylor de grado n asociado a f en x_0 , $T_n(f; x_0)$, es una aproximación de grado n de f en el punto x_0 .

Demostración:

Deberá probarse que $T_n(f; x_0)$ cumple la definición 8.4.4 de aproximación local de grado n de f en x_0 , esto es, que se verifica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(f; x_0)(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

lo cual es inmediato sin más que sustituir la expresión de $T_n(f; x_0)$ dada por 8.4.5 en el numerador de la fracción anterior y observar que, entonces, tal fracción es una forma indeterminada de tipo $0/0$. Aplicando sucesivamente n veces la regla de l'Hôpital y recordando que $D^k T_n(f; x_0)(x_0) = D^k f(x_0)$ si $k \leq n$, resulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(f; x_0)(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Df(x) - Df(x_0)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{D^n f(x) - D^n f(x_0)}{n!} = 0,$$

como se quería probar. \blacksquare

Vamos a ver a continuación una definición muy importante que permite caracterizar y acotar el error que se comete cuando se sustituye una función por su polinomio de Taylor en el entorno de un punto: es el denominado *término complementario o resto de Taylor*.

8.4.7 DEFINICIÓN. (*Término complementario o resto*). Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable n veces en $]a, b[$; si $x_0 \in]a, b[$, se denomina *término complementario o resto de Taylor de grado n de f en x_0* , notado $R_n(f; x_0)$, la diferencia

$$R_n(f; x_0)(x) = f(x) - T_n(f; x_0)(x), \quad x \in]a, b[$$

cuya interpretación es inmediata: es el error que se comete cuando se aproxima la función por su polinomio de Taylor de grado n en un entorno $B(x_0; r)$ del punto x_0 .

En virtud de su definición y de 8.4.6, puede escribirse la *propiedad fundamental del término complementario*:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(f; x_0)(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

esto es, el término complementario es un infinitésimo de orden superior a n en el punto x_0 .

Por otra parte, conviene hacer observar que algunos autores utilizan la notación $f(x) - T_n(f; x_0)(x) = R_{n+1}(f; x_0)(x)$, la cual se justifica por el teorema que se verá a continuación. En este caso, la propiedad fundamental del término complementario se escribe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n+1}(f; x_0)(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

En el teorema que sigue vamos a obtener una expresión explícita del término complementario de grado $n - 1$ de una función de tipo \mathcal{C}^n en un intervalo abierto y acotado.

8.4.8 TEOREMA. (*De Taylor*). Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^n(]a, b[)$; si x_0 es un punto cualquiera de $]a, b[$, para cada $x \in]a, b[$, existe un $\xi \in]a, b[$ tal que

$$R_{n-1}(f; x_0)(x) = \frac{D^n f(\xi)}{(n)!} (x - x_0)^n, \quad \text{con } x_0 \leq \xi \leq x.$$

Demostración:

Sea $x_0 \in]a, b[$ un punto cualquiera del intervalo; consideremos otro punto x tal que $a < x_0 < x < b$ y fijémoslo. Definamos ahora la función $\varphi:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, mediante:

$$\varphi(t) = f(x) - \left(f(t) + Df(t)(x - t) + \frac{D^2 f(t)}{2!} (x - t)^2 + \dots + \frac{D^{n-1} f(t)}{(n-1)!} (x - t)^{n-1} \right).$$

Esta función cumple:

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(x_0) = f(x) - T_{n-1}(f; x_0)(x) = R_{n-1}(f; x_0)(x);$$

precisamente, el último valor es el que nos interesa calcular. Por otra parte, la función $\varphi:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en su dominio y se verifica:

$$D\varphi(t) = -\frac{D^n f(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}, \text{ para todo } t \in]a, b[,$$

como es inmediato comprobar. Consideremos ahora la función definida por $g(t) = (x-t)^n$, para todo $t \in [x_0, x]$; esta función es continua en su dominio y derivable en el intervalo $]x_0, x[$, cumpliéndose además que $Dg(t) \neq 0$, para todo $t \in]x_0, x[$. Aplicando ahora el teorema del valor medio generalizado de Cauchy, con las funciones φ y g en el intervalo $[x_0, x]$, puede afirmarse que existe un $\xi \in]x_0, x[$ tal que

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{D\varphi(\xi)}{Dg(\xi)};$$

sustituyendo los valores correspondientes de las funciones y de sus derivadas, se obtiene:

$$\frac{0 - \varphi(x_0)}{0 - (x - x_0)^n} = \frac{-\frac{D^n f(\xi)}{(n-1)!}(x - \xi)^{n-1}}{-n(x - \xi)^{n-1}},$$

con lo que resulta finalmente $\varphi(x) = R_{n-1}(f; x_0)(x) = \frac{D^n f(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$. ■

8.4.9 PROPOSICIÓN. (*Fórmula de Taylor para funciones de clase \mathcal{C}^n*). Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^n([a, b])$ y sea x_0 un punto cualquiera de ese intervalo; para cada $x \in]a, b[$, existe un $\xi \in]a, b[$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{D^2 f(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{D^{n-1} f(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{D^n f(\xi)}{n!}(x - x_0)^n = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x), \quad x_0 \leq \xi \leq x,$$

denominada *fórmula de Taylor* de la función f en el punto x_0 .

Demostración:

Evidente a partir del teorema anterior. ■

8.4.10 OBSERVACIÓN. El término complementario de Taylor tal como se ha escrito en 8.4.8, se denomina habitualmente *forma de Lagrange* del término complementario. Puede obtenerse otra expresión diferente del término complementario considerando en la demostración del teorema de Taylor la función $g(t) = x - t$, resultanto

$$R_{n-1}(x) = \frac{D^n f(\xi)}{(n-1)!}(x - x_0)(x - \xi)^{n-1}, \quad x_0 \leq \xi \leq x,$$

expresión que se denomina *forma de Cauchy* del término complementario.

Cuando el punto x_0 es el origen, entonces la fórmula de Taylor asociada a f en $x_0 = 0$ queda

$$f(x) = f(0) + Df(0)x + \frac{D^2 f(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{D^{n-1} f(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{D^n f(\xi)}{n!}x^n, \quad 0 \leq \xi \leq x,$$

expresión que se conoce como *fórmula de Maclaurin* de la función f . En ocasiones, es útil escribir la fórmula de Taylor utilizando la notación incremental, esto es, escribiendo un punto cualquiera $x \in]a, b[$ mediante $x = x_0 + h$. En tal caso, se tiene $x - x_0 = h$ y la fórmula de Taylor se escribe entonces

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + \frac{D^2 f(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{D^{n-1} f(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{D^n f(x_0 + \theta h)}{n!}h^n, \quad 0 < \theta < 1.$$

8.4.11 EJEMPLO. (*Fórmula de Taylor de las funciones exponencial y logaritmo neperiano*).

1) La función exponencial \exp es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$; además, sabemos que se cumple $D^n \exp = \exp$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, la fórmula de Taylor de la función exponencial real en un punto cualquiera $x_0 \in \mathbb{R}$ es:

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + \frac{e^{x_0}}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{e^{x_0}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{e^\xi}{n!}(x - x_0)^n, \quad x_0 \leq \xi \leq x.$$

La fórmula de Maclaurin de la función exponencial real es:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^\xi}{n!}x^n, \quad 0 \leq \xi \leq x.$$

2) La función logaritmo neperiano \ln es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_0^+)$; sus derivadas sucesivas vienen dadas por

$$D^k \ln(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}, x > 0.$$

En consecuencia, si $x_0 > 0$, la fórmula de Taylor de \ln en ese punto es:

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \ln(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0) - \frac{1}{2x_0^2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)x_0^{n-1}}(x - x_0)^{n-1} + \\ &+ \frac{(-1)^{n-1}}{n\xi^n}(x - x_0)^n, \quad x_0 \leq \xi \leq x. \end{aligned}$$

3) La función definida por $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$ es infinitamente derivable en su dominio $A =]-1, +\infty[$; además, se cumple:

$$D^k \ln(1+x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}, x > -1.$$

En consecuencia, la fórmula de Maclaurin de esta función es:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n}x^n, \quad 0 < \theta < 1.$$

8.4.12 EJEMPLO. (*Fórmula de Maclaurin de las funciones sen y cos*).

1) La función \sin es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$; además, sabemos que se cumple

$$D^k \sin x = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, para $x_0 = 0$ se cumple

$$D^{2p} \operatorname{sen} 0 = 0, \quad D^{2p+1} \operatorname{sen} 0 = (-1)^p, \text{ para todo } p \in \mathbb{N},$$

es decir, el polinomio de Maclaurin de sen tendrá únicamente términos de grado impar; si el último de ellos es de grado $2p - 1$, para calcular el resto debemos calcular la derivada de orden $2p$ de la función, esto es

$$D^{2p} \operatorname{sen} \theta x = \operatorname{sen} \left(\theta x + (2p) \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sen}(\theta x + p\pi) = (-1)^p \operatorname{sen} \theta x.$$

Así pues, la fórmula de Maclaurin de la función sen es:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)!}x^{2p-1} + \frac{(-1)^p \operatorname{sen} \theta x}{(2p)!}x^{2p}, \quad 0 < \theta < 1.$$

- 2) La función cos es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$; además, sabemos que se cumple

$$D^k \operatorname{cos} x = -\operatorname{sen} \left(x + (k-1) \frac{\pi}{2} \right), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, en el origen $x_0 = 0$ se cumple

$$D^{2p} \operatorname{cos} 0 = (-1)^p, \quad D^{2p+1} \operatorname{cos} 0 = 0, \text{ para todo } p \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, el polinomio de Maclaurin de esta función tendrá sólo términos de grado par; si el último de ellos es $2p$, para el término complementario debe calcularse la derivada

$$D^{2p+1} \operatorname{cos} \theta x = -\operatorname{sen} \left(\theta x + (2p) \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{sen}(\theta x + p\pi) = (-1)^{p+1} \operatorname{sen} \theta x.$$

Así pues, la fórmula de Maclaurin de esta función será:

$$\operatorname{cos} x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p} + \frac{(-1)^{p+1} \operatorname{sen} \theta x}{(2p+1)!}x^{2p+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Hemos comentado que la fórmula de Taylor de una función derivable sucesivamente puede aplicarse en cálculos aproximados, obtención de desigualdades y cálculo de límites; en los ejemplos que se ven a continuación se ilustra dicha aplicación.

8.4.13 EJEMPLO. (Aplicación de la fórmula de Taylor a cálculos aproximados).

- 1) Vamos a calcular aproximadamente el número e con un error menor que 10^{-8} ; de este número real sabemos (véase 2.4.7) que $2 < e \leq 3$. Recordando que $e = \exp(1)$ en virtud de la fórmula de Maclaurin de la función exponencial real calculada en 8.4.11, si escribimos dicha fórmula con $x = 1$ resulta:

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\xi}{n!}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Ahora vamos a obtener el número de términos necesario en el polinomio de Maclaurin para que el error cometido sea menor que la cota dada, 10^{-8} ; sabemos que dicho error viene dado por el término complementario, con lo cual deberemos acotar dicho término. Teniendo en cuenta las propiedades conocidas de la función exponencial real, en particular su monotonía, se tiene

$R_n(1) = \frac{e^\xi}{n!} < \frac{e}{n!} \leq \frac{3}{n!} < 10^{-8}$. El menor número natural que cumple la condición es $n = 12$, con lo que

$$e \simeq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{11!} = 2.71828182,$$

aproximación que tiene siete cifras decimales exactas.

- 2) Aún cuando la medida de un ángulo en grados es un tanto exótica, vamos a calcular aproximadamente el valor $\sin 6^\circ$, con un error menor que 10^{-5} . Pasando de la medida convencional en grados a la natural en radianes, se tiene $6^\circ = \frac{\pi}{30}$ rad. Como ya sabemos que el error en este tipo de aproximaciones se acota mediante el término complementario, procederemos a hacerlo, teniendo en cuenta propiedades conocidas de la función, en particular que se cumple $-1 \leq \sin x \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando, pues, el término complementario tal como se ha obtenido en la fórmula de Maclaurin de la función \sin de acuerdo con 8.4.11, resulta

$$|R_{2p}(x)| = \left| \frac{(-1)^p \sin \theta x}{(2p)!} x^{2p} \right| \leq \frac{1}{(2p)!} x^{2p}.$$

En consecuencia, para $x = \pi/30$ se cumple $|R_{2p}(\frac{\pi}{30})| = \frac{1}{(2p)!} (\frac{\pi}{30})^{2p}$. Para que el término complementario sea menor que la cota de error dada 10^{-5} , es inmediato ver que basta tomar $p = 2$, con lo cual se obtiene $\sin \frac{\pi}{30} \simeq \frac{\pi}{30} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{30}\right)^3 = 0.104528$

8.4.14 EJEMPLO. (Aplicación de la fórmula de Taylor a la obtención de desigualdades). Se desea probar que la función coseno cumple la siguiente desigualdad:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

De acuerdo con la fórmula de Maclaurin de la función coseno obtenida en 8.4.11 y escribiéndola con un polinomio aproximador de grado 2, dicha fórmula es

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sin \theta x}{6}x^3, \quad 0 < \theta < 1,$$

Si $0 \leq x < \pi$, se cumplirá también que $0 \leq \theta x < \pi$; en consecuencia, puede afirmarse que el término complementario cumple $R_2(x) \geq 0$ y, por lo tanto, se cumple la desigualdad propuesta. Mediante un razonamiento similar se prueba que la desigualdad propuesta se cumple si $-\pi < x \leq 0$.

Por último, si se cumple $|x| > \pi$, entonces $1 - \frac{1}{2}x^2 < 1 - \frac{1}{2}\pi^2 < -2 < \cos x$, con lo que puede afirmarse que la desigualdad propuesta se cumple para cualquier $x \in \mathbb{R}$, como se quería probar.

8.4.15 EJEMPLO. (Aplicación de la fórmula de Taylor al cálculo de límites). Para calcular el límite en un punto x_0 de una función cuya expresión analítica está dada mediante productos y cocientes de funciones derivables y dicho límite es indeterminado, puede calcularse el límite sustituyendo cada factor por el término principal de Taylor en el punto x_0 . Esta metodología puede aplicarse en virtud de la propiedad fundamental del término complementario enunciada en 8.4.7.

- 1) Para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos 3x)}$, obtendremos los términos principales de Taylor de cada uno de los factores. Así, el término principal de Taylor de $f(x) = x - \sin x$ en el origen es el término

de tercer grado, $x^3/6$ y el término principal Taylor de $g(x) = 1 - \cos 3x$ en el origen es el de segundo grado, $9x^2/2$. En consecuencia se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x \frac{9x^2}{2}} = \frac{1}{27}.$$

- 2) De forma análoga, para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)}$, calcularemos el término principal de Taylor en el origen de la función $f(x) = e^x - x - 1$ que es el de segundo grado $x^2/2$ y el de la función $g(x) = e^x - 1$ que es el de primer grado x , con lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x \cdot x} = \frac{1}{2}.$$

8.5 CONVERGENCIA UNIFORME Y DERIVABILIDAD.

8.5.1 En este apartado se estudia la derivabilidad de las funciones obtenidas por paso al límite en una sucesión o en una serie de funciones derivables. De forma similar a la continuidad, la convergencia uniforme juega un papel fundamental para poder afirmar las propiedades de la función límite. Obsérvese la necesidad de caracterizar esta cuestión, a partir del siguiente ejemplo; si se considera la sucesión de funciones (f_n) definidas por $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n^2x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, por una parte es inmediato ver que converge uniformemente a la función nula de \mathbb{R} , esto es, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y por otra, las funciones f_n son derivables en \mathbb{R} , cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, la sucesión de funciones derivadas (Df_n) , que son las funciones definidas por $Df_n(x) = n \cos(n^2x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, no tiene límite.

8.5.2 PROPOSICIÓN. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones derivables en un intervalo abierto $]a, b[\subset \mathbb{R}$, tales que:

- i) existe algún punto $x_0 \in]a, b[$ tal que la sucesión numérica $(f_n(x_0))$ es convergente;
- ii) la sucesión de funciones derivadas $(Df_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente en $]a, b[$.

Se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) la sucesión funcional $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente en el intervalo $]a, b[$ hacia una función límite $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$;
- 2) dicha función límite f es derivable en $]a, b[$ y se cumple

$$Df(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Df_n(x), \text{ para todo } x \in]a, b[.$$

Demostración:

- 1) Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y designemos por n_0 un número natural tal que

$$\begin{aligned} |f_n(x_0) - f_m(x_0)| &< \frac{\varepsilon}{2} && \text{para todo } n, m > n_0, \\ |Df_n(x) - Df_m(x)| &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} && \text{para todo } n, m > n_0 \text{ y para todo } x \in]a, b[; \end{aligned}$$

aplicando la fórmula del incremento finito a $f_n - f_m$ en el intervalo $[x_0, x] \subset]a, b[$, resulta la existencia de un $t \in]x_0, x[$ tal que

$$(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0) = (x - x_0)(Df_n - Df_m)(t), \quad x_0 < t < x,$$

con lo que

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| = |x - x_0| |Df_n(t) - Df_m(t)| < |x - x_0| \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En definitiva, puede afirmarse que se cumple:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

cualesquiera que sean $n, m > n_0$ y para todo $x \in]a, b[$ y, en virtud del criterio de Cauchy para sucesiones de funciones (véase 4.5.9), puede concluirse que la sucesión (f_n) converge uniformemente en el intervalo $]a, b[$ a una función límite f .

- 2) Se trata ahora de probar la derivabilidad en $]a, b[$ de la función f , función límite (uniforme) de la sucesión (f_n) en dicho intervalo. Sea $c \in]a, b[$ un punto cualquiera; se definen las funciones $g_n:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, mediante

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}, & \text{si } x \neq c, \\ f'_n(c), & \text{si } x = c. \end{cases}$$

Estas funciones son, por su definición, continuas en el intervalo $]a, b[$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$ y, además, convergen puntualmente a la función $g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, & \text{si } x \neq c, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(c), & \text{si } x = c. \end{cases}$$

Para ver que que la convergencia es no sólo puntual sino también uniforme, aplicaremos la fórmula del incremento finito a la función $f_n - f_m$ en el intervalo $[c, x]$, obteniéndose:

$$(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(c) = (x - c)(Df_n - Df_m)(t), \quad c < t < x,$$

con lo que

$$\frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} = (Df_n - Df_m)(t), \quad c < t < x,$$

de donde, teniendo en cuenta la definición de g_n , resulta

$$|g_n(x) - g_m(x)| = |Df_n(t) - Df_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ para todo } n, m > n_0 \text{ y para todo } x \in]a, b[,$$

lo cual demuestra que la convergencia de la sucesión funcional (g_n) es uniforme y, por lo tanto, la función límite $g = \lim g_n$ es continua en $]a, b[$, cumpliéndose:

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{n \rightarrow \infty} Df_n(c),$$

esto es, la función f es derivable y se cumple $Df(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} Df_n(c)$ para todo $c \in]a, b[$. ■

En la proposición que sigue se aborda la misma cuestión en el caso de las series de funciones.

8.5.3 PROPOSICIÓN. Sea $\sum f_n$ una serie de funciones derivables en un intervalo abierto $]a, b[\subset \mathbb{R}$, tales que:

- i) existe algún punto $x_0 \in]a, b[$, tal que la serie numérica $\sum f_n(x_0)$ es convergente;
- ii) la serie de funciones derivadas $\sum Df_n$ es uniformemente convergente en el intervalo $]a, b[$.

Se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) la serie funcional $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente en el intervalo $]a, b[$ hacia una función suma

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n;$$

- 2) dicha función suma f es derivable en $]a, b[$ y se cumple

$$Df(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} Df_n(x), \text{ para todo } x \in]a, b[.$$

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

Entre las series de funciones, destacan por su interés las series de potencias, de las cuales se sabe que son uniformemente convergentes en su dominio de convergencia. A continuación se estudian algunas propiedades de estas series, relacionadas con la derivación y se completa con el estudio del desarrollo de una función en serie de potencias, que relaciona dichas series y el teorema de Taylor visto en el apartado anterior.

8.5.4 DEFINICIÓN. (*Derivada de una serie de potencias*). Sea $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ una serie de potencias reales; se define la *derivada* de dicha serie, como la serie de potencias $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ (o bien $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$), esto es, la serie que se obtiene derivando “término a término” la serie dada.

En la proposición que sigue se caracteriza el campo de convergencia de la derivada de una serie de potencias.

8.5.5 PROPOSICIÓN. Si una serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ tiene un radio de convergencia ρ , entonces su serie derivada $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ tiene el mismo el radio de convergencia.

Demostración:

- Designemos por ρ' el radio de convergencia de la serie derivada $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < \rho$; si $x_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $|x| < x_0 < \rho$, entonces la serie $\sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$ es convergente, con lo que (condición necesaria de convergencia) se cumple $\lim a_n x_0^n = 0$ y existe un número real $k > 0$ tal que $|a_n x_0^n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos a probar la convergencia de la serie numérica $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$,

con lo cual habremos probado que su radio de convergencia es al menos ρ , esto es, que $\rho' \geq \rho$. Para ello, acotaremos el término general de esta serie con una serie convergente, del siguiente modo:

$$|na_n x^{n-1}| = |na_n x^{n-1}| \frac{x_0^n}{x_0^n} = \frac{1}{x_0} n |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^{n-1} \leq \frac{k}{x_0} n \left| \frac{x}{x_0} \right|^{n-1}.$$

Estudiemos ahora la convergencia de la serie mayorante: aplicando el criterio del cociente resulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \left| \frac{x}{x_0} \right|^n}{n \left| \frac{x}{x_0} \right|^{n-1}} = \left| \frac{x}{x_0} \right| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1,$$

es decir, la serie mayorante es convergente y, en consecuencia, la serie $\sum_{n \geq 1} na_n x^{n-1}$ converge absolutamente, con lo cual se ha probado que $\rho \leq \rho'$.

- Tomando ahora $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < \rho'$ y considerando x_1 tal que $|x| < x_1 < \rho'$, mediante un razonamiento análogo se prueba que la serie $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ es absolutamente convergente, con lo cual su radio de convergencia es al menos ρ' , esto es, $\rho \geq \rho'$.
- Finalmente, las dos desigualdades establecidas entre ambos radios de convergencia implican la igualdad $\rho = \rho'$, como se quería probar. ■

Una vez caracterizado el campo de convergencia de la derivada de una serie de potencias, puede pasarse a establecer la derivabilidad de su función suma, tal como se enuncia en la proposición que sigue.

8.5.6 PROPOSICIÓN. Sea S la función suma de la serie de potencias $\sum a_n x^n$, cuyo radio de convergencia es ρ , esto es, la función definida por $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ para todo $x \in]-\rho, \rho[$. Se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) La función S es derivable en $]-\rho, \rho[$ y se verifica:

$$DS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} \text{ para todo } x \in]-\rho, \rho[;$$

- 2) La función S es indefinidamente derivable en $]-\rho, \rho[$ y si $k \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$D^k S(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k} \text{ para todo } x \in]-\rho, \rho[.$$

Demostración:

- 1) Sea $0 < x_0 < \rho$; entonces, la serie numérica $\sum a_n x_0^n$ converge absolutamente, luego es convergente. En virtud de 4.6.7, la serie $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en el intervalo $[0, x_0]$ y, en virtud de 8.5.3, la función suma de la serie S es derivable en $]0, x_0[$ y además se cumple

$$DS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} \text{ para todo } x \in]0, x_0[.$$

La arbitrariedad de x_0 implica el resultado en el intervalo $] - \rho, \rho[$.

- 2) Basta aplicar reiteradamente el resultado probado en el punto anterior. ■

8.6 DESARROLLOS EN SERIES DE POTENCIAS. FUNCIONES ANALÍTICAS.

8.6.1 DEFINICIÓN. (Función desarrollable en serie de potencias en el origen).

- Sea $f:] - r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ una función real; se dice que f es *desarrollable* (o *representable*) en serie de potencias en el origen si existe una serie de potencias $\sum a_n x^n$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ para todo } x \in] - r, r[,$$

esto es, cuya suma en cada punto coincide con el valor de la función considerada.

- Así, por ejemplo, si se considera la función $f:] - 2, 2[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{2}{2-x} \text{ para todo } x \in] - 2, 2[,$$

la serie de potencias $\sum \frac{1}{2^n} x^n$, cuyo radio de convergencia es $\rho = 2$, cumple:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x} = f(x),$$

con lo que la función considerada es desarrollable en serie de potencias en el origen.

- A partir de la definición dada, surgen de forma natural dos cuestiones. La primera de ellas es averiguar en qué condiciones una función $f:] - r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ es desarrollable en serie de potencias. La segunda es si el citado desarrollo en serie de potencias, supuesto que existe, es único. Las dos proposiciones que siguen pretenden responder a estas cuestiones, empezando por la segunda de ellas.

8.6.2 PROPOSICIÓN. Sea $f:] - r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ una función real; si f es desarrollable en serie de potencias en el origen, dicha serie es única y viene dada por

$$\sum_{n \geq 0} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n.$$

Demostración:

En virtud de la hipótesis, si f es desarrollable en serie de potencias en el origen, existe una serie de potencias $\sum a_n x^n$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ para todo } x \in] - r, r[.$$

En virtud de la proposición 8.5.6, la función suma de una serie de potencias es infinitamente derivable y se cumple:

$$D^k f(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}, \text{ para todo } x \in] - r, r[,$$

de donde se obtiene $D^k f(0) = k!a_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir,

$$a_k = \frac{D^k f(0)}{k!}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

como se quería probar. ■

La unicidad del desarrollo en serie de potencias, cuando existe, motiva la siguiente definición.

8.6.3 DEFINICIÓN. (*Serie de Maclaurin de una función*).

- Si $f:]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función infinitamente derivable en su dominio, se denomina *serie de Maclaurin de f* a la serie de potencias dada por

$$\sum_{n \geq 0} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n.$$

- Así, por ejemplo, la serie de Maclaurin de la función $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(1+x)$, es $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

8.6.4 OBSERVACIÓN.

- Puesto que la función suma de una serie de potencias es infinitamente derivable, resulta evidente que una condición necesaria para que una función $f:]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ sea desarrollable en serie de potencias en el origen es que sea infinitamente derivable en dicho punto, aun cuando esto no es suficiente, esto es, la sola existencia de la serie de Maclaurin no garantiza ni que esta serie sea convergente en cada punto del dominio de convergencia ni que dicha serie converja al valor de la función en el punto.
- Para verlo, basta considerar la función definida por

$$\begin{cases} \varphi(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ \varphi(0) = 0, \end{cases}$$

sobre la cual es inmediato comprobar que es infinitamente derivable en el origen y que se cumple $D^k \varphi(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, con lo que su serie de Maclaurin tiene todos los coeficientes nulos y, por tanto, su suma es la función nula de \mathbb{R} ; sin embargo, φ no se anula salvo en el origen. La conclusión es clara: φ no es desarrollable en serie de potencias en el origen. En la proposición que sigue se da una condición necesaria y suficiente para que una función sea desarrollable en serie de potencias.

- 8.6.5 PROPOSICIÓN.** Una condición necesaria y suficiente para que $f:]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ sea desarrollable en serie de potencias en el origen es que dicha función sea infinitamente derivable en el origen y que, además, si $R_n(x)$ es el término complementario de la fórmula de Maclaurin de f , se cumpla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \text{ para todo } x \in]-r, r[.$$

(No debe confundirse esta condición con la establecida en 8.4.7; ésta hace referencia al límite del término complementario cuando su grado aumenta indefinidamente y aquella al límite en el punto).

Demostración:

De acuerdo con la definición 8.6.1, que f sea desarrollable en serie de potencias en el origen significa la existencia de una serie de potencias cuya suma coincida con f en todo punto de $] - r, r[$; además, en virtud de 8.6.2, esta serie de potencias debe ser necesariamente la serie de Maclaurin de f , lo cual implica que f debe ser infinitamente derivable en el intervalo $] - r, r[$.

Por otra parte, la fórmula de Maclaurin de f nos dice que

$$f(x) = f(0) + Df(0)x + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{D^{n-1}f(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_{n-1}(x), \text{ para todo } x \in] - r, r[,$$

con lo que para que en todo punto $x \in] - r, r[$ se cumpla

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n,$$

es necesario y suficiente que se verifique $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ para todo $x \in] - r, r[$, según se quería probar. ■

8.6.6 EJEMPLO. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, se considera la función definida por

$$f(x) = (1+x)^\alpha \text{ para todo } x \in] - 1, 1[.$$

Vamos a probar que f es desarrollable en serie de potencias en el origen y calcular su serie de Maclaurin. La derivabilidad sucesiva de f es evidente (criterios de derivabilidad) y si $k \in \mathbb{N}$ es un natural cualquiera, las derivadas sucesivas de f vienen dadas por:

$$D^k f(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \text{ para todo } x \in] - 1, 1[,$$

como es inmediato comprobar. En consecuencia, las derivadas sucesivas de f en el origen, son

$$D^k f(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Así pues, la fórmula de Maclaurin de f es

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)(1+\xi)^{\alpha-n}}{n!}x^n, \quad 0 \leq \xi \leq x < 1.$$

Se trata ahora de estudiar el término complementario

$$R_{n-1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)(1+\xi)^{\alpha-n}}{n!}x^n = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}(1+\xi)^\alpha \left(\frac{x}{1+\xi} \right)^n$$

y dado que $0 \leq \xi \leq x < 1$, se cumplirá

$$\frac{|x|}{|1+\xi|} = \left| \frac{x}{1+\xi} \right| < 1,$$

de donde resulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0, \text{ para todo } x \in]-1, 1[.$$

En definitiva, se ha probado que se cumplen las condiciones (suficientes) que establece la proposición anterior y, en consecuencia, puede afirmarse que la función considerada es desarrollable en serie de potencias en el origen. Si se conviene en utilizar la notación

$$\frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k},$$

puede escribirse finalmente el desarrollo en serie de Maclaurin de la función f , mediante:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \text{ para todo } x \in]-1, 1[.$$

8.6.7 OBSERVACIÓN. Debe destacarse el papel que juega el término complementario de la fórmula de Maclaurin de una función infinitamente derivable en el origen, para poder afirmar que su desarrollo en serie de Maclaurin converge a la función dada en el intervalo correspondiente. Considérese, por ejemplo, la función definida por

$$\begin{cases} f(x) = e^x + e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta lo dicho en 8.6.4, resulta evidente que f es infinitamente derivable en el origen y que se cumple $D^k f(0) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, con lo que la serie de Maclaurin de f es $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n$, cuya suma es la función exponencial real y no coincide con la función dada más que en el origen. Está claro que en este caso no se cumple la condición sobre el término complementario establecida en la proposición anterior.

8.6.8 OBSERVACIÓN. (*Cálculo de desarrollos en series de potencias*). Para calcular el desarrollo en serie de Maclaurin de una función puede aplicarse, evidentemente, la definición 8.6.3. En algunos casos, no obstante, cuando la función se expresa mediante operaciones elementales con otras funciones cuya serie de Maclaurin puede obtenerse fácilmente, es mucho más práctico aplicar las mismas operaciones elementales con los desarrollos de estas funciones.

- Así, por ejemplo, para calcular el desarrollo de Maclaurin de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \exp(2x^2 - x + 1), \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

basta operar del modo siguiente

$$\exp(2x^2 - x + 1) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \circ (2x^2 - x + 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x^2 - x + 1)^n}{n!}.$$

- Para calcular el desarrollo de Maclaurin de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2x + x^2} \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

basta observar que $f(x) = Dg(x)$, siendo $g(x) = -\frac{1}{1+x}$, con lo que recordando que se cumple

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \text{ se tendrá}$$

$$\frac{1}{1+2x+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}.$$

8.6.9 DEFINICIÓN. (*Función desarrollable en serie de potencias en un punto cualquiera*).

- Todo lo dicho acerca de los desarrollos en serie de potencias en el origen puede extenderse sin dificultad a otro punto cualquiera, distinto del origen. Así, se dice que una función $f:]x_0 - r, x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ es *desarrollable (o representable) en serie de potencias en el punto x_0* si existe una serie de potencias $\sum a_n(x - x_0)^n$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n, \text{ para todo } x \in]x_0 - r, x_0 + r[,$$

esto es, cuya suma en cada punto del intervalo coincide con el valor de la función.

- Si f es desarrollable en serie de potencias en el punto $x_0 \in \mathbb{R}$, dicha serie es única y viene dada por

$$\sum_{n \geq 0} \frac{D^n f(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

denominada *serie de Taylor de f en el punto x_0* .

- Una condición necesaria y suficiente para que $f:]x_0 - r, x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ sea desarrollable en serie de potencias en el punto x_0 es que dicha función sea infinitamente derivable en ese punto y que, además, si $R_n(f; x_0)(x)$ es el término complementario de la fórmula de Taylor de f en x_0 , se cumpla:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f; x_0)(x) = 0, \text{ para todo } x \in]x_0 - r, x_0 + r[.$$

8.6.10 DEFINICIÓN. (*Funciones analíticas*). Sea $]a, b[$ un intervalo abierto y acotado de \mathbb{R} y sea $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$; se dice que f es *analítica* en el intervalo $]a, b[$, si f es desarrollable en serie de potencias en todo punto $x_0 \in]a, b[$.

- Si f es la función definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ para todo $x \in]-r, r[$, entonces f es analítica en el intervalo $] - r, r[$ y cualquiera que sea $x_0 \in] - r, r[$, se cumple

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad 0 \leq |x - x_0| < r - |x_0|.$$

- Las funciones definidas por series de potencias son analíticas en su dominio de convergencia.

8.7 ALGUNAS APLICACIONES DE LA DERIVADA.

La noción de derivada de una función y los conceptos directamente relacionados con ella, permiten estudiar algunas cuestiones prácticas de interés. En este apartado se estudian algunas de ellas: una condición suficiente para determinar extremos locales de funciones derivables, el estudio de la convexidad y de la concavidad de una función derivable y también algunas aplicaciones a problemas físicos y técnicos.

(A) Extremos locales de una función.

8.7.1 En la proposición 8.1.5 se ha probado una condición necesaria para que una función derivable en un intervalo abierto y acotado tenga un extremo local en un punto del mismo: la derivada de la función en dicho punto debe ser nula. Se comentó asimismo que dicha condición era necesaria pero no era suficiente, esto es, una función puede tener derivada nula en un punto sin que en él presente un extremo local.

En la proposición que sigue se estudia una condición suficiente para la existencia de extremo local en un punto, basada en las derivadas sucesivas de la función, esto es, una condición que es aplicable únicamente a funciones derivables “un número suficiente de veces”.

8.7.2 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de clase $\mathcal{C}^n(]a, b[)$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$. Si en un punto $x_0 \in]a, b[$ se cumple:

$$\begin{cases} Df(x_0) = D^2f(x_0) = \cdots = D^{n-1}f(x_0) = 0, \\ D^n f(x_0) \neq 0, \end{cases}$$

puede afirmarse lo siguiente:

- 1) Si n es par y $D^n f(x_0) > 0$, entonces la función f alcanza un mínimo local estricto en el punto x_0 ;
- 2) si n es par y $D^n f(x_0) < 0$, entonces la función f alcanza un máximo local estricto en el punto x_0 .
- 3) si n es impar, la función no alcanza extremo local en el punto x_0 .

Demostración:

- 1) De acuerdo con las hipótesis enunciadas, la función f cumple las condiciones exigidas en el teorema de Taylor (8.4.8) y, por lo tanto, puede escribirse la fórmula de Taylor (8.4.9) de f , cuyo polinomio de Taylor de grado $n - 1$ tendrá únicamente el término constante no necesariamente nulo y el resto todos nulos, y puede afirmarse que existe un $r > 0$ tal que si $x \in B(x_0; r)$, entonces:

$$f(x) = T_{n-1}(f; x_0)(x) + R_n(f; x_0)(x) = f(x_0) + \frac{D^n f(t)}{n!}(x - x_0)^n, \quad 0 < |t - x_0| < |x - x_0| < r,$$

es decir,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{D^n f(t)}{n!}(x - x_0)^n, \quad 0 < |t - x_0| < |x - x_0| < r.$$

Así, pues, el signo de la diferencia $f(x) - f(x_0)$ depende del signo de la derivada n -ésima de f , $D^n f(t)$ y de la paridad de n ; puede suponerse (en virtud de la continuidad de la derivada n -ésima) que r es tal que $\operatorname{sgn} D^n f(x) = \operatorname{sgn} D^n f(x_0)$, para todo $x \in B(x_0; r)$. Si $D^n f(x_0) > 0$ y n es par, entonces se cumple $f(x) - f(x_0) > 0$ para todo $x \in B^*(x_0; r)$, esto es, la función f tiene un mínimo local en el punto x_0 .

- 2) Análogo al caso anterior.
- 3) Se razona de forma análoga; redáctense los detalles como ejercicio. ■

8.7.3 EJEMPLO. Considérese la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen } x^4$ para todo $x \in \mathbb{R}$; en el punto $x_0 = 0$, se cumple:

$$Df(0) = D^2f(0) = D^3f(0) = 0 \quad \text{y} \quad D^4f(0) = 24 > 0.$$

En virtud de la proposición anterior, puede afirmarse pues que esta función tiene un mínimo local en el origen.

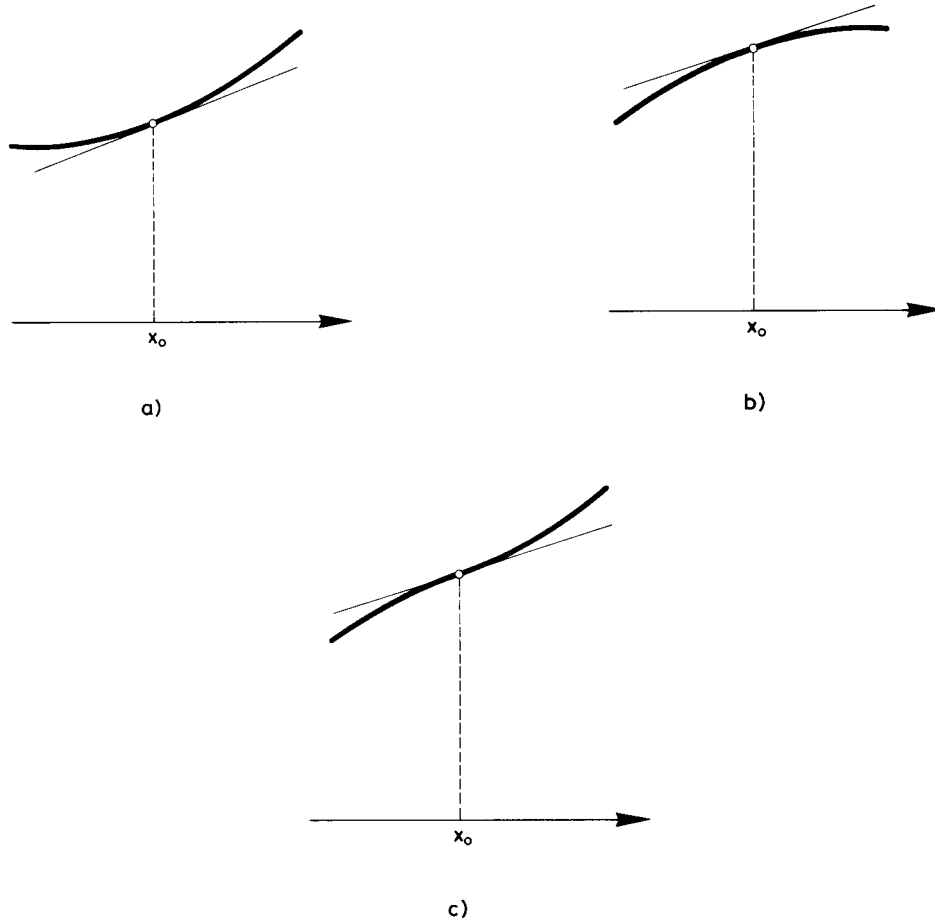


Figura 8.7. Ilustración de la convexidad, la concavidad y un punto de inflexión.

(B) Convexidad y concavidad. Puntos de inflexión.

8.7.4 DEFINICIÓN. (Convexidad y concavidad en un punto). Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real, derivable en un punto $x_0 \in]a, b[$.

- Se dice que la función f es *convexa* en el punto x_0 , si existe un $r > 0$ tal que:

$$f(x) - (f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in B^*(x_0; r).$$

Si la desigualdad es estricta, la función se dice que es *estrictamente convexa*. En otras palabras, una función derivable en un punto x_0 es convexa en él si existe un entorno del punto en el cual la gráfica de la función “está por encima” de la recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$ (véase la figura 8.7(a)).

- Se dice que la función f es *cóncava* en el punto x_0 , si existe un $r > 0$ tal que:

$$f(x) - (f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)) \leq 0 \quad \text{para todo } x \in B^*(x_0; r).$$

Si la desigualdad es estricta, la función se dice que es *estrictamente cóncava*. Dicho de otro modo, una función derivable en un punto x_0 es cóncava en ese punto si existe un entorno en el cual la gráfica de la función “está por debajo” de la recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$ (véase la figura 8.7(b)).

8.7.5 DEFINICIÓN. (*Puntos de inflexión*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función real, derivable en un punto $x_0 \in]a, b[$. Si la diferencia $f(x) - (f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0))$ tiene signos distintos en los intervalos $]x_0 - r, x_0[$ y $]x_0, x_0 + r[$ cualquiera que sea $r > 0$, se dice entonces que f tiene una *inflexión* en el punto x_0 . Esta definición puede interpretarse geoméricamente diciendo que la gráfica de la función “atraviesa” la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$ (véase la figura 8.7(c)).

8.7.6 OBSERVACIÓN. No debe pensarse que las tres situaciones definidas anteriormente definen una tricotomía para funciones derivables en un punto, esto es, que deba darse necesariamente una de las tres. Ello no es así y hay funciones derivables en un punto que no son convexas, ni cóncavas ni tienen una inflexión en dicho punto; en efecto, considérese la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, en el punto $x_0 = 0$.

Para funciones suficientemente derivables, puede caracterizarse la convexidad y la concavidad en un punto, con el signo de la derivada segunda en dicho punto, tal como se ve en la proposición que sigue.

8.7.7 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de tipo $\mathcal{C}^2[a, b]$ y sea $x_0 \in]a, b[$ un punto tal que $D^2f(x_0) \neq 0$; se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- i) si $D^2f(x_0) > 0$, la función es estrictamente convexa en x_0 ;
- ii) si $D^2f(x_0) < 0$, la función es estrictamente cóncava en x_0 .

Demostración:

- i) Supongamos que $D^2f(x_0) > 0$. Que exista la derivada segunda de f en x_0 significa que la derivada primera es derivable en dicho punto y, en virtud de 8.2.15, la derivada segunda no puede tener discontinuidades de salto en un entorno de x_0 , esto es, existe $r > 0$ tal que $D^2f(x) > 0$, para todo $x \in B(x_0; r)$. Escribiendo entonces la fórmula de Taylor de la función f en x_0 y en dicho entorno, con polinomio de Taylor de primer grado, resulta:

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{D^2f(t)}{2!}(x - x_0)^2, \quad 0 < |t - x_0| < |x - x_0| < r.$$

En esta expresión se cumple $D^2f(t) > 0$ y $(x - x_0)^2 > 0$, para todo $x \in B^*(x_0; r)$, con lo cual se cumple $f(x) - (f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)) > 0$, para todo $x \in B^*(x_0; r)$, es decir, f es estrictamente convexa en x_0 .

- ii) Se razona análogamente. ■

8.7.8 DEFINICIÓN. (*Convexidad y concavidad en un intervalo*). Las nociones de función convexa y de función cóncava en un punto deben modificarse si se quieren extender dichas nociones a puntos en

los que la función no es derivable. Estas definiciones más generales de función convexa y de función cóncava en un intervalo ya se vieron en 4.1.13; las recordaremos brevemente.

- Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; se dice que f es *convexa* en $I \subset [a, b]$ si cualesquiera que sean $x, y \in I$ se cumple:

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

esto es, si dados dos puntos cualesquiera de la gráfica de f cuya abscisa sea de I , el segmento que une los dos puntos está por encima de la gráfica de la función.

- Una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *cóncava* en $I \subset [a, b]$ si cualesquiera que sean $x, y \in I$ se cumple:

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \geq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

es decir, si dados dos puntos cualesquiera de la gráfica de f cuya abscisa sea de I , el segmento que une los dos puntos está por debajo de la gráfica de la función.

- Si las desigualdades anteriores son estrictas, la función se dice que es *estrictamente convexa*, o bien, *estrictamente cóncava*, respectivamente.
- Obsérvese que las definiciones dadas no involucran para nada la derivabilidad de la función en el intervalo; así, por ejemplo, la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es estrictamente convexa en cualquier intervalo $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ que contenga al origen, aun cuando dicha función no es derivable en ese punto (véase la figura 8.8).

En la proposición que sigue vamos a obtener una caracterización de la convexidad de una función en un intervalo, que será útil para hacerlo con la derivada más adelante. Redáctese como ejercicio la condición correspondiente para la concavidad.

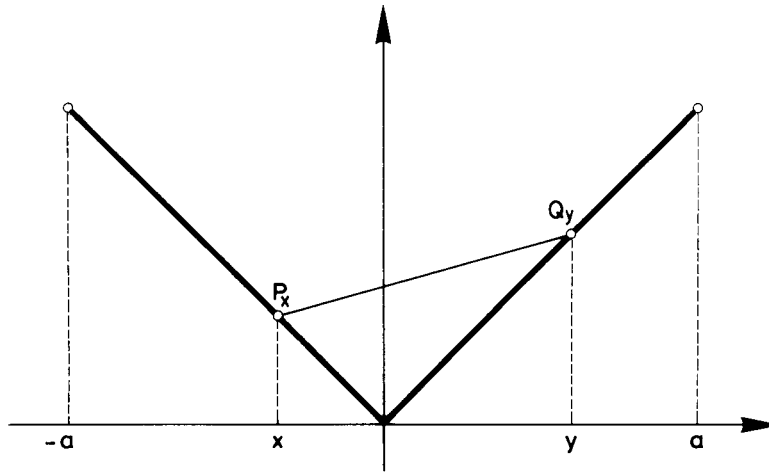


Figura 8.8. Ilustración de la convexidad de $|x|$

8.7.9 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real. Una condición necesaria y suficiente para que f sea convexa en dicho intervalo es que, cualesquiera que sean tres puntos $x, y, z \in [a, b]$ tales que $x < y < z$, se cumpla

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Demostración:

La condición es necesaria. Sean dos puntos cualesquiera $x, z \in [a, b]$ tales que $x < z$. Cualquier punto intermedio y entre ambos puede escribirse

$$y = x + \theta(z - x) = (1 - \theta)x + \theta z, \text{ con } 0 < \theta < 1,$$

y por ser f convexa en $[a, b]$, se cumple $f(y) \leq (1 - \theta)f(x) + \theta f(z)$. La figura 8.9 ayudará a seguir el razonamiento. Si se considera la cuerda que une los puntos $(x, f(x))$ y $(z, f(z))$, y se traza la horizontal por los puntos de dicha cuerda en las abscisas x e y , los ángulos que en tales puntos forman la cuerda y la horizontal son iguales, con lo cual puede afirmarse que

$$\frac{((1 - \theta)f(x) + \theta f(z)) - f(x)}{y - x} = \frac{f(z) - ((1 - \theta)f(x) + \theta f(z))}{z - y};$$

teniendo en cuenta la convexidad de la función resulta finalmente

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

como se quería probar.

Se propone como ejercicio probar que la condición es suficiente. ■

Cuando una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el intervalo abierto $]a, b[$, puede relacionarse la convexidad con propiedades de las derivadas primera y segunda de f , tal como se ve en las proposiciones que siguen.

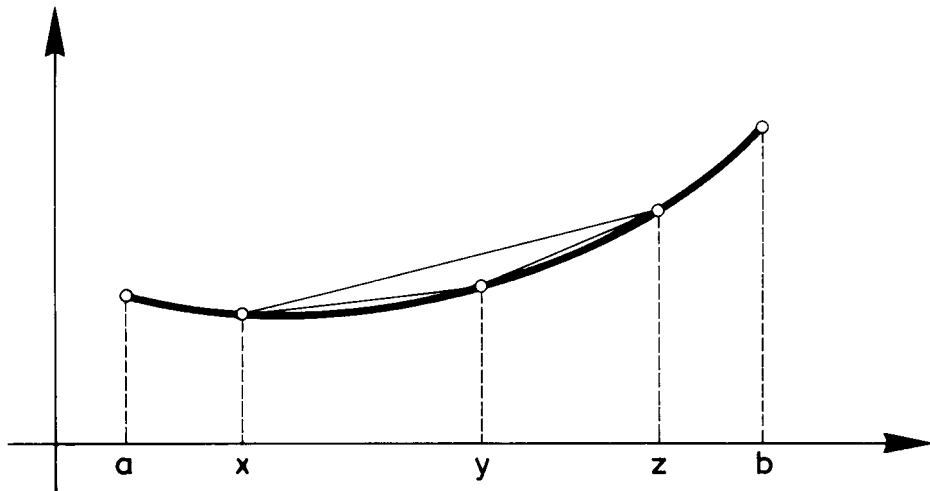


Figura 8.9. Ilustración de la proposición 8.7.9.

8.7.10 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real, derivable en el intervalo abierto $]a, b[$; la función f es convexa (respectivamente, cóncava) en el intervalo $]a, b[$ si, y sólo si, la derivada Df es monótona creciente (respectivamente, decreciente) en dicho intervalo.

Demostración:

La condición es necesaria. Sean $x_1, x_2 \in]a, b[$, tales que $x_1 < x_2$ y sea un punto intermedio $y = (1 - \theta)x_1 + \theta x_2$, $0 < \theta < 1$. En virtud de 8.7.9, se cumple

$$\frac{f(x_2) - f(y)}{y - x_2} \geq \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1}, \text{ para todo } y \in]x_1, x_2[.$$

Pasando al límite en la primera fracción cuando $y \rightarrow x_2$, se obtiene

$$Df(x_2) \geq \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1}, \text{ para todo } y \in]x_1, x_2[,$$

y pasando ahora al límite cuando $y \rightarrow x_1$ resulta $Df(x_2) \geq Df(x_1)$, lo que prueba el crecimiento monótono de Df en el intervalo $]a, b[$.

La condición es suficiente. Supongamos que la derivada Df es creciente en $]a, b[$; tomemos tres puntos cualesquiera $x, y, z \in]a, b[$, tales que $x < y < z$. Aplicando la fórmula del incremento finito a Df en los intervalos $[x, y]$ y $[x, z]$, existen dos puntos $t_1 \in]x, y[$ y $t_2 \in]y, z[$, tales que:

$$f(y) - f(x) = Df(t_1)(y - x) \quad \text{y} \quad f(z) - f(y) = Df(t_2)(z - y);$$

en virtud de la monotonía de Df , debe cumplirse $Df(t_1) \leq Df(t_2)$, esto es:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

con lo que, en virtud de 8.7.9, la función f es convexa en $]a, b[$.

La demostración es completamente análoga en el caso de la concavidad. ■

8.7.11 PROPOSICIÓN. Sea $f:]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real, derivable dos veces en el intervalo abierto $]a, b[$. Entonces, la función f es convexa (respectivamente, cóncava) en el intervalo $]a, b[$ si, y sólo si, se cumple $D^2f(x) \geq 0$ para todo $x \in]a, b[$ (respectivamente, $D^2f(x) \leq 0$ para todo $x \in]a, b[$).

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

8.7.12 COROLARIO. Si $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexa (respectivamente, cóncava) y derivable en $]a, b[$, dicha función tiene un único mínimo (respectivamente, máximo) absoluto en $]a, b[$, que es uno de los extremos del intervalo si f es monótona, o bien, un punto interior del intervalo en caso contrario.

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

Caracterizada con suficiente cobertura la concavidad y la convexidad de una función, nos ocupamos a continuación de caracterizar los puntos de inflexión.

8.7.13 PROPOSICIÓN. Sea $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una función de tipo $\mathcal{C}^2[$ $]a, b[$ y sea $x_0 \in]a, b[$ un punto de inflexión de f ; se debe cumplir entonces que $D^2f(x_0) = 0$.

Demostración:

Resulta inmediatamente aplicando un razonamiento similar al de la proposición 8.7.7. En efecto, a partir de la fórmula de Taylor de f en x_0 y para $x \in B(x_0; r)$ para un cierto $r > 0$, resulta

$$f(x) - (f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)) = \frac{D^2 f(t)}{2!}(x - x_0)^2, \quad 0 < |t - x_0| < |x - x_0| < r.$$

Dado que f tiene una inflexión en x_0 , la derivada segunda de f debe tener signos distintos según que se considere $x \in]x_0 - r, x_0[$ o bien $x \in]x_0, x_0 + r[$, puesto que $(x - x_0)^2 \geq 0$, para todo $x \in B(x_0; r)$. Haciendo $x \rightarrow x_0$ y dado que la derivada segunda de f no puede tener discontinuidades de salto en ese entorno, necesariamente debe ser nula en el punto x_0 . ■

8.7.14 OBSERVACIÓN. Análogamente a lo que sucede con los puntos críticos de una función en relación a su condición de extremo local, la condición $D^2 f(x_0) = 0$ no es suficiente para que en dicho punto la función tenga una inflexión. En efecto, basta considerar por ejemplo la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$ en el origen; en ese punto se cumple $D^2 f(0) = 0$ y, no obstante, f no tiene en él un punto de inflexión, sino un mínimo absoluto. Sin embargo, para funciones derivables sucesivamente es posible establecer una condición suficiente, tal como se ve en la proposición que sigue.

8.7.15 PROPOSICIÓN. Sea $f:]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de clase $\mathcal{C}^n([a, b])$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$. Si en un punto $x_0 \in]a, b[$ se cumple:

$$\begin{cases} D^2 f(x_0) = \dots = D^{n-1} f(x_0) = 0, \\ D^n f(x_0) \neq 0, \end{cases}$$

puede afirmarse que si n es impar, entonces f tiene una inflexión en el punto x_0 .

Demostración:

Escribamos la fórmula de Taylor de f en el punto x_0 , con polinomio aproximador de grado $n - 1$:

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{D^n f(t)}{n!}(x - x_0)^n, \quad 0 < |t - x_0| < |x - x_0|, x \in]a, b[;$$

entonces, el signo de la diferencia $f(x) - (f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0))$ viene dado por el término complementario $R_n(f; x_0)(x) = \frac{D^n f(t)}{n!}(x - x_0)^n$; puesto que $D^n f(x_0) \neq 0$, dicha derivada será no nula en un entorno conveniente de x_0 , con lo que en definitiva el signo dependerá únicamente del factor $(x - x_0)^n$, el cual, al ser n impar, es distinto según sea $x > x_0$ o bien $x < x_0$, lo cual prueba la afirmación. ■

(C) Cálculo aproximado de ceros de funciones: el método de Newton.

8.7.16 Es frecuente el problema de tener que determinar un cero de una función derivable en un intervalo, esto es, un punto $t \in]a, b[$ tal que $f(t) = 0$, siendo $f:]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]a, b[$. Y siendo frecuente ese problema, son muy escasas las ocasiones en las que éste puede resolverse mediante una “fórmula”, esto es, un método directo de cálculo del cero o los ceros de la función en un intervalo, tal como ocurre, por ejemplo, si f es una función polinómica de segundo grado. En esos casos, debe recurrirse a “métodos aproximados”, es decir, métodos que proporcionen una aproximación sucesiva a la solución buscada y permitan realizar esa aproximación, con una cota prefijada para el error cometido en la aproximación.

8.7.17 El método consta de las etapas siguientes:

- Acotación: se trata de acotar el intervalo en el cual se encuentran los ceros de la función, aplicando, por ejemplo, el teorema de Bolzano.
- Separación: determinar los subintervalos en los cuales se encuentre a lo sumo un cero de f utilizando para ello propiedades de la derivada relacionadas con el crecimiento de las funciones.
- Aproximación: se trata de reducir sucesivamente la amplitud de dichos subintervalos, hasta que tengan una amplitud no superior al doble de la cota de error predeterminada. Se utiliza para ello la condición de signo constante de la derivada segunda.

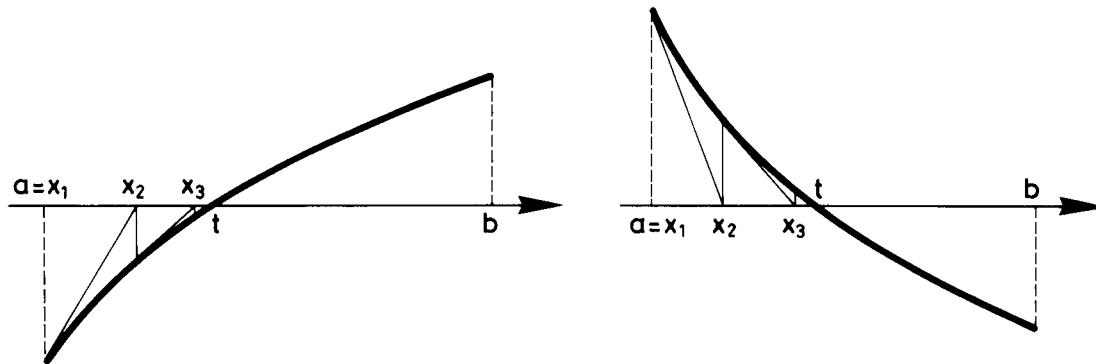


Figura 8.10. Ilustración del método de Newton.

8.7.18 El método de Newton o de la tangente. A continuación se describe brevemente uno de los métodos más conocidos para abordar la tercera etapa, esto es, para aproximar el cero de una función derivable en un intervalo: el denominado *método de Newton o de la tangente*.

- Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2(A)$ y supongamos que en un intervalo $[a, b] \subset A$ se cumplen las condiciones siguientes:
 - 1) $f(a) \cdot f(b) < 0$;
 - 2) el signo de la función D^2f es constante en el intervalo $]a, b[$;
 - 3) existe $\delta > 0$ tal que $|Df(x)| \geq \delta$ para todo $x \in]a, b[$;
 - 4) existe $k > 0$ tal que $|D^2f(x)| \leq k$ para todo $x \in]a, b[$.
- Si designamos por x_1 el extremo del intervalo en el cual las funciones f y D^2f tienen el mismo signo (véase la figura 8.10), entonces la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_1, f(x_1))$ es $y - f(x_1) = Df(x_1)(x - x_1)$; el punto de intersección de esta recta con el eje OX es:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{Df(x_1)},$$

como es inmediato comprobar.

- Escribiendo la fórmula de Taylor de la función f en el punto x_1 , se comprueba sin dificultad que el punto x_2 aproxima el cero de la función mejor que x_1 , esto es, si se designa por t el cero de f , se cumple $|t - x_2| < |t - x_1|$ (para más detalles, véase, por ejemplo, la referencia [Or]).

- Tomando ahora x_2 como nuevo extremo del intervalo e iterando el método, se obtienen aproximaciones sucesivas del cero de la función, que vienen dadas por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{Df(x_n)}, \quad n \geq 2,$$

que permiten obtener dichas aproximaciones dando valores a $n \in \mathbb{N}$.

- En cuanto a la acotación del error, se demuestra sin dificultad (véase, por ejemplo, la referencia [Or]) que se cumple:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{k|x_n - t|^2}{2\delta},$$

lo cual pone de manifiesto que el error cometido se eleva al cuadrado en cada iteración y, en consecuencia, disminuye muy deprisa (se dice que la aproximación hacia t es cuadrática).

8.7.19 EJEMPLO. Con el fin de ilustrar la aplicación del método de Newton, vamos a obtener una aproximación del número irracional $t = \sqrt{2}$, considerando que dicho número es un cero de la función $f(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Es inmediato establecer que $t \in]1, 2[$, que la función f es convexa en el intervalo $[1, 2]$, que f es positiva en $x_1 = 2$ y que se cumple $Df(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$ y $D^2f(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$. En consecuencia, pueden obtenerse las siguientes aproximaciones sucesivas de $t = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 - \frac{f(2)}{Df(2)} = 2 - \frac{2}{4} = 1.5, \\ x_3 &= 1.5 - \frac{f(1.5)}{Df(1.5)} = 1.5 - \frac{0.25}{3} = 1.416666, \\ x_4 &= 1.416666 - \frac{f(1.416666)}{Df(1.416666)} = 1.416666 - \frac{0.006942}{2.833332} = 1.414215, \\ x_5 &= 1.414215 - \frac{f(1.414215)}{Df(1.414215)} = 1.414215 - \frac{0.000004}{2.82843} = 1.414213 \end{aligned}$$

En definitiva, puede afirmarse que $\sqrt{2} \simeq 1.414213$ con un error menor que 10^{-6} . Obsérvese la rapidez de la convergencia de este método, comparándolo con el método de la bisección (véase 5.2.3).

Por último, queremos destacar que la expresión de la fórmula de Newton permite, en este caso, obtener una sucesión recurrente que converge hacia $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

(D) Algunos ejemplos de aplicaciones físicas.

La noción de derivada de una función y sus propiedades permite la formulación de modelos matemáticos de interrelación de las magnitudes (variables) que intervienen en procesos o sistemas dinámicos cuyo estudio corresponde a campos muy diversos de la Física y de la Técnica, tales como la cinemática, la dinámica de planetas, la mecánica de fluidos, la dinámica de poblaciones, entre otros muchos. Veamos a continuación una pequeña muestra de esta aplicación.

8.7.20 EJEMPLO. Una disolución pasa desde un filtro cónico de 16 cm de diámetro y 24 cm de altura a un vaso cilíndrico de 12 cm de diámetro; se trata de calcular la velocidad a que asciende el nivel de la disolución en el vaso, en el instante en el cual la altura de la disolución en el filtro es de 12 cm y su nivel desciende a la velocidad de 1 cm/min.

Sean $h: [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R}$ y $H: [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones que en cada instante $t \in [0, T_0]$ dan las alturas respectivas de la disolución en el filtro y en el vaso cilíndrico, siendo T_0 el tiempo que dura el proceso de vaciado del filtro, esto es, de paso de la disolución desde el filtro al vaso. Está claro que ambas funciones tienen variación estricta en su dominio: h es estrictamente decreciente y H es estrictamente creciente. La forma de los contornos de los recipientes permite suponer también que ambas funciones son continuas en su dominio y derivables en el intervalo $]0, T_0[$. Como valores iniciales y de contorno del problema, se tienen:

$$h(0) = 24, \quad h(T_0) = 0, \quad H(0) = 0.$$

Indiquemos mediante $V_f: [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R}$ y $V_c: [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones que dan, respectivamente, el volumen de disolución presente en cada instante t en el filtro y en el vaso cilíndrico; ambas funciones son continuas en su dominio y derivables en el abierto correspondiente. Si designamos por $r: [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R}$ la función que en cada instante t da el radio del cono que forma la disolución en el filtro, es inmediato ver, por semejanza de triángulos, que $r(t) = \frac{1}{3}h(t)$, para todo $t \in [0, T_0]$. Por geometría elemental, sabemos que se cumple:

$$V_f(t) = \frac{\pi}{3}r^2(t)h(t) = \frac{\pi}{27}h^3(t); \quad V_c(t) = \pi 6^2 H(t).$$

La suma de estas dos funciones es constante en todo instante del proceso: el volumen inicial de disolución contenida en el filtro; en consecuencia, la derivada de su suma será la función nula en $[0, T_0]$, esto es, se cumple

$$DV_f(t) + DV_c(t) = \frac{\pi}{27}3h^2(t)Dh(t) + 36\pi DH(t) = 0.$$

Si se indica por t_0 el instante a que se refiere el enunciado y se sustituye el valor de la derivada $Dh(t_0) = -1$ cm/min (negativo puesto que es una función decreciente), resulta entonces

$$\frac{1}{9}12^2(-1) + 36DH(t_0) = 0 \quad \implies \quad DH(t_0) = \frac{4}{9} \text{ cm/min},$$

que es la velocidad buscada.

8.7.21 EJEMPLO. Un depósito contiene V m³ de una disolución salina de concentración inicial C_0 kg/m³. Por un grifo superior se vierte al depósito con caudal constante q , una disolución de concentración C_1 kg/m³, mientras que por otro grifo se extrae disolución del depósito con el mismo caudal de vertido. Si se supone que la concentración del depósito es uniforme, esto es, la misma en todo punto en un instante dado, se trata de calcular la función que, en cada instante, permite conocer la concentración de la disolución en el depósito.

Designemos por $C: [0 + \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la función tal que, para cada instante $t \geq 0$, $C(t)$ es la concentración de la disolución en el depósito en ese instante; precisamente es la expresión analítica de esta función lo que se trata de calcular. Si $h > 0$, consideremos un intervalo cualquiera de tiempo $[t, t+h] \subset [0, +\infty[$ y hagamos balance de la variación de la concentración en el depósito en ese intervalo, de la sencilla forma siguiente:

$$\text{Concentración final} = \text{Concentración inicial} + \text{Variación de la concentración.}$$

Si se indica mediante \bar{C} la concentración de la disolución en el depósito en un instante cualquiera \bar{t} del intervalo $[t, t+h]$, se tendrá

$$C(t+h) = C(t) + \left(\frac{C_1qh}{V} - \frac{\bar{C}qh}{V} \right) = C(t) + \frac{qh}{V} (C_1 - \bar{C}).$$

Esta ecuación puede escribirse

$$\frac{C(t+h) - C(t)}{h} = \frac{q}{V} (C_1 - \bar{C}).$$

La función C es continua en su dominio y derivable en $]0, +\infty[$, y, por definición de \bar{C} , se cumple que $\lim_{h \rightarrow 0} \bar{C} = C(t)$, con lo cual se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(t+h) - C(t)}{h} = C'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q}{V} (C_1 - \bar{C}),$$

es decir:

$$\frac{C'(t)}{C_1 - C(t)} = \frac{q}{V}.$$

Esto significa que las funciones

$$f(t) = -\ln |C_1 - C(t)|, \quad t > 0 \quad \text{y} \quad g(t) = \frac{qt}{V}, \quad t > 0$$

tienen la misma derivada y, por lo tanto, su diferencia es una constante λ . Así, pues, se cumple

$$-\ln |C_1 - C(t)| - \frac{qt}{V} = \lambda,$$

con lo que

$$|C_1 - C(t)| = K \exp\left(-\frac{qt}{V}\right),$$

(se ha escrito $K = e^{-\lambda}$). Puesto que $C(0) = C_0$, resulta que $K = |C_1 - C_0|$, es decir:

$$|C_1 - C(t)| = |C_1 - C_0| \exp\left(-\frac{qt}{V}\right) \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Queda ahora hacer las consideraciones finales:

- si se cumple $C_1 = C_0$, la solución es trivial: la concentración en el depósito se mantiene constante y $C(t) = C_0$ para todo $t \geq 0$;
- si $C_1 > C_0$, entonces $|C_1 - C_0| = C_1 - C_0$ y teniendo en cuenta que $C(0) = C_0$, resulta

$$C(t) = C_1 - (C_1 - C_0) \exp\left(-\frac{qt}{V}\right) \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

- si $C_1 < C_0$, entonces $|C_1 - C_0| = -(C_1 - C_0)$ y teniendo en cuenta que $C(0) = C_0$, resulta

$$C(t) = C_1 + (C_1 - C_0) \exp\left(-\frac{qt}{V}\right) \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

- Obsérvese que, en cualquier caso, se cumple $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = C_1$, es decir, la concentración de la disolución en el depósito tiene como valor asintótico la concentración de la disolución que se vierte al depósito.

Queremos destacar que se ha abordado la resolución del problema sin hablar de “elementos diferenciales de tiempo” ni de “incrementos infinitamente pequeños”, como es habitual encontrar en estos casos.

8.7.22 EJEMPLO. La variación en cada instante del número de átomos de una especie radiactiva es proporcional a la población existente en dicho instante. Si se ha medido experimentalmente que en T_0 horas la población se ha reducido a la mitad, calcular la evolución del número de átomos de la especie en función del tiempo.

Si se designa por $N: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la función que a cada instante asigna el número de átomos presente, se trata de establecer la expresión analítica de dicha función. La formulación matemática de la ley de variación de la población es

$$N'(t) = -\lambda N(t) \text{ para todo } t \geq 0,$$

habiéndose puesto el signo $-$ para especificar que se trata de una derivada negativa al ser N una función estrictamente decreciente y habiendo designado por $\lambda > 0$ la constante de proporcionalidad (que es un parámetro característico de la especie considerada y denominado *constante radiactiva*). Reescribiendo la ecuación anterior en la forma

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda \text{ para todo } t \geq 0.$$

Observando que $\frac{N'(t)}{N(t)}$ es la derivada de la función $f(t) = \ln(N(t))$, $t \geq 0$ y que $-\lambda$ es la derivada de la función $g(t) = -\lambda t$ para todo $t \geq 0$, la ecuación anterior pone de manifiesto que $f'(t) = g'(t)$ para todo $t \geq 0$, con lo que la diferencia entre ambas funciones es una constante:

$$\ln N(t) + \lambda t = C \text{ para todo } t \geq 0,$$

con lo que

$$N(t) = K e^{-\lambda t} \text{ para todo } t \geq 0.$$

(Se ha escrito $K = e^C$). Si inicialmente hay presentes N_0 átomos, esto es, $N(0) = N_0$, de la ecuación anterior se deduce inmediatamente que $N_0 = K$, es decir

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Pero por otro lado, sabemos que $N(T_0) = \frac{N(0)}{2}$ (el tiempo T_0 recibe el nombre de *periodo de semi-desintegración*), con lo que

$$N(T_0) = \frac{N(0)}{2} = N(0)e^{-\lambda T_0} \implies \lambda = \frac{\ln 2}{T_0}.$$

En definitiva, la expresión analítica de $N(t)$ para cada $t \geq 0$ es la siguiente

$$N(t) = N(0) e^{-\frac{\ln 2}{T_0} t}, \quad t \geq 0.$$

8.8 EJERCICIOS.

1. Determinar los extremos absolutos de las funciones que siguen, en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, en $[-2, 2]$; b) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, en $[-10, 10]$;

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, en $[0.01, 100]$; d) $f(x) = \left| \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \right|$, en $[1, 3]$.

2. Calcular los máximos y mínimos locales y determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{e^x}{x^4}$, $x \neq 0$;

d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \left(\frac{x^4}{1-x} \right)^{1/3}$, $x < 1$;

e) $f(x) = x^{4/3}(1-x)^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = x^{100} + x^{50}$, $x \in \mathbb{R}$;

f) $f(x) = x(12 - 2x)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en $A \subset \mathbb{R}$; una recta $y = mx + b$ se dice que es una *asíntota oblicua* de la curva plana $y = f(x)$ si existen los límites:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx),$$

donde se ha escrito ∞ para indicar que dichos límites deben calcularse en $+\infty$ y en $-\infty$. Si $m = 0$, la asíntota es horizontal. La recta $x = x_0$ se dice que es una *asíntota vertical* de $y = f(x)$, si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f = \infty$ o

bien si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f = \infty$. Calcúlense las asíntotas de las curvas planas siguientes:

a) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$; b) $y = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; c) $y = \frac{x^3 + 2}{4x^2}$; d) $y = x^3 e^{-x}$.

4. Una estatua de altura H está situada sobre un pedestal de altura h . Determinése a qué distancia del pie del pedestal debe situarse un observador para ver la estatua con un ángulo de visión máximo.

5. En el centro de la plaza mayor (circular de radio R) de un pueblo quiere colocarse un foco para iluminar el baile de la noche de la fiesta mayor. Calcúlese a qué altura ha de colocarse dicho foco con el fin de alumbrar lo mejor posible el contorno de la plaza.

(Nota: La iluminación en el contorno de plaza sigue la ley $i = \frac{A \operatorname{sen} \alpha}{h^2 + R^2}$, siendo R el radio de la plaza, h la altura del foco, α el ángulo que forman los rayos luminosos con el suelo y A una constante que depende de la intensidad de la luz que emite el foco).

6. Admitiendo que la resistencia a la flexión de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de la base por el cuadrado de la altura de dicha sección, determinése las dimensiones de la viga de máxima resistencia que se puede elaborar a partir de un tronco cilíndrico de radio R .

7. Los vehículos que circulan por el carril único de un túnel deben guardar entre ellos una distancia de seguridad que se relaciona con su velocidad media v mediante $D = 18 + v + \frac{v^2}{32}$. Calcúlese:

- 1) el número de vehículos que pasan en una hora por un punto dado;
- 2) a qué velocidad es máximo el volumen de tránsito.
8. Calcúlese el punto del primer cuadrante de la elipse de ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$, tal que la tangente a dicha curva en él determina con los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima.
9. Se tiene un alambre de longitud L m; se corta dicho alambre en dos partes: con la primera se forma un cuadrado y con la segunda una circunferencia. Calcúlese la longitud de cada parte para que la suma de las áreas de dichas figuras sea: (a) máxima; (b) mínima.
10. Determinése la ecuación de la recta que, pasando por el punto $(1, 2)$, determina con los ejes de coordenadas un segmento de longitud mínima en el primer cuadrante.
11. Se considera un círculo de radio R . Determinése el sector circular que se debe eliminar para que, con lo que queda de círculo, se construya un embudo cónico de volumen máximo.
12. Un rayo luminoso incide sobre la superficie plana que separa dos medios; en el primero, la luz se desplaza a velocidad v_1 km/s y en el segundo, a velocidad v_2 km/s. Se sabe que la luz se desplaza de forma tal que el paso de un punto a otro se hace en el mínimo tiempo posible. Pruébese que, con esta hipótesis, los ángulos α_1 y α_2 que forman los rayos con la normal a la superficie que separa ambos medios cumplen la ecuación $\frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$, conocida como *ley de la refracción o ley de Snell*.
13. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto $]a, b[$, tal que $f(a) = f(b) = 0$. Pruébese que cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $c \in]a, b[$ tal que $Df(c) = \alpha f(c)$. (Indicación: aplíquese el teorema de Rolle a la función $F(x) = f(x)g(x)$, $x \in [a, b]$, siendo g una función definida convenientemente).
14. La función $f(x) = 1 - (x-1)^{2/3}$, $0 \leq x \leq 2$ se anula en los extremos de su dominio y, no obstante, es fácil comprobar que no existe ningún $t \in]0, 2[$ tal que $Df(t) = 0$. Discutir este hecho bajo el punto de vista del teorema de Rolle.
15. Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función derivable, tal que $|Df(x)| \neq 1$ para todo $x \in]0, 1[$. Pruébese que existen unos únicos $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tales que $f(\alpha) = \alpha$ y $f(\beta) = 1 - \beta$.
16. Aplicando la fórmula del incremento finito, demuéstrense las desigualdades siguientes:
- $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq \operatorname{arcsen} x \geq x$, si $0 \leq x < 1$;
 - $1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{2(1+x)^{3/2}}$, si $x > -1$;
 - $\ln(1+x^2) \leq x^2$, si $x \geq 0$.
 - $e^x \geq 1 + x$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
 - $1 - \frac{a}{x} \leq \ln \frac{x}{a} \leq \frac{x}{a} - 1$, si $x > 0$ y $a > 0$;
 - $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, si $x > 0$.

17. Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en su dominio y derivables en el abierto $]a, b[$. Pruébese que:

a) Si $Df(x) - Dg(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, entonces

$$f(x) \geq g(x) + f(a) - g(a) \text{ para todo } x \in [a, b];$$

b) si $M, m \in \mathbb{R}$ son tales que $m < Df(x) - Dg(x) < M$ para todo $x \in]a, b[$, utilizando el teorema del valor medio, para todo $x \in [a, b]$ se cumple

$$f(x) + f(a) - g(a) + m(x - a) \leq f(x) \leq g(x) + f(a) - g(a) + M(x - a).$$

18. Calcúlense aproximadamente los valores que se indican y acótese en cada caso el error cometido:

a) $\sqrt{227}$; b) $(3.001)^3$; c) $\frac{1}{999}$.

19. Calcúlense los límites que siguen, razonando en cada caso por qué no pueden calcularse por aplicación de la regla de l'Hôpital:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{e^x - 1}$.

20. Calcúlese, si existen, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda x} - e^x - x}{x^2}$, sea finito y calcular entonces dicho límite.

21. Calcúlense los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - x}{2x - \arcsin x}$;	i) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \cot \left(\frac{3\pi}{2} - 1 \right)$;
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;	j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x - 5}{4 + \sec x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1 - x)$;	k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$, $a, b > 0$;
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x$, $a, b > 0$;	l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\tan x - \operatorname{sen} x) - x^3}{x^5}$;
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right)$;	m) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$;
f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x + e^{2x})^{1/x}$;	n) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln x}{\cot x}$;
g) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} (3 - 4x) \tan \frac{2\pi}{3} x$;	o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \frac{e^x - 1}{x}$;
h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{5}} (1 + \operatorname{sen} 5x)^{\tan \frac{5x}{2}}$;	p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

22. Acótese el error que se comete si se toma la aproximación:

$$\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1.$$

Calcúlese aproximadamente el valor de $\ln 1.002$, y acótese el error cometido en dicha aproximación.

23. Por aplicación de la fórmula de Taylor, pruébese que se cumple

$$x - \frac{x^3}{3} \leq \operatorname{sen} x \leq x \quad \text{para todo } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

24. Desarrollar mediante la fórmula de Taylor la función polinómica $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$, $x \in \mathbb{R}$, en potencias de $(x - 1)$. Hágase lo mismo por otro método.

25. Determinése el polinomio de Maclaurin de segundo grado, $T_2(x)$, de la función definida por $f(x) = (1 + x)^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$. Acótese el término complementario de Lagrange, $R_3(x)$, en el caso $x > 0$.

26. Calcúlese el número de términos del desarrollo de Taylor de la función definida por $f(x) = \ln(1 - x)$, $x < 1$ que se han de tomar, para poder obtener el valor de $\ln(0.83)$ con cuatro cifras decimales exactas. Calcúlese dichas cifras.

27. Determinése los $x \in \mathbb{R}$ tales que $\left| \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} \right| < 10^{-3}$.

28. Calcúlese el primer término no nulo del desarrollo en serie de Maclaurin de la función $f(x) = 2 \ln(1 + x) - \cos^2 x + 1 - 2x$, $x \in]-1, +\infty[$ y aplíquese el resultado al cálculo del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + x) - \cos^2 x + 1 - 2x}{\operatorname{sen}^3 x}.$$

29. Utilizando el desarrollo en serie de potencias, calcúlese los límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^2}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3}; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}.$$

30. a) Calcular el desarrollo de orden 3 de la función $f(x) = \exp(\operatorname{sen} x)$, $x \in \mathbb{R}$, en torno al origen.

b) Calcular el desarrollo en serie de potencias en el origen, de la función definida por $f(x) = \frac{1}{1 + x}$ para todo $x \in]-1, 1[$.

c) Calcular el desarrollo en serie de potencias en el origen de la función definida por $f(x) = \ln(1 + x)$ para todo $x \in]-1, 1[$.

d) Calcular el desarrollo en serie de potencias en el origen de la función definida por $f(x) = \operatorname{arctan} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

31. Aplicando el método de Newton, determinar aproximadamente las raíces de las ecuaciones que siguen, con un error ε indicado en cada caso:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \cos x = x, \quad \varepsilon < 10^{-3}; & \text{b) } \operatorname{sen} x = x^2, \quad \varepsilon < 10^{-5}; & \text{c) } x^3 - 2x^2 + 3x = 5, \quad \varepsilon < 10^{-4}; \\ \text{d) } x^3 + 1 = 2x^2, \quad \varepsilon < 10^{-4}; & \text{e) } \ln x = x - 2, \quad \varepsilon < 10^{-5}. \end{array}$$

8.9 GUÍA DE REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[Ba] **BARTLE, R.G. y D.R. SHERBERT.** *Introducción al Análisis Matemático de una variable.* En el capítulo 5 de esta obra se tratan conjuntamente la derivada de una función y las propiedades de las funciones derivables. Así, en el apartado 5.2 se estudia el teorema del valor medio de Lagrange, que se demuestra a partir del teorema de Rolle; se estudian asimismo algunos criterios de monotonía para funciones derivables y algunas aplicaciones adicionales del teorema del valor medio. El apartado 5.3 trata de las reglas de L'Hôpital, introduciendo el concepto de forma indeterminada, desarrollando las indeterminaciones $0/0$ y ∞/∞ y, a continuación, el resto de indeterminaciones. El apartado 5.4 trata de la fórmula de Taylor y sus aplicaciones a cálculos aproximados, determinación de extremos de funciones derivables, convexidad y aproximación de las raíces de una ecuación. Debe destacarse la buena colección de ejercicios que contiene al final de cada sección.

[Ca] **CALM, R., N. COLL y R. ESTELA.** *Problemes de Càlcul.* Este texto presenta una muy buena y completa colección de ejercicios, todos ellos resueltos. El contenido de nuestro capítulo 8 se corresponde con el de los capítulos 4 y 5; así, en el capítulo 4 se tratan las funciones derivables y sus propiedades y en el capítulo 5 se desarrolla la representación de funciones reales de variable real, se ven algunas de las aplicaciones tratadas aquí y se aplican a la representación gráfica de dichas funciones.

[Li] **LINÉS, E.** *Principios de Análisis Matemático.* Las propiedades de las funciones derivables, se desarrollan en los capítulos 18 y 19 de esta excelente obra. En el capítulo 18 se desarrollan los teoremas del valor medio y la regla de L'Hôpital y en el capítulo 19 se tratan la fórmula de Taylor y sus aplicaciones. Como es habitual en este autor, el tratamiento de los temas es sumamente completo y contiene una excelente colección de ejercicios propuestos.

[Or] **ORTEGA, J.M.** *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.* El capítulo 8 que acabamos de ver aquí se corresponde con los apartados IV.2, IV.3 y parte del IV.1, en el cual se estudia el crecimiento y los extremos de una función. El apartado IV.2 trata de los teoremas del valor medio, que se estudian en un orden distinto al que nosotros hemos llevado a cabo; las reglas de L'Hôpital se desarrollan como una aplicación de dichos teoremas. La fórmula de Taylor y sus aplicaciones se tratan en el apartado IV.3. Se incluye un apéndice al capítulo IV en el cual se ven métodos de aproximación de las raíces de una ecuación. También es recomendable la lectura de la nota histórica que el autor incluye al final del capítulo sobre la historia del cálculo diferencial.

[Spv] **SPIVAK, M.** *Calculus.* Las propiedades de las funciones derivables (tal como se han visto en nuestro capítulo 8), se presentan en diversos capítulos de esta obra. En concreto, en el capítulo 11 se tratan en primer lugar los extremos de funciones, los teoremas de Rolle y del valor medio, así como algunas aplicaciones al estudio del crecimiento de funciones; a continuación, se ven el teorema del valor medio de Cauchy y la regla de L'Hôpital. En un apéndice de este capítulo se trata la concavidad y la convexidad de funciones. La fórmula de Taylor se desarrolla en el capítulo 19, el cual se dedica por completo al tema, una vez visto el Cálculo Integral. El desarrollo en serie de potencias de las funciones derivables, se trata en el capítulo 23. Debe destacarse en esta obra la excelente colección de ejercicios en cada uno de los capítulos mencionados.

CAPÍTULO 9

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES: FUNDAMENTOS

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El Cálculo Integral tiene sus orígenes en los trabajos de I. Newton y G. Leibniz (hacia finales del siglo XVII) sobre el problema de calcular el área bajo una curva plana. Ambos matemáticos lo resolvieron desconociendo mutuamente sus trabajos respectivos y por caminos diferentes. Newton enfocó el problema planteando el cálculo de áreas como un proceso inverso a la derivación, mientras que Leibniz utilizó las sumas, de un modo similar al que se verá en el primer apartado. Posteriormente, Cauchy introdujo un mayor rigor en la teoría de la integral, que fue luego generalizada por Riemann y más adelante por Lebesgue.

El capítulo se desarrolla de acuerdo con el esquema que se describe a continuación.

En el apartado 9.1 se introducen los conceptos básicos de la teoría de la integral de Riemann y se llega hasta la definición de integral de una función en un intervalo y de funciones integrables, estableciendo una caracterización de las mismas.

En el apartado 9.2, se estudian las propiedades básicas de la integral de Riemann y los teoremas del valor medio integral.

En el apartado 9.3 se ve una forma equivalente de definir la integral de Riemann de una función, expresándola como el límite de unas sumas (sumas de Riemann).

En el apartado 9.4 se estudia la relación entre la convergencia uniforme de una sucesión de funciones integrables y la integrabilidad de su función límite; se ven asimismo las series funcionales y la integración de la suma de series de potencias.

9.1 LA INTEGRAL DE RIEMANN: CONCEPTOS BÁSICOS.

El problema que se pretende resolver con la integración de funciones puede ilustrarse geométricamente, en primera aproximación, como la determinación del área del subconjunto de \mathbb{R}^2 limitado por la gráfica de una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y positiva en un cierto intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} , el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$, tal como se ve en la figura 9.1. En este apartado se desarrollarán los conceptos básicos de la teoría de la integral de Riemann.

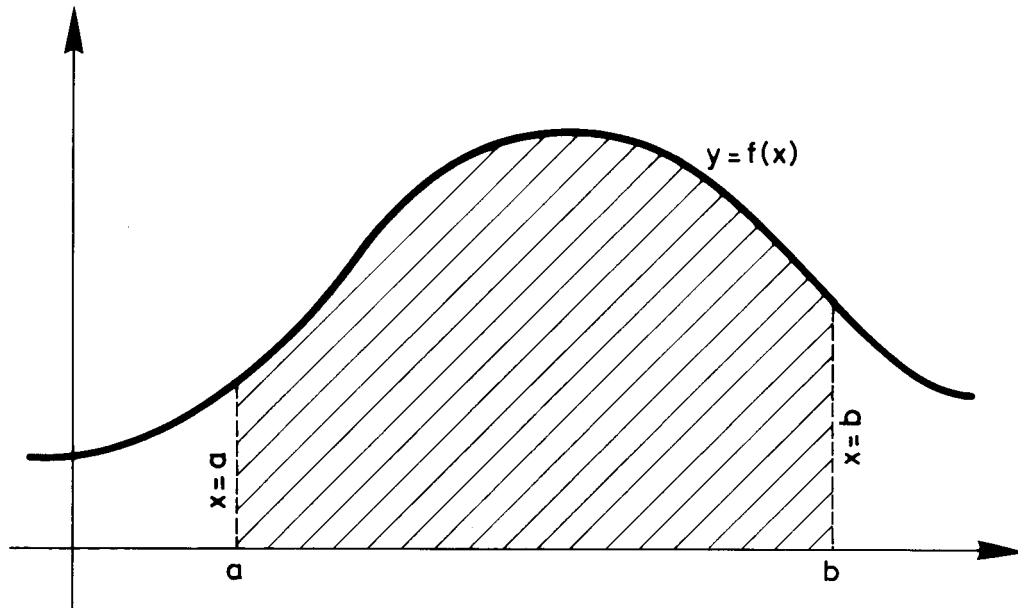


Figura 9.1. Área limitada por una curva plana.

9.1.1 DEFINICIÓN. (*Partición de un intervalo cerrado. Conjunto de particiones*). Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de \mathbb{R} . Se denomina *partición de $[a, b]$* todo conjunto de puntos $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, tal que se cumple $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Designaremos por $\mathcal{P}[a, b]$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$. En el conjunto $\mathcal{P}[a, b]$ se define una relación de orden del modo siguiente: dadas dos particiones $p, q \in \mathcal{P}[a, b]$, se dice que q es *más fina* que p y se escribe $q \geq p$, si q contiene a p , esto es $q \supset p$, lo cual significa que la partición q contiene los mismos puntos que p y algunos más. También se dice, equivalentemente, que p es *menos fina* que q y se escribe $p \leq q$. Obsérvese que, en virtud de la definición, dada una partición $p \in \mathcal{P}[a, b]$, se obtiene otra partición más fina que p , añadiendo a ésta un número finito de puntos del intervalo.

Compruébese como ejercicio que, efectivamente, \geq es una relación de orden en el conjunto de particiones $\mathcal{P}[a, b]$.

9.1.2 DEFINICIÓN. (*Sumas inferiores y sumas superiores asociadas a una partición*). Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real acotada en su dominio. Dada una partición cualquiera $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, en cada subintervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, existen los números reales:

$$m_i = \inf\{f(x), x \in I_i\} \quad \text{y} \quad M_i = \sup\{f(x), x \in I_i\}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Se denomina *suma inferior de f asociada a p* , designada mediante $\underline{S}(f; p)$, al número real definido por

$$\underline{S}(f; p) = m_0(x_1 - a) + m_1(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(b - x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i).$$

Se denomina *suma superior de f asociada a p* , designada $\overline{S}(f; p)$, al número real

$$\overline{S}(f; p) = M_0(x_1 - a) + M_1(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(b - x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Es habitual también emplear la notación $L(f; p)$ y $U(f; p)$ para designar, respectivamente, la suma inferior y la suma superior de f asociadas a la partición p .

En la figura 9.2 puede verse una ilustración de la interpretación geométrica de las sumas inferiores y las sumas superiores.

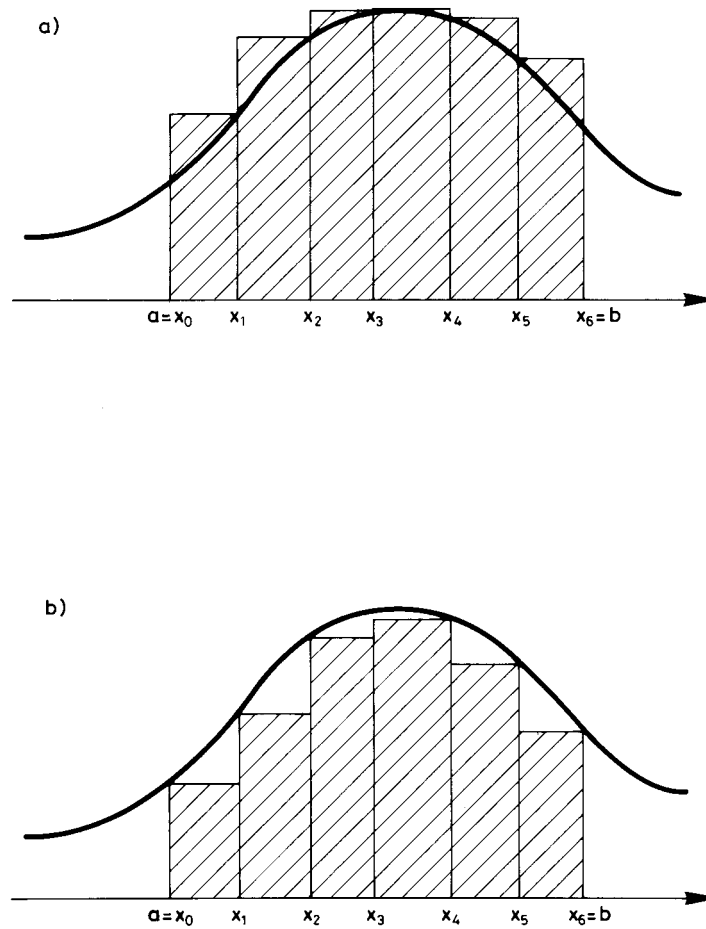


Figura 9.2. Ilustración de las sumas superiores y las sumas inferiores.

Vamos a estudiar a continuación las propiedades más importantes de las sumas inferiores y superiores de una función, asociadas a una partición.

9.1.3 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en su dominio; cualquiera que sea la partición $p \in \mathcal{P}[a, b]$, se cumple $\underline{S}(f; p) \leq \overline{S}(f; p)$.

Demostración:

Si $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$, en cada subintervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, se verifica por definición que $m_i \leq M_i$, con lo que

$$\underline{S}(f; p) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) = \overline{S}(f; p),$$

quedando probada la desigualdad. ■

9.1.4 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $p \in \mathcal{P}[a, b]$ una partición cualquiera; para cualquier otra partición $q \in \mathcal{P}[a, b]$ más fina que p , se cumplen las desigualdades

$$\underline{S}(f; q) \geq \underline{S}(f; p) \quad \text{y} \quad \overline{S}(f; q) \leq \overline{S}(f; p),$$

esto es, al afinar una partición crece la suma inferior y decrece la suma superior.

Demostración:

Dado que se cumple $q \geq p$, ello significa que q puede obtenerse añadiendo a p un número finito de puntos del intervalo; para el razonamiento, basta considerar el caso en que se añade un punto, esto es, $q = p \cup \{\alpha\}$. Existe entonces un índice i tal que $x_i < \alpha < x_{i+1}$; escribiendo entonces

$$m_i = \inf\{f(x) / x \in [x_i, x_{i+1}]\}, \quad m'_i = \inf\{f(x) / x \in [x_i, \alpha]\} \quad \text{y} \quad m''_i = \inf\{f(x) / x \in [\alpha, x_{i+1}]\},$$

se cumplen las desigualdades: $m_i \leq m'_i$ y $m_i \leq m''_i$. Aplicando ahora la definición de suma inferior, se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{S}(f; q) &= m_0(x_1 - x_0) + \dots + m'_i(\alpha - x_i) + m''_i(x_{i+1} - \alpha) + \dots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \geq \\ &\geq m_0(x_1 - x_0) + \dots + m_i(\alpha - x_i) + m_i(x_{i+1} - \alpha) + \dots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = \\ &\geq m_0(x_1 - x_0) + \dots + m_i(x_{i+1} - x_i) + \dots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = \underline{S}(f; p). \end{aligned}$$

El caso en el cual $q = p \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ es una mera iteración. El razonamiento para las sumas superiores es completamente análogo. ■

9.1.5 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada; si p, q son dos particiones cualesquiera del intervalo $[a, b]$, se cumple $\underline{S}(f; p) \leq \overline{S}(f; q)$, esto es, cualquier suma inferior es menor que cualquier suma superior.

Demostración:

Inmediata, pues dadas $p, q \in \mathcal{P}[a, b]$ dos particiones cualesquiera, basta considerar la partición $r = p \cup q$, que por definición es más fina que ambas, esto es, se cumple $r \geq p$ y $r \geq q$. Aplicando ahora la proposición anterior y teniendo en cuenta 9.1.3, se obtiene

$$\underline{S}(f; p) \leq \underline{S}(f; r) \leq \overline{S}(f; r) \leq \overline{S}(f; q),$$

que completa el razonamiento. ■

9.1.6 DEFINICIÓN. (*Integral inferior e integral superior de una función*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada; dada una partición cualquiera $p \in \mathcal{P}[a, b]$, existen las sumas inferior y superior de f asociadas a p . En virtud de 9.1.5, la suma superior $\overline{S}(f; p)$ es una cota superior del conjunto de todas las sumas inferiores asociadas a cualquier partición, con lo que dicho conjunto está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, existe el supremo de dicho conjunto. De forma análoga, la suma inferior $\underline{S}(f; p)$ es una cota inferior del conjunto de todas las sumas superiores asociadas a cualquier otra partición, con lo que este conjunto está acotado inferiormente y tiene ínfimo.

- Se define la *integral inferior de f en $[a, b]$* , mediante $\int_a^b f = \sup_{p \in \mathcal{P}[a, b]} \{\underline{S}(f; p)\}$, y la *integral superior de f en $[a, b]$* , mediante $\overline{\int_a^b f} = \inf_{p \in \mathcal{P}[a, b]} \{\overline{S}(f; p)\}$.
- Está claro que, en virtud de su definición, se cumplen las desigualdades

$$\underline{S}(f; p) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \leq \overline{S}(f; p),$$

cualquiera que sea la partición p del intervalo $[a, b]$.

9.1.7 OBSERVACIÓN. Puesto que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada en su dominio, existen el ínfimo y el supremo del conjunto de valores de f en el intervalo, esto es, existen $m = \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ y $M = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$. La partición menos fina de un intervalo cerrado es la formada por los extremos del mismo, esto es $\pi = \{a, b\}$, siendo la suma inferior asociada $\underline{S}(f; \pi) = m(b-a)$ y la suma superior asociada $\overline{S}(f; \pi) = M(b-a)$; si $p \in \mathcal{P}[a, b]$ es cualquier otra partición, se cumple $p \geq \pi$ y en consecuencia se cumple

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f; p) \leq \overline{S}(f; p) \leq M(b-a),$$

con lo que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \leq M(b-a).$$

9.1.8 DEFINICIÓN. (*Funciones integrables en el sentido de Riemann*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en su dominio; se dice que f es *integrable en el sentido de Riemann* (en adelante diremos simplemente *integrable*) si coinciden sus integrales inferior y superior, esto es, si se cumple:

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}.$$

Entonces, se denomina *integral de f en $[a, b]$* o *integral de f entre a y b* el valor común de la integral superior y la integral inferior de f en $[a, b]$ y se escribe $\int_a^b f$ o bien $\int_a^b f(x)dx$, (en el apartado 9.3 justificaremos la segunda notación). Por definición, si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, se cumplen las desigualdades

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a),$$

siendo $m, M \in \mathbb{R}$ los valores definidos en 9.1.7.

Se admite por convenio que

$$\int_a^a f = 0 \quad \text{y} \quad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

9.1.9 EJEMPLO. Vamos a aplicar la definición de función integrable en el sentido de Riemann en un par de casos concretos sencillos.

- 1) Funciones constantes. Considérese la función constante $\lambda: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\lambda(x) = \lambda$ para todo $x \in [a, b]$. Esta función es evidentemente acotada en su dominio y, para cualquier partición $p \in \mathcal{P}[a, b]$, se cumplen las igualdades $\underline{S}(\lambda; p) = \lambda(b-a)$ y $\overline{S}(\lambda; p) = \lambda(b-a)$. En consecuencia, se tiene que

$$\int_a^b \lambda = \sup_{p \in \mathcal{P}[a, b]} \{\underline{S}(\lambda; p)\} = \lambda(b-a), \quad \text{y} \quad \int_a^b \lambda = \inf_{p \in \mathcal{P}[a, b]} \{\overline{S}(\lambda; p)\} = \lambda(b-a).$$

Así, pues, puede afirmarse en virtud de la definición 9.1.8, que toda función constante en un intervalo $[a, b]$ es integrable en dicho intervalo y se cumple $\int_a^b \lambda = \lambda(b-a)$, verificándose en este caso que $M = m = \lambda$.

- 2) La función de Dirichlet. Considérese la función $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ denominada *función de Dirichlet*. Si $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$, en cada subintervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$ inducido por la partición, se cumplen las igualdades $\inf_{x \in I_i} \{f(x)\} = 0$ y $\sup_{x \in I_i} \{f(x)\} = 1$, con lo que $\underline{S}(\delta; p) = 0$ y $\overline{S}(\delta; p) = b-a$, cualquiera que sea la partición $p \in \mathcal{P}[a, b]$. Así pues, se cumplen las igualdades

$$\int_a^b \delta = \sup_{p \in \mathcal{P}[a, b]} \{\underline{S}(\delta; p)\} = 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b \delta = \inf_{p \in \mathcal{P}[a, b]} \{\overline{S}(\delta; p)\} = b-a,$$

lo cual prueba que la función de Dirichlet δ no es integrable en el sentido de Riemann.

No resulta siempre tan sencillo establecer la integrabilidad o la no integrabilidad de una función en un intervalo, aplicando únicamente la definición correspondiente; por este motivo, nos ocuparemos a continuación de profundizar en el estudio de la noción de integrabilidad y obtener caracterizaciones más operativas. La proposición que sigue es un primer paso en ese sentido.

9.1.10 PROPOSICIÓN. (*Caracterización de la integrabilidad*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada; una condición necesaria y suficiente para que f sea integrable en $[a, b]$ es que cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ exista una partición $p \in \mathcal{P}[a, b]$, tal que $\overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) \leq \varepsilon$. (La figura 9.3 ilustra la interpretación geométrica de esta condición de la integrabilidad de una función).

Demostración:

La condición es necesaria. Por definición de función integrable se cumple $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f}$; dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, por definición de supremo existe una partición p_1 de $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}(f; p_1) \leq \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2};$$

de modo análogo, por definición de ínfimo existe otra partición p_2 de $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{S}(f; p_2) \leq \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si se considera la partición $p = p_1 \cup p_2$, se cumplirá entonces

$$\overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) \leq \overline{S}(f; p_1) - \underline{S}(f; p_2) \leq \left(\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left(\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon,$$

lo que prueba que la condición es cierta.

La condición es suficiente. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y $p \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que se cumple la condición. Puesto que $\underline{S}(f; p) \leq \int_a^b f \leq \overline{S}(f; p) \leq \overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) + \int_a^b f$, puede escribirse entonces $\int_a^b f - \int_a^b f \leq \overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) < \varepsilon$.

La arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ implica que $\int_a^b f - \int_a^b f = 0$, esto es $\int_a^b f = \int_a^b f$, lo que prueba que la función f es integrable en $[a, b]$. ■

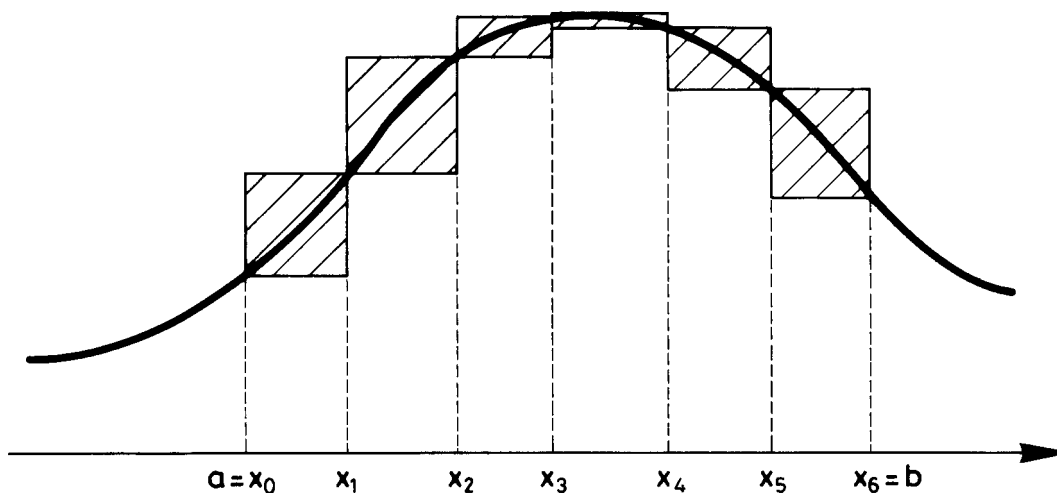


Figura 9.3. Ilustración de la caracterización de integrabilidad de la proposición 9.1.10.

9.1.11 EJEMPLO. (Integrabilidad de las funciones “casi nulas”). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por
$$\begin{cases} f(t) = \alpha > 0, \\ f(x) = 0, \text{ si } x \neq t, \end{cases}$$
 siendo t un punto de $[a, b]$, esto es, una función nula en todos los puntos de $[a, b]$ salvo en uno de ellos (función “casi nula”). Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, basta considerar una partición $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $x_{i+1} - x_i < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$, para que se cumpla $\overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) < \varepsilon$, lo cual implica la integrabilidad de la función considerada. Se tiene un resultado análogo si $\alpha < 0$.

Como consecuencia inmediata de ello, si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no nula únicamente en un número finito de puntos $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ de su dominio, f es integrable en $[a, b]$ y su integral en dicho intervalo es nula. Háganse los detalles como ejercicio.

9.1.12 EJEMPLO. (*Integrabilidad de la función coordenada de \mathbb{R}*). Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función coordenada (identidad) de \mathbb{R} y sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado cualquiera. Considérese la partición $p_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, $0 \leq k \leq n$; se cumple entonces

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}, \quad m_k = x_k, \quad M_k = x_{k+1}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

La suma inferior de f en $[a, b]$ vendrá dada por

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{S}}(f; p_n) &= x_0(x_1 - x_0) + x_1(x_2 - x_1) + \dots + x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = \\ &= \frac{b-a}{n}(x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \left(na + \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \right) = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n}, \end{aligned}$$

y la suma superior será

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{S}}(f; p_n) &= x_1(x_1 - x_0) + x_2(x_2 - x_1) + \dots + x_n(x_n - x_{n-1}) = \\ &= \frac{b-a}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \left(na + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n k \right) = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Así pues, la diferencia entre ambas sumas es $\overline{\mathcal{S}}(f; p_n) - \underline{\mathcal{S}}(f; p_n) = \frac{(b-a)^2}{n}$, con lo que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, si se considera un número natural $n \geq \frac{(b-a)^2}{\varepsilon}$, se cumple $\overline{\mathcal{S}}(f; p_n) - \underline{\mathcal{S}}(f; p_n) \leq \varepsilon$, con lo que, en virtud 9.1.10, la función coordenada de \mathbb{R} es integrable en cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

En la proposición que sigue se demuestra una condición suficiente de integrabilidad de una función acotada en un intervalo cerrado, que permite el cálculo de la integral cuando ésta existe.

9.1.13 PROPOSICIÓN. (*Integrabilidad de las funciones acotadas*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada; si existe una sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de particiones de $[a, b]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{\mathcal{S}}(f; p_n) - \underline{\mathcal{S}}(f; p_n)) = 0$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y, además, se cumple $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{S}}(f; p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\mathcal{S}}(f; p_n)$.

Demostración:

En primer lugar demostraremos que, si se cumple la condición, entonces la función es integrable en el intervalo, lo cual resulta inmediatamente, ya que si $\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{\mathcal{S}}(f; p_n) - \underline{\mathcal{S}}(f; p_n)) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(*) \quad 0 \leq \overline{\mathcal{S}}(f; p_n) - \underline{\mathcal{S}}(f; p_n) \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } n > n_0,$$

y entonces la integrabilidad de f resulta de 9.1.10.

Para demostrar la segunda parte, si se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{\mathcal{S}}(f; p_n) - \underline{\mathcal{S}}(f; p_n)) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se cumple la condición (*). Pero, puesto que f es integrable en $[a, b]$, se tendrá

$$\overline{\mathcal{S}}(f; p_n) - \int_a^b f \geq 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b f - \underline{\mathcal{S}}(f; p_n) \geq 0,$$

con lo que, para todo $n > n_0$, se cumple

$$0 \leq \left(\overline{\mathcal{S}}(f; p_n) - \int_a^b f \right) + \left(\int_a^b f - \underline{\mathcal{S}}(f; p_n) \right) \leq \overline{\mathcal{S}}(f; p_n) - \underline{\mathcal{S}}(f; p_n) < \varepsilon,$$

y, por lo tanto, se cumplen las desigualdades

$$0 \leq \overline{\mathcal{S}}(f; p_n) - \int_a^b f \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad 0 \leq \int_a^b f - \underline{\mathcal{S}}(f; p_n) \leq \varepsilon,$$

de donde, finalmente, resulta $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{S}}(f; p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\mathcal{S}}(f; p_n) = \int_a^b f$. ■

9.1.14 EJEMPLO. (*Integral de la función coordenada de \mathbb{R} en un intervalo*). Continuando con el ejemplo 9.1.12, en el cual se ha probado la integrabilidad de la función coordenada de \mathbb{R} en cualquier intervalo cerrado, puede calcularse ahora dicha integral aplicando 9.1.13. En efecto, considerando la misma sucesión de particiones (p_n) del citado 9.1.12, se cumple

$$\int_a^b x = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{S}}(x; p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \right) = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Para finalizar este primer apartado, se establece la relación entre la integrabilidad de una función y la monotonía y entre la integrabilidad y la continuidad; en particular, este último resultado permite enunciar la integrabilidad de las funciones elementales.

9.1.15 PROPOSICIÓN. (*Integrabilidad de las funciones monótonas*). Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona (creciente o decreciente) en su dominio, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Demostración:

Supondremos que f es monótona creciente; el caso en que f es monótona decreciente se prueba de forma análoga.

Al ser $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente en $[a, b]$, se cumple $f(a) < f(b)$ (si no fuera así, f sería constante y su integrabilidad ya ha sido probada en 9.1.9). Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, consideremos una partición $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$x_{i+1} - x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Para $i = 0, 1, \dots, n-1$, en cada subintervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$ se cumple

$$m_i = \inf_{x \in I_i} \{f(x)\} = f(x_i) \quad \text{y} \quad M_i = \sup_{x \in I_i} \{f(x)\} = f(x_{i+1}),$$

en virtud del crecimiento de f ; si calculamos ahora la diferencia entre la suma superior y la suma inferior de f asociadas a la partición p , se cumple

$$\begin{aligned}\overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) &= \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \right) = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon,\end{aligned}$$

que prueba la integrabilidad de f , en virtud de 9.1.10. ■

9.1.16 PROPOSICIÓN. (*Integrabilidad de las funciones continuas*). Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en su dominio, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Demostración:

Por ser f continua en un intervalo cerrado, f es uniformemente continua en dicho intervalo en virtud del teorema de Heine-Cantor (5.4.5); ello significa que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que cualesquiera que sean $x, x' \in [a, b]$ tales que $|x - x'| < \delta$, se cumple entonces $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Considérese una partición $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, tal que $x_{i+1} - x_i < \delta$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$; si en cada subintervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$ se designa por $m_i = \inf\{f(x), x \in I_i\}$ y por $M_i = \sup\{f(x), x \in I_i\}$, existen $\alpha_i, \beta_i \in I_i$ tales que $f(\alpha_i) = M_i$ y $f(\beta_i) = m_i$, $0 \leq i \leq n-1$, con lo que $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $0 \leq i \leq n-1$, de donde

$$\overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Aplicando finalmente (9.1.10) resulta la integrabilidad de f en $[a, b]$. ■

9.1.17 COROLARIO. (*Integrabilidad de las funciones elementales*).

- Toda función polinómica $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en cualquier intervalo cerrado de \mathbb{R} .
- Las funciones elementales estudiadas en el Capítulo 6, son integrables en cualquier intervalo cerrado contenido en su campo de continuidad.

Demostración:

Inmediata, en virtud de (9.1.16). ■

9.1.18 DEFINICIÓN. (*Integrabilidad de funciones complejas de una variable*).

- La noción de integral puede extenderse sin dificultad a las funciones complejas de una variable. Así, si $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, se cumple $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, para todo $x \in [a, b]$; si las funciones f_1 y f_2 , que son reales de variable real, son integrables en $[a, b]$, se define la integral de f en $[a, b]$ mediante

$$\int_a^b f = \int_a^b f_1 + i \int_a^b f_2 \in \mathbb{C}.$$

- En virtud de esta definición, las propiedades de la integral de $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ serán consecuencia de las propiedades de la integral de funciones reales de una variable. La integración de funciones definidas en subconjuntos de \mathbb{C} , en cambio, no es tan sencilla de definir.

9.2 LA INTEGRAL DE RIEMANN: PROPIEDADES.

En el apartado anterior se ha definido la noción de integral de Riemann de una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada en su dominio, se han establecido unos criterios de integrabilidad y se ha probado que las funciones elementales son integrables en cualquier intervalo cerrado contenido en su campo de continuidad. Nuestro siguiente objetivo es estudiar las propiedades de la integral de Riemann, de modo que permitan una caracterización más operativa de la integrabilidad y, en el capítulo próximo, desarrollar métodos eficaces de cálculo de integrales. Comenzaremos por establecer la integrabilidad de la suma de funciones integrables y la integrabilidad del producto de una constante por una función integrable.

9.2.1 PROPOSICIÓN. (*Linealidad de la integral*). Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables en su dominio y sea $k \in \mathbb{R}$ una constante real cualquiera; entonces, las funciones $f + g$ y kf son integrables en $[a, b]$ y se cumplen las igualdades

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{y} \quad \int_a^b (kf) = k \int_a^b f.$$

Demostración:

- Sea $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$; para $i = 0, 1, \dots, n-1$, en cada subintervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$ se designan mediante

$$M_i = \sup_{x \in I_i} \{(f + g)(x)\}, \quad M'_i = \sup_{x \in I_i} \{f(x)\} \quad \text{y} \quad M''_i = \sup_{x \in I_i} \{g(x)\},$$

por las propiedades del supremo en relación a la suma, se cumple $M_i \leq M'_i + M''_i$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Si se definen análogamente los ínfimos m_i, m'_i, m''_i , se cumple $m_i \geq m'_i + m''_i$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$). En consecuencia, las sumas superiores y las sumas inferiores de las funciones f , g y $f + g$ asociadas a la partición p cumplen

$$\overline{S}(f + g; p) \leq \overline{S}(f; p) + \overline{S}(g; p) \quad \text{y} \quad \underline{S}(f + g; p) \geq \underline{S}(f; p) + \underline{S}(g; p),$$

con lo que las integrales inferiores y superiores de estas funciones cumplen las desigualdades

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f + g) \leq \overline{\int_a^b} (f + g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

La integrabilidad de las funciones f y g motiva que el primero y el último términos sean iguales, con lo que las integrales inferior y superior de la función $f + g$ son iguales y, por tanto, dicha función es integrable en $[a, b]$, cumpliéndose además la igualdad enunciada.

- Se propone como ejercicio probar la integrabilidad de la función kf y que se cumple la igualdad correspondiente. (Sugerencia: considérense separadamente dos casos, según el signo de $k \in \mathbb{R}$). ■

9.2.2 OBSERVACIÓN. La proposición anterior establece que el conjunto de las funciones integrables en un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, dotado de las operaciones suma y producto por un escalar (real), es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , y que la aplicación que asigna a cada función de este espacio vectorial su integral en el intervalo $[a, b]$ es una forma lineal.

También puede afirmarse que dado $m \in \mathbb{N}$ arbitrario, si se consideran m funciones integrables en el intervalo $[a, b]$, f_1, f_2, \dots, f_m , cualquier combinación lineal de ellas es una función integrable, cumpliéndose además que

$$\int_a^b (k_1 f_1 + k_2 f_2 + \dots + k_m f_m) = k_1 \int_a^b f_1 + k_2 \int_a^b f_2 + \dots + k_m \int_a^b f_m,$$

cualesquiera que sean $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}$.

9.2.3 PROPOSICIÓN. (*Signo de la integral*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y positiva en su dominio; se cumple entonces que $\int_a^b f \geq 0$.

Demostración:

Sea $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$; para cada $i = 0, 1, \dots, n-1$ se cumple $m_i = \inf\{f(x) / x \in [x_i, x_{i+1}]\} \geq 0$, con lo que la suma inferior de f asociada a p cumplirá $\underline{S}(f; p) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \geq 0$, y, en consecuencia, la integral inferior de f ha de ser positiva, con lo que también debe serlo la integral de f en $[a, b]$. ■

9.2.4 COROLARIO. Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables y tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$; se cumple entonces que

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Demostración:

En virtud de 9.2.1, la función $g - f$ es integrable y positiva en $[a, b]$, cumpliéndose

$$\int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f;$$

basta aplicar ahora la proposición anterior para obtener la desigualdad enunciada. ■

La siguiente propiedad que se desea establecer es la aditividad de la integral en relación al intervalo de integración; previamente, se estudia la integrabilidad en un subintervalo cualquiera.

9.2.5 PROPOSICIÓN. (*Integrabilidad en un subintervalo*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en su dominio; si $[c, d] \subset [a, b]$ es un subintervalo cualquiera, entonces f es integrable en $[c, d]$.

Demostración:

En virtud de 9.1.10, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe una partición $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que, si para cada $i = 0, 1, \dots, n-1$, en cada subintervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, se designa por $m_i = \inf_{x \in I_i} \{f(x)\}$

y $M_i = \sup_{x \in I_i} \{f(x)\}$, se cumple: $\overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon$.

Puede suponerse que los puntos c y d pertenecen a la partición p , puesto que en caso contrario basta considerar la partición más fina $p \cup \{c, d\}$ y la condición anterior se sigue cumpliendo.

Designemos ahora por $q = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_m\}$, el subconjunto de p formado por los puntos de p que pertenecen al intervalo $[c, d]$; está claro que q es una partición del intervalo $[c, d]$ y, además, se verifica

$$\overline{S}(f; q) - \underline{S}(f; q) = \sum_{j=0}^{m-1} (M_j - m_j)(x'_{j+1} - x'_j) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon,$$

con lo que, efectivamente, f es integrable en el intervalo $[c, d]$, en virtud de 9.1.10. ■

9.2.6 PROPOSICIÓN. (*Aditividad de la integral*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que es integrable en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$; se cumple entonces que f es integrable en $[a, b]$ y, además, se cumple

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración:

Por ser f integrable en $[a, c]$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe una partición p_1 de $[a, c]$ tal que

$$\overline{S}(f; p_1) - \underline{S}(f; p_1) < \frac{\varepsilon}{2};$$

análogamente, la integrabilidad de f en $[c, b]$ implica la existencia de una partición p_2 de dicho intervalo, tal que

$$\overline{S}(f; p_2) - \underline{S}(f; p_2) < \frac{\varepsilon}{2};$$

Está claro que $p = p_1 \cup p_2$ es una partición de $[a, b]$ más fina que ambas y además se cumplen

$$\overline{S}(f; p) = \overline{S}(f; p_1) + \overline{S}(f; p_2) \quad \text{y} \quad \underline{S}(f; p) = \underline{S}(f; p_1) + \underline{S}(f; p_2),$$

lo que implica que $\overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) < \varepsilon$. Por definición de integral de una función en un intervalo, se cumplen las desigualdades

$$\underline{S}(f; p_1) \leq \int_a^c f \leq \overline{S}(f; p_1) \quad \text{y} \quad \underline{S}(f; p_2) \leq \int_c^b f \leq \overline{S}(f; p_2),$$

con lo que

$$\underline{S}(f; p) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \overline{S}(f; p).$$

Finalmente, se cumple

$$\left| \int_a^b f - \left(\int_a^c f + \int_c^b f \right) \right| \leq \overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) < \varepsilon,$$

lo cual prueba la integrabilidad de f en $[a, b]$ y la igualdad enunciada. ■

En la proposición que sigue se establecen dos propiedades importantes: la primera es la integrabilidad de una función que difiere de una integrable en un conjunto finito de puntos; la segunda se refiere a la integrabilidad de una función con una única discontinuidad evitable en su dominio.

9.2.7 PROPOSICIÓN.

1) Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable; si $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que difiere de la función f únicamente en un conjunto finito de puntos, entonces g es integrable en $[a, b]$ y se cumple

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

2) Si una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tiene únicamente una discontinuidad evitable en un punto $t \in [a, b]$, entonces es integrable en dicho intervalo.

Demostración:

- 1) Inmediata, pues la función $g - f$ es una función casi nula en $[a, b]$ y, en virtud de 9.1.11, se cumple

$$\int_a^b (g - f) = 0, \text{ con lo que finalmente se obtiene la igualdad enunciada.}$$

- 2) Se propone como ejercicio. ■

En la proposición que sigue se generaliza en cierto modo el resultado 9.2.6 a un número finito de subintervalos y se establece la integrabilidad de una función continua a trozos en un intervalo.

9.2.8 PROPOSICIÓN.

- 1) Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable, se cumple $\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f$, cualquiera que sea la partición $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$.

- 2) Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua a trozos en su dominio, entonces es integrable y se cumple:

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^{r-1} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} f,$$

siendo $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, $1 \leq j \leq r-1$, los subintervalos de $[a, b]$ en los cuales f es continua.

Demostración:

Se propone como ejercicio. ■

En las proposiciones que siguen se establece la integrabilidad de la función valor absoluto y de la composición de una función integrable y una función continua; a partir de este último resultado obtendremos unos corolarios de gran interés.

9.2.9 PROPOSICIÓN. (*Integrabilidad de la función valor absoluto*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en su dominio; entonces, la función $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y se cumple:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot (b - a).$$

Demostración:

Sea $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$; si se considera un subintervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$, dados dos puntos cualesquiera $t, t' \in I_i$, se cumple $|f(t) - f(t')| \geq |f(t)| - |f(t')|$, con lo que $\sup_{t \in I_i} f(t) - \inf_{t \in I_i} f(t) \geq \sup_{t \in I_i} |f(t)| - \inf_{t \in I_i} |f(t)|$. Así pues, puede afirmarse que

$$\overline{S}(|f|; p) - \underline{S}(|f|; p) \leq \overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p);$$

teniendo en cuenta ahora la integrabilidad de f y aplicando 9.1.10, se obtiene la integrabilidad de la función $|f|$. La desigualdad enunciada se obtiene inmediatamente, sin más que tener en cuenta que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \text{ para todo } x \in [a, b],$$

y aplicando 9.2.4. ■

9.2.10 PROPOSICIÓN. (*Integrabilidad de la función compuesta*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y tal que $f[a, b] \subset [c, d]$; si $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en su dominio, entonces la función compuesta $F = g \circ f$ es integrable en $[a, b]$.

Demostración:

Por ser g continua en un intervalo cerrado, g es acotada en dicho intervalo, es decir, existe $K = \sup_{t \in [c, d]} |g(t)|$. Por otra parte, en virtud del teorema de Heine-Cantor g es uniformemente continua

en el intervalo $[c, d]$, esto es, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)}$, de tal modo que si $t', t'' \in [c, d]$ son tales que $|t' - t''| < \delta$, entonces se cumple

$$|g(t') - g(t'')| < \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)}.$$

En virtud de la proposición 9.1.10, la integrabilidad de f implica la existencia de una partición $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $\overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) < \delta^2$. Para cada subintervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$ ($0 \leq i \leq n-1$), designemos por

$$M_i = \sup_{x \in I_i} \{f(x)\}, \quad m_i = \inf_{x \in I_i} \{f(x)\}, \quad M'_i = \sup_{x \in I_i} \{F(x)\} \quad \text{y} \quad m'_i = \inf_{x \in I_i} \{F(x)\}.$$

El conjunto de índices $J = \{1, 2, \dots, n\}$ puede expresarse mediante $J = J_1 \cup J_2$, siendo

$$J_1 = \{i \in J \mid M_i - m_i < \delta\} \quad \text{y} \quad J_2 = J - J_1.$$

En virtud de la definición de J_1 y de las propiedades de las funciones f y g , se cumple

$$M'_i - m'_i \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)}, \quad \text{para todo } i \in J_1.$$

Pero, por otra parte, se cumple

$$\delta \sum_{i \in J_2} (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i \in J_2} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) < \delta^2,$$

con lo que $\sum_{i \in J_2} (x_{i+1} - x_i) < \delta$. Se trata por último de probar que la función F cumple la condición de integrabilidad establecida en 9.1.10. En efecto, se verifica

$$\begin{aligned} \overline{S}(F; p) - \underline{S}(F; p) &= \sum_{i \in J} (M'_i - m'_i)(x_{i+1} - x_i) = \\ &= \sum_{i \in J_1} (M'_i - m'_i)(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i \in J_2} (M'_i - m'_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)}(b-a) + 2K \frac{\varepsilon}{(b-a)(1+2K)}(b-a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. ■

9.2.11 COROLARIO. (*Integrabilidad de la potencia entera de una función*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable; cualquiera que sea $m \in \mathbb{N}$, la función f^m es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Demostración:

Basta tener en cuenta que $f^m = x^m \circ f$, que la función potencial x^m es continua en \mathbb{R} , y aplicar finalmente la proposición anterior. ■

9.2.12 COROLARIO. (*Integrabilidad del producto de dos funciones*). Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables; entonces, la función producto fg es integrable en dicho intervalo.

Demostración:

Téngase en cuenta la igualdad $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$, y aplíquense 9.2.1 y el corolario anterior. ■

Obsérvese que no se cumple una igualdad análoga al caso de la suma, esto es, que

$$\int_a^b fg \neq \int_a^b f \cdot \int_a^b g.$$

9.2.13 COROLARIO. (*Integrabilidad de la función recíproca*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable; si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq \delta$ para todo $x \in [a, b]$, entonces la función recíproca $\frac{1}{f}$ es integrable en $[a, b]$.

Demostración:

Por ser f integrable debe ser acotada, es decir, existe $K > 0$ tal que $0 < \delta \leq f(x) < K$ para todo $x \in [a, b]$. Por otra parte, la función $g: [\delta, K] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \frac{1}{t}$ para todo $t \in [\delta, K]$, es continua en su dominio, con lo que la función compuesta $\frac{1}{f} = g \circ f$ será integrable en $[a, b]$, en virtud de 9.2.10. ■

De forma similar a los teoremas del valor medio vistos en el capítulo 8, pueden establecerse unos teoremas del valor medio en el ámbito de la integración.

9.2.14 PROPOSICIÓN. (*Teorema del valor medio integral*). Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables tales que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$; existe entonces un $\lambda \in [m, M]$ tal que

$$\int_a^b fg = \lambda \int_a^b g.$$

Demostración:

Por ser f integrable en $[a, b]$, ha de ser acotada en dicho intervalo, es decir, existen dos constantes reales $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Al ser $g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, se cumplirá

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \text{ para todo } x \in [a, b],$$

es decir,

$$(mg)(x) \leq (fg)(x) \leq (Mg)(x) \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Las funciones mg, fg y Mg son integrables en $[a, b]$ y, en virtud de 9.2.4, se tendrá que

$$\int_a^b mg \leq \int_a^b fg \leq \int_a^b Mg,$$

con lo que $m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$. Así pues, existe $\lambda \in [m, M]$ tal que se cumple la igualdad enunciada. ■

9.2.15 COROLARIO. Con las mismas hipótesis de la proposición anterior, si además se cumple que f es continua en su dominio, existe entonces un $\xi \in [a, b]$ tal que $\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$.

Demostración:

Immediata, teniendo en cuenta la proposición anterior y la propiedad de los valores intermedios de una función continua (teorema 5.3.6). ■

9.2.16 DEFINICIÓN. (*Valor medio o promedio integral de una función*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en el intervalo $[a, b]$; se define el *valor medio o promedio integral* de f en $[a, b]$, notado $\mu(f; [a, b])$, mediante

$$\mu(f; [a, b]) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Si además $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, existe un $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = \mu(f; [a, b])$, esto es, se cumple

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

(Véanse las figuras 9.4 y 9.5), lo cual se justifica inmediatamente considerando la función definida por $g(x) = 1$ para todo $x \in [a, b]$ en 9.2.15.

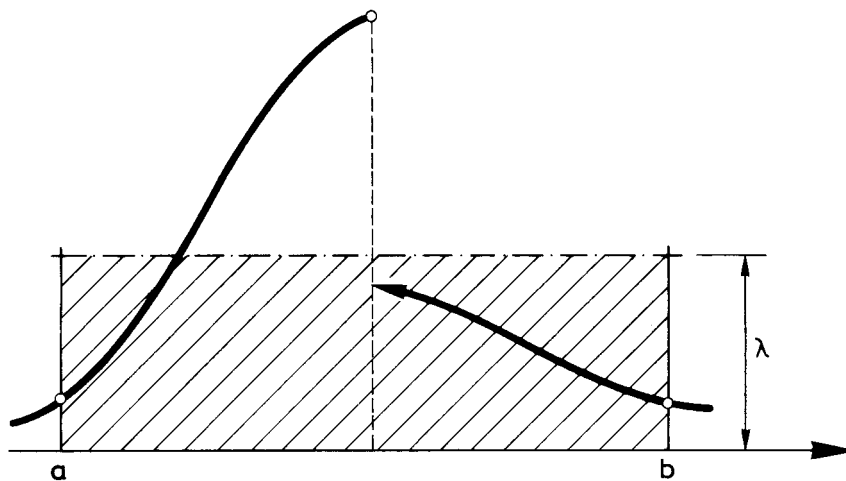


Figura 9.4. Interpretación geométrica del valor medio integral.

9.2.17 EJEMPLO.

- 1) El valor medio integral de la función “diente de sierra” $f(x) = x - E(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es $1/2$ pues, dada su periodicidad, basta calcular la integral en un intervalo $[m, m+1]$ donde $m \in \mathbb{Z}$, con lo que: $\mu = \frac{1}{(m+1) - m} \int_m^{m+1} x - E(x) = \frac{1}{2}$.

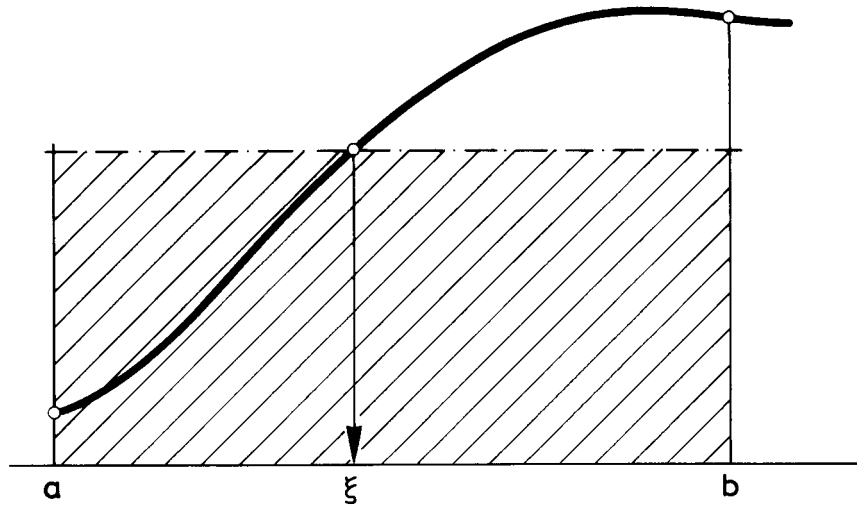


Figura 9.5. El valor medio integral en el caso de una función continua.

- 2) *Valor eficaz de una tensión o una intensidad periódicas.* En Electrotecnia, dada una función periódica como por ejemplo la intensidad de corriente, se denomina *valor eficaz* de la función a la raíz cuadrada del valor medio integral del cuadrado de los instantáneos. Al tratarse de una función periódica, para calcular dicho valor basta considerar un intervalo de longitud igual al periodo fundamental T ; así pues,

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}.$$

Si la intensidad de corriente es senoidal (corriente alterna) y de valor máximo I_m , se tendrá

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

(El cálculo de la integral se justificará adecuadamente en el próximo capítulo). El cociente $\frac{I_m}{I_{ef}} = \sqrt{2}$ se denomina *factor de amplitud o de cresta* de la función periódica.

9.3 SUMAS DE RIEMANN.

En este apartado se establece una expresión de la integral de Riemann de una función en un intervalo cerrado, como límite de unas determinadas sumas. Esta expresión, que por otra parte se corresponde con la idea intuitiva de integral de una función en un intervalo, permite formular con rigor diversos problemas físicos y técnicos.

9.3.1 DEFINICIÓN. (*Sumas de Riemann*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en su dominio. Sea $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$; si en cada subintervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$ se considera un punto $c_i \in I_i$ del mismo y se designa por C el conjunto de tales puntos, se denomina

suma de Riemann asociada a la partición p y al conjunto de puntos C a la suma definida por

$$S(f; p; C) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i),$$

cuya interpretación geométrica puede verse en la figura 9.6. Es inmediato comprobar que, cualquiera que sea la partición $p \in \mathcal{P}[a, b]$, en virtud de su definición toda suma de Riemann verifica las desigualdades $\underline{S}(f; p) \leq S(f; p; C) \leq \overline{S}(f; p)$.

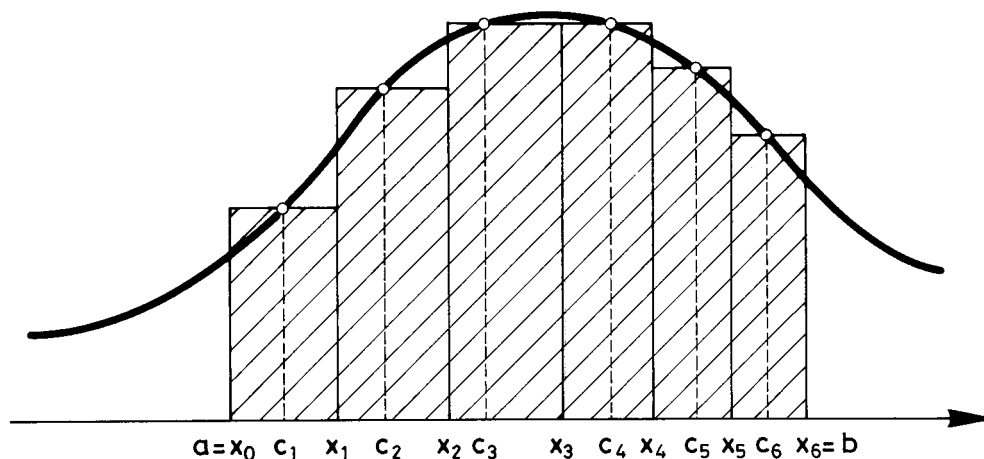


Figura 9.6. Interpretación geométrica de las sumas de Riemann.

Para ver el interés de las sumas de Riemann que acabamos de definir, vamos a relacionar dichas sumas con la integral de una función en un intervalo, tal como se ha definido en el apartado 9.1.

9.3.2 PROPOSICIÓN. (*Caracterización de la integral mediante sumas de Riemann*). Una condición necesaria y suficiente para que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sea integrable en $[a, b]$ cumpliéndose $\int_a^b f = \alpha$, es que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, exista una partición p_ε de $[a, b]$ tal que para cualquier otra partición más fina $p \geq p_\varepsilon$, se cumpla $|\alpha - S(f; p; C)| < \varepsilon$.

Demostración:

- La condición es necesaria. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, designemos por p_ε una partición de $[a, b]$ tal que se cumpla la condición de integrabilidad de 9.1.10, esto es, tal que $\overline{S}(f; p_\varepsilon) - \underline{S}(f; p_\varepsilon) < \varepsilon$. En estas condiciones, toda partición más fina $p \geq p_\varepsilon$ cumplirá que $\overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) < \varepsilon$ y puesto que se cumplen las desigualdades

$$\underline{S}(f; p) \leq S(f; p; C) \leq \overline{S}(f; p) \quad \text{y} \quad \underline{S}(f; p) \leq \int_a^b f \leq \overline{S}(f; p),$$

se tendrá que $\left| \int_a^b f - S(f; p; C) \right| < \varepsilon$, cualquiera que sea $p \geq p_\varepsilon$.

- La condición es suficiente. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se cumple la condición enunciada, esto es, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe una partición $p_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que para cualquier otra partición más fina

$p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \geq p_\varepsilon$, se cumple $|\alpha - S(f; p; C)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos los puntos del conjunto C , de tal modo que se cumpla

$$\sup_{x \in I_i} f(x) - f(c_i) = M_i - f(c_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)};$$

entonces se tendrá que

$$\left| S(f; p; C) - \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{2},$$

con lo que

$$\left| \alpha - \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \right| < \left| \alpha - S(f; p; C) + S(f; p; C) - \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

que demuestra que se cumple la igualdad $\alpha = \overline{\int_a^b} f$. Se prueba de forma análoga que $\alpha = \underline{\int_a^b} f$. En definitiva, se ha probado la integrabilidad de f en $[a, b]$ y también que se cumple la igualdad $\alpha = \int_a^b f$, lo que demuestra que la condición es suficiente y completa la demostración. ■

9.3.3 OBSERVACIÓN.

- La proposición anterior puede enunciarse también de forma equivalente, diciendo que una condición necesaria y suficiente para que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sea integrable en $[a, b]$ es que, para cualquier partición $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y cualquier conjunto de puntos $C = \{c_i \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1\}$, se cumpla $\int_a^b f = \lim_{p \in \mathcal{P}[a, b]} S(f; p; C) = \lim_{p \in \mathcal{P}[a, b]} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- La igualdad anterior expresa la integral de Riemann de una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como el límite de una suma, de forma equivalente a su definición, motivo por el cual se adopta como tal en modelos matemáticos que requieren la formulación de una integral. Además, justifica en parte la notación clásica de la integral de una función $\int_a^b f(x) dx$.

9.4 CONVERGENCIA UNIFORME E INTEGRABILIDAD.

En capítulos anteriores hemos estudiado la relación entre la convergencia uniforme de una sucesión funcional hacia su función límite y las “buenas propiedades” de ésta heredadas de las funciones de la sucesión, en el caso de la continuidad y la derivabilidad. En este apartado se hace lo mismo en relación a la integrabilidad.

9.4.1 PROPOSICIÓN. (*Integrabilidad del límite de una sucesión de funciones*). Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que es uniformemente convergente hacia una función límite $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ en dicho intervalo. Se tiene entonces que:

- 1) la función límite f es integrable en $[a, b]$;
- 2) se verifica la igualdad $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$.

Demostración:

- 1) Se probará que la función límite f cumple la condición de integrabilidad establecida en 9.1.10. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario; por definición de convergencia uniforme de una sucesión de funciones, existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ para todo $n > n_0$ y para todo $x \in [a, b]$. Por otro lado, por ser las funciones f_n integrables en $[a, b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una partición $p \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que $\overline{S}(f_n; p) - \underline{S}(f_n; p) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > n_0$, con lo que, en virtud de la condición anterior, se tendrá $\underline{S}(f_n; p) - \frac{\varepsilon}{4} \leq \underline{S}(f; p) \leq \overline{S}(f; p) \leq \overline{S}(f_n; p) + \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $n > n_0$, de donde se obtiene finalmente que $\overline{S}(f; p) - \underline{S}(f; p) \leq \overline{S}(f_n; p) - \underline{S}(f_n; p) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, lo cual prueba la integrabilidad de la función límite f en el intervalo $[a, b]$.
- 2) Vamos ahora a probar la igualdad entre la integral del límite y el límite de las integrales. En virtud de la convergencia uniforme de la sucesión funcional a la función límite, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ para todo $n > n_1$ y para todo $x \in [a, b]$, con lo que se cumplirá

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq \int_a^b |f - f_n| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

cualesquiera que sean $n > n_1$ y $x \in [a, b]$, lo cual completa la demostración. ■

Como consecuencia inmediata de este resultado se obtiene el correspondiente a las series de funciones.

9.4.2 PROPOSICIÓN. (*Integrabilidad de la suma de una serie de funciones*). Sea $\sum_{n \geq 0} f_n$ una serie de funciones integrables en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y tal que es uniformemente convergente en dicho intervalo a una función suma $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Se cumple entonces que

- 1) la función suma f es integrable en $[a, b]$;
- 2) se cumple la igualdad $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \int_a^b f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$.

Demostración:

Evidente. ■

9.4.3 COROLARIO. (*Integrabilidad de la suma de una serie de potencias*). Sea $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ una serie de

potencias de radio de convergencia $\rho > 0$. Si $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ es la función suma de la serie dada, se cumplen

- 1) la función S es integrable en cualquier intervalo cerrado tal que $[a, b] \subset]-\rho, \rho[$;
- 2) se verifica la igualdad $\int_a^b S = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n$.

Demostración:

Evidente. ■

9.5 EJERCICIOS.

1. Pruébese que la relación de orden definida en el conjunto $\mathcal{P}[a, b]$ de las particiones de un intervalo $[a, b]$ es una relación de orden y que dicha relación de orden no es total.

2. Considérese la función real $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = x_0, \\ 0, & \text{si } x \neq x_0, \end{cases}$ siendo $x_0 \in]a, b[$ un punto interior del intervalo. Pruébese que la función f es integrable en el intervalo $[a, b]$ y que se cumple $\int_a^b f = 0$.

3. Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio y sea $x_0 \in [a, b]$. Se define una función $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq x_0, \\ \alpha, & \text{si } x = x_0, \alpha \neq f(x_0). \end{cases}$ Pruébese que la función g así definida es integrable en el intervalo $[a, b]$ y que, además, se cumple $\int_a^b f = \int_a^b g$.

4. Pruébese que la función $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$ no es integrable en el intervalo $[0, 1]$.

5. Estudiar la integrabilidad de la función $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x, & x \in [0, \pi[\\ 5, & x = \pi \\ \text{cos } x, & x \in]\pi, 2\pi[\\ 0, & x = 2\pi. \end{cases}$

En caso de ser integrable, calcúlese su integral en el intervalo $[0, 2\pi]$.

6. Estudiar la integrabilidad de la función “signo de x ” en el intervalo $[-1, 1]$. Si es integrable, calcular la integral de dicha función en ese intervalo.

7. Se considera la función real $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0. \\ \frac{\text{sen } x}{x}, & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$ Discutir la integrabilidad de esta función en su dominio.

8. Probar que la función $g: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} \frac{x - \text{sen } x}{x^2}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$ es integrable en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

9. Expresar la integral $\int_0^1 (x^2 - x)$ como límite de sumas y calcularla.

10. Probar la integrabilidad en el sentido de Riemann de la función potencial de exponente natural

$f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Sean $b > a > 0$ números reales positivos estrictos; aplicando la definición de integral de una función en un intervalo, o bien, su equivalente mediante sumas de Riemann, probar que si $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las igualdades $\int_0^a x^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ y $\int_a^b x^n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$.

11. Probar que la función $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$ es integrable en el sentido de Riemann en todo intervalo $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Aplicando la definición de integral de una función en un intervalo o bien su equivalente mediante sumas de Riemann, probar que se cumplen las igualdades $\int_1^2 \frac{1}{x} = \ln 2$ y $\int_a^b \frac{1}{x} = \ln \frac{b}{a}$, donde $[a, b] \subset]0, +\infty[$ es un intervalo cualquiera.

12. Probar que la función exponencial real es integrable en cualquier intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y aplicando la definición de integral de una función en un intervalo, o bien, su equivalente mediante sumas de Riemann, probar que se cumplen las igualdades $\int_0^a e^x = e^a - 1$ y $\int_a^b e^x = e^b - e^a$.

13. Probar que la función $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ para todo $x > 0$ es integrable en el sentido de Riemann en todo intervalo $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Aplicando la definición de integral de una función en un intervalo o bien su equivalente mediante sumas de Riemann, probar que se cumplen las igualdades $\int_0^a \sqrt{x} = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$ y $\int_a^b \sqrt{x} = \frac{2}{3}(b\sqrt{b} - a\sqrt{a})$, donde $[a, b] \subset]0, +\infty[$ es un intervalo cualquiera.

14. Calcular las integrales siguientes, justificando el método elegido:

a) $\int_{0.5}^{3.2} \sqrt{E(x)}$, b) $\int_{0.5}^{3.2} 3E(x) - \frac{1}{2}(E(x))^2$, c) $\int_{0.5}^{4.3} (x - E(x))^2$, d) $\int_0^5 (3x + x^2)$, e) $\int_1^5 \frac{1}{x^2}$.

(E es la función “parte entera”).

15. Si a es un número real positivo estricto y $f: [-a, a] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en su dominio, pruébese que: a) si f tiene simetría par, entonces se cumple $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$; b) si f tiene simetría impar, entonces se cumple $\int_{-a}^a f = 0$.

16. Aplicando el teorema del valor medio integral, calcular aproximadamente las integrales siguientes a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{100 - x^6}$; b) $\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{100 - x^6}$.

17. Aplicando el teorema del valor medio integral, acótese la integral $\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1 + 0.2x^4}}$.

18. Pruébese la segunda parte de la proposición 9.2.1 relativa a la integrabilidad del producto de una función por una constante real cualquiera.

19. Pruébese la segunda parte de la proposición 9.2.7 relativa a la integrabilidad de una función con una discontinuidad evitable en un intervalo.

9.6 GUÍA DE REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[Ap] **APOSTOL, T.M.** *Análisis Matemático.*

Obra excelente con la cual pueden ampliarse los conceptos que hemos tratado en este capítulo. Se desarrolla la teoría de la integral de Stieltjes (o de Riemann-Stieltjes) en el capítulo 7 y en el capítulo 10 se trata la integral de Lebesgue.

[Ba] **BARTLE, R.G. y D.R. SHERBERT.** *Introducción al Análisis Matemático de una variable.*

En el capítulo 6 de esta obra se trata la teoría de la integral de Riemann con un esquema bastante similar al del capítulo que acabamos de ver. El tratamiento es sumamente riguroso y completo y se recomienda su lectura. Contiene una excelente colección de ejercicios propuestos que complementan el desarrollo.

[Ca] **CALM, R., N. COLL y R. ESTELA.** *Problemes de Càlcul.*

Excelente obra de ejercicios resueltos; se recomienda consultar el capítulo 6 en el cual se desarrollan ejercicios relativos a los conceptos y propiedades básicas de la integral.

[Gu] **GUZMÁN, M. de y B. RUBIO.**

Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático (2).

Texto excelente para consultar ejercicios y problemas resueltos de análisis matemático. Contiene una colección muy completa de ejercicios propuestos que recomendamos al estudiante por su cuidada selección.

[Li] **LINÉS, E.** *Principios de Análisis Matemático.*

De esta excelente obra se recomienda la lectura del capítulo 20, el cual está dedicado a los conceptos fundamentales de integrabilidad y las propiedades básicas de la integral, y del capítulo 21, en el cual se tratan las funciones integrables, que se definen mediante las nociones de conjuntos de medida nula y conjuntos de contenido nulo y se establece el teorema de Lebesgue sobre caracterización de la integrabilidad Riemann de una función.

[Or] **ORTEGA, J.M.** *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.*

Se recomienda la lectura del capítulo V de este excelente texto, que se desarrolla bajo un esquema similar al que hemos visto aquí. Es recomendable asimismo la lectura de la nota histórica sobre el cálculo integral, así como el apéndice en el cual se demuestra el teorema de Lebesgue sobre caracterización de la integrabilidad Riemann mediante el conjunto de puntos de discontinuidad. Ejercicios interesantes y muy bien seleccionados.

[Ru] **RUDIN, W.** *Principios de Anàlisi Matemàtica.*

Obra excelente para lectura complementaria. Se recomienda especialmente el capítulo 6 dedicado a la integral de Riemann-Stieltjes.

[Spv] **SPIVAK, M.** *Calculus.*

Se recomienda la lectura, que como siempre resultará muy amena, del capítulo 13, el cual está dedicado a los conceptos fundamentales de la integral de Riemann, las funciones integrables, la caracterización de la integrabilidad y las propiedades de la integral. Recomendamos asimismo los ejercicios de este texto, muy bien seleccionados y que completan perfectamente diversos aspectos de la teoría desarrollada.

CAPÍTULO 10

**INTEGRACIÓN DE FUNCIONES:
CÁLCULO Y APLICACIONES**

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se desarrollan los métodos para calcular la integral de una función en un intervalo cerrado, a partir de las definiciones y propiedades vistas en el capítulo anterior. Se estudian también algunos métodos aproximados para el cálculo de integrales y se ven algunas aplicaciones de la integral.

El apartado 10.1 tiene como objetivo desarrollar una metodología para calcular la integral de una función en un intervalo; el concepto clave para ello es el de primitiva de una función, que permite relacionar los conceptos de integral y de derivada de una función a través del denominado teorema fundamental del Cálculo o regla de Barrow. Se estudian también dos teoremas muy importantes: el de integración por partes y el del cambio de variable.

El apartado 10.2 se dedica a los métodos para el cálculo de primitivas; se empieza con dos métodos generales (primitivación por partes y por cambio de variable) y se aplica luego a las funciones racionales, las funciones trigonométricas y a algunos tipos de funciones irracionales.

En el apartado 10.3 se estudian brevemente las funciones definidas por integrales (o integrales dependientes de un parámetro) y se establecen sus propiedades más importantes; este apartado es importante para el estudio de las funciones eulerianas que se verá en el capítulo siguiente.

El apartado 10.4 se dedica a un estudio, breve, de algunos métodos de cálculo aproximado de integrales; concretamente se estudian los métodos de los trapecios, de los rectángulos y de Simpson.

Por último se ven en el apartado 10.5 algunas aplicaciones sencillas de la integral, básicamente en el campo de la geometría: cálculo de áreas, volúmenes y áreas de superficies de revolución.

10.1 INTEGRALES Y PRIMITIVAS.

10.1.1 DEFINICIÓN. (*La función integral*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en el intervalo $[a, b]$. En el capítulo anterior se vio que, entonces, la función f es también integrable en cualquier subintervalo de $[a, b]$, en particular en los subintervalos $[a, x]$, donde x es un punto cualquiera del intervalo $[a, b]$. Esto permite formular la definición que sigue: si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable, se denomina *función integral de f* a la función $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

La interpretación geométrica de esta función puede verse en la figura 10.1. Así, por ejemplo, la función integral de la restricción de la función coordenada de \mathbb{R} a un intervalo $[a, b]$, es decir, la función definida por $f(x) = x$ para todo $x \in [a, b]$, es la función $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \frac{x^2 - a^2}{2}$ para todo $x \in [a, b]$. Está claro que, en virtud de su definición, la función integral cumple las siguientes propiedades: $F(a) = 0$ y $F(b) = \int_a^b f$.

A continuación vamos a estudiar las propiedades de la función integral que se acaba de definir, propiedades que resultarán de gran interés e importancia para el cálculo de integrales. Estas propiedades se establecen en las dos proposiciones que siguen.

10.1.2 PROPOSICIÓN. (*Continuidad de la función integral*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en su dominio; entonces, su función integral $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida en 10.1.1 es continua en el intervalo $[a, b]$.

Demostración:

Se probará que la función integral $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua en su dominio, con lo que entonces será también continua en él. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario; si designamos por $K = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| > 0$

y tomamos dos puntos cualesquiera x, y del intervalo tales que $|x - y| < \varepsilon/K$, se cumple entonces que

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq \left| \int_x^y |f| \right| \leq K|x - y| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

lo cual prueba que, efectivamente, la función F es uniformemente continua en $[a, b]$. ■

10.1.3 PROPOSICIÓN. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio; entonces, su función integral $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida en 10.1.1 es derivable en el intervalo $]a, b[$ y, además, se cumple

$$DF(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in]a, b[.$$

Demostración:

Sea $x \in]a, b[$ un punto cualquiera del abierto. Vamos a probar que la función integral F es derivable en dicho punto, aplicando la definición:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f - \int_a^x f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \cdot h}{h} = f(x),$$

siendo $x \leq \xi \leq x + h$. Obsérvese que se ha aplicado el corolario 9.2.15 sobre el valor medio integral de una función continua en un intervalo. ■

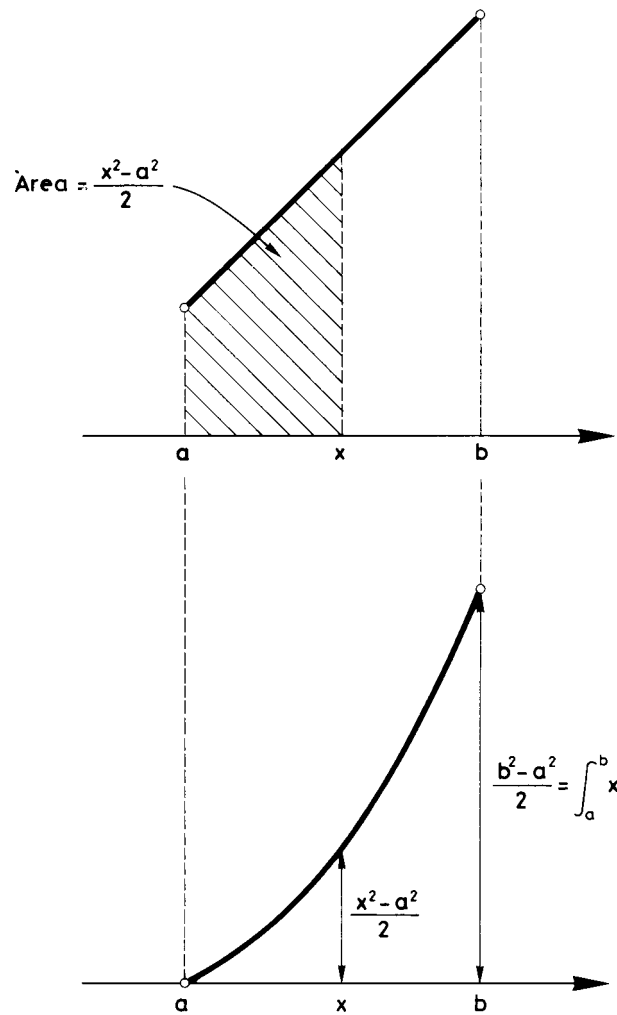


Figura 10.1. Interpretación geométrica de la función integral de una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Vistas las propiedades básicas de la función integral, vamos a abordar a continuación otro concepto clave para el cálculo de integrales: el de primitiva de una función.

10.1.4 DEFINICIÓN. (*Primitiva de una función. Integral indefinida*). Sea una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; se denomina *primitiva de f* a toda función $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y tal que

$$D\varphi(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in]a, b[.$$

Así, por ejemplo, la función $\varphi(x) = \ln(1 + x)$, $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_0^+$ es una primitiva de la función

$f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [a, b]$ y lo mismo ocurre con la función $\varphi(x) = x^2 + 5$, $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ con respecto a la función $f(x) = 2x$, $x \in [a, b]$. Obsérvese también que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en su dominio, su función integral de $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida en 10.1.1 es una primitiva de f , de acuerdo con 10.1.3.

Si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y λ es una constante cualquiera, se cumple que $D(\varphi + \lambda)(x) = D\varphi(x) + D\lambda(x) = f(x)$ para todo $x \in]a, b[$, lo cual prueba que la función $\varphi + \lambda$ es también una primitiva de f , cualquiera que sea la constante λ .

Por otra parte, si φ y ψ son dos primitivas de f , entonces se cumple $D(\varphi - \psi)(x) = D\varphi(x) - D\psi(x) = f(x) - f(x) = 0$, para todo $x \in]a, b[$, con lo que la función $\varphi - \psi$ es constante en $[a, b]$. Esto prueba que, dada una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, el conjunto de todas sus funciones primitivas es

$$\int f = \{\varphi + C \mid D\varphi = f, C \text{ constante}\},$$

el cual se denomina *integral indefinida de f* .

Obsérvese que la integral indefinida de una función f es la antiimagen de f por el operador derivación D que asigna a cada función derivable su derivada, es decir, puede escribirse $\int f = D^{-1}(f) = \{\varphi \mid D\varphi = f\}$; lo cual puede justificar en parte el término *antiderivada* que algunos autores emplean para referirse a las funciones primitivas (véase, por ejemplo, [Ba]). Es inmediato observar, que si φ es una primitiva de f y ψ es una primitiva de g , la función $\varphi + \psi$ es una primitiva de $f + g$ y la función $\lambda\varphi$, ($\lambda \in \mathbb{R}$), es una primitiva de λf .

10.1.5 Recordando las derivadas de las funciones elementales (véase el apartado 7.3), puede escribirse la tabla de integrales indefinidas que sigue (C indica una constante cualquiera).

$$\begin{array}{ll} \int x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad (m \neq -1), & \int \frac{1}{x} = \ln|x| + C, \\ \int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1), & \int e^x = e^x + C, \\ \int \operatorname{sen} x = -\cos x + C, & \int \cos x = \operatorname{sen} x + C, \\ \int \operatorname{senh} x = \cosh x + C, & \int \cosh x = \operatorname{senh} x + C, \\ \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + C, & \int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C, \\ \int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} = -\coth x + C, & \int \frac{1}{\cosh^2 x} = \tanh x + C, \\ \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C, & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C \quad (|x| < 1), \\ \int \frac{1}{1-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C, & \text{si } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + C, & \text{si } |x| > 1, \end{cases} & \\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsen} h x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C, & \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{|x|} \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C, \quad (|x| > 1), & \end{array}$$

10.1.6 OBSERVACIÓN. Es inmediato comprobar por simple derivación, que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable, se cumplen las igualdades siguientes

$$\int f^m(x) Df(x) = \frac{f^{m+1}(x)}{m+1} + C, \quad (m \neq -1); \quad \int \frac{Df(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C, \quad \int e^{f(x)} Df(x) = e^{f(x)} + C.$$

En la proposición que sigue se podrá comprobar la gran importancia de la noción de primitiva de una función para establecer una metodología operativa de cálculo de la integral de una función en un intervalo.

10.1.7 TEOREMA. (*Teorema fundamental del Cálculo o Regla de Barrow.*) Se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) Toda función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una primitiva.
- 2) Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, se cumple $\int_a^b f = \varphi(b) - \varphi(a)$, donde φ es una primitiva cualquiera de la función f .
(Es habitual emplear la notación $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(x)|_a^b$, o bien, $[\varphi(x)]_a^b$).

Demostración:

- 1) Inmediata, a partir de 10.1.3.
- 2) Si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva cualquiera de f , debe cumplirse $\varphi(x) = F(x) + C$, para todo $x \in [a, b]$, siendo $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función integral de f y C una constante. Se cumplen entonces las igualdades $\varphi(b) = F(b) + C = \int_a^b f + C$ y $\varphi(a) = F(a) + C = 0 + C = C$. Restando ambas, resulta la Regla de Barrow. ■

10.1.8 OBSERVACIÓN.

- Suponemos que se ha constatado la extraordinaria importancia del teorema anterior en relación a nuestro objetivo de obtener una metodología operativa para calcular la integral de una función en un intervalo. En el caso de las funciones continuas, se ha probado que basta obtener una primitiva y restar sus valores en los extremos del intervalo.
- Se ha abierto, claro está, un nuevo frente: calcular las primitivas de una función dada, cuestión que se aborda en el próximo apartado. Queremos destacar que, no obstante lo establecido en la proposición 10.1.7, no siempre es posible obtener fácilmente las primitivas de una función continua; así, por ejemplo, no existe ninguna función elemental que sea una primitiva de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \exp(-x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

10.1.9 EJEMPLO. Se cumplen las igualdades siguientes:

- 1) $\int_a^b x^n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Si $P_m(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m$, $c_m \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ es una función polinómica de grado $m \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\int_a^b P_m = c_0(b-a) + c_1 \frac{b^2 - a^2}{2} + c_2 \frac{b^3 - a^3}{3} + \cdots + c_m \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

- 3) $\int_a^b \operatorname{sen} x = -\cos b + \cos a$.

- 4) $\int_a^b \cos x = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a.$
 5) $\int_a^b \exp x = \exp b - \exp a.$
 6) $\int_a^b \frac{1}{x} = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a},$ siendo $[a, b] \subset]0, +\infty[.$

A continuación, y para terminar este primer apartado, se estudiarán dos resultados de gran importancia y utilidad para calcular integrales: la fórmula de integración por partes y el teorema del cambio de variable.

10.1.10 PROPOSICIÓN. (*Fórmula de integración por partes*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio. Si existen dos funciones $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1[a, b]$ y tales que $f(x) = Du(x)v(x)$, para todo $x \in]a, b[$, se cumple entonces la igualdad

$$\int_a^b f = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b (uDv).$$

Demostración:

La función producto uv es derivable en $]a, b[$ y se cumple

$$D(uv)(x) = Du(x)v(x) + u(x)Dv(x) = f(x) + u(x)Dv(x), \text{ para todo } x \in]a, b[,$$

luego la función uv es una primitiva de la función $f + uDv$, con lo que en virtud de la regla de Barrow, se tendrá

$$\int_a^b (f + uDv) = (uv)(b) - (uv)(a),$$

de donde se obtiene inmediatamente la igualdad enunciada. ■

10.1.11 OBSERVACIÓN. Es habitual utilizar la notación $u(x)v(x) \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$, así como disponer los cálculos de la forma siguiente:

$$\int_a^b f = \int_a^b (vDu) = \left\{ \begin{array}{l} Du(x), \\ v(x), \end{array} \quad \begin{array}{l} u(x) \\ Dv(x) \end{array} \right\} = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b (uDv),$$

que permite explicitar las funciones u y v y los cálculos intermedios realizados.

La principal utilidad de la fórmula de integración por partes reside en que la integral de la función dada se transforma en la integral de otra función (que se espera poder calcular de algún modo) más un término conocido. En los ejemplos que siguen intentaremos poner de manifiesto esta utilidad y profundizar algo más en la aplicación de la fórmula de integración por partes.

10.1.12 EJEMPLO. Para calcular la integral $\int_1^2 \ln x$, puede considerarse la igualdad $\ln x = Du(x) \cdot v(x) = 1 \cdot \ln x$, para todo $x > 0$ con lo que, aplicando la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int_1^2 \ln x = \int_1^2 1 \cdot \ln x = \left\{ \begin{array}{l} Du(x) = 1, \\ v(x) = \ln x, \end{array} \quad \begin{array}{l} u(x) = x \\ Dv(x) = 1/x \end{array} \right\} = x \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} = 2 \ln 2 - 1.$$

10.1.13 EJEMPLO. Para calcular la integral $\int_a^b xe^x$ mediante la fórmula de integración por partes, el proceso es el siguiente

$$\int_a^b xe^x = \left\{ \begin{array}{l} Du(x) = e^x, \\ v(x) = x, \end{array} \quad \begin{array}{l} u(x) = e^x \\ Dv(x) = 1 \end{array} \right\} = xe^x \Big|_a^b - \int_a^b e^x = e^b(b-1) + e^a(1-a).$$

10.1.14 EJEMPLO. En algunas ocasiones debe aplicarse la fórmula en más de una ocasión para llegar al resultado final; así, por ejemplo, para calcular la integral $\int_0^1 x^2 e^x$, puede procederse del modo siguiente:

$$\int_0^1 x^2 e^x = \left\{ \begin{array}{l} Du(x) = e^x, \\ v(x) = x^2, \end{array} \quad \begin{array}{l} u(x) = e^x \\ Dv(x) = 2x \end{array} \right\} = x^2 e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x = e - 2 \int_0^1 x e^x.$$

La última integral puede calcularse también aplicando la fórmula de integración por partes, como acabamos de ver en 10.1.13, resultando $\int_0^1 x e^x = e^1(1-1) + e^0(1-0) = 1$, con lo que en definitiva, se obtiene $\int_0^1 x^2 e^x = e - 2$.

Vistos estos ejemplos que ilustran la aplicación de la fórmula de integración por partes, pasemos a ver el siguiente teorema para calcular integrales: el denominado *teorema del cambio de variable*.

10.1.15 TEOREMA. (*Del cambio de variable*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio. Si $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una biyección de clase $\mathcal{C}^1[c, d]$ tal que $Dg(t) \neq 0$ para todo $t \in]c, d[$, $g(c) = a$ y $g(d) = b$, se cumple entonces la igualdad

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ g) Dg.$$

(La expresión $x = g(t)$, $c \leq t \leq d$ (o equivalentemente, la expresión $t = g^{-1}(x)$, $a \leq x \leq b$) se denomina *ecuación del cambio de variable*).

Demostración:

Sea $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de la función f , esto es, una función derivable tal que $D\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in]a, b[$ y tal que $\int_a^b f = \varphi(b) - \varphi(a)$, por la regla de Barrow. En virtud de la regla de la cadena, la función compuesta $\varphi \circ g$ es derivable en $]c, d[$ y se cumple $D(\varphi \circ g) = ((D\varphi) \circ g) Dg = (f \circ g) Dg$. La función $(f \circ g) Dg$ es continua en $[c, d]$, luego integrable y aplicando ahora la regla de Barrow, se obtiene

$$\int_c^d (f \circ g) Dg = (\varphi \circ g)(d) - (\varphi \circ g)(c) = \varphi(g(d)) - \varphi(g(c)) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f,$$

tal como se quería probar. ■

A continuación, vamos a ilustrar la metodología de aplicación de este teorema con algunos ejemplos.

10.1.16 EJEMPLO. Para calcular la integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}$, se considera el cambio de variable definido por la ecuación

$$x = g(t) = \operatorname{sen} t, \quad Dg(t) = \operatorname{cos} t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

en la que, efectivamente, la función g que define el cambio de variable cumple las condiciones del teorema. Entonces, resulta

$$((f \circ g)Dg)(t) = \left((\sqrt{1-x^2}) \circ \operatorname{sen} t \right) \operatorname{cos} t = \operatorname{cos}^2 t = \frac{1 + \operatorname{cos} 2t}{2}.$$

Aplicando ahora el teorema del cambio de variable, se obtiene

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \operatorname{cos} 2t}{2} = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

10.1.17 EJEMPLO. Para calcular la integral $\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, considérese el cambio de variable definido por la ecuación

$$x = g(t) = t^2, \quad Dg(t) = 2t, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{2},$$

que cumple las condiciones del teorema. Se cumple entonces que

$$((f \circ g)Dg)(t) = \left(\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) \circ t^2 \right) 2t = \frac{2t}{1+t}.$$

Aplicando finalmente el teorema se obtiene

$$\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t}{1+t} = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) = 2 \left(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}) \right).$$

10.1.18 OBSERVACIÓN. A la vista del teorema del cambio de variable surge de modo natural una cuestión: cómo saber qué ecuación de cambio de variable $x = g(t)$, $t \in [c, d]$ debe tomarse para calcular la integral $\int_a^b f$. La respuesta es tajante: no hay una norma general al respecto, sino que tal como se verá en el próximo apartado, mediante una metodología más o menos empírica y para un gran número de casos, se ha logrado establecer un cambio de variable que puede resultar adecuado a la vista de la función f de la cual se desea calcular la integral en $[a, b]$.

Se habrá notado también que, al aplicar el teorema del cambio de variable, se efectúa la sustitución de los límites de integración cambiando los extremos del intervalo de integrabilidad de la función dada f , por los extremos del intervalo de integrabilidad de la función compuesta $f \circ g$; sin embargo, en la función no se hace este cambio “natural”, puesto que se sustituye $f(x)$ por $f(g(t))Dg(t)$, que corresponde exactamente a la sustitución de $f(x)dx$ por $f(g(t))Dg(t)dt$ teniendo en cuenta que, si la ecuación del cambio de variable es $x = g(t)$, entonces se tiene $dx = Dg(t)dt$. En consecuencia, parece que la notación $\int_a^b f(x)dx$ para designar la integral de f en $[a, b]$ resulta más operativa para aplicar el teorema del cambio de variable y, de hecho, es la que se emplea más en la práctica; con ello, la expresión (clásica) del teorema del cambio de variable es

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))Dg(t)dt.$$

10.2 CÁLCULO DE PRIMITIVAS.

El segundo teorema fundamental del Cálculo establece que la integral de una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en el intervalo $[a, b]$, puede calcularse como la diferencia entre los valores de una función primitiva de f en los extremos del intervalo considerado. Es razonable, pues, que se dedique este apartado a desarrollar una metodología que permita el cálculo de las primitivas de una función, metodología que se conoce a menudo como *métodos de primitivación*. No pretendemos ser exhaustivos ni mucho menos; nuestro propósito es tratar los casos que a nuestro juicio ofrecen mayor interés y tienen una mayor aplicación práctica. En cualquier caso, puede recurrirse a manuales que contienen gran cantidad de “tablas de primitivas”, o bien, a los modernos programas de cálculo simbólico que, entre otras opciones, contienen el cálculo de primitivas. Por último, cabe indicar que si no puede determinarse una primitiva y, en consecuencia, calcular la integral por métodos analíticos, existen unos métodos para calcular integrales de forma aproximada que se verán en el apartado 10.5.

El apartado se divide en cuatro bloques: en el primero se ven dos métodos generales para calcular primitivas (por partes y por cambio de variable), en el segundo se estudia la primitivación de funciones racionales, en el tercero se ve la primitivación de funciones trigonométricas y, por último, se estudia la primitivación de algunos tipos de funciones irracionales.

(A) Métodos generales para el cálculo de primitivas.

10.2.1 PROPOSICIÓN. (*Método de primitivación por partes*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tal que existen dos funciones $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1[a, b]$, que cumplen la igualdad $f(x) = Du(x)v(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Se cumple entonces que

$$\int f = uv - \int (uDv),$$

esto es, se obtiene una primitiva de f restando una primitiva de uDv a la función uv .

Demostración:

La función uv es de clase $\mathcal{C}^1[a, b]$ y, además, cumple

$$D(uv)(x) = Du(x)v(x) + u(x)Dv(x) = f(x) + u(x)Dv(x) \quad \text{para todo } x \in]a, b[,$$

con lo que, si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f y $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de uDv , se tendrá

$$D(uv)(x) = D\varphi(x) + D\psi(x) = D(\varphi + \psi)(x) \quad \text{para todo } x \in]a, b[,$$

es decir, $uv - (\varphi + \psi) = C$ en $[a, b]$, siendo C una constante. En consecuencia, se cumple $\varphi = uv - \psi + C$ y teniendo en cuenta la definición de integral indefinida, resulta la igualdad formulada. ■

10.2.2 OBSERVACIÓN. Es habitual escribir el método de primitivación por partes en la forma siguiente:

$$\int Du(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)Dv(x) + C,$$

donde C designa una constante arbitraria. Por otra parte, es también habitual utilizar una disposición análoga a la descrita en 10.1.11 para ordenar los cálculos intermedios y explicitar las funciones u y v .

A continuación se desarrollan algunos ejemplos ilustrativos de este método de cálculo de primitivas.

10.2.3 EJEMPLO. Para calcular las primitivas de la función $f(x) = \ln x$ $x > 0$, se procede de la forma siguiente

$$\begin{cases} Du(x) = 1, & u(x) = x; \\ v(x) = \ln x, & Dv(x) = \frac{1}{x}, \end{cases}$$

con lo que, en virtud de 10.2.1, se tendrá $\int \ln x = x \ln x - \int 1 = x \ln x - x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

10.2.4 EJEMPLO. Para calcular la integral indefinida $\int e^{ax} \cos bx$, en la cual $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes no nulas, puede considerarse lo siguiente:

$$\begin{cases} Du(x) = \cos bx, & u(x) = \frac{1}{b} \operatorname{sen} bx; \\ v(x) = e^{ax}, & Dv(x) = ae^{ax} \end{cases}$$

con lo que se obtiene

$$\int e^{ax} \cos bx = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx.$$

Para calcular $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx$ puede procederse de modo similar, resultando

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx.$$

Sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene

$$\int e^{ax} \cos bx = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx,$$

de la cual resulta finalmente que

$$\int e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \operatorname{sen} bx + a \cos bx) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

10.2.5 EJEMPLO. Se trata de aplicar el método de primitivación por partes para obtener una fórmula recurrente que permita calcular las primitivas

$$F_n(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para ello, se considera la descomposición siguiente

$$\begin{cases} Du(x) = 1, & u(x) = x; \\ v(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}, & Dv(x) = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}, \end{cases}$$

con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \left(\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \right) = \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nF_n(x) - 2nF_{n+1}(x). \end{aligned}$$

A partir de esta expresión puede escribirse la siguiente fórmula recurrente:

$$F_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}F_n(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots$$

que permite calcular $F_n(x)$, para cualquier valor de $n = 1, 2, \dots$, teniendo en cuenta que $F_1(x) = \arctan x$.

10.2.6 PROPOSICIÓN. (*Método de primitivación por cambio de variable*). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio. Si $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una biyección de clase $\mathcal{C}^1[c, d]$ tal que $Dg(t) \neq 0$ para todo $t \in]c, d[$, entonces se cumple

$$\int f = \left(\int (f \circ g) Dg \right) \circ g^{-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En notación tradicional se escribe $\int f(x)dx = \left(\int f(g(t))Dg(t)dt \right) \circ g^{-1}(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. La expresión $x = g(t)$, $c \leq t \leq d$ (o equivalentemente, la expresión $t = g^{-1}(x)$, $a \leq x \leq b$) se denomina *ecuación del cambio de variable*.

Demostración:

Sea $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de la función $(f \circ g)Dg$; vamos a comprobar que $\psi \circ g^{-1}$ es una primitiva de f . En efecto, la derivada de esta función es

$$D(\psi \circ g^{-1})(x) = D\psi(g^{-1}(x))D(g^{-1})(x) = D\psi(t) \cdot \frac{1}{Dg(t)} = f(g(t))Dg(t) \frac{1}{Dg(t)} = f(x),$$

para todo $x \in]a, b[$, $x = g(t)$, con lo que la igualdad queda probada. ■

10.2.7 EJEMPLO. Se trata de calcular la integral indefinida de la función $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Si se considera el cambio de variable definido por la ecuación

$$x = g(t) = \operatorname{sen} t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

que cumple las condiciones de la proposición 10.2.6, entonces

$$f(g(t))Dg(t) = \left((\sqrt{1-x^2}) \circ \operatorname{sen} t \right) \cos t = \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}.$$

Ahora debe calcularse una primitiva de esta función $\int \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}$, con lo cual resulta finalmente

$$\int \sqrt{1-x^2} = \left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right) \circ \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

10.2.8 EJEMPLO. Para calcular la integral indefinida de la función $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, puede considerarse el cambio de variable definido por la ecuación

$$x = g(t) = t^2, \quad t > 0,$$

con lo que se obtiene

$$f(g(t))Dg(t) = \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} \circ t^2 \right) \cdot 2t = \frac{2t}{1+t}.$$

Se trata ahora de calcular una primitiva de esta función, lo cual es inmediato: $\int \frac{2t}{1+t} = 2t - 2 \ln(1+t)$,

con lo que finalmente se obtiene

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} = (2t - 2 \ln(1+t)) \circ (\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

10.2.9 OBSERVACIÓN. Para la primitivación por cambio de variable es válida una observación análoga a la expresada en 10.1.18, esto es, que no existe una norma general para conocer el cambio de variable que resulta adecuado para aplicar satisfactoriamente el método. En lo que resta de este apartado pretendemos dar respuesta en parte a la pregunta sobre qué cambio de variable hay que aplicar a la vista de la función f de la cual se desea calcular sus primitivas, estudiando algunos casos concretos de uso frecuente.

(B) Primitivación de funciones racionales.

10.2.10 Se trata de dar una metodología que permita calcular la integral indefinida de una función racional $\int r(x)dx$. Recordemos que una función racional $r: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real definida como el cociente entre dos funciones polinómicas $P, Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre las cuales supondremos que el grado del numerador P es menor que el grado del denominador Q . Así pues, si $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$ y $Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$, $b_m \neq 0$, con $n < m$, entonces

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) \neq 0.$$

Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, se efectúa la división de las funciones polinómicas en potencias decrecientes y se obtiene entonces una función polinómica más una función racional como la anterior. Se supone conocida la descomposición de una función racional en suma de fracciones simples, que depende de la descomposición factorial del polinomio denominador Q ; así, recordemos que si dicha descomposición factorial es

$$Q(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} (x - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (x - \lambda_r)^{\alpha_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s},$$

donde los términos de primer grado corresponden a las raíces reales y los de segundo grado a las raíces complejas, entonces en la descomposición de la función racional en fracciones simples aparecen los términos siguientes:

- una raíz real simple a da lugar a una fracción del tipo $\frac{A}{x-a}$;
- una raíz real de multiplicidad $m > 1$ da lugar a una suma de m fracciones del tipo $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$;
- una raíz compleja simple da lugar a una fracción del tipo $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

- finalmente, una raíz compleja de multiplicidad $n > 1$ da lugar a una suma de fracciones del tipo $\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_nx + N_n}{(x^2 + px + q)^n}$.

Los coeficientes de la descomposición en fracciones simples pueden calcularse por igualación, una vez se han sumado todas las fracciones simples de la descomposición; también pueden calcularse por igualación de valores numéricos de las funciones polinómicas en las raíces del denominador, lo cual puede simplificar notablemente los cálculos a realizar. A partir de la descomposición de la función racional $r(x)$ en fracciones simples, puede calcularse la integral indefinida $\int r(x)$ sumando una primitiva de cada una de las fracciones simples de su descomposición, la cual se determina como se expone a continuación (se mantiene la notación empleada para describir la descomposición en fracciones simples).

- *Raíces reales simples.* En este caso se cumple $\int \frac{A}{x-a} = A \ln|x-a|$;

- *Raíces reales múltiples.* Para estas fracciones se verifica

$$\int \frac{A_k}{(x-a)^k} = -\frac{A_k}{(k-1)(x-a)^{k-1}}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

- *Raíces complejas simples.* Para resolver este caso, en primer lugar se escribe

$$x^2 + px + q = (x-r)^2 + s^2,$$

donde los números reales r y $s \neq 0$ se determinan por igualación de coeficientes. A continuación se aplica el cambio de variable definido por la ecuación

$$x = g(t) = r + st \quad \Leftrightarrow \quad t = g^{-1}(x) = \frac{x-r}{s},$$

a partir del cual se obtiene

$$\int \frac{M(r+st) + N}{s^2(t^2+1)} \cdot s = \frac{Mr+N}{s} \int \frac{1}{t^2+1} + M \int \frac{t}{t^2+1} = \frac{Mr+N}{s} \arctan t + \frac{M}{2} \ln(t^2+1),$$

con lo que finalmente resulta

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{Mr+N}{s} \arctan\left(\frac{x-r}{s}\right) + \frac{M}{2} \ln \frac{x^2+px+q}{s^2}.$$

- *Raíces complejas múltiples.* En este caso se aplica el mismo cambio de variable que se ha indicado en el caso anterior, obteniéndose

$$\frac{M_k r + N_k}{s^{2k-1}} \int \frac{1}{(1+t^2)^k} + \frac{M_k}{s^{2k-2}} \int \frac{t}{(1+t^2)^k}.$$

La primera integral se calcula por recurrencia (véase 10.2.5) y obsérvese que en cualquier caso debe cumplirse $k \geq 2$, al ser raíces múltiples. Así pues, se tiene

$$\frac{M_k r + N_k}{s^{2k-1}} \int \frac{1}{(1+t^2)^k} = \frac{M_k r + N_k}{s^{2k-1}} \left(\frac{t}{2(k-1)(1+t^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} \int \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} \right),$$

y se sabe que para $k=1$ se verifica $\int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t$. Para la segunda, resulta

$$\frac{M_k}{s^{2k-2}} \int \frac{t}{(1+t^2)^k} = -\frac{M_k}{(2-2k)s^{2k-2}} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}}$$

Por último debe aplicarse la función inversa de la que define el cambio de variable empleado, esto es, $g^{-1}(x) = \frac{x-r}{s}$. Los detalles de esta operación se dejan como ejercicio.

10.2.11 EJEMPLO. Calcular la integral indefinida de la función racional

$$r(x) = \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1}.$$

En primer lugar debe efectuarse la división de los polinomios en potencias decrecientes, al ser ambos del mismo grado; se obtiene

$$r(x) = 1 + \frac{x-2}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1} = 1 + r_1(x),$$

con lo que

$$\int r(x) = \int 1 + \int r_1(x) = x + \int r_1(x) + C,$$

y ahora debe calcularse la integral de $r_1(x)$. La descomposición factorial del polinomio denominador es

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)^2,$$

es decir, hay una raíz real simple y una raíz compleja de multiplicidad $m = 2$, con lo cual, la descomposición en fracciones simples es la siguiente:

$$r_1(x) = \frac{x-2}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

El cálculo de los coeficientes de esta descomposición da como resultado

$$A = -\frac{3}{4}, \quad B = \frac{3}{4}, \quad C = -\frac{3}{4}, \quad D = \frac{3}{2}, \quad E = -\frac{1}{2},$$

con lo que finalmente resulta

$$\begin{aligned} \int r(x) &= x + \int \frac{x-2}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1} = x - \frac{3}{4} \int \frac{1}{x+1} + \frac{3}{4} \int \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{3x-1}{(x^2+1)^2} = \\ &= x - \frac{3}{4} \ln(x+1) + \frac{3}{8} \ln(x^2+1) - \frac{3}{4} \arctan x - \frac{3}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} = \\ &= x - \frac{3}{4} \ln(x+1) + \frac{3}{8} \ln(x^2+1) - \frac{3}{4} \arctan x - \frac{3}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x \right) = \\ &= x - \frac{3}{4} \ln(x+1) + \frac{3}{8} \ln(x^2+1) - \arctan x - \frac{3-x}{4(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

(C) Primitivación de funciones trigonométricas.

10.2.12 El primer caso que estudiaremos es aquel en el cual la función trigonométrica se expresa como producto del seno y/o el coseno de un monomio, esto es, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, las funciones de la forma

$$f(x) = \text{sen}(ax+b) \cos(cx+d), \quad f(x) = \text{sen}(ax+b) \text{sen}(cx+d) \quad \text{y} \quad f(x) = \cos(ax+b) \cos(cx+d).$$

Teniendo en cuenta las igualdades (véase el ejercicio 15 del capítulo 6):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), & \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \operatorname{sen} x \cos y &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)),\end{aligned}$$

puede calcularse fácilmente la integral indefinida de las funciones citadas; caso de haber más de dos factores, el método se reitera.

10.2.13 EJEMPLO. Si $f(x) = \operatorname{sen}(2x+1) \cos(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$, se tendrá

$$\int \operatorname{sen}(2x+1) \cos(x+2) = \int \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(3x+3) + \operatorname{sen}(x-1)) = -\frac{1}{6} \cos(3x+3) - \frac{1}{2} \cos(x-1) + C.$$

10.2.14 EJEMPLO. Para calcular $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x$, previamente debe escribirse

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x &= \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos 3x\right) \operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2} \cos x \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{2} \cos 3x \operatorname{sen} 3x = \\ &= \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 6x\right),\end{aligned}$$

con lo que se obtiene $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{24} \cos 6x + C$.

10.2.15 Vamos a un nuevo caso: el cálculo de primitivas de funciones racionales de las funciones trigonométricas seno y coseno, es decir, calcular primitivas de funciones del tipo:

$$r(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{P(\operatorname{sen} x, \cos x)}{Q(\operatorname{sen} x, \cos x)},$$

donde P y Q son polinomios. Expondremos a continuación la metodología de aplicación del método del cambio de variable, con el objetivo de transformar la función racional $r(\operatorname{sen} x, \cos x)$ en una función racional estándar. El cambio de variable que resulta más adecuado depende de algunas propiedades particulares de dicha función racional, tal como se detalla a continuación.

- Si la función racional r es impar en $\operatorname{sen} x$, esto es, es tal que $r(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -r(\operatorname{sen} x, \cos x)$, el cambio de variable más adecuado es el definido por

$$x = g(u) = \arccos u \iff u = g^{-1}(x) = \cos x.$$

- Si la función r es impar en $\cos x$, es decir, es tal que $r(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -r(\operatorname{sen} x, \cos x)$, resulta adecuado aplicar el cambio de variable definido por

$$x = g(u) = \arcsen u \iff u = g^{-1}(x) = \operatorname{sen} x.$$

- Si la función racional tiene simetría par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, es decir, es tal que $r(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = r(\operatorname{sen} x, \cos x)$, el cambio de variable que resulta más adecuado es el definido por:

$$x = g(u) = \arctan u \iff u = g^{-1}(x) = \tan x.$$

En tal caso, la expresión de $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{cos} x$ en función de u es $\operatorname{sen} x = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$ y $\operatorname{cos} x = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$.

- Si la función r no cumple ninguna de las condiciones anteriores, entonces el cambio de variable definido por

$$x = g(u) = 2 \arctan u \iff u = g^{-1}(x) = \tan \frac{x}{2}.$$

transforma la función racional trigonométrica en una función racional algebraica. En ese caso, la expresión de $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{cos} x$ en función de u es

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{u^2+1} \quad \text{y} \quad \operatorname{cos} x = \frac{1-u^2}{u^2+1}.$$

Por supuesto que este mismo cambio de variable puede aplicarse también en los casos anteriores, pero los cambios de variable citados en cada caso simplifican, en general, los cálculos a realizar.

10.2.16 EJEMPLO. La función racional trigonométrica $r(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) = \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{1 + \operatorname{sen} x}$, tiene simetría impar en $\operatorname{cos} x$, pero no en $\operatorname{sen} x$. Aplicando el cambio de variable indicado en el segundo punto, se obtiene

$$\int \frac{u\sqrt{1-u^2}}{1+u} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{u}{1+u} = u - \ln(1+u),$$

con lo que, finalmente, resulta $\int \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{1 + \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x - \ln(1 + \operatorname{sen} x) + C$. Si se aplica el cambio de variable indicado en el cuarto punto, se obtiene $\int \frac{\frac{2u}{1+u^2} \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2}}{1 + \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}$, que da lugar a unos cálculos notablemente más complicados.

10.2.17 EJEMPLO. La función racional trigonométrica $r(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2 + \operatorname{cos} x}$ no cumple ninguna condición de simetría, con lo que abordaremos el cálculo de su integral aplicando el cambio de variable citado en el cuarto punto anterior, resultando

$$\int \frac{\frac{4u^2}{(u^2+1)^2}}{2 + \frac{1-u^2}{u^2+1}} \cdot \frac{2}{u^2+1} = \int \frac{8u^2}{(u^2+1)^2(u^2+3)}.$$

La descomposición de la función racional en suma de fracciones simples es

$$\frac{8u^2}{(u^2+1)^2(u^2+3)} = \frac{6}{u^2+1} - \frac{4}{(u^2+1)^2} - \frac{6}{u^2+3},$$

con lo que

$$\int \frac{8u^2}{(u^2+1)^2(u^2+3)} = 6 \arctan u - \left(\frac{1}{2} \arctan u + \frac{u}{2(1+u^2)} \right) - \frac{2\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{u}{\sqrt{3}}.$$

Así pues, resulta finalmente

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2 + \operatorname{cos} x} = \frac{11x}{4} - \frac{\operatorname{sen} x}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} \right) + C.$$

(D) Primitivación de funciones irracionales.

10.2.18 En este último bloque del apartado abordaremos el cálculo de las primitivas de algunos tipos de funciones irracionales. Comenzaremos viendo el cálculo de primitivas de funciones del tipo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad g(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad \text{y } h(x) = \frac{P(x)}{(x - x_0)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

en las que $P(x)$ indica una función polinómica de grado n . Se estudiará cómo calcular las primitivas de las funciones del primer tipo y se verá a continuación que las otras dos pueden reducirse a este primero mediante un cambio de variable adecuado.

- Para calcular la integral indefinida $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, es conveniente escribir en primer lugar

$$ax^2 + bx + c = a((x - r)^2 + s),$$

y, a continuación, aplicar el cambio de variable definido por

$$x = g(u) = r + \sqrt{|s|} u \quad \Leftrightarrow \quad u = g^{-1}(x) = \frac{x - r}{\sqrt{|s|}}.$$

La primitiva que se obtiene depende de los signos de a y de s .

- El cálculo de la integral indefinida $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ si $P(x)$ es de grado $n = 1$ es trivial, ya que puede descomponerse en suma de una inmediata y otra del tipo anterior. Si el grado de $P(x)$ es $n \geq 2$, se escribe previamente

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = D \left(Q(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) + \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

donde $Q(x)$ es una función polinómica de grado $n - 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$; ambos se determinan a partir de esta igualdad. Con ello se reduce el problema al cálculo de la integral indefinida de una función del primer tipo.

- Para calcular $\int \frac{P(x)}{(x - x_0)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$, se aplica el cambio de variable definido por

$$x = g(v) = x_0 + \frac{1}{v} \quad \Leftrightarrow \quad v = g^{-1}(x) = \frac{1}{x - x_0},$$

con lo que el problema se reduce al cálculo de la integral indefinida de una función del tipo anterior.

10.2.19 EJEMPLO. Se trata de calcular la integral indefinida $\int \frac{1}{(x - 1)^2 \sqrt{2x^2 + x - 1}}$, que corresponde a una función irracional del tercer tipo citado antes; aplicaremos el cambio de variable correspondiente, es decir

$$x = 1 + \frac{1}{v} \quad \Rightarrow \quad (x - 1)^2 = \frac{1}{v^2} \quad \text{y} \quad 2x^2 + x - 1 = 2 + \frac{5}{v} + \frac{2}{v^2},$$

con lo que aplicando el cambio de variable en la función dada, se obtiene

$$\int \frac{1}{(x - 1)^2 \sqrt{2x^2 + x - 1}} = \int \frac{-v}{\sqrt{2v^2 + 5v + 2}},$$

es decir, se ha obtenido una función irracional del segundo tipo en la que el polinomio del numerador es de grado $n = 1$. Su resolución es inmediata, ya que

$$\int \frac{-v}{\sqrt{2v^2 + 5v + 2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2v^2 + 5v + 2} + \frac{5}{4} \int \frac{1}{\sqrt{2v^2 + 5v + 2}}.$$

Debemos ahora calcular la integral indefinida $\int \frac{1}{\sqrt{2v^2 + 5v + 2}}$, para lo cual escribiremos

$$2v^2 + 5v + 2 = 2((v-r)^2 + s) = 2\left(\left(v + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right);$$

aplicando ahora el cambio de variable definido por

$$v + \frac{5}{4} = \frac{3}{4}t \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{3t-5}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{4v+5}{3},$$

se obtiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{3t-5}{4}\right)^2 + 5\frac{3t-5}{4} + 2}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{argcosh} t.$$

Así pues, se tiene que

$$\int \frac{-v}{\sqrt{2v^2 + 5v + 2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2v^2 + 5v + 2} + \frac{5}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{argcosh} \left(\frac{4v+5}{3}\right),$$

y, en definitiva, la integral indefinida buscada es finalmente:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)^2 \sqrt{2x^2 + x - 1}} &= -\frac{1}{2} \sqrt{2\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{x-1}\right) + 2} + \frac{5\sqrt{2}}{8} \operatorname{argcosh} \frac{4\left(\frac{1}{x-1}\right) + 5}{3} = \\ &= -\frac{1}{2(x-1)} \sqrt{2x^2 + x - 1} + \frac{5\sqrt{2}}{8} \operatorname{argcosh} \left(\frac{5x-1}{3x-3}\right) + C. \end{aligned}$$

10.2.20 Otro tipo de funciones irracionales que aparece con cierta frecuencia es el siguiente: si p_1, p_2, \dots, p_r son números racionales, el cálculo de la integral indefinida de funciones de la forma:

$$f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_r}\right),$$

puede abordarse efectuando el cambio de variable definido por

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{b-dt^m}{ct^m-a},$$

donde m es el denominador común de los números racionales p_1, p_2, \dots, p_r .

10.2.21 EJEMPLO. Para calcular la integral $\int x\sqrt{x-1}$, aplicaremos el cambio de variable definido por

$$t^2 = x-1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = t^2 + 1,$$

que conduce al cálculo de la integral indefinida (inmediata): $\int (t^2 + 1)t \cdot (2t) = \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3$, con lo que, en definitiva, se obtiene

$$\int x\sqrt{x-1} = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C.$$

10.2.22 EJEMPLO. Para calcular la integral $\int \frac{1}{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$, se observa que $m = 6$ es el denominador común de los números racionales $p_1 = \frac{1}{2}$ y $p_2 = \frac{1}{3}$, con lo que el cambio de variable adecuado para ello es el definido por

$$t^6 = x \quad \Longleftrightarrow \quad t = x^{1/6};$$

aplicando dicho cambio de variable, se obtiene $\int \frac{1}{2t^3 + t^2} 6t^5 = t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{3}{2}\ln(2t+1)$, con lo cual resulta finalmente

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \sqrt{x} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x} + \frac{3}{4}\sqrt[6]{x} - \frac{3}{2}\ln(2\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

10.3 FUNCIONES DEFINIDAS POR INTEGRALES.

Este apartado tiene por objeto el estudio de las funciones definidas por integrales, también conocidas como integrales dependientes de un parámetro, estableciendo sus propiedades más importantes: continuidad, derivabilidad e integrabilidad.

10.3.1 DEFINICIÓN. (*Funciones definidas por integrales*). Sean $[a, b]$ y $[c, d]$ dos intervalos cerrados de \mathbb{R} ; el producto cartesiano de ambos es el subconjunto I de \mathbb{R}^2 definido por $I = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real definida en dicho subconjunto, para cada $y_0 \in [c, d]$ puede definirse una función real de una variable $f(\cdot, y_0): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mediante

$$f(\cdot, y_0)(x) = f(x, y_0), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Análogamente, para cada $x_0 \in [a, b]$, puede definirse una función real de una variable $f(x_0, \cdot): [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f(x_0, \cdot)(y) = f(x_0, y), \text{ para todo } y \in [c, d].$$

En la figura 10.2 se han representado dos de estas funciones en un caso concreto.

Supondremos que las funciones $f(\cdot, y_0)$ y $f(x_0, \cdot)$ son continuas en su dominio, cualesquiera que sean $x_0 \in [a, b]$ e $y_0 \in [c, d]$. Entonces, dichas funciones son integrables en su respectivo intervalo de definición, es decir, para cada $x_0 \in [a, b]$ y para cada $y_0 \in [c, d]$ existen las integrales

$$\int_a^b f(\cdot, y_0) \quad \text{y} \quad \int_c^d f(x_0, \cdot).$$

Ello permite definir dos funciones $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ y $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mediante

$$F(y) = \int_a^b f(\cdot, y) \quad \text{y} \quad G(x) = \int_c^d f(x, \cdot)$$

que suelen escribirse en la forma siguiente

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad \text{y} \quad G(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

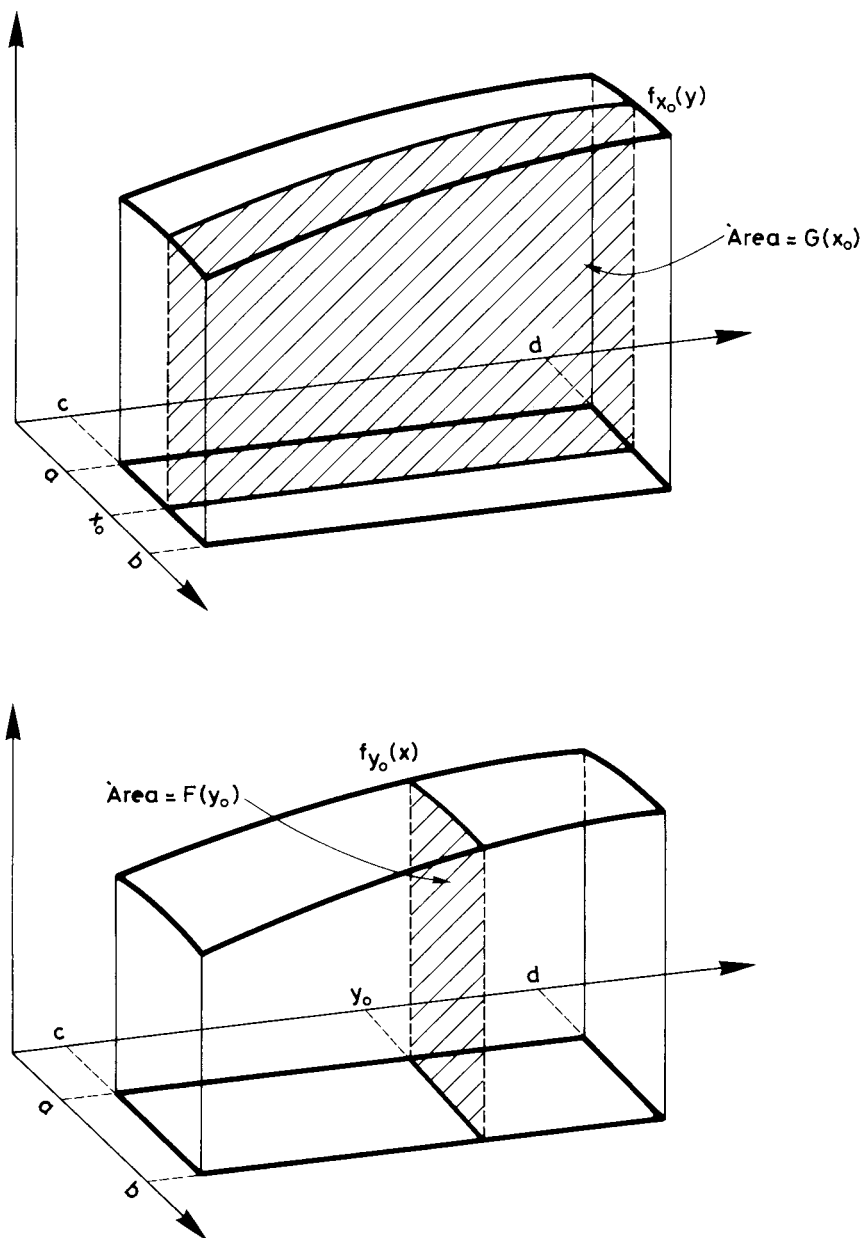


Figura 10.2. Interpretación geométrica de las integrales dependientes de un parámetro.

Estas funciones F y G se denominan *funciones definidas por integrales*, o también *integrales dependientes de un parámetro*. Obsérvese que la notación tradicional de las integrales ayuda a clarificar respecto a qué variable se hace la integración. En la figura 10.2 puede verse la interpretación geométrica de estas funciones como el área limitada por una curva.

10.3.2 EJEMPLO. Considérese el intervalo $I = [0, 2] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ y la función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{para todo } (x, y) \in I.$$

Si $0 \leq y_0 \leq 1$ es un punto cualquiera del intervalo $[0, 1]$, la función $f(\cdot, y_0): [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\cdot, y_0)(x) = x^2 + y_0^2 - 1 \quad \text{para todo } x \in [0, 2],$$

es continua en su dominio. Análogamente, si $0 \leq x_0 \leq 2$ es un punto cualquiera del intervalo $[0, 2]$, la función $f(x_0, \cdot): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_0, \cdot)(y) = x_0^2 + y^2 - 1 \quad \text{para todo } y \in [0, 1],$$

es continua en su dominio. Así, pues, las funciones F y G serán las siguientes:

$$F(y) = \int_0^2 (x^2 + y^2 - 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + y^2x - x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 2y^2 - 2 = 2y^2 + \frac{2}{3}, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$G(x) = \int_0^1 (x^2 + y^2 - 1)dy = \left(x^2y + \frac{y^3}{3} - y \right) \Big|_0^1 = x^2 + \frac{1}{3} - 1 = x^2 - \frac{2}{3}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

La primera propiedad que se estudia de las funciones definidas por integrales es la continuidad.

10.3.3 PROPOSICIÓN. (*Continuidad de las funciones definidas por integrales*). Si la función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en su dominio, las funciones F y G definidas en 10.3.1 son continuas, respectivamente, en los intervalos $[c, d]$ y $[a, b]$.

Demostración:

Probaremos la continuidad de la función F en el intervalo $[c, d]$; la continuidad de la función G en $[a, b]$ se demuestra de forma análoga.

Sea y_0 un punto cualquiera de $[c, d]$; por ser $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua en su dominio, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que si $|y - y_0| < \delta$, entonces se cumple $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. En consecuencia, se tiene

$$|F(y) - F(y_0)| = \left| \int_a^b f(x, y)dx - \int_a^b f(x, y_0)dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

lo cual prueba la continuidad de F en el punto y_0 ; la arbitrariedad del mismo prueba la continuidad de F en el intervalo $[c, d]$. ■

10.3.4 OBSERVACIÓN. La proposición anterior se conoce a menudo como la *propiedad de paso al límite bajo el signo integral*, puesto que si $y_0 \in [c, d]$, la continuidad de la función F en dicho intervalo permite escribir

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = F(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)dx.$$

De forma análoga se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy.$$

A continuación se estudia la derivabilidad de las funciones definidas por integrales F y G en los abiertos correspondientes.

10.3.5 PROPOSICIÓN. (*Derivación bajo el signo integral*). Si la función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable parcialmente en el conjunto $]a, b[\times]c, d[$ y las funciones derivadas parciales $D_x f$ y $D_y f$ son continuas en sus dominios, entonces las funciones definidas por integrales F y G son derivables, respectivamente, en los intervalos $]c, d[$ y $]a, b[$, cumpliéndose además las igualdades

$$DF(y) = \int_a^b D_y f(x, y) dx, \text{ para todo } y \in]c, d[\text{ y } DG(x) = \int_c^d D_x f(x, y) dy, \text{ para todo } x \in]a, b[.$$

Demostración:

Probaremos la derivabilidad de la función F en el intervalo $]c, d[$; la derivabilidad de la función G en $]a, b[$ se razona de forma análoga.

Sea $y \in]c, d[$ un punto cualquiera del intervalo; por definición de derivada de una función en un punto, se tiene

$$\begin{aligned} DF(y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^b f(x, y+h) dx - \int_a^b f(x, y) dx}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx = \int_a^b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx = \int_a^b D_y f(x, y) dx, \end{aligned}$$

como se quería probar. ■

10.3.6 COROLARIO. (*Regla de Leibniz*). Sean u, v funciones derivables y sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable parcialmente en el conjunto $]a, b[\times]c, d[$ y cuyas funciones derivadas parciales $D_x f$ y $D_y f$ son continuas en sus dominios. Se cumple entonces la igualdad

$$D \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy = \left(\int_{u(x)}^{v(x)} D_x f(x, y) dy \right) + f(x, v(x)) Dv(x) - f(x, u(x)) Du(x)$$

para todo $x \in]a, b[$.

Demostración:

Designaremos mediante $\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy$, para todo $x \in]a, b[$, con lo que puede escribirse

$$\varphi(x) = \int_c^{v(x)} f(x, y) dy + \int_{u(x)}^c f(x, y) dy = \int_c^{v(x)} f(x, y) dy - \int_c^{u(x)} f(x, y) dy = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

Con ello, la derivada de φ puede calcularse mediante

$$D\varphi(x) = D\varphi_1(x) - D\varphi_2(x), \text{ para todo } x \in]a, b[.$$

Calcularemos la derivada de la función φ_1 ; la otra es completamente análoga. Observando que la función φ_1 puede escribirse como la composición

$$x \longrightarrow (x, v(x)) \longrightarrow \int_c^{v(x)} f(x, y) dy,$$

y designando $g(x, t) = \int_c^t f(x, y) dy$, aplicando la regla de la cadena para derivación de funciones de dos variables se tiene

$$D\varphi_1(x) = D_x g(x, v(x)) + D_t g(x, v(x)) Dv(x) = \left(\int_c^{v(x)} D_x f(x, y) dy \right) + f(x, v(x)) Dv(x).$$

Análogamente, se obtiene $D\varphi_2(x) = \left(\int_c^{u(x)} D_x f(x, y) dy \right) + f(x, u(x)) Du(x)$. Restando ambas derivadas, resulta la igualdad enunciada. ■

10.3.7 EJEMPLO. Vamos a aplicar el corolario anterior para calcular la derivada de la función definida por

$$F(x) = \int_x^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{y} e^{x^2 y^2} dy, \quad (y \neq 0).$$

Se tendrá

$$\begin{aligned} DF(x) &= \int_x^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{y} e^{x^2 y^2} (2xy^2) dy + \frac{1}{\operatorname{sen} x} e^{x^2 \operatorname{sen}^2 x} \cos x - \frac{1}{x} e^{x^2 x^2} \cdot 1 = \\ &= \int_x^{\operatorname{sen} x} 2xy e^{x^2 y^2} dy + \frac{1}{\tan x} e^{x^2 \operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x} e^{x^4} = \frac{e^{x^2 y^2}}{x} \Big|_x^{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\tan x} e^{x^2 \operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x} e^{x^4} = \\ &= \frac{e^{x^2 \operatorname{sen}^2 x}}{x} - \frac{e^{x^4}}{x} + \frac{1}{\tan x} e^{x^2 \operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x} e^{x^4} = -\frac{2e^{x^4}}{x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\tan x} \right) e^{x^2 \operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

Para finalizar el estudio de las propiedades de las funciones definidas por integrales, estudiaremos su integrabilidad.

10.3.8 PROPOSICIÓN. (*Integrabilidad de las funciones definidas por integrales*). Las funciones definidas por integrales F y G , son integrables sus respectivos intervalos de definición y, además, se cumple

$$\int_c^d F(y) dy = \int_a^b G(x) dx.$$

Demostración:

La integrabilidad de las funciones F y G es consecuencia inmediata de su continuidad. Para demostrar con el rigor necesario la igualdad enunciada se requieren conceptos que no hemos tratado en este texto, como por ejemplo la continuidad uniforme de funciones de dos variables. En cualquier caso, puede consultarse, por ejemplo, la referencia [Or] para ver la demostración completa.

No obstante, puede señalarse que si $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva en I , puede interpretarse geoméricamente la integral de F en $[c, d]$ y la integral de G en $[a, b]$, como el volumen del cuerpo

tridimensional definido por $\Omega = \{(x, y, z) / (x, y) \in I, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$, con lo que su igualdad es evidente a partir de dicha interpretación. ■

10.3.9 EJEMPLO. Vamos a comprobar la igualdad anterior con las funciones definidas por integrales F y G calculadas en el ejemplo 10.3.2. En efecto, por un lado se cumple

$$\int_0^1 F(y)dy = \int_0^1 \left(2y^2 + \frac{2}{3}\right) dy = \left(\frac{2}{3}y^3 + \frac{2}{3}y\right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3},$$

y por otro, se tiene

$$\int_0^2 G(x)dx = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{2}{3}\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x\right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

10.3.10 OBSERVACIÓN. La igualdad enunciada en la proposición anterior se escribe habitualmente

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

motivo por el cual se denomina a la proposición anterior *teorema del cambio en el orden de integración* y a las integrales que aparecen, *integrales iteradas*.

10.3.11 EJEMPLO. La interpretación geométrica comentada en la proposición anterior justifica el hecho que las integrales iteradas se apliquen al cálculo del volumen de cuerpos tridimensionales cuya proyección sobre el plano sea un rectángulo. Así, por ejemplo, para calcular el volumen de un cilindro de radio R y altura H , si se considera dicho cuerpo como el conjunto definido por

$$\Omega = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 2R, 0 \leq y \leq H, -\sqrt{2Rx - x^2} \leq z \leq \sqrt{2Rx - x^2}\},$$

entonces, teniendo en cuenta la simetría, el volumen $\mathcal{V}[\Omega]$ de dicho cilindro es

$$\mathcal{V}[\Omega] = 4 \int_0^R dx \int_0^H \sqrt{2Rx - x^2} dy = 4H \int_0^R \sqrt{2Rx - x^2} dx = \pi R^2 H.$$

10.4 CÁLCULO APROXIMADO DE INTEGRALES.

10.4.1 El cálculo de la integral de una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la aplicación de la regla de Barrow puede ser, en determinados casos, muy difícil o incluso imposible por la existencia de problemas insalvables en la determinación de una función primitiva de f ; en estos casos, puede recurrirse a los métodos de integración aproximada, algunos de los cuales se estudian en este apartado. No es nuestro propósito realizar un tratamiento exhaustivo del tema, del cual se ocupan los textos de Análisis Numérico, y nos centraremos en tres métodos: de los trapecios, de los rectángulos y de Simpson.

10.4.2 Antes de entrar en el estudio de cada uno de los métodos citados, haremos unas consideraciones de tipo general acerca de algunas hipótesis, idea general del planteamiento metodológico y sobre la notación empleada.

tridimensional definido por $\Omega = \{(x, y, z) / (x, y) \in I, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$, con lo que su igualdad es evidente a partir de dicha interpretación. ■

10.3.9 EJEMPLO. Vamos a comprobar la igualdad anterior con las funciones definidas por integrales F y G calculadas en el ejemplo 10.3.2. En efecto, por un lado se cumple

$$\int_0^1 F(y)dy = \int_0^1 \left(2y^2 + \frac{2}{3}\right) dy = \left(\frac{2}{3}y^3 + \frac{2}{3}y\right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3},$$

y por otro, se tiene

$$\int_0^2 G(x)dx = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{2}{3}\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x\right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

10.3.10 OBSERVACIÓN. La igualdad enunciada en la proposición anterior se escribe habitualmente

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

motivo por el cual se denomina a la proposición anterior *teorema del cambio en el orden de integración* y a las integrales que aparecen, *integrales iteradas*.

10.3.11 EJEMPLO. La interpretación geométrica comentada en la proposición anterior justifica el hecho que las integrales iteradas se apliquen al cálculo del volumen de cuerpos tridimensionales cuya proyección sobre el plano sea un rectángulo. Así, por ejemplo, para calcular el volumen de un cilindro de radio R y altura H , si se considera dicho cuerpo como el conjunto definido por

$$\Omega = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 2R, 0 \leq y \leq H, -\sqrt{2Rx - x^2} \leq z \leq \sqrt{2Rx - x^2}\},$$

entonces, teniendo en cuenta la simetría, el volumen $\mathcal{V}[\Omega]$ de dicho cilindro es

$$\mathcal{V}[\Omega] = 4 \int_0^R dx \int_0^H \sqrt{2Rx - x^2} dy = 4H \int_0^R \sqrt{2Rx - x^2} dx = \pi R^2 H.$$

10.4 CÁLCULO APROXIMADO DE INTEGRALES.

10.4.1 El cálculo de la integral de una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la aplicación de la regla de Barrow puede ser, en determinados casos, muy difícil o incluso imposible por la existencia de problemas insalvables en la determinación de una función primitiva de f ; en estos casos, puede recurrirse a los métodos de integración aproximada, algunos de los cuales se estudian en este apartado. No es nuestro propósito realizar un tratamiento exhaustivo del tema, del cual se ocupan los textos de Análisis Numérico, y nos centraremos en tres métodos: de los trapecios, de los rectángulos y de Simpson.

10.4.2 Antes de entrar en el estudio de cada uno de los métodos citados, haremos unas consideraciones de tipo general acerca de algunas hipótesis, idea general del planteamiento metodológico y sobre la notación empleada.

- Los métodos para calcular aproximadamente la integral de una función en un intervalo se basan en dos alternativas
 - 1) la aproximación de la función en subintervalos del intervalo dado (métodos de los trapecios y de Simpson) para calcular después, a partir de ella, la integral de la función;
 - 2) aproximar directamente la integral de la función en subintervalos mediante sumas de Riemann (método de los rectángulos).
- Supondremos que las funciones de las cuales se plantea el cálculo aproximado de su integral en un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ son continuas en dicho intervalo.
- Para calcular aproximadamente $\int_a^b f$, se considerará una partición $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y, a partir de ella, unos intervalos $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ en los cuales se calculará la integral $\int_{I_i} f = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f$, con el objetivo de aproximar la integral en $[a, b]$ mediante la suma de las aproximaciones obtenidas en cada intervalo I_i , a partir de la propiedad establecida en (9.2.8). Ello es factible, ya que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, la restricción de f a cada uno de los intervalos I_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$ es también una función continua y, por tanto, integrable en dicho intervalo.
- Como en todo método de cálculo aproximado, nos ocuparemos también de acotar el error cometido en dicha aproximación, que designaremos mediante $E_M(\int_a^b f)$, donde el subíndice M hará referencia al método empleado. Si en cada intervalo I_i se comete un error $E_M(\int_{I_i} f)$, el error total será la suma de los errores parciales; acotando éstos se tendrá una acotación del error total.

(A) El método de los trapecios.

10.4.3 Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$; el denominado *método de los trapecios* consiste, en esencia, en considerar en cada intervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $0, 1, \dots, n-1$ inducido por la partición la función cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ (véase la figura 10.3), esto es, la función cuya gráfica es la cuerda del arco de curva $y = f(x)$, $x \in I_i$ que une los extremos de dicho arco. Dicho de un modo informal: se trata de sustituir la curva por un segmento de recta “que se le parece bastante”, calcular luego la integral de la recta en cada subintervalo y sumar finalmente estas integrales. Veámoslo con mayor rigor y en detalle.

- Considérese la partición $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ definida por $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$; resulta evidente que, por definición, se cumple $x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, y que entonces cada intervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ tiene la misma amplitud $h = \frac{b-a}{n}$, esto es, se trata de una partición cuyos puntos están distribuidos regularmente.
- Sean las funciones $g_i: I_i = [x_i, x_i + h] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}(x - x_i), \quad x \in I_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

esto es, las funciones tales que, en cada intervalo I_i , su gráfica es la recta que pasa por los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_i + h, f(x_i + h))$. La función g_i es integrable en I_i y la integral de g_i en I_i es una aproximación de la integral de f en dicho intervalo, cumpliéndose entonces

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_i+h} f &\approx \int_{x_i}^{x_i+h} g_i = \int_{x_i}^{x_i+h} \left(f(x_i) + \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}(x - x_i) \right) = \\ &= f(x_i)h + \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} \left(\frac{x^2}{2} - x_i x \right) \Big|_{x_i}^{x_i+h} = \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_i + h)). \end{aligned}$$

La interpretación geométrica de esta integral es inmediata: es el área del trapecio rectángulo de bases $f(x_i + h)$ y $f(x_i)$ y de altura h , lo cual da nombre a este método (véase la figura 10.3).

- Finalmente, la integral de f en $[a, b]$ puede aproximarse mediante la suma de las integrales de las funciones g_i en cada intervalo I_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, esto es

$$\begin{aligned} \int_a^b f &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(a + ih) + f(a + (i+1)h)) = \\ &= h \left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h) + \frac{f(b)}{2} \right), \end{aligned}$$

que es la expresión del cálculo aproximado de $\int_a^b f$ por el método de los trapecios.

- Obsérvese que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es positiva y convexa en $[a, b]$, el método de los trapecios aproxima la integral por exceso y que si f es positiva y cóncava, la aproximación es entonces por defecto.

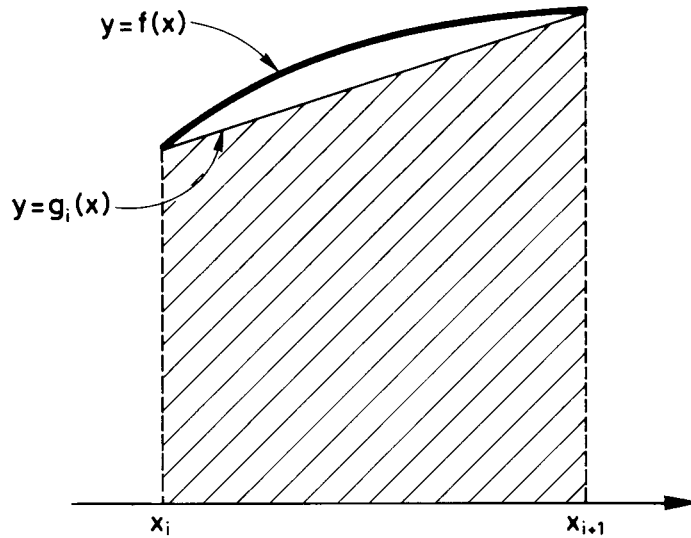


Figura 10.3. Interpretación geométrica del método de los trapecios.

Como ya se ha comentado, es importante conocer una cota superior del error que se comete cuando se realiza un cálculo aproximado; en la proposición que sigue se establece una cota del error cometido cuando se aplica el método de los trapecios basada en el conocimiento de una cota superior de la derivada segunda de la función en el intervalo $]a, b[$.

10.4.4 PROPOSICIÓN. (Acotación del error en el método de los trapecios). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2[a, b]$ y tal que $K = \sup_{x \in]a, b[} |D^2 f(x)|$. Si $E_T(\int_a^b f)$ designa el error cometido al aproximar la integral de f en $[a, b]$ por este método, se cumple entonces que

$$\left| E_T \left(\int_a^b f \right) \right| = \left| \int_a^b f - \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(a + ih) + f(a + (i+1)h)) \right| < \frac{K(b-a)^3}{12n^2}.$$

Demostración:

Se tratará de ver qué error se comete en cada uno de los intervalos $I_i = [x_i, x_i + h]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, de acotar dicho error y, finalmente, sumar las acotaciones encontradas.

Con el método de los trapecios se aproxima la integral de f en el intervalo I_i mediante

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f \approx \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_i + h)), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

con lo que en cada intervalo I_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, el error cometido es

$$E_T(\int_{I_i} f) = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_i + h)) - \int_{x_i}^{x_i+h} f, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Considérense las funciones $\varphi_i: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas mediante

$$\varphi_i(t) = \frac{t}{2}(f(x_i) + f(x_i + t)) - \int_{x_i}^{x_i+t} f, \quad t \in [0, h], \quad i = 0, 1, \dots, n-1;$$

está claro que $\varphi_i(0) = 0$ y que $\varphi_i(h) = E_T(\int_{I_i} f)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Por otra parte, en virtud de su definición, las funciones φ_i son derivables dos veces en el intervalo $]0, h[$ y se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} D\varphi_i(t) &= \frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_i + t)) + \frac{t}{2}Df(x_i + t) - f(x_i + t) = \frac{t}{2}Df(x_i + t) + \frac{1}{2}(f(x_i) - f(x_i + t)); \\ D^2\varphi_i(t) &= \frac{1}{2}Df(x_i + t) + \frac{t}{2}D^2f(x_i + t) - \frac{1}{2}Df(x_i + t) = \frac{t}{2}D^2f(x_i + t), \end{aligned}$$

cualquiera que sea $t \in]0, h[$, con lo que, teniendo en cuenta la definición de K , puede afirmarse que

$$D^2\varphi_i(t) < \frac{t}{2}K, \quad \text{para todo } t \in]0, h[, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

A partir de la acotación anterior se obtienen las siguientes:

$$|D\varphi_i(t)| = \left| \int_0^t D^2\varphi_i \right| < K \frac{t^2}{4} \quad \text{y} \quad |\varphi_i(t)| = \left| \int_0^t D\varphi_i \right| < K \frac{t^3}{12}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

para todo $t \in]0, h[$, con lo que $|\varphi_i(h)| < K \frac{h^3}{12} = K \frac{(b-a)^3}{12n^3}$. Finalmente, se obtendrá una cota del error cometido en la aproximación de la integral en el intervalo $[a, b]$ mediante la suma de las cotas del error cometido en cada uno de los intervalos I_i , es decir

$$E_T(\int_a^b f) = \sum_{i=0}^{n-1} E_T(\int_{I_i} f) = \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi_i(h)| < n \cdot K \frac{(b-a)^3}{12n^3} = \frac{K(b-a)^3}{12n^2},$$

como se quería probar. ■

10.4.5 EJEMPLO. Como aplicación del método de los trapecios, vamos a calcular aproximadamente la integral $\int_0^2 x^3$, dividiendo el intervalo $[0, 2] \subset \mathbb{R}$ en $n = 10$ subintervalos; se tiene entonces

$$h = \frac{2-0}{10} = 0.2, \quad \text{con lo que}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^3 &\approx 0.2 \left(0.2^3 + 0.4^3 + 0.6^3 + 0.8^3 + 1 + 1.2^3 + 1.4^3 + 1.6^3 + 1.8^3 + \frac{2^3}{2} \right) = \\ &= 0.2 (0.008 + 0.064 + 0.216 + 0.512 + 1 + 1.728 + 2.744 + 4.096 + 5.832 + 8) = 4.04. \end{aligned}$$

Puesto que la función $x^3: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ cumple las hipótesis de 10.4.4 y $K = \sup_{x \in]0, 2[} |6x| = 12$, una cota del error cometido en la aproximación vendrá dada por

$$\left| E_T \left(\int_0^2 x^3 \right) \right| < \frac{12(2-0)^3}{12 \cdot 10^2} = \frac{8}{100} = 0.08.$$

Como resulta evidente, los métodos para calcular aproximadamente la integral de una función en un intervalo no se utilizan en casos como el anterior, en el cual la integral puede calcularse por métodos analíticos. No obstante, en el ejemplo que sigue es imprescindible un cálculo aproximado.

10.4.6 EJEMPLO. Se trata de calcular la integral: $\int_1^2 e^{-x^2}$. La función $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}$ es continua en \mathbb{R} , con lo cual es integrable; no obstante, ya se ha comentado con anterioridad que no es posible obtener una primitiva de esta función que pueda expresarse en términos de las funciones elementales conocidas, con lo que el cálculo de la integral anterior debe abordarse necesariamente mediante métodos aproximados. Tomando, por ejemplo, $n = 5$ subintervalos del intervalo dado, se tiene $h = 1/5 = 0.2$, con lo cual

$$\int_1^2 e^{-x^2} \approx 0.2 \left(\frac{e^{-1}}{2} + e^{-(1.2)^2} + e^{-(1.4)^2} + e^{-(1.6)^2} + e^{-(1.8)^2} + \frac{e^{-4}}{2} \right) \approx 0.13747.$$

Para obtener una cota superior del error cometido, se observa que

$$D^2 f(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2) < \frac{4x^2 - 2}{e} < \frac{4x^2 - 2}{2}, \text{ para todo } x \in]1, 2[,$$

con lo que $D^2 f(x) \leq \frac{4 \cdot 2^2 - 2}{2} = 7.0$, para todo $x \in]1, 2[$, y, en consecuencia, el error cometido en la aproximación anterior está acotado mediante

$$E_T \left(\int_1^2 e^{-x^2} \right) < \frac{7.0}{12 \cdot 25} < 0.025.$$

(B) El método de los rectángulos.

10.4.7 Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si se considera la misma partición $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ que se ha tomado en el método anterior, esto es, la partición definida por $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, y en cada intervalo $I_i = [a + ih, a + (i+1)h]$ se toma el punto medio del mismo $c_i = a + (i + \frac{1}{2})h$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, la integral de f en I_i puede aproximarse entonces mediante

$$\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f \approx hf(c_i) = hf\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

que puede interpretarse geoméricamente de forma sencilla: es el área del rectángulo de base h y altura $f(c_i)$, de lo cual se deduce el nombre de este método de integración aproximada (véase la Figura 10.4). En consecuencia, si $C = \{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}$, la integral de f en $[a, b]$, puede aproximarse mediante la suma de Riemann

$$\int_a^b f \approx S(f; p; C) = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right),$$

que es la expresión del cálculo aproximado de $\int_a^b f$ mediante este método.

En la proposición que sigue se obtiene una cota superior del error que se comete cuando se aproxima una integral mediante el método de los rectángulos, conociendo como antes una cota superior de la derivada segunda de f en el intervalo abierto.

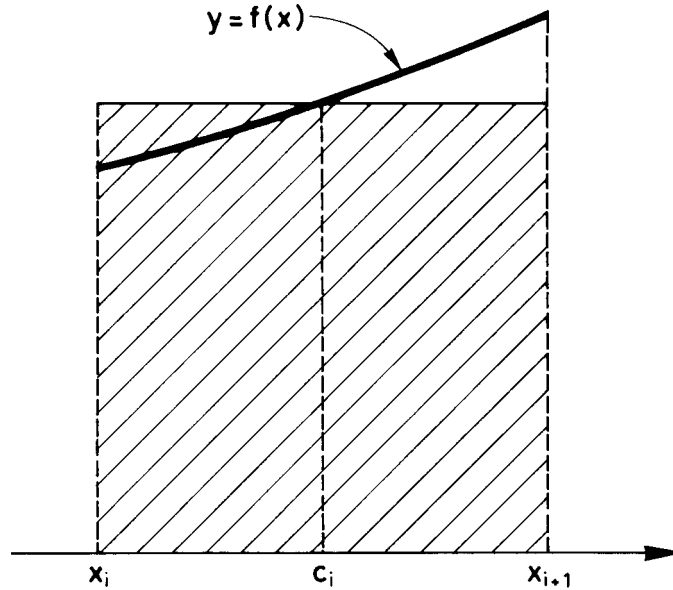


Figura 10.4. Interpretación geométrica del método de los rectángulos.

10.4.8 PROPOSICIÓN. (Acotación del error del método de los rectángulos). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2[a, b]$ y tal que $K = \sup_{x \in]a, b[} |D^2 f(x)|$. Si $E_R(\int_a^b f)$ designa el error cometido al aproximar la integral de f en $[a, b]$ por el método de los rectángulos, entonces se cumple (notaciones de 10.4.7):

$$\left| E_R\left(\int_a^b f\right) \right| = \left| \int_a^b f - h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right) \right| < K \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

(Obsérvese que, en las mismas condiciones el error cometido es la mitad del error correspondiente al método de los trapecios).

Demostración:

Consideremos las funciones $\varphi_i: [0, \frac{h}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi_i(t) = 2tf(c_i) - \int_{c_i-t}^{c_i+t} f = 2tf(c_i) - \left(\int_{x_i}^{c_i+t} f - \int_{x_i}^{c_i-t} f \right), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

En virtud de su definición, se tiene por un lado que $\varphi(h/2)$ es el error cometido al aproximar la integral de f en el intervalo I_i por el método de los rectángulos y, por otro, que estas funciones son

derivables dos veces en el intervalo $]0, \frac{h}{2}[$, cumpliéndose además las igualdades

$$\begin{aligned} D\varphi_i(t) &= 2f(c_i) - f(c_i + t) - f(c_i - t), \\ D^2\varphi_i(t) &= -Df(c_i + t) + Df(c_i - t) = -2tD^2f(\xi_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Nótese que para establecer la última igualdad se ha aplicado la fórmula del incremento finito a la función Df en el intervalo $[c_i - t, c_i + t]$. Se tiene entonces la acotación

$$|D^2\varphi_i(t)| < 2tK, \quad t \in \left[0, \frac{h}{2}\right], \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Integrando dos veces, se obtiene

$$|\varphi_i(t)| < K\frac{t^3}{3}, \quad t \in \left[0, \frac{h}{2}\right] \quad i = 0, 1, \dots, n-1;$$

con lo que $E_R(\int_{I_i} f) = \varphi_i(h/2) < K\frac{h^3}{24} = K\frac{(b-a)^3}{24n^3}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Por último, para obtener el error cometido en la aproximación de la integral de f en el intervalo $[a, b]$, se suman los errores en cada intervalo I_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, es decir

$$E_R\left(\int_a^b f\right) = \sum_{i=0}^{n-1} E_R\left(\int_{I_i} f\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(h/2) < n \cdot K\frac{(b-a)^3}{24n^3} = K\frac{(b-a)^3}{24n^2},$$

tal como se quería probar. ■

10.4.9 EJEMPLO.

- 1) La integral del ejemplo 10.4.5 calculada ahora por el método de los rectángulos con el mismo número de intervalos es

$$\int_0^2 x^3 \approx 0.2 \cdot \sum_{i=0}^9 \left((i+1/2)0.2\right)^3 = 0.2 \cdot 19.9 = 3.98,$$

con un error inferior a 0.04.

- 2) La integral del ejemplo 10.4.6 calculada mediante el método de los rectángulos y con el mismo número de intervalos, resulta

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{-x^2} &\approx 0.2 \sum_{i=0}^4 \exp(-(1+(i+0.5)0.2)^2) = \\ &= 0.2 (\exp(-(1.1)^2) + \exp(-(1.3)^2) + \dots + \exp(-(1.9)^2)) = \\ &= 0.13414, \end{aligned}$$

con un error menor que 0.0125.

(C) El método de Simpson.

10.4.10 Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. El método de Simpson consiste en la aproximación de f en cada intervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ mediante una función polinómica P , calculando luego su integral en I_i que a su vez

aproxima la integral de f en ese intervalo. Vamos a ver a continuación el caso en el cual dicha función polinómica es de segundo grado, pudiéndose establecer de forma análoga expresiones con funciones polinómicas de grado mayor que 2.

- Para definir de forma unívoca una función polinómica de segundo grado deben tenerse tres puntos; por ello, en la partición $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ los puntos se toman distribuidos regularmente y de manera que los intervalos resultan del tipo $I_i = [x_{2i}, x_{2(i+1)}]$ (véase la figura 10.5). Así pues, debe cumplirse que el número n de intervalos inducidos por la partición sea par, pongamos $n = 2m$, lo cual resulta si el número de puntos de la partición p adoptada es impar, esto es, si $p = \{x_0, x_1, \dots, x_{2m}\}$ y entonces $h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{2m}$, $i = 0, 1, \dots, 2m-1$.
- Se trata, pues, de aproximar la integral de f en cada intervalo $I_i = [x_{2i}, x_{2(i+1)}] = [x_{2i+1} - h, x_{2i+1} + h]$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ mediante la integral de una función polinómica de segundo grado $P_i(x) = A_i x^2 + B_i x + C_i$, $x \in I_i$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ en dicho intervalo. Por comodidad de notación notaremos t el punto medio del intervalo y suprimiremos los subíndices, es decir, $\int_{t-h}^{t+h} (Ax^2 + Bx + C) = \int_{t-h}^{t+h} P$.
- Aplicando el cambio de variable definido por $x = g(u) = u + t$, $Dg(u) = 1$, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{t-h}^{t+h} P &= \int_{-h}^h (A(u+t)^2 + B(u+t) + C) = \left(\frac{A}{3}(u+t)^3 + \frac{B}{2}(u+t)^2 + C(u+t) \right) \Big|_{-h}^h = \\ &= \left(\frac{A}{3}(t+h)^3 + \frac{B}{2}(t+h)^2 + C(t+h) \right) - \left(\frac{A}{3}(t-h)^3 + \frac{B}{2}(t-h)^2 + C(t-h) \right) = \\ &= \frac{2A(t+h)^2 + 3B(t+h) + 6C}{6}(t+h) - \frac{2A(t-h)^2 + 3B(t-h) + 6C}{6}(t-h) = \\ &= \frac{2P(t+h) + B(t+h) + 4C}{6}(t+h) - \frac{2P(t-h) + B(t-h) + 4C}{6}(t-h) = \\ &= \frac{h+t}{3}(P(t+h) + P(t-h)) + \frac{Bt+Bh+4C}{6}(t+h) - \frac{Bt-Bh+4C}{6}(t-h) = \\ &= \frac{h}{3}(P(t+h) + P(t-h)) + \frac{h}{3}(4At^2 + 4Bt + 4C) = \frac{h}{3} \left(P(t+h) + P(t-h) + 4P(0) \right). \end{aligned}$$

Volviendo a la notación original y teniendo en cuenta la coincidencia de los valores de las funciones f y P_i en los puntos x_{2i}, x_{2i+1} y $x_{2(i+1)}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, se obtiene

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2(i+1)}} f \approx \frac{h}{3} \left(f(x_{2i}) + f(x_{2i+2}) + 4f(x_{2i+1}) \right), \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Finalmente, si $p = \{x_0, x_1, \dots, x_{2m}\}$ es la partición del intervalo $[a, b]$ y, entonces, $n = 2m$ es el número de intervalos que induce dicha partición, resulta que la integral de f en $[a, b]$ se aproxima mediante

$$\int_a^b f \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right),$$

expresión que se conoce como la *fórmula o regla de Simpson*.

Análogamente a como se ha hecho en los dos métodos anteriores, vamos a acotar el error cometido al aproximar la integral de una función en un intervalo mediante la fórmula de Simpson; en este caso se requiere conocer una cota de la derivada cuarta de la función.

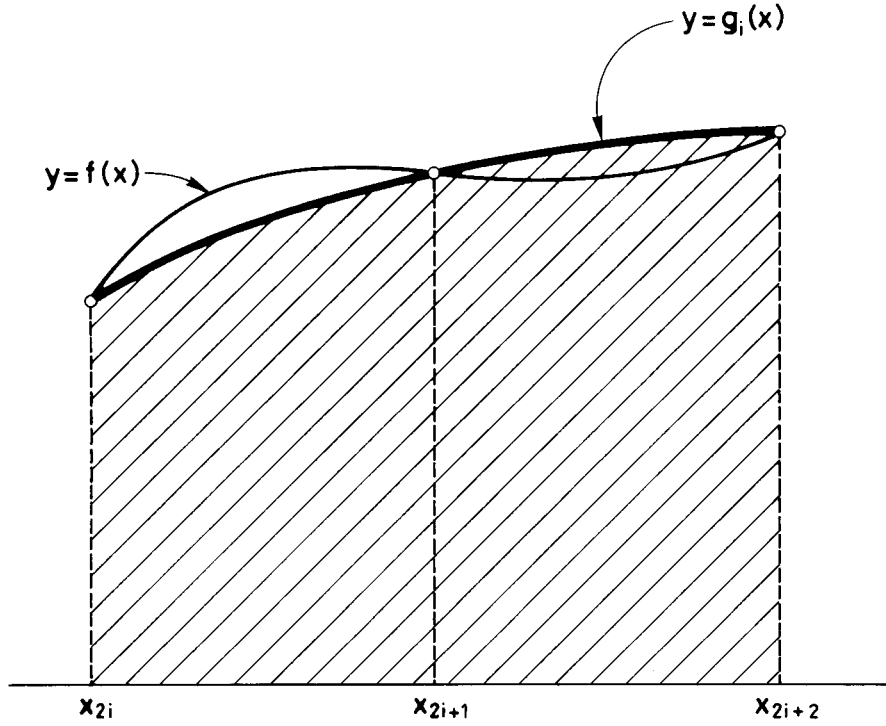


Figura 10.5. Interpretación geométrica del método de Simpson.

10.4.11 PROPOSICIÓN. (Acotación del error en el método de Simpson). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^4[a, b]$ y tal que $K = \sup_{x \in]a, b[} |D^4 f(x)|$. Si se designa mediante $E_S(\int_a^b f)$ el error cometido al aproximar la integral de f en $[a, b]$ por el método de Simpson, se cumple

$$\left| E_S\left(\int_a^b f\right) \right| = \left| \int_a^b f - \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) \right| < \frac{K(b-a)^5}{180n^4}.$$

Demostración:

Se consideran las funciones $\varphi_i: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ definidas por

$$\varphi_i(t) = \frac{t}{3} \left(f(x_{2i+1} - t) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+1} + t) \right) - \int_{x_{2i+1}-t}^{x_{2i+1}+t} f, \quad t \in [0, h].$$

El error cometido al aproximar la integral de f en el intervalo $I_i = [x_{2i}, x_{2i+2}]$ por el método de Simpson, viene dado por $\varphi_i(h)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$. Derivando en la expresión anterior, no es difícil probar que se cumplen las igualdades

$$D^3 \varphi_i(t) = \left(\frac{t}{3} (D^3 f(x_{2i+1} + t) - D^3 f(x_{2i+1} - t)) \right), \quad t \in]0, h[, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Aplicando la fórmula del incremento finito a $D^3 f$ en el intervalo $[x_{2i+1} - t, x_{2i+1} + t]$, se obtiene

$$D^3 f(x_{2i+1} + t) - D^3 f(x_{2i+1} - t) = 2tD^4 f(\xi_i), \quad x_{2i+1} - t < \xi_i < x_{2i+1} + t,$$

con lo que $|D^3\varphi_i(t)| = \frac{2t^3}{3}D^3f(\xi_i) \leq K\frac{2t^2}{3}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, de donde, integrando tres veces, se deduce que

$$\left|E_S\left(\int_{I_i} f\right)\right| = |\varphi_i(h)| \leq K\frac{h^5}{90} = K\frac{(b-a)^5}{90n^5}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

El error total en el intervalo $[a, b]$ estará acotado por la suma de los errores correspondientes a cada uno de los intervalos I_i , es decir, se cumplirá

$$\left|E_S\left(\int_a^b f\right)\right| = \sum_{i=0}^{m-1} |\varphi_i(h)| \leq \frac{n}{2} \cdot K\frac{(b-a)^5}{90n^5} = K\frac{(b-a)^5}{180n^4},$$

como se quería probar. ■

10.4.12 EJEMPLO. La integral $\int_0^2 x^3$, calculada aproximadamente aplicando el método de Simpson con $n = 10$, da como resultado

$$\int_0^2 x^3 \approx \frac{0.2}{3}(4(0.2)^3 + 2(0.4)^3 + 4(0.6)^3 + 2(0.8)^3 + 4(1)^3 + 2(1.2)^3 + 4(1.4)^3 + 2(1.6)^3 + 4(1.8)^3 + 2^3) = 4.$$

Obsérvese que en este caso $K = 0$, con lo que el método da resultado exacto.

10.4.13 EJEMPLO. La integral $\int_1^2 e^{-x^2}$, calculada por la aproximación de Simpson tomando $n = 6$ intervalos, esto es, $h = \frac{1}{6} = 0.16666$, vale

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{-x^2} &\approx 0.05555 (0.36787 + 4(0.25638) + 2(0.16902) + 4(0.1054) + \\ &+ 2(0.06217) + 4(0.03479) + 0.01831) = 0.13523, \end{aligned}$$

siendo inmediato establecer que el error está acotado por 0.001 (háganse los detalles como ejercicio).

10.5 ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL.

El concepto de integral de una función en un intervalo tiene un inmenso campo de aplicaciones, tanto en el propio ámbito de la Matemática (algunas de ellas las desarrollaremos en este apartado) como en otros ámbitos relacionados con la Ingeniería y las Ciencias Aplicadas (Mecánica, Electrotecnia, Química, etc). Abordarlas todas sería una pretensión tan inverosímil como inútil y debe ser en cada ámbito donde se justifique dicha aplicación y se desarrolle de forma adecuada.

(A) Área de un subconjunto del plano.

10.5.1 Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y positiva en su dominio; ya se ha comentado que la integral de f en el intervalo $[a, b]$ puede interpretarse como el área del subconjunto $W \subset \mathbb{R}^2$ definido por $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, área que designaremos $\mathcal{A}[W]$; así pues, en este caso

$\mathcal{A}[W] = \int_a^b f$. Si la función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ no es positiva en $[a, b]$, el área puede calcularse mediante la integral $\int_a^b |f|$ (véase la figura 10.6(a)).

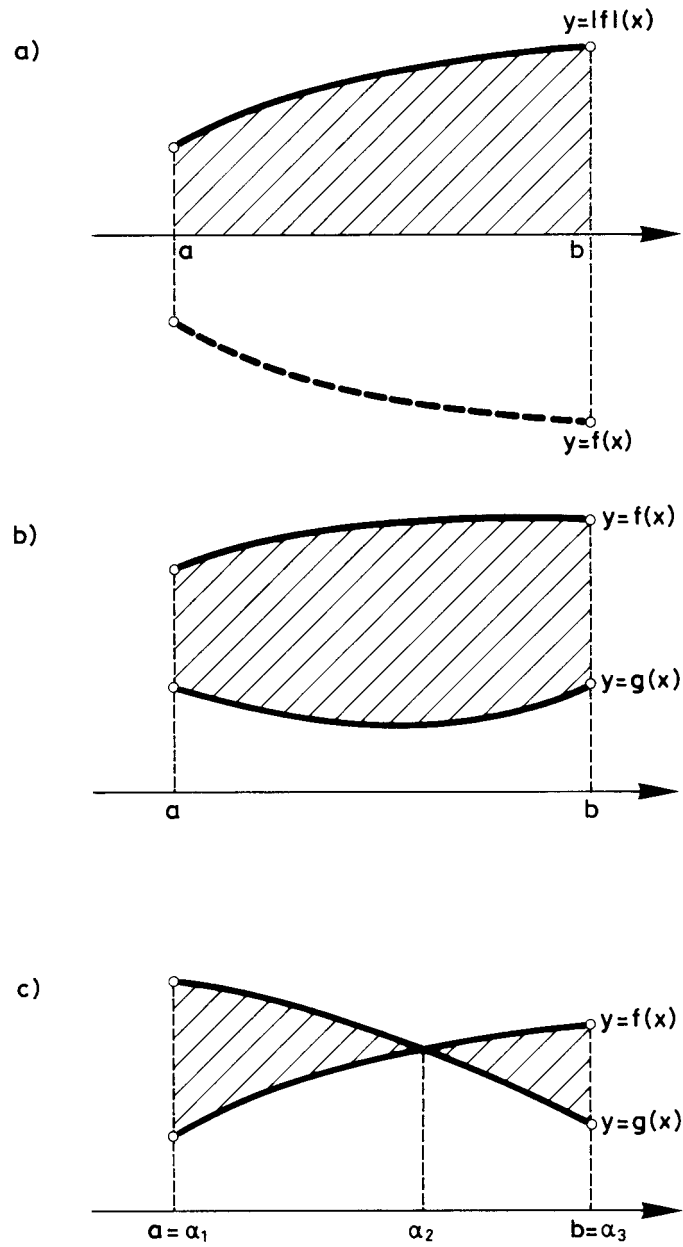


Figura 10.6. Aplicación de la integral al cálculo del área de un subconjunto del plano.

Si $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función acotada definida en el intervalo $[a, b]$, tal que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, el área del subconjunto del plano definido por $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq$

$x \leq b$, $g(x) \leq y \leq f(x)$ }, puede calcularse mediante la integral $\mathcal{A}[W] = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g)$. (Véase la figura 10.6(b)).

Si no se cumple la condición $g(x) \leq f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces el área del subconjunto del plano cuya ordenada está limitada por las curvas planas y cuya abscisa está en el intervalo $[a, b]$, puede calcularse mediante la integral: $\mathcal{A}[W] = \int_a^b |f - g|$.

Finalmente, si existe un número finito de puntos de intersección entre las gráficas de las curvas $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$, el área del subconjunto del plano cuya ordenada está limitada por las curvas planas y cuya abscisa está en el intervalo $[a, b]$, puede calcularse mediante la suma de integrales $\mathcal{A}[W] = \sum_{k=1}^{p-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f - g|$. (Véase la figura 10.6(c)).

10.5.2 EJEMPLO. Veamos dos ejemplos de aplicación de esta metodología.

1) Se trata de calcular el área limitada por las parábolas dadas por las ecuaciones

$$x^2 - 3y = 0, \quad 2x^2 + 3y - 12 = 0.$$

Los puntos de intersección de ambas curvas son: $P(-2, \frac{4}{3})$ y $Q(2, \frac{4}{3})$; si se consideran las funciones

$$f(x) = 4 - \frac{2x^2}{3}, \quad x \in [-2, 2] \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x^2}{3}, \quad x \in [-2, 2],$$

se cumple $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [-2, 2]$, con lo que de acuerdo con lo expuesto anteriormente, puede calcularse el área del subconjunto $W = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 2, \frac{x^2}{3} \leq y \leq 4 - \frac{2x^2}{3} \right\}$, mediante

$$\mathcal{A}[W] = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) = \int_{-2}^2 \left(4 - \frac{2x^2}{3} - \frac{x^2}{3} \right) = \frac{32}{3}.$$

2) Para calcular el área limitada por las curvas $y = \cos x$ y $y = \sin x$ entre $x = 0$ y $x = 2\pi$, se observa que en el intervalo $[0, 2\pi]$ dichas curvas se cortan en dos puntos: $P(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $Q(5\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. En consecuencia, el intervalo queda dividido en tres subintervalos, en los cuales se cumple

$$\sin x \leq \cos x, \quad \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \quad \cos x \leq \sin x, \quad \text{si } \frac{\pi}{4} \leq x \leq 5\frac{\pi}{4}; \quad \sin x \leq \cos x, \quad \text{si } 5\frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi.$$

Por lo tanto, el área del subconjunto $W \subset \mathbb{R}^2$ limitado por las dos curvas consideradas en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ se calculará mediante la suma de tres integrales, esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[W] &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{5\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) + \int_{5\frac{\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \sin x) = \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{5\frac{\pi}{4}} + (\sin x + \cos x) \Big|_{5\frac{\pi}{4}}^{2\pi} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

10.5.3 OBSERVACIÓN. En ocasiones, para calcular el área limitada por dos curvas planas resulta mucho más práctico plantear los cálculos considerando que la ecuación de las curvas planas se

expresa mediante $x = \varphi(y)$, la cual se deduce, si ello es posible, de la ecuación $y = f(x)$ mediante transformaciones algebraicas adecuadas. Con este planteamiento, denominado *método de las franjas horizontales*, el área del subconjunto del plano definido por

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

(véase la figura 10.7) puede calcularse mediante la integral

$$\mathcal{A}[W] = \int_c^d (\psi(y) - \varphi(y)).$$

siendo válidas consideraciones similares a las efectuadas en 10.5.1 en cuanto a signo, desigualdades y descomposición del intervalo.

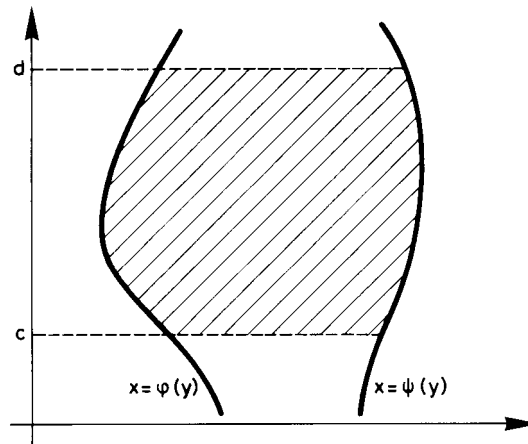


Figura 10.7. Cálculo de áreas “por franjas horizontales”.

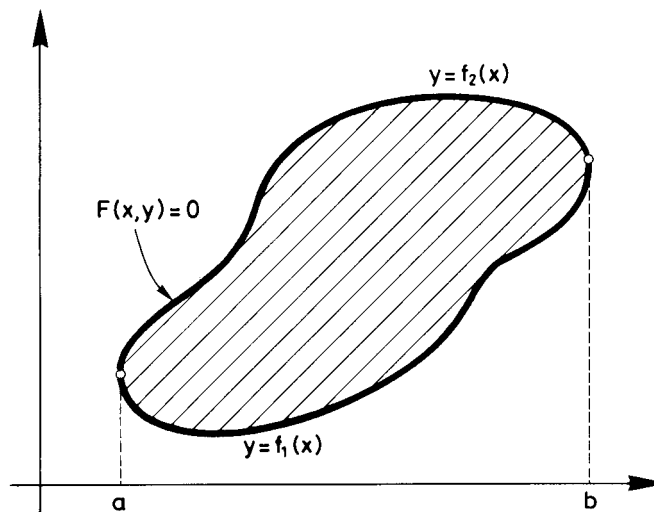


Figura 10.8. Cálculo de áreas planas: caso más general.

10.5.4 OBSERVACIÓN. En otros casos, el subconjunto $W \subset \mathbb{R}^2$ se define como el limitado por una curva plana de ecuación $F(x, y) = 0$, esto es, viene dado por $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / F(x, y) \leq 0\}$, (véase la figura 10.8). En este caso, las funciones a integrar, esto es, $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en un caso, o bien, las funciones $\varphi_1, \varphi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ en el otro, se obtienen a partir de la ecuación de la frontera o contorno de W , que es el conjunto definido por $\delta W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / F(x, y) = 0\}$, despejando la variable correspondiente. Por otra parte, los límites de las variables se determinan a partir de la resolución de los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y) = 0, \\ D_y F(x, y) = 0, \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x, y) = 0, \\ D_x F(x, y) = 0. \end{array} \right.$$

A partir del primero de ellos se obtienen los valores de a y b , para aplicar la metodología descrita en 10.5.1 y a partir del segundo, los valores de c y d para aplicar lo visto en 10.5.3.

(B) Cálculo de áreas utilizando coordenadas polares planas.

10.5.5 Las *coordenadas polares* de un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son (r, θ) , donde $r \geq 0$ es la distancia del punto al origen de coordenadas y $\theta \in]-\pi, \pi[$ es el ángulo que forman la semirecta que une el punto con el origen de coordenadas y el semieje positivo de las x . Se relacionan con las *coordenadas cartesianas* mediante las ecuaciones

$$x = r \cos \theta \quad \text{y} \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Si un subconjunto del plano está limitado por dos semirectas de ecuaciones $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ y dos curvas planas de ecuaciones $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$, esto es, si el subconjunto W está definido por

$$W = \{(r, \theta) / \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, g(\theta) \leq r \leq f(\theta)\},$$

(véase la figura 10.9), el cálculo del área del subconjunto W puede plantearse como se ve a continuación. Si $p = \{\theta_1 = \theta^{(1)} < \theta^{(2)} < \dots < \theta^{(n)} = \theta_2\}$ es una partición del intervalo $[\theta_1, \theta_2]$, el área del subconjunto limitado por las semirectas $\theta = \theta^{(k)}$ y $\theta = \theta^{(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, y las dos curvas de ecuaciones $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$, puede aproximarse mediante el área de la parte de corona circular dada por

$$A_k = \frac{1}{2} \left(f(\omega_k)^2 - g(\omega_k)^2 \right) (\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}), \quad \omega_k \in]\theta^{(k)}, \theta^{(k+1)}[, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Entonces, una aproximación al área del subconjunto W vendrá dada por las sumas de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(\omega_k)^2 - g(\omega_k)^2 \right) (\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}).$$

Si las funciones f y g son continuas, en virtud de 9.3.2 se cumplirá

$$\mathcal{A}[W] = \lim_{p \in \mathcal{P}[\theta_1, \theta_2]} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(\omega_k)^2 - g(\omega_k)^2 \right) (\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f(\theta)^2 - g(\theta)^2),$$

que es la expresión que proporciona un método de cálculo del área de un subconjunto del plano, utilizando coordenadas polares planas.

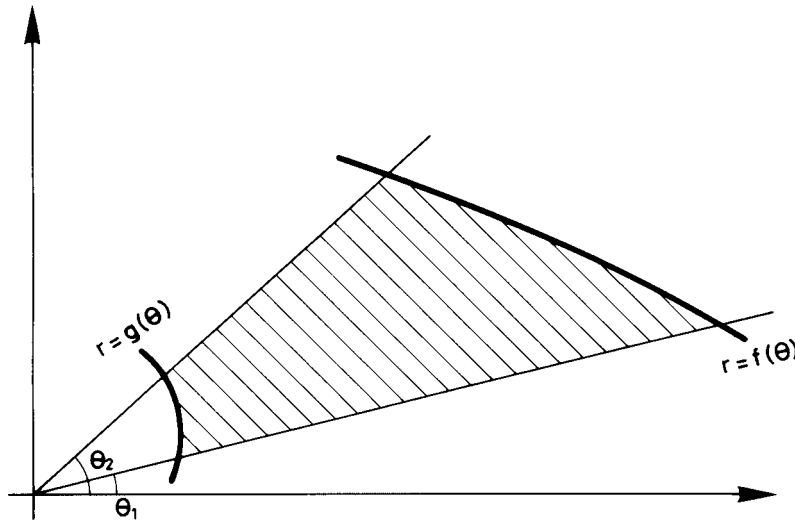


Figura 10.9. Área de un subconjunto mediante coordenadas polares planas.

10.5.6 EJEMPLO. Vamos a calcular el área del subconjunto limitado por la circunferencia de centro el punto $(a, 0)$ y radio a y las semirectas de ecuaciones $\theta = \frac{\pi}{8}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$ (véase la figura 10.10). La ecuación de la circunferencia en coordenadas cartesianas es: $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, es decir, $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. En coordenadas polares planas, esta ecuación se transforma en: $r = 2a \cos \theta$. El subconjunto W del cual se quiere calcular el área, está definido por

$$W = \{(r, \theta) \mid \frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \cos \theta\},$$

con lo que su área se calculará mediante la integral:

$$\mathcal{A}[W] = \frac{1}{2} \int_{\pi/8}^{\pi/4} (2a \cos \theta)^2 = 2a^2 \int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos^2 \theta = 2a^2 \int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{\pi + 4 - 2\sqrt{2}}{8} a^2.$$

10.5.7 EJEMPLO. (*Lemniscata de Bernoulli*). Vamos a ver ahora otro ejemplo, que por otra parte es un clásico del cálculo de áreas en coordenadas polares planas: se trata de calcular el área del subconjunto $W \subset \mathbb{R}^2$ limitado por la curva de ecuación $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (véase la figura 10.11), curva que se denomina *lemniscata de Bernoulli*. La simetría del subconjunto que corresponde a la gráfica de esta curva permite calcular el área como cuatro veces el área sombreada en la citada figura; con las notaciones de antes, el subconjunto del cual calcularemos el área se describe en la forma siguiente:

$$W_1 = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq a\sqrt{2 \cos 2\theta}\},$$

con lo que el cálculo de su área se hará mediante la integral

$$\mathcal{A}[W] = 4\mathcal{A}[W_1] = 4 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2a^2 \cos 2\theta \right) = 2a^2.$$

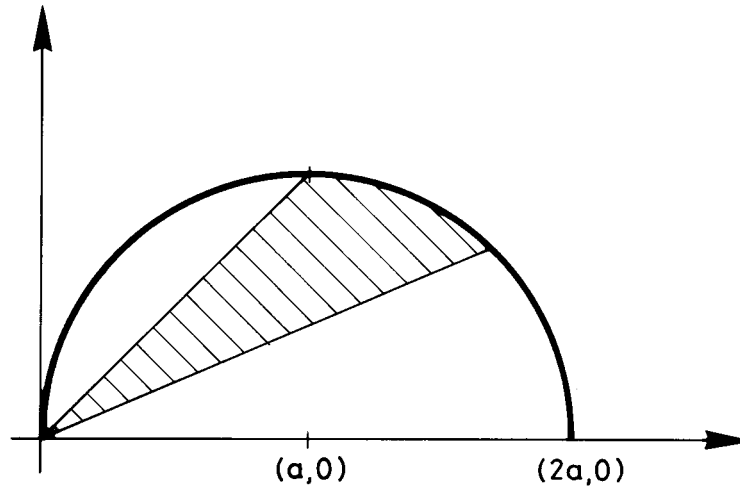


Figura 10.10. Ilustración del ejemplo 10.5.6.

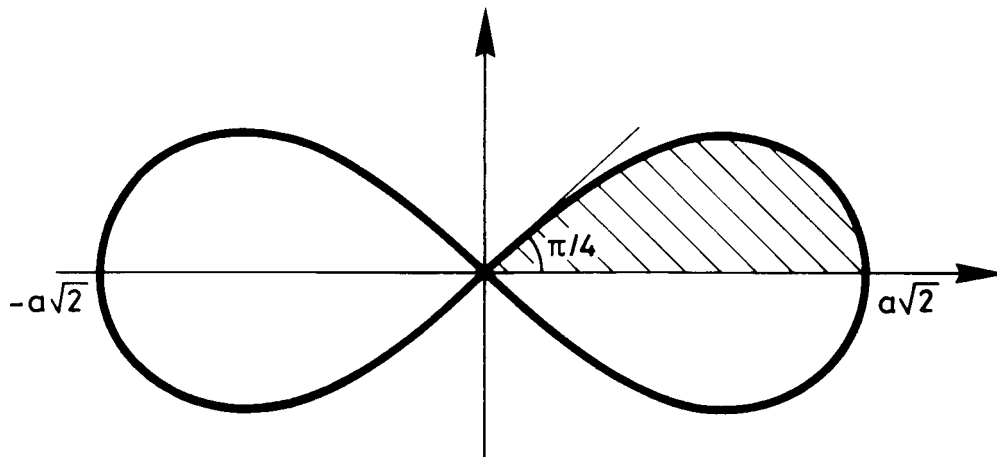


Figura 10.11. Gráfica de la lemniscata de Bernoulli.

(C) Volumen de un sólido de revolución.

10.5.8 Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y positiva en el intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} ; si $W \subset \mathbb{R}^2$ es el subconjunto definido por

$$W = \{(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

se desea aplicar el concepto de integral de una función en un intervalo para calcular el volumen del cuerpo generado por la rotación de W alrededor del eje de abscisas, volumen que se designará mediante $\mathcal{V}[y = 0, W]$ y cuya metodología de cálculo se justifica a continuación.

Sea $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y sea un subintervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}] \subset$

$[a, b]$, $0 \leq i \leq n-1$. El volumen del cuerpo Ω_i limitado por la superficie de revolución y los planos de ecuaciones $x = x_i$ y $x = x_{i+1}$, puede aproximarse mediante el volumen del cilindro cuya base es el círculo de radio $f(c_i)$, siendo $c_i \in I_i$ y altura $x_{i+1} - x_i$, es decir

$$\mathcal{V}[\Omega_i] \simeq \pi f(c_i)^2 (x_{i+1} - x_i), \quad c_i \in I_i.$$

En consecuencia, el volumen del cuerpo Ω es aproximado por la suma de los volúmenes de los n cilindros correspondientes a cada subintervalo I_i , es decir, se cumple

$$\mathcal{V}[\Omega] \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{V}[\Omega_i] \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(c_i)^2 (x_{i+1} - x_i), \quad c_i \in I_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Con la interpretación de la integral como sumas de Riemann, puede afirmarse entonces que

$$\mathcal{V}[\Omega] = \mathcal{V}[y = 0; W] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(c_i)^2 (x_{i+1} - x_i) = \pi \int_a^b f(x)^2,$$

que es la expresión buscada. Si la rotación del subconjunto W se realiza en torno a una recta horizontal de ecuación $y = h$, entonces es inmediato ver que

$$\mathcal{V}[y = h; W] = \pi \int_a^b (f(x) - h)^2.$$

Tiene asimismo interés obtener la expresión del volumen del cuerpo generado mediante la rotación de un subconjunto W del plano en torno al eje de ordenadas, de ecuación $x = 0$; manteniendo notaciones, dicho volumen se indicará mediante $\mathcal{V}[x = 0; W]$ y, entonces, el volumen del cuerpo Ω_i^* generado por la rotación del subconjunto

$$W_i^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I_i, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

puede aproximarse mediante el volumen del tubo cilíndrico Ω_i generado por el conjunto

$$W_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I_i, 0 \leq y \leq f(c_i), x_i \leq c_i \leq x_{i+1}\},$$

cuya expresión es $\mathcal{V}[\Omega_i] = \pi(x_{i+1}^2 - x_i^2)f(c_i) = \pi(x_{i+1} + x_i)f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$, $x_i \leq c_i \leq x_{i+1}$. Así pues, teniendo presente que $\mathcal{V}[\Omega_i^*] \simeq \mathcal{V}[\Omega_i]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, la suma de Riemann

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{V}[\Omega_i] = \pi \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} + x_i)f(c_i)(x_{i+1} - x_i), \quad x_i \leq c_i \leq x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

es una aproximación del volumen buscado, que vendrá expresado mediante

$$\mathcal{V}[\Omega] = \mathcal{V}[x = 0; W] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\pi \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} + x_i)f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \right) = 2\pi \int_a^b xf(x).$$

Si el conjunto W gira en torno a una recta vertical de ecuación $x = k$, entonces el volumen del cuerpo Ω generado por la rotación de W entorno a esta recta puede calcularse mediante

$$\mathcal{V}[x = k; W] = 2\pi \int_a^b (x - k)f(x).$$

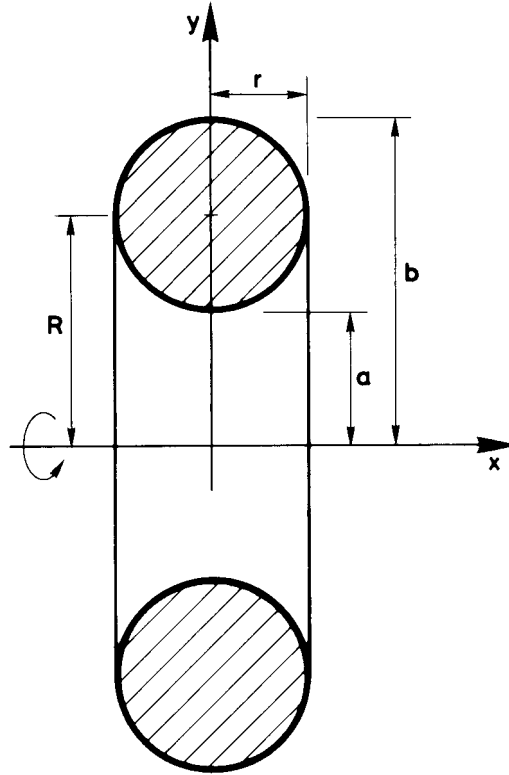


Figura 10.12. Toro generado por la rotación de un círculo.

Veamos unos ejemplos ilustrativos de la metodología que se acaba de desarrollar.

10.5.9 EJEMPLO. Si el subconjunto $W \subset \mathbb{R}^2$ es un círculo, el cuerpo Ω generado por su rotación en torno a una recta exterior al mismo, se dice que es un *toro*; se denomina radio interior del toro (designado a) a la distancia del círculo a la recta respecto a la cual gira, y se denomina radio exterior del toro (notado b) a la suma de su radio interior a y el diámetro del círculo que engendra el toro (véase la figura 10.12). Se trata de calcular el volumen del toro en función de sus radios interior y exterior.

Para abordar la resolución de este ejercicio, tomaremos un círculo de radio r centrado en punto $(0, R)$, cumpliéndose $R > r$; entonces, el toro es el cuerpo Ω generado por la rotación de este círculo W en torno al eje de abscisas, siendo su radio interior $a = R - r > 0$ y su radio exterior $b = R + r > 0$ y cumpliéndose entonces que $R = \frac{a+b}{2}$ y $r = \frac{b-a}{2}$. La ecuación de la circunferencia de centro el punto $(0, R)$ y radio r es $x^2 + y^2 - 2Ry + R^2 - r^2 = 0$, a partir de la cual se obtendrán las funciones que deberán utilizarse en los cálculos, que son

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a], \quad \text{y} \quad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a].$$

Con ello, el toro Ω es el cuerpo de revolución generado por la rotación, en torno al eje de abscisas, del conjunto

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -r \leq x \leq r, R - \sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq R + \sqrt{r^2 - x^2}\}.$$

Teniendo en cuenta la simetría del toro respecto al plano $x = 0$, su volumen puede calcularse entonces mediante la integral

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[y = 0; W] &= 2 \left(\pi \int_0^r (f_1(x)^2 - f_2(x)^2) \right) = 2\pi \int_0^r 4R\sqrt{r^2 - x^2} = \\ &= 8\pi R \left(\frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \arcsen \frac{x}{r} \right) \Big|_0^r = 2\pi^2 R r^2 = 2\pi^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4} (b+a)(b-a)^2, \end{aligned}$$

que es la expresión que se quería encontrar.

Por supuesto existe otro planteamiento alternativo al que hemos efectuado: consiste en considerar la circunferencia de centro en el punto $(R, 0)$ y radio $r < R$, con lo que el toro Ω es entonces el cuerpo de revolución generado por la rotación del círculo en torno al eje de ordenadas. Como ejercicio, detállense los cálculos en este caso y compruébese la coincidencia de resultados entre ambos planteamientos.

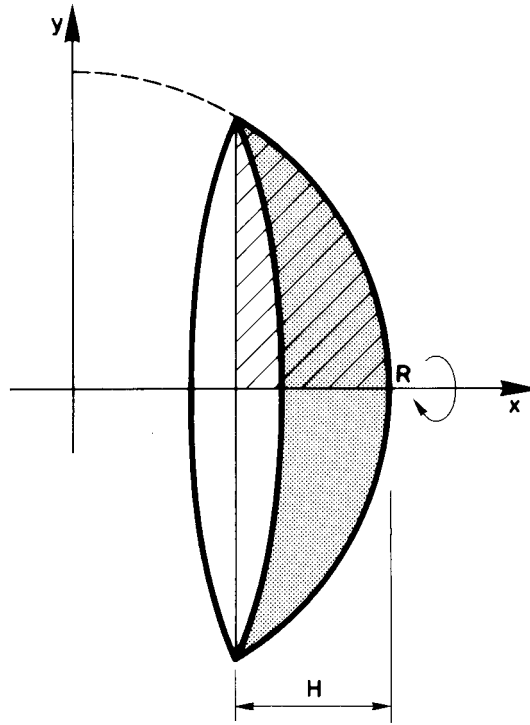


Figura 10.13. Volumen de un casquete esférico.

10.5.10 EJEMPLO. Vamos a obtener la expresión del volumen de un casquete esférico Ω de altura H en una esfera de radio R (véase la figura 10.13). Un planteamiento posible para ello es el siguiente: considerar la circunferencia de centro en el origen de coordenadas y radio R , cuya ecuación es $x^2 + y^2 = R^2$ y el conjunto $W \subset \mathbb{R}^2$ definido por $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / R - H \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$. Con ello, el casquete esférico Ω es, precisamente, el cuerpo que resulta de la rotación de W en torno al eje

de abscisas. Por lo tanto, el volumen de Ω puede calcularse mediante

$$\mathcal{V}[\Omega] = \mathcal{V}[x=0; W] = \pi \int_{R-H}^R (R^2 - x^2) = \frac{\pi}{3} H^2 (3R - H).$$

(D) Longitud de un arco de curva plana.

10.5.11 Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en su dominio y derivable en el abierto $]a, b[$; designemos mediante

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [a, b], y = f(x)\}$$

el arco de la gráfica de f formada por los puntos cuya abscisa está en el intervalo $[a, b]$. Queremos deducir una expresión que permita el cálculo de la longitud de dicho arco, que indicaremos por $\mathcal{L}(\Gamma)$.

Sea $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y designemos por $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ cada uno de los subintervalos inducidos por esa partición; designemos mediante

$$\Gamma_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I_i, y = f(x)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

el arco de la gráfica de f formada por los puntos cuya abscisa está en el intervalo I_i . Si admitimos que la longitud de este arco puede aproximarse por la longitud del segmento que une sus extremos, se tendrá

$$\mathcal{L}(\Gamma_i) \approx ((x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2)^{1/2} = \left(1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2\right)^{1/2} (x_{i+1} - x_i),$$

($i = 1, 2, \dots, n-1$). En consecuencia, la longitud del arco de curva estará aproximada por la longitud de la poligonal formada por los segmentos que unen los extremos de los subintervalos I_i y teniendo en cuenta la interpretación de la integral como sumas de Riemann, se cumplirá

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2\right)^{1/2} (x_{i+1} - x_i) = \int_a^b \sqrt{1 + (Df(x))^2},$$

que es la expresión buscada.

10.5.12 EJEMPLO. Se desea calcular la longitud del arco de parábola $y = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Si se considera la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y aplicando 10.5.11, se tendrá

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1.47894.$$

(E) Área de una superficie de revolución.

10.5.13 Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y positiva en su dominio y derivable en el abierto $]a, b[$. Si se designa mediante

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [a, b], y = f(x)\}$$

el arco de la gráfica de f formada por los puntos cuya abscisa está en el intervalo $[a, b]$, se desea calcular el área de la superficie de revolución generada por la rotación de Γ en torno al eje de abscisas, que indicaremos $\mathcal{A}[y=0, \Gamma]$. Vamos a desarrollar una metodología para ello.

Si $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ y designamos por $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ cada uno de los subintervalos inducidos por la misma, puede aproximarse el área generada por la rotación de Γ entre $x = x_i$ y $x = x_{i+1}$, por el área de un tronco de cono tal que la longitud de su circunferencia media es

$$L_i = 2\pi f(c_i), \quad c_i \in I_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

y cuya apotema viene dada por

$$D_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (Df(c_i))^2 (x_{i+1} - x_i)^2} = \sqrt{1 + (Df(c_i))^2} (x_{i+1} - x_i).$$

En consecuencia, el área del tronco de cono será

$$A_i = L_i D_i = (2\pi f(c_i)) \left(\sqrt{1 + (Df(c_i))^2} (x_{i+1} - x_i) \right), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Así pues, el área de la superficie de revolución generada por la rotación de Γ en torno al eje de abscisas, puede aproximarse mediante la suma de Riemann

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_i = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \left(\sqrt{1 + (Df(c_i))^2} (x_{i+1} - x_i) \right),$$

con lo que finalmente, el área citada puede calcularse mediante

$$\mathcal{A}[y = 0; \Gamma] = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \left(\sqrt{1 + (Df(c_i))^2} (x_{i+1} - x_i) \right) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (Df(x))^2}.$$

Se prueba de forma análoga que el área de la superficie de revolución generada por la rotación de Γ en torno al eje de ordenadas, que designaremos por $\mathcal{A}[x = 0; \Gamma]$, puede calcularse mediante

$$\mathcal{A}[x = 0; \Gamma] = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (Df(x))^2}.$$

10.5.14 EJEMPLO.

1) Vamos a calcular el área de un casquete esférico como el que se ha descrito en 10.5.10. Si se considera la función $f: [R-H, R] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, dicha función es derivable y su derivada es

$$Df(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad x \in]R-H, R[.$$

Si se considera el arco de curva definido por $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [R-H, R], y = f(x)\}$, el área del casquete esférico será

$$\mathcal{A}[y = 0; \Gamma] = 2\pi \int_{R-H}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = 2\pi RH.$$

2) Pruébese como ejercicio que el área de la superficie del toro descrito en 10.5.9 es

$$\mathcal{A}[y = 0; \Gamma] = \pi^2(b^2 - a^2),$$

manteniendo notaciones y significado.

(F) Volumen de un cuerpo de sección conocida.

10.5.15 Considérese un cuerpo tridimensional Ω tal que existe una recta que lo atraviesa y puede conocerse el área $\mathcal{A}(u)$ de cualquier sección resultado de cortar el cuerpo por un plano ortogonal a dicha recta (véase la figura 10.14), variando u en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Se trata de establecer una metodología que permita calcular, en estas condiciones, el volumen de dicho cuerpo.

Sea $\{a = u_0, u_1, \dots, u_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y sean $I_i = [u_i, u_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, los subintervalos inducidos por la partición. Puede aproximarse el volumen de este cuerpo mediante la suma de Riemann

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}(c_i)(u_{i+1} - u_i), \quad c_i \in I_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

con lo que dicho volumen se podrá calcular mediante la integral

$$\mathcal{V}[\Omega] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}(c_i)(u_{i+1} - u_i) = \int_a^b \mathcal{A}(u) du.$$

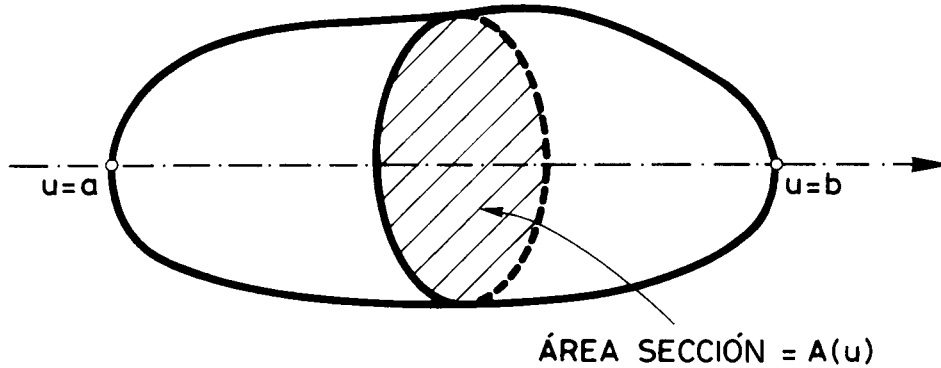


Figura 10.14. Volumen de un cuerpo tridimensional de sección conocida.

10.5.16 EJEMPLO. Un cuerpo tridimensional Ω tiene por base una elipse de ejes 2m y 4m; toda sección de dicho cuerpo obtenida por intersección del mismo con un plano vertical perpendicular al eje mayor de la base es un triángulo equilátero. Calcular el volumen de dicho cuerpo. Para resolverlo, puede considerarse que la base es la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, $-2 \leq x \leq 2$. Una sección situada a distancia x del origen de coordenadas es un triángulo equilátero de lado $2y$ y altura $y\sqrt{3}$, con lo que el área de la sección correspondiente del cuerpo puede expresarse mediante $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} \cdot (2y)(y\sqrt{3}) = y^2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - x^2)$. Finalmente, teniendo en cuenta la simetría del cuerpo respecto del plano $x = 0$, el cálculo del volumen puede hacerse, de acuerdo con lo expuesto en 10.5.15, mediante la integral

$$\mathcal{V}[\Omega] = 2 \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

10.6 EJERCICIOS.

1. Dadas las funciones $f, \varphi: I = [-0.5, 0.5] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi(x) = -x\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}, \quad x \in I \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)x^2}}, \quad x \in I,$$

compruébese si φ es una primitiva de f . Calcúlese la integral de f en el intervalo I .

2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real continua y periódica de periodo fundamental $T > 0$; pruébese que

a) la integral $\int_a^{a+T} f$ no depende de a ;

b) si, además, la función f tiene simetría impar, entonces la función $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f$, $x \in \mathbb{R}$ es periódica y tiene periodo T .

3. Calcúlese las derivadas de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int_1^x \frac{1+t^4}{t^4}; & \text{b) } \int_z^1 \frac{3t-2}{t+1}; & \text{c) } \int_x^3 \arctan t; & \text{d) } \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u}; & \text{e) } \int_x^2 \frac{1}{y^3+1}; \\ \text{f) } \int_{0.5}^{\operatorname{sen} t} \arcsin u; & \text{g) } \int_{e^t}^0 \frac{\ln x}{x}; & \text{h) } \int_{x^2}^{x^3} t^2 \cos t; & \text{i) } \int_{-\ln t}^{\ln t} (x^2-1)e^x. \end{array}$$

4. Calcúlese los siguientes límites: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x e^{t^2}}{\int_0^x e^{t^2} \operatorname{sen} t}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t}{x \int_0^x e^t}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{1+x^2} \frac{e^{-t}}{t}}{3x^2}$.

5. Se considera la función $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \int_0^{x^2+3x+3} f(t)$, $x \in \mathbb{R}$, siendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real derivable y tal que $Df(t) > 0$ para todo $t > 0$ y $f(0) = 0$.

- a) Probar que la función φ es dos veces derivable y calcular la función $D^2\varphi$.
b) Calcular los extremos relativos de la función φ .

6. Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_{x^2}^1 \operatorname{sen} \sqrt{t}$, $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es derivable y calcular $Df(\pi/2)$.

7. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ 2(t-1), & \text{si } t > 2. \end{cases}$ Se define ahora la función

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $\varphi(x) = \int_x^{x+1} f$, $x \in \mathbb{R}$. Calcular $D\varphi(x)$ en cualquier punto $x > 2$. Calcular la integral y comprobar el resultado.

8. Probar que si $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, se cumple $\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x) = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x) = \pi \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)$. Aplicarlo a la integral: $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}$.

9. La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es > 0 y, no obstante, se cumple $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-2}^2 = 0$. Discutir cuál es el error de este razonamiento.

10. Demostrar la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* para integrales: $\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \cdot \left(\int_a^b g^2 \right)$.

Como aplicación, probar que se cumple: $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} < 0.47$.

11. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^n[a, b]$ y sea $T_{n-1}(f; x_0)$ el polinomio de Taylor de grado $n - 1$ de f en el punto $x_0 \in]a, b[$. Probar la *fórmula de Taylor con resto integral*:

$$f(x) - T_{n-1}(f; x_0)(x) = \int_a^x \frac{D^n f(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt, \text{ para cada } x \in]a, b[.$$

12. Si E es la función “parte entera”, se definen las funciones $f, F: I = [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f(t) = t - E(t), \quad t \in I \quad \text{y} \quad F(x) = \int_0^x f, \quad x \in I.$$

Estudiar la continuidad de estas funciones en su dominio. Calcular la integral de F en I .

13. Aplicando el teorema de integración por partes, calcúlese las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^\pi x \cos x; \quad \text{b) } \int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x; \quad \text{c) } \int_1^e \ln x; \quad \text{d) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x} \cos x; \quad \text{e) } \int_0^1 x^3 e^{2x}; \quad \text{f) } \int_{10}^{100} x e^{-x}.$$

14. Para cada número natural $n = 1, 2, \dots$, se designa por I_n la integral $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x$.

a) Determinar una fórmula recurrente que permita calcular I_n en función de I_{n-2} (sugerencia: aplicar la integración por partes); b) Calcular I_{2p} para todo $p \geq 1$; c) Calcular I_{2p-1} para todo $p \geq 1$.

15. Aplicando el cambio de variable que se indica en cada caso, calcúlese las siguientes integrales:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & g(t) = \operatorname{senh} t; \quad \text{b) } \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}, \quad g(t) = \ln(1+t^2); \\ \text{c) } \int_0^\pi \frac{1}{3+2 \cos x}, & g(u) = 2 \operatorname{arctan} u; \quad \text{d) } \int_0^R \sqrt{Rx - x^2}, \quad \text{proponer un cambio adecuado.} \end{array}$$

16. Aplicando el método de primitivación por partes, calcular las integrales indefinidas siguientes:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \int \ln x; & \text{b)} \int \arctan x; & \text{c)} \int x^2 \operatorname{sen} x; & \text{d)} \int x^2 e^{3x}; \\
 \text{e)} \int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}; & \text{f)} \int e^x \cos x; & \text{g)} \int x^2 \ln x; & \text{h)} \int \ln^2 x; \\
 \text{i)} \int x^3 e^{x^2}; & \text{j)} \int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}; & \text{k)} \int \operatorname{sen}(\ln x); & \text{l)} \int x\sqrt{1+x};
 \end{array}$$

17. Aplicando el método de primitivación por cambio de variable, calcular las integrales indefinidas siguientes:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}; & \text{b)} \int \frac{1}{\sqrt{25-16x^2}}; & \text{c)} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}; & \text{d)} \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}; \\
 \text{e)} \int \frac{\ln x}{x}; & \text{f)} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}; & \text{g)} \int e^{2 \ln x}; & \text{h)} \int \frac{1}{4+x^2}; \\
 \text{i)} \int \frac{\arctan x}{1+x^2}; & \text{j)} \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}; & \text{k)} \int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}; & \text{l)} \int \frac{x+1}{x^2-1}; \\
 \text{m)} \int \frac{x^3-1}{x-1}; & \text{n)} \int \operatorname{sen} x \cos x; & \text{o)} \int \frac{1}{(x-1)^2+2};
 \end{array}$$

18. Calcular la integral indefinida de las siguientes funciones racionales:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \int \frac{4}{(x-1)^2(x^2+1)^2}; & \text{b)} \int \frac{8x^2-6x+5}{x^3-3x^2+7x-5}; & \text{c)} \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}; & \text{d)} \int \frac{x^5}{(x^2-1)(x+1)}; \\
 \text{e)} \int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}; & \text{f)} \int \frac{x^2+x}{x^2-x+1}; & \text{g)} \int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}; & \text{h)} \int \frac{x^5}{x-2}; \\
 \text{i)} \int \frac{x+1}{x^2-1}; & \text{j)} \int \frac{1}{x^2+10x+13}; & \text{k)} \int \frac{x+2}{x+1}; & \text{l)} \int \frac{x^2+2}{x^3-1}; \\
 \text{m)} \int \frac{x+1}{x(x^2+1)}; & \text{n)} \int \frac{x^2}{(x-1)^{10}}; & \text{o)} \int \frac{x^2}{1-x^4};
 \end{array}$$

19. Calcular la integral indefinida de las siguientes funciones trigonométricas:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \int \operatorname{sen}^2 x; & \text{b)} \int \operatorname{sen}^3 x; & \text{c)} \int \cos^4 x; & \text{d)} \int \cos 4x \cos 2x; \\
 \text{e)} \int \cos 3x \cos^3 x; & \text{f)} \int \operatorname{sen} 3x \cos 5x; & \text{g)} \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}; & \text{h)} \int \frac{1}{1+\tan x}; \\
 \text{i)} \int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}; & \text{j)} \int \frac{1-\cos x}{1+\operatorname{sen} x}; & \text{k)} \int \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x}; & \text{l)} \int \frac{\cos x}{1+\cos x}; \\
 \text{m)} \int \frac{1}{\cos x + 2 \operatorname{sen} x + 3}; & \text{n)} \int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}; & \text{o)} \int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{3}\right);
 \end{array}$$

20. Calcular la integral indefinida de las siguientes funciones irracionales:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}; & \text{b)} \int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}; & \text{c)} \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x - 1}}; & \text{d)} \int \frac{1}{(2x + 1)\sqrt{x^2 + 1}}; \\ \text{e)} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x - 4}}; & \text{f)} \int x \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}; & \text{g)} \int x \sqrt{(1 - x^2)^3}; & \text{h)} \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}}; \\ \text{i)} \int \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}; & \text{j)} \int x \sqrt{9 - x^2}; & \text{k)} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}; & \text{l)} \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2}; \end{array}$$

21. A título de recapitulación, calcular las integrales indefinidas que se indican a continuación, aplicando en cada caso el método que se crea más oportuno y justifíquese:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}; & \text{b)} \int \frac{\ln^3 x}{x}; & \text{c)} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; & \text{d)} \int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}; \\ \text{e)} \int \frac{x^2}{x^2 + 2}; & \text{f)} \int x e^{-x^2}; & \text{g)} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}; & \text{h)} \int \frac{x}{e^x}; \\ \text{i)} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; & \text{j)} \int \frac{1}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}; & \text{k)} \int \frac{\sqrt{x + \ln x}}{x}; & \text{l)} \int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1 - x^2}}; \\ \text{m)} \int e^{\sqrt{x}}; & \text{n)} \int \frac{\ln(\ln x)}{x}; & \text{o)} \int \operatorname{sen} 2x \cos^3 2x; & \text{p)} \int \tan^2 x; \\ \text{q)} \int 3^x e^x; & \text{r)} \int \frac{1}{\sqrt{7 + 8x^2}}; & \text{s)} \int \cos^2(\ln x); & \text{t)} \int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}; \end{array}$$

22. Se define la función $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mediante $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{1/x} \cos(xt^2)$. Estúdiense la derivabilidad de f y calcúlese la función derivada Df .

23. Se define la función $\varphi:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mediante $\varphi(x) = \int_{1/x}^a \frac{\operatorname{sen} x^2 t^2}{t}$. Estúdiense la derivabilidad de φ y calcúlese la función derivada $D\varphi$.

24. Sea $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por $f(x) = \int_0^x \arctan \frac{t}{x}$. Calcúlese la función derivada Df por derivación bajo el signo integral y por integración directa.

25. Mediante la aplicación del método de los trapecios, calcúlese las integrales que siguen con un error menor que 10^{-2} : a) $\int_0^1 e^{x^2}$, b) $\int_1^2 \frac{1}{x}$.

26. Mediante la aplicación del método de Simpson, calcúlese las integrales que siguen con un error menor que 10^{-3} : a) $\int_0^1 e^{x^2}$, b) $\int_1^2 \frac{1}{x}$, c) $\int_1^3 \frac{1}{x^2}$, d) $\int_1^2 \cos x^2$.

27. Elaborar un procedimiento que, mediante la aplicación del método de Simpson, permita calcular aproximadamente: a) $\ln 2$; b) $\arctan 0.4$, con un error menor que 10^{-2} .

28. Deducir una fórmula de integración aproximada que sea exacta para los polinomios de grado 3, de manera análoga a la fórmula de Simpson deducida en el texto para polinomios de grado 2.

29. Se trata de aplicar el cálculo aproximado de integrales por el método de los trapecios a la aproximación del número real π , partiendo de la igualdad $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}$. Para ello, se pide:

- Pruébese que $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ verifica $|D^2f(x)| \leq 2$ para todo $x \in [0, 1]$.
- Calcular aproximadamente el número π tomando $n = 10$ y acotando el error cometido.
- Calcular aproximadamente el número π tomando $n = 50$ y acotando el error cometido.
- Deducir el valor mínimo de n para asegurar una aproximación que tenga un error menor que 10^{-6} .

30. Calcular el área de los subconjuntos del plano limitados por las curvas que se indican:

- las parábolas $y^2 = 2px$ y $x^2 = 2py$;
- la parábola $y^2 = 2x$ y el círculo $x^2 + y^2 = 8$;
- el arco de senoide $y = \sin x$ y las rectas $x = 0$, $x = \pi$ y $y = 1/2$;
- las circunferencias $x^2 + y^2 = 9$ y $(x-3)^2 + y^2 = 9$;
- las curvas $y = e^x$, $x = 1 - y^2$ y el eje de abscisas;
- las parábolas $x = -y^2 + 2y$, $x = y^2 - 2y + 2$ y el eje de abscisas;
- la curva $y^2 = x^2 - x^4$.

31. Calcular: a) el área común a las elipses: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$; b) el área limitada por dos circunferencias del mismo radio tales que cada una de ellas pasa por el centro de la otra.

32. Calcular el volumen de los cuerpos de revolución generados por la rotación del subconjunto del plano que se indica, al girar en torno al eje que se especifica en cada caso:

- conjunto limitado por: $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 16$, al girar en torno al eje de ordenadas;
- conjunto limitado por la curva $y^2 = x^3$, el eje de abscisas y la recta $x = 1$, al girar en torno de los ejes de abscisas y de ordenadas;
- conjunto limitado por la parábola $y = kx^2$ y la recta $y = b$, al girar en torno al eje de ordenadas;
- conjunto limitado por la curva $y = \ln x$ y las rectas $x = 1$, $x = e$ y $y = 0$, al girar en torno de los ejes de abscisas y de ordenadas;
- elipsoide de revolución generado por rotación de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, al girar en torno del eje de ordenadas;
- toro generado por rotación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, al girar en torno de la recta $x = 3$.

33. Se considera el subconjunto W del primer cuadrante del plano limitado por la recta $2x + 3y = 6$ y la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$. Calcular

- el área del subconjunto W ;
- el volumen generado por la rotación de W al girar en torno al eje de ordenadas.

- 34.** Determinar el volumen de los cuerpos siguientes:
- sólido de base circular de 4 m de radio, tal que toda sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un triángulo equilátero;
 - sólido de base elíptica de ejes 10 m y 8 m, tal que toda sección plana del mismo perpendicular al eje mayor es un triángulo isósceles de 6 m de altura.
 - cono recto de altura H , cuya base es una elipse de semiejes a y b .
- 35.** Calcular el volumen de un tronco de cono de radios $r < R$ y altura H : a) aplicando el método consistente en caracterizarlo como el resultado de la rotación de un subconjunto del plano al girar en torno a un cierto eje; b) aplicando el método consistente en caracterizarlo como un sólido en el cual se conoce el área de una sección cualquiera en relación a un eje.
- 36.** Un vaso cilíndrico de radio R y altura H está lleno de agua; se va inclinando el vaso hasta que la superficie libre del agua (horizontal) pasa por un diámetro de la base. Calcúlese el volumen de agua que queda entonces en el vaso.
- 37.** Un depósito de agua tiene la forma de un cilindro recto circular de radio de la base R y altura H y está inicialmente lleno de agua. En la base del depósito hay un orificio de desagüe de sección σ , el cual está tapado con un tapón. Calcúlese el tiempo que tarda el depósito en vaciarse desde el momento en que se quita el tapón.
- 38.** Determinése la forma que debe darse a un depósito de revolución para que la velocidad de descenso del nivel del líquido que contiene sea constante a lo largo de todo el proceso de vaciado (reloj de agua).

10.7 GUÍA DE REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[Ap] **APOSTOL, T.M.** *Análisis Matemático.*

Excelente texto para ampliar conceptos sobre métodos de cálculo de integrales y sus aplicaciones. En esta obra se desarrolla la teoría de la integral de Stieltjes (o de Riemann-Stieltjes) en el capítulo 7 y en el capítulo 10 se trata la integral de Lebesgue.

[Ba] **BARTLE, R.G. y D.R. SHERBERT.** *Introducción al Análisis Matemático de una variable.*

En el capítulo 6 de esta obra se trata la teoría de la integral de Riemann, con un esquema bastante similar al del capítulo que acabamos de ver en el desarrollo de los contenidos. Se echa de menos, quizá, un apartado dedicado al cálculo de primitivas. Contiene una excelente colección de ejercicios propuestos que complementan de forma adecuada el desarrollo de los temas.

[Ca] **CALM, R., N. COLL y R. ESTELA.** *Problemes de Càlcul.*

En el capítulo 7 de este texto se encontrará una buena colección de ejercicios resueltos sobre aplicaciones de la integral, principalmente en los ámbitos de la geometría y la física.

[Li] **LINÉS, E.** *Principios de Análisis Matemático.*

De este excelente texto tiene interés la consulta de los capítulos 22 y 23. El capítulo 22 trata básicamente los teoremas fundamentales del Cálculo y el capítulo 23 se ocupa del desarrollo de la metodología para el cálculo de funciones primitivas. A destacar también la muy buena colección de ejercicios y problemas.

[Or] **ORTEGA, J.M.** *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.*

Se recomienda la lectura del capítulo V de este excelente texto, que se desarrolla bajo un esquema similar al que hemos visto aquí. Es recomendable asimismo la lectura de la nota histórica sobre el cálculo integral, así como el apéndice en el cual se demuestra el teorema de Lebesgue sobre caracterización de la integrabilidad Riemann mediante el conjunto de puntos de discontinuidad. Ejercicios interesantes y muy bien seleccionados.

[Ste] **STEIN, S.K.** *Cálculo y Geometría Analítica.*

Se recomienda la consulta de los capítulos 7 y 8 de este texto; el primero de ellos se dedica al cálculo de primitivas, aspecto que aborda con todo detalle, y el segundo a las aplicaciones geométricas y físicas de la integral. Contiene una excelente colección de ejemplos ilustrativos de los temas tratados, así como de ejercicios propuestos.

[Spv] **SPIVAK, M.** *Calculus.*

Pueden consultarse el capítulo 14, dedicado a los teoremas fundamentales del Cálculo y su significado y el capítulo 18, en el cual se desarrollan los métodos de primitivación. Como en ocasiones anteriores, recomendamos especialmente los ejercicios propuestos de este texto por su cuidada selección y por ser un complemento idóneo de los conceptos y métodos desarrollados.

CAPÍTULO 11

INTEGRALES IMPROPIAS

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo de este capítulo es la generalización de la noción de integral de una función en un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, en el sentido de ampliar alguna de las condiciones que intervienen en la definición de integral que se ha visto en el capítulo 9. La necesidad de esta generalización está motivada por la existencia, tanto en el campo de la propia Matemática como en muchas de sus aplicaciones técnicas, de determinadas situaciones que lo requieren. A lo largo de este capítulo, cuando hablemos de funciones integrables, significa que lo son en el sentido de Riemann, visto en los capítulos 9 y 10; las definiciones que se verán tienen sentido únicamente para dichas funciones.

La citada generalización de la noción de integral se llevará a cabo distinguiendo los casos siguientes:

- cuando la función es acotada y el intervalo de integración no es acotado; son las denominadas *integrales impropias de primera especie* y se estudiarán en el apartado 11.1;
- cuando la función no es acotada y el intervalo de integración es acotado; son las denominadas *integrales impropias de segunda especie* y se estudiarán en el apartado 11.2;
- cuando se dan simultáneamente las dos condiciones de no acotación de la función y del intervalo; son las denominadas *integrales impropias de tercera especie* y se estudiarán en el apartado 11.3.

En el apartado 11.4 se verán las funciones definidas por *integrales impropias* (o *integrales impropias dependientes de un parámetro*), estudio que generaliza el realizado en el capítulo anterior (véase el apartado 10.3).

Por último, en el apartado 11.5 se estudian dos funciones muy importantes: las funciones “Gamma” y “Beta” de Euler, también conocidas como *funciones eulerianas*.

11.1 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES ACOTADAS EN INTERVALOS NO ACOTADOS.

En este apartado vamos a generalizar la noción de integral para funciones cuyo dominio es un intervalo no acotado de \mathbb{R} , es decir, si $a \in \mathbb{R}$, intervalos del tipo $[a, +\infty[$ no acotados superiormente, $] - \infty, a]$ no acotados inferiormente o $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$ no acotados por ninguno de sus extremos.

11.1.1 DEFINICIÓN. (Integrales impropias de primera especie).

- Sea $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función real, acotada en su dominio. Si f es integrable en todo intervalo $[a, x] \subset [a, +\infty[$ cualquiera que sea $x > a$, es decir, si existe la integral $\int_a^x f$, cualquiera que sea $x > a$, puede definirse entonces una función $F: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, mediante $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a, +\infty[$. Se define la *integral impropia de f en $[a, +\infty[$* , mediante

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x).$$

Si dicho límite existe y es finito se dice entonces que la integral impropia *converge*, o bien, que es *convergente*. Si el límite anterior no existe o no es finito, la integral impropia se dice que *diverge* o que es *divergente*.

- De forma análoga, si una función $f:] - \infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en todo intervalo $[x, a] \subset] - \infty, a]$ cualquiera que sea $x < a$, puede definirse entonces una función $G:] - \infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$, mediante $G(x) = \int_x^a f$, $x \in] - \infty, a]$; se define entonces la *integral impropia de f en $] - \infty, a]$* , mediante

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f = \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x).$$

Si este límite existe y es finito se dice que la integral impropia es *convergente* y, en caso contrario, se dice que es *divergente*.

- Por último, si una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en todo intervalo $[x, y] \subset \mathbb{R}$, se define entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f$, mediante la suma de los límites

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f = \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) + \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y),$$

siendo $a \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera y siempre que la suma tenga sentido. Como antes, se dice que la integral impropia es *convergente* si ambos límites existen y son finitos y que es *divergente* en caso contrario. Es inmediato razonar que ni la convergencia ni, en ese caso, el valor de la integral dependen del punto $a \in \mathbb{R}$ que se haya tomado.

- Los tres tipos de integrales impropias de primera especie que acabamos de ver pueden reducirse al primero de ellos mediante un sencillo cambio de variable. En efecto, si en la integral $\int_{-\infty}^a f$ efectuamos el cambio de variable definido por

$$x = g(t) = -t, \quad Dg(t) = -1, \quad t \in [-a, +\infty[,$$

resulta que

$$\int_{-\infty}^a f(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^a f(x) = \lim_{(-u) \rightarrow -\infty} \int_{-u}^{-a} f(-t)(-1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-a}^u f(-t) = \int_{-a}^{+\infty} f(-t),$$

que es una integral impropia del primer tipo. Vale lo mismo para el tercer tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f$. En consecuencia, centraremos nuestro estudio en las integrales impropias del primer tipo, $\int_a^{+\infty} f$.

- Hacemos observar que algunos autores denominan *convergentes* a las integrales impropias con límite finito (es decir, con valor real), *divergentes* a las que tienen límite infinito y *oscilantes* a aquellas cuyo límite no existe.

En la figura 11.1 puede verse la interpretación geométrica de la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$.

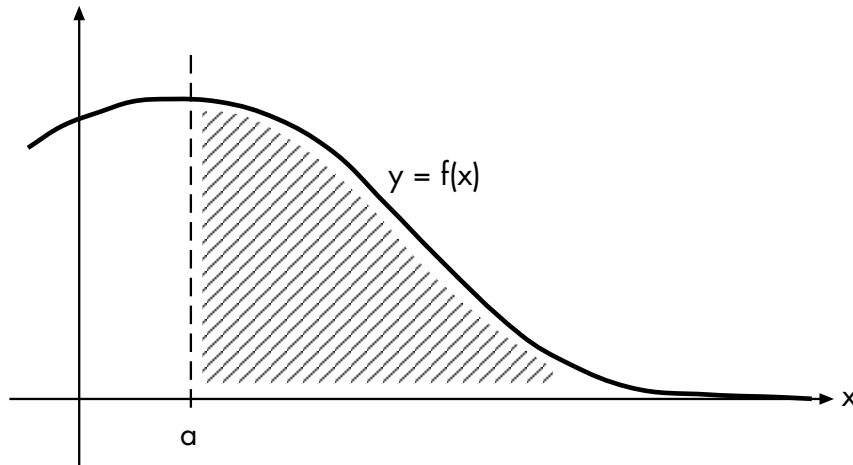


Figura 11.1. Interpretación geométrica de la integral impropia de primera especie.

11.1.2 EJEMPLO.

- 1) La integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$ es convergente, puesto que existe y es finito el límite:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \frac{1}{1+x^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} (\arctan x) \Big|_0^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan u = \frac{\pi}{2}.$$

- 2) La integral impropia $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}$ es divergente, puesto que no es finito el límite:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_2^u \frac{1}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln x) \Big|_2^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u - \ln 2 = +\infty.$$

3) La integral impropia $\int_{-\infty}^{\pi/2} \cos x$ no es convergente, puesto que no existe el límite:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \int_z^{\pi/2} \cos x = 1 - \lim_{z \rightarrow -\infty} \sin z.$$

4) La integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$ es convergente, puesto que existen y son finitos los límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a \frac{1}{1+t^2} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y \frac{1}{1+t^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\arctan t) \Big|_x^a + \lim_{y \rightarrow +\infty} (\arctan t) \Big|_a^y = \\ &= \left(\arctan a - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arctan a \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

11.1.3 EJEMPLO. Si $p \in \mathbb{R}$ es un número real, vamos a estudiar la convergencia de las integrales impropias $\int_a^{+\infty} e^{-px}$, en función de $p \in \mathbb{R}$. En virtud de la definición vista en 11.1.1, si $p \neq 0$ se cumple

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u e^{-px} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-px} \right) \Big|_a^u = - \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-pu}}{p} + \frac{e^{-pa}}{p}.$$

El límite depende del signo del número real p , cumpliéndose

$$\begin{cases} \text{si } p > 0 \text{ entonces } \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-pu} = 0, \\ \text{si } p < 0 \text{ entonces } \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-pu} = +\infty. \end{cases}$$

Obviamente, si $p = 0$ la integral impropia es divergente. En consecuencia, puede afirmarse que

- * si $p > 0$, la integral impropia $\int_a^{+\infty} e^{-px}$ es convergente y se cumple $\int_a^{+\infty} e^{-px} = \frac{e^{-pa}}{p}$;
- * si $p \leq 0$, la integral impropia $\int_a^{+\infty} e^{-px}$ es divergente.

11.1.4 EJEMPLO. Sea $a > 0$; de modo similar a lo visto en el ejemplo anterior, si $p \in \mathbb{R}$ es un número real cualquiera, pueden considerarse las integrales impropias: $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}$. Se propone como ejercicio razonar con detalle que:

- 1) Si $p > 1$, la integral impropia $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}$ es convergente y se cumple $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$.
- 2) Si $p \leq 1$, la integral impropia $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}$ es divergente.

11.1.5 OBSERVACIÓN. (*Valor principal de Cauchy de una integral impropia*). En el caso de la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ conviene precisar un detalle: es posible que dicha integral impropia no sea convergente de acuerdo con la definición vista en 11.1.1 pero que, no obstante, exista el denominado *valor principal de Cauchy* de la citada integral, el cual se define mediante

$$V_C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f.$$

En efecto, considérese la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}$ y estudiemos su convergencia de acuerdo con la definición de (11.1.1), esto es

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a \frac{t}{1+t^2} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y \frac{t}{1+t^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} (\ln(1+t^2)) \Big|_x^a + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (\ln(1+t^2)) \Big|_a^y \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(1+y^2). \end{aligned}$$

Ambos límites son infinitos, con lo que la integral impropia considerada es divergente. Pero, por otro lado, si se calcula el valor principal de Cauchy de esta integral impropia, se obtiene

$$V_C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} \right) = 0.$$

11.1.6 PROPOSICIÓN. (*Propiedades básicas de las integrales impropias de primera especie*). Sea un intervalo no acotado de \mathbb{R} , $I = [a, +\infty[$; se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) Si $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones cuyas integrales impropias en I son convergentes, cualesquiera que sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^{+\infty} f + \mu \int_a^{+\infty} g,$$

- 2) (Generalización de la regla de Barrow). Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua en su dominio; si φ es una primitiva de f y existe y es finito el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$, se verifica

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) - \varphi(a)$$

- 3) (Generalización de la fórmula de integración por partes). Sean $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^1(I)$; si la integral impropia $\int_a^{+\infty} uDv$ es convergente y existe y es finito el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x)$,

entonces la integral impropia $\int_a^{+\infty} vDu$ es convergente y se cumple

$$\int_a^{+\infty} vDu = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} uDv.$$

- 4) (Generalización del teorema del cambio de variable). Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio; supongamos que $J = [b, +\infty[$ es un intervalo no acotado de \mathbb{R} y que $g: J \rightarrow I$ es una biyección de clase $\mathcal{C}^1(J)$ tal que $g(b) = a$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$, $Dg(t) \neq 0$, para todo $t \in J$. Entonces

la integral impropia $\int_b^{+\infty} (f \circ g)Dg$ es convergente si, y sólo si, la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es

asimismo convergente, verificándose que $\int_a^{+\infty} f = \int_b^{+\infty} (f \circ g)Dg$.

Demostración:

Todas ellas se demuestran simplemente por paso al límite en la propiedad correspondiente de la integral. ■

Vista la definición de integral impropia de primera especie y estudiadas sus propiedades básicas, abordamos a continuación un nuevo aspecto de gran interés: establecer criterios que nos permitan afirmar el carácter convergente o divergente de una integral impropia sin necesidad de recurrir a su cálculo explícito. Empezaremos con el denominado *criterio de Cauchy*.

11.1.7 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Cauchy*). Una condición necesaria y suficiente para que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ sea convergente, es que cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, exista $k > 0$ tal que cualesquiera que sean $x, y > k$, se cumpla entonces que $\left| \int_x^y f \right| < \varepsilon$ (véase la figura 11.2).

Demostración:

Veamos que la condición es necesaria. Si se supone que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es convergente, entonces existe y es finito el límite $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f$; por definición de límite, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $k > 0$ tal que

$$\left| \int_a^x f - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } x > k,$$

con lo que si $x, y > k$, se verifica

$$\left| \int_x^y f \right| = \left| \int_x^a f + \int_a^y f \right| \leq \left| \int_a^y f - L \right| + \left| L - \int_a^x f \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo cual prueba que la condición es necesaria.

Para ver que la condición es suficiente, supondremos cierta ésta y consideraremos la función integral de f , esto es, la función F definida por $F(x) = \int_a^x f$ para todo $x > a$; se sabe que esta función es continua en todo intervalo $[a, x] \subset \mathbb{R}$, esto es, en el intervalo $[a, +\infty[$. Sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera tal que $\lim \alpha_n = +\infty$; vamos a probar que la sucesión $(F(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n, \alpha_m > k$ para todo $n > n_0$, con lo que

$$|F(\alpha_n) - F(\alpha_m)| = \left| \int_a^{\alpha_n} f - \int_a^{\alpha_m} f \right| = \left| \int_{\alpha_m}^{\alpha_n} f \right| < \varepsilon$$

siempre que $n, m > n_0$, lo cual prueba que la sucesión $(F(\alpha_n))$ es de Cauchy y, por lo tanto, convergente. Teniendo en cuenta ahora la continuidad de F en $[a, +\infty[$ y la relación entre continuidad y límites de sucesiones, se obtiene inmediatamente la existencia del límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, esto es, la

convergencia de la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$. ■

11.1.8 COROLARIO. (*Condición necesaria de convergencia*) Si la integral impropia de primera especie $\int_a^{+\infty} f$ es convergente, se cumple entonces que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Demostración:

Evidente a partir del criterio de Cauchy. ■

La condición necesaria anterior no es suficiente, como demuestra el hecho de que la integral impropia $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}$ es divergente (véase 11.1.4) y, no obstante, la función cumple la condición necesaria. En los

enunciados que siguen supondremos que las funciones cumplen la condición necesaria de convergencia cuando ello no se mencione explícitamente.

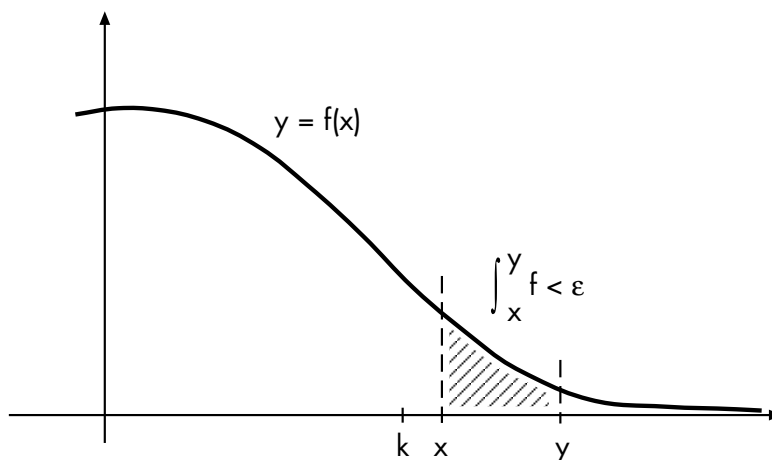


Figura 11.2. Ilustración del criterio de Cauchy.

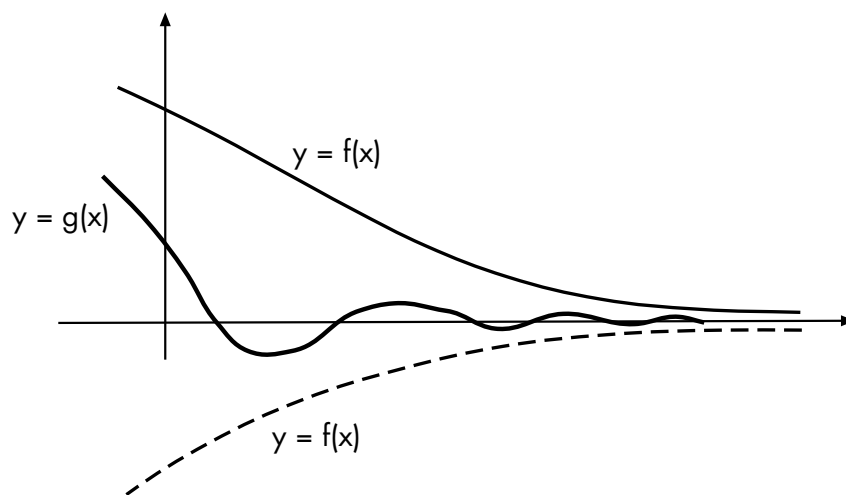


Figura 11.3. Interpretación geométrica del criterio de comparación.

11.1.9 PROPOSICIÓN. (Criterio de comparación). Sean dos funciones $f, g: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrables en todo intervalo $[a, x] \subset [a, +\infty[$ y tales que

$$|g(x)| \leq f(x) \text{ para todo } x \in [a, +\infty[.$$

Si la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es convergente, entonces la integral impropia $\int_a^{+\infty} g$ es también convergente (véase la figura 11.3).

Demostración:

Se hará aplicando el criterio de Cauchy (11.1.7). En virtud de la convergencia de la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $k > 0$ tal que cualesquiera que sean $x, y > k$, se cumple $\left| \int_x^y f \right| < \varepsilon$. En consecuencia, cualesquiera que sean $y > x > k$ se cumple también que

$$\left| \int_x^y g \right| \leq \int_x^y |g| \leq \int_x^y f = \left| \int_x^y f \right| < \varepsilon,$$

lo cual prueba la convergencia de la integral impropia $\int_a^{+\infty} g$. ■

11.1.10 COROLARIO. Sean dos funciones $f, g: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrables en todo intervalo $[a, x] \subset [a, +\infty[$ y tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, +\infty[$. Si la integral impropia $\int_a^{+\infty} g$ es divergente, entonces lo es también la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$.

Demostración:

Evidente, pues en virtud de las propiedades de la integral de Riemann se cumple

$$\int_a^{+\infty} f \geq \int_a^{+\infty} g \geq 0;$$

si la integral impropia $\int_a^{+\infty} g$ no es finita, tampoco puede serlo $\int_a^{+\infty} f$. ■

11.1.11 PROPOSICIÓN. (*Criterio del cociente*). Sean dos funciones $f, g: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrables en todo intervalo $[a, x] \subset [a, +\infty[$ y tales que $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ para todo $x \in [a, +\infty[$. Si existe el límite $L = \lim_{+\infty} \frac{f}{g}$, se cumplen entonces las propiedades siguientes:

- 1) si $0 < L < +\infty$ las integrales impropias $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_a^{+\infty} g$ tienen el mismo carácter, es decir, son ambas convergentes o ambas divergentes. En particular, si $(f \sim g)(+\infty)$ o bien si f y g son infinitésimos del mismo orden en $+\infty$, las integrales impropias correspondientes tienen el mismo carácter.
- 2) si $L = 0$ y la integral impropia $\int_a^{+\infty} g$ es convergente, entonces lo es también la integral $\int_a^{+\infty} f$.
- 3) si $L = +\infty$ y la integral impropia $\int_a^{+\infty} g$ es divergente, entonces lo es también la integral $\int_a^{+\infty} f$.

Demostración:

- 1) Por definición de límite en el infinito de una función, tomando $0 < \varepsilon < L$, existe $x_0 > 0$ tal que, si $x > x_0$, se cumple $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$, es decir $|f(x) - Lg(x)| < \varepsilon|g(x)| = \varepsilon g(x)$, o equivalentemente

$$-\varepsilon g(x) < f(x) - Lg(x) < \varepsilon g(x) \quad \text{para todo } x > x_0,$$

con lo que

$$f(x) < (L + \varepsilon)g(x) \quad \text{y} \quad g(x) < \frac{1}{L - \varepsilon}f(x) \quad \text{para todo } x > x_0.$$

Aplicando finalmente el criterio de comparación (11.1.9) se obtiene la conclusión.

- 2) Si $L = 0$, tomando $\varepsilon = 1$, existe $x_0 > 0$ tal que para todo $x > x_0$ se cumple $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < 1$, es decir, $f(x) < g(x)$. El razonamiento se concluye como el punto anterior, aplicando el criterio de comparación.
- 3) Si el límite no es finito, tomando $k = 1$, existe un $x_0 > 0$ tal que para todo $x > x_0$ se cumple $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$, esto es $f(x) > g(x)$ y se acaba aplicando el criterio de comparación. ■

Si se aplica el criterio del cociente tomando como función $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la función potencial definida por $g(x) = x^p$ para todo $x > 0$ ($p \in \mathbb{R}$), se obtienen las conclusiones que se ven a continuación.

11.1.12 COROLARIO. Sea una función $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ($a > 0$) integrable en todo intervalo $[a, x] \subset [a, +\infty[$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, +\infty[$. Se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) Si existe el límite $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ para un cierto $p > 1$ y se tiene $0 \leq L < +\infty$, entonces la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es convergente.
- 2) Si existe el límite $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ para un cierto $p \leq 1$ y se tiene $0 < L \leq +\infty$, entonces la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es divergente.

Demostración:

Para ambos casos basta tener en cuenta que $x^p f(x) = \frac{f(x)}{1/x^p}$, aplicar la proposición anterior y recordar las integrales impropias estudiadas en el ejemplo 11.1.4. ■

11.1.13 EJEMPLO.

- 1) Para estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2x} + x^2}$, observaremos que se cumple $\frac{1}{e^{2x} + x^2} \leq \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$, para todo $x \geq 0$, y dado que la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-2x}$ es convergente, según se ha visto en 11.1.3, en virtud del criterio de comparación resulta la convergencia de la integral impropia considerada.
- 2) Por aplicación del mismo criterio, la integral impropia $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x}$ es divergente, puesto que se cumple $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ para todo $x \geq 1$ y dado que la integral impropia $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}$ es divergente, en virtud de 11.1.4.
- 3) La integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2}$ es convergente en virtud del criterio del cociente, puesto que se cumple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\arctan x}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} > 0$, y se sabe la integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$ es convergente según lo visto en 11.1.2.

- 4) En virtud del criterio del cociente, la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2\sqrt{x} + 5}$ es convergente, puesto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x^2}{\frac{1}{x^2 + 2\sqrt{x} + 5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^{3/2}} + \frac{5}{x^2}\right) = 1 > 0$, y dado que la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ es convergente en virtud de 11.1.4. También puede hacerse aplicando 11.1.12 con $p = 2$ y $L = 1$.

- 5) Vamos a probar la convergencia de la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}$; en efecto, calculemos el límite

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{2-p}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{(2-p)x^{1-p}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-p)x^{2-p}}.$$

Si $p \geq 2$ el límite no es finito y si $p \leq 1$ el límite es 0, con lo cual no se obtiene ninguna conclusión a partir del corolario 11.1.12. En cambio, cualquiera que sea $1 < p < 2$ se cumple $L = 0$, con lo que en virtud del mismo corolario, la integral impropia considerada es convergente.

- 6) La integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3}}$ es divergente, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}}} = 2 > 0.$$

11.1.14 OBSERVACIÓN. (Aplicación de las funciones equivalentes al estudio de integrales impropias de primera especie).

Sea una integral impropia de primera especie $\int_a^{+\infty} f$ donde $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en todo intervalo $[a, x]$ para todo $x > a$. Si puede escribirse $f(x) = F(x)G(x)$ para todo $x \in [a, +\infty[$, entonces cualquiera que sea la función G_1 equivalente a G en el infinito, esto es, tal que $\lim_{+\infty} \frac{G}{G_1} = 1$, en virtud del criterio del cociente, las integrales impropias $\int_a^{+\infty} F(x)G(x)$ y $\int_a^{+\infty} F(x)G_1(x)$, tienen el mismo carácter, puesto que se cumple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)G(x)}{F(x)G_1(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{G_1(x)} = 1 \in \mathbb{R}_0^+.$$

En particular, ello permite tratar fácilmente los casos denominados de “factores neutros” o de “sumandos despreciables”, que detallamos a continuación.

- Si en la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ se verifica

$$f(x) = u(x)v(x) \text{ para todo } x \in [a, +\infty[\quad \text{y} \quad \lim_{+\infty} v = L \in \mathbb{R}_0^+,$$

entonces las integrales impropias $\int_a^{+\infty} u(x)v(x)$ y $\int_a^{+\infty} u(x)$, tienen el mismo carácter, puesto que se cumple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)v(x)}{u(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = L \in \mathbb{R}_0^+$.

- Si en la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ se verifica que

$$f(x) = u(x) + v(x) \text{ para todo } x \in [a, +\infty[\quad \text{y} \quad \lim_{+\infty} \frac{v(x)}{u(x)} = 0,$$

entonces las integrales impropias $\int_a^{+\infty} (u(x) + v(x))$ y $\int_a^{+\infty} u(x)$, tienen el mismo carácter, puesto que se cumple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x) + v(x)}{u(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{v(x)}{u(x)} \right) = 1 \in \mathbb{R}_0^+.$$

- Si en la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ se cumple que

$$f(x) = u(x)\varphi(x), \text{ para todo } x \in [a, +\infty[\text{ con } \varphi \in \mathcal{C}^k[a, +\infty[,$$

$$u(x) > 0, \varphi(x) > 0 \text{ para todo } x \in [a, +\infty[$$

$$\varphi(x) = v(c + \theta(x)), \text{ con } \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = 0, c \in \mathbb{R}$$

$$v(c) = Dv(c) = \dots = D^{k-1}v(c) = 0, \quad D^k v(c) > 0,$$

entonces las integrales impropias $\int_a^{+\infty} u(x)v(c + \theta(x))$ y $\int_a^{+\infty} u(x)(\theta(x))^k$, tienen el mismo carácter, puesto que se cumple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)v(c + \theta(x))}{u(x)(\theta(x))^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Dv(c + \theta(x)) \cdot D\theta(x)}{k(\theta(x))^{k-1} D\theta(x)} = \dots = \frac{D^k v(c)}{k!} > 0.$$

11.1.15 EJEMPLO. Veamos unos ejemplos de aplicación de estas situaciones.

- 1) Las integrales impropias $\int_2^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3}$ y $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}$, tienen el mismo carácter, puesto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}_0^+$.

- 2) Las integrales impropias $\int_1^{+\infty} \frac{2x + 3 \ln x}{x^3 + e^x}$ y $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{e^x}$, tienen el mismo carácter, puesto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- 3) Las integrales impropias $\int_3^{+\infty} e^{-x} \ln \frac{x+1}{x-1}$ y $\int_3^{+\infty} e^{-x} \frac{2}{x-1}$, son ambas convergentes, puesto que $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ y la función definida por $\theta(x) = \frac{2}{x-1}$, para todo $x > 3$, es tal que

$$\ln \frac{x+1}{x-1} = \ln(1 + \theta(x)), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = 0, \quad \ln 1 = 0 \quad \text{y} \quad D \ln 1 = 1 \neq 0.$$

De forma análoga a otros casos estudiados anteriormente (series numéricas, series de potencias, etc.), el valor absoluto da lugar a la noción de convergencia absoluta, concepto que se define a continuación para las integrales impropias de primera especie.

11.1.16 DEFINICIÓN. (*Convergencia absoluta de una integral impropia*). Se dice que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es *absolutamente convergente*, o bien, que *converge absolutamente*, si la integral impropia $\int_a^{+\infty} |f|$ es convergente.

11.1.17 PROPOSICIÓN. Si la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Demostración:

Inmediata, aplicando el criterio de comparación, puesto que al cumplirse

$$|f(x)| \leq |f(x)|, \text{ para todo } x \in [a, +\infty[,$$

la convergencia de la integral impropia $\int_a^{+\infty} |f|$ implica la convergencia de la integral $\int_a^{+\infty} f$. ■

Se hace observar que el recíproco no es cierto, esto es, una integral impropia puede ser convergente y, no obstante, no converger absolutamente, como se pone de manifiesto en el ejemplo que sigue.

11.1.18 EJEMPLO. Vamos a estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la integral impropia $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, conocida como *integral de Dirichlet*.

1) Estudio de la convergencia. Por definición de integral impropia sabemos que

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^u \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\int_{\pi}^u \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 1/x; \quad Df(x) = -1/x^2 \\ Dg(x) = \operatorname{sen} x; \quad g(x) = -\cos x \end{array} \right\} = \left(-\frac{\cos x}{x} \right) \Big|_{\pi}^u - \int_{\pi}^u \frac{\cos x}{x^2},$$

con lo cual pasando al límite cuando $u \rightarrow +\infty$ se obtiene

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}.$$

Puesto que $|\cos x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumplirá $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ para todo $x \in [\pi, +\infty[$. Se ha probado en 11.1.4 que la integral impropia $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ es convergente, con lo que por el criterio de comparación, la integral impropia $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ es también convergente. En definitiva, la integral impropia $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es convergente.

- 2) Estudio de la convergencia absoluta. Deberá estudiarse la convergencia de la integral impropia $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right|$. Teniendo en cuenta las propiedades de la integral de Riemann, puede escribirse

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right|.$$

Para calcular las integrales del segundo miembro, aplicaremos el cambio de variable definido por $x = g(t) = t + n\pi$, $Dg(t) = 1$, obteniéndose

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \left| \frac{\operatorname{sen} t}{t + n\pi} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t + n\pi},$$

puesto que al ser $\frac{\operatorname{sen} t}{t + n\pi} \geq 0$ para todo $t \in [0, \pi]$, puede suprimirse el valor absoluto. Por otro lado, se cumple $t + n\pi \leq \pi + n\pi = (n+1)\pi$ para todo $t \in [0, \pi]$, con lo que $\frac{1}{t + n\pi} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$ para todo $t \in [0, \pi]$, y en consecuencia $\frac{\operatorname{sen} t}{t + n\pi} \geq \frac{\operatorname{sen} t}{(n+1)\pi}$ para todo $t \in [0, \pi]$. Calculemos ahora la integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{(n+1)\pi} = \frac{1}{(n+1)\pi} (-\cos t) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

con lo que puede escribirse finalmente

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t + n\pi} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{(n+1)\pi} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

La suma de la serie armónica no es finita, con lo que la integral impropia $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right|$ no es convergente, es decir, la integral impropia $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no converge absolutamente.

Terminaremos este apartado con un resultado muy interesante que relaciona la convergencia de integrales impropias de primera especie con la de las series numéricas.

11.1.19 PROPOSICIÓN. (*Relación entre integrales impropias y series*). Sea $f: [a, +\infty[\subset]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, monótona decreciente y positiva en su dominio. Una condición necesaria y suficiente para que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ sea convergente es que lo sea la serie numérica $\sum f(n)$.

Demostración:

Sea n_0 el primer número natural tal que $n_0 \geq a$; está claro que la convergencia de la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ equivale a la de la integral impropia $\int_{n_0}^{+\infty} f$, con lo que probaremos el resultado con esta última integral.

Para cada $p \in \mathbb{N}$ con $p \geq n_0$, consideremos los intervalos $[p, p+1] \subset [a, +\infty[$; en cada uno de ellos, en virtud de la monotonía y la positividad de f , se cumple

$$f(p+1) \leq \int_p^{p+1} f(x) \leq f(p), \text{ para todo } p = n_0, n_0+1, \dots$$

Sumando estas desigualdades desde $p = n_0$ hasta un natural cualquiera $p = n > n_0$, se obtiene

$$\sum_{n_0+1}^n f(p) \leq \int_{n_0}^n f(x) \leq \sum_{n_0}^{n-1} f(p).$$

Pasando al límite cuando $n \rightarrow +\infty$ resulta

$$\sum_{n_0}^{+\infty} f(p) - f(n_0) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n_0}^n f(x) = \int_{n_0}^{+\infty} f(x) \leq \sum_{n_0}^{+\infty} f(p).$$

Estas desigualdades ponen de manifiesto la equivalencia entre el carácter de la integral impropia y la serie numérica asociada a los valores de la función en los números naturales (a partir de n_0), como se quería probar. ■

11.1.20 OBSERVACIÓN. A partir de las desigualdades

$$f(p+1) \leq \int_p^{p+1} f(x) \leq f(p), \text{ para todo } p = n_0, n_0+1, \dots,$$

se obtiene que $\int_{p+1}^{p+2} f(x) \leq f(p+1) \leq \int_p^{p+1} f(x)$, para todo $p = n_0, n_0+1, \dots$, con lo que, si $m > n_0$ es un número natural cualquiera, se cumple

$$\int_{p+1}^{p+m+1} f(x) \leq f(p+1) + f(p+2) + \dots + f(p+m) \leq \int_p^{p+m} f(x),$$

que puede escribirse mediante

$$\int_n^{n+m} f(x) \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(n+m-1) \leq \int_{n-1}^{n+m-1} f(x), \text{ para todo } m > n > n_0.$$

Pasando al límite cuando $m \rightarrow +\infty$, resulta finalmente

$$\int_n^{+\infty} f(x) \leq \sum_{n_0}^{+\infty} f(p) - \sum_{n_0}^{n-1} f(p) \leq \int_{n-1}^{+\infty} f(x).$$

11.2 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES NO ACOTADAS EN INTERVALOS ACOTADOS.

Para la generalización de la integral que abordaremos en este apartado, las funciones que intervienen estarán definidas en intervalos acotados del tipo $[a, b[$ o bien $]a, b]$, cumpliéndose que el límite lateral en el extremo que no pertenece al intervalo, es infinito.

11.2.1 DEFINICIÓN. (Integrales impropias de segunda especie).

- Sea $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que
 - 1) f es integrable en todo intervalo $[a, b - \varepsilon]$, cualquiera que sea $0 < \varepsilon < b - a$;
 - 2) se cumple $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$.

Se denomina *integral impropia* de f en $[a, b]$ el límite $\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f$. Si el límite existe y es finito se dice entonces que la integral impropia es *convergente*; si el límite anterior no es finito o no existe, la integral impropia se dice que es *divergente*.

- De modo análogo puede definirse la integral impropia de una función $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
 - 1) f es integrable en todo intervalo $[a + \varepsilon, b]$, cualquiera que sea $0 < \varepsilon < b - a$;
 - 2) se cumple $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

Se denomina *integral impropia* de f en $[a, b]$ el límite $\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f$. Si el límite existe y es finito se dice entonces que la integral impropia es *convergente* y que es *divergente* si el límite no existe o no es finito.

- Si el límite infinito de la función se da en un punto interior del intervalo, $x_0 \in]a, b[$ y se verifican las condiciones
 - 1) f es integrable en todo intervalo $[a, x_0 - \varepsilon]$, cualquiera que sea $0 < \varepsilon < x_0 - a$ y en todo intervalo $[x_0 + \delta, b]$, cualquiera que sea $0 < \delta < b - x_0$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ o bien $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$,

se define la *integral impropia* de f en $[a, b]$, mediante la suma de límites

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0 - \varepsilon} f + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{x_0 + \delta}^b f.$$

Si ambos límites existen y son finitos se dice que la integral impropia es *convergente* y que es *divergente* en caso contrario.

- De forma análoga a lo visto en el apartado anterior, se define el *valor principal de Cauchy* de una integral impropia de segunda especie, mediante $V_C \left(\int_a^b f \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} f + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f \right)$. Este límite puede existir y ser finito, aún en el caso en que la integral impropia sea divergente en el sentido que se ha establecido en la definición.

En la figura 11.4 se ha representado la interpretación geométrica de la integral impropia de segunda especie.

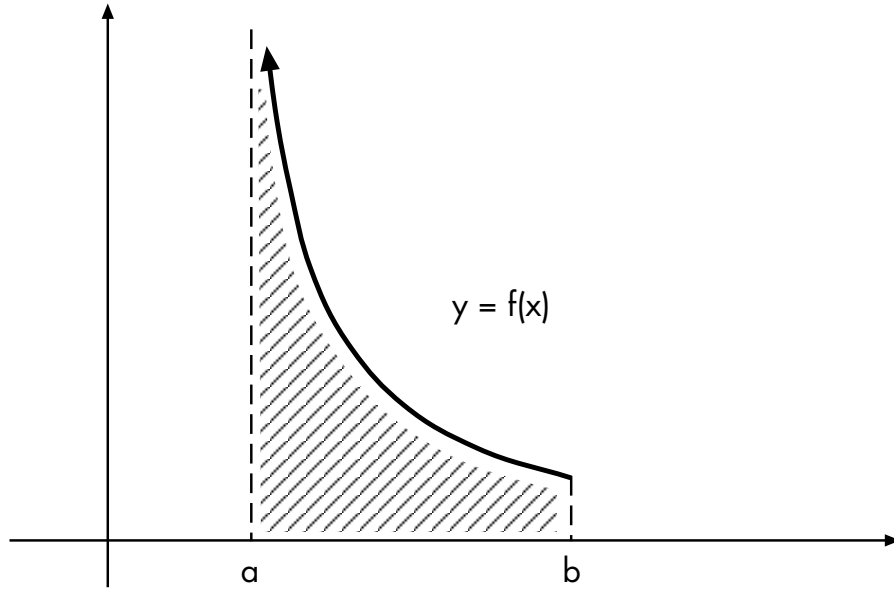


Figura 11.4. Integral impropia de segunda especie.

11.2.2 EJEMPLO.

- 1) Sea $p > 0$ un número real positivo estricto; vamos a estudiar la convergencia de las integrales impropias $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}$, donde $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cualquiera. En primer lugar observamos que la función definida por $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$, para todo $x \in]a, b[$, cumple las condiciones requeridas en (11.2.1), esto es, f es integrable en todo intervalo $[a + \varepsilon, b]$, cualquiera que sea $0 < \varepsilon < b - a$ y se cumple $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$. Para estudiar la convergencia de la integral impropia debe calcularse el límite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)^p}$; como la primitiva depende del valor de p , estudiaremos separadamente los casos $p \neq 1$ y $p = 1$. Si $p \neq 1$, se cumple

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} (x-a)^{1-p} \right) \Big|_{a+\varepsilon}^b = \frac{1}{1-p} \left((b-a)^{1-p} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-p} \right).$$

verificándose que

* si $p > 1$, entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-p} = +\infty$, con lo que la integral impropia es divergente;

* si $0 < p < 1$, entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-p} = 0$, con lo que la integral impropia es convergente y se tiene

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p};$$

* si $p = 1$, la primitiva de $(x-a)^{-1}$ es $\ln(x-a)$ y la integral impropia es divergente en este caso.

- 2) De modo análogo, es inmediato probar que las integrales impropias $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}$ se comportan exactamente igual que las estudiadas en el punto anterior.

- 3) La integral impropia $\int_{-1}^5 \frac{1}{(x-1)^3}$ no es convergente, pues para calcularla deben considerarse los límites

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^3} \quad \text{y} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{1+\delta}^5 \frac{1}{(x-1)^3}$$

no siendo finito ninguno de ellos en virtud de lo establecido en los puntos anteriores. No obstante, si se calcula el valor principal de Cauchy de esta integral impropia, es inmediato comprobar que se cumple

$$V_C \left(\int_{-1}^5 \frac{1}{(x-1)^3} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^3} + \int_{1+\varepsilon}^5 \frac{1}{(x-1)^3} \right) = \frac{3}{32}.$$

11.2.3 OBSERVACIÓN. (*Reducción a integrales impropias de primera especie*). Vamos a probar que las integrales impropias de segunda especie pueden transformarse en integrales impropias de primera especie mediante un cambio de variable adecuado. Con ello, las propiedades de las integrales impropias de segunda especie serán idénticas a las vistas para las de primera especie.

- En efecto, sea $\int_a^b f$ una integral impropia de segunda especie en la que supondremos que $\lim_{a^+} f = +\infty$ y que f es acotada en $[a + \varepsilon, b]$, cualquiera que sea $b - a > \varepsilon > 0$. Consideremos el cambio de variable definido por $x = g(t) = a + \frac{1}{t}$, $Dg(t) = -\frac{1}{t^2}$; con ello, la integral dada se transforma en

$$\int_a^b f = \int_{+\infty}^{\frac{1}{b-a}} f \left(a + \frac{1}{t} \right) \left(-\frac{1}{t^2} \right) = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f \left(\frac{at+1}{t} \right) \frac{1}{t^2},$$

que es una integral impropia de primera especie.

- Así, por ejemplo, la integral impropia $\int_2^5 \frac{1}{(x-2)^{1/2}}$, mediante el cambio de variable definido por $x = g(t) = 2 + \frac{1}{t}$, $Dg(t) = \frac{-1}{t^2}$, se transforma en la integral

$$\int_2^5 \frac{1}{(x-2)^{1/2}} = \int_{+\infty}^{1/3} \frac{1}{t^{-1/2}} \cdot \frac{-1}{t^2} = \int_{1/3}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} = \frac{(\frac{1}{3})^{1-\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

- Si la integral impropia de segunda especie $\int_a^b f$ cumple que $\lim_{b^-} f = +\infty$ y que f es acotada en $[a, b - \varepsilon]$, cualquiera que sea $b - a > \varepsilon > 0$, aplicando el cambio de variable definido por

$$x = g(t) = b - \frac{1}{t}, \quad Dg(t) = \frac{1}{t^2},$$

se transforma en la integral impropia de primera especie $\int_a^b f = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f \left(\frac{bt-1}{t} \right) \frac{1}{t^2}$.

Para las integrales impropias de segunda especie pueden enunciarse propiedades básicas de forma análoga a lo visto en 11.1.6, cuya redacción concreta se propone como ejercicio. Asimismo, se tienen criterios de convergencia análogos a los establecidos en 11.1.9 hasta 11.1.12, que se enuncian a continuación sin demostración, en virtud de 11.2.3.

11.2.4 PROPOSICIÓN. (*Criterio de comparación.*) Sean $f, g: [a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que las integrales $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ son integrales impropias de segunda especie, de acuerdo con 11.2.1. Si se cumple

$$|g(x)| \leq f(x) \text{ para todo } x \in [a, +\infty[,$$

entonces

- 1) Si la integral impropia $\int_a^b f$ es convergente, también lo es la integral impropia $\int_a^b g$.
- 2) Si la integral impropia $\int_a^b g$ es divergente, también lo es la integral impropia $\int_a^b f$.

11.2.5 PROPOSICIÓN. (*Criterio del cociente.*) Sean $f, g:]a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que las integrales $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ son integrales impropias de segunda especie, según 11.2.1 y que, además, cumplen

$$f(x) \geq 0 \text{ y } g(x) > 0 \text{ para todo } x \in [a, b[.$$

Entonces, si se designa por L el límite $L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, se verifica que

- 1) Si $0 < L < +\infty$, las integrales impropias $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ tienen ambas el mismo carácter, esto es, son ambas convergentes o ambas divergentes.
- 2) Si $L = 0$ y la integral impropia $\int_a^b g$ es convergente, entonces también lo es la integral $\int_a^b f$.
- 3) Si $L = +\infty$ y la integral impropia $\int_a^b g$ es divergente, entonces también lo es la integral $\int_a^b f$.

11.2.6 COROLARIO. Sea $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función real, positiva en su dominio e integrable en todo intervalo $[a + \varepsilon, b]$ cualquiera que sea $0 < \varepsilon < b - a$, siendo $\int_a^b f$ una integral impropia de acuerdo con la definición 11.2.1. Si se designa por β el límite

$$\beta = \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^p f(x)$$

se cumplen entonces las propiedades siguientes

- 1) Si $0 < p < 1$ y $\beta \geq 0$, la integral impropia considerada es convergente.
- 2) Si $p \geq 1$ y $0 < \beta \leq +\infty$, la integral impropia considerada es divergente.

11.2.7 DEFINICIÓN. (*Convergencia absoluta.*) El concepto de convergencia absoluta de una integral impropia definido en el Apartado anterior para las integrales impropias de primera especie, puede establecerse de forma análoga para las integrales impropias de segunda especie. Así, la integral impropia $\int_a^b f$ se dice que *converge absolutamente* si la integral impropia $\int_a^b |f|$ es convergente.

Es inmediato probar que la convergencia absoluta de una integral impropia de segunda especie implica su convergencia ordinaria, pero no a la inversa.

11.2.8 OBSERVACIÓN. (*Aplicación de las funciones equivalentes al estudio de integrales impropias de segunda especie.*)

Sea una integral impropia de segunda especie $\int_a^b f$ donde $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en todo intervalo

$[a + \varepsilon, b]$, para todo $0 < \varepsilon < b - a$ (los otros casos de integrales impropias son completamente análogos). Si puede escribirse $f(x) = F(x)G(x)$ para todo $x \in]a, b]$, entonces cualquiera que sea la función G_1 equivalente a G en el punto a por la derecha, esto es, tal que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{G}{G_1} = 1$, en virtud del criterio del

cociente, las integrales impropias $\int_a^b F(x)G(x)$ y $\int_a^b F(x)G_1(x)$, tienen el mismo carácter, puesto que se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)G(x)}{F(x)G_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{G(x)}{G_1(x)} = 1 \in \mathbb{R}_0^+.$$

Análogamente a las integrales impropias de primera especie, esta propiedad permite tratar fácilmente los casos de “factores neutros” o de “sumandos despreciables”, tal como se ve a continuación.

- Si en la integral impropia $\int_a^b f$ se cumple

$$f(x) = u(x)v(x) \text{ para todo } x \in]a, b] \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} v = L \in \mathbb{R}_0^+,$$

entonces las integrales impropias $\int_a^b u(x)v(x)$ y $\int_a^b v(x)$, tienen el mismo carácter, puesto que se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{u(x)v(x)}{u(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = L \in \mathbb{R}_0^+.$$

- Si en la integral impropia $\int_a^b f$ se cumple

$$f(x) = u(x) + v(x) \text{ para todo } x \in]a, b] \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{v(x)}{u(x)} = 0,$$

entonces las integrales impropias $\int_a^b (u(x) + v(x))$ y $\int_a^b u(x)$, tienen el mismo carácter, puesto que se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{u(x) + v(x)}{u(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \left(1 + \frac{v(x)}{u(x)} \right) = 1 \in \mathbb{R}_0^+.$$

- Si en la integral impropia $\int_a^b f$ se cumple

$$f(x) = \frac{u(x)}{\varphi(x)}, \text{ para todo } x \in]a, b] \text{ con } \varphi \in \mathcal{C}^k[a, b],$$

$$u(x) > 0, \varphi(x) > 0 \text{ para todo } x \in]a, b],$$

$$\varphi(x) = v(a + \theta(x)), \text{ con } \lim_{x \rightarrow a^+} \theta(x) = 0$$

$$v(a) = Dv(a) = \dots = D^{k-1}v(a) = 0,$$

$$D^k v(a) > 0,$$

entonces las integrales impropias $\int_a^b \frac{u(x)}{v(a + \theta(x))}$ y $\int_a^b \frac{u(x)}{(\theta(x))^k}$, tienen el mismo carácter, puesto que se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\frac{u(x)}{(\theta(x))^k}}{\frac{u(x)}{v(a + \theta(x))}} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{v(a + \theta(x))}{(\theta(x))^k} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{Dv(a + \theta(x))D\theta(x)}{k(\theta(x))^{k-1}D\theta(x)} = \dots = \frac{D^k v(a)}{k!} > 0.$$

11.2.9 EJEMPLO. Veamos unos ejemplos de aplicación de estas situaciones.

1) Las integrales impropias $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2\sqrt{x}}$ y $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}$, son ambas convergentes, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{2} = 0.$$

2) Las integrales impropias $\int_1^2 \frac{e^{x-1} - 1}{x \operatorname{sen}(x-1)}$ y $\int_1^2 \frac{1}{x}$, son ambas divergentes, puesto que

$$((e^{x-1} - 1) \sim (x-1)) (1^+) \quad \text{y} \quad (\operatorname{sen}(x-1) \sim (x-1)) (1^+).$$

3) La integral impropia $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x^3}{\sqrt[3]{1+x^6} - \sqrt[3]{1-x^6}}$ es divergente, puesto que los términos principales de Taylor en el origen de las funciones numerador y denominador son, respectivamente $-\frac{x^5}{2}$ y $\frac{2x^6}{3}$, con lo que la integral dada tiene el mismo carácter que la integral $\int_0^1 -\frac{1}{3x}$, que es divergente.

11.2.10 DEFINICIÓN. (*Integración en intervalos acotados no cerrados*). Sea $f:]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en su dominio y supongamos que se cumplen las condiciones siguientes:

- 1) f es integrable en todo intervalo cerrado $[x, y] \subset]a, b[$;
- 2) $\lim_{a^+} f$ y $\lim_{b^-} f$ existen y son finitos.

Si definimos la función $\varphi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\varphi(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in]a, b[, \quad \varphi(a) = \lim_{a^+} f, \quad \varphi(b) = \lim_{b^-} f,$$

está claro que φ es integrable en el sentido de Riemann en el intervalo $[a, b]$. Pues bien, se define la integral de f en $]a, b[$ mediante $\int_a^b f = \int_a^b \varphi$.

Obsérvese que de hecho podrían tomarse valores cualesquiera para definir φ en los extremos del intervalo, resultando igualmente una función integrable y de la misma integral en dicho intervalo.

La definición anterior se extiende de forma análoga al caso en que el dominio de la función sea un intervalo de tipo mixto $]a, b]$ o bien $[a, b[$.

11.2.11 EJEMPLO. Para calcular la integral (aparentemente impropia) $\int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{x^2}$ se observa que la función integrando está definida en el intervalo $]0, \pi]$ y que se cumple $\lim_{0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2}$, con lo que si se considera la función $\varphi: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \text{para todo } 0 < x \leq \pi, \quad \varphi(0) = \frac{1}{2},$$

esta función es integrable y se cumple $\int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{x^2} = \int_0^\pi \varphi(x)$.

11.3 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES NO ACOTADAS EN INTERVALOS NO ACOTADOS.

En este apartado se generaliza la integral para funciones definidas en intervalos no acotados, esto es, si $a \in \mathbb{R}$, intervalos no acotados superiormente $[a, +\infty[$, o bien, intervalos no acotados inferiormente $] -\infty, a]$, cumpliéndose además que la función tiene límite infinito en el extremo real del intervalo.

11.3.1 DEFINICIÓN. (Integrales impropias de tercera especie).

- Sea $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a + \varepsilon, x] \subset [a, +\infty[$, cualesquiera que sean $\varepsilon > 0$ y $x > a + \varepsilon$. Se define la *integral impropia de tercera especie* de f en el intervalo $[a, +\infty[$ mediante la suma de los límites

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f + \lim_{x \rightarrow \infty} \int_b^x f \quad (a + \varepsilon < b < x).$$

Si ambos límites existen y son finitos se dice entonces que la integral impropia es *convergente* y, en caso contrario, se dice que es *divergente*.

- Se definen de forma completamente análoga las integrales impropias de tercera especie $\int_{-\infty}^a f$.
- Así pues, una integral impropia de tercera especie se define mediante la suma de una integral impropia de primera especie y una integral impropia de segunda especie. En consecuencia, el estudio de una integral impropia de tercera especie se reduce a analizar dos integrales impropias como las que han sido estudiadas en los apartados anteriores, con lo que pueden aplicarse los criterios de convergencia que en cada caso se han establecido.

11.3.2 EJEMPLO. Sea $a > 0$ un número real positivo estricto; la integral impropia de tercera especie definida por

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^p}$$

no puede ser nunca convergente, puesto que por una parte, la integral impropia de primera especie

$\int_b^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^p}$ ($b > a$), es convergente únicamente si se cumple $p > 1$, tal como se ha probado en 11.1.4; pero por otra parte, y según lo visto en 11.2.2, la integral impropia de segunda especie $\int_a^c \frac{1}{(x-a)^p}$ ($c > a$), es convergente si, y solamente si, se cumple que $p < 1$.

11.3.3 EJEMPLO. En algunos casos se producen singularidades diversas, como por ejemplo en la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x^2}},$$

para cuyo estudio debe descomponerse en suma de cuatro integrales impropias, dos de primera especie y dos de segunda:

$$\int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x^2}} + \int_{-a}^0 \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x^2}} + \int_0^a \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x^2}} + \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x^2}},$$

siendo $a > 0$ un número real positivo estricto cualquiera. Es inmediato ver que cada una de estas integrales impropias es convergente; en efecto, para las de primera especie, basta aplicar el criterio de comparación 11.1.9 viendo que

$$\frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x^2}} < \frac{1}{x^2}, \text{ si } |x| > a,$$

y tener en cuenta 11.1.4. Para las de segunda especie, basta aplicar el criterio de comparación 11.2.4, viendo que

$$\frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x^2}} < \frac{1}{x^{2/3}}, \text{ si } 0 < |x| \leq a,$$

y tener en cuenta 11.2.2.

11.4 FUNCIONES DEFINIDAS POR INTEGRALES IMPROPIAS.

En este apartado se estudian las funciones definidas mediante integrales impropias, denominadas también *integrales impropias dependientes de un parámetro* y que no son más que una generalización de las funciones definidas por integrales o integrales dependientes de un parámetro, estudiadas en el capítulo anterior (véase el apartado 10.3).

11.4.1 DEFINICIÓN. (*Integrales impropias uniformemente convergentes*). Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida y continua en el subconjunto $I = [a, +\infty[\times]c, d] \subset \mathbb{R}^2$; entonces, la restricción de f al subconjunto $I_z = [a, z] \times]c, d] \subset I$, cualquiera que sea $z > a$, es también una función continua en I_z . Si se fija un punto $y \in]c, d]$, la función $f(\cdot, y): [a, z] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, z]$, luego es integrable y existe la integral $\int_a^z f(\cdot, y)$, que se acostumbra a escribir $\int_a^z f(x, y)dx$ (aquí la notación clásica ayuda a precisar la variable respecto a la que se efectúa la integración). Tiene sentido plantear la existencia del límite $L_y = \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_a^z f(x, y)dx$, el cual, de acuerdo con la notación introducida en el apartado 11.1, si existe y es finito se escribirá $L_y = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$.

En estas condiciones, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $k > 0$ (que depende de ε y del punto $y \in]c, d]$) tal que, para todo $z > k$, se cumple

$$\left| L_y - \int_a^z f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

En el caso en que k depende únicamente de ε pero es independiente del punto $y \in]c, d]$, se dice que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ es *uniformemente convergente en el intervalo* $]c, d]$; en tal caso, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $k > 0$ de tal manera que, cualquiera que sea $z > k$, se cumple

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y)dx - \int_a^z f(x, y)dx \right| = \left| \int_z^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \varepsilon \text{ para todo } y \in]c, d].$$

11.4.2 EJEMPLO. Considérese la función $f: I = [1, +\infty[\times]0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{\text{sen } y}{x^2}$ para cada $(x, y) \in I$; se trata de estudiar la convergencia y la convergencia uniforme de las integrales impropias $\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen } y}{x^2} dx$ en el intervalo $]0, \pi]$. La convergencia es inmediata, puesto que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen } y}{x^2} dx = \text{sen } y \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \text{sen } y.$$

Veamos ahora que la convergencia es uniforme. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, se cumplirá

$$\left| \int_1^z \frac{\operatorname{sen} y}{x^2} dx - \operatorname{sen} y \right| = |\operatorname{sen} y| \left| \int_1^z \frac{1}{x^2} dx - 1 \right| \leq \frac{1}{z} < \varepsilon,$$

siempre que $z > k = \frac{1}{\varepsilon}$ y cualquiera que sea $y \in [0, \pi]$.

11.4.3 DEFINICIÓN. (*Funciones definidas por integrales impropias*). Sea una integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ tal que es uniformemente convergente en el intervalo $[c, d] \subset \mathbb{R}$. Puede definirse entonces la función $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, mediante

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

que se denomina *función definida por una integral impropia* o también *integral impropia dependiente de un parámetro*.

En lo que resta de este apartado nos proponemos estudiar las propiedades más destacables de estas funciones.

11.4.4 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Cauchy*). La integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ es uniformemente convergente en $[c, d]$ si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que, cualesquiera que sean $u, v > k$, se cumple

$$\left| \int_u^v f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } y \in [c, d].$$

Demostración:

La condición es necesaria. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario; en virtud de la convergencia uniforme de la integral impropia, existe $k > 0$ tal que cualquiera que sea $u > k$ se cumple

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^u f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } y \in [c, d].$$

En consecuencia, cualesquiera que sean $u, v > k$ se cumplirá

$$\begin{aligned} \left| \int_u^v f(x, y) dx \right| &= \left| \int_a^v f(x, y) dx - \int_a^u f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_a^v f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \\ &+ \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^u f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } y \in [c, d], \end{aligned}$$

lo cual prueba que, efectivamente, la condición es necesaria.

La condición es suficiente. En efecto, supongamos cierta la condición; entonces, en virtud del criterio de Cauchy (11.1.7), la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ es convergente para todo $y \in [c, d]$. Con ello, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $k > 0$ tal que $\left| \int_u^v f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $y \in [c, d]$, y por lo tanto

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^v f(x, y) dx \right| = \left| \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_u^v f(x, y) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{para todo } y \in [c, d],$$

que prueba la convergencia uniforme de la integral impropia. ■

11.4.5 PROPOSICIÓN. (*Criterio de Weierstrass*). Sea $f: [a, +\infty[\times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $g: [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real y positiva en su dominio y tal que la integral impropia $\int_a^{+\infty} g$ es convergente. Si se cumple

$$|f(x, y)| \leq g(x) \text{ para todo } x \in [a, +\infty[\text{ y para todo } y \in [c, d],$$

entonces la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ es uniformemente convergente en $[c, d]$.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario; la convergencia de la integral impropia $\int_a^{+\infty} g$ implica que existe $k > 0$ tal que $\int_z^{+\infty} g < \varepsilon$ para todo $z > k$. Por otra parte, en virtud del criterio de comparación (11.1.9), la integral impropia $\int_a^{+\infty} |f(x, y)|dx$ es convergente y, por lo tanto, también lo es la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$, cualquiera que sea $y \in [c, d]$. En consecuencia, cualquiera que sea $z > k$, se verificará

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y)dx - \int_a^z f(x, y)dx \right| = \left| \int_z^{+\infty} f(x, y)dx \right| \leq \int_z^{+\infty} |f(x, y)|dx \leq \int_z^{+\infty} g < \varepsilon$$

para todo $y \in [c, d]$, que prueba la convergencia uniforme de la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$. ■

11.4.6 EJEMPLO. La integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy dx$, es uniformemente convergente en \mathbb{R} , pues la función $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{-x}$, $x \in [0, +\infty[$ es positiva en su dominio, la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-x}$ es convergente y, finalmente, se cumple $|e^{-x} \cos xy| \leq e^{-x}$ para todo $x \geq 0$ y para todo $y \in \mathbb{R}$.

En las dos proposiciones que siguen se estudia la continuidad y la integrabilidad de las funciones definidas por integrales impropias.

11.4.7 PROPOSICIÓN. (*Continuidad de las funciones definidas por integrales impropias*). Si la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ es uniformemente convergente en el intervalo $[c, d]$, entonces la función $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$, $y \in [c, d]$, es continua en su dominio.

Demostración:

Se hará aplicando la definición de función continua en un punto. Sea $y_0 \in [c, d]$ un punto cualquiera

de este intervalo; se cumple entonces que

$$\begin{aligned} |F(y_0 + h) - F(y_0)| &= \left| \int_a^{+\infty} f(x, y_0 + h) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| = \\ &= \left| \int_a^u (f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)) dx + \int_u^{+\infty} f(x, y_0 + h) dx - \int_u^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^u (f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)) dx \right| + \left| \int_u^{+\infty} f(x, y_0 + h) dx \right| + \left| \int_u^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| \end{aligned}$$

El concepto de integral impropia uniformemente convergente permite afirmar que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario existe $k > 0$ tal que, cualquiera que sea $u > k$, cada una de las dos últimas integrales anteriores está acotada en valor absoluto por $\varepsilon/3$ para todo $u > k$. Fijado un tal valor de u , para la primera integral y en virtud de la continuidad de f en su dominio, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_a^u (f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)) dx \right| \leq \int_a^u |f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)| dx < \int_a^u \frac{\varepsilon}{3(u-a)} dx = \frac{\varepsilon}{3},$$

siempre que $|h| < \delta$. En definitiva, se ha probado que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que para todo $|h| < \delta$, se cumple $|F(y_0 + h) - F(y_0)| < \varepsilon$, con lo que la función F es continua en el punto $y_0 \in [c, d]$. La arbitrariedad del punto permite afirmar la continuidad en todo el intervalo. ■

11.4.8 PROPOSICIÓN. (*Integrabilidad de las funciones definidas por integrales impropias*). Si la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ es uniformemente convergente en el intervalo $[c, d]$, entonces la función $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$, $y \in [c, d]$, es integrable en su dominio, escribiéndose habitualmente

$$\int_c^d F = \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Demostración:

Inmediata, teniendo en cuenta que $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, en virtud de 11.4.7. ■

11.4.9 EJEMPLO. En 11.4.6 se ha probado la convergencia uniforme en \mathbb{R} de las integrales impropias $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy dx$; si se define la función $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy dx$, esta función es continua en su dominio y, por lo tanto, integrable. La integral de esta función en $[0, 1]$ será

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(y) dy &= \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy dx = \int_0^1 \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} \cos xy dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x}(-\cos xy + y \operatorname{sen} xy)}{1 + y^2} \right]_0^u \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

En la proposición que sigue se trata de ver la conmutatividad de las integrales de 11.4.8, cuestión que tiene interés en muchas aplicaciones prácticas. Se trata, en definitiva, de establecer una expresión análoga a la de 10.3.10.

11.4.10 PROPOSICIÓN. (*Permutabilidad del orden de integración*). Si la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ es uniformemente convergente en el intervalo $[c, d] \subset \mathbb{R}$, se cumple la igualdad

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Demostración:

Por definición de convergencia uniforme de una integral impropia, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario existe $k > 0$ tal que, cualquiera que sea $u > k$, se cumple

$$\left| \int_u^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{d-c} \quad \text{para todo } y \in [c, d].$$

Por lo tanto, cualquiera que sea $u > k$, se cumplirá también que

$$\left| \int_c^d \left(\int_u^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy \right| = \left| \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy - \int_c^d \left(\int_a^u f(x, y) dx \right) dy \right| < \varepsilon.$$

Aplicando ahora el cambio en el orden de integración probado en 10.3.8, se obtiene

$$\left| \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy - \int_a^u \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \right| < \varepsilon$$

para todo $u > k$, lo cual concluye la demostración. ■

11.4.11 EJEMPLO. Puede utilizarse el resultado anterior para probar que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{4}$, pues en virtud de 11.4.9 se sabe que $\int_0^1 dy \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy \, dx = \frac{\pi}{4}$, y en virtud de 11.4.10, se cumple

$$\int_0^1 dy \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy \, dx = \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 e^{-x} \cos xy \, dy.$$

La igualdad enunciada resulta entonces teniendo en cuenta que se verifica

$$\int_0^1 e^{-x} \cos xy \, dy = \left[\frac{e^{-x} \operatorname{sen} xy}{x} \right]_0^1 = \frac{e^{-x} \operatorname{sen} x}{x}.$$

Para completar el estudio de las propiedades más importantes de las funciones definidas por integrales impropias, queda en último lugar establecer la derivabilidad de dichas funciones, cuestión que se aborda en la proposición que sigue.

11.4.12 PROPOSICIÓN. (*Derivabilidad de las funciones definidas por integrales impropias*). Sea $f: I = [a, +\infty[\times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio. Si la función derivada parcial $D_y f$ es continua en I y la integral impropia $\int_a^{+\infty} D_y f(x, y) dx$ es uniformemente convergente en el

intervalo $[c, d]$, entonces la función $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ es derivable en $]c, d[$ y, además, se cumple $DF(y) = \int_a^{+\infty} D_y f(x, y) dx$.

Demostración:

Sea $y_0 \in]c, d[$ un punto cualquiera del intervalo; se tiene

$$\frac{F(y_0 + h) - F(y_0)}{h} = \int_a^{+\infty} \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} dx.$$

Aplicando la fórmula del incremento finito a la función $f(x, \cdot)$ en el intervalo $[y_0, y_0 + h] \subset]c, d[$, se obtiene $f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) = hDf(x, \cdot)(\xi) = hD_y f(x, \xi)$; $y_0 < \xi < y_0 + h$, con lo que pasando al límite en la igualdad anterior cuando $h \rightarrow 0$ y teniendo en cuenta la convergencia uniforme de las integrales impropias $\int_a^{+\infty} D_y f(x, y) dx$, se obtiene finalmente

$$DF(y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(y_0 + h) - F(y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{+\infty} D_y f(x, \xi) dx = \int_a^{+\infty} D_y f(x, y_0) dx,$$

como se quería probar. ■

11.4.13 EJEMPLO. Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, donde $I = [0, +\infty[\times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y) = e^{-x} \cos xy$ para cada $(x, y) \in I$. La función derivada parcial $D_y f(x, y) = -xe^{-x} \sin xy$, $(x, y) \in I$, es continua en el intervalo I y las integrales impropias $\int_0^{+\infty} -xe^{-x} \sin xy dx$, son uniformemente convergentes en \mathbb{R} , como es inmediato establecer aplicando, por ejemplo, el criterio de Weierstrass. En consecuencia, la función $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy dx, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}$$

es derivable en \mathbb{R} , cumpliéndose

$$DF(y) = \int_0^{+\infty} D_y f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} -xe^{-x} \sin xy dx, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}$$

11.5 LAS FUNCIONES “GAMMA” Y “BETA”

Este apartado tiene como objetivo el estudio de dos funciones denominadas genéricamente “funciones eulerianas”. La primera de ellas es la función “gamma” Γ , la cual es un ejemplo de función definida por una integral impropia tal como se han definido estas funciones en el apartado anterior. La segunda es la función “beta” B , que es una función de dos variables reales definida por una integral que, en unos determinados casos, es impropia de segunda especie.

La función Gamma, Γ

11.5.1 DEFINICIÓN. Sea la función real $f: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, t) = x^{t-1}e^{-x}$; pueden considerarse las integrales impropias siguientes $\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$, $t \in \mathbb{R}$. Vamos a estudiar su convergencia. La integral anterior puede descomponerse como suma de dos integrales:

$$\int_0^1 x^{t-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx = I(t) + J(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

lo cual facilitará, como veremos, el estudio de la convergencia, considerando separadamente los casos $t > 0$ y $t \leq 0$.

- Supongamos $t > 0$. La integral $I(t)$ no es impropia si $t \geq 1$ y, puesto que entonces la función f es continua en su dominio, la integral existe. Si $0 < t < 1$, se cumple

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-t}(x^{t-1}e^{-x}) = 1,$$

con lo que $I(t)$ es convergente en virtud de 11.2.6. En cuanto a $J(t)$, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(x^{t-1}e^{-x}) = 0,$$

y entonces $J(t)$ es convergente por 11.1.12.

- Supongamos $t \leq 0$. En tal caso, se cumple

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(x^{t-1}e^{-x}) = \infty,$$

con lo que la integral impropia $I(t)$ es divergente en virtud de 11.2.6; independientemente del carácter de $J(t)$ en este caso (que es convergente), resulta en definitiva que la suma es divergente.

- En resumen, se ha probado que la integral impropia $\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$ es convergente si, y solamente si, se cumple $t > 0$, con lo que tiene sentido considerar la función $\Gamma: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx, \quad t > 0.$$

En la proposición que sigue se establecen las propiedades básicas de esta función.

11.5.2 PROPOSICIÓN. (*Propiedades básicas de la función Gamma*). La función Γ definida en el punto anterior verifica las siguientes propiedades:

- 1) es continua en su dominio $]0, +\infty[$;
- 2) $\Gamma(1) = 1$;
- 3) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ para todo $t > 0$ (*fórmula de recurrencia*);
- 4) $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$

Demostración:

- 1) Se hará viendo que la integral impropia $\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$ es uniformemente convergente en $]0, +\infty[$; la continuidad de Γ será entonces consecuencia del criterio de Cauchy (11.4.4). En efecto: si $a > 0$ es un número real positivo estricto cualquiera, considérese la función $g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^{a-1}, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ \lambda e^{-x/2}, & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

donde $\lambda \geq 0$ es una constante positiva. Es inmediato comprobar que se cumple $g(x) \geq 0$ para todo $x \in]0, +\infty[$ y que la integral impropia $\int_0^{+\infty} g$ es convergente.

Si $0 < a < b$, cualquiera que sea $t \in [a, b]$ se cumple $f(x, t) = x^{t-1}e^{-x} \leq g(x)$, con lo que, en virtud del criterio de Weierstrass (11.4.5), se cumple la convergencia uniforme de la integral impropia $\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$, lo que prueba la continuidad de la función Γ .

- 2) Basta aplicar la definición de la función Γ .
 3) Basta calcular $\Gamma(t+1)$ a partir de la definición de la función Γ y a continuación aplicar la fórmula de integración por partes, obteniéndose

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = t \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = t \Gamma(t).$$

- 4) Inmediata en virtud de 3). ■

11.5.3 OBSERVACIÓN. Cabe destacar dos propiedades de interés que se deducen de la proposición anterior:

- En primer lugar, que basta conocer los valores de la función Γ en $[1, 2]$ para poder calcular su valor en cualquier punto de su dominio.
- En segundo lugar, que la igualdad 4) de la proposición anterior permite afirmar que la función Γ es la extensión de la función factorial definida en los números naturales.

11.5.4 PROPOSICIÓN. (*Derivabilidad de la función Gamma*). La función Γ es infinitamente derivable en $]0, +\infty[$, verificándose

$$D^n \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} (\ln x)^n dx \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración:

La función $f: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, t) = x^{t-1}e^{-x}$, es continua y derivable parcialmente en su dominio; la función derivada parcial $D_2 f$ está definida por $D_2 f(x, t) = x^{t-1}e^{-x} \ln x$, $(x, t) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ y es también continua en su dominio. En consecuencia, aplicando la proposición 11.4.11 se obtiene que la función Γ es derivable en su dominio $]0, +\infty[$, cumpliéndose además que

$$D\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} \ln x dx.$$

Aplicando reiteradamente n veces el razonamiento, se obtiene la expresión de la derivada n -ésima de la función Γ . ■

11.5.5 OBSERVACIÓN. (*Extensión de la función Gamma a los reales negativos*). Se ha probado que la función Γ está definida en $]0, +\infty[$; no obstante, teniendo en cuenta 11.5.2 puede extenderse el campo de definición de esta función a los números reales negativos no enteros, esto es, al conjunto $] -\infty, 0[- \mathbb{Z}$, mediante el procedimiento que se estudia a continuación.

- Si $t < 0$, existen un número real $z > 0$ y un número natural m , no únicos, tales que $t = z - m$ (por ejemplo, si $t = -7.65$, se cumplen $t = 0.35 - 8 = 1.35 - 9 = 2.35 - 10$, etc.). Para nuestros propósitos tomaremos los menores números que cumplen la igualdad. Teniendo en cuenta esto y la fórmula de recurrencia establecida en 11.5.2, resulta:

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1) = (z-1)(z-2)\Gamma(z-2) = \cdots = (z-1)(z-2)\cdots(z-m)\Gamma(z-m),$$

con lo que puede escribirse

$$\Gamma(z-m) = \Gamma(t) = \frac{\Gamma(z)}{(z-1)(z-2)\cdots(z-m)}.$$

Obsérvese que si t es un número entero negativo, entonces se cumple $z = 0$ y $m = -t$, con lo que la expresión anterior carece de sentido, pero si lo tiene cuando t no es un número entero negativo. La expresión anterior se denomina *extensión de la función Γ a los números reales negativos no enteros*.

- Así, por ejemplo, en el caso apuntado antes en que $t = -7.65$, se tendrá $z = 0.35$ y $m = 8$, con lo que

$$\Gamma(-7.65) = \frac{\Gamma(0.35)}{(0.35-1)(0.35-2)(0.35-3)\cdots(0.35-8)} = \frac{2.546287}{13865.02064} = 1.8365 \cdot 10^{-4}.$$

11.5.6 EJEMPLO. (*Aplicación de la función Γ al cálculo de integrales*).

- 1) Para calcular la integral impropia $\int_0^{+\infty} x^6 e^{-2x}$, puede recordarse que la función Γ se define mediante

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \quad (t > 0),$$

con lo que planteando en la integral dada el cambio de variable definido por

$$x = g(u) = \frac{u}{2}, \quad Dg(u) = \frac{1}{2},$$

se obtiene

$$\int_0^{+\infty} x^6 e^{-2x} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^6 e^{-u} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^7} \int_0^{+\infty} u^6 e^{-u} = \frac{1}{2^7} \Gamma(7) = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}.$$

- 2) El cálculo de la integral $\int_0^1 x \ln^4 x$ puede abordarse mediante el cambio de variable definido por

$$x = g(u) = e^{-u}, \quad Dg(u) = -e^{-u},$$

resultando

$$\int_0^1 x \ln^4 x = \int_{+\infty}^0 e^{-u} (-u)^4 (-e^{-u}) = \int_0^{+\infty} u^4 e^{-2u}.$$

Si en esta integral se hace ahora el cambio de variable definido por

$$u = g(v) = \frac{v}{2}, \quad Dg(v) = \frac{1}{2},$$

se obtiene

$$\int_0^{+\infty} u^4 e^{-2u} du = \int_0^{+\infty} \left(\frac{v}{2}\right)^4 e^{-v} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^5} \int_0^{+\infty} v^4 e^{-v} dv = \frac{1}{2^5} \Gamma(5) = \frac{4!}{2^5} = \frac{3}{4}.$$

La función Beta, B

11.5.7 DEFINICIÓN. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ números reales cualesquiera; pueden considerarse las integrales definidas por $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, cuyo carácter vamos a estudiar a continuación en función de los valores de $p, q \in \mathbb{R}$. Obsérvese que si $p \geq 1$ y $q \geq 1$, la integral anterior no es impropia y la definición es correcta, puesto que es la integral de una función continua en un intervalo contenido en su campo de continuidad. En cualquier otro caso, la integral anterior es una integral impropia de segunda especie, con lo que para que la definición sea correcta debe estudiarse su convergencia.

- Considérese la integral descompuesta mediante la suma siguiente:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1} + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1};$$

si se cumple $p > 0$ y $0 < q < 1$, ambas integrales son convergentes en virtud de 11.2.6, puesto que, por ejemplo, para la primera se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-p}(x^{p-1}(1-x)^{q-1}) = 1,$$

y el exponente verifica $1 - p < 1$. Un razonamiento idéntico para la segunda integral prueba su convergencia. Se prueba de forma análoga la convergencia de ambas integrales en el caso en que $0 < p < 1$ y $q > 0$.

- Si $p \leq 0$, se verifica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(x^{p-1}(1-x)^{q-1}) = \infty$$

cualquiera que sea el valor de q , con lo que en virtud de 11.2.6, la primera integral impropia es divergente y también lo es la suma. Mediante un razonamiento idéntico se prueba la divergencia de la segunda integral en el caso en que $q \leq 0$ y p es cualquiera, siendo divergente también la suma.

- A partir de las consideraciones anteriores puede definirse la función $B: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la integral

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}.$$

A continuación se estudian esquemáticamente las propiedades más importantes de esta función.

11.5.8 PROPOSICIÓN. (*Simetría de la función Beta*). Se verifica la igualdad

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Demostración:

Si en la integral que define la función B se realiza el cambio de variable definido por

$$x = g(y) = 1 - y, \quad Dg(y) = 1,$$

se obtiene

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \int_1^0 (1-y)^{p-1}y^{q-1}(-1) = \int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1} = B(q, p),$$

como se quería probar. ■

11.5.9 PROPOSICIÓN. (*Expresión de Beta mediante funciones trigonométricas*). Se verifica la igualdad

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} t \operatorname{cos}^{2q-1} t.$$

Demostración:

Inmediata, sin más que aplicar el cambio de variable definido por

$$x = g(t) = \operatorname{sen}^2 t, \quad Dg(t) = 2 \operatorname{sen} t \operatorname{cos} t,$$

en la integral que define la función Beta. ■

11.5.10 PROPOSICIÓN. (*Relación entre las funciones Gamma y Beta*). Si $p, q > 0$ son números reales positivos estrictos cualesquiera, se cumple la igualdad

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Demostración:

Para demostrar rigurosamente esta propiedad se requieren conceptos tales como integrales dobles y cambio de variables en integrales dobles que no han sido estudiados en este texto, con lo que se omite su demostración. Puede consultarse la referencia [DeB].

Se propone como ejercicio probar la igualdad en el caso en que p y q son números naturales. ■

11.5.11 EJEMPLO.

1) Vamos a probar que se cumple la igualdad: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. En efecto, a partir de 11.5.10 si $p = q = \frac{1}{2}$, se cumple que

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2,$$

y a partir de 11.5.9, si $p = q = \frac{1}{2}$, se obtiene

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^0 t \operatorname{cos}^0 t = \pi,$$

de donde resulta la igualdad enunciada.

- 2) Teniendo en cuenta que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ y que $\Gamma(n) = (n-1)!$, se obtiene

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi} = \frac{(2m-1)!!}{2^m} \sqrt{\pi}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

- 3) Aplicando la propiedad anterior y teniendo en cuenta la extensión de la función Gamma a los reales negativos, es inmediato establecer que se cumple

$$\Gamma\left(-m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^m 2^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \sqrt{\pi} = \frac{(-1)^m 2^m}{(2m-1)!!} \sqrt{\pi}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

- 4) Se propone como ejercicio probar que

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi} \quad (p > 0),$$

teniendo en cuenta 11.5.9 y 11.5.10.

11.5.12 EJEMPLO. (Aplicación de la función B al cálculo de integrales).

- 1) Para calcular la integral

$$\int_0^2 x^3 \sqrt{8-x^3} = 2\sqrt{2} \int_0^2 x^3 \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^3},$$

aplicaremos a esta integral el cambio de variable definido por

$$x = g(u) = 2u^{1/3} = u, \quad Dg(u) = \frac{2}{3}u^{-2/3},$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} \int_0^2 x^3 \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^3} &= 2\sqrt{2} \int_0^1 8u\sqrt{1-u} \frac{2}{3}u^{-2/3} = \frac{32\sqrt{2}}{3} \int_0^1 u^{1/3}(1-u)^{1/2} = \\ &= \frac{32\sqrt{2}}{3} B\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) = \frac{32\sqrt{2}}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}. \end{aligned}$$

- 2) Para calcular la integral $\int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta$, basta observar que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta &= \frac{1}{2} \left(2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^0 \theta \cos^6 \theta \right) = \frac{1}{2} \left(2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2\frac{1}{2}-1} \theta \cos^{2\frac{7}{2}-1} \theta \right) = \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{3!} = \frac{5\pi}{32}. \end{aligned}$$

11.6 EJERCICIOS.

1. Calcúlense las integrales impropias siguientes:

$$\text{a) } \int_a^{+\infty} \frac{3}{x^2}, \quad a > 0; \quad \text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}; \quad \text{b) } \int_a^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}; \quad \text{d) } \int_1^{+\infty} \frac{2}{x\sqrt{x^{10}+x^5+1}}.$$

2. Estudiar la convergencia de las integrales impropias siguientes

$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{x}{3x^4+5x^2+1}; \quad \text{b) } \int_2^{+\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}.$$

3. Pruébese la convergencia de las integrales impropias siguientes

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x}; \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} e^{-x^2}.$$

4. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias

$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+a}, \quad (a > 0); \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

5. Estudiar la convergencia y calcular, en su caso, las siguientes integrales impropias de segunda especie

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{4}{(2-x)\sqrt{1-x}}; \quad \text{c) } \int_0^1 \ln x; \quad \text{b) } \int_{-1}^1 \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{d) } \int_1^2 \frac{1}{x^2+x-2}.$$

6. Calcular la integral $\int_0^\pi x \ln(\text{sen } x)$.

7. Calcular las integrales a) $\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2}$; b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x)^{1/3}}$.

8. Calcular las integrales impropias a) $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2+x-2}$; b) $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}$.

9. Pruébese que las integrales impropias

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x^3} \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2},$$

son ambas convergentes. Calcúlense directamente su diferencia.

10. Aplicando la definición, estudiar la convergencia de las integrales impropias que siguen, calculándolas en caso de convergencia:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_1^e \frac{1}{x(\ln x)^{1/3}}; & \text{b)} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x}; & \text{c)} \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}; \\ \text{d)} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}; & \text{e)} \int_0^1 \frac{1}{1-x^3}; & \text{f)} \int_0^1 \frac{x^3+x^{1/3}-2}{x^{3/5}}. \end{array}$$

11. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}; & \text{b)} \int_0^1 \frac{x^2}{(1-x^2)^{5/3}}; & \text{c)} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}}; \\ \text{d)} \int_0^1 \frac{1}{1-x^3+x^5}; & \text{e)} \int_0^1 \frac{1}{x-\sin x}; & \text{f)} \int_0^2 \frac{\ln x^{1/4}+1}{e^{\tan x}-1}. \end{array}$$

12. Estudiar para qué valores del número natural $n \in \mathbb{N}$ existe la integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^2}$.

13. Pruébese la igualdad: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = 0$. (Sugerencia: estúdiense separadamente los intervalos $]0, 1]$ y $[1, +\infty[$ y en este último aplíquese el cambio de variable definido por $u = 1/x$).

14. Con el objetivo de generalizar el concepto de valor medio integral de una función integrable en un intervalo cerrado y acotado, se define el *valor medio generalizado* de f en el intervalo $[a, +\infty[$, notado $\mu_{(\infty)}(f)$, como el límite (si existe y es finito) siguiente:

$$\mu_{(\infty)}(f) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} \int_a^u f(x).$$

Calcúlese el valor medio generalizado de las funciones siguientes, en el intervalo que se indica en cada caso:

- 1) $f(x) = \arctan x$, en el intervalo $[0, +\infty[$.
- 2) $f(x) = 2\sqrt{x} \sin x$, en el intervalo $[0, +\infty[$.
- 3) $f(x) = \frac{3}{x^3}$, en el intervalo $[1, +\infty[$.

15. Si $p \in \mathbb{R}$ se indica mediante $I(p)$ la integral impropia $I(p) = \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}$ ($a > 0$). Estúdiense su convergencia en función de p .

16. Sea $f:]0, a[\rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona en su dominio y tal que existe la integral $\int_0^a x^p f(x)$. Pruébese que se cumple entonces la igualdad

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p+1} f(x) = 0.$$

17. Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_1^{1+x^2} \frac{e^{-t}}{t}$.

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en su dominio.

b) Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}$.

c) Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x^2}$

18. Sean $f, g: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales tales que

1) $\int_a^x f(t)$ está acotada para todo $x \geq a$;

2) la función g es monótona;

3) se cumple la igualdad $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Pruébese que, en estas condiciones, la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)$ es convergente.

19. Se designan por I y J las integrales impropias siguientes:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x}, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+x}.$$

1) Pruébese que ambas son convergentes.

2) Expresar la integral J en función de la integral I .

3) Compruébese que se cumple $\frac{1}{4} < I < 1$.

20. Sea $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función real; se denomina *transformada de Laplace* de f , notada $\mathcal{L}f$, la función $F: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(\mathcal{L}f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Calcular las transformadas de Laplace de las funciones $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ siguientes:

1) $f(t) = \alpha, t > 0$ ($\alpha =$ constante);

2) $f(t) = t^n, t > 0$ ($n \in \mathbb{N}$);

3) $f(t) = e^{\lambda t}, t > 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$);

4) $f(t) = \text{sen } \omega t, t > 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$);

5) $f(t) = \text{cos } \omega t, t > 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$).

21. Sea $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función en el intervalo $]0, +\infty[$ y tal que $f(0) = y_0$. Si $F(s)$ designa la transformada de Laplace de f , compruébese que la transformada de Laplace de su función derivada Df es

$$(\mathcal{L}Df)(s) = sF(s) - y_0.$$

Generalícese el cálculo a funciones sucesivamente derivables, determinando la expresión de la transformada de Laplace de la derivada k -ésima, $\mathcal{L}D^k f$ cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$.

22. Calcúlese el potencial electrostático creado por un hilo conductor de longitud $2L$ que está cargado con una densidad lineal de carga constante δ , en un punto situado a una distancia d del punto medio del hilo. Dedúzcase una expresión para el caso en el cual el cociente d/L sea muy pequeño.

11.7 GUÍA DE REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[DeB] **DE BURGOS, J.** *Cálculo Infinitesimal (teoría y problemas)*.

Excelente texto de consulta. Se recomienda la lectura del capítulo 7, dedicado a las integrales impropias y a las integrales dependientes de un parámetro (funciones definidas por integrales). Contiene también una excelente colección de ejercicios resueltos de gran interés didáctico.

[Di] **DIXMIER, J.** *Matemáticas Generales*.

Las integrales impropias se tratan en el capítulo 38 del segundo volumen de esta obra, bajo el título “Generalización de la integral”. El enfoque es parecido al que hemos utilizado en nuestro desarrollo del tema y el contenido está desarrollado con una amplitud suficiente. El autor utiliza una terminología ligeramente distinta a la nuestra, pues habla de “existencia” y de “convergencia” de una integral impropia con significado diferente al que hemos empleado aquí. Cabe destacar la excelente colección de ejercicios propuestos, muchos de ellos de nivel bastante elevado.

[Kr] **KRASNOV, M. y otros.** *Curso de Matemáticas Superiores para Ingenieros*.

En el primer volumen de esta obra, las integrales impropias se estudian en el capítulo X. El desarrollo es muy completo, riguroso y actualizado, destacando la extensión y el detalle con que se tratan los diversos criterios de convergencia de interés práctico, que se complementan con gran cantidad de ejemplos resueltos y ejercicios propuestos muy bien seleccionados. Las funciones eulerianas Γ y B se tratan en el segundo volumen.

[Or] **ORTEGA, J.M.** *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica*.

Las integrales impropias se estudian en el capítulo VIII de esta obra, bajo el título *Ampliacions del concepte d'integral*. El contenido es distinto al de nuestro capítulo 11, pues incluye junto a las integrales impropias las integrales dependientes de un parámetro. Se recomienda este texto de manera especial, pues para el estudio de las integrales impropias es una de las referencias más completas en lo referente a la exposición de los conceptos y al desarrollo de las propiedades correspondientes. El nivel es muy similar al que hemos desarrollado aquí y destacan los numerosos ejemplos que ilustran las exposiciones. Queremos destacar también la interesante colección de ejercicios, si bien no es muy extensa.

[Spi] **SPIEGEL, M.R.** *Cálculo Superior*.

Recomendamos esta obra básicamente para hacer ejercicios. Las integrales impropias se tratan en el capítulo 12 y las funciones eulerianas en el capítulo 13. Dentro del estilo de la colección a la que pertenece este texto, los conceptos y propiedades están presentados de forma muy esquemática y sin demostraciones, las cuales se encuentran propuestas y desarrolladas en forma de ejercicios; esta organización motiva que inicialmente no sea fácil encontrar la información. Sin embargo, compensa en cierto modo la colección de ejercicios resueltos y de ejercicios propuestos, muy completa y bien estructurada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS GENERALES

La relación que sigue está formada por los textos que, en opinión del autor, tienen los contenidos más adecuados para complementar, o bien, ampliar los diferentes temas que hemos ido desarrollando a lo largo de esta obra. A nuestro juicio, es imprescindible que el estudiante consulte los textos reseñados para disponer de una perspectiva mucho más completa de los contenidos que han sido abordados en las páginas precedentes. Esta relación bibliográfica globaliza, pues, el conjunto de referencias que se han ido comentando al final de cada capítulo.

- [Ap] APOSTOL, T.M.
Análisis Matemático (segunda edición).
Reverté, 1986.
- [Ba] BARTLE, R.G. y D.R. SHERBERT.
Introducción al Análisis Matemático de una variable.
Limusa, 1984.
- [Ca] CALM, R., N. COLL y M.R. ESTELA.
Problemes de Càlcul.
Micromar, 1992.
- [DeB] DE BURGOS, J.
Cálculo Infinitesimal (teoría y problemas).
Alhambra Universidad, 1984.
- [Dem] DEMIDOVICH, B.P.
Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.
Paraninfo, 1976.
- [Di] DIXMIER, J.
Matemáticas generales (2 volúmenes).
Aguilar, 1977.

- [Fe] FERRER, J. y F. PUERTA.
Càlcul Diferencial.
CPDA, 1990.
- [Gu] GUZMAN, M. de y B. RUBIO.
Anàlisi matemàtic (1. Números reales, sucesiones y series).
Piràmide, 1990.
- [Lan] LANG, S.
Càlculo.
Addisson Wesley Iberoamericana, 1990.
- [Lar] LARSON, R.E. y R.P. HOSTETLER.
Càlculo y Geometría Analítica (2a edición).
McGraw-Hill, 1988.
- [Li] LINÉS, E.
Principios de Anàlisi Matemàtic.
Reverté, 1988.
- [Or] ORTEGA, J.M.
Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.
Manuàls de la Univ. Autònoma de Barcelona, 1990.
- [Ru] RUDIN, W.
Principios de Anàlisi Matemàtic (tercera edición).
McGraw-Hill, 1980.
- [Spg] SPIEGEL, M.R.
Càlculo Superior.
McGraw-Hill, 1970.
- [Spv] SPIVAK, M.
Calculus (Càlculo infinitesimal).
Reverté, 1981.
- [St] STEIN, S.K.
Càlculo y Geometría Analítica.
McGraw-Hill, 1984.

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

Abel (fórmula de sumación) 3.5.16
Aditividad de la integral 9.2.6
Álgebra de límites de funciones 4.2.13
Aproximación local de una función 8.4.4
Área de un subconjunto 10.5.1
- de una superficie de revolución 10.5.13
Argumento de un complejo 1.6.18
Arquimedeanidad de \mathbb{R} 1.3.4
Asociación de series 3.2.10

B

Bolas en \mathbb{C} 1.6.15
- en \mathbb{R} 1.5.9

C

Cambio de base (func. logarítmicas) 6.3.5
Campo de continuidad de una función 5.1.5
- de derivabilidad de una función 7.1.4
Caracterización de la integrabilidad 9.1.10
Comparación por paso al límite 3.2.5
Complejo, número 1.6.2
Completitud por sucesiones 2.6.7
Composición de funciones 4.1.7
Condición necesaria
- de convergencia (int. impropias) 11.1.8
- de convergencia (series numéricas) 3.2.2
- de extremo relativo 8.1.5
Conjugado de un complejo 1.6.10
Conjunto acotado 1.2.8
- derivado 1.5.16

Continuidad lateral de una función 5.1.8
Convergencia absoluta
- de int. impropias de primera especie 11.1.16
- de int. impropias de segunda especie 11.2.7
- de series 3.5.2
- condicional (de series) 3.5.4
- puntual de una sucesión funcional 4.5.4
- uniforme de una sucesión funcional 4.5.6
Cota inferior 1.2.8
- superior 1.2.8
Criterio de Cauchy (int. impropias) 11.1.7
- de Cauchy (sucesiones funcionales) 4.5.9
- de Cauchy (series funcionales) 4.5.16
- de Cauchy-Hadamard 4.6.9
- de comparación
- - int. impropias de primera especie 11.1.9
- - int. impropias de segunda especie 11.2.4
- de compresión (funciones) 4.2.18
- de compresión (sucesiones) 2.3.16
- de Dirichlet (series) 3.5.18
- de la media aritmética 2.7.8
- de la media geométrica 2.7.9
- de la raíz (series) 3.3.9
- de la raíz n -ésima 2.7.10
- de Leibniz (series alternadas) 3.4.3
- de Pringsheim 3.3.7
- de Raabe 3.3.13
- de Stolz 2.7.11, 2.7.12
- de Weierstrass 4.5.17
- del cociente
- - int. impropias de primera especie 11.1.11
- - int. impropias de segunda especie 11.2.5
- - series numéricas 3.3.11
- general de comparación 3.2.5

Criterios de continuidad 5.2.7
 - de derivabilidad 7.2.1

D

Densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} 1.3.6
 Derivación bajo el signo integral 10.3.5
 - de funciones exponenciales 7.3.1
 - de funciones hiperbólicas 7.3.3
 - de funciones logarítmicas 7.3.1
 - de funciones potenciales 7.3.1
 - de funciones trigonométricas 7.3.2
 Derivada de una función en un punto 7.1.1
 - infinita 7.1.8
 - de una serie de potencias 8.5.4
 Derivadas laterales de una función 7.1.7
 - parciales 7.1.15
 - sucesivas (o de orden superior) 7.1.9
 - - de las funciones elementales 7.3.4
 Determinación de extremos relativos 8.1.6
 Diámetro de un conjunto Ejr 1-39
 Diferencial de una función 7.4.3
 Diferenciabilidad de la función inversa 7.4.9
 - de una función compleja 7.4.10
 - de una función real de dos variables 7.4.12
 Dirichlet, integral de 11.1.18
 Discontinuidades de una función 5.1.11
 Distancia euclídea en \mathbb{C} 1.6.14
 - euclídea en \mathbb{R} 1.5.6
 Dominio de una función 4.1.1

E

Entero, número 1.1.5
 Entornos en \mathbb{R} 1.5.11
 - simétricos en \mathbb{C} 1.6.15
 - simétricos en \mathbb{R} 1.5.9
 Equivalencia de infinitésimos 2.8.13
 - de infinitos 2.8.11
 Espacio métrico 1.5.8
 - - separado Ejr 1-38
 Exponencial de un complejo 1.6.16
 Extremos absolutos 4.1.13, 8.1.1
 - relativos (definición) 4.1.13, 8.1.2
 - relativos (determinación) 8.1.6

F

Fibonacci, sucesión de 2.1.6
 Fórmula de integración por partes 10.1.10
 - de Maclaurin 8.4.10
 - de Taylor
 - - para funciones polinómicas 8.4.2
 - - para funciones de clase \mathcal{C}^n 8.4.9
 - - (aplicaciones de la) 8.4.13, 8.4.14, 8.4.15
 - del incremento finito 8.2.3
 Función (definición) 4.1.1
 - acotada 4.1.13
 - arco-coseno 6.6.12
 - arco-cotangente 6.6.16
 - arco-seno 6.6.12
 - arco-tangente 6.6.14
 - argumento coseno hiperbólico 6.7.5
 - argumento cotangente hiperbólica 6.7.8
 - argumento seno hiperbólico 6.7.5
 - argumento tangente hiperbólica 6.7.8
 - “beta” de Euler 11.5.7
 - característica de un conjunto 4.1.4
 - cóncava 4.1.13, 8.7.4
 - constante 4.1.4
 - continua en un punto 5.1.2
 - - en un conjunto 5.1.5
 - - en un intervalo cerrado de \mathbb{R} 5.3.2
 - - por la derecha 5.1.8
 - - por la izquierda 5.1.8
 - convexa 4.1.13, 8.7.4
 - coordenada de \mathbb{R} 4.1.4
 - cosecante 6.6.11
 - coseno 6.6.1
 - coseno hiperbólico 6.7.1
 - cotangente 6.6.11
 - cotangente hiperbólica 6.7.4
 - de Dirichlet 9.1.9
 - definida por series de potencias 4.6.12
 - derivable en un punto 7.1.1
 - derivada 7.1.5
 - desarrollable en serie de potencias 8.6.1
 - discontinua en un punto 5.1.3
 - exponencial compleja 6.5.1
 - exponencial generalizada 6.3.1
 - exponencial real 6.1.2
 - “gamma” de Euler 11.5.1
 - integral 10.1.1
 - límite de una sucesión funcional 4.5.4

- logarítmica generalizada 6.3.4
 - logaritmo neperiano 6.2.1
 - parte entera 4.1.4
 - periódica 4.1.13
 - potencial generalizada 6.4.1
 - secante 6.6.11
 - seno 6.6.1
 - seno hiperbólico 6.7.1
 - signo 4.1.4
 - salto unitario 4.1.4
 - tangente 6.6.9
 - tangente hiperbólica 6.7.3
 - uniformemente continua 5.4.2
 - valor absoluto 4.2.15
- Funciones analíticas 8.6.10
- contractivas 5.4.8
 - definidas por integrales 10.3.1
 - diferenciables 7.4.1
 - equivalentes en un punto 4.4.2
 - equivalentes en el infinito 4.4.11
 - implícitas (definición) 7.5.2
 - implícitas (derivación) 7.5.4
 - integrables (Riemann) 9.1.8
 - monótonas 4.1.10
 - polinómicas 4.1.6
 - potenciales 4.1.12
 - racionales 4.1.6
 - raíces n -ésimas 4.1.12

I

- Indeterminaciones (funciones) 4.3.11
 - (sucesiones) 2.7.3
 - Inducción (principio de) 1.1.2
 - Infimo 1.2.8
 - Infinitésimos (funciones) 4.4.14
 - (sucesiones) 2.8.13
 - equivalentes 4.4.14
 - Infinitos (sucesiones infinitas) 2.8.11
 - (funciones) 4.4.16
 - equivalentes 4.4.16
- Integrabilidad
- de la función compuesta 9.2.10
 - de la función coordenada de \mathbb{R} 9.1.14
 - de la función recíproca 9.2.13
 - de la función valor absoluto 9.2.9
 - de la potencia entera 9.2.11

- de la suma de una serie de funciones 9.4.2
 - de la suma de una serie de potencias 9.4.3
 - de las funciones complejas 9.1.18
 - de las funciones continuas 9.1.16
 - de las funciones elementales 9.1.17
 - de las funciones monótonas 9.1.15
 - del límite de una sucesión funcional 9.4.1
 - del producto de dos funciones 9.2.12
 - en un subintervalo 9.2.5
- Integral de una función (Riemann) 9.1.8
- Integral impropia
- - de primera especie 11.1.1
 - - de segunda especie 11.2.1
 - - de tercera especie 11.3.1
 - - uniformemente convergente 11.4.1
 - indefinida 10.1.4
 - inferior de una función 9.1.6
 - superior de una función 9.1.6
- Intervalos en \mathbb{R} 1.5.10
- encajados 1.5.13
- Inversa de una función 4.1.9
- Irracionalidad de e 3.3.20

L

- Laplace, transformada de Ejr 11-20
- Leibniz, regla de 10.3.6
- Lemniscata de Bernoulli 10.5.7
- Límite de una función en un punto 4.2.2
- de una sucesión 2.2.1
- Límites de oscilación 2.5.8
- infinitos (de una función) 4.3.2
- laterales 4.2.21
- Linealidad de la integral 9.2.1
- Longitud de un arco de curva plana 10.5.11

M

- Método de la bipartición 5.3.4
- de los rectángulos 10.4.7
- de los trapecios 10.4.3
- de Simpson 10.4.10
- Método de primitivación
- por cambio de variable 10.2.6
- por partes 10.2.1
- Métrica 1.5.8
- Módulo de un complejo 1.6.12

N

Natural (número) 1.1.2
 Negativos (números) 1.2.7
 Newton, método de 8.7.18
 Números reales, axioma 1 1.2.5
 Números reales, axioma 2 1.2.6
 Números reales, axioma 3 1.2.11

O

Operaciones con sucesiones 2.1.7
 - con series 3.2.7
 - con funciones 4.1.5
 Orden de un infinitésimo 4.4.15

P

Parte principal de un infinitésimo 4.4.15
 Partición de un intervalo cerrado 9.1.1
 - más fina 9.1.1
 Polinomio de Taylor 8.4.5
 Positivos (números) 1.2.7
 Potencia de un complejo 1.6.21
 Primitiva de una función 10.1.4
 Primitivación
 - de funciones irracionales 10.2.18
 - de funciones racionales 10.2.10
 - de funciones trigonométricas 10.2.12
 Punto crítico de una función derivable 8.1.4
 Punto de acumulación 1.5.16
 - de inflexión 8.7.5

R

Racional, número 1.1.7
 Radio de convergencia (series enteras) 4.6.4
 Raíces de un complejo 1.6.22
 Real, número 1.2.1
 Recta real ampliada 1.5.23
 Regla de Barrow 10.1.7
 - de la cadena (derivación) 7.2.5
 - de la cadena (diferenciación) 7.4.8
 - de la cadena (generalizada) 7.4.14
 Reordenación de series numéricas 3.5.8
 Representación decimal 1.4.1
 Resto

- de una serie 3.1.3
 - de Taylor de una función derivable 8.4.7

S

Serie alternada 3.4.2
 - armónica 3.1.8
 - convergente 3.1.3
 - de funciones 4.5.13
 - de Maclaurin de una función 8.6.3
 - de potencias real 4.6.2
 - de potencias compleja 4.6.13
 - de términos positivos 3.3.2
 - de Riemann 3.3.3
 - divergente 3.1.3
 - geométrica 3.1.5
 - numérica 3.1.3
 - telescópica Ejr 3-4
 Series complejas 3.6.1
 Signo de la integral 9.2.3
 Subsucesión 2.5.2
 Sucesión acotada 2.3.2
 - constante 2.1.3
 - contractiva 2.6.13
 - convergente 2.2.1
 - de Cauchy o regular 2.6.2
 - de funciones 4.5.2
 - de límite infinito 2.6.2
 - divergente 2.2.1
 - monótona 2.4.1
 - numérica 2.1.1
 - parcial 2.5.2
 - recurrente 2.1.6
 Sucesiones equivalentes 2.8.2
 - infinitas (infinitos) 2.8.2
 Suma de una serie 3.1.3
 Sumas de Riemann 9.3.1
 - inferiores 9.1.2
 - superiores 9.1.2
 Supremo 1.2.8

T

Taylor, fórmula de 8.4.9
 Teorema de Bolzano (func. continuas) 5.3.3
 - de Bolzano-Weierstrass (conjuntos) 1.5.22
 - de Bolzano-Weierstrass (sucesiones) 2.5.6

- de Cauchy (valor medio generalizado) 8.2.12
- de Heine-Cantor 5.4.5
- de la convergencia monótona 2.4.5
- de la función implícita 7.5.4
- de los intervalos encajados 1.5.14
- de los valores intermedios
 - - de una función continua 5.3.6
 - - de la derivada 8.2.14
- de Mertens 3.5.14
- de Riemann (reordenaciones) 3.5.12
- de Rolle 8.2.1
- de Taylor 8.4.8
- del cambio de variable (integración) 10.1.5
- del máximo y del mínimo 5.3.10
- del valor medio de Lagrange 8.2.3
- del valor medio integral 9.2.14
- Término complementario (de Taylor) 8.4.7
 - - forma de Cauchy 8.4.10
 - - forma de Lagrange 8.4.10

U

- Unicidad del supremo e ínfimo 1.2.10
- Unicidad del límite
 - - de una función en un punto 4.2.4
 - - de una sucesión numérica 2.2.6

V

- Valor absoluto 1.5.2
 - eficaz de una función periódica 9.2.17
 - principal de Cauchy 11.1.5, 11.2.1
- Volumen
 - de un cuerpo tridimensional 10.5.15
 - de un sólido de revolución 10.5.8

W

- Weierstrass, criterio de 4.5.17, 11.4.5