



**POLITEXT**

**Àrea de Matemàtica i Estadística**

# Geometría

*Sebastià Xambó Descamps*

Esencialmente, la teoría expuesta en este texto coincide con la de la asignatura troncal de Geometría, que el autor ha impartido durante los tres últimos años en la Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME). A la hora de seleccionar el contenido y la forma de tratarlo, se han tenido en cuenta varios factores: el carácter cuatrimestral de la asignatura; el hecho de que se imparta en el primer curso, inmediatamente después de cursar un cuatrimestre de álgebra lineal; sus contenidos troncales; la preparación geométrica que puede esperarse de los alumnos de primer curso y, como idea directriz, el papel que ha jugado la geometría desde Euclides, como disciplina técnica y como herramienta para modelar la realidad.

Atendiendo a dichos factores, se ha optado por incluir un capítulo de geometría clásica encaminado básicamente a reforzar la capacidad de resolver problemas de geometría elemental. Este capítulo no es necesario, desde el punto de vista lógico, para seguir la lectura del libro, pero consideramos que tiene un valor pedagógico de puente entre la enseñanza secundaria y la universitaria. Los demás capítulos están dedicados, por este orden, a la geometría afin, a la geometría euclidiana, a la geometría proyectiva y al estudio de las cónicas y las cuádricas. Como herramienta de trabajo, utilizamos decididamente el álgebra lineal, pero solo en la proporción que nos permite llegar a los resultados sin tener que hacer contorsiones innecesarias -ni por exceso ni por defecto. Cada capítulo contiene numerosos ejercicios que se intercalan en la exposición en el momento que hemos considerado más adecuado, desde el punto de vista formativo, así como una lista de problemas, dispuestos al final, que pueden servir al lector para ampliar o profundizar en algunos puntos del temario, pero que no forman parte del curso propiamente dicho.





# Geometría

Politext 66



# Geometría

Sebastià Xambó Descamps

Primera edición: septiembre de 1997

La presente obra fue galardonada en el cuarto concurso  
"Ajut a l'elaboració de material docent" convocado por la UPC.

Con la colaboración del Servei de Publicacions de la UPC

Diseño de la cubierta: Antoni Gutiérrez

© Sebastià Xambó, 1997

© Edicions UPC, 1997

Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL  
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona  
Tel. 401 68 83 Fax 401 58 85

Producción: CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)  
La Cup. Gran Capità s/n, 08034 Barcelona

Depósito legal: B-32.977-97  
ISBN: 84-8301-226-X

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, así como la exportación e importación de ejemplares para su distribución y venta fuera del ámbito de la Unión Europea.

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>0 Geometría clásica</b>	<b>1</b>
0.1 Triángulos y circunferencias . . . . .	2
0.2 Semejanzas . . . . .	12
0.3 Problemas . . . . .	27
0.4 Indicaciones . . . . .	36
0.5 Raquel y Pablo resuelven problemas . . . . .	41
0.6 Muestra de soluciones . . . . .	53
<b>1 Geometría afín</b>	<b>57</b>
1.1 Espacio afín . . . . .	58
1.2 Variedades lineales . . . . .	65
1.3 Referencia afín . . . . .	71
1.4 Aplicaciones afines . . . . .	80
1.5 Problemas . . . . .	94
<b>2 Geometría métrica</b>	<b>99</b>
2.1 Espacio euclidiano . . . . .	101
2.2 Perpendicularidad . . . . .	110
2.3 Volúmenes . . . . .	120
2.4 Producto vectorial . . . . .	129
2.5 Semejanzas y desplazamientos . . . . .	139
2.6 Problemas . . . . .	157
<b>3 Geometría proyectiva</b>	<b>165</b>
3.0 De la perspectiva al espacio proyectivo . . . . .	166
3.1 Espacio proyectivo . . . . .	173
3.2 Configuraciones de puntos. Referencias proyectivas . . . . .	183
3.3 Proyectividades . . . . .	194

---

3.4	Razón doble . . . . .	206
3.5	Dualidad . . . . .	216
3.6	Problemas . . . . .	226
<b>4</b>	<b>Cónicas y cuádricas</b>	<b>233</b>
4.0	Secciones cónicas . . . . .	234
4.1	Cónicas del plano euclidiano . . . . .	247
4.2	Invariantes euclidianos de las cónicas . . . . .	261
4.3	Cuádricas . . . . .	270
4.4	Invariantes de las cuádricas . . . . .	286
4.5	Aspectos proyectivos de las cuádricas . . . . .	294
4.6	Problemas . . . . .	298
	<b>Bibliografía</b>	<b>301</b>
	<b>Índice alfabético</b>	<b>303</b>

## Introducción

En esencia, la teoría expuesta en este texto coincide con la de la asignatura troncal de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya denominada Geometría, la cual ha sido impartida por el autor durante los últimos cuatro cursos.

Para la determinación de los contenidos y su presentación hemos considerado distintos factores. Digamos ya que una idea directriz, en el trasfondo, ha sido la voluntad de tener presente la larga e ilustre historia de la geometría, que desde Euclides ha sido un modelo de conocimiento que han seguido, refinado y ampliado los espíritus más clarividentes, tanto en trabajos de fundamentación matemática como en los de modelización de la realidad.

De una parte, se da la circunstancia favorable de que los estudiantes ya conocen, al empezar el curso, las nociones básicas de álgebra lineal que son imprescindibles para una exposición eficaz de la materia.

Pero, por otra parte, en un primer curso de geometría pueden converger otras circunstancias menos favorables. Hay una que parece bastante general: los conocimientos con los que se llega hoy a la universidad suelen ser deficitarios en aspectos básicos del lenguaje geométrico, con la subsiguiente disminución del abanico de recursos para la resolución de problemas. También se puede dar el caso de que el curso cuatrimestral del cual hablamos sea el único obligatorio para tratar, al lado de la geometría afín y euclidiana, las ideas básicas de geometría proyectiva y algunas nociones fundamentales sobre cónicas y cuádricas.

Con estas condiciones de contorno, solo se puede aspirar a tratar los conceptos más básicos, y sus interrelaciones más fundamentales, y a incluir una muestra de los problemas que permiten resolver. Este núcleo de conocimientos, sin duda importante, aunque más reducido de lo que quizá sería deseable, es el que recogemos en el texto y que tiene que permitir que aspectos más específicos de la formación geométrica se puedan considerar ulteriormente, si llegara el caso, según el contexto de docencia, de investigación o de trabajo en que se encuentre cada uno. De este modo, puede suceder que en un curso sobre compactación de imágenes deban considerarse previamente algunas cuestiones de geometría afín; que en un curso sobre geometría computacional

deban mencionarse algunos complementos de geometría métrica; o que en cursos sobre métodos de factorización en criptografía, o sobre codificación, deban tratarse primero algunos puntos de geometría proyectiva necesarios para poder discutir estos términos con una preparación apropiada.

Para responder a los retos que hemos citado, y en contraste con el método sintético (o axiomático) de la geometría clásica (véase, por ejemplo, la *Geometría métrica* de Puig-Adam), tenemos a favor que se puede hacer una exposición sistemática y eficiente de la geometría basándose en el álgebra (método algebraico o analítico). Es el camino que seguimos en este texto, no solamente por razones de economía conceptual, sino porque la teoría es más general, como tiene que ser para que pueda ser utilizada en cursos paralelos o posteriores, y considerablemente más potente en las aplicaciones. Surge la paradoja, además, de que con el método algebraico se puede profundizar considerablemente en la naturaleza de la geometría, siguiendo las directrices dadas por F. Klein hace más de un siglo en su Programa de Erlangen, según las cuales la esencia de una geometría es su *grupo de transformaciones*. De hecho, es el seguimiento de esta idea la que explica la manera como se ha agrupado la materia de los capítulos 1-3 (Geometría afín, Geometría métrica y Geometría proyectiva, respectivamente) y también la manera de estudiar las figuras de segundo grado en el capítulo 4 (Cónicas y cuádricas).

El método algebraico permite reconstruir, como un caso muy particular, la geometría clásica (en el sentido que le hemos asignado antes) y, por tanto, ésta no es estrictamente necesaria, desde un punto de vista puramente lógico, para seguir el curso. Pero la conclusión es muy diferente si planteamos la cuestión desde un punto de vista pedagógico, ya que, para que el método algebraico de exponer la geometría pueda arraigar con fuerza y dar sus frutos, es imprescindible conocer los conceptos y hechos geométricos más básicos y saber utilizarlos para la resolución de problemas. Es por este motivo que hemos incluido un capítulo 0 sobre geometría clásica que puede utilizarse tanto para repasar (o estudiar) los citados conceptos y hechos como para familiarizarse con el tipo de problemas que permiten resolver. No es, lógicamente, un capítulo autocontenido, ya que suponemos un conocimiento intuitivo de las nociones y los enunciados más elementales sobre puntos, rectas, ángulos, circunferencias, etc. Pero, tal como hemos dicho anteriormente, la teoría de los capítulos 1 y 2 nos permite dar una fundamentación matemática adecuada de estos conocimientos. Así lo haremos en este texto y, a la vez, daremos referencias precisas, en los puntos oportunos, con el fin de guiar al lector sobre estas interrelaciones.

\* \* \*

Los ejercicios intercalados en el texto se distinguen con el símbolo **E**, seguido del número del ejercicio dentro del capítulo, y, dado que forman parte del contenido del curso, se recomienda al lector que los resuelva en el momento que crea que ya ha entendido la materia precedente. El signo [ $\diamond$ ] al final de una afirmación significa que se

considera que su demostración es fácil o rutinaria, pero quizá no totalmente inmediata y, por tanto, se recomienda que el lector la compruebe efectivamente antes de proseguir la lectura. El símbolo  $\square$  indica el final de una demostración o de un enunciado cuya demostración es clara por el contexto.

Al final de cada capítulo hay un listado de problemas. Estos problemas no son estrictamente necesarios para entender la teoría, pero son importantes para profundizar en la comprensión de los temas tratados y en su significación, razón por la cual se recomienda que el lector los intente resolver tan completamente como le sea posible. Para ulteriores referencias, estos problemas se distinguen con el símbolo **P**, seguido del número del problema dentro del capítulo.

Los enunciados (proposiciones, teoremas, notas, etc.) están numerados correlativamente dentro de cada capítulo. Por ejemplo, una referencia a la «proposición 2.5» nos remite al quinto enunciado del capítulo 2, el cual lo reconoceremos por la cabecera **2.5 Proposición**. Las fórmulas numeradas también se numeran correlativamente dentro de cada capítulo, independientemente de la numeración de los enunciados y con números dispuestos a la derecha de la página. Para evitar confusiones con la otra numeración, los números de las fórmulas se ponen entre corchetes. De este modo, la «fórmula [2.5]» hace referencia a la quinta fórmula numerada del capítulo 2, la cual es precisamente la señalada por los símbolos [2.5] escritos al final de su línea. Debido a que los *apartados* (títulos dentro de una sección, destacados con letra cursiva negrita grande), los *subapartados* (títulos dentro de un apartado, destacados con letra negrita normal) y los *epígrafes* (títulos dentro de un subapartado, destacados con letra cursiva negrita pequeña y acabados con un punto y seguido) no llevan numeración, nos referimos a ellos dando el título completo y la página en la cual se encuentran.

## Nota bibliográfica

Citamos algunas referencias que pueden ser útiles al lector para profundizar en el estudio de la geometría.

- Geometría clásica: [1, 2, 3, 4].
- Referencias generales: [5]; también [6], si exceptuamos la geometría clásica.
- Álgebra lineal, geometría afín y geometría euclidiana: [7].
- Geometría proyectiva: [8, 9, 10, 11]; véase también [13]. Estos textos también contienen materiales relativos a cónicas y cuádricas.
- Grupos y geometría: [12]; véase también [14, 28].
- Textos clásicos: [13, 14].
- Fundamentos de la geometría: [15, 16, 17].

- Textos complementarios: [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24].
- Historia: [25, 26, 27, 28].
- Referencias auxiliares: [29] (para cuestiones de  $\text{\LaTeX}$ ) y [30] (para los gráficos). (Las figuras se han dibujado con  $\text{MATHEMATICA 2.2}$ , utilizando el paquete de funciones  $\text{GX.M}$ , desarrollado por Josep Grané y el autor.)

## Agradecimientos

Este libro es la versión castellana, con algunos retoques, de la original en catalán que apareció en febrero de 1997, y quiero expresar primero mi agradecimiento a Anna Xambó i Sedó por su cuidadosa ayuda en la labor de traducción.

El texto ha sido compuesto con  $\text{\LaTeX 2}_{\epsilon}$ . El uso de este sistema me ha sido facilitado por José Luis Ruiz y Gabriel Valiente. La disposición de las figuras en el texto se ha hecho bajo el control de  $\text{DIB.STY}$ , un paquete de macros de  $\text{TeX}$  desarrollado por Joan Trias y J. L. Ruiz. La preparación de los gráficos de  $\text{MATHEMATICA}$  para poder ser utilizados convenientemente por  $\text{DIB.STY}$  se ha realizado con los programas  $\text{SCPS.EXE}$  y  $\text{HPGS13C.EXE}$ , desarrollados por J. Grané, y  $\text{Ghostscript}$ , intérprete de Postscript de Aladdin Enterprises.

También quiero agradecer los comentarios que J. Grané, F. Hurtado y F. Prats me hicieron después de leer varias partes del texto y que me han permitido mejorarlo y corregir un buen número de errores. De los defectos, insuficiencias o errores que puedan subsistir, el único responsable es el autor.

Es para mí un agradable deber hacer constar aquí que esta obra ha sido posible, en parte, porque la Universitat Politècnica de Catalunya distinguió su proyecto con una de las ayudas para la elaboración de material docente de la convocatoria del curso 1994-1995. Sin este impulso, me habría resultado mucho más difícil, por no decir casi imposible, reunir fuerzas para transformar los apuntes de la asignatura de Geometría del primer curso de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya en un libro.

Asimismo es para mí una satisfacción agradecer muy especialmente a mi esposa, Elionor Sedó i Torres, la atmósfera serena y estable que sabe suscitar alrededor de nuestras vidas, sin la cual difícilmente habría podido persistir en la empresa de escribir esta obra.

Sebastià Xambó i Descamps  
email: [sxd@grec.upc.es](mailto:sxd@grec.upc.es)

L'Escala  
Agosto de 1997

## 0 Geometría clásica

Razones meramente pedagógicas inducen a creer que el estudio riguroso y general de la geometría será más provechoso a quienes tengan un cierto conocimiento de los conceptos y hechos básicos de la geometría euclidiana clásica y una cierta iniciación en el uso de estas herramientas para la resolución de problemas.

En consonancia con estas ideas, este capítulo contiene un prontuario de conceptos básicos de geometría elemental (secciones 0.1 y 0.2) y una colección de problemas (sección 0.3).

Se recomienda al lector que esté más interesado en la resolución de problemas de geometría clásica que empiece a trabajar directamente la lista de problemas, y que recurra a la materia del capítulo (o a alguno de los textos indicados en la bibliografía) cuando lo considere necesario.

En cambio, al lector más motivado por completar sus conocimientos geométricos básicos (una necesidad que puede ser más general de lo que el nivel de nuestra exposición podría hacer pensar, sobre todo si se tiene en cuenta el tratamiento de la geometría en la enseñanza primaria y secundaria), tenemos que recomendarle que estudie primero las secciones 0.1 y 0.2, hasta que sea capaz de llenar todos los detalles de las demostraciones que se omiten, o de las demostraciones de las que solo se dan las pinceladas principales, y de resolver satisfactoriamente los ejercicios que se intercalan.

En contraste con los capítulos posteriores, en los que los sistemas geométricos más importantes se erigen sistemáticamente a partir de axiomas convenientes, en éste la exposición presupone un conocimiento intuitivo de las nociones y los enunciados más primitivos de la geometría euclidiana plana, como por ejemplo los relativos a puntos, rectas, ángulos o circunferencias. Se evitan así prolijas disquisiciones, relativas a la construcción y al análisis metódico de estos conceptos y enunciados, que poco aportarían a los objetivos del capítulo y que, en todo caso, se pueden formular mediante las técnicas desarrolladas en el capítulo 2.

## 0.1 Triángulos y circunferencias

El hecho de que muchas figuras se puedan estudiar relacionándolas con triángulos, como por ejemplo cuando admiten una triangulación, hace que el triángulo deba considerarse una figura fundamental, y es por esta razón que se le dedica un amplio espacio en los textos de geometría clásica. Por otro lado, el estudio del triángulo ha sido inseparable del estudio de la circunferencia, básicamente por el hecho de que todo triángulo determina una única circunferencia en la cual está inscrito (*circunferencia circunscrita*). El objeto de esta sección es, pues, hacer una revisión de algunas de las propiedades básicas del triángulo y de algunas de las relaciones más notables entre triángulos y circunferencias.

### *Propiedades básicas del triángulo*

Si  $ABC$  es un triángulo, indicaremos mediante  $a, b, c$  los lados opuestos a  $A, B, C$ , respectivamente.

Los ángulos correspondientes a los vértices se denotarán  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ , o  $\alpha, \beta, \gamma$ ; son los ángulos opuestos a los lados  $a, b, c$ , respectivamente. La altura correspondiente al vértice  $A$  se expresará mediante  $h_A$  o  $h_a$  (y, análogamente,  $h_B$  o  $h_b$  para el vértice  $B$ , y  $h_C$  o  $h_c$  para el vértice  $C$ ). Con las notaciones  $AB$  y  $[AB]$  indicamos, respectivamente, la recta que une los puntos  $A$  y  $B$  y el segmento (cerrado) de extremos  $A$  y  $B$ . El correspondiente segmento abierto será denotado  $(AB)$ . La longitud del segmento  $[AB]$  será expresada mediante  $AB$  si por el contexto no hay peligro de que se pueda confundir con la recta que une  $A$  y  $B$ ; en caso contrario, la indicaremos con  $|AB|$  o  $\overline{AB}$ .

### Igualdad de triángulos

Un *desplazamiento* es una transformación de los puntos del plano que conserva las distancias (v. subapartado «Desplazamientos», pág. 13). Dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  se denominan *iguales*, o *congruentes*, cuando hay un desplazamiento  $\varphi$  tal que  $\varphi(A) = A'$ ,  $\varphi(B) = B'$  y  $\varphi(C) = C'$ . Para los tres *criterios de igualdad*, o *congruencia*, que siguen, v. figura 0.1.

**Criterio LAL.** Dos triángulos son iguales si tienen dos lados y el ángulo que forman iguales, respectivamente. En particular, dos triángulos rectángulos son iguales cuando los correspondientes catetos son iguales.

**Criterio ALA.** Dos triángulos son iguales si tienen un lado y sus dos ángulos contiguos iguales, respectivamente. En particular, dos triángulos rectángulos son iguales si tienen iguales un cateto y el correspondiente ángulo agudo.

**Criterio LLL.** Dos triángulos son iguales si tienen los tres lados iguales, respectivamente.

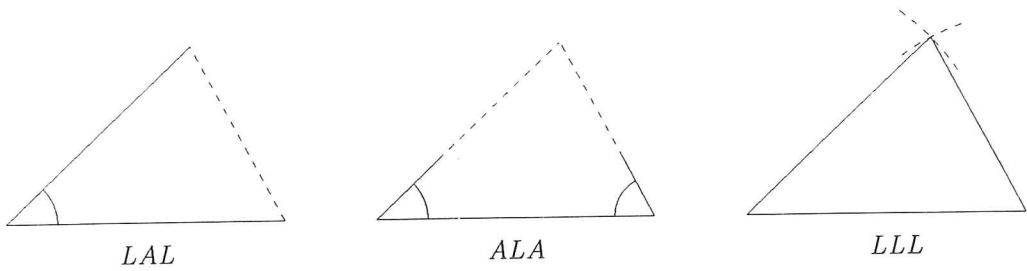


Figura 0.1: Criterios de igualdad de triángulos

### Suma de los ángulos de un triángulo

La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es  $\pi$  (figura 0.2).

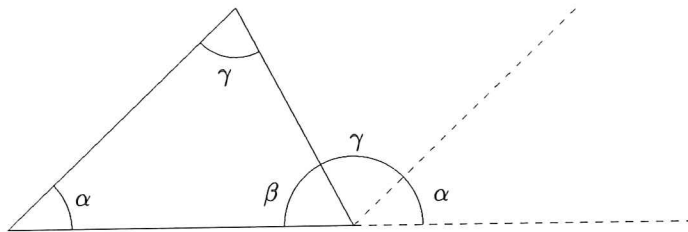


Figura 0.2: Suma de los ángulos de un triángulo

**E.0.1.** Probar que la altura sobre el mayor de los lados de un triángulo es interior al triángulo e inferior a las otras dos alturas.

**E.0.2.** Sea  $P$  el punto en el interior de un cuadrado  $ABCD$  tal que  $\widehat{PCD} = \widehat{PDC} = 15^\circ$ . Demostrar que el triángulo  $ABP$  es equilátero. (Indicación: formar un triángulo  $BCP'$  congruente con  $CDP$  y con  $P'$  interior al cuadrado.)

### Desigualdad triangular

En un triángulo, cada lado es inferior a la suma de los otros dos.

**E.0.3.** Dado un punto  $P$  en el interior de un triángulo  $ABC$ , demostrar que  $AP + BP < AC + BC$ .

### Área de un triángulo

Se obtiene como la mitad del producto de un lado (base) por la altura correspondiente (por ejemplo,  $\text{área} = \frac{1}{2}ah_A$ , donde  $h_A$  denota la altura correspondiente al vértice  $A$ ). También es igual a la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo que

forman (por ejemplo,  $h_A = b \operatorname{sen}(\gamma)$ ) y, por tanto,  $\text{área} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}(\gamma)$ ). Observamos que si movemos un vértice sobre la paralela en la base opuesta, los triángulos resultantes tienen todos la misma área.

**E.0.4.** Dado un cuadrilátero convexo  $ABCD$ , demostrar que su área es igual a  $\frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$ , donde  $\alpha$  es uno cualquiera de los dos ángulos que forman las diagonales  $AC$  y  $BD$ .

**E.0.5** (Teorema de Ceva). Sea  $ABC$  un triángulo y  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  puntos de los segmentos abiertos  $(BC)$ ,  $(CA)$  y  $(AB)$ , respectivamente. Demostrar que las rectas  $AX$ ,  $BY$  y  $CZ$  son concurrentes si y solo si

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

(si  $AX$ ,  $BY$  y  $CZ$  son concurrentes en el punto  $P$ , probar que  $BX/XC$  es igual al cociente de las áreas de los triángulos  $APB$  y  $APC$ ).

La recta que une un vértice  $A$  de un triángulo con un punto del lado opuesto  $[BC]$  se denomina *ceviana* del triángulo respecto del vértice  $A$ .

### Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos. Para una demostración, v. el ejercicio que sigue.

**E.0.6.** Con las notaciones de la figura 0.3, mostrar que si el triángulo  $ABC$  es rectángulo, con  $A$  el ángulo recto, y  $AP$  es la altura correspondiente al vértice  $A$ , entonces el área del cuadrado  $AD$  es igual al área del rectángulo  $BPP'B'$ . Deducir el teorema del cateto (v. subapartado «Teorema del cateto», pág. 18) y el teorema de Pitágoras.

### Teorema del coseno

En un triángulo de lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , se cumple que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo opuesto al lado  $a$  (este enunciado se deduce fácilmente a partir del teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos  $APC$  y  $BPC$ , donde  $P$  es el pie de la altura de  $C$ ).

**E.0.7.** Si dos triángulos tienen dos pares de lados respectivamente iguales y los correspondientes ángulos desiguales, mostrar que entre los lados opuestos a estos ángulos hay la misma relación de desigualdad.

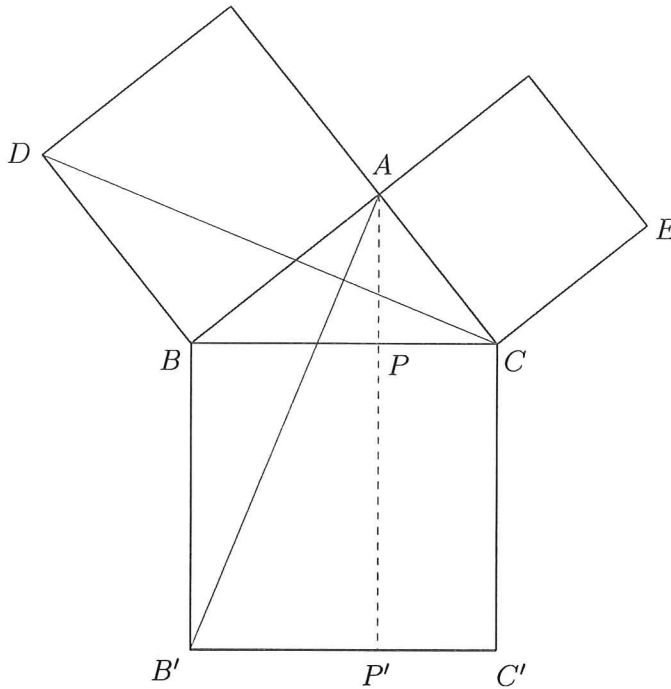


Figura 0.3: Teorema de Pitágoras

### Teorema de los senos

En un triángulo de lados  $a, b$  y  $c$  y ángulos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , se cumple que

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\text{sen}(\beta)}{b} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{c}$$

Esta propiedad se deduce directamente de las definiciones: si  $h$  es la altura del vértice  $C$  de un triángulo  $ABC$ , entonces  $h = a \text{sen}(\beta) = b \text{sen}(\alpha)$ , de donde resulta la primera de las igualdades. Aplicando el mismo razonamiento a los lados  $b$  y  $c$ , se obtiene la segunda igualdad. El valor común de los cocientes  $a/\text{sen}(\alpha)$ ,  $b/\text{sen}(\beta)$  y  $c/\text{sen}(\gamma)$  se determina en el subapartado «Radio de la circunferencia circunscrita», pág. 23.

**E.0.8.** Sea  $ABC$  un triángulo y supongamos que  $\beta'$  y  $\gamma'$  son ángulos tales que  $\alpha + \beta' + \gamma' = \pi$  y  $b/\text{sen}(\beta') = c/\text{sen}(\gamma')$ . Demostrar que  $\beta' = \beta$  y  $\gamma' = \gamma$ .

### Longitud de las medianas

Las *medianas* de un triángulo son las rectas que unen sus vértices con los puntos medios de los lados opuestos correspondientes.

Si  $M$  es el punto medio del lado  $AB$  y  $m = CM$ , donde  $ABC$  es un triángulo dado, aplicando el teorema del coseno a los triángulos  $MAC$  y  $MBC$ , y sumando y restando

las dos relaciones que se obtienen (suponemos  $a \geq b$ ), fácilmente se llega a las dos relaciones siguientes:

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{c^2}{4} + m^2\right), \quad a^2 - b^2 = 2cd$$

donde  $d$  es la distancia de  $M$  al pie  $P$  de la altura del vértice  $C$ .

La primera de las relaciones anteriores nos permite encontrar la mediana  $m$  en función de los lados  $a, b, c$ :

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

**E.0.9.** Si en un triángulo dos medianas son iguales, demostrar que es isósceles.

**E.0.10.** Sean  $A$  y  $B$  dos puntos,  $M$  su punto medio,  $c = AB$  y  $k \geq c^2/2$  un número real. Probar que la circunferencia de centro  $M$  y radio  $\sqrt{k/2 - c^2/4}$  coincide con el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a  $A$  y a  $B$  es igual a  $k$ .

**E.0.11.** Sean  $A$  y  $B$  dos puntos,  $M$  su punto medio,  $c = AB$  y  $k \geq 0$  un número real. Probar que el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a  $B$  y a  $A$  es igual a  $k$ , coincide con la recta perpendicular a  $AB$  por el punto del segmento  $[AM]$  que está a distancia  $k/(2c)$  de  $M$ .

### *Algunos puntos asociados a un triángulo*

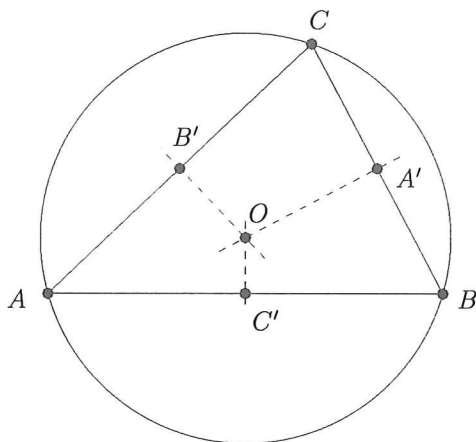
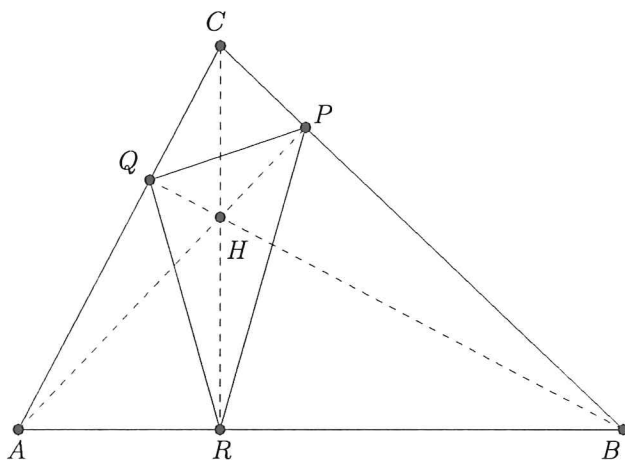
En cada triángulo se pueden considerar distintos puntos que tienen, cada uno de ellos, una relación geométrica distinguida con el triángulo. En este apartado consideraremos el circuncentro, el ortocentro, el incentro y los excentros. Más adelante estudiaremos otros puntos.

#### **Circuncentro**

Las mediatrices de los lados de un triángulo  $ABC$  se cortan en un punto  $O$ , llamado *circuncentro* del triángulo (la *mediatriz* de un segmento es la recta perpendicular por su punto medio; sus puntos son precisamente los que equidistan de los extremos del segmento). De este modo, el punto  $O$  equidista de los tres vértices y es, por tanto, el centro de la única circunferencia que pasa por ellos. Esta circunferencia se denomina *circunferencia circunscrita* del triángulo  $ABC$ . También nos referimos a ella diciendo que es «la circunferencia  $ABC$ » (figura 0.4).

#### **Ortocentro y triángulo órtico**

Las alturas de un triángulo se cortan en un punto  $H$ , llamado *ortocentro* del triángulo (figura 0.5).

Figura 0.4: *Circuncentro*Figura 0.5: *Ortcentro y triángulo órtico*

Esta propiedad es una sencilla consecuencia del ejercicio que sigue. El triángulo  $PQR$  cuyos vértices son los pies de las alturas de un triángulo dado  $ABC$  se denomina *triángulo órtico* de  $ABC$ .

**E.0.12.** Probar que las alturas de un triángulo son las mediatrices del triángulo cuyos lados son las paralelas por los vértices del primer triángulo a los correspondientes lados opuestos (figura 0.6).

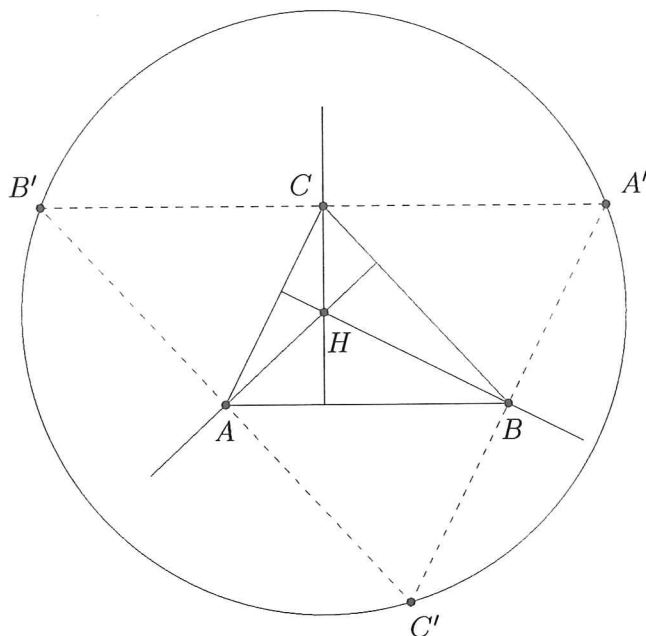


Figura 0.6: *Circuncentro  $A'B'C' = \text{ortocentro } ABC$*

### Incentro

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un punto  $I$ , llamado *incentro* del triángulo (figura 0.7).

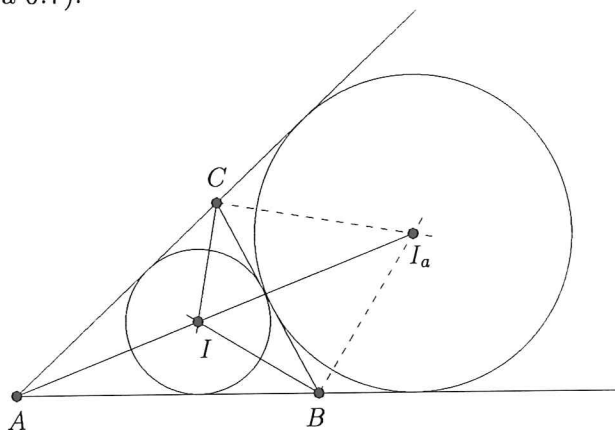


Figura 0.7: *Incentro y excentro*

La *bisectriz* de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales; sus puntos son precisamente los que equidistan de los dos lados del ángulo. Así pues, el punto  $I$

equidista de los tres lados y es, por tanto, el centro de la *circunferencia inscrita* al triángulo, es decir, la circunferencia que es tangente a los tres lados.

### Excentros

Las bisectrices exteriores de dos ángulos  $B$  y  $C$  de un triángulo se cortan en un punto  $I_a$  que equidista de las prolongaciones de los dos lados del tercer ángulo  $A$  (lados  $c$  y  $b$ ) y del lado  $a$  opuesto a  $A$ . Por tanto, la bisectriz de  $A$  también pasa por  $I_a$ , y así  $I_a$  es el centro de una circunferencia que es tangente al lado  $a$  del triángulo y a las prolongaciones de  $b$  y  $c$  (v. figura 0.7). Se dice que el punto  $I_a$  es el *excentro* del triángulo relativo al lado  $a$ . Los excentros  $I_b$  y  $I_c$  se definen análogamente. Del hecho que la bisectriz y la bisectriz exterior de un ángulo de un triángulo sean perpendiculares [ $\diamond$ ] se deduce sin dificultad que las bisectrices de un triángulo son las alturas del triángulo  $I_a I_b I_c$ . De este modo es claro que el incentro  $I$  de  $ABC$  coincide con el ortocentro de  $I_a I_b I_c$ .

**E.0.13.** Dado un ángulo  $\widehat{APB}$  y un punto  $P' \neq P$  sobre su bisectriz exterior, demostrar que  $|AP| + |BP| < |AP'| + |BP'|$ .

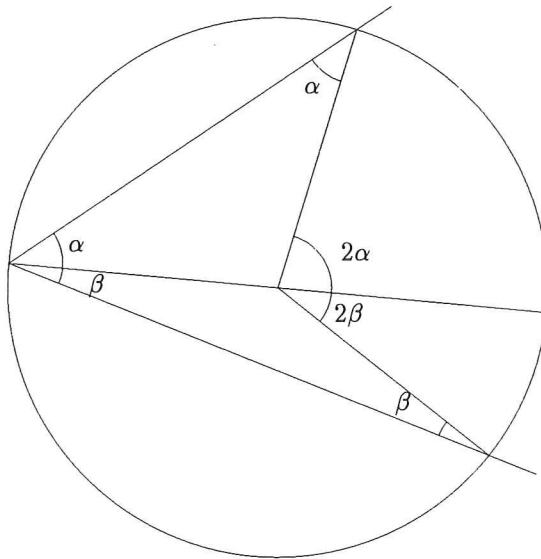


Figura 0.8: Ángulos inscritos en una circunferencia

### Circunferencias y ángulos

La relación que hay entre un ángulo y una circunferencia tiene propiedades y aplicaciones notables. Este apartado contiene una muestra de ello.

### Ángulo inscrito en una circunferencia

Un *ángulo inscrito* en una circunferencia (es decir, un ángulo cuyo vértice está sobre la circunferencia) es la mitad del ángulo central correspondiente al arco comprendido por aquél. De este modo, está claro que el valor del ángulo sólo depende del arco que comprende y no de la posición de su vértice sobre la circunferencia (figura 0.8).

**E.0.14.** Comprobar que dos triángulos rectángulos con la misma hipotenusa tienen la misma circunferencia circunscrita, y que el centro de esta circunferencia es el punto medio de la hipotenusa compartida.

**E.0.15.** Dado un triángulo  $ABC$ , sean  $P, V \in [BC]$  el pie de la altura de  $A$  y el punto de intersección de la bisectriz de  $\hat{A}$  con  $BC$ . Sean  $D$  y  $E$  los pies de las perpendiculares a  $AB$  y  $AC$  por  $P$  y  $V$ , respectivamente. Demostrar que si  $\alpha = \hat{A}/2$ , entonces  $\widehat{DPB} = \widehat{EPC} = \alpha$ .

Un ángulo inscrito en una circunferencia es recto cuando el arco que comprende es una semicircunferencia (v. figura 0.9a). Esta propiedad se puede utilizar para encontrar las tangentes a una circunferencia  $C$  desde un punto  $P$  exterior: son (figura 0.9b) las rectas que unen  $P$  con los puntos de intersección de  $C$  con la circunferencia que tiene por diámetro el segmento  $OP$ , donde  $O$  es el centro de  $C$ .

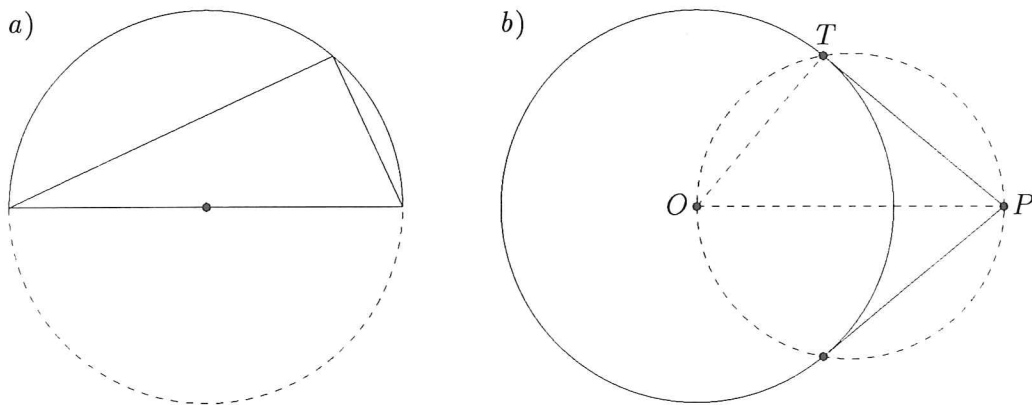


Figura 0.9: a) *Ángulo recto inscrito.* b) *Tangentes desde un punto a una circunferencia*

### Ángulo interior y ángulo exterior

Un ángulo cuyo vértice es exterior a una circunferencia y cuyos lados la cortan (se admite también que un lado del ángulo o los dos le sean tangentes) es la semidiferencia de los dos ángulos centrales correspondientes a los dos arcos de la circunferencia determinados por el ángulo.

Esta propiedad es una consecuencia inmediata de que un ángulo interior  $x$  de un triángulo es, con las notaciones de la figura 0.10a, la diferencia de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

Análogamente, un ángulo cuyo vértice es interior a una circunferencia es la semisuma de los ángulos centrales correspondientes a los dos arcos determinados por el ángulo (figura 0.10b).

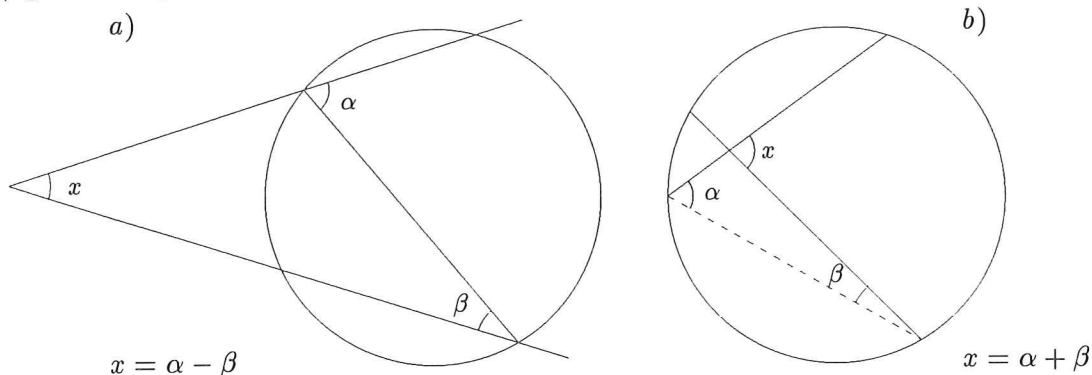


Figura 0.10: *Ángulos exterior e interior a una circunferencia*

### Arco capaz

Dado un segmento  $AB$  y un ángulo  $\alpha$ , el lugar geométrico de los puntos  $P$  de uno de los semiplanos definidos por  $AB$  y tales que  $\widehat{APB} = \alpha$  es un arco de circunferencia cuyos extremos son  $A$  y  $B$  (a este arco se le denomina el *arco capaz* del ángulo  $\alpha$  respecto al segmento  $AB$ ). Veamos cómo se puede construir.

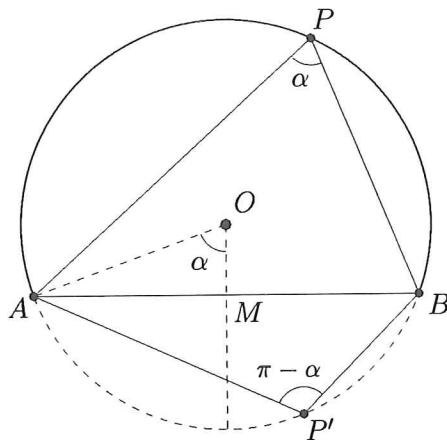


Figura 0.11: *Arco capaz de un ángulo respecto a un segmento*

Supongamos primero que  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . Sobre la mediatriz de  $AB$  (v. figura 0.11), y en el semiplano en cuestión (en la figura 0.11 supongamos que es el semiplano por encima de  $AB$ ), consideramos el punto  $O$  tal que  $\widehat{AOM} = \alpha$ , donde  $M$  es el punto medio de  $AB$ .

Entonces, los puntos  $P$  de la circunferencia de centro  $O$  y radio  $OA$  que pertenecen al citado semiplano son precisamente los que cumplen  $\widehat{APB} = \alpha$  y forman, con las notaciones de la figura 0.11, el arco  $APB$ . Si ahora observamos que el arco  $AP'B$  es el capaz de  $\pi - \alpha$  respecto a  $AB$  en el semiplano opuesto, también queda claro cómo podemos construir el arco capaz de un ángulo  $\beta \in (\pi, 2\pi]$ .

**E.0.16.** En la figura 0.12, un barco situado en el punto  $P$  ignora las coordenadas de esta posición, pero mediante un mapa puede obtener las de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , situados en la costa, y mediante un goniómetro puede determinar los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . ¿Pueden obtenerse las coordenadas de  $P$ , sabiendo que  $A = (6, 5)$ ,  $B = (10, 28)$ ,  $C = (43, 48)$ ,  $\alpha = 1,04754$  rad y  $\beta = 0,53791$  rad?

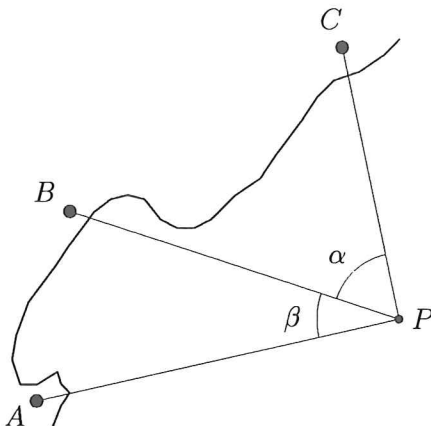


Figura 0.12: Un barco determina su posición

### Criterio LAA

Dos triángulos son iguales si tienen iguales, respectivamente, un lado, un ángulo contiguo a este lado y el ángulo opuesto. En particular, dos triángulos rectángulos son iguales si tienen iguales las hipotenusas y un ángulo agudo. Estas afirmaciones se pueden obtener aplicando el subapartado anterior. En particular, la construcción de un triángulo del cual conocemos un lado, uno de sus ángulos contiguos y el ángulo opuesto, se puede hacer fácilmente construyendo el arco capaz del ángulo opuesto.

## 0.2 Semejanzas

En la geometría clásica, las ideas relacionadas con la noción de semejanza de figuras tienen un papel importante. Para las necesidades de este capítulo, los enunciados más útiles son los siguientes *criterios de semejanza de triángulos*:

**Criterio LAL.** Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los correspondientes lados proporcionales.

**Criterio AA.** Dos triángulos son semejantes si tienen iguales dos ángulos correspondientes.

**Criterio LLL.** Dos triángulos son semejantes si los correspondientes lados son proporcionales.

El lector que no tenga dudas sobre el significado y fundamento de estos criterios puede omitir el apartado que sigue y continuar la lectura en el apartado «Semejanzas y geometría del triángulo».

### Generalidades

En este apartado exponemos brevemente los conceptos y enunciados más relevantes relativos a las semejanzas. Primero consideramos los desplazamientos. Después el teorema de Tales, que es la herramienta esencial para el estudio de las homotecias, y seguidamente las semejanzas en general. Finalmente, revisamos las relaciones entre el producto de los números complejos y las semejanzas.

### Desplazamientos

Un *desplazamiento* del plano es una transformación que conserva las distancias. Los desplazamientos conservan los ángulos. Un desplazamiento se llama *directo* si conserva la orientación del plano; de otro modo, se llama *inverso*. Las translaciones y los giros son ejemplos de desplazamientos directos. Dados dos puntos  $P$  y  $P'$ , denotamos  $t_{PP'}$  la única translación que transforma  $P$  en  $P'$ . Dados un punto  $O$  y un ángulo  $\alpha$ , el giro de centro  $O$  y amplitud  $\alpha$  será denotado  $g_{O,\alpha}$ .

Las simetrías son ejemplos de desplazamientos inversos. La *simetría* respecto de la recta  $\ell$  será denotada  $s_\ell$ : es la transformación  $P \mapsto P'$  tal que  $P'$  es el simétrico de  $P$  respecto de  $\ell$ . La recta  $\ell$  se denomina *eje* de la simetría.

Puede observarse (cf. capítulo 2) que los puntos fijos de un desplazamiento directo lo clasifican del modo siguiente: si no tiene puntos fijos, es una translación; si tiene exactamente un punto fijo es un giro; si tiene más de un punto fijo es la identidad. En cuanto a los desplazamientos inversos, se dan dos casos: si tiene puntos fijos, se trata de una simetría; de otro modo, es la composición  $ts_\ell$  de una simetría  $s_\ell$  con una translación  $t$  en la dirección del eje  $\ell$  (se habla de una *simetría con deslizamiento*).

**E.0.17.** Sean  $s$  y  $s'$  las simetrías respecto de las rectas  $\ell$  y  $\ell'$ . Para estudiar qué desplazamiento es la composición  $s's$ , sea  $\alpha$  el ángulo formado por  $\ell$  y  $\ell'$  y pongamos  $O$  para denotar el punto de intersección de  $\ell$  y  $\ell'$  cuando  $\alpha \neq 0$ , y  $d$  para denotar la distancia entre  $\ell$  y  $\ell'$  cuando  $\alpha = 0$  (rectas paralelas). Demostrar que  $s's$  es el giro de centro  $O$  y amplitud  $2\alpha$  si  $\alpha \neq 0$ , y la

translación de magnitud  $2d$  según la dirección perpendicular de  $\ell$  a  $\ell'$  si  $\alpha = 0$ . Nótese que  $s's$  es la identidad si  $\ell = \ell'$ .

**E.0.18.** Sea  $ABC$  un triángulo y construyamos cuadrados  $ACDS$  y  $BCET$  como en la figura 0.13. Demostrar que el punto  $M$  de intersección de la altura  $h_C$  con  $DE$  es el punto medio del segmento  $DE$ .

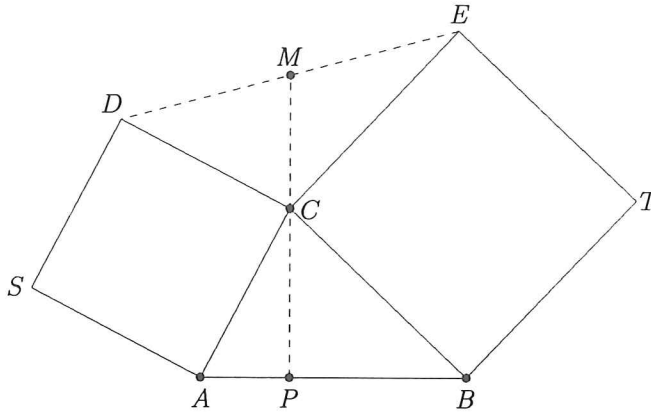


Figura 0.13: La altura de  $C$  pasa por el punto medio de  $DE$

### Teorema de Tales

Si dos rectas son cortadas por un sistema de rectas paralelas, los segmentos así obtenidos sobre una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes obtenidos sobre la otra (figura 0.14).

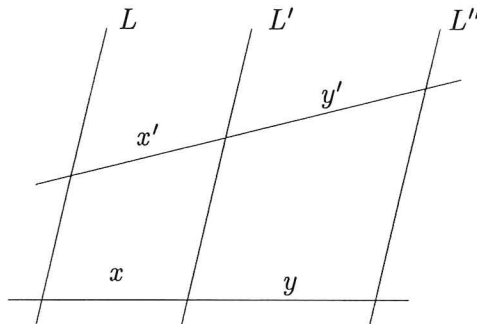


Figura 0.14: Teorema de Tales:  $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \dots$

**E.0.19.** Si en la figura 0.14 las rectas  $L$  y  $L'$  son paralelas y  $x/x' = y/y'$ , demostrar que  $L''$  también es paralela a  $L$ .

**E.0.20** (Teorema de Menelao). Sea  $ABC$  un triángulo y  $X, Y$  y  $Z$  puntos sobre las rectas  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente. Demostrar que  $X, Y$  y  $Z$  están alineados si y solo si

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$

donde convenimos que un cociente como  $BX/CX$  es positivo o negativo según que  $X$  sea exterior o interior al segmento  $[BC]$  (indicación: si  $X, Y$  y  $Z$  están sobre una recta  $L$  y  $d_A, d_B$  y  $d_C$  indican las distancias de  $A, B$  y  $C$  a  $L$ , respectivamente, con el convenio de que estas distancias se cuentan como positivas a un lado de  $L$  y como negativas al otro, entonces se cumple la relación  $BX/CX = d_B/d_C$ , y las análogas para  $Y$  y  $Z$ ).

### Homotecias

La *homotecia de centro*  $O$  (un punto) y *módulo* o *razón*  $k$  (un número real no nulo) es la transformación  $A \mapsto A'$  tal que  $O' = O$  y, si  $A \neq O$ ,  $A'$  es el punto de la recta  $OA$  tal que  $OA'/OA = k$  ( $A'$  es de la semirecta  $OA$  si  $k > 0$  y de la semirecta opuesta a  $OA$  si  $k < 0$ ). Los enunciados que siguen se prueban fácilmente utilizando el teorema de Tales y el ejercicio E.0.19.

La transformación de una recta por una homotecia es una recta paralela a la primera. Es válido un enunciado análogo para segmentos. Ángulos homólogos por una homotecia son iguales.

Las rectas por el centro de homotecia son fijas, y son las únicas rectas fijas si  $k \neq 1$  (si  $k = 1$ , la homotecia es la identidad).

Segmentos homólogos por una homotecia son proporcionales según el valor absoluto  $|k|$  de la razón de homotecia. De aquí resulta que la transformación de la circunferencia de centro  $P$  y radio  $r$  por la homotecia  $h$  de razón  $k$  es la circunferencia de centro  $h(P)$  y radio  $|k|r$ .

**E.0.21.** Probar que dos triángulos no congruentes son homotéticos si los lados de uno son paralelos a los correspondientes lados del otro.

**E.0.22.** Probar que dos circunferencias siempre son homotéticas y que sus centros están alineados con el centro de cualquier homotecia que transforme una en la otra.

### Figuras semejantes

Dos figuras son semejantes si una se puede obtener de la otra mediante la composición de una homotecia y un desplazamiento. Una semejanza transforma rectas en rectas y segmentos en segmentos. Segmentos homólogos son proporcionales y ángulos homólogos son iguales. Una semejanza se llama *directa* o *inversa* según conserve la orientación del plano o la invierta.

**E.0.23.** Probar los criterios de semejanza de triángulos enunciados al principio de esta sección.

**Razón áurea.** Dado un segmento de longitud  $a > 0$ , su *segmento áureo* es el segmento de longitud  $x > 0$  tal que  $a/x = x/(a-x)$ . Puesto que esta relación es equivalente a la ecuación  $x^2 + ax - a^2 = 0$ , obtenemos que  $x = \rho a$ , donde

$$\rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

El número real  $\rho$  se denomina la *razón áurea*. Puesto que  $\rho^2 + \rho - 1 = 0$ , resulta que

$$\rho^{-1} = 1 + \rho = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Un *rectángulo áureo* es aquél cuya base menor es segmento áureo de la base mayor. Esto equivale a decir que el rectángulo es semejante al que resulta de separarle el cuadrado cuyo lado es la base menor (figura 0.15).

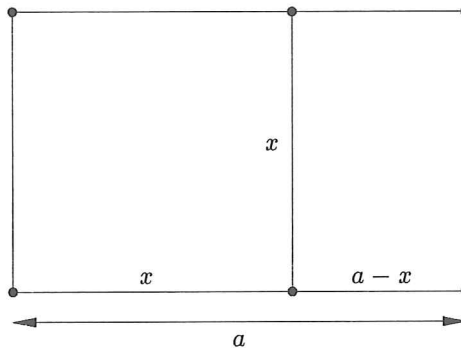


Figura 0.15: *Rectángulo áureo*

### Semejanzas y números complejos

Si representamos los puntos del plano por *números complejos*, y  $w = r_\alpha = r \cdot 1_\alpha$  es el número complejo de módulo  $r$  y argumento  $\alpha$ , entonces la transformación  $z \mapsto wz$  es la composición del giro de ángulo  $\alpha$  con centro en el origen seguido de la homotecia de razón  $r$  con el mismo centro. La razón de esto es que el módulo y el argumento de un producto de dos números complejos son el producto y la suma de los módulos y argumentos de los factores, respectivamente ( $|wz| = |w||z|$  y  $\arg(wz) = \arg(w) + \arg(z)$ ).

**E.0.24.** Sean  $ABC$  y  $A'B'C'$  dos triángulos e interpretemos  $B - A$ ,  $C - A$ ,  $B' - A'$  y  $C' - A'$  como números complejos. Demostrar que  $ABC$  y  $A'B'C'$  son directamente semejantes si y solo si  $(C' - A')/(B' - A') = (C - A)/(B - A)$ .

**E.0.25.** Sean  $A_1A_2A_3$  y  $A'_1A'_2A'_3$  dos triángulos directamente semejantes. Sea  $t \in \mathbf{R}$  fijo y definamos  $A''_i = A_i + t(A'_i - A_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Demostrar que los triángulos  $A_1A_2A_3$  y  $A''_1A''_2A''_3$  son directamente semejantes. Es válida la misma conclusión si, en lugar de triángulos, tenemos figuras directamente semejantes  $A_1A_2 \dots A_k$  y  $A'_1A'_2 \dots A'_k$  y definimos  $A''_i$  como antes para  $i = 1, 2, \dots, k$  (en la figura 0.16 ilustramos el caso en que la figura es un pentágono regular).

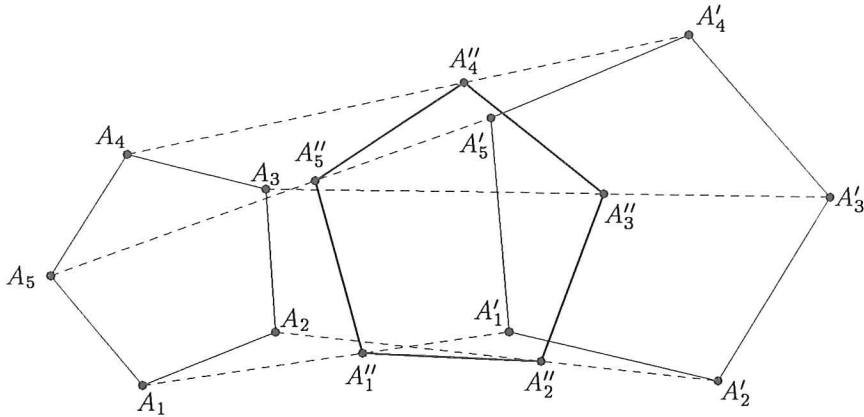


Figura 0.16:  $A''_i$  divide  $A_iA'_i$  en la proporción 3/5

En el resto de esta sección presentamos, agrupadas en dos apartados («Semejanzas y la geometría del triángulo» y «Inversiones», pág. 24) un número de situaciones geométricas en las cuales las semejanzas son el elemento decisivo para probar los enunciados.

### Semejanzas y la geometría del triángulo

En este apartado se exponen algunas de las aplicaciones más básicas de las semejanzas al estudio de las propiedades del triángulo.

#### Medianas y baricentro

Las tres medianas se cortan en un punto  $G$ , denominado *baricentro* del triángulo. Si  $A$  es un vértice cualquiera y  $A'$  el punto medio del lado opuesto a  $A$ , entonces  $GA = 2GA'$  o, equivalentemente,  $AA' = 3GA'$  (v. figura 0.17 y nótese que los triángulos  $ABG$  y  $A'B'G$  son semejantes, por el criterio AAA de semejanza, y que  $A'B' = \frac{1}{2}AB$ ).

#### Teorema de la altura

La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo (v. figura 0.18) es la media proporcional entre los dos segmentos en que el pie de la citada altura divide la hipo-

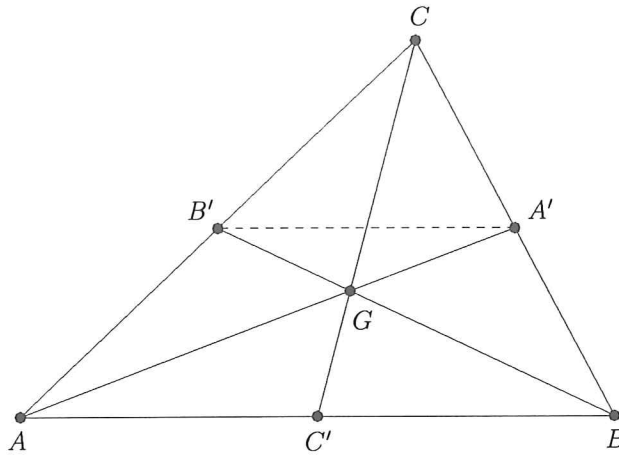


Figura 0.17: Baricentro de un triángulo

tenusa. En símbolos,  $CP^2 = AP \cdot BP$ , donde el triángulo  $ABC$  se supone rectángulo en el vértice  $C$  y  $P$  es el pie de la altura del mismo. En efecto, los triángulos  $BPC$  y  $CPA$  son semejantes, ya que tienen los tres ángulos iguales (recordemos que dos ángulos son iguales si sus correspondientes lados son perpendiculares). De este modo,  $x/h = h/(a - x)$ , igualdad que equivale a la relación enunciada.

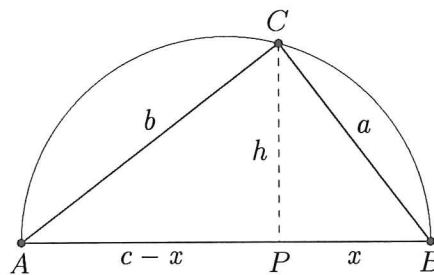


Figura 0.18: Teoremas de la altura y del cateto

### Teorema del cateto

Con las mismas notaciones de la figura 0.18, los triángulos  $BPC$  y  $BCA$  son semejantes, ya que son rectángulos y tienen un ángulo común. Por tanto,  $x/a = a/c$ , lo cual nos dice que en un triángulo rectángulo la longitud de un cateto, por ejemplo  $a$ , es la media proporcional entre la hipotenusa,  $c$ , y la proyección del cateto,  $x$ , sobre aquella. Para otra demostración, y también una interpretación, v. el ejercicio E.0.6.

Así, teniendo en cuenta el subapartado anterior, vemos que los triángulos rectán-

gulos  $ABC$ ,  $ACP$  y  $CBP$  son semejantes. Está claro, además, que el área de  $ABC$  es la suma de las áreas de  $ACP$  y  $CBP$ . Esto nos proporciona una nueva comprensión del teorema de Pitágoras: si el cociente del área del cuadrado de lado  $AB$  por el del triángulo  $ABC$  es  $k$ , es decir, si  $c^2 = k \cdot ABC$ , entonces  $a^2 = k \cdot CBP$  y  $b^2 = k \cdot ACP$ , de donde  $a^2 + b^2 = k(CBP + ACP) = k \cdot ABC = c^2$ . Observemos que este argumento prueba que si aplicamos una misma construcción sobre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo (suponiendo que la construcción proporcione un área a partir de un segmento), entonces el área de la figura sobre la hipotenusa es la suma de las áreas de las figuras sobre los catetos.

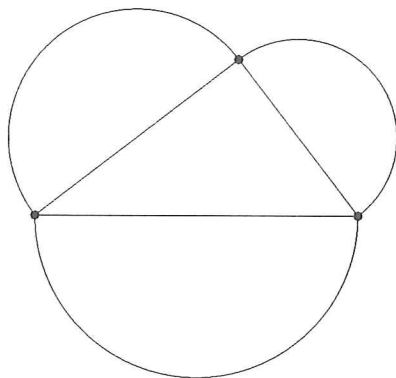


Figura 0.19: Teorema de Pitágoras para semicírculos

Por ejemplo, si la construcción es la del polígono regular de  $n \geq 3$  lados sobre un segmento dado, obtenemos que el área del  $n$ -gono regular de lado la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la suma de las áreas de los  $n$ -gonos regulares cuyos lados son los catetos. Análogamente, tenemos que el área del semicírculo que tiene por diámetro la hipotenusa es la suma de las áreas de los semicírculos que tienen por diámetro los catetos (figura 0.19).

### Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Sea  $P$  un punto y  $C$  una circunferencia que no pasa por  $P$ . Consideremos dos rectas por  $P$  que cortan  $C$  en los puntos  $A$  y  $A'$ ,  $B$  y  $B'$ , respectivamente (figura 0.20). Entonces, los triángulos  $PAB'$  y  $PBA'$  son semejantes (ya que el ángulo  $\widehat{APB}$  es común y los ángulos inscritos  $\widehat{PA'B}$  y  $\widehat{PB'A}$  cortan el mismo arco) y, por tanto,  $PA/PB = PB'/PA'$ , o bien  $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$ . De este modo, el producto  $PA \cdot PA'$  es independiente de la recta que tomemos por  $P$  (entre las que cortan  $C$ ) y su valor se denomina *potencia de  $P$*  respecto a  $C$ . Tomando la recta que pasa por  $P$  y por el centro  $O$  de  $C$ , vemos que la potencia es igual a  $(d - r)(d + r) = d^2 - r^2$ , donde  $d = PO$  y  $r$

es el radio de  $C$ .

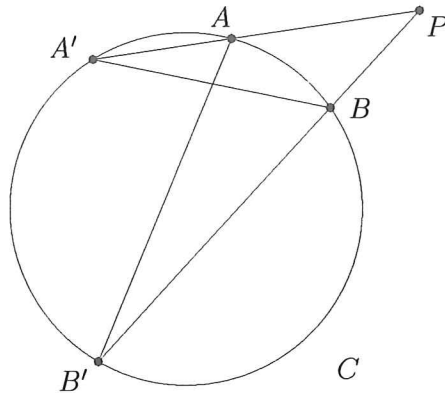


Figura 0.20: *Potencia de un punto respecto a una circunferencia*

**Puntos concíclicos.** Ahora no es difícil deducir que si  $A$  y  $A'$ ,  $B$  y  $B'$ , son dos pares de puntos distintos y las rectas  $AA'$  y  $BB'$  se cortan en un punto  $P$ , entonces los puntos  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  y  $B'$  son *concíclicos* (esto es, están contenidos en una misma circunferencia) si y solo si  $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$ .

**Eje radical.** El lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto a dos circunferencias no concéntricas es una recta perpendicular a la que une sus centros  $O_1$  y  $O_2$ , y se denomina *eje radical* de las dos circunferencias. En efecto, sean  $d_1$  y  $d_2$  las distancias de un punto  $P$  en los centros de las dos circunferencias, y sean  $r_1$  y  $r_2$  sus radios. La condición de que la potencia de  $P$  sea la misma respecto a las dos circunferencias es  $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$ , o bien  $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$ . Puesto que  $\delta = r_1^2 - r_2^2$  es constante, el lugar geométrico es el de los puntos  $P$  tales que  $d_1^2 - d_2^2 = \delta$ , que es, suponiendo que  $r_1 \geq r_2$ , la recta perpendicular a  $O_1O_2$  por el punto de  $[O_1M]$  que está a la distancia  $\delta/(2c)$  de  $M$ , siendo  $M$  y  $c$  el punto medio de y la distancia entre  $O_1$  y  $O_2$ , respectivamente (v. ejercicio E.0.11).

Si las dos circunferencias se cortan, el eje radical es la recta que une los dos puntos de intersección (o la tangente común si son tangentes). En efecto, los puntos de intersección tienen la misma potencia ( $= 0$ ) respecto a las dos circunferencias.

**Centro radical.** El *centro radical* de tres circunferencias que no tienen los centros alineados es el único punto que tiene la misma potencia respecto a las tres circunferencias. Este punto es la intersección de dos cualesquiera de los ejes radicales de los tres pares de circunferencias que podemos formar.

### Propiedades métricas de las bisectrices

Consideremos el triángulo  $ABC$  de la figura 0.21.

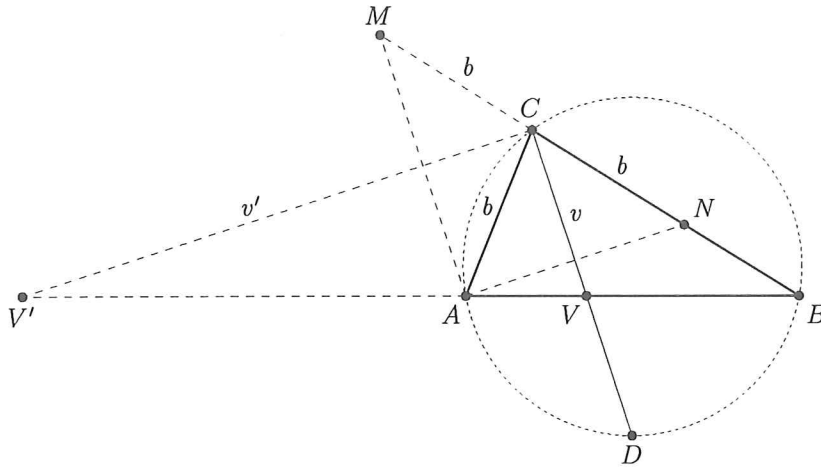


Figura 0.21: *Determinación de las bisectrices*

Sea  $M$  el punto sobre  $BC$ , a continuación de  $C$ , tal que  $CM = b$ . Por construcción, el triángulo  $ACM$  es isósceles. Por tanto, la bisectriz  $v'$  de  $\widehat{ACM}$  es perpendicular a la base  $AM$ . Puesto que la bisectriz  $v$  es perpendicular a  $v'$ ,  $v$  es paralela a  $AM$ . Aplicando el teorema de Tales, obtenemos que

$$\frac{BV}{a} = \frac{AV}{b} = \frac{c}{a+b}$$

Considerando ahora el punto  $N$  del segmento  $BC$  tal que  $NC = b$ , resulta que  $AN$  es paralela a  $v'$  (por ser perpendicular a  $v$ ), y razonando de manera similar obtenemos que

$$\frac{BV'}{a} = \frac{AV'}{b} = \frac{c}{a-b}$$

Por otro lado, no es difícil ver que si  $D$  es el punto de intersección de la semirecta  $CV$  con el círculo  $ABC$ , entonces los triángulos  $AVC$  y  $DBC$  son semejantes (tienen dos ángulos iguales: uno por definición de bisectriz, el otro por el hecho de ser ángulos inscritos que comprenden el mismo arco  $BC$  de la circunferencia  $ABC$ ). De esto resulta que  $a/v = (v + VD)/b$ , o bien  $ab = v^2 + v \cdot VD$ . Pero puesto que  $v \cdot VD = VA \cdot VB = abc^2/(a+b)^2$ , tenemos que

$$v^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} = 4ab \frac{p(p-c)}{(a+b)^2}$$

donde hemos puesto  $p = (a+b+c)/2$  (el *semiperímetro* del triángulo).

**E.0.26** (Teorema de Steiner–Lehmus). Probar que un triángulo es isósceles si tiene dos bisectrices iguales.

### Radio de las circunferencias inscrita y exinscrita

Consideremos la figura 0.22. Si ponemos  $p = (a + b + c)/2$ , entonces se cumple que  $AB' = AC' = p - a$ : la primera igualdad es clara y la segunda resulta de que  $AB' + a = AB' + CA' + A'B = AB' + CA' + BC' = p$ . Igualmente tenemos que  $BA' = BC' = p - b$  y  $CA' = CB' = p - c$ . También tenemos que  $AB'' = AC''$  y, puesto que  $AB'' = AC + CA''$  y  $AC'' = AB + BA''$ , vemos que  $AB'' = AC'' = p$  [◊]. Por tanto,  $BA'' = BC'' = p - c$  y  $CB'' = CA'' = p - b$ . Finalmente,  $C'C'' = B'B'' = AB'' - AB' = p - (p - a) = a$  y  $A'A'' = |BA' - BA''| = |p - b - (p - c)| = |b - c|$ .

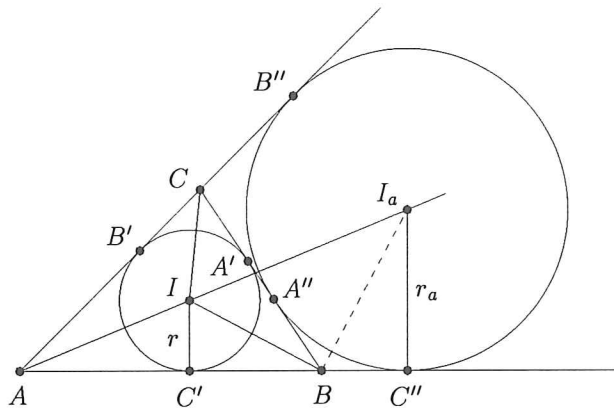


Figura 0.22: Radio de las circunferencias inscrita y exinscrita

Debido a que los triángulos  $AIC'$  y  $AI_aC''$  son semejantes, será (1)  $r/r_a = (p - a)/p$ . Y debido a que los triángulos  $BIC'$  y  $I_aBC''$  también son semejantes,  $r/(p - b) = (p - c)/r_a$ , o bien (2)  $rr_a = (p - b)(p - c)$ . De las ecuaciones (1) y (2) se deduce que

$$r = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}, \quad r_a = \sqrt{\frac{p(p - b)(p - c)}{p - a}}$$

Los radios  $r_b$  y  $r_c$  de las otras dos circunferencias exinscritas se obtienen permutando cíclicamente  $a, b$  y  $c$  en la segunda de las fórmulas anteriores.

### Expresión de las alturas en función de los lados

Consideremos la figura 0.23, en la cual  $N$  y  $M$  se definen de manera que estén alineados con  $A$  y  $B$ , respectivamente, con  $BM = BC$  y  $AN = AC$ . Así pues,  $NM = a + b + c = 2p$ . Por las consideraciones hechas en el subapartado «Propiedades métricas de las bisectrices» (pág. 21), sabemos que  $CM$  (respectivamente,  $CN$ ) es paralela a la

bisectriz interior  $IB$  (respectivamente,  $IA$ ), de manera que los triángulos  $AIB$  y  $NCM$  son semejantes. Así,  $h_c/r = 2p/c$ , de donde resulta

$$h_c = 2pr/c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Cambiando sucesivamente  $c$  por  $b$  y por  $a$  se obtienen las fórmulas que dan  $h_b$  y  $h_a$ .

De estas expresiones está claro que el área  $S$  del triángulo viene dada por

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(fórmula de Herón).

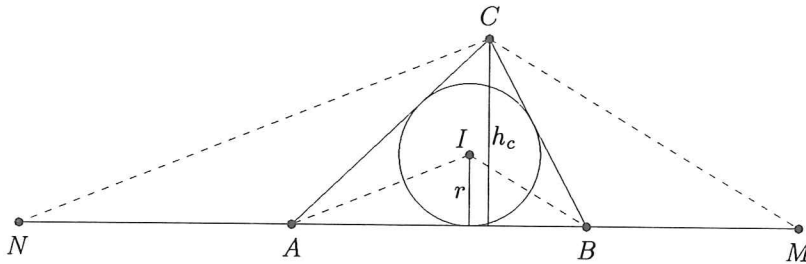


Figura 0.23: Alturas en función de los lados

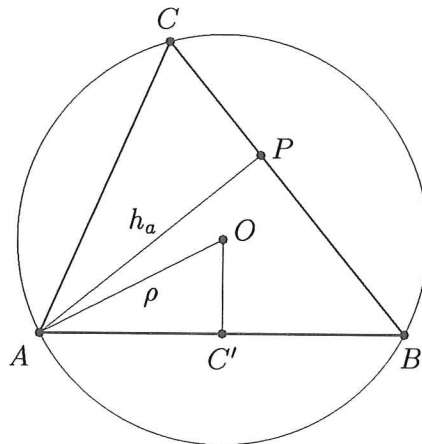


Figura 0.24: Radio de la circunferencia circunscrita

### Radio de la circunferencia circunscrita

Consideremos la figura 0.24. Los triángulos  $APC$  y  $AC'O$  son semejantes: los dos son rectángulos y  $\widehat{AOC'}$  es la mitad del arco central comprendido por el ángulo inscrito

$\widehat{ACB}$ . Así pues,  $AO/AC' = AC/AP$ , o bien  $\rho/(c/2) = b/h_a$ . Por tanto,  $\rho = bc/2h_a$  y, recordando la expresión  $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  de  $h_a$  en función de los lados,

$$\rho = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Notemos también que si  $\gamma = \widehat{C}$  y  $c = AB$ , entonces  $c/\text{sen}(\gamma) = 2AC'/\text{sen}(\gamma) = 2\rho$ , ya que  $AC'/\rho = \text{sen}(\gamma)$ . Esto nos revela que el valor  $a/\text{sen}(\alpha) = b/\text{sen}(\beta) = c/\text{sen}(\gamma)$  (teorema de los senos) es  $2\rho$ , el diámetro de la circunferencia circunscrita.

### Inversiones

Dado un punto  $O$  y un número real  $\rho \neq 0$ , la *inversión de centro  $O$  y potencia  $\rho$* ,  $\text{inv}_{O,\rho}$ , es la aplicación  $A \mapsto A'$  ( $A \neq O$ ), definida por la fórmula

$$A' - O = \frac{\rho}{|OA|^2}(A - O)$$

Así  $A'$  es el punto que está sobre la recta  $OA$ , a una distancia  $|\rho|/|OA|$  de  $O$ , en la misma semirrecta que  $A$  si  $\rho > 0$  y en la semirrecta opuesta si  $\rho < 0$ . Debido a que  $|OA'| = |\rho|/|OA|$ , tenemos  $A'' = A$  (lo expresaremos diciendo que la  $\text{inv}_{O,\rho}$  es *involutiva*).

Si  $\rho > 0$  y  $r = \sqrt{\rho}$ , entonces los puntos  $A$  que  $\text{inv}_{O,\rho}$  deja fijos son los de la circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ , ya que si  $|OA| = r$  entonces  $\rho/|OA|^2 = 1$ . En este caso se dice también que  $\text{inv}_{O,\rho}$  es la inversión respecto a la circunferencia  $S = S(O, r)$  de centro  $O$  y radio  $r$ , y que  $A'$  es el *inverso* de  $A$  respecto a  $S$ . Por lo que ya hemos dicho, también se tiene que  $A$  es el inverso de  $A'$  respecto a  $S$ .

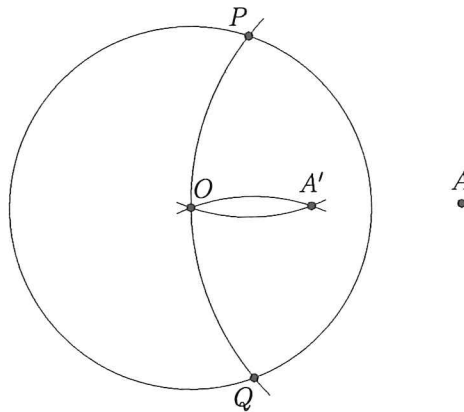


Figura 0.25: Construcción del inverso de  $A$

**Construcción.** El punto  $A'$  inverso de  $A$  respecto a  $S$  se puede construir de la siguiente manera. Supongamos primero que  $|OA| > r$ . Si  $P$  y  $Q$  son los puntos de intersección de la circunferencia de centro  $A$  y radio  $|OA|$  con  $S$ , entonces los puntos de intersección de las circunferencias de radio  $r$  con centros en  $P$  y  $Q$  son  $O$  y  $A'$  (figura 0.25).

En efecto, los triángulos  $AOP$  y  $OPA'$  son semejantes, ya que por construcción son isósceles y comparten el ángulo del vértice  $O$ . Por tanto,  $|OA|/|OP| = |OP|/|OA'|$ , que equivale a  $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ , donde  $r = |OP|$ . Para construir el inverso de un punto interior de  $S$  respecto a  $S$ , basta ver cómo podemos reconstruir el punto exterior  $A$  a partir de  $A'$ . Ahora bien, con las notaciones anteriores,  $PQ$  es la mediatriz de  $OA'$  y  $A$  es la intersección de las tangentes a  $S$  en los puntos  $P$  y  $Q$ .

**Inversión de rectas y circunferencias.** Una figura  $F'$  se llama inversa de una figura  $F$  respecto a la circunferencia  $S$  si, cuando  $A$  recorre los puntos de  $F$  (diferentes del centro  $O$  de  $S$ ), el punto  $A'$  inverso de  $A$  respecto a  $S$  recorre los puntos de  $F'$  (diferentes de  $O$ ). Si  $F' = F$ , diremos que la figura  $F$  es *doble* por (o de) la inversión. Por ejemplo, los puntos dobles son los fijos por la inversión, es decir, los puntos de  $S$ ; por tanto,  $S$  es una circunferencia doble; de la definición de inversión, resulta inmediatamente que las rectas por  $O$  son dobles.

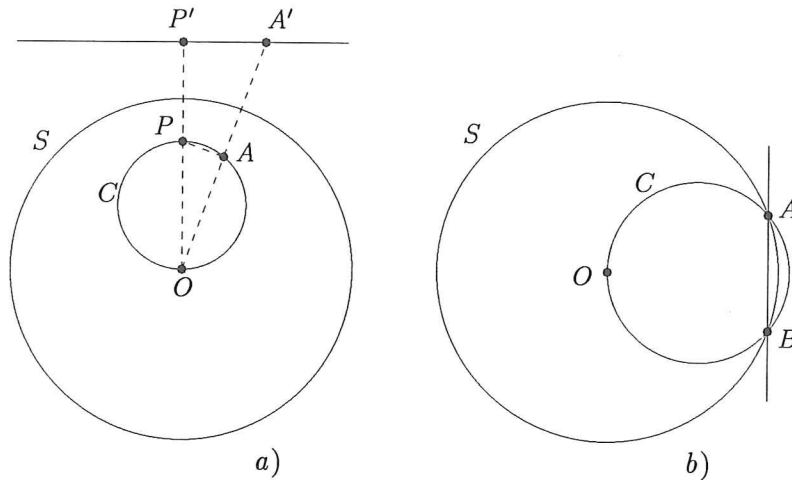


Figura 0.26: *Inversa de una circunferencia por el centro de inversión*

Una circunferencia  $C$  de diámetro  $d$  por el centro de inversión  $O$  (figura 0.26a) y la recta perpendicular  $P'A'$  al diámetro  $OP$  de  $C$  a una distancia  $d' = r^2/d$  de  $O$  son figuras inversas (observemos que  $OP$  es el único diámetro de  $C$  que pasa por  $O$ ). En efecto, los triángulos  $OPA$  y  $OA'P'$  son semejantes, ya que son rectángulos (a  $A$  y  $P'$ , respectivamente) y tienen un ángulo común. Teniendo en cuenta que  $|OP| = d$  y  $|OP'| = r^2/d$ , tenemos que  $|OA|/d = r^2/d|OA'|$ , de donde  $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ . Notemos que si  $A, B \in S$  (figura 0.26b), entonces la recta  $AB$  y la circunferencia  $OAB$  son

figuras inversas respecto a  $S$ , ya que la inversa de la recta  $AB$  es una circunferencia que pasa por  $O$  y por los puntos dobles  $A$  y  $B$ .

Ahora vamos a ver que la inversa  $C'$  de una circunferencia  $C$  que no pasa por el centro de inversión  $O$  es una circunferencia. De hecho, veremos que si  $P$  y  $Q$  son los extremos del diámetro de  $C$  que pasa por  $O$ , entonces  $C'$  es la circunferencia de diámetro  $P'Q'$  (figura 0.27), donde  $P'$  y  $Q'$  son los inversos de  $P$  y  $Q$  respecto a  $S$ .

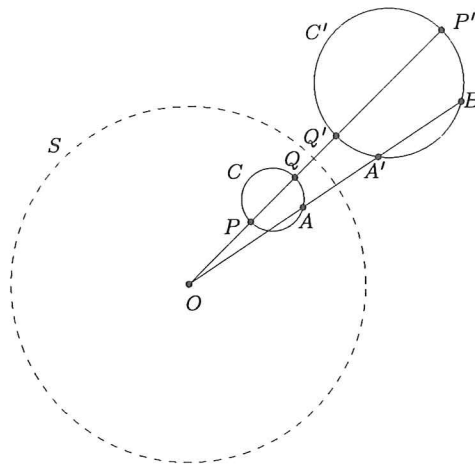


Figura 0.27: Inversa de una circunferencia  $C$  que no pasa por  $O$

En efecto, sea  $C'$  la circunferencia que acabamos de definir. De  $|OP| \cdot |OP'| = |OQ| \cdot |OQ'|$  obtenemos  $|OP'|/|OQ| = |OQ'|/|OP|$ , valor que coincide con el módulo  $k$  de la homotecia de centro  $O$  que transforma  $C$  en  $C'$ . Sea ahora  $A$  un punto de  $C$  y determinemos  $B$  y  $A'$  sobre  $C'$  como en la figura 0.27. Entonces  $|OB| = k|OA|$  y  $|OA'| \cdot |OB| = |OQ'| \cdot |OP'|$  (potencia de  $O$  respecto a  $C'$ ). Por tanto,

$$|OA| \cdot |OA'| = \frac{1}{k}|OB| \cdot |OA'| = \frac{1}{k}|OQ'| \cdot |OP'| = |OP| \cdot |OP'| = r^2,$$

y esto termina la prueba.

Observemos que la razón  $k$  de la homotecia de centro  $O$  que transforma  $C$  en  $C'$  es igual a  $r^2/p$ , donde  $p$  es la potencia de  $O$  respecto a  $C$ :

$$k = \frac{|OP'|}{|OQ|} = \frac{|OP| \cdot |OP'|}{|OP| \cdot |OQ|} = \frac{r^2}{p}$$

**E.0.27.** Demostrar que la recta  $PQ$  que une dos puntos  $P$  y  $Q$  de una circunferencia  $C$  que no pasa por el centro  $O$  de una circunferencia  $S$  y la recta  $P'Q'$  que une los inversos  $P'$  y  $Q'$  de  $P$  y  $Q$  respecto a  $S$ , o bien se cortan sobre el eje radical de  $C$  y  $C'$ , o bien este eje es paralelo a ambas rectas (indicación: mostrar que los puntos  $P, Q, P'$  y  $Q'$  están sobre una circunferencia

$K$ , con lo cual el punto de intersección de  $PQ$  y  $P'Q'$  —si se cortan— es el centro radical de  $C$ ,  $C'$  y  $K$ ).

**E.0.28.** Con las notaciones del problema anterior, mostrar que la recta tangente a  $C$  en un punto  $P$  y la recta tangente a  $C'$  en el punto  $P'$  forman ángulos iguales con la recta  $PP'$ . Además, o bien se cortan sobre el eje radical de  $C$  y  $C'$ , o bien éste es paralelo a ambas.

**E.0.29.** Con las notaciones de la figura 0.26a, mostrar que  $\widehat{OA'P'}$  es igual al ángulo agudo que  $OA$  forma con la tangente a  $C$  por el punto  $A$  (indicación: este último ángulo coincide con el ángulo agudo que forma la tangente a  $C$  en el punto  $O$  con  $OA$ ).

**Conservación de los ángulos.** Los ejercicios anteriores se pueden usar para demostrar que las inversiones conservan los ángulos. Para precisar más, un *arco* será un segmento (que puede ser una semirrecta) o un arco de circunferencia. Si dos arcos tienen el mismo origen, convendremos a medir el ángulo que forman como el de las semirrectas tangentes a los arcos en el origen de los mismos. Puesto que las inversiones transforman arcos en arcos, también transforman ángulos en ángulos y la propiedad a la que nos hemos referido es que la medida de un ángulo coincide con la de su transformado por una inversión. La demostración de este hecho se puede dejar como ejercicio para el lector. Sin embargo, conviene darse cuenta de que el sentido del transformado de un ángulo por una inversión es el contrario del sentido del ángulo antes de transformar.

### 0.3 Problemas

Resolver un problema, especialmente un problema de geometría, es encontrar un camino entre lo que nos dan y lo que nos piden. A partir de lo que nos dan podemos intentar *progresar* haciendo deducciones sucesivas aplicando conocimientos ya conocidos: es el proceso de *síntesis* en el sentido de los antiguos griegos, y que en algunos diccionarios aparece reflejado como una de las acepciones de la palabra. Fijémonos como, con frecuencia, los conocimientos adecuados para avanzar se presentan con claridad cuando prestamos atención a las cosas que nos dan.

En el otro extremo, allí donde queremos llegar, a menudo es útil preguntarse qué *tipo de cosas* nos piden, ya que las respuestas a esta pregunta suelen dar *claves* inequívocas sobre qué conocimientos conviene invocar para conseguirlo: es el proceso de *análisis* de los antiguos griegos.

Estos principios, y otros, se ilustran en la muestra de soluciones, presentadas en forma dialogada, en la sección 0.5. Por otro lado, la sección 0.4 contiene indicaciones sobre cómo podemos resolver todos los problemas de la lista que viene a continuación, pero debemos animar al lector o a la lectora para que la consulte solamente en el caso de aquellos problemas que no le salgan después de un esfuerzo razonable. Conviene tener presente que el orden en el cual damos los problemas no presupone ninguna gradación progresiva de dificultad.

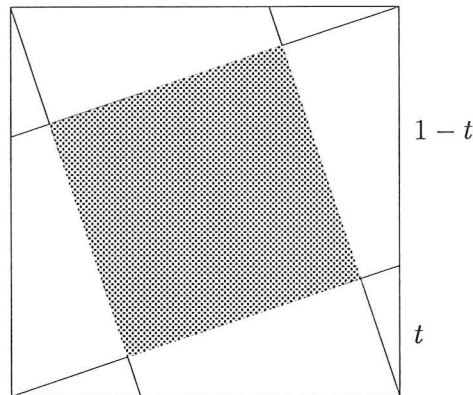


Figura 0.28: Se pide el área del cuadrado sombreado en función de  $t$

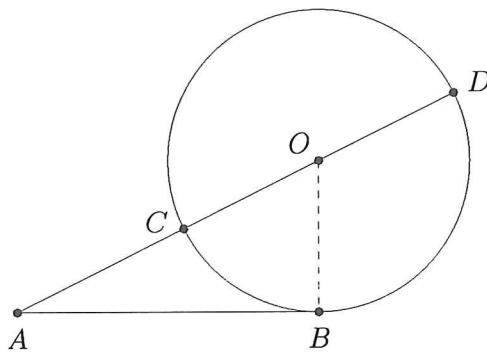


Figura 0.29: Una construcción geométrica de segmentos áureos

**P.0.1.** Con las notaciones de la figura 0.28, calcular el área del cuadrado interior en función de  $t$ .

**P.0.2.** Dada una cuerda  $a$  de una circunferencia  $C$  de radio 1 y centro  $O$ , considerar la circunferencia  $C'$  determinada imponiendo que  $a$  sea un diámetro. Si  $P$  es el punto de  $C'$  más alejado de  $O$ , ¿cuál es el valor máximo de la distancia  $PO$ ?

**P.0.3.** En un triángulo isósceles  $ABC$ , el ángulo  $\hat{A}$  es igual a  $2/5$  de un ángulo recto y  $\hat{B} = \hat{C}$ . Sea  $D$  el punto de intersección de la bisectriz del ángulo  $\hat{C}$  con el lado opuesto. Calcular los valores de los ángulos del triángulo  $BCD$ . Expresar la longitud  $a$  del lado  $BC$  en función de la longitud  $b$  del lado  $AB = AC$ .

**P.0.4.** Sea  $ABC$  un triángulo isósceles con  $\hat{B} = \hat{C} = 80^\circ$ . Sean  $D \in (A, B)$  y  $E \in$

$(A, C)$  los puntos tales que  $\widehat{BCD} = 50^\circ$  y  $\widehat{CBE} = 60^\circ$ . ¿Cuántos grados tiene el ángulo  $\widehat{BED}$ ?

**P.0.5** (Construcción de Descartes de segmentos áureos). En la figura 0.29, la circunferencia es tangente a  $AB$  en el punto  $B$  y su diámetro es igual a  $AB$ . Demostrar que  $AB$  es el segmento áureo de  $AD$  y que  $AC$  es el segmento áureo de  $AB$ .

**P.0.6.** Probar que en un pentágono regular el lado es segmento áureo de la diagonal.

**P.0.7.** Dado un punto  $P$  interior a un triángulo  $ABC$ , sean  $X, Y$  y  $Z$  los pies de las perpendiculares desde  $P$  a los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente (se dice que  $XYZ$  es el *triángulo pedal* del punto  $P$  relativo al triángulo  $ABC$ ). Probar que

$$YZ = \frac{a}{2\rho}PA, \quad ZX = \frac{b}{2\rho}PB, \quad XY = \frac{c}{2\rho}PC$$

donde  $\rho$  es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

**P.0.8.** En un triángulo acutángulo  $ABC$ , la bisectriz interior del ángulo  $\widehat{A}$  corta el lado  $BC$  en el punto  $K$  y el círculo circunscrito en el punto  $M$ . Sean  $L$  y  $N$  los pies de las perpendiculares por  $K$  a  $AB$  y  $AC$ , respectivamente. Demostrar que el cuadrilátero  $ALMN$  y el triángulo  $ABC$  tienen la misma área.

**P.0.9.** En cada uno de los vértices de un cuadrado de 1 km de lado, hay una casa, y las cuatro casas quieren construir caminos que les permitan comunicarse unas con otras. ¿Qué pueden hacer si sólo disponen de materiales para construir  $1 + \sqrt{3}$  km del camino?

**P.0.10.** Probar que los tres ángulos de un triángulo  $ABC$  son agudos si y sólo si existen puntos  $A', B'$  y  $C'$  del interior de los lados  $BC, AC$  y  $AB$ , respectivamente, tales que los segmentos  $AA', BB'$  y  $CC'$  tienen la misma longitud.

**P.0.11.** Demostrar que cualquier polígono convexo de área 1 está contenido en un rectángulo de área no superior a 2.

**P.0.12.** Sea  $ABC$  un triángulo y  $P$  un punto tal que  $PA = 7, PB = 5$  y  $PC = 3$ . Demostrar que si  $ABC$  tiene, en estas condiciones, perímetro máximo, entonces  $P$  es el incentro de  $ABC$ .

**P.0.13.** Sean  $P, Q, R$  y  $S$  los centros de los cuadrados construidos externamente sobre los cuatro lados de un rombo. Demostrar que  $PQRS$  es un cuadrado. Si fijamos el centro, el lado y la orientación del rombo, y dejamos que el ángulo entre dos lados contiguos varíe, ¿qué lugar geométrico describe el punto  $P$ ?

**P.0.14.** Probar que un cuadrilátero convexo se puede circunscribir a una circunferencia si y sólo si las sumas de los dos pares de lados opuestos son iguales.

**P.0.15** (Teorema de Morley). Dado un triángulo  $ABC$ , construimos el triángulo  $PQR$  tal como indica la figura 0.30. Demostrar que

$$|QR| = 8\rho \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\gamma),$$

donde  $\rho$  es el radio de la circunferencia circunscrita a  $ABC$ . Observemos que la simetría de la relación obtenida muestra que el triángulo  $PQR$  es equilátero, lo cual se conoce como el *teorema de Morley*.

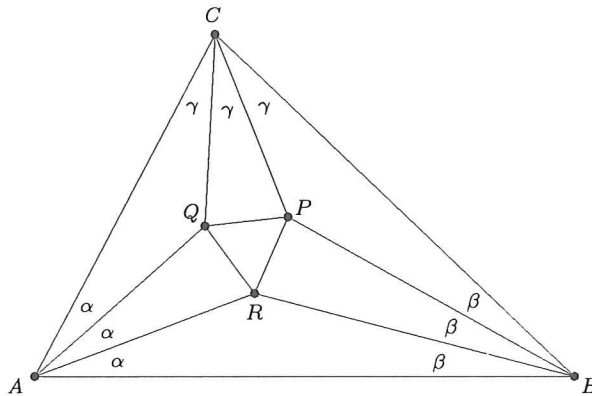


Figura 0.30: Teorema de Morley:  $PQR$  es equilátero

**P.0.16.** Demostrar que la suma de las distancias de un punto interior de un triángulo a los tres vértices es superior a la mitad del perímetro e inferior al perímetro.

**P.0.17.** Sea  $2p$  el perímetro de un triángulo y  $\mu$  la suma de sus tres medianas. Demostrar que

$$\frac{3p}{2} < \mu < 2p$$

**P.0.18.** Demostrar que un cuadrilátero convexo es inscribible en una circunferencia (es decir, que existe una circunferencia que pasa por sus vértices) si y sólo si tiene dos ángulos opuestos suplementarios.

**P.0.19.** Probar que las alturas de un triángulo son las bisectrices de su triángulo órtico (v. figura 0.5). Resulta así que el ortocentro de un triángulo coincide con el incentro de su triángulo órtico.

**P.0.20** (Círculo de Euler). Demostrar que los puntos medios de los lados de un triángulo (figura 0.31) y los pies de sus alturas están sobre un círculo.

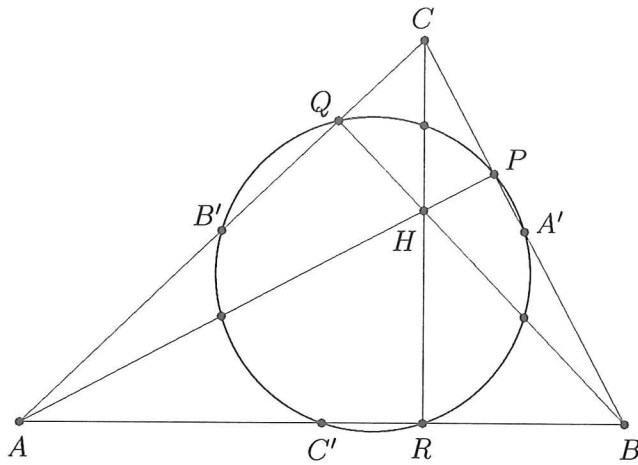


Figura 0.31: *Círculo de Euler o de los nueve puntos*

**P.0.21.** El círculo de Euler de un triángulo también pasa por los puntos medios de los segmentos que unen los vértices de un triángulo con el ortocentro (por esta razón, el círculo de Euler se llama también *círculo de los nueve puntos* del triángulo; v. figura 0.31).

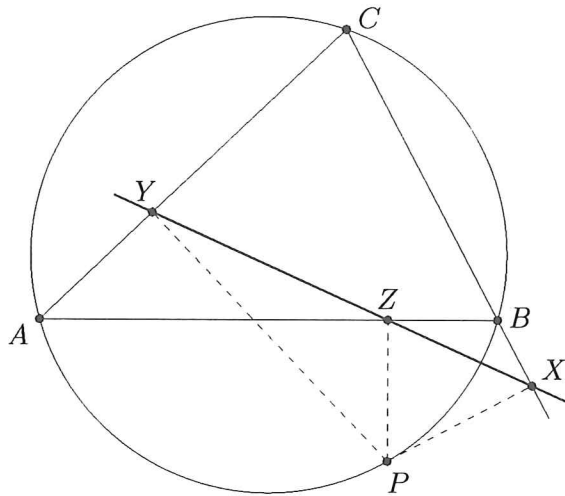


Figura 0.32: *Recta de Simson*

**P.0.22.** Sea  $P$  un punto,  $ABC$  un triángulo y  $X, Y, Z$  los pies de las perpendiculares por  $P$  a los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente. Demostrar que  $X, Y$  y  $Z$  están alineados si y sólo si  $P$  está sobre la circunferencia circunscrita de  $ABC$  (en este caso, la recta que contiene los puntos  $X, Y$  y  $Z$  se denomina *recta de Simson* de  $P$  relativa al triángulo  $ABC$ ; v. figura 0.32).

**P.0.23** (Problema de Fagnano). Demostrar que el perímetro mínimo de un triángulo inscrito en un triángulo acutángulo dado es el del triángulo órtico (v. figura 0.5).

**P.0.24.** Encontrar el punto interior de un triángulo acutángulo tal que la suma de sus distancias a los vértices sea mínima (*punto de Fermat* del triángulo).

**P.0.25.** Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos equiláteros construidos sobre los tres lados de un triángulo, en su exterior, pasan por el punto de Fermat. Además, los centros de estos tres triángulos forman otro triángulo equilátero.

**P.0.26** (Teorema de Ptolomeo). En un cuadrilátero convexo, la suma de los productos de los dos pares de lados opuestos es no inferior al producto de las dos diagonales, y la igualdad se da si y sólo si el cuadrilátero es inscribible.

**P.0.27.** Sea  $ABC$  un triángulo isósceles con  $BC$  como lado desigual. Sea  $Q$  el pie de la altura del vértice  $B$  y  $P$  el pie de la perpendicular a  $BC$  por  $Q$ . Hallar el área del triángulo en función de  $x = BP$  e  $y = PC$ .

**P.0.28.** En un triángulo  $ABC$ , escogemos puntos  $X, Y$  y  $Z$  sobre los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente, y formamos las rectas por  $X, Y$  y  $Z$  perpendiculares a  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente. Probar que estas tres rectas son concurrentes si y sólo si  $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$ .

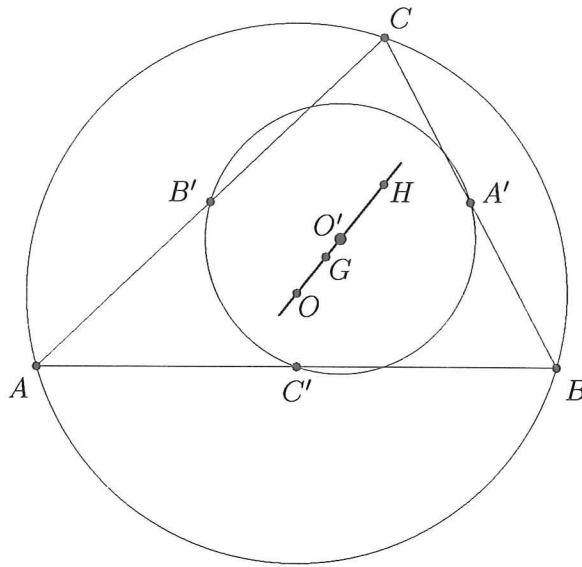
**P.0.29.** Sea  $O$  el centro de una circunferencia  $K$ ,  $AB$  un diámetro de la misma y  $t$  la recta tangente a  $K$  en el punto  $B$ . Dado un punto  $P$  de  $K$  distinto de  $A$  y  $B$ , sean  $C$  y  $D$  los puntos de intersección con  $t$  de la tangente a  $K$  en el punto  $P$  y de la recta  $AP$ , respectivamente. Probar que  $BC = CD$ .

**P.0.30.** Encontrar el área de un octógono convexo inscrito en una circunferencia sabiendo que tiene cuatro lados consecutivos de longitud 2 y los otros cuatro de longitud 3.

**P.0.31.** Sean  $P$  y  $O$  puntos fijos. Encontrar el lugar geométrico del simétrico de  $P$  respecto a una recta variable por  $O$ .

**P.0.32.** Sea  $H$  el ortocentro de un triángulo,  $P$  el pie de una altura y  $Q$  el punto de intersección de la semirecta  $HP$  con el círculo circunscrito. Demostrar que  $HP = PQ$ .

**P.0.33.** Probar que el baricentro de un triángulo  $ABC$  es el punto  $G$  del segmento  $HO$  tal que  $GO = \frac{1}{2}GH$  y que el punto medio de  $HO$  es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo  $A'B'C'$  cuyos vértices son los puntos medios de los lados de  $ABC$  (la recta  $HO$  se denomina *recta de Euler* del triángulo  $ABC$ ; v. figura 0.33).

Figura 0.33: *Recta de Euler*

**P.0.34.** Si la recta de Euler de un triángulo pasa por uno de los vértices, probar que el triángulo es rectángulo o isósceles.

**P.0.35.** Con las notaciones de la figura 0.31, sea  $P'$  el punto del arco  $A'P$  del círculo de Euler tal que  $\text{arco}(A'P') = \frac{1}{3}\text{arco}(A'P)$ . Definimos  $Q'$  y  $R'$  de forma similar. Demostrar que el triángulo  $P'Q'R'$  es equilátero (figura 0.44).

**P.0.36.** Sean  $A$  y  $B$  dos puntos no diametralmente opuestos de un círculo  $C$  dado y sea  $XY$  un diámetro variable de  $C$ . Determinar el lugar geométrico del punto de intersección de las rectas  $AX$  y  $BY$ .

**P.0.37** (Erdős–Mordell). Sea  $E$  un punto en el interior de un triángulo  $ABC$ ,  $s$  la suma de las distancias de  $E$  a los vértices y  $t$  la suma de las distancias de  $E$  a los lados. Demostrar que  $s \geq 2t$ .

**P.0.38.** Sea  $E$  un punto interior de un triángulo  $ABC$ . Sean  $x, y$  y  $z$  las distancias de  $E$  a los vértices  $A, B$  y  $C$ , respectivamente, y  $p, q$  y  $r$  las distancias de  $E$  a los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente. Entonces,

$$xyz \geq (p+q)(p+r)(q+r)$$

**P.0.39.** Sean  $S$  y  $K$  circunferencias distintas. Demostrar que  $K$  es doble por la inversión respecto a  $S$  si y sólo si  $K$  y  $S$  son ortogonales.

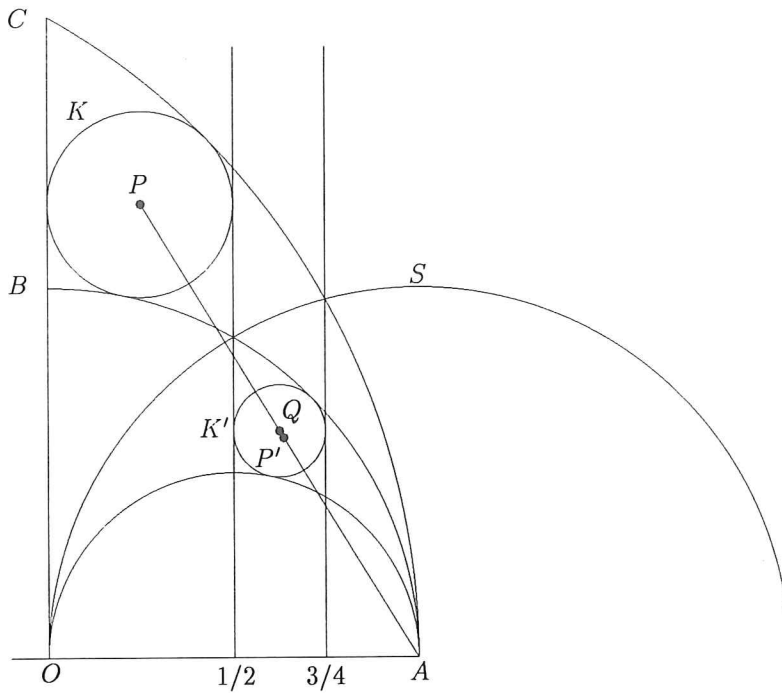


Figura 0.34: Una aplicación de las inversiones

**P.0.40.** En la figura 0.34, el arco  $AB$  es un cuadrante de la circunferencia de centro  $O$  y radio  $|OA| = 1$ , y  $AC$  es el arco que corresponde a la circunferencia de radio 2 con centro en el punto simétrico de  $A$  respecto al punto  $O$ . Comprobar que  $K$  y  $K'$  son circunferencias inversas respecto a la circunferencia  $S$  de centro  $A$  y radio 1. Si  $P'$  es el inverso de  $A$  respecto a  $K'$ , probar que  $P'$  y el centro  $P$  de  $K$  son inversos respecto a  $S$ . Hallar también la posición del centro  $Q$  de  $K'$  (y nótese que  $Q$  y  $P'$  son distintos).

**P.0.41.** Sean  $P$  y  $A$  dos puntos distintos dados y  $O$  un punto variable en una semirrecta  $\sigma$  de origen  $A$  dada. Sea  $S$  la circunferencia de centro  $O$  y radio  $|OA|$  y  $P'$  el inverso de  $P$  respecto a  $S$ . Sea  $L$  la recta perpendicular a  $\sigma$  por el punto  $A$ . Demostrar que el límite de  $P'$  cuando  $O$  se aleja indefinidamente de  $A$  es el punto simétrico de  $P$  respecto a la recta  $L$  (si miramos  $L$  como el límite de  $S$  cuando  $O$  se aleja indefinidamente de  $A$ , vemos que podemos considerar la simetría respecto a  $L$  como el límite de la inversión respecto a  $S$ ).

**P.0.42.** Sea  $S$  una circunferencia de centro  $O$ , y  $P$  y  $P'$  dos puntos no pertenecientes a  $S$  y distintos de  $O$ . Demostrar que las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1)  $P$  y  $P'$  son inversos respecto a  $S$ .

- 2)  $P$  y  $P'$  están alineados con  $O$  y existe una circunferencia  $K$  ortogonal a  $S$  que pasa por  $P$  y  $P'$ .
- 3) Existen dos circunferencias distintas  $K$  y  $K'$  que pasan por  $P$  y  $P'$  y son ortogonales a  $S$ .

**P.0.43.** Sea  $S$  una circunferencia de centro  $O$ ,  $L$  una recta que no pasa por  $O$  y  $C = L'$  la circunferencia inversa de  $L$  respecto a  $S$ . Demostrar que si  $P$  y  $Q$  son puntos simétricos respecto a  $L$ , entonces los inversos  $P'$  y  $Q'$  de  $P$  y  $Q$  respecto a  $S$  son inversos respecto a  $C$  (es decir, la simetría respecto a  $L$  y la inversión respecto a  $C$  se corresponden por la inversión respecto a  $S$ ).

**P.0.44.** Consideremos la figura 0.35, en la cual  $C$  y  $C'$  son dos circunferencias tangentes del mismo radio  $R$ . La recta  $L$  es una tangente común a  $C$  y  $C'$  y las circunferencias  $C'_n$  ( $n \geq 1$ ) se determinan de manera que estén contenidas en la región entre  $L$ ,  $C$  y  $C'$  y que  $C'_n$  sea tangente a  $C'_{n-1}$ ,  $C$  y  $C'$  (convenimos que  $C'_0 = L$ ). Comprobar que  $C'_n$  es la inversa de  $C_n$  respecto a la circunferencia punteada y usar este hecho para demostrar que el diámetro de  $C'_n$  es igual a  $R/n(n+1)$  (la circunferencia punteada es la que pasa por los puntos de contacto de  $L$  con  $C$  y  $C'$  y que tiene por centro el punto de contacto de  $C$  y  $C'$ ).

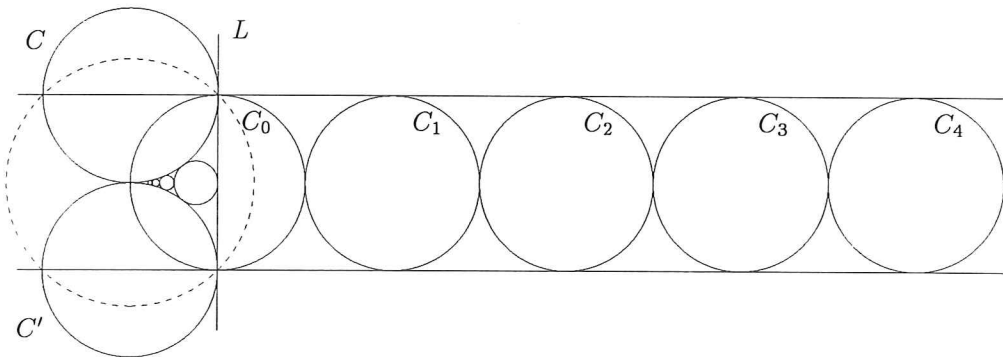


Figura 0.35: Cálculo del diámetro de las circunferencias entre  $L$ ,  $C$  y  $C'$

**P.0.45.** En la figura 0.36, la circunferencia  $C'$  es interior, y tangente en el punto  $B$ , a la circunferencia  $C$ , y las circunferencias  $C_0, C_1, \dots$  se construyen tal como indica la figura. Probar que el diámetro de  $C_n$  ( $n \geq 1$ ) es igual a  $y_n/n$ , donde  $y_n$  es la distancia del centro de  $C_n$  a la recta  $AB$  (indicación: hallar las inversas de  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n$  respecto a la circunferencia de centro  $B$  que es ortogonal a  $C_n$ ).

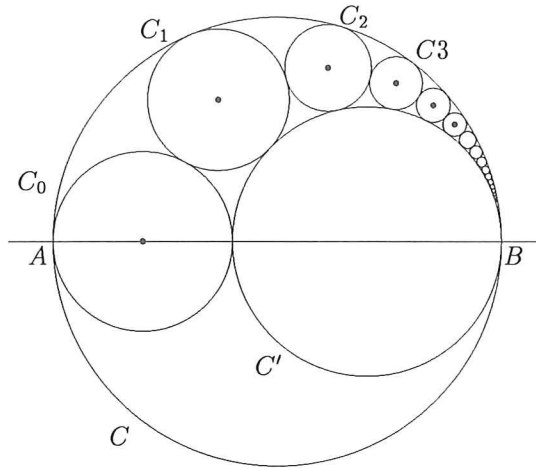


Figura 0.36: ¿Qué diámetro tiene  $C_n$ ?

## 0.4 Indicaciones

**I.0.1.** Repasar el teorema de Pitágoras, el teorema de Tales y la semejanza de triángulos (especialmente el caso de triángulos rectángulos).

**I.0.2** (XXIX Olimpiada Matemática, 1993, primera fase). Expresar  $PO$  como una función  $f(\alpha)$  del ángulo  $\alpha$  formado por  $PO$  y el radio de un extremo de la cuerda, y hallar el máximo de  $f$  en el intervalo  $0 < \alpha < \pi/2$ .

**I.0.3** (XXX Olimpiada Matemática, 1994, segunda fase). Aplicar repetidamente que la suma de los ángulos de un triángulo es  $\pi$ , y la semejanza de triángulos.

**I.0.4.** Considerar el punto  $F$  de intersección con  $AB$  de la paralela a  $BC$  por  $E$  y el punto  $G$  de intersección de  $FC$  con  $BE$ . Entonces,  $BCG$  es equilátero y  $BDG$  es isósceles.

**I.0.5.** Aplicar el teorema de Pitágoras. Revisar, si hace falta, la definición de segmento áureo.

**I.0.6.** Considerar el trapecio formado por cuatro vértices del pentágono, y las diagonales de este trapecio. Se verán dos triángulos isósceles semejantes. (Para una solución completa, en forma dialogada, v. sección 0.5, pág. 41, y para una solución completa convencional, v. sección 0.6, pág. 53.)

**I.0.7.** Los triángulos rectángulos  $AYP$  y  $AZP$  comparten la hipotenusa  $AP$ . Aplicar el teorema de los senos al triángulo  $AYZ$ , teniendo en cuenta su relación con el diámetro de la circunferencia.

**I.0.8.** Sea  $P$  el pie de la altura del vértice  $A$ . Probar, utilizando el ejercicio 0.15, que  $LP$  y  $NP$  son paralelas a  $BM$  y  $CM$ , respectivamente.

**I.0.9.** La suma de las diagonales del cuadrado es  $2\sqrt{2}$ , que es algo mayor que  $1 + \sqrt{3}$ . Modificar el camino formado por las dos diagonales, conectando un pequeño segmento paralelo a dos lados y con punto medio en el centro del cuadrado, con los cuatro segmentos que unen cada vértice con el extremo más próximo del segmento. Expresar la longitud del camino así obtenido como una función  $f(x)$  de la longitud  $x$  del pequeño segmento y hallar su mínimo en el intervalo  $0 < x < 1/2$ .

**I.0.10.** Supongamos que el triángulo es acutángulo. Cambiando el orden de los vértices si hace falta, podemos suponer que  $c \leq b \leq a$ . Consideremos el caso  $c < b$ . Puesto que  $\hat{A}$  es agudo, existe  $C' \in (AB)$  tal que  $c < CC' < b$ . Si  $r = |CC'|$ , mostrar que existen  $B' \in (CA)$  y  $A' \in (AB)$  tales que  $BB' = AA' = r$ . En el caso  $c = b$ , existe  $A' \in (BC)$  tal que  $|AA'|$  es igual a la altura de  $B$  (que es igual a la altura de  $C$ ). Por lo que se refiere al enunciado recíproco, mostrar que para triángulos con  $\hat{A} \geq \pi/2$  se tiene  $|AA'| < b$  para todo punto  $A' \in (BC)$  y  $|CC'| > b$  para todo punto  $C' \in (AB)$ .

**I.0.11.** Considerar las cintas de amplitud mínima que contienen el polígono, una con bordes paralelos a un diámetro máximo del polígono y la otra perpendicular a la primera.

**I.0.12.** Si  $P$  no está sobre una bisectriz, por ejemplo la del ángulo  $\hat{A}$ , entonces la circunferencia de centro  $P$  y radio  $|PA|$  corta la bisectriz exterior de  $\hat{A}$  en el punto  $A$  y en otro punto *diferente*  $A'$ . Entonces  $PA' = PA$ , pero el triángulo  $A'BC$  tiene el perímetro más grande que el triángulo  $ABC$ . Para ver esta última afirmación, utilizar el ejercicio E.0.13.

**I.0.13.** Por trigonometría elemental se ve que si  $O$  es el centro del rombo y  $X$  e  $Y$  las proyecciones del centro  $P$  de uno de los cuadrados sobre las diagonales del rombo, entonces  $|OX| = |OY|$ .

**I.0.14.** Para la parte directa, observar que las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior tienen la misma longitud. Para la parte recíproca, considerar la circunferencia tangente a  $AB$ ,  $BC$  y  $CD$ , con centro interior al cuadrilátero, y probar que  $AD$  es tangente a esta circunferencia.

**I.0.15.** Aplicar el teorema de los senos a los triángulos  $ABC$  y  $ABR$  y deducir que

$$|AR| = 2\rho \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(3\alpha + 3\beta) / \operatorname{sen}(\alpha + \beta).$$

Como  $\text{sen}(3x)/\text{sen}(x) = 4\text{sen}(\frac{\pi}{3} - x)\text{sen}(\frac{2\pi}{3} - x)$ , resulta que  $|AR|/\text{sen}(\frac{\pi}{3} + \gamma) = 8\rho\text{sen}(\beta)\text{sen}(\gamma)$  y, análogamente,  $|AQ|/\text{sen}(\frac{\pi}{3} + \beta) = 8\rho\text{sen}(\gamma)\text{sen}(\beta)$ . Teniendo en cuenta que  $\alpha + (\frac{\pi}{3} + \beta) + (\frac{\pi}{3} + \gamma) = \pi$ , en el triángulo  $AQR$  se tiene que  $\widehat{Q} = \frac{\pi}{3} + \gamma$  y  $\widehat{R} = \frac{\pi}{3} + \beta$  (v. ejercicio 0.8). Por tanto,  $8\rho\text{sen}(\beta)\text{sen}(\gamma) = |AR|/\text{sen}(\frac{\pi}{3} + \gamma) = |QR|/\text{sen}(\alpha)$ , que equivale a la relación pedida.

**I.0.16.** Para la primera desigualdad, aplicar la desigualdad triangular. Para la segunda, aplicar el ejercicio 0.3. (Para una solución completa, en forma dialogada, v. sección 0.5, pág. 43, y para una solución completa convencional, v. sección 0.6, pág. 53.)

**I.0.17.** Para la primera (segunda) desigualdad, aplicar la desigualdad triangular a los triángulos del tipo  $BCG$  ( $AA'B'$ , donde  $A'$  es el punto medio de  $[BC]$  y  $B'$  el punto medio de  $[CA]$ ). (Para una solución completa, en forma dialogada, v. sección 0.5, pág. 45, y para una solución completa convencional, v. sección 0.6, pág. 54.)

**I.0.18.** Repasar, si hace falta, los ángulos inscritos en una circunferencia. También los ángulos interiores y exteriores.

**I.0.19.** Usando las propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia, demostrar (con las notaciones de la figura 0.5) que  $\widehat{QRH} = \widehat{QAH} = \widehat{PBH} = \widehat{PRH}$ . Observar, por ejemplo, que los triángulos rectángulos  $AQH$  y  $ARH$  comparten la hipotenusa  $AH$ .

**I.0.20.**  $|A'R| = a/2$ , ya que  $A'$  es el circuncentro de  $BCR$ , y también está claro que  $|B'C'| = a/2$ .

**I.0.21.** Si se aplica el problema anterior al triángulo  $ABH$ , se encuentra que el círculo  $PQR$  pasa por los puntos medios de los segmentos  $AH$  y  $BH$ .

**I.0.22.** Si  $P$  es de la circunferencia  $ABC$ , probar que  $\widehat{AZY} = \widehat{BZX}$ .

**I.0.23.** Manteniendo  $R \in [A, B]$  fijo (figura 0.5), el triángulo  $PQR$  con mínimo perímetro es el determinado imponiendo que  $P$  y  $Q$  estén alineados con los puntos simétricos  $R'$  y  $R''$  de  $R$  respecto a las rectas  $AC$  y  $BC$ , respectivamente. Si esta condición se cumple, entonces  $R'R''$  es mínimo (debido a que el triángulo  $R'CR''$  es isósceles y el ángulo  $\widehat{R'CR''} = \widehat{ACB}$  es constante) cuando la longitud de los lados iguales  $R'C = R''C$  ( $=RC$ ) es mínima, es decir, cuando  $R$  es el pie de la altura de  $C$ . (Para una solución completa, en forma dialogada, v. sección 0.5, pág. 46, y para una solución completa convencional, v. sección 0.6, pág. 54.)

**I.0.24.** Si  $P$  es un punto interior al triángulo acutángulo  $ABC$  y ponemos  $P'$  y  $B'$  para denotar los transformados de los puntos  $P$  y  $C$  por el giro antihorario de centro  $A$  y amplitud  $60^\circ$ , entonces la suma  $PA + PB + PC$  (que es igual a  $PP' + PB + P'B'$ ) es mínima si y solo si  $B, P, P'$  y  $B'$  están alineados. Así  $P$  tiene que ser el punto común

a las rectas  $BB'$ ,  $CC'$  y  $AA'$  ( $C'$  y  $A'$  se definen análogamente a como se ha definido  $B'$ ).

**I.0.25.** Con las notaciones del problema anterior, si  $P$  es el punto de Fermat del triángulo  $ABC$ , entonces  $\widehat{APA'} = \pi/3$ . En cuanto a la segunda parte, si  $O_a$  es el centro del triángulo equilátero construido sobre  $BC$ , en el exterior de  $ABC$ , y  $O_b$  se define análogamente, entonces  $O_aO_b$  es ortogonal a  $PC$ .

**I.0.26.** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo. Pongamos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  para indicar los pies de las perpendiculares por el punto  $D$  a las rectas  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Para la desigualdad, aplicar el problema P.0.7 y la desigualdad triangular. La caracterización de la igualdad se puede obtener mediante el problema P.0.22.

**I.0.27.** Si  $R$  es el pie de la altura del vértice  $A$ ,  $ARC$  y  $QPC$  son semejantes.

**I.0.28.** Aplicar el teorema de Pitágoras a los triángulos  $PAY$  y  $PAZ$ , y luego a otros dos pares análogos.

**I.0.29.** Observar que  $BC = PC$ . Basta ver entonces que  $\widehat{CPD} = \widehat{BDP}$ .

**I.0.30.** Dos sectores desiguales contiguos forman un cuarto del octógono.

**I.0.31.** Considerar la circunferencia de centro  $O$  y radio  $OP$ .

**I.0.32.** Considerar la homotecia de centro  $H$  y razón  $1/2$ .

**I.0.33.** La homotecia de centro  $G$  y razón  $-1/2$  transforma la circunferencia  $ABC$  en la circunferencia  $A'B'C'$ , el ortocentro  $H$  en el circuncentro  $O$  y el circuncentro  $O$  en el circuncentro  $O'$  de  $A'B'C'$ .

**I.0.34.** Considerar primero el caso en que el ortocentro coincida con un vértice.

**I.0.35.** Teniendo en cuenta la relación entre la circunferencia circunscrita al triángulo  $ABC$  y el círculo de Euler, se deduce que  $\text{arco}(B'C') = 2\widehat{A}$ ,  $\text{arco}(C'A') = 2\widehat{B}$ ,  $\text{arco}(A'B') = 2\widehat{C}$ . Mirando los ángulos  $\widehat{A'C''H}$  y  $\widehat{A'B''H}$ , se obtiene que  $\text{arco}(A'B'Q) = \text{arco}(A'C'R) = 2\widehat{A}$ , de donde resulta que  $\text{arco}(B'Q) = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}$  y, análogamente,  $\text{arco}(C'R) = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}$ ,  $\text{arco}(A'P) = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}$ . Con esto se obtiene finalmente que  $\text{arco}(P'Q') = 2\pi/3$ , y análogamente para los arcos  $Q'R'$  y  $R'P'$ . (Para una solución completa, en forma dialogada, v. sección 0.5, pág. 49, y para una solución completa convencional, v. sección 0.6, pág. 55.)

**I.0.36.** Si  $P$  es del lugar geométrico,  $\widehat{APB}$  y  $\widehat{AOB}$  son suplementarios.

**I.0.37.** Denotemos  $x, y, z, p, q, r$  las distancias de  $E$  a los vértices  $A, B, C$  y a los lados  $BC, CA, AB$ , respectivamente. Sea  $P'$  el punto de intersección de la bisectriz del ángulo  $2\alpha = \widehat{BEC}$  con el lado  $BC$  y  $p' = |EP'|$ . Definamos  $q'$  y  $r'$  de manera similar relativamente a los ángulos  $2\beta = \widehat{CEA}$  y  $2\gamma = \widehat{AEB}$ . Entonces es suficiente ver que  $x + y + z \geq 2(p' + q' + r')$ , ya que una bisectriz no es inferior a la correspondiente altura. Teniendo en cuenta que  $yz \sin(2\alpha) = p'y \sin(\alpha) + p'z \sin(\alpha)$ , mostrar que  $p' \leq \sqrt{yz} \cos(\alpha) = p''$ , y las desigualdades análogas para  $q'$  y  $r'$ . Véase, finalmente, que  $x + y + z \geq 2(p'' + q'' + r'')$ , ya que la diferencia de las dos expresiones es

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y} \cos(\gamma) - \sqrt{z} \cos(\beta))^2 + (\sqrt{y} \sin(\gamma) - \sqrt{z} \sin(\beta))^2$$

**I.0.38.** Con las mismas notaciones que en la indicación anterior,  $ax \geq qb + rc$ , ya que  $a(x + p) \geq ah_a = pa + qb + rc$ . También tenemos  $ax \geq rb + qc$  (aplicar la desigualdad anterior al punto  $E'$  simétrico de  $E$  respecto a la bisectriz del ángulo  $\widehat{ABC}$ ) y, por tanto,  $2ax \geq (b + c)(q + r)$ . Como  $b + c \geq 2\sqrt{bc}$ ,  $ax \geq \sqrt{bc}(q + r)$ . Multiplicando ordenadamente esta desigualdad y las desigualdades análogas para  $y$  y  $z$ , se obtiene la conclusión.

**I.0.39.** Si  $K$  es ortogonal a  $S$ , y  $A$  y  $B$  son los puntos de intersección de  $K$  y  $S$ , véase que si  $P$  es un punto de  $K$  y  $P'$  el punto de corte de  $OP$  con  $K$  (otro que  $P$ ), entonces el triángulo  $OAP'$  es semejante al triángulo  $OPA$ .

**I.0.40.** Utilizar el problema anterior para ver que si  $P$  y  $P'$  son inversos respecto a  $S$ , entonces todas las circunferencias por  $P$  y  $P'$  son ortogonales a  $S$ .

**I.0.41.** Escoger coordenadas de manera que  $A$  sea el origen y  $\sigma$  la semirrecta de las abscisas positivas. Si  $O = (r, 0)$ ,  $r > 0$ , y  $P = (a, b)$ , calcular  $P'$  (el inverso de  $P$  respecto a la circunferencia de centro  $O$  y radio  $OA$ ) en función de  $r, a$  y  $b$ .

**I.0.42.** Usar el hecho de que las inversas de dos figuras tangentes son tangentes. Para la segunda parte, utilizar el problema anterior.

**I.0.43.** Considerar las inversas respecto a  $S$  de las circunferencias que pasan por  $P$  y  $Q$ .

**I.0.44.** Los inversos de los extremos del diámetro horizontal de  $C_n$  son extremos del diámetro horizontal de  $C'_n$ .

**I.0.45.** Estudiar las inversas de las circunferencias  $C_1, \dots, C_n$  respecto a la circunferencia de centro  $B$  ortogonal a la circunferencia  $C_n$ .

## 0.5 Raquel y Pablo resuelven problemas

En esta sección damos las soluciones, en forma dialogada, de cinco problemas de la lista (P.0.6, P.0.16, P.0.17, P.0.23 y P.0.35). Nos hemos decidido a utilizar este medio porque nos ha parecido indicado para intentar explicar, además de la solución, algunas ideas y procesos que consideramos relevantes para la resolución de problemas de geometría. Las soluciones convencionales de los mismos, que son las que, en definitiva, se exigen en los exámenes, pueden hallarse en la sección 0.6.

En los diálogos, Pablo y Raquel son estudiantes dedicados a la tarea de aprender a resolver problemas de geometría. En la clase de ciencia-ficción donde trabajan, Ariadna, una terminal de ultimísima generación, sigue atentamente sus pasos. Ocasionalmente, cuando lo cree oportuno, hace que Euclides, uno de sus módulos más avanzados, ayude a los estudiantes a reencontrar el hilo de sus disquisiciones. Para aprovechar de manera óptima las cavilaciones de Euclides, conviene darse cuenta de que tiene dos modos de funcionamiento. Uno, que podemos calificar de *declarativo*, imita el proceso de «síntesis» de los antiguos griegos, es decir, enuncia conclusiones que se obtienen directamente de las proposiciones generadas hasta el momento mediante conocimientos establecidos (y generalmente conocidos). El otro, que podemos calificar de *interrogativo*, imita el proceso de «análisis» en el sentido de los antiguos, es decir, hace *preguntas clave* con las cuales usualmente se reducen a un corto número los conocimientos que deben ponerse en juego para intentar conseguir el objetivo del problema. Como veremos, los estudiantes aprenden rápidamente las técnicas de resolución de problemas, y progresivamente la ayuda que necesitan de Euclides se hace más esporádica y considerablemente más sofisticada.

### Problema 0.6

*Después de leer el enunciado, Pablo y Raquel dibujan la figura 0.37. Recuerdan muy bien que en el inicio de las clases el profesor les dijo que, cuando se trataba de resolver problemas de geometría, un dibujo puede ser decisivo. Pero es el primer problema, están un poco cohibidos y no saben muy bien cómo empezar. Viendo la situación, Ariadna solicita a Euclides que les ayude.*

EUCLIDES: El cuadrilátero  $PQUT$  es un paralelogramo.

RAQUEL: Tiene razón, la diagonal  $QS$  es paralela al lado  $PT$  y la diagonal  $TR$  es paralela al lado  $PQ$ .

EUCLIDES: El cuadrilátero  $PQUT$  es un rombo.

PABLO: Claro,  $PT = PQ$  porque el pentágono es regular.

EUCLIDES: Así  $QU = PT$ .

RAQUEL: Obvio.

EUCLIDES: Por tanto,  $QS - PT = QS - QU = US$ .

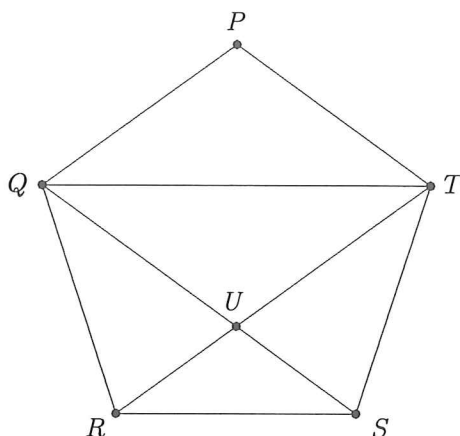


Figura 0.37: El pentágono y la razón áurea

P. y R.: Evidente.

EUCLIDES: Los triángulos  $QTU$  y  $RUS$  son semejantes.

RAQUEL: Ya lo veo, podemos aplicar el criterio AA de semejanza.

PABLO: ¿El que dice que dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales?

RAQUEL: Sí, si no lo recuerdo mal.

*Euclides ha aprovechado estos instantes para acabar su tarea y descarga dos líneas de símbolos:*

EUCLIDES: Por tanto,  $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$ . Y como  $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS-PT}$ , por lo que ya hemos visto, obtenemos que  $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$ .

*Pasan unos momentos y Euclides ya no dice nada más.*

R. y P.: ¿Y...?

EUCLIDES: ¿Qué queráis demostrar?

PABLO: Que el lado del pentágono regular es segmento áureo de la diagonal.

EUCLIDES: ¿Y esto qué significa?

RAQUEL: Según la definición, que si  $a$  es la diagonal y  $x$  el lado, entonces  $a/x = x/(a-x)$ .

EUCLIDES: ¿Y hasta dónde hemos llegado en modo directo?

*Euclides llama «modo directo» a lo que nosotros hemos llamado «declarativo», y llama «modo inverso» a lo que hemos llamado «interrogativo», esto es, lo que ha utilizado después de «¿Y...?».*

PABLO: Hasta la relación  $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$ .

R. Y P.: ¡Ah, ya lo vemos! Efectivamente se ha establecido que el lado  $PT$  es segmento áureo de la diagonal  $QS$ , y esto termina la prueba.

### Problema 0.16

*Ariadna también solicita la ayuda de Euclides, que empieza en modo interrogativo.*

EUCLIDES: ¿Qué tipo de cosas os piden?

PABLO: No entiendo qué quiere decir.

RAQUEL: Yo creo que lo sé: tenemos que demostrar que se cumplen unas ciertas desigualdades.

EUCLIDES: Magnífico. Desigualdades... ¿entre qué?

PABLO: Entre distancias.

EUCLIDES: Excelente. ¿Y de qué disponéis para demostrar desigualdades entre distancias?

PABLO: Sólo conozco la desigualdad triangular.

EUCLIDES: ¿Puedes enunciarla?

PABLO: Sí: en un triángulo, todo lado es inferior a la suma de los otros dos.

EUCLIDES: ¿Y cómo podríamos intentar aplicarla a las desigualdades que nos piden?

*Pablo y Raquel piensan un momento. No saben muy bien qué decir. Euclides interviene, en modo declarativo, para facilitarles la tarea.*

EUCLIDES: El problema pide dos desigualdades; en realidad, estamos en presencia de dos problemas.

RAQUEL: Deberíamos hacer un dibujo.

*En un abrir y cerrar de ojos dibujan la figura 0.38a.*

RAQUEL: Si ponemos  $2p$  para denotar el perímetro de  $ABC$ , tenemos que ver, por un lado, que  $p < x + y + z$ , y, por el otro, que  $x + y + z < 2p$ .

EUCLIDES: Os haré una pregunta más explícita que la anterior: cómo podéis utilizar la desigualdad triangular para establecer  $p < x + y + z$ ?

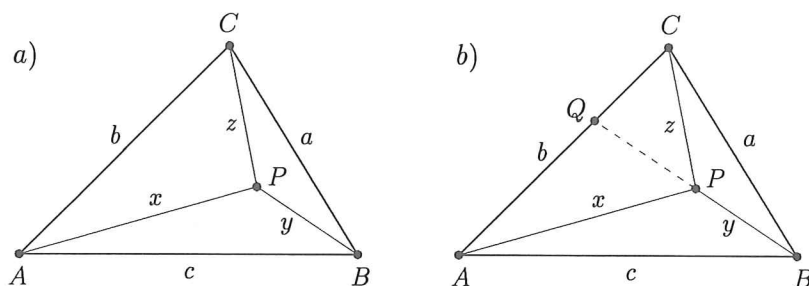


Figura 0.38: Figuras usadas para resolver el problema P.0.16

PABLO: Deberíamos buscar triángulos, en la figura 0.38a, en los que un lado estuviera relacionado con el perímetro y los otros dos con los segmentos  $x, y, z$ .

RAQUEL: ¿Los triángulos  $PAB$ ,  $PBC$  y  $PCA$ , por ejemplo?

PABLO: Sí, por ejemplo. La desigualdad triangular, aplicada a  $PAB$ , nos da  $c < x + y$ .

RAQUEL: Y aplicada a los otros dos nos da, análogamente,  $a < y + z$  y  $b < z + x$ .

PABLO: Sumando las tres desigualdades tenemos  $a + b + c < 2x + 2y + 2z$ .

RAQUEL: Y puesto que  $a + b + c = 2p$ , resulta que  $p < x + y + z$ , como queríamos demostrar.

EUCLIDES: Habéis demostrado una parte del problema P.0.16.

PABLO: La otra parte era la desigualdad  $x + y + z < 2p$ .

RAQUEL: Si intentamos proseguir el análisis de Euclides, ahora nos deberíamos preguntar cómo podemos usar la desigualdad triangular para establecer  $x + y + z < 2p$ .

PABLO: Como en el caso anterior, deberíamos buscar triángulos en los cuales, a la inversa de antes, un lado esté relacionado con los segmentos  $x, y$  y  $z$ , y los otros dos, con el perímetro.

*Miran la figura 0.38a y no consiguen ver ningún triángulo que cumpla lo que quieren. Por un instante no saben qué hacer. Pero de repente Raquel tiene una idea; le parece buena y esto la empuja a explicar sus consecuencias sin pausa:*

RAQUEL: No nos hace falta la desigualdad triangular: es evidente que  $x + y < b + a$ ; análogamente,  $y + z < c + b$  y  $z + x < a + c$ ; sumando,  $2x + 2y + 2z < 2a + 2b + 2c$ , es decir,  $x + y + z < 2p$ . Y ya está, ¡hemos terminado!

PABLO: Esto ha sido brillante, Raquel. Pero... ¿cómo ves que  $x + y < a + b$ ?

RAQUEL: ¡Hum!

PABLO: Puesto que es una desigualdad entre distancias, quizá lo que tenemos que intentar es probarla aplicando de nuevo la desigualdad triangular.

RAQUEL: Tienes razón; ya nos hemos convencido de que es la única herramienta que conocemos para intentar resolver este tipo de cuestiones.

*Pablo completa la figura 0.38a hasta obtener la figura 0.38b.*

PABLO: Creo que ya lo tenemos. Fíjate:  $x < AQ + QP$ , por la desigualdad triangular; por tanto,  $x + y < AQ + QP + y = AQ + QB$ ; ahora  $QB < QC + CB$ , otra vez por la desigualdad triangular, de donde  $AQ + QB < AQ + QC + CB = AC + CB = b + a$ . Por tanto,  $x + y < b + a$ .

RAQUEL: Efectivamente. Y así, sí que la demostración es completa.

### Problema 0.17

*Antes de pasar a intentar resolver el problema P.0.17, Pablo y Raquel leen su enunciado muy atentamente y dibujan la figura 0.39a.*

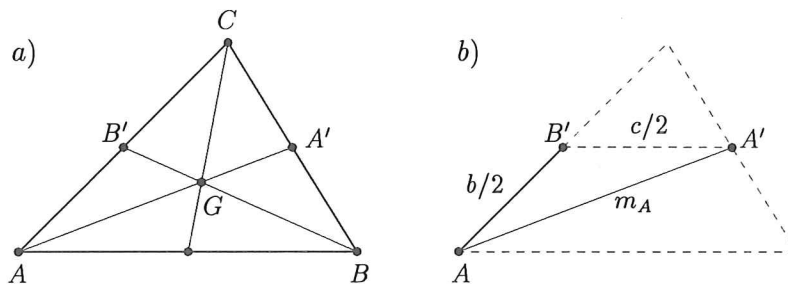


Figura 0.39: Figuras usadas para resolver el problema P.0.17

PABLO: Me pregunto si el problema anterior, aplicado al baricentro  $G$ , nos daría alguna cosa.

RAQUEL: Podemos probarlo. Sólo nos haría falta saber el valor de  $x + y + z$  [con las notaciones del problema anterior y con  $P = G$ ] en términos de  $\mu$  [la suma de las tres medianas].

PABLO: Esto es fácil. Sabemos que  $AG = \frac{2}{3}AA'$ , donde  $A'$  es el punto medio de  $BC$ . En otras palabras,  $x = \frac{2}{3}m_A$ , donde  $m_A$  es la mediana correspondiente al vértice  $A$ . Por tanto,  $x + y + z = \frac{2}{3}\mu$ .

RAQUEL: Y como  $p < x + y + z$  (por el problema P.0.16), resulta que  $p < \frac{2}{3}\mu$ .

PABLO: Que es equivalente a  $\frac{3}{2}p < \mu$ , la primera de las relaciones que queremos demostrar. ¿Qué pasará con la segunda?

RAQUEL: Si aplicamos la segunda desigualdad del problema anterior, obtenemos  $\frac{2}{3}\mu < 2p$ .

PABLO: Pero lo que queremos es  $\mu < 2p$ . Y  $\mu < 2p$  es más fuerte que  $\frac{2}{3}\mu < 2p$ .

RAQUEL: ¿Porque  $\frac{2}{3}\mu < \mu$ , no? ¿Qué le vamos a hacer! Deberemos investigar otra vía.

PABLO: Podemos intentar aplicar la desigualdad triangular otra vez.

RAQUEL: ¡Buena idea! Por lo que hemos aprendido hasta ahora, nos hace falta encontrar triángulos con un lado relacionado con  $\mu$ , y los otros dos, con el perímetro.

*Piensan un poco. Al final dibujan la figura 0.39b.*

PABLO: Puesto que  $A'B' = c/2$ , el triángulo  $AA'B'$  tiene un lado,  $AA'$ , que es la mediana  $m_A$ , mientras que los otros dos lados son iguales a  $c/2$  y  $b/2$ .

RAQUEL: Ergo,  $m_A < c/2 + b/2$ . Análogamente tenemos  $m_B < a/2 + c/2$  y  $m_C < b/2 + a/2$ .

PABLO: Y sumando,  $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$ .

*Raquel y Pablo se disponen a celebrar el éxito. Todavía no han tenido tiempo de empezar, cuando Euclides pregunta:*

EUCLIDES: ¿Creéis que las desigualdades obtenidas son óptimas?

*El interés con que reciben esta cuestión no les priva de tomarse un descanso.*

Consignemos aquí solo que cuando regresaron a la cuestión se dieron cuenta de lo siguiente. En el problema P.0.16, si hacemos  $P = C$ , entonces  $x + y + z = a + b + 0$ . Por tanto, si hacemos que  $c$  sea cada vez más pequeño, entonces  $2p = a + b + c$  tiende a  $a + b = x + y + z$  y, por tanto, la desigualdad  $x + y + z < 2p$  no se puede mejorar. Por otro lado, si hacemos  $P = A$  y hacemos tender  $c$  a 0, entonces  $x + y + z = 0 + a + c$  tiende a  $a$  y  $p = (a + b + c)/2$  tiende a  $(2a)/2 = a$ , con lo cual se ve que la desigualdad  $p < x + y + z$  tampoco se puede mejorar. En cuanto al problema P.0.17, se dieron cuenta, considerando un triángulo con  $c$  cada vez más pequeño, que la desigualdad  $\mu < 2p$  no se puede mejorar, y considerando un triángulo en el que  $C$  tiende al punto medio de  $AB$ , que tampoco se puede mejorar la desigualdad  $\frac{3}{2}p < \mu$ .

### Problema 0.23

EUCLIDES: ¿Qué nos piden?

RAQUEL: Demostrar que el triángulo órtico de un triángulo dado es el que tiene el perímetro más pequeño entre todos los triángulos inscritos al primero.

PABLO: Es decir, se trata de ver que una determinada longitud es mínima entre las que satisfacen unas ciertas condiciones.

EUCLIDES: ¿Qué enunciados conocéis que permitan concluir que una longitud es mínima?

RAQUEL: Yo sólo sé que entre todas las curvas que unen dos puntos, la recta es la que tiene longitud menor.

EUCLIDES: ¿Podríamos usar este conocimiento para determinar si un triángulo inscrito tiene perímetro mínimo?

PABLO: No lo veo fácil, ya que el triángulo es una línea cerrada.

*Hacen una pausa para dibujar la figura 0.40a.*

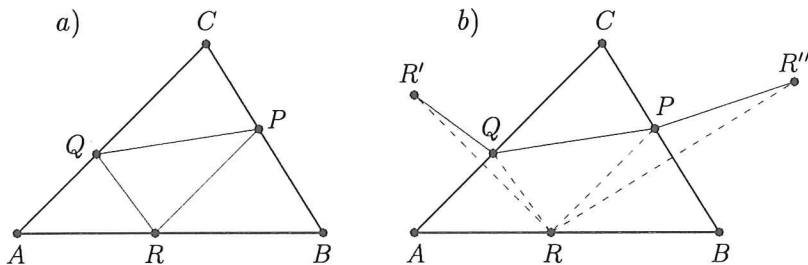


Figura 0.40: Resolución del problema de Fagnano

RAQUEL: Quizá podríamos abrirlo [el triángulo  $PQR$ ]... de algún modo que nos resultara útil.

PABLO: ¡Genial! Quizá una forma de conseguirlo sea cambiar los lados  $QR$  y  $PR$  por sus simétricos  $QR'$  y  $QR''$  respecto a los lados  $AC$  y  $BC$ .

RAQUEL: Veamos qué aspecto tendría haciendo una figura.

*Dibujan la figura 0.40b.*

RAQUEL: La línea  $R'QPR''$  tiene así la misma longitud que el perímetro del triángulo inscrito  $PQR$ .

PABLO: Sí, claro; por las propiedades de las simetrías sabemos que  $R'Q = RQ$  y  $R''P = RP$ .

RAQUEL: Además,  $R'$  y  $R''$  no dependen en absoluto de  $P$  y  $Q$ ; solo dependen de la posición de  $R$ .

PABLO: ¡Ya veo cómo utilizar la propiedad de la línea recta!

Pablo dibuja la figura 0.41a, mientras explica:

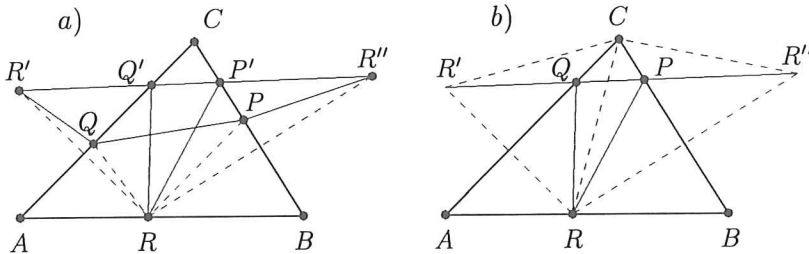


Figura 0.41: Resolución del problema de Fagnano (continuación)

PABLO: Si consideramos el segmento  $R'R''$ , y este corta los segmentos  $AC$  y  $BC$  en los puntos  $Q'$  y  $P'$ , entonces  $R'R''$  es el perímetro del triángulo  $P'Q'R$ . Y puesto que  $R'R''$  es más corto que  $R'QPR''$  (o igual, si por casualidad fuese  $Q' = Q$  y  $P' = P$ ), el triángulo  $P'Q'R$  tiene el perímetro más pequeño (o igual) que  $PQR$ . De hecho, es el de perímetro más pequeño siempre que mantengamos  $R$  fijo.

RAQUEL: Ahora deberíamos ver, pues, para qué punto  $R$  tiene el segmento  $R'R''$  longitud mínima, ya que entonces el triángulo  $P'Q'R$  será la solución del problema.

*Pablo y Raquel permanecen en silencio. No ven qué pueden hacer. Han llegado hasta aquí ayudados por Euclides en modo inverso. Para que puedan seguir, Euclides cambia súbitamente a modo directo.*

EUCLIDES: El triángulo  $CR'R''$  es isósceles.

RAQUEL: ¿Por qué?

EUCLIDES:  $CR' = CR = CR''$  por las propiedades de las simetrías.

*Para poder seguir, dibujan la figura 0.41b. Deciden olvidarse de los puntos  $P$  y  $Q$  del triángulo inscrito inicial y usar las letras  $P$  y  $Q$  para designar los puntos que antes eran  $P'$  y  $Q'$ .*

PABLO: De hecho, pues,  $CR'R$  y  $CRR''$  también son isósceles.

RAQUEL: Además,  $CA$  y  $CB$  son las alturas de los dos últimos triángulos respecto al vértice  $C$ .

- PABLO: De esto resulta que el ángulo  $\widehat{R'CR''}$  es el doble del ángulo  $\widehat{ACB}$ . Puesto que este último es fijo,  $\widehat{R'CR''}$  también es fijo; quiero decir que no depende de  $R$ .
- RAQUEL: Tenemos un triángulo isósceles,  $R'CR''$ , queremos minimizar su base  $R'R''$  y sabemos que el ángulo opuesto a la base es constante.
- PABLO: En estas condiciones, la base será mínima cuando los lados (que son iguales) sean mínimos.
- RAQUEL: Como los lados son iguales a  $CR$ , la base  $R'R''$  será mínima cuando el segmento  $CR$  lo sea.
- PABLO: ¡Fantástico!  $CR$  es mínimo cuando  $R$  es el pie de la altura respecte al vértice  $C$ .
- RAQUEL: Por tanto, el triángulo inscrito de perímetro mínimo es tal que  $R$  es el pie de la altura y  $P$  y  $Q$  se construyen como ya se ha indicado.
- PABLO: Puesto que el papel de  $R$  en las consideraciones anteriores lo podrían haber hecho  $P$  o  $Q$ , realmente  $P$  y  $Q$  también son los pies de las correspondientes alturas.
- RAQUEL: De hecho, hemos demostrado, pues, que el triángulo inscrito de perímetro mínimo es el triángulo órtico, y que los simétricos de un vértice del triángulo órtico respecto a los dos lados que no lo contienen están alineados con los otros dos vértices (del triángulo órtico).
- PABLO: ¡Es muy curioso!

*Mientras celebran alegremente estas excelentes conclusiones...*

- EUCLIDES: ¿Dónde habéis utilizado la hipótesis de que el triángulo es acutángulo? ¿Es indispensable esta hipótesis? ¿Podrías utilizar vuestra conclusión para resolver el problema P.0.19?

### Problema 0.35

*Raquel y Pablo recuerdan que el círculo de los nueve puntos es el círculo  $A'B'C'$ , donde  $A', B', C'$  son los puntos medios de los lados, y que este círculo, también denominado «de Euler», pasa por los pies  $P, Q, R$  de las alturas y por los puntos medios  $A'', B'', C''$  de los segmentos  $HA, HB, HC$ . También recuerdan, por lo que han visto en problemas anteriores, que la homotecia de centro el baricentro  $G$  transforma el círculo circunscrito  $ABC$  en  $A'B'C'$ . Antes de decidir qué hacer, dibujan la figura 0.42 (se lo arreglan de manera que  $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C}$ ). De acuerdo con el enunciado, el punto  $P'$  del arco  $A'P$  se define de manera que el arco  $A'P' = \frac{1}{3}A'P$ ; y los puntos  $Q'$  y  $R'$  se definen de manera similar.*

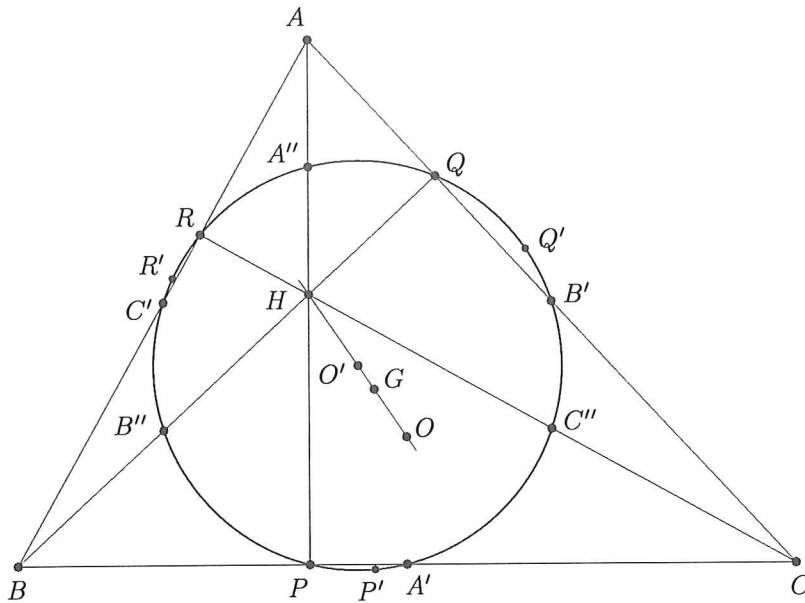


Figura 0.42: Puntos  $P', Q', R'$  del círculo de Euler

RAQUEL: Queremos ver que  $P'Q'R'$  es un triángulo equilátero.

PABLO: Seguro que aquí Euclides preguntaría: ¿Cómo podemos ver que un triángulo es equilátero?

RAQUEL: Una manera de hacerlo es aplicar la definición: un triángulo es equilátero cuando sus tres lados son iguales. También basta ver que sus tres ángulos son iguales (necesariamente de amplitud  $\pi/3$ ). Lo que todavía no veo es cómo aplicar alguno de estos criterios al problema.

PABLO: Debido a que  $P'Q'R'$  están sobre el círculo de Euler, quizás el segundo criterio iría mejor.

RAQUEL: A mi también me lo parece. Deberíamos ver que, en el triángulo  $P'Q'R'$ , los ángulos  $\widehat{P'}$ ,  $\widehat{Q'}$  y  $\widehat{R'}$  tienen amplitud  $\pi/3$ .

PABLO: Puesto que estos ángulos están inscritos en el círculo de Euler, esto equivale a decir que los arcos  $P'Q'$ ,  $Q'R'$  y  $R'P'$  sobre el círculo de Euler tienen una amplitud de  $2\pi/3$  radianes.

RAQUEL: Quizá no será tan difícil como podía parecer. Sobre el círculo de Euler tenemos ahora 12 puntos y quizá nos iría bien, antes de seguir, deducir las amplitudes de algunos de los arcos entre estos puntos.

PABLO: Me parece bien. Los arcos  $A'B'$ ,  $B'C'$  y  $C'A'$ , por ejemplo, son fáciles: sus amplitudes son las mismas que las de los arcos  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$  sobre el

círculo circunscrito  $ABC$ , es decir, iguales a  $2\widehat{C}$ ,  $2\widehat{A}$  y  $2\widehat{B}$ .

RAQUEL: Supongo que la primera afirmación que haces proviene de la homotecia que transforma  $ABC$  en  $A'B'C'$ , y que la segunda es consecuencia directa de lo que sabemos de ángulos inscritos.

PABLO: Efectivamente.

$$\text{arco } A'B' = 2\widehat{C}, \quad \text{arco } B'C' = 2\widehat{A}, \quad \text{arco } C'A' = 2\widehat{B}$$

Ahora ya no veo ninguna más.

RAQUEL: Yo veo una relación que quizá nos puede dar algo más. Fíjate [mientras lo dice, dibuja la figura 0.43]: Como  $A'$  es el punto medio de  $BC$  y  $C''$  el punto medio de  $CH$ , resulta que  $A'C''$  es paralela a la altura  $BH$ .

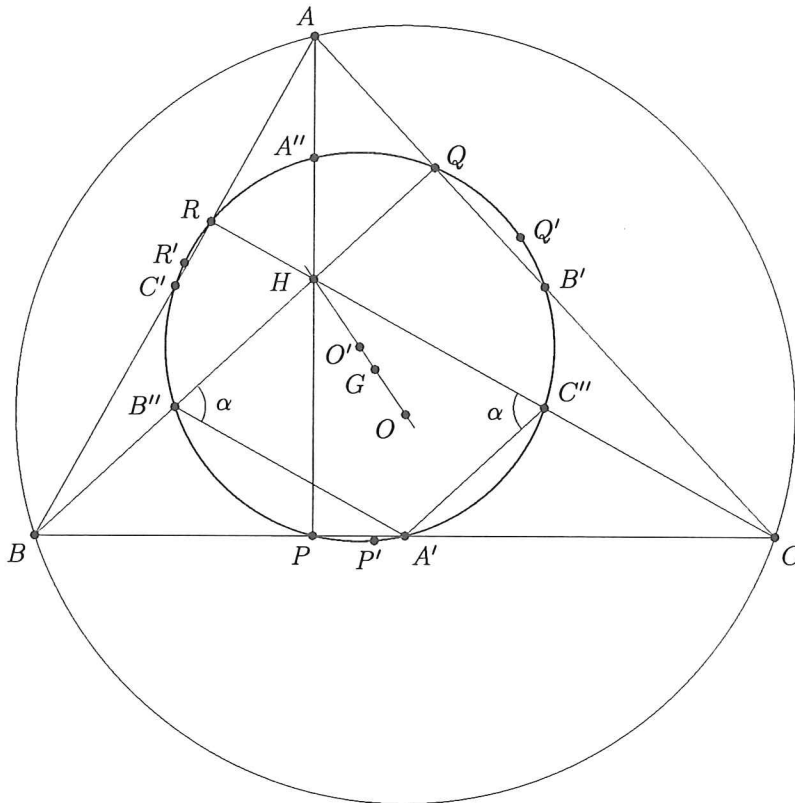


Figura 0.43: Determinación de ángulos centrales sobre el círculo de Euler

PABLO: Análogamente,  $A'B''$  es paralela a la altura  $CH$ .

RAQUEL: Y así  $A'C''HB''$  es un paralelogramo.

PABLO: ¿Y todo esto qué tiene que ver con los ángulos?

*Raquel pone la letra  $\alpha$  en cada uno de los ángulos  $\widehat{A'C''H}$  y  $\widehat{HB''A'}$ .*

RAQUEL: Son iguales porque son ángulos opuestos en un paralelogramo.

PABLO: Ya veo. Por ángulos inscritos otra vez,  $2\alpha$  es igual al arco  $A'C'R$  y también al arco  $A'B'Q$ .

RAQUEL: Los lados  $C''A'$  y  $C''H$  del ángulo  $\widehat{A'C''H}$  son perpendiculares, respectivamente, a los lados  $AC$  y  $AB$ . Por tanto, de hecho,  $\alpha = \widehat{A}$ .

PABLO: Un gran paso: ahora ya tenemos que la amplitud de los arcos  $A'B'Q$  y  $A'C'R$  es igual a  $2\widehat{A}$ .

RAQUEL: Y por diferencia [ $B'Q = A'Q - A'B'$  y  $C'R = A'R - A'C'$ ] obtenemos que arco  $B'Q = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}$  y arco  $C'R = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}$ . Análogamente, será arco  $A'P = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}$ . Es decir,

$$\text{arco } B'Q = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}, \quad \text{arco } C'R = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}, \quad \text{arco } A'P = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}$$

PABLO: Ahora ya podemos calcular el arco  $P'Q'$ :

$$\begin{aligned} \text{arco } P'Q' &= \frac{1}{3}\text{arco } A'P + \text{arco } A'B' + \text{arco } \frac{1}{3}B'Q \\ &= \frac{2}{3}(\widehat{B} - \widehat{C}) + 2\widehat{C} + \frac{2}{3}(\widehat{A} - \widehat{C}) \\ &= \frac{2}{3}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Que arco  $Q'R' = \frac{2\pi}{3}$  y arco  $R'P' = \frac{2\pi}{3}$ , se ve de manera análoga.

*Pablo y Raquel dibujan la figura 0.44, simplemente para disfrutar de ver con imágenes lo que han visto antes con los ojos de la geometría. Antes de tener tiempo de cerrar la terminal y los cuadernos, Euclides tiene tiempo de generar una pregunta.*

EUCLIDES: ¿Qué podéis decir de las tres parejas de arcos  $A'C''$  y  $B'C''$ ,  $PB''$  y  $C'B''$ ,  $QA''$  y  $RA''$ ?

Podemos transcribir brevemente que Raquel y Pablo vieron rápidamente que  $RA'' = QA''$ , basándose en que las alturas son bisectrices del triángulo órtico, y que  $RA'' = QA'' = \pi - 2\widehat{A}$ , usando el trabajo realizado en el último problema. Análogamente,  $PB'' = RB'' = \pi - 2\widehat{B}$  y  $PC'' = QC'' = \pi - 2\widehat{C}$ . Esto, y de nuevo los resultados del primer problema, les permite ver que  $B'C'' = C'B'' = \pi - 2\widehat{A}$  y  $A'C'' = PB'' = \pi - 2\widehat{B}$ .

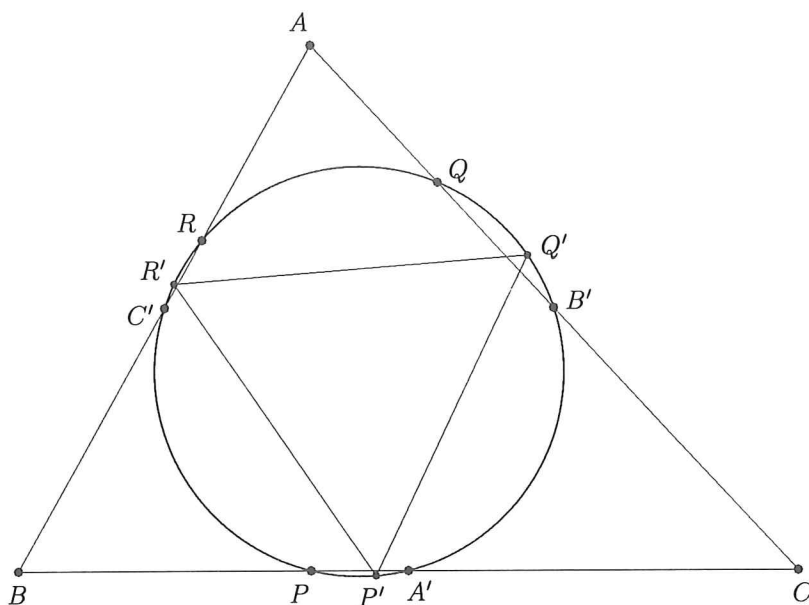


Figura 0.44: El triángulo equilátero  $P'Q'R'$

## 0.6 Muestra de soluciones

En esta sección se incluyen soluciones convencionales de los problemas P.0.6, P.0.16, P.0.17, P.0.23 y P.0.35. Estas mismas soluciones las podemos encontrar expuestas en forma dialogada en la sección 0.5, lo cual puede resultar de interés para los lectores que quieran reflexionar con más detenimiento sobre el proceso de resolución de problemas.

### Problema 0.6

Consideremos la figura 0.37 (pág. 41). El cuadrilátero  $PQUT$  es un rombo, ya que la diagonal  $QS$  es paralela al lado  $PT$ , la diagonal  $TR$  es paralela al lado  $PQ$  y  $PT = PQ$  (porque el pentágono es regular). Así  $QU = PT$ , de donde resulta que  $QS - PT = QS - QU = US$ .

Por otra parte, los triángulos  $QTU$  y  $RUS$  son semejantes (criterio AA de semejanza). Por tanto,  $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$ . Y puesto que  $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS-PT}$ , por lo que ya hemos visto, obtenemos que  $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$ . Por tanto, el lado  $PT$  es segmento áureo de la diagonal  $QS$ , por la definición de segmento áureo.

### Problema 0.16

Como nos piden que demos dos desigualdades entre distancias, intentaremos aplicar la desigualdad triangular. Con las notaciones de la figura 0.38a, si denotamos  $2p$  el perímetro de  $ABC$ , tenemos que ver, por una parte, que  $p < x + y + z$ , y, por la

otra, que  $x + y + z < 2p$ .

Para establecer que  $p < x + y + z$ , fijémonos en los triángulos  $PAB$ ,  $PBC$  y  $PCA$ . La desigualdad triangular, aplicada a  $PAB$ , nos da  $c < x + y$ . Análogamente,  $a < y + z$  y  $b < z + x$ . Sumando las tres desigualdades tenemos  $a + b + c < 2x + 2y + 2z$ . Puesto que  $a + b + c = 2p$ , resulta que  $p < x + y + z$ .

Falta ver la desigualdad  $x + y + z < 2p$ . Consideremos la figura 0.38b. Aplicando la desigualdad triangular obtenemos:  $x + y < AQ + QP + y = AQ + QB < AQ + QC + CB = AC + CB = b + a$ . Análogamente,  $y + z < c + b$  y  $z + x < a + c$ ; sumando,  $2x + 2y + 2z < 2a + 2b + 2c$ , es decir,  $x + y + z < 2p$ .

### Problema 0.17

El problema P.0.16, aplicado al baricentro  $G$ , nos da la primera desigualdad. En efecto, con las notaciones de la figura 0.39a, sabemos que  $AG = \frac{2}{3}AA'$ , donde  $A'$  es el punto medio de  $BC$ . En otras palabras,  $x = \frac{2}{3}m_A$ , donde  $m_A$  es la mediana correspondiente al vértice  $A$ . Por tanto,  $x + y + z = \frac{2}{3}\mu$ . Como  $p < x + y + z$  (por el problema P.0.16), resulta que  $p < \frac{2}{3}\mu$ , que es equivalente a  $\frac{3}{2}p < \mu$ . Cabe destacar que, si aplicamos la segunda desigualdad del problema P.0.16, obtenemos  $\frac{2}{3}\mu < 2p$ , que es una desigualdad más débil que la desigualdad  $\mu < 2p$  que queremos demostrar.

Para ver que  $\mu < 2p$ , consideremos la figura 0.39b. Puesto que  $A'B' = c/2$ , el triángulo  $AA'B'$  tiene un lado,  $AA'$ , que es la mediana  $m_A$ , mientras que los otros dos lados son iguales a  $c/2$  y  $b/2$ . Por tanto,  $m_A < c/2 + b/2$ . Análogamente, tenemos  $m_B < a/2 + c/2$  y  $m_C < b/2 + a/2$ . Si ahora sumamos estas tres desigualdades, obtenemos  $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$ .

### Problema 0.23

Consideremos la figura 0.40a. Queremos ver que  $PQR$  tiene perímetro mínimo si y solo si  $PQR$  es el triángulo órtico de  $ABC$ . Sean  $R'$  y  $R''$  los simétricos del punto  $R$  respecto a los lados  $AC$  y  $BC$ , respectivamente (figura 0.40b). La línea  $R'QPR''$  tiene la misma longitud que el perímetro del triángulo inscrito  $PQR$ . Si consideramos los puntos de intersección,  $Q'$  y  $P'$ , de  $R'R''$  con los lados  $AC$  y  $BC$ , respectivamente (figura 0.41a), entonces el perímetro de  $P'Q'R$  es igual a  $R'R''$ . Como la longitud de  $R'R''$  es inferior (o igual) a la longitud de la línea  $R'QPR''$ , vemos que el triángulo  $P'Q'R$  es el de perímetro más pequeño entre todos los triángulos inscritos  $PQR$  (con  $R$  fijo). Ahora nos hace falta ver para qué punto  $R$  del lado  $AB$  tiene el segmento  $R'R''$  longitud mínima, ya que entonces el triángulo  $P'Q'R$  será la solución del problema.

Destaquemos que el triángulo  $CR'R''$  es isósceles ( $CR' = CR = CR''$  por las propiedades de las simetrías; v. figura 0.41b). De hecho,  $CR'R$  y  $CRR''$  también son isósceles y  $CA$  y  $CB$  son perpendiculares a  $RR'$  y  $RR''$ . Resulta que el ángulo  $\widehat{R'CR''}$  es el doble del ángulo  $\widehat{ACB}$ . Puesto que este último es fijo,  $\widehat{R'CR''}$  también es fijo (es decir, no depende de  $R$ ). Por tanto, la base  $R'R''$  del triángulo isósceles  $R'CR''$  tiene longitud mínima si y solo si sus lados tienen longitud mínima. Pero como los lados son iguales a  $CR$ , la base  $R'R''$  será mínima cuando el segmento  $CR$  lo sea, es decir, si y solo si  $R$

es el pie de la altura del vértice  $C$ . Análogamente, se verá que  $P$  y  $Q$  tienen que ser los pies de las alturas de  $A$  y  $B$ , respectivamente.

### Problema 0.35

Recordemos que el círculo de los nueve puntos es el círculo  $A'B'C'$ , donde  $A', B', C'$  son los puntos medios de los lados, y que este círculo, también denominado *de Euler*, pasa por los pies  $P, Q, R$  de las alturas y por los puntos medios  $A'', B'', C''$  de los segmentos  $HA, HB, HC$ . Recordemos también, por lo que hemos visto en problemas anteriores, que la homotecia de centro  $G$  (el baricentro) transforma el círculo circunscrito  $ABC$  en  $A'B'C'$ .

Consideremos la figura 0.42 (supondremos que  $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C}$ ). De acuerdo con el enunciado, el punto  $P'$  del arco  $A'P$  se define de manera que  $\text{arco}(A'P') = \frac{1}{3}\text{arco}(A'P)$ ; y los puntos  $Q'$  y  $R'$  se definen de manera similar. Queremos ver que  $P'Q'R'$  es un triángulo equilátero, por lo cual es suficiente ver que los ángulos  $\widehat{P'Q'}$  y  $\widehat{P'R'}$  (del triángulo  $P'Q'R'$ ) tienen amplitud  $\pi/3$ . Como estos ángulos están inscritos en el círculo de Euler, esto es equivalente a decir que los arcos  $P'Q', Q'R'$  y  $R'P'$  sobre el círculo de Euler tienen una amplitud de  $2\pi/3$  radianes.

Las amplitudes de los arcos  $A'B', B'C'$  y  $C'A'$  coinciden con las de los arcos  $AB, BC$  y  $CA$  sobre el círculo circunscrito  $ABC$ , es decir, son iguales a  $2\widehat{C}, 2\widehat{A}$  y  $2\widehat{B}$  (por la homotecia que transforma  $ABC$  en  $A'B'C'$  y por las propiedades de los ángulos inscritos en el círculo  $ABC$ ). Por tanto,

$$\text{arco}(A'B') = 2\widehat{C}, \quad \text{arco}(B'C') = 2\widehat{A}, \quad \text{arco}(C'A') = 2\widehat{B}$$

Consideremos ahora la figura 0.43. Puesto que  $A'$  es el punto medio de  $BC$  y  $C''$  el punto medio de  $BH$ , resulta que  $A'C''$  es paralela a la altura  $BH$ . Análogamente,  $B'A''$  es paralela a la altura  $CH$  y  $C'B''$  es paralela a la altura  $AH$ . Por tanto,  $A'C''HB'$  es un paralelogramo. Así obtenemos que los ángulos  $\widehat{A'C''H}$  y  $\widehat{HB'A'}$  son iguales. Pero, para ángulos inscritos otra vez,  $2\alpha$  es igual al arco  $A'C'R$  y también al arco  $A'B'Q$ . Además, los lados  $C''A'$  y  $C''H$  del ángulo  $\widehat{A'C''H}$  son perpendiculares, respectivamente, a los lados  $AC$  y  $AB$ . Por tanto,  $\alpha = \widehat{A}$ . Tenemos, pues, que la amplitud de los arcos  $A'B'Q$  y  $A'C'R$  es igual a  $2\widehat{A}$ . Por diferencia [ $B'Q = A'Q - A'B'$  y  $C'R = A'R - A'C'$ ] obtenemos que  $\text{arco}B'Q = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}$  y  $\text{arco}C'R = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}$ . Análogamente será  $\text{arco}A'P = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}$ . Es decir,

$$\text{arco}(B'Q) = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}, \quad \text{arco}(C'R) = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}, \quad \text{arco}(A'P) = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}$$

Ahora ya podemos calcular el arco  $P'Q'$ :

$$\begin{aligned} \text{arco}(P'Q') &= \frac{1}{3}\text{arco}(A'P) + \text{arco}(A'B') + \frac{1}{3}\text{arco}(B'Q) \\ &= \frac{2}{3}(\widehat{B} - \widehat{C}) + 2\widehat{C} + \frac{2}{3}(\widehat{A} - \widehat{C}) \\ &= \frac{2}{3}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Análogamente,  $\text{arco}(Q'R') = \frac{2\pi}{3}$  y  $\text{arco}(R'P') = \frac{2\pi}{3}$ .



# 1 Geometría afín

En este capítulo introducimos primero el espacio afín, mediante axiomas basados en el álgebra lineal y sugeridos por las propiedades del cálculo vectorial asociado a un espacio geométrico ordinario. A continuación consideramos las variedades lineales de un espacio afín (en particular, los puntos, las rectas y los planos), las cuales se pueden definir, en un sentido natural, como los subespacios afines del citado espacio.

Con tal de manipular efectivamente las figuras de un espacio afín, por ejemplo las variedades lineales, se introducen los sistemas de referencia afines. Fijada una referencia afín, cada punto tiene unas coordenadas unívocamente definidas y así las relaciones entre puntos se traducen en relaciones entre las correspondientes coordenadas. Por ejemplo, los puntos cuyas las coordenadas satisfacen un sistema dado de ecuaciones lineales forman una variedad lineal, y recíprocamente, toda variedad lineal se puede describir de esta manera.

Las aplicaciones entre espacios afines que son compatibles con las estructuras de espacio afín se denominan aplicaciones afines. Las aplicaciones afines biyectivas de un espacio afín en sí mismo se denominan afinidades y constituyen un grupo con el producto de composición (el grupo afín del espacio en cuestión). Mediante referencias afines, las afinidades se pueden representar algebraicamente y esta representación (ecuaciones de las afinidades) nos permite manipularlas de forma efectiva.

Conviene decir aquí que la geometría afín es el estudio de los conceptos y propiedades que permanecen inalterados por las afinidades. Estos conceptos y propiedades se dice que son afines. Por ejemplo, el concepto de variedad lineal y la relación de paralelismo de variedades lineales son afines, pero el concepto de ángulo o la relación de perpendicularidad no lo son (en el capítulo 2 veremos que son de naturaleza métrica). Un concepto afín básico, ya que se puede usar para definir conceptos y relaciones afines más complejos, es la razón simple de una terna de puntos alineados. En cierto modo, es el concepto afín fundamental, ya que una aplicación de un espacio afín en sí mismo es una afinidad si y solo si transforma puntos alineados en puntos alineados y conserva el valor de las razones simples.

## 1.1 Espacio afín

La estructura de espacio afín es una abstracción de las propiedades del cálculo con vectores libres del espacio geométrico ordinario que no dependen del concepto de distancia (cf. ejemplo 1.3). Esta noción fue introducida formalmente por H. Weyl en su libro *Space, time, matter* (Dover, 1952), pero de hecho sus rasgos principales se empezaron a entrever con la obra de Descartes y se han ido perfilando lentamente en el transcurso del tiempo. La noción de espacio afín, además de su importancia en geometría, es la base de la mecánica de Newton y de la relatividad especial de Einstein.

### *Definiciones y notaciones básicas*

Sea  $K$  un cuerpo. Un *espacio afín sobre  $K$*  es una terna  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  formada por un conjunto no vacío  $\mathbb{A}$ , cuyos elementos denominaremos *puntos*, un  $K$ -espacio vectorial  $V$ , cuyos elementos llamaremos *vectores*, y una aplicación

$$\delta: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V$$

que denotaremos  $(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$  y llamaremos *aplicación estructural*, que verifican los dos axiomas siguientes:

**1.1 Axioma (Homogeneidad).** *Para todo punto  $P$  y todo vector  $v$  existe un único punto  $Q$  tal que  $\overrightarrow{PQ} = v$ .*

**1.2 Axioma (Ley de adición).**  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ , cualesquiera que sean  $P, Q, R \in \mathbb{A}$ .

El axioma de homogeneidad se puede expresar también diciendo que *para todo punto  $P$ , la aplicación*

$$\delta_P: \mathbb{A} \rightarrow V \text{ tal que } Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$$

*es una biyección.* La inyectividad de  $\delta_P$  significa que de  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$  podemos inferir  $Q = R$ . Por otro lado, la ley de adición también se puede escribir en la forma

$$\delta_P(R) = \delta_Q(R) + \overrightarrow{PQ} \tag{1.1}$$

o, abreviadamente,  $\delta_P = \delta_Q + \overrightarrow{PQ}$  (v. figura 1.1).

Abusando de notación y de lenguaje, a menudo escribiremos  $\mathbb{A}$  en lugar de  $(\mathbb{A}, V, \delta)$ , y nos referiremos a  $\mathbb{A}$  diciendo que es un espacio afín y a  $V$  diciendo que es el *espacio vectorial asociado* al espacio afín. Por ejemplo, diremos que  $\mathbb{A}$  tiene *dimensión  $n$* , y escribiremos  $\dim(\mathbb{A}) = n$ , o simplemente  $\mathbb{A}^n$ , si  $V$  tiene dimensión  $n$  sobre  $K$ . Estos abusos, en general, son inofensivos debido a que por el contexto siempre está claro a qué espacio afín nos estamos refiriendo.

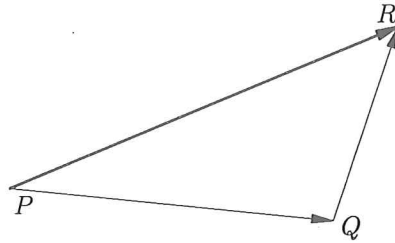


Figura 1.1: Ley de adición

**E.1.1.1.** Comprobar que un espacio afín de dimensión 0 contiene un único punto.

A pesar de que los espacios afines de dimensión infinita tienen importancia en distintos contextos, en este curso sólo consideraremos espacios afines de dimensión finita, condición que supondremos de ahora en adelante. Los espacios afines de dimensión 1 (respectivamente, 2) se denominan *rectas afines* (respectivamente, *planos afines*). Las locuciones *espacio afín real* y *espacio afín complejo* se usarán como sinónimas de espacio afín sobre  $\mathbb{R}$  y de espacio afín sobre  $\mathbb{C}$ , respectivamente.

**1.3 Ejemplo** (Espacio afín ordinario). En la presentación que hacemos en este texto, en el capítulo 2, la noción de espacio euclidiano se define a partir de la noción de espacio afín real. Sin embargo, el proceso histórico fue justo al revés: la noción de espacio afín se originó en el estudio del espacio euclidiano. Incluso las notaciones y la nomenclatura relativas a los espacios afines se explican, en buena medida, por este origen. Así pues, una explicación de este proceso, a pesar de que solo sea de una manera muy esquemática e informal, puede ayudar a comprender la naturaleza de los ingredientes y de los axiomas de espacio afín que hemos introducido.

El espacio afín que se asocia al espacio euclidiano  $\mathcal{E}$  está formado por el conjunto  $\mathbb{A}$  de los puntos de  $\mathcal{E}$ , por el espacio vectorial real  $V$  de las traslaciones de  $\mathcal{E}$  y por la aplicación  $\delta: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V$  tal que  $\delta(P, Q)$  es la traslación  $t_{PQ}$  tal que  $t_{PQ}(P) = Q$ . La ley de adición es consecuencia de que la composición de las traslaciones  $t_{PQ}$  y  $t_{QR}$  es la traslación  $t_{PR}$  y el axioma de homogeneidad se cumple por cuanto una traslación queda unívocamente determinada por la imagen de un punto. Seguidamente explicamos con cierto detalle cómo se definen la traslación  $t_{PQ}$  y la estructura de espacio vectorial real en el conjunto  $V$  de las traslaciones.

Primero es preciso introducir algunas notaciones. Dados dos puntos distintos  $P, Q \in \mathbb{A}$ , la recta  $PQ$  es unión de dos semirrectas de origen  $P$ . De estas semirrectas, la que contiene  $Q$  será denotada  $|PQ\rangle$  y la que no contiene  $Q$ ,  $\langle PQ|$ . Asimismo utilizaremos  $\overline{PQ}$  para denotar la distancia entre  $P$  y  $Q$ . Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la expresión  $M_\lambda(P, Q)$  denotará, cuando  $\lambda \geq 0$ , el punto  $M$  de la semirrecta  $|PQ\rangle$  tal que  $\overline{PM} = \lambda \overline{PQ}$  y, cuando

$\lambda < 0$ , el punto  $M$  de la semirrecta  $\langle PQ |$  tal que  $\overline{PM} = -\lambda \overline{PQ}$  (este punto coincide con  $M_{1-\lambda}(Q, P)$ ). La aplicación  $\lambda \mapsto M_\lambda(P, Q)$ , de  $\mathbb{R}$  en la recta  $PQ$ , es biyectiva. Convendremos que  $M_\lambda(P, P) = P$  para todo punto  $P \in \mathbb{A}$  y todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Para definir la traslación  $t_{PQ}$  tenemos que especificar cómo transforma un punto  $R$  cualquiera. Si  $R \notin PQ$ ,  $t_{PQ}(R)$  es el punto de intersección de la recta por  $R$  que es paralela a la recta  $PQ$  con la recta por  $Q$  que es paralela a la recta  $PR$  (v. figura 1.3, en la cual  $S = t_{PQ}(R)$ ). Si  $R \in PQ$ , entonces escogemos un punto  $S$  exterior a la recta  $PQ$  (v. figura 1.2), formamos el punto  $T$  de intersección de la recta por  $S$  paralela a  $PQ$  con la recta por  $Q$  paralela a  $PS$  y definimos  $t_{PQ}(R)$  como la intersección de la recta por  $T$  paralela a  $SR$  con la recta  $PQ$ . Esta definición tiene sentido porque se puede comprobar que no depende del punto  $S$  escogido. También se puede definir  $t_{PQ}(R)$ , cuando  $R \in PQ$ , por la fórmula  $t_{PQ}(R) = M_{\lambda+d}(P, Q)$ , donde  $d = \overline{PQ}$  y donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  es tal que  $R = M_\lambda(P, Q)$ .

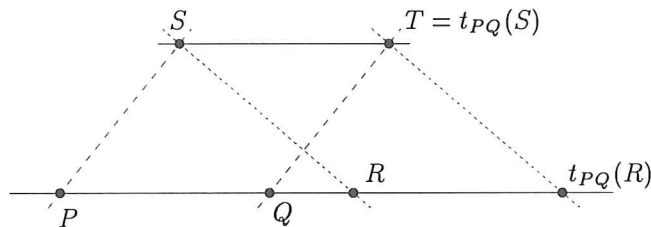


Figura 1.2: Definición de  $t_{PQ}(R)$  cuando  $R \in PQ$

La suma de traslaciones se define como la operación de composición. El conjunto  $V$  de traslaciones, con esta suma, resulta ser un grupo abeliano. Por otro lado, el producto  $\lambda t_{PQ}$  del número real  $\lambda$  por la traslación  $t_{PQ}$  se define como la traslación  $t_{PM}$ , donde  $M = M_\lambda(P, Q)$ . Este producto está bien definido, debido a que se puede comprobar que si  $t_{PQ} = t_{RS}$ ,  $M = M_\lambda(P, Q)$  y  $N = M_\lambda(R, S)$ , entonces  $t_{PM} = t_{RN}$ . Finalmente se comprueba que  $V$ , con el producto  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$  que acabamos de describir, es un espacio vectorial real.

Veamos, para terminar, otra manera de entender el espacio vectorial  $V$ . Un *segmento orientado* de  $\mathbb{A}$  es un par ordenado  $(P, Q)$  de puntos de  $\mathbb{A}$ : se dice que  $P$  es el *origen* y  $Q$  el *extremo* del segmento. Dos segmentos orientados  $(P, Q)$  y  $(P', Q')$  se llaman *equipolentes* si y solo si  $t_{PQ}(P') = Q'$  o, equivalentemente, si  $t_{PQ} = t_{P'Q'}$ . De aquí resulta que la relación así definida en el conjunto de segmentos orientados (relación de *equipolencia*) es de equivalencia. Sea  $\overrightarrow{PQ}$  la clase correspondiente al segmento  $(P, Q)$ , que llamaremos *vector libre* asociado al segmento orientado  $(P, Q)$ . Con esto tenemos que existe una biyección entre el conjunto de vectores libres y  $V$  tal que  $\overrightarrow{PQ} \mapsto t_{PQ}$ , con lo cual podemos identificar cada vector libre con la correspondiente traslación.

**1.4 Ejemplo** (La recta afín del tiempo). Un espacio afín real  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  de dimensión 1 se puede usar para modelizar el tiempo: los puntos de  $\mathbb{A}$  se interpretan como los «instantes», los vectores de  $V$  como «cantidades de tiempo» y  $\delta(P, Q) \in V$ , si  $P$  y  $Q$  son instantes, como la cantidad de tiempo transcurrido entre el instante  $P$  y el instante  $Q$ .

Dado que en un espacio afín no hay ningún punto distinguido, en este modelo del tiempo no hay ningún instante distinguido. Tampoco hay unidad de tiempo distinguida, ya que ninguno de los vectores no nulos de  $V$  es distinguido. El modelo nos permite interpretar fácilmente la «medida» de una cantidad de tiempo  $v$  respecto a una cantidad no nula de tiempo  $v_0$  que tomamos arbitrariamente como «unidad»: es el único  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $v = tv_0$ . Si con la unidad de medida  $v_0$  identificamos los elementos de  $V$  con números reales (haciendo corresponder  $tv_0$  con  $t$ ), entonces  $\delta(P, Q) \in \mathbb{R}$  indica el tiempo transcurrido entre los instantes  $P$  y  $Q$  (medido en unidades  $v_0$ ).

En el sistema de Newton, la recta del tiempo es independiente de cualquier observador, y por eso se dice que el tiempo newtoniano tiene carácter absoluto. En la física de Einstein (v. ejemplo 1.6) hay una recta del tiempo para cada observador inercial, y por eso se dice que en este sistema el tiempo es relativo.

Físicamente, el tiempo entre dos instantes se mide mediante un reloj, es decir, por un mecanismo que permite contar el número de veces que un determinado fenómeno cíclico ha ocurrido entre el primer y el segundo instantes. Que la relación entre el tiempo dado por dos relojes sea lineal (como lo pide el modelo matemático) es un enunciado físico no trivial, pero que cumplen con mucha aproximación los mejores relojes y bajo una gran variedad de circunstancias. El carácter absoluto del tiempo en el sistema newtoniano implica que la relación entre dos relojes tiene que ser independiente de su estado de movimiento respecto a un observador, mientras que la teoría de Einstein predice una dependencia precisa que ha sido confirmada experimentalmente.

**1.5 Ejemplo** (Espacio afín asociado a un espacio vectorial). A todo espacio vectorial  $E$  sobre un cuerpo  $K$  se le puede asociar un espacio afín sobre  $K$  haciendo  $\mathbb{A} = E$ ,  $V = E$  y  $\delta(v, w) = w - v$ . El axioma de homogeneidad se cumple: dado  $v \in V$ , la aplicación  $\delta_v : V \rightarrow V$  tal que  $w \mapsto w - v$  es biyectiva (la aplicación inversa es la dada por  $w' \mapsto w' + v$ ) y la ley de adición se cumple porque tenemos  $(w - v) + (x - w) = x - v$ , cualesquiera que sean  $v, w, x \in V$ .

De este espacio afín diremos que es el *espacio afín asociado* al espacio vectorial  $E$ . En contraposición a un espacio afín arbitrario, tiene la particularidad de tener un punto distinguido (el  $0 \in E$ ).

El *espacio afín numérico de dimensión  $n$* ,  $\mathbb{A}_K^n$ , se define como el espacio afín asociado al espacio vectorial  $K^n$ .

**1.6 Ejemplo** (Espacio-tiempo). En la teoría de la relatividad especial (o restringida), introducida en 1905 por Einstein, un concepto fundamental es el *suceso*. Un suceso, como la emisión de un fotón por un átomo, se puede caracterizar por el punto donde

ocurre y el instante en que se produce. Esta noción tiene un sentido absoluto en el marco newtoniano, a causa del carácter absoluto del tiempo (cf. 1.4), pero el significado en relatividad es más sutil a causa del famoso análisis de Einstein según el cual la simultaneidad es un concepto relativo (es decir, sucesos simultáneos para un observador pueden no ser simultáneos para otro). En todo caso, un descubrimiento fundamental de Einstein fue que el conjunto de sucesos, analizados teniendo en cuenta la relatividad del tiempo, tiene estructura de espacio afín real de dimensión 4 (a este espacio afín, lo denominaremos el *espacio-tiempo* de Einstein).

Para otros ejemplos de espacios afines, v. problemas P.1.3 y P.1.4.

### Vector de posición

Fijado un punto  $O \in \mathbb{A}$ , el vector  $\overrightarrow{OP}$  se denomina *vector de posición de P respecto a O*. Cuando  $O$  se puede sobreentender por el contexto, a veces se escribe, abusando de la notación,  $\overrightarrow{P}$  en lugar de  $\overrightarrow{OP}$ . Puesto que  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ , con este abuso de notación podemos escribir  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$ . De hecho es costumbre denotar esta diferencia con la expresión  $Q - P$ , de manera que  $Q - P$  es simplemente una expresión alternativa para designar  $\overrightarrow{PQ}$ , y en este texto utilizaremos las dos indistintamente. La ley de adición se escribe, con esta notación,  $(Q - P) + (R - Q) = R - P$ . La operación  $Q - P = \overrightarrow{PQ} = \delta_P(Q)$  (*diferencia de puntos*) es una operación binaria externa del conjunto  $\mathbb{A}$  a valores en el espacio vectorial  $V$ . Sin embargo, hay que tener en cuenta que en general no existe ninguna operación natural de «suma de puntos», sino solo de suma de vectores y, como veremos después, de suma de un punto y un vector.

**1.7 Proposición.** *Dados los puntos  $P, Q, R, S$ ,*

1)  $\overrightarrow{PQ} = 0$  si y solo si  $Q = P$ .

2)  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ .

3) Si  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ , entonces  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$  (figura 1.3).

**Demostración:** De  $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$ , que vale por la ley de adición 1.2, inferimos que  $\overrightarrow{PP} = 0$ . Por otro lado, si  $\overrightarrow{PQ} = 0$ , entonces  $\overrightarrow{PQ} = 0 = \overrightarrow{PP}$ , de donde  $Q = P$  por el axioma 1.1. Esto prueba 1.

El enunciado 2 es una consecuencia directa de la ley de adición y de la primera parte:  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$ .

Finalmente, tenemos  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ , por la ley de adición. Ahora  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}$ , por la hipótesis  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$  y la conmutatividad de la suma, y  $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QS}$ , otra vez por la ley de adición, de donde  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ .  $\square$

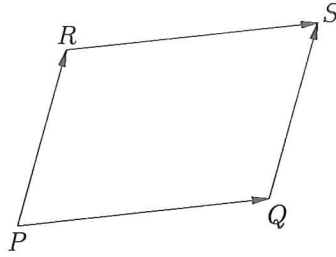


Figura 1.3: Si  $Q - P = S - R$ , entonces  $R - P = S - Q$

### Traslaciones

Sea  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  un espacio afín. Dados  $P \in \mathbb{A}$  y  $v \in V$ , el axioma 1.1 nos dice que existe un único punto  $Q \in \mathbb{A}$  tal que  $v = \overrightarrow{PQ}$ . Este punto  $Q$  sólo depende de  $P$  y  $v$ , y diremos que es el *trasladado de  $P$  según  $v$* . Para denotarlo, usaremos la expresión  $P + v$ , de forma que la relación  $Q = P + v$  es equivalente, por definición, a la relación  $v = \overrightarrow{PQ}$ , o  $v = Q - P$ . En particular, tenemos que  $P + \overrightarrow{PQ} = Q$ , o  $P + (Q - P) = Q$ .

**E.1.2.** Probar que  $P + 0 = P$  para todo punto  $P$ .

**E.1.3.** Probar que en el espacio afín asociado a un espacio vectorial  $E$  (ejemplo 1.5) la suma  $w + v$  de vectores coincide con la suma de  $w$  interpretado como punto y  $v$  interpretado como vector.

Si fijamos  $v \in V$ , podemos considerar la aplicación  $t_v : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tal que  $t_v(P) = P + v$ . Diremos que  $t_v$  es la *traslación de vector  $v$* . Nótese que, dados  $P, Q \in \mathbb{A}$ ,  $v = \overrightarrow{PQ}$  es el único vector tal que  $t_v(P) = Q$  [ $\diamond$ ]. Por otro lado, tenemos, según el ejercicio E.1.2, que  $t_0 = Id$  (la aplicación identidad).

La propiedad fundamental de las traslaciones es la siguiente:

**1.8 Proposición.** Si  $v, w \in V$ ,  $t_w \circ t_v = t_{v+w}$ .

**Demostración:** En efecto, la igualdad equivale a decir que  $(P + v) + w = P + (v + w)$  para todo punto  $P$ . Ahora bien, esta última relación es consecuencia de la ley de adición, ya que si ponemos  $P + v = Q$ ,  $Q + w = R$  y  $P + (v + w) = R'$ , entonces  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = v + w = \overrightarrow{PR'}$  y, por tanto,  $R = R'$ .  $\square$

**1.9 Corolario.** Para todo  $v \in V$ ,  $t_v$  es biyectiva y  $t_v^{-1} = t_{-v}$ .

**Demostración:** En efecto,  $t_v \circ t_{-v} = t_0 = Id$ .  $\square$

**1.10 Corolario.** Dado  $v \in V$ , las siguientes condiciones son equivalentes: 1)  $v = 0$ ; 2)  $t_v = Id$ ; 3)  $t_v$  tiene puntos fijos.

**Demostración:** Sólo nos queda por ver que 3 implica 1. Si  $P$  fuese un punto fijo de  $t_v$ , tendríamos  $P + v = P = P + 0$ , de donde  $v = 0$ .  $\square$

**E.1.4.** Verificar que la relación  $P + v = Q + w$  (donde  $P, Q \in \mathbb{A}$ ,  $v, w \in V$ ) equivale a la relación  $v = \overrightarrow{PQ} + w$ , o a la relación  $v - w = \overrightarrow{PQ}$  (que también podemos escribir  $v - w = Q - P$ ).

Pondremos  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{A})$  para denotar al conjunto  $\{t_v \mid v \in V\}$  de las traslaciones de  $\mathbb{A}$ . Este conjunto es cerrado por la operación de composición (por la proposición 1.8),  $t_0 = Id$  es elemento neutro de esta operación y, por el corolario 1.9, todo elemento  $t_v \in \mathcal{T}$  tiene inverso (el elemento  $t_{-v}$ ). Como además  $t_v = Id$  si y solo si  $v = 0$  (por 1.10) y  $t_v \circ t_w = t_w \circ t_v$  (por 1.8 y el hecho de que la suma de vectores es conmutativa), podemos sumarizar estas consideraciones tal como sigue:

**1.11 Proposición.** El conjunto  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{A})$  de las traslaciones de  $\mathbb{A}$  es un grupo conmutativo y la aplicación  $(V, +) \rightarrow (\mathcal{T}, \circ)$  tal que  $v \mapsto t_v$  es un isomorfismo de grupos.  $\square$

### Definición alternativa de espacio afín

**1.12.** Si  $(\mathbb{A}, V)$  es un espacio afín, la aplicación  $\mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$  tal que  $(P, v) \mapsto P + v$  tiene, según se ha visto, las propiedades siguientes:

- 1) Dados  $P, Q \in \mathbb{A}$ , existe un único  $v \in V$  tal que  $Q = P + v$ .
- 2)  $(P + v) + w = P + (v + w)$ , cualesquiera que sean  $P \in \mathbb{A}$  y  $v, w \in V$ .

Seguidamente mostramos que, recíprocamente, estas propiedades son suficientes para determinar, en el sentido que se precisa, una estructura de espacio afín.

**1.13 Proposición.** Sea  $\mathbb{A}$  un conjunto no vacío,  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y  $\mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$  una aplicación, que denotaremos  $(P, v) \mapsto P \dot{+} v$ , que satisface las propiedades 1.12.1 y 1.12.2. Dados  $P, Q \in \mathbb{A}$ , pongamos  $\overrightarrow{PQ} = \delta(P, Q)$  para denotar el único vector dado por la propiedad 1.12.1. Entonces  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  es un espacio afín tal que  $P + v = P \dot{+} v$  cualesquiera que sean  $P \in \mathbb{A}$  y  $v \in V$ , donde  $P + v$  indica la suma definida al principio del apartado «Traslaciones».

**Demostración:** En efecto, primero tenemos que ver, para un punto  $P$  fijado cualquiera, que la aplicación  $Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$  es biyectiva. En efecto, si  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$ , entonces  $Q = P \dot{+} \overrightarrow{PQ} = P \dot{+} \overrightarrow{PR} = R$ , lo cual establece que la aplicación es inyectiva. Y

si  $v \in V$ , entonces el punto  $Q = P \dot{+} v$  cumple que  $\overrightarrow{PQ} = v$  y esto muestra que la aplicación es exhaustiva.

También tenemos que comprobar la propiedad 1.2. Pero dado que

$$\begin{aligned}
 P \dot{+} (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) &= (P \dot{+} \overrightarrow{PQ}) \dot{+} \overrightarrow{QR} && \text{por 1.12.2} \\
 &= Q \dot{+} \overrightarrow{QR} && \text{por definición de } \overrightarrow{PQ} \\
 &= R && \text{por definición de } \overrightarrow{QR} \\
 &= P \dot{+} \overrightarrow{PR} && \text{por definición de } \overrightarrow{PR}
 \end{aligned}$$

de 1.12.1 obtenemos que  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .

Nos falta ver que  $P + v = P \dot{+} v$ . Por definición, el punto  $Q = P + v$  es el único punto tan que  $\overrightarrow{PQ} = v$ . Por tanto,  $P \dot{+} v = P \dot{+} \overrightarrow{PQ} = Q = P + v$ .  $\square$

## 1.2 Variedades lineales

Los subconjuntos más sencillos de un espacio afín, definidos por abstracción de los conceptos de recta y plano del espacio ordinario, son las variedades lineales. Como veremos, una variedad lineal no es más que un «subespacio afín». El adjetivo *lineal* proviene de la propiedad según la cual un subconjunto es una variedad lineal si y solo si contiene la recta («línea») que une dos puntos cualesquiera del mismo (v. problema P.1.2).

### Generalidades

#### Definición de variedad lineal

Sea  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  un espacio afín. A un subconjunto  $L$  no vacío de  $\mathbb{A}$  se le denomina una *variedad lineal* si, para todo  $P \in L$ , el conjunto  $\delta_P(L)$  de vectores de la forma  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $Q \in L$ , forman un subespacio vectorial de  $V$ .

**1.14 Proposición.** *Si  $L$  es una variedad lineal y  $P, Q \in L$ , entonces  $\delta_P(L) = \delta_Q(L)$ .*

**Demostración:** En efecto,  $\delta_Q(L) = \delta_P(L) - \overrightarrow{PQ}$ , por la fórmula [1.1], y  $\delta_P(L) - \overrightarrow{PQ} = \delta_P(L)$ , ya que  $\delta_P(L)$  es un subespacio vectorial y  $\overrightarrow{PQ} \in \delta_P(L)$ .  $\square$

### Espacio director

Así pues, si  $L$  es una variedad lineal, el subespacio  $\delta_P(L)$  es independiente de  $P \in L$ . Escribiremos  $W = W(L)$  para denotarlo y diremos que es la *dirección* o el *subespacio director* de  $L$ . Se tiene que  $L = P + W(L)$  para todo  $P \in L$ .

**1.15 Proposición.** *Recíprocamente, si  $W$  es un subespacio vectorial de  $V$  y  $P \in \mathbb{A}$ , entonces  $L = P + W$  es una variedad lineal,  $P \in L$ , y  $W = W(L)$ . En particular, se cumple que  $L = Q + W$  para todo  $Q \in L$  y que  $(Q + W) \cap (P + W) = \emptyset$  si  $Q \notin L$ .*

**Demostración:** Es inmediata y se deja para el lector.  $\square$

Diremos que  $P + W$  es la *variedad lineal que pasa por el punto  $P$  con dirección  $W$* .

**E.1.5.** Si  $L$  es un subconjunto de un espacio afín  $\mathbb{A}$  tal que  $\delta_P(L)$  es un subespacio vectorial de  $V$  para algún punto  $P \in L$ , entonces  $L$  es una variedad lineal.

**E.1.6.** Dado un subespacio  $W$  de  $V$ , probar que la relación

$$P \sim Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$$

es de equivalencia y que las clases respecto de la misma son las variedades lineales que tienen subespacio director  $W$ .

El ejercicio que sigue da contenido a la afirmación que una subvariedad lineal es un «subespacio afín».

**E.1.7.** Sea  $L$  una variedad lineal y  $W = W(L)$ . Probar que  $(L, W, \delta|L)$  es un espacio afín, donde  $\delta|L$  denota la restricción de  $\delta$  a  $L$ .

### Dimensión

Si  $L$  es una variedad lineal, tiene sentido hablar de su dimensión como espacio afín,  $\dim(L)$ : según la definición general (pág. 58), es igual a  $\dim_K(W)$ , donde  $W$  es el espacio director de  $L$ .

**E.1.8.** Si  $L$  y  $L'$  son variedades lineales y  $L \subseteq L'$ , demostrar que  $\dim(L) \leq \dim(L')$  y que vale la igualdad si y solo si  $L = L'$ . Verificar también que existe una variedad lineal  $L$  de  $\mathbb{A}^n$  tal que  $\dim(L) = d$  si y solo si  $d$  es un número entero tal que  $0 \leq d \leq n$ .

Las variedades lineales de dimensión 0 se pueden identificar con los *puntos* de  $\mathbb{A}$ , ya que  $P + \{0\} = \{P\}$ . Las variedades lineales de dimensión 1 se denominan *rectas* y las de dimensión 2, *planos*. Las variedades lineales de dimensión  $n - 1$  de  $\mathbb{A}^n$  se denominan *hiperplanos*. Observemos, pues, que los hiperplanos de  $\mathbb{A}^1$  son los puntos, que los de  $\mathbb{A}^2$  son las rectas y que los de  $\mathbb{A}^3$  son los planos.

### Variedades paralelas

Sean  $L$  y  $L'$  dos variedades lineales. Diremos que  $L$  y  $L'$  son *paralelas*, y escribiremos  $L \parallel L'$  para denotarlo, si  $W(L) \subseteq W(L') \vee W(L') \subseteq W(L)$ . Observemos que si  $\dim(L) = \dim(L')$ , entonces  $L \parallel L'$  si y solo si  $W(L) = W(L')$ . De esto resulta que la relación  $\parallel$  es de equivalencia en el conjunto de las variedades lineales de una dimensión dada.

**E.1.9.** Sea  $L$  una variedad lineal de dimensión  $r$  y  $Q$  un punto. Comprobar que  $L' = Q + W(L)$  es la única variedad lineal de dimensión  $r$  que pasa por  $Q$  y es paralela a  $L$ . Diremos que  $L'$  es la *variedad paralela a  $L$  por el punto  $Q$* .

### Ecuación paramétrica vectorial

Sea  $L$  una variedad lineal y  $W = W(L)$  su espacio director. Sea  $r = \dim(L) = \dim(W)$ . Diremos que  $w_1, \dots, w_r \in W$  es un *sistema de vectores directores de  $L$*  si  $w_1, \dots, w_r$  forman una base de  $W$ .

Si  $w_1, \dots, w_r \in W$  es un sistema de vectores directores de  $L$ , la aplicación  $K^r \rightarrow W$  tal que  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r$  es biyectiva. Si ahora escogemos un punto  $P \in L$ , tenemos  $L = P + W$ , y si ponemos

$$X = P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \quad [1.2]$$

entonces la aplicación  $K^r \rightarrow L$  tal que  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto X$  es biyectiva. A la relación [1.2] se la denomina una *ecuación paramétrica vectorial* de  $L$ . Esta ecuación nos da un punto de  $L$  para cada valor particular asignado a los «parámetros»  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  y todo punto de  $L$  se puede obtener de este modo para un único valor de los parámetros.

**E.1.10.** Dados dos puntos distintos, probar que hay una única recta que los contiene.

Tres puntos se dicen *no alineados* si no hay ninguna recta que los contenga. Para que existan tres puntos no alineados es necesario (y suficiente) que  $\dim(\mathbb{A}) \geq 2$ .

**E.1.11.** Dados tres puntos no alineados, mostrar que hay un único plano que los contiene.

### Puntos independientes

Las nociones «dos puntos distintos» o «tres puntos no alineados» son un caso particular de la noción de «puntos independientes». Dados los puntos  $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{A}$ , diremos que son *independientes* si los vectores  $P_1 - P_0, \dots, P_r - P_0$  son linealmente independientes.

**E.1.12.** Fijemos un punto  $O \in \mathbb{A}$ . Demostrar que los puntos  $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{A}$  son independientes si y solo si las relaciones

$$\lambda_0(P_0 - O) + \dots + \lambda_r(P_r - O) = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_0 + \dots + \lambda_r = 0$$

implican  $\lambda_0 = \dots = \lambda_r = 0$ . Como estas relaciones permanecen invariantes si permutamos los puntos, vemos que si  $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{A}$  son independientes, entonces  $P_{i_0}, \dots, P_{i_r}$  son independientes para cualquier permutación  $i_0, \dots, i_r$  de los índices  $0, \dots, r$ .

**1.16 Proposición.** *Si  $P_0, \dots, P_r$  son puntos independientes, entonces hay una única variedad lineal de dimensión  $r$  que los contiene.*

**Demostración:** Pongamos  $e_i = P_i - P_0$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Puesto que los puntos  $P_0, \dots, P_r$  son independientes,  $e_1, \dots, e_r$  son linealmente independientes y, por tanto, la variedad lineal  $L = P_0 + \langle e_1, \dots, e_r \rangle$  tiene dimensión  $r$ . Esto prueba la existencia de una variedad lineal de dimensión  $r$  que contiene los puntos, ya que obviamente  $P_0 \in L$  y, para  $i = 1, \dots, r$ ,  $P_i = P_0 + e_i \in L$ . Para ver la unicidad, sea  $L'$  una variedad lineal de dimensión  $r$  que contiene los puntos  $P_0, \dots, P_r$ . Entonces tenemos, para  $i = 1, \dots, r$ ,  $e_i = P_i - P_0 \in W(L')$ , de donde  $\langle e_1, \dots, e_r \rangle \subseteq W(L')$ . Como  $W(L')$  tiene dimensión  $r$  por hipótesis, será  $\langle e_1, \dots, e_r \rangle = W(L')$ . Finalmente, dado que  $P_0 \in L'$ ,  $L' = P_0 + W(L') = P_0 + \langle e_1, \dots, e_r \rangle = L$ , y con esto se concluye la prueba.  $\square$

La variedad lineal de la proposición anterior se denomina *variedad determinada por los puntos  $P_0, \dots, P_r$* . La denotaremos  $P_0P_1 \cdots P_r$ . Así pues, si  $P$  y  $Q$  son dos puntos distintos,  $PQ$  designa la única recta que los contiene, y si  $P, Q, R$  son tres puntos no alineados,  $PQR$  designa el único plano que pasa por ellos.

**E.1.13.** Sea  $L$  una variedad lineal y  $P_0, \dots, P_r$  puntos independientes de  $L$ . Verificar que  $P_0P_1 \cdots P_r \subseteq L$ , y que vale la igualdad si y solo si  $\dim(L) = r$ .

### Intersección y suma de variedades lineales

En este apartado  $L$  y  $L'$  son dos variedades lineales y  $W$  y  $W'$  sus espacios directores. Sean  $P$  un punto de  $L$  y  $P'$  un punto de  $L'$ . Así tenemos  $L = P + W$  y  $L' = P' + W'$ .

Si  $L \cap L' \neq \emptyset$ , entonces podemos escoger  $P' = P$  y, por tanto,  $L = P + W$  y  $L' = P + W'$ . De aquí resulta que  $L \cap L' = P + (W \cap W')$ . Puesto que  $W \cap W'$  es un subespacio vectorial de  $V$ , tenemos:

**1.17 Proposición.** *Si  $L \cap L' \neq \emptyset$ , entonces  $L \cap L'$  es una variedad lineal y  $W(L \cap L') = W(L) \cap W(L')$ .*  $\square$

**E.1.14.** Sean  $L_1, \dots, L_k$  variedades lineales. Si la intersección  $L_1 \cap \dots \cap L_k$  es no vacía, probar que es una variedad lineal y que su espacio director es  $W(L_1) \cap \dots \cap W(L_k)$ .

Vamos a ver ahora cuál es la condición que deben cumplir  $P, P', W$  y  $W'$  para que la intersección  $L \cap L'$  sea no vacía. Si  $L$  y  $L'$  tienen un punto en común, entonces existen  $w \in W$  y  $w' \in W'$  tales que  $P + w = P' + w'$ , de donde resulta que  $P' - P = w - w'$ . Como  $-w' \in W'$ , vemos que  $P' - P \in W + W'$ . Recíprocamente, si  $P' - P \in W + W'$ ,

entonces existen  $u \in W$  y  $u' \in W'$  tales que  $P' - P = u + u'$ , de donde resulta que el punto  $P + u = P' - u'$  pertenece a  $P + W = L$  y a  $P' + W' = L'$ . Notemos que de estas consideraciones se desprende que si  $P' - P \in W + W'$  para un cierto  $P \in L$  y un cierto  $P' \in L'$ , entonces  $P' - P \in W + W'$  para todo  $P \in L$  y todo  $P' \in L'$ , afirmación que se puede demostrar también directamente sin ninguna dificultad. Así pues, hemos demostrado:

**1.18 Proposición.** *La condición necesaria y suficiente para que las variedades lineales  $L$  y  $L'$  se corten es que  $P' - P \in W + W'$ , para un cierto  $P \in L$  y un cierto  $P' \in L'$ . Además, en el caso de que se corten,  $P' - P \in W + W'$  cualesquiera que sean  $P \in L$  y  $P' \in L'$ .  $\square$*

**1.19 Corolario.** *La condición  $W + W' = V$  es suficiente para que  $L \cap L' \neq \emptyset$ .  $\square$*

Con el fin de utilizar la propiedad de la proposición 1.18 de una manera más cómoda, observemos primero que el espacio

$$W(L, L') = \langle P' - P \rangle + W + W'$$

sólo depende de  $L$  y  $L'$ , y no de los puntos  $P \in L$  y  $P' \in L'$  que hayamos escogido. De hecho, si  $Q \in L$  y  $Q' \in L'$ , digamos  $Q = P + w$  y  $Q' = P' + w'$  ( $w \in W$ ,  $w' \in W'$ ), entonces  $Q' - Q = (P' - P) + w - w' \in \langle P' - P \rangle + W + W'$ , con lo cual  $\langle Q' - Q \rangle + W + W' \subseteq \langle P' - P \rangle + W + W'$ . La inclusión contraria se demuestra intercambiando los puntos  $P$  y  $P'$  por los puntos  $Q$  y  $Q'$ .

**E.1.15.** Verificar que  $P + W(L, L') = P' + W(L, L')$  y que esta variedad solo depende de  $L$  y  $L'$ , y no de  $P \in L$  y  $P' \in L'$ . Si ponemos  $L \vee L'$  para denotar esta variedad lineal, comprobar que  $L, L' \subseteq L \vee L'$  y que si  $M$  es una variedad lineal tal que  $L, L' \subseteq M$ , entonces  $L \vee L' \subseteq M$ .

### Fórmula de las dimensiones

Según el ejercicio anterior,  $L \vee L'$  es la variedad lineal más pequeña que contiene  $L$  y  $L'$ . Diremos que  $L \vee L'$  es la *variedad lineal generada por  $L$  y  $L'$* , o que es la *suma* de  $L$  y  $L'$ .

**1.20 Proposición.** *La dimensión de  $L \vee L'$  se calcula por la siguiente fórmula:*

$$\dim(L \vee L') = \begin{cases} \dim(L) + \dim(L') - \dim(L \cap L') & \text{si } L \cap L' \neq \emptyset \\ 1 + \dim(L) + \dim(L') - \dim(W \cap W') & \text{si } L \cap L' = \emptyset \end{cases} \quad [1.3]$$

**Demostración:** Por la definición de  $L \vee L'$ , su dimensión coincide con la dimensión de  $W(L, L')$  como subespacio vectorial de  $V$ . Como  $W(L, L') = \langle P' - P \rangle + W + W'$ , tenemos que

$$\dim(L \vee L') = \dim_K(\langle P' - P \rangle + W + W') = \begin{cases} \dim_K(W + W') & \text{si } P' - P \in W + W', \\ 1 + \dim_K(W + W') & \text{si } P' - P \notin W + W'. \end{cases}$$

Pero por álgebra lineal sabemos que

$$\dim_K(W + W') = \dim_K(W) + \dim_K(W') - \dim_K(W \cap W')$$

y está claro que  $\dim_K(W) = \dim(L)$  y  $\dim_K(W') = \dim(L')$ . Teniendo en cuenta que  $P' - P \in W + W'$  equivale a que  $L \cap L' \neq \emptyset$ , y que en este caso  $\dim_K(W \cap W') = \dim(L \cap L')$ , la demostración es completa.  $\square$

Nos referiremos a la relación [1.3] como la *fórmula de las dimensiones* para variedades lineales del espacio afín (en el capítulo 3 estudiaremos la fórmula de las dimensiones para variedades lineales del espacio proyectivo). En el resto de esta sección la ilustraremos con algunos ejemplos.

**1.21 Ejemplo.** Supongamos que  $\dim(L) = \dim(L') = d$  y que  $L$  y  $L'$  son paralelas, es decir, que  $W = W'$ . Si  $L \cap L' \neq \emptyset$ , entonces  $L = L'$ ,  $L \cap L' = L$  y la fórmula de las dimensiones nos da  $\dim(L \vee L') = d$ , lo cual concuerda con el hecho que en este caso  $L \vee L' = L$ . Si  $L \cap L' = \emptyset$ , que bajo las hipótesis equivale a  $L \neq L'$ , entonces la fórmula de las dimensiones nos da

$$\dim(L \vee L') = 1 + \dim(L)$$

ya que  $W \cap W' = W$  tiene dimensión  $d$ .

**1.22 Ejemplo.** Supongamos que  $L$  y  $L'$  son rectas. Entonces hay dos posibilidades: o bien  $W \cap W' = \{0\}$  (las rectas no son paralelas), o bien  $W = W'$  (las rectas son paralelas). Si se da la primera posibilidad, la fórmula de las dimensiones nos dice que  $L \vee L'$  es un plano si  $L$  y  $L'$  se cortan, y que tiene dimensión 3 si  $L$  y  $L'$  no se cortan (naturalmente esta última situación solo puede ocurrir en un  $\mathbb{A}^n$  tal que  $n \geq 3$ ). Si se da la segunda posibilidad, el ejemplo precedente nos dice que  $L = L' = L \vee L'$  si  $L$  y  $L'$  se cortan y que  $L \vee L'$  es un plano si  $L$  y  $L'$  no se cortan. Observemos que, como consecuencia de esta discusión, obtenemos que dos rectas no paralelas de un plano  $\mathbb{A}^2$  se cortan exactamente en un punto.

**1.23 Ejemplo.** Supongamos ahora que  $L$  es un plano y  $L'$  una recta de  $\mathbb{A}^3$  no paralela a  $L$ . Entonces está claro que  $L \vee L' = \mathbb{A}^3$  (ya que la dimensión de  $L \vee L'$  es superior a 2) y que  $W \cap W' = \{0\}$ . La fórmula de las dimensiones nos da que  $L$  y  $L'$  se cortan (de otro modo  $L \vee L'$  tendría dimensión 4) y que su intersección es un punto  $\{\diamond\}$ .

**E.1.16.** Sea  $L$  una variedad lineal de dimensión  $d$  y  $P$  un punto tal que  $P \notin L$ . Verificar que  $L \vee P$  tiene dimensión  $d + 1$ .

**E.1.17.** Comprobar que la intersección de dos planos no paralelos de  $\mathbb{A}^3$  es una recta.

**E.1.18.** Demostrar que la variedad generada por dos planos no paralelos de  $\mathbb{A}^4$  sólo puede ser  $\mathbb{A}^4$  o una variedad lineal de dimensión 3, y que en el primer caso su intersección es un punto y en el segundo una recta. Vemos, pues, que dos planos no paralelos de  $\mathbb{A}^4$  siempre se cortan al menos en un punto.

**E.1.19.** Sean  $H$  un hiperplano de  $\mathbb{A}^n$ . Sea  $L$  una variedad lineal no paralela a  $H$ . Probar que:

- 1)  $H \vee L = \mathbb{A}^n$ .
- 2)  $H \cap L \neq \emptyset$  (si  $H \cap L = \emptyset$ , la fórmula de las dimensiones nos daría que  $\dim(H \vee L) > n$ , lo cual no es posible).
- 3)  $\dim(H \cap L) = \dim(L) - 1$ .

¿Qué afirmaciones de los ejemplos 1.22 y 1.23, y de los ejercicios anteriores, son casos particulares de este ejercicio?

### 1.3 Referencia afín

Una referencia de un espacio afín  $\mathbb{A}^n$  nos permite representar un punto de este espacio por un vector de  $K^n$ , cuyas componentes son las coordenadas del punto respecto a la referencia. De esta manera se incorpora el espíritu de las ideas de Descartes sobre la geometría, en el sentido de que las relaciones entre objetos de  $\mathbb{A}^n$  se pueden traducir a relaciones entre coordenadas, y viceversa. Por ejemplo, que un punto esté sobre una variedad lineal dada equivale a que sus coordenadas satisfagan un cierto sistema de ecuaciones lineales e, inversamente, las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales son las coordenadas de los puntos de una variedad lineal. En todo caso, la representación de los puntos por entidades de naturaleza algebraica es la base para manipular efectivamente los objetos geométricos.

En el primer apartado, damos las definiciones básicas y, como ejemplo, introducimos la razón simple de tres puntos alineados. Al final del apartado probamos que la razón simple se conserva por proyecciones paralelas (teorema de Tales). En el segundo apartado se estudian las ecuaciones de las variedades lineales (paramétricas y cartesianas) y se consideran distintos ejemplos.

#### *Sistema de referencia y coordenadas*

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín y  $V$  su espacio vectorial asociado. Una *referencia afín* de  $\mathbb{A}$ , o simplemente una *referencia* de  $\mathbb{A}$ , es una pareja  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$  formada por un punto  $O \in \mathbb{A}$  y una base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ . Diremos que el punto  $O$  es el *origen* y el vector  $e_k$  el *k-ésimo eje* de la referencia  $\mathcal{R}$ .

Dado un punto  $X$  y una referencia  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$ , las *coordenadas de  $X$  respecto a  $\mathcal{R}$* , o  *$\mathcal{R}$ -coordenadas de  $X$* , son las componentes  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  del vector  $X - O$  respecto a la base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ , es decir, los  $x_1, \dots, x_n \in K$  tales que

$$X - O = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \mathbf{e} \mathbf{x}^T \quad (\text{notación matricial}) \quad [1.4]$$

o, equivalentemente,

$$X = O + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = O + \mathbf{e} \mathbf{x}^T \quad [1.4']$$

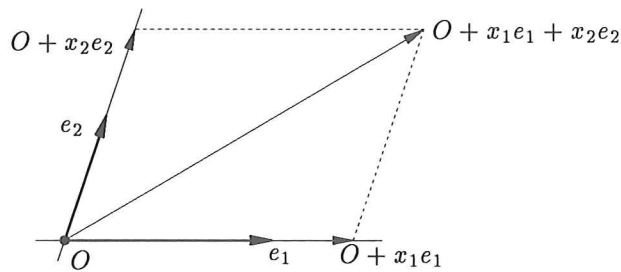


Figura 1.4: Referencia afín y coordenadas

En el caso del plano o del espacio, las coordenadas se denotan a menudo por símbolos como  $(x, y)$  o  $(x, y, z)$ , respectivamente. En lugar de «sea  $\mathcal{R}$  una referencia de  $\mathbb{A}^3$  y pongamos  $(x, y, z)$  para denotar las correspondientes coordenadas», usualmente se dice «sean  $x, y, z$  [un sistema de] coordenadas afines de  $\mathbb{A}^3$ », o expresiones similares.

**E.1.20.** Fijada la referencia afín  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$ , comprobar que la aplicación  $K^n \xrightarrow{X_{\mathcal{R}}} \mathbb{A}$ , tal que  $\mathbf{x} \mapsto O + \mathbf{e} \mathbf{x}^T$ , es biyectiva. Remarquemos que la relación  $X = O + \mathbf{e} \mathbf{x}^T$ ,  $\mathbf{x} \in K^n$ , no es más que una ecuación paramétrica vectorial de  $\mathbb{A}^n$  (v. fórmula [1.2]). La aplicación inversa  $\mathbb{A} \xrightarrow{x_{\mathcal{R}}} K^n$  es la que transforma cada punto  $X$  en sus  $\mathcal{R}$ -coordenadas  $\mathbf{x}$ .

Si  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$  es una referencia, y si ponemos  $P_0 = O$  y  $P_k = O + e_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), entonces  $P_0, \dots, P_n$  son puntos independientes de  $\mathbb{A}$ . Recíprocamente, si  $P_0, \dots, P_n$  son puntos independientes, y definimos  $e_k = P_k - P_0$  ( $1 \leq k \leq n$ ) y  $O = P_0$ , entonces  $[O, e_1, \dots, e_n]$  es una referencia de  $\mathbb{A}$ . De esta manera tenemos una correspondencia biyectiva entre las referencias de  $\mathbb{A}$  y las sucesiones  $P_0, \dots, P_n$  de  $n + 1$  puntos independientes. Para designar la referencia  $[P_0, P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0]$  correspondiente a  $P_0, \dots, P_n$ , también pondremos  $[P_0, P_1, \dots, P_n]$ . Así, la referencia  $[O, e_1, \dots, e_n]$  también se puede denotar  $[O, O + e_1, \dots, O + e_n]$ .

**E.1.21.** Si  $P_0, \dots, P_r$  son puntos independientes, entonces  $\mathcal{S} = [P_0, P_1, \dots, P_r]$  es una referencia afín de la variedad lineal  $P_0 P_1 \cdots P_r$  determinada por los puntos  $P_0, \dots, P_r$ . La aplicación

bijectiva  $K^r \xrightarrow{X_S} L$  (v. E.1.20) es la dada por la ecuación paramétrica vectorial

$$X = P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i (P_i - P_0), \quad \lambda_i \in K$$

### Cambio de coordenadas

Sean  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$  y  $\mathcal{R}' = [O', \mathbf{e}']$  dos referencias afines de  $\mathbb{A}$ . Para describir  $\mathcal{R}'$  mediante  $\mathcal{R}$ , pongamos  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  para denotar las coordenadas de  $O'$  respecto a  $\mathcal{R}$ , con lo cual

$$O' = O + \mathbf{e}\mathbf{p}^T \quad [1.5]$$

y  $A = (a_{ij})$  para denotar la matriz de la base  $\mathbf{e}'$  respecto a la base  $\mathbf{e}$ . Por definición, las columnas de la matriz  $A$  son las componentes de los vectores  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$  respecto a la base  $\mathbf{e}$ , lo cual equivale a la relación matricial

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}A \quad [1.6]$$

Sea ahora  $X$  un punto y pongamos  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$  para denotar las coordenadas de  $X$  respecto a las referencias  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$ , respectivamente. Queremos encontrar cómo se relacionan  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$ . Con tal fin, fijémonos en que  $X - O = \mathbf{e}\mathbf{x}^T$ , por definición de  $\mathbf{x}$ , y  $X - O' = \mathbf{e}'\mathbf{x}'^T$ , por definición de  $\mathbf{x}'$ , de donde resulta, teniendo en cuenta [1.6], que  $X - O' = \mathbf{e}A\mathbf{x}'^T$ . Puesto que también se cumple  $X - O = (O' - O) + (X - O')$ , tomando componentes de los vectores de esta igualdad respecto a la base  $\mathbf{e}$  obtenemos

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + A\mathbf{x}'^T \quad [1.7]$$

que es la relación que buscábamos. En forma explícita,

$$x_k = p_k + a_{k1}x'_1 + \dots + a_{kn}x'_n \quad (1 \leq k \leq n) \quad [1.7']$$

**E.1.22.** La relación [1.7] se puede entender como la aplicación  $f_{A,\mathbf{p}} : K^n \rightarrow K^n$  tal que  $\mathbf{x}' \mapsto \mathbf{x}$ . Demostrar que  $\{f_{A,\mathbf{p}} \mid A \in GL_n(K), \mathbf{p} \in K^n\}$  es un grupo con la composición de aplicaciones (es el *grupo de los cambios de coordenadas afines*). Aquí  $GL_n(K)$ , el grupo lineal, es el grupo de matrices  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  tales que  $\det(A) \neq 0$ .

### Ejemplo: razón simple

Dados tres puntos alineados  $P, Q, X$  tales que  $P \neq Q$ , consideremos la referencia  $\mathcal{R} = [P, Q]$  de la recta  $L = PQ$ . La coordenada de  $X$  respecto a  $\mathcal{R}$  es el escalar  $\sigma$  tal que

$$X = P + \sigma(Q - P)$$

Diremos que  $\sigma$  es la *razón simple* de la terna  $P, Q, X$  y pondremos  $\sigma(P, Q, X)$  para designarla. Está claro que  $\sigma(P, Q, P) = 0$  y  $\sigma(P, Q, Q) = 1$  y, por tanto,  $\sigma(P, Q, X) \neq 0, 1$  si los puntos  $P, Q$  y  $X$  son distintos. Observemos que si  $P = Q$ , o si  $P \neq Q$  y  $X \notin PQ$ , entonces  $\sigma(P, Q, X)$  no está definida.

Sean  $P$  y  $Q$  puntos distintos y pongamos  $L = PQ$ . Sea  $X \in L$ . Dada una referencia afín  $[O, v]$  de  $L$  ( $v \in V$ ), sean  $p, q$  y  $x$  las coordenadas de  $P, Q$  y  $X$  respecto a la misma, es decir, que  $P = O + pv$ ,  $Q = O + qv$  y  $X = O + xv$ . Entonces  $Q - P = (q - p)v$ ,  $X - P = (x - p)v$ , y

$$\sigma(P, Q, X) = \frac{x - p}{q - p} \quad [1.8]$$

**E.1.23.** Sean  $P, Q$  y  $R$  tres puntos alineados y distintos. Pongamos  $\sigma = \sigma(P, Q, R)$ . Aplicar la fórmula [1.8] para mostrar que la terna resultante de trasponer  $P$  y  $Q$ ,  $(Q, P, R)$ , y la resultante de permutar  $P, Q$  y  $R$  cíclicamente,  $(Q, R, P)$ , tienen la siguiente razón simple:

$$\sigma(Q, P, R) = 1 - \sigma, \quad \sigma(Q, R, P) = \frac{1}{1 - \sigma} = 1/\sigma(Q, P, R).$$

Si ahora volvemos a trasponer los dos primeros elementos de la terna  $(Q, R, P)$ , por un lado, y a permutarla cíclicamente, por el otro, obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma(R, Q, P) &= 1 - \sigma(Q, R, P) = 1 - \frac{1}{1 - \sigma} = \frac{\sigma}{\sigma - 1} \\ \sigma(R, P, Q) &= 1/\sigma(R, Q, P) = \frac{\sigma - 1}{\sigma} \end{aligned}$$

Volviendo a repetir lo mismo con la terna  $(R, P, Q)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma(P, R, Q) &= 1 - \sigma(R, P, Q) = \frac{1}{\sigma} \\ \sigma(P, Q, R) &= 1/\sigma(P, R, Q) = \sigma \end{aligned}$$

donde la última igualdad nos suministra, consistentemente con su definición, el valor  $\sigma = \sigma(P, Q, R)$ .

El ejercicio anterior muestra que la definición de razón simple que hemos adoptado no es más que una entre seis posibles. Como no hay un criterio generalmente aceptado, nosotros hemos escogido la que nos resulta más cómoda. En todo caso, de las fórmulas anteriores se puede deducir fácilmente cómo pasar de una definición a otra.

**1.24 Teorema** (de Tales). Sean  $H_1, H_2$  y  $H_3$  tres hiperplanos paralelos tales que  $H_1 \neq H_2$ . Sea  $L$  una recta no paralela a los hiperplanos y pongamos  $X_i = L \cap H_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Entonces  $\sigma = \sigma(X_1, X_2, X_3)$  solo depende de los hiperplanos  $H_1, H_2$  y  $H_3$  y es, por tanto, independiente de  $L$ .

**Demostración:** Sea  $W \subset V$  el subespacio director de los hiperplanos  $H_i$  (por hipótesis, es el mismo para los tres). Sea  $\omega \in V^*$  tal que  $\ker(\omega) = W$ . Como  $W$  tiene

codimensión 1,  $W$  determina  $\omega$  salvo un factor escalar no nulo. Si tomamos puntos  $P_i \in H_i$ , entonces  $X \in H_i$  si y solo si  $\omega(X - P_i) = 0$ . Para encontrar los puntos  $X_i$ , sean  $P$  y  $v$  un punto y un vector director de  $L$ , de manera que  $X = P + \lambda v$  es una ecuación paramétrica vectorial de  $L$ . Además, la condición que  $L$  no sea paralela a los hiperplanos significa que  $v \notin W$ , es decir, que  $\omega(v) \neq 0$ . Dicho esto, está claro que  $X_i = P + \lambda_i v$ , donde  $\lambda_i \in K$  debe cumplir  $\omega((P + \lambda_i v) - P_i) = 0$ . Si ponemos  $u_i = P_i - P$ , obtenemos  $\lambda_i = \omega(u_i)/\omega(v)$ . Ahora la fórmula [1.8] de la razón simple nos da que  $\sigma = (\lambda_3 - \lambda_1)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ , es decir,

$$\sigma = \frac{\omega(u_3) - \omega(u_1)}{\omega(u_2) - \omega(u_1)} = \frac{\omega(P_3 - P_1)}{\omega(P_2 - P_1)}$$

valor que sólo depende de los hiperplanos  $H_i$ . Nótese que  $\omega(u_i) - \omega(u_j) = \omega(u_i - u_j)$  y  $u_i - u_j = P_i - P_j$ .  $\square$

**E.1.24.** Sean  $A, B, C, D$  cuatro puntos no coplanarios del espacio afín y supongamos que el cuerpo no tiene característica 2. Sea  $M$  el punto medio de  $A$  y  $C$ , y  $N$  el punto medio de  $B$  y  $D$  (se define el punto mediodo de dos puntos  $P$  y  $Q$ ,  $M(P, Q)$ , por la fórmula  $M(P, Q) = P + \frac{1}{2}(Q - P)$ ). Si la recta  $MN$  corta en un punto  $P$  a una recta  $XY$  tal que  $X \in AD$  y  $Y \in BC$ , probar que  $P$  es el punto medio de  $X$  e  $Y$ .

### *Ecuaciones de las variedades lineales*

Sea  $L$  una variedad lineal. Si  $P \in L$  y  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$  es un sistema de vectores directores de  $L$  (o sea, una base de  $W = W(L)$ ), entonces tenemos la ecuación paramétrica vectorial  $X = P + \mathbf{w}\mathbf{s}^T$ ,  $\mathbf{s} \in K^r$ , de los puntos  $X$  de  $L$ . Ahora queremos ver qué forma adopta esta ecuación vectorial cuando disponemos de una referencia  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$  del espacio afín  $\mathbb{A}$ . Este problema ya lo hemos resuelto cuando  $L = \mathbb{A}$ , en cuyo caso la solución no es más que las ecuaciones del cambio de coordenadas (v. fórmulas [1.7] y [1.7']).

La situación más general que ahora nos ocupa se resuelve de modo similar. Sea  $B$  la matriz de  $\mathbf{w}$  respecto a  $\mathbf{e}$ , de manera que  $B$  es la matriz  $n \times r$  tal que  $\mathbf{w} = \mathbf{e}B$ . Así,  $X = P + \mathbf{e}B\mathbf{s}^T$ . Sean  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{p}$  las  $\mathcal{R}$ -coordenadas de  $X$  y  $P$ , respectivamente, de manera que  $X = O + \mathbf{e}\mathbf{x}^T$  y  $P = O + \mathbf{e}\mathbf{p}^T$ . Entonces, de la igualdad vectorial  $X - O = (X - P) + (P - O)$  obtenemos la igualdad  $\mathbf{e}\mathbf{x}^T = \mathbf{e}B\mathbf{s}^T + \mathbf{e}\mathbf{p}^T$  y, después de tomar componentes respecto a  $\mathbf{e}$ , la igualdad

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + B\mathbf{s}^T \quad (\mathbf{s} \in K^r) \quad [1.9]$$

Si escribimos [1.9] separando componentes, obtenemos las ecuaciones

$$x_k = p_k + b_{k1}s_1 + \dots + b_{kr}s_r, \quad s_1, \dots, s_r \in K \quad (1 \leq k \leq n) \quad [1.9']$$

De la relación matricial [1.9], o de las ecuaciones equivalentes [1.9'], podemos decir que es un *sistema de ecuaciones paramétricas* de  $L$ : podemos mirarla como la aplicación (biyectiva)  $s \mapsto x$  entre  $K^r$  y el subconjunto de  $K^n$  formado por las coordenadas de los puntos de  $L \diamond$ .

**E.1.25.** Mostrar que si se tienen ecuaciones de la forma [1.9'], con  $b_{k1}, \dots, b_{kr} \in K$ , y una referencia  $\mathcal{R}$ , entonces los puntos de  $\mathbb{A}$  que tienen coordenadas  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , cuando  $s = (s_1, \dots, s_r)$  recorre  $K^r$ , son los de una variedad lineal de dimensión  $\text{rango}(B)$ , donde ponemos  $B$  para denotar la matriz  $(b_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$ . Esta variedad pasa por el punto de coordenadas  $p = (p_1, \dots, p_n)$  y los vectores cuyas componentes son las columnas de  $B$  generan su espacio director. La aplicación  $s \mapsto x$  es inyectiva si y solo si  $\text{rango}(B) = r$ .

**E.1.26.** Comprobar que la relación [1.9] equivale a la relación

$$\tilde{x}^T = \tilde{B}\tilde{s}^T$$

donde  $\tilde{x} = (1, x_1, \dots, x_n)$ ,  $\tilde{s} = (1, s_1, \dots, s_r)$ , y  $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{p}^T & B \end{pmatrix}$ . Puesto que [1.9] generaliza [1.7], el grupo de los cambios de coordenadas afines (ejercicio E.1.22) es isomorfo al grupo de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{p}^T & A \end{pmatrix}$$

donde  $A \in GL_n(K)$  y  $\mathbf{p} \in K^n$ .

### Intersección de dos variedades lineales en paramétricas

Para obtener la intersección de dos variedades lineales  $L$  y  $L'$ , dadas, en una cierta referencia, por ecuaciones paramétricas  $\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + B\mathbf{s}^T$  ( $\mathbf{s} \in K^r$ ),  $\mathbf{x}'^T = \mathbf{p}'^T + B'\mathbf{s}'^T$  ( $\mathbf{s}' \in K^{r'}$ ), basta con resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{p}^T + B\mathbf{s}^T = \mathbf{p}'^T + B'\mathbf{s}'^T \quad [1.10]$$

considerando  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$  y  $\mathbf{s}' = (s'_1, \dots, s'_{r'})$  como incógnitas, y sustituir las soluciones  $\mathbf{s}$  obtenidas en la relación  $\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + B\mathbf{s}^T$ . Si el sistema [1.10] es compatible, el resultado es un sistema de ecuaciones paramétricas de  $L \cap L'$ . Sustituyendo los valores  $\mathbf{s}'$  en la relación  $\mathbf{x}'^T = \mathbf{p}'^T + B'\mathbf{s}'^T$ , obtendríamos otro sistema de ecuaciones paramétricas de la misma variedad  $L \cap L'$ . Por el primer camino, las ecuaciones paramétricas describen  $L \cap L'$  como subconjunto de  $L$ , y por el segundo, como subconjunto de  $L'$ .

### Ecuaciones cartesianas de una variedad lineal

Sea  $L$  una variedad lineal de dimensión  $r$ ,  $P$  un punto de  $L$  y  $W = W(L)$ . Escogemos una base  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$  de  $W$  (un sistema de vectores directores de  $W$ ). Puesto que la condición necesaria y suficiente para que un punto  $X$  sea de  $L$  es que

$$X - P \in W = \langle w_1, \dots, w_r \rangle,$$

vemos que los puntos de  $L$  son precisamente los que cumplen la condición

$$\dim\langle X - P, w_1, \dots, w_r \rangle \leq r \quad [1.11]$$

(dado que  $w_1, \dots, w_r$  son linealmente independientes, la relación [1.11] equivale a la igualdad  $\dim\langle X - P, w_1, \dots, w_r \rangle = r$ ). Veamos cómo se traduce [1.11] respecto a una referencia afín  $\mathcal{R} = [O, e]$ . Si ponemos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{p}$  para denotar las  $\mathcal{R}$ -coordenadas de  $X$  y  $P$ , respectivamente, y  $B$  para denotar la matriz de  $\mathbf{w}$  respecto a  $e$ , entonces está claro que [1.11] equivale a

$$\text{rango}(\mathbf{x}^T - \mathbf{p}^T | B) \leq r \quad [1.11a]$$

Esta última condición es equivalente, como es sabido del álgebra lineal (véase, si es preciso, el problema P.1.6), a la anulación del sistema de  $n - r$  menores de orden  $r + 1$  de la matriz  $(\mathbf{x}^T - \mathbf{p}^T | B)$  que contienen uno cualquiera de los menores no nulos de orden  $r$  de  $B$  (por lo menos hay uno, debido a que  $B$  tiene rango  $r$ ). Ahora bien, la anulación de los  $n - r$  menores citados nos da un sistema de ecuaciones de la forma

$$a_{k1}(x_1 - p_1) + \dots + a_{kn}(x_n - p_n) = 0 \quad (1 \leq k \leq n - r) \quad [1.11b]$$

para ciertos  $a_{k1}, \dots, a_{kn} \in K$  que se pueden calcular explícitamente a partir de  $B$  y  $\mathbf{p}$ . Si ponemos  $a_{k0} = -(a_{k1}p_1 + \dots + a_{kn}p_n)$ , entonces las ecuaciones anteriores adoptan la forma

$$a_{k0} + a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \quad (1 \leq k \leq n - r) \quad [1.11c]$$

Por todo lo que llevamos dicho, las coordenadas  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  de los puntos  $X$  de  $L$  son precisamente las soluciones del sistema de  $n - r$  ecuaciones lineales [1.11c]. Debido a que las diferencias  $\mathbf{x} - \mathbf{p}$  son las componentes de los vectores de  $W$  respecto a la base  $\mathbf{w}$ , por [1.11b] vemos que las componentes de los vectores de  $W$  son precisamente las soluciones del sistema homogéneo asociado al sistema [1.11c]. Como la dimensión de  $W$  es  $r$ , resulta que el rango de la matriz del sistema 1.11c es  $n - r$  [ $\diamond$ ].

Inversamente, sea

$$a_{k0} + a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \quad (1 \leq k \leq m) \quad [1.12]$$

un sistema de  $m$  ecuaciones lineales en las variables  $x_1, \dots, x_n$ . Sea  $s \leq \min(n, m)$  su rango. Si el sistema es compatible, y  $\mathbf{p}$  es una solución particular, por álgebra lineal sabemos (teorema de Rouché–Frobenius) que las soluciones  $\mathbf{x}$  de [1.12] se pueden expresar en la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t_1 \mathbf{w}_1 + \dots + t_{n-s} \mathbf{w}_{n-s} \quad [1.13]$$

donde  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-s}$  es una base de las soluciones del sistema homogéneo asociado a [1.12]. Ahora bien, [1.13] son las ecuaciones paramétricas de la variedad lineal que pasa

por el punto de coordenadas  $p$  y cuyo espacio director es el generado por los vectores cuyas componentes son  $w_1, \dots, w_{n-s}$  (v. E.1.25). En particular, esta variedad tiene dimensión  $n - s$ .

Para ulteriores referencias, resumimos las consideraciones de este subapartado en el enunciado que sigue.

**1.25 Teorema.** *Dada una referencia afín de  $\mathbb{A}^n$ , las soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales [1.12], en las incógnitas  $x_1, \dots, x_n$  y con coeficientes de  $K$ , son las coordenadas de los puntos de una variedad lineal  $L$  de dimensión  $r = n - s$ , donde  $s$  es el rango de la matriz del sistema (diremos que  $L$  es la variedad determinada por el sistema [1.12]). Además, los vectores del espacio director de  $L$  son los vectores cuyas componentes son solución del sistema homogéneo asociado a [1.13].*

*Recíprocamente, toda variedad lineal  $L$  de dimensión  $r$  es la variedad determinada por un sistema de ecuaciones [1.13] de rango  $n - r$  (de este sistema, que no es único como es obvio, diremos que es un sistema de ecuaciones cartesianas de  $L$ ).  $\square$*

## Ejemplos

Las relaciones

$$x_i = a_i + \lambda(b_i - a_i), \quad \lambda \in K \quad [1.14]$$

son ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos de coordenadas  $a = (a_1, \dots, a_n)$  y  $b = (b_1, \dots, b_n)$  (estos puntos se suponen distintos). Eliminando  $\lambda$ , se obtiene el sistema de ecuaciones cartesianas

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n} \quad [1.15]$$

del cual se suele decir que son *ecuaciones cartesianas de la recta en forma continua* o, por abuso de lenguaje, una *ecuación continua de la recta*. Conviene observar que si  $a_i = b_i$  para algún  $i$ , entonces  $x_i = a_i$  para todo punto de la recta (por [1.14]), de forma que si uno de los denominadores de la ecuación continua es 0, esto se debe interpretar como la anulación del correspondiente numerador.

**E.1.27.** Supongamos dada una referencia de  $\mathbb{A}^n$ . Comprobar que la variedad lineal determinada por una ecuación lineal

$$a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in K)$$

tal que  $a_i \neq 0$  para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$ , es un hiperplano  $H$ . Mostrar también que si  $H'$  es el hiperplano determinado por otra ecuación lineal

$$b_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$$

tal que  $b_j \neq 0$  para algún  $j \in \{1, \dots, n\}$ , entonces  $H$  y  $H'$  son paralelos si y solo si

$$\text{rango} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = 1$$

Esta condición se puede escribir en la forma

$$\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

siempre que interpretemos que  $a_i = 0$  cuando  $b_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Comprobar, por otro lado, que  $H = H'$  si y solo si

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

(interpretando que  $a_j = 0$  si  $b_j = 0$ ,  $j = 0, \dots, n$ ).

**E.1.28.** Sean  $a_1, \dots, a_n$  escalares no nulos. Probar que el hiperplano que tiene por ecuación

$$\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$$

coincide con el que pasa por los puntos  $(a_1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, \dots, 0, a_n)$ .

**E.1.29.** Comprobar que la relación

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

es una condición necesaria y suficiente para que las rectas de ecuaciones

$$a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad (a_i, b_i) \neq (0, 0) \quad (i = 1, 2, 3)$$

sean concurrentes (es decir, que tengan un punto en común).

**E.1.30.** Si

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{y} \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

son ecuaciones de dos planos  $\pi$  y  $\pi'$  no paralelos de  $\mathbb{A}^3$ , respecto a un sistema de coordenadas afines  $x, y, z$ , mostrar que

$$\left( \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$$

son las componentes de un vector director de la recta  $L = \pi \cap \pi'$  intersección de los dos planos.

**E.1.31.** Con las notaciones del ejercicio anterior, demostrar también que, para todo  $\lambda \in K$ , el plano  $\pi_\lambda$  de ecuación

$$(a' + \lambda a)x + (b' + \lambda b)y + (c' + \lambda c)z + (d' + \lambda d) = 0$$

contiene  $L$  y que la aplicación  $\lambda \mapsto H_\lambda$  es una biyección entre  $K$  y el conjunto de planos distintos de  $\pi$  que contienen  $L$ .

**E.1.32.** Comprobar que la ecuación del plano de  $\mathbb{A}^3$  que pasa por los puntos de coordenadas  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$  y  $(c_1, c_2, c_3)$  es

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

**E.1.33.** Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín real de dimensión  $n$ ,  $H$  un hiperplano de  $\mathbb{A}$  y  $X = \mathbb{A} - H$ . Sea  $P$  un punto cualquiera de  $H$  y, si  $V$  es el espacio vectorial asociado de  $\mathbb{A}$ , sea  $w$  una forma lineal de  $V$  tal que  $W = \ker(w)$  sea el espacio director de  $H$ . Consideremos la relación binaria  $\sim$  definida entre puntos de  $X$  de manera que  $Q \sim R$  si y solo si

$$w(Q - P)w(R - P) > 0$$

Probar que:

- 1) La relación  $\sim$  no depende ni de  $P$  ni de  $w$  (nótese que si  $w'$  es otra forma lineal tal que  $\ker(w') = W$ , entonces existe un número real no nulo  $\lambda$  tal que  $w' = \lambda w$ ). Por tanto,  $\sim$  sólo depende del hiperplano  $H$ .
- 2) La relación  $\sim$  es de equivalencia.
- 3) La relación  $\sim$  define exactamente dos clases de equivalencia: los conjuntos  $X_w^+ = \{Q \in X \mid w(Q - P) > 0\}$  y  $X_w^- = \{Q \in X \mid w(Q - P) < 0\}$ . En particular, la partición  $X = X_w^+ \sqcup X_w^-$  de  $X$  no depende ni de  $P$  ni de  $w$ , pero obsérvese, por ejemplo, que  $X_{-w}^+ = X_w^-$  y  $X_{-w}^- = X_w^+$ .
- 4) La relación  $\sim$  cumple que  $Q \sim R$  si y solo si el segmento  $[Q, R]$  no contiene puntos de  $H$ .

Las clases de equivalencia  $X_w^+$  y  $X_w^-$  se denominan *semiespacios abiertos* definidos por  $H$ . Los *semiespacios cerrados* definidos por  $H$  son los conjuntos  $X_w^+ \cup H$  y  $X_w^- \cup H$ . Para  $n = 1$ , los semiespacios se denominan *semirrectas* y para  $n = 2$ , *semiplanos*. Observemos, finalmente, que si  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$  es la ecuación de un hiperplano en una referencia, entonces los semiespacios abiertos (cerrados) definidos por este hiperplano quedan determinados por las condiciones  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 > 0$  y  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 < 0$  ( $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 \geq 0$  y  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 \leq 0$ ).

## 1.4 Aplicaciones afines

La noción de aplicación afín entre dos espacios afines de la que partiremos es la que nos parece más natural cuando se tiene en cuenta la definición de espacio afín dada en la sección 1.1. Entre otras ventajas, nos permite establecer fácilmente las propiedades más destacadas y la manera de utilizarlas en coordenadas, lo cual constituye lo indispensable para el resto del curso. En la última parte mostramos que las aplicaciones que conservan la razón simple son afines (teorema 1.41). También enunciamos el teorema fundamental de la geometría afín (teorema 1.42) y comentamos brevemente el tema de la axiomatización de la geometría.

### Definición de aplicación afín y de aplicación asociada

Consideremos primero dos espacios afines  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$  y  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una aplicación. Sea ahora  $P \in \mathbb{A}$  y pongamos  $P' = \alpha(P)$ . Si  $V$  y  $V'$  son los espacios vectoriales asociados a  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$ , entonces tenemos aplicaciones biyectivas  $\delta_P: \mathbb{A} \rightarrow V$  y  $\delta_{P'}: \mathbb{A}' \rightarrow V'$  (cf. el comentario que sigue a los axiomas 1.2 y 1.1). Sea  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  la aplicación  $\delta_{P'} \circ \alpha \circ \delta_P^{-1}$ . Como  $\delta_P$  y  $\delta_{P'}$  son biyectivas,  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  es la única aplicación tal que  $\delta_{P'} \circ \alpha = \alpha_P \circ \delta_P$ , es decir, tal que

$$\alpha(X) - \alpha(P) = \alpha_P(X - P) \quad [1.16]$$

#### Aplicación afín

Diremos que una aplicación  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  es una *aplicación afín* si  $\alpha_P$  es lineal para algún punto  $P$ . El enunciado que sigue muestra que en tales circunstancias la aplicación  $\alpha_Q$  es la misma (por tanto, igual a  $\alpha_P$ ) para todo punto  $Q \in \mathbb{A}$ .

**1.26 Lema.** *Sea  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una aplicación y supongamos que, para un cierto punto  $P \in \mathbb{A}$ , la aplicación  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  es un homomorfismo aditivo (esto es, un homomorfismo de  $(V, +)$  en  $(V', +)$ ). Entonces  $\alpha_Q = \alpha_P$  para todo  $Q \in \mathbb{A}$ .*

**Demostración:** En efecto,

$$\begin{aligned} (\alpha(X) - \alpha(Q)) + \alpha_P(Q - P) &= (\alpha(X) - \alpha(Q)) + (\alpha(Q) - \alpha(P)) && \text{por [1.16]} \\ &= \alpha(X) - \alpha(P) && \text{ley de adición} \\ &= \alpha_P(X - P) && \text{por [1.16]} \\ &= \alpha_P((X - Q) + (Q - P)) && \text{ley de adición} \\ &= \alpha_P(X - Q) + \alpha_P(Q - P) && \text{hipótesis} \end{aligned}$$

Por tanto,  $\alpha(X) - \alpha(Q) = \alpha_P(X - Q)$ . Ahora, por la definición de  $\alpha_Q$ , tenemos  $\alpha(X) - \alpha(Q) = \alpha_Q(X - Q)$  y esto nos permite concluir que  $\alpha_Q(X - Q) = \alpha_P(X - Q)$ . Como el vector  $X - Q$  puede ser cualquier vector de  $V$ , efectivamente tenemos que  $\alpha_Q = \alpha_P$  para todo punto  $Q$ .  $\square$

#### Aplicación lineal asociada

Dada una aplicación afín  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ , pondremos  $\tilde{\alpha}$  para denotar la aplicación lineal  $V \rightarrow V'$  tal que  $\tilde{\alpha} = \alpha_P$  para cualquier punto  $P$  (por el lema anterior sabemos que  $\alpha_P$  es independiente de  $P$ ), y diremos que  $\tilde{\alpha}$  es la *aplicación lineal asociada* a la aplicación afín  $\alpha$ . Está claro que la fórmula [1.16] se puede reescribir en términos de  $\tilde{\alpha}$ : Si  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  es una aplicación afín, entonces

$$\alpha(X) - \alpha(P) = \tilde{\alpha}(X - P) \quad [1.17]$$

cualesquiera que sean  $P, X \in \mathbb{A}$ .

**E.1.34.** Probar que una aplicación afín  $\alpha$  es inyectiva (exhaustiva, biyectiva) si y solo si su transformación asociada  $\tilde{\alpha}$  es inyectiva (exhaustiva, biyectiva).

De una aplicación afín biyectiva, diremos que es una *transformación afín*. Las transformaciones afines de un espacio  $\mathbb{A}$  en sí mismo serán denominadas *afinidades* de  $\mathbb{A}$ . Aprovechamos para decir que la geometría afín es, en esencia, el estudio de los conceptos y propiedades que permanecen invariantes por transformaciones afines.

### Expresión en coordenadas

Sean  $\mathcal{R} = [O, e_1, \dots, e_n]$  y  $\mathcal{R}' = [O', e'_1, \dots, e'_{n'}]$  referencias de los espacios afines  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$ , respectivamente. Sea  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una aplicación afín de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$ . Pongamos  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{n'})$  para denotar las  $\mathcal{R}'$ -coordenadas de  $\alpha(O)$  y  $A$  para denotar la matriz de  $\tilde{\alpha}$  respecto a las bases  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  y  $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_{n'})$ . Por definición, la  $i$ -ésima columna de  $A$  contiene las componentes de  $\tilde{\alpha}(e_i)$  respecto a la base  $e'_1, \dots, e'_{n'}$ , lo cual se resume en la relación matricial  $\tilde{\alpha}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'A$ . Diremos que  $A$  es la *matriz de  $\alpha$  en las referencias  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$* .

**1.27 Proposición.** Sean  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  las  $\mathcal{R}$ -coordenadas de un punto  $X \in \mathbb{A}$ . Entonces las  $\mathcal{R}'$ -coordenadas  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_{n'})$  del punto  $X' = \alpha(X)$  se obtienen por la fórmula

$$\mathbf{x}'^T = \mathbf{p}^T + A\mathbf{x}^T \quad [1.18]$$

**Demostración:** En efecto, por un lado tenemos

$$\begin{aligned} \alpha(X) &= \alpha(O) + \tilde{\alpha}(X - O) && \alpha \text{ es afín} \\ &= O' + \mathbf{e}'\mathbf{p}^T + \tilde{\alpha}(\mathbf{e}\mathbf{x}^T) && \text{definición de } \mathbf{p} \text{ y } \mathbf{x} \\ &= O' + \mathbf{e}'\mathbf{p}^T + \tilde{\alpha}(\mathbf{e})\mathbf{x}^T && \text{linealidad de } \tilde{\alpha} \\ &= O' + \mathbf{e}'\mathbf{p}^T + \mathbf{e}'A\mathbf{x}^T && \text{definición de } A \\ &= O' + \mathbf{e}'(\mathbf{p}^T + A\mathbf{x}^T) \end{aligned}$$

y por el otro,  $\alpha(X) = O' + \mathbf{e}'\mathbf{x}'^T$ , por definición de  $\mathbf{x}'$ . La fórmula [1.18] resulta entonces de comparar estas dos expresiones de  $\alpha(X)$ .  $\square$

Enfatizamos que [1.18] generaliza la fórmula del cambio de coordenadas [1.7], ya que si  $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$  y  $\alpha = Id_{\mathbb{A}}$ , entonces [1.18] es la fórmula del cambio de  $\mathcal{R}$ -coordenadas a  $\mathcal{R}'$ -coordenadas. Teniendo en cuenta el ejercicio E.1.22, es natural mirar [1.18] cómo la aplicación  $f_{A, \mathbf{p}}: K^n \rightarrow K^{n'}$  tal que  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ , donde  $\mathbf{x}'^T = \mathbf{p}^T + A\mathbf{x}^T$ .

**El caso de las afinidades.** En el caso de las aplicaciones afines  $\alpha$  de un espacio afín  $\mathbb{A}$  en sí mismo, podemos escoger  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ . Si este es el caso, la matriz  $A$  de  $\alpha$  respecto a  $\mathcal{R}$  es la matriz de  $\tilde{\alpha}$  respecto a la base  $\mathbf{e}$ , es decir, la matriz tal que  $\tilde{\alpha}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}A$ , y la fórmula [1.18] expresa las  $\mathcal{R}$ -coordenadas de  $\alpha(X)$  en términos  $A$  y de las  $\mathcal{R}$ -coordenadas de  $X$  y  $\alpha(O)$ .

La condición para que  $\alpha$  sea una afinidad es que  $\det(A) \neq 0$ .

### Ejemplos

La fórmula [1.17] nos muestra cómo podemos obtener todas las aplicaciones afines de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$ . De hecho, dada una aplicación lineal  $f: V \rightarrow V'$  y puntos  $P \in \mathbb{A}$ ,  $P' \in \mathbb{A}'$ , si definimos  $f_{P,P'}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  por la fórmula

$$f_{P,P'}(X) = P' + f(X - P) \quad [1.19]$$

entonces  $\alpha = f_{P,P'}$  es una aplicación afín de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$  tal que  $\alpha(P) = P'$  y  $\tilde{\alpha} = f$ . Además, por [1.17] toda aplicación afín de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$  es de esta forma. Si  $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$  y  $P' = P$ , en lugar de  $f_{P,P}$  escribiremos simplemente  $f_P$ . Así pues,  $f_P: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  se define por la fórmula

$$f_P(X) = P + f(X - P) \quad [1.19']$$

**E.1.35.** Si  $f$  y  $g$  son aplicaciones lineales de  $V$  en  $V'$ ,  $P, Q \in \mathbb{A}$  y  $P', Q' \in \mathbb{A}'$ , probar que  $f_{P,P'} = g_{Q,Q'}$  si y solo si  $g = f$  y  $Q' = P' + f(Q - P)$ .

**E.1.36.** *Las translaciones son afinidades.* Si  $f = Id_V$  (la identidad de  $V$ ),  $P \in \mathbb{A}$  y  $v \in V$ , comprobar que  $f_{P,P+v}(X) = X + v$  para todo  $X \in \mathbb{A}$ . Así  $f_{P,P+v} = t_v$ , con lo cual vemos que las translaciones de  $\mathbb{A}$  son las afinidades  $\tau: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tales que  $\tilde{\tau} = Id_V$ .

### Homotecias

En un espacio afín  $\mathbb{A}$ , la *homotecia de centro*  $O \in \mathbb{A}$  y *razón*  $\lambda \in K^*$ , que denotaremos  $h_{O,\lambda}$ , es la aplicación  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  definida por la fórmula

$$h_{O,\lambda}(X) = O + \lambda(X - O) \quad [1.20]$$

Puesto que  $h_{O,\lambda}(O) = O$  y la aplicación  $h_\lambda: V \rightarrow V$  tal que  $v \mapsto \lambda v$  es lineal,  $h_{O,\lambda}$  es una aplicación afín: con las notaciones de [1.19'],  $h_{O,\lambda}$  coincide con  $(h_\lambda)_O$  y, en particular,  $\tilde{h}_{O,\lambda} = h_\lambda$ . Como  $h_\lambda$  es un automorfismo de  $V$ , las homotecias son afinidades de  $\mathbb{A}$ . Nótese que  $h_{O,1} = Id$ .

Ahora es inmediato comprobar, si  $\lambda, \mu \in K^*$ , que

$$h_{O,\lambda} \circ h_{O,\mu} = h_{O,\lambda\mu} \quad [1.20']$$

con lo cual vemos que el conjunto

$$\mathcal{H}_O = \{h_{O,\lambda} \mid \lambda \in K^*\}$$

de las homotecias de centro  $O$  es cerrado por la operación de composición. Además,

$$h_{O,\lambda}^{-1} = h_{O,\lambda^{-1}} \quad [1.20'']$$

para todo  $\lambda \in K^*$ , ya que

$$h_{O,\lambda^{-1}} \circ h_{O,\lambda} = h_{O,\lambda^{-1}\lambda} = h_{O,1} = Id.$$

Las consideraciones precedentes prueban el enunciado que sigue:

**1.28 Proposición.** *El conjunto  $\mathcal{H}_O(\mathbb{A})$  de las homotecias de  $\mathbb{A}$  con centro  $O \in \mathbb{A}$  forman un grupo con la operación de composición.*  $\square$

**E.1.37.** La aplicación  $K^* \rightarrow \mathcal{H}_O$  tal que  $\lambda \mapsto h_{O,\lambda}$  es un isomorfismo de grupos.

### Ecuaciones paramétricas

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín,  $V$  su espacio estructural,  $O \in \mathbb{A}$  y  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$  vectores de  $V$ . Entonces la aplicación

$$\alpha_{O,\mathbf{e}}: K^r \rightarrow \mathbb{A} \quad \text{tal que} \quad \alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = O + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r$$

es una aplicación afín. En efecto, la aplicación

$$f_{\mathbf{e}}: K^r \rightarrow V \quad \text{tal que} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \mapsto \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r$$

es lineal y, con las notaciones de [1.19],  $\alpha_{O,\mathbf{e}} = (f_{\mathbf{e}})_{0,O}$ . Notemos que  $\alpha_{O,\mathbf{e}}$  es inyectiva si y solo si los vectores  $e_1, \dots, e_r$  son linealmente independientes. De estas aplicaciones hemos visto casos especiales antes:

- 1) La aplicación  $X_{\mathcal{R}}$  del ejercicio E.1.20, en la cual  $r = n$  (la dimensión de  $\mathbb{A}$ ) y donde  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  es una base de  $V$ .
- 2) Más generalmente, la aplicación  $X_{\mathcal{S}}$  del ejercicio E.1.21, en la cual  $e_i = P_i - P_0$  y  $O = P_0$ , donde  $P_0, P_1, \dots, P_r$  son puntos independientes de una variedad lineal  $L$  de dimensión  $r$ .
- 3) En el ejemplo del ejercicio E.1.25,  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n$  es el espacio afín numérico de dimensión  $n$ ,  $e_1, \dots, e_r$  son los elementos de  $\mathbb{A}^n$  correspondientes a las columnas de la matriz  $B$  y  $O$  es el punto  $(p_1, \dots, p_n)$ .
- 4) Observemos que las aplicaciones  $f_{A,p}$  de cambios de coordenadas afines introducidas en el ejercicio E.1.22 son casos particulares de las aplicaciones descritas en el punto 3.

### Teorema fundamental de las aplicaciones afines

El siguiente teorema nos muestra cómo podemos construir las aplicaciones afines en términos geométricos, y también cómo podemos reconocer cuando son inyectivas, exhaustivas o biyectivas. Por ejemplo, hay una transformación afín entre dos espacios afines  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$  si y solo si tienen la misma dimensión, y en este caso hay una única tal transformación de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$  que transforma una referencia dada de  $\mathbb{A}$  en una referencia dada de  $\mathbb{A}'$ .

Para una ilustración gráfica, véase la figura 1.5: para construir la figura de la derecha,  $F'$ , que es «afín» de la de la izquierda,  $F$ , hemos encontrado la afinidad  $\varphi$  que

transforma tres puntos de  $F$  en tres puntos que hemos escogido previamente y después hemos calculado la imagen de  $F$  por  $\varphi$ . El mismo método se ha seguido para generar la ilustración del final del capítulo.

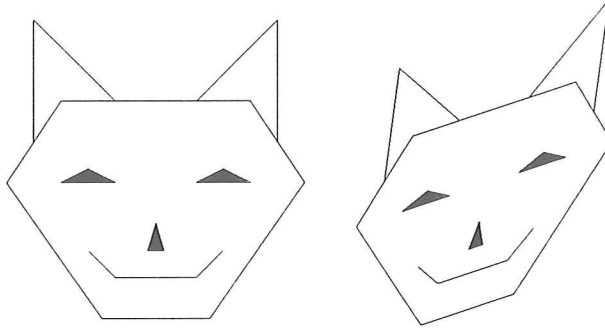


Figura 1.5: Una afinidad

**1.29 Teorema.** Si  $\mathcal{R} = [P_0, P_1, \dots, P_n]$  es una referencia del espacio afín  $\mathbb{A}$  y  $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$  son puntos arbitrarios de un espacio afín  $\mathbb{A}'$ , existe una única aplicación afín  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  tal que  $\alpha(P_i) = P'_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Esta aplicación es inyectiva (exhaustiva) si y solo si los puntos  $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$  son independientes (generan  $\mathbb{A}'$ ) y es una transformación afín si y solo si  $[P'_0, P'_1, \dots, P'_n]$  es una referencia de  $\mathbb{A}'$ .

**Demostración:** Para  $1 \leq i \leq n$ , pongamos  $e_i = P_i - P_0 \in V$  y  $e'_i = P'_i - P'_0 \in V'$ , donde  $V$  y  $V'$  denotan los espacios vectoriales asociados a  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$ , respectivamente. Si existe una aplicación afín  $\alpha$  que satisface el enunciado, entonces  $\alpha(P_0) = P'_0$  y  $\tilde{\alpha}(e_i) = e'_i$ . Como  $\mathcal{R}$  es una referencia,  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  es una base de  $V$  y, por tanto, existe una única aplicación lineal  $f: V \rightarrow V'$  tal que  $f(e_i) = e'_i$ , lo cual muestra que si existe  $\alpha$ , entonces  $\tilde{\alpha} = f$ . Ahora bien, esta igualdad y la condición  $\alpha(P_0) = P'_0$  implican que  $\alpha = f_{P_0, P'_0}$  (v. fórmula [1.19]), lo cual establece la unicidad.

Para ver la existencia, pongamos  $\alpha = f_{P_0, P'_0}$ , de forma que  $\alpha$  es la aplicación afín de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$  tal que  $\alpha(P_0) = P'_0$  y  $\tilde{\alpha} = f$ . Entonces

$$\alpha(P_i) = \alpha(P_0) + \tilde{\alpha}(P_i - P_0) = P'_0 + f(e_i) = P'_0 + e'_i = P'_i$$

Para terminar la demostración, basta observar que  $f$  es inyectiva (exhaustiva) si y solo si  $e'_1, \dots, e'_n$  son linealmente independientes (generan  $V'$ ), y que es biyectiva si y solo si  $e'_1, \dots, e'_n$  forman una base de  $V'$ .  $\square$

### Composición de aplicaciones afines. Grupo de afinidades

**1.30 Proposición.** La composición  $\beta \circ \alpha$  de aplicaciones afines  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  y  $\beta: \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}''$  es una aplicación afín y  $\widetilde{\beta \circ \alpha} = \widetilde{\beta} \circ \widetilde{\alpha}$ .

**Demostración:** En efecto, si  $P, Q \in \mathbb{A}$ , entonces

$$\begin{aligned}(\beta \circ \alpha)(Q) &= \beta(\alpha(Q)) \\ &= \beta(\alpha(P) + \tilde{\alpha}(Q - P)) \\ &= \beta(\alpha(P)) + \tilde{\beta}(\tilde{\alpha}(Q - P)) \\ &= (\beta \circ \alpha)(P) + (\tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha})(Q - P)\end{aligned}$$

y las dos afirmaciones quedan establecidas por ser  $\tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha}$  lineal.  $\square$

**1.31 Proposición.** Si  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  es una transformación afín, entonces  $\alpha^{-1}: \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}$  es una transformación afín y  $\widetilde{\alpha^{-1}} = \tilde{\alpha}^{-1}$ .

**Demostración:** Sean  $P'$  y  $Q'$  puntos arbitrarios de  $\mathbb{A}'$ . Como  $\alpha$  es biyectiva, podemos considerar los puntos  $P$  y  $Q$  de  $\mathbb{A}$  tales que  $P' = \alpha(P)$  y  $Q' = \alpha(Q)$ , es decir,  $\alpha^{-1}(P') = P$  y  $\alpha^{-1}(Q') = Q$ . Dado que  $\alpha$  es una aplicación afín, tenemos la relación  $\alpha(Q) - \alpha(P) = \tilde{\alpha}(Q - P)$  y, por tanto, la relación  $Q' - P' = \tilde{\alpha}(\alpha^{-1}(Q') - \alpha^{-1}(P'))$ . Ahora bien, puesto que  $\alpha$  es biyectiva,  $\tilde{\alpha}$  es biyectiva (E.1.34) y la última relación es equivalente a  $\tilde{\alpha}^{-1}(Q' - P') = \alpha^{-1}(Q') - \alpha^{-1}(P')$ . La demostración queda concluida por ser  $\tilde{\alpha}^{-1}$  lineal y  $P'$  y  $Q'$  puntos arbitrarios de  $\mathbb{A}'$ .  $\square$

**1.32 Proposición.** Las afinidades de un espacio afín  $\mathbb{A}$  forman un grupo con el producto de composición.

**Demostración:** Que la composición de dos afinidades es una afinidad es una consecuencia directa de la proposición 1.30 y de que la composición de dos biyecciones es una biyección. Por otro lado, la identidad de  $\mathbb{A}$  es una afinidad y claramente es un elemento neutro por la operación de composición. Finalmente, la proposición 1.31 nos dice que la inversa de una afinidad es una afinidad.  $\square$

Escribiremos  $GA(\mathbb{A})$  para denotar el grupo de las afinidades de  $\mathbb{A}$ . También diremos que es el *grupo afín* de  $\mathbb{A}$ . Por lo que hemos visto entre la proposición 1.11 y el ejercicio E.1.36, el grupo  $\mathcal{T}(\mathbb{A})$  de las translaciones de  $\mathbb{A}$  es un subgrupo de  $GA(\mathbb{A})$ . Análogamente, por la proposición 1.28 tenemos que el grupo  $\mathcal{H}_O(\mathbb{A})$  de las homotecias de  $\mathbb{A}$  con centro  $O$  es un subgrupo de  $GA(\mathbb{A})$ .

**E.1.38.** Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín y  $V$  su espacio vectorial asociado. Sea  $v \in V$  y  $\alpha \in GA(\mathbb{A})$ . Entonces, para todo  $P \in \mathbb{A}$ ,

$$(\alpha \circ t_v)(P) = \alpha(P + v) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(v) = t_{\tilde{\alpha}(v)}(\alpha(P)) = (t_{\tilde{\alpha}(v)} \circ \alpha)(P)$$

lo cual muestra que

$$\alpha \circ t_v \circ \alpha^{-1} = t_{\tilde{\alpha}(v)}$$

Es decir,  $\mathcal{T}(\mathbb{A})$  es un subgrupo normal de  $GA(\mathbb{A})$  (un subgrupo  $T$  de un grupo  $G$  es llamado *normal*, o *invariante*, si  $gtg^{-1} \in T$  cualesquiera que sean  $g \in G$  y  $t \in T$ ).

**E.1.39.** Las afinidades de un espacio afín  $\mathbb{A}$  que dejan fijo un punto  $O \in \mathbb{A}$  forman un subgrupo  $GA_O(\mathbb{A})$  de  $GA(\mathbb{A})$ . Si  $V$  es el espacio vectorial asociado de  $\mathbb{A}$ , entonces la aplicación

$$GL(V) \rightarrow GA_O(\mathbb{A}) \quad \text{tal que} \quad f \mapsto f_O$$

es un isomorfismo (recordemos que, según la definición 1.19',  $f_O(X) = O + f(X - O)$  para todo  $X \in \mathbb{A}$ ). El isomorfismo inverso es la aplicación  $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ .

**E.1.40.** Con las notaciones del ejercicio anterior, probar que la aplicación

$$V \times GL(V) \rightarrow GA(\mathbb{A}) \quad \text{tal que} \quad (v, f) \mapsto t_v \circ f_O$$

es biyectiva y que la biyección inversa es la aplicación  $\alpha \mapsto (\alpha(O) - O, \tilde{\alpha})$  (en otras palabras, toda afinidad  $\alpha$  de  $\mathbb{A}$  se descompone de manera única como producto  $\tau \circ \beta$  de una translación  $\tau$  y una afinidad  $\beta$  que deja  $O$  fijo). Comprobar también, usando E.1.38, que la operación de  $V \times GL(V)$  correspondiente al producto de composición de  $GA(\mathbb{A})$  según la biyección anterior (también la denotamos  $\circ$ ) es la dada por la expresión

$$(v', f') \circ (v, f) = (v' + f'(v), f' \circ f)$$

### Puntos fijos

Para el estudio de una afinidad  $\alpha$  es importante el conocimiento de su conjunto de *puntos fijos*, esto es, los puntos  $X$  tales que  $\alpha(X) = X$ . En este apartado, primero explicaremos cómo encontrar este conjunto y, en particular, cómo decidir si es vacío o no. Después demostraremos, en el caso que sea no vacío, que es una variedad lineal y a la vez daremos la fórmula para calcular su dimensión. También incluimos un criterio que da una condición suficiente para que una afinidad tenga un único punto fijo.

Si  $\alpha$  es una afinidad, para estudiar el conjunto

$$F_\alpha = \{X \in \mathbb{A} \mid \alpha(X) = X\}$$

de *puntos fijos* para  $\alpha$  se puede proceder como sigue. Pongamos  $f = \tilde{\alpha}$  y  $v = \alpha(O) - O$ , donde  $O$  es un punto fijado arbitrariamente. Entonces, el transformado  $\alpha(X)$  de un punto  $X = O + x$  ( $x \in V$ ) es el punto  $\alpha(O) + f(X - O) = O + v + f(x)$ . Por tanto,  $O + x$  es fijo para  $\alpha$  si y solo si  $x = v + f(x)$ , es decir, si y solo si

$$(Id - f)(x) = v. \tag{1.21}$$

De esta relación diremos que es la *ecuación de los puntos fijos* de  $\alpha$ . Si  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$  es una referencia y ponemos  $f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}A$ ,  $v = \mathbf{e}p^T$  y  $x = \mathbf{e}x^T$  (por tanto,  $A$ ,  $p$  y  $x$  son la matriz de  $f$ , las componentes de  $v$  y las componentes de  $x$  respecto a la base  $\mathbf{e}$  de  $V$ , respectivamente), entonces la ecuación [1.21] se escribe

$$(I_n - A)x^T = p^T \tag{1.21'}$$

A esta ecuación la denominaremos *ecuación de los puntos fijos de  $\alpha$  en la referencia  $\mathcal{R}$* . Equivale a un sistema de  $n$  ecuaciones lineales en las incógnitas  $x_1, \dots, x_n$ . El conjunto  $F_\alpha$  es vacío (es decir,  $\alpha$  no tiene puntos fijos) si y solo si este sistema es incompatible, esto es, si y solo si  $\text{rango}(I_n - A) < \text{rango}(I_n - A | p^T)$ . En el caso de que  $F_\alpha$  sea no vacío, entonces su estructura queda determinada por la proposición que sigue.

**1.33 Proposición.** *Si  $\alpha$  es una afinidad y  $F_\alpha \neq \emptyset$ , entonces  $F_\alpha$  es una variedad lineal y  $W(F_\alpha) = \ker(\text{Id} - \tilde{\alpha})$ . En particular,  $\dim(F_\alpha) = n - r$ , donde  $r = \text{rango}(\text{Id} - \tilde{\alpha}) (= \text{rango}(I_n - A))$ , si  $A$  es la matriz de  $\alpha$  en una referencia cualquiera).*

**Demostración:** Pongamos  $f = \tilde{\alpha}$ ,  $h = \text{Id} - f$  y  $v = \alpha(O) - O$  ( $O$  un punto fijado arbitrariamente). Entonces las soluciones  $x$  de [1.21] forman el conjunto  $h^{-1}(v)$ . Si suponemos que  $F_\alpha \neq \emptyset$ , podemos escoger  $\bar{x} \in h^{-1}(v)$  y entonces tenemos  $h^{-1}(v) = \bar{x} + \ker(h)$ . Por tanto,  $F_\alpha = O + \bar{x} + \ker(h)$ , lo cual muestra que  $F_\alpha$  es la variedad lineal que pasa por el punto  $O + \bar{x}$  con espacio director  $\ker(h)$ .  $\square$

**1.34 Corolario.** *Si  $\tilde{\alpha}$  no tiene el valor propio  $+1$ , entonces  $\alpha$  tiene un único punto fijo.*

**Demostración:** Si  $f = \tilde{\alpha}$ , por definición del polinomio característico  $Q_f$  de  $f$  tenemos que

$$\det(\text{Id} - f) = Q_f(1)$$

Como las raíces de  $Q_f$  son los valores propios de  $f$ , por hipótesis tenemos  $Q_f(1) \neq 0$ . Así  $\text{Id} - f$  es un isomorfismo y la ecuación de puntos fijos  $(\text{Id} - f)(x) = v$  tiene como única solución el vector  $x = (\text{Id} - f)^{-1}(v)$ . Por tanto,  $X = O + (\text{Id} - f)^{-1}(v)$  es el único punto fijo de  $\alpha$ .  $\square$

**1.35 Ejemplo** (Afinidades de una recta afín). Sea  $\varphi$  una afinidad de  $\mathbb{A}^1$ . Entonces  $\tilde{\varphi} = h_\lambda$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ , ya que todo automorfismo lineal de un espacio vectorial de dimensión 1 es de esta forma. Si  $\lambda = 1$ ,  $\varphi$  es una translación. Si  $\lambda \neq 1$ ,  $\varphi$  tiene un único punto fijo (corolario 1.34). Si ponemos  $O$  para denotar este único punto fijo, entonces  $\varphi(X) = O + \lambda(X - O)$  y, por tanto,  $\varphi = h_{O,\lambda}$ , la homotecia de centro  $O$  y razón  $\lambda$ . Hemos encontrado, pues, que *una afinidad de  $\mathbb{A}^1$  es una homotecia cuando tiene un único punto fijo y una translación cuando no tiene puntos fijos*.

### *Algunas propiedades de las aplicaciones afines*

Dados dos puntos  $P$  y  $Q$  de un espacio afín  $\mathbb{A}$  y una escalar  $\lambda \in K$ , pondremos

$$M_\lambda(P, Q) = P + \lambda(Q - P)$$

Fijémonos en que  $M_\lambda(P, P) = P$ , para todo  $\lambda \in K$ , y que si  $P \neq Q$ , entonces  $\lambda \mapsto M_\lambda(P, Q)$  es una biyección entre  $K$  y la recta  $PQ$  [ $\diamond$ ]. Además,  $\sigma(P, Q, M_\lambda(P, Q)) = \lambda$ .

Si  $2 \neq 0$  en el cuerpo  $K$ , en lugar de  $M_{1/2}(P, Q) = P + \frac{1}{2}(Q - P)$ , escribiremos  $M(P, Q)$ , y diremos que  $M(P, Q)$  es el *punto medio* de los puntos  $P$  y  $Q$   $\{P, Q\}$  (cf. el ejercicio E.1.24). El ejercicio que sigue muestra que  $M(P, Q)$  sólo depende del par no ordenado  $\{P, Q\}$ .

**E.1.41.** Comprobar que  $M_\lambda(P, Q) = M_{1-\lambda}(Q, P)$ , cualesquiera que sean los puntos  $P$  y  $Q$ , y el escalar  $\lambda \in K$ . En particular,  $M(P, Q) = M(Q, P)$  (esta relación también se obtiene haciendo  $Q = P$  en el ejercicio E.1.42).

De ahora en adelante supondremos tácitamente, siempre que consideremos una expresión de la forma  $M(P, Q)$ , que  $2 \neq 0$  en el cuerpo  $K$ .

**E.1.42.** Si  $P$  y  $Q$  son puntos y  $v$  es un vector, probar que  $M(P, Q + v) = M(P + v, Q)$ .

**1.36 Proposición.** Si  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  es una aplicación afín, entonces

$$\alpha(M_\lambda(P, Q)) = M_\lambda(\alpha(P), \alpha(Q))$$

cualquiera que sean  $P, Q \in \mathbb{A}$ .

**Demostración:** Sea  $M = M_\lambda(P, Q)$  y  $M' = M_\lambda(\alpha(P), \alpha(Q))$ . Por definición, tenemos  $M - P = \lambda(Q - P)$ . Pero si  $\tilde{\alpha}$  es la aplicación asociada a  $\alpha$ , entonces  $\alpha(M) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(M - P)$ . Como  $\tilde{\alpha}$  es lineal,  $\tilde{\alpha}(M - P) = \lambda\tilde{\alpha}(Q - P)$ , y esta última expresión es igual a  $\lambda(\alpha(Q) - \alpha(P))$ . Así  $\alpha(M) = \alpha(P) + \lambda(\alpha(Q) - \alpha(P)) = M'$ .  $\square$

**1.37 Corolario.** Si  $\alpha$  es una aplicación afín,  $\alpha(M(P, Q)) = M(\alpha(P), \alpha(Q))$ , cualquiera que sean los puntos  $P$  y  $Q$ .  $\square$

**1.38 Corolario.** Sea  $L$  una recta de  $\mathbb{A}$ . Si  $\alpha|L$  no es inyectiva, entonces  $\alpha|L$  es constante. Si  $\alpha|L$  es inyectiva, entonces  $L' = \alpha(L)$  es una recta y

$$\sigma(P, Q, M) = \sigma(\alpha(P), \alpha(Q), \alpha(M))$$

cualquiera que sean  $P, Q, M \in L$ ,  $P \neq Q$ .

**Demostración:** Si  $\alpha|L$  no es inyectiva, existen puntos  $P, Q \in L$  tales que  $P \neq Q$  y  $\alpha(P) = \alpha(Q)$ . Si ahora  $M \in L$  y  $\lambda = \sigma(P, Q, M)$ , entonces  $M = M_\lambda(P, Q)$  y  $\alpha(M) = M_\lambda(\alpha(P), \alpha(Q)) = \alpha(P)$ . Esto prueba la primera afirmación.

Para ver la segunda, supongamos que  $\alpha|L$  es inyectiva y sean  $P, Q, M \in L$ ,  $P \neq Q$ . Dado que  $\alpha|L$  es inyectiva, tenemos  $\alpha(P) \neq \alpha(Q)$ . Si ponemos  $\lambda = \sigma(P, Q, M)$ , entonces  $M = M_\lambda(P, Q)$  y, por la proposición 1.36, será  $\alpha(M) = M_\lambda(\alpha(P), \alpha(Q))$ . Ahora bien, esta relación nos muestra que la imagen de  $L = PQ$  es la recta  $\alpha(P)\alpha(Q)$  y que  $\sigma(\alpha(P), \alpha(Q), \alpha(M)) = \lambda = \sigma(P, Q, M)$ .  $\square$

De acuerdo con el corolario 1.38, de una aplicación  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  entre espacios afines que cumple la relación de la proposición 1.36 diremos que *conserva las razones simples*. Análogamente, de una aplicación que cumpla la relación del corolario 1.37, diremos que *conserva los puntos medios*. Las aplicaciones afines, pues, conservan las razones simples y, en particular, los puntos medios. Al final de esta sección demostraremos que el enunciado recíproco también es cierto (si 2 es no nulo a  $K$ , como ya se ha advertido): una aplicación que conserva las razones simples es una afinidad.

En el corolario 1.38 hemos visto que la imagen de una recta por una aplicación afín es una recta o un punto. Esta propiedad es un caso muy particular del resultado que sigue.

**1.39 Proposición.** *Sea  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una aplicación afín,  $L$  una variedad lineal de  $\mathbb{A}$  y  $L'$  una variedad lineal de  $\mathbb{A}'$ . Pongamos  $W = W(L)$  y  $W' = W(L')$ . Entonces  $\alpha(L)$  es una variedad lineal de  $\mathbb{A}'$  y su espacio director es  $\tilde{\alpha}(W)$ . En particular,  $\dim(\alpha(L)) \leq \dim(L)$ , con igualdad si y solo si  $\tilde{\alpha}|_W$  es inyectiva. Similarmente,  $\alpha^{-1}(L')$  es o  $\emptyset$  o una variedad lineal de  $\mathbb{A}$  y, en este último caso, su espacio director es  $\tilde{\alpha}^{-1}(W')$ .*

**Demostración:** Si  $P \in L$ , entonces los puntos de  $L$  son de la forma  $P + w$ ,  $w \in W$ . Por tanto, los puntos de  $\alpha(L)$  son de la forma  $\alpha(P + w) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(w)$ , lo cual muestra que  $\alpha(L) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(W)$ . Esto prueba la primera afirmación, ya que la linealidad de  $\tilde{\alpha}$  implica que  $\tilde{\alpha}(W)$  es un subespacio vectorial de  $V'$ .

Análogamente, si  $\alpha^{-1}(L') \neq \emptyset$ , existe  $P \in \mathbb{A}$  tal que  $\alpha(P) \in L'$ , con lo cual  $L' = \alpha(P) + W'$  y un punto  $Q = P + v$  ( $v \in V$ ) cumple  $\alpha(Q) \in L'$  si y solo si  $\alpha(P) + \tilde{\alpha}(v) \in \alpha(P) + W'$ , esto es, si y solo si  $\tilde{\alpha}(v) \in W'$ . Por tanto,  $\alpha^{-1}(L') = P + \tilde{\alpha}^{-1}(W')$ .  $\square$

**1.40 Corolario.** *Si  $L$  y  $M$  son variedades paralelas de  $\mathbb{A}$ , y  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  es una aplicación afín, entonces  $\alpha(L)$  y  $\alpha(M)$  son variedades paralelas de  $\mathbb{A}'$ .*

**Demostración:** Es inmediata utilizando la primera parte de la proposición 1.39.  $\square$

**E.1.43.** Una afinidad  $\alpha$  de  $\mathbb{A}$  transforma una variedad lineal en una variedad lineal de la misma dimensión (proposición 1.39). Si ponemos  $\mathcal{L}(\mathbb{A})$  para indicar el conjunto de variedades lineales de  $\mathbb{A}$ , demostrar que la aplicación  $\mathcal{L}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{A}')$  tal que  $L \mapsto \alpha(L)$  es biyectiva y que cumple  $\alpha(L \cap L') = \alpha(L) \cap \alpha(L')$ ,  $\alpha(L \vee L') = \alpha(L) \vee \alpha(L')$ .

### Caracterizaciones de las afinidades

El primer resultado de este apartado, junto con la proposición 1.36 y el corolario 1.38, muestra que las aplicaciones afines coinciden precisamente con las que conservan las razones simples, suponiendo que la característica de  $K$  es distinta de 2.

**1.41 Teorema.** Sean  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$  espacios afines sobre un cuerpo  $K$  de característica distinta de 2. Si  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una aplicación que conserva las razones simples, entonces  $\alpha$  es una aplicación afín.

**Demostración:** Si  $V$  y  $V'$  son los espacios vectoriales asociados de  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$ , hace falta ver que la aplicación  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  definida por la relación  $\alpha_P(v) = \alpha(P+v) - \alpha(P)$  es lineal para algún punto  $P \in \mathbb{A}$ .

Con tal fin, primero veremos que  $\alpha_P = \alpha_Q$ , cualesquiera que sean los puntos  $P$  y  $Q$ , es decir, veremos que

$$\alpha(P+v) - \alpha(P) = \alpha(Q+v) - \alpha(Q)$$

para todo  $v \in V$ ,  $P$  y  $Q$  arbitrarios. Para ver esta relación, usaremos la igualdad  $M(P, Q+v) = M(P+v, Q)$ , establecida en E.1.42. Puesto que  $\alpha$  conserva las razones simples, en particular conserva los puntos medios y, por tanto, tendremos

$$M(\alpha(P), \alpha(Q+v)) = M(\alpha(P+v), \alpha(Q))$$

Si ahora hacemos las sustituciones  $\alpha(P+v) = \alpha(P) + \alpha_P(v)$  y  $\alpha(Q+v) = \alpha(Q) + \alpha_Q(v)$ , obtenemos

$$M(\alpha(P), \alpha(Q) + \alpha_Q(v)) = M(\alpha(P) + \alpha_P(v), \alpha(Q))$$

Por la definición de punto medio, esta última relación es equivalente a

$$\alpha(P) + \frac{1}{2}(\alpha(Q) + \alpha_Q(v)) = \alpha(P) + \alpha_P(v) + \frac{1}{2}(\alpha(Q) - \alpha(P))$$

donde hemos puesto  $w = \alpha(Q) - \alpha(P)$ . Y ahora es inmediato ver que esta última igualdad equivale a  $\alpha_P(v) = \alpha_Q(v)$ .

Como  $\alpha_P$  es independiente del punto  $P$ , podemos poner  $f = \alpha_P$ ,  $P$  un punto cualquiera. Esto quiere decir que  $f(v) = \alpha(P+v) - \alpha(P)$ ,  $P$  arbitrario. Nos falta por ver que  $f$  es lineal. Veamos primero que es aditiva, esto es, que  $f(u+v) = f(u) + f(v)$ , cualesquiera que sean los vectores  $u$  y  $v$ : si  $O$  es un punto cualquiera, entonces

$$\begin{aligned} f(u+v) &= \alpha(O+u+v) - \alpha(O) \\ &= (\alpha(O+u+v) - \alpha(O+v)) + (\alpha(O+v) - \alpha(O)) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Subrayemos que hasta aquí solo hemos utilizado que  $\alpha$  conserva los puntos medios.

Probemos, para acabar, que  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$  ( $\lambda \in K$ ,  $v \in V$ ). Si  $O$  es un punto arbitrario, entonces  $O + \lambda v = M_\lambda(O, O+v)$  y, por tanto,

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= \alpha(O + \lambda v) - \alpha(O) \\ &= \alpha(M_\lambda(O, O+v)) - \alpha(O) \\ &= M_\lambda(\alpha(O), \alpha(O+v)) - \alpha(O) \\ &= M_\lambda(\alpha(O), \alpha(O) + f(v)) - \alpha(O) \\ &= (\alpha(O) + \lambda f(v)) - \alpha(O) \\ &= \lambda f(v) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

### Aplicaciones semiafines y colineaciones

Sabemos que la imagen de una recta por una transformación afín es una recta. La afirmación recíproca no es cierta: una aplicación biyectiva arbitraria entre dos rectas afines es un contraejemplo. Para un contraejemplo en cualquier dimensión, consideremos la aplicación (biyectiva)  $\beta : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  tal que  $z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = \bar{z}$  (aplicación de conjugación). Entonces está claro que la imagen de la recta  $z + \langle v \rangle$  es la recta  $\bar{z} + \langle \bar{v} \rangle$  pero, en cambio,  $\beta$  no es una afinidad. Recalquemos que  $\beta(z+z') = \beta(z) + \beta(z')$  (decimos que  $\beta$  es *aditiva*) y  $\beta(\lambda z) = \bar{\lambda}\beta(z)$  (decimos que  $\beta$  es *antilineal*).

De hecho, el ejemplo de la conjugación se puede formular de una manera general. Supongamos que tenemos una aplicación biyectiva  $K \rightarrow K$ ,  $\lambda \mapsto \lambda^*$ , tal que  $(\lambda + \mu)^* = \lambda^* + \mu^*$  y  $(\lambda\mu)^* = \lambda^*\mu^*$ , cualesquiera que sean  $\lambda, \mu \in K$  (diremos que  $\lambda \mapsto \lambda^*$  es un *automorfismo* de  $K$ ; la identidad de  $K$  y la conjugación de  $\mathbb{C}$  son ejemplos).

Ahora diremos que una aplicación  $f: V \rightarrow V'$  entre  $K$ -espacios vectoriales  $V$  y  $V'$  es *\*-lineal* si es aditiva y  $f(\lambda v) = \lambda^* f(v)$  para todo  $v \in V$  y todo  $\lambda \in K$ . Y una aplicación  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  entre espacios afines diremos que es *\*-afín* si existe un punto  $P \in \mathbb{A}$  tal que la aplicación  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  definida por [1.16] es *\*-lineal* (donde  $V$  y  $V'$  son los espacios vectoriales asociados a  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$ , respectivamente). Por el lema 1.26,  $\alpha_P$  es independiente de  $P$  y, si ponemos  $\tilde{\alpha} = \alpha_P$  para un  $P$  arbitrario, entonces tendremos [1.17], ahora con  $\tilde{\alpha}$  una aplicación *\*-lineal*.

A las aplicaciones  $V \rightarrow V'$  ( $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ ) que son *\*-lineales* (*\*-afines*) para algún automorfismo  $*$  de  $K$  las denominaremos *semilineales* (*semiafines*). Las *transformaciones semiafines* (*semiafinidades*) son las aplicaciones semiafines biyectivas (transformaciones semiafines de un espacio afín en sí mismo).

Si  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  es *\*-lineal*, entonces tenemos, calcando la demostración de la proposición 1.36, que

$$\alpha(M_\lambda(P, Q)) = M_{\lambda^*}(\alpha(P), \alpha(Q))$$

El corolario 1.37 es válido sin cambios  $[\diamond]$  y, calcando la demostración del corolario 1.38, vemos que éste es válido con la fórmula

$$\sigma(P, Q, M)^* = \sigma(\alpha(P), \alpha(Q), \alpha(M))$$

En particular, pues, *toda aplicación semiafín inyectiva transforma rectas en rectas*.

El caso  $K = \mathbb{Z}_2$  también nos da contraejemplos: puesto que una recta solo contiene dos puntos, está claro que cualquier aplicación inyectiva entre espacios afines sobre  $\mathbb{Z}_2$  transforma rectas en rectas.

Las consideraciones anteriores plantean el problema de saber cuales son las aplicaciones biyectivas más generales entre espacios afines de dimensión  $n \geq 2$  que transforman puntos alineados en puntos alineados (a estas aplicaciones las denominaremos *colineaciones*). La respuesta, el citado *teorema fundamental de la geometría afín*, nos dice que los contraejemplos que hemos examinado son esencialmente los únicos.

**1.42 Teorema** (fundamental de la geometría afín). Sea  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una colineación entre espacios afines  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$  de dimensión  $n \geq 2$  sobre un cuerpo  $K \neq \mathbb{Z}_2$ . Entonces  $\alpha$  es  $*$ -afín por un automorfismo  $\lambda \mapsto \lambda^*$  de  $K$  unívocamente determinado por  $\alpha$ .

**Demostración:** A pesar del interés conceptual de este teorema, no damos una demostración aquí. Si bien las ideas básicas de la demostración son naturales y sencillas, cubrir todos los detalles es un poco laborioso y, en conjunto, excede el objeto de este curso. El lector interesado puede componer una demostración resolviendo los problemas P.1.8 a P.1.12.  $\square$

**1.43 Corolario.** Si  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  es una colineación entre espacios afines reales de dimensión  $n \geq 2$ , entonces  $\alpha$  es una transformación afín.

**Demostración:** Puesto que por el teorema sabemos que  $\alpha$  es  $*$ -afín para un cierto automorfismo  $\lambda \mapsto \lambda^*$  de  $\mathbb{R}$ , basta ver que el único automorfismo de  $\mathbb{R}$  es la identidad. Ello se puede argumentar como sigue.

En primer lugar, tenemos  $1^* = 1$  (es inmediato ver que todo automorfismo cumple esta condición). De aquí se puede deducir fácilmente que  $n^* = n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , y después que  $r^* = r$  para todo  $r \in \mathbb{Q}$ . Ahora observemos que  $x^* > 0$  cuando  $x > 0$  (si  $x > 0$  y ponemos  $y = +\sqrt{x}$ , entonces  $x = y^2$  y  $x^* = (y^*)^2 > 0$ ). Con esto obtenemos que  $a^* < b^*$  cuando  $a < b$  (ya que en  $\mathbb{R}$  la relación  $a < b$  equivale a  $b - a > 0$ ). Sea ahora  $x \in \mathbb{R}$  arbitrario y escojamos sucesiones  $\{a_n \in \mathbb{Q}\}_{n \geq 1}$  y  $\{b_n \in \mathbb{Q}\}_{n \geq 1}$  tales que  $a_n < x < b_n$  y  $b_n - a_n < 10^{-n}$  para todo  $n$ . Entonces

$$a_n = a_n^* < x^* < b_n^* = b_n$$

y estas relaciones implican  $x^* = x$ .  $\square$

### *Sobre la axiomatización de la geometría*

El teorema fundamental de la geometría afín sugiere que las propiedades puramente geométricas de las rectas de un espacio afín tendrían que ser suficientes para determinar la estructura de espacio afín: el cuerpo  $K$ , el espacio vectorial asociado  $V$  y la aplicación estructural  $\delta: \mathbb{A} \rightarrow V$ .

La determinación de propiedades básicas de las rectas y sus interrelaciones a partir de las cuales sea posible inferir toda la estructura afín es el tema de la *axiomatización de la geometría*, afín en el caso que nos ocupa. Las investigaciones sobre este tema empezaron con los *Elementos* de Euclides, han continuado a lo largo de los siglos y han determinado, en gran medida, la concepción actual de las matemáticas. Tradicionalmente, las presentaciones axiomáticas de la geometría se agrupan bajo la denominación de *geometría sintética*, en contraposición a las presentaciones (empezando con la de Descartes) modeladas en estructuras algebraicas y que se conocen como

*geometría analítica*. En el caso de la geometría afín, diremos que una construcción es *sintética* si solo intervienen las nociones de punto y recta, la relación de paralelismo entre rectas, o nociones y relaciones derivadas de estas a partir de los axiomas admitidos, como, por ejemplo, que por dos puntos distintos pasa una única recta o que por un punto dado pasa una única recta paralela a una recta dada.

Para dimensión  $n \geq 3$ , las axiomáticas razonables conducen efectivamente al modelo (analítico) de geometría afín que hemos adoptado en este curso (axiomas 1.1 y 1.2). En cambio, el caso  $n = 2$  es excepcional, ya que hay muchas geometrías que son razonables desde el punto de vista sintético y que no son afines en el sentido de este texto (las razones de esta situación las discutiremos en el capítulo 3). De hecho, los planos afines (y proyectivos) axiomáticos siguen siendo el objeto de numerosas investigaciones, tanto puras como aplicadas. Como muestra, se puede consultar el libro *Designs and their codes*, de B. Bollobas, P. Sarnak y C. T. C. Wall (Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1992), y las numerosas referencias que dan tanto sobre resultados de geometría pura como sobre sus aplicaciones, particularmente a la teoría de códigos autocorrectores para la transmisión de información a través de canales de comunicación con «ruido».

Para algunas claves sobre cómo se puede proceder para la construcción del cuerpo  $K$  y del espacio vectorial asociado  $V$  a partir de una presentación sintética de la geometría afín, véanse los problemas P.1.13 y P.1.14 y el comentario que les sigue.

## 1.5 Problemas

**P.1.1.** Si  $L$  es un subconjunto de un espacio afín  $\mathbb{A}$  y el conjunto

$$\delta(L \times L) = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in L\}$$

es un subespacio vectorial de  $V$ , ¿es  $L$  necesariamente una variedad lineal?

**P.1.2.** Sea  $L$  una variedad lineal. En el ejercicio E.1.13 hemos visto, en particular, que si  $P$  y  $Q$  son dos puntos distintos de  $L$ , entonces  $PQ \subseteq L$ . Recíprocamente, si  $K \neq \mathbb{Z}_2$  y  $L$  es un subconjunto no vacío de un espacio afín  $\mathbb{A}$  tal que  $PQ \subseteq L$  para cualquier par de puntos distintos  $P, Q \in L$ , entonces  $L$  es una variedad lineal. Por otro lado, nótese que si  $K = \mathbb{Z}_2$ , entonces las rectas tienen exactamente dos puntos y, por tanto, cualquier subconjunto de  $\mathbb{A}$  cumple la propiedad de contener la recta que une dos puntos distintos cualesquiera de éste.

**P.1.3.** Sea  $K$  un cuerpo,  $E$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $F \subseteq E$  un subespacio de dimensión  $k$ . Probar, con las definiciones que damos seguidamente de  $\mathbb{A}$ ,  $V$  y  $\delta$ , que  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  es un espacio afín de dimensión  $k(n - k)$ . Decir también qué interpretación tiene la suma  $P + v$ , para  $P \in \mathbb{A}$  y  $v \in V$ .

Definimos  $\mathbb{A}$  como el conjunto de subespacios  $P \subseteq E$  tales que  $P \oplus F = E$ . Si  $P \in \mathbb{A}$ , pondremos  $f_P: E \rightarrow F$  para denotar la única aplicación lineal tal que  $f_P(x) = 0$  si  $x \in P$  y  $f_P(x) = x$  si  $x \in F$ .

Definimos  $V = \text{Hom}(E/F, F)$ , esto es, el espacio de aplicaciones  $K$ -lineales de  $E/F$  en  $F$ , que se puede identificar con el espacio de las aplicaciones  $K$ -lineales  $v: E \rightarrow F$  tales que  $v(x) = 0$  para todo  $x \in F$ .

Finalmente pongamos, si  $P, Q \in \mathbb{A}$ ,  $\delta(P, Q) \in V$  para denotar la aplicación lineal  $E \rightarrow F$  definida por la siguiente fórmula:  $\delta(P, Q) = f_Q - f_P$ . Como  $f_Q$  y  $f_P$  son la identidad sobre  $F$ ,  $\delta(P, Q)$  es nula sobre  $F$  y, por tanto, efectivamente,  $\delta(P, Q) \in V$ .

Notemos que si  $P \in \mathbb{A}$  y  $v \in V$ , entonces  $f_P + v$  es la identidad sobre  $F$  y tiene imagen  $F$ , con lo cual  $Q = \ker(f_P + v) \in \mathbb{A}$  y  $f_Q = f_P + v$ .

**P.1.4.** Con las notaciones del problema anterior, supongamos que  $k = n - 1$ , con lo cual los elementos de  $\mathbb{A}$  son los subespacios vectoriales de dimensión 1 de  $E$  no contenidos en  $F$ . Fijemos un  $u \in E - F$  y pongamos  $H = u + F$ , considerado como un hiperplano del espacio afín asociado a  $E$  (en particular,  $H$  tiene estructura de espacio afín de dimensión  $n - 1$ ). Si  $x \in H$ , está claro que  $x \notin F$  y, por tanto,  $\langle x \rangle \in \mathbb{A}$ . Demostrar que la aplicación  $H \rightarrow \mathbb{A}$  tal que  $x \mapsto \langle x \rangle$  es una transformación afín.

**P.1.5.** Con las notaciones del ejercicio E.1.23 y suponiendo que  $K$  no es de característica 2 (es decir, que  $2 \neq 0$  en el cuerpo  $K$ ), demostrar que las seis razones simples

$$\sigma, \quad \frac{1}{\sigma}, \quad 1 - \sigma, \quad \frac{1}{1 - \sigma}, \quad \frac{\sigma}{\sigma - 1}, \quad \frac{\sigma - 1}{\sigma}$$

son distintas si y sólo si  $\sigma \notin \{-1, 2, \frac{1}{2}\}$  y  $\sigma^2 - \sigma + 1 \neq 0$ . Comprobar, además, que si  $\sigma \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ , entonces la lista de las seis razones simples contiene dos veces cada uno de los valores  $-1, 2, \frac{1}{2}$ , y que si  $\sigma^2 - \sigma + 1 = 0$ ,  $\sigma \neq -1$ , entonces la lista contiene tres veces  $\sigma$  y tres veces  $\sigma^2$ . Observamos que los tres valores  $-1, 2$  y  $\frac{1}{2}$  coinciden si (y sólo si)  $K$  tiene característica 3. Por otro lado, que se cumplan las condiciones  $\sigma^2 - \sigma + 1 = 0$  y  $\sigma \neq -1$  depende del cuerpo  $K$ : por ejemplo, no se cumplen si  $K = \mathbb{R}$  o si  $K = \mathbb{Z}_3$ , mientras que si  $K = \mathbb{C}$ , entonces  $\omega = (1 + \sqrt{3}i)/2$  y  $\omega^2 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$  las satisfacen.

**P.1.6.** (El resultado de este problema se ha usado para establecer [1.11c] a partir de [1.11a]). Sea  $B = (b_{ij})$  una matriz  $n \times r$  con coeficientes  $b_{ij} \in K$ . Supongamos que  $r < n$  y que  $B$  tiene rango  $r$ . Fijemos índices  $I = i_1, \dots, i_r$  tales que  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  y de forma que  $\det(B_I) \neq 0$ , donde  $B_I$  es la matriz  $r \times r$  formada con las filas de  $B$  indicadas por los índices de  $I$ . Sea ahora  $x$  un vector columna de dimensión  $n$ , también con coeficientes de  $K$ , y para cada  $j \in \{1, \dots, n\} - I$  consideremos el determinante

$$D_j = \det(x_{I \cup \{j\}} | B_{I \cup \{j\}})$$

Para que  $x$  sea combinación lineal de las columnas de  $B$  está claro que se tienen que cumplir las  $n - r$  condiciones  $D_j = 0$ . El punto está en demostrar que estas condiciones

son también suficientes. Notemos primero que  $x_I$  es combinación lineal (de forma única) de las columnas de  $B_I$ , después observemos que  $D_j = 0$  implica que  $x_{I \cup \{j\}}$  es combinación lineal (también de manera única) de las columnas de  $B_{I \cup \{j\}}$ , y finalmente invoquemos la unicidad para concluir que  $x$  es una combinación lineal de las columnas de  $B$ .

**P.1.7.** Con las notaciones de los ejercicios E.1.39 y E.1.40, sean  $O$  y  $O'$  puntos, y  $\alpha$  una aplicación afín de  $\mathbb{A}$  en sí mismo. Entonces podemos escribir  $\alpha = t_v \circ f_O = t_{v'} \circ g_{O'}$ , donde  $v$  y  $v'$  son vectores,  $f$  y  $g$  endomorfismos de  $V$ . Demostrar que

$$g = f \text{ i } v = v' + (Id - f)(O' - O)$$

Con los problemas P.1.8 a P.1.12 se puede obtener una demostración del teorema fundamental de la geometría afín.

**P.1.8.** Sea  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  colineación entre los espacios afines  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$  de dimensión  $n \geq 2$  sobre un cuerpo  $K \neq \mathbb{Z}_2$ . Si  $P_0, P_1, \dots, P_r$  son puntos de  $\mathbb{A}$ , demostrar que

$$\alpha(P_0 P_1 \cdots P_r) \subseteq \alpha(P_0) \alpha(P_1) \cdots \alpha(P_r)$$

Demostrar también que si  $P_0, P_1, \dots, P_r$  son puntos independientes, entonces los puntos

$$\alpha(P_0), \alpha(P_1), \dots, \alpha(P_r)$$

de  $\mathbb{A}'$  son puntos independientes. Indicación: para la primera parte, usar el problema P.1.2 e inducción sobre  $r$ , y para la segunda, razonar por reducción al absurdo.

**P.1.9.** Con las hipótesis del problema anterior, demostrar que si  $L$  es una recta de  $\mathbb{A}$ , entonces  $\alpha(L)$  es una recta de  $\mathbb{A}'$ , y que si  $L'$  es una recta paralela a  $L$ , entonces  $\alpha(L')$  es paralela a  $\alpha(L)$ . Indicación: dos rectas de un plano son paralelas si y sólo si su intersección es vacía.

**P.1.10.** Con las hipótesis del problema P.1.8, sea  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  la aplicación tal que  $\alpha_P(v) = \alpha(P+v) - \alpha(P)$ . Demostrar que  $\alpha_P$  es aditiva. Nótese que así podemos aplicar 1.26 para concluir que  $\alpha_P$  es independiente de  $P$ . Indicación: usar una construcción sintética de la ley de adición.

**P.1.11.** Con las hipótesis del problema P.1.8, sean  $P$  y  $Q$  dos puntos diferentes de  $\mathbb{A}$  y sea  $\lambda \mapsto \lambda^*$  la aplicación de  $K$  en  $K$  tal que

$$\lambda^* = \sigma(\alpha(P), \alpha(Q), \alpha(M_\lambda(P, Q)))$$

Demostrar que esta aplicación es un automorfismo de  $K$  y que es independiente de los puntos  $P$  y  $Q$ . Indicación: si  $\lambda, \mu \in K$ , hallar construcciones sintéticas de la suma  $\lambda + \mu$  y el producto  $\lambda\mu$ .

**P.1.12.** Con las hipótesis del problema P.1.8 y notaciones del problema P.1.11, demostrar que  $\alpha$  es una aplicación  $*$ -afín (teorema fundamental de la geometría afín).

**P.1.13.** Demostrar que una semiafinidad  $\alpha$  distinta de la identidad es una traslación si y sólo si no tiene puntos fijos y  $\alpha(L) \parallel L$  para toda recta  $L$ .

Por el teorema fundamental de la geometría afín, una autocolineación diferente de la identidad de un espacio afín  $\mathbb{A}$  de dimensión  $n \geq 2$ , sobre un cuerpo  $K \neq \mathbb{Z}_2$ , es una traslación si y sólo si no tiene puntos fijos y  $\alpha(L) \parallel L$  para toda recta  $L$ .

**P.1.14.** Demostrar que una semiafinidad  $\alpha$  de un espacio afín  $\mathbb{A}$  es una homotecia de centro  $O \in \mathbb{A}$  si y sólo si deja  $O$  fijo y  $\alpha(L) \parallel L$  para toda recta  $L$ . Demostrar también que si  $O' \in \mathbb{A}$  y  $v = O' - O$ , entonces la aplicación  $\mathcal{H}_O(\mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{H}_{O'}(\mathbb{A})$  tal que  $h \mapsto t_v \circ h \circ t_{-v}$  es un isomorfismo de grupos.

Por el teorema fundamental de la geometría afín, junto con la primera parte de este problema, una autocolineación  $\alpha$  diferente de la identidad de un espacio afín  $\mathbb{A}$  de dimensión  $n \geq 2$ , sobre un cuerpo  $K \neq \mathbb{Z}_2$ , es una homotecia de centro  $O$  si y sólo si  $O$  es fijo por  $\alpha$  y  $\alpha(L) \parallel L$  para toda recta  $L$ .

El problema P.1.14 nos da una clave sobre cómo se puede construir sintéticamente el cuerpo  $K$ . Por otro lado, P.1.13 nos da una clave sobre cómo construir el grupo de traslaciones  $\mathcal{T}$  y, por tanto, el grupo aditivo de  $V$ , en términos similares. Observemos, finalmente, que el ejercicio E.1.38 nos muestra cómo podemos definir sintéticamente el producto de una escalar  $\lambda$  y un vector  $v$ : considerando  $\lambda$  como la homotecia de centro  $O$  y  $v$  como una traslación, entonces la traslación  $\lambda v$  es  $\lambda \circ v \circ \lambda^{-1}$  (ya que, por E.1.38, y teniendo en cuenta que  $\tilde{h}_{O,\lambda} = h_\lambda$ ,  $h_{O,\lambda} \circ t_v \circ h_{O,\lambda}^{-1} = t_{\lambda v}$ ).

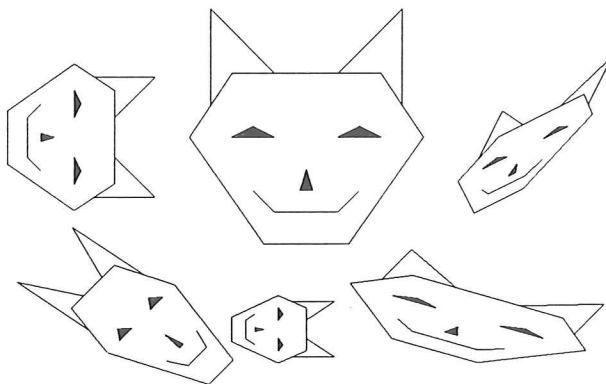


Figura 1.6: Figuras afines



## 2 Geometría métrica

En el espacio ordinario encontramos, además de la estructura de espacio afín, nociones y relaciones métricas, como por ejemplo longitudes y distancias, perpendicularidad, áreas y volúmenes, o ángulos. En este capítulo estudiaremos una nueva estructura, la de espacio euclidiano, en la que nociones y relaciones como las citadas se pueden definir de un modo natural.

Formalmente, un espacio euclidiano se define como un espacio afín real dotado de una métrica, es decir, de una aplicación bilineal simétrica  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(v, v) > 0$  para todo vector  $v \neq 0$ . Pero es razonable preguntar, antes de emprender su estudio sistemático a partir de la sección 2.1, de dónde proviene esta estructura, y por ello intentaremos dilucidar, en los tres apartados de esta introducción, el origen y la significación de la misma.

En cualquier caso, nuestras consideraciones solo pueden tener aquí valor heurístico, ya que presuponen un cierto conocimiento de algunas nociones geométricas elementales del espacio ordinario  $\mathbb{A}$ , como las de distancia, proyección ortogonal, ángulo y producto escalar.

### *Distancia y norma*

Dados dos puntos  $P, Q \in \mathbb{A}$ , escribimos  $d(P, Q)$  para designar la *distancia* entre los puntos  $P$  y  $Q$ . La distancia es *invariante por translaciones*, esto es, para todo vector  $v \in V$  se cumple

$$d(P + v, Q + v) = d(P, Q)$$

Si ahora  $v$  es un vector y  $P$  y  $Q$  son puntos,

$$d(Q, Q + v) = d(P + \overrightarrow{PQ}, P + \overrightarrow{PQ} + v) = d(P, P + v)$$

lo cual nos muestra que  $d(P, P + v)$  es, para un vector  $v$  dado, independiente del punto  $P$ . Diremos que  $d(P, P + v)$  es la *longitud* (o la *norma*) de  $v$  y pondremos  $|v|$  para denotarla.

### Proyección ortogonal

Consideremos ahora la *proyección ortogonal*  $\pi_L : \mathbb{A} \rightarrow L$  sobre una recta  $L$  (la proyección ortogonal sobre un plano se define de forma similar): dado un punto  $P$ ,  $P' = \pi_L(P)$  es, por definición, el pie de la recta por  $P$  perpendicular a  $L$  (v. figura 2.1). Como los planos perpendiculares a  $L$  son paralelos, del teorema de Tales resulta que la proyección ortogonal sobre  $L$  conserva las razones simples (v. figura 2.2). Por tanto,  $\pi_L$  es una aplicación afín (teorema 1.41). Así pues, existe una (única) aplicación lineal  $\pi_W : V \rightarrow W$  ( $V$  el espacio vectorial asociado a  $\mathbb{A}$  y  $W$  el espacio director de  $L$ ) tal que

$$\pi_W(Q - P) = \pi_L(Q) - \pi_L(P)$$

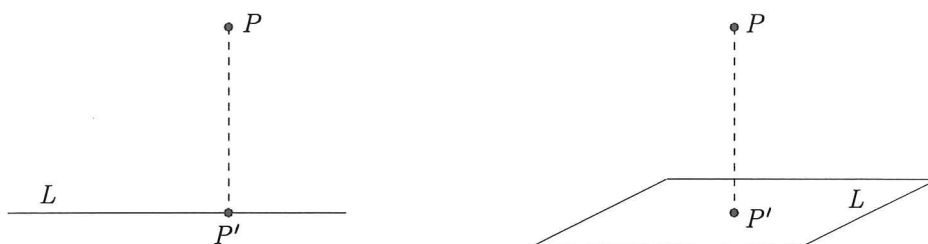


Figura 2.1: *Proyección ortogonal*

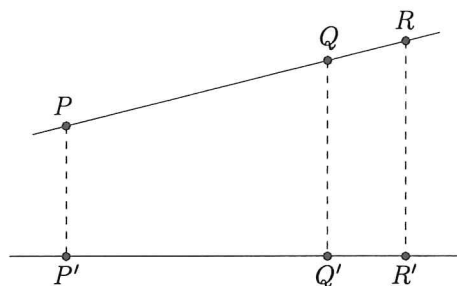


Figura 2.2: *La proyección ortogonal es una aplicación afín*

### Ángulos y producto escalar

Dados un vector  $v \in V$  y un vector no nulo  $w \in W$ , podemos escribir, si  $v' = \pi_W(v)$ ,

$$v' = g(v, w) \frac{w}{|w|^2}$$

donde  $g(v, w) \in \mathbb{R}$  sólo depende de  $v$  y  $w$ . Dado que  $v'$  depende linealmente de  $v$  deducimos que  $g(v, w)$  es lineal en  $v$ , para cada  $w$  fijado. Puesto que, por otro lado,  $|v'| = |v| \cos(\alpha)$  y  $v' = |v| \cos(\alpha) \frac{w}{|w|}$ , donde  $\alpha$  es el ángulo formado por los vectores  $v$  y  $w$ , resulta que

$$g(v, w) = |v||w| \cos(\alpha)$$

lo cual demuestra que  $g(v, w) = v \cdot w$  (el *producto escalar* de  $v$  y  $w$ ). Por tanto, el producto escalar  $v \cdot w$  es una función lineal de  $v$ , para cada  $w$  dado (observemos que esto también es cierto para  $w = 0$ ). Como el producto escalar es conmutativo, y todo vector no nulo  $w$  es el vector director de alguna recta  $L$ ,  $v \cdot w$  también es lineal en  $w$  para cada  $v$ . Es decir,  $v \cdot w = g(v, w)$  es una función *bilineal simétrica*. Además, dado que  $v \cdot v = |v|^2$ , vemos que  $g(v, v) = v \cdot v > 0$  si  $v \neq 0$ , propiedad que se enuncia diciendo que el producto escalar es *definido positivo*. Notemos que  $v$  y  $w$  son perpendiculares si y solo si  $g(v, w) = 0$ .

Las consideraciones anteriores sugieren la posibilidad —que por otro lado es la que seguiremos en este texto— de definir un espacio euclidiano como un espacio afín real  $(\mathbb{A}, V)$  dotado de una aplicación bilineal simétrica  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(v, v) > 0$  para todo vector  $v \neq 0$ . El objetivo es, pues, reconstruir las nociones y propiedades habituales de la geometría métrica a partir de  $g$ . Por ejemplo, en un tal espacio la longitud  $|v|$  de un vector  $v$  se puede definir por la fórmula

$$|v| = \sqrt{g(v, v)}$$

la relación de perpendicularidad entre dos vectores  $v$  y  $w$  se puede definir mediante la relación  $g(v, w) = 0$ , o, más generalmente, el ángulo  $\alpha$  entre dos vectores  $v$  y  $w$  se puede definir por la fórmula

$$\cos(\alpha) = \frac{g(v, w)}{|v||w|}$$

## 2.1 Espacio euclidiano

Definimos, pues, un *espacio euclidiano* como un espacio afín real  $(\mathbb{A}, V)$  dotado de una aplicación bilineal simétrica  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(v, v) > 0$  para todo vector  $v \neq 0$ . Diremos que  $g$  es el *producto escalar*, o la *métrica*, del espacio euclidiano, y también pondremos  $v \cdot w$  en lugar de  $g(v, w)$ . A la propiedad  $g(v, v) > 0$  si  $v \neq 0$  nos referiremos diciendo que el producto escalar es *definido positivo*. Notemos que, para todo vector  $v$ ,  $g(v, v) \geq 0$ , y que la igualdad  $g(v, v) = 0$  vale si y solo si  $v = 0$ .

**E.2.1.** Comprobar que

$$g((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

es un producto escalar definido positivo de  $\mathbb{R}^n$  (en adelante, sobreentenderemos esta métrica al referirnos a  $\mathbb{R}^n$ ).

Definimos la *longitud* o *norma* de un vector  $v$ , y la denotamos  $|v|$ , por la fórmula

$$|v| = \sqrt{g(v, v)}. \quad [2.1]$$

Por ejemplo, la norma del vector  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  es  $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ .

**E.2.2.** Se cumple que  $|v| \geq 0$ , y que la igualdad vale si y solo si  $v = 0$ .

**E.2.3.** Demostrar que

$$|\lambda v| = |\lambda| |v|$$

cualesquiera que sean  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $v \in V$ . En particular,  $|-v| = |v|$ . (Escribimos  $|\lambda|$  para denotar el valor absoluto del escalar  $\lambda$ .)

**E.2.4.** Se dice que un vector  $u$  es *unitario* si  $|u| = 1$ . Mostrar que para todo vector  $v \neq 0$  existen exactamente dos vectores unitarios proporcionales a  $v$ , y que estos son  $\pm v/|v|$ .

La *distancia entre dos puntos*  $P$  y  $Q$ , que denotaremos  $d(P, Q)$ , se define por la fórmula

$$d(P, Q) = |Q - P| = |\overrightarrow{PQ}|$$

Por ejemplo, la distancia entre los puntos  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  y  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  es

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

**E.2.5.** De las propiedades de la norma que ya hemos visto (E.2.2), tenemos que  $d(P, Q) \geq 0$  y que  $d(P, Q) = 0$  si y solo si  $P = Q$ . También tenemos (por E.2.3) que  $d(P, Q) = d(Q, P)$ .

**2.1 Teorema** (Desigualdad de Schwarz). *Dados dos vectores  $v$  y  $w$  cualesquiera, se cumple la desigualdad*

$$|v \cdot w| \leq |v| |w|$$

*La igualdad  $|v \cdot w| = |v| |w|$  se cumple si y solo si  $v$  y  $w$  son linealmente dependientes.*

**Demostración:** Si  $w = 0$ , la desigualdad que queremos establecer es una igualdad (los dos miembros valen 0) y está claro que  $v$  y  $w$  son linealmente dependientes. Así pues, podemos suponer que  $w$  es no nulo.

Debido a que  $g$  es definida positiva, para todo  $t \in \mathbb{R}$  tenemos la desigualdad

$$g(v + tw, v + tw) \geq 0$$

Teniendo en cuenta que  $g$  es bilineal y simétrica, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$|v|^2 + 2(v \cdot w)t + |w|^2 t^2 \geq 0$$

Como  $t \in \mathbb{R}$  es arbitrario, resulta que

$$(v \cdot w)^2 - |v|^2 |w|^2 \leq 0 \quad [*]$$

ya que si la expresión de la izquierda fuese positiva, entonces el binomio real

$$|v|^2 + 2(v \cdot w)t + |w|^2t^2$$

tendría *dos* raíces reales distintas (recordemos que  $|w| \neq 0$ ) y, por tanto, tomaría valores positivos y valores negativos. Esto prueba la desigualdad  $|v \cdot w| \leq |v||w|$ , ya que esta y  $[-*]$  son claramente equivalentes.

Pero si se cumple la igualdad  $|v \cdot w| = |v||w|$ , entonces existe un  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $|v|^2 + 2(v \cdot w)t + |w|^2t^2 = 0$ , es decir, tal que  $g(v + tw, v + tw) = 0$  y, por tanto, tal que  $v + tw = 0$ , con lo cual  $v$  y  $w$  son linealmente dependientes. Recíprocamente, si  $v$  y  $w$  son linealmente dependientes, entonces existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $v = \lambda w$  (recordemos que  $w \neq 0$ ) y es inmediato verificar que  $|v \cdot w| = |v||w|$ .  $\square$

Señalemos que si los vectores  $v$  y  $w$  son no nulos, la desigualdad de Schwarz equivale a las desigualdades

$$-1 \leq \frac{v \cdot w}{|v||w|} \leq 1 \quad [2.2]$$

**E.2.6.** Comprobar que la primera (segunda) de las desigualdades [2.2] es una igualdad si y solo si  $w = \lambda v$ , para un cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda < 0$  ( $\lambda > 0$ ).

**2.2 Corolario** (Desigualdad triangular de la norma). *Sean  $v$  y  $w$  vectores arbitrarios. Entonces,*

$$|v + w| \leq |v| + |w|$$

*La igualdad  $|v + w| = |v| + |w|$  es válida si y solo si, o bien uno de los dos vectores es nulo, o bien existe un número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ .*

**Demostración:** En efecto,

$$\begin{aligned} |v + w|^2 &= (v + w) \cdot (v + w) \\ &= |v|^2 + |w|^2 + 2v \cdot w \\ &\leq |v|^2 + |w|^2 + 2|v||w| \quad (\text{teorema 2.1}) \\ &= (|v| + |w|)^2 \end{aligned}$$

de donde la desigualdad enunciada resulta inmediatamente.

Para que sea válida la igualdad  $|v + w| = |v| + |w|$ , queda claro, por la deducción precedente, que es necesario y suficiente que  $v \cdot w = |v||w|$ . Pero esta condición se cumple si y solo si o bien uno de los dos vectores es nulo o, según el ejercicio E.2.6, si  $v$  y  $w$  son no nulos y proporcionales según un factor positivo.  $\square$

**2.3 Nota.** Los dos primeros pasos de la prueba anterior muestran como expresar el producto escalar en términos de normas: si  $v, w \in V$ , entonces

$$v \cdot w = \frac{1}{2}(|v + w|^2 - |v|^2 - |w|^2) \quad [2.3]$$

**2.4 Corolario** (Teorema de Pitágoras). *Si  $v$  y  $w$  son vectores, entonces*

$$|v + w|^2 = |v|^2 + |w|^2$$

*si y solo si  $v \cdot w = 0$ .*

**Demostración:** Si  $v, w \in W$ , entonces

$$|v + w|^2 = |v|^2 + |w|^2 + 2v \cdot w$$

(v. demostración del corolario 2.2) y de aquí el enunciado resulta directamente.  $\square$

**E.2.7.** Sean  $v_1, \dots, v_r$  vectores tales que  $v_i \cdot v_j = 0$  si  $i \neq j$ . Demostrar que

$$|v_1 + \dots + v_r|^2 = |v_1|^2 + \dots + |v_r|^2$$

**2.5 Corolario** (Desigualdad triangular de la distancia). *Si  $P, Q$  y  $R$  son puntos cualesquiera del espacio euclidiano  $\mathbb{A}$ , entonces se cumple la desigualdad*

$$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R) \quad [2.4]$$

**Demostración:** En efecto,

$$\begin{aligned} d(P, R) &= |R - P| && \text{definición de distancia} \\ &= |(R - Q) + (Q - P)| && \text{ley de adición} \\ &\leq |R - Q| + |Q - P| && \text{desigualdad triangular de la norma} \\ &= d(P, Q) + d(Q, R) && \text{definición de distancia} \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**E.2.8.** Probar que la desigualdad triangular de la distancia implica (y, por tanto, es equivalente a) la desigualdad triangular de la norma.

**E.2.9.** En la desigualdad triangular de la distancia vale la igualdad si y solo si  $P = Q$ , o  $Q = R$ , o  $P, Q$  y  $R$  son tres puntos alineados distintos tales que  $\sigma(P, Q, R) > 1$ .

**E.2.10.** Si  $P, Q$  y  $R$  son puntos cualesquiera, probar que  $d(P, Q) \geq |d(P, R) - d(Q, R)|$ .

En el ejercicio que sigue,  $[P, Q]$  denota el *segmento de extremos  $P$  y  $Q$* , esto es, el conjunto de puntos de la forma  $P + \lambda(Q - P)$ , donde  $\lambda \in [0, 1]$ .

**E.2.11.** Si  $P$  y  $Q$  son puntos, probar que  $X \in [P, Q]$  si y solo si  $d(P, X) + d(X, Q) = d(P, Q)$ .

**E.2.12.** Supongamos, con las notaciones del ejercicio anterior, que  $P \neq Q$ . Mostrar que si  $R$  es un punto alineado con  $P$  y  $Q$ , entonces

$$\sigma(P, Q, R) = \begin{cases} d(P, R)/d(P, Q) & \text{si } P \notin [Q, R] \\ -d(P, R)/d(P, Q) & \text{si } P \in [Q, R] \end{cases}$$

**2.6 Nota.** Si  $E$  es un espacio vectorial real, se dice que una aplicación  $e \mapsto |e|$  de  $E$  a  $\mathbb{R}$  es una *norma* si:

- 1)  $|e| \geq 0$  para todo  $e \in E$ ;
- 2)  $|e| = 0$  si y solo si  $e = 0$ ;
- 3)  $|\lambda e| = |\lambda| |e|$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y todo  $e \in E$ ; y
- 4)  $|e_1 + e_2| \leq |e_1| + |e_2|$ .

Así pues, en el espacio vectorial  $V$  asociado a un espacio euclidiano, la longitud es una norma (v. E.2.2, E.2.3 y el corolario 2.2).

Por otro lado, una *distancia*  $d$  en un conjunto  $X$  es una aplicación  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple, cualesquiera que sean  $x, x', x'' \in X$ :

- 1)  $d(x, x') = d(x', x)$ ;
- 2)  $d(x, x') \geq 0$ ;
- 3)  $d(x, x') = 0$  si y solo si  $x = x'$ ; y
- 4)  $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$ .

Así pues, la distancia entre puntos de un espacio euclidiano es una distancia (v. E.2.5 y el corolario 2.5).

### Cálculos en coordenadas

Si  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  es una base de  $V$ , pondremos

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = e_i \cdot e_j \quad [2.5]$$

y diremos que  $G = (g_{ij})$  es la *matriz de la métrica  $g$  respecto a la base  $\mathbf{e}$* . Advertimos que en notación matricial podemos escribir

$$G = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} \quad [2.5']$$

Sean ahora  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  las componentes de los vectores  $x$  e  $y$  respecto a  $\mathbf{e}$ , de forma que  $x = \mathbf{e}\mathbf{x}^T$  e  $y = \mathbf{e}\mathbf{y}^T$ . Como también podemos escribir  $x = \mathbf{x}\mathbf{e}^T$ , tenemos  $x \cdot y = (\mathbf{x}\mathbf{e}^T) \cdot (\mathbf{e}\mathbf{y}^T)$  y, por la bilinealidad del producto escalar,

$$x \cdot y = \mathbf{x}G\mathbf{y}^T \quad [2.6]$$

En particular,

$$|x|^2 = \mathbf{x}G\mathbf{x}^T \quad [2.6']$$

Sea  $e'$  otra base de  $V$  y  $G'$  la matriz de la métrica respecto a  $e'$ . Si  $A$  es la matriz de  $e'$  respecto a  $e$ , entonces  $e' = eA$  y, por tanto,

$$G' = e'^T \cdot e' = (A^T e^T) \cdot (eA) = A^T G A$$

(en la última igualdad hemos usado la bilinealidad del producto escalar). Así pues, la expresión de  $G'$  en términos de  $G$  y  $A$  es

$$G' = A^T G A \quad [2.7]$$

**2.7 Nota.** Sean  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y  $g: V \times V \rightarrow K$  una aplicación bilinear arbitraria (el cuerpo  $K$  también arbitrario). Si definimos la matriz  $G = (g_{ij})$  de  $g$  respecto a una base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de manera que  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$  (cf. [2.5]), las fórmulas [2.6] y [2.7], así como sus demostraciones, son también válidas.

**E.2.13.** (Seguimos con las notaciones de la nota anterior) Fijada una base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ , probar que  $g \mapsto G = (g_{ij})$ ,  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ , establece un isomorfismo entre el espacio vectorial de aplicaciones bilineales  $g: V \times V \rightarrow K$  y el espacio vectorial  $\mathcal{M}_n(K)$  de las matrices cuadradas  $G$  de orden  $n$  con coeficientes de  $K$ . Mostrar también que  $g$  es simétrica si y solo si  $G$  es una matriz simétrica.

### Bases ortonormales

Diremos que la base  $e$  es *ortonormal* cuando  $G = I_n$ , es decir, cuando los vectores  $e_i$  son unitarios y dos a dos ortogonales:

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Por ejemplo, los vectores  $\epsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\epsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $\epsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$  son una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Más adelante (proposición 2.12) estudiaremos un procedimiento para obtener una base ortonormal a partir de una base cualquiera de  $V$ .

En el caso de que  $u_1, \dots, u_n$  sea una base ortonormal de  $V$ , la fórmula [2.6] se especializa en la relación

$$(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) \cdot (y_1 u_1 + \dots + y_n u_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad [2.8]$$

### Matrices ortogonales

Supongamos que  $e = (e_1, \dots, e_n)$  y  $u = (u_1, \dots, u_n)$  son bases de  $V$ . Sea  $A$  la matriz de  $u$  respecto a  $e$ , es decir,  $u = eA$ , y sea  $G$  la matriz de la métrica respecto a  $e$ . Entonces sabemos que  $A^T G A$  es la matriz de la métrica respecto a la base  $u$  (v. fórmula [2.7]). Obtenemos así que  $u$  es una base ortonormal de  $V$  si y solo si

$$A^T G A = I_n \quad [2.9]$$

En particular, resulta que si  $e$  es una base ortonormal, entonces  $u$  es ortonormal si y solo si

$$A^T A = I_n \quad [2.9']$$

es decir, si y solo si  $A$  es invertible y  $A^{-1} = A^T$ . Las matrices que cumplen esta propiedad se denominan *matrices ortogonales*.

### Grupo ortogonal

Si  $A$  es una matriz ortogonal, entonces  $\det(A)^2 = 1$ . Por tanto,  $\det(A) = \pm 1$ . Pondremos  $O_n$  para denotar el conjunto de matrices ortogonales de orden  $n$  y  $O_n^+$  para denotar el subconjunto de  $O_n$  formado por las matrices ortogonales que tienen determinante 1. Observemos que  $O_1^+ = \{1\}$  y  $O_1 = \{\pm 1\}$ .

Si  $A$  y  $B$  son matrices ortogonales, entonces  $AB$  también lo es, ya que

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = I_n$$

Por otro lado, si  $A$  es ortogonal, entonces  $A^{-1}$  también lo es, ya que

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (A^{-1})^{-1} A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Debido a que  $I_n$  es claramente ortogonal, tenemos que  $O_n$  es un grupo con el producto de matrices. Diremos que  $O_n$  es el *grupo ortogonal* de orden  $n$ .

De las propiedades de los determinantes se deduce fácilmente que  $O_n^+$  es un subgrupo de  $O_n$ : está claro que  $I_n \in O_n^+$ , y si  $A, B \in O_n^+$ , entonces  $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$  y  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1$ , de donde resulta que  $A^{-1}, AB \in O_n^+$ . Diremos que  $O_n^+$  es el grupo *ortogonal especial de orden  $n$*  (y por eso a veces se denota  $SO_n$ ).

La matriz  $J_n = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$  es ortogonal y  $\det(J_n) = -1$ . De aquí resulta que  $O_n^- = J_n \cdot O_n^+ = \{J_n A \mid A \in O_n^+\}$  es el subconjunto de  $O_n$  formado por las matrices ortogonales cuyo determinante es  $-1$ . Así pues,  $O_n$  es la unión disjunta de  $O_n^+$  y  $O_n^-$ . Observemos que  $\{I_n, J_n\}$  es un subgrupo de  $O_n$ , ya que  $J_n^2 = I_n$ .

**E.2.14.** Demostrar que  $O_n^+$  es un subgrupo normal de  $O_n$  y que el grupo cociente  $O_n/O_n^+$  es isomorfo al grupo  $\{I_n, J_n\}$ .

**E.2.15.** El grupo  $O_2$ . Una matriz  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  es ortogonal si y solo si  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $ac + bd = 0$  y  $c^2 + d^2 = 1$ . Las soluciones de la ecuación  $a^2 + b^2 = 1$  están en correspondencia biyectiva con los  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , según las relaciones  $a = \cos(\alpha)$ ,  $b = \text{sen}(\alpha)$ . La segunda ecuación nos da  $c = -\lambda b$  y  $d = \lambda a$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y con la tercera ecuación hallamos que  $\lambda^2 = 1$ . Si tomamos  $\lambda = 1$ , obtenemos  $A = \rho(\alpha) \in O_2^+$ , donde

$$\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

mientras que si tomamos  $\lambda = -1$ , obtenemos  $A = \rho(\alpha)J \in O_2^+ \cdot J$ , donde  $J = J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Esto determina la estructura de  $O_2$ , pues  $\rho(\alpha)\rho(\beta) = \rho(\alpha + \beta)$ , donde la suma  $\alpha + \beta$  se debe efectuar módulo  $2\pi$ , y  $J\rho(\alpha) = \rho(\bar{\alpha})J$ , donde ponemos  $\bar{\alpha} = 2\pi - \alpha$  si  $\alpha > 0$  y  $\bar{0} = 0$ . En particular, resulta que  $O_2^+$  es un grupo conmutativo.

## Ángulos

Dado que  $\cos(x)$  es una función estrictamente decreciente en el intervalo  $[0, \pi]$ , con valor máximo  $1 = \cos(0)$  y valor mínimo  $-1 = \cos(\pi)$ , las desigualdades [2.2] nos muestran que si  $v$  y  $w$  son dos vectores no nulos, entonces existe un único número real  $\alpha \in [0, \pi]$  tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{|v||w|} \quad [2.10]$$

Diremos que  $\alpha$  es el *ángulo* (expresado en radianes) determinado por los vectores  $v$  y  $w$ , y escribiremos  $\alpha(v, w)$ , o  $\widehat{vw}$ , para denotarlo. Por ejemplo, el ángulo  $\alpha$  entre los vectores  $(a_1, \dots, a_n)$  y  $(b_1, \dots, b_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  viene dado por la fórmula

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}}$$

La expresión de un ángulo en grados sexagesimales se hará con arreglo al convenio habitual según el cual  $180^\circ = \pi$  rad. Así, si  $\alpha$  es el ángulo entre los vectores  $(1, 1, -2)$  y  $(2, -1, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\cos \alpha = -1/6$  y, por tanto,  $\alpha = 1,7382444$  rad =  $99^\circ 35' 38,64''$ .

Señalemos que

$$\alpha(v, w) = \alpha(w, v) \quad [2.11]$$

por la simetría del producto escalar. También es inmediato que si  $\lambda > 0$ , entonces

$$\alpha(\lambda v, w) = \alpha(v, w) \quad [2.12]$$

**E.2.16.** Sean  $u$  y  $v$  vectores linealmente independientes y supongamos que  $|u| = |v|$ . Demostrar que

$$\alpha(u, u+v) = \alpha(u+v, v) \quad \text{y} \quad \alpha(u, u-v) = \alpha(v-u, v)$$

**E.2.17.** Dados los vectores  $v$  y  $w$  no nulos, demostrar que  $\alpha(-v, w) = \pi - \alpha(v, w)$  (diremos que los ángulos  $\alpha(-v, w)$  y  $\alpha(v, w)$  son *suplementarios*).

**E.2.18.** Dados los vectores  $v$  y  $w$  no nulos, demostrar que  $\alpha(v, w) = 0$  (respectivamente,  $\alpha(v, w) = \pi$ ) si y solo si existe un número real  $\lambda > 0$  ( $\lambda < 0$ ) tal que  $w = \lambda v$ . Comprobar también que  $\alpha(v, w) = \pi/2$  si y solo si  $v \cdot w = 0$  (por esta razón, diremos que dos vectores  $v$  y  $w$  son *perpendiculares* u *ortogonales* si su producto escalar es nulo; las propiedades de la perpendicularidad se estudiarán en la sección 2.2).

**2.8 Proposición** (Aditividad de los ángulos). Sean  $u, v \in V$  vectores linealmente independientes,  $s$  y  $t$  números reales positivos, y  $w = su + tv$ . Sean  $\alpha = \alpha(u, w)$ ,  $\beta = \alpha(w, v)$  y  $\gamma = \alpha(u, v)$ . Entonces,  $\gamma = \alpha + \beta$  (v. figura 2.3).

**Demostración:** Puesto que  $u$  y  $w$  por un lado, y  $v$  y  $w$  por otro, son linealmente independientes, tenemos  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$  y, en particular,  $0 < \alpha + \beta < 2\pi$ . De aquí se sigue que para demostrar la igualdad  $\gamma = \alpha + \beta$  basta comprobar que  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\gamma)$  y  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\gamma)$ .

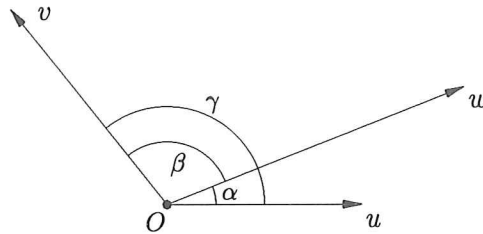


Figura 2.3: Aditividad de los ángulos

Para demostrar estas igualdades, podemos suponer que  $u$  y  $v$  son unitarios  $[\diamond]$ , con lo cual tenemos, poniendo  $\ell = |w|$ , que

$$u \cdot v = \cos(\gamma), \quad \ell \cos(\alpha) = s + t \cos(\gamma), \quad \ell \cos(\beta) = s \cos(\gamma) + t, \quad y \\ \ell^2 = s^2 + t^2 + 2st \cos(\gamma)$$

De estas igualdades se deduce, teniendo en cuenta que  $\sin(x) = +\sqrt{1 - \cos^2(x)}$  para todo número real  $x \in [0, \pi]$ , que

$$\ell \sin(\alpha) = t \sin(\gamma), \quad \ell \sin(\beta) = s \sin(\gamma)$$

Ahora la fórmula  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$  y las relaciones anteriores nos dan sin dificultades que

$$\ell^2 \cos(\alpha + \beta) = (s + t \cos(\gamma))(s \cos(\gamma) + t) - st \sin^2(\gamma) \\ = \ell^2 \cos(\gamma)$$

de donde  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\gamma)$ . Por un cálculo similar se obtiene que  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\gamma)$ , usando la fórmula  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$   $[\diamond]$ .  $\square$

**E.2.19.** La conclusión de la proposición 2.8 es también válida cuando  $u$  y  $v$  son linealmente dependientes y  $w$  un vector no nulo. Comprobar, mediante el ejercicio E.2.18, que  $\gamma = 0$  implica  $\alpha = \beta = 0$  y, mediante E.2.18, E.2.17 y las fórmulas [2.12] y [2.11], que  $\gamma = \pi$  implica  $\alpha + \beta = \pi$ .

Si  $P, Q$  y  $R$  son puntos,  $Q, R \neq P$ , el ángulo  $\alpha(Q - P, R - P)$  determinado por los vectores  $Q - P$  y  $R - P$  se denotará  $\widehat{QPR}$ . Por [2.11] tenemos que  $\widehat{QPR} = \widehat{RPQ}$ .

**E.2.20.** Sean  $A, B$  y  $C$  tres puntos distintos y pongamos  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  y  $\gamma = \widehat{BCA}$ . Demostrar, usando la propiedad de aditividad de los ángulos, que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

El resultado del ejercicio anterior lo enunciaremos diciendo que la suma de los ángulos de todo triángulo es  $\pi$ . El punto de vista que adoptamos aquí es que una terna  $\{A, B, C\}$  no ordenada de puntos distintos determina un *triángulo*, que denotaremos  $T = \Delta ABC$ , o simplemente  $ABC$  si no hay peligro de confundirlo con la variedad lineal determinada por los puntos  $A, B$  y  $C$ . Los *vértices* de  $T$  son los puntos  $A, B$  y  $C$ ; los *lados* de  $T$  son los segmentos  $[BC]$ ,  $[AC]$  y  $[BA]$ , de los cuales diremos que son *opuestos* a los vértices  $A, B$  y  $C$ , respectivamente; los *ángulos* de  $T$  son los ángulos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  definidos como en el ejercicio anterior, y que a veces denotaremos  $\widehat{A}, \widehat{B}$  y  $\widehat{C}$ ; las *longitudes* de los lados de  $T$  son los números reales  $a = d(B, C)$ ,  $b = d(A, C)$  y  $c = d(A, B)$ .

Un triángulo  $ABC$  es *rectángulo* si tiene un ángulo igual a  $\pi/2$  (*ángulo recto*). Si suponemos que el ángulo recto es  $\widehat{A}$ , entonces  $\widehat{B} + \widehat{C} = \pi/2$  (diremos que  $\widehat{B}$  y  $\widehat{C}$  son *complementarios*), lo cual nos dice que los ángulos  $\widehat{B}$  y  $\widehat{C}$  son *agudos* (es decir, inferiores a  $\pi/2$ ). Diremos que  $a = d(B, C)$  es la *hipotenusa* del triángulo rectángulo y que  $b = d(A, C)$  y  $c = d(A, B)$  son los *catetos*. Entonces, el corolario 2.4 nos dice que  $a^2 = b^2 + c^2$ , que es la forma usual del *teorema de Pitágoras* (v. E.0.6).

**E.2.21.** Comprobar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de sus vértices. Recíprocamente, si en un triángulo el punto medio de un lado equidista de los tres vértices, el ángulo opuesto al citado lado es recto. Observemos que si  $u$  y  $v$  son vectores, entonces  $(u + v) \cdot (v - u) = 0$  si y solo si  $|u|^2 = |v|^2$ .

**E.2.22.** (Hiperplano *bisector* de dos vectores) Dados dos vectores linealmente independientes  $u$  y  $v$ , demostrar que los vectores  $x \neq 0$  tales que  $\alpha(x, u) = \alpha(x, v)$ , junto con  $x = 0$ , forman un hiperplano de  $V$ .

## 2.2 Perpendicularidad

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio euclidiano,  $V$  su espacio vectorial asociado y  $g$  su métrica. Conforme a lo ya dicho en el ejercicio E.2.18, diremos que dos vectores  $v$  y  $w$  son *perpendiculares* u *ortogonales* si  $v \cdot w = 0$ . La relación de perpendicularidad es, pues, simétrica, ya que el producto escalar es simétrico. Advertimos también que  $0$  es perpendicular a cualquier vector y que dos vectores no nulos son perpendiculares si y sólo si el ángulo que determinan es  $\pi/2$ .

**E.2.23.** Sean  $v_1, \dots, v_r$  vectores no nulos tales que  $v_i \cdot v_j = 0$  cuando  $i \neq j$ . Demostrar que  $v_1, \dots, v_r$  son linealmente independientes.

Según la fórmula [2.6], dos vectores  $x$  y  $y$  son ortogonales si y solo si

$$xGy^T = 0 \quad [2.13]$$

donde  $G$ ,  $x$  e  $y$  son, respectivamente, la matriz de la métrica  $g$  y los vectores de coordenadas de  $x$  e  $y$  respecto a una base dada de  $V$ .

Si  $X$  e  $Y$  son dos subconjuntos de  $V$ , diremos que son *ortogonales* si  $x \cdot y = 0$ , cualesquiera que sean  $x \in X$  y  $y \in Y$ , es decir, si y solo si todo vector de  $X$  es perpendicular a todo vector de  $Y$ .

**E.2.24.** Dados  $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s \in V$ , comprobar que  $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$  y  $\langle w_1, \dots, w_s \rangle$  son ortogonales si y solo si  $v_i \cdot w_j = g(v_i, w_j) = 0$ , para  $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ .

**E.2.25.** Si  $X, Y \subseteq V$  son ortogonales, también lo son los subespacios vectoriales  $\langle X \rangle$  y  $\langle Y \rangle$  generados por  $X$  e  $Y$  (dado  $X \subseteq V$ , ponemos  $\langle X \rangle$  para denotar el mínimo subespacio vectorial que contiene  $X$ , es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de  $X$ ).

### Ortogonal de un subespacio

Dado  $U \subseteq V$ , pondremos  $U^\perp$  para denotar el conjunto de vectores  $x \in V$  ortogonales a  $U$ , es decir,

$$U^\perp = \{x \in V \mid u \cdot x = 0 \text{ para todo } u \in U\}$$

**E.2.26.** Demostrar que  $U^\perp$  es un subespacio vectorial de  $V$ , cualquiera que sea  $U \subseteq V$ , y que  $U^\perp = \langle U^\perp \rangle$ .

**E.2.27.** Sea  $W$  es un subespacio vectorial de  $V$  y  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$  un sistema de generadores de  $W$ . Sea  $B$  la matriz de  $\mathbf{w}$  respecto a una base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$  (por tanto,  $\mathbf{w} = \mathbf{e}B$  o  $\mathbf{w}^T = B^T \mathbf{e}^T$ ). Como la relación  $\mathbf{w}^T \cdot x = 0$  expresa que el vector  $x$  es ortogonal a  $W$ , ya que equivale a  $w_i \cdot x = 0$  ( $1 \leq i \leq r$ ), mostrar que  $x = (x_1, \dots, x_n)$  es el vector de componentes de un vector  $x \in W^\perp$  si y solo si satisface el sistema de  $r$  ecuaciones lineales homogéneas

$$B^T G x^T = 0$$

donde  $G$  es la matriz de la métrica respecto a  $\mathbf{e}$ .

**2.9 Teorema.** Para todo subespacio vectorial  $W$  de  $V$  se cumple que  $V = W \oplus W^\perp$ . En particular,  $\dim(W^\perp) = n - \dim(W)$ .

**Demostración:** Sea  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$  una base de  $W$ . Consideremos la aplicación  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^r$  tal que  $x \mapsto (w_1 \cdot x, \dots, w_r \cdot x)$ . La aplicación  $f$  es lineal porque el producto escalar es bilineal, y está claro que  $\ker(f) = W^\perp$ . Tenemos así que  $\dim(W^\perp) =$

$\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \dim(\text{Im}(f)) \geq n - r$ , ya que  $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^r) = r$ . Por otro lado, tenemos  $W \cap W^\perp = \{0\}$  (una consecuencia inmediata de que el producto escalar es definido positivo  $[\diamond]$ ) y, por tanto,  $\dim(W + W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp) \geq r + (n - r) = n$ . Esto prueba que  $W + W^\perp = V$ , lo cual, junto con la relación  $W \cap W^\perp = \{0\}$ , establece lo que pretendíamos.  $\square$

**E.2.28.** Demostrar que  $W^{\perp\perp} = W$  para todo subespacio  $W$  de  $V$ . Demostrar también que si  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios de  $V$ , entonces  $W_1 \subseteq W_2$  si y solo si  $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$ .

### Variedades lineales ortogonales

Si  $L$  es una variedad lineal y  $Q$  es un punto, pondremos

$$L_Q^\perp = Q + W(L)^\perp \quad [2.14]$$

y diremos que  $L_Q^\perp$  es la *variedad perpendicular a  $L$  por  $Q$* . Así,  $W(L_Q^\perp) = W(L)^\perp$  y  $\dim(L_Q^\perp) = n - \dim(L)$ . Observemos que cuando  $L$  es fija y  $Q$  variable, las variedades perpendiculares  $L_Q^\perp$  son paralelas entre ellas.

**E.2.29.** Probar que  $L$  es la variedad perpendicular a  $L_Q^\perp$  por un punto cualquiera de  $L$ .

Sean  $L$  y  $L'$  dos variedades lineales del espacio euclidiano y pongamos  $W = W(L)$  y  $W' = W(L')$ . Diremos que  $L'$  es *perpendicular* u *ortogonal* a  $L$  si  $W^\perp \subseteq W'$  o  $W^\perp \supseteq W'$ . Si  $P' \in L'$ , la condición  $W^\perp \subseteq W'$  equivale a  $L_{P'}^\perp \subseteq L'$  y la condición  $W^\perp \supseteq W'$  equivale a  $L_{P'}^\perp \supseteq L'$ . Así pues, una variedad  $L'$  es perpendicular a  $L$  si contiene o está contenida en la variedad  $L_{P'}^\perp$ , para un cierto punto  $P' \in L'$ .

**E.2.30.** Usar E.2.28 para demostrar que la perpendicularidad de variedades lineales es simétrica, es decir, que  $L'$  es perpendicular a  $L$  si y solo si  $L$  es perpendicular a  $L'$ .

### Proyección ortogonal

Dado un subespacio vectorial  $W$  de  $V$ , del teorema 2.9 resulta directamente que existe una única aplicación lineal  $\pi_W: V \rightarrow W$  tal que  $\pi_W(x) = x$  si  $x \in W$  y  $\pi_W(x) = 0$  si  $x \in W^\perp$ . Si  $x = x' + x''$ , con  $x' \in W$  y  $x'' \in W^\perp$ , entonces  $\pi_W(x) = x'$ . Diremos que  $\pi_W$  es la *proyección ortogonal* de  $V$  sobre  $W$ .

**E.2.31.** Probar que  $\pi_W(x)$  es el único vector  $x' \in W$  tal que  $x - x' \in W^\perp$ .

**E.2.32.** Usar el teorema de Pitágoras (corolario 2.4) para concluir que  $|\pi_W(x)| = |x|$  si y solo si  $x \in W$ .

### Cálculo efectivo en base ortonormal

El cálculo de la proyección ortogonal es especialmente simple cuando se conoce una base ortonormal de  $W$ .

**2.10 Proposición.** Si  $(u_1, \dots, u_r)$  es una base ortonormal de  $W$ , entonces

$$\pi_W(x) = (x \cdot u_1)u_1 + \dots + (x \cdot u_r)u_r \quad [2.15]$$

para todo vector  $x \in V$ .

**Demostración:** En efecto, pongamos  $\pi(x) \in W$  para denotar la expresión de la derecha. Entonces está claro, por definición de base ortonormal, que  $u_j \cdot \pi(x) = u_j \cdot x$  para todo  $x \in V$ . Por tanto,  $u_j \cdot (x - \pi(x)) = 0$  ( $1 \leq j \leq r$ ). Esto nos dice que  $x - \pi(x) \in W^\perp$  y E.2.31 nos permite concluir que  $\pi(x) = \pi_W(x)$ .  $\square$

**Ejemplo.** Hagamos  $W = V$  en la fórmula [2.15] y sea  $(u_1, \dots, u_n)$  una base ortonormal de  $V$ . Puesto que  $\pi_V = Id$ , para todo  $x \in V$  tenemos

$$x = \sum_{i=1}^n (x \cdot u_i)u_i \quad [2.15']$$

**Ejemplo.** Apliquemos ahora la fórmula [2.15] a un subespacio vectorial  $W$  de dimensión 1. Si  $w$  es un vector no nulo de  $W$  y ponemos  $u = w/|w|$  (de manera que  $u$  es una base ortonormal de  $W$ ), entonces

$$\pi_w(x) = (x \cdot u)u = (x \cdot w) \frac{w}{|w|^2} \quad \text{y} \quad |\pi_w(x)| = |x \cdot u| = \frac{|x \cdot w|}{|w|} \quad [2.15'']$$

donde hemos puesto  $\pi_w = \pi_{\langle w \rangle}$ . Puede resultar instructivo para el lector comparar estas fórmulas con las que hemos discutido heurísticamente en la sección «Ángulos y producto escalar» de la introducción a este capítulo.

### Cálculo efectivo en base no ortonormal

Veamos ahora cómo podemos calcular la proyección ortogonal sobre un subespacio vectorial  $W$  de  $V$  del cual conocemos una base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ , no necesariamente ortonormal. Sea  $x$  un vector y  $x' = \pi_W(x)$ . Pongamos  $x' = t_1 e_1 + \dots + t_r e_r = \mathbf{t} \mathbf{e}^T$  (donde  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r$ ). Se trata de determinar  $\mathbf{t}$  bajo la condición de que  $x - x' \in W^\perp$ , es decir, que  $(x - x') \cdot \mathbf{e} = 0$ . Esta relación es equivalente a  $x \cdot \mathbf{e} = x' \cdot \mathbf{e} = \mathbf{t} (\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})$ . Como  $x \cdot \mathbf{e} = \mathbf{t} (\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})$  equivale a un sistema de  $r$  ecuaciones lineales en  $t_1, \dots, t_r$  que tiene exactamente una solución (es decir, es un sistema de Cramer compatible y determinado), vemos que  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) \neq 0$  y así

$$\mathbf{t} = (x \cdot \mathbf{e})(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})^{-1} \quad [2.16]$$

Si  $\mathbf{e}$  es ortonormal,  $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = I_r$  y el resultado nos da de nuevo la fórmula [2.15]. Por otro lado, la fórmula coincide con [2.15''] cuando  $r = 1$ .

Si  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  es una base arbitraria de  $V$ ,  $G = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u}$  la matriz de la métrica y  $M$  la matriz de  $\mathbf{e}$  respecto a la base  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{e} = \mathbf{u}M$ ), entonces  $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = M^T G M$  y  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{x} G M$ , donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  son las componentes de  $x$  respecto a la base  $\mathbf{u}$  (por tanto,  $x = \mathbf{x} \mathbf{u}^T$ ). De esto resulta que

$$\mathbf{t} = (\mathbf{x} G M)(M^T G M)^{-1} \quad [2.16']$$

Fijémonos en que  $M$  es una matriz  $r \times n$  y que, por tanto, no tiene sentido considerar  $M^{-1}$  cuando  $r < n$ . Si  $r = n$ , entonces  $M$  es invertible y la fórmula se puede simplificar hasta obtener  $\mathbf{t} = \mathbf{x}(M^T)^{-1}$ , o bien  $\mathbf{t}^T = M^{-1} \mathbf{x}^T$ , o bien  $\mathbf{x}^T = M \mathbf{t}^T$ , que no es más que la relación de cambio de componentes de la base  $\mathbf{e}$  a la base  $\mathbf{u}$ .

**2.11 Nota.** Hemos visto que si  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$  son vectores linealmente independientes de  $V$ , entonces  $\det(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) \neq 0$ . En la sección 2.3 veremos que, de hecho,  $\det(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) > 0$ , e interpretaremos el significado geométrico de este determinante.

### Proyección ortogonal sobre una subvariedad

Sean  $L$  una variedad lineal y  $Q$  un punto. Pongamos  $W = W(L)$  y fijemos un punto arbitrario  $P \in L$ . Los puntos de intersección  $X$  de  $L_Q^\perp$  con  $L$  son los que cumplen  $X = Q + w' = P + w$ , con  $w \in W$ ,  $w' \in W^\perp$ . Dado que la única solución es  $w = \pi_W(Q - P)$  y  $w' = w - (Q - P)$ , resulta que existe un único punto de intersección de  $L$  y  $L_Q^\perp$ , y que este punto es  $Q' = P + \pi_W(Q - P)$ . Fijémonos que, en particular,  $P + \pi_W(Q - P)$  es independiente del punto  $P \in L$ . Diremos que  $Q'$  es la *proyección ortogonal de  $Q$  sobre  $L$*  y pondremos  $\pi_L(Q)$  para denotarlo. Por definición, pues, tenemos

$$\pi_L(Q) = P + \pi_W(Q - P) \quad [2.17]$$

para cualquier punto  $P$  de  $L$ . Como  $\pi_W$  es lineal,  $\pi_L: \mathbb{A} \rightarrow L$  es una aplicación afín.

**E.2.33.** Probar que  $\pi_L(X) = \pi_L(Q)$  equivale a  $X \in L_Q^\perp$ .

### Ortonormalización de Gram-Schmidt

La demostración de la proposición que sigue nos proporciona un método constructivo (*método de Gram-Schmidt*) para construir una base ortonormal de un espacio a partir de una base cualquiera.

**2.12 Proposición.** Si  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  es una base de  $V$ , existe una única base ortonormal  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  de  $V$  tal que

$$u_i \in \langle e_1, \dots, e_i \rangle \quad \text{y} \quad e_i \cdot u_i > 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad [2.18]$$

**Demostración:** Dado que los únicos vectores unitarios de  $\langle e_1 \rangle$  son  $\pm e_1/|e_1|$ , está claro que debemos tomar  $u_1 = e_1/|e_1|$ .

Supongamos, pues, que hemos construido recursivamente, para algún  $j \geq 1$ , vectores unitarios y ortogonales dos a dos  $u_1, \dots, u_j$  que cumplen [2.18] para  $i = 1, \dots, j$ , y que hemos probado que, en estas condiciones, son los únicos que la cumplen. Puesto que no queda nada para demostrar si  $j = n$ , podemos suponer que  $j < n$ . Notemos además que  $\langle u_1, \dots, u_j \rangle = \langle e_1, \dots, e_j \rangle$ , ya que  $\langle u_1, \dots, u_j \rangle \subseteq \langle e_1, \dots, e_j \rangle$  y  $\dim \langle u_1, \dots, u_j \rangle = j$ .

Intentemos ver ahora qué posibilidades tenemos para escoger  $u_{j+1}$ . En primer lugar, tiene que ser  $u_{j+1} = \lambda e_{j+1} + x$ , con  $\lambda \neq 0$  y  $x \in \langle e_1, \dots, e_j \rangle$ . Si ponemos  $\pi_j$  para denotar la proyección ortogonal sobre  $\langle e_1, \dots, e_j \rangle = \langle u_1, \dots, u_j \rangle$ , entonces  $\pi_j(u_{j+1}) = 0$  y  $\pi_j(x) = x$ , de manera que, necesariamente,  $x = -\lambda \pi_j(e_{j+1})$ . Por tanto,  $u_{j+1} = \lambda v_{j+1}$ , donde  $v_{j+1} = e_{j+1} - \pi_j(e_{j+1})$ . Como  $u_{j+1}$  tiene que ser unitario, necesariamente debemos tomar  $\lambda = \pm |v_{j+1}|^{-1}$ . Notemos que esto es posible, ya que  $e_{j+1} \notin \langle e_1, \dots, e_j \rangle$  y, como consecuencia,  $v_{j+1} \neq 0$ . Finalmente, está claro que la condición  $u_{j+1} \cdot e_{j+1} > 0$  implica que la única posibilidad es  $u_{j+1} = v_{j+1}/|v_{j+1}|$ . De este modo, existe un único vector unitario  $u_{j+1}$ , ortogonal a  $u_1, \dots, u_j$  y tal que  $u_1, \dots, u_j, u_{j+1}$  cumplen [2.18] para  $i = 1, \dots, j, j+1$ . Visto que este proceso se puede iterar, la prueba queda finalizada por inducción.  $\square$

**Nota.** Sea  $\mathbf{u}$  una base ortonormal de  $V$  y consideremos el isomorfismo  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow V$  tal que  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}\mathbf{x}^T$ . Teniendo en cuenta la expresión del producto escalar de  $V$  en una base ortonormal (fórmula [2.8]) y el producto escalar de  $\mathbb{R}^n$  (E.2.1), vemos que se cumple la relación

$$\varphi(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

cualesquiera que sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Más generalmente, la fórmula [2.8] implica que si  $g$  y  $g'$  son métricas de dos espacios reales  $V$  y  $V'$  de la misma dimensión, entonces existe un isomorfismo  $\varphi: V \rightarrow V'$  tal que

$$g'(\varphi(x), \varphi(y)) = g(x, y) \tag{2.19}$$

cualesquiera que sean  $x, y \in V$ : basta tomar como  $\varphi$  la aplicación lineal que transforma una base ortonormal de  $V$  respecto a  $g$  en una base ortonormal de  $V'$  respecto a  $g'$ . Este hecho, lo enunciaremos diciendo que  $\varphi$  es una *isometría* entre  $(V, g)$  y  $(V', g')$ . Para cada dimensión  $n$  existe, pues, una única métrica salvo isometrías.

### *Producto escalar y ecuaciones cartesianas*

El producto escalar está estrechamente relacionado con las ecuaciones cartesianas de las variedades lineales de un espacio euclidiano. En este apartado, destinado a la exploración de estas relaciones, primero expondremos el caso de un hiperplano y después el caso general.

### Ecuación de un hiperplano

Sea  $H$  un hiperplano. Como  $W(H)^\perp$  es un espacio vectorial de dimensión 1,  $W(H)^\perp = \langle a \rangle$ , donde  $a$  es cualquier vector no nulo de  $W(H)^\perp$ . Si  $P \in H$ , la condición para que  $X \in H$  es que  $X - P \in W(H)$ , es decir, que

$$a \cdot (X - P) = 0 \quad [*]$$

En una referencia  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$ , esta condición adopta la forma

$$\mathbf{a}G\mathbf{x}^T = \mathbf{a}G\mathbf{p}^T \quad [2.20]$$

donde  $\mathbf{a}$  son las componentes de  $a$  respecto a  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{x}$  las  $\mathcal{R}$ -coordenadas de  $X$  y  $\mathbf{p}$  las  $\mathcal{R}$ -coordenadas de  $P$ . Si ahora ponemos  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ , donde  $\mathbf{b} = \mathbf{a}G$ , y  $\beta = \mathbf{b}\mathbf{p}^T = b_1p_1 + \dots + b_np_n$ , la última ecuación adopta la forma

$$b_1x_1 + \dots + b_nx_n = \beta \quad [2.20']$$

Hemos obtenido así, a partir del vector  $a$  perpendicular a  $H$  y mediante el producto escalar, una ecuación cartesiana de  $H$  en la referencia  $\mathcal{R}$ . Señalemos que si  $\mathcal{R}$  es *rectangular*, es decir, si  $\mathbf{u}$  es ortonormal, entonces  $G = I_n$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ , con lo cual la ecuación del hiperplano se escribe

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \alpha \quad [2.20'']$$

donde  $\alpha = a_1p_1 + \dots + a_np_n$ .

**E.2.34.** Supongamos que  $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = \beta$  es la ecuación de un hiperplano  $H$  en una referencia  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$  de  $\mathbb{A}$ . Sea  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  y definamos  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  por la fórmula  $\mathbf{a} = \mathbf{b}G^{-1}$ , donde  $G$  es la matriz de la métrica en la referencia  $\mathcal{R}$ . Probar que el vector  $\mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{a}^T = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$  es un vector perpendicular a  $H$ . Notemos que en el caso que  $\mathcal{R}$  sea rectangular, los mismos coeficientes  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  son las  $\mathbf{u}$ -componentes de un vector perpendicular a  $H$ .

**E.2.35.** *Hiperplano bisector de dos puntos.* Dados dos puntos distintos  $P$  y  $Q$ , demostrar que el conjunto de puntos  $X$  tales que  $d(X, P) = d(X, Q)$  es el hiperplano perpendicular a  $Q - P$  que pasa por el punto medio de los puntos  $P$  y  $Q$ .

### Ecuaciones de una variedad lineal

Las consideraciones que hemos hecho en el apartado anterior se extienden fácilmente al caso de una variedad lineal  $L$  arbitraria.

Sea  $W = W(L)$  el espacio director de  $L$  y escojamos un punto  $P \in L$ . Sea  $r = \dim(L)$  y pongamos  $s = n - r$ . Sea  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$  una base de  $W^\perp$  ( $\dim(W^\perp) = s$  por el teorema 2.9). De este modo se cumple que  $w \in W$  si y solo si  $a_i \cdot w = 0$  para

$i = 1, \dots, s$ , es decir, si y solo si  $\mathbf{a}^T \cdot w = 0$ . Si  $X$  es un punto cualquiera, la relación  $X \in L$  equivale a  $X - P \in W$  y, por tanto, a

$$\mathbf{a}^T \cdot (X - P) = 0 \quad [**]$$

que es la análoga para  $L$  de la fórmula (\*) del caso de un hiperplano.

Veamos cómo se expresa [\*\*] en una referencia  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$ . Sea  $G = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u}$  la matriz de la métrica y  $A$  la matriz de los vectores  $\mathbf{a}$  respecto a  $\mathbf{u}$ , de manera que  $\mathbf{a} = \mathbf{u}A$ . Pongamos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{p}$  para denotar las  $\mathcal{R}$ -coordenadas de  $X$  y de  $P$ , respectivamente. Así  $X - P = \mathbf{u}(\mathbf{x}^T - \mathbf{p}^T)$  y la ecuación [\*\*] se traduce a la ecuación matricial

$$A^T G \mathbf{x}^T = A^T G \mathbf{p}^T \quad [2.21]$$

Pongamos  $B = A^T G$  (es una matriz de tipo  $s \times n$ ) y  $\beta^T = B \mathbf{p}^T$ . Con estas notaciones, la última ecuación se convierte en

$$B \mathbf{x}^T = \beta^T \quad [2.21']$$

que es un sistema de ecuaciones cartesianas por la variedad  $L$  (de  $s$  ecuaciones independientes, para ser más exactos).

En el caso que  $\mathcal{R}$  sea rectangular,  $B = A^T$  y el sistema [2.21'] adopta la forma

$$A^T \mathbf{x}^T = \alpha^T \quad [2.21'']$$

donde  $\alpha^T = A^T \mathbf{p}^T$ .

**E.2.36.** Supongamos que  $B \mathbf{x}^T = \beta^T$  es un sistema de  $s = n - r$  ecuaciones cartesianas de una variedad lineal  $L$  de dimensión  $r$  en una referencia  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$  de  $\mathbb{A}$  (así pues,  $B$  es una matriz de tipo  $s \times n$ , de rango  $s$ , y  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$  es un vector fila de dimensión  $s$ ). Definamos la matriz  $A$  por la fórmula  $A^T = B G^{-1}$ , donde  $G$  es la matriz de la métrica en la referencia  $\mathcal{R}$ . Probar que  $A$  es la matriz de una base de  $W(L)^\perp$  respecto a  $\mathbf{u}$ . En el caso de que  $\mathcal{R}$  sea rectangular, tenemos simplemente  $A = B^T$ .

### *Distancia entre variedades lineales*

La *distancia de un punto  $P$  a un subconjunto no vacío  $L \subseteq \mathbb{A}$* ,  $d(P, L)$ , se define como el ínfimo de las distancias  $d(P, Q)$ , para  $Q \in L$ . Más generalmente, la *distancia entre dos subconjuntos  $L, L' \subseteq \mathbb{A}$* ,  $d(L, L')$ , se define como el ínfimo de las distancias  $d(P, Q)$ , para  $P \in L$  y  $Q \in L'$ .

En este apartado expresaremos en términos geométricos la distancia  $d(L, L')$  en el caso que  $L$  y  $L'$  sean variedades lineales y encontraremos, en particular, fórmulas efectivas para calcularla.

**2.13 Proposición** (Distancia de un punto a una variedad lineal). *Sea  $L$  una variedad lineal y  $P$  un punto. Entonces*

$$d(P, L) = d(P, \pi_L(P))$$

y  $\pi_L(P)$  es el único punto de  $L$  que cumple esta igualdad.

**Demostración:** Sea  $W = W(L)$ , y sea  $Q \in L$  un punto cualquiera. Sea  $P' = \pi_L(P)$ . Tenemos  $P - Q = (P - P') + (P' - Q)$  y está claro que  $P' - Q \in W$  y  $P - P' \in W^\perp$ . Del teorema de Pitágoras (v. corolario 2.4) y de la definición de distancia entre puntos, resulta que  $d(P, Q) > d(P, P')$  para todo  $Q \in L, Q \neq P'$ . Por tanto,  $d(P, L) = d(P, P')$ , y está claro que  $P'$  es el único punto de  $L$  que cumple esta igualdad.  $\square$

**Ejemplo.** *Distancia de un punto a un hiperplano.* La distancia  $d = d(Q, H)$  de un punto  $Q$  al hiperplano  $H$  dado por la ecuación [2.20] se obtiene por la fórmula

$$d = \frac{|a \cdot (Q - P)|}{|a|} = |\pi_a(Q - P)|$$

De hecho, si ponemos  $Q'$  para denotar la proyección ortogonal de  $Q$  sobre  $H$ , entonces  $a \cdot (Q - P) = a \cdot (Q - Q') + a \cdot (Q' - P) = a \cdot (Q - Q')$ , ya que  $Q' - P \in W(H)$  es ortogonal al vector  $a$ , y tomando valores absolutos obtenemos  $|a \cdot (Q - P)| = |a \cdot (Q - Q')| = |a|d$ , ya que  $Q - Q'$  y  $a$  son proporcionales y  $d = d(Q, Q')$ . En una referencia rectangular la ecuación de  $H$  es [2.20''] y

$$d = \frac{|\sum a_i(q_i - p_i)|}{\sqrt{\sum a_i^2}} = \frac{|(\sum a_i q_i) - \alpha|}{\sqrt{\sum a_i^2}}$$

donde  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  y  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  son las coordenadas de  $P$  y  $Q$ . Usando [2.15'] en lugar de [2.15''], es fácil escribir una fórmula que nos proporcione  $d$  en cualquier referencia.

**E.2.37. Hiperplanos bisectores de dos hiperplanos.** Sean  $H$  y  $H'$  dos hiperplanos no paralelos. Sea  $a$  ( $a'$ ) un vector unitario perpendicular a  $H$  ( $H'$ ). Demostrar que el conjunto de puntos que equidistan de  $H$  y  $H'$  es la unión de dos hiperplanos. Demostrar también que estos dos hiperplanos contienen  $H \cap H'$  y que  $a + a'$  y  $a - a'$  son sus respectivos vectores perpendiculares (en particular, los dos hiperplanos en cuestión son perpendiculares). Por otro lado, si  $H$  y  $H'$  son paralelos, pero distintos, los puntos  $X$  tales que  $d(X, H) = d(X, H')$  forman un único hiperplano.

Ahora estudiaremos la distancia entre dos variedades lineales arbitrarias en términos geométricos.

**2.14 Proposición** (Distancia entre dos variedades lineales). *Sean  $L$  y  $L'$  dos variedades lineales y pongamos  $W = W(L)$  y  $W' = W(L')$  para denotar sus espacios directores. Sea  $U = (W + W')^\perp$ . Entonces se cumple, cualesquiera que sean  $P \in L$  y  $P' \in L'$ , que*

$$d(L, L') = |\pi_U(P - P')|$$

**Demostración:** Observamos primero que el vector  $\pi_U(P' - P)$  es constante mientras  $P \in L$  y  $P' \in L'$ . En efecto, si  $P, Q \in L$  y  $P', Q' \in L'$ , entonces  $Q = P + w$  y  $Q' = P' + w'$ , para ciertos  $w \in W$  y  $w' \in W'$ . Por tanto,  $Q' - Q = (P' - P) + w' - w$ . Como  $w' - w \in W + W'$ , tenemos  $\pi_U(w' - w) = 0$ , y de esto se sigue que  $\pi_U(Q' - Q) = \pi_U(P' - P)$ .

En particular, la norma  $d = |\pi_U(P' - P)|$  es constante mientras  $P \in L$  y  $P' \in L'$ . Ahora sabemos que  $|P' - P| \geq |\pi_U(P' - P)|$ , sean cuales sean los puntos  $P$  y  $P'$ , y que vale la igualdad si y solo si  $P' - P \in U$  (E.2.32). Por tanto, obtenemos que  $P \in L$  y  $P' \in L'$  implican  $d(P, P') \geq d$  y que la igualdad vale si y solo si  $P' - P \in U$ . Está claro, pues, que para terminar la demostración solo nos hace falta ver que existen  $P \in L$  y  $P' \in L'$  tales que  $P' - P \in U$ .

Fijemos un punto  $P_0 \in L$  y consideremos la variedad  $M = L + U = P_0 + W + U$ . Debido a que  $(W + U) + W' = V$ , la variedad  $M$  corta a  $L'$  (proposición 1.18). Sea  $P' \in M \cap L'$ , de manera que existen  $w \in W$  y  $u \in U$  tales que  $P' = P_0 + w + u$ . Entonces,  $P' - u = P_0 + w$ , y esto prueba que el punto  $P = P' - u$  es de  $L$ . Y visto que  $P' - P = u \in U$ , esto finaliza la demostración.  $\square$

**E.2.38.** Con las notaciones de la proposición anterior,

- 1) Probar que  $W' \cap (W + U) = W' \cap W$  y deducir, si  $i = \dim(W \cap W')$ , que la intersección  $N' = (L + U) \cap L' \subseteq L'$  tiene dimensión  $i$ . Análogamente, tenemos que  $N = (L' + U) \cap L \subseteq L$  tiene dimensión  $i$ .
- 2) Dado un punto  $Q \in L$ , probar que la intersección  $Q^* = (Q + U) \cap L'$  es no vacía si y solo si  $Q \in N$ , y que, si este es el caso, entonces  $Q^*$  es un punto de  $N'$ . Además, la aplicación  $N \rightarrow N'$  tal que  $Q \mapsto Q^*$  es biyectiva.
- 3) Si  $Q \in L$  y  $Q' \in L'$ , demostrar que  $d(Q, Q') = d(L, L')$  si y solo si  $Q \in N$  y  $Q' = Q^*$ . Notemos que  $N$  y  $N'$  se reducen a un punto si y solo si  $W \cap W' = \{0\}$ .

**Ejemplo.** Sean  $L = P + \langle w \rangle$  y  $L' = P' + \langle w' \rangle$  dos rectas no paralelas del espacio ordinario (v. figura 2.4). Los respectivos espacios directores son  $W = \langle w \rangle$  y  $W' = \langle w' \rangle$ . Como las rectas son no paralelas,  $W + W' = \langle w, w' \rangle$  tiene dimensión 2 y  $U = \langle w, w' \rangle^\perp$  tiene dimensión 1. Así podemos escribir  $U = \langle u \rangle$  para un cierto vector no nulo  $u$ . Si ponemos  $v = P' - P$ , la fórmula [2.15''] nos da que

$$\pi_U(v) = \frac{v \cdot u}{|u|^2} u$$

y, como consecuencia,

$$d(L, L') = \frac{|v \cdot u|}{|u|} \quad [2.22]$$

En este caso existe, por el ejercicio anterior, un único par de puntos  $Q \in L$  y  $Q' \in L'$  tales que  $d(L, L') = d(Q, Q')$ : el punto  $Q'$  es la intersección del plano  $\bar{L} = P + \langle w, u \rangle$  con  $L'$  y el punto  $Q$  es la intersección del plano  $\bar{L}' = P' + \langle w', u \rangle$  con  $L$ . La recta  $QQ'$  coincide, pues, con la intersección  $\bar{L} \cap \bar{L}'$  y es la única recta que corta a  $L$  y  $L'$  y que es perpendicular a las mismas.

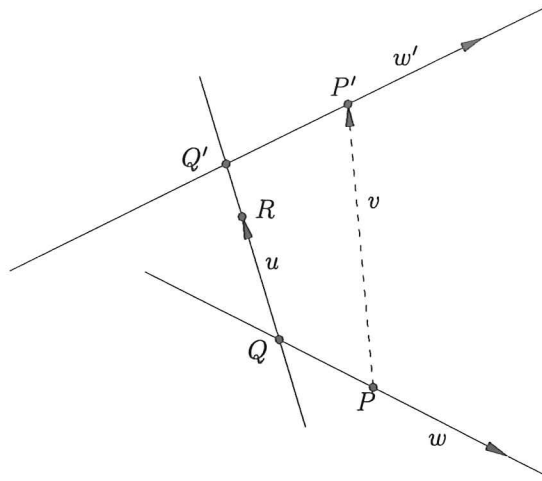


Figura 2.4: Ilustración de 2.14 en el caso de dos rectas no paralelas del espacio ordinario

**Ejemplo.** Sean  $L = P + \langle w \rangle$  y  $L' = P' + \langle w \rangle$  dos rectas paralelas del espacio ordinario. Entonces  $W = W' = \langle w \rangle$ ,  $W + W' = \langle w \rangle$  tiene dimensión 1 y  $U = \langle w \rangle^\perp$  tiene dimensión 2. Así podemos escribir  $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ ,  $u_1$  y  $u_2$  linealmente independientes. En este caso,  $L' + U = \mathbb{A}^3$  y, por tanto, para todo punto  $Q \in (L' + U) \cap L = L$  hay un punto  $Q' \in L'$  tal que  $d(L, L') = d(Q, Q')$ . El punto  $Q'$  es la intersección del plano  $Q + \langle u_1, u_2 \rangle$  con  $L'$  y es inmediato comprobar que es la proyección ortogonal de  $Q$  sobre  $L'$ . Se desprende que

$$d(L, L') = d(Q, L'), \text{ para cualquier punto } Q \in L. \quad [2.23]$$

Así pues, el problema de encontrar la distancia entre dos rectas paralelas se reduce al cálculo de la distancia entre un punto y una recta, y esta cuestión se puede resolver mediante la fórmula [2.13].

## 2.3 Volúmenes

Primero expondremos algunas consideraciones sobre la noción de orientación de un espacio vectorial real y después nos ocuparemos de la definición, las propiedades y el cálculo efectivo de volúmenes en un espacio euclidiano, así como de algunas de sus aplicaciones.

### Orientaciones

En este apartado supondremos que  $V$  es un espacio vectorial real de dimensión finita  $n$ .

Dadas dos bases  $e$  y  $e'$  de  $V$ , diremos que *tienen la misma orientación*, y escribiremos  $e \sim e'$ , si  $\det(A) > 0$ , donde  $A$  es la matriz de  $e'$  respecto a  $e$ . Si  $\det(A) < 0$ , diremos que  $e$  y  $e'$  tienen *orientaciones opuestas* o *contrarias*.

Si  $e = (e_1, \dots, e_n)$  es una base de  $V$  y ponemos  $\bar{e} = (e_1, \dots, e_{n-1}, -e_n)$ , entonces la matriz de  $\bar{e}$  respecto a  $e$  es  $J_n = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$  y, ya que  $\det(J_n) = -1$ ,  $e$  y  $\bar{e}$  tienen orientaciones contrarias.

**2.15 Proposición.** *La relación  $e \sim e'$  es de equivalencia.*

**Demostración:** Puesto que la matriz de una base  $e$  respecto a ella misma es la matriz identidad  $I_n$  y  $\det(I_n) = 1$ , resulta que  $e \sim e$ , es decir, que  $\sim$  es reflexiva. Sean ahora  $e, e'$  y  $e''$  bases tales que  $e \sim e'$  y  $e' \sim e''$ . Entonces tenemos, si  $e' = eA$  y  $e'' = e'A'$ ,  $\det(A) > 0$  y  $\det(A') > 0$ . Pero como  $e'' = e'A' = eAA'$  y  $\det(AA') = \det(A)\det(A') > 0$ , resulta que  $e \sim e''$ , con lo cual tenemos que  $\sim$  es transitiva. Finalmente, debido a que si  $e' = eA$  entonces  $e = e'A^{-1}$  y  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} > 0$ , obtenemos que  $\sim$  es simétrica.  $\square$

Pondremos  $or(V)$  para denotar el cociente del conjunto de bases de  $V$  por la relación de equivalencia  $\sim$ . A los elementos de  $or(V)$  los denominaremos *orientaciones* de  $V$ .

**2.16 Proposición.** *El espacio vectorial  $V$  tiene exactamente dos orientaciones. Más precisamente, si  $o$  es la orientación de una base cualquiera  $e$  y  $\bar{o}$  la de la base  $\bar{e}$ , entonces  $or(V) = \{o, \bar{o}\}$ .*

**Demostración:** Sabemos que  $e$  y  $\bar{e}$  tienen orientaciones opuestas y, por tanto,  $o \neq \bar{o}$ .

Para finalizar la prueba, bastará demostrar que, dada otra base  $e'$ , o bien  $e' \sim e$  o bien  $e' \sim \bar{e}$ . Ahora bien, si  $e' = eA$ , donde  $A$  es la matriz de  $e'$  respecto a  $e$ , entonces también es  $e' = \bar{e}JA$ , y como  $\det(JA) = -\det(A)$ , vemos que  $e'$  tiene la misma orientación que  $e$  si  $\det(A) > 0$  y la misma orientación que  $\bar{e}$  si  $\det(A) < 0$ .  $\square$

Dada una base  $e$  de  $V$  y una orientación  $o$ , diremos que  $e$  tiene orientación  $o$ , o que es  *$o$ -orientada*, para expresar que  $o$  es la clase de  $e$  respecto a  $\sim$ . Está claro, por lo que ya hemos dicho, que si  $e$  es  $o$ -orientada, entonces  $\bar{e}$  es  $\bar{o}$ -orientada.

### Volúmen euclidiano respecto a una orientación

Volvamos a la geometría. Sean  $V$  y  $g$  el espacio asociado y la métrica de un espacio euclidiano  $\mathbb{A}$ , y sea  $o$  una orientación de  $V$ .

Dados los vectores  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ , pondremos

$$V_o(\mathbf{e}) = \det(M) \quad [2.24]$$

donde  $M$  es la matriz de  $\mathbf{e}$  respecto a una base ortonormal  $o$ -orientada  $\mathbf{u}$ .

Para que esta definición tenga sentido, hace falta ver que el resultado no depende de la base ortonormal  $o$ -orientada  $\mathbf{u}$  que utilizamos. Sea, pues,  $\mathbf{u}'$  otra base ortonormal  $o$ -orientada y pongamos  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}A$ . Tenemos que  $\det(A) = 1$ , ya que  $A$  es ortogonal y  $\det(A) > 0$ . Si ahora  $\mathbf{e} = \mathbf{u}'M'$ , entonces  $M = AM'$  y

$$\det(M) = \det(AM') = \det(M')$$

Diremos que  $V_o(\mathbf{e})$  es el *volumen* de  $\mathbf{e}$  respecto a la orientación  $o$ .

**E.2.39.** Usar las propiedades de los determinantes para mostrar que la aplicación

$$(e_1, \dots, e_n) \mapsto V_o(e_1, \dots, e_n)$$

es multilineal alternada y que  $V_o(e_1, \dots, e_n) = 0$  si y solo si los vectores  $e_1, \dots, e_n$  son linealmente dependientes (se dice que una aplicación es *multilineal* si es lineal en cada una de sus variables fijando arbitrariamente el valor de las demás, y *alternada* si la trasposición de dos cualesquiera de sus variables tiene el efecto de cambiar el signo del valor de la aplicación).

**E.2.40.** Comprobar que  $V_{\bar{o}}(\mathbf{e}) = -V_o(\mathbf{e})$  y que  $V_o(\bar{\mathbf{e}}) = -V_o(\mathbf{e})$ .

Si  $P_0, P_1, \dots, P_n$  son puntos de  $\mathbb{A}$ , pondremos

$$V_o(P_0, P_1, \dots, P_n) = V_o(P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0) \quad [2.25]$$

y diremos que es el volumen del paralelepípedo  $P_0, P_1, \dots, P_n$  respecto a la orientación  $o$ .

### *Volumen euclidiano absoluto*

Dados los vectores  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ , el ejercicio E.2.40 muestra que  $|V_o(\mathbf{e})|$  sólo depende de  $\mathbf{e}$ , y no de la orientación  $o$ . Pondremos  $V(\mathbf{e}) = |V_o(\mathbf{e})|$  y diremos que  $V(\mathbf{e})$  es el *volumen absoluto*, o simplemente el *volumen* de  $\mathbf{e}$ . Está claro que  $V(\mathbf{e}) = |\det(M)|$ , donde  $M$  es la matriz de  $\mathbf{e}$  respecto a una base ortonormal cualquiera.

**2.17 Proposición.** *Dados los vectores arbitrarios  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ , pongamos  $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}$  para denotar la matriz  $(e_i \cdot e_j)$ . Entonces  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) \geq 0$  y*

$$V(\mathbf{e}) = \sqrt{\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})}$$

**Demostración:** En efecto, si  $\mathbf{e} = \mathbf{u}M$ , donde  $\mathbf{u}$  es una base ortonormal, entonces

$$\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{u}M)^T \cdot (\mathbf{u}M) = M^T(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u})M = M^T M.$$

Por tanto,

$$\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = \det(M^T M) = \det(M)^2 = V(\mathbf{e})^2$$

de donde el enunciado resulta directamente.  $\square$

**2.18 Corolario.** *Dados los vectores arbitrarios  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ ,  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = 0$  si y solo si los vectores  $e_1, \dots, e_n$  son linealmente dependientes.*  $\square$

Sean ahora  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$  vectores arbitrarios de  $V$ ,  $1 \leq r \leq n$ . Entonces sabemos que  $\dim \langle e_1, \dots, e_r \rangle \leq r$ , y que la igualdad vale si y solo si  $e_1, \dots, e_r$  son linealmente independientes. Sea  $V'$  un subespacio vectorial de  $V$  de dimensión  $r$  tal que  $\langle e_1, \dots, e_r \rangle \subseteq V'$ . Razonando dentro de  $V'$  como antes hemos hecho en  $V$ , obtenemos que

$$\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = V'(\mathbf{e})^2 \geq 0$$

donde  $V'(\mathbf{e})$  denota el volumen de  $\mathbf{e}$  respecto a  $V'$ , y que  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = 0$  si y solo si  $e_1, \dots, e_r$  son linealmente dependientes. Dado que la expresión  $\sqrt{\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})}$  coincide, por la proposición 2.17, con  $V(\mathbf{e})$  cuando  $r = n$ , es natural definir

$$V(\mathbf{e}) = \sqrt{\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})} \tag{2.26}$$

para cualquier  $r$ . Por lo que hemos dicho hasta ahora:

**2.19.**  $V(e_1, \dots, e_r) \geq 0$ , cualesquiera que sean  $e_1, \dots, e_r$ , y  $V(\mathbf{e}) = 0$  si y solo si  $e_1, \dots, e_r$  son linealmente dependientes.  $\square$

**2.20 Ejemplo.** Para  $r = 1$  tenemos que  $V(e_1) = \sqrt{e_1 \cdot e_1} = |e_1|$ , es decir, la longitud de  $e_1$ .

**2.21 Ejemplo.** Para  $r = 2$  tenemos, si  $\alpha = \alpha(e_1, e_2)$ , que  $V(e_1, e_2) = |e_1||e_2|\sin(\alpha)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} V(e_1, e_2)^2 &= \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{vmatrix} \\ &= |e_1|^2 |e_2|^2 - (e_1 \cdot e_2)^2 \\ &= |e_1|^2 |e_2|^2 - |e_1|^2 |e_2|^2 \cos^2(\alpha) \\ &= |e_1|^2 |e_2|^2 \sin^2(\alpha), \end{aligned}$$

y la afirmación se desprende de que  $\alpha \in [0, \pi]$  y, por tanto,  $\sin(\alpha) \geq 0$ .

**E.2.41.** Con las notaciones del ejemplo anterior, comprobar que  $|e_2|\text{sen}(\alpha)$  es la longitud del vector  $e'' = e_2 - \pi_{e_1}(e_2)$ , donde  $\pi_{e_1}$  denota la proyección ortogonal sobre  $\langle e_1 \rangle$ . Es decir,  $V(e_1, e_2) = |e''||e_1| = |e''|V(e_1)$ .

La interpretación del ejemplo 2.21 que nos proporciona el ejercicio E.2.41 se generaliza, como lo muestra la proposición que sigue, para todo  $r$ .

**2.22 Proposición.** Sean  $r$  un entero tal que  $1 \leq r < n$  y  $e_1, \dots, e_r, e$  vectores arbitrarios de  $V$ . Pongamos  $e = e' + e''$ , donde  $e' \in \langle e_1, \dots, e_r \rangle$  y  $e'' \in \langle e_1, \dots, e_r \rangle^\perp$ . Entonces,  $V(e_1, \dots, e_r, e) = |e''|V(e_1, \dots, e_r)$ . En particular,  $V(e_1, \dots, e_r, e) = |e|V(e_1, \dots, e_r)$  si  $e$  es ortogonal a los vectores  $e_1, \dots, e_r$  (figura 2.5).

**Demostración:** En efecto, si ponemos  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ , se comprueba inmediatamente que la matriz de productos escalares  $(\mathbf{e}, \mathbf{e})^T \cdot (\mathbf{e}, \mathbf{e})$  tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} & \mathbf{e}^T \cdot e' \\ e' \cdot \mathbf{e} & |e'|^2 + |e''|^2 \end{pmatrix}$$

Ahora el determinante de esta matriz es igual a

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} & \mathbf{e}^T \cdot e' \\ e' \cdot \mathbf{e} & |e'|^2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} & 0 \\ v \cdot \mathbf{e} & |e''|^2 \end{pmatrix}$$

Pero el primer determinante es nulo, ya que es igual a  $V(e_1, \dots, e_r, e')^2$  y los vectores  $e_1, \dots, e_r, e'$  son linealmente dependientes, y el segundo determinante es igual a  $|e''|^2 V(\mathbf{e})^2$ . La fórmula enunciada resulta de que el determinante de  $(\mathbf{e}, \mathbf{e})^T \cdot (\mathbf{e}, \mathbf{e})$  es igual a  $V(\mathbf{e}, \mathbf{e})^2$ .  $\square$

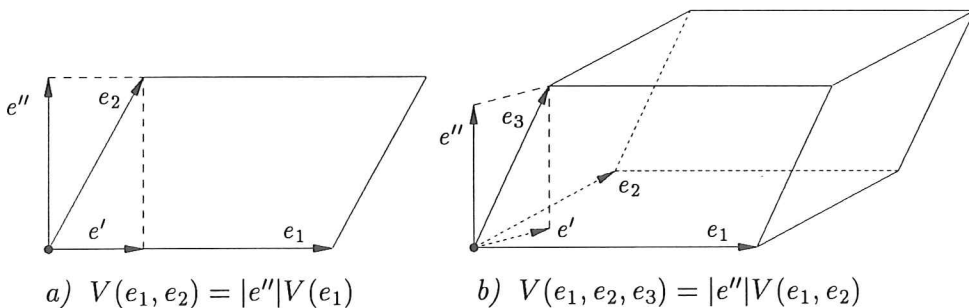


Figura 2.5: Área de un paralelogramo y volumen de un paralelepípedo

**E.2.42.** Usar inducción para ver que, si  $e_1, \dots, e_r$  son dos a dos ortogonales, entonces

$$V(e_1, \dots, e_r) = |e_1| \cdots |e_r|$$

**E.2.43.** Sea  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ ,  $e_i \in V$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Sea  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  una base arbitraria de  $V$ ,  $G = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u}$  (matriz de la métrica respecto a la base  $\mathbf{u}$ ) y  $M$  la matriz de  $\mathbf{e}$  respecto a la base  $\mathbf{u}$  ( $M$  es la matriz tal que  $\mathbf{e} = \mathbf{u}M$ ). Entonces,  $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = M^T G M$  y, por tanto,  $V(\mathbf{e}) = \sqrt{\det(M^T G M)}$ . Si la base  $\mathbf{u}$  es ortonormal, entonces  $G = I_n$ , y nos queda  $V(\mathbf{e}) = \sqrt{\det(M^T M)}$ . Si además  $r = n$ , entonces  $\det(M^T M) = \det(M)^2$  y  $V(\mathbf{e}) = |\det(M)|$ , en concordancia con la definición de  $V(\mathbf{e})$  (cuando  $r = n$ ).

### Volumen geométrico

Si  $P_0, P_1, \dots, P_r$  son puntos, pondremos  $V(P_0, P_1, \dots, P_r) = V(P_1 - P_0, \dots, P_r - P_0)$ .

**E.2.44.** Comprobar que  $V(P_0 + v, \dots, P_r + v) = V(P_0, \dots, P_r)$ , para cualquier vector  $v$ .

Para  $r = 1$  tenemos que  $V(P_0, P_1) = d(P_0, P_1)$ . Para  $r \geq 2$ , la clave para interpretar  $V(P_0, \dots, P_r)$  como un «volumen geométrico» es la proposición que sigue.

**2.23 Proposición.** Sean  $P_0, P_1, \dots, P_r$  puntos,  $2 \leq r \leq n$ . Pongamos  $L = P_0 \cdots P_{r-1}$  y  $h = d(P_r, L)$ . Entonces

$$V(P_0, P_1, \dots, P_r) = h \cdot V(P_0, P_1, \dots, P_{r-1}) \quad [2.27]$$

**Demostración:** Pongamos  $e_i = P_i - P_0$  ( $1 \leq i \leq r$ ). Entonces

$$V(P_0, P_1, \dots, P_r) = V(e_1, \dots, e_r) \quad \text{y} \quad V(P_0, P_1, \dots, P_{r-1}) = V(e_1, \dots, e_{r-1})$$

Por otro lado, con las notaciones de la proposición 2.22, tenemos

$$V(e_1, \dots, e_r) = |e''| V(e_1, \dots, e_{r-1})$$

donde  $e' \in \langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$  es la proyección ortogonal de  $e_r = P_r - P_0$  sobre  $\langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$  y donde  $e'' = e_r - e'$ . Así pues, es suficiente ver que  $|e''| = h$ . Ahora bien,  $P'_r = P_0 + e'$  es la proyección ortogonal de  $P_r$  sobre  $L$  y

$$h = d(P_r, L) = d(P_r, P'_r) = |P_r - P'_r| = |(P_r - P_0) - (P'_r - P_0)| = |e_r - e'| = |e''|$$

como queríamos demostrar.  $\square$

Señalemos que la proposición 2.23 puede ser utilizada para calcular la distancia de un punto  $Q$  a una variedad  $L$ : Si  $\dim(L) = r$  y  $P_0, P_1, \dots, P_r$  son puntos independientes de  $L$ , entonces

$$d(Q, L) = V(P_0, P_1, \dots, P_r, Q) / V(P_0, P_1, \dots, P_r) \quad [2.27']$$

**Ejemplo.** Sea  $L$  una recta de  $\mathbb{A}^3$  y  $Q$  un punto. Para aplicar la fórmula [2.27] al cálculo de la distancia  $d = d(Q, L)$ , sean  $P$  y  $v$  un punto y un vector director de  $L$  y pongamos  $P_0 = P$ ,  $P_1 = P + v$ . Sea  $w = Q - P$ . Entonces,  $d = V(P_0, P_1, Q)/V(P_0, P_1)$ ,  $V(P_0, P_1)^2 = |P_1 - P_0|^2 = |v|^2$  y  $V(P_0, P_1, Q)^2 = V(v, w)^2 = |v|^2|w|^2 - (v \cdot w)^2$ , igualdades de las cuales se sigue que  $d^2 = |w|^2 - (v \cdot w)^2/|v|^2$ , es decir,

$$d = \sqrt{|w|^2 - |\pi_v(w)|^2}$$

### Volumen de paralelepípedos y símplices

Dados los puntos  $P_0, \dots, P_r$ , diremos que el conjunto

$$[P_0, \dots, P_r] = \{X \in \mathbb{A}^3 \mid X = P_0 + \sum \lambda_i(P_i - P_0), 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

es el *paralelepípedo* determinado por  $P_0, \dots, P_r$ . Observemos que  $[P_0] = \{P_0\}$ , que  $[P_0, P_1]$  es el segmento de extremos  $P_0$  y  $P_1$  y que  $[P_0, P_1, P_2]$  es el *paralelogramo* determinado por  $P_0, P_1$  y  $P_2$ . Análogamente, al conjunto

$$\Delta[P_0, \dots, P_r] = \{X \in \mathbb{A}^3 \mid X = P_0 + \sum \lambda_i(P_i - P_0), \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i \leq 1\}$$

se le llama *símplice*, o  $r$ -símplice, de vértices  $P_0, \dots, P_r$ . Notemos que  $\Delta[P_0, P_1] = [P_0, P_1]$  y que  $\Delta[P_0, P_1, P_2]$  es la «superficie triangular» determinada por el triángulo  $P_0P_1P_2$ . Los 3-símplices se denominan *tetraedros*.

Dado un paralelepípedo  $[P_0, \dots, P_r]$ , se dice que el paralelepípedo  $[P_0, \dots, P_{r-1}]$  es la *base* de  $[P_0, \dots, P_r]$ . La distancia de  $P_r$  a la variedad lineal  $P_0 \cdots P_{r-1}$  se dice que es la *altura* de  $[P_0, \dots, P_r]$ . Análogamente, se dice que el símplice  $\Delta[P_0, \dots, P_{r-1}]$  es la base de  $\Delta[P_0, \dots, P_r]$ , y la altura de  $\Delta[P_0, \dots, P_r]$  se define igual que en el caso del paralelepípedo.

Volvamos a la interpretación de 2.23. Para  $r = 1$ ,  $V(P_0, P_1) = d(P_0, P_1)$ , que es la *longitud* del segmento  $[P_0, P_1]$ . Para  $r = 2$ ,  $V(P_0, P_1, P_2) = d(P_0, P_1) \cdot d(P_2, P_0P_1)$ , que es el producto de la longitud de la base del paralelogramo  $[P_0, P_1, P_2]$  por su altura. Por tanto,  $V(P_0, P_1, P_2)$  es el *área* del paralelogramo  $[P_0, P_1, P_2]$  (v. figura 2.5.a). Para  $r = 3$ , la relación

$$V(P_0, P_1, P_2, P_3) = V(P_0, P_1, P_2)d(P_3, P_0P_1P_2)$$

nos muestra que  $V(P_0, P_1, P_2, P_3)$  es el producto del área de la base del paralelepípedo  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$  por su altura y, por tanto, vemos que  $V(P_0, P_1, P_2, P_3)$  no es más que el volumen de  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$  (v. figura 2.5.b).

**E.2.45.** Demostrar que si  $i_0, i_1, \dots, i_r$  es una permutación de  $0, 1, \dots, r$ , entonces

$$V(P_0, P_1, \dots, P_r) = V(P_{i_0}, P_{i_1}, \dots, P_{i_r})$$

La proposición 2.23 nos da un criterio suficiente (inductivo) para saber cuando dos paralelepípedos  $[P_0, P_1, \dots, P_r]$  y  $[Q_0, Q_1, \dots, Q_r]$  tienen el mismo volumen: es suficiente que tengan igual altura y que sus bases tengan el mismo volumen. El ejercicio anterior nos muestra que dos paralelepípedos tienen el mismo volumen si cumplen la condición anterior para alguna permutación de sus vértices. En tal caso diremos que los paralelepípedos tienen el mismo volumen por el criterio «base por altura». Este criterio lo extendemos a los símlices.

Naturalmente, el área del triángulo  $\Delta[P_0, P_1, P_2]$  se define por  $\frac{1}{2}V(P_0, P_1, P_2)$ , ya que (v. figura 2.6.a) el paralelogramo  $[P_0, P_1, P_2]$  se descompone como la unión de dos triángulos que tienen la misma área (por el criterio base por altura):  $\Delta[P_0, P_1, P_2]$  y  $\Delta[P_1, P_2, P_3]$ , donde  $P_3 = P_0 + (P_1 - P_0) + (P_2 - P_0)$ . Análogamente, el volumen del tetraedro  $\Delta[P_0, P_1, P_2, P_3]$  (v. figura 2.6.b) se define como  $\frac{1}{6}V(P_0, P_1, P_2, P_3)$ , ya que existe una descomposición del paralelepípedo  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$  en seis tetraedros de igual volumen análoga a la descomposición en dos triángulos del caso del paralelogramo. La idea básica de este hecho se puede comprender con la figura 2.6.b, donde se muestra cómo el paralelepípedo  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$  se descompone en dos prismas triangulares de igual base y altura (correspondientes a la descomposición de cada uno de los paralelogramos  $[P_0, P_1, P_2]$  y  $[P_3, P_4, P_5]$  en dos triángulos de igual área) y también cómo el prisma dibujado con líneas más gruesas se descompone como unión de los tetraedros  $\Delta[P_0, P_1, P_2, P_3]$ ,  $\Delta[P_1, P_2, P_3, P_4]$  y  $\Delta[P_2, P_3, P_4, P_5]$ , los cuales tienen el mismo volumen, como es fácil de ver por el criterio base por altura. Estas consideraciones se pueden generalizar para un  $r$  arbitrario: se obtiene que el volumen de un  $r$ -símlice es el volumen del correspondiente paralelepípedo dividido por  $r!$ .

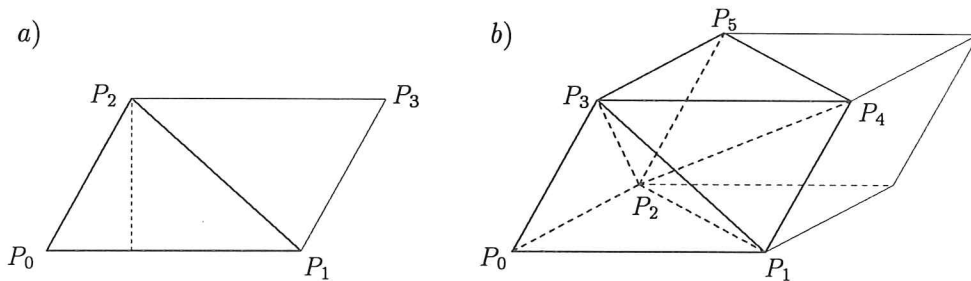


Figura 2.6: Área de un triángulo y volumen de un tetraedro

**E.2.46.** Si en una referencia rectangular los vértices  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  de un triángulo tienen coordenadas  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  y  $P_3 = (x_3, y_3)$ , probar que el área del triángulo es

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

## Aplicaciones

En este apartado ilustraremos algunas de las ideas que hemos estudiado para establecer dos puntos que hasta el momento no hemos podido considerar: la noción de ángulo en un plano orientado (ángulos orientados) y un criterio para decidir, a partir de la matriz de una forma bilineal simétrica, si esta es definida positiva o no.

### Ángulos orientados

Supongamos que  $V$  tiene dimensión 2 y que  $o$  es una orientación de  $V$ . Dados dos vectores no nulos  $u$  y  $v$  de  $V$ , definimos  $\alpha_o = \alpha_o(v, w) \in [0, 2\pi)$  de la forma siguiente (v. figura 2.7):

$$\alpha_o(v, w) = \begin{cases} \alpha(v, w) & \text{si } V_o(v, w) \geq 0 \\ 2\pi - \alpha(v, w) & \text{si } V_o(v, w) < 0 \end{cases} \quad [2.28]$$

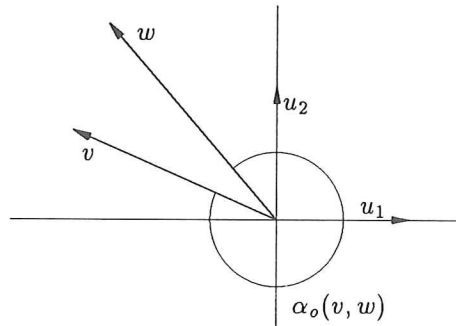


Figura 2.7: Ángulo orientado

Observemos que si  $V_o(v, w) \neq 0$ , entonces  $v$  y  $w$  son linealmente independientes y, por tanto,  $\alpha(v, w) \in (0, \pi)$ , con lo cual vemos que  $\alpha_o(v, w) \in (\pi, 2\pi)$  si  $V_o(v, w) < 0$ . Diremos que  $\alpha_o(v, w)$  es el *ángulo entre  $v$  y  $w$  relativo a la orientación  $o$* . Si  $o$  se puede sobreentender, diremos simplemente que es el *ángulo orientado* entre  $v$  y  $w$ . En todo caso,

$$\cos(\alpha_o) = \cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{|v||w|} \quad [2.28']$$

(con  $\alpha = \alpha(v, w)$ ). En lo referente a  $\sin(\alpha_o)$ , en el ejemplo 2.21 hemos visto que  $V(v, w) = |v||w|\sin(\alpha)$ , de donde resulta que

$$V_o(v, w) = |v||w|\sin(\alpha_o) \quad [2.28'']$$

ya que  $V_o(v, w)$  y  $\sin(\alpha_o)$  tienen el mismo signo. Recíprocamente, esta igualdad y  $\cos(\alpha_o) = \frac{v \cdot w}{|v||w|}$  determinan unívocamente  $\alpha_o$ .

### Criterio de positividad

**2.24 Proposición.** Sean  $V$  un espacio real de dimensión finita  $n$  y  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación bilineal simétrica. Sea  $G = (g_{ij})$  la matriz de  $g$  respecto a una base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$  y pongamos  $d_k = \det(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Entonces,  $g$  es definida positiva si y solo si  $d_k > 0$  para todo  $k$ .

**Demostración:** Veamos primero que la condición es necesaria. Si  $g$  es definida positiva, la teoría del volumen que hemos desarrollado es válida para  $g$  y, por consiguiente,  $d_k = V(e_1, \dots, e_k)^2 > 0$  para todo  $k = 1, \dots, n$ .

Para ver la suficiencia de la condición, razonaremos por inducción respecto a  $n$ . Si  $n = 1$ , entonces está claro que la condición  $d_1 = g_{11} > 0$  equivale a decir que  $g$  es definida positiva. Supongamos, pues, que  $n > 1$  y que tenemos la proposición demostrada por inducción para espacios de dimensión  $n - 1$ . Pongamos  $V' = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ . Entonces la matriz  $G'$  de la restricción de  $g$  a  $V'$ , respecto a la base  $e_1, \dots, e_{n-1}$ , se obtiene de  $G$  omitiendo la última fila y la última columna. Como  $d_1, \dots, d_{n-1}$  son positivos, por recurrencia podemos suponer que  $g(v', v') > 0$ , para todo  $v' \in V'$  no nulo.

Consideremos ahora un vector no nulo  $\bar{e}_n \in V'^{\perp}$  (notemos que  $\dim(V'^{\perp}) = n - (n - 1) = 1$ , por el teorema 2.9). Entonces  $e_1, \dots, e_{n-1}, \bar{e}_n$  es una base de  $V$  y, por construcción, la matriz de  $g$  respecto a esta base es  $\bar{G} = \begin{pmatrix} G' & 0 \\ 0 & \bar{g}_{nn} \end{pmatrix}$ , donde  $\bar{g}_{nn} = g(\bar{e}_n, \bar{e}_n)$ . En vista de que  $\bar{G} = A^T G A$  (siendo  $A$  la matriz de la base nueva respecto a la antigua), y que  $\det(G') = d_{n-1}$  y  $\det(G) = d_n$ , tomando determinantes obtenemos que  $d_{n-1} \bar{g}_{nn} = a^2 d_n$ , donde  $a = \det(A)$ . Esta relación y la positividad de  $d_{n-1}$  y  $d_n$  nos muestran que  $\bar{g}_{nn} > 0$ .

Sea ahora  $v$  un vector no nulo de  $V$ . Pongamos  $v = v' + \lambda \bar{e}_n$ , donde  $v' \in V'$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $g(v, v) = g(v', v') + \lambda^2 \bar{g}_{nn} > 0$ , ya que  $g(v', v') \geq 0$ ,  $\lambda^2 \bar{g}_{nn} \geq 0$  y una de las dos expresiones es no nula (de otro modo sería  $v = 0$ ).  $\square$

## 2.4 Producto vectorial

Esta sección la destinamos al estudio del producto vectorial en un espacio vectorial euclidiano  $V$  de dimensión  $n \geq 1$ . Todos los resultados los particularizamos para  $n = 3$ , ya que este es el caso más importante, especialmente para las aplicaciones. También incluimos una introducción al cuerpo de los cuaterniones, la cual nos permite poner de relieve algunas de las relaciones fundamentales de estos objetos con la geometría euclidiana de dimensión 3.

### Definiciones y propiedades generales

Empecemos por establecer un resultado auxiliar de álgebra lineal.

**2.25 Lema.** Si  $\xi: V \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación lineal, entonces existe un único vector  $v = v_\xi \in V$  tal que  $\xi(x) = v \cdot x$  para todo  $x \in V$ .

**Demostración:** Si  $v \in V$ , definimos la aplicación  $\hat{v}: V \rightarrow \mathbb{R}$  por la fórmula  $\hat{v}(x) = v \cdot x$ . La aplicación  $\hat{v}$  es lineal, ya que el producto escalar es bilineal y, por tanto,  $\hat{v} \in V^*$  (el espacio dual de  $V$ ). Consideremos ahora la aplicación  $V \rightarrow V^*$  tal que  $v \mapsto \hat{v}$ . Esta aplicación es lineal, de nuevo porque el producto escalar es bilineal  $[\diamond]$ . Además, es una aplicación inyectiva, ya que si  $\hat{v} = 0$  entonces tenemos, en particular,  $0 = \hat{v}(v) = v \cdot v = |v|^2$  y, por tanto,  $v = 0$ . Como  $V$  y  $V^*$  tienen la misma dimensión, la aplicación  $V \rightarrow V^*$  es un isomorfismo. De este modo tenemos, dado  $\xi \in V^*$ , que existe un único  $v \in V$  tal que  $\hat{v} = \xi$ , y esto termina la demostración.  $\square$

Fijemos una orientación  $o$  de  $V$ . Dados los vectores  $e_1, \dots, e_{n-1}$ , la aplicación  $V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$x \mapsto V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, x)$$

es lineal (E.2.39). Así pues, por el lema 2.25, existe un único vector  $v$  tal que

$$v \cdot x = V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, x) \quad [2.29]$$

Diremos que  $v$  es el producto vectorial de  $e_1, \dots, e_{n-1}$  respecto a  $o$ , y pondremos

$$\wedge_o(e_1, \dots, e_{n-1}) \quad o \quad e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-1}$$

para denotarlo. Nos referiremos a [2.29] como la *fórmula del producto mixto*. Para  $n = 3$ , esta se escribe

$$(e_1 \wedge_o e_2) \cdot x = V_o(e_1, e_2, x) \quad [2.29']$$

**E.2.47.** Verificar que la aplicación  $\wedge_o: V^{n-1} \rightarrow V$  es multilineal alternada (útese E.2.39 y la fórmula del producto mixto).

**E.2.48.** Comprobar que  $\wedge_{\bar{o}} = -\wedge_o$  (útese E.2.40).

**2.26 Proposición** (propiedades del producto vectorial). Sean  $e_1, \dots, e_{n-1}$  vectores y pongamos  $v = \wedge_o(e_1, \dots, e_{n-1})$ . Entonces:

- 1) El producto vectorial  $v$  es no nulo si y solo si  $e_1, \dots, e_{n-1}$  son linealmente independientes.
- 2) El vector  $v$  es perpendicular a todos sus factores  $e_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ).

3) Si  $e_1, \dots, e_{n-1}$  son linealmente independientes, entonces

$$V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, v) = V(e_1, \dots, e_{n-1}, v) = |v|^2 > 0$$

y, por tanto,  $e_1, \dots, e_{n-1}, v$  es una base  $o$ -orientada de  $V$ .

4) La norma de  $v$  es igual a  $V(e_1, \dots, e_{n-1})$ , es decir,

$$|\wedge_o(e_1, \dots, e_{n-1})| = V(e_1, \dots, e_{n-1})$$

**Demostración:** El hecho de que el producto vectorial sea una aplicación multilineal alternada implica que  $v = 0$  si  $e_1, \dots, e_{n-1}$  son linealmente dependientes. Por otro lado, si  $e_1, \dots, e_{n-1}$  son linealmente independientes y  $e_n$  es cualquier vector linealmente independiente de ellos ( $e_n$  existe ya que  $\dim(V) = n$ ), entonces  $V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n) \neq 0$ , y por la fórmula del producto mixto tendremos  $v \neq 0$ . Esto demuestra 1.

La fórmula del producto mixto nos da  $v \cdot e_i = V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, e_i)$ . Puesto que en la última expresión el valor de la variable  $n$ -ésima,  $e_i$ , coincide con el valor de la variable  $i$ -ésima, y como  $V_o$  es una aplicación multilineal alternada, obtenemos que  $v \cdot e_i = 0$ . Esto demuestra 2.

Ahora tenemos

$$|v|^2 = v \cdot v = V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, v) \quad [*]$$

de nuevo por la fórmula del producto mixto. Dado que  $|v|^2 \geq 0$ ,  $V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, v) = V(e_1, \dots, e_{n-1}, v)$ . La proposición 2.22, y el hecho de que  $v$  sea perpendicular a todos sus factores, implican que

$$V(e_1, \dots, e_{n-1}, v) = |v|V(e_1, \dots, e_{n-1})$$

Por tanto,

$$|v|^2 = |v|V(e_1, \dots, e_{n-1}) \quad [**]$$

Supongamos ahora que  $e_1, \dots, e_{n-1}$  son linealmente independientes. Puesto que por 1 sabemos que  $v \neq 0$ ,  $[**]$  nos da 4 y  $[*]$  nos da 3.  $\square$

Para  $n = 3$ , el producto vectorial  $v = e_1 \wedge_o e_2$  es un vector perpendicular a  $e_1$  y  $e_2$ , su módulo es  $|v| = V(e_1, e_2) = |e_1||e_2|\sin(\alpha)$ , donde  $\alpha = \alpha(e_1, e_2)$ , y  $e_1, e_2, v$  es una base  $o$ -orientada (v. figura 2.8).

### Cálculo efectivo

En lo referente al cálculo efectivo del producto vectorial, podemos utilizar el resultado siguiente.

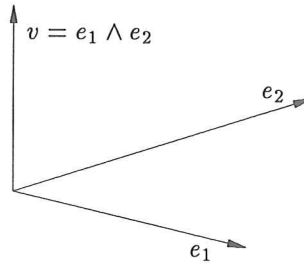


Figura 2.8: Producto vectorial

**2.27 Proposición.** Sean  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  una base cualquiera de  $V$  y la orientación definida por  $\mathbf{u}$ . Entonces

$$\wedge_o(e_1, \dots, e_{n-1}) = \frac{1}{V(\mathbf{u})} \det(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e} \mid \mathbf{u}^T) \quad [2.30]$$

donde  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ .

Si, además, la base  $\mathbf{u}$  es ortonormal, entonces  $V(\mathbf{u}) = 1$ ,  $M = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e}$  es la matriz  $n \times (n-1)$  de los vectores  $\mathbf{e}$  respecto a la base  $\mathbf{u}$  y

$$\wedge_o(e_1, \dots, e_{n-1}) = \det(M \mid \mathbf{u}^T) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \det_i(M) u_i \quad [2.30']$$

donde denotamos  $\det_i(M)$  el determinante de la matriz  $(n-1) \times (n-1)$  que resulta de suprimir la  $i$ -ésima fila de  $M$ .

**Demostración:** Demostremos primero las afirmaciones de la segunda parte. Supongamos que la base  $\mathbf{u}$  es ortonormal y pongamos  $v = \wedge_o(e_1, \dots, e_{n-1})$ . Por [2.15'], podemos escribir  $v = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot v) u_i$ . Ahora la fórmula del producto mixto nos da  $u_i \cdot v = V_o(\mathbf{e}, u_i)$ . Como  $\mathbf{u}$  es  $o$ -orientada,  $V_o(\mathbf{e}, u_i)$  coincide con el determinante de la matriz  $M'$  de los vectores  $e_1, \dots, e_{n-1}, u_i$  en la base  $u_1, \dots, u_n$ . Pero si  $M$  es la matriz de  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-1})$  respecto a  $\mathbf{u}$  y  $\delta_i \in \mathbb{R}^n$  es el vector fila tal que  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\delta_{ii} = 1$ , entonces  $M' = (M \mid \delta_i^T)$ . Desarrollando  $\det(M')$  por la última columna, está claro que  $\det(M') = (-1)^{n+i} \det_i(M)$ . Por tanto,  $u_i \cdot v = (-1)^{n+i} \det_i(M)$  y  $v = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \det_i(M) u_i$ . Finalmente, notemos que  $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e} = M$ , ya que la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e}$  es

$$(u_1 \cdot e_j, \dots, u_n \cdot e_j)^T$$

es decir, el vector de los componentes de  $e_j$  respecto a la base  $\mathbf{u}$ .

Sea ahora  $\mathbf{u}$  una base arbitraria. Escojamos una base ortonormal  $\mathbf{u}'$  con la misma orientación que  $\mathbf{u}$  (por ejemplo, podemos tomar como  $\mathbf{u}'$  el resultado de aplicar el

proceso de Gram–Schmidt a  $\mathbf{u}$ ). Sea  $A$  la matriz de  $\mathbf{u}$  respecto a  $\mathbf{u}'$ , es decir,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'A$ . Entonces,

$$(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e} \mid \mathbf{u}^T) = (A^T \mathbf{u}'^T \cdot \mathbf{e} \mid A^T \mathbf{u}'^T) = A^T (\mathbf{u}'^T \cdot \mathbf{e} \mid \mathbf{u}'^T)$$

y, por tanto,

$$\det(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e} \mid \mathbf{u}^T) = \det(A^T) \det(\mathbf{u}'^T \cdot \mathbf{e} \mid \mathbf{u}'^T)$$

Ahora  $\det(A^T) = \det(A) = V_o(\mathbf{u}) = V(\mathbf{u})$ , ya que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{u}'$  tienen la misma orientación y, por tanto,  $V_o(\mathbf{u}) > 0$ , y  $\det(\mathbf{u}'^T \cdot \mathbf{e} \mid \mathbf{u}'^T) = v$ , por la fórmula [2.30'] ya demostrada. De esto resulta que

$$\det(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e} \mid \mathbf{u}^T) = V(\mathbf{u})v$$

y así  $v = \wedge_o(e_1, \dots, e_{n-1})$  coincide efectivamente con la expresión [2.30].  $\square$

**2.28 Nota.** En la fórmula [2.30] hemos dispuesto la base  $\mathbf{u}$  en la última columna del determinante. En caso de ponerla como primera columna, introducimos  $n - 1$  cambios de signo y, por tanto, el producto vectorial también se puede calcular por la fórmula

$$\wedge_o(e_1, \dots, e_{n-1}) = \frac{(-1)^{n-1}}{V(\mathbf{u})} \det(\mathbf{u}^T \mid \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e})$$

Así pues, para  $n = 3$  es indiferente si  $\mathbf{u}^T$  se dispone en la última columna o en la primera. Por otro lado, trasponiendo el último determinante también podemos escribir

$$\wedge_o(e_1, \dots, e_{n-1}) = \frac{(-1)^{n-1}}{V(\mathbf{u})} \det \left( \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{u} \end{array} \right)$$

**Ejemplo.** Si  $V$  tiene dimensión 2 y  $o$  es la orientación de una base ortonormal  $u_1, u_2$ , entonces

$$\wedge_o(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & u_1 \\ \lambda_2 & u_2 \end{vmatrix} = -\lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2 \quad [2.31]$$

El vector  $v' = -\lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2$  es el vector perpendicular a  $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$  tal que  $|v'| = |v|$  y de forma que  $v, v'$  es una base  $o$ -orientada.

**Ejemplo.** Supongamos que  $n = 3$  y sea  $o$  la orientación definida por una base ortonormal  $u_1, u_2, u_3$ .

Si  $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$  y  $w = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3$ , entonces

$$v \wedge_o w = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & u_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & u_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & u_3 \end{vmatrix} = d_{23} u_1 + d_{31} u_2 + d_{12} u_3 \quad [2.32]$$

donde  $d_{ij} = \lambda_i \mu_j - \lambda_j \mu_i$ .

El determinante anterior coincide (v. nota 2.28) con

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} \quad [2.32']$$

que es la expresión que ordinariamente se da del producto vectorial en este caso (cf. fórmula [2.41]).

**E.2.49.** Si  $\mathbf{u}$  es una base ortonormal y  $o$  es la orientación definida para  $\mathbf{u}$ , probar que

$$\wedge_o(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) = (-1)^{n-i} u_i.$$

Observemos que, con las notaciones de 2.27, la  $i$ -ésima fila de la matriz  $M$  de los vectores

$$u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$$

respecto a la base  $\mathbf{u}$  es nula, con lo cual  $\det_j(M) = 0$  para todo  $j \neq i$ , y  $\det_i(M) = \det(I_{n-1}) = 1$ , ya que la matriz que resulta de suprimir la  $i$ -ésima fila de  $M$  es  $I_{n-1}$ .

En el caso particular  $n = 3$ , obtenemos que

$$u_1 \wedge_o u_2 = u_3, \quad u_2 \wedge_o u_3 = u_1, \quad u_3 \wedge_o u_1 = u_2$$

**2.29 Proposición** (Producto vectorial doble). *Si  $e_1, \dots, e_{n-2}$  y  $v_1, \dots, v_{n-1}$  son vectores cualesquiera, entonces*

$$e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} \wedge_o (v_1 \wedge_o \dots \wedge_o v_{n-1}) = -\det(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} \mid \mathbf{v}^T) \quad [2.33]$$

donde  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-2})$  y  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n-1})$ .

**Demostración:** En efecto, puesto que los dos miembros de la igualdad son nulos si  $v_1, \dots, v_{n-1}$  son linealmente dependientes [ $\diamond$ ], podemos suponer que  $v_1, \dots, v_{n-1}$  son linealmente independientes. Si este es el caso, y  $v = \wedge_o(v_1, \dots, v_{n-1})$ , entonces  $(\mathbf{v}, v)$  es una base  $o$ -orientada de  $V$  y  $V(\mathbf{v}, v) = v \cdot v = |v|^2$  (proposición 2.26.3). Podemos utilizar, pues, la base  $(\mathbf{v}, v)$  para evaluar el producto vectorial  $e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} \wedge_o v$  mediante la fórmula [2.30]. Tenemos  $(\mathbf{v}, v)^T \cdot (\mathbf{e}, v) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} & \mathbf{0} \\ v \cdot \mathbf{e} & v \cdot v \end{pmatrix}$ , ya que  $\mathbf{v}^T \cdot v = 0$  por 2.26.2, con lo cual el resultado es

$$\frac{1}{|v|^2} \begin{vmatrix} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} & \mathbf{0} & \mathbf{v}^T \\ v \cdot \mathbf{e} & v \cdot v & v \end{vmatrix} = \frac{1}{|v|^2} (-1)^{2n-1} (v \cdot v) \det(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} \mid \mathbf{v}^T) = -\det(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} \mid \mathbf{v}^T)$$

como se trataba de demostrar. □

Notemos que por el carácter alternado del producto vectorial tenemos

$$v \wedge_o e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} = (-1)^n e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} \wedge_o v$$

(tengamos en cuenta que  $(-1)^{n-2} = (-1)^n$ ). Por tanto,

$$v \wedge_o e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} = (-1)^{n+1} \det(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} \mid \mathbf{v}^T) = -\det(\mathbf{v}^T \mid \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e}) \quad [2.33']$$

La fórmula [2.33] implica que  $e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} \wedge_o v$  es una combinación lineal de  $v_1, \dots, v_{n-1}$ . Este hecho era de esperar, ya que el producto vectorial 2.33 pertenece a  $\langle v \rangle^\perp$  y  $\langle v \rangle^\perp = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$  si  $v \neq 0$  [ $\diamond$ ].

**Ejemplo.** Si  $n = 3$ , entonces [2.33] nos da (poniendo  $u, v, w$  en lugar de  $e_1, v_1, v_2$ )

$$u \wedge_o (v \wedge_o w) = - \begin{vmatrix} v \cdot u & v \\ w \cdot u & w \end{vmatrix} = (w \cdot u)v - (v \cdot u)w. \quad [2.33'']$$

**E.2.50.** Para  $n = 2$ , comprobar que la fórmula [2.33] nos da que  $\wedge_o(\wedge_o(v)) = -v$ . Esta igualdad es, por otro lado, una consecuencia directa de [2.31].

**2.30 Proposición** (Producto escalar de dos productos vectoriales). *Supongamos que  $e_1, \dots, e_{n-1}, e'_1, \dots, e'_{n-1} \in V$  y pongamos  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-1})$  y  $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_{n-1})$ . Entonces*

$$(e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-1}) \cdot (e'_1 \wedge_o \dots \wedge_o e'_{n-1}) = \det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}') \quad [2.34]$$

**Demostración:** En efecto, es inmediato comprobar, por las propiedades de los determinantes, que los dos miembros de la igualdad son nulos si  $e_1, \dots, e_{n-1}$  son linealmente dependientes [ $\diamond$ ]. Supongamos, pues, que  $e_1, \dots, e_{n-1}$  son linealmente independientes. Si este es el caso, poniendo  $v = e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-1}$  tenemos que  $(\mathbf{e}, v)$  es una base  $o$ -orientada de  $V$  con  $V(\mathbf{e}, v) = |v|^2$ . Por la fórmula 2.30 tenemos, si  $v' = e'_1 \wedge_o \dots \wedge_o e'_{n-1}$ , que

$$v' = \frac{1}{|v|^2} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}' & \mathbf{e}^T \cdot v \\ v \cdot \mathbf{e}' & v \cdot v \end{pmatrix}$$

De esta fórmula resulta, por la bilinealidad del producto escalar y las propiedades de los determinantes, que

$$v \cdot v' = \frac{1}{|v|^2} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}' & \mathbf{e}^T \cdot v \\ v \cdot \mathbf{e}' & v \cdot v \end{pmatrix} = \det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}')$$

ya que  $\mathbf{e}^T \cdot v = 0$  (por 2.26.2) y  $v \cdot v = |v|^2$ .  $\square$

La fórmula [2.34] generaliza la proposición 2.26.4, ya que si  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}$  entonces  $v \cdot v' = v \cdot v = |v|^2$ , por definición de  $|v|$ , y  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = V(\mathbf{e})^2 = |v|^2$ , por la fórmula [2.26] y la proposición 2.26.4.

**Ejemplo.** Si  $n = 3$ , la fórmula [2.34] se escribe

$$(v \wedge_o w) \cdot (v' \wedge_o w') = \begin{vmatrix} v \cdot v' & v \cdot w' \\ w \cdot v' & w \cdot w' \end{vmatrix} \quad [2.34']$$

**E.2.51.** Usar la fórmula [2.22], que da la distancia entre dos rectas del espacio euclidiano ordinario, para mostrar que si  $v$  y  $v'$  son vectores linealmente independientes, entonces

$$d(P + \langle v \rangle, P' + \langle v' \rangle) = V(P' - P, v, v') / |v \wedge v'|$$

donde la orientación usada para definir  $v \wedge v'$  es arbitraria.

## Cuaternios

En este apartado exponemos una introducción al cuerpo de los cuaternios de Hamilton, con el objeto de estudiar sus relaciones fundamentales con la geometría métrica del espacio euclidiano ordinario. Los cuaternios son también importantes en física, especialmente en física cuántica.

### El cuerpo $\mathbb{H}$

Consideremos el conjunto  $\mathbb{H} \subset M_2(\mathbb{C})$  formado por las matrices

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \quad z, w \in \mathbb{C}$$

Si ponemos  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ), entonces

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + bi + cj + dk \quad [2.35]$$

donde ponemos

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad [2.36]$$

Está claro que  $\{\mathbf{1}, i, j, k\}$  forman una base de  $\mathbb{H}$  como espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , y la expresión  $\mathbf{q} = a\mathbf{1} + bi + cj + dk$  explica el origen del nombre «cuaternio».

Se comprueba que  $\mathbb{H}$  es cerrado con la suma y el producto de matrices y que  $\mathbf{1}$  es el elemento neutro del producto. También es fácil verificar que

$$i^2 = j^2 = k^2 = -\mathbf{1}, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i \quad \text{y} \quad ki = -ik = j \quad [2.37]$$

que son las *relaciones de Hamilton*. En particular, resulta que el producto de  $\mathbb{H}$  no es conmutativo.

Observemos, además, que si

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H},$$

entonces  $\det(\mathbf{q}) = z\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + |w|^2 \geq 0$  y  $\det(\mathbf{q}) = 0$  si y solo si  $\mathbf{q} = 0$ . Por tanto, si  $\mathbf{q} \neq 0$ ,  $\mathbf{q}$  es invertible en  $\mathbb{H}$  y su inverso es

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{q})} \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \quad [2.38]$$

Resulta así que  $\mathbb{H}$  es un cuerpo, que denominaremos *cuerpo de los cuaternios*. En particular,  $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0\}$  es un grupo con el producto.

El cuerpo  $\mathbb{R}$  es isomorfo al subcuerpo de  $\mathbb{H}$

$$\{\lambda \mathbf{1}\}_{\lambda \in \mathbb{R}} = \{\lambda \mathbf{1} + 0i + 0j + 0k \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

por la aplicación  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$  tal que  $\lambda \mapsto \lambda \mathbf{1}$ . De ahora en adelante, identificaremos el cuaternio  $\lambda \mathbf{1}$  con el número real  $\lambda$ .

El subespacio de  $\mathbb{H}$  generado por  $i, j, k$  será denotado  $V_3$ . Lo consideraremos orientado de manera que  $i, j, k$  sea una base positiva. A los elementos de  $V_3$  los denominaremos *cuaternios puros*. Todo cuaternio  $\mathbf{q}$  se puede poner de una única manera en la forma  $\mathbf{q} = \lambda + v$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $v \in V_3$ . Diremos que  $\lambda$  es la *parte real* de  $\mathbf{q}$  y que  $v$  es la *parte pura* o la *parte vectorial*. Está claro que  $\lambda = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{q})$ .

**E.2.52.** Demostrar que un cuaternio  $\mathbf{q}$  conmuta con todos los cuaternios (es decir,  $\mathbf{q}\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{q}$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ ) si y solo si  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}$ . En particular, vemos que  $\mathbb{R}^*$  coincide con el subconjunto de  $\mathbb{H}^*$  formado por los elementos que conmutan con todo elemento de  $\mathbb{H}^*$  (se dice que  $\mathbb{R}^*$  es el *centro* de  $\mathbb{H}^*$ ).

## Norma y conjugado

Dado un cuaternio

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

ponemos  $|\mathbf{q}| = +\sqrt{\det(\mathbf{q})}$  y decimos que  $|\mathbf{q}|$  es el *módulo* de  $\mathbf{q}$ . Está claro que  $|\mathbf{q}| > 0$  si  $\mathbf{q} \neq 0$ . Si  $\mathbf{q} = x_0\mathbf{1} + x_1i + x_2j + x_3k$ , entonces  $|\mathbf{q}|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .

De la propiedad multiplicativa de los determinantes inferimos, si  $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbb{H}$ , que  $|\mathbf{q}\mathbf{q}'| = |\mathbf{q}||\mathbf{q}'|$  y, si  $\mathbf{q} \neq 0$ , que  $|\mathbf{q}^{-1}| = |\mathbf{q}|^{-1}$ . De esto se sigue fácilmente que los cuaternios de módulo 1 forman un subgrupo, que denotaremos  $SU_2$ , de  $\mathbb{H}^*$ .

Dado un cuaternio

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H},$$

definimos

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{w} \\ -w & z \end{pmatrix}, \quad q^T = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad q^* = \bar{q}^T = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

Es decir,  $\bar{q}$  es el cuaternio que resulta de conjugar los elementos de  $q$ , y  $q^*$  se obtiene de transponer  $\bar{q}$ . La aplicación  $q \mapsto q^*$  es el automorfismo de  $\mathbb{H}$ , considerado como espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , definido por las relaciones  $1^* = 1, i^* = -i, j^* = -j, k^* = -k$ . Se cumple, además, que

$$(qq')^* = q'^*q^* \tag{2.39}$$

como se comprueba inmediatamente a partir de las definiciones. Así pues, si  $q = \lambda + v$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V_3$ , entonces  $q^* = \lambda - v$ , de donde  $\lambda = \frac{1}{2}(q + q^*)$  y  $v = \frac{1}{2}(q - q^*)$ . Es, pues, claro que  $q^* = q$  equivale a decir que  $q \in \mathbb{R}$ .

Puesto que la fórmula [2.38] se puede reescribir  $q^{-1} = |q|^{-2}q^*$ , vemos que  $q^* = |q|^2q^{-1}$ , o bien

$$qq^* = q^*q = |q|^2 \tag{2.40}$$

Por la analogía de esta fórmula con la fórmula  $z\bar{z} = |z|^2$  para números complejos,  $q^*$  se denomina *conjugado* de  $q$ . Hemos visto que la aplicación  $q \mapsto q^*$  es un automorfismo  $\mathbb{R}$ -lineal de  $\mathbb{H}$  que cumple la propiedad [2.39]: estos dos hechos también se enuncian diciendo que  $q \mapsto q^*$  es un *antiautomorfismo* del cuerpo  $\mathbb{H}$ .

### Estructura euclidiana

Dados cuaternios  $q$  y  $q'$ , ponemos

$$g(q, q') = \frac{1}{2}(q^*q' + q'^*q) = \frac{1}{2}\text{Tr}(q^*q')$$

Es fácil comprobar que  $g$  es una forma  $\mathbb{R}$ -bilineal simétrica definida positiva. Por tanto,  $\mathbb{H}$  es un espacio euclidiano de dimensión 4 y, como siempre, pondremos  $q \cdot q' = g(q, q')$ . Como  $g(q, q) = qq^* = |q|^2$ , vemos que la norma de  $q$  correspondiente a la métrica  $g$  coincide con el módulo de  $q$ . La base  $1, i, j, k$  es ortonormal, como se comprueba inmediatamente. Por tanto, si  $q = x_01 + x_1i + x_2j + x_3k$  y  $q' = y_01 + y_1i + y_2j + y_3k$  son cuaternios, entonces  $q \cdot q' = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ . También tenemos que  $SU_2$  es, visto relativamente a la base  $1, i, j, k$ , la esfera  $S^3$  de  $\mathbb{R}^4$ , pues

$$SU_2 = \{x_01 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H} \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} = S^3$$

Así pues, la esfera  $S^3$  de  $\mathbb{R}^4$  admite una estructura de grupo.

### Producto escalar y vectorial de $V_3$

De todo lo que hemos dicho resulta que  $V_3$  es un espacio euclidiano orientado de dimensión 3. La relación entre el producto de cuaternios, por un lado, y los productos escalar y vectorial de  $V_3$ , por el otro, es como sigue.

En primer lugar, si  $v = \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$  y  $w = \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k$  son cuaternios puros, por la fórmula [2.32'] tenemos que

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} \quad [2.41]$$

donde  $v \wedge w$  denota el producto vectorial de  $v$  y  $w$  respecto a la orientación de  $V_3$  definida por la base  $i, j, k$ .

Sean ahora  $q = \lambda + v$  y  $q' = \mu + w$ , con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $v, w \in V_3$ . Es un cálculo sencillo probar que

$$q q' = (\lambda \mu - v \cdot w)1 + \lambda w + \mu v + v \wedge w \quad [2.42]$$

Haciendo  $\lambda = \mu = 0$ , obtenemos

$$vw = -(v \cdot w)1 + v \wedge w \quad [2.42']$$

fórmula notable en la cual quedan relacionados el producto escalar, el producto vectorial y el producto como cuaternios de dos vectores de  $V_3$ .

La relación [2.42'] da inmediatamente que

$$v \wedge w = \frac{1}{2}(vw - wv) \quad [2.42'']$$

## 2.5 Semejanzas y desplazamientos

El propósito de esta sección es estudiar las transformaciones de un espacio euclidiano  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n$  que conservan la distancia, o que la alteran en una proporción dada. Estas transformaciones son tan importantes en las aplicaciones de la geometría métrica como desde un punto de vista teórico, ya que en esencia la geometría métrica es el estudio de las propiedades que permanecen invariantes por ellas.

Como hicimos anteriormente, pondremos  $V$  para designar el espacio vectorial asociado a  $\mathbb{A}$  y  $g$  para denotar la métrica. También pondremos  $v \cdot v'$  en lugar de  $g(v, v')$ .

### *Definiciones y generalidades*

Diremos que una aplicación  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  es una *semejanza* si existe  $k \in \mathbb{R}$  no nulo tal que  $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = k d(P, Q)$  cualesquiera que sean  $P, Q \in \mathbb{A}$ . La constante  $k$ , además de

ser obviamente positiva, queda unívocamente determinada por esta relación, y diremos que es la *razón* de la semejanza  $\varphi$ . Las semejanzas de razón 1 son las aplicaciones  $\varphi$  que conservan las distancias, es decir, las que cumplen  $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)$ . A estas aplicaciones, las denominaremos *desplazamientos* o *movimientos rígidos* de  $\mathbb{A}$ . La identidad  $Id$  de  $\mathbb{A}$  es claramente un desplazamiento de  $\mathbb{A}$ .

**E.2.53.** Si  $v \in V$  y  $P, Q \in \mathbb{A}$ , entonces  $d(t_v(P), t_v(Q)) = d(P + v, Q + v) = d(P, Q)$ . Por tanto, la traslación  $t_v$  es un desplazamiento para todo  $v \in V$ .

**E.2.54.** La composición de una semejanza de razón  $k$  con una de razón  $k'$  es una semejanza de razón  $kk'$ . En particular, la composición de dos desplazamientos es un desplazamiento.

La proposición que sigue nos permitirá ver más adelante (teorema 2.38) que toda semejanza es una afinidad.

**2.31 Proposición.** Sea  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  una semejanza de razón  $k$  y  $P_0, P_1, \dots, P_r$  puntos de  $\mathbb{A}$ . Pongamos  $P'_i = \varphi(P_i)$ ,  $e_i = P_i - P_0$  y  $e'_i = P'_i - P'_0$ . Entonces,

$$1) \quad e'_i \cdot e'_j = k^2 e_i \cdot e_j \quad (1 \leq i, j \leq n). \text{ Abreviadamente, } \mathbf{e}'^T \cdot \mathbf{e}' = k^2 \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}, \text{ donde } \mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n) \text{ y } \mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n).$$

$$2) \quad V(P'_0, P'_1, \dots, P'_r) = k^r V(P_0, P_1, \dots, P_r).$$

**Demostración:** Como  $|e_i| = d(P_0, P_i)$ ,  $|e'_i| = d(P'_0, P'_i)$  y  $d(P'_0, P'_i) = k d(P_0, P_i)$ , tenemos  $|e'_i|^2 = k^2 |e_i|^2$ . Por tanto,  $e'_i \cdot e'_i = k^2 e_i \cdot e_i$ . Por otro lado,  $P_i - P_j = e_i - e_j$ ,  $P'_i - P'_j = e'_i - e'_j$  y  $d(P'_i, P'_j) = k d(P_i, P_j)$ , de donde se obtiene  $|e'_i - e'_j|^2 = k^2 |e_i - e_j|^2$ . Dado que estas condiciones equivalen a

$$|e'_i|^2 + |e'_j|^2 - 2e'_i \cdot e'_j = k^2 (|e_i|^2 + |e_j|^2 - 2e_i \cdot e_j)$$

y además ya hemos visto que  $|e'_i|^2 = k^2 |e_i|^2$  para todo  $i$ , la parte 1 resulta inmediatamente.

Tomando ahora determinantes en la igualdad matricial  $\mathbf{e}'^T \cdot \mathbf{e}' = k^2 \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}$  de la parte 1 obtenemos  $\det(\mathbf{e}'^T \cdot \mathbf{e}') = k^{2r} \det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})$ . A continuación, la fórmula [2.26] nos da  $V(\mathbf{e}') = k^r V(\mathbf{e})$ , y esto prueba la parte 2, ya que  $V(P_0, P_1, \dots, P_r) = V(\mathbf{e})$  y  $V(P'_0, P'_1, \dots, P'_r) = V(\mathbf{e}')$ .  $\square$

**2.32 Corolario.** Una semejanza transforma puntos independientes en puntos independientes y puntos dependientes en puntos dependientes. En particular, resulta que una semejanza transforma referencias afines en referencias afines.

**Demostración:** Basta recordar, dados puntos  $P_0, P_1, \dots, P_r$ , que  $V(P_0, P_1, \dots, P_r) = 0$  equivale a decir que  $P_0, P_1, \dots, P_r$  son dependientes.  $\square$

**E.2.55.** Probar que si una semejanza  $\varphi$  deja fijos los puntos de una referencia, entonces  $\varphi$  es la identidad. Indicación: primero tratar el caso  $n = 1$  y después razonar por inducción respecto a  $n$ .

### Semejanzas afines

Para poder disponer de otros ejemplos de semejanzas (además de los referidos en E.2.53 y E.2.54), dedicamos este apartado al estudio de las semejanzas que son aplicaciones afines (*semejanzas afines*). Puesto que después veremos que toda semejanza es una afinidad (teorema 2.38), las conclusiones que obtenemos son de hecho válidas para todas las semejanzas. Reparemos en que el corolario 1.43 no se puede aplicar, a pesar de que el corolario 2.32 nos dice que una semejanza transforma puntos alineados a puntos alineados, ya que *a priori* no sabemos si una semejanza es exhaustiva. Y si se pudiese aplicar, todavía deberíamos elaborar un argumento separado para el caso  $n = 1$  y el coste de este no resultaría ser muy distinto del caso general.

**2.33 Proposición.** *Sea  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  una aplicación afín y pongamos  $f = \tilde{\varphi}$ . Entonces  $\varphi$  es una semejanza de razón  $k > 0$  si y solo si  $|f(v)| = k|v|$  para todo  $v \in V$  y, en este caso,  $\varphi$  es una afinidad. En particular, tenemos que  $\varphi$  es un desplazamiento si y solo si  $|f(v)| = |v|$  para todo  $v \in V$  y que, en este caso,  $\varphi$  es una afinidad.*

**Demostración:** Dados  $P, Q \in \mathbb{A}$ , tenemos  $\varphi(P) - \varphi(Q) = f(P - Q)$  por definición de afinidad, de donde  $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = |f(P - Q)|$ .

Si ahora suponemos que  $|f(v)| = k|v|$  para todo  $v \in V$ , entonces  $|f(P - Q)| = k|P - Q| = kd(P, Q)$  y, por tanto,  $\varphi$  es una semejanza de razón  $k$ . Esto demuestra la suficiencia de la condición.

Recíprocamente, si  $\varphi$  es una semejanza de razón  $k$ , entonces

$$k|P - Q| = kd(P, Q) = d(\varphi(P), \varphi(Q)) = |\varphi(P) - \varphi(Q)| = |f(P - Q)|$$

cualesquiera que sean los puntos  $P$  y  $Q$ . Si  $v$  es un vector cualquiera y escogemos puntos  $P, Q$  tales que  $P - Q = v$ , la relación anterior nos da  $|f(v)| = k|v|$ . Fijémonos, para terminar, que si esta condición se satisface, entonces  $\ker(f) = 0$ , con lo cual  $f$  es biyectiva y  $\varphi$  es así una afinidad.  $\square$

**Ejemplo: Homotecias.** Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la aplicación  $h_\lambda: V \rightarrow V$  tal que  $v \mapsto \lambda v$  es lineal y cumple  $|h_\lambda(v)| = |\lambda||v|$ . Como  $h_\lambda$  es la transformación asociada a la homotecia  $h_{O,\lambda}$  de centro  $O$  y razón  $\lambda$  (v. fórmula [1.20]), por la proposición 2.33 tenemos:

**2.34.** *Si  $\lambda \neq 0$ , entonces  $h_{O,\lambda}$  es una semejanza de razón  $k = |\lambda|$ .*  $\square$

**Ejemplo: Simetría respecto a una variedad lineal.** Sea  $L$  una variedad lineal. Dado un punto  $X$ , diremos que el punto  $X + 2(\pi_L(X) - X)$  es el *simétrico de  $X$  respecto a  $L$*  y pondremos  $\sigma_L(X)$  para denotarlo (v. figura 2.9.a). También diremos que la aplicación  $\sigma_L$  es la *simetría respecto a  $L$* . Seguidamente estudiaremos  $\sigma_L$  y veremos, en particular, que es un desplazamiento.

Si  $W$  es un subespacio vectorial de  $V$  y  $x \in V$ , sabemos (teorema 2.9) que  $x$  se descompone de una única manera en la forma  $x = v + v'$ , donde  $v \in W$  y  $v' \in W^\perp$  (v.

figura 2.9.b). El vector  $s_W(x) = v - v'$  se denominará *simétrico de  $x$  respecto a  $W$*  y la aplicación  $s_W$ , que claramente es un automorfismo lineal de  $V$ , *simetría respecto a  $W$* . Dado que  $v = \pi_W(x)$  y  $v' = \pi_{W^\perp}(x)$ , para todo  $x \in V$  tenemos

$$x = \pi_W(x) + \pi_{W^\perp}(x) \quad \text{y} \quad s_W(x) = \pi_W(x) - \pi_{W^\perp}(x) \quad [2.43]$$

Además, por el teorema de Pitágoras está claro que

$$|s_W(x)| = |x| \quad \text{para todo} \quad x \in V \quad [2.44]$$

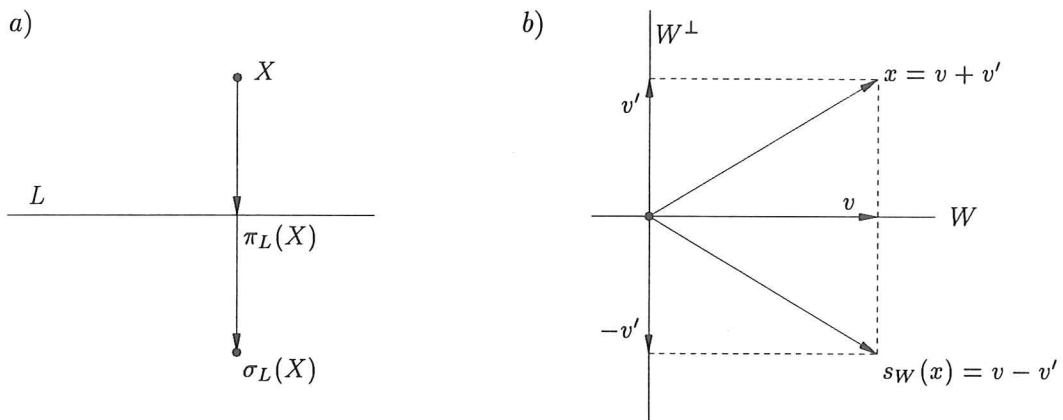


Figura 2.9: *Simetrías*

**2.35 Proposición.** Sean  $L$  una variedad lineal y  $W$  su espacio director. Entonces la simetría  $\sigma_L$  es una afinidad y  $\tilde{\sigma}_L = s_W$ . Por consiguiente, usando la relación [2.44] y la proposición 2.33, tenemos que  $\sigma_L$  es un desplazamiento.

**Demostración:** Es suficiente ver, pues, que  $\sigma_L(Q) - \sigma_L(P) = s_W(Q - P)$ , cualesquiera que sean  $P, Q \in \mathbb{A}$ . Ahora bien, la expresión de la izquierda es igual a

$$[Q + 2(\pi_L(Q) - Q)] - [P + 2(\pi_L(P) - P)] = 2(\pi_L(Q) - \pi_L(P)) - (Q - P)$$

por definición de  $\sigma_L$ . Pero como  $\pi_L(Q) - \pi_L(P) = \pi_W(Q - P)$ , por la fórmula [2.17],

$$2(\pi_L(Q) - \pi_L(P)) - (Q - P) = 2\pi_W(Q - P) - (Q - P)$$

Finalmente, la fórmula [2.43] nos da que esta expresión es igual a  $s_W(Q - P)$ .  $\square$

Como  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$  es la matriz de  $s_W$  respecto a cualquier base  $\mathbf{u}$  formada por una base  $u_1, \dots, u_r$  de  $W$  y una base  $u_{r+1}, \dots, u_n$  de  $W^\perp$ , las ecuaciones de  $\sigma_L$  respecto a una referencia  $[O, \mathbf{u}]$ ,  $O \in L$ , adoptan la forma

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } 1 \leq i \leq r \\ -x_i & \text{si } r+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad [2.45]$$

Vemos así que  $\sigma_L^2$  es la identidad (también se dice que  $\sigma_L$  es una *involución*).

Si  $L$  es un punto  $O$ , la simetría  $\sigma_O$  coincide con la homotecia de centro  $O$  y razón  $-1$ . Diremos que  $\sigma_O$  es la *simetría central de centro  $O$* . Cuando  $L$  es una recta, la simetría  $\sigma_L$  se denomina *simetría axial*. En espacios de dimensión  $n \geq 3$ , las simetrías respecto a hiperplanos, en particular respecto a planos del espacio ordinario, se denominan *simetrías especulares*.

En la proposición 2.33 hemos visto que la condición  $|f(v)| = k|v|$ , para todo  $v \in V$ , es necesaria y suficiente para que una aplicación afín  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  con  $\tilde{\varphi} = f$  sea una semejanza de razón  $k$ . Así pues, las aplicaciones lineales  $f: V \rightarrow V$  tales que  $|f(v)| = k|v|$  ( $k$  un número real positivo) tienen un papel fundamental en la teoría de semejanzas. Las denominaremos *semejanzas lineales de razón  $k$* . Cuando  $k = 1$ , las denominaremos *isometrías lineales* o *transformaciones ortogonales*.

**2.36 Proposición** (Caracterizaciones de las semejanzas lineales). *Dada una base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ , un número real positivo  $k$ , y una aplicación lineal  $f: V \rightarrow V$ , las condiciones siguientes son equivalentes:*

- 1) *La aplicación  $f$  es una semejanza lineal de razón  $k$ .*
- 2) *Se cumple  $(fv) \cdot (fv') = k^2(v \cdot v')$ , cualesquiera que sean  $v, v' \in V$ .*
- 3) *Para  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $(fe_i) \cdot (fe_j) = k^2(e_i \cdot e_j)$  (estas condiciones se pueden escribir abreviadamente  $(fe)^T \cdot (fe) = k^2(e^T \cdot e)$ ).*
- 4) *Si  $A$  y  $G$  son la matriz de  $f$  y la matriz de la métrica respecto a  $\mathbf{e}$ , entonces*

$$A^T G A = k^2 G.$$

**Demostración:** Primero observemos que 3 y 4 son equivalentes. En efecto,  $fe = eA$ , o  $fe^T = A^T e^T$  (por definición de  $A$ );  $e^T \cdot e = G$ , por definición de  $G$ ; y  $(fe^T) \cdot (fe) = A^T G A$ .

Notemos también que 1 y 3 son obviamente consecuencia de 2.

Ahora 4 implica 2, ya que si  $v = \mathbf{e}\mathbf{x}^T$  y  $v' = \mathbf{e}\mathbf{x}'^T$ , donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$  son las componentes de  $v$  y  $v'$  en la base  $\mathbf{e}$ , entonces  $fv = \mathbf{e}A\mathbf{x}^T$ ,  $fv' = \mathbf{e}A\mathbf{x}'^T$  y, por tanto (v. fórmula [2.6]),

$$(fv) \cdot (fv') = \mathbf{x}A^T G A\mathbf{x}'^T = k^2 \mathbf{x}G\mathbf{x}'^T = k^2 v \cdot v'$$

Para terminar basta ver que 1 implica 2. Pero esto es una consecuencia de la relación

$$v \cdot v' = \frac{1}{2}(|v + v'|^2 - |v|^2 - |v'|^2)$$

(v. nota 2.3), y del hecho de que  $f$  es lineal.  $\square$

### Los grupos $\mathcal{S}(g)$ , $\mathcal{O}(g)$ , $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ y $\mathcal{D}(\mathbb{A})$

La proposición 2.33 se puede volver a enunciar diciendo que una aplicación afín  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  es una semejanza de razón  $k$  (un desplazamiento) si y solo si  $\tilde{\varphi}$  es una semejanza lineal de razón  $k$  (una isometría lineal).

Como hemos observado al final de la prueba de la citada proposición, toda semejanza lineal es un automorfismo. Pondremos  $\mathcal{S}(g) \subseteq GL(V)$  y  $\mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{S}(g)$  para denotar el conjunto de las semejanzas lineales (de razón arbitraria) y el conjunto de las isometrías lineales, respectivamente.

**E.2.56.** La composición de una semejanza lineal de razón  $k$  con una semejanza lineal de razón  $k'$  es una semejanza lineal de razón  $kk'$ . En particular, la composición de dos isometrías lineales es una isometría lineal. La aplicación inversa de una semejanza lineal de razón  $k$  es una semejanza lineal de razón  $k^{-1}$ . En particular, la aplicación inversa de una isometría lineal es una isometría lineal. Como  $Id_V$  es claramente una isometría lineal, tenemos que  $\mathcal{S}(g)$  y  $\mathcal{O}(g)$  son grupos con la operación de composición y que  $\mathcal{O}(g)$  es un subgrupo de  $\mathcal{S}(g)$ . Además,  $\mathcal{O}(g)$  es un subgrupo normal de  $\mathcal{S}(g)$ , ya que si  $\varphi$  es una isometría lineal y  $\beta$  una semejanza lineal, entonces  $\beta\varphi\beta^{-1}$  es una semejanza lineal de razón 1, es decir, una isometría lineal. A  $\mathcal{O}(g)$  lo denominaremos también el *grupo ortogonal* de la métrica  $g$ .

Pongamos  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{A})$  para denotar el conjunto de afinidades del espacio  $\mathbb{A}$  que son semejanzas y  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{A})$  para denotar el conjunto de afinidades de  $\mathbb{A}$  que son desplazamientos. Puesto que las afinidades de  $\mathbb{A}$  forman un grupo y (v. E.2.54) la composición de semejanzas (desplazamientos) es una semejanza (desplazamiento), resulta que  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{D}$  son cerrados con la operación de composición. Por otro lado, si  $\varphi \in \mathcal{S}$  tiene razón  $k$  y  $f = \tilde{\varphi}$ , entonces la afinidad  $\varphi^{-1}$  es una semejanza de razón  $k^{-1}$  (v. E.2.56). En particular,  $\varphi^{-1} \in \mathcal{D}$  cuando  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Observemos, además, que si  $\varphi \in \mathcal{D}$  y  $\beta \in \mathcal{S}$ , entonces  $\beta\varphi\beta^{-1} \in \mathcal{D}$ . Dado que  $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$  (las traslaciones son desplazamientos), y además sabemos que  $\mathcal{T}$  es un subgrupo normal del grupo afín, podemos resumir las consideraciones de este punto en el siguiente enunciado:

**2.37 Proposición.** *Los conjuntos  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{D}$  son grupos con la operación de composición y  $\mathcal{D}$  es un subgrupo normal de  $\mathcal{S}$ . Además, el grupo  $\mathcal{T}$  de traslaciones es un subgrupo normal de  $\mathcal{D}$  y de  $\mathcal{S}$ .*  $\square$

Las proposiciones 2.33 y 2.36 nos dan un principio para reconocer cuándo una afinidad obtenida por el teorema fundamental de las aplicaciones afines es una semejanza, en particular un desplazamiento:

**E.2.57. Construcción de semejanzas.** Sean  $\mathcal{R} = [P_0, P_1, \dots, P_n]$  y  $\mathcal{R}' = [P'_0, P'_1, \dots, P'_n]$  dos referencias afines de  $\mathbb{A}$  y  $\varphi$  la única afinidad tal que  $\varphi(P_i) = P'_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Recordemos que si ponemos  $e_i = P_i - P_0$  y  $e'_i = P'_i - P'_0$ ,  $f = \tilde{\varphi}$  es la única aplicación lineal  $V \rightarrow V$  tal que  $f(e_i) = e'_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Con esto,  $\varphi$  es una semejanza de razón  $k$  si y solo si la condición 2.36.3 se cumple, es decir, si y solo si  $(e'_i) \cdot (e'_j) = k^2(e_i \cdot e_j)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

El principio de construcción de semejanzas del ejercicio anterior es el ingrediente principal de la demostración del teorema que sigue.

**2.38 Teorema.** *Toda semejanza es una afinidad.*

**Demostración:** Sea  $\varphi$  una semejanza de razón  $k$ ,  $[P_0, P_1, \dots, P_n]$  una referencia de  $\mathbb{A}$  y  $e_i = P_i - P_0$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Si ponemos  $P'_i = \varphi(P_i)$  y  $e'_i = P'_i - P'_0$ , entonces las proposiciones 2.32 y 2.31 nos dicen que  $[P'_0, P'_1, \dots, P'_n]$  es una referencia y que  $e'_i \cdot e'_j = k^2(e_i \cdot e_j)$ . Por E.2.57, la única afinidad  $\alpha$  tal que  $\alpha(P_i) = P'_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) es una semejanza de razón  $k$ . Ahora  $\alpha^{-1}$  es una semejanza de razón  $k^{-1}$  y, por consiguiente,  $\beta = \alpha^{-1}\varphi$  es un desplazamiento que deja fijos los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Pero  $\beta = Id$ , por E.2.55, de donde  $\varphi = \alpha \in \mathcal{S}$ .  $\square$

El teorema anterior nos permite hablar, pues, de la semejanza lineal asociada a una semejanza y se puede decir que el conocimiento de la semejanza queda determinado en buena parte por el conocimiento de la semejanza lineal correspondiente. De hecho, muchas de las propiedades de una semejanza se definen a partir de las propiedades de su semejanza lineal. Por poner un ejemplo: diremos que una semejanza  $\varphi$  es *directa* o *propia* si  $\det(\tilde{\varphi}) > 0$  y que es *inversa* o *impropia* si  $\det(\tilde{\varphi}) < 0$ . En particular, quedan definidas las nociones de desplazamiento *directo* o *propio*, y de desplazamiento *inverso* o *impropio*.

**E.2.58** (Semejanzas de una recta euclidiana). Usar el ejemplo 1.35 para comprobar que:

- 1) Toda afinidad de una recta euclidiana es una semejanza.
- 2) Las semejanzas sin puntos fijos son las traslaciones distintas de la identidad y las que tienen un único punto fijo son las homotecias distintas de la identidad.
- 3) Los desplazamientos directos son las traslaciones y los inversos son las simetrías centrales.

### *Propiedades adicionales de las semejanzas lineales*

Recopilamos, en este apartado, distintos resultados sobre semejanzas lineales que necesitamos para la clasificación y el tratamiento efectivo de las semejanzas.

**2.39 Proposición.** *Si  $f: V \rightarrow V$  es una semejanza lineal, entonces  $f$  conserva los ángulos, es decir,  $\alpha(fv, fv') = \alpha(v, v')$ , cualesquiera que sean los vectores no nulos*

$v, v' \in V$ . En particular,  $f$  transforma vectores perpendiculares en vectores perpendiculares.

**Demostración:** Si  $k$  es la razón de  $f$ ,  $(fv) \cdot (fv') = k^2(v \cdot v')$ ,  $|fv| = k|v|$  y  $|fv'| = k|v'|$ . Si ponemos  $\alpha' = \alpha(fv, fv')$  y  $\alpha = \alpha(v, v')$ , entonces  $\cos(\alpha') = \frac{(fv) \cdot (fv')}{|fv||fv'|} = \frac{v \cdot v'}{|v||v'|} = \cos(\alpha)$ .  $\square$

**2.40 Proposición.** Si  $f: V \rightarrow V$  es una semejanza lineal y  $W$  es un subespacio vectorial tal que  $f(W) \subseteq W$ , entonces  $f(W) = W$  y  $f(W^\perp) = W^\perp$ .

**Demostración:** Puesto que  $f$  es inyectiva,  $\dim(fW) = \dim(W)$ . Si además  $f(W) \subseteq W$ , será  $f(W) = W$ . Sea ahora  $x \in W^\perp$ . Entonces  $f(x) \in W^\perp$ , ya que si  $w$  es cualquier vector de  $W$  y  $w' \in W$  es tal que  $w = f(w')$ ,

$$f(x) \cdot w = f(x) \cdot f(w') = k^2(x \cdot w') = 0,$$

donde  $k$  es la razón de  $f$ . Así tenemos  $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$ . Por tanto, también tenemos  $f(W^\perp) = W^\perp$ .  $\square$

**E.2.59.** Una semejanza, por el hecho de ser una afinidad, transforma variedades lineales paralelas en variedades lineales paralelas. Comprobar que también transforma variedades lineales perpendiculares en variedades lineales perpendiculares.

**2.41 Proposición.** Si  $f: V \rightarrow V$  es una semejanza lineal de razón  $k$  y  $\lambda$  es un valor propio real de  $f$ , entonces  $\lambda = \pm k$ . En particular, si  $f$  es una transformación ortogonal y  $\lambda$  un valor propio real de  $f$ , entonces  $\lambda = \pm 1$ . Por otro lado,  $f$  tiene al menos un valor propio real si  $n = \dim(\mathbb{A})$  es impar.

**Demostración:** Sea  $e$  un vector propio no nulo de valor propio  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Así,  $f(e) = \lambda e$  y  $|e| \neq 0$ . Ahora  $k^2|e|^2 = k^2e \cdot e = (fe) \cdot f(e) = \lambda^2|e|^2$ , de donde  $\lambda^2 = k^2$ . Por tanto,  $\lambda = \pm k$ . Para la última afirmación observemos que el polinomio característico  $Q_f$  de  $f$  tiene grado  $n$  y que todo polinomio real de grado impar tiene al menos una raíz real (recordemos que los valores propios de  $f$  son las raíces de  $Q_f$ ).  $\square$

**E.2.60.** Sea  $\varphi$  una semejanza y  $L$  una recta. Pongamos  $f = \tilde{\varphi}$  y sea  $v$  un vector director de  $L$ . Comprobar que  $\varphi(L) \parallel L$  si y solo si  $v$  es un vector propio de  $f$ .

**2.42 Proposición.** Si  $f: V \rightarrow V$  es una semejanza lineal y  $e$  y  $e'$  son vectores propios de valores propios reales distintos, entonces  $e$  y  $e'$  son ortogonales.

**Demostración:** Sea  $k$  la razón de  $f$ . Visto que los valores propios reales de  $f$  son  $\pm k$  (proposición 2.41), podemos suponer que el valor propio real de  $e$  es  $k$  y que el de  $e'$  es  $-k$ . Así  $f(e) = ke$  y  $f(e') = -ke'$ . Por consiguiente,  $k^2e \cdot e' = (fe) \cdot (fe') = (ke) \cdot (-ke') = -k^2e \cdot e'$ , de donde  $e \cdot e' = 0$ .  $\square$

**2.43.** Sea  $f: V \rightarrow V$  una semejanza lineal y pongamos  $V^+$  y  $V^-$  para denotar los espacios de vectores propios de valor propio  $k$  y  $-k$ , respectivamente. Entonces  $V^+$  y  $V^-$  son ortogonales (por la proposición 2.42),  $f(V^+) = kV^+ = V^+$  y  $f(V^-) = -kV^- = V^-$ . Si ponemos  $V' = (V^+ \oplus V^-)^\perp$ , entonces  $f(V') = V'$ , por la proposición 2.40, y  $V = V^+ \oplus V^- \oplus V'$ , por el teorema 2.9. Además,  $f|_{V'}$  no tiene valores propios reales, por la primera parte de la proposición 2.41. En particular tenemos que  $\dim(V')$  es par, por la última parte de la proposición 2.41. Pondremos  $n^+ = \dim(V^+)$ ,  $n^- = \dim(V^-)$  y  $n' = \dim(V)$ . Por lo que hemos dicho, tenemos que  $n = n^+ + n^- + n'$  y que  $n'$  es par.

**2.44 Proposición.** *Supongamos que  $\dim(V) = 2$  y que  $f: V \rightarrow V$  es una aplicación lineal. Fijemos una base ortonormal cualquiera  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  de  $V$ . Entonces  $f$  es una semejanza lineal de razón  $k$  si y solo si la matriz de  $f$  en la base  $\mathbf{u}$  es de la forma  $k\rho(\alpha)$  o  $k\rho(\alpha)J$ , donde  $\alpha \in [0, 2\pi)$  y  $J = \text{diag}(1, -1)$  [usamos las notaciones del ejercicio E.2.15]. De estas aplicaciones, las únicas que no tienen valores propios reales son las de la forma  $k\rho(\alpha)$  con  $\alpha \neq 0, \pi$ .*

**Demostración:** Si  $A$  es la matriz de  $f$  en la base  $\mathbf{u}$ , entonces  $A^T A = k^2 I_2$  (proposición 2.36.4). Así  $k^{-1}A$  es una matriz ortogonal. Por E.2.15 tendremos que  $k^{-1}A = \rho(\alpha)$  o  $k^{-1}A = \rho(\alpha)J$ , donde  $J = \text{diag}(1, -1)$  y  $\alpha \in [0, 2\pi)$ .

El polinomio característico de

$$k\rho(\alpha)J = k \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es  $\lambda^2 - k^2$ , cuyas raíces son  $k$  y  $-k$ . El polinomio característico de

$$k\rho(\alpha) = k \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es  $\lambda^2 - 2k \cos(\alpha)\lambda + k^2$  y, ya que su discriminante es  $4k^2(\cos^2 \alpha - 1) \leq 0$ , tiene raíces reales si y solo si  $\cos(\alpha)^2 = 1$ , es decir, si y solo si  $\alpha = 0$  o  $\alpha = \pi$ .  $\square$

**E.2.61.** Con las notaciones de la proposición anterior, notemos que si  $A = k\rho(\alpha)$  es la matriz de  $f$  respecto a la base  $\mathbf{u}$ , entonces la matriz de  $f$  respecto a la base  $\bar{\mathbf{u}} = (u_1, -u_2)$  es  $JAJ = kJ\rho(\alpha)J = k\rho(2\pi - \alpha)$ . Por tanto, resulta que si  $f$  no tiene valores propios, entonces podemos escoger una base ortonormal de  $V$  respecto a la cual la matriz de  $f$  sea de la forma  $k\rho(\alpha)$ , con  $\alpha \in (0, \pi)$ . Sin embargo, está claro que la orientación de  $\bar{\mathbf{u}}$  es opuesta a la de  $\mathbf{u}$ .

### Semejanzas y desplazamientos del plano

En este apartado supondremos que  $\varphi$  es una semejanza de razón  $k$  de  $\mathbb{A}^2$  y pondremos  $f = \tilde{\varphi}$ . Utilizaremos las notaciones de 2.43 y procederemos al estudio de  $\varphi$  según los distintos valores de  $n^+$ ,  $n^-$  y  $n'$ . Recordemos  $n^+ + n^- + n' = 2$  y que  $n' \neq 1$ .

Pondremos  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  para denotar una base de  $V$  y  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$  una referencia de  $\mathbb{A}^2$ . En cada caso diremos cómo se escogen los ejes  $u_i$  y el origen  $O$ . Las coordenadas de un punto general  $X$  respecto a  $\mathcal{R}$  se denotarán  $(x, y)$  y las de  $\varphi(X)$  se denotarán  $(x', y')$ .

$n^+ = 2$  En este caso tenemos  $V = V^+$  y  $f$  es una homotecia lineal de razón  $k$ . Las semejanzas de este caso son directas.

Si  $k \neq 1$ , por el corolario 1.34 sabemos que  $\varphi$  tiene un único punto fijo, que tomaremos como origen  $O$ , y está claro que  $\varphi = h_{O,k}$ , la *homotecia* de centro  $O$  y razón  $k$ . Las ecuaciones de  $\varphi$  en la referencia  $[O, \mathbf{u}]$  ( $\mathbf{u}$  cualquiera) son  $\{x' = kx, y' = ky\}$ .

Si  $k = 1$ , entonces  $f$  es la identidad y, por tanto,  $\varphi$  es una *traslación*. Tomando  $u_1$  de manera que el vector  $v$  de la traslación sea de la forma  $pu_1$  (incluso podemos suponer que  $p \geq 0$ ), entonces las ecuaciones de  $\varphi$  adoptan la forma  $\{x' = x + p, y' = y\}$ .

$n^+ = n^- = 1$  Si  $u_1$  es un vector unitario de  $V^+$  y  $u_2$  un vector unitario de  $V^-$ , entonces  $\mathbf{u}$  es una base ortonormal (proposición 2.42) y la matriz de  $f$  respecto a esta base es *diag*( $k, -k$ ). Las semejanzas de este caso son inversas.

Si  $k \neq 1$ , entonces  $\varphi$  tiene un único punto fijo, que escogemos como origen  $O$ , y las ecuaciones de  $\varphi$  en la referencia  $\mathcal{R}$  son de la forma  $\{x' = kx, y' = -ky\}$ . Esta semejanza es composición (conmutativa) de la simetría axial  $\sigma$  respecto al eje  $Ox = O + \langle u_1 \rangle$  con la homotecia  $h = h_{O,k}$  de centro  $O$  y razón  $k$ .

Si  $k = 1$ , las ecuaciones de  $\varphi$  respecto a la referencia  $\mathcal{R}$ , con  $O$  escogido arbitrariamente, son de la forma  $\{x' = x + p, y' = -y + q\}$ . Como la relación  $y' = -y + q$  se puede escribir en la forma  $y' - \frac{q}{2} = -(y - \frac{q}{2})$ , que con el cambio  $\bar{y} = y - \frac{q}{2}$  adopta la forma  $\bar{y}' = -\bar{y}$ , vemos que cambiando el origen  $O$  podemos suponer que las ecuaciones son  $\{x' = x + p, y' = -y\}$ . Cuando  $p = 0$ , el desplazamiento es la *simetría axial*  $\sigma$  respecto al eje  $Ox$ . Si  $p \neq 0$ , entonces el desplazamiento es composición (conmutativa) de la simetría  $\sigma$  con una traslación  $\tau$  paralela al citado eje. A este movimiento lo llamaremos *simetría axial con deslizamiento* o una *simetría axial con traslación paralela*.

$n^- = 2$  La aplicación  $f$  es la homotecia lineal de razón  $-k$ . La matriz de  $f$  respecto a cualquier base  $\mathbf{u}$  es *diag*( $-k, -k$ ) y, por tanto, las semejanzas de este caso son directas. Como  $-k \neq 1$ ,  $\varphi$  tiene un único punto fijo, que tomamos como origen  $O$ . De esto resulta que  $\varphi = h_{O,-k}$ , la *homotecia* de centro  $O$  y razón  $-k$ . Para  $k = 1$  se trata de la *simetría central*  $\sigma_O$ . En general es la composición (conmutativa) de esta simetría con la homotecia de centro  $O$  y razón  $k$ .

$n' = 2$  En este caso, la aplicación  $f$  no tiene valores propios reales. Hemos visto que la matriz de  $f$  respecto a una base ortonormal arbitraria  $\mathbf{u}$  es de la forma  $k\rho(\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 2\pi)$ ,  $\alpha \neq \pi$ . En particular, todas las semejanzas de este caso son directas. Observemos también que si nos fuera permitido cambiar las orientaciones de las bases de  $V$ , entonces siempre podríamos escoger la base  $\mathbf{u}$  de forma que  $\alpha \in (0, \pi)$  (v. E.2.61).

Dado que  $\varphi$  tiene un único punto fijo, que escogemos como origen  $O$ , las ecuaciones de  $\varphi$  respecto a la referencia  $\mathcal{R}$  son  $\{x' = k(cx - sy), y' = k(sx + cy)\}$ , donde  $c = \cos(\alpha)$

y  $s = \text{sen}(\alpha)$ . Se trata, por tanto, de la composición (conmutativa) de un *giro* o *rotación* de centro  $O$  y amplitud  $\alpha$  con la homotecia de centro  $O$  y razón  $k$ .

Cuando  $k = 1$ , la homotecia es la identidad y el desplazamiento  $\varphi$  se reduce a un giro de amplitud  $\alpha$ .

La tabla 2.1 presenta, de forma sinóptica, las conclusiones a las que hemos llegado en el caso de los desplazamientos distintos de la identidad. La columna  $\varphi$  contiene una descripción simbólica del desplazamiento:  $\sigma$  representa una simetría axial;  $\tau$ , una traslación paralela al eje de  $\sigma$ ; y  $\rho$ , un giro de amplitud  $\alpha \neq 0, \pi$ . La columna  $s$  contiene el «sentido» del desplazamiento: ponemos  $d$  o  $i$  según que el desplazamiento sea directo o inverso. La columna  $F$  contiene la descripción del conjunto de puntos fijos:  $O$  significa un único punto fijo y  $L$  una recta de puntos fijos. Abreviamos los nombres que damos a los distintos desplazamientos con las convenciones siguientes:  $T$  indica una traslación;  $SA$ , una simetría axial;  $SA+T$ , una simetría axial con traslación paralela;  $SC$ , una simetría central; y  $G$ , un giro.

Tabla 2.1: *Desplazamientos en el plano*

$n^+$	$n^-$	$n'$	$\varphi$	$s$	$F$	<i>Ecuaciones reducidas</i>	<i>Nombre</i>
2	0	0	$t_v$	$d$	$\emptyset$	$x' = x + p, y' = y$	$T$
1	1	0	$\sigma$	$i$	$L$	$x' = x, y' = -y$	$SA$
1	1	0	$\tau\sigma$	$i$	$\emptyset$	$x' = x + p, y' = -y$	$SA + T$
0	2	0	$h_{O,-1}$	$d$	$O$	$x' = -x, y' = -y$	$SC$
0	0	2	$\rho$	$d$	$O$	$x' = cx - sy, y' = sx + cy$	$G$

**E.2.62.** Mirando la tabla 2.1, se pueden constatar los hechos siguientes:

- 1) Los únicos desplazamientos, distintos de la identidad, que tienen más de un punto fijo son las simetrías axiales.
- 2) Solo las traslaciones distintas de la identidad y las simetrías axiales con deslizamiento no tienen puntos fijos. Estos dos tipos se distinguen porque las traslaciones son directas y las simetrías inversas.
- 3) Teniendo en cuenta, por otro lado, que una simetría central se puede considerar como un giro de amplitud  $\pi$ , comprobar que los únicos desplazamientos del plano que tienen un único punto fijo son los giros  $\rho$  de amplitud  $\alpha \in (0, 2\pi)$ .

**E.2.63.** Si un desplazamiento  $\varphi$  es una simetría axial o una simetría axial con deslizamiento, el eje de  $\varphi$  es el lugar geométrico de los puntos  $X$  tales que  $\varphi(X) - X$  es proporcional al vector propio de valor propio  $-1$ . En una referencia, su ecuación es

$$\begin{vmatrix} (a-1)x + by + r & \alpha \\ cx + (d-1)y + s & \beta \end{vmatrix}$$

donde  $\{x' = ax + by + r, y' = cx + dy + s\}$  son las ecuaciones de  $\varphi$  y  $(\alpha, \beta)$  las componentes de un vector propio no nulo de valor propio  $-1$  de la matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Tomando un punto  $P$  arbitrario del eje, la diferencia  $v = \varphi(P) - P$  es el vector del deslizamiento.

**E.2.64.** Si  $\rho$  es un giro de amplitud  $\alpha$ , donde  $\alpha \in (0, 2\pi)$ ,  $\alpha$  se puede calcular mediante la fórmula  $\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\rho})$ , donde  $\text{Tr}(\tilde{\rho})$  es la traza de la transformación lineal asociada  $(a + d)$ , con las notaciones del ejercicio anterior).

Tabla 2.2: Algoritmo de clasificación de los desplazamientos del plano

Partimos de una afinidad dada por la ecuación matricial  $x'^T = Ax^T + p^T$  y suponemos que hemos verificado la condición  $A^TGA = G$  y calculado  $n^+$ ,  $n^-$ ,  $n'$  y la dimensión  $d$  de la variedad de puntos fijos, con el convenio de que  $d = -1$  si no hay puntos fijos.

$$\left\{ \begin{array}{l} n' \neq 0 \rightarrow G, \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \text{Tr}(A) \\ n' = 0 \rightarrow \begin{cases} n^+ = 2 \rightarrow T \\ n^+ = 1 \rightarrow \begin{cases} d < 0 \rightarrow SA + T \\ d \geq 0 \rightarrow SA \end{cases} \\ n^+ = 0 \rightarrow SC \end{cases} \end{array} \right.$$

La tabla 2.3 contiene las conclusiones a las que hemos llegado en el caso de las semejanzas que no son desplazamientos. Supondremos que  $k$  es un número real positivo y distinto de 1. Además, abreviamos los nombres poniendo  $h$  y  $h'$  para indicar homotecias de razón  $k$  y  $-k$ , respectivamente;  $SA + h$  para indicar una simetría axial seguida de una homotecia de razón  $k$  con centro sobre el eje de la simetría; y  $G + h$  para indicar un giro de amplitud  $\alpha \neq 0, \pi$  seguido de una homotecia de razón  $k$  con el mismo centro que el giro. Los otros elementos de la tabla tienen el mismo significado que para la tabla 2.1.

Tabla 2.3: Semejanzas del plano

$n^+$	$n^-$	$n'$	$\varphi$	$s$	$F$	Ecuaciones reducidas	Nombre
2	0	0	$h_{O,k}$	$d$	$O$	$x' = kx, y' = ky$	$h$
1	1	0	$h_{O,k\sigma}$	$i$	$O$	$hx' = kx, y' = -ky$	$SA + h$
0	2	0	$h_{O,-k}$	$d$	$O$	$x' = -kx, y' = -ky$	$h'$
0	0	2	$\rho$	$d$	$O$	$hx' = k(cx - sy), y' = k(sx + cy)$	$G + h$

**E.2.65.** Mirando la tabla 2.3, vemos que las semejanzas  $\varphi$  del plano de razón  $k \neq 1$  tienen todas un único punto fijo. Veamos cómo podemos distinguirlas. Pongamos  $f = \tilde{\varphi}$ .

- 1) Si  $f$  no tiene valores propios reales, entonces  $\varphi$  es un  $G + h$ . La amplitud  $\alpha$  del giro se puede determinar mediante la fórmula  $2k \cos(\alpha) = \text{Tr}(f)$ .
- 2) Si  $f$  tiene valores propios reales, entonces  $\varphi$  es una homotecia cuando los dos valores propios tienen el mismo signo y una  $SA + h$  cuando tienen signos contrarios. En el caso de que sea una  $SA + h$ , el eje de la simetría se puede determinar por un procedimiento similar al utilizado en el ejercicio E.2.63.

**E.2.66.** Hay también propiedades geométricas que nos permiten distinguir los distintos casos de la tabla 2.3. Una posibilidad es la consideración de las rectas invariantes (una variedad lineal  $L$  se llama *invariante* por una afinidad  $\alpha$  si  $\alpha(L) = L$ ).

- 1) Las homotecias dejan invariantes todas las rectas por su centro.
- 2) Una semejanza de la forma  $SA + h$  solo deja invariantes dos rectas por  $O$ : el eje de la simetría y la recta perpendicular al mismo por  $O$ .
- 3) Una semejanza de la forma  $G + h$  no deja invariante ninguna recta.

Para distinguir geoméricamente las homotecias  $h$  y  $h'$ , podemos usar la razón simple:

- 4) Si  $P \neq O$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $\sigma(O, P, h_{O,\lambda}(P)) = \lambda$ .

Tabla 2.4: Algoritmo de clasificación de las semejanzas del plano

---

Partimos de una afinidad dada por la ecuación matricial  $x'^T = Ax^T + p^T$  y suponemos que hemos verificado la condición  $A^TGA = kG$ , donde  $k \neq 1$ , y calculado  $n^+$ ,  $n^-$  y  $n'$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} n' \neq 0 \rightarrow G + h, \cos(\alpha) = \frac{1}{2k} \text{Tr}(A) \\ n' = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ = 2 \rightarrow h_{O,k} \\ n^+ = 1 \rightarrow SA + h \\ n^+ = 0 \rightarrow h_{O,-k} \end{array} \right. \end{array} \right.$$


---

### Semejanzas y desplazamientos en el espacio

En este apartado supondremos que  $\varphi$  es una semejanza de razón  $k$  de  $\mathbb{A}^3$  y pondremos  $f = \tilde{\varphi}$ . Utilizaremos las notaciones de 2.43 y procederemos al estudio de  $\varphi$  según los distintos valores de  $n^+$ ,  $n^-$  y  $n'$ .

La aplicación  $f$  siempre tiene valores propios (por la proposición 2.41). Esto significa que  $n^+ + n^- > 0$ . Como  $n^+ + n^- + n' = 3$ , tenemos que  $n' \leq 2$ , y dado que  $n' \neq 1$ ,

será  $n' = 0$  o  $n' = 2$ . Con esto pasamos a discutir la estructura de  $\varphi$  según los cinco casos que se pueden presentar teniendo en cuenta estas condiciones.

Pondremos  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  para denotar una base de  $V$  y  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$  una referencia de  $\mathbb{A}^3$ . En cada caso diremos cómo se escogen los ejes  $u_i$  y el origen  $O$ . Las coordenadas de un punto general  $X$  respecto a esta referencia se denotarán  $(x, y, z)$  y las de  $\varphi(X)$  se denotarán  $(x', y', z')$ .

$n^+ = 3$  La matriz de  $f$  respecto a  $\mathbf{u}$  es  $\text{diag}(k, k, k)$ , cualquiera que sea  $\mathbf{u}$ . Se trata, pues, de semejanzas directas.

Si  $k \neq 1$ , entonces  $\varphi$  tiene un único punto fijo (proposición 1.34), que podemos tomar como origen  $O$ . Las ecuaciones de  $\varphi$  en la referencia  $\mathcal{R}$  son  $\{x' = kx, y' = ky, z' = kz\}$ . Esto prueba que  $\varphi = h_{O,k}$ , la homotecia de centro  $O$  y razón  $k$ .

Si  $k = 1$ , entonces  $f = Id$  y  $\varphi$  es una traslación. Si  $v$  es el vector que da esta traslación y escogemos  $u_1$  de forma que  $v = pu_1$  ( $p \in \mathbb{R}$ ), entonces las ecuaciones de  $\varphi$  son  $\{x' = x + p, y' = y, z' = z\}$ .

$n^+ = 2, n^- = 1$  Escogemos  $\mathbf{u}$  de forma que  $u_1, u_2$  sea una base de  $V^+$  y  $u_3$  una base de  $V^-$ . Entonces la matriz de  $f$  es igual a  $\text{diag}(k, k, -k)$  y estamos en presencia de semejanzas inversas.

Si  $k \neq 1$ , entonces  $\varphi$  tiene un único punto fijo, que escogemos como origen  $O$ . Las ecuaciones de  $\varphi$  son  $\{x' = kx, y' = ky, z' = -kz\}$ . Vemos, pues, que  $\varphi$  es la composición (conmutativa) de la simetría especular respecto al plano  $\{z = 0\}$  con la homotecia de centro  $O$  y razón  $k$ .

Cuando  $k = 1$ , las ecuaciones de  $\varphi$ , con el origen  $O$  arbitrario, son de la forma  $\{x' = x + p, y' = y + q, z' = -z + r\}$  ( $p, q, r \in \mathbb{R}$ ). Escogiendo como origen el punto de coordenadas  $(0, 0, r/2)$  (lo cual equivale a hacer el cambio  $z \mapsto z - r/2$ ), podemos suponer que  $r = 0$ . Ahora el vector  $v$  de componentes  $(p, q, 0)$  es de  $V^+$ . Podemos suponer que  $q = 0$ , ya que podemos escoger la base de  $V^+$  de forma que  $v$  sea proporcional a  $u_1$ . Así pues, las ecuaciones del desplazamiento se pueden poner en la forma  $\{x' = x + p, y' = y, z' = -z\}$ . Por tanto,  $\varphi$  es la composición (conmutativa) de la simetría especular respecto al plano  $\{z = 0\}$ , con una traslación paralela al plano de la simetría. Diremos que  $\varphi$  es una *simetría especular con deslizamiento*, o una *simetría especular con traslación paralela*. Si  $p = 0$ , tenemos simplemente una *simetría especular*.

$n^+ = 1, n^- = 2$  Escogemos  $\mathbf{u}$  de forma que  $u_1$  sea una base de  $V^+$  y  $(u_2, u_3)$  una base de  $V^-$ . Entonces la matriz de  $f$  es igual a  $\text{diag}(k, -k, -k)$  y estamos en presencia de semejanzas directas.

Si  $k \neq 1$ , entonces  $\varphi$  tiene un único punto fijo, que escogemos como origen  $O$ . Las ecuaciones de  $\varphi$  son  $\{x' = kx, y' = -ky, z' = -kz\}$ . Vemos, pues, que  $\varphi$  es la composición (conmutativa) de la simetría axial respecto al eje  $Ox$  con la homotecia de centro  $O$  y razón  $k$ .

Cuando  $k = 1$ , las ecuaciones de  $\varphi$ , con el origen  $O$  arbitrario, son de la forma

$$\{x' = x + p, y' = -y + q, z' = -z + r\} \quad (p, q, r \in \mathbb{R})$$

Escogiendo ahora como origen el punto de coordenadas  $(0, q/2, r/2)$  (lo cual equivale a hacer el cambio  $y \mapsto y - q/2, z \mapsto z - r/2$ ), podemos suponer que  $q = r = 0$ . Así pues, las ecuaciones del desplazamiento se pueden poner en la forma  $\{x' = x + p, y' = -y, z' = -z\}$ . Por tanto,  $\varphi$  es la composición (conmutativa) de la simetría axial respecto al eje  $Ox$  con una traslación paralela al mismo. Diremos que  $\varphi$  es una *simetría axial con deslizamiento*, o una *simetría axial con traslación paralela*. Si  $p = 0$  tenemos simplemente una *simetría axial*.

$n^- = 3$  La aplicación  $f$  es la homotecia lineal de razón  $-k$ . La matriz de  $f$  respecto a cualquier base  $\mathbf{u}$  es  $\text{diag}(-k, -k, -k)$ , con lo cual las semejanzas de este caso son inversas. Como  $-k \neq 1$ ,  $\varphi$  tiene un único punto fijo, que tomamos como origen  $O$ . De esto resulta que  $\varphi = h_{O, -k}$ , la *homotecia* de centro  $O$  y razón  $-k$ . Para  $k = 1$  se trata de la *simetría central*  $\sigma_O$  y, en general,  $\varphi$  es la composición (conmutativa) de esta simetría con la homotecia de centro  $O$  y razón  $k$ .

$n' = 2, n^+ = 1$  Escogemos  $u_1$  y  $u_2$  de forma que constituyan una base ortonormal de  $V'$  y  $u_3$  un vector unitario de  $V^+$ . Entonces,  $\mathbf{u}$  es una base ortonormal de  $V$  y la matriz de  $f$  respecto a esta base, o respecto a  $\bar{\mathbf{u}}$ , es de la forma  $k \begin{pmatrix} \rho(\alpha) & & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in (0, \pi)$ .

Si  $k \neq 1$ ,  $\varphi$  tiene un único punto fijo, que tomamos como origen  $O$ . Las ecuaciones de  $\varphi$  son de la forma  $\{x' = k(cx - sy), y' = k(sx + cy), z' = kz\}$ , donde  $c = \cos(\alpha)$  y  $s = \sin(\alpha)$ . Esto muestra que  $\varphi$  es composición (conmutativa) de un giro de amplitud  $\alpha$  alrededor del eje  $Oz$  con la homotecia de centro  $O$  y razón  $k$ .

Si  $k = 1$ , entonces las ecuaciones de  $\varphi$ , con un origen  $O$  cualquiera, son de la forma  $\{x' = cx - sy + p, y' = sx + cy + q, z' = z + r\}$ ,  $p, q, r \in \mathbb{R}$  y  $c$  y  $s$  como en el párrafo anterior. Si nos fijamos solo en la transformación de los puntos  $(x, y, 0)$ , vemos que se trata de un desplazamiento tal que la aplicación lineal asociada no tiene vectores propios y tiene así un único punto fijo. Escogiendo este punto como origen, las ecuaciones de  $\varphi$  adoptan la forma  $\{x' = cx - sy, y' = sx + cy, z' = z + r\}$ . Vemos que es composición (conmutativa) de un giro de amplitud  $\alpha$  alrededor del eje  $Oz$  con una traslación paralela al mismo. A este desplazamiento, que es un «giro con deslizamiento», se le denomina *movimiento helicoidal*.

$n' = 2, n^- = 1$  Escogemos  $u_1$  y  $u_2$  de forma que constituyan una base ortonormal de  $V'$  y  $u_3$  un vector unitario de  $V^-$ . Entonces,  $\mathbf{u}$  es una base ortonormal de  $V$  y la matriz de  $f$  respecto a esta base, o respecto a  $\bar{\mathbf{u}}$ , es de la forma  $k \begin{pmatrix} \rho(\alpha) & & \\ & & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in (0, \pi)$ .

Puesto que  $f$  no tiene el valor propio 1,  $\varphi$  tiene un único punto fijo, que escogemos como origen  $O$ . Las ecuaciones de  $\varphi$  adoptan la forma  $\{x' = k(cx - sy), y' = k(sx + cy), z' = -kz\}$  ( $c = \cos(\alpha), s = \sin(\alpha)$ ) y vemos que se trata de la composición (conmutativa)

de una rotación de amplitud  $\alpha$  alrededor del eje  $Oz$  con la simetría especular respecto al plano  $\{z = 0\}$  y con la homotecia de centro  $O$  y razón  $k$ .

Si  $k = 1$  la homotecia es la identidad y  $\varphi$  es composición del giro de amplitud  $\alpha$  alrededor del eje de las  $Oz$  con la simetría especular respecto al plano  $\{z = 0\}$ .

La tabla 2.5 presenta de una manera sinóptica las conclusiones a las que hemos llegado para los desplazamientos de  $\mathbb{A}^3$ . La columna  $\varphi$  contiene una descripción simbólica del desplazamiento:  $\sigma$  representa una simetría especular,  $\rho$  una simetría axial y  $\gamma$  un giro de amplitud  $\alpha \neq 0, \pi$  alrededor de una recta. Por otro lado,  $\tau$  representa una traslación paralela al plano de  $\sigma$ , al eje de  $\rho$  o al eje de  $\gamma$ , según el caso. En la última fila, el eje de  $\gamma$  es perpendicular al plano de  $\sigma$  y el punto  $O$  es la intersección de los referidos eje y plano.

La columna  $s$  contiene el «sentido» del desplazamiento: ponemos  $d$  o  $i$  según el desplazamiento sea directo o inverso, respectivamente, y la columna  $F$  contiene una descripción del conjunto de puntos fijos:  $O$  significa un punto fijo,  $L$  una recta de puntos fijos y  $\pi$  un plano de puntos fijos.

Abreviamos los nombres mediante los convenios siguientes:  $T$  indica una traslación;  $SE$ , una simetría especular;  $SE + T$ , una simetría especular con deslizamiento;  $SA$ , una simetría axial;  $SA + T$ , una simetría axial con deslizamiento;  $SC$ , una simetría central;  $G$ , un giro;  $G + T$ , un movimiento helicoidal; y  $G + SE$ , la composición de un giro con una simetría especular respecto a un plano perpendicular al eje del giro.

Tabla 2.5: Desplazamientos del espacio

$n^+$	$n^-$	$n'$	$\varphi$	$s$	$F$	<i>Ecuaciones reducidas</i>	<i>Nombre</i>
3	0	0	$t_v$	$d$	$\emptyset$	$x' = x + p, y' = y, z' = z$	$T$
2	1	0	$\sigma$	$i$	$\pi$	$x' = x, y' = y, z' = -z$	$SE$
2	1	0	$\tau\sigma$	$i$	$\emptyset$	$x' = x + p, y' = y, z' = -z$	$SE + T$
1	2	0	$\rho$	$d$	$L$	$x' = x, y' = -y, z' = -z$	$SA$
1	2	0	$\tau\rho$	$d$	$\emptyset$	$x' = x + p, y' = -y, z' = -z$	$SA + T$
0	3	0	$\sigma_O$	$i$	$O$	$x' = -x, y' = -y, z' = -z$	$SC$
1	0	2	$\gamma$	$d$	$L$	$x' = cx - sy, y' = sx + cy, z' = z$	$G$
1	0	2	$\tau\gamma$	$d$	$\emptyset$	$x' = cx - sy, y' = sx + cy, z' = z + p$	$G + T$
0	1	2	$\sigma\gamma$	$i$	$O$	$x' = cx - sy, y' = sx + cy, z' = -z$	$G + SE$

E.2.67. Mirando la tabla 2.5, comprobar que:

- 1) Las traslaciones, simetrías axiales con deslizamiento y movimientos helicoidales coinciden con los desplazamientos directos sin puntos fijos. Notemos que podemos mirar las simetrías axiales como giros de amplitud  $\pi$ , con lo cual las simetrías axiales con deslizamiento se pueden entender como un caso particular de movimiento helicoidal. De esta manera,

los movimientos helicoidales son, descontadas las traslaciones, los únicos desplazamientos directos sin puntos fijos.

- 2) Las simetrías especulares con deslizamiento coinciden con los desplazamientos inversos sin puntos fijos.
- 3) Los desplazamientos con un único punto fijo son las simetrías centrales y los de la forma  $G + SE$ ; ambos son inversos.
- 4) Teniendo en cuenta, como en el punto 1, que una simetría axial se puede considerar como un giro de amplitud  $\pi$ , vemos que los giros de amplitud  $\alpha \in (0, 2\pi)$  son los únicos desplazamientos del espacio cuya variedad de puntos fijos es una recta.
- 5) Las simetrías especulares son, menos la identidad, los únicos desplazamientos que tienen un plano de puntos fijos.

**E.2.68.** En relación con la clasificación de los desplazamientos del espacio explicada en el ejercicio E.2.67, vemos que también hay ciertas propiedades geométricas que nos permiten distinguir los distintos casos.

- 1) Una traslación  $t_v$  deja invariantes las rectas paralelas al vector  $v$ . Un movimiento helicoidal (que puede ser una simetría axial con deslizamiento) solo deja invariante una recta: su eje.
- 2) Una simetría especular con deslizamiento deja invariantes, exactamente, las rectas del plano de simetría que son paralelas al vector del deslizamiento.
- 3) Una simetría central deja invariantes, precisamente, las rectas que pasan por su centro. En cambio, un desplazamiento de la forma  $G + SE$  solo deja invariante una recta: su eje. Pero se diferencia del caso del movimiento helicoidal porque este no deja ningún punto invariante de su eje mientras que un desplazamiento de la forma  $G + SE$  deja invariante un punto.
- 4) Un giro, descontando ahora las simetrías axiales, deja invariante una única recta: su eje. Todos los puntos de este eje también son fijos y este hecho nos permite diferenciarlo de los movimientos helicoidales y de los desplazamientos del tipo  $G + SE$ . Las rectas invariantes por una simetría axial, en cambio, son su eje y todas las perpendiculares a este.
- 5) Las rectas invariantes por una simetría especular son todas las rectas de su plano de simetría y todas las rectas perpendiculares a este.

La tabla 2.7 contiene las conclusiones a las que hemos llegado en el caso de las semejanzas de  $\mathbb{A}^3$  que no son desplazamientos. Además de las abreviaciones de la tabla anterior, utilizamos los siguientes convenios. El símbolo  $k$  representa un número real positivo y diferente de 1. Pondremos  $h$  y  $h'$  para indicar homotecias de razón  $k$  y  $-k$ , respectivamente;  $SE + h$ , una simetría especular seguida de una homotecia de razón  $k$  y centro sobre el plano de la simetría;  $SA + h$ , una simetría axial seguida de una homotecia de razón  $k$  con centro sobre el eje de la simetría;  $G + h$ , un giro de amplitud  $\alpha \neq 0, \pi$  seguido de una traslación a lo largo del eje del giro; y  $G + SE + h$ , un giro de amplitud  $\alpha \neq 0, \pi$ , seguido de una simetría especular respecto a un plano perpendicular al eje del giro, y después por una homotecia de centro el punto  $O$  de intersección de los citados eje y plano.

Tabla 2.6: Algoritmo de clasificación de los desplazamientos del espacio

Partimos de una afinidad dada por la ecuación matricial  $x'^T = Ax^T + p^T$  y suponemos que hemos verificado la condición  $A^TGA = G$  y calculado  $n^+$ ,  $n^-$ ,  $n'$  y la dimensión  $d$  de la variedad de puntos fijos, con el convenio de que  $d = -1$  si no hay puntos fijos.

$$\left\{ \begin{array}{l} n' \neq 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d < 0 \rightarrow G + T, \cos(\alpha) = \frac{1}{2}(Tr(A) - 1) \\ d \geq 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ > 0 \rightarrow G, \cos(\alpha) = \frac{1}{2}(Tr(A) - 1) \\ n^+ = 0 \rightarrow G + SE, \cos(\alpha) = \frac{1}{2}(Tr(A) + 1) \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ n' = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ = 3 \rightarrow T \\ n^+ = 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d < 0 \rightarrow SE + T \\ d \geq 0 \rightarrow SE \end{array} \right. \\ n^+ = 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d < 0 \rightarrow SA + T \\ d \geq 0 \rightarrow SA \end{array} \right. \\ n^+ = 0 \rightarrow SC \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**E.2.69.** Probar, con la ayuda de la tabla 2.7, que con el esquema que sigue podemos clasificar las semejanzas al espacio:

**E.2.70.** Establecer las propiedades geométricas de las semejanzas del espacio que enunciarnos a continuación.

- 1) Las homotecias son las únicas semejanzas que dejan invariantes todas las rectas por  $O$ . Las de razón positiva son directas y las de razón negativa son inversas.
- 2) Consideremos una simetría axial seguida de homotecia ( $SA + h$ ) y pongamos  $L$  para denotar su eje y  $\Pi$  para denotar el plano por  $O$  perpendicular a  $L$ . Las rectas que deja invariantes esta semejanza son  $L$  y las rectas por  $O$  contenidas en el plano  $\Pi$ . Por lo que se refiere a los planos, deja invariantes  $\Pi$  y los que contienen  $L$ .
- 3) Consideremos una simetría especular seguida de homotecia ( $SE + h$ ) y pongamos  $\Pi$  para denotar el plano de la simetría y  $L$  para denotar la recta por  $O$  perpendicular a  $\Pi$ . Las rectas que deja invariantes esta semejanza son  $L$  y las del plano  $\Pi$  que pasan por  $O$ . Análogamente, deja invariantes el plano  $\Pi$  y los planos que contienen  $L$ . Vemos, pues, que con la configuración de rectas y planos invariantes no podemos distinguir este caso del anterior. Advirtamos, sin embargo, que en el presente caso tenemos una semejanza inversa y en el anterior una semejanza directa.
- 4) Consideremos un giro seguido de homotecia ( $G + h$ ) y pongamos  $L$  para denotar el eje del giro y  $\Pi$  para denotar el plano por  $O$  perpendicular a  $L$ . Entonces,  $L$  es la única recta y  $\Pi$  el único plano que son invariantes.

Tabla 2.7: *Semejanzas al espacio*

$n^+$	$n^-$	$n'$	$\varphi$	$s$	$F$	<b><i>Ecuaciones reducidas</i></b>	<b><i>Nombre</i></b>
3	0	0	$h_{O,k}$	$d$	$O$	$x' = kx, y' = ky, z' = kz$	$h$
2	1	0	$h_{O,k\sigma}$	$i$	$O$	$hx' = kx, y' = ky, z' = -kz$	$SE + h$
1	2	0	$h\rho$	$d$	$O$	$x' = kx, y' = -ky, z' = -kz$	$SA + h$
0	3	0	$h_{O,-k}$	$i$	$O$	$x' = -kx, y' = -ky, z' = -kz$	$h'$
1	0	2	$h\gamma$	$d$	$O$	$x' = kcx - ksy, y' = ksx + kcy, z' = kz$	$G + h$
0	1	2	$h\sigma\gamma$	$i$	$O$	$x' = kcx - ksy, y' = ksx + kcy, z' = -kz$	$G + SE + h$

Tabla 2.8: *Algoritmo de clasificación de las semejanzas del espacio*

Partimos de una afinidad dada por la ecuación matricial  $x'^T = Ax^T + p^T$  y suponemos que hemos verificado la condición  $A^TGA = kG$ , donde  $k \neq 1$ , y calculado  $n^+, n^-$  y  $n'$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} n' \neq 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ = 1 \rightarrow G + h, \cos(\alpha) = \frac{1}{2k} \text{Tr}(A) - \frac{1}{2} \\ n^+ = 0 \rightarrow G + SE + h, \cos(\alpha) = \frac{1}{2k} \text{Tr}(A) + \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ n' = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ = 3 \rightarrow h_{O,k} \\ n^+ = 2 \rightarrow SE + h \\ n^+ = 1 \rightarrow SA + h \\ n^+ = 0 \rightarrow h_{O,-k} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- 5) Consideremos una semejanza del tipo  $G + SE + h$  y pongamos  $\Pi$  para denotar el plano de la simetría y  $L$  para denotar la recta por  $O$  perpendicular a  $\Pi$ . Como en el caso anterior,  $L$  es la única recta y  $\Pi$  el único plano que son invariantes por la semejanza. La distinción entre los dos casos es bien clara: mientras las semejanzas de tipo  $G + SE + h$  son inversas, las consideradas en el caso anterior son directas.

## 2.6 Problemas

**P.2.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión 3 y  $g$  una forma bilineal definida positiva de  $V$ . Sea  $S^2 \subset V$  la esfera unidad de  $V$ , es decir,  $S^2 = \{x \in V \mid g(v, v) = 1\}$ . Dada una base ortonormal  $u = (u_1, u_2, u_3)$  de  $V$ , sea  $p: [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow S^2$  la

aplicación definida por la fórmula

$$p(\varphi, \theta) = \cos(\varphi) \cos(\theta)u_1 + \sin(\varphi) \cos(\theta)u_2 + \sin(\theta)u_3$$

Demostrar que  $p$  es exhaustiva y que induce una biyección entre  $[0, 2\pi) \times (-\pi, \pi)$  y  $S^2 - \{\pm u_3\}$ .

Los ángulos  $\varphi$  y  $\theta$  se suelen denominar, cuando  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ , *longitud* y *latitud* del punto  $p(\varphi, \theta)$  (relativamente a la base  $\mathbf{u}$ ). La latitud de  $\pm u_3$  es  $\pm \frac{\pi}{2}$ , pero la longitud de estos vectores no está definida.

**P. 2.2.** Sean  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , las coordenadas, en una referencia rectangular, de los vértices  $P_i$  de un polígono plano convexo (es decir, para cada lado  $P_i P_{i+1}$  del polígono, todos los vértices están en un mismo semiplano de este lado, donde convenimos que  $P_{n+1} = P_1$ ). Probar que el área del polígono es igual a

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}$$

Observemos que en el caso de un triángulo esta fórmula coincide con la que hemos establecido en el ejercicio E.2.46.

**P. 2.3.** Sean  $L$  y  $L'$  variedades lineales,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$  una base de  $W(L) + W(L')$ ,  $P \in L$ ,  $P' \in L'$  y  $x = P' - P$ . Demostrar que

$$d(L, L') = V(v_1, \dots, v_k, x) / V(v_1, \dots, v_k)$$

y que

$$d(L, L') = \sqrt{|x|^2 - (x \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v})^{-1}(x \cdot \mathbf{v})^T}$$

**P. 2.4.** Sean  $L$  y  $L'$  variedades lineales y supongamos que tenemos una base  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_s)$  de  $(W(L) + W(L'))^\perp$ . Demostrar que si  $P \in L$ ,  $P' \in L'$  y  $x = P' - P$ , entonces

$$d(L, L') = \sqrt{(x \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u})^{-1}(x \cdot \mathbf{u})^T}$$

Demostrar también que

$$d(L, L') = \sqrt{|x|^2 - \delta^2}$$

donde  $\delta = V(u_1, \dots, u_s, x) / V(u_1, \dots, u_s)$ .

**P. 2.5.** Sea  $K$  un cuerpo y  $V$  un espacio vectorial sobre  $K$ . Sea  $g: V \times V \rightarrow K$  una aplicación bilineal y definamos  $\hat{g}: V \rightarrow V^*$  por la fórmula

$$\hat{g}(v)(x) = v \cdot x,$$

para todo  $x \in V$ . Utilizando que  $g$  es bilineal, comprobar que  $\hat{g}$  es lineal.

Se dice que  $g$  es *no degenerada* si  $\hat{g}$  es un isomorfismo. Dado que  $V$  y  $V^*$  tienen la misma dimensión, esta condición equivale a  $\ker(\hat{g}) = \{0\}$ . Dicho explícitamente,  $g$  es no degenerada si y solo si de  $g(v, x) = 0$  para todo  $x \in V$  se puede deducir que  $v = 0$ . Decir que  $g$  es no degenerada se puede formular también de la siguiente manera: para todo  $\xi \in V^*$ , existe un único  $v \in V$  tal que  $g(v, x) = \xi(x)$  para todo  $x \in V$ .

Demostrar que si  $g$  es no degenerada y  $g(x, v) = 0$  para todo  $x \in V$ , entonces  $v = 0$  (Nótese que este enunciado sólo es obvio cuando  $g$  es simétrica.)

Comprobar, finalmente, que la matriz  $G$  de  $g$  en una base  $e$  de  $V$  coincide con la matriz de  $\hat{g}$  respecto a  $e$  y  $e^*$ , donde  $e^*$  designa la base dual de  $e$  (es decir, si  $e = (e_1, \dots, e_n)$ , entonces  $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ , donde  $e_i^* \in V^*$  se define por las relaciones  $e_i^*(e_j) = 0$  si  $i \neq j$  y  $e_i^*(e_i) = 1$ ).

**P. 2.6.** Con las notaciones del problema anterior, demostrar que la aplicación  $g \mapsto \hat{g}$  es un isomorfismo entre el espacio  $L_2(V)$  de las aplicaciones bilineales  $g: V \times V \rightarrow K$  y el espacio  $L(V, V^*)$  de las aplicaciones lineales de  $V$  en  $V^*$ .

Demostrar también que este isomorfismo induce un isomorfismo entre el espacio  $S_2(V) \subseteq L_2(V)$  de las aplicaciones bilineales simétricas y el espacio  $S(V)$  de las aplicaciones lineales simétricas  $\gamma: V \rightarrow V^*$  (decimos que  $\gamma$  es simétrica si  $\gamma = \gamma^T$ , donde  $\gamma^T: V \rightarrow V^*$  es la composición del isomorfismo canónico  $V \rightarrow V^{**}$  con la aplicación  $\gamma^*: V^{**} \rightarrow V^*$  dual de  $\gamma$ ; obsérvese que  $\gamma^T$  es la única aplicación lineal tal que  $\gamma^T(v)(w) = \gamma(w)(v)$ ).

**P. 2.7.** En un espacio vectorial euclidiano de dimensión 1, el producto vectorial  $\wedge_o$  es una función sin variables, es decir, un elemento de  $V$ . ¿Qué elemento?

**P. 2.8** (Teorema de Dieudonné-Cartan). Demostrar que en un espacio euclidiano de dimensión  $n$ , todo desplazamiento se puede obtener como composición de simetrías especulares. Además, el número mínimo de simetrías es no superior a  $n + 1$ .

Indicaciones: Sea  $\varphi$  un desplazamiento,  $P_0, P_1, \dots, P_n$  una referencia y pongamos  $P'_i = \varphi(P_i)$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Sea  $j = j(\varphi) \in [0, n + 1]$  el número de índices  $i \in [0, n]$  tales que  $P'_i \neq P_i$ . Ahora se puede razonar inductivamente para mostrar que  $\varphi$  es producto de, como máximo,  $j$  simetrías especulares. Si  $j = 0$ , entonces  $\varphi = Id$ , e  $Id$  es producto de 0 simetrías especulares. Si  $j > 0$  y  $P'_\ell \neq P_\ell$ , sea  $s$  la simetría especular respecto al hiperplano bisector del segmento  $[P_\ell, P'_\ell]$  (es decir, el hiperplano perpendicular a  $P_\ell P'_\ell$  y que pasa por el punto medio  $M(P_\ell, P'_\ell)$  de  $[P_\ell, P'_\ell]$ ). Entonces  $\varphi' = s\varphi$  deja fijo  $P_i$  si  $P_i = P'_i$  y además deja fijo  $P_\ell$ , lo cual muestra que  $j(\varphi') \leq j - 1$ . Por recurrencia  $\varphi'$  es producto de, como máximo,  $j - 1$  simetrías especulares y, así,  $\varphi = s\varphi'$  es producto de como máximo  $j$  simetrías especulares.

**P. 2.9.** Demostrar que las únicas semejanzas  $\varphi$  de un espacio euclidiano tales que  $\varphi^2 = Id$  son las simetrías  $\sigma_L$  respecto a variedades lineales  $L$ .



**P.2.14.** Demostrar que un cuaternio es puro (es decir, que su parte real es 0) si y solo si su cuadrado es un número real no positivo. Deducir de ello que si  $q$  es un cuaternio tal que  $q^2 = -1$ , entonces  $q \in S^2$ , donde  $S^2$  es la esfera de radio 1 de  $V_3$ , y recíprocamente. Indicación: Si ponemos  $q = \lambda + v$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $v \in V_3$ , entonces  $q^2 = (\lambda^2 - |v|^2) + 2\lambda v$ .

**P.2.15.** Si  $v, x \in V_3$ , demostrar que  $v xv = -2(v \cdot x)v + |v|^2 x$ .

El objeto básico de los problemas siguientes es exponer algunas de las notables relaciones que existen entre los cuaternios y la geometría del espacio ordinario. A pesar de que se pueden entender y resolver con lo que llevamos dicho, antes de proseguir con los enunciados haremos unas consideraciones que pueden ayudar a comprender su significado geométrico.

Originalmente Hamilton buscaba reproducir para los vectores  $V_3$  del espacio ordinario una interpretación similar a la de los vectores de un plano vectorial real como números complejos. Según esta interpretación, se puede mirar un vector  $z \in V_2$  como la transformación  $x \mapsto zx$ , que equivale a aplicar al vector  $x$  un giro de amplitud  $\arg(z)$  seguido de una homotecia de razón  $|z|$ . Así pues, existe una correspondencia biyectiva entre los números complejos no nulos y las semejanzas lineales directas de  $V_2$ .

Pero tal interpretación no es posible para  $V_3$ . La razón de ello es que un vector de  $V_3$  tiene tres grados de libertad (uno para cada una de sus componentes respecto a una base), mientras que las semejanzas lineales del mismo espacio tienen cuatro grados de libertad: uno para fijar la razón de la semejanza y tres para dar la transformación de una base ortonormal dada  $u_1, u_2, u_3$  en otra base ortonormal  $u'_1, u'_2, u'_3$ . Observemos que tenemos dos grados de libertad para dar la imagen  $u'_1$  de  $u_1$ , por el problema P.2.1, y, una vez fijado  $u'_1$ , un grado de libertad para fijar  $u'_2$  dentro de  $\langle u'_1 \rangle^\perp$ .

Por tanto, una hipotética estructura con la cual se puedan representar las semejanzas lineales directas de un espacio vectorial euclidiano de dimensión 3, de manera análoga a como se pueden representar las semejanzas lineales directas de un plano vectorial euclidiano con números complejos, debe tener necesariamente cuatro grados de libertad. Tras esta constatación Hamilton denominó a los elementos de esta estructura hipotética *cuaternios* y poco a poco fue dilucidando muchas de las maravillosas propiedades que habían de tener. Uno de los pasos más importantes consistió en darse cuenta de que la no conmutatividad de la composición de semejanzas lineales del espacio forzaba, por contraste con lo que sucede con las semejanzas de un plano, que los cuaternios  $\pm q$  tenían que representar la misma semejanza. Una vez entendido este hecho, Hamilton pronto llegó a poder definir *formalmente* los cuaternios como expresiones de la forma  $a1 + bi + cj + dk$ , donde  $\pm 1$  son los cuaternios que representan la identidad y  $\pm i, \pm j, \pm k$  los que representan los giros de amplitud  $\pi$  alrededor de los ejes de una referencia ortonormal dada. Además, con esta representación la multiplicación de cuaternios correspondiente a la composición de semejanzas queda determinada imponiendo que sea bilineal y que se cumplan las relaciones de Hamilton (fórmulas [2.37]). Aquí señalamos únicamente que las rotaciones  $I, J, K$  que corresponden a  $i, j, k$  cumplen

$I^2 = J^2 = K^2 = Id$ ,  $IJ = JI = K$ ,  $JK = KJ = I$  y  $KI = IK = J$ , con lo cual el álgebra de los cuaternios  $\{aI + bi + cj + dk\}$  sería conmutativa si la representación de semejanzas por cuaternios fuese biunívoca.

Habiendo expuesto la introducción formal de los cuaternios al final de la sección 2.3, nos proponemos ahora profundizar en su conocimiento según las ideas que hemos explicado, al objeto de comprender el proceso por el cual se asocia una semejanza lineal a un cuaternio y de utilizarlo para obtener nuevas propiedades de las semejanzas y de las isometrías lineales.

**P. 2.16.** Dado un cuaternio  $q = \lambda + v$  no nulo ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V_3$ ) y un  $x \in V_3$ , pongamos  $f_q(x) = qxq^*$ . Demostrar que  $f_q(x) \in V_3$ , que la aplicación  $f_q: V_3 \rightarrow V_3$  es una semejanza lineal directa de razón  $|q|^2$  y que  $f_q(v) = |q|^2v$  (es decir, que  $v$  es un vector propio de  $f_q$  de valor propio  $|q|^2$ ). En particular, tenemos que  $f_q$  es una isometría lineal de  $V_3$  si y solo si  $q \in SU_2$ , y en este caso  $v$  es un vector propio de  $f_q$  de valor propio 1 (recordemos que  $SU_2$  es el grupo de cuaternios de módulo 1).

**P. 2.17.** Demostrar que si  $q = \lambda + v$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V_3$ ) es un cuaternio no nulo y  $x \in V_3$ , entonces

$$f_q(x) = 2(v \cdot x)v + (\lambda^2 - |v|^2)x + 2\lambda v \wedge x$$

En particular, si  $\lambda = 0$ , tenemos que

$$f_v(x) = 2(v \cdot x)v - |v|^2x$$

y, si  $v = 0$ , que

$$f_\lambda(x) = \lambda^2x$$

Repárese que la última fórmula puede escribirse  $f_\lambda = h_{\lambda^2}$  (es decir, la homotecia de razón  $\lambda^2$ ).

**P. 2.18.** Usar el problema anterior para mostrar que, si  $v \in V_3$ ,  $v \neq 0$  y  $x \in \langle v \rangle^\perp$ , entonces  $f_v(x) = -|v|^2x$ . A continuación, mostrar que  $f_v = |v|^2s_{\langle v \rangle}$  (recordemos que  $s_{\langle v \rangle}$  es la simetría respecto a  $\langle v \rangle$ ). Así pues,  $f_v$  es la composición del giro de amplitud  $\pi$  alrededor de  $v$  seguido de la homotecia de razón  $|v|^2$ .

**P. 2.19.** Sea  $q = \lambda + v$  un cuaternio ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V_3$ ) y supongamos que  $v \neq 0$ . Demostrar que  $x \in V_3$  es un vector propio de  $f_q$  si y solo si, o bien  $x \in \langle v \rangle$ , o bien  $x \in \langle v \rangle^\perp$  y  $q = v$  (es decir,  $\lambda = 0$ ). Obtener de ello que  $f_q$  es una semejanza directa (con las notaciones de 2.43,  $n^+ = 1$  y  $n^- = 0$  si  $\lambda \neq 0$ ,  $n^+ = 1$  y  $n^- = 2$  si  $\lambda = 0$ ).

Este último hecho puede demostrarse también de la siguiente manera. Sea  $u_1 = v/|v|$  y formemos una base ortonormal  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  con la misma orientación que  $i, j, k$ . Entonces puede verse, usando las fórmulas anteriores, que la matriz de  $f_q$  en la base  $\mathbf{u}$  es

$$\begin{pmatrix} |q|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - |v|^2 & -2\lambda|v| \\ 0 & 2\lambda|v| & \lambda^2 - |v|^2 \end{pmatrix}$$

de donde puede deducirse que  $\det(f_q) = |q|^6 > 0$ .

**P.2.20.** Con las notaciones y resultados del problema anterior, si ponemos  $g$  para denotar la métrica euclidiana de  $V_3$ , entonces podemos escribir  $f_q \in \mathcal{S}^+(g)$ , cuando  $q \in \mathbb{H}^*$ , y  $f_q \in O^+(g)$ , cuando  $q \in SU_2$ , donde ponemos  $\mathcal{S}^+(g) \subset \mathcal{S}(g)$  para denotar el subgrupo del grupo  $\mathcal{S}(g)$  de las semejanzas lineales formado por las semejanzas lineales directas de  $V_3$  y  $O^+(g) \subset O(g)$  para denotar el subgrupo de  $O(g)$  formado por las isometrías lineales con determinante  $+1$ . Demostrar que la aplicación  $\sigma : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathcal{S}^+(g)$  tal que  $\sigma(q) = f_q$  es un homomorfismo de grupos. Demostrar también, utilizando la fórmula del problema P.2.17, que  $\ker(\sigma) = \{\pm 1\}$ . Notemos que  $\sigma$  induce un homomorfismo  $SU_2 \rightarrow O^+(g)$  (que también será denotado por  $\sigma$ ) y que su núcleo es  $\{\pm 1\} \cap SU_2 = \{\pm 1\}$ .

**P.2.21.** Sea  $q = \lambda + v$  un cuaternio ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V_3$ ) y supongamos que  $v \neq 0$ . Sea  $x \in \langle v \rangle^\perp \subseteq V_3$ ,  $x \neq 0$ , y pongamos  $\alpha = \alpha_o(x, f_q(x))$ , donde una base  $u_1, u_2$  de  $\langle v \rangle^\perp$  es  $o$ -orientada si y solo si la base  $u_1, u_2, v$  de  $V_3$  tiene la misma orientación que la base  $i, j, k$ . Demostrar que

$$\cos(\alpha) = \frac{\lambda^2 - |v|^2}{|q|^2} = \frac{\lambda^2 - |v|^2}{\lambda^2 + |v|^2} \quad \text{y} \quad \sin(\alpha) = V_o(x, f_q(x)) = \frac{2\lambda|v|}{|q|^2} = \frac{2\lambda|v|}{\lambda^2 + |v|^2}$$

Como  $\alpha$  es independiente de  $x$ , de esto resulta que  $f_q$  es la composición de  $\rho_{v,\alpha}$ , el giro directo de amplitud  $\alpha$  alrededor de  $v$ , con la homotecia de razón  $|q|^2$ .

**P.2.22.** Demostrar que los homomorfismos  $\sigma : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathcal{S}^+(g)$  y  $\sigma : SU_2 \rightarrow O^+(g)$  son exhaustivos. Por tanto, toda semejanza directa de  $V_3$  es de la forma  $\sigma(q) = f_q$ , con  $q \in \mathbb{H}^*$  determinado salvo un signo. En particular, toda isometría lineal de  $V_3$  es de la forma  $\sigma(q)$ , con  $q \in SU_2$  determinado salvo un signo.

**P.2.23.** Sean  $B_3 = \{v \in V_3 \mid |v| < 1\}$  y  $\overline{B}_3 = \{v \in V_3 \mid |v| \leq 1\} = B_3 \sqcup S^2$ , donde  $S^2 = \{v \in V_3 \mid |v| = 1\}$ . Dado  $v \in \overline{B}_3$ , sea  $\hat{v} = \sqrt{1 - |v|^2} + v \in \mathbb{H}$ . Comprobar que  $\hat{v} \in SU_2$  y demostrar que si  $\alpha \in [0, \pi]$  es el ángulo determinado por la relación  $\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{1 - |v|^2}$ , entonces  $\sigma(\hat{v}) = \rho_{v,\alpha}$ . Deducir de ello que la aplicación  $\overline{B}_3 \rightarrow O^+(g)$  tal que  $v \mapsto \sigma(\hat{v})$  es exhaustiva, que su restricción a  $B_3$  es inyectiva y que, si  $v \neq v'$  y  $\sigma(\hat{v}) = \sigma(\hat{v}')$ , entonces  $v \in S^2$  y  $v' = -v$ .

**P.2.24.** Para cada vector  $u \in S^2$  y cada ángulo  $\alpha \in [0, \pi]$ , pongamos

$$\hat{u}_\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)u \in \mathbb{H}$$

Comprobar que  $\hat{u}_\alpha \in SU_2$  y que  $\sigma(\hat{u}_\alpha) = \rho_{u,\alpha}$ . Obtener de ello que la aplicación  $S^2 \times (0, \pi] \rightarrow O^+(g)$  tal que  $(u, \alpha) \mapsto \sigma(\hat{u}_\alpha)$  es exhaustiva y que, si  $\sigma(\hat{u}_\alpha) = \sigma(\hat{u}'_{\alpha'})$ , con  $(u, \alpha) \neq (u', \alpha')$ , entonces  $u' = -u$  y  $\alpha = \alpha' = \pi$ . Nótese que  $\rho_{u,0} = Id$  para todo  $u \in S^2$ .



### 3 Geometría proyectiva

En la sección 3.0 se hacen distintas consideraciones para motivar la introducción de los dos conceptos principales en los cuales se basa nuestro tratamiento de la geometría proyectiva: la noción de espacio proyectivo y la noción de clausura proyectiva de un espacio afín.

La sección no es necesaria, desde un punto de vista estrictamente lógico, en el resto del capítulo. Sin embargo, al lector que empieza el estudio de la geometría proyectiva puede resultarle indispensable para asimilar propiamente dichos conceptos.

El espacio proyectivo y las variedades lineales se introducen formalmente en la sección 3.1. Después de considerar sus propiedades más fundamentales, se demuestran algunos de los resultados más básicos, como el teorema de Desargues, el teorema de Pappus y la fórmula de las dimensiones para variedades lineales. Al final de la sección se estudia la clausura proyectiva de un espacio afín y de sus variedades lineales.

En la sección 3.2 se introducen, tras unas primeras consideraciones relativas a las configuraciones de puntos, las referencias proyectivas, y se estudian las coordenadas proyectivas, especialmente en relación con la representación de las variedades lineales mediante ecuaciones —implícitas y explícitas. A continuación (sección 3.3), se estudian las proyectividades y, especialmente, las perspectividades, por un lado, y el grupo de las homografías de un espacio proyectivo, por el otro. También se muestra cómo el grupo de afinidades de un espacio afín se incluye en el grupo de homografías de su clausura proyectiva.

El concepto de razón doble, uno de los más básicos de la geometría proyectiva, se estudia en la sección 3.4. Antes de su definición formal, se explica su significación «proyectiva» en términos de geometría métrica, e inmediatamente después, se muestra cómo se relaciona con las coordenadas proyectivas y con la razón simple. A continuación, se estudian sus propiedades en relación con las permutaciones de los puntos. En los dos últimos apartados, se introducen y estudian las cuaternas armónicas y las anarmónicas. Los resultados más importantes que incluimos, relativos a las cuaternas armónicas, son el teorema del cuadrángulo completo y la construcción del cuarto armónico.

Finalizamos el capítulo con una sección destinada al principio de dualidad. Este principio produce, para cada teorema de geometría proyectiva, un nuevo teorema, de-

nominado «dual» de aquel. En el caso del plano, por ejemplo, el dual del teorema de Pappus es un nuevo teorema de incidencia y el dual del teorema de Desargues coincide con su recíproco. En cuanto a la justificación del principio de dualidad, citemos tan solo que se basa en la consideración del espacio proyectivo  $\mathbb{P}(E^\vee)$  del espacio vectorial  $E^\vee$ , dual del espacio vectorial  $E$ , y en la relación natural que hay entre las variedades lineales de  $\mathbb{P}(E)$  y  $\mathbb{P}(E^\vee)$ .

### 3.0 De la perspectiva al espacio proyectivo

Entre las ideas más importantes debidas a Desargues (1593-1662), históricamente el primero que intentó sistematizar la geometría proyectiva, debe citarse la adición de un punto (denominado «impropio») común a todas las rectas de un mismo haz de rectas paralelas, con lo cual dos rectas coplanarias distintas siempre se cortan en un punto (impropio si son paralelas).

En esta sección, primero aducimos algunas razones, originadas en el estudio de la perspectiva, que muestran la naturalidad de la idea de los puntos impropios. Después describimos brevemente la clausura proyectiva de un espacio afín, es decir, la estructura que resulta de añadir los puntos impropios a los puntos ordinarios (o «propios»). Finalmente, exponemos una demostración del teorema de Desargues de los triángulos en perspectiva, seguida de unas reflexiones sobre la «unificación» que el punto de vista proyectivo aporta con relación a la geometría afín.

#### *Perspectiva. Proyección y sección*

Los pintores del Renacimiento se dieron cuenta de que el dibujo en «perspectiva» de un objeto debe satisfacer las relaciones que se esquematizan en la figura 3.1: si  $O$  es el punto desde el cual se contemplan los puntos  $P, Q, R, \dots$  de la figura, y  $\Pi$  es el plano del dibujo, los puntos  $P', Q', R', \dots$  correspondientes a  $P, Q, R, \dots$  son la intersección de las rectas  $OP, OQ, OR, \dots$  con  $\Pi$ .

De la descripción anterior abstraer dos operaciones geométricas fundamentales: la primera consiste en *proyectar* un punto  $P$  del espacio afín desde un punto fijo  $O$ , es decir, en formar la recta  $OP$  (denominada la *proyectante de  $P$  desde  $O$* ), y la segunda consiste en *cortar* las rectas por  $O$  (que denominaremos *proyectantes desde  $O$* ) por un plano  $\Pi$  que no pasa por  $O$ . La composición de estas dos operaciones nos da la *proyección desde  $O$  de un punto  $P$  sobre el plano  $\Pi$* , esto es, el punto  $P'$  de intersección con  $\Pi$  de la proyectante de  $P$  desde  $O$ .

Debemos darnos cuenta de que  $O$  es el único punto que no se puede proyectar desde  $O$ , y que la sección por  $\Pi$  sólo está definida para las proyectantes desde  $O$  que cortan a  $\Pi$ , es decir, no está definida para las proyectantes paralelas a  $\Pi$ . De esto resulta que

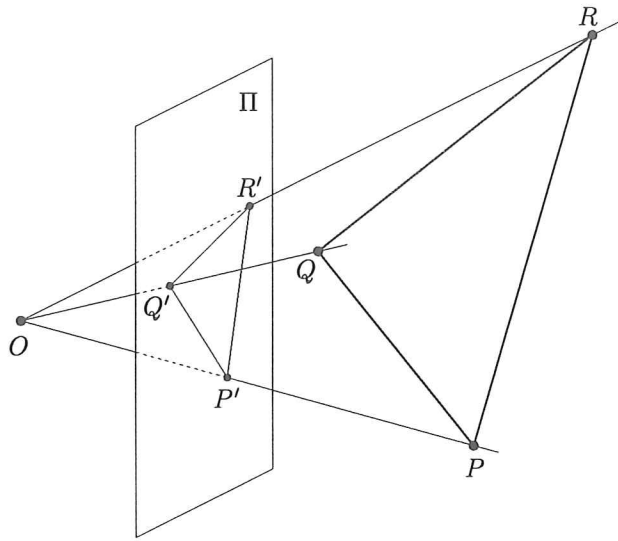


Figura 3.1: Dibujo de  $PQR$  sobre el plano  $\Pi$ , en perspectiva desde  $O$

la proyección de un punto  $P$  sobre el plano  $\Pi$  no está definida precisamente cuando la proyectante  $OP$  es paralela a  $\Pi$ .

### Representación proyectiva de una recta

Para que pueda verse que el comportamiento de las proyecciones respecto al paralelismo no es tan insatisfactorio como podría hacer pensar el último párrafo, estudiemos primero con más detalle la proyección de una recta desde un punto.

Consideremos una recta  $L$  que no pasa por  $O$  y formemos el conjunto  $L_O$  de las proyectantes desde  $O$  de los puntos  $P$  de  $L$  (v. figura 3.2).

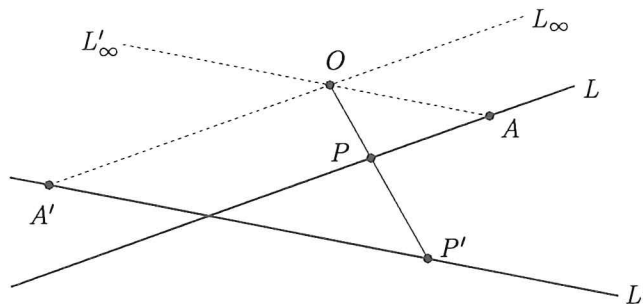


Figura 3.2: Representación proyectiva de las rectas  $L$  y  $L'$

Está claro que  $L_O$  coincide con el conjunto de rectas por  $O$  contenidas en el plano

$L \vee O$ , excepto la recta por  $O$  paralela a  $L$ . Si ponemos  $\bar{L}_O$  para denotar el conjunto de rectas por  $O$  contenidas en el plano  $L \vee O$ , conjunto que denominaremos la «representación proyectiva» de  $L$ , y  $OL_\infty \in \bar{L}_O$  para denotar la recta por  $O$  paralela a  $L$ , entonces tenemos  $\bar{L}_O = L_O \sqcup \{OL_\infty\}$ .

La proyectante  $OL_\infty$  solo es excepcional respecto a  $L$  o, mejor dicho, respecto a las rectas paralelas a  $L$ . Para verlo con más relieve, consideremos otra recta  $L'$  del plano  $L \vee O$ , no paralela a  $L$  y que no pasa por  $O$ . Entonces  $OL_\infty$  es la proyectante desde  $O$  del punto  $A'$  de  $L'$  obtenido cortando  $OL_\infty$  y  $L'$ , es decir,  $OL_\infty = OA'$ . Es natural, pues, pensar  $L_\infty$  como un «punto» (que podemos denominar «punto del infinito» de  $L$ ), tal que su proyectante desde  $O$  es la recta  $OL_\infty$ . En contraste, si  $A$  es la intersección de  $L$  con la paralela a  $L'$  por  $O$  (que de acuerdo con las notaciones ya explicadas denotaremos  $OL'_\infty$ ), entonces la proyectante  $OA \in L_O$  de  $A$  no es la proyectante de ningún punto de  $L'$ . Pero como  $OA = OL'_\infty$ , es natural decir que la proyección de  $A$  sobre  $L'$  es el «punto»  $L'_\infty$ .

### *Puntos impropios*

Las observaciones del apartado anterior nos sugieren la construcción, que exponemos a continuación y que se debe esencialmente a Desargues, de la clausura proyectiva de un espacio afín.

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín. Pongamos  $\mathbb{A}_\infty$  para denotar el conjunto de clases de equivalencia de las rectas de  $\mathbb{A}$  por la relación de paralelismo. A los elementos de  $\mathbb{A}_\infty$  los denominaremos *puntos impropios* de  $\mathbb{A}$  y al conjunto  $\bar{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \sqcup \mathbb{A}_\infty$  la *clausura proyectiva* de  $\mathbb{A}$ . Pondremos  $L_\infty \in \mathbb{A}_\infty$  para denotar la clase de equivalencia de una recta  $L$ , y diremos que  $L_\infty$  es el *punto impropio*, o del *infinito*, de  $L$ . Observemos que a todo vector  $v \neq 0$  le corresponde un punto impropio, que denotaremos  $[v]$ , y que es la clase de las rectas que tienen espacio director  $\langle v \rangle$ . Está claro, pues, que  $[v] = [v']$  si y solo si existe un escalar  $\lambda$  tal que  $v' = \lambda v$ , y que si  $v$  es un vector director de una recta  $L$ , entonces  $L_\infty = [v]$ . Pondremos  $\bar{L} = L \sqcup \{L_\infty\}$ , y diremos que  $\bar{L}$  es la *clausura proyectiva* de  $L$ .

Dado un punto impropio  $X \in \mathbb{A}_\infty$ , y un punto  $O \in \mathbb{A}$ , pondremos  $OX$  para denotar la única recta por  $O$  cuyo punto impropio es  $X$ , es decir, la única recta por  $O$  que es de la clase  $X$ . Así, si  $L$  es una recta,  $OL_\infty$  es la recta por  $O$  paralela a  $L$ . Diremos que  $OX$  es la proyectante desde  $O$  del punto impropio  $X$ .

Análogamente, si  $\Pi$  es un plano, pondremos  $\Pi_\infty$  para denotar el conjunto de puntos impropios de las rectas contenidas en  $\Pi$ , o, lo que es lo mismo, el conjunto de puntos impropios de las rectas paralelas a  $\Pi$ . Si  $W$  es el espacio director de  $\Pi$ , entonces  $\Pi_\infty$  es el conjunto, que también denotaremos  $[W]$ , de puntos de la forma  $[v]$ , donde  $v \in W - \{0\}$ .

Consideremos ahora, con el propósito de ilustrar las ideas anteriores acerca de las proyecciones y secciones, la proyección de un plano  $\Pi$  que no pasa por  $O$  (v. la figura

3.3). La proyectante  $OP$  de un punto  $P \in \Pi$  variable nos da una biyección entre  $\Pi$  y el conjunto  $\Pi_O$  de las proyectantes desde  $O$  no paralelas a  $\Pi$ . Por otro lado, la proyectante  $OX$  de un punto variable  $X \in \Pi_\infty$  nos da una biyección entre  $\Pi_\infty$  y el conjunto de proyectantes desde  $O$  paralelas a  $\Pi$ . Por analogía con el caso de una recta, pondremos  $\bar{\Pi}_O$  para denotar el conjunto de proyectantes desde  $O$  contenidas en  $\Pi \vee O$ , con lo cual tendremos una biyección entre  $\bar{\Pi}$  y  $\bar{\Pi}_O$ , dada por  $X \mapsto OX$ , para todo  $X \in \bar{\Pi}$ . Diremos que  $\bar{\Pi}_O$  es la *representación proyectiva* de  $\Pi$ .

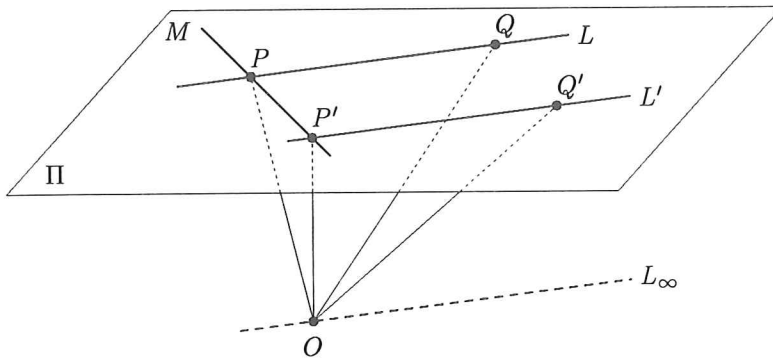


Figura 3.3: Proyección de un plano desde un punto

Sea  $L$  una recta contenida en  $\Pi$ . La biyección entre  $\bar{\Pi}$  y  $\bar{\Pi}_O$  ( $X \mapsto OX$ ), restringida a  $\bar{L}$ , nos da la biyección, que hemos descrito anteriormente, entre  $\bar{L}$  y el conjunto  $\bar{L}_O$ . Al punto impropio de  $L$ ,  $L_\infty$ , le corresponde la proyectante  $OL_\infty$ . (Nótese que en el apartado anterior  $OL_\infty$  no era más que una notación para designar la recta por  $O$  paralela a  $L$ ; esta notación nos ha sugerido tratar  $L_\infty$  como un punto; ahora, una vez definido lo que hace falta entender por  $L_\infty$ ,  $OL_\infty$  representa efectivamente la proyectante de  $L_\infty$  desde  $O$ .)

Si  $M$  es otra recta del plano  $\Pi$ , no paralela a  $L$ , y si  $\{P\} = L \cap M$ , entonces  $\{OP\} = \bar{L}_O \cap \bar{M}_O$ , en correspondencia con la relación  $\bar{L} \cap \bar{M} = \{P\}$ . Por otro lado, si  $L'$  es una recta del plano  $\Pi$  paralela a  $L$ , pero distinta de  $L$ , entonces  $\bar{L}_O \cap \bar{L}'_O = \{OL_\infty\}$  ( $= OL'_\infty$ ), en correspondencia con la relación  $\bar{L} \cap \bar{L}' = \{L_\infty\}$ .

Hemos visto, pues, que la clausura proyectiva  $\bar{\Pi}$  de un plano  $\Pi$  del espacio afín de dimensión 3 (bajo esta hipótesis tenemos  $\Pi \vee O = \mathbb{A}^3$ ) se puede describir como el conjunto de rectas que pasan por un punto  $O$  exterior a  $\Pi$ . Además, en esta correspondencia la clausura proyectiva de una recta  $L$  se representa como el conjunto de rectas por  $O$  contenidas en el plano  $L \vee O$ , de manera que queda establecida una biyección entre las rectas  $L$  de  $\Pi$  y los planos que pasan por  $O$ , excepto el paralelo a  $\Pi$ . Ahora los puntos impropios de  $\Pi$  están en correspondencia biyectiva con las rectas por  $O$  paralelas a  $\Pi$ . Como estas rectas son las rectas por  $O$  contenidas en el plano por  $O$  paralelo a  $\Pi$ , vemos que  $\Pi_\infty$  tiene, desde el punto de vista de las proyecciones desde  $O$ , la misma estructura que  $\bar{L}$ , razón por la cual  $\Pi_\infty$  se denomina «recta de puntos

impropios» de  $\Pi$ .

Como veremos en la sección 3.1, la representación proyectiva de un plano se puede formular fácilmente en términos de álgebra lineal, independientes de la geometría afín. Se obtiene así la noción de espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial, que es el objeto a partir del cual desarrollaremos sistemáticamente la geometría proyectiva.

### Teorema de Desargues

Para familiarizarnos un poco más con el lenguaje de Desargues de los puntos impropios y con su significación, enunciaremos y demostraremos el teorema, que lleva su nombre, relativo a dos triángulos en perspectiva. De este teorema, daremos otra demostración en la sección 3.1. Trabajaremos directamente en el espacio  $\bar{\mathbb{A}}$  y nos basaremos en el hecho, establecido previamente, que dos rectas coplanarias distintas de este espacio siempre se cortan en un punto (impropio si las rectas son paralelas).

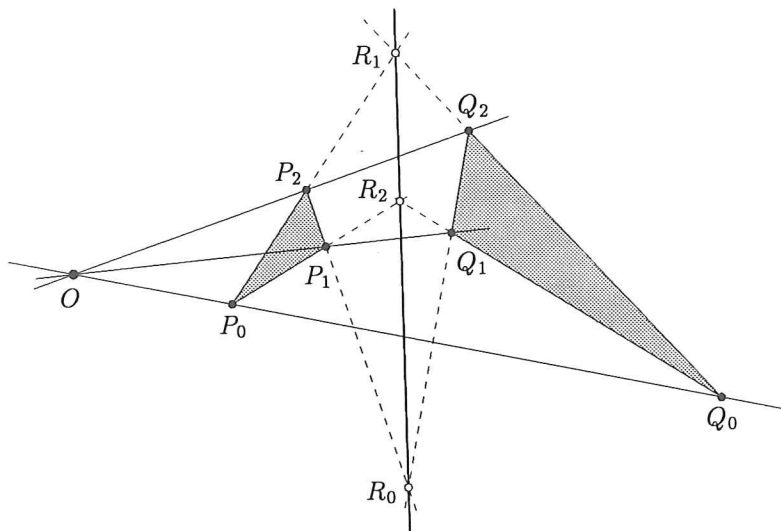


Figura 3.4: Teorema de Desargues de los triángulos en perspectiva

**3.1 Teorema** (Desargues, 1639). Sean  $P_0P_1P_2$  y  $Q_0Q_1Q_2$  dos triángulos del espacio afín  $\mathbb{A}$  tales que  $P_i \neq Q_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , y supongamos que están en perspectiva en el espacio  $\bar{\mathbb{A}}$ , es decir, de forma que las rectas  $P_iQ_i$  son concurrentes en un punto  $O$ ,  $i = 0, 1, 2$  (v. la figura 3.4). Entonces las intersecciones  $R_0 = P_1P_2 \cap Q_1Q_2$ ,  $R_1 = P_2P_0 \cap Q_2Q_0$ ,  $R_2 = P_0P_1 \cap Q_0Q_1$  son puntos (posiblemente impropios) y estos puntos están sobre una recta.

**Demostración:** Hagamos primero la demostración del caso en que los planos de los dos triángulos son distintos. Sea  $\bar{L}$  la clausura proyectiva de la recta de intersección de

estos dos planos (si son paralelos, tomamos como  $\bar{L}$  la recta común de puntos impropios de los dos planos). Como las rectas  $P_1Q_1$  y  $P_2Q_2$  son coplanarias (porque se cortan en el punto  $O$ ), las rectas  $P_1P_2$  y  $Q_1Q_2$  se cortan en un punto,  $R_0$ , posiblemente impropio. Análogamente se ve que  $R_1$  y  $R_2$  son puntos, posiblemente impropios. El resultado queda establecido por el hecho de que  $R_0, R_1, R_2 \in \bar{L}$ . En efecto, el punto  $R_0$ , por ejemplo, es del plano del triángulo  $P_0P_1P_2$  (o de su clausura proyectiva), por ser de la recta  $P_1P_2$ , y es del plano de  $Q_0Q_1Q_2$  (o de su clausura proyectiva), por ser de la recta  $Q_1Q_2$ , de donde resulta que  $R_0 \in \bar{L}$ . Que  $R_1$  y  $R_2$  son puntos de  $\bar{L}$  se prueba de un modo similar.

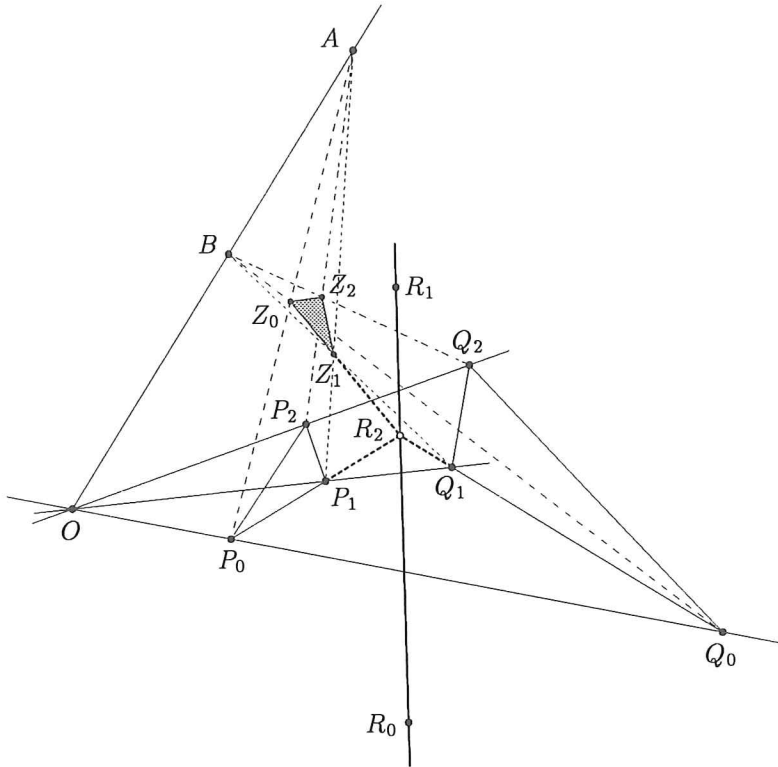


Figura 3.5: Reducción del teorema de Desargues para triángulos coplanarios al caso de triángulos no coplanarios

Veamos ahora el caso en que los planos de los triángulos  $P_0P_1P_2$  y  $Q_0Q_1Q_2$  coinciden. El método que seguiremos consiste en reducir este caso al caso anterior. Esto lo haremos mediante una construcción que hemos representado en la figura 3.5.

Sea  $A$  un punto exterior al plano  $\Pi$  de los triángulos. Sea  $B$  un punto de la recta  $OA$ , distinto de  $O$  y de  $A$ . Puesto que las rectas  $AB$  y  $P_0Q_0$  son coplanarias (porque son concurrentes en  $O$ ), las rectas  $AP_0$  y  $BQ_0$  se cortan en un punto  $Z_0$  (posiblemente impropio). Los puntos  $Z_1$  y  $Z_2$  se definen análogamente. Se obtiene así un triángulo  $Z_0Z_1Z_2$  que está en perspectiva con  $P_0P_1P_2$  desde  $A$  y en perspectiva con  $Q_0Q_1Q_2$

desde  $B$ . Sea  $L$  la recta de intersección del plano de  $Z_0Z_1Z_2$  con  $\Pi$ . Entonces,  $P_0P_1$  y  $Z_0Z_1$  se cortan en un punto  $R_2$  de  $\bar{L}$  (por el caso que ya hemos demostrado). Por la misma razón,  $Q_0Q_1$  y  $Z_0Z_1$  se cortan en un punto de  $\bar{L}$ , y este punto sólo puede ser  $R_2$ , ya que  $R_2$  es el punto de intersección de  $Z_0Z_1$  con  $\bar{L}$ . Por tanto,  $P_0P_1$  y  $Q_0Q_1$  pasan por  $R_2$  y, al ser rectas distintas, su intersección es exactamente el punto  $R_2$ . Del mismo modo se ve que  $P_1P_2$  y  $Q_1Q_2$  se cortan en un punto  $R_0 \in \bar{L}$  y que  $P_2P_0$  y  $Q_2Q_0$  se cortan en un punto  $R_1 \in \bar{L}$ .  $\square$

La naturaleza «proyectiva» del teorema de Desargues queda subrayada si consideramos los numerosos casos particulares que resultan, desde el punto de vista del espacio afín  $\mathbb{A}$ , cuando uno o más elementos de los datos pasan a ser impropios. Para ilustrarlo, bastará analizar un ejemplo con cierto detalle. Si suponemos que el punto  $O$  es impropio, entonces las rectas  $P_0Q_0$ ,  $P_1Q_1$ ,  $P_2Q_2$  son paralelas (v. la figura 3.6). Supongamos, además, que los lados  $P_1P_2$  y  $Q_1Q_2$  son paralelos. Esto significa que el punto  $R_0$  es el punto impropio (común) de estas dos rectas. Por tanto, cuando decimos que  $R_0$ ,  $R_1$  y  $R_2$  están alineados, realmente estamos diciendo que el punto impropio de la recta  $R_1R_2$  es  $R_0$ , es decir, que la recta  $R_1R_2$  es paralela a los lados paralelos  $P_1P_2$  y  $Q_1Q_2$ .

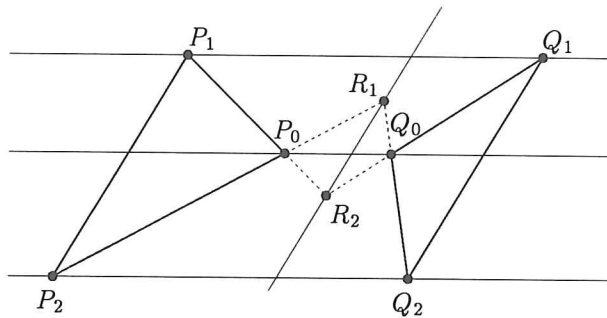


Figura 3.6: Un caso particular del teorema de Desargues

Este resultado afín, y otros análogos, sin duda se podrían demostrar directamente solo con recursos de geometría afín, pero para cada uno haría falta una demostración distinta y, por regla general, estas demostraciones estarían desconectadas unas de otras. Así pues, la ventaja del lenguaje de la clausura proyectiva es que nos permite ver todos estos casos como especializaciones de una situación general y, en particular, demostrarlos de una manera unificada.

### 3.1 Espacio proyectivo

En la sección 3.0 hemos visto que la cierre proyectivo de un plano del espacio afín ordinario se podía representar por el conjunto de rectas que pasan por un punto  $O$  exterior al plano y que, en esta representación, la cierre proyectivo de una recta del citado plano (incluyendo su recta de puntos impropios) es el conjunto de rectas por  $O$  contenidas en un plano.

En general, el conjunto de rectas por un punto  $O$  de un espacio afín  $A'$  de dimensión  $n + 1$  es una representación de la cierre proyectivo de cualquier variedad lineal  $A$  de dimensión  $n$  de  $A'$  que no pasa por  $O$ . Observemos que si  $E$  es el espacio vectorial de  $A'$ , entonces el conjunto de rectas por  $O$  se identifica, por la biyección  $A' \simeq E$  tal que  $X \mapsto X - O$ , con el conjunto de subespacios vectoriales de dimensión 1 de  $E$ . En esta representación, la cierre proyectivo de una variedad lineal afín  $L$  de dimensión  $r$  de  $A$  se identifica con las rectas por  $O$  contenidas en una variedad lineal de dimensión  $r + 1$ , es decir, con el conjunto de subespacios lineales de dimensión 1 de un subespacio lineal de dimensión  $r + 1$  de  $E$ .

Estas observaciones muestran que el concepto de cierre proyectivo de un espacio afín se puede definir puramente en términos de álgebra lineal, sin referencia al espacio afín inicial. Las definiciones siguientes (particularmente las de espacio proyectivo, de variedad lineal y de dimensión) no son más que una transcripción explícita de esta constatación. Cuando hayamos desarrollado un poco más este nuevo lenguaje, veremos (en el último apartado de esta sección) cómo se puede reformular la cierre proyectivo de un espacio afín.

En lo que resta de este capítulo,  $K$  denotará un cuerpo conmutativo y *espacio vectorial* significará «espacio vectorial sobre  $K$  de dimensión finita».

#### *Definiciones y notaciones básicas*

Dado un espacio vectorial  $E$  de dimensión  $n + 1$  ( $n \geq -1$ ), pondremos  $[E]$  para denotar el conjunto de sus subespacios vectoriales de dimensión 1. Diremos que  $[E]$  es el *espacio proyectivo* asociado a  $E$ . También diremos que  $[E]$  tiene dimensión  $n$ , y pondremos  $\dim[E] = n$ . En lugar de la notación  $[E]$ , también se escribe  $\mathbb{P}(E)$ , e incluso  $\mathbb{P}$  si  $E$  puede sobreentenderse. Para indicar que el espacio proyectivo  $\mathbb{P}$  tiene dimensión  $n$ , escribiremos  $\mathbb{P}^n$ . Si  $n = 1$ , diremos que  $[E]$  es una *recta proyectiva* y si  $n = 2$ , diremos que  $[E]$  es un *plano proyectivo*.

Los elementos de  $[E]$  se denominarán *puntos*. El punto correspondiente al subespacio vectorial  $\langle x \rangle$  generado por un vector no nulo  $x \in E$  será denotado  $[x]$ . Si  $P$  es un punto y  $P = [x]$ , donde  $x$  es un vector no nulo de  $E$ , diremos que  $x$  es un *representante* de  $P$ .

**E.3.1.** Si  $x, x' \in E - \{0\}$ , entonces  $[x] = [x']$  si y solo si existe  $\lambda \in K$  tal que  $x' = \lambda x$  (nótese

que  $\lambda \neq 0$ , necesariamente). Equivalentemente,  $[x] \neq [x']$  si y solo si  $x$  y  $x'$  son linealmente independientes.

Si  $F$  es un subespacio vectorial de dimensión  $r + 1$  de  $E$ , entonces  $[F] \subseteq [E]$ . Los puntos de  $[F]$  son de la forma  $[x]$ , donde  $x$  es un vector no nulo arbitrario de  $F$ . Notemos que  $[\{0\}] = \emptyset$  y que si  $x$  es un vector no nulo de  $E$ , entonces  $[\langle x \rangle] = \{[x]\}$ .

**3.2 Proposición.** Si  $F$  y  $F'$  son subespacios vectoriales de  $E$ , entonces  $[F] \subseteq [F']$  si y solo si  $F \subseteq F'$ . En particular,  $[F] = [F']$  si y solo si  $F = F'$ .

**Demostración:** Que  $F \subseteq F'$  implica  $[F] \subseteq [F']$  es evidente. Basta ver, pues, que  $F \subseteq F'$  se sigue de  $[F] \subseteq [F']$ . Sea, pues,  $x \in F$ . Queremos ver que  $x \in F'$ . Dado que esta conclusión es obvia si  $x = 0$ , podemos suponer que  $x \neq 0$ . Entonces  $[x] \in [F] \subseteq [F']$  nos dice que existe un  $x' \in F'$ ,  $x' \neq 0$ , tal que  $[x] = [x']$ . Ahora, por el ejercicio E.3.1, existe  $\lambda \in K$  tal que  $x = \lambda x'$ . Como  $x' \in F'$ , también es cierto que  $x \in F'$ .  $\square$

Un subconjunto  $L$  de un espacio proyectivo  $[E]$  es una *variedad lineal* si existe un subespacio vectorial  $F$  de  $E$  tal que  $L = [F]$ . Si  $F$  tiene dimensión  $r + 1$ , diremos, de acuerdo con la definición de dimensión del espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial, que  $L$  tiene *dimensión*  $r$ , y escribiremos  $\dim(L) = r$ . Observemos, de todos modos, que en esta definición no hay ambigüedad, ya que el subespacio vectorial  $F$  queda unívocamente determinado por  $L$  (proposición 3.2). Las variedades lineales de dimensión 1 se denominan *rectas* y las de dimensión 2, *planos*.

Para expresar que una variedad lineal  $L$  está contenida en una variedad lineal  $L'$ , a menudo diremos que  $L'$  *pasa por*  $L$ , o que  $L'$  es *incidente* con  $L$ . Un punto  $P$  se denomina *exterior* a una variedad  $L$ , o que es *independiente de*  $L$ , si  $P \notin L$ .

**E.3.2.** Si  $F, F' \subseteq E$  son subespacios vectoriales, probar que  $[F] \cap [F'] = [F \cap F']$ . Así pues, la intersección de dos variedades lineales es una variedad lineal. Más generalmente, si  $F_1, \dots, F_k$  son subespacios vectoriales de  $E$ , entonces  $[F_1] \cap \dots \cap [F_k] = [F_1 \cap \dots \cap F_k]$ .

Si  $x_0, \dots, x_r$  son vectores de  $E$ , pondremos  $[x_0, \dots, x_r]$  en lugar de  $[\langle x_0, \dots, x_r \rangle]$ . Los puntos de la variedad lineal  $[x_0, \dots, x_r]$  son de la forma  $[\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_r x_r]$ , donde  $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in K$  son tales que  $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_r x_r \neq 0$ . En particular, tenemos  $[x_i] \in [x_0, \dots, x_r]$  si  $x_i \neq 0$ . Si  $x_0, \dots, x_r$  son linealmente independientes, entonces  $[x_0, \dots, x_r]$  tiene dimensión  $r$  y sus puntos son de la forma  $[\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_r x_r]$ , con  $(\lambda_0, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0)$ . En este caso, tenemos  $x_i \neq 0$  y, por tanto,  $[x_i] \in [x_0, \dots, x_r]$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ).

El conjunto vacío es una variedad lineal y  $\dim(\emptyset) = -1$ . Como  $\{0\}$  es el único subespacio vectorial de  $E$  de dimensión 0,  $\emptyset$  es la única variedad lineal de dimensión negativa.

Las variedades de dimensión 0 de  $[E]$  son las de la forma  $[\langle x \rangle] = \{[x]\}$ , donde  $x$  es un elemento no nulo de  $E$ . Como que los elementos de un conjunto se pueden identificar con los subconjuntos que tienen un único elemento, vemos que las variedades lineales de dimensión 0 de  $[E]$  se pueden identificar con los puntos de  $[E]$ .

Una recta es una variedad lineal  $L = [F]$ , con  $F$  un subespacio vectorial de dimensión 2 de  $E$ . Si  $x, x' \in F$  son dos vectores linealmente independientes, entonces los puntos de la recta  $[F] = [x, x']$  son los que tienen la forma  $[\lambda x + \lambda' x']$ , con  $\lambda, \lambda' \in K$  y  $\lambda \neq 0$  o  $\lambda' \neq 0$ .

**3.3 Proposición.** *Dados dos puntos distintos  $P$  y  $P'$  de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}$ , existe una única recta que los contiene. En particular, dos rectas distintas tienen a lo más un punto en común.*

**Demostración:** Sea  $E$  el espacio vectorial tal que  $\mathbb{P} = [E]$ . Sean  $x, x' \in E$  vectores no nulos tales que  $P = [x]$  y  $P' = [x']$ . Como  $P \neq P'$ ,  $x$  y  $x'$  son linealmente independientes. Por tanto,  $\langle x, x' \rangle$  tiene dimensión 2 y  $L = [x, x']$  es una recta. Visto que  $P = [x] \in L$  y  $P' = [x'] \in L$ , queda probada la existencia de una recta que contiene los puntos  $P$  y  $P'$ . Sea ahora  $M$  otra recta que contiene los puntos  $P$  y  $P'$ . Veremos que  $M = L$ , y esto acabará la prueba. Sea  $F'$  el subespacio vectorial de  $E$  tal que  $M = [F']$ . Puesto que  $M$  es una recta,  $F'$  tiene dimensión 2. Debido a que  $P, P' \in M$ , tendremos  $x, x' \in F'$ . Por tanto,  $\langle x, x' \rangle \subseteq F'$ . Dado que los dos subespacios vectoriales de esta inclusión tienen dimensión 2, tenemos  $\langle x, x' \rangle = F'$ , de donde  $M = L$ .  $\square$

La recta que une dos puntos distintos  $P$  y  $P'$  será denotada  $PP'$ . La demostración anterior prueba que si  $x$  es un representante de  $P$  y  $x'$  un representante de  $P'$ , entonces  $PP' = [x, x']$ .

**E.3.3.** Si  $L$  es una variedad lineal y  $P, P'$  son dos puntos distintos de  $L$ , probar que  $PP' \subseteq L$ .

### Puntos alineados

Diremos que tres puntos  $P, Q, R$  de un espacio proyectivo de dimensión  $n \geq 1$  están *alineados* si existe una recta que los contiene.

**3.4 Proposición.** *Sea  $[E]$  un espacio proyectivo de dimensión  $n \geq 1$  y  $P, Q, R \in \mathbb{P}$ . Sean  $x, y, z \in E$  representantes de  $P, Q, R$ , respectivamente. Entonces  $P, Q, R$  están alineados si y solo si  $x, y, z$  son linealmente dependientes.*

**Demostración:** Si  $P, Q, R$  están contenidos en una recta  $[F]$ , entonces  $x, y, z \in F$ . Como  $F$  tiene dimensión 2, los vectores  $x, y, z$  son linealmente dependientes. Recíprocamente, si  $x, y, z$  son linealmente dependientes, entonces  $\dim \langle x, y, z \rangle \leq 2$  y, debido a que  $\dim(E) \geq 2$ , podemos encontrar un subespacio vectorial  $F$  de dimensión 2 de  $E$  tal que  $\langle x, y, z \rangle \subseteq F$  (notemos que  $F = \langle x, y, z \rangle$  si los tres puntos  $P, Q, R$  no coinciden). Así será  $P, Q, R \in [F]$  y los tres puntos están alineados.  $\square$

**E.3.4.** Probar que si  $P, Q, R$  son tres puntos alineados distintos y  $x$  es un representante de  $P$ , entonces existe un representante  $y$  de  $Q$  tal que  $R = [x + y]$ .

### Prueba analítica del teorema de Desargues

Un *triángulo ordenado* de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}$  es una sucesión  $P_0, P_1, P_2$  de tres puntos no alineados. Escribiremos  $P_0P_1P_2$  para denotarlo y diremos que los puntos  $P_0, P_1$  y  $P_2$  son sus *vértices*. Las rectas  $L_0 = P_1P_2, L_1 = P_2P_0$  y  $L_2 = P_0P_1$  se denominarán *lados* del triángulo  $P_0P_1P_2$ . A  $L_i$  lo llamaremos el lado *opuesto* al vértice  $P_i$ .

Dos triángulos ordenados  $P_0P_1P_2$  y  $P'_0P'_1P'_2$  están en *perspectiva* si  $P_i \neq P'_i$  y las tres rectas  $P_iP'_i$  pasan por un mismo punto, distinto de cualquiera de los vértices  $P_i$  y de cualquiera de los vértices  $P'_i$  (v. figura 3.1, en la cual los triángulos  $PQR$  y  $P'Q'R'$  están en perspectiva).

**3.5 Teorema** (Desargues, 1639). *Si los triángulos  $P_0P_1P_2$  y  $P'_0P'_1P'_2$  están en perspectiva y  $L_i$  y  $L'_i$  son los lados de  $P_0P_1P_2$  y  $P'_0P'_1P'_2$  opuestos a  $P_i$  y a  $P'_i$ , respectivamente, entonces las intersecciones  $R_i = L_i \cap L'_i$  son tres puntos alineados.*

**Demostración:** Sea  $P$  el punto en el cual concurren las tres rectas  $P_iP'_i$ . Sean  $x, x_0, x_1, x_2 \in E - \{0\}$  tales que  $P = [x]$  y  $P_i = [x_i]$ . Puesto que  $P, P_i$  y  $P'_i$  están alineados y son distintos, podemos escoger  $x_i$  de manera que  $P'_i = [x + x_i]$  (v. E.3.4).

Ahora observemos que el punto  $[x_1 - x_2]$  de la recta  $P_1P_2$  es también de la recta  $P'_1P'_2$ , ya que  $[x_1 - x_2] = [(x + x_1) - (x + x_2)]$ . Visto que las rectas  $L_3$  y  $L'_3$  son distintas, tenemos que  $R_3 = L_3 \cap L'_3 = [x_1 - x_2]$ . Análogamente, se ve que  $R_1 = [x_2 - x_3]$  y  $R_2 = [x_3 - x_1]$ . Finalmente los puntos  $R_3, R_1, R_2$  están alineados, ya que

$$(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + (x_3 - x_1) = 0$$

y podemos aplicar la proposición 3.4. □

**E.3.5.** Comprobar directamente que el teorema de Desargues también es cierto si en la definición de triángulos en perspectiva prescindimos de la restricción que ninguno de los vértices de los triángulos coincide con el punto  $O$  de concurrencia de las rectas  $P_iP'_i$ , es decir, si admitimos que uno de los vértices  $P_i$  o uno de los vértices  $Q_j$  puede coincidir con  $O$ . (Dado que  $P_i \neq Q_i$ , si se da la circunstancia de que un  $P_i$  y un  $Q_j$  coinciden con  $O$ , necesariamente debe ser  $i \neq j$ .)

**3.6 Nota.** El recíproco del teorema de Desargues también es cierto. Su demostración, que se puede hacer con métodos similares a los que hemos utilizado para la demostración del teorema directo, se deja como ejercicio para el lector. En el caso del plano proyectivo, veremos (sección 3.5) que dicho recíproco se puede establecer mediante el principio de dualidad.

### Teorema de Pappus

En el enunciado y demostración de este teorema utilizamos que *dos rectas distintas de un plano proyectivo se cortan en un punto*. Esto está claro, ya que la intersección de dos subespacios vectoriales de dimensión 2 distintos de un espacio vectorial de dimensión 3 es un subespacio vectorial de dimensión 1. Como veremos, la afirmación que acabamos

de probar no es más que un caso particular de la fórmula de las dimensiones que demostraremos en el apartado siguiente.

**3.7 Teorema.** *En un plano proyectivo  $\mathbb{P}$ , sean  $L$  y  $M$  dos rectas distintas (v. figura 3.7) y supongamos, si  $P$  es el punto de intersección de  $L$  y  $M$ , que  $P_0, P_1, P_2$  son puntos distintos de  $L - \{P\}$  y  $Q_0, Q_1, Q_2$  puntos distintos de  $M - \{P\}$ . Entonces, las intersecciones  $R_0 = P_1Q_2 \cap P_2Q_1$ ,  $R_1 = P_2Q_0 \cap P_0Q_2$ ,  $R_2 = P_0Q_1 \cap P_1Q_0$  son tres puntos alineados.*

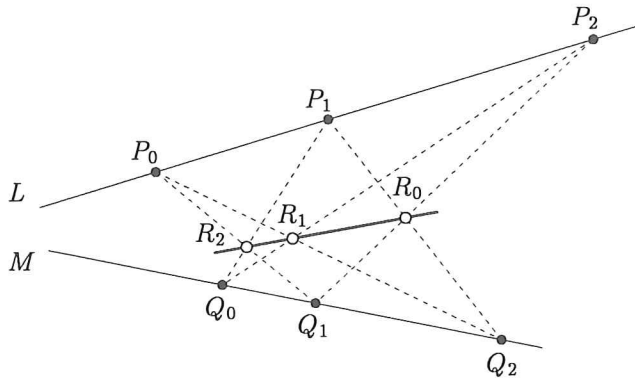


Figura 3.7: Teorema de Pappus

**Demostración:** Sea  $x \in E - \{0\}$  tal que  $P = [x]$ . Dado que  $P, P_0, P_1, P_2$  son puntos distintos de  $L$ , existe  $y \in E - \{0\}$  tal que  $P_0 = [y]$ ,  $P_1 = [x + y]$  y  $P_2 = [x + ay]$ , para un cierto  $a \in K - \{0, 1\}$ . Análogamente, existe  $z \in E - \{0\}$  tal que  $Q_0 = [z]$ ,  $Q_1 = [x + z]$  y  $Q_2 = [x + bz]$ , para un cierto  $b \in K - \{0, 1\}$ . Notemos que los vectores  $x, y, z$  son linealmente independientes (ya que  $P, P_0$  y  $Q_0$  no están alineados).

Ahora tenemos

$$R_2 = [x + y + z]$$

ya que

$$[x + y + z] = \begin{cases} [(x + y) + z] \in P_1Q_0 \\ [y + (x + z)] \in P_0Q_1 \end{cases}$$

Observemos que las rectas  $P_0Q_1$  y  $P_1Q_0$  son distintas y que, por tanto,  $[x + y + z]$  es el único punto común a las dos. También tenemos

$$R_1 = [x + ay + bz]$$

ya que

$$[x + ay + bz] = \begin{cases} [(x + ay) + bz] \in P_2Q_0 \\ [ay + (x + bz)] \in P_0Q_2 \end{cases}$$

Finalmente

$$R_0 = [(ab - 1)x + a(b - 1)y + b(a - 1)z]$$

ya que

$$[(ab - 1)x + a(b - 1)y + b(a - 1)z] = \begin{cases} [a(b - 1)(x + y) + (a - 1)(x + bz)] \in P_1Q_2 \\ [(a - 1)b(x + z) + (b - 1)(x + ay)] \in P_2Q_1. \end{cases}$$

Para terminar, observamos que

$$(ab - 1)x + a(b - 1)y + b(a - 1)z = ab(x + y + z) - (x + ay + bz)$$

y, por consiguiente,  $R_0 \in R_1R_2$ . □

### Fórmula de las dimensiones

Hemos visto que la intersección de dos variedades lineales de un espacio proyectivo  $[E]$  es una variedad lineal (ejercicio E.3.2). Si  $L$  y  $L'$  son variedades lineales de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}$ , entonces  $L \cap L'$  es la máxima variedad lineal contenida en  $L$  y  $L'$ , en el sentido de que una variedad lineal  $M$  cumple  $M \subseteq L$  y  $M \subseteq L'$  si y solo si  $M \subseteq L \cap L'$ .

Veamos ahora que existe, con las mismas notaciones, una variedad  $L \vee L'$  que es la mínima que contiene  $L$  y  $L'$ , en el sentido de que una variedad lineal  $M$  cumple  $M \supseteq L$  y  $M \supseteq L'$  si y solo si  $M \supseteq L \vee L'$ . En efecto, si  $L = [F]$  y  $L' = [F']$ , donde  $F$  y  $F'$  son subespacios vectoriales de  $E$ , entonces de la proposición 3.2 resulta que la variedad  $[F + F']$  satisface las condiciones, debido a que  $F + F'$  es el mínimo subespacio vectorial de  $E$  que contiene a  $F$  y  $F'$ . Diremos que  $L \vee L'$  es la *suma proyectiva* de las variedades  $L$  y  $L'$ .

**E.3.6.** Probar que si  $P$  y  $Q$  son puntos distintos, entonces  $P \vee Q = PQ$  (la recta que une los dos puntos).

**3.8 Proposición** (Fórmula de las dimensiones). Sean  $L$  y  $L'$  variedades lineales de un espacio proyectivo  $[E]$ . Entonces

$$\dim(L \vee L') + \dim(L \cap L') = \dim(L) + \dim(L')$$

**Demostración:** Sean  $F$  y  $F'$  los subespacios vectoriales de  $E$  tales que  $L = [F]$  y  $L' = [F']$ . Entonces  $\dim(F + F') + \dim(F \cap F') = \dim(F) + \dim(F')$ , por la fórmula de las dimensiones para subespacios vectoriales de un espacio vectorial. Como  $\dim(F + F') = \dim(L \vee L') + 1$ ,  $\dim(F \cap F') = \dim(L \cap L') + 1$ ,  $\dim(F) = \dim(L) + 1$  y  $\dim(F') = \dim(L') + 1$ , la fórmula resulta inmediatamente. □

**3.9 Ejemplo.** Sea  $L$  una variedad lineal de un espacio proyectivo y  $Q$  un punto exterior a  $L$ . Así  $L \cap Q = \emptyset$  y, por tanto,  $\dim(L \cap Q) = -1$ . Como  $\dim(Q) = 0$ , de la fórmula de las dimensiones deducimos que

$$\dim(L \vee Q) = \dim(L) + 1$$

En el caso particular en que  $L$  es un punto  $P$ , esta fórmula nos dice que  $P \vee Q$  es una recta, lo cual confirma la conclusión del ejercicio E.3.6.

**3.10 Ejemplo.** Una variedad lineal  $H$  de  $\mathbb{P}^n$  se dice que es un *hiperplano* si  $\dim(H) = n - 1$ . Supongamos que  $H$  es un hiperplano y que  $L$  es una variedad no contenida en  $H$ . Si  $Q$  es un punto de  $L$  exterior a  $H$ , entonces  $H \vee L \supseteq H \vee Q$ . Visto que  $H \vee Q = \mathbb{P}^n$  (ya que  $\dim(H \vee Q) = n$ , por el ejemplo 3.9), tenemos  $L \vee H = \mathbb{P}^n$ . Ahora, la fórmula de las dimensiones nos da  $\dim(H \cap L) = \dim(H) + \dim(L) - \dim(H \vee L) = n - 1 + \dim(L) - n = \dim(L) - 1$ , es decir,

$$\dim(H \cap L) = \dim(L) - 1$$

En el caso en que  $\dim(L) = 1$ , esta fórmula nos dice que la intersección de una recta con un hiperplano que no la contiene es un punto.

Cuando  $n = 2$ ,  $H$  es una recta y el enunciado precedente nos da una propiedad que hemos visto en el inicio del apartado «Teorema de Pappus»: dos rectas distintas de un plano proyectivo se cortan en un punto.

**3.11 Ejemplo.** El ejemplo 3.9 nos muestra que  $L \vee Q$  es un plano cuando  $L$  es una recta y  $Q$  un punto exterior a  $L$ . Por otro lado, 3.10 nos muestra que la intersección de un plano de  $\mathbb{P}^n$  con un hiperplano que no lo contiene es una recta.

Consideremos el caso  $n = 3$  con más detalle. Puesto que los hiperplanos de  $\mathbb{P}^3$  son los planos, el enunciado precedente nos da que dos planos distintos de  $\mathbb{P}^3$  se cortan en una recta. Por otro lado, tenemos que la intersección de una recta con un plano que no la contiene es un punto. Si se trata de dos rectas distintas  $L$  y  $L'$  de  $\mathbb{P}^3$ , se pueden dar dos posibilidades. Una es que  $\dim(L \vee L') = 2$ , es decir, que las dos rectas estén contenidas en un mismo plano (se dice, entonces, que las dos rectas son *coplanarias*), y que equivale a decir que  $L \cap L'$  es un punto  $\{\diamond\}$ . La otra posibilidad es que  $\dim(L \vee L') = 3$ , y que equivale a decir que  $L \cap L' = \emptyset$ . En este caso, se dice que las dos rectas *se cruzan*.

### *Cierre proyectivo de un espacio afín $\mathbb{A}$*

Con el lenguaje del espacio proyectivo, podemos dar ahora un contenido matemático mucho más preciso a la construcción de la cierre proyectivo de un espacio afín. El método que seguiremos es dar primero una definición independiente de la cierre proyectivo  $\overline{\mathbb{A}}$  de un espacio afín  $\mathbb{A}$  y ver después que la nueva definición incorpora la definición dada en la sección 3.0.

### Notaciones

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín de dimensión  $n$  y  $V$  su espacio vectorial asociado. Pondremos  $\overline{V} = K \oplus V$ . Si  $(\lambda, v) \in \overline{V}$ , podemos escribir  $(\lambda, v) = (\lambda, \mathbf{0}) + (0, v) = \lambda(1, \mathbf{0}) + (0, v)$ . Si ponemos  $e_0 = (1, \mathbf{0})$  e identificamos el vector  $v \in V$  con el vector  $(0, v) \in \overline{V}$ , entonces podemos poner  $(\lambda, v) = \lambda e_0 + v$ .

Fijemos un punto  $O \in \mathbb{A}$  y consideremos la aplicación  $P \mapsto e_P$  de  $\mathbb{A}$  en  $\overline{V}$  tal que  $e_P = e_0 + (P - O)$ . En particular, tenemos  $e_O = e_0$ . También es inmediato comprobar que se cumple la fórmula

$$e_P - e_Q = P - Q \quad [3.1]$$

Notamos, también, que

$$\overline{V} = \langle e_P \rangle \oplus V \quad [3.2]$$

cualquiera que sea  $P \in \mathbb{A}$ .

**3.12 Nota.** La propiedad [3.2], para todo punto  $P \in \mathbb{A}$ , se puede deducir de la propiedad [3.1] y de la relación  $\overline{V} = \langle e_O \rangle \oplus V$  para un punto dado  $O$ . En efecto, si  $P = O + v$  ( $v \in V$ ), entonces  $e_P = e_O + v$  (por [3.1]) y  $\langle e_P \rangle + V = \langle e_O \rangle + V = \overline{V}$ .

El ejercicio que sigue muestra que el espacio  $\overline{V}$  y la aplicación  $e$  no dependen, salvo un isomorfismo único, del punto  $O$ .

**E.3.7.** Probar que si  $V'$  es un  $K$ -espacio vectorial que contiene  $V$  como subespacio vectorial y  $P \mapsto e'_P$  es una aplicación de  $\mathbb{A}$  en  $V'$  que satisface las propiedades [3.1] y [3.2] (es decir,  $e'_P - e'_Q = P - Q$ , cualesquiera que sean  $P, Q \in \mathbb{A}$ , y  $V' = \langle e'_P \rangle \oplus V$  para todo  $P \in \mathbb{A}$ ), entonces hay un único isomorfismo  $\overline{V} \simeq V'$  tal que  $e_P \mapsto e'_P$  para todo  $P \in \mathbb{A}$ . Probar también que este isomorfismo es necesariamente la identidad para los elementos de  $V$ .

### El espacio proyectivo $\overline{\mathbb{A}}$

Sea  $\overline{V}$  un espacio vectorial que contiene  $V$  como un subespacio vectorial y  $e: \mathbb{A} \rightarrow \overline{V}$ ,  $P \mapsto e_P$ , una aplicación que cumple las propiedades [3.1] y [3.2]. Sabemos que estos objetos existen y que, según se precisa en el ejercicio E.3.7, son únicos. Al espacio proyectivo  $\overline{\mathbb{A}} = [\overline{V}]$  lo denominaremos *cierre proyectivo*, o también *compleción proyectiva*, de  $\mathbb{A}$ . Notemos que  $\overline{\mathbb{A}}$  tiene dimensión  $n$ . Al hiperplano  $[V]$  de  $\overline{\mathbb{A}}$  lo denominaremos, de acuerdo con lo que se ha dicho en el apartado «Puntos impropios» de la sección 3.0, *hiperplano del infinito* de  $\mathbb{A}$ , o *hiperplano de puntos impropios* de  $\mathbb{A}$ , y lo denotaremos  $\mathbb{A}_\infty$ .

Para poder interpretar  $\overline{\mathbb{A}}$  como el resultado de añadir a  $\mathbb{A}$  los puntos impropios, utilizaremos la aplicación  $i: \mathbb{A} \rightarrow \overline{\mathbb{A}}$  tal que  $X \mapsto \overline{X} = [e_X]$ . Si fijamos un punto  $O$  como origen, y  $X = O + v$ , donde  $v \in V$ , entonces  $\overline{X} = [e_X] = [e_{O+v}] = [e_O + v]$ . Para una representación gráfica de este proceso, v. figura 3.8.

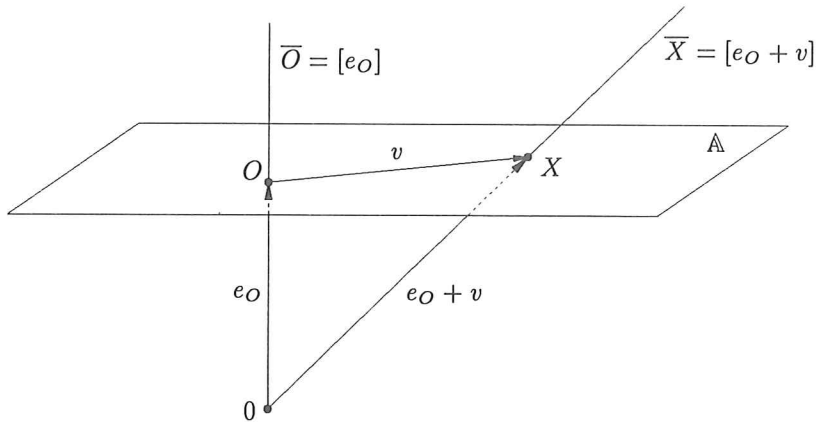


Figura 3.8: Cierre proyectivo del espacio afín  $\mathbb{A}$

**3.13 Proposición.** *La aplicación  $i: \mathbb{A} \rightarrow \bar{\mathbb{A}}$  es inyectiva.*

**Demostración:** Supongamos que  $P, Q \in \mathbb{A}$  son tales que  $[e_P] = [e_Q]$ . Entonces  $e_Q = \lambda e_P$ , para un cierto  $\lambda \in K$ , y  $Q - P = e_Q - e_P = \lambda e_P - e_P = (\lambda - 1)e_P$  (hemos utilizado la propiedad [3.1]). Como  $Q - P \in V$  y  $e_P \notin V$  (propiedad [3.2]), la última igualdad solo puede ser cierta si los dos miembros son nulos. Así  $Q = P$ , como queríamos probar.  $\square$

**3.14 Proposición.** *La imagen de  $\mathbb{A}$  por  $i$  coincide con  $\bar{\mathbb{A}} - \mathbb{A}_\infty$ , es decir, con el conjunto de los puntos representados por vectores de  $\bar{V} - V$ . En particular tenemos  $\bar{\mathbb{A}} = i(\mathbb{A}) \sqcup \mathbb{A}_\infty$ .*

**Demostración:** En efecto, dado un punto  $P \in \mathbb{A}$ ,  $i(P) \in \bar{\mathbb{A}} - \mathbb{A}_\infty$ , ya que  $\bar{P} = [e_P]$  y  $e_P \notin V$ . Recíprocamente, un punto  $Q$  de  $\bar{\mathbb{A}} - \mathbb{A}_\infty$  es de la forma  $Q = [\bar{v}]$ , con  $\bar{v} \in \bar{V} - V$ . Si escogemos un punto cualquiera  $O$ , sabemos (propiedad [3.2]) que  $\bar{V} = \langle e_O \rangle + V$ , de donde  $\bar{v} = \lambda e_O + v$ , para un cierto  $\lambda \in K$ . Puesto que  $\bar{v} \notin V$ , tenemos  $\lambda \neq 0$ , y

$$Q = [\lambda e_O + v] = [e_O + \lambda^{-1}v] = [e_{O+\lambda^{-1}v}] = i(O + \lambda^{-1}v)$$

que es un punto de  $i(\mathbb{A})$ .  $\square$

### Cierre proyectivo de una variedad lineal

Sea  $L$  una variedad lineal de dimensión  $r$  del espacio afín  $\mathbb{A}$ . Si  $W = W(L)$  es el espacio director de  $L$ , la variedad lineal  $[W] \subseteq [V] = \mathbb{A}_\infty$  se denomina *variedad del infinito*, o *variedad de puntos impropios*, de  $L$ , y pondremos  $L_\infty$  para denotarla. Por lo que hemos dicho en el apartado «Puntos impropios» de la sección 3.0,  $L_\infty$  se identifica con el conjunto de clases de equivalencia de las rectas de  $\mathbb{A}$  por la relación de paralelismo. También pondremos  $\bar{L} = i(L) \sqcup L_\infty$ , y diremos que  $\bar{L}$  es la *cierre proyectivo* de  $L$ .

**3.15 Proposición.** *Dada una variedad lineal  $L$  de dimensión  $r$  del espacio afín  $\mathbb{A}$ ,  $\overline{L}$  es una variedad lineal de dimensión  $r$  de  $\overline{\mathbb{A}}$ . La variedad  $\overline{L}$  es la única variedad lineal de  $\overline{\mathbb{A}}$  tal que  $\overline{L} \cap i(\mathbb{A}) = i(L)$ .*

**Demostración:** Sea  $L = P + W$ , donde  $W$  es el espacio director de  $L$ . Consideremos el subespacio vectorial  $\overline{W} = \langle e_P \rangle + W$  de  $\overline{V}$ . Como  $W \subseteq V$ ,  $\overline{W}$  tiene dimensión  $1 + \dim(W) = r + 1$ . Por tanto,  $[\overline{W}]$  es una variedad lineal de dimensión  $r$  de  $\overline{\mathbb{A}}$ . Los puntos  $Q$  de  $[\overline{W}]$  son de la forma  $Q = [\lambda e_P + w]$ , con  $\lambda \in K$ ,  $w \in W$  y  $\lambda e_P + w \neq 0$ . Si  $\lambda = 0$ , entonces  $Q = [w] \in [W] = L_\infty$ , y si  $\lambda \neq 0$ , entonces  $Q = [\lambda e_P + w] = [e_P + \lambda^{-1}w] = [e_{P+\lambda^{-1}w}] = i(P + \lambda^{-1}w) \in i(L)$ , ya que  $\lambda^{-1}w \in W$ . Puesto que  $P + \lambda^{-1}w$  es, incluso con  $\lambda = 1$ , un punto arbitrario de  $P + W = L$ , vemos que  $\overline{L} \cap i(\mathbb{A}) = i(L)$ .

Para terminar la prueba nos basta ver que si  $M$  es una variedad lineal de  $\mathbb{A}_\infty$  tal que  $M \cap i(\mathbb{A}) = i(L)$ , entonces  $M = \overline{L}$ . Si  $M = [F]$ , donde  $F$  es un subespacio vectorial de  $\overline{V}$ , será suficiente ver que  $F = \overline{W}$ . Ahora bien, como para todo  $w \in W$  tenemos  $i(P + w) \in i(L) = M \cap i(\mathbb{A})$  y  $i(P + w) = [e_{P+w}] = [e_P + w]$ , en particular resulta que  $e_P + w \in F$  para todo  $w \in W$ . Poniendo  $w = 0$ , tenemos  $e_P \in F$ , que con la relación anterior nos da que  $w \in F$  para todo  $w \in W$ . Así  $\overline{W} = \langle e_P \rangle + W \subseteq F$ .

Para ver la inclusión contraria, sea ahora  $x = \lambda e_P + v \in F$  (recordemos que todo vector de  $\overline{V}$  se puede escribir de esta manera por la propiedad [3.2]). Queremos ver que  $x \in \overline{W}$ . Visto que esta conclusión es obvia si  $x = 0$ , podemos suponer que  $x \neq 0$ .

Supongamos primero que  $\lambda = 0$ , con lo cual  $x = v$  es un vector no nulo de  $F \cap V$ . Como  $e_P \in F$ , también tenemos  $e_P + v \in F$ . Por tanto,  $[v]$ ,  $[e_P] = i(P)$ ,  $[e_P + v] = i(P+v) \in M$ . Dado que estos tres puntos están alineados y  $i(P)$ ,  $i(P+v) \in M \cap i(\mathbb{A}) = i(L) \subseteq \overline{L}$ , inferimos que  $[v] \in \overline{L}$  (E.3.3), es decir, que  $v \in \overline{W}$ .

Falta examinar el caso  $\lambda \neq 0$ . Dividiendo por  $\lambda$ , está claro que es suficiente ver que  $e_P + v \in F$  implica  $v \in W$ . Pero  $e_P + v = e_{P+v} \in F$  implica que  $i(P+v) \in M \cap i(\mathbb{A}) = i(L)$ , de donde  $v \in W$  por la inyectividad de  $i$ .  $\square$

**E.3.8.** Probar que la cierre proyectivo  $\overline{L} \subseteq \overline{\mathbb{A}}$  de una variedad lineal  $L = P + W$ , considerada como un espacio proyectivo, es una cierre proyectivo de  $L$  considerada como un espacio afín. Más precisamente, probar que el espacio  $\overline{W} = \langle e_P \rangle + W$  no depende de  $P \in L$  y que la aplicación  $L \rightarrow \overline{W}$  tal que  $Q \mapsto e_Q$  cumple las propiedades [3.1] y [3.2].

**3.16 Proposición.** *Sean  $L$  y  $L'$  dos variedades del espacio afín  $\mathbb{A}$ . Entonces  $L$  y  $L'$  son paralelas si y solo si  $L_\infty \subseteq L'_\infty$  o  $L'_\infty \subseteq L_\infty$ . Si  $L$  y  $L'$  tienen la misma dimensión,  $L$  y  $L'$  son paralelas si y solo si  $L_\infty = L'_\infty$ .*

**Demostración:** Si  $W$  y  $W'$  son los espacios directores de  $L$  y  $L'$ , respectivamente,  $L$  y  $L'$  son paralelas, por definición, si y solo si  $W \subseteq W'$  o  $W' \subseteq W$ . Pero  $W \subseteq W'$  equivale a  $[W] \subseteq [W']$ , es decir, a  $L_\infty \subseteq L'_\infty$ . Análogamente,  $W' \subseteq W$  equivale a  $[W'] \subseteq [W]$ , es decir, a  $L'_\infty \subseteq L_\infty$ .  $\square$

## 3.2 Configuraciones de puntos. Referencias proyectivas

Los conceptos más básicos que introducimos en esta sección son los de referencia (proyectiva) y de coordenadas (proyectivas) de un punto respecto a una referencia. Después estudiamos dos maneras de representar las variedades lineales mediante coordenadas relativas a una referencia (ecuaciones cartesianas y ecuaciones paramétricas). Al principio de la sección se tratan algunas cuestiones preliminares, como las nociones de puntos dependientes y de puntos independientes. También se hacen algunas consideraciones sobre las «configuraciones de puntos».

### *Puntos dependientes e independientes*

Sean  $P_0, \dots, P_r$  puntos y supongamos que  $P_i = [e_i]$ ,  $e_i \in E$ . Entonces  $P_0 \vee \dots \vee P_r = [e_0, \dots, e_r]$  y  $\dim(P_0 \vee \dots \vee P_r) = \dim_K \langle e_0, \dots, e_r \rangle - 1$ . Así pues, vemos que la máxima dimensión que puede alcanzar la variedad lineal  $P_0 \vee \dots \vee P_r$  (cuando movemos los puntos  $P_i$ , pero manteniendo  $r$  fijo) es  $r$ , y que este valor máximo se consigue si y solo si los vectores  $e_0, \dots, e_r$  son linealmente independientes. Si este es el caso, diremos que los puntos  $P_0, \dots, P_r$  son *independientes*. En caso contrario, es decir, si  $\dim(P_0 \vee \dots \vee P_r) < r$ , diremos que son *dependientes*.

**E.3.9.** Sean  $P_0, \dots, P_r$  puntos de un espacio afín  $\mathbb{A}$  y pongamos  $\bar{P}_0, \dots, \bar{P}_r$  para denotar los correspondientes puntos del cierre proyectivo  $\bar{\mathbb{A}}$ . Comprobar que  $P_0, \dots, P_r$  son puntos independientes del espacio afín  $\mathbb{A}$  (en el sentido del subapartado «Puntos independientes» de la sección 1.2, pág. 67) si y solo si  $\bar{P}_0, \dots, \bar{P}_r$  son puntos independientes del espacio proyectivo  $\bar{\mathbb{A}}$ .

### Variedad determinada por $r + 1$ puntos independientes

Dados dos puntos distintos  $P_0$  y  $P_1$ , sabemos que existe una única recta (que denotamos  $P_0P_1$ ) que los contiene. De hecho, esta recta es  $P_0 \vee P_1$ . La proposición que sigue es una generalización natural de esta afirmación.

**3.17 Proposición.** Sean  $P_0, \dots, P_r$  puntos independientes de  $\mathbb{P}$ . Entonces,  $P_0 \vee \dots \vee P_r$  es la única variedad lineal de dimensión  $r$  que los contiene.

**Demostración:** Si  $P_0, \dots, P_r$  son independientes, entonces  $L = P_0 \vee \dots \vee P_r$  tiene dimensión  $r$  y  $P_i \in L$  ( $i = 0, \dots, r$ ). Si ahora  $M$  es una variedad lineal tal que  $P_i \in M$  ( $i = 0, \dots, r$ ), entonces  $L \subseteq M$ , ya que  $L$  es la mínima variedad lineal que contiene los puntos  $P_i$ . Si además  $M$  tiene dimensión  $r$ ,  $\dim(L) = \dim(M)$  y, por tanto,  $M = L$ .  $\square$

De la variedad lineal  $P_0 \vee \dots \vee P_r$  se dice que es la *variedad determinada por los puntos*  $P_0, \dots, P_r$ . Cuando los puntos  $P_0, \dots, P_r$  son independientes,  $P_0 \vee \dots \vee P_r$  se denota muchas veces simplemente  $P_0P_1 \dots P_r$ . En el caso  $r = 2$ , la notación  $P_0P_1P_2$  se ha

utilizado antes para denotar el triángulo de vértices  $P_0$ ,  $P_1$  y  $P_2$ . Estos dos significados del símbolo  $P_0P_1P_2$  no llevan, en general, a confusión, ya que por el contexto suele quedar claro a cuál de ellos nos referimos. Pero si hace falta distinguirlos, pondremos  $\Delta P_0P_1P_2$  para denotar el triángulo.

**E.3.10.** Sean  $P_0, \dots, P_r$  puntos independientes de un espacio afín  $\mathbb{A}$  y sea  $L \subseteq \mathbb{A}$  la variedad lineal que determinan (pág. 68). Sea  $L' \subseteq \overline{\mathbb{A}}$  la variedad lineal determinada por los puntos  $\overline{P}_0, \dots, \overline{P}_r \in \overline{\mathbb{A}}$  correspondientes a  $P_0, \dots, P_r$ . Verificar que  $L' = \overline{L}$  (el cierre proyectivo de  $L$ ).

### Configuraciones

A una sucesión finita  $\Pi = P_0, P_1, \dots, P_r$  de puntos distintos de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}$  la denominaremos una *configuración* de  $r + 1$  puntos de  $\mathbb{P}$ , y a los puntos  $P_i$  los llamaremos *vértices* de la configuración. Utilizaremos *terna* y *cuaterna* para referirnos a configuraciones de tres y cuatro puntos, respectivamente. Por *dimensión* de la configuración  $\Pi$  entenderemos la dimensión de la variedad lineal  $\bigvee \Pi = P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_r$ , y pondremos  $\dim(\Pi)$  para denotarla.

El valor máximo de la dimensión de una configuración de  $r + 1$  puntos es  $r$ , y se consigue si y solo si los puntos de la configuración son independientes. En este caso, diremos que la configuración es un *r-símplice*. Notemos que un 2-símplice no es más que un *triángulo*. De un 3-símplice se dice también que es un *tetraedro*.

Diremos que una configuración  $\Pi'$  es *subordinada* de una configuración  $\Pi$  si  $\Pi'$  es una subsucesión de  $\Pi$ . Las configuraciones de  $s + 1$  puntos subordinadas de un *r-símplice*  $\Pi$  son *s-símplices* y las variedades lineales que generan se denominan *caras* de dimensión  $s$  de  $\Pi$  (*aristas* si  $s = 1$  y simplemente *caras* si  $s = 2$ ). Las aristas de un triángulo se denominan *lados*. Se dice que dos caras de un símplice  $\Pi$  son *complementarias*, u *opuestas*, si están definidas por configuraciones que, como subconjuntos de  $\Pi$ , son complementarios.

**3.18 Ejemplos.** Una configuración de tres puntos puede tener dimensión 2, en cuyo caso forma un triángulo, o dimensión 1, en cuyo caso se trata de tres puntos alineados distintos. Las configuraciones de cuatro puntos pueden tener dimensión 3, 2 o 1. En el caso de dimensión 3, se trata de un tetraedro, y en el caso de dimensión 1, de cuatro puntos alineados distintos. En el caso de dimensión 2, hay dos posibilidades: que formen un *cuadrángulo*, es decir, que las cuatro configuraciones subordinadas de tres puntos sean triángulos, o que exactamente tres de los puntos estén sobre una recta que no pasa por el cuarto punto. En el caso de un cuadrángulo, las rectas determinadas por los seis posibles pares de vértices se denominan *lados* del cuadrángulo, y dos lados se llaman *opuestos* si no tienen ningún vértice en común (v. figura 3.9, en el cual los tres pares de lados opuestos son  $AB$  y  $CD$ ,  $AD$  y  $BC$ , y  $AC$  y  $BD$ ). Los tres puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos forman el *triángulo diagonal* del cuadrángulo (en la figura 3.9 son los puntos  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ ).

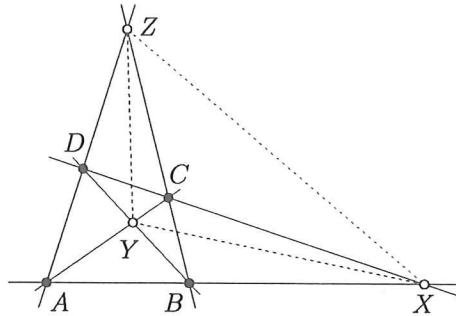


Figura 3.9: Cuadrángulo y su triángulo diagonal

Diremos que una configuración  $\Pi$  de  $r + 1$  puntos es de *tipo*  $s_{r+1}$ , o que es un  $r + 1$ -*vértice*  $s$ -*dimensional*, si  $s = \dim(\Pi)$  (por tanto,  $s \leq r$ ) y todas las configuraciones subordinadas de  $s + 1$  puntos son  $s$ -*símplices*. Está claro, pues, que un  $r$ -*símplice* es de tipo  $r_{r+1}$  (un  $r + 1$ -*vértice*  $r$ -*dimensional*). Por ejemplo, una configuración de tres puntos alineados es de tipo  $1_3$  y un cuadrángulo es una configuración de tipo  $2_4$  (o un *cuadrivértice* de dimensión 2). Un triángulo es una configuración de tipo  $2_3$  y un tetraedro es una configuración de tipo  $3_4$ .

Una configuración  $P_0, P_1, \dots, P_r, P'_0, P'_1, \dots, P'_{r'}$  se dirá que es de tipo  $s_{r+1} \vee s'_{r'+1}$  si  $\Pi = P_0, P_1, \dots, P_r$  es de tipo  $s_{r+1}$ ,  $\Pi' = P'_0, P'_1, \dots, P'_{r'}$  es de tipo  $s'_{r'+1}$  y  $(\vee \Pi) \cap (\vee \Pi') = \emptyset$ . Por ejemplo, decir que la configuración  $P_0, P_1, P_2, P_3$  es de tipo  $1_3 \vee 0$  significa que  $P_0, P_1, P_2$  son tres puntos alineados distintos (sea  $L$  la recta que los contiene) y que  $P_3$  es un punto exterior a  $L$ .

### Referencias proyectivas

Una *referencia proyectiva*, o un *sistema de coordenadas proyectivas*, de  $\mathbb{P}^n$  es una configuración de  $n + 2$  puntos  $P_0, \dots, P_n, U$  de tipo  $n_{n+2}$ , es decir, tal que  $n + 1$  cualesquiera de ellos son independientes.

Pondremos  $[P_0, \dots, P_n; U]$  para indicar que  $P_0, \dots, P_n, U$  forman una referencia proyectiva. Los puntos  $P_0, \dots, P_n$  son independientes y, por tanto, definen un *símplice*; lo denominaremos *símplice de la referencia*, y a los puntos  $P_0, \dots, P_n$ , los *vértices de la referencia*. El punto  $U$  se denomina *punto unidad*. Notemos que el punto unidad no pertenece a ninguna cara del *símplice*  $[\diamond]$ .

Por ejemplo (v. figura 3.10), dar una referencia proyectiva de la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$  equivale a dar una terna ordenada de puntos distintos  $P_0, P_1, U$ ; dar una referencia proyectiva del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  equivale a dar tres puntos no alineados  $P_0, P_1, P_2$

y un punto  $U$  no situado sobre ninguna de las rectas  $P_0P_1$ ,  $P_1P_2$ ,  $P_2P_0$ ; y dar una referencia del espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$  equivale a dar un tetraedro  $P_0P_1P_2P_3$  y un punto  $U$  no situado en ninguna de sus caras.

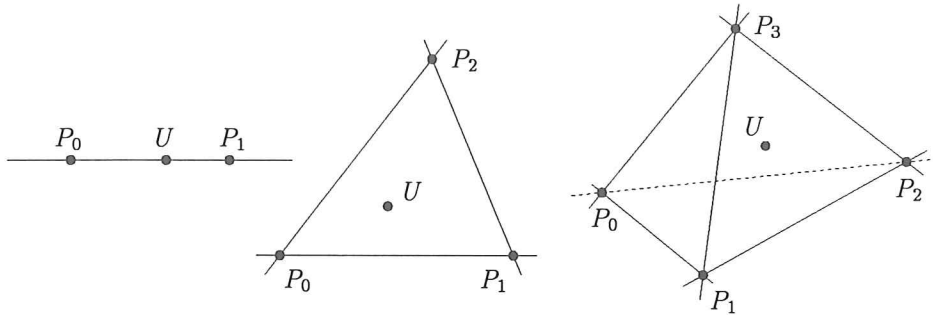


Figura 3.10: Referencias proyectivas de  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{P}^2$  y  $\mathbb{P}^3$

**3.19 Proposición.** Si  $[P_0, \dots, P_n; U]$  es una referencia proyectiva, existen vectores  $e_0, \dots, e_n$  de  $E$  tales que  $P_i = [e_i]$  y  $U = [e_0 + \dots + e_n]$ .

**Demostración:** En efecto, sean  $e'_0, \dots, e'_n$  representantes de los puntos  $P_0, \dots, P_n$  y  $e$  un representante de  $U$ . Como  $P_0, \dots, P_n$  son independientes, los vectores  $e'_0, \dots, e'_n$  son linealmente independientes y, dado que  $n$  es la dimensión del espacio,  $e'_0, \dots, e'_n$  forman una base de  $E$ . Existen, por tanto, escalares  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  tales que  $e = \lambda_0 e'_0 + \dots + \lambda_n e'_n$ . Se cumple que  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i$ , ya que si fuese, por ejemplo,  $\lambda_n = 0$ , entonces los puntos  $P_0, \dots, P_{n-1}, U$  serían dependientes y esto contradice la definición de referencia proyectiva. Así pues, si ponemos  $e_i = \lambda_i e'_i$ , entonces  $P_i = [e'_i] = [e_i]$  y  $U = [e_0 + \dots + e_n]$ .  $\square$

Los vectores  $e_0, \dots, e_n$  del lema anterior forman una base de  $E$  y diremos que esta base está *adaptada* a la referencia  $[P_0, \dots, P_n; U]$ .

**3.20 Nota.** Si  $e_0, \dots, e_n$  es una base de  $E$ , y definimos  $P_i = [e_i]$  y  $U = [e_0 + \dots + e_n]$ , entonces  $[P_0, \dots, P_n; U]$  es una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}$  para la cual  $e_0, \dots, e_n$  es una base adaptada: diremos que es la *referencia proyectiva asociada* a  $e_0, \dots, e_n$ .

**3.21 Proposición.** Dos bases  $e_0, \dots, e_n$  y  $e'_0, \dots, e'_n$  de  $E$  están adaptadas a la misma referencia proyectiva si y solo si existe  $\lambda \in K - \{0\}$ , tal que  $e'_i = \lambda e_i$ , para  $i = 0, \dots, n$ .

**Demostración:** Si  $e_0, \dots, e_n$  y  $e'_0, \dots, e'_n$  son bases adaptadas a la misma referencia, entonces  $[e_i] = [e'_i]$ , para  $i = 0, \dots, n$ , y  $[e_0 + \dots + e_n] = [e'_0 + \dots + e'_n]$ . Existen, por tanto, escalares no nulos  $\lambda_i$  y  $\lambda$  tales que  $e'_i = \lambda_i e_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) y  $e'_0 + \dots + e'_n = \lambda(e_0 + \dots + e_n)$ . De estas relaciones, y por ser  $e_0, \dots, e_n$  linealmente independientes, resulta que  $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \lambda$ . Esto prueba la necesidad de la condición. La suficiencia es una consecuencia inmediata de las definiciones.  $\square$

**Ejemplo: referencia proyectiva asociada a una referencia afín**

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín. Sea  $\mathcal{R} = [O; e_1, \dots, e_n]$  una referencia afín de  $\mathbb{A}$ . Sea  $\overline{\mathbb{A}}$  el cierre proyectivo de  $\mathbb{A}$ . Pondremos  $P_0 = \overline{O} = [e_0]$  (recordemos que  $e_0 = (1, \mathbf{0}) \in \overline{V}$ ),  $P_i = [e_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y  $U = [e_0 + e_1 + \dots + e_n]$ . Tenemos así que  $\overline{\mathcal{R}} = [P_0, \dots, P_n; U]$  es una referencia proyectiva de  $\overline{\mathbb{A}}$  y que  $e_0, \dots, e_n$  es una base de  $\overline{V}$  adaptada a  $\overline{\mathcal{R}}$ . Diremos que  $\overline{\mathcal{R}}$  es la *referencia proyectiva asociada a la referencia afín  $\mathcal{R}$* .

**Coordenadas proyectivas**

Sea  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  una referencia proyectiva,  $P$  un punto,  $e_0, \dots, e_n$  una base adaptada a  $\mathcal{R}$  y  $e$  un representante de  $P$ . Sean  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  las componentes de  $e$  respecto a  $e_0, \dots, e_n$ , esto es, los escalares tales que  $e = \xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n$ . Entonces diremos que  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  son *coordenadas proyectivas* de  $P$  respecto a  $\mathcal{R}$ , o  *$\mathcal{R}$ -coordenadas proyectivas de  $P$* .

Observemos que si  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  son coordenadas proyectivas de  $P$  respecto a la referencia  $\mathcal{R}$ , entonces  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  es un vector no nulo de  $K^{n+1}$ .

**3.22 Proposición.** *Dada una referencia  $\mathcal{R}$  y un vector no nulo  $(\xi_0, \dots, \xi_n) \in K^{n+1}$ , existe un único punto  $P$  para el cual  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  son coordenadas proyectivas respecto a  $\mathcal{R}$ .*

**Demostración:** Si  $e_0, \dots, e_n$  es una base adaptada a  $\mathcal{R}$ , el punto

$$P = [\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n]$$

tiene coordenadas  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ . Si  $P'$  también tiene coordenadas  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ , entonces  $P' = [\xi_0 e'_0 + \dots + \xi_n e'_n]$ , donde  $e'_0, \dots, e'_n$  es una base adaptada a  $\mathcal{R}$ . Pero de 3.21 resulta que existe  $\lambda \in K^*$  tal que  $\xi_0 e'_0 + \dots + \xi_n e'_n = \lambda(\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n)$ , de donde  $P' = P$ .  $\square$

El punto para el cual  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  son coordenadas proyectivas respecto a  $\mathcal{R}$  será denotado  $[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}}$ , o simplemente  $[\xi_0, \dots, \xi_n]$  si la referencia  $\mathcal{R}$  se puede sobreentender por el contexto. Así tenemos  $[\xi_0, \dots, \xi_n] = [\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n]$  para cualquier base  $e_0, \dots, e_n$  de  $E$  adaptada a la referencia  $\mathcal{R}$ . En particular, tenemos  $P_0 = [1, 0, \dots, 0], \dots, P_n = [0, 0, \dots, 0, 1], U = [1, 1, \dots, 1]$ .

Puesto que la definición de coordenadas proyectivas de un punto  $P$  respecto a la referencia  $\mathcal{R}$  depende de la elección de una base adaptada a  $\mathcal{R}$  y de un representante de  $P$ , dichas coordenadas no quedan unívocamente determinadas por  $P$ . La proposición que sigue precisa cuál es la ambigüedad.

**3.23 Proposición.** *Si  $(\xi_0, \dots, \xi_n) \in K^{n+1} - \{0\}$  y  $\lambda \in K - \{0\}$ , entonces*

$$[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}} = [\lambda \xi_0, \dots, \lambda \xi_n]_{\mathcal{R}}$$

Recíprocamente, si  $[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}} = [\xi'_0, \dots, \xi'_n]_{\mathcal{R}}$ , entonces existe  $\lambda \in K^*$  tal que  $\xi'_i = \lambda \xi_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

**Demostración:** Es inmediata y se deja como ejercicio para el lector.  $\square$

### Cambio de referencia

Sean  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  y  $\mathcal{R}' = [P'_0, \dots, P'_n; U]$  referencias proyectivas de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}$ . Sea  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$  una base adaptada a  $\mathcal{R}$  y  $\mathbf{e}' = (e'_0, \dots, e'_n)$  una base adaptada a  $\mathcal{R}'$ . Sea  $M$  la matriz de la base  $\mathbf{e}'$  respecto a la base  $\mathbf{e}$ . Pondremos  $[M]$  para indicar la matriz  $M$  salvo un factor escalar no nulo (es decir,  $[M] = [M']$  si y solo si existe un escalar no nulo  $\lambda$  tal que  $M' = \lambda M$ ) y diremos que  $[M]$  es la *matriz de  $\mathcal{R}'$  respecto a  $\mathcal{R}$* .

Sea  $P$  un punto y sean  $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$  coordenadas proyectivas de  $P$  respecto a  $\mathcal{R}$  y  $\xi' = (\xi'_0, \dots, \xi'_n)$  coordenadas proyectivas de  $P$  respecto a  $\mathcal{R}'$ . Tenemos, pues, que  $e = \xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n = \mathbf{e} \xi^T$  y  $e' = \xi'_0 e'_0 + \dots + \xi'_n e'_n = \mathbf{e}' \xi'^T$  son representantes del punto  $P$ , con lo cual existe un escalar no nulo  $\rho$  tal que  $\rho e = e'$ . Así

$$\rho e = \begin{cases} \rho \mathbf{e} \xi^T \\ \mathbf{e}' \xi'^T = \mathbf{e} M \xi'^T \end{cases}$$

de donde obtenemos

$$\rho \xi^T = M \xi'^T \quad [3.3]$$

que es la fórmula del cambio de coordenadas. Esta fórmula se puede también escribir

$$[\xi^T] = [M][\xi'^T] \quad [3.3']$$

### Coordenadas afines y coordenadas proyectivas

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín y  $\mathcal{R} = [O, e_1, \dots, e_n]$  una referencia afín de  $\mathbb{A}$ . Sean  $x_1, \dots, x_n$  las  $\mathcal{R}$ -coordenadas de un punto  $X \in \mathbb{A}$ . Así  $X = O + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  y  $\overline{X} = [e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n]$ . Por tanto,  $(1, x_1, \dots, x_n)$  son coordenadas proyectivas de  $\overline{X}$  respecto a la referencia  $\overline{\mathcal{R}}$ . Por otro lado, si un punto  $Q \in \mathbb{A}$  tiene coordenadas proyectivas  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  respecto a  $\overline{\mathcal{R}}$ , entonces  $Q = [\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n]$  y está claro que  $Q \in \mathbb{A}_\infty$  si y solo si  $\xi_0 = 0$ . Además, si  $Q \notin \mathbb{A}_\infty$ , entonces  $Q = \overline{X}$ , donde  $X \in \mathbb{A}$ , y las  $\mathcal{R}$ -coordenadas de  $X$  son  $(\xi_1/\xi_0, \dots, \xi_n/\xi_0)$ , ya que

$$[\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n] = [e_0 + \frac{\xi_1}{\xi_0} e_1 + \dots + \frac{\xi_n}{\xi_0} e_n]$$

si  $\xi_0 \neq 0$ . Hagamos un resumen de estas conclusiones:

**3.24 Proposición.** Si  $\overline{\mathcal{R}}$  es la referencia proyectiva de  $\overline{\mathbb{A}}$  asociada a la referencia  $\mathcal{R}$  del espacio afín  $\mathbb{A}$ , el punto  $[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\overline{\mathcal{R}}} \in \overline{\mathbb{A}}$  es un punto propio si y solo si  $\xi_0 \neq 0$  y, si este es el caso, el punto  $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathbb{A}$  que le corresponde queda determinado por las relaciones

$$x_i = \xi_i / \xi_0, \quad i = 1, \dots, n$$

**E.3.11.** Comprobar que si  $x^T = Ax' + p^T$  es la relación matricial que expresa el cambio de  $\mathcal{R}$ -coordenadas a  $\mathcal{R}'$ -coordenadas, donde  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  son referencias del espacio afín  $\mathbb{A}$ , entonces  $[\xi'^T] = [\overline{A}][\xi^T]$ , donde

$$\overline{A} = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline p^T & A \end{array} \right]$$

expresa el cambio de  $\overline{\mathcal{R}}$ -coordenadas a  $\overline{\mathcal{R}'}$ -coordenadas.

### Coordenada absoluta

Sea  $\mathcal{R} = [P_0, P_1; U]$  una referencia de una recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$ . Si  $[\xi_0, \xi_1]$  son  $\mathcal{R}$ -coordenadas de un punto  $X$  y  $\xi_1 \neq 0$ , entonces

$$x = \xi_0 / \xi_1 \tag{3.4}$$

solo depende de  $X$  y  $\mathcal{R}$ , y diremos que es la  $\mathcal{R}$ -coordenada absoluta de  $X$ . Puesto que el único punto que satisface  $\xi_1 = 0$  es  $P_0 = [1, 0]_{\mathcal{R}}$ , diremos que su  $\mathcal{R}$ -coordenada absoluta es el símbolo  $\infty$ . Si ponemos  $\overline{K} = K \sqcup \{\infty\}$ , entonces tenemos una aplicación biyectiva  $\overline{K} \simeq \mathbb{P}^1$  tal que  $x \mapsto [x, 1]_{\mathcal{R}}$  si  $x \in K$  y  $\infty \mapsto [1, 0]_{\mathcal{R}}$ . Este punto, lo denotaremos también  $[\infty, 1]_{\mathcal{R}}$  o  $\infty_{\mathcal{R}}$ .

**E.3.12.** Si  $\overline{\mathcal{R}} = [P_0, P_1; U]$  es la referencia proyectiva asociada a una referencia afín  $\mathcal{R} = [O; e_1]$  de  $\mathbb{A}^1$ , la  $\overline{\mathcal{R}}$ -coordenada absoluta del punto  $\overline{X}$  correspondiente a un punto  $X \in \mathbb{A}^1$  coincide con la inversa de la  $\mathcal{R}$ -coordenada de  $X$ , con el convenio  $1/0 = \infty$ .

### Ecuaciones cartesianas de una variedad lineal

Supongamos que  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  es una referencia del espacio proyectivo  $\mathbb{P}$  y pongamos  $\xi_0, \dots, \xi_n$  para denotar las correspondientes coordenadas proyectivas. Consideremos un sistema de  $m$  ecuaciones lineales en las variables  $\xi_0, \dots, \xi_n$ :

$$a_{i0}\xi_0 + \dots + a_{in}\xi_n = 0, \quad a_{i0}, \dots, a_{in} \in K, \quad i = 1, \dots, m. \tag{3.5}$$

Las soluciones de este sistema forman un subespacio vectorial  $W'$  de  $K^{n+1}$  y  $\dim(W') = n + 1 - r$ , donde  $r$  es el rango de la matriz  $(a_{ij})$ . Así pues, los puntos de la forma  $[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}}$ , donde  $\xi_0, \dots, \xi_n$  es una solución no nula del sistema [3.5], forman una

variedad lineal  $L$  de dimensión  $n - r$  de  $\mathbb{P}$ . De esta variedad lineal diremos que es la *variedad lineal determinada por las ecuaciones* [3.5]. También diremos que [3.5] es un *sistema de ecuaciones cartesianas* de la variedad  $L$ .

Recíprocamente, si  $L \subseteq \mathbb{P}$  es una variedad lineal de dimensión  $n - r$ , existen sistemas de ecuaciones lineales tales como el [3.5] que determinan  $L$ . De hecho, veremos que existe un sistema de la forma  $\xi_i = 0$  ( $i = 0, \dots, r - 1$ ) que determina  $L$ . En efecto, sea  $L = [F]$ , donde  $F \subseteq E$  es un subespacio vectorial de  $E$ . Entonces  $\dim(F) = n + 1 - r$ . Sea  $e_r, \dots, e_n$  una base de  $F$  y escojamos vectores  $e_0, \dots, e_{r-1}$  de manera que  $e_0, \dots, e_{r-1}, e_{r+1}, \dots, e_n$  formen una base de  $E$ . Sea  $\mathcal{R}$  la referencia de  $\mathbb{P}$  determinada por la base  $e_0, \dots, e_n$ . En esta referencia, los puntos de  $L$  son los que tienen la forma  $[\xi_r e_r + \dots + \xi_n e_n]$ , es decir, puntos de la forma  $[0, \dots, 0, \xi_r, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}}$ . Está claro, pues, que coinciden con los que satisfacen  $\xi_i = 0$  para  $i = 0, \dots, r - 1$ .

**3.25 Ejemplo.** Una ecuación de la forma  $a_0 \xi_0 + \dots + a_n \xi_n = 0$  determina un hiperplano si los coeficientes  $a_0, \dots, a_n$  no son todos nulos. En el caso de de la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$ , el hiperplano  $a_0 \xi_0 + a_1 \xi_1 = 0$  se reduce al punto  $[-a_1, a_0]$ .

**E.3.13.** Si  $[a_0, a_1, a_2]$  y  $[b_0, b_1, b_2]$  son dos puntos distintos de  $\mathbb{P}^2$ , entonces la ecuación de la recta que determinan es

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Análogamente, si  $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ ,  $[b_0, b_1, b_2, b_3]$  y  $[c_0, c_1, c_2, c_3]$  son tres puntos distintos de  $\mathbb{P}^3$ , entonces

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación del plano determinado por los tres puntos.

**E.3.14.** Sean  $[a_0, a_1, a_2, a_3]$  y  $[b_0, b_1, b_2, b_3]$  dos puntos distintos de  $\mathbb{P}^3$ . Sean  $i, j$  índices tales que  $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$  (nótese que si  $a_i b_j - a_j b_i = 0$  para todos los pares de índices, entonces los puntos coinciden). Probar que si  $\{1, 2, 3, 4\} = \{i, j, k, \ell\}$ , entonces

$$\begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j & \xi_k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j & \xi_\ell \\ a_i & a_j & a_\ell \\ b_i & b_j & b_\ell \end{vmatrix} = 0$$

son ecuaciones cartesianas de la recta determinada por los dos puntos.

### Ecuaciones cartesianas afines y proyectivas

Supongamos ahora que tenemos una referencia afín  $\mathcal{R} = [O; e_1, \dots, e_n]$  del espacio afín  $\mathbb{A}$  y un sistema de ecuaciones lineales no homogéneas

$$b_{i1}x_1 + \dots + b_{in}x_n + b_{i0} = 0, \quad b_{i1}, \dots, b_{in}, b_{i0} \in K, \quad i = 1, \dots, m \quad [3.6]$$

Sabemos que si este sistema es compatible y el rango de su matriz es  $r$ , entonces (teorema 1.25) los puntos  $[x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{R}}$ , donde  $(x_1, \dots, x_n)$  recorre sus soluciones, forman una variedad lineal afín  $L$  de dimensión  $n - r$  y que el espacio director de  $L$  es el determinado por el correspondiente sistema lineal homogéneo

$$b_{i1}x_1 + \dots + b_{in}x_n = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad [3.6']$$

en el sentido de que los vectores directores de  $L$  son los de la forma  $x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ , donde  $x_1, \dots, x_n$  recorre las soluciones de [3.6']. Con estas notaciones tenemos:

**3.26 Proposición.** *En la referencia  $\overline{\mathcal{R}}$  de  $\overline{\mathbb{A}}$  asociada a  $\mathcal{R}$ , el sistema homogéneo*

$$b_{i1}\xi_1 + \dots + b_{in}\xi_n + b_{i0}\xi_0 = 0, \quad b_{i1}, \dots, b_{in}, b_{i0} \in K, \quad i = 1, \dots, m \quad [*]$$

representa el cierre proyectivo  $\overline{L}$  y

$$b_{i1}\xi_1 + \dots + b_{in}\xi_n = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad [*']$$

representa  $L_{\infty}$ .

**Demostración:** En efecto, [\*] representa una variedad lineal  $M$  de  $\overline{\mathbb{A}}$ . Dividiendo por  $\xi_0$  vemos que  $M \cap i(\mathbb{A})$  coincide con  $L$ . Por tanto,  $M = \overline{L}$  (proposición 3.15). Que  $L_{\infty}$  es representada por [\*'] es una consecuencia directa de [3.6'].  $\square$

### *Ecuaciones paramétricas de una variedad lineal*

Un sistema de ecuaciones de la forma

$$\xi_j = \lambda_0 b_{0j} + \dots + \lambda_r b_{rj}, \quad j = 0, \dots, n, \quad [3.7]$$

donde  $b_{ij}$  es una matriz  $(r+1) \times (n+1)$  de rango  $r+1$ , representa una variedad lineal de dimensión  $r$ , en el sentido de que el punto  $[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}}$  recorre una variedad lineal  $L \subseteq \mathbb{P}^n$  de dimensión  $r$  cuando  $(\lambda_0, \dots, \lambda_r)$  recorre  $K^{r+1} - \{0\}$ . Esto es una consecuencia inmediata de que los vectores  $(\xi_0, \dots, \xi_n) \in K^{n+1}$  tales que  $\xi_i = \lambda_0 b_{0j} + \dots + \lambda_r b_{rj}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ , forman un espacio vectorial de dimensión  $r+1$ . Diremos que [3.7] son *ecuaciones paramétricas* de  $L$ . Recíprocamente, si  $L$  es una variedad lineal de dimensión  $r$ , los puntos de  $L$  se pueden determinar por un sistema de ecuaciones paramétricas de la forma [3.7]. En efecto, si  $P_0, \dots, P_r$  son puntos independientes de  $L$  y las coordenadas proyectivas de  $P_i$  respecto a una referencia son  $(b_{i0}, \dots, b_{in})$ , entonces las coordenadas  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  de los puntos de  $L$  vienen dadas por las expresiones

$$\xi_j = \lambda_0 b_{0j} + \dots + \lambda_r b_{rj}, \quad \lambda_0, \dots, \lambda_r \in K$$

**3.27 Ejemplo.** Las ecuaciones paramétricas de la recta que une los puntos  $[a_0, \dots, a_n]$  y  $[b_0, \dots, b_n]$  (que suponemos distintos) son  $\xi_i = \lambda a_i + \mu b_i$ , donde  $\lambda, \mu$  son, si se excluye el caso en que ambos son nulos, escalares arbitrarios.

### Coordenadas baricéntricas

En el subapartado «Coordenadas afines y proyectivas», pág. 188, hemos expuesto la relación que existe entre las coordenadas de un punto del espacio afín respecto a una referencia  $\mathcal{R}$  y las coordenadas proyectivas de este mismo punto respecto a la referencia proyectiva asociada  $\overline{\mathcal{R}}$ .

Veamos ahora otra manera, que es útil en distintas circunstancias, de asociar a una referencia afín  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n]$  de  $\mathbb{A}^n$  una referencia proyectiva de  $\overline{\mathbb{A}}^n$ . Escojamos primero un punto  $A = [a_1, \dots, a_n]_{\mathcal{R}}$  cualquiera, no incidente con las caras del simplejo  $P_0P_1 \cdots P_n$ . Así, si  $e_i = P_i - P_0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), tenemos  $A = P_0 + a_1e_1 + \cdots + a_n e_n$ , con  $a_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y  $a_1 + \dots + a_n \neq 1$  (es decir,  $a_0 \neq 0$ , donde  $a_0 = 1 - (a_1 + \dots + a_n)$ ). Definamos ahora la referencia  $\tilde{\mathcal{R}}_A$  de  $\overline{\mathbb{A}}$  por  $\tilde{\mathcal{R}}_A = [P_0, \dots, P_n; A]$ , donde escribimos con el mismo símbolo un punto de  $\mathbb{A}$  y el correspondiente punto de  $\overline{\mathbb{A}}$ . Observemos que si  $e = (e_0, \dots, e_n)$  es la base usual adaptada a  $\overline{\mathcal{R}}$ , entonces  $P_0 = [e_0]$  y  $P_i = [e_0 + e_i]$  para  $i = 1, \dots, n$ .

#### 3.28 Lema. Los vectores

$$a_0e_0, a_1(e_0 + e_1), \dots, a_n(e_0 + e_n)$$

constituyen una base adaptada a  $\tilde{\mathcal{R}}_A$ .

**Demostración:** Es una comprobación inmediata, si se tiene en cuenta que  $a_0 + a_1 + \dots + a_n = 1$  (por definición de  $a_0$ ).  $\square$

**3.29 Proposición.** Si  $X = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{R}}$  es un punto del espacio afín  $\mathbb{A}$  y ponemos  $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i$ , entonces

$$X = \left[ \frac{x_0}{a_0}, \frac{x_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n}{a_n} \right]_{\tilde{\mathcal{R}}_A}$$

Inversamente, si  $\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_n$  son  $\tilde{\mathcal{R}}_A$ -coordenadas de un punto propio  $X$ ,

$$X = [\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_n]_{\tilde{\mathcal{R}}_A}$$

entonces las  $\mathcal{R}$ -coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  se expresan por las fórmulas

$$x_i = \frac{a_i \tilde{\xi}_i}{a_0 \tilde{\xi}_0 + a_1 \tilde{\xi}_1 + \dots + a_n \tilde{\xi}_n} \quad (i = 1, \dots, n)$$

**Demostración:** Sea  $\overline{\mathcal{R}}$  la referencia de  $\overline{\mathbb{A}}$  asociada a  $\mathcal{R}$ . Sea  $e = (e_0, \dots, e_n)$  la base usual adaptada a  $\overline{\mathcal{R}}$ . Pongamos  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  para denotar coordenadas proyectivas respecto a la referencia  $\overline{\mathcal{R}}$  y  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  para denotar coordenadas proyectivas respecto a la

referencia  $\tilde{\mathcal{R}}_A$ . El lema 3.28 y las fórmulas [3.3] del cambio de coordenadas proyectivas nos dan que

$$\xi_0 = a_0\tilde{\xi}_0 + a_1\tilde{\xi}_1 + \dots + a_n\tilde{\xi}_n, \quad \xi_i = a_i\tilde{\xi}_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad [3.8]$$

Ahora el hecho de que  $x_i = \xi_i/\xi_0$  (proposición 3.24) nos da las relaciones para obtener las  $\mathcal{R}$ -coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  en términos de las  $\tilde{\mathcal{R}}_A$ -coordenadas, y esto establece la segunda parte de la proposición.

Para ver la primera parte, reparemos en que, invirtiendo las fórmulas [3.8], obtenemos

$$\tilde{\xi}_0 = \frac{1}{a_0}(\xi_0 - \xi_1 - \dots - \xi_n), \quad \tilde{\xi}_i = \frac{\xi_i}{a_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad [3.9]$$

y ahora basta recordar que  $[1, x_1, \dots, x_n]$  son  $\bar{\mathcal{R}}$ -coordenadas del punto  $[x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{R}}$ .  $\square$

**3.30 Corolario.** *La ecuación del hiperplano del infinito en la referencia  $\tilde{\mathcal{R}}_A$  es*

$$a_0\tilde{\xi}_0 + a_1\tilde{\xi}_1 + \dots + a_n\tilde{\xi}_n = 0$$

**Demostración:** Inmediata a partir de las fórmulas [3.8] y de que  $\xi_0 = 0$  es la ecuación del hiperplano del infinito en la referencia  $\bar{\mathcal{R}}$ .  $\square$

**3.31 Ejemplo** (Coordenadas baricéntricas). Si  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n]$  es una referencia del espacio afín  $\mathbb{A}$ , y  $G$  es el baricentro del símplice  $P_0P_1 \cdots P_n$ , entonces podemos considerar la referencia proyectiva  $\tilde{\mathcal{R}}_G$  de  $\bar{\mathbb{A}}$ , a la cual denominaremos la *referencia baricéntrica* asociada a  $\mathcal{R}$ . Las coordenadas respecto a esta referencia se denominan *coordenadas baricéntricas* de  $\mathbb{A}$  (o de  $\bar{\mathbb{A}}$ ). Puesto que  $a_i = \frac{1}{n+1}$  si  $A = G$ , también es  $a_0 = \frac{1}{n+1}$  y, por tanto, la ecuación del hiperplano del infinito, en coordenadas baricéntricas, es

$$\tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n = 0$$

Además, las coordenadas afines de un punto,  $(x_1, \dots, x_n)$ , y sus coordenadas baricéntricas,  $[\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_n]$ , se relacionan por las fórmulas

$$x_i = \frac{\tilde{\xi}_i}{\tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n}$$

**E.3.15.** Probar que si  $(x_1, \dots, x_n)$  son las coordenadas afines de un punto  $X$  y ponemos  $x_0 = 1 - (x_1 + \dots + x_n)$ , entonces  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  son coordenadas baricéntricas de  $X$ .

**3.32 Nota.** Sean  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n]$  y  $\mathcal{R}' = [P'_0, \dots, P'_n]$  referencias afines del espacio afín  $\mathbb{A}$ . Sea  $A$  un punto no incidente con ninguna de las caras del símplice  $P_0 \cdots P_n$ .

Sean  $(a_{i0}, \dots, a_{in})$  coordenadas proyectivas de  $P_i$  respecto a la referencia  $\overline{\mathcal{R}}'$  y supongamos que se han normalizado de manera que  $(\sum_{i=0}^n a_{i0}, \dots, \sum_{i=0}^n a_{in})$  sean  $\overline{\mathcal{R}}'$ -coordenadas proyectivas de  $A$ . Pongamos  $M = (a_{ij})$ ,  $0 \leq i, j \leq n$ . Entonces la relación

$$[\xi'] = [\tilde{\xi}][M]$$

nos expresa las  $\overline{\mathcal{R}}'$ -coordenadas  $\xi' = (\xi'_0, \dots, \xi'_n)$  de un punto en términos de sus  $\tilde{\mathcal{R}}_A$ -coordenadas  $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_n)$ .

Esta relación es útil para resolver problemas en los cuales la conclusión y los datos del problema se expresan mejor en referencias distintas. En este caso, suele ser oportuno escoger  $\mathcal{R}'$  de manera que nos permita expresar cómodamente la conclusión, y  $\tilde{\mathcal{R}}_A$  de manera que nos permita traducir de una manera natural los datos y las hipótesis del problema. Para ejemplos de este principio, v. los problemas P.3.16, P.3.17 y P.3.18. En estos dos últimos problemas, por ejemplo, es cómodo utilizar *coordenadas trimétricas*: si  $P_0P_1P_2$  es un triángulo del plano euclidiano, son las coordenadas proyectivas relativas a la referencia  $\tilde{\mathcal{R}}_I = [P_0, P_1, P_2; I]$ , donde  $I$  es el incentro del triángulo.

### 3.3 Projectividades

Sean  $\mathbb{P} = [E]$  y  $\mathbb{P}' = [E']$  dos espacios proyectivos. Dada una aplicación lineal inyectiva  $f: E \rightarrow E'$ , pondremos  $[f]: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  para denotar la aplicación tal que  $[x] \mapsto [f(x)]$ . Puesto que  $[f(\lambda x)] = [\lambda f(x)] = [f(x)]$  para todo  $\lambda \in K - \{0\}$ , vemos que  $[f]$  está bien definida. Notemos, por otro lado, que  $[\mu f] = [f]$  para todo  $\mu \in K - \{0\}$ .

#### Generalidades

Diremos que una aplicación  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  es una *projectividad* si existe un isomorfismo lineal  $f: E \rightarrow E'$  tal que  $\varphi = [f]$ . Las projectividades de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}$  en sí mismo se denominan *homografías* de  $\mathbb{P}$ .

**E.3.16.** Sean  $E$ ,  $E'$  y  $E''$  espacios vectoriales y  $f: E \rightarrow E'$  y  $f': E' \rightarrow E''$  aplicaciones lineales inyectivas. Verificar que  $[f'] \circ [f] = [f' \circ f]$  y que la composición de projectividades es una projectividad.

**E.3.17.** Si  $f$  es un isomorfismo lineal, comprobar que  $[f]$  es biyectiva y que la projectividad  $[f^{-1}]$  es inversa de la projectividad  $[f]$ .

**E.3.18.** Probar que las homografías de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}$  forman un grupo con la operación de composición. Este grupo es conocido como el *grupo proyectivo* de  $\mathbb{P}$ , y pondremos  $PGL(\mathbb{P})$  para denotarlo.

**3.33 Proposición.** Si  $f$  y  $f'$  son automorfismos lineales de  $E$  tales que  $[f] = [f']$ , entonces existe  $\mu \in K$  tal que  $f' = \mu f$ .

**Demostración:** Por hipótesis tenemos  $[f'(e)] = [f(e)]$  para todo  $e \in E - \{0\}$ . Existe así, para cada  $e \in E - \{0\}$ ,  $\mu_e \in K$  tal que  $f'(e) = \mu_e f(e)$ . Será suficiente ver que  $\mu_{e'} = \mu_e$  para cualquier par de vectores  $e, e' \in E - \{0\}$ . Consideremos primero el caso en que  $e$  y  $e'$  son linealmente dependientes. Esto significa que existe  $\lambda \in K$  tal que  $e' = \lambda e$ , y  $\mu_{\lambda e} = \mu_e$  resulta de las relaciones siguientes:

$$f'(e') = \begin{cases} \mu_{e'} f(e') = \mu_{\lambda e} f(e') \\ f'(\lambda e) = \lambda f'(e) = \lambda \mu_e f(e) = \mu_e f(\lambda e) = \mu_e f(e') \end{cases}$$

Por otro lado, tenemos

$$f'(e + e') = \begin{cases} \mu_{e+e'} f(e + e') = \mu_{e+e'} f(e) + \mu_{e+e'} f(e') \\ f'(e) + f'(e') = \mu_e f(e) + \mu_{e'} f(e') \end{cases}$$

y de estas relaciones se obtiene, si  $e$  y  $e'$  son linealmente independientes,  $\mu_e = \mu_{e+e'} = \mu_{e'}$ .  $\square$

Sea  $f: E \rightarrow E'$  un isomorfismo lineal entre los espacios vectoriales  $E$  y  $E'$  y sea  $F$  un subespacio vectorial de  $E$ . Está claro que  $[f]([F]) = [f(F)]$ , con lo cual tenemos:

**3.34.** Una proyectividad transforma variedades lineales en variedades lineales de la misma dimensión.  $\square$

Si  $L$  y  $L'$  son variedades lineales de  $\mathbb{P} = [E]$  y  $\varphi = [f]$ , entonces en  $\mathbb{P}' = [E']$  tenemos que

$$\varphi(L \vee L') = \varphi(L) \vee \varphi(L') \quad [3.10]$$

$$\varphi(L \cap L') = \varphi(L) \cap \varphi(L') \quad [3.11]$$

Estas fórmulas se deducen directamente de las definiciones. Se dejan, pues, al lector los detalles de su demostración.

### Representación de una proyectividad en coordenadas

Veamos cómo se representa una proyectividad  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  mediante una referencia  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  de  $\mathbb{P}$  y una referencia  $\mathcal{R}' = [P'_0, \dots, P'_n; U']$  de  $\mathbb{P}'$ . Sea  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$  una base de  $E$  adaptada a  $\mathcal{R}$  y sea  $\mathbf{e}' = (e'_0, \dots, e'_n)$  una base de  $E'$  adaptada a  $\mathcal{R}'$ . Si  $\varphi = [f]$ , sea  $M$  la matriz de  $f$  respecto a las bases  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{e}'$ , es decir,  $f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'M$ . Como  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}'$  y  $f$  están definidas salvo un factor escalar no nulo (proposiciones 3.21 y 3.18),  $[M]$  sólo depende de  $\varphi$  y diremos que es la *matriz de  $\varphi$  respecto a las referencias  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$* .

Sean  $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$  las  $\mathcal{R}$ -coordenadas de un punto  $P$  de  $\mathbb{P}$  y  $\xi' = (\xi'_0, \dots, \xi'_n)$  las  $\mathcal{R}'$ -coordenadas de  $\varphi(P)$ . Entonces,

$$[\xi'^T] = [M][\xi^T] \quad [3.12]$$

En efecto,  $e\xi^T$  es un representante de  $P$ . Por tanto,  $f(e\xi^T) = f(e)\xi^T = e'M\xi^T$  es un representante  $\varphi(P)$ . Dado que  $e'\xi'^T$  es otro representante de  $\varphi(P)$ , la fórmula resulta inmediatamente.

**E. 3.19.** Sea  $\varphi$  una homografía de  $\mathbb{P}^1$  y supongamos que la matriz de  $\varphi$ , en una cierta referencia, es  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ . Probar que  $\varphi$  es una *involución* (esto es, que  $\varphi^2$  es la identidad) si y solo si, o bien  $a_{11} + a_{22} = 0$ , o bien  $\varphi$  es la identidad.

### Teorema fundamental de las proyectividades

**3.35 Teorema.** Sea  $\mathcal{R} = [P_0, P_1, \dots, P_n; U]$  una referencia del espacio proyectivo  $\mathbb{P}$  y  $\mathcal{R}' = [P'_0, P'_1, \dots, P'_n; U']$  una referencia del espacio proyectivo  $\mathbb{P}'$ . Entonces existe una única proyectividad  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  tal que  $\varphi(P_i) = P'_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) y  $\varphi(U) = U'$  (para escribir estas relaciones abreviadamente pondremos  $\varphi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$ ).

**Demostración:** Veamos primero la existencia. Sea  $e_0, e_1, \dots, e_n$  una base de  $E$  adaptada a  $\mathcal{R}$  y  $e'_0, e'_1, \dots, e'_n$  una base de  $E'$  adaptada a  $\mathcal{R}'$ . Sea  $f: E \rightarrow E'$  la única aplicación lineal tal que  $f(e_i) = e'_i$ . Entonces  $f$  es un isomorfismo lineal y la proyectividad  $[f]$  transforma  $P_i = [e_i]$  en  $[e'_i] = P'_i$  y  $U = [e_0 + e_1 + \dots + e_n]$  en  $[e'_0 + e'_1 + \dots + e'_n] = U'$ .

Para ver la unicidad, sea  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  una proyectividad que transforma  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{R}'$ . Bastará mostrar que  $\varphi = [f]$ . Sea  $g: E \rightarrow E'$  un isomorfismo lineal tal que  $\varphi = [g]$ . Como  $P'_i = \varphi(P_i) = [g(e_i)]$  y  $U' = \varphi(U) = [g(e_0) + g(e_1) + \dots + g(e_n)]$ ,  $g(e_0), g(e_1), \dots, g(e_n)$  es una base de  $E'$  adaptada a  $\mathcal{R}'$ . Por la unicidad, salvo un factor escalar, de las bases adaptadas a una referencia (proposición 3.21), existe un  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que  $g(e_i) = \lambda e'_i$ . Ahora  $e'_i = f(e_i)$ , por definición de  $f$ , y así  $g = \lambda f$ , de donde  $\varphi = [g] = [\lambda f] = [f]$ .  $\square$

**E. 3.20.** Sean  $L$  y  $L'$  dos variedades lineales de dimensión  $r$  de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}$ . Sea  $\mathcal{R}$  una referencia de  $L$  y  $\mathcal{R}'$  una referencia de  $L'$ . Por el teorema fundamental de las proyectividades, existe una única proyectividad  $\varphi: L \rightarrow L'$  que transforma  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{R}'$ . Probar que  $\varphi$  es la restricción a  $L$  de una homografía de  $\mathbb{P}$ , es decir, que existe una homografía  $\alpha$  de  $\mathbb{P}$  tal que  $\alpha(X) = \varphi(X)$  para todo  $X \in L$ .

### Puntos fijos de una homografía

Sea  $\varphi = [f]$  una homografía del espacio proyectivo  $\mathbb{P} = [E]$ . Un punto  $[x] \in \mathbb{P}$  es *fijo* de  $\varphi$  si y solo si  $[f(x)] = [x]$ . Dado que esta relación equivale a decir que existe  $\lambda \in K$  tal que  $f(x) = \lambda x$ , vemos que  $[x]$  es fijo por  $\varphi$  si y solo si  $x$  es un vector propio no nulo de  $f$ .

**E.3.21.** Probar que una homografía de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  tiene al menos un punto fijo.

**3.36 Proposición.** *El conjunto de puntos fijos de  $\varphi$  es la unión de un número finito de variedades lineales disjuntas dos a dos.*

**Demostración:** Sea  $\varphi = [f]$ , donde  $f$  es un automorfismo lineal de  $E$ . El conjunto de vectores propios de  $f$  de valor propio  $\lambda \in K$  forman un subespacio vectorial  $E_\lambda$  de  $E$ . Además,  $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$  si  $\lambda \neq \mu$ . Si ponemos  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  para denotar los valores propios no nulos distintos de  $f$  y  $L_i = [E_{\lambda_i}]$  ( $i = 1, \dots, r$ ), entonces es manifiesto que las variedades lineales  $L_1, \dots, L_r$  son disjuntas dos a dos y que el conjunto de puntos fijos de  $\varphi$  es  $L_1 \cup \dots \cup L_r$ .  $\square$

**3.37 Ejemplo (Homologías).** Se dice que una homografía  $\varphi$  es una *homología* si es distinta de la identidad y tiene un hiperplano de puntos fijos. En tal caso, el hiperplano se denomina el *eje* de la homología. Si una homología no tiene otros puntos fijos que los del eje, se dice que la homología es *especial*; si no, se dice que es *general*.

Veamos que *una homología general tiene un único punto fijo fuera del eje*. En efecto, sea  $H$  el eje de una homología  $\varphi$  y supongamos que  $P, Q \notin H$  son dos puntos fijos distintos de  $\varphi$ . Veamos que si  $R$  es un punto cualquiera, entonces  $R$  es fijo por  $\varphi$ , con lo cual la afirmación queda establecida por reducción al absurdo, ya que  $\varphi$  no es la identidad. Para ver que  $R$  es fijo, podemos suponer que no es de  $H$  y que no pertenece a la recta de puntos fijos  $PQ$  (ya que  $P, Q$  y  $PQ \cap H$  son tres puntos fijos de la misma). Entonces la recta  $RP$  es fija, ya que contiene dos puntos fijos ( $P$  y  $RP \cap H$ ). Por las mismas razones,  $RQ$  es fija. Como  $PR$  y  $QR$  son rectas distintas, inferimos que  $R$  es fijo, como se trataba de ver.

El único punto fijo fuera del eje de una homología general se denomina *centro* de la homología.

Si  $\mathbb{A}$  es un espacio afín y  $\varphi$  es una homotecia de centro  $O$ , entonces su extensión proyectiva  $\bar{\varphi}$  es una homología general: su eje es el hiperplano del infinito y su centro es el punto  $\bar{O}$ . Análogamente, si  $\varphi$  es una traslación de  $\mathbb{A}$ ,  $\bar{\varphi}$  es una homología especial con eje el hiperplano  $\mathbb{A}_\infty$ .

**E.3.22.** Si  $\varphi$  es una homología general, mostrar que existen referencias proyectivas  $\mathcal{R}$  tales que la matriz de  $\varphi$  respecto a  $\mathcal{R}$  tiene la forma

$$\left[ \begin{array}{c|c} \kappa & \\ \hline & I_n \end{array} \right],$$

donde  $\kappa \in K - \{0, 1\}$ . Mostrar también que  $\kappa$  queda unívocamente determinada por  $\varphi$  (diremos que  $\kappa$  es el *módulo* de  $\varphi$ ).

**E.3.23.** Probar que las rectas invariantes por una homología general son precisamente las contenidas en su eje y las que pasan por su centro.

**E.3.24.** Si  $\varphi$  es un homología especial, mostrar que existen referencias proyectivas  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  tales que la matriz de  $\varphi$  respecto a  $\mathcal{R}$  tiene la forma

$$\left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & & & & \\ \hline 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \end{array} \right].$$

Demostrar también que las rectas invariantes por  $\varphi$  son precisamente las contenidas en el eje  $H$  de  $\varphi$  y las que pasan por el punto  $P_1 \in H$ . Vemos así que el punto  $P_1$  del eje de  $\varphi$  queda unívocamente determinado por  $\varphi$  (diremos que  $P_1$  es el *centro* de la homología especial  $\varphi$ ).

**E.3.25.** Sea  $\varphi$  una homografía de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  y supongamos que la matriz de  $\varphi$  respecto a una cierta referencia es  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ . Pongamos  $\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$ . Probar que si  $\Delta > 0$ , entonces  $\varphi$  tiene exactamente dos puntos fijos reales, y que si  $\Delta < 0$ , entonces  $\varphi$  no tiene puntos fijos reales (en el primer caso, se dice que la homografía es *hiperbólica* y en el segundo, que es *elíptica*; observemos que una homografía hiperbólica es una homología). Mostrar también que si  $\Delta = 0$ , entonces, o bien  $\varphi$  es la identidad, o bien la homografía tiene un único punto fijo, necesariamente real (en este caso la homografía es una homología especial y es costumbre decir que la homografía es *parabólica*).

### Perspectividades

Sea  $\mathbb{P} = [E]$  un espacio proyectivo de dimensión  $n \geq 2$  y  $V \subseteq \mathbb{P}$  una variedad lineal de dimensión  $d = n - r - 1$  ( $1 \leq r \leq n - 1$ ). Dado un punto  $P \notin V$ , diremos que la variedad  $V \vee P$  es la *proyectante de P desde V* y pondremos  $VP$  para denotarla (compárese con la noción de proyectante de un punto desde otro, en el contexto de la geometría afín, considerada en la sección 3.0). Notemos que  $VP$  tiene dimensión  $d + 1 = n - r$ , de manera que  $VP$  es una recta cuando  $V$  es un punto.

Sea ahora  $L$  una variedad de dimensión  $r$  tal que  $L \cap V = \emptyset$ . Fijémonos que  $V \vee L = \mathbb{P}$ , como consecuencia inmediata de la fórmula de las dimensiones  $[\diamond]$ . Dado un punto  $P \notin V$ , la intersección de la proyectante  $VP$  con la variedad  $L$ ,  $VP \cap L$ , es un punto de  $L$ , ya que por la fórmula de las dimensiones

$$\dim(VP \cap L) = \dim(VP) + \dim(L) - \dim(VP \vee L) = n - r + r - n = 0$$

(hemos utilizado que  $V \vee L = \mathbb{P}$ ). Diremos que  $P' = VP \cap L$  es la *proyección de P sobre L desde V* (o *con centro V*). Obviamente, tenemos  $P' = P$  si y solo si  $P \in L$ .

Consideremos ahora otra variedad  $L'$  de dimensión  $r$  y tal que  $V \cap L' = \emptyset$ . Entonces podemos considerar la aplicación  $\pi_V: L \rightarrow L'$  tal que  $P \mapsto P' = VP \cap L'$ . A esta aplicación, la denominaremos la *perspectividad de L en L' desde V* (o *con centro V*).

**3.38 Proposición.** Sean  $L$  y  $L'$  dos variedades lineales de dimensión  $r$  de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n = [E]$ ,  $1 \leq r \leq n - 1$ . Sea  $V$  una variedad lineal de  $\mathbb{P}$  de dimensión  $n - r - 1$  y disjunta de  $L$  y de  $L'$ . Entonces, la perspectividad  $\pi_V : L \rightarrow L'$  es una proyectividad.

**Demostración:** Sean  $F, F', G \subseteq E$  los subespacios vectoriales tales que  $L = [F]$ ,  $L' = [F']$  y  $V = [G]$ . Las relaciones  $V \cap L = \emptyset$  y  $V \vee L = \mathbb{P}$  equivalen a  $E = G \oplus F$ . Análogamente, las relaciones  $V \cap L' = \emptyset$  y  $V \vee L' = \mathbb{P}$  equivalen a  $E = G \oplus F'$ .

Dado un  $x \in E$ , sea  $x' \in F'$  el único vector tal que  $x - x' \in G$ , es decir, la proyección de  $x$  sobre  $F'$  relativamente a la descomposición  $E = G \oplus F'$ . La aplicación  $E \rightarrow F'$  tal que  $x \mapsto x'$  es lineal y su núcleo es  $G$ . De esto resulta, ya que  $G \cap F = \{0\}$ , que la aplicación  $f : F \rightarrow F'$  tal que  $x \mapsto x'$  es lineal e inyectiva. Como  $F$  y  $F'$  tienen la misma dimensión,  $f$  es un isomorfismo.

Para terminar la demostración basta probar, pues, que  $\pi_V = [f]$ . Pero si  $P = [x] \in L$ , entonces  $[f](P) = [f(x)] = [x']$  y  $x - x' = w \in G$ , de donde resulta que  $VP = [G + \langle x \rangle] = [G + \langle x' \rangle]$  y  $\pi_V(P) = VP \cap L' = [G + \langle x' \rangle] \cap [F'] = [x'] = [f(x)]$ .  $\square$

### Proyectividades de Poncelet

Si  $L$  y  $L'$  son variedades lineales de dimensión  $r$  ( $1 \leq r \leq n - 1$ ) de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$ , a una aplicación  $\varphi : L \rightarrow L'$  la denominaremos una *proyectividad de Poncelet* si se puede obtener como composición de un número finito de perspectividades, esto es, si se puede encontrar una sucesión  $L_0, \dots, L_k$  de variedades lineales de dimensión  $r$ , con  $L = L_0$  y  $L' = L_k$ , y una sucesión  $V_1, \dots, V_k$  de variedades lineales de dimensión  $n - r - 1$  tales que  $V_i \cap L_{i-1} = V_i \cap L_i = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ , de manera que  $\varphi$  es la composición de las perspectividades  $\pi_{V_i} : L_{i-1} \rightarrow L_i$ . Sabido que las perspectividades son proyectividades, está claro que toda proyectividad de Poncelet es una proyectividad. La afirmación recíproca también es cierta:

**3.39 Teorema (de Poncelet).** Toda proyectividad  $\varphi : L \rightarrow L'$  entre dos variedades lineales de dimensión  $r$  de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$  ( $1 \leq r \leq n - 1$ ) es una proyectividad de Poncelet.

Puesto que la demostración completa de este teorema es bastante laboriosa, al punto que su inclusión nos llevaría más allá de los objetivos de este curso, nos limitaremos a establecer un par de casos particulares. Por ejemplo, de la proposición que sigue deduciremos una prueba del caso  $n = 2$  y  $r = 1$ .

**3.40 Proposición.** Sean  $L$  y  $L'$  dos rectas distintas de  $\mathbb{P}^2$ ,  $A, B, C$  tres puntos distintos de  $L$  y  $A', B', C'$  tres puntos distintos de  $L'$ . Entonces,  $A, B, C$  se pueden transformar en  $A', B', C'$  por una perspectividad o por una composición de dos perspectividades.

**Demostración:** Supongamos primero que  $A = A'$ . Entonces  $B \neq B'$ , ya que de otro modo  $L$  y  $L'$  coincidirían. Análogamente,  $C \neq C'$ . Podemos, pues, considerar (v.

figura 3.11) el punto  $O$  de intersección de las rectas  $BB'$  y  $CC'$ . Ahora está claro que la perspectividad de centro  $O$  transforma  $A, B, C$  en  $A', B', C'$ .

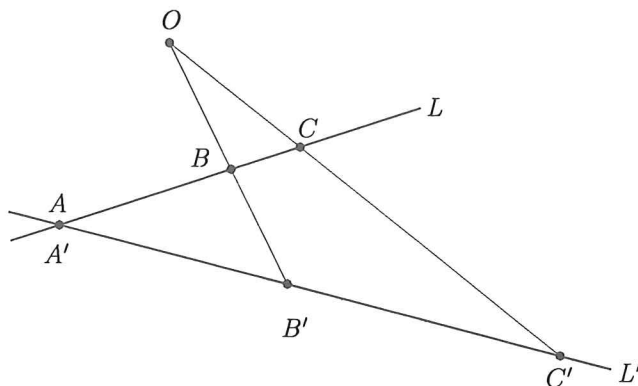


Figura 3.11: Perspectividad de vértice  $O$

Si  $A' \neq A$ , consideremos una recta  $L''$  por  $A'$  que no pase por  $A$  ni coincida con  $L'$ , y un punto  $O$  sobre la recta  $AA'$  distinto de  $A$  y  $A'$  (v. figura 3.12). La perspectividad de  $L$  en  $L''$  con vértice  $O$  transforma  $A$  en  $A'$ . Sean  $B'', C'' \in L''$  las imágenes de  $B$  y  $C$  por esta perspectividad. Ahora existe, por el caso anterior, una perspectividad que transforma  $A', B'', C''$  en  $A', B', C'$ , y esto termina la prueba.  $\square$

**3.41 Corolario.** *Toda proyectividad entre dos rectas de  $\mathbb{P}^2$  es una proyectividad de Poncelet.*

**Demostración:** Sean  $L$  y  $L'$  rectas de  $\mathbb{P}^2$  y  $\varphi: L \rightarrow L'$  una proyectividad. Sean  $A, B, C \in L$  tres puntos distintos y pongamos  $A' = \varphi(A)$ ,  $B' = \varphi(B)$  y  $C' = \varphi(C)$ . Por el teorema fundamental de las proyectividades, será suficiente ver que existe una proyectividad de Poncelet  $\psi: L \rightarrow L'$  tal que  $\psi(A) = A'$ ,  $\psi(B) = B'$  y  $\psi(C) = C'$ . Dado que esto ha sido establecido en la proposición 3.40 si  $L \neq L'$ , solo nos falta ocuparnos del caso  $L = L'$ . Este caso, sin embargo, puede reducirse al anterior. En efecto, escojamos una recta  $L_1$  distinta de  $L$  y un punto  $O \notin L, L_1$ . Pongamos  $A_1, B_1$  y  $C_1$  para denotar las proyecciones de  $A, B, C$  sobre  $L_1$  desde  $O$ . Como  $L_1 \neq L = L'$ , por la proposición 3.40 existe una proyectividad de Poncelet  $\psi_1: L_1 \rightarrow L'$  tal que  $\psi_1(A_1) = A'$ ,  $\psi_1(B_1) = B'$  y  $\psi_1(C_1) = C'$ . Si ahora ponemos  $\psi: L \rightarrow L'$  para denotar la composición de la perspectividad  $\pi_O: L \rightarrow L_1$  con la proyectividad de Poncelet  $\psi_1$ , entonces  $\psi$  es una proyectividad de Poncelet que cumple las condiciones requeridas.  $\square$

**E.3.26.** Comprobar que una proyectividad entre dos rectas distintas del plano proyectivo es una perspectividad si y solo si el punto de intersección de las dos rectas es fijo.

La proposición siguiente permite establecer, de manera similar al caso de dos rectas de un plano, que el teorema 3.39 es cierto para dos rectas de  $\mathbb{P}^3$ .

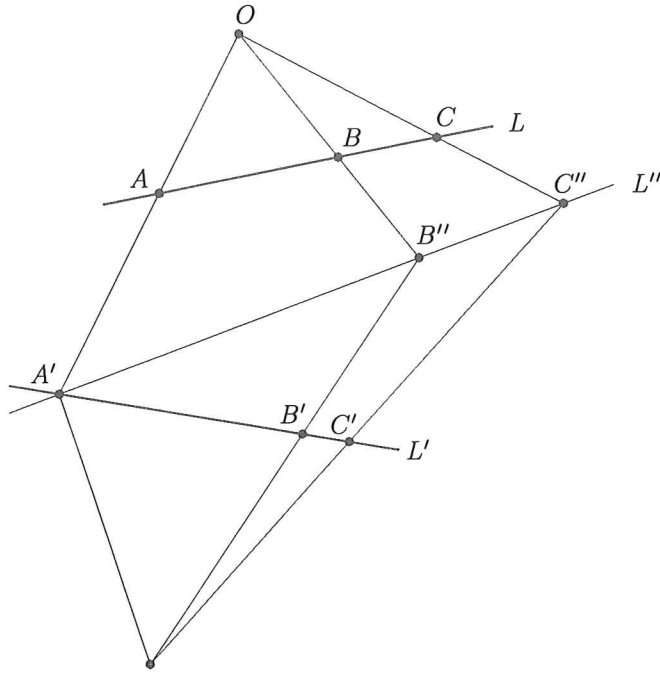


Figura 3.12: Composición de perspectivas

**3.42 Proposición.** Sean  $L$  y  $L'$  dos rectas disjuntas de  $\mathbb{P}^3$ ,  $A, B, C$  tres puntos distintos de  $L$  y  $A', B', C'$  tres puntos distintos de  $L'$ . Entonces  $A, B, C$  se pueden transformar en  $A', B', C'$  por una perspectiva.

**Demostración:** Las rectas  $L_1 = AA'$ ,  $L_2 = BB'$  y  $L_3 = CC'$  son disjuntas dos a dos, ya que si fuese, por ejemplo,  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ , entonces  $AB = L$  y  $A'B' = L'$  serían coplanarias. Sea  $A'' \in L_1$  un punto distinto de  $A$  y de  $A'$ . Entonces  $\Pi = A'' \vee L_3$  es un plano que no contiene  $L_2$ , ya que de otro modo  $L_2$  y  $L_3$  serían coplanarias. Así pues,  $\Pi$  y  $L_2$  se cortan en un único punto  $B''$ . Las rectas  $L'' = A''B''$  y  $L_3$ , ambas del plano  $\Pi$ , se cortan en un punto  $C''$ . Tenemos así que  $L''$  corta a  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  en los puntos  $A''$ ,  $B''$  y  $C''$ , respectivamente. Además,  $B'' \neq B, B'$ : si, por ejemplo, fuese  $B'' = B$ , entonces las rectas  $L'' = A''C''$  y  $L = AC$  se cortarían en el punto  $B$ , de donde resultaría que  $AA'' = L_1$  y  $CC'' = L_3$  serían coplanarias (notemos que con  $B'' = B$  debe ser  $C \neq C''$ ). Análogamente se ve que  $C'' \neq C, C'$ . Ahora está claro que la perspectiva de  $L$  en  $L'$  con centro  $L''$  transforma  $A, B, C$  en  $A', B', C'$ , respectivamente.  $\square$

**E.3.27.** Mostrar que una homografía de una recta de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  no se puede expresar como producto de solo dos perspectivas si es elíptica, pero que esta expresión es posible si la homografía es hiperbólica o parabólica.

### Extensión proyectiva de una afinidad

En el apartado «Clausura proyectiva» de la sección 3.1 (pág. 179) hemos estudiado la clausura proyectiva  $\overline{\mathbb{A}}$  de un espacio afín  $\mathbb{A}$ . Ahora veremos que una afinidad de  $\mathbb{A}$  se extiende de una única manera a una proyectividad de  $\overline{\mathbb{A}}$  y que esta extensión nos permite identificar el grupo de las afinidades de  $\mathbb{A}$  con el subgrupo de  $PGL(\overline{\mathbb{A}})$  formado por las homografías que dejan invariante el hiperplano del infinito  $\mathbb{A}_\infty$ .

Sea  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  una afinidad y  $f: V \rightarrow V$  su automorfismo lineal asociado, de manera que  $f$  es el único automorfismo lineal de  $V$  tal que

$$f(Q - P) = \varphi(Q) - \varphi(P)$$

En particular, si  $O \in \mathbb{A}$  y  $v \in V$ , entonces  $\varphi(O + v) = \varphi(O) + f(v)$ .

**3.43 Teorema.** *Existe una única homografía  $\overline{\varphi}$  de  $\overline{\mathbb{A}}$  tal que  $\overline{\varphi}(i(P)) = i(\varphi(P))$  para todo  $P \in \mathbb{A}$ . Además, la homografía  $\overline{\varphi}$  deja  $\mathbb{A}_\infty$  invariante y  $\overline{\varphi}|_{\mathbb{A}_\infty} = [f]$ .*

**Demostración:** Sea  $w \in V$  el vector tal que  $\varphi(O) = O + w$ . Sea  $\overline{f}: \overline{V} \rightarrow \overline{V}$  la única aplicación lineal tal que  $e_0 \mapsto e_0 + w$  y  $\overline{f}|_V = f$ . Como  $e_0 \notin V$  y  $f$  es un automorfismo de  $V$ ,  $\overline{f}$  es un automorfismo de  $\overline{V}$ . Sea  $\overline{\varphi} = [\overline{f}]$ . Por definición tenemos, pues,

$$[\overline{\varphi}]([\lambda e_0 + v]) = [\lambda(e_0 + w) + f(v)]$$

Si ahora  $P$  es un punto de  $\mathbb{A}$  y  $P = O + v$  ( $v \in V$ ),

$$\overline{\varphi}(i(P)) = \overline{\varphi}([e_0 + v]) = [e_0 + w + f(v)] = i(O + w + f(v)) = i(\varphi(P))$$

y esto demuestra la existencia de  $\overline{\varphi}$ . Notemos que

$$\overline{\varphi}|_{\mathbb{A}_\infty} = [\overline{f}]|_V = [f]|_V = [f]$$

Para ver la unicidad, sea  $\psi$  una homografía de  $\overline{\mathbb{A}}$  tal que  $\psi(i(P)) = i(\varphi(P))$  para todo punto  $P \in \mathbb{A}$ . Veremos que  $\psi = \overline{\varphi}$  y esto concluirá la demostración. Por definición de homografía, existe un automorfismo lineal  $g$  de  $\overline{V}$  tal que  $\psi = [g]$ . Ahora, de

$$\psi(i(O)) = \begin{cases} [g]([e_0]) = [g(e_0)] \\ i(\varphi(O)) = i(O + w) = [e_0 + w] \end{cases}$$

deducimos que existe  $\mu \in K$  tal que  $g(e_0) = \mu(e_0 + w)$ , es decir,  $(\mu^{-1}g)(e_0) = e_0 + w$  (observemos que  $\mu \neq 0$  porque  $g$  es inyectiva). Como  $[\mu^{-1}g] = [g] = \psi$ , cambiando  $g$  por  $\mu^{-1}g$  podemos suponer que  $\psi = [g]$  y  $g(e_0) = e_0 + w = \overline{f}(e_0)$ . Sea ahora  $v \in V$  un vector cualquiera y  $P = O + v$ . Entonces, las relaciones

$$\psi(i(P)) = \begin{cases} [g]([e_0 + v]) = [g(e_0) + g(v)] = [e_0 + w + g(v)] \\ i(\varphi(P)) = i(O + w + f(v)) = [e_0 + w + f(v)] \end{cases}$$

nos permiten inferir que  $g(v) = f(v) = \overline{f}(v)$ . En suma, tenemos  $g = \overline{f}$  y, por tanto,  $\psi = \overline{\varphi}$ .  $\square$

**3.44 Corolario.** La aplicación  $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$  es un monomorfismo de  $G(\mathbb{A})$  en  $PGL(\bar{\mathbb{A}})$  y su imagen es el subgrupo de  $PGL(\bar{\mathbb{A}})$  formado por las homografías que dejan  $\mathbb{A}_\infty$  invariante (o, equivalentemente, que dejan  $i(\mathbb{A})$  invariante).

**Demostración:** Sean  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  afinidades de  $\mathbb{A}$ . Entonces,  $\psi = \bar{\varphi}_2\bar{\varphi}_1$  es una homografía de  $\bar{\mathbb{A}}$  que deja  $i(\mathbb{A})$  invariante y que cumple  $\psi(i(P)) = i((\varphi_2\varphi_1)(P))$  para todo  $P \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ . Puesto que  $\psi' = \overline{\varphi_2\varphi_1}$  también cumple  $\psi'(i(P)) = i((\varphi_2\varphi_1)(P))$ , por unicidad vemos que  $\overline{\varphi_2\varphi_1} = \bar{\varphi}_2\bar{\varphi}_1$ , lo cual prueba que  $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$  es un homomorfismo de grupos. Este homomorfismo es un monomorfismo, ya que las extensiones proyectivas de afinidades distintas son homografías distintas.

Sea ahora  $\psi = [g]$  una homografía de  $\bar{\mathbb{A}}$  que deja  $\mathbb{A}_\infty$  invariante. Queremos ver que  $\psi = \bar{\varphi}$  para alguna afinidad  $\varphi$  de  $\mathbb{A}$ . Ahora bien, la hipótesis de que  $\psi$  deja  $\mathbb{A}_\infty = [V]$  invariante equivale a decir que  $g$  deja  $V$  invariante. Además, si  $g(e_0) = \mu e_0 + w$ , con  $w \in V$ , tenemos  $\mu \neq 0$  (de otro modo  $g$  no sería inyectiva). Cambiando  $g$  por  $\mu^{-1}g$ , podemos suponer, pues, que  $g(e_0) = e_0 + w$ . Entonces, si ponemos  $f = g|_V$  y  $\varphi(P) = O + w + f(P - O)$  (para todo  $P \in \mathbb{A}$ ),  $\varphi$  es una afinidad de  $\mathbb{A}$  y

$$i(\varphi(P)) = [e_0 + w + f(P - O)] = [g(e_0 + (P - O))] = \psi(i(P))$$

de donde resulta que  $\psi = \bar{\varphi}$ . □

Dado que  $\varphi$  y  $\bar{\varphi}$  se determinan mutuamente, en la práctica no hace falta distinguirlos. Así, diremos que una homografía de  $\bar{\mathbb{A}}$  es una afinidad si y solo si es la extensión de una afinidad de  $\mathbb{A}$ . En particular, a una homografía de  $\bar{\mathbb{A}}$  la denominaremos *traslación* (homotecia) si es la extensión de una traslación (homotecia) de  $\mathbb{A}$ .

### Expresión de la homografía $\bar{\varphi}$ en coordenadas

Sea  $\mathcal{R} = [O; e_1, \dots, e_n]$  una referencia afín de  $\mathbb{A}$  y  $\bar{\mathcal{R}} = [P_0, \dots, P_n; U]$  la referencia proyectiva correspondiente de  $\bar{\mathbb{A}}$ . Consideremos una homografía  $\varphi$  de  $\mathbb{A}$  y supongamos que la ecuación matricial de  $\varphi$  en la referencia  $\mathcal{R}$  es  $\mathbf{x}'^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$ , de manera que  $A = (a_{ij})$  es la matriz de  $f = \tilde{\varphi}$  en la base  $e_1, \dots, e_n$  y  $\mathbf{p}$  son las coordenadas de  $\varphi(O)$  en la referencia  $\mathcal{R}$ .

**3.45 Proposición.** La matriz de  $\bar{\varphi}$  en el referencia  $\bar{\mathcal{R}}$  es

$$\left[ \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{p}^T & A \end{array} \right]$$

**Demostración:** En efecto,  $\bar{\varphi} = [\bar{f}]$ , donde  $\bar{f}: \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  es la aplicación lineal definida al principio de la demostración del teorema 3.43. Por tanto,  $\bar{f}(e_0) = e_0 + w = e_0 + p_1e_1 + \dots + p_n e_n$  y  $\bar{f}(e_j) = f(e_j) = \sum_i a_{ij}e_i$  para  $j = 1, \dots, n$ , como queríamos ver. □

**E.3.28.** Probar que una homografía de  $\overline{\mathbb{A}}$ , distinta de la identidad, es una traslación si y solo si su conjunto de puntos fijos coincide con el hiperplano del infinito  $\mathbb{A}_\infty$ .

**E.3.29.** Comprobar que las traslaciones y homotecias (en particular, las simetrías centrales) de  $\overline{\mathbb{A}}^{-1}$  son homografías parabólicas y homografías hiperbólicas, respectivamente.

### *El espacio afín como complementario de un hiperplano*

En el apartado «Clausura proyectiva de un espacio afín  $\mathbb{A}$ » de la sección 3.1 (pág. 179), hemos visto que un espacio afín  $\mathbb{A}$  de dimensión  $n$  determina un espacio proyectivo  $\overline{\mathbb{A}}$  de dimensión  $n$ , y un hiperplano  $\mathbb{A}_\infty$  de  $\overline{\mathbb{A}}$ , tales que las variedades de  $\mathbb{A}$  (en particular los puntos) se identifican con las variedades lineales de  $\overline{\mathbb{A}}$  no contenidas en  $\mathbb{A}_\infty$ . De hecho, a la variedad lineal  $L$  de  $\mathbb{A}$  le asociamos su clausura proyectiva  $\overline{L}$  y una variedad lineal  $\Lambda$  de  $\overline{\mathbb{A}}$  no contenida en  $\mathbb{A}_\infty$  es determinada por  $\Lambda \cap \mathbb{A}$ .

El proceso descrito en el párrafo anterior se puede invertir, en el sentido que se precisa a continuación. Sea  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$  un espacio proyectivo y  $H = \mathbb{P}(V)$  un hiperplano de  $\mathbb{P}$  (así,  $V \subset E$  es un subespacio vectorial de codimensión 1 de  $E$ ). Veremos que el conjunto  $\mathbb{A} = \mathbb{P} - H$  tiene estructura de espacio afín, con espacio vectorial asociado  $V$ , y que existe una proyectividad de  $\overline{\mathbb{A}}$  en  $\mathbb{P}$  que transforma  $\mathbb{A}_\infty$  en  $H$ .

Para poder definir una estructura de espacio afín en el conjunto  $E$ , sea  $\omega: E \rightarrow K$  una aplicación lineal tal que  $V = \ker(\omega)$ . Como la relación  $[x] \in H$  equivale a  $\omega(x) = 0$ , vemos que los puntos de  $\mathbb{A}$  son los puntos  $[x]$  tales que  $\omega(x) \neq 0$ . Si  $P = [x] \in \mathbb{A}$ , sea  $e_P = \frac{x}{\omega(x)} \in E$  (observemos que esta expresión toma el mismo valor para cualquier representante  $x$  de  $P$ ). Visto que  $\omega(e_P) = 1$ , está claro que  $e_Q - e_P \in V$ , sean cuales sean los puntos  $P, Q \in \mathbb{A}$ . Además, como  $P = [e_P]$  para todo  $P \in \mathbb{A}$ , está claro que la aplicación  $P \mapsto e_P$  es inyectiva.

**3.46 Proposición.** Si ponemos  $\delta: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V$  para denotar la aplicación  $(P, Q) \mapsto e_Q - e_P$ , entonces  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  es un espacio afín.

**Demostración:** La ley de adición es inmediata, ya que  $\delta(P, Q) + \delta(Q, R) = e_Q - e_P + e_R - e_Q = e_R - e_P = \delta(P, R)$ . Para establecer el axioma de homogeneidad, basta ver que la aplicación  $\delta_P$  tal que  $Q \mapsto \delta(P, Q)$  es biyectiva para todo  $P \in \mathbb{A}$ .

Veamos primero que  $\delta_P$  es inyectiva. Si  $\delta_P(Q) = \delta_P(Q')$ , tenemos  $e_Q - e_P = e_{Q'} - e_P$ , de donde  $e_Q = e_{Q'}$  y  $Q = Q'$ .

Para ver que es exhaustiva, sea  $v \in V$  y consideremos el punto  $Q = [e_P + v]$ . Entonces  $e_Q = e_P + v$ , ya que  $w(e_P + v) = w(e_P) = 1$  y, por tanto,  $v = e_Q - e_P = \delta(P, Q)$ .  $\square$

Hemos visto que la aplicación  $P \mapsto e_P$  de  $\mathbb{A}$  en  $E$  cumple  $e_Q - e_P = \delta(P, Q) = Q - P$ . Además es inmediato comprobar que  $E = \langle e_P \rangle \oplus V$  para todo  $P \in \mathbb{A}$ , de manera que  $e$  cumple las condiciones [3.1] y [3.2]. Teniendo en cuenta el ejercicio E.3.7 y las

consideraciones del subapartado «El espacio proyectivo  $\overline{\mathbb{A}}$ », pág. 180, vemos que  $\mathbb{P}$  es un cierre proyectivo de  $\mathbb{A}$  y que  $H$  es el correspondiente hiperplano del infinito. Notemos que la traslación  $t_v$  de  $\mathbb{A}$  correspondiente al vector  $v \in V$  viene dada por la fórmula

$$t_v([x]) = [e_P + v] = [x + \omega(x)v].$$

Las consideraciones anteriores nos permiten concebir un espacio afín como un par  $(\mathbb{P}, H)$  formado por un espacio proyectivo  $\mathbb{P}$  y un hiperplano  $H$  de  $\mathbb{P}$ . De esta manera, las variedades lineales afines se pueden definir como las variedades lineales de  $\mathbb{P}$  no contenidas en  $H$  y el grupo afín se puede definir como el grupo de homografías de  $\mathbb{P}$  que dejan invariante  $H$  (v. corolario 3.44).

**E.3.30.** Probar que las traslaciones del espacio afín correspondiente a  $(\mathbb{P}, H)$  coinciden con las homologías especiales de eje  $H$ . De esto se sigue, en particular, que las homologías especiales de eje un hiperplano fijo  $H = \mathbb{P}(V)$  forman un grupo isomorfo al grupo aditivo de  $V$ .

### *Equivalencia proyectiva de configuraciones*

Si  $\mathbb{P}$  es un espacio proyectivo, dos configuraciones

$$\Pi = P_0, P_1, \dots, P_r \quad \text{y} \quad \Pi' = P'_0, P'_1, \dots, P'_r$$

de  $r + 1$  puntos de  $\mathbb{P}$  se dicen *proyectivamente equivalentes* si existe una homografía  $\varphi$  de  $\mathbb{P}$  tal que  $\varphi(\Pi) = \Pi'$ , es decir, tal que  $\varphi(P_i) = P'_i$  para  $i = 0, \dots, r$ . Teniendo en cuenta la fórmula [3.10], está claro que para que las configuraciones  $\Pi$  y  $\Pi'$  sean proyectivamente equivalentes es necesario (pero en general no suficiente, como veremos al principio de la sección siguiente) que la dimensión de cualquier configuración subordinada de  $\Pi$  coincida con la dimensión de la correspondiente configuración subordinada de  $\Pi'$ .

**3.47 Ejemplos.** Dos  $r$ -símplices son proyectivamente equivalentes, ya que todo  $r$ -símplice es subordinado de la configuración de vértices de una referencia. El ejercicio E.3.20 prueba que dos configuraciones de tipo  $r_{r+2}$  son proyectivamente equivalentes. En particular, dos ternas de puntos alineados son proyectivamente equivalentes y dos cuadrángulos también son proyectivamente equivalentes.

**E.3.31.** Probar que dos cuaternas de tipo  $1_3 \vee 0_1$  son proyectivamente equivalentes.

### 3.4 Razón doble

Un *invariante proyectivo*  $\lambda$  de las configuraciones de puntos de un determinado tipo es una «función»  $\lambda(\Pi) \in K$ , definida para toda configuración  $\Pi$  del tipo en cuestión, tal que  $\lambda(\Pi) = \lambda(\Pi')$  si  $\Pi$  y  $\Pi'$  son proyectivamente equivalentes. Para que  $\lambda$  sea *no trivial*, es decir, que  $\lambda(\Pi)$  no tome el mismo valor para toda configuración  $\Pi$ , es necesario que no todas las configuraciones consideradas sean proyectivamente equivalentes.

De acuerdo con los ejemplos 3.47 y el ejercicio E.3.31, está claro que los triángulos, las ternas de puntos alineados, los cuadrángulos y las cuaternas de tipo  $1_3 \vee 0_1$  no tienen invariantes proyectivos no triviales. Por tanto, las configuraciones más sencillas para las cuales tiene sentido investigar si admiten un invariante proyectivo no trivial son las de tipo  $1_4$ , es decir, cuaternas de puntos alineados. Nótese que si  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4$  son puntos distintos de una recta proyectiva, entonces las cuaternas  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y  $P_1, P_2, P_3, P'_4$  no son proyectivamente equivalentes, ya que la única homografía que transforma  $P_1, P_2, P_3$  en  $P_1, P_2, P_3$  es la identidad.

El objeto de esta sección es definir y estudiar la razón doble, que es un invariante proyectivo  $\rho$  de las cuaternas de puntos alineados. A pesar de que el método que seguiremos nos permite recuperar fácilmente todos los resultados clásicos relativos a la razón doble, para muchos lectores puede resultar instructivo que hagamos ahora unas consideraciones sobre el origen del concepto de razón doble y sobre su significado en el contexto de la geometría euclidiana. Estas consideraciones ponen de manifiesto la naturaleza proyectiva de la razón doble y nos sugieren la definición formal que adoptaremos posteriormente.

#### La razón doble en geometría euclidiana

Consideremos un plano euclidiano  $\mathbb{A}$ . Dados tres puntos alineados distintos  $A, B$  y  $C$ , pongamos  $(ABC) = \sigma(C, B, A)$  (la razón simple de la terna  $C, B$  y  $A$ , que se puede representar simbólicamente (teniendo en cuenta los signos) por el cociente  $AC/BC$ ). Sea  $O$  un punto exterior a la recta  $L$  determinada por la terna y pongamos  $a = \overline{OA}$ ,  $b = \overline{OB}$  y  $c = \overline{OC}$ . Entonces tenemos (v. figura 3.13)

$$(ABC) = \frac{a \operatorname{sen}(\widehat{ac})}{b \operatorname{sen}(\widehat{bc})}$$

donde ponemos  $\widehat{ac}$  y  $\widehat{bc}$  para denotar los ángulos (orientados)  $\widehat{AOC}$  y  $\widehat{BOC}$ , respectivamente. En efecto, si  $h$  es la distancia de  $O$  a  $L$ ,  $(ABC) = AC/BC = (h \cdot AC)/(h \cdot BC) = a \operatorname{csen}(\widehat{ac})/b \operatorname{csen}(\widehat{bc})$ , de donde resulta la afirmación.

La expresión anterior nos muestra que si  $A, B, C$  y  $D$  es una cuaterna de puntos alineados, entonces (poniendo  $d = \overline{OD}$ )

$$(ABC)/(ABD) = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{ac})}{\operatorname{sen}(\widehat{bc})} : \frac{\operatorname{sen}(\widehat{ad})}{\operatorname{sen}(\widehat{bd})}.$$

Visto que este valor sólo depende de ángulos que  $OA, OB, OC$  y  $OD$  forman en  $O$ , resulta que el cociente de razones simples  $(ABC)/(ABD)$  se conserva por proyecciones de centro  $O$ . Este cociente es, pues, un invariante proyectivo (v. corolario 3.41 y ejercicio E.3.20); se denomina *razón doble* de la cuaterna  $A, B, C$  y  $D$  y se denota  $(ABCD)$ . (Puesto que el término *razón* significa ‘cociente’, y que  $(ABCD)$  es un cociente de razones simples, la locución *razón doble* significa, pues, que se trata de un ‘cociente de cocientes’.)

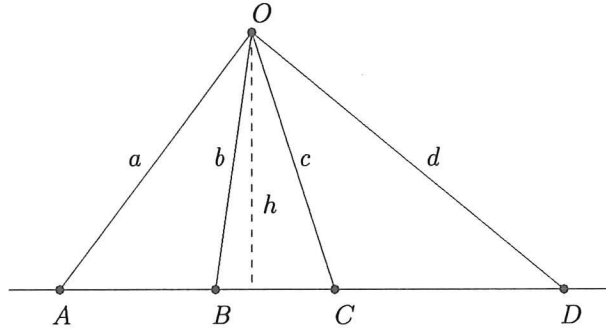


Figura 3.13: Razón doble de una cuaterna

**Definición de razón doble**

Sean  $Q_i, i = 1, \dots, 4$ , cuatro puntos distintos de una recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$ . Sea  $\mathcal{S} = [P_0, P_1; U]$  una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}^1$  y supongamos que  $Q_i \equiv [x_i, y_i]_{\mathcal{S}}, i = 1, \dots, 4$ . El valor de la expresión

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}} \tag{3.13}$$

es un elemento de  $K$ . Este valor no depende de las coordenadas proyectivas de los puntos que hayamos escogido: por ejemplo, si en lugar de  $[x_1, y_1]$  usamos  $[\lambda x_1, \lambda y_1]$  ( $\lambda \in K - \{0\}$ ) como  $\mathcal{S}$ -coordenadas de  $Q_1$ , entonces está claro que el numerador y el denominador de la segunda expresión de [3.13] quedan multiplicados por  $\lambda$  y, por tanto, el valor final de la expresión permanece inalterado. Por otro lado, el valor de [3.13] tampoco depende de la referencia  $\mathcal{S}$ , ya que las coordenadas de los puntos  $Q_i$  en otra referencia  $\mathcal{S}'$  son de la forma  $[x_i, y_i]_A$ , donde  $A$  es una matriz  $2 \times 2$  invertible, y, por tanto, el numerador y el denominador de [3.13] quedan multiplicados por  $\det(A)^2$ . Así, el valor de [3.13] sólo depende de la cuaterna  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ . Pondremos  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  para indicarlo y diremos que es la *razón doble* de la cuaterna.

### Razón doble de cuatro puntos alineados con coincidencias

La segunda expresión de [3.13] nos permite extender la definición de razón doble al caso de cuatro puntos de  $\mathbb{P}^1$  entre los cuales hay una o dos coincidencias.

En primer lugar, notemos que la condición  $Q_i = Q_j$  equivale a  $\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = 0$ . De aquí resulta que la segunda expresión de [3.13] es del tipo  $0/0$  si y solo si al menos tres de los puntos  $Q_i$  son coincidentes  $[\diamond]$ . En este caso (es decir, cuando al menos tres de los  $Q_i$  son coincidentes), diremos que la razón doble de  $Q_1, \dots, Q_4$  es *indeterminada*. Excluido este caso, y suponiendo que entre los  $Q_i$  se tiene al menos una coincidencia, la segunda expresión de [3.13] es de la forma  $0/\beta$ , con  $\beta \in K - \{0\}$ , si  $Q_1 = Q_3$  o  $Q_2 = Q_4$ , y de la forma  $\alpha/0$ , con  $\alpha \in K - \{0\}$ , si  $Q_1 = Q_4$  o  $Q_2 = Q_3$ . Así pues, pondremos  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = 0$  si  $Q_1 = Q_3$  o  $Q_2 = Q_4$  y, con el mismo criterio que el utilizado en el subapartado 3.2 para representar el valor excepcional de la  $\mathcal{R}$ -coordenada absoluta, pondremos  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \infty$  si  $Q_1 = Q_4$  o  $Q_2 = Q_3$ .

Dicho resumidamente: calcularemos  $\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  mediante la expresión [3.13] en todos los casos; el valor que resulta es un elemento de  $K$ , excepto cuando es de la forma  $\alpha/0$ ,  $\alpha \in K$ ; si  $\alpha \neq 0$ , pondremos  $\rho = \infty$  y si  $\alpha = 0$  diremos que  $\rho$  es *indeterminada*.

### Ejemplos

**3.48 Ejemplo** (Razón doble y coordenada absoluta). Sean  $P_0, P_1, U$  puntos distintos de  $\mathbb{P}^1$ . Entonces  $\rho(P_0, P_1, U, X)$  coincide, para todo punto  $X \in \mathbb{P}^1$ , con la coordenada absoluta (v. fórmula [3.4]) del punto  $X$  respecto a la referencia  $[P_0, P_1; U]$ .

En efecto, en esta referencia tenemos  $P_0 \equiv [1, 0]$ ,  $P_1 \equiv [0, 1]$ ,  $U \equiv [1, 1]$ ,  $X \equiv [\xi_0, \xi_1]$ . Por tanto,

$$\rho(P_0, P_1, U, X) = \frac{1}{-1} : \frac{\xi_1}{-\xi_0} = \xi_0/\xi_1 \quad \square$$

**3.49 Ejemplo** (La razón doble como cociente de dos razones simples). Sea  $A, B, C, D$  una cuaterna de puntos de  $\mathbb{A}^1$  y definamos  $(ABCD)$  como en el apartado de «Consideraciones preliminares» (pág. 207), es decir, como el cociente de razones simples  $(ABC)/(ABD)$ , donde  $(ABC) = \sigma(C, B, A)$ . Entonces

$$\rho(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}) = (ABCD)$$

donde  $\overline{X} \in \overline{\mathbb{A}^1}$  denota el punto correspondiente a  $X \in \mathbb{A}^1$  por la inclusión de  $\mathbb{A}^1$  en  $\overline{\mathbb{A}^1}$  relativa a un origen  $O$  fijado arbitrariamente.

En efecto, sean  $a, b, c, d$  las coordenadas de los puntos  $A, B, C, D$  respecto a una referencia  $\mathcal{R} = [O; e_1]$  de  $\mathbb{A}^1$ . Entonces, las coordenadas proyectivas de  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$

respecto a la referencia  $\overline{\mathcal{R}}$  son  $[1, a], [1, b], [1, c], [1, d]$ . Por tanto,

$$\rho(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

lo cual prueba la relación anunciada.

**3.50 Ejemplo** (Interpretación de la razón simple en términos de la razón doble). Sea  $A, B, C$  una terna de puntos de  $\mathbb{A}^1$ . Con notaciones y convenios como los del ejemplo anterior, tenemos que

$$\sigma(A, B, C) = \rho([\infty], \overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$$

donde  $[\infty]$  denota el punto del infinito de  $\mathbb{A}^1$ .

En efecto,  $[\infty] = [0, 1]$ ,  $\overline{A} = [1, a]$ ,  $\overline{B} = [1, b]$  y  $\overline{C} = [1, c]$ . Por tanto,

$$\rho([\infty], \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = \frac{-1}{b-a} : \frac{-1}{c-a} = \sigma(A, B, C)$$

**3.51 Ejemplo** (Interpretación del módulo de una homología). Sea  $\varphi$  una homología general de centro  $P$  y eje  $H$  (v. ejemplo 3.37). Sea  $X$  un punto exterior a  $H$  y distinto de  $P$ . Entonces  $\varphi(X) \neq X$ , ya que el conjunto de puntos fijos de  $\varphi$  es  $H \cup \{P\}$ . Sea  $X' = \varphi(X)$  y  $P' = XX' \cap H$ . Entonces,

$$\rho(P, P', X, X') = \kappa$$

donde  $\kappa$  es el módulo de  $\varphi$ . En efecto, si  $P = [e]$  y  $P' = [e']$ , entonces  $X = [\lambda e + e']$ , para un cierto  $\lambda \in K - \{0\}$ , y  $X' = [\kappa \lambda e + e']$ , de donde la afirmación resulta mediante un cálculo elemental como los anteriores.

Notemos que de la interpretación de  $\kappa$  se infiere que una homología queda determinada por el centro, el eje y la imagen de un punto cualquiera no incidente con el eje y distinto del centro. También se debe reparar en que si  $\varphi$  es una homografía hiperbólica de  $\mathbb{P}^1$ , con puntos fijos  $P$  y  $P'$ , entonces  $\rho(P, P', X, X') = \kappa$  para todo punto  $X \neq P, P'$ .

**E. 3.32.** Sea  $\varphi = [f]$  una homografía de  $\mathbb{P}^2$  y supongamos que  $\varphi$  tiene exactamente tres puntos fijos  $P_0, P_1, P_2$ . Dado un punto  $P \neq P_0, P_1, P_2$ , sean  $Q_0, Q_1, Q_2$  los puntos de intersección de la recta  $P\varphi(P)$  con las rectas  $P_1P_2, P_2P_0$  y  $P_0P_1$ , respectivamente. Demostrar que si  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  son los valores propios de  $f$ , entonces

$$(P, \varphi(P), Q_i, Q_j) = \frac{\lambda_j}{\lambda_i}.$$

### Razón doble y coordenada absoluta

Sean  $Q_1, Q_2, Q_3$  y  $Q_4$  cuatro puntos distintos de  $\mathbb{P}^1$  y supongamos que en una referencia tienen coordenadas absolutas  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in K$ . Entonces,

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2} \quad [3.14]$$

En efecto, en la expresión [3.13] tenemos  $y_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), ya que si  $y_i = 0$  entonces

$\lambda_i = \infty$ . Así  $\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = y_i y_j (\lambda_i - \lambda_j)$  y de aquí la fórmula resulta directamente.

Supongamos ahora que uno (y, siendo distintos, solo uno) de los puntos  $Q_i$  tiene coordenada absoluta  $\infty$ . En este caso, todavía es posible utilizar la fórmula [3.14] para obtener el resultado correcto. Para explicarlo, supongamos, por ejemplo, que  $\lambda_1 = \infty$  (lo cual significa que  $y_1 = 0$ ). Entonces la fórmula [3.13] nos da, sin dificultad, que la razón doble es igual a  $\frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_3}$ . El mismo resultado se puede obtener aplicando formalmente la fórmula [3.14], es decir, escribiendo  $\frac{\lambda_3 - \infty}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_4 - \infty}$  y *sustituyendo*  $\frac{\lambda_3 - \infty}{\lambda_3 - \lambda_2}$  por 1, como si fuese un cálculo de límites.

De ahora en adelante pondremos, si  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \overline{K}$ ,  $\rho(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  para indicar la expresión de la derecha de 3.14, valorada, cuando incluya el símbolo  $\infty$ , según la regla (de «cálculo de límites») que hemos explicado.

**E.3.33** (Propiedad multiplicativa de la razón doble). Sean  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$  puntos distintos de una recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$ . Probar que

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)\rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_5) = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_5)$$

### Otras propiedades de la razón doble

**3.52 Proposición** (Invariancia proyectiva de la razón doble). Si  $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \overline{\mathbb{P}^1}$  es una proyectividad y  $Q_1, \dots, Q_4$  puntos de  $\mathbb{P}^1$ , entonces

$$\rho(\varphi(Q_1), \varphi(Q_2), \varphi(Q_3), \varphi(Q_4)) = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$$

**Demostración:** Reframos los puntos de  $\mathbb{P}^1$  a una referencia  $\mathcal{S}$  y los de  $\overline{\mathbb{P}^1}$  a  $\varphi(\mathcal{S})$ . Si  $Q_i \equiv [x_i, y_i]_{\mathcal{S}}$ , entonces  $\varphi(Q_i) = [x_i, y_i]_{\varphi(\mathcal{S})}$  y el enunciado se obtiene directamente de la definición de razón doble.  $\square$

**3.53 Corolario.** Si  $L$  y  $L'$  son dos rectas de  $\mathbb{P}^n$  y  $\pi : L \rightarrow L'$  es una perspectividad, entonces, para toda cuaterna  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in L$ ,

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(\pi(Q_1), \pi(Q_2), \pi(Q_3), \pi(Q_4))$$

**Demostración:** Es una consecuencia directa de la proposición y de que las perspecti-  
vidades son proyectividades.  $\square$

**3.54 Corolario.** Sean  $Q_i, i = 1, \dots, 4$ , cuatro puntos distintos de  $\mathbb{P}^1$  y  $\bar{Q}_i, i = 1, \dots, 4$ , cuatro puntos distintos de  $\bar{\mathbb{P}}^1$ . Entonces existe una proyectividad  $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{\mathbb{P}}^1$  tal que  $\varphi(Q_i) = \bar{Q}_i$  si y solo si

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \bar{Q}_4)$$

y en este caso  $\varphi$  es única.

**Demostración:** La condición es necesaria por la proposición 3.52. Para ver que es suficiente, sea  $\varphi$  la única proyectividad de  $\mathbb{P}^1$  a  $\bar{\mathbb{P}}^1$  que transforma  $Q_i$  en  $\bar{Q}_i, i = 1, 2, 3$  (hemos utilizado el teorema fundamental de las proyectividades). Si se verifica la igualdad del enunciado, entonces la coordenada absoluta de  $Q_4$  respecto a  $[Q_1, Q_2; Q_3]$  coincide con la coordenada absoluta de  $\bar{Q}_4$  respecto a  $[\bar{Q}_1, \bar{Q}_2; \bar{Q}_3]$  (por el ejemplo 3.48) y, por tanto,  $\varphi$  también cumple que  $\varphi(Q_4) = \bar{Q}_4$ .  $\square$

**E.3.34.** Sea  $\varphi$  una homografía de  $\mathbb{P}^1$  y  $P, Q$  dos puntos distintos tales que  $\varphi(P) = Q$  y  $\varphi(Q) = P$ . Demostrar que  $\varphi$  es una involución. Probar también que, dados cuatro puntos distintos  $P, P', Q, Q' \in \mathbb{P}^1$ , hay exactamente una involución de  $\mathbb{P}^1$  tal que  $\varphi(P) = P'$  y  $\varphi(Q) = Q'$ .

**E.3.35.** Si  $\psi$  es una homografía de  $\mathbb{P}^1$ , mostrar que existen involuciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de  $\mathbb{P}^1$  tales que  $\psi = \varphi_1\varphi_2$ .

### Razón doble de cuatro hiperplanos de un haz

Sea  $V \subset \mathbb{P}^n$  una variedad lineal de dimensión  $n - 2$ . El conjunto de hiperplanos que contienen  $V$  se denomina el *haz de hiperplanos de vértice  $V$*  y se denota  $V^*$ . En el caso del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ ,  $V$  es un punto y el haz de vértice  $V$  es el conjunto de rectas que pasan por  $V$ . Para  $n = 3$ ,  $V$  es una recta y el haz de vértice  $V$  es el conjunto de planos que contienen  $V$ .

Sean  $H_1, H_2, H_3, H_4$  hiperplanos distintos del haz  $V^*$ . Si  $L$  es una recta que no corta a  $V$ , entonces  $L \not\subseteq H_i, i = 1, 2, 3, 4$ , y las intersecciones  $Q_i = H_i \cap L$  son puntos distintos  $[\diamond]$ . Puesto que estos puntos están alineados, podemos considerar la razón doble  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ . Ahora el corolario 3.54 nos muestra que esta razón doble solo depende de los hiperplanos, y no de la recta  $L$ , ya que si  $L'$  es otra recta que no corta a  $V$  entonces la perspectividad  $L \rightarrow L'$  de vértice  $V$  transforma  $Q_i = H_i \cap L$  en  $H_i \cap L'$ .

Así pues, podemos definir la *razón doble*  $\rho(H_1, H_2, H_3, H_4)$  de cuatro hiperplanos  $H_i$  de un haz  $V^*$  mediante la fórmula

$$\rho(H_1, H_2, H_3, H_4) = \rho(H_1 \cap L, H_2 \cap L, H_3 \cap L, H_4 \cap L) \quad [3.15]$$

donde  $L$  es cualquier recta que no corta a  $V$ . En particular, queda así definida la razón doble de cuatro rectas del plano concurrentes en un punto y la de cuatro planos del espacio que contienen una recta dada.

### Comportamiento de la razón doble por permutaciones

De la definición de razón doble resulta inmediatamente que permanece inalterada por las permutaciones (12)(34), (13)(24) y (14)(23), esto es,

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(Q_2, Q_1, Q_4, Q_3) = \rho(Q_3, Q_4, Q_1, Q_2) = \rho(Q_4, Q_3, Q_2, Q_1)$$

También resulta que las permutaciones (12) y (34) invierten la razón doble: si  $\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ , entonces

$$\rho(Q_2, Q_1, Q_3, Q_4) = \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3) = \frac{1}{\rho}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\rho(Q_1, Q_3, Q_2, Q_4) = 1 - \rho$$

ya que  $\rho = \rho(0, \infty, \rho, 1)$  y  $\rho(0, \rho, \infty, 1) = 1 - \rho$ . Ahora es fácil calcular la razón doble de todas las permutaciones de  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  en términos de  $\rho$ , ya que toda permutación de los índices 1, 2, 3, 4 es composición de trasposiciones de la forma (12), (23) y (34). Se obtiene la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) &= \rho(Q_2, Q_1, Q_4, Q_3) = \rho(Q_3, Q_4, Q_1, Q_2) = \rho(Q_4, Q_3, Q_2, Q_1) = \rho \\ \rho(Q_2, Q_1, Q_3, Q_4) &= \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3) = \rho(Q_3, Q_4, Q_2, Q_1) = \rho(Q_4, Q_3, Q_1, Q_2) = 1/\rho \\ \rho(Q_1, Q_3, Q_2, Q_4) &= \rho(Q_3, Q_1, Q_4, Q_2) = \rho(Q_2, Q_4, Q_1, Q_3) = \rho(Q_4, Q_2, Q_3, Q_1) = 1 - \rho \\ \rho(Q_3, Q_1, Q_2, Q_4) &= \rho(Q_1, Q_3, Q_4, Q_2) = \rho(Q_2, Q_4, Q_3, Q_1) = \rho(Q_4, Q_2, Q_1, Q_3) = 1/(1 - \rho) \\ \rho(Q_2, Q_3, Q_1, Q_4) &= \rho(Q_3, Q_2, Q_4, Q_1) = \rho(Q_1, Q_4, Q_2, Q_3) = \rho(Q_4, Q_1, Q_3, Q_2) = (\rho - 1)/\rho \\ \rho(Q_3, Q_2, Q_1, Q_4) &= \rho(Q_2, Q_3, Q_4, Q_1) = \rho(Q_1, Q_4, Q_3, Q_2) = \rho(Q_4, Q_1, Q_2, Q_3) = \rho/(\rho - 1) \end{aligned}$$

### Cuaternas armónicas

Una cuaterna se dice *armónica* si su razón doble es  $\rho = -1$ . En este caso,  $\rho = 1/\rho$  y, por tanto, de las seis razones dobles que se pueden obtener por permutaciones solo hay tres distintas:  $\rho = -1$ ,  $1 - \rho = 2$ ,  $1/(1 - \rho) = 1/2$ .

**3.55 Proposición.** *Cuatro puntos distintos  $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  forman una cuaterna armónica si y solo si*

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3)$$

**Demostración:** Sea  $\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ . Como  $1/\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3)$ , queda claro que la igualdad del enunciado es cierta si  $\rho = -1$ . Recíprocamente, la condición del enunciado equivale a  $\rho = 1/\rho$ , es decir, a  $\rho^2 = 1$ . Visto que  $\rho \neq 1$  (ya que  $Q_4 \neq Q_3$ ), tenemos  $\rho = -1$ .  $\square$

Observemos que la condición de que una cuaterna sea armónica es conservada por las permutaciones (12), (34) y (13)(24). Es por esto que también se dice que los pares  $\{Q_1, Q_2\}$  y  $\{Q_3, Q_4\}$  se «separan armónicamente», o que  $Q_3$  y  $Q_4$  son *conjugados respecto a*  $Q_1$  y  $Q_2$ , para expresar que la cuaterna  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  es armónica.

**3.56 Ejemplo** (Interpretación proyectiva del punto medio). Sean  $M, A, B$  tres puntos distintos de  $\mathbb{A}^1$ . Puesto que  $M$  es el punto medio del segmento  $[A, B]$  si y solo si  $\sigma(M, A, B) = -1$ , el ejemplo 3.50 nos da que  $M$  es el punto medio del segmento  $[A, B]$  si y solo si el par  $\{P_\infty, M\}$  separa armónicamente  $\{A, B\}$ , donde  $P_\infty$  es el punto del infinito de la recta  $AB$ .

**E.3.36.** Mostrar que la extensión proyectiva de la simetría especular  $\sigma_H$  respecto a un hiperplano  $H$  de un espacio euclidiano es la homología de módulo  $-1$  que tiene eje  $\bar{H}$  y centro en el punto del infinito de las rectas perpendiculares a  $H$ . En general, las homologías de módulo  $-1$  se llaman *armónicas*; la razón de esta nomenclatura proviene del ejemplo 3.51. Una homología armónica es *involutiva*, esto es, su cuadrado es la identidad.

**E.3.37.** Demostrar que dos homologías armónicas conmutan si y solo si el eje de cada una es incidente con el centro de la otra.

Dado que tenemos definida la razón doble de cuatro hiperplanos de un haz (v. fórmula [3.15]), queda definida, en particular, la noción de *cuaterna armónica de hiperplanos de un haz*, o la noción de *separación armónica* entre dos pares de hiperplanos de un haz.

### Teorema del cuadrángulo completo

Consideremos un cuadrángulo completo  $ABCD$  como el de la figura 3.14 y sea  $XYZ$  su triángulo diagonal (v. ejemplos 3.18). Sea  $X'$  el punto de intersección de las rectas  $AB$  e  $YZ$ .

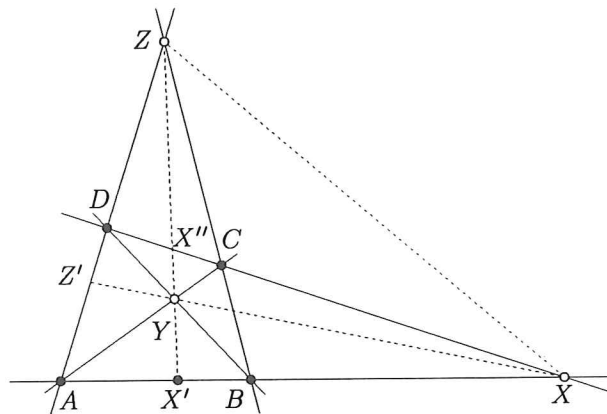


Figura 3.14: Cuadrángulo completo y triángulo diagonal

**3.57 Lema.** *Los puntos  $X$  y  $X'$  separan armónicamente los puntos  $A$  y  $B$ .*

**Demostración:** Proyectando la recta  $AB$  sobre la recta  $CD$  desde  $Z$  se obtiene que  $\rho(A, B, X', X) = \rho(D, C, X'', X)$ , donde  $X''$  es el punto de intersección de  $CD$  e  $YZ$ . Volviendo a proyectar la recta  $CD$  sobre  $AB$  desde  $Y$ , se obtiene  $\rho(D, C, X'', X) = \rho(B, A, X', X)$ . Por tanto,  $\rho(A, B, X', X) = \rho(B, A, X', X)$ , y esta relación implica que  $A, B, X', X$  es una cuaterna armónica (proposición 3.55).  $\square$

**3.58 Teorema** (del cuadrángulo completo). *En un cuadrángulo completo, el par de lados del triángulo diagonal incidentes con un vértice de éste (por ejemplo, en la figura 3.14,  $ZX$  y  $ZY$  son los lados incidentes con  $Z$ ) separa armónicamente el par de lados del cuadrángulo que se cortan en aquel vértice ( $AD$  y  $BC$  en el ejemplo).  $\square$*

**E.3.38.** Con las notaciones de la figura 3.15, comprobar que las cuaternas que siguen son armónicas:  $(A, B, X, X')$ ,  $(A, C, Y, Y')$ ,  $(A, D, Z, Z')$ ,  $(B, D, Y, Y'')$ ,  $(B, C, Z, Z'')$ ,  $(C, D, X, X'')$ ,  $(X, Y, Z', Z'')$ ,  $(X, Z, Y', Y'')$  y  $(Y, Z, X', X'')$ .

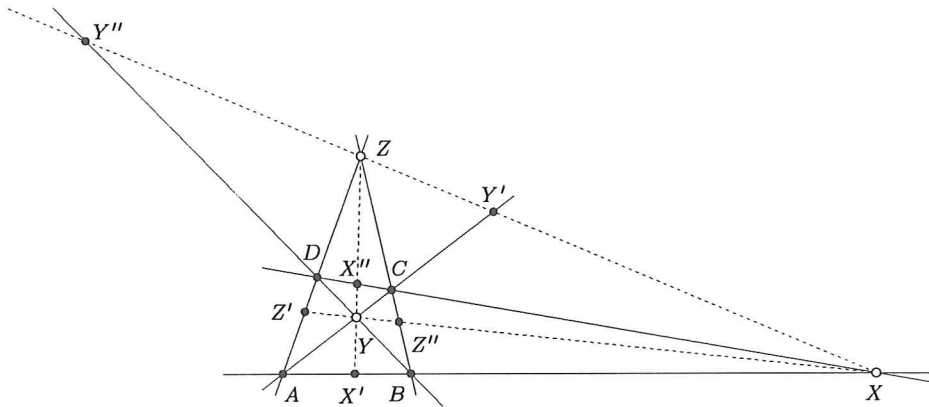


Figura 3.15: Nueve cuaternas armónicas

### Construcción geométrica del cuarto armónico

Sean  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  tres puntos alineados distintos. Queremos construir el punto  $Q_4$  de la recta  $L = Q_1Q_2$  tal que  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = -1$ . El lema 3.57 nos da la solución. Sea  $Z$  un punto exterior a  $L$  y escojamos un punto  $Y$  de la recta  $Q_3Z$  distinto de  $Q_3$  y de  $Z$  (v. figura 3.16). Sean  $P_1$  y  $P_2$  las intersecciones de  $Q_1Y$  con  $Q_2Z$  y de  $Q_2Y$  con  $Q_1Z$ , respectivamente. Entonces  $Q_4$  es el punto de intersección de  $P_1P_2$  con  $L$ .

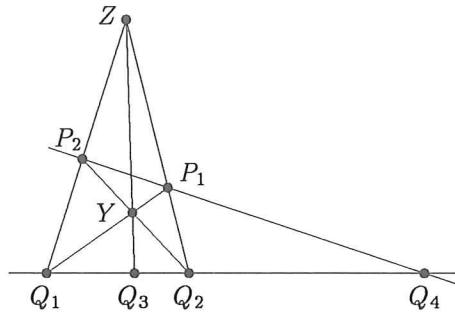


Figura 3.16: Construcción del cuarto armónico

**Cuaternas equianarmónicas**

Una cuaterna de puntos alineados distintos se llama *equianarmónica* si, poniendo  $\xi$  para denotar su razón doble, se tiene que  $\xi = 1/(1 - \xi)$ . Puesto que esta relación equivale a  $\xi^2 = \xi - 1$ , vemos que  $\xi^3 = \xi^2 - \xi = -1$ . Si  $\xi$  es una solución de la ecuación  $\xi^2 = \xi - 1$ , entonces la otra solución es  $1 - \xi = -\xi^2 = \xi^{-1}$ . De esto se sigue que entre los seis valores posibles de la razón doble, al hacer permutaciones de los puntos, solo hay dos distintos:  $\xi$  y  $1 - \xi$ . Si  $K = \mathbb{C}$ , entonces  $\xi$  y  $1 - \xi$  son las raíces cúbicas complejas de  $-1$  (v. figura 3.17).

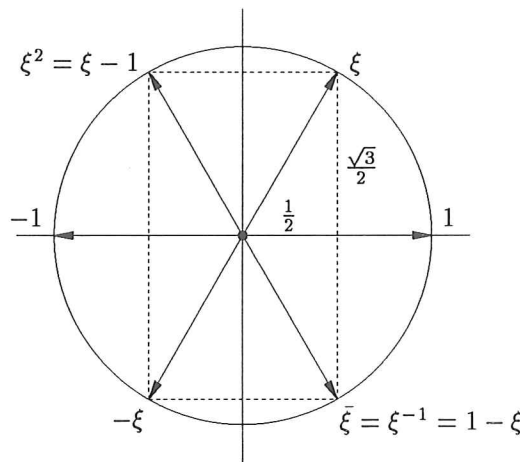


Figura 3.17: Valores de la razón doble equianarmónica cuando  $K = \mathbb{C}$

**E.3.39.** Demostrar que si entre las seis razones dobles de la pág. 212 hay dos de coincidentes, entonces la cuaterna es armónica o equianarmónica.

### 3.5 Dualidad

En contraste con un plano afín, en el cual dos rectas solo determinan un punto cuando no son paralelas, en un plano proyectivo dos rectas distintas determinan un punto sin excepción, de la misma forma que dos puntos distintos determinan una recta sin excepción. Esta especie de «simetría» entre el comportamiento de los puntos y el comportamiento de las rectas de un plano proyectivo origina el fenómeno de la «dualidad», el cual se manifiesta por el hecho de que a cada enunciado se le puede hacer corresponder otro enunciado, llamado «dual» del primero, por intercambio de las nociones de punto y recta, manteniendo, sin embargo, la relación de incidencia.

Más precisamente, para obtener el dual de un enunciado hace falta cambiar cada punto  $P$  por una recta  $p$ , cada recta  $u$  por un punto  $U$ , y esto de manera que si  $P$  es incidente con  $u$ , entonces  $U$  es incidente con  $p$ , y viceversa. En particular, si  $u = PQ$  es la recta que une dos puntos  $P$  y  $Q$ ,  $U$  debe ser el punto de intersección de las rectas  $p$  y  $q$ , y recíprocamente.

#### *Principio de dualidad*

El «principio de dualidad» es la afirmación de que si un enunciado es cierto, su dual también lo es. Así pues, este principio pone a nuestra disposición un procedimiento automático para producir un «teorema dual» de cada teorema de geometría proyectiva del plano. Veamos algunos ejemplos, para cuya exposición seguiremos la costumbre clásica de presentar los distintos pares duales con un formato de doble columna. Para simplificar las notaciones, el punto de intersección de dos rectas distintas  $p, q$  será denotado  $pq$ . Notemos que los enunciados duales de los enunciados de la columna de la derecha son los enunciados correspondientes de la columna de la izquierda.

**Puntos alineados.** Puntos  $P, Q, \dots$  incidentes con una recta  $u$ .

**Triángulo.** Triángulo de vértices  $P, Q, R$  y lados  $p = QR, q = RP, r = PQ$ .

(Figura 3.18) Un triángulo de vértices  $P, Q, R$ , sus lados  $p = QR, q = RP, r = PQ$ , un punto  $U$  no incidente con ninguno de estos lados y las rectas  $x = PU, y = QU, z = RU$ .

**Rectas concurrentes.** Rectas  $p, q, \dots$  incidentes con un punto  $U$ .

**Trilátero.** Triángulo de lados  $p, q, r$  y vértices  $P = qr, Q = rp, R = pq$ .

(Figura 3.18) Un triángulo de lados  $p, q, r$ , sus vértices  $P = qr, Q = rp, R = pq$ , una recta  $u$  no incidente con ninguno de estos vértices y los puntos  $X = pu, Y = qu, Z = ru$ .

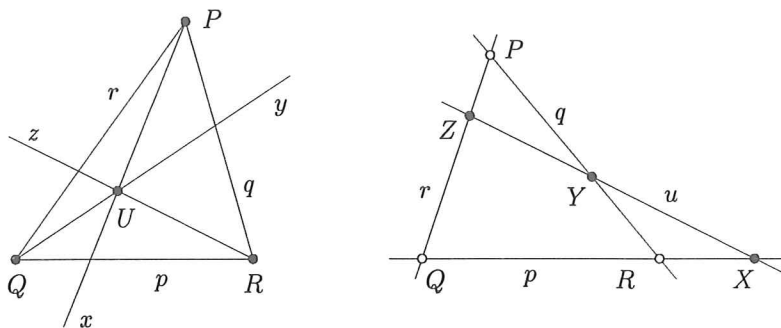


Figura 3.18: Ejemplo de figuras duales

**Teorema de Pappus** (teorema 3.7). Dos rectas distintas  $u$  y  $u'$ ; tres puntos distintos  $P, Q, R$  situados sobre  $u$  y distintos de  $uu'$ , tres puntos distintos  $P', Q', R'$  situados sobre  $u'$  y distintos de  $uu'$ ; los pares de rectas  $\{PQ', QP'\}$ ,  $\{QR', RQ'\}$ ,  $\{RP', PR'\}$ ; y los puntos  $Z, X, Y$  de intersección de estos pares. Entonces, los puntos  $X, Y, Z$  están alineados.

**Dual del teorema de Pappus** (figura 3.19). Dos puntos distintos  $U$  y  $U'$ ; tres rectas distintas  $p, q, r$  por  $U$  y distintas de  $UU'$ , tres rectas distintas  $p', q', r'$  por  $U'$  y distintas de  $UU'$ ; los puntos  $\{pq', q'p'\}$ ,  $\{qr', r'q'\}$ ,  $\{rp', p'r'\}$ ; y las rectas  $z, x, y$  que unen estos pares de puntos. Entonces, las rectas  $x, y, z$  son concurrentes (por el teorema de Pappus y el principio de dualidad).

**Teorema de Desargues** (teorema 3.1; v. también el subapartado «Demostración analítica del teorema de Desargues», pág. 176). Tres rectas distintas  $u, v, w$ , concurrentes en un punto  $O$ ; puntos distintos  $P, P'$  de  $u$ , puntos distintos  $Q, Q'$  de  $v$ , puntos distintos  $R, R'$  de  $w$ ; los pares de rectas  $\{PQ, P'Q'\}$ ,  $\{QR, Q'R'\}$ ,  $\{RP, R'P'\}$ ; y los correspondientes puntos de intersección  $Z, X, Y$ . Entonces, los puntos  $X, Y, Z$  están alineados.

**Dual del teorema de Desargues**. Tres puntos distintos  $U, V, W$ , situados sobre una recta  $o$ ; rectas distintas  $p, p'$  por  $U$ , rectas distintas  $q, q'$  por  $V$ , rectas distintas  $r, r'$  por  $W$ ; los pares de puntos  $\{pq, p'q'\}$ ,  $\{qr, q'r'\}$ ,  $\{rp, r'p'\}$ ; y las rectas  $z, x, y$  que los unen. Entonces,  $x, y, z$  son concurrentes (por el teorema de Desargues y el principio de dualidad). Queda así establecido el recíproco del teorema Desargues [◊].

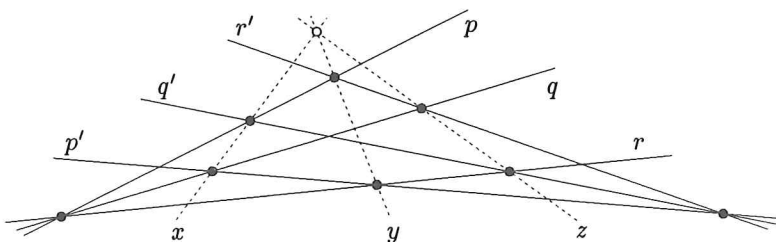


Figura 3.19: Dual del teorema de Pappus

**E.3.40.** Enunciar la definición dual de la noción de perspectividad entre dos rectas de  $\mathbb{P}^2$ .

En el caso del espacio proyectivo, la «simetría» en el comportamiento de puntos y rectas de que hablábamos en el caso del plano se debe substituir por una «simetría» en el comportamiento de puntos, rectas y planos, por un lado, y el de planos, rectas y puntos, por el otro. Fijémonos, por ejemplo, que, junto al hecho de que dos puntos distintos son incidentes con una única recta, tenemos el hecho de que dos planos distintos también son incidentes con una única recta, y junto al enunciado «dos rectas distintas se cortan en un punto» (que puede ser cierto o no) tenemos el enunciado equivalente «dos rectas distintas son coplanarias» (v. ejemplo 3.11, pág. 179).

Así pues, en dimensión 3 el enunciado «dual» de un enunciado se obtiene intercambiando las nociones de punto, recta y plano por las de plano, recta y punto, respectivamente, y esto de manera que se conserven las incidencias. Igual que en el caso del plano, el «principio de dualidad» es la afirmación de que si un enunciado es cierto, entonces también lo es su dual.

Los ejemplos en doble columna que citamos a continuación ilustran este proceso. Para abreviar, pondremos  $\pi\pi'$  para denotar la intersección  $\pi \cap \pi'$  de dos planos  $\pi$  y  $\pi'$ . Igual que en el caso del plano, los enunciados duales de la columna de la derecha son los enunciados correspondientes de la columna de la izquierda.

Dos puntos distintos  $P, P'$  y la recta  $L = PP'$ .

**Puntos alineados.** Puntos  $P, P', \dots$  situados sobre una recta  $L$ .

**Plano de un triángulo.** El plano determinado por tres puntos no alineados.

Un tetraedro con vértices  $P_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , con aristas  $L_{ij} = P_iP_j$  y caras  $\pi_i$  ( $\pi_i$  es la cara opuesta a  $P_i$ ).

Rectas concurrentes (en un punto  $P$ ).

**Teorema de Desargues** (teorema 3.1; v. también el subapartado «Demostración analítica del teorema de Desargues», pág. 176). Tres rectas distintas  $u, v, w$ , concurrentes en un punto  $O$ ; puntos distintos  $P, P'$  de  $u$ , puntos distintos  $Q, Q'$  de  $v$ , puntos distintos  $R, R'$  de  $w$ ; los pares de rectas  $\{PQ, P'Q'\}$ ,  $\{QR, Q'R'\}$ ,  $\{RP, R'P'\}$ ; y los correspondientes puntos de intersección  $Z, X, Y$ . Entonces, *los puntos  $X, Y, Z$  están alineados.*

Dos planos distintos  $\pi, \pi'$  y la recta  $L = \pi\pi'$ .

**Radiación de planos.** Planos  $\pi, \pi', \dots$  que contienen una recta  $L$ .

**Vértice de un triedro.** El punto de intersección de tres planos que no forman una radiación.

Un tetraedro con caras  $\pi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , con aristas  $L_{ij} = \pi_i\pi_j$  y con vértices  $P_i$  ( $P_i$  es el vértice opuesto a  $\pi_i$ ).

Rectas coplanarias (contenidas en un plano  $\pi$ ).

**Dual del teorema de Desargues en  $\mathbb{P}^3$**  (v. figura 3.20). Tres rectas distintas  $u, v, w$ , situadas en un plano  $o$ ; planos distintos  $p, p'$  que contienen  $u$ , planos distintos  $q, q'$  que contienen  $v$ , planos distintos  $r, r'$  que contienen  $w$ ; los pares de rectas  $\{pq, p'q'\}$ ,  $\{qr, q'r'\}$ ,  $\{rp, r'p'\}$  y los planos  $z, x, y$  que las unen. Entonces, *los planos  $x, y, z$  forman una radiación* (por el teorema de Desargues y el principio de dualidad para dimensión 3; en la figura 3.20, el eje de la radiación se ha representado con una línea punteada gruesa).



**E.3.41.** Si  $W = \langle \omega_1, \dots, \omega_r \rangle$ ,  $\omega_i \in E^\vee$ , probar que  $W^* = \omega_1^* \cap \dots \cap \omega_r^*$ , donde  $\omega^*$  denota, si  $\omega \in E^\vee$ , el subespacio vectorial de  $E$  formado por los vectores incidentes con  $\omega$ . Obtener un enunciado análogo relativo a  $F^*$ .

Puesto que  $F \subseteq F^{**}$  para todo subespacio vectorial  $F$  de  $E$ , las fórmulas [3.16] y [3.16'] implican que  $F = F^{**}$ . Análogamente, se ve que  $W = W^{**}$ , para todo subespacio vectorial  $W$  de  $E^\vee$ . Si ahora ponemos  $\mathcal{L}(E)$  para denotar el conjunto de subespacios vectoriales de  $E$ , tenemos:

### 3.59 Teorema. La aplicación

$$\mathcal{L}(E) \xrightarrow{*} \mathcal{L}(E^\vee), F \mapsto F^*$$

es una biyección, y su inversa es la aplicación tal que  $W \mapsto W^*$ . Además, la aplicación  $*$  tiene las siguientes propiedades:

- 1)  $F_1 \subseteq F_2$  si y solo si  $F_2^* \subseteq F_1^*$ .
- 2)  $(F_1 + F_2)^* = F_1^* \cap F_2^*$ .
- 3)  $(F_1 \cap F_2)^* = F_1^* + F_2^*$ .

En particular, si restringimos la biyección  $*$  al conjunto  $\mathcal{L}_{d+1}$  de subespacios vectoriales de dimensión  $d + 1$ , obtenemos una biyección

$$\mathcal{L}_{d+1}(E) \xrightarrow{*} \mathcal{L}_{n-d}(E^\vee)$$

donde  $\dim(E) = n + 1$  y donde  $\mathcal{L}_{n-d}(E^\vee)$  indica el conjunto de subespacios vectoriales de dimensión  $n - d$  de  $E^\vee$ .

**Demostración:** Se deja como ejercicio para el lector, ya que todos los enunciados se desprenden fácilmente de lo que ya hemos dicho y de las definiciones. Por ejemplo, para ver el punto 3 es suficiente probar que la igualdad en cuestión es válida después de aplicar  $*$  a los dos miembros, lo cual está claro por la propiedad 2 y por ser  $F^{**} = F$  para todo subespacio vectorial  $F$ .  $\square$

### Espacio proyectivo dual

Sea  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$  un espacio proyectivo de dimensión  $n$ . Pongamos  $\mathbb{P}^\vee = \mathbb{P}(E^\vee)$ . Este espacio se denomina *espacio proyectivo dual* de  $\mathbb{P}$ .

Dada una variedad lineal  $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^\vee$ , digamos  $\Lambda = [W]$ , pondremos  $\Lambda^* = [W^*] \subseteq \mathbb{P}$  y diremos que  $\Lambda^*$  es el *eje*, o el *soporte*, de  $\Lambda$ . Análogamente, dada una variedad lineal  $L \subseteq \mathbb{P}$ ,  $L = [F]$ , pondremos  $L^* = [F^*]$  y diremos que  $L^*$  es la *estrella* de  $L$ .

**E.3.42.** Si  $L$  es una variedad lineal de dimensión  $r$  de  $\mathbb{P}$ , comprobar que  $\dim(L^*) = n - r - 1$ . Análogamente, si  $\Lambda$  es una variedad lineal de dimensión  $r'$  de  $\mathbb{P}^\vee$ , entonces  $\Lambda^*$  es una variedad lineal de dimensión  $n - r' - 1$ .

Pongamos  $\mathcal{S}$  para denotar el conjunto de variedades lineales de  $\mathbb{P}$  y  $\mathcal{S}^\vee$  para denotar el conjunto de variedades lineales de  $\mathbb{P}^\vee$ . Tenemos aplicaciones  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^\vee$  ( $L \mapsto L^*$ ) y  $\mathcal{S}^\vee \rightarrow \mathcal{S}$  ( $\Lambda \mapsto \Lambda^*$ ). Si ponemos  $\mathcal{S}_r \subseteq \mathcal{S}$  para denotar el conjunto de variedades lineales de dimensión  $r$ , y definimos  $\mathcal{S}_r^\vee$  de forma análoga, entonces tenemos aplicaciones  $\mathcal{S}_r \rightarrow \mathcal{S}_{n-r-1}^\vee$  y  $\mathcal{S}_r^\vee \rightarrow \mathcal{S}_{n-r-1}$  obtenidas por restricción de las aplicaciones  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^\vee$  y  $\mathcal{S}^\vee \rightarrow \mathcal{S}$ .

**3.60 Teorema** (de dualidad). *Las aplicaciones  $\Lambda \mapsto \Lambda^*$  y  $L \mapsto L^*$  entre los conjuntos  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}^\vee$  son biyectivas e inversas una de otra. Además, tienen las siguientes propiedades:*

- 1)  $L_1 \subseteq L_2$  si y solo si  $L_2^* \subseteq L_1^*$ .
- 2)  $(L_1 \vee L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$ .
- 3)  $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \vee L_2^*$ .

*Notemos, en particular, que las aplicaciones  $\mathcal{S}_r \rightarrow \mathcal{S}_{n-r-1}^\vee$  y  $\mathcal{S}_{n-r-1}^\vee \rightarrow \mathcal{S}_r$  son biyectivas e inversas una de otra.*

**Demostración:** Es una consecuencia directa del teorema 3.59, de las fórmulas [3.16] y [3.16'], y de las definiciones.  $\square$

Como consecuencia del teorema de dualidad, podemos identificar los puntos de  $\mathbb{P}^\vee$ , que forman el subconjunto  $\mathcal{S}_0^\vee$  de  $\mathcal{S}^\vee$ , con los hiperplanos de  $\mathbb{P}$ , que forman el subconjunto  $\mathcal{S}_{n-1}$  de  $\mathcal{S}$ . De hecho, si  $\omega \in E^\vee$  es no nula,  $[\omega]^*$  es el hiperplano representado por el espacio  $\omega^*$  de vectores incidentes con  $\omega$ . En adelante, identificaremos los puntos de  $\mathbb{P}^\vee$  con los hiperplanos de  $\mathbb{P}$ , de manera que el símbolo  $[\omega]$ , que por definición representa un punto de  $\mathbb{P}^\vee$  (si  $\omega \in E^\vee - \{0\}$ ), también se usará para representar el hiperplano  $[\omega^*]$  de  $\mathbb{P}$ . De este modo, la relación  $[x] \in [\omega]$  equivale, si  $x \in E - \{0\}$  y  $\omega \in E^\vee - \{0\}$ , a  $\langle \omega | x \rangle = 0$ .

Con la interpretación de los puntos de  $\mathbb{P}^\vee$  como hiperplanos de  $\mathbb{P}$ , las variedades lineales de  $\mathbb{P}^\vee$  se pueden interpretar como conjuntos de hiperplanos de  $\mathbb{P}$ . De hecho, diremos que un conjunto de hiperplanos de  $\mathbb{P}$  es un *haz de hiperplanos* si este conjunto forma una variedad lineal  $\mathbb{P}^\vee$ .

Por el teorema de dualidad, tenemos que todo haz  $\Lambda$  de hiperplanos es de la forma  $L^*$ , donde  $L$  es una variedad lineal de  $\mathbb{P}$  unívocamente determinada por  $\Lambda$  (de hecho  $L = \Lambda^*$ , el eje de  $\Lambda$ ). Por tanto, para terminar de perfilar la interpretación de las variedades lineales de  $\mathbb{P}^\vee$  como haces de hiperplanos solo nos falta encontrar una descripción del conjunto de hiperplanos que corresponde a  $L^*$  en términos de  $L$  y  $\mathbb{P}$ .

**3.61 Proposición.** *El haz de hiperplanos  $L^*$  está formado precisamente por los hiperplanos que contienen  $L$ .*

**Demostración:** Sea  $F$  el subespacio vectorial de  $E$  tal que  $L = [F]$ . Sea  $\omega$  una forma lineal no nula de  $E$ . Puesto que  $L^* = [F^*]$ , el hiperplano  $[\omega]$  es un punto de  $L^*$  si y solo si  $\omega \in F^*$ , es decir, si y solo si  $\omega$  es incidente con  $F$ . Ahora bien, esto equivale a que  $F \subseteq \omega^*$ , es decir, a que  $L = [F] \subseteq [\omega^*]$ . Por tanto, un punto  $[\omega] \in \check{\mathbb{P}}$  es de  $L^*$  si y solo si el hiperplano que le corresponde contiene  $L$ .  $\square$

**E. 3.43.** Probar que el eje de un haz de hiperplanos  $\Lambda$  es la intersección de todos los hiperplanos de  $\Lambda$ .

**3.62 Ejemplos.** Los hiperplanos de  $\mathbb{P}^v$  son los haces de la forma  $P^*$ , donde  $P$  es un punto de  $\mathbb{P}$ . El punto  $P$ , que es el eje del hiperplano  $P^*$ , también se denomina *foco* de  $P^*$ .

En el caso del plano  $\mathbb{P}^2$ , vemos que las rectas de  $\mathbb{P}^2$  son los puntos de  $\check{\mathbb{P}}^2$  y que los puntos de  $\mathbb{P}^2$  se identifican con las rectas de  $\check{\mathbb{P}}^2$ , haciendo corresponder al punto  $P$  el haz  $P^*$  de foco  $P$  (esto es, el conjunto de las rectas incidentes con  $P$ ).

En el caso de  $\mathbb{P}^3$ , los puntos de  $\check{\mathbb{P}}^3$  son los hiperplanos de  $\mathbb{P}^3$ , las rectas de  $\check{\mathbb{P}}^3$  se pueden identificar con las rectas de  $\mathbb{P}^3$  (si  $L$  es una recta de  $\mathbb{P}^3$ , la recta de  $\check{\mathbb{P}}^3$  que le corresponde es  $L^*$ , la radiación de planos de eje  $L$ , de modo que  $L$  es, como recta de  $\mathbb{P}^3$ , el conjunto de sus puntos y, como recta de  $\check{\mathbb{P}}^3$ , el conjunto de los hiperplanos que la contienen). Finalmente, los hiperplanos de  $\check{\mathbb{P}}^3$  se identifican con los puntos de  $\mathbb{P}^3$ , haciendo corresponder al punto  $P$  el plano  $P^*$  de foco  $P$ .

### Principio de dualidad

Sea  $R = R(L_1, \dots, L_k)$  un enunciado relativo a variedades lineales  $L_1, \dots, L_k$ , de dimensiones  $r_1, \dots, r_k$ , de un espacio proyectivo de dimensión  $n$ . Supongamos, además, que en la formación de  $R$  solo entran las relaciones y operaciones  $\subseteq, \supseteq, \vee$  y  $\cap$ .

Pondremos  $R^\vee = R^\vee(L'_1, \dots, L'_k)$  para denotar el enunciado que se obtiene substituyendo cada ocurrencia de  $L_i$  en  $R$  por una variedad  $L'_i$  de dimensión  $n - r_i - 1$ , y cada ocurrencia de  $\subseteq, \supseteq, \vee$  o  $\cap$ , por  $\supseteq, \subseteq, \cap$  o  $\vee$ , respectivamente. Del enunciado  $R^\vee$ , diremos que es el *dual* de  $R$ .

El *principio de dualidad* afirma que si  $\mathcal{T}$  es un teorema de la forma  $R \Rightarrow S$ , donde  $R$  y  $S$  son enunciados de la forma citada, entonces el enunciado  $\mathcal{T}^\vee$ , que por definición es  $R^\vee \Rightarrow S^\vee$ , también es un teorema.

La razón por la cual el principio de dualidad funciona es la siguiente. Puesto que  $R \Rightarrow S$  es un teorema, en particular tenemos que, si  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  son haces de hiperplanos de dimensiones  $r_1, \dots, r_k$  de  $\mathbb{P}^n$ ,  $S(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$  es consecuencia de  $R(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$ . Pero  $\Lambda_i = L_i^*$ , donde  $L_i'$  es una variedad lineal de dimensión  $n - r_i - 1$  de  $\mathbb{P}$ , y queda claro, por el teorema de dualidad, que  $R(L_1^*, \dots, L_k^*) = R^\vee(L'_1, \dots, L'_k)$  y, por la misma razón,  $S(L_1^*, \dots, L_k^*) = S^\vee(L'_1, \dots, L'_k)$ . Por tanto,  $R^\vee \Rightarrow S^\vee$  también es un teorema.

**E.3.44.** Sean  $H_1, H_2, H_3, H_4$  cuatro hiperplanos de  $\mathbb{P}^n$  incidentes con una variedad lineal  $L$  de dimensión  $n - 2$ . Demostrar que la razón doble  $\rho(H_1, H_2, H_3, H_4)$  definida en el subapartado «Razón doble de cuatro hiperplanos de un haz», pág. 211, coincide con la razón doble de los hiperplanos como puntos de la recta  $L^*$  del espacio proyectivo dual.

**E.3.45.** Enunciar el dual del teorema del cuadrángulo completo.

### Proyectividad dual

Sean  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$  y  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(E')$  espacios proyectivos y  $\varphi = [f]$  una proyectividad de  $\mathbb{P}$  en  $\mathbb{P}'$ , donde  $f: E \rightarrow E'$  es un isomorfismo lineal. Entonces  $\varphi^{-1}$  transforma hiperplanos de  $\mathbb{P}'$  en hiperplanos de  $\mathbb{P}$  (v. enunciado 3.34) y, por tanto, tenemos una aplicación

$$\varphi^\vee: \check{\mathbb{P}}' \rightarrow \check{\mathbb{P}}, \quad H' \mapsto \varphi^{-1}(H')$$

Esta aplicación es biyectiva, ya que la proyectividad  $\varphi$  transforma hiperplanos de  $H$  en hiperplanos de  $H'$  y  $\varphi(\varphi^{-1}(H')) = H'$  para todo hiperplano  $H'$  de  $\mathbb{P}'$ ,  $\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H$  para todo hiperplano  $H$  de  $\mathbb{P}$ .

**3.63 Proposición.** La aplicación  $\varphi^\vee$  es la proyectividad  $[f^\vee]$  definida por el isomorfismo lineal  $f^\vee: \check{E}' \rightarrow \check{E}$ , donde  $f^\vee$  denota el dual del isomorfismo  $f: E \rightarrow E'$  que induce  $\varphi$ .

**Demostración:** Sea  $P = [x] \in \mathbb{P}$  y  $H' = [\omega'] \in \check{\mathbb{P}}'$ . Como  $\varphi(P) = [f(x)]$ , tenemos

$$\begin{aligned} P \in \varphi^\vee(H') &\Leftrightarrow \varphi(P) \in H' \\ &\Leftrightarrow \langle \omega' | f(x) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle f^\vee \omega' | x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow P \in [f^\vee \omega'] \end{aligned}$$

es decir,  $\varphi^\vee(H') = [f^\vee \omega']$ . □

**E.3.46.** Una proyectividad de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  tiene al menos un punto fijo (v. ejercicio E.3.21). Demostrar que también tiene al menos una recta fija.

### Referencia dual

Sea  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  una referencia proyectiva. La *referencia dual* de la referencia  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}^\vee = [P_0^\vee, \dots, P_n^\vee; U^\vee]$ , se define como la referencia asociada a una base dual de una base adaptada a  $\mathcal{R}$ . Para decirlo con más detalles, si  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$  es una base de  $E$  adaptada a  $\mathcal{R}$ , y  $\mathbf{e}^\vee = (e^0, \dots, e^n)$  es la base dual correspondiente (es decir,  $e^j \in E^\vee$  es la forma lineal tal que  $\langle e^j | e_i \rangle = 1$  si  $i = j$ ,  $\langle e^j | e_i \rangle = 0$  si  $i \neq j$ ), entonces  $P_j^\vee = [e^j]$  y  $U^\vee = [e^0 + \dots + e^n]$ .

Notemos que  $R^\vee$  no depende de la base  $\mathbf{e}$ , adaptada a  $\mathcal{R}$ , que hayamos escogido: otra base adaptada a  $\mathcal{R}$  tiene la forma  $(\lambda e_0, \dots, \lambda e_n)$ , para un cierto  $\lambda \in K - \{0\}$ ; la base dual de esta base es  $(\lambda^{-1}e^0, \dots, \lambda^{-1}e^n)$ , ya que  $\langle \lambda^{-1}e^j | \lambda e_i \rangle = \langle e^j | e_i \rangle$ ; y está claro que esta base define la misma referencia que la base que  $e^0, \dots, e^n$ .

**3.64 Proposición.** *Un hiperplano de ecuación  $u_0\xi_0 + \dots + u_n\xi_n = 0$  respecto a la referencia  $\mathcal{R}$  tiene coordenadas proyectivas  $(u_0, \dots, u_n)$  respecto a la referencia dual  $R^\vee$ . Recíprocamente, si  $(u_0, \dots, u_n)$  son coordenadas proyectivas de un hiperplano respecto a la referencia  $R^\vee$ , entonces el hiperplano tiene ecuación  $u_0\xi_0 + \dots + u_n\xi_n = 0$  respecto a la referencia  $\mathcal{R}$ .*

**Demostración:** Sea  $H$  el hiperplano de ecuación  $u_0\xi_0 + \dots + u_n\xi_n = 0$ . Sea

$$\omega = u_0e^0 + \dots + u_n e^n \in E^\vee$$

donde  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$  es una base adaptada a  $\mathcal{R}$  y  $\mathbf{e}^\vee = (e^0, \dots, e^n)$  su base dual. Como  $\mathbf{e}^\vee$  es una base adaptada a  $\mathcal{R}^\vee$ , decir que  $(u_0, \dots, u_n)$  son coordenadas proyectivas de  $H$  respecto a  $\mathcal{R}^\vee$  equivale a ver que  $H = [\omega^*]$ . Ahora bien, un punto  $[\xi_0e_0 + \dots + \xi_n e_n]$  es de  $H$  si y solo si  $u_0\xi_0 + \dots + u_n\xi_n = 0$  y, dado que

$$u_0\xi_0 + \dots + u_n\xi_n = \langle u_0e^0 + \dots + u_n e^n | \xi_0e_0 + \dots + \xi_n e_n \rangle = \langle \omega | \xi_0e_0 + \dots + \xi_n e_n \rangle$$

vemos que  $[\xi_0e_0 + \dots + \xi_n e_n] \in H$  si y solo si  $\xi_0e_0 + \dots + \xi_n e_n \in \omega^*$ . Por tanto,  $H = [\omega^*]$ .

Para ver el recíproco, sean  $(u_0, \dots, u_n)$  coordenadas proyectivas de un hiperplano  $H$  respecto a  $\mathcal{R}^\vee$ . Esto significa que  $H = [u_0e^0 + \dots + u_n e^n]$  y, por tanto,  $[\xi_0e_0 + \dots + \xi_n e_n]$  es de  $H$  si y solo si  $\langle u_0e^0 + \dots + u_n e^n | \xi_0e_0 + \dots + \xi_n e_n \rangle = 0$ . Pero el cálculo anterior muestra que esta condición equivale a  $u_0\xi_0 + \dots + u_n\xi_n = 0$ , y esto termina la prueba.  $\square$

**3.65 Corolario.** *Los vértices de la referencia dual  $\mathcal{R}^\vee$  son las caras del símplice de la referencia  $\mathcal{R}$ .*

**Demostración:** En efecto, por definición tenemos que el  $i$ -ésimo vértice de  $\mathcal{R}^\vee$  es, con las notaciones introducidas en la prueba del teorema,  $P_i^\vee = [e^i]$ , que es el hiperplano de ecuación  $\xi_i = 0$ .  $\square$

**E.3.47.** Sean  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{P}'$  espacios proyectivos y  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  una proyectividad. Si la matriz de  $\varphi$  respecto a referencias  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  de  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{P}'$ , respectivamente, es  $[M]$ , probar que la matriz de  $\varphi^\vee$  respecto a las referencias  $\check{\mathcal{R}}'$  y  $\check{\mathcal{R}}$  es  $[M^T]$ .

**E.3.48.** Consideremos una referencia proyectiva  $\mathcal{R}$  de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}$ . Dado un punto  $P = [\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}}$ , verificar que la ecuación del hiperplano  $P^*$  de  $\mathbb{P}^\vee$ , respecto a la referencia  $\mathcal{R}^\vee$ , es  $u_0\xi_0 + \dots + u_n\xi_n = 0$ .

**Polar armónica de un punto respecto a un símplice**

Sea  $\Delta = P_0 \cdots P_n$  un símplice de  $\mathbb{P}^n$  y  $A$  un punto no incidente con ninguna cara de  $\Delta$ . Así  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; A]$  es un referencia de  $\mathbb{P}$  y podemos considerar la referencia dual  $\mathcal{R}^\vee = [P_0^\vee, \dots, P_n^\vee; A^\vee]$ . El hiperplano  $A^\vee$  sólo depende de  $\Delta$  y de  $A$ : diremos que es el *hiperplano polar armónico de  $A$  respecto a  $\Delta$*  (si  $n = 2$ , lo llamaremos la *recta polar armónica* de  $A$  respecto al triángulo  $P_0P_1P_2$ , y si  $n = 3$ , el *plano polar armónico* de  $A$  respecto al tetraedro  $P_0P_1P_2P_3$ ).

La proposición y el corolario siguientes dan una caracterización analítica y geométrica, respectivamente, del hiperplano polar de un punto.

Ponemos  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  para denotar una referencia de  $\mathbb{P}^n$  y  $A = [a_0, \dots, a_n]_{\mathcal{R}}$  un punto no incidente con ninguna cara del símplice  $[P_0, \dots, P_n]$  (es decir,  $a_i \neq 0$  para  $i = 0, \dots, n$ ).

**3.66 Proposición.** *La ecuación del hiperplano polar de  $A$  en la referencia  $\mathcal{R}$  es*

$$\frac{\xi_0}{a_0} + \dots + \frac{\xi_n}{a_n} = 1$$

**Demostración:** Sea  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  una base adaptada a  $\mathcal{R}$ . Así,  $A = [a_0e_0 + \dots + a_n e_n]$  y  $(a_0e_0, \dots, a_n e_n)$  es una base adaptada a la referencia  $[P_0, \dots, P_n; A]$ . Como la base dual de  $(a_0e_0, \dots, a_n e_n)$  es  $(a_0^{-1}e^0, \dots, a_n^{-1}e^n)$ , donde  $e^0, \dots, e^n$  es la dual de la base  $\mathbf{e}$ , tenemos que  $A^\vee = [a_0^{-1}e^0 + \dots + a_n^{-1}e^n]$ . Por tanto,  $(a_0^{-1}, \dots, a_n^{-1})$  son  $\mathcal{R}^\vee$ -coordenadas de  $A^\vee$  y ahora la afirmación es una consecuencia directa de la proposición 3.64. □

**3.67 Proposición.** *Para cualquier par de índices  $i, j$  tales que  $0 \leq i < j \leq n$ , sean  $L_{ij} = P_iP_j$ ,  $V_{ij}$  la cara del símplice de  $\mathcal{R}$  opuesta a  $L_{ij}$ ,  $A_{ij}$  la proyección de  $A$  sobre la recta  $L_{ij}$  con centro  $V_{ij}$  y  $A'_{ij}$  el cuarto armónico de  $A_{ij}$  respecto a  $\{P_i, P_j\}$  (v. figura 3.21). Entonces el hiperplano  $A^\vee$  es incidente con los puntos  $A'_{ij}$ .*

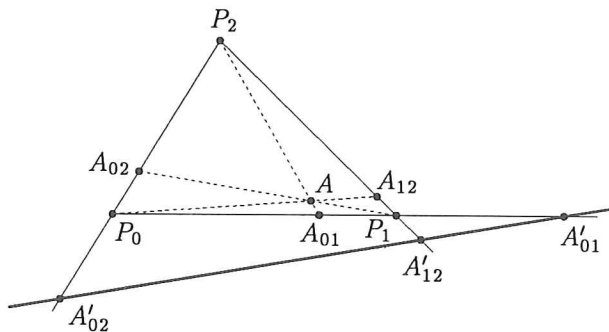


Figura 3.21: Polar armónica de  $A$  respecto al triángulo  $P_0P_1P_2$

**Demostración:** Dado que la idea general de la prueba es suficientemente clara para  $n = 2$ , trataremos solo este caso para evitar complicaciones de notación. En la referencia  $[P_0, P_1, P_2; A]$ , tenemos  $A = [1, 1, 1]$ ,  $A_{01} = [1, 1, 0]$ ,  $A_{02} = [1, 0, 1]$  y  $A_{12} = [0, 1, 1]$ , de donde  $A'_{01} = [1, -1, 0]$ ,  $A'_{02} = [1, 0, -1]$  y  $A'_{12} = [0, 1, -1]$ . Finalmente, visto que  $A^\vee$  es la recta de ecuación  $\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 = 0$ , está claro que  $A^\vee$  contiene los puntos  $A'_{01}$ ,  $A'_{02}$  y  $A'_{12}$ .  $\square$

### 3.6 Problemas

**P.3.1.** Sea  $K$  un cuerpo finito de  $q$  elementos y  $\mathbb{P}^n$  el espacio proyectivo de dimensión  $n$  sobre  $K$ . Hallar, en función de  $q$  y  $n$ , el número de puntos de  $\mathbb{P}^n$ . Hallar también el número de hiperplanos, el número de hiperplanos incidentes con un punto dado y el número de rectas.

**P.3.2.** Sean  $u$  y  $u'$  dos rectas del plano proyectivo y supongamos que su punto de intersección, sea  $Q$ , es «inaccesible». Dado un punto  $P$  no incidente ni con  $u$  ni con  $u'$ , hallar una construcción de la recta  $QP$ . Indicación: Usar el recíproco del teorema de Desargues de los triángulos en perspectiva.

**P.3.3.** Supongamos que los tetraedros  $P_0P_1P_2P_3$  y  $Q_0Q_1Q_2Q_3$  están en perspectiva desde el punto  $P$ , es decir,  $P_i \neq Q_i$ , y que las rectas  $P_iQ_i$  son concurrentes en un punto  $P$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ). Probar que las intersecciones  $R_{ij} = P_iP_j \cap Q_iQ_j$ ,  $0 \leq i < j \leq 3$ , son puntos y que estos puntos son coplanarios.

**P.3.4.** Sean  $L_1, L_2$  y  $L_3$  tres planos de  $\mathbb{P}^4$  y supongamos que  $P_1 = L_2 \cap L_3$ ,  $P_2 = L_3 \cap L_1$  y  $P_3 = L_1 \cap L_2$  son tres puntos no alineados. Demostrar que existe un único plano  $L$  de  $\mathbb{P}^4$  tal que las intersecciones  $L \cap L_1, L \cap L_2$  y  $L \cap L_3$  son rectas.

**P.3.5.** Si la recta determinada por dos puntos es «no constructible», ¿cómo se puede encontrar el punto en que la corta otra recta?

La inclusión  $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$  induce una inclusión del espacio proyectivo real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  en el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . Si  $L$  es una variedad lineal de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , pondremos  $L' = L \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ , y diremos que  $L'$  es la *parte real* de  $L$ . Es inmediato verificar que  $L'$  es una variedad lineal de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ . Por otro lado, diremos que  $L$  es *real* si se puede definir por un sistema de ecuaciones lineales a coeficientes reales.

**P.3.6.** Demostrar que:

- 1)  $2 \dim(L) - n \leq \dim(L') \leq \dim(L)$ .
- 2)  $L$  es real si y solo si  $\dim(L') = \dim(L)$ .

- 3)  $L$  es real si y solo si para todo  $[z_0, \dots, z_n] \in L$  se cumple  $[\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_n] \in L$ .
- 4) Si  $n = 2$ , todo punto de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n - \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  pertenece a una única recta real, y toda recta no real de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  contiene un único punto real.
- 5) Si  $d$  y  $d'$  son números enteros tales que  $0 \leq d \leq n$  y  $2d - n \leq d' \leq d$ , existe una variedad lineal  $L$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  tal que  $\dim(L) = d$  y  $\dim(L') = d'$ .

**P.3.7.** Consideremos un triángulo  $PQR$ , un punto  $S$  no incidente con ningún lado de este y una recta  $L$  por  $S$ . Probar que

$$\rho(SP, SQ, SR, L) = \rho(P', Q', R', S)$$

donde  $P', Q', R'$  son las intersecciones de  $L$  con los lados  $QR, RP$  y  $PQ$ , respectivamente.

**P.3.8.** Probar que la razón doble de los puntos de intersección de una recta con las caras de un tetraedro coincide con la razón doble de los planos determinados por la recta y los vértices del tetraedro.

**P.3.9.** Determinar las homologías armónicas de un plano euclidiano que dejan invariante el conjunto de vértices de un cuadrado.

**P.3.10.** Las homografías armónicas son involutivas. Probar que en un plano proyectivo real el enunciado recíproco también es cierto, es decir, que toda homografía involutiva de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  es una homología armónica.

**P.3.11.** Consideremos dos homologías armónicas con el mismo eje  $H$ , y centros  $P$  y  $P'$ ,  $P \neq P'$ . Demostrar que su producto es una homología especial de eje  $H$  y centro  $PP' \cap H$ . Recíprocamente, probar que toda homología especial se puede descomponer como producto de dos homologías armónicas.

**P.3.12.** Generalizar el ejercicio E.3.32 al caso de las homografías de  $\mathbb{P}^n$  que tienen exactamente  $n + 1$  puntos fijos.

Una homografía  $\varphi$  de  $\mathbb{P}^3$  se denomina una *homología biaxial* si su conjunto de puntos fijos es la unión de dos rectas (diremos que estas rectas son los *ejes* de la homología).

**P.3.13.** Sea  $\varphi$  una homología biaxial y sean  $u$  y  $u'$  sus rectas de puntos fijos. Si  $P$  es un punto cualquiera no incidente con  $u$  y  $u'$ , demostrar que la recta  $P\varphi(P)$  es incidente con  $u$  y con  $u'$ . Demostrar también que si los puntos de intersección de  $P\varphi(P)$  con  $u$  y  $u'$  son  $Q$  y  $Q'$ , respectivamente, entonces el valor de la razón doble  $\rho(P, \varphi(P), Q, Q')$  es independiente de  $P$  (este escalar, que usualmente se denota  $\kappa$ , se denomina el *módulo* de la homología biaxial; si  $\kappa = -1$ , la homología biaxial se dice que es *armónica*; notemos que, en este caso, es una homografía involutiva).

**P.3.14.** Dadas dos rectas disjuntas de  $\mathbb{P}^3$ ,  $u$  y  $u'$ , y un escalar  $\kappa \neq 0, 1$ , probar que existe exactamente una homología biaxial de módulo  $\kappa$  y ejes  $u$  y  $u'$ .

**P.3.15.** Considerar un tetraedro  $P_1P_2P_3P_4$  de  $\mathbb{P}^3$  y un escalar  $\kappa \neq 0, 1$ . Sea  $\alpha_i$  la homología de módulo  $\kappa$ , centro  $P_i$  y eje la cara  $H_i$  opuesta a  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ . Para  $1 \leq i < j \leq 4$ , sea  $\beta_{ij}$  la homología biaxial de módulo  $\kappa$  y ejes la arista  $P_iP_j$  y su opuesta.

- 1) Hallar el producto  $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\alpha_{i_3}\alpha_{i_4}$  para toda permutación  $(i_1, i_2, i_3, i_4)$  de  $(1, 2, 3, 4)$ .
- 2) Fijado  $i$ , hallar el producto  $\prod_{j \neq i} \beta_{ij}$ .

**P.3.16.** Demostrar que los puntos medios de las 3 diagonales de un cuadrángulo están alineados. Indicaciones: Con las notaciones de la figura 3.22, en la cual el cuadrángulo es  $ABCD$  y las diagonales  $AC$ ,  $BD$  y  $XY$ , considerar la referencia proyectiva  $\tilde{\mathcal{R}}$  que tiene  $ABY$  como triángulo y  $CD$  como recta unidad. Considerar también la referencia proyectiva  $\overline{\mathcal{R}}'$  asociada a una referencia afín. Sean  $\mathbf{a}_0 = (a_{00}, a_{01}, a_{02})$ ,  $\mathbf{a}_1 = (a_{10}, a_{11}, a_{12})$  y  $\mathbf{a}_2 = (a_{20}, a_{21}, a_{22})$  vectores de  $\overline{\mathcal{R}}'$ -coordenadas de  $A, B, Y$  tales que  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$  es un vector de  $\overline{\mathcal{R}}'$ -coordenadas del punto unidad de  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Entonces las coordenadas del punto medio de  $AC$  son

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{a}_0}{a_{00}} + \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{a_{10} - a_{20}} \right).$$

Análogamente se encuentran los puntos medios de  $BD$  y  $XY$ . Finalmente se comprueba, con las expresiones obtenidas, que los citados puntos medios están alineados.

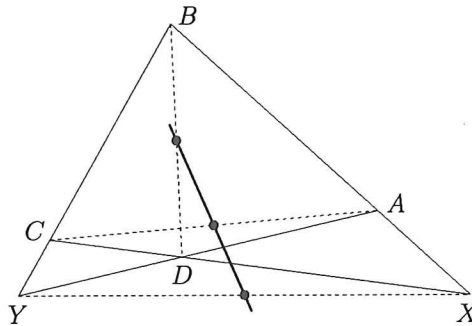


Figura 3.22: Los puntos medios de las diagonales de un cuadrángulo están alineados

**P.3.17** (Punto de Nagel de un triángulo). Demostrar que las rectas que unen cada vértice de un triángulo del plano euclidiano con el punto del lado opuesto en el cual es tangente el correspondiente círculo exinscrito, son concurrentes en un punto. Indicación: Usar coordenadas trimétricas.

**P.3.18** (Punto de Lemoine de un triángulo). Si  $P_0P_1P_2$  es un triángulo y  $A$  un punto no incidente con ninguno de sus lados, sea  $L_i$  la simétrica de la recta  $P_iA$  respecto a la bisectriz interior de  $P_i$ . Probar que las rectas  $L_i$  son concurrentes en un punto  $A'$ . Si  $G$  es el baricentro del triángulo, el punto  $G'$  se denomina *punto de Lemoine* del triángulo. Indicación: Usar coordenadas trimétricas.

Sean  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$  y  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}'(E')$  dos espacios proyectivos de dimensión  $n$  y  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  una aplicación biyectiva. Se dice que es una *colineación*, o una *proyectividad de von Staudt*, si, o bien  $n \geq 2$  y  $\varphi$  transforma puntos alineados en puntos alineados, o bien  $n = 1$  y  $\varphi$  transforma cuaternas armónicas en cuaternas armónicas. Ejemplo: las proyectividades son colineaciones (v. el enunciado 3.34 y la proposición 3.52).

Diremos que la aplicación  $\varphi$  es una *semiproyectividad* si existe un isomorfismo semilineal  $f: E \rightarrow E'$  tal que  $\varphi([x]) = [f(x)]$  para todo vector no nulo  $x \in E$ . Una *semihomografía* es una semiproyectividad de un espacio proyectivo en sí mismo.

**P.3.19.** Probar que una semiproyectividad transforma puntos alineados en puntos alineados y que si  $P_0, P_1, P_2, P_3$  son cuatro puntos alineados distintos tales que  $\rho = \rho(P_0, P_1, P_2, P_3)$ , entonces

$$\rho(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)) = \rho^*$$

donde  $\lambda \mapsto \lambda^*$  es un automorfismo del cuerpo  $K$  (para la notación  $\lambda^*$ , v. apartado «Aplicaciones semiafines y colineaciones», pág. 92). Deducir que toda semiproyectividad es una colineación.

**P.3.20** (Teorema de von Staudt). Supongamos que en el cuerpo  $K$  se cumple  $2 \neq 0$ . Probar que una colineación entre dos rectas proyectivas es una semiproyectividad. Indicación: Hágase primero el caso en que la colineación es una autocoloneación de una recta proyectiva con tres puntos fijos distintos (v. la demostración del teorema 1.41).

**P.3.21** (Teorema fundamental de la geometría proyectiva). Supongamos que en el cuerpo  $K$  se cumple  $2 \neq 0$ . Demostrar que toda colineación entre dos espacios proyectivos de dimensión  $n \geq 2$  es una semiproyectividad. Indicación: Estudiar primero el caso de una autocoloneación que deja fijos los puntos de una referencia proyectiva (el problema anterior, y la construcción geométrica del cuarto armónico, permiten razonar por inducción).

**P.3.22.** Demostrar el teorema 3.39 en el caso  $r = 2$ .

La recta proyectiva compleja,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , se puede identificar a la esfera  $S^2$  de radio 1 de la forma siguiente. Escojamos un punto  $P$  de  $S^2$ , al cual denominaremos *polo* (o polo norte), y consideremos la *proyección estereográfica* de  $S^2 - \{P\}$  sobre el plano  $\mathbb{A}$  que pasa por el centro de la esfera y es perpendicular al diámetro que pasa por  $P$  (plano *ecuatorial*): es la aplicación que transforma el punto  $X$  en el punto  $X'$  de

intersección de la recta  $PX$  con  $\mathbb{A}$ . Por otro lado,  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , donde identificamos  $z \in \mathbb{C}$  con el punto  $[z, 1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  y  $\infty$  con el punto  $[1, 0]$ . Si ahora identificamos  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{A}$  isométricamente (mediante la referencia rectangular  $[0, 1, i]$  de  $\mathbb{C}$  y una referencia rectangular  $[O, u_1, u_2]$  de  $\mathbb{A}$ , donde  $O$  es el centro de la esfera (v. figuras 3.23 y 3.24), entonces la proyección estereográfica  $S^2 - \{P\} \rightarrow \mathbb{C}$  se puede extender a una biyección  $S^2 \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  tal que  $P \mapsto \infty$ .

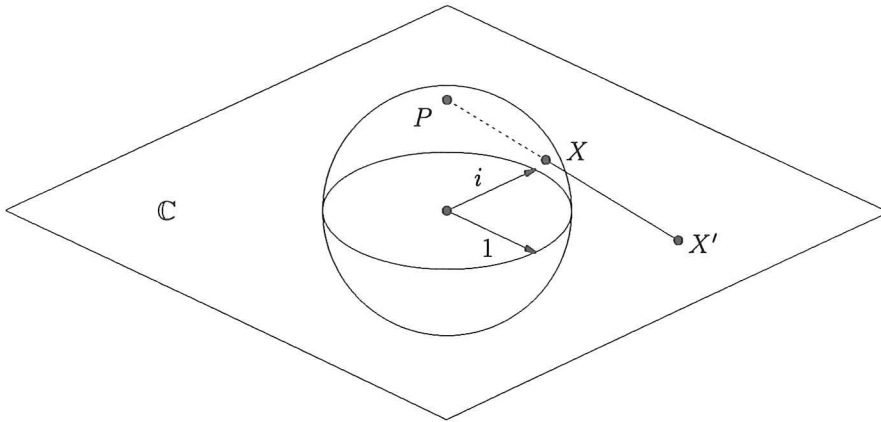


Figura 3.23: Proyección estereográfica

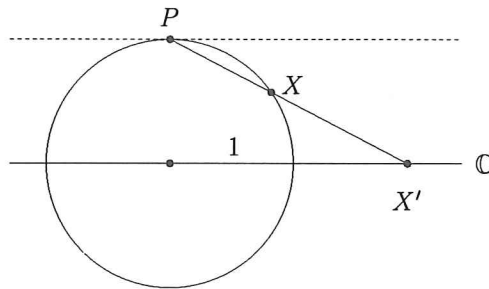


Figura 3.24: El polo  $P$  y el punto  $\infty$  se corresponden por la proyección estereográfica.

Por otro lado, las semejanzas directas (inversas) de  $\mathbb{C}$  se extienden a homografías (semejanzas) de  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  que dejan fijo el punto  $\infty$ . Además, en  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  tenemos *inversiones*: la inversión de  $\mathbb{C}$  respecto a la circunferencia de centro  $z_0$  y radio  $r$  se extiende a la biyección de  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  tal que  $z_0 \mapsto \infty$  y  $\infty \mapsto z_0$ .

**P. 3.23.** Probar que las inversiones de  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  son semejanzas *antilineales* (es decir, que como automorfismo de  $\mathbb{C}$  se puede tomar la conjugación). Indicación: Demostrar primero que la inversión respecto a la circunferencia de radio 1 con centro en el origen es la aplicación  $z \mapsto 1/\bar{z}$ .

**P.3.24.** Probar que toda colineación continua de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  es composición de simetrías e inversiones.

**P.3.25.** Demostrar que la razón doble de cuatro números complejos distintos es un número real si y solo si están sobre una circunferencia.



## 4 Cónicas y cuádricas

Este capítulo se inicia con una sección introductoria, en la cual se revisan las definiciones y algunas propiedades de las secciones cónicas —la elipse, la hipérbola y la parábola. Estas figuras se estudian a continuación, desde un punto de vista analítico, en las secciones 4.1 y 4.2. La idea directriz es mostrar cómo se puede determinar, a partir de la ecuación, el tipo de cónica que representa y, después, cómo se pueden calcular sus elementos geométricos más importantes.

Las secciones 4.3 y 4.4 se destinan a exponer una introducción al estudio de las cuádricas. La definición de estas superficies del espacio de dimensión 3, y los métodos que utilizaremos para estudiarlas, son análogos a los utilizados para el estudio analítico de las cónicas de un plano. Un punto importante (sección 4.3) es constatar que, excepto ciertos casos «degenerados» (como los conos y los cilindros cuya base es una cónica), solo hay cinco «tipos» posibles: elipsoides, dos especies de hiperboloides (de dos hojas, o no reglados —es decir, que no contienen rectas—, y de una hoja, o reglados) y dos especies de paraboloides (no reglados y reglados). Después de familiarizarnos con estas figuras, mediante el estudio de las cónicas que resultan al cortarlas por distintos planos convenientes, consideramos la cuestión de cómo podemos obtener de una manera efectiva, a partir de la ecuación, la «especie» de cuádrica que representa y sus elementos geométricos (sección 4.4).

A pesar de que en principio las cónicas y las cuádricas se definen en un plano y en un espacio euclidianos, respectivamente, en su estudio aparece inevitablemente, sobre todo cuando se considera el comportamiento asintótico, su relación profunda con el plano y el espacio proyectivo, respectivamente. El último apartado de la sección 4.2 («Polaridad y tangencia», pág. 267) y la última sección del capítulo (sección 4.5) se destinan a explorar estas relaciones, y algunas de sus consecuencias, de una manera más sistemática.

## 4.0 Secciones cónicas

Consideremos dos rectas  $e$  y  $g$  del espacio euclidiano y supongamos que se cortan en un punto  $O$  formando un ángulo agudo  $\alpha$ . La figura que se obtiene por rotación de  $g$  alrededor de  $e$  es un *cono circular recto*. Cada una de las dos partes del cono, generadas por las dos semirrectas definidas por  $O$  sobre  $g$ , se denomina una *hoja* del cono. La recta  $e$  y el punto  $O$  se denominan el *eje* y el *vértice* del cono, respectivamente. Una recta  $g'$  es una *generatriz* del cono si es la imagen de  $g$  por una cierta rotación alrededor del eje, y en este caso está claro que el ángulo que forma con este es  $\alpha$ .

Las *cónicas*, o *secciones cónicas*, son las curvas que se obtienen cuando se corta un cono circular recto por un plano que no pasa por su vértice. El objeto principal de esta sección es establecer un puente conceptual entre esta presentación geométrica y la presentación analítica sistemática que haremos en las secciones 4.1 y 4.2.

Pondremos  $\Pi$  para denotar el plano con el que cortamos el cono, y  $\gamma$  para indicar el ángulo que forma  $\Pi$  con el eje del cono. Las tres posibilidades que pueden darse se han esquematizado en la figura 4.1.

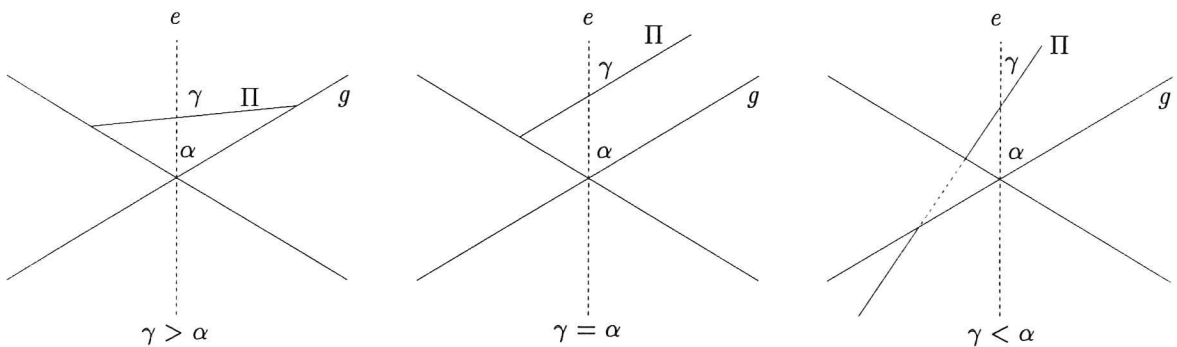


Figura 4.1: *Inclinación de  $\Pi$  respecto al eje del cono (línea vertical punteada). El caso  $\gamma > \alpha$  da elipses (circunferencias cuando  $\gamma = \pi/2$ ), el caso  $\gamma = \alpha$  da parábolas y el caso  $\gamma < \alpha$  da hipérbolas.*

**Nota.** La línea que separa la claridad y la sombra cuando iluminamos una pared plana con un foco puntual de luz situado sobre el eje de una pantalla en forma de cono circular recto es una sección cónica. Variando la dirección del eje del cono, es fácil visualizar los casos que hemos citado. Este experimento también nos permite observar la transición con continuidad, mediante elipses de excentricidad creciente, de la circunferencia a la parábola y a la hipérbola.

### Elipse

Cuando  $\gamma$  es superior a  $\alpha$ , el plano  $\Pi$  corta a todas las generatrices del cono, la intersección está contenida en una de las dos hojas y se dice que la cónica es una *elipse*. Los

puntos de esta curva tienen la propiedad siguiente:

4.1. *La suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante* (estos dos puntos fijos se denominan los *focos* de la elipse).

**Demostración:** Esta propiedad se puede ver fácilmente con la ayuda de la figura 4.3. En efecto, consideremos las dos esferas tangentes al plano  $\Pi$  y que están inscritas en el cono, una en el semiespacio de  $\Pi$  que contiene el vértice del cono y la otra en el semiespacio opuesto (la primera de estas esferas, por ejemplo, es la figura generada por la circunferencia inscrita en el triángulo del caso  $\gamma > \alpha$  de la figura 4.1 al hacerla girar alrededor del eje del cono). Si  $F_1$  y  $F_2$  son los puntos de contacto de estas esferas con el plano  $\Pi$ , y  $A$  es un punto de la elipse, entonces  $AF_1 = AM$  y  $AF_2 = AN$ , ya que todas las tangentes desde un punto a una esfera tienen la misma longitud. Por tanto,  $AF_1 + AF_2 = MN$ . Pero  $MN$  es constante, ya que hemos supuesto que el cono es circular y recto.  $\square$

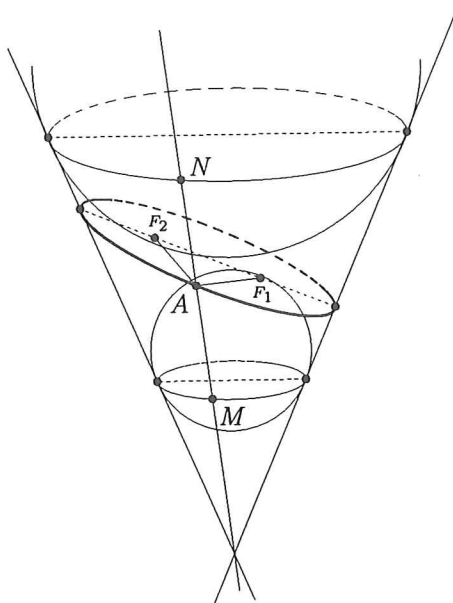


Figura 4.2: *Elipse*

Consideremos ahora un sistema de coordenadas rectangulares del plano  $\Pi$  con origen el punto medio del segmento  $F_1F_2$  y de manera que el eje  $Ox$  coincida con la recta  $F_1F_2$ . Así, tendremos  $F_1 = (c, 0)$  y  $F_2 = (-c, 0)$ , donde  $c$  denota la *semidistancia focal*. Si ponemos  $2a$  para denotar la longitud del segmento  $MN$ , entonces la condición para que el punto  $A = (x, y)$  sea de la elipse es que

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

que, como sabemos, equivale a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{con } b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad [4.1]$$

Diremos que esta es la *ecuación canónica* de la elipse. Esta ecuación implica que la elipse es simétrica respecto a los dos ejes de coordenadas. Por tanto, también es simétrica respecto al origen, razón por la cual diremos que el origen es el *centro* de la elipse. Puesto que  $b \leq a$ ,  $(\pm a, 0)$  son los puntos de la elipse que están a mayor distancia del centro y  $(0, \pm b)$  los que están a distancia mínima. Diremos que  $a$  es el *semieje principal* y  $b$  el *semieje secundario*, y que los puntos  $(\pm a, 0)$  son los *vértices principales* y  $(0, \pm b)$  los *vértices secundarios* (v. figura 4.3, en la cual  $A$  y  $B$  indican los vértices  $(a, 0)$  y  $(0, b)$ , respectivamente).

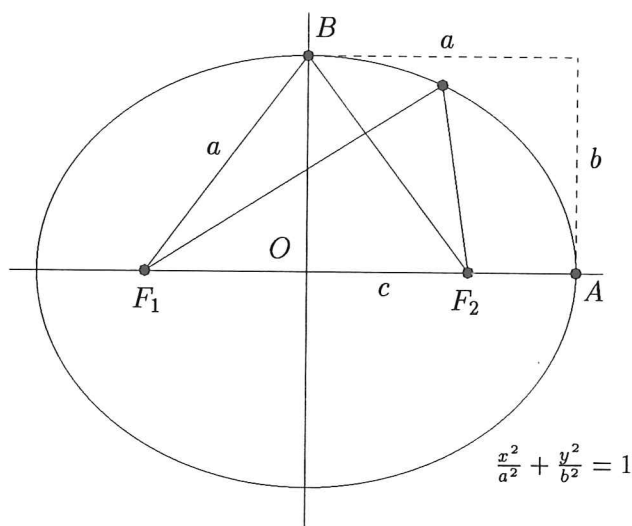


Figura 4.3: *Elipse*

El cociente  $e = c/a$  se denomina *excentricidad* de la elipse. Está claro que  $0 \leq e < 1$  y que  $e = 0$  si y solo si  $c = 0$ , es decir, si y solo si  $b = a$ . En este caso, la ecuación canónica equivale a  $x^2 + y^2 = a^2$ , que es la ecuación de una circunferencia de radio  $a$ . Geométricamente, la circunferencia se obtiene cuando  $\gamma = \pi/2$ , es decir, cuando el plano  $\Pi$  es perpendicular al eje del cono.

**E.4.1.** Si  $a$  y  $b$  son números reales positivos, y  $(x_0, y_0)$  un punto del plano euclidiano, explicar qué representa la ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

(coordenadas cartesianas rectangulares).

Es interesante observar que la afinidad  $(x, y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y)$  transforma la circunferencia de radio  $a$  con centro en el origen (se dice que es la *circunferencia directriz* de la elipse) en la elipse [4.1]. De esto resulta:

4.2. *El área de la elipse es  $\pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab$ .*

También es inmediato verificar que las relaciones

$$x = a \cos(t), \quad y = b \sin(t) \quad (0 \leq t < 2\pi) \quad [4.2]$$

son ecuaciones paramétricas de la misma elipse, en el sentido de que la aplicación  $t \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$  establece una biyección entre el intervalo  $[0, 2\pi)$  y la elipse. Dado que las relaciones  $x = a \cos(t), y = a \sin(t)$  ( $0 \leq t < 2\pi$ ) son ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio  $a$ , vemos que mientras el punto  $P'$  (figura 4.4) describe la circunferencia de radio  $a$ , el punto  $P$  correspondiente a  $P'$  por la afinidad citada describe la elipse de semiejes  $a$  y  $b$ .

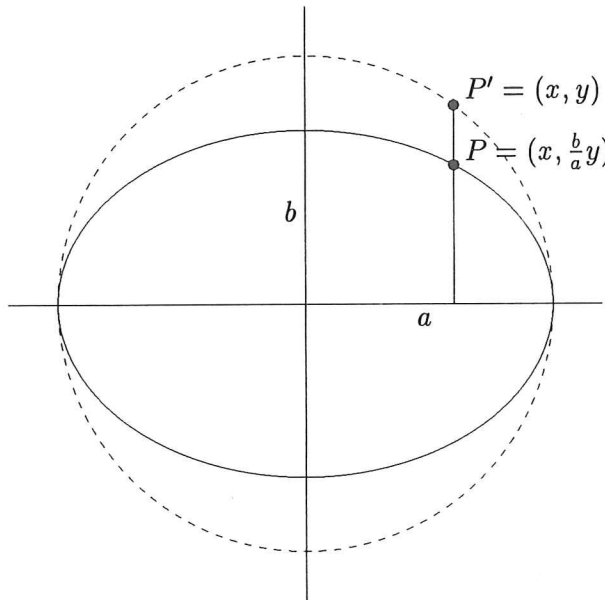


Figura 4.4: *Elipse como imagen afín de la circunferencia*

Sea  $P = (x_0, y_0)$  un punto de la elipse [4.1]. Consideremos una recta por  $P$  dada por ecuaciones paramétricas  $x = x_0 + \xi t, y = y_0 + \eta t$ , donde  $(\xi, \eta) \neq 0$ . Para encontrar las intersecciones de esta recta con la elipse, hemos de hallar las soluciones  $t$  de la ecuación

$$\frac{(x_0 + \xi t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + \eta t)^2}{b^2} = 1$$

Recordando que  $P$  es un punto de la elipse, un cálculo elemental nos muestra que esta ecuación es equivalente a

$$2 \left( \frac{x_0 \xi}{a^2} + \frac{y_0 \eta}{b^2} \right) t + \left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right) t^2 = 0$$

La solución  $t = 0$  nos da el punto  $P$ . La otra solución,

$$t = -2 \left( \frac{x_0 \xi}{a^2} + \frac{y_0 \eta}{b^2} \right) / \left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right)$$

nos da un segundo punto de intersección. Este punto coincide con  $P$  si y solo si

$$\frac{x_0 \xi}{a^2} + \frac{y_0 \eta}{b^2} = 0$$

es decir, si y solo si la recta coincide con la recta que pasa por  $P$  con vector director  $(y_0/b^2, -x_0/a^2)$ . Esta recta se denomina *tangente* a la elipse en el punto  $P$  y está claro que su ecuación cartesiana es

$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0$$

que equivale a

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad [4.3]$$

Esta discusión se puede resumir, pues, diciendo que una recta por un punto  $P$  de una elipse la corta en el punto  $P$  y exactamente otro punto  $P'$ , y que  $P'$  es siempre distinto de  $P$  excepto cuando la recta es la tangente a la elipse en el punto  $P$ . En este caso, se dice que  $P$  es el *punto de contacto* de la tangente y la elipse.

**4.3 Proposición** (Propiedad focal de la elipse). *Si  $P$  es un punto de la elipse [4.1], la tangente en el punto  $P$  coincide con la bisectriz exterior del ángulo  $\widehat{F_1 P F_2}$ , donde  $F_1$  y  $F_2$  son los focos de la elipse.*

**Demostración:** Sea  $L$  la bisectriz exterior del ángulo  $\widehat{F_1 P F_2}$ . Puesto que  $L$  pasa por  $P$ , para ver que  $L$  es la tangente a la elipse en el punto  $P$  bastará demostrar que ninguno de los puntos  $P' \in L - \{P\}$  es de la elipse.

Sea, pues,  $P' \in L - \{P\}$ . Consideremos el simétrico  $F'_1$  del punto  $F_1$  respecto a  $L$  (v. figura 4.5). Como  $L$  es la bisectriz exterior de  $\widehat{F_1 P F_2}$ , el punto  $P$  pertenece al segmento  $F_2 F'_1$ . Ahora tenemos

$$2a = PF_1 + PF_2 = PF'_1 + PF_2 = F'_1 F_2 < P'F'_1 + P'F_2 = P'F_1 + P'F_2$$

de lo cual se sigue que  $P'$  no es de la elipse.  $\square$

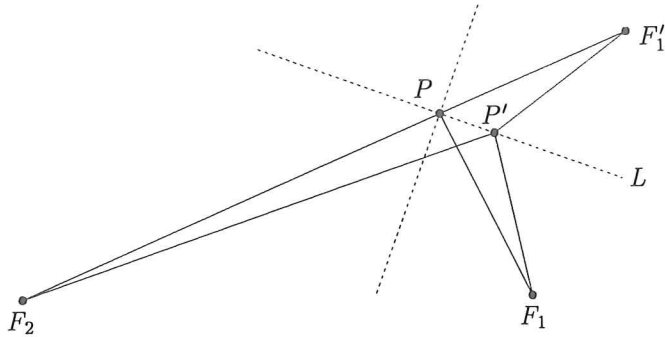


Figura 4.5: Prueba de la propiedad focal de la elipse

La propiedad focal nos dice, por ejemplo, que « $PF_2$  es el rayo reflejado por la elipse del rayo  $F_1P$ », de manera que «los rayos que provienen del foco  $F_1$  son concentrados por la elipse en el foco  $F_2$ ». Por otro lado, la prueba anterior muestra que el lugar geométrico de  $F'_1$ , es decir, del punto simétrico de  $F_1$  respecto a una tangente variable, es la circunferencia de radio  $2a$  con centro en el foco  $F_2$  de la elipse. Esta circunferencia se denomina *circunferencia focal* de la elipse correspondiente al foco  $F_2$ .

Diremos que un punto  $P$  es *interior* o *exterior* respecto a la elipse según  $F_1P + F_2P$  sea inferior o superior a  $2a$ . Por ejemplo, en la prueba de la propiedad focal hemos visto que todo punto de una tangente, excepto el de contacto, es un punto exterior. En cambio, el centro y los focos son puntos interiores.

**E.4.2.** Probar que, en términos de la ecuación canónica, un punto  $(x, y)$  es interior o exterior según  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$  o  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ .

**E.4.3.** Probar que una recta corta una elipse en dos puntos distintos si y solo si contiene puntos interiores de la elipse.

**E.4.4.** Dados dos puntos  $F_1 = (\alpha_1, \beta_1)$  y  $F_2 = (\alpha_2, \beta_2)$  (coordenadas cartesianas rectangulares) y un número real positivo  $a$ , explicar cómo se puede encontrar, respecto a la misma referencia, la ecuación de la elipse de focos  $F_1$  y  $F_2$  y diámetro principal  $2a$ .

## Hipérbola

Si  $\gamma < \alpha$ , existen dos generatrices del cono paralelas al plano  $\Pi$ : son la intersección del cono con el plano paralelo a  $\Pi$  por el vértice del cono. Los puntos de intersección con las otras generatrices pertenecen a un hoja u otra del cono según el ángulo de la generatriz con el plano sea positivo o negativo (este signo se puede definir como el del producto escalar de un vector perpendicular al plano por el vector director de

la generatriz correspondiente a un vector director de  $g$  dado). Se dice que la curva resultante es una *hipérbola*.

Un razonamiento similar al que hemos expuesto para el caso de la elipse, y que dejamos como ejercicio, muestra que los puntos de la hipérbola son aquellos para los que la diferencia de distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos de  $\Pi$  (denominados *focos*) es constante (pondremos  $2a$  para denotarla). Tomando un sistema de coordenadas rectangulares de forma que su origen sea el punto medio del segmento de extremos los focos y que estos estén sobre el eje  $Ox$  (sobre esto y lo que sigue, v. figura 4.6), se obtiene que los puntos de la hipérbola son los que cumplen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [4.4]$$

donde ponemos  $2c$  para denotar la distancia entre los focos ( $c > a$ , necesariamente) y  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ . La constante  $e = c/a > 1$  se denomina *excentricidad* de la hipérbola.

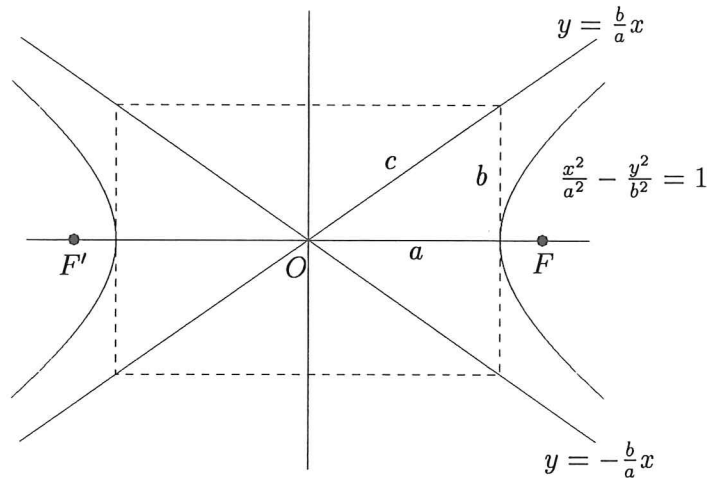


Figura 4.6: Hipérbola

Diremos que [4.4] es la *ecuación canónica* de la hipérbola. Como la elipse, la hipérbola es simétrica respecto a los dos ejes de coordenadas y, por tanto, también es simétrica respecto al origen. Por eso decimos que el origen es el *centro* de la hipérbola. Los puntos  $(\pm a, 0)$  son los que están a distancia mínima del centro y se denominan *vértices*. Diremos que  $a$  es el *semieje principal* de la hipérbola. A diferencia de la elipse, el eje  $Oy$  no contiene puntos de la hipérbola. No obstante, seguiremos diciendo que  $b$  es el *semieje secundario*.

**E.4.5.** Si  $a$  y  $b$  son números reales positivos, y  $(x_0, y_0)$  un punto del plano euclidiano, explicar qué representa la ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

(coordenadas cartesianas rectangulares).

Los puntos de la hipérbola con  $x > 0$  forman la *rama del foco*  $(c, 0)$ . La rama del foco  $(-c, 0)$  se define por la condición  $x < 0$ . Sobre el cono, las ramas son la intersección de  $\Pi$  con cada una de sus dos hojas. Es inmediato verificar que las relaciones

$$x = a \cosh(t), \quad y = b \sinh(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad [4.5]$$

son ecuaciones paramétricas de la rama del foco  $(c, 0)$  de la hipérbola de semiejes  $a$  y  $b$ . Para la rama del foco  $(-c, 0)$ , la parametrización adecuada es  $x = -a \cosh(t)$ ,  $y = b \sinh(t)$ . La hipérbola no es, pues, un conjunto acotado, ya que tiene puntos a distancia arbitrariamente grande del centro.

La relación  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  da las rectas por el origen que tienen vectores directores  $(a, \pm b)$ . Estas rectas, que también podemos escribir  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , se denominan *asíntotas* de la hipérbola. Fijémonos que las asíntotas no cortan a la hipérbola, pero que la distancia de un punto de una asíntota a la hipérbola tiene límite 0 cuando el punto se aleja indefinidamente del centro: por ejemplo, el punto  $P' = (a \cosh(t), b \cosh(t))$  pertenece a la asíntota  $y/b = x/a$ , la distancia de  $P'$  al punto  $P = (a \cosh(t), b \sinh(t))$  de la hipérbola es  $b(\cosh(t) - \sinh(t)) = be^{-t}$ , y este valor tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Las rectas que son paralelas a una asíntota se dice que son *asintóticas*.

**E.4.6.** Comprobar que las asíntotas son las rectas por el centro de la hipérbola paralelas a las dos generatrices del cono que son paralelas a  $\Pi$ .

**E.4.7** (Hipérbola conjugada). Verificar que la hipérbola de ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad [4.6]$$

tiene las mismas asíntotas que la hipérbola [4.4]. Nótese también que los vértices principales de ambas hipérbolas,  $(\pm a, 0)$  y  $(0, \pm a)$ , están sobre la circunferencia de radio  $a$  con centro en el centro común de las dos hipérbolas (la llamaremos *circunferencia directriz* de la hipérbola).

El cambio (afín) de coordenadas dado por las relaciones

$$\xi = x/a - y/b, \quad \eta = x/a + y/b \quad [4.7]$$

transforma la ecuación de la hipérbola en

$$\xi\eta = 1, \quad \text{o bien} \quad \eta = 1/\xi \quad [4.8]$$

Relativamente a estas coordenadas, las asíntotas son los ejes  $O\xi$  y  $O\eta$ . Notemos que este cambio de coordenadas es una semejanza si y solo si  $b = a$ , en cuyo caso se dice que la hipérbola es *equilátera*.

Sea  $P = (x_0, y_0)$  un punto de la hipérbola [4.4] y consideremos la recta

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1 \quad [4.9]$$

Esta recta pasa por  $P$ , no es asintótica  $[\diamond]$  y, razonando como en el caso de la elipse, se prueba que corta la hipérbola exactamente en el punto  $P$ , mientras que las rectas por  $P$  distintas de [4.9] cortan la hipérbola en  $P$  y otro punto distinto, que en el caso de cada una de las dos rectas asintóticas por  $P$  se ha de considerar impropio (v. ejemplo 4.7b). Diremos, pues, que [4.9] es la tangente en el punto  $P$  a la hipérbola [4.4], y que  $P$  es el *punto de contacto* de ambas.

La propiedad que sigue también se prueba de forma análoga a como se ha demostrado para el caso de la elipse:

**4.4 Proposición** (Propiedad focal de la hipérbola). *Si  $P$  es un punto de la hipérbola [4.4], la tangente en el punto  $P$  coincide con la bisectriz interior del ángulo  $\widehat{F_1 P F_2}$ . Además, el lugar geométrico del simétrico  $F'_1$  del foco  $F_1$  respecto a una tangente variable es la circunferencia de centro el otro foco,  $F_2$ , y radio  $2a$  (esta circunferencia se denomina *circunferencia focal* de la hipérbola relativa al foco  $F_2$ ).*

De los puntos de la hipérbola que cumplen  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$  diremos que son de la *zona central* y los que cumplen  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$ , de la *zona focal*. Los puntos de la zona focal también se llaman *interiores* a la hipérbola y los de la zona central, *exteriores*. La zona focal se divide en la *zona del foco*  $(c, 0)$ , cuyos puntos satisfacen  $x > 1$ , y la *zona del foco*  $(-c, 0)$ , cuyos puntos satisfacen  $x < 0$ .

**E.4.8.** Probar que un punto  $P$  de la hipérbola de foco  $F_1$  y  $F_2$  es interior si  $|PF_1 - PF_2| > 2a$  y exterior si  $|PF_1 - PF_2| < 2a$ . Demostrar también que los puntos de una tangente distintos del punto de contacto son exteriores a la hipérbola.

**E.4.9.** Probar que una recta no tangente corta una hipérbola si y solo si contiene puntos interiores de esta. Probar también que si este es el caso, entonces existen exactamente uno o dos puntos de intersección según la recta sea o no asintótica.

**E.4.10.** Dados dos puntos  $F_1 = (\alpha_1, \beta_1)$  y  $F_2 = (\alpha_2, \beta_2)$  (coordenadas cartesianas rectangulares), y un número real positivo  $a$ , explicar cómo se puede encontrar, respecto a la misma referencia, la ecuación de la hipérbola de foco  $F_1, F_2$  y diámetro principal  $2a$ .

## Parábola

Si  $\gamma = \alpha$ , la cónica se denomina una *parábola*. En este caso, hay una única generatriz del cono paralela a  $\Pi$ : la única generatriz contenida en el plano paralelo a  $\Pi$  por el vértice del cono. Los puntos de incidencia con las otras generatrices pertenecen todos a una misma hoja del cono (v. figura 4.7).

En este caso, solo tenemos una esfera,  $\Sigma$ , tangente al plano  $\Pi$  e inscrita en el cono. Si ponemos  $F$  para denotar el punto de contacto de  $\Sigma$  con  $\Pi$  (diremos que  $F$  es el *foco* de la parábola) y  $L$  para indicar la recta de intersección del plano  $\Pi$  con el plano  $\Pi'$  que

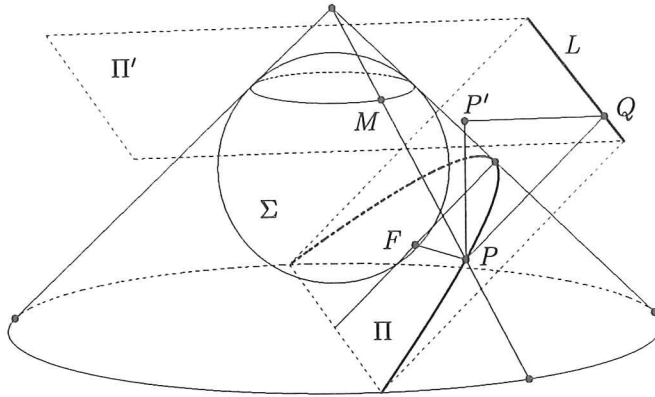


Figura 4.7: Parábola

contiene la circunferencia de contacto del cono con  $\Sigma$  (la recta  $L$  se denomina *directriz* de la cónica relativa a  $F$ ), entonces

4.5. Los puntos  $P$  de la parábola son los puntos del plano  $\Pi$  que cumplen

$$d(P, F) = d(P, L) \tag{4.10}$$

**Demostración:** Con las notaciones de la figura 4.7,  $PF = PM$ , ya que  $PF$  y  $PM$  son dos tangentes a  $\Sigma$  desde  $P$ . Si  $P'$  es la proyección ortogonal de  $P$  sobre  $\Pi'$ ,  $\widehat{MPP'} = \alpha$  y, por tanto,  $PM = PP' / \cos(\alpha)$ . También tenemos, si  $Q$  es la proyección de  $P$  (y de  $P'$ ) sobre  $L$ , que  $\widehat{QPP'} = \alpha$ , ya que, como consecuencia de la definición de parábola,  $PQ$  es paralela a una generatriz. Por tanto,  $PQ = PP' / \cos(\alpha)$ , que como hemos visto es igual a  $PF$ . Dado que  $PQ = d(P, L)$ , tenemos  $d(P, L) = PQ = PF$ , como se trataba de probar.  $\square$

Tomando, en el plano  $\Pi$ , un sistema de coordenadas de manera que el eje  $Ox$  sea la perpendicular a  $L$  por  $F$  y que el origen sea el punto medio del segmento de extremos  $F$  y la proyección  $F'$  de  $F$  sobre  $L$  (v. figura 4.8), la ecuación  $d(P, F) = d(P, L)$  se convierte en  $(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$ , donde  $P = (x, y)$  y donde  $p$  es la distancia de  $F$  a  $L$  (diremos que  $p$  es el *parámetro focal* de la parábola). Ahora bien, la última relación es equivalente a

$$y^2 = 2px \tag{4.11}$$

que denominaremos *ecuación canónica* de la parábola. El punto  $O = (0, 0)$  está a distancia mínima del foco  $F$  y se denomina el *vértice* de la parábola. El eje  $Ox$  es el único eje de simetría, y lo denominaremos *eje* de la parábola. Como hemos dicho antes, el eje es la recta por el foco perpendicular a la directriz, y está claro que su intersección con la parábola es el vértice.

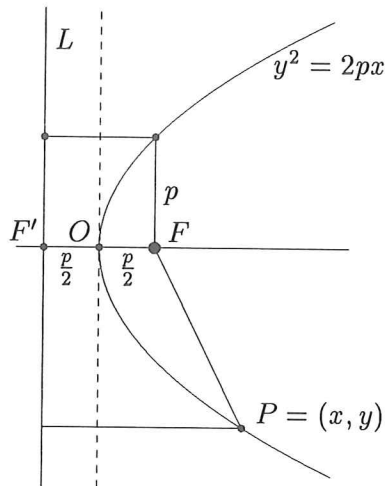


Figura 4.8: Parábola

**E.4.11.** Si  $p$  es un número real positivo, y  $(x_0, y_0)$  un punto del plano euclidiano, explicar qué representa cada una de las ecuaciones

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad \text{y} \quad (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

**E.4.12.** Demostrar que dos parábolas siempre son semejantes.

**E.4.13.** Demostrar que dos elipses (hipérbolas) son semejantes si y solo si tienen la misma excentricidad.

**E.4.14.** Probar que las ecuaciones  $y = t$ ,  $x = t^2/2p$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , dan una parametrización de la parábola [4.11], es decir, que la aplicación  $t \mapsto (t^2/2p, t)$  establece una biyección entre  $\mathbb{R}$  y el conjunto de los puntos que satisfacen [4.11].

Si  $P = (x_0, y_0)$  es un punto de la parábola [4.11], y razonamos del mismo modo que para la elipse y la hipérbola, se obtiene que la recta

$$y_0x - px = px_0 \tag{4.12}$$

pasa por  $P$ , no es paralela al eje, y corta la parábola exactamente en  $P$ , mientras que cualquier otra recta, salvo la paralela al eje, corta la parábola en el punto  $P$  y otro punto distinto de  $P$  (como veremos posteriormente, en el ejemplo 4.7c, la recta por  $P$  paralela al eje también contiene otro punto de la parábola: el punto del infinito del eje). Así pues, diremos que [4.12] es la *tangente* a la parábola en el punto  $P$ , y que  $P$  es el *punto de contacto* de ambas.

**4.6 Proposición** (Propiedad focal de la parábola). *Si  $P$  es un punto de la parábola [4.11], y  $Q$  su proyección sobre la directriz, la tangente en el punto  $P$  es la bisectriz del ángulo  $\widehat{FPQ}$ , donde  $F$  denota el foco de la parábola (v. figura 4.9)*

**Demostración:** Sea  $t$  la bisectriz exterior del ángulo  $\widehat{FPQ}$ . Es suficiente ver que si  $P'$  es un punto de  $t$  distinto de  $P$ , entonces  $P'$  no pertenece a la parábola  $[\diamond]$ . Sea  $Q'$  la proyección de  $P'$  sobre la directriz de la parábola. Como  $PF = PQ$ , por definición de parábola,  $F$  y  $Q$  son simétricos respecto a  $t$ . Por tanto,  $P'F = P'Q > P'Q' = d(P', L)$ , y esto prueba lo que queríamos:  $P'$  no pertenece a la parábola.  $\square$

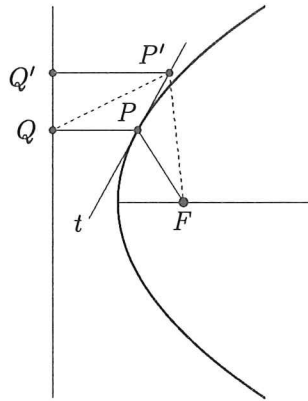


Figura 4.9: Propiedad focal de la parábola

La propiedad focal de la parábola es la base del uso de esta figura en el diseño de proyectores y antenas. La razón es que el resultado de «reflejar en la parábola un rayo  $FP$ » (figura 4.10), donde  $F$  es el foco y  $P$  un punto cualquiera de la parábola, es «el rayo por  $P$  paralelo al eje de la parábola»  $[\diamond]$ .

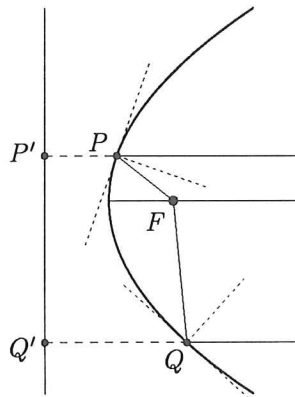


Figura 4.10: Aplicación de la propiedad focal de la parábola

Un punto  $P'$  tal que  $d(P', F) < d(P', L)$  ( $d(P', F) > d(P', L)$ ) se denomina *interior* (*exterior*) a la parábola. El foco es un punto interior. Por otro lado, la prueba anterior muestra que los puntos de una tangente distintos del punto de contacto son todos

exteriores. También muestra que la directriz es el lugar geométrico del simétrico del foco respecto a una tangente variable, o bien que las mediatrices de los segmentos  $[QF]$  son, cuando  $Q$  recorre los puntos de la directriz, las tangentes de la parábola.

**E.4.15.** Dibujar una recta y un punto no incidente con ella en un hoja de papel transparente. Doblar la hoja repetidamente y de manera que la parte doblada de la recta pase por dicho punto. Describir el resultado obtenido.

**E.4.16.** Probar que una recta corta una parábola si y solo si contiene puntos interiores. Si este es el caso, probar también que la recta corta a la parábola en exactamente uno o dos puntos según sea o no paralela al eje de la parábola.

**E.4.17.** Dado un punto  $F = (\alpha, \beta)$  exterior a la recta  $L$  definida por la ecuación  $ax + by + c = 0$  (coordenadas cartesianas rectangulares), explicar cómo podemos obtener, en el mismo sistema de coordenadas, la ecuación de la parábola de foco  $F$  y directriz  $L$ .

### Casos degenerados

Consideremos ahora la situación en que el plano  $\Pi$  pasa por el vértice del cono.

Si  $\gamma < \alpha$ , obtenemos un *par de rectas no paralelas*. Escogiendo una referencia de  $\Pi$  con origen el vértice del cono y con ejes las bisectrices del par de rectas, las ecuaciones de este par adoptan la forma  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ , siendo  $a$  y  $b$  números reales positivos (comparar con las asíntotas de una hipérbola), o bien  $y^2 = \pm k^2 x^2$  (con  $k = b/a$ ).

En el límite, cuando  $\gamma$  tiende a  $\alpha$ , las dos rectas se confunden. Analíticamente, este límite se puede obtener haciendo que la pendiente  $\pm k$  de las dos rectas tienda a cero (por ejemplo), con lo cual la ecuación cuadrática  $y^2 = k^2 x^2$  da lugar a una ecuación de la forma  $y^2 = 0$ . Diremos, por tanto, que estamos en presencia de una *recta doble*.

Si  $\gamma > \alpha$ , la intersección se reduce al vértice, pero es fácil ver que desde el punto de vista analítico se trata de un *par de rectas imaginarias conjugadas*, es decir, dos rectas de la forma  $y = \pm ikx$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Notemos también que cuando el vértice del cono se aleja al infinito, el cono se convierte en un cilindro circular recto y que si lo cortamos por un plano paralelo al eje se obtienen un *par de rectas paralelas*, posiblemente confundidas o imaginarias.

### Nota sobre la historia y los usos de las cónicas

Menecmo (IV aC) inició el estudio de las cónicas en su intento de resolver, con regla y compás, el problema de la «duplicación del cubo». Euclides (IV aC) dedicó al tema cuatro libros, desgraciadamente perdidos, y Apolonio de Pérgamo (III aC), escribió ocho notables libros que, excepto uno, se han conservado. Se cree que los tres primeros recogían la substancia de los cuatro libros de Euclides citados.

A partir del Renacimiento se interesaron por el tema numerosos matemáticos, entre los cuales cabe destacar Descartes, Pascal, Newton, Euler, Monge y, ya en el siglo pasado, Poncelet, Steiner y Chasles, entre otros muchos. Esto indica el interés constante que por estas figuras ha habido durante cerca de dos mil quinientos años.

Más allá de sus usos artísticos, arquitectónicos o en la ingeniería, y pasando por alto la ubicuidad de las circunferencias, las cónicas han aparecido en la descripción de importantes leyes de la naturaleza. Veamos algunos ejemplos.

Las parábolas aparecen como las trayectorias de los proyectiles (Galileo) y también en el diseño de proyectores y antenas. Por otro lado, los planetas describen una elipse con el Sol ocupando uno de sus focos (primera ley de Kepler). Los cometas periódicos describen también órbitas elípticas, mientras que los no periódicos describen una rama de hipérbola o una parábola, según que su velocidad en alejarse indefinidamente se mantenga superior a una constante positiva o tienda a cero, siempre con el Sol situado en el foco (Newton). Finalmente, de acuerdo con cálculos basados en las leyes de Newton y de Coulomb, y confirmados por los experimentos de Rutherford a principios de siglo, la trayectoria de una partícula  $\alpha$  cuando se dispara sobre un núcleo atómico es una rama de hipérbola, con el núcleo ocupando el foco correspondiente (Rutherford).

## 4.1 Cónicas del plano euclidiano

En la sección 4.0, hemos discutido las ecuaciones canónicas de las cónicas, tanto las no degeneradas (elipse, hipérbola y parábola) como las degeneradas (distintos tipos de pares de rectas). Si tomamos una referencia arbitraria en lugar de una referencia en la cual la ecuación sea canónica, entonces la ecuación adoptará la forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad \text{para ciertos } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \quad [4.13]$$

(v. ejercicios E.4.4, E.4.10 y E.4.17).

**E.4.18.** Comprobar que si hacemos un cambio afín de coordenadas cualquiera, la ecuación 4.13 se transforma en una ecuación del mismo tipo respecto a las nuevas coordenadas.

No todas las ecuaciones que tienen la forma [4.13] representan una cónica en el sentido de la sección 4.0: la ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ , por ejemplo, no tiene soluciones reales. Afortunadamente, este tipo de ecuaciones son las únicas excepciones y la tarea más importante de esta sección será establecer este hecho. En otras palabras, veremos que, dada una ecuación de la forma [4.13], se puede encontrar una referencia rectangular respecto a la cual la ecuación se convierta en la ecuación canónica de una cónica, posiblemente degenerada, o una ecuación de la forma  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ . A esta última la denominaremos, por analogía con la ecuación de la elipse, una *elipse imaginaria*.

### Cónicas analíticas

Dado un polinomio cuadrático real

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \quad [4.14]$$

en las coordenadas rectangulares  $(x, y)$ , diremos que la ecuación  $q(x, y) = 0$  define una *cónica analítica*, que denotaremos  $C_q$ . Conviene decir que aquí convenimos que la definición de *cuadrático* incluye la condición de que la *parte principal* de  $q(x, y)$ ,  $q_2(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ , no es idénticamente nula.

Un punto  $(\alpha, \beta)$  pertenece a la *cónica analítica*  $C_q$  si y solo si  $q(\alpha, \beta) = 0$ . El punto se llama *real* si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , e *imaginario* si  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , con  $\alpha$  o  $\beta$  imaginario (es decir, no real). Si  $(\alpha, \beta)$  es un punto imaginario, diremos que  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  es su *punto conjugado*. Dado que el polinomio  $q(x, y)$  es real,  $C_q$  contiene, con cada uno de sus puntos imaginarios, su conjugado  $[\diamond]$ .

Si  $(x', y')$  es otro sistema de coordenadas rectangulares y

$$q'(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'$$

es un polinomio cuadrático en  $(x', y')$ , diremos que  $q(x, y) = 0$  y  $q'(x', y') = 0$  definen la *misma cónica analítica* si y solo si existe un número real no nulo  $\rho$  tal que

$$q'(x', y') = \rho q(x, y) \quad [4.15]$$

donde consideramos  $q(x, y)$  como el polinomio en  $(x', y')$  que se obtiene substituyendo  $(x, y)$  por las fórmulas del cambio de las coordenadas  $(x, y)$  a las coordenadas  $(x', y')$ . En particular, tenemos que dos polinomios  $q(x, y)$  y  $q'(x, y)$  en las mismas coordenadas rectangulares definen la misma cónica si y solo si existe un número real no nulo  $\rho$  tal que  $q'(x, y) = \rho q(x, y)$ .

**E. 4.19.** Sean  $q(x, y)$  y  $q'(x', y')$  polinomios cuadráticos en las coordenadas rectangulares  $(x, y)$  y  $(x', y')$ , respectivamente. Sea  $P$  un punto y supongamos que  $(\alpha, \beta)$  y  $(\alpha', \beta')$  son las coordenadas de  $P$  relativas a las dos referencias. Comprobar que si las ecuaciones  $q(x, y) = 0$  y  $q'(x', y') = 0$  definen la misma cónica analítica, entonces el punto  $(\alpha, \beta)$  pertenece a  $C_q$  si y solo si el punto  $(\alpha', \beta')$  pertenece a  $C_{q'}$ .

Consideremos la cónica analítica  $C_q$  definida por la ecuación

$$q(x, y) = 0 \quad [4.16]$$

donde  $q(x, y)$  es el polinomio cuadrático [4.14]. Si  $(X, Y, Z)$  son las correspondientes coordenadas proyectivas, de manera que  $x = X/Z$  y  $y = Y/Z$ , diremos que la ecuación

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2 = 0 \quad [4.17]$$

define la *cónica proyectiva*  $\overline{C}_q$  asociada a la cónica  $C_q$ . También diremos que un punto  $[\xi, \eta, \zeta]$  pertenece a  $\overline{C}_q$  si y solo si  $(\xi, \eta, \zeta)$  satisface la ecuación 4.17. La noción de punto real (imaginario) de la cónica proyectiva  $\overline{C}_q$  y la noción de punto conjugado de un punto imaginario se definen de manera semejante a como hemos definido estas nociones para la cónica analítica  $C_q$ .

**E.4.20.** Verificar que un punto propio  $[\alpha, \beta, 1]$  (real o imaginario) pertenece a  $\overline{C}_q$  si y solo si  $(\alpha, \beta)$  pertenece a  $C_q$ .

Notemos que la ecuación [4.17] determina la ecuación [4.16] haciendo la substitución  $[X, Y, Z] \rightarrow [x, y, 1]$ .

Los *puntos del infinito* de la cónica analítica  $C_q$  son, por definición, los puntos de la cónica proyectiva  $\overline{C}_q$  que tienen la forma  $[X, Y, 0]$ , es decir, los puntos  $[X, Y, 0]$  tales que

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = 0 \quad [4.18]$$

A esta ecuación la denominaremos *ecuación de los puntos del infinito* de la cónica [4.16] y también *restricción al infinito* de la cónica proyectiva [4.17]. Está claro que

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = q_2(X, Y)$$

donde  $q_2$  es la parte principal de  $q$ .

**4.7 Ejemplos.** a) La restricción al infinito de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  es  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ , y esta ecuación define el par de puntos imaginarios conjugados  $[a, \pm bi, 0]$ .

b) En el caso de la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , la ecuación de los puntos del infinito,  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$ , define los puntos reales  $[a, \pm b, 0]$ , es decir, los puntos del infinito de las asíntotas. Este hecho concuerda con la descripción geométrica que hemos hecho en la sección 4.0: las asíntotas eran las rectas por el centro de la cónica paralelas a las dos generatrices del cono que son paralelas al plano  $\Pi$  y, visto así, está claro que los puntos del infinito de las asíntotas pertenecen al cierre proyectivo de  $\Pi$ . Observemos también que mediante los puntos del infinito de la hipérbola podemos explicar con más precisión el comportamiento, explicado en la pág. 241, de las intersecciones con la hipérbola de una recta variable por uno de sus puntos  $P$ : una tal recta siempre corta la hipérbola en  $P$  y otro punto  $P'$ , siempre que interpretemos que  $P'$  coincide con  $P$  precisamente cuando la recta en cuestión es la tangente en  $P$  y que admitamos que  $P'$  es el punto del infinito de la asíntota que corresponda cuando la recta es asíntótica.

c) La restricción al infinito de la parábola  $y^2 = 2px$  es  $Y^2 = 0$ , relación que solo es satisfecha por el punto  $[1, 0, 0]$ , es decir, por el punto del infinito del eje. Por analogía con el comportamiento de la intersección de una recta y una cónica que hemos visto en la sección 4.0, diremos que la recta del infinito es *tangente* a la parábola y que el punto de contacto es  $[1, 0, 0]$ . También es costumbre decir que la intersección de la

parábola con la recta del infinito es un punto «doble» (a causa del exponente 2 de la  $Y$ ). Para una discusión más detallada de esta terminología, v. el apartado «Tangencia y polaridad» de la sección 4.2, pág. 267; v., en particular, el ejercicio E.4.32.

### Matriz y matriz principal de una cónica

A una matriz simétrica real

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad [4.19]$$

le podemos asignar el polinomio  $q^{\bar{A}}(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$ . Si la *matriz principal de  $\bar{A}$* , esto es, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad [4.20]$$

es no nula, el polinomio  $q^{\bar{A}}(x, y)$  define una cónica analítica  $C_{q^{\bar{A}}}$ : diremos que esta cónica analítica es la *determinada por la matriz  $\bar{A}$*  referida a las coordenadas  $(x, y)$ . Notemos que si  $\rho$  es un número real no nulo,  $\bar{A}$  y  $\rho\bar{A}$  determinan, referidas a un mismo sistema de coordenadas, la misma cónica analítica. Notemos también que la parte principal del polinomio  $q^{\bar{A}}(x, y)$  es el polinomio  $q^A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  correspondiente a la parte principal de  $\bar{A}$ .

Recíprocamente, dada la cónica analítica definida por la ecuación [4.16], le podemos asociar la matriz simétrica real [4.19], donde ahora  $a, b, c, d, e, f$  son los coeficientes del polinomio  $q(x, y)$ . Puesto que esta matriz solo está definida salvo un factor escalar no nulo, pondremos  $[\bar{A}]$  para denotarla y diremos que es la *matriz de la cónica* relativa a las coordenadas  $(x, y)$ . Para poder hacer la distinción cuando nos haga falta, diremos que  $\bar{A}$  es la matriz de la ecuación [4.16]. La parte principal de esta matriz es la matriz  $A$ , donde  $A$  está formada con los coeficientes de la parte principal de  $q(x, y)$ . Observemos que podemos poner

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{c|c} A & \mathbf{w}^T \\ \hline \mathbf{w} & c \end{array} \right), \quad \mathbf{w} = (g, h) \quad [4.21]$$

**4.8 Lema.** Dada la matriz simétrica real [4.19], la cónica que determina, referida a las coordenadas  $(x, y)$ , es la definida por la ecuación

$$(x, y, 1)\bar{A}(x, y, 1)^T = 0$$

La cónica proyectiva asociada a esta cónica es la definida por la ecuación

$$(X, Y, Z)\bar{A}(X, Y, Z)^T = 0$$

donde  $(X, Y, Z)$  son las coordenadas proyectivas correspondientes a las coordenadas  $(x, y)$ , y su restricción al infinito viene dada por la ecuación

$$(X, Y)A(X, Y)^T = 0,$$

donde  $A$  es la matriz principal de  $\bar{A}$ .

**Demostración:** Es un cálculo elemental comprobar que

$$(X, Y)A(X, Y)^T = aX^2 + 2bXY + cY^2 \quad \text{y} \quad [4.22]$$

$$(X, Y, Z)\bar{A}(X, Y, Z)^T = aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2 \quad [4.23]$$

Visto que la segunda relación implica que

$$(x, y, 1)\bar{A}(x, y, 1)^T = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

la prueba de todas las afirmaciones es ahora inmediata.  $\square$

Por el lema anterior, la matriz  $\bar{A}$  de una cónica y su matriz principal,  $A$ , también se denominan *matriz proyectiva* y *matriz del infinito* de la cónica (relativamente a las coordenadas  $(x, y)$ ).

**4.9 Proposición.** Sean  $\bar{A}$  y  $\bar{A}'$  matrices simétricas reales de dimensión 3. Entonces, la cónica analítica definida por  $\bar{A}$ , referida a las coordenadas rectangulares  $(x, y)$ , coincide con la cónica analítica definida por la matriz  $\bar{A}'$ , referida a las coordenadas rectangulares  $(x', y')$ , si y solo si existe una matriz  $\bar{M}$  de la forma

$$\bar{M} = \left( \begin{array}{c|c} M & \mathbf{p} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right), \quad M \in O(2), \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

y un número real  $\rho$  no nulo, tales que

$$\bar{A}' = \rho \bar{M}^T \bar{A} \bar{M}$$

Si este es el caso, entonces también tenemos (ya que la matriz principal de  $\bar{M}^T \bar{A} \bar{M}$  es  $M^T A M$ , siendo  $A$  y  $A'$  las matrices principales de  $\bar{A}$  y  $\bar{A}'$ ), que

$$A' = \rho M^T A M$$

**Demostración:** Por el lema 4.8, la cónica analítica definida por  $\bar{A}$  es la definida por la ecuación  $q(x, y) = (x, y, 1)\bar{A}(x, y, 1)^T = 0$ . Análogamente, la cónica analítica definida por  $\bar{A}'$  es la definida por la ecuación  $q'(x', y') = (x', y', 1)\bar{A}'(x', y', 1)^T = 0$ . Por otro

lado, las coordenadas  $(x, y)$  y las coordenadas  $(x', y')$  están conectadas por una relación de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \quad M \in O(2), \quad r, s \in \mathbb{R}$$

y esta relación equivale a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{M} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde  $\overline{M}$  es la matriz obtenida a partir de  $M$  y  $\mathbf{p}$  según la expresión del enunciado. Así pues, el polinomio  $q(x, y)$ , considerado como polinomio en  $(x', y')$ , es igual a

$$(x', y', 1) \overline{M}^T \overline{A} \overline{M} (x', y', 1)^T$$

Ahora bien, este polinomio define la misma cónica que  $q'(x', y')$  si y solo si existe un número real no nulo  $\rho$  tal que

$$(x', y', 1) \overline{A}' (x', y', 1)^T = \rho (x', y', 1) \overline{M}^T \overline{A} \overline{M} (x', y', 1)^T$$

cualesquiera que sean  $x', y' \in \mathbb{R}$ . Pero esta condición es claramente equivalente a decir que  $\rho \overline{M}^T \overline{A} \overline{M} = \overline{A}'$ , como queríamos probar.  $\square$

### *Ecuaciones reducidas y canónicas*

Nos proponemos el problema de encontrar una referencia cartesiana rectangular respecto a la cual la ecuación de la cónica [4.16] adopte la forma más sencilla posible.

Este problema lo resolveremos haciendo sucesivas «reducciones», es decir, cambios de coordenadas escogidos de manera que, después de cada uno, la ecuación de la cónica sea el resultado de simplificar algún aspecto de la ecuación en la referencia precedente. En cualquier caso, el primer objetivo es ver que existe un cambio rectangular de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 \\ y &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 \end{aligned}$$

que transforma el polinomio  $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$  en un polinomio

$$q'(x', y') = q(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1, \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2)$$

que es de una de las formas siguientes:

$$a) \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \mu \quad b) \quad \lambda_1 x'^2 + 2ey' \quad c) \quad \lambda_1 x'^2 + \mu \quad [4.24]$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $e$  son números reales no nulos y  $\mu$  un número real arbitrario. A estas expresiones las denominaremos *formas reducidas*. Por razones que quedarán claras posteriormente, nos referiremos a estas formas diciendo que son de tipo *centrado*, *parabólico* y *de rectas paralelas*, respectivamente.

### Primera reducción

El primer paso consiste en diagonalizar la matriz  $A$ , es decir, en hacer un cambio tal que la nueva matriz del infinito,  $A' = M^T AM$ , sea diagonal. Como veremos a continuación, esto se puede conseguir haciendo un cambio  $(x, y)^T = M(x', y')^T$  con  $M$  ortogonal (un cambio, pues, que deja el origen fijo). Conviene reparar en que la prueba de este hecho nos da un procedimiento efectivo para encontrar el cambio de coordenadas en cuestión.

**4.10 Proposición.** Si  $A$  no es diagonal (es decir, si  $b \neq 0$ ) y definimos  $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  por la fórmula

$$\tan(2\alpha) = \frac{2b}{a-c}$$

(con el convenio que  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$  si  $a = c$ ) y ponemos  $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ , entonces  $A' = M^T AM$  es diagonal.

**Demostración:** Un cálculo fácil nos muestra que el elemento de la posición (1, 2) de la matriz  $M^T AM$  es

$$b \cos(2\alpha) - \frac{1}{2}(a-c)\sin(2\alpha)$$

y la anulación de este elemento equivale a la relación que hemos usado para definir  $\alpha$ . Como  $M^T AM$  es una matriz simétrica, también se anula el elemento de la posición (2, 1) y, por tanto,  $M^T AM$  es una matriz diagonal.  $\square$

**4.11 Corolario.** Los valores propios de  $A$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , son reales y  $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ .

**Demostración:** Dado que  $M$  es ortogonal,  $M^T = M^{-1}$ . Por tanto,  $A' = M^{-1}AM$  es una matriz conjugada de  $A$ . De esto resulta que  $A$  y  $A'$  tienen los mismos valores propios. Como  $A'$  es real y diagonal, esto termina la prueba.  $\square$

Los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de  $A$  se obtienen resolviendo la ecuación  $\det(\lambda I_2 - A) = 0$ , es decir,

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

(esta ecuación se conoce con el nombre de *ecuación secular* de  $A$ ). Así pues,

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \quad [4.25]$$

ya que  $(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2$ . Esta expresión confirma que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales.

## Segunda reducción

La proposición 4.10 nos permite reducir la ecuación de la cónica a una de la forma

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad [4.26]$$

Con relación a esta ecuación, hay dos situaciones a considerar:  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$  y  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ . Si se da este segundo caso, hay un valor propio nulo y uno de no nulo (recordemos que hemos supuesto  $A \neq 0$ ). Intercambiando los ejes de la referencia si hiciera falta, siempre podemos suponer que  $\lambda_1 \neq 0$  y  $\lambda_2 = 0$ . Además, cambiando la ecuación de signo si fuese  $\lambda_1 < 0$ , podemos suponer, en cualquier caso, que  $\lambda_1 > 0$ . En resumen, supondremos que en la ecuación [4.26] se cumple  $\lambda_1 > 0$  y, de esta manera, los dos casos a los cuales hemos aludido se corresponden a las condiciones  $\lambda_2 \neq 0$  y  $\lambda_2 = 0$ , respectivamente.

En este punto, la herramienta básica para seguir el proceso de reducción es la *compleción del cuadrado*, es decir, la identidad

$$\lambda x^2 + 2dx = \lambda x'^2 + k, \quad \text{con } x = x' - d/\lambda \text{ y } k = -d^2/\lambda \quad [\diamond]$$

Si se trata del caso  $\lambda_2 \neq 0$ , entonces dos compleciones del cuadrado, y el cambio de coordenadas correspondiente (el cambio de origen  $x = x' - d/\lambda_1$ ,  $y = y' - e/\lambda_2$ ), nos permiten suponer que  $d = e = 0$ , con lo cual obtenemos una ecuación reducida de tipo centrado

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \mu = 0$$

Y si se trata del caso  $\lambda_2 = 0$ , entonces podemos hacer una compleción del cuadrado, con lo cual llegamos a una ecuación sin término lineal en  $x$ . Es decir, podemos suponer que la ecuación [4.26] es

$$\lambda_1 x^2 + 2ey + f = 0$$

Si  $e = 0$ , esta ecuación es de la forma

$$\lambda_1 x'^2 + \mu = 0$$

que es una ecuación reducida de rectas paralelas, y si  $e \neq 0$ , un cambio de origen de la forma  $y = y' - \frac{f}{2e}$  nos permite suponer que  $f = 0$ , con lo cual se obtiene una ecuación de la forma

$$\lambda_1 x'^2 + 2ey' = 0 \quad [4.27]$$

que es una ecuación reducida de tipo parabólico.

### Ecuaciones canónicas

Empecemos con una reducida de tipo centrado (v. 4.24a) y procedamos a discutir los distintos casos posibles. Si  $\mu \neq 0$ , poniendo

$$a = \sqrt{\frac{|\mu|}{\lambda_1}} \quad y \quad b = \sqrt{\frac{|\mu|}{|\lambda_2|}}$$

obtenemos que la ecuación es equivalente a una de las tres formas siguientes [ $\diamond$ ]:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La primera y la tercera son las ecuaciones canónicas de una elipse y de una hipérbola, respectivamente, con semiejes  $a$  y  $b$ . A la segunda, que no tiene puntos reales, la denominaremos *elipse imaginaria*. Notemos que no hemos considerado el caso  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ , que se origina cuando  $\lambda_2 < 0$  y  $\mu > 0$ , porque es equivalente a  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ , que es una hipérbola de semieje principal  $b$  (en la dirección  $Oy$ ) y semieje secundario  $a$  (en la dirección  $Ox$ ).

Si  $\mu = 0$ , entonces podemos poner

$$a = \sqrt{1/|\lambda_1|}, \quad b = \sqrt{1/|\lambda_2|}$$

y obtenemos que la ecuación [4.24a] adopta una de las dos formas siguientes:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

La segunda nos da dos rectas reales, y la primera dos rectas imaginarias conjugadas.

En cuanto a la reducida de tipo parabólico,  $\lambda_1 x^2 + 2ey = 0$ , está claro que es equivalente a la ecuación  $x^2 = 2py$ , con  $p = e/\lambda_1$ . Como  $py = (-p)(-y)$ , siempre podemos suponer que  $p > 0$  (si no, se puede cambiar la orientación del eje  $Oy$ ). Vemos, pues, que se trata de una parábola con parámetro focal  $p$  cuyo eje es  $Oy$ .

Finalmente, la reducida de tipo  $\lambda_1 x^2 + \mu = 0$  es equivalente, poniendo  $k = \sqrt{|\mu|/|\lambda_1|}$  cuando  $\mu \neq 0$ , a una de las tres ecuaciones siguientes:

$$x^2 = k^2, \quad x^2 = 0, \quad x^2 = -k^2 \quad (k > 0)$$

La primera nos proporciona dos rectas paralelas ( $x = \pm k$ , donde  $k$  es la semidistancia entre las dos rectas) y la segunda dos rectas coincidentes. De la tercera, que equivale a las ecuaciones  $x = \pm ik$ , diremos que define dos rectas paralelas imaginarias conjugadas.

**Nota.** Puesto que las cónicas analíticas reales coinciden con las cónicas definidas geoméricamente, en adelante, en vez de *cónicas analíticas*, las llamaremos simplemente *cónicas*. De esta manera, el significado del término *cónica* queda aumentado hasta incluir, más allá de las cónicas en el sentido de la sección 4.0, las elipses analíticas imaginarias.

### Cónicas centradas

Diremos que una cónica es *centrada* si  $\det(A) \neq 0$ . Según lo que ya hemos dicho en este apartado, son las cónicas que dan lugar a reducidas de tipo centrado. El motivo de esta nomenclatura es que las cónicas centradas tienen un único centro de simetría:

**4.12 Proposición.** *Supongamos que la cónica [4.16] es centrada. Entonces existe un único punto  $(x_0, y_0)$  respecto al cual la cónica es simétrica. Además, este punto viene dado por la expresión  $(x_0, y_0) = -(d, e)A^{-1}$ .*

**Demostración:** Supongamos que el punto  $(x_0, y_0)$  es un centro de simetría de la cónica [4.16]. Si hacemos el cambio de origen  $x = x' + x_0$ ,  $y = y' + y_0$ , entonces la cónica, referida a las coordenadas  $(x', y')$ , debe ser simétrica respecto al origen. Esto significa que la ecuación

$$(x' + x_0, y' + y_0)A(x' + x_0, y' + y_0)^T + 2(d, e)(x' + x_0, y' + y_0)^T + f = 0$$

debe ser invariante por la simetría central  $(x', y') \mapsto (-x', -y')$ , es decir, que no debe contener términos lineales en  $x'$  y  $y'$ . Puesto que los términos en lineales en  $x'$  y  $y'$  de la ecuación anterior resultan ser

$$2(x_0, y_0)A(x', y')^T + 2(d, e)(x', y')^T \quad [4.28]$$

vemos que la condición para que  $(x_0, y_0)$  sea centro de simetría es la ecuación matricial

$$(x_0, y_0)A + (d, e) = 0 \quad [4.29]$$

Pero como  $A$  es una matriz invertible,  $-(d, e)A^{-1}$  es su única solución.  $\square$

El único centro de simetría,  $-(d, e)A^{-1}$ , de una cónica centrada se denomina *centro* de la cónica. Notemos que la ecuación  $(x_0, y_0)A + (d, e) = 0$ , que determina el centro, se puede escribir, separando las dos componentes, como el sistema

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + d &= 0 \\ bx_0 + cy_0 + e &= 0 \end{aligned} \quad [4.29']$$

Estas ecuaciones, que se denominan *ecuaciones del centro*, se pueden recordar más fácilmente si observamos que  $ax + by + d$  y  $bx + cy + e$  son (la mitad de) las derivadas parciales de la ecuación de la cónica respecto a  $x$  y  $y$ , respectivamente.

**Nota: centros de una cónica.** De la discusión anterior queda claro que las soluciones  $(x, y)$  del sistema de ecuaciones lineales  $(x, y)A + (d, e) = 0$  son las coordenadas de los *centros* de la cónica, es decir, de los puntos cuya simetría central deja la cónica invariante. Así pues, existen tres posibilidades para el conjunto de centros de una cónica: es vacío si el sistema es incompatible (como en el caso de la parábola), se reduce a un punto si la cónica es centrada, y es una recta si el sistema es compatible indeterminado (como en el caso de dos rectas paralelas).

### *Definición alternativa de las cónicas no degeneradas reales*

En el apartado «Parábola» de la sección 4.0, hemos visto que la parábola es el lugar geométrico de los puntos  $P$  que cumplen la condición [4.10]. El argumento que hemos usado para demostrar este hecho se puede adaptar al caso de una elipse (suponiendo que no es circunferencia), o al caso de una hipérbola, para demostrar que, en cualquiera de los dos casos, *la cónica es el lugar geométrico de los puntos  $P$  tales que*

$$d(P, F) = \epsilon \cdot d(P, L) \quad [4.30]$$

donde, con notaciones de la sección 4.0,  $\epsilon = \cos(\gamma)/\cos(\alpha)$ , y donde  $L$ , la *directriz del foco  $F$* , se define como en el caso de la parábola (en la adaptación del razonamiento del caso de la parábola, pág. 243, la relación  $PQ = PP'/\cos(\alpha)$  se ha de substituir por  $PQ = PP'/\cos(\gamma)$ , ya que  $\gamma$  es el ángulo formado por  $PP'$  y  $\Pi$ ).

Ahora demostraremos la afirmación anterior por medios analíticos, a modo de ilustración de los métodos del apartado anterior. Una ventaja de este procedimiento es que quedará establecido, a la vez, que *la constante  $\epsilon$  coincide, en el caso de la elipse y la hipérbola, con la excentricidad*. Como  $\epsilon = 1$  en el caso de la parábola, en adelante consideraremos que la parábola tiene excentricidad 1.

**4.13 Proposición.** *Sea  $e$  un número real positivo. Sean, en un plano euclidiano,  $L$  una recta y  $F$  un punto exterior a  $L$ . Entonces, el lugar geométrico de los puntos  $P$  tales que*

$$d(P, F)/d(P, L) = e \quad [4.31]$$

*es una elipse, una parábola o una de hipérbola según  $e < 1$ ,  $e = 1$  o  $e > 1$ . En todos los casos,  $F$  es un foco, la recta por  $F$  perpendicular a  $L$  es el eje principal y  $e$  es la excentricidad.*

**Demostración:** Sea  $O$  el pie de la perpendicular a  $L$  por el punto  $F$  (figura 4.11) y consideremos una referencia rectangular con origen  $O$  y ejes  $OF$  y  $L$ . El eje  $Ox$ , pues, coincide con la perpendicular a  $L$  por  $F$ . También tenemos que  $F = (p, 0)$ , donde  $p$  es la distancia de  $F$  a  $L$  (lo llamaremos *parámetro focal*).

Si  $P = (x, y)$ , la condición  $d(P, F)/d(P, L) = e$  es equivalente a la relación

$$(x - p)^2 + y^2 = e^2 x^2$$

es decir, a

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0 \quad [4.32]$$

Si  $e < 1$ , entonces  $1 - e^2 > 0$  y por compleción del cuadrado obtenemos la ecuación

$$(1 - e^2) \left( x - \frac{p}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2}$$

la cual representa una elipse de centro el punto  $O' = (\frac{p}{1-e^2}, 0)$ , eje principal  $Ox$  y semiejes

$$a = \frac{ep}{1-e^2}, \quad b = \frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}$$

Un sencillo cálculo muestra que

$$c = \frac{e^2 p}{1-e^2} \quad [4.33]$$

de donde resulta que la excentricidad de la elipse es  $c/a = e$ . Finalmente,  $F$  es un foco de la elipse, ya que  $O' - (c, 0) = (p, 0) = F$ .

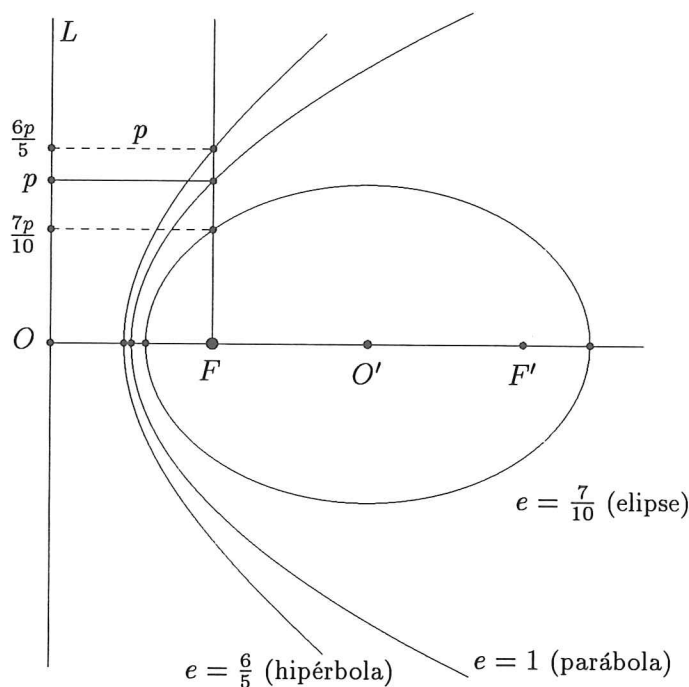


Figura 4.11: Definición alternativa de las cónicas

Si  $e = 1$ , la ecuación [4.32] del lugar geométrico se convierte en

$$y^2 - 2px + p^2 = 0, \quad \text{o bien} \quad y^2 = 2p(x - \frac{p}{2})$$

Se trata de una parábola para la cual el punto  $F = (p, 0)$  es el foco, la recta  $Oy$  es la directriz y la recta  $Ox$  el eje.

Falta discutir el caso  $e > 1$ . Cambiando de signo la ecuación [4.32], obtenemos la ecuación equivalente

$$(e^2 - 1)x^2 - y^2 + 2px - p^2 = 0$$

que, completando el cuadrado, se transforma en

$$(e^2 - 1) \left( x + \frac{p}{e^2 - 1} \right)^2 - y^2 = \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1} \quad [4.34]$$

Se trata, pues, de una hipérbola con centro en el punto  $(-\frac{p}{e^2-1}, 0)$  y semiejes

$$a = \frac{ep}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{ep}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

Por cálculo, se obtiene que

$$c = \frac{e^2 p}{e^2 - 1} \quad [4.35]$$

de donde resulta que  $F = (p, 0)$  es un foco y que  $e$  es la excentricidad.  $\square$

En una cónica de excentricidad  $e$  y parámetro focal  $p$ , el punto  $Q = (p, pe)$  (mismo sistema de coordenadas que en la figura 4.11) es de la cónica. Tiene la propiedad de que  $FQ$  es perpendicular al eje principal de la cónica, ya que  $Q - F = (0, pe)$ . Tenemos, además, que  $d(F, Q) = pe$ . Esta distancia se denomina *semilado* de la cónica y pondremos  $\lambda$  para denotarlo (el *lado*, o *latus rectum* en terminología tradicional, es  $2\lambda = 2pe$ , es decir,  $d(Q, Q')$ , donde  $Q' = (p, -pe)$ ).

Un inciso etimológico: los términos *elipse*, *hipérbola* y *parábola*, acuñados por Apolonio de Pérgamo, expresan las ideas de que «no llega», «supera» y «es comparable», respectivamente, en concordancia con las relaciones  $\lambda < p$ ,  $\lambda > p$  y  $\lambda = p$  (o  $e < 1$ ,  $e > 1$  y  $e = 1$ ) que las caracterizan.

**E. 4.21.** Comprobar que la expresión

$$\frac{\pi e^2 p^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad [4.36]$$

proporciona el área de una elipse de excentricidad  $e$  y parámetro focal  $p$ .

**E. 4.22.** Si  $\alpha$  es el ángulo que forman las asíntotas de una hipérbola de excentricidad  $e$ , mostrar que

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{e} \quad \text{y} \quad \cos(\alpha) = \frac{2}{e^2} - 1 \quad [4.37]$$

**E. 4.23.** Con las notaciones de la proposición 4.13 y las introducidas en su demostración, sabemos que el centro y los semiejes se expresan, tanto en el caso de la elipse como en el caso de la hipérbola, por las mismas fórmulas. Probar que sucede lo mismo con los focos, ya que uno es  $F = (p, 0)$  y el otro resulta ser

$$\left( p \frac{1 + e^2}{1 - e^2}, 0 \right)$$

**E.4.24.** Suponiendo  $0 < e \neq 1$ , mostrar que los vértices principales de una cónica de excentricidad  $e$  y parámetro focal  $p$  son los puntos  $(\frac{p}{1+e}, 0)$  y  $(\frac{p}{1-e}, 0)$  (valen las mismas fórmulas para la hipérbola que para la elipse). Observemos también que para  $e = 1$  el primer punto es el vértice de la parábola y que el segundo punto no está definido en el plano euclidiano.

**Nota: segundo vértice de la parábola.** Puesto que la expresión  $p/(1 - e)$  del ejercicio precedente tiende a infinito cuando  $e$  tiende a 1, el segundo punto tiende, en el plano proyectivo, al punto  $[1, 0, 0]$ . Esta observación muestra que  $O' = [1, 0, 0]$  se debería poder interpretar como el segundo vértice (impropio) de la parábola. Ahora bien, esto resulta de que el eje de la parábola, de ecuación homogénea  $Y = 0$ , corta la parábola  $Y^2 = 2pXZ$  (también escrita con coordenadas homogéneas) en los puntos  $[0, 0, 1]$  y  $[1, 0, 0]$ , el primero de los cuales es el vértice  $O$  de la parábola y el segundo el punto  $O'$ .

**E.4.25.** Explicar cómo se puede obtener la ecuación de la cónica de excentricidad  $e > 0$ , con un foco en  $F = (\alpha, \beta)$ , y de modo que la directriz de este foco sea la recta  $ax + by + c = 0$  (coordenadas cartesianas rectangulares).

**E.4.26.** Explicar cómo se puede encontrar la ecuación de la cónica de excentricidad  $e > 0$  con un foco en  $F = (\alpha, \beta)$ , con eje principal la recta  $ax + by + c = 0$ , y de manera que pase por el punto  $(x_0, y_0)$ .

### Parametrización polar de una cónica

Consideremos una cónica de excentricidad  $e > 0$ , foco  $F$  y directriz  $L$  (respecto a  $F$ ). Sea  $p = d(F, L) = d(F, F')$ , donde  $F'$  es la proyección de  $F$  sobre  $L$ . Dado un punto  $P$ , sea  $r = d(P, F)$  y  $\theta$  el ángulo formado por los vectores  $F - F'$  y  $P - F$ . Se dice que  $(r, \theta)$  son las *coordenadas polares* de  $P$  respecto al *origen*  $F$  y al *eje polar*  $F'F$  (con la orientación dada por el vector  $F - F'$ ). Entonces la relación  $d(P, F) = e \cdot d(P, L)$  equivale a

$$r = e(p + r \cos \theta)$$

es decir, a

$$r = \frac{\lambda}{1 - e \cos \theta} \quad [4.38]$$

(donde  $\lambda = pe$  es el semilado), que denominaremos *ecuación polar*, o *focal*, de la cónica.

En el caso de la hipérbola,  $r$  toma valores positivos cuando  $\cos \theta < 1/e$ , es decir, cuando  $\beta < \theta < 2\pi - \beta$ , donde ponemos  $\beta$  para denotar la mitad del ángulo entre las asíntotas (v. el ejercicio E.4.22). Cuando  $\theta$  varía en este intervalo, el punto correspondiente  $(r, \theta)$  recorre la rama de la hipérbola correspondiente al foco  $F$ . Análogamente,  $r$  toma valores negativos si  $0 \leq \theta < \beta$  o  $2\pi - \beta < \theta < 2\pi$ . En este caso, hace falta interpretar que el punto que corresponde a  $(r, \theta)$  es el simétrico respecto a  $F$  del punto que corresponde a  $(|r|, \theta)$  y así, cuando  $\theta$  varía en el intervalo citado, el punto  $(r, \theta)$  recorre la otra rama de la hipérbola.

**E.4.27.** Recíprocamente, probar que si  $(r, \theta)$  son coordenadas polares respecto al origen  $F$  y al eje polar  $\pi$ , y  $e, \lambda$  son números reales positivos, entonces la ecuación [4.38] representa una cónica de foco  $F$ , eje principal  $\pi$ , excentricidad  $e$  y semilado recto  $\lambda$ .

## 4.2 Invariantes euclidianos de las cónicas

En esta sección supondremos que  $\bar{A}$  y  $A$  son la matriz proyectiva y la matriz al infinito, referidas a coordenadas rectangulares  $(x, y)$ , de la ecuación de una cónica. Pondremos  $\bar{A}'$  y  $A'$  para denotar las matrices proyectiva y del infinito de la ecuación referida a un sistema de coordenadas  $(x', y')$ . Todos los sistemas de coordenadas se supondrán rectangulares.

### *Invariantes relativos y absolutos*

Pondremos

$$D_3 = \det(\bar{A}), \quad d_2 = \det(A) = ac - b^2 \quad \text{y} \quad d_1 = \text{Tr}(A) = a + c$$

Los símbolos  $D'_3, d'_2$  y  $d'_1$  se definen de manera análoga a partir de  $\bar{A}'$  y  $A'$ . Así pues,

$$\lambda^2 - d_1\lambda + d_2 = \det(\lambda I_2 - A)$$

es el polinomio característico de  $A$  y  $\lambda^2 - d'_1\lambda + d'_2$ , el de  $A'$ . Diremos que  $D_3$  es el *discriminante* de la ecuación de la cónica y que  $d_3$  es el *discriminante de la parte principal*.

$$4.14. \quad D'_3 = D_3, \quad d'_2 = d_2 \quad \text{y} \quad d'_1 = d_1.$$

**Demostración:** Existe una matriz  $\bar{M}$ , formada tal como se indica en la proposición 4.9, tal que

$$\bar{A}' = \bar{M}^T \bar{A} \bar{M} \quad \text{y} \quad A' = M^T A M = M^{-1} A M \quad [4.39]$$

Puesto que  $\det(\bar{M}) = \det(M) = \pm 1$ , la primera relación nos da que  $D'_3 = D_3$  y la segunda, que  $d'_2 = d_2$  y  $d'_1 = d_1$ .  $\square$

Conviene darse cuenta de que si, en lugar de  $\bar{A}$ , usáramos  $\rho\bar{A}$ ,  $\rho$  un escalar no nulo, para calcular  $\bar{A}'$ , entonces obtendríamos  $D'_3 = D_3(\rho\bar{A}) = \rho^3 D_3$ ,  $d'_2 = d_2(\rho\bar{A}) = \rho^2 d_2$  y  $d'_1 = d_1(\rho\bar{A}) = \rho d_1$ . De esto resulta que expresiones como  $D_3/d_1^3$  (suponiendo  $d_1 \neq 0$ ) o  $D_3^2/d_2^3$  (suponiendo  $d_2 \neq 0$ ) son independientes del sistema de coordenadas y de la ecuación que utilicemos para representar la cónica. Esta es la razón por la cual expresiones como las consideradas se denominan *invariantes euclidianos* de las cónicas.

En cuanto a las expresiones  $D_3$ ,  $d_2$  y  $d_1$ , observamos que relaciones como  $D_3 \neq 0$ ,  $d_2 \neq 0$  y  $d_1 \neq 0$  (o  $D_3 = 0$ ,  $d_2 = 0$  y  $d_1 = 0$ ) son también independientes de la ecuación de la cónica utilizada para verificarlas. Lo mismo sucede con relaciones como  $d_2 > 0$  o  $D_3 d_1 > 0$ . Estas propiedades hacen que, por abuso de lenguaje, a menudo nos refiramos a  $D_3$ ,  $d_2$  y  $d_1$  diciendo que son *invariantes euclidianos relativos*, o *semiinvariantes*, de las cónicas.

Por razones que se verán más tarde, introduciremos también el símbolo  $D_2$  para denotar la traza de segundo orden de  $\bar{A}$ ,  $Tr_2(\bar{A})$ , es decir, la suma de los tres subdeterminantes de orden 2 de  $\bar{A}$  cuya diagonal está sobre la diagonal de  $\bar{A}$ , o, equivalentemente, el coeficiente de grado 1 del polinomio característico de  $\bar{A}$ :

$$D_2 = ac + af + cf - (b^2 + d^2 + e^2)$$

El símbolo  $D'_2$  se define análogamente mediante la matriz  $\bar{A}'$ . Con las notaciones de la demostración de 4.14, tenemos:

**4.15 Proposición.** *Si las dos referencias tienen el mismo origen, entonces  $D'_2 = D_2$ .*

**Demostración:** Si las dos referencias tienen el mismo origen, la matriz  $\bar{M}$  que da el cambio de coordenadas proyectivas es tal que  $\mathbf{p} = 0$  (notaciones de la proposición 4.9). Así  $\bar{M}$  es ortogonal y la relación  $\bar{A}' = \bar{M}^T \bar{A} \bar{M} = \bar{M}^{-1} \bar{A} \bar{M}$  (seguimos con las notaciones de la prueba de 4.14) implica que  $D'_2 = D_2$ , ya que, por invariancia del polinomio característico bajo conjugación,  $Tr_2(\bar{A}) = Tr_2(\bar{M}^T \bar{A} \bar{M})$ .  $\square$

### *Clasificación de cónicas mediante invariantes*

Las *cónicas no degeneradas*, que por definición son las elipses (reales o imaginarias), las hipérbolas y las parábolas, se distinguen de las *cónicas degeneradas*, que por definición son los pares de rectas (reales o imaginarias, paralelas o no, distintas o coincidentes), porque las primeras cumplen  $D_3 \neq 0$  y las segundas,  $D_3 = 0$ . Para probar esta afirmación, basta calcular  $D'_3$  mediante las ecuaciones reducidas y aplicar 4.14.

El teorema siguiente muestra cómo podemos distinguir las distintas especies de cónicas mediante los invariantes.

**4.16 Teorema** (Clasificación euclidiana de cónicas). *La determinación de la especie de una cónica a partir de los invariantes se puede obtener mediante la tabla siguiente:*

Tabla 4.1: Algoritmo de clasificación de las cónicas euclidianas

---


$$\left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \\ D_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} d_2 > 0 \text{ elipse} \\ d_2 < 0 \text{ hipérbola} \\ d_2 = 0 \text{ parábola} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} D_3 d_1 < 0 \text{ real (circunferencia si } d_1^2 = 4d_2) \\ D_3 d_1 > 0 \text{ imaginaria} \end{array} \right. \\ \left. \left. \begin{array}{l} d_2 > 0 \text{ par de rectas imaginarias conjugadas} \\ d_2 < 0 \text{ par de rectas reales} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_2 < 0 \text{ par de rectas paralelas reales} \\ D_2 > 0 \text{ par de rectas paralelas imaginarias conjugadas} \\ D_2 = 0 \text{ par de rectas coincidentes} \end{array} \right. \end{array} \right.$$


---

**Demostración:** Supongamos primero que  $D_3 \neq 0$ .

Puesto que  $d_2 > 0$  equivale a  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , es decir, que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen el mismo signo, está claro que se trata de una elipse. Visto que, en términos de la ecuación reducida [4.24a],  $D'_3 = \lambda_1 \lambda_2 \mu = d'_2 \mu$ , y que  $d'_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ , resulta que  $D'_3 d'_1 < 0$  si  $\mu$  tiene signo contrario al de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  y que  $D'_3 d'_1 > 0$  si  $\mu$  tiene el mismo signo que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . El primer caso, que equivale a  $D_3 d_1 < 0$ , da una elipse real, y el segundo, que equivale a  $D_3 d_1 > 0$ , da una elipse imaginaria. En el caso real, una elipse es una circunferencia si y solo si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , y esta relación es claramente equivalente a la anulación del discriminante de  $\lambda^2 - d_1 \lambda + d_2$  (el polinomio característico de  $A$ ).

El caso  $d_2 < 0$  nos dice que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen signos contrarios y, por tanto, se trata necesariamente de una hipérbola. Dado que una hipérbola es equilátera si y solo si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son números reales con el mismo valor absoluto y de signos contrarios, está claro que quedan caracterizadas, entre las hipérbolas, por la relación  $d_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ .

Si  $d_2 = 0$ , entonces un valor propio es nulo, digamos  $\lambda_2 = 0$ , y puesto que la cónica es no degenerada, solo se puede tratar de una parábola (la ecuación reducida solo puede ser de la forma [4.24b]).

Consideremos ahora las cónicas degeneradas ( $D_3 = 0$ ).

Si  $d_2 \neq 0$ , la ecuación reducida es necesariamente del tipo [4.24a], con  $\mu = 0$ , lo cual da un par de rectas imaginarias conjugadas si  $d_2 > 0$  y un par de rectas reales si  $d_2 < 0$ .

Si, además, es  $d_2 = 0$ , entonces está claro que la ecuación reducida solo puede ser de la forma [4.24c]. Como  $D'_2 = \lambda_1 \mu = d'_1 \mu$ ,  $\mu/\lambda_1$  tiene el mismo signo que  $D'_2$ , con lo cual tenemos un par de rectas paralelas reales si  $D'_2 < 0$ , un par de rectas paralelas imaginarias conjugadas si  $D'_2 > 0$  y una recta doble si  $D'_2 = 0$ . El resultado se deduce ahora de que los cambios que pasan de la ecuación inicial a la reducida hacen que  $D'_2 = D_2$ . Esto es claro si no hay cambio de origen, por [4.15] y, por tanto, podemos

suponer que la ecuación inicial es de la forma  $\lambda_1 x^2 + 2dx + f = 0$  (si fuese  $e \neq 0$ , tendríamos una parábola). En tal situación, tenemos  $D_2 = -d^2 + \lambda_1 f$ . Si ahora completamos el cuadrado, obtenemos la ecuación  $\lambda_1 x'^2 + f' = 0$ , con  $f' = f - d^2/\lambda_1$  y  $x' = x + d/\lambda_1$ . Por tanto,  $D'_2 = \lambda_1 f' = D_2$ .  $\square$

### Obtención de las ecuaciones reducidas y canónicas a partir de los invariantes

La discusión anterior da las ecuaciones reducidas en términos de los invariantes. Por ejemplo, en el caso de las cónicas centradas, la ecuación reducida [4.24.a] nos da  $D'_3 = d'_2 \mu$  y, por tanto,  $\mu = D'_3/d'_2 = D_3/d_2$ , de donde resulta que la ecuación reducida es

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{D_3}{d_2} = 0 \quad [4.40]$$

De manera similar, se ve que la ecuación canónica de una parábola es

$$x^2 + 2\sqrt{-\frac{D_3}{d_1^3}}y = 0 \quad [4.41]$$

Finalmente, la ecuación reducida [4.24.c] se puede escribir

$$x^2 + \frac{D_2}{d_1^2} = 0 \quad [4.42]$$

ya que  $D'_2 = \lambda_1 \mu = d'_1 \mu$ .

### Ejemplos

En este subapartado ilustramos los principios anteriores aplicándolos a distintas situaciones.

**Área de la elipse.** Supongamos que hemos determinado que una cónica de matriz proyectiva  $\bar{A}$  es una elipse real, es decir, que  $d_2 > 0$  y  $D_3 d_1 < 0$ . ¿Cómo podemos encontrar su área en función de los invariantes?

En términos de la ecuación canónica, el área de la elipse es  $A = \pi ab$ . Pero sabemos que  $a = \sqrt{-\mu/\lambda_1}$  y  $b = \sqrt{-\mu/\lambda_2}$ , donde  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0$  es una ecuación reducida. Por tanto,  $A = \pi \sqrt{\mu^2/d_2}$ . Teniendo en cuenta que  $\mu = D_3/d_2$ , obtenemos finalmente la fórmula:

$$A = \pi \sqrt{\frac{D_3^2}{d_2^3}} \quad [4.43]$$

**Ángulo de las asíntotas de una hipérbola.** De manera similar, se puede ver que el ángulo  $\alpha$  que forman las asíntotas de una hipérbola, o un par de rectas, se puede determinar por la fórmula

$$\cos^2(\alpha) = \frac{d_1^2}{d_1^2 - 4d_2} \quad [4.44]$$

En efecto, la ecuación canónica de un par de rectas reales es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Visto que estas rectas tienen ecuaciones  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$  y  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ , tenemos que  $(-b, a)$  y  $(b, a)$  son vectores directores respectivos. Por tanto,  $\cos(\alpha) = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$ . Pero  $a^2 = 1/\lambda_1$  y  $-b^2 = 1/\lambda_2$ , de donde inferimos que

$$\cos(\alpha) = (\lambda_1 + \lambda_2)/(\lambda_1 - \lambda_2) = d_1/(\lambda_1 - \lambda_2)$$

Elevando al cuadrado, y teniendo en cuenta que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = d_1^2 - 4d_2$$

queda establecida la relación anunciada.

**E.4.28.** Probar que la semidistancia focal,  $c$ , de una elipse o una hipérbola se puede expresar por la fórmula

$$c^2 = \frac{|D_3|}{d_2^2} \sqrt{d_1^2 - 4d_2}$$

**Definición alternativa de las cónicas bis.** Aplicaremos el teorema 4.16 a la ecuación [4.32] —olvidemos ahora cómo se obtuvo allí esta ecuación. Naturalmente, no llegaremos a conclusiones distintas de las que hemos encontrado en la prueba de la proposición 4.13, pero las obtendremos de una forma más rápida, y esto constituye una buena ilustración del teorema de clasificación.

La matriz proyectiva de la ecuación en cuestión es

$$\begin{bmatrix} 1 - e^2 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & p^2 \end{bmatrix}$$

de donde obtenemos

$$D_3 = (1 - e^2)p^2 - p^2 = -e^2p^2, \quad d_2 = 1 - e^2 \quad \text{y} \quad d_1 = 2 - e^2$$

Como  $ep \neq 0$  (v. proposición 4.13), tenemos que  $D_3 \neq 0$ , y la cónica es no degenerada.

Si  $e < 1$ , entonces  $d_2 > 0$  y se trata de una elipse. La elipse es real, ya que  $D_3 d_1 = -e^2 p^2 (2 - e^2) < 0$ . El área de esta elipse es, usando la fórmula [4.43],

$$\pi \frac{e^2 p^2}{\sqrt{(1 - e^2)^3}}$$

(comparar con E.4.21).

Si  $e = 1$ , entonces  $d_2 = 0$  y se trata de una parábola. Notemos que en este caso  $D_3 = -p^2$ ,  $d_1 = 1$  y  $\sqrt{-D^3/d_1^3} = p$ , de manera que  $p$  es parámetro focal de la parábola (en concordancia con la definición dada en la demostración de la proposición 4.13).

Si  $e > 1$ , entonces  $d_2 < 0$  y se trata de una hipérbola. El ángulo  $\alpha$  que forman las dos asíntotas se puede calcular mediante la fórmula [4.44]: como  $d_1 = 2 - e^2$  y  $d_2 = 1 - e^2$ , tenemos que  $d_1^2 - 4d_2 = e^2$  y

$$\cos(\alpha) = \frac{2 - e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2} - 1$$

Por tanto,

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} = \frac{1}{e^2} \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{e}$$

### Determinación de los elementos geométricos de una cónica

El teorema de clasificación nos permite encontrar, calculando los invariantes apropiados, la especie de una cónica. Seguidamente podemos resolver la ecuación secular de  $A$  (v. fórmula [4.25]) y escribir, tal como lo hemos discutido en el subapartado precedente, la ecuación reducida y, por tanto, la ecuación canónica. Pero esto no basta para obtener, en términos de la referencia inicial, los distintos elementos geométricos de la cónica que nos puedan interesar, como por ejemplo los focos, el centro o las asíntotas.

Veamos cómo se puede proceder para resolver estas cuestiones en el caso de las cónicas centradas. El caso de las parábolas se tratará más adelante (v. subapartado «Cálculo del eje y el vértice de una parábola», 270). Dada una cónica centrada, podemos determinar primero el centro de la cónica, planteando y resolviendo las ecuaciones del centro [4.29']. Después podemos encontrar sus *ejes principales*, es decir, los ejes  $O'x'$  y  $O'y'$  de la referencia reducida. Esto es fácil si tenemos en cuenta que un eje principal es una recta que pasa por el centro con vector director un vector propio no nulo de  $A$ . Por tanto, el problema de los ejes principales se resuelve calculando vectores propios no nulos de  $A$  de valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Estos vectores se denominan *direcciones principales* de la cónica. Finalmente, conocidos los ejes principales y la ecuación reducida, es inmediato calcular los otros elementos que nos puedan interesar, como los focos y los vértices en el caso de la elipse y la hipérbola o las asíntotas en el caso de una hipérbola.

### Polaridad y tangencia

En este apartado se destina a presentar brevemente el aspecto proyectivo de las cónicas.

Consideremos una cónica no degenerada y sea  $\bar{A}$  su matriz proyectiva en una cierta referencia cartesiana rectangular  $\mathcal{R}$ . Dado un punto proyectivo  $Q = [\eta]$ , donde  $\eta$  son  $\bar{\mathcal{R}}$ -coordenadas, la ecuación

$$\eta \bar{A} \xi^T = 0$$

representa una recta: es la recta que tiene coordenadas proyectivas  $\bar{\eta A}$ . Esta recta se denomina *polar de  $Q$*  respecto a la cónica. No es difícil comprobar que esta recta solo depende de la cónica y el punto, y no de la referencia ni de las coordenadas  $\eta$  que escogamos para calcularla [ $\diamond$ ].

**E.4.29.** Probar que la recta polar de un foco de una elipse (de una hipérbola) es la correspondiente directriz. El mismo resultado vale para la parábola: la recta polar de su foco es la directriz.

**E.4.30.** Sea  $\mathcal{C}$  una cónica no degenerada y  $P$  un punto no perteneciente a  $\mathcal{C}$ . Sea  $L$  la recta polar de  $P$  respecto a  $\mathcal{C}$ . Dado un punto  $Q$  de la cónica  $\mathcal{C}$ , tal que  $Q \notin L$ , la recta  $PQ$  corta a  $\mathcal{C}$  en el punto  $Q$  y en otro punto  $Q' \in \mathcal{C}$ . Probar que  $Q' \neq Q$  y que el cuarto armónico de  $P$  respecto al par  $\{Q, Q'\}$  es el punto de intersección de  $PQ$  con  $L$ .

Además de los ejercicios precedentes, el interés del concepto de polar proviene, en buena parte, del resultado siguiente.

**4.17 Teorema.** Sea  $Q$  un punto proyectivo de una cónica no degenerada y  $L$  su polar. Entonces,

- 1)  $L$  pasa por  $Q$  y  $Q$  es el único punto de la cónica incidente con  $L$ .
- 2) Toda recta  $L'$  por  $Q$  distinta de  $L$  corta la cónica, exactamente, en el punto  $Q$  y otro punto  $Q' \neq Q$ .

**Demostración:** Sea  $Q = [\eta]$  un punto de la cónica  $[\bar{A}]$ . Tenemos así que

$$\eta \bar{A} \eta^T = 0$$

y es manifiesto que esta relación equivale a decir que  $Q$  es un punto de  $L$ .

Para ver que  $L$  no contiene ningún otro punto de la cónica, razonaremos por reducción al absurdo: veremos que si  $Q' = [\eta'] \neq Q$  fuese un punto de  $L$  y de la cónica, entonces  $L$  estaría contenida en la cónica, y esto contradice el hecho de que la cónica es no degenerada. En efecto, los puntos de la recta  $QQ'$  distintos de  $Q$  tienen la forma  $[t\eta + \eta']$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , y se cumple que

$$(t\eta + \eta') \bar{A} (t\eta + \eta')^T = 0$$

para todo  $t$ , ya que  $\eta \bar{A} \eta^T = 0$  y  $\eta' \bar{A} \eta'^T = 0$ , por ser  $Q$  y  $Q'$  puntos de la cónica, y  $\eta \bar{A} \eta'^T = 0$  porque suponemos que  $Q'$  es de la polar de  $Q$ . De este modo queda demostrado el punto 1.

Para ver el punto 2, sea  $L'$  una recta por  $Q$  distinta de  $L$  y sea  $Q' = [\eta']$  un punto de  $L'$  no perteneciente a la cónica (un tal  $Q'$  existe porque la cónica es no degenerada). Entonces  $L' = QQ'$  y, para encontrar las intersecciones de  $L'$  con la cónica, hemos de hallar las soluciones  $t$  de la ecuación

$$(\eta + t\eta') \bar{A} (\eta + t\eta')^T = 0$$

es decir, de la ecuación  $t(\alpha_0 + t\alpha_1) = 0$ , donde  $\alpha_0 = 2\eta \bar{A} \eta'^T$  y  $\alpha_1 = \eta' \bar{A} \eta'^T$ . La solución  $t = 0$  nos da el punto  $Q$ . Por otro lado,  $\alpha_1 \neq 0$ , ya que  $Q'$  no es un punto de la cónica, y  $\alpha_0 \neq 0$ , porque  $Q'$  no es de la polar de  $Q$  (de otro modo,  $L' = QQ'$  coincidiría con  $L$ ). Así pues a la otra solución, que es  $t = -\alpha_0/\alpha_1 \neq 0$ , le corresponde un punto de  $L'$  distinto de  $Q$ .  $\square$

Definimos la *tangente* en un punto proyectivo  $Q$  de una cónica no degenerada como la polar de  $Q$ . El teorema anterior muestra que todas las rectas por  $Q$  distintas de la tangente cortan la cónica proyectiva en  $Q$  y exactamente otro punto distinto  $Q'$ , mientras que la intersección de la tangente en  $Q$  con la cónica se reduce a  $Q$ , punto que también se denomina *punto de contacto* de la tangente y la cónica.

**4.18 Corolario.** *La tangente en un punto  $(x_0, y_0)$  de una cónica no degenerada, referida a coordenadas rectangulares  $(x, y)$ , tiene ecuación*

$$(ax_0 + by_0 + d)x + (bx_0 + cy_0 + e)y + (dx_0 + ey_0 + f) = 0$$

**Demostración:** Basta darse cuenta de que los coeficientes de esta ecuación son las componentes del producto  $(x_0, y_0, 1) \bar{A}$ .  $\square$

Notemos que anteriormente se han considerado casos particulares del corolario: nos referimos al cálculo de la ecuación de la tangente en el caso de la elipse (pág. 238), la hipérbola (pág. 241) y la parábola (pág. 244) referidas a coordenadas canónicas.

**E.4.31.** Dada una cónica no degenerada  $\mathcal{C}$  y una recta  $L$ , demostrar que la intersección de  $L$  y  $\mathcal{C}$  es un par de puntos distintos (reales o imaginarios conjugados) si  $L$  no es tangente a  $\mathcal{C}$ , y un único punto si  $L$  es tangente a  $\mathcal{C}$  (el punto de contacto de  $L$  con  $\mathcal{C}$ ; en este caso, se dice que la intersección de  $L$  con  $\mathcal{C}$  es un punto doble).

**E.4.32.** Comprobar que la tangente en el punto impropio de una parábola es la recta del infinito.

Para una cónica no degenerada, la aplicación de  $\mathbb{P}^2$  a  $\overset{\vee}{\mathbb{P}^2}$  que transforma un punto en su polar es una proyectividad. Dada una recta, se define su *polo* (respecto a la cónica) como el único punto cuya polar es la recta.

**E.4.33.** Comprobar que el centro de una cónica no degenerada centrada es el polo de la recta del infinito. Puesto que, en el caso de la parábola, su punto del infinito es el polo de la recta del infinito, en adelante consideraremos que este punto (impropio) es el centro de la parábola.

Dada una cónica no degenerada  $\mathcal{C}$ , diremos que dos puntos  $Q = [\eta]$  y  $Q' = [\eta']$  de  $\bar{A}$  son *conjugados respecto a  $\mathcal{C}$*  si y solo si

$$\eta \bar{A} \eta'^T = 0$$

Notemos que un punto es de la cónica si y solo si es *autoconjugado*.

**4.19.** La relación de conjugación respecto a una cónica no degenerada  $\mathcal{C}$  es simétrica.

**Demostración:** La relación de conjugación

$$\eta \bar{A} \eta'^T = 0$$

equivale a

$$\eta'^T \bar{A} \eta = 0$$

y como  $\bar{A}$  es una matriz simétrica, esto prueba la afirmación.  $\square$

Por otro lado, es claro directamente de la definición que

**4.20.** Los puntos de la polar de un punto  $Q$  son los puntos conjugados con  $Q$ . Por tanto, la polar de un punto  $Q$  pasa por un punto  $Q'$  si y solo si la polar de  $Q'$  pasa por  $Q$ .

**E.4.34.** Probar que las polares de los puntos de una recta  $L$  respecto a una cónica no degenerada forman el haz de rectas cuyo foco es el polo de  $L$ .

**E.4.35.** *Tangentes a una cónica desde un punto.* Sea  $\mathcal{C}$  una cónica no degenerada y  $Q$  un punto que no pertenece a  $\mathcal{C}$ . Sea  $L$  la polar de  $Q$  respecto a  $\mathcal{C}$ . Probar que  $L$  no es tangente a  $\mathcal{C}$ . Así, la intersección de  $L$  y  $\mathcal{C}$  es un par de puntos distintos, sean  $P_1$  y  $P_2$ . Probar también que las rectas  $QP_1$  y  $QP_2$  son las únicas rectas por  $Q$  que son tangentes a  $\mathcal{C}$ .

El cono tangente a la cónica proyectiva  $\bar{\mathcal{C}}$  desde un punto  $Q$  que no le pertenece es el lugar geométrico formado por  $Q$  y por los puntos  $X \neq Q$  tales que  $QX$  es una recta tangente a  $\bar{\mathcal{C}}$ . Con las notaciones del ejercicio anterior, es la unión de las rectas  $QP_1$  y  $QP_2$ .

**4.21 Proposición.** Si  $Q = [\eta]$ , un punto  $X = [\xi]$  es del cono tangente a  $\bar{\mathcal{C}}$  desde  $Q$  si y solo si

$$(\eta \bar{A} \xi^T)^2 - (\eta \bar{A} \eta^T)(\xi \bar{A} \xi^T) = 0$$

**Demostración:** Los puntos de la recta  $QX$  distintos de  $Q$  tienen la forma  $[t\eta + \xi]$ . Por tanto, los puntos de intersección de  $QX$  con  $\bar{C}$  se corresponden a las soluciones  $t$  de la ecuación  $(t\eta + \xi)\bar{A}(t\eta + \xi)^T = 0$ , es decir, de la ecuación

$$(\eta\bar{A}\eta^T)t^2 + 2(\eta\bar{A}\xi^T)t + \xi\bar{A}\xi^T = 0$$

Ahora la condición para que la recta  $QX$  sea tangente es que la última ecuación tenga una raíz doble, esto es, que su discriminante sea 0. Dado que el discriminante de la ecuación citada es (un cuarto de) la expresión de la izquierda de la ecuación que queremos establecer, esto termina la prueba.  $\square$

**E.4.36.** Mostrar que el cono tangente de una hipérbola desde su centro está formado por las dos asíntotas.

### Cálculo del eje y el vértice de una parábola

Supongamos que hemos determinado que una cónica [4.16] es una parábola. Entonces, conocemos el parámetro focal,  $p = \sqrt{-D_3/d_1^3}$ , pero nos falta conocer el eje y el vértice para poder tener una determinación completa de la figura.

La dirección del eje es inmediata: puesto que el eje de la parábola es  $O'y'$  (en coordenadas canónicas), todo vector propio no nulo  $v$  de valor propio 0 ( $= \lambda_2$ ) es un vector director del eje de la parábola. Para determinar el vértice, sea  $v'$  un vector no nulo perpendicular a  $v$  y consideremos el punto  $[v']$  de la recta del infinito. Dado que el eje de la parábola es perpendicular a la tangente  $L$  en el vértice, el punto  $[v']$  es de  $L$ . Por tanto,  $[v']$  es un punto de la recta polar del vértice. Por la reciprocidad de la polar, resulta que el vértice es incidente con la polar de  $[v']$ . Como la recta del infinito es tangente a la parábola en el punto  $[v]$  (el punto del infinito del eje), la polar de  $[v']$  también pasa por  $[v]$ . De esto se infiere que el vértice de la parábola es el punto de intersección distinto de  $[v]$  de la polar de  $[v']$  con la parábola.

## 4.3 Cuádricas

Por analogía con las cónicas de un plano, que se definen mediante polinomios cuadráticos de las coordenadas  $(x, y)$ , las cuádricas del espacio de dimensión 3 son figuras definidas por polinomios cuadráticos en las coordenadas  $(x, y, z)$ .

En esta sección, primero estudiaremos distintas cuádricas dadas por «ecuaciones canónicas» y después veremos, por un proceso de «reducción» análogo al de las cónicas, que toda cuádrica es, referida a una cierta referencia «canónica», de la misma especie que una de las consideradas.

### Elipsoides y hiperboloides

Consideraremos primero las cuádricas dadas por una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 \quad [4.45]$$

donde  $(x, y, z)$  son coordenadas cartesianas rectangulares y  $a, b, c$  números reales positivos dados. Es manifiesto que este tipo de cuádricas son simétricas respecto a los planos de coordenadas. En particular, son invariantes por las simetrías axiales respecto a los ejes y por la simetría central de centro el origen. Por estas razones, el origen se denomina *centro* de la cuádrica y los ejes  $Ox, Oy$  y  $Oz$ , *ejes principales*. Los números reales  $a, b$  y  $c$  se denominan *semiejes principales*.

Notemos que si  $a = b$ , la cuádrica es invariante por rotaciones alrededor del eje  $Oz$ . Se dice, en este caso, que la cuádrica es *de revolución* respecto al eje  $Oz$ , y también que  $Oz$  es *eje de revolución*.

Si el signo del término  $\frac{z^2}{c^2}$  es positivo, la cuádrica es un *elipsoide*, y si es negativo, un *hiperboloide*. Los elipsoides son análogos a las elipses. Del mismo modo, los hiperboloides son análogos a las hipérbolas, pero hay que tener en cuenta que pueden ser de dos tipos: los de una hoja (o *reglados*, porque contienen rectas) y los de dos hojas (o *no reglados*, porque no contienen rectas).

#### Elipsoides

El elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$  no tiene puntos reales, y por eso decimos que es un *elipsoide imaginario*. Es análogo a la elipse imaginaria. En cambio, el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad [4.46]$$

tiene puntos reales, como por ejemplo  $(\pm a, 0, 0)$ , y se denomina *elipsoide real*. Es análogo a la elipse real.

Para ver qué tipo de figura geométrica es un elipsoide real, estudiaremos las figuras que se obtienen al cortarlo con una familia de planos paralelos a un plano de coordenadas cualquiera. Consideremos, por ejemplo, el plano  $z = k$ , donde  $k$  es un número real arbitrario. La intersección está formada por los puntos  $(x, y, k)$  tales que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

Si  $k^2/c^2 < 1$ , es decir, si  $-c < k < c$ , se trata de una elipse con centro el punto  $(0, 0, k)$ , ejes paralelos a  $Ox$  y  $Oy$ , y semiejes  $a\sqrt{1 - k^2/c^2}$  y  $b\sqrt{1 - k^2/c^2}$  (v. figura 4.12). Es, pues, una elipse semejante a la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  y, puesto que la razón de semejanza  $\sqrt{1 - k^2/c^2}$  tiende a 0 cuando  $k$  tiende a  $\pm c$  (en valor absoluto), las dimensiones de la elipse correspondiente también tienden a cero.

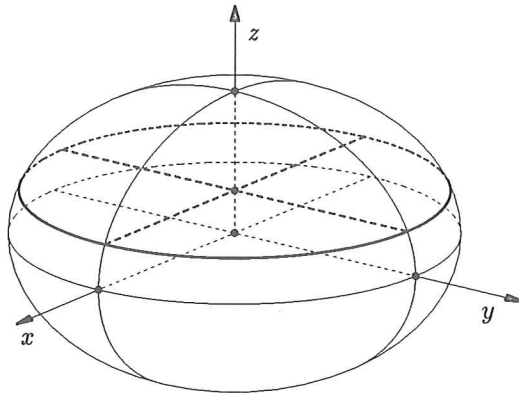


Figura 4.12: Elipsoide

Si  $k^2/c^2 = 1$ , es decir, si cortamos por uno de los planos  $z = \pm c$ , la figura que obtenemos es un par de rectas imaginarias conjugadas. El único punto real de esta intersección es  $(0, 0, \pm c)$ . Finalmente, si  $k^2/c^2 > 1$ , la sección es una elipse imaginaria.

Un análisis semejante muestra que las secciones del elipsoide real por planos de la forma  $y = k$  (o  $x = k$ ) son elipses reales si  $-b < k < b$  (si  $-a < k < a$ ), elipses imaginarias si  $k > b$  o  $k < -b$  (si  $k > a$  o  $k < -a$ ), y un par de rectas imaginarias conjugadas si  $k = \pm b$  (si  $k = \pm a$ ).

Si en el elipsoide [4.46] se cumple  $a = b$  (por ejemplo), entonces es un elipsoide de revolución respecto al eje  $Oz$ . En el caso  $a = b = c$ , el elipsoide es una *esfera* de radio  $a$  y centro en el origen.

**E.4.37.** Mostrar que una ecuación con la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2px + 2qy + 2rz + s = 0$$

donde  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$  satisfacen  $p^2 + q^2 + r^2 - s \geq 0$ , representa una esfera de centro  $(-p, -q, -r)$  y radio  $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2 - s}$  (si  $p^2 + q^2 + r^2 - s < 0$ , se dice que la ecuación representa una *esfera imaginaria*).

**E.4.38.** Probar que por cuatro puntos independientes pasa una única esfera, y explicar cómo se puede hallar su ecuación.

**E.4.39.** Dados dos puntos  $A = (a, b, c)$  y  $A' = (a', b', c')$ , comprobar que la ecuación

$$(x - a)(x - a') + (y - b)(y - b') + (z - c)(z - c') = 0$$

representa la esfera que tiene el segmento  $AA'$  como diámetro.

### Hiperboloide de un hoja (o reglado)

Tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad [4.47]$$

La sección por el plano  $z = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , es una elipse de centro  $(0, 0, k)$ , ejes principales paralelos a  $Ox$  y  $Oy$  y semiejes  $a\sqrt{1 + \frac{k^2}{c^2}}$  y  $b\sqrt{1 + \frac{k^2}{c^2}}$ . Son elipses semejantes entre ellas (circunferencias si  $a = b$ ) y que crecen indefinidamente cuando  $|k|$  crece indefinidamente. La menor de estas elipses se obtiene para  $k = 0$ : la elipse resultante se denomina *elipse de garganta* del hiperboloide (v. figura 4.13).

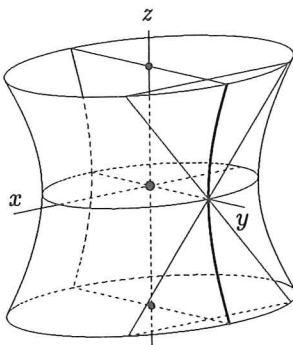


Figura 4.13: Hiperboloide de una hoja, o reglado

Las secciones por los planos  $y = k$  ( $x = k$ ),  $k \in \mathbb{R}$ , son hipérbolas, con eje principal paralelo al eje  $Oz$ , excepto cuando  $|y| = b$  (cuando  $|x| = a$ ), en que se obtiene un par de rectas reales (v. la figura 4.13, en la cual hemos incluido una representación de la hipérbola que se obtiene cortando por el plano  $x = 0$  y del par de rectas que se obtiene cortando por el plano  $y = b$ ).

En particular, vemos que el hiperboloide de un hoja contiene rectas, propiedad que se evoca usualmente mediante la expresión *hiperboloide reglado*. En general, las rectas contenidas en una cuádrica se denominan *generatrices* de la misma.

**E.4.40.** Sean  $a, b, c$  números reales positivos fijados. Dado un número real  $k$ , sea  $\ell_k$  la recta dada por las ecuaciones

$$k\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) + \frac{y}{b} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} - k\left(\frac{y}{b} + 1\right) = 0 \quad [4.48]$$

y  $\ell_\infty$  la recta dada por las ecuaciones

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + 1 = 0 \quad [4.48']$$

Probar que la recta  $\ell_k$  está contenida en el hiperboloide [4.47] para todo  $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (a estas rectas las llamaremos *generatrices de tipo  $\ell$* ). Análogamente, la recta  $\ell'_k$  dada por las ecuaciones

$$k\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) + \frac{y}{b} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} - k\left(\frac{y}{b} + 1\right) = 0 \quad [4.49]$$

con  $\ell'_\infty$  definida por

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + 1 = 0 \quad [4.49']$$

está contenida en el hiperboloide [4.47] (a estas rectas las llamaremos *generatrices de tipo  $\ell'$* ).

Probar también que toda recta contenida en el hiperboloide es una generatriz de tipo  $\ell$  o una generatriz de tipo  $\ell'$ .

**E.4.41.** Con las mismas notaciones que en el ejercicio anterior, probar que:

- 1) Por un punto del hiperboloide [4.47] pasa exactamente una generatriz de tipo  $\ell$  y una generatriz de tipo  $\ell'$ .
- 2) Dos generatrices distintas de tipo  $\ell$  (de tipo  $\ell'$ ) se cruzan.
- 3) Las rectas  $\ell_k$  y  $\ell_{-1/k}$  son paralelas para todo  $k \in \mathcal{R} \cup \{\infty\}$  (aquí convenimos que  $-1/0 = \infty$  y  $-1/\infty = 0$ ).
- 4) Si  $kk' + 1 \neq 0$ , la intersección de la recta  $\ell_k$  y la recta  $\ell'_{k'}$  ( $k, k' \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ) es el punto

$$\left( \frac{a(k+k')}{1+kk'}, \frac{b(1-kk')}{1+kk'}, \frac{c(k-k')}{1+kk'} \right)$$

### Hiperboloide de dos hojas (o no reglado)

Es la figura

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Las secciones por  $z = k$  son elipses reales (imaginarias) si  $|k| > c$  (si  $|k| < c$ ) y dos rectas imaginarias conjugadas si  $|k| = c$ . Si  $|k| > c$ , el centro de la elipse que resulta de cortar por el plano  $z = k$  es  $(0, 0, k)$ , sus ejes principales son paralelos a  $Ox$  y  $Oy$  y el valor de sus semiejes es  $a\sqrt{\frac{k^2}{c^2} - 1}$  y  $b\sqrt{\frac{k^2}{c^2} - 1}$ , respectivamente.

Estos hechos son los que justifican que nos refiramos a esta figura diciendo que tiene dos hojas (v. figura 4.14). Las secciones por  $x = k$  (por  $y = k$ ), siendo  $k$  una constante arbitraria, son hipérbolas con eje principal paralelo al eje  $Oz$  y secundario paralelo a  $Oy$  (a  $Ox$ ). Sus semiejes son  $c\sqrt{1 + k^2/a^2}$  y  $b\sqrt{1 + k^2/a^2}$  ( $c\sqrt{1 + k^2/b^2}$  y  $a\sqrt{1 + k^2/b^2}$ ).

### Paraboloides

Existen dos tipos de cuádricas análogas a las parábolas del plano: los *paraboloides elípticos* y los *paraboloides hiperbólicos*.

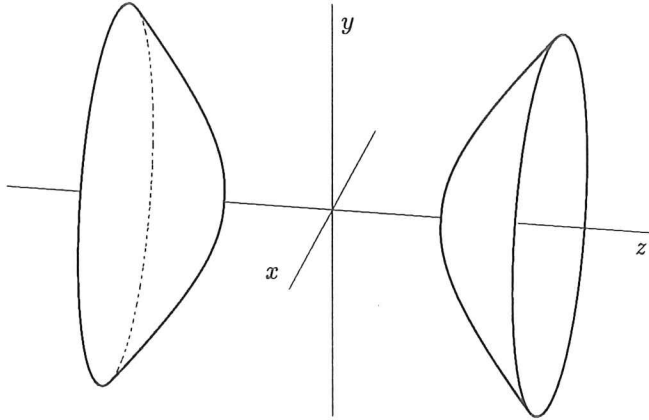


Figura 4.14: *Hiperboloide de dos hojas, o no reglado*

### Paraboloide elíptico (o no reglado)

Viene dado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

con  $a$  y  $b$  números reales positivos.

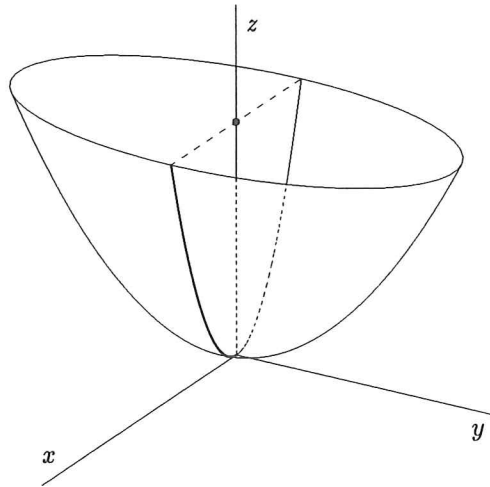


Figura 4.15: *Paraboloide elíptico, o no reglado*

La sección por el plano  $x = k$  (el plano  $y = k$ ),  $k$  una constante cualquiera, es la parábola  $y^2 = 2b^2(z - k^2/2a^2)$  (la parábola  $x^2 = 2a^2(z - k^2/2b^2)$ ). En cambio, la sección por  $z = k$  es una elipse real si  $k > 0$ , una elipse imaginaria si  $k < 0$ , y dos rectas imaginarias conjugadas si  $k = 0$  (v. figura 4.15, en la cual se han representado las secciones por los planos  $z = 1$  e  $y = 0$  —una elipse y una parábola, respectivamente).

Si se cumple que  $a = b$ , el paraboloido elíptico es de revolución respecto al eje  $Oz$ .

### Paraboloido hiperbólico (o reglado)

Es la cuádrica dada por la ecuación (v. figura 4.16)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad [4.50]$$

Las secciones por  $z = k$  son hipérbolas si  $k \neq 0$ . Más precisamente, si  $k > 0$  (si  $k < 0$ ), la sección por el plano  $z = k$  es una hipérbola con eje principal paralelo a  $Ox$  (a  $Oy$ ), eje secundario paralelo a  $Oy$  (a  $Ox$ ), y con semiejes  $a\sqrt{2k}$  y  $b\sqrt{2k}$  ( $b\sqrt{-2k}$  y  $a\sqrt{-2k}$ ). La sección por el plano  $z = 0$  es un par de rectas reales. (En la figura 4.16, se han representado la hipérbolas correspondientes a  $z = k$  para un  $k$  positivo y un  $k$  negativo, y el par de rectas correspondiente a  $z = 0$ .) Las secciones por  $x = k$  o  $y = k$  son parábolas con eje paralelo a  $Oz$ , en el primer caso con orientación contraria (parábola con las «ramas» abajo) y en el segundo con orientación coincidente (parábola con las «ramas» arriba). (En la figura 4.16 se han representado las parábolas  $x = k$  para tres valores de  $k$ , incluyendo  $k = 0$ , y dos parábolas  $y = k$ .)

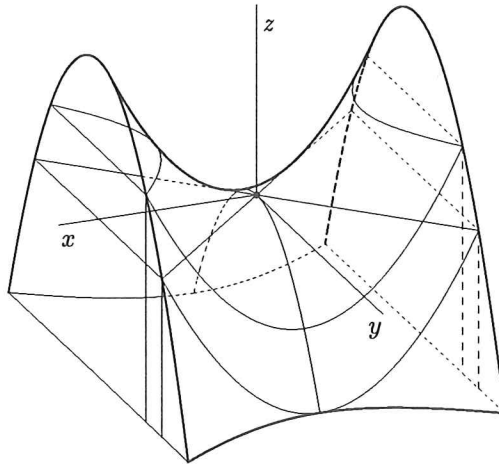


Figura 4.16: Paraboloido hiperbólico, o reglado

E.4.42. Sean  $a$  y  $b$  dos números reales positivos fijados. Para todo número real  $k$ , sea  $\ell_k$  la recta definida por las ecuaciones

$$k\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2k \quad [4.51]$$

y  $\ell'_k$  la recta definida por las ecuaciones

$$k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2k \quad [4.51']$$

Probar que:

- 1) Las rectas  $\ell_k$  y  $\ell'_k$  están contenidas en el paraboloides [4.50] y toda recta contenida en el paraboloides es de este tipo.
- 2) Por cualquier punto del paraboloides [4.50] pasa exactamente una recta de tipo  $\ell$  y una recta de tipo  $\ell'$ .
- 3) Dos rectas distintas de tipo  $\ell$  (de tipo  $\ell'$ ) se cruzan.
- 4) Si  $k, k' \in \mathbb{R}$ , la intersección de las rectas  $\ell_k$  y  $\ell'_k$  es el punto

$$(a(k + k'), b(k - k'), 2kk')$$

### Conos

La cuádrica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad [4.52]$$

es análoga a un par de rectas reales y, puesto que es unión, como veremos, de rectas que pasan por el origen, lo denominaremos *cono real*.

La sección por el plano  $z = k$ , con  $k \in \mathbb{R}$  no nulo, es una elipse con centro en el punto  $(0, 0, k)$ , ejes principales paralelos a  $Ox$  y  $Oy$  y semiejes  $a|k|/c$  y  $b|k|/c$  (v. figura 4.17). La sección por el plano  $z = 0$  es un par de rectas imaginarias conjugadas.

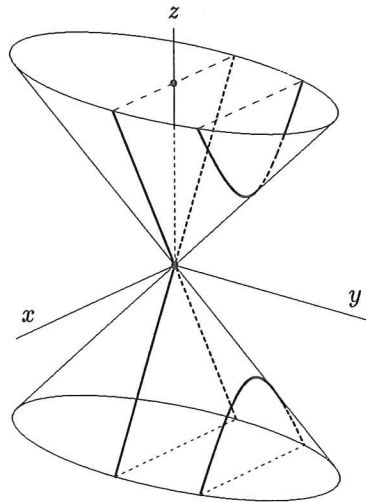


Figura 4.17: *Cono real*

Las dimensiones de la elipse  $C_k$  obtenida cortando el cono con el plano  $z = k$  crecen proporcionalmente al valor absoluto de  $k$ . Este hecho se puede precisar más con la observación siguiente: si  $P = (x, y, z)$  es un punto del cono distinto del origen  $O$ , entonces la recta  $OP$  está contenida en el cono. En particular, la homotecia de centro

$O$  y razón  $\rho > 0$  transforma  $C_k$  en  $C_{\rho k}$ . También es claro que el cono es la unión de las rectas  $OP$ , cuando  $P$  recorre los puntos de  $C_k$ , para un  $k$  no nulo dado. Diremos que  $O$  es el *vértice*, que  $C_k$  es, para un  $k$  no nulo cualquiera, una *directriz*, y que las rectas  $OP$ ,  $P \in C_k$ , son las *generatrices* del cono.

La sección del cono [4.52] con el plano  $y = k$  (el plano  $x = k$ ),  $k \in \mathbb{R}$  no nulo, es una hipérbola con ejes principales paralelos a  $Oz$  y  $Ox$  ( $Oz$  y  $Oy$ ) y con semiejes  $c|k|/b$  y  $a|k|/b$  (semiejes  $c|k|/a$  y  $b|k|/a$ ). En cambio, la sección con el plano  $y = 0$  (el plano  $x = 0$ ) es un par de rectas. En la figura 4.17 hemos representado la sección por los planos  $z = \pm k$  (elipses) e  $y = h$  (hipérbola), siendo  $k$  y  $h$  ciertas constantes positivas. También se ha representado el par de rectas correspondiente a la sección por  $y = 0$ .

En el ejercicio siguiente se establece, de una manera más explícita, cómo son las generatrices del cono [4.52].

**E.4.43.** Sean  $a, b, c$  números reales positivos fijados. Para todo  $s \in \mathbb{R}$ , sea  $\ell_s$  la recta dada por las ecuaciones

$$s\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \frac{y}{b}, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = -s\frac{y}{b} \quad [4.53]$$

y  $\ell_\infty$  la dada por las ecuaciones

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad y = 0 \quad [4.53']$$

Probar que  $s \mapsto \ell_s$  establece una biyección entre  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  y el conjunto de generatrices de [4.52]. Deducir de ello que la aplicación

$$s \mapsto \left( a \frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2bs}{1+s^2}, c \right) \quad \text{si } s \in \mathbb{R}, \quad \infty \mapsto (-a, 0, c)$$

establece una biyección entre  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  y la elipse  $C_c$  (sección de [4.52] con el plano  $z = c$ ).

La cuádrlica dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad [4.54]$$

solo contiene un punto real: el origen. Por analogía con el cono real [4.52], le llamaremos *cono imaginario*. Para todo número real no nulo  $k$ , la sección de esta cuádrlica por el plano  $z = k$  (o  $x = k$ , o  $y = k$ ) es una elipse imaginaria, mientras que la sección por  $z = 0$  (o  $x = 0$ , o  $y = 0$ ) es un par de rectas imaginarias conjugadas.

Los conos aparecen cuando estudiamos el comportamiento en el infinito de la cuádrlica [4.45]. En efecto, si  $(X, Y, Z, W)$  son las coordenadas proyectivas correspondientes a las coordenadas  $(x, y, z)$ , de manera que  $x = X/W$ ,  $y = Y/W$  y  $z = Z/W$ , la ecuación [4.45] es equivalente, para  $W \neq 0$ , a la ecuación

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \pm \frac{Z^2}{c^2} = \pm W^2$$

Los puntos del infinito que cumplen esta ecuación son los puntos  $[X, Y, Z, 0]$  tales que

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \pm \frac{Z^2}{c^2} = 0$$

conjunto que claramente coincide con el conjunto de puntos del infinito de las generatrices del cono

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad [4.55]$$

Este cono es real si la cuádrica [4.45] es un hiperboloide (v. las figuras 4.18 y 4.19) y es imaginario si la citada cuádrica es un elipsoide (real o imaginario). En cualquier caso, este cono se denomina *cono asintótico* de la cuádrica.

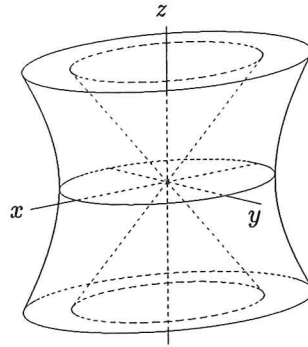


Figura 4.18: *Cono asintótico de un hiperboloide de una hoja*

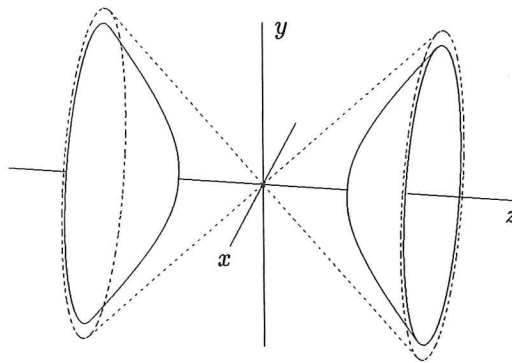


Figura 4.19: *Cono asintótico de un hiperboloide de dos hojas*

### Cilindros

Si  $q(x, y)$  es un polinomio cuadrático en las coordenadas  $x, y$ , sabemos que la figura de  $\mathbb{A}^2$  representada por la ecuación  $q(x, y) = 0$  es una cónica  $\mathcal{C}$ . Pero si miramos el polinomio  $q(x, y)$  como un polinomio en las coordenadas  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{A}^3$ , entonces la cuádrica  $\mathcal{C}'$  de  $\mathbb{A}^3$  representada por la ecuación  $q(x, y) = 0$  es la unión de las rectas paralelas al eje  $Oz$  que pasan por un punto variable de  $\mathcal{C}$ . Por ejemplo, si  $\mathcal{C}$  es un par de rectas (reales o imaginarias, distintas o coincidentes), entonces  $\mathcal{C}'$  es un *par de planos* (reales o imaginarios, distintos o coincidentes).

En el caso en que  $\mathcal{C}$  es no degenerada, se dice que la cuádrica  $\mathcal{C}'$  es un *cilindro* de base  $\mathcal{C}$ , y que las rectas por un punto de  $\mathcal{C}$  paralelas a  $Oz$  son sus *generatrices*. Puesto que las generatrices de un cilindro son concurrentes en un punto impropio, los cilindros son *conos con el vértice en el infinito*. Un cilindro se llama *elíptico* (real o imaginario), *hiperbólico* o *parabólico* según sea su base una elipse (real o imaginaria), una hipérbola o una parábola.

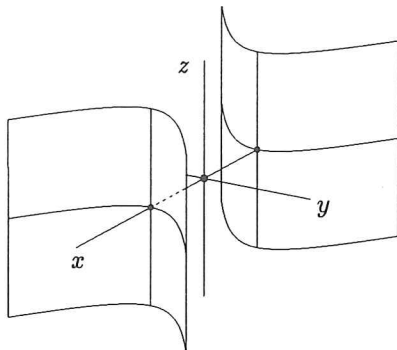


Figura 4.20: Cilindro hiperbólico

### Cuádrica general y ecuaciones reducidas

Dado un polinomio cuadrático real

$$\phi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fxy + 2gxz + 2hyz + 2px + 2qy + 2rz + d \quad [4.56]$$

en las coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$ , diremos que la ecuación  $\phi(x, y, z) = 0$  define una *cuádrica*, que denotaremos  $\mathcal{Q}_\phi$ . Recordemos que convenimos que la definición de *cuadrático* incluye la condición de que la *parte principal* de  $\phi(x, y, z)$ ,

$$\phi_2(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fxy + 2gxz + 2hyz \quad [4.57]$$

no es idénticamente nula.

Un punto  $(\alpha, \beta, \gamma)$  pertenece a la cuádriga  $\mathcal{Q}_\phi$  si y solo si  $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ . El punto se llama *real* si  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , e *imaginario* si  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  con  $\alpha$  imaginario o  $\beta$  imaginario o  $\gamma$  imaginario. Si  $(\alpha, \beta, \gamma)$  es un punto imaginario, diremos que  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$  es su *punto conjugado*. Como  $\phi(x, y, z)$  es un polinomio real,  $\mathcal{Q}_\phi$  contiene, con cada uno de sus puntos imaginarios, su conjugado.

Si  $(x', y', z')$  es otro sistema de coordenadas rectangulares y

$$\phi'(x', y', z') = a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + 2f'x'y' + 2g'x'z' + 2h'y'z' + 2p'x' + 2q'y' + 2r'z' + d'$$

es un polinomio cuadrático real en  $(x', y', z')$ , diremos que  $\mathcal{Q}_\phi$  coincide con  $\mathcal{Q}_{\phi'}$ , o que las ecuaciones  $\phi(x, y, z) = 0$  y  $\phi'(x', y', z') = 0$  definen la *misma cuádriga*, si y solo si existe un número real no nulo  $\rho$  tal que

$$\phi'(x', y', z') = \rho \tilde{\phi}(x', y', z') \quad [4.58]$$

donde  $\tilde{\phi}(x', y', z')$  denota el polinomio en  $(x', y', z')$  que se obtiene substituyendo las coordenadas  $(x, y, z)$  del polinomio  $\phi(x, y, z)$  por las expresiones del cambio a las coordenadas  $(x', y', z')$ . En particular, dos polinomios  $\phi(x, y, z)$  y  $\phi'(x, y, z)$  en las mismas coordenadas rectangulares definen la misma cuádriga si y solo si existe un número real no nulo  $\rho$  tal que  $\phi'(x, y, z) = \rho\phi(x, y, z)$  (y en este caso diremos que los polinomios son *equivalentes*).

**E. 4.44.** Sean  $\phi(x, y, z)$  y  $\phi'(x', y', z')$  polinomios cuadráticos en las coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  y  $(x', y', z')$ , respectivamente. Sea  $P$  un punto y supongamos que  $(\alpha, \beta, \gamma)$  y  $(\alpha', \beta', \gamma')$  son las coordenadas de  $P$  relativas a las dos referencias. Comprobar que si las ecuaciones  $\phi(x, y, z) = 0$  y  $\phi'(x', y', z') = 0$  definen la misma cuádriga, entonces el punto  $(\alpha, \beta, \gamma)$  pertenece a  $\mathcal{Q}_\phi$  si y solo si el punto  $(\alpha', \beta', \gamma')$  pertenece a  $\mathcal{Q}_{\phi'}$ .

### Matrices asociadas

Ponemos

$$A = \begin{pmatrix} a & f & g \\ f & b & h \\ g & h & c \end{pmatrix} \quad [4.59]$$

y decimos que es la *matriz principal* del polinomio [4.56]. Análogamente, definimos

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{c|c} A & \mathbf{w}^T \\ \hline \mathbf{w} & d \end{array} \right), \quad \mathbf{w} = (p, q, r) \quad [4.60]$$

y decimos que es la *matriz* del polinomio [4.56]. También decimos que  $A$  es la *matriz principal* de  $\bar{A}$ . Por razones que quedarán claras en la sección 4.5, las matrices  $\bar{A}$  y  $A$  también se denominan *matriz proyectiva* y *matriz en el infinito* del polinomio [4.56].

El conocimiento de  $A$  equivale al de la parte principal de  $\phi(x, y, z)$ , ya que

$$\phi_2(x, y, z) = (x, y, z)A(x, y, z)^T \quad [4.61]$$

Análogamente, el conocimiento de  $\bar{A}$  equivale al de  $\phi(x, y, z)$ , ya que

$$\phi(x, y, z) = (x, y, z, 1)\bar{A}(x, y, z, 1)^T \quad [4.62]$$

Observemos, sin embargo, que la cuádrica  $\mathcal{Q}_\phi$  solo determina  $\bar{A}$  salvo un factor real no nulo y es por esta razón que, cuando nos haga falta tener en cuenta esta indeterminación al referirnos a  $\bar{A}$  (o a  $A$ ), escribiremos  $[\bar{A}]$  (o  $[A]$ ).

Veamos cómo cambian las matrices  $A$  y  $\bar{A}$  cuando hacemos un cambio de coordenadas. Sean  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  y  $\mathbf{x}' = (x', y', z')$  dos sistemas de coordenadas rectangulares y  $\xi = (x, y, z, 1)$ ,  $\xi' = (x', y', z', 1)$  las correspondientes coordenadas proyectivas. Sean

$$\mathbf{x}^T = M\mathbf{x}'^T + \mathbf{p}^T, \quad M \in O(3), \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$$

las ecuaciones del cambio de coordenadas, que pueden escribirse, equivalentemente,

$$\xi^T = \bar{M}\xi'^T, \quad \bar{M} = \left( \begin{array}{c|c} M & \mathbf{p}^T \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right)$$

**4.22 Proposición.** Dado un polinomio cuadrático  $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x, y, z)$  en las coordenadas  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , con matriz  $\bar{A}$  y matriz principal  $A$ , el polinomio  $\tilde{\phi}(\mathbf{x}') = \tilde{\phi}(x', y', z')$  definido por la fórmula  $\tilde{\phi}(\mathbf{x}') = \phi(\mathbf{x}'M^T + \mathbf{p})$  tiene matriz  $\bar{A}' = \bar{M}^T\bar{A}\bar{M}$  y matriz principal  $A' = M^TAM$

**Demostración:** En efecto, como  $\phi(\mathbf{x}) = \xi\bar{A}\xi^T$ , tenemos

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}') = \xi'\bar{M}^T\bar{A}\bar{M}\xi'^T$$

Si ahora ponemos  $\bar{A}'$  para indicar la matriz de  $\tilde{\phi}(\mathbf{x}')$ , también tenemos que

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}') = \xi'\bar{A}'\xi'^T$$

Por tanto,  $\xi'\bar{A}'\xi'^T = \xi'\bar{M}^T\bar{A}\bar{M}\xi'^T$ , y dado que esta igualdad es válida para todo  $\mathbf{x}'$ , podemos deducir que  $\bar{A}' = \bar{M}^T\bar{A}\bar{M}$ .

La segunda igualdad del enunciado se sigue de la primera porque la matriz principal de  $\bar{A}'$  es  $A'$  y la de  $\bar{M}^T\bar{A}\bar{M}$  es  $M^TAM$ .  $\square$

**4.23 Proposición.** Dado un sistema de coordenadas rectangulares  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  y un polinomio cuadrático  $\phi(x, y, z)$ , existe un sistema de coordenadas rectangulares  $\mathbf{x}' = (x', y', z')$  tal que la parte principal del polinomio  $\tilde{\phi}(x', y', z')$  tiene la forma

$$\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + \lambda_3z'^2, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

(lo denominaremos *forma diagonal*). Además,  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  son los valores propios de la matriz principal de  $\phi(x, y, z)$ .

**Demostración:** Si  $A$  es la matriz principal de  $\phi(x, y, z)$ , la matriz principal del polinomio  $\tilde{\phi}(x', y', z')$  es  $A' = M^T A M$ , para una cierta  $M \in O(3)$ . Como  $M^T = M^{-1}$ , tenemos  $A' = M^{-1} A M$ . De esto se sigue que  $A$  y  $A'$  tienen el mismo polinomio característico y, por tanto, los mismos valores propios. Si, además,  $A' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , entonces es claro que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  son, necesariamente, los valores propios de  $A$ . Así pues, solo nos falta demostrar la primera parte del enunciado.

Puesto que el polinomio característico de  $A$  es un polinomio real de grado 3, vemos que  $A$  tiene un valor propio real. Sea  $\lambda_1$  un tal valor propio. Si ponemos  $\varphi = \varphi_A$  para indicar el endomorfismo que tiene matriz  $A$  respecto a los ejes  $e_1, e_2, e_3$  de la referencia, entonces existe un vector propio no nulo de  $\varphi$  de valor propio  $\lambda_1$ . Si  $u_1$  es un tal vector, sin pérdida de generalidad podemos suponer que es unitario. Sean  $u_2$  y  $u_3$  vectores unitarios tales que  $u_1, u_2, u_3$  forman una base ortonormal y pongamos  $M \in O(3)$  para indicar la matriz de esta base respecto a  $(e_1, e_2, e_3)$ . Entonces la matriz de  $\varphi$  respecto a  $(u_1, u_2, u_3)$ , que es  $M^{-1} A M = M^T A M = A'$ , tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b' & h' \\ 0 & h' & c' \end{pmatrix}$$

Esto significa que la parte principal de  $\tilde{\phi}(x', y', z')$  tiene la forma  $\lambda_1 x'^2 + b' y'^2 + c' z'^2 + 2h' y' z'$ . Si  $h' = 0$ , la parte principal de  $\tilde{\phi}(x', y', z')$  ya es diagonal. De otro modo, el cambio de coordenadas definido por

$$x' = \bar{x}, \quad (y', z')^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} (\bar{y}, \bar{z})^T$$

con  $\tan(2\alpha) = 2h'/(b' - c')$ , tiene el efecto de convertir la matriz  $A'$  en diagonal, y esto termina la prueba (v. la precisión que se hace en la proposición 4.10 sobre la determinación del ángulo  $\alpha$ ).  $\square$

### Ecuaciones reducidas

Diremos que el polinomio cuadrático  $\phi'(x', y', z')$  es *reducido*, o que la cuádrlica  $\mathcal{Q}_{\phi'}$  es *reducida*, si su forma es una de las siguientes:

Tipo	Formas reducidas de las cuádricas
1. Centrado	$\mu_1 x'^2 + \mu_2 y'^2 + \mu_3 z'^2 + \mu \quad (\mu_1, \mu_2 > 0, \mu_3 \neq 0)$
2. Parabólico	$\mu_1 x'^2 + \mu_2 y'^2 - 2z' \quad (\mu_1 > 0, \mu_2 \neq 0)$
3. Cilíndrico centrado	$\mu_1 x'^2 + \mu_2 y'^2 + \mu \quad (\mu_1 > 0, \mu_2 \neq 0)$
4. Cilíndrico parabólico	$\mu_1 x'^2 - 2y' \quad (\mu_1 > 0)$
5. Planos paralelos	$\mu_1 x'^2 + \mu \quad (\mu_1 > 0)$

**4.24 Nota.** En el tipo cilíndrico centrado, se puede excluir el caso en que  $\mu < 0$  y  $\mu_2 < 0$ , ya que, si se cumplen estas condiciones, la forma reducida equivalente  $-\mu_2 y'^2 - \mu_1 x'^2 - \mu$  cumple  $-\mu_2, -\mu > 0$  y  $-\mu_1 < 0$ .

**4.25 Proposición.** Dado un polinomio cuadrático  $\phi(x, y, z)$  en las coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$ , existe un sistema de coordenadas rectangulares  $(x', y', z')$  y un polinomio reducido  $\phi'(x', y', z')$  tales que las ecuaciones  $\phi(x, y, z) = 0$  y  $\phi'(x', y', z') = 0$  definen la misma cuádrica.

**Demostración:** Supongamos que  $\phi(x, y, z)$  es el polinomio [4.56]. La proposición 4.23 nos permite suponer, después de hacer un cambio de coordenadas rectangular, que la parte principal de  $\phi(x, y, z)$  es diagonal, con lo cual

$$\phi(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^3 + 2px + 2qy + 2rz + d$$

Si  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ , tres compleciones del cuadrado y, si es preciso, un cambio de signo y una reordenación de las coordenadas, nos llevan a una forma reducida de tipo centrado.

Si hay exactamente dos  $\lambda_i$  no nulas, podemos suponer que es  $\lambda_3 = 0$  y  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ . Completando, además, el cuadrado respecto a  $x$  e  $y$ , se llega a un polinomio de la forma

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2rz + d$$

Si  $r = 0$ , está claro que se trata, quizás después de reordenar las coordenadas y de cambiar de signo, de una forma reducida de tipo cilíndrico centrado. Si  $r \neq 0$ , el cambio de  $z$  por  $z - d/2r$  nos lleva a una ecuación que tiene la forma  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2rz$ , con  $r \neq 0$ , que obviamente es equivalente a una forma reducida de tipo parabólico.

Finalmente, si hay un único valor propio no nulo, está claro que podemos suponer que este valor propio es  $\lambda_1$ . Completando el cuadrado respecto a este valor propio, podemos suponer que

$$\phi(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + 2qy + 2rz + d$$

Si  $q = r = 0$ , el polinomio es claramente equivalente a la forma reducida de un par de planos paralelos. Si no es así, primero podemos eliminar  $d$  haciendo el cambio  $y \mapsto y - d/2q$  si  $q \neq 0$  o el cambio  $z \mapsto z - d/2r$  si  $r \neq 0$ . Finalmente, podemos hacer el cambio de coordenadas rectangulares tal que

$$\left( x, \frac{1}{\rho}(qy + rz), \frac{1}{\rho}(-ry + qz) \right) \mapsto (x', y', z'), \text{ donde } \rho = (q^2 + r^2)^{1/2}$$

que lleva a una forma reducida de tipo cilíndrico parabólico. Nótese que si  $e_1, e_2, e_3$  son los ejes de las coordenadas  $x, y, z$  y  $e'_1, e'_2, e'_3$ , los de las coordenadas  $x', y', z'$ , entonces  $e'_1 = e_1$ ,  $e'_2 = \frac{1}{\rho}(qe_2 + re_3)$  y  $e'_3 = \frac{1}{\rho}(-re_2 + qe_3)$ , de modo que  $e'_1, e'_2$  y  $e'_3$  es efectivamente una base ortonormal.  $\square$

### Ecuaciones canónicas

Toda cuádrlica coincide con una de las formas canónicas que hemos estudiado en los cuatro primeros apartados de esta sección. Para verlo, basta considerar el caso de las cuádricas especificadas por una ecuación reducida. Lo haremos considerando los distintos casos separadamente. Para simplificar las expresiones de las ecuaciones reducidas, escribiremos  $x, y, z$  en lugar de  $x', y', z'$ .

**Cuádricas de tipo centrado.** Si  $\mu \neq 0$ , y definimos números reales positivos  $a, b, c$  por las fórmulas

$$a = \sqrt{|\mu|/\mu_1}, \quad b = \sqrt{|\mu|/\mu_2}, \quad c = \sqrt{|\mu|/|\mu_3|}$$

la ecuación reducida adopta la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} \pm 1 = 0$$

y las cuatro posibilidades para los signos dan lugar a cuádricas conocidas: la elección  $(+, +)$ , a un elipsoide imaginario;  $(+, -)$ , a un elipsoide real;  $(-, +)$ , a un hiperboloide no reglado; y  $(-, -)$ , a un hiperboloide reglado.

Si  $\mu = 0$ , definimos números reales positivos  $a, b, c$  por las fórmulas

$$a = \sqrt{1/\mu_1}, \quad b = \sqrt{1/\mu_2}, \quad c = \sqrt{1/|\mu_3|}$$

con lo cual la ecuación reducida se escribe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0$$

La elección del signo positivo da lugar a un cono imaginario y la del signo negativo a un cono real.

**Cuádricas de tipo parabólico.** Definimos números reales  $a$  y  $b$  por las fórmulas

$$a = 1/\sqrt{\mu_1}, \quad b = 1/\sqrt{|\mu_2|}$$

De esta manera, la ecuación reducida adopta la forma

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

La elección del signo  $+$  da lugar a un paraboloides elíptico, y la del signo  $-$ , a un paraboloides hiperbólico.

**Cilindros centrados.** Supongamos primero que  $\mu \neq 0$ . En este caso, si definimos números reales positivos  $a$  y  $b$  por las fórmulas

$$a = \sqrt{|\mu|/\mu_1}, \quad b = \sqrt{|\mu|/|\mu_2|}$$

la ecuación reducida adopta la forma

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm 1 = 0$$

La elección  $(+, +)$  de los signos da lugar a un cilindro elíptico imaginario;  $(+, -)$ , a un cilindro elíptico real;  $(-, +)$  y  $(-, -)$ , a cilindros hiperbólicos (podríamos prescindir de la combinación  $(-, -)$ : v. nota 4.24).

Si  $\mu = 0$ , podemos definir números reales positivos  $a$  y  $b$  por las fórmulas

$$a = 1/\sqrt{\mu_1}, \quad b = 1/\sqrt{|\mu_2|}$$

con lo cual la ecuación reducida adopta la forma

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0$$

La elección del signo  $+$  da lugar a un par de planos imaginarios conjugados y la del signo  $-$  a un par de planos reales.

**Cilindros parabólicos.** Si ponemos  $p = 1/\mu_1$ , la ecuación reducida se escribe

$$x^2 - 2py = 0$$

que es un cilindro parabólico.

**Par de planos paralelos.** Supongamos, primero, que  $\mu \neq 0$ . Si ponemos  $k = \sqrt{|\mu|/\mu_1}$ , la ecuación reducida adopta la forma

$$x^2 \pm k^2 = 0, \quad k > 0$$

La elección del signo  $-$  da un par de planos paralelos, y la del signo  $+$ , un par de planos paralelos imaginarios conjugados.

Si  $\mu = 0$ , la ecuación reducida es equivalente a una ecuación de la forma  $x^2 = 0$ , que representa un plano doble (dos planos paralelos coincidentes).

## 4.4 Invariantes de las cuádricas

Los coeficientes del polinomio característico de la matriz de una cuádrica, y del polinomio característico de su matriz principal, permiten decidir fácilmente a qué especie pertenece, y también escribir la ecuación reducida.

### Invariantes

Dado un polinomio cuadrático [4.56], sea  $\bar{A}$  su matriz y  $A$  su matriz principal. Definimos números reales  $D_i = D_i(\bar{A})$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $d_i = d_i(A)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , por las fórmulas siguientes:

$$\det(\lambda I_4 - \bar{A}) = \lambda^4 - D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 - D_3\lambda + D_4, \quad \det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - d_1\lambda^2 + d_2\lambda - d_3$$

La expresión  $D_4 = \det(\bar{A})$  se denomina *discriminante* de  $\phi(x, y, z)$  (o *discriminante de la cuádrica*  $\mathcal{Q}_\phi$  *relativamente a las coordenadas*  $x, y, z$ ). Análogamente, la expresión  $d_3 = \det(A)$  se denomina *discriminante* de la parte principal de  $\phi(x, y, z)$ . Observemos que

$$d_1 = a + b + c \quad \text{y} \quad d_2 = ab + ac + bc - (f^2 + g^2 + h^2)$$

Si  $(x', y', z')$  es otro sistema de coordenadas rectangulares, y  $\bar{A}'$  y  $A'$  son la matriz y la matriz principal de  $\tilde{\phi}(x', y', z')$ , respectivamente, pondremos  $D'_i = D_i(\bar{A}')$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , y  $d'_i = d_i(A')$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

**4.26 Proposición.** *Se cumplen las identidades  $D'_4 = D_4$ ,  $d'_3 = d_3$ ,  $d'_2 = d_2$  y  $d'_1 = d_1$ . Si, además, las dos referencias tienen el mismo origen, entonces también se cumplen las identidades  $D'_3 = D_3$ ,  $D'_2 = D_2$  y  $D'_1 = D_1$ .*

**Demostración:** Es análoga a la demostración de las relaciones 4.14 y de la proposición 4.15, y se deja como ejercicio para el lector.  $\square$

Conviene destacar que si, en vez de  $\bar{A}$ , usáramos  $\rho\bar{A}$ ,  $\rho$  un escalar no nulo, para calcular  $\bar{A}'$ , entonces obtendríamos  $D'_4 = D_4(\rho\bar{A}) = \rho^4 D_4$ ,  $d'_i = d_i(\rho\bar{A}) = \rho^i d_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . De esto resulta que expresiones como  $D_4/d_1^4$  (suponiendo  $d_1 \neq 0$ ) o  $D_4^3/d_3^4$  (suponiendo  $d_3 \neq 0$ ) son independientes del sistema de coordenadas y de la ecuación que utilicemos para representar la cuádrica. Esta es la razón por la cual tales expresiones se denominan *invariantes euclidianos* (absolutos) de las cuádricas.

Observemos también que la anulación o no de  $D_4$ ,  $d_3$ ,  $d_2$  y  $d_1$  tampoco depende de la ecuación de la cónica utilizada para verificarlas. Lo mismo sucede con relaciones como  $D_4 > 0$ ,  $d_3 d_1 > 0$  o  $d_2 > 0$ . Puesto que este tipo de relaciones son las que aparecen en los enunciados, con frecuencia, por abuso del lenguaje, también nos referimos a  $D_4$ ,  $d_3$ ,  $d_2$  y  $d_1$  diciendo que son *invariantes euclidianos relativos* de las cuádricas.

Propiedades similares se pueden afirmar de las expresiones  $D_3$ ,  $D_2$  y  $D_1$  si las dos referencias tienen el mismo origen, pero no en general. Es por esta razón que a estas expresiones las llamaremos *semiinvariantes euclidianos* de las cuádricas.

### Índice principal de una cuádrica

En la clasificación efectiva de las cuádricas interviene todavía una noción más, que denominaremos *índice*, o *índice de la parte principal* para ser más precisos, y que por

definición es 0 si todas las raíces no nulas del polinomio característico de  $A$  tienen el mismo signo y 1 si sucede lo contrario, es decir, si dicho polinomio posee al menos una raíz positiva y al menos una raíz negativa.

**4.27 Lema.** *El índice principal de  $\phi(x, y, z)$  es 1 si  $d_1d_3 < 0$  o  $d_2 < 0$ , y es 0 en otro caso, esto es, si  $d_1d_3 \geq 0$  y  $d_2 \geq 0$ .*

**Demostración:** Sean  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  los valores propios de  $A$ . Su producto es  $d_3$  y su suma es  $d_1$ . Si los valores propios no nulos tienen el mismo signo, es claro que  $d_2$  y  $d_1d_3$  son no negativos. Recíprocamente, si  $d_2 \geq 0$  y  $d_1d_3 \geq 0$ , veamos que los valores propios no nulos de  $A$  deben tener el mismo signo. Esto es obvio si solo existe un valor propio no nulo. Si hay exactamente dos valores propios no nulos, entonces  $d_2$  es el producto de ellos y, puesto que suponemos  $d_2 \geq 0$ , deben tener el mismo signo.

Falta examinar el caso en que los tres valores propios son no nulos. Visto que las relaciones  $d_2 \geq 0$  y  $d_1d_3 \geq 0$  no dependen del orden de los valores propios y, además, permanecen las mismas condiciones si cambiamos los tres valores de signo, podemos suponer que  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ . Si este es el caso, se trata de ver que  $\lambda_3 > 0$ . Ahora bien, si fuese  $\lambda_3 < 0$ , tendríamos  $-\lambda_3 \geq \lambda_1 + \lambda_2$ , ya que de la relación  $d_1d_3 \geq 0$  podemos inferir que  $\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \geq 0$ . Pero la relación  $d_2 \geq 0$  nos da  $\lambda_1\lambda_2 \geq -\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)$  y, por tanto,  $\lambda_1\lambda_2 \geq (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ , lo cual es claramente absurdo.  $\square$

Como las relaciones  $d_2 \geq 0$  y  $d_1d_3 \geq 0$  no dependen de la referencia rectangular en la cual las miramos, ni de un factor escalar arbitrario del polinomio  $\phi(x, y, z)$ , podemos definir el *índice principal* de una cuádrica como el índice de una cualquiera de sus ecuaciones. En adelante, pondremos  $j$  para denotarlo.

### *Clasificación de cuádricas mediante invariantes*

Los conos, los cilindros y los pares de planos (reales o imaginarios conjugados, distintos o coincidentes) forman las cuádricas llamadas *degeneradas*, en contraste con elipsoides, hiperboloides y paraboloides, que son las *no degeneradas*.

**4.28.** *Una cuádrica es no degenerada si  $D_4 \neq 0$ , y es degenerada si  $D_4 = 0$ .*

**Demostración:** En términos de las ecuaciones reducidas de la tabla de la página 283, en el caso del tipo centrado tenemos  $D'_4 = \mu_1\mu_2\mu_3\mu$ , que es nulo si se trata de un cono y es no nulo de otro modo. En el caso del tipo parabólico,  $D'_4 = -\mu_1\mu_2 \neq 0$ . En todos los demás casos,  $D'_4 = 0$ . El enunciado es ahora una consecuencia directa de la proposición 4.26.  $\square$

### Cuádricas no degeneradas

En el caso de las cuádricas no degeneradas, razonando de una manera similar a como lo hemos hecho en la prueba del enunciado 4.28, se obtiene que la cuádrica es un paraboloides si  $d_3 = 0$ , y un elipsoide o un hiperboloide si  $d_3 \neq 0$ . Además, estos dos últimos casos se pueden distinguir por la condición  $j = 0$  y  $j = 1$ , respectivamente.

**4.29.** *La condición  $D_4 < 0$  caracteriza los elipsoides reales entre los elipsoides ( $j = 0$ ) y los hiperboloides de dos hojas entre los hiperboloides ( $j = 1$ ).*

**Demostración:** En términos de una ecuación reducida,  $D'_4 = \mu_1\mu_2\mu_3\mu$ . En el caso de los elipsoides,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  tienen el mismo signo, y la condición  $D'_4 < 0$  equivale a decir que  $\mu$  tiene el signo contrario, lo cual corresponde a los elipsoides reales.

En el caso de los hiperboloides, dos de las  $\mu_i$  tienen un signo (que llamaremos *signo dominante*) y la tercera tiene el signo contrario, de manera que la condición  $D'_4 < 0$  equivale a decir que el signo de  $\mu$  coincide con el signo dominante, que es la condición para que la cuádrica sea un hiperboloide de dos hojas.  $\square$

El signo de  $D_4$  también nos distingue, en el caso de los paraboloides, entre los elípticos y los hiperbólicos. De hecho, sabemos que  $D'_4 = -\mu_1\mu_2$  (utilizando la ecuación reducida) y es claro que  $D'_4 < 0$  ( $D'_4 > 0$ ) equivale a decir que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  tienen el mismo signo (signo contrario), es decir, que el paraboloides es elíptico (hiperbólico).

### Cuádricas degeneradas

Para las cuádricas degeneradas ( $D_4 = 0$ ), es manifiesto que la condición  $d_3 \neq 0$  equivale a decir que la cuádrica es un cono, real si  $j = 0$  e imaginario si  $j = 1$ .

Las cuádricas degeneradas tales que  $d_3 = 0$  corresponden, pues, a cuádricas en cuya ecuación reducida aparecen dos o menos coordenadas. Su tratamiento es, pues, del todo paralelo al de las cónicas de un plano (teorema 4.16, pág. 262). Dejamos la comprobación de los detalles como ejercicio para el lector.

### Algoritmo de clasificación euclidiana de las cuádricas

La tabla 4.2, con ser un cuadro sinóptico de lo que llevamos dicho acerca de la clasificación de las cuádricas mediante los invariantes euclidianos, proporciona además un algoritmo para efectuar dicha clasificación.

**4.30 Ejemplo.** Consideremos la cuádrica  $2xy - 2xz + 2yz - 4x + 1 = 0$ . Su discriminante  $D_4$  es 2 y, por tanto, es no degenerada. Por otro lado, el discriminante  $d_3$  de la parte principal es  $-2$ . Para seguir la clasificación, debemos calcular el índice  $j$ . Tenemos  $d_1 = 0$  y  $d_2 = -3$ , de manera que el lema 4.27 nos dice que  $j = 1$ . Se trata, pues, de un hiperboloide. Como  $D_4 > 0$ , el hiperboloide es reglado.

Tabla 4.2: Algoritmo de clasificación de las cuádricas euclidianas

$\left\{ \begin{array}{l} D_4 \neq 0 \\ \\ D_4 = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} d_3 \neq 0 \\ \\ d_3 = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} j = 0 \\ \\ j = 1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{elipsoide} \\ \\ \text{hiperboloide} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} D_4 < 0 \\ \\ D_4 > 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{real} \\ \\ \text{imaginario} \\ \\ \text{dos hojas} \\ \\ \text{una hoja} \end{array} \right.$
		$\left\{ \begin{array}{l} D_4 < 0 \\ \\ D_4 > 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{elíptico} \\ \\ \text{hiperbólico} \end{array} \right.$		
	$\left\{ \begin{array}{l} d_3 \neq 0 \\ \\ d_3 = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} j = 0 \\ \\ j = 1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{cono imaginario} \\ \\ \text{cono real} \end{array} \right.$		
	$\left\{ \begin{array}{l} d_2 \neq 0 \\ \\ d_2 < 0 \\ \\ d_2 = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} d_2 > 0 \\ \\ d_2 < 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \\ \\ D_3 = 0 \\ \\ D_3 \neq 0 \\ \\ D_3 = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} d_1 D_3 < 0 \\ \\ d_1 D_3 > 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{cilindro elíptico real} \\ \\ \text{cilindro elíptico im.} \\ \\ \text{par de planos imaginarios conjugados} \\ \\ \text{cilindro hiperbólico} \\ \\ \text{par de planos reales} \\ \\ \text{cilindro parabólico} \\ \\ \text{par de planos paralelos reales} \\ \\ \text{par de planos paralelos im. conj.} \\ \\ \text{plano doble} \end{array} \right.$

**4.31 Ejemplo.** Consideremos la cuádrica

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 16xz + 24yz + 2x + 4y + 6z + 1 = 0$$

Calculamos  $D_4$  y hallamos que  $D_4 = 0$ : es una cuádrica degenerada. Calculamos  $d_3$  y también hallamos que  $d_3 = 0$ : la cuádrica no es un cono. Calculamos  $d_2$  y también resulta que  $d_2 = 0$ . Para seguir, debemos calcular  $D_3$ , que es  $-6 \neq 0$ : la cuádrica es un cilindro parabólico.

**E.4.45.** Probar que la cuádrica

$$9x^2 + 4y^2 + z^2 - 6xy - 8yz - 4x - 6y + 4z + a = 0$$

donde  $a$  es un parámetro real, representa un hiperboloide de un hoja si  $a < 2$ , un cono real si  $a = 2$  y un hiperboloide de dos hojas si  $a > 2$ .

**E.4.46.** Supongamos que la cuádrica  $Q_\phi$  es un elipsoide real. Demostrar que su volumen es igual a

$$\frac{4}{3}\pi \sqrt{\frac{D_4^3}{d_3^4}}$$

(Suponer que el volumen de un elipsoide de semiejes  $a, b, c$  es  $\frac{4}{3}\pi abc$ . Notemos que esta fórmula se puede deducir a partir del volumen de la esfera de radio  $a$ ,  $\frac{4}{3}\pi a^3$ , con un razonamiento similar al que hemos utilizado (v. 4.2, pág. 237) para obtener el área de la elipse de semiejes  $a, b$  a partir del área de una circunferencia de radio  $a$ .

### *Obtención de las ecuaciones reducidas a partir de los invariantes*

Supongamos que tenemos una cuádrica especificada por una ecuación  $\phi(x, y, z) = 0$  en unas ciertas coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$ . Supongamos también que hemos determinado la especie de esta cuádrica mediante el algoritmo de la tabla 4.2 y que hemos calculado los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de la matriz principal de  $\phi(x, y, z)$ . Con esta información se puede escribir fácilmente la forma de la ecuación reducida. Para simplificar la escritura, pondremos  $x, y, z$  en lugar de las coordenadas  $x', y', z'$  de la ecuación reducida. Además, cambiando de signo la ecuación inicial, si hace falta, podemos suponer que  $\lambda_1 > 0$  y que  $\lambda_2 > 0$  si  $\lambda_3 \neq 0$ .

#### **Cuádricas de tipo centrado**

Si la cuádrica es de tipo centrado, la forma reducida

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{D_4}{d_3} = 0$$

referida a un sistema de coordenadas rectangulares conveniente, define una cuádrica que coincide con  $Q_\phi$ .

En efecto, en términos de la ecuación reducida de tipo centrado, tendremos  $\mu_i = \rho \lambda_i$ , para un cierto número real  $\rho > 0$ . Por tanto,  $d'_3 = \rho^3 d_3$  y  $d'_3 \mu = D'_4 = \rho^4 D_4$ , de donde  $\mu = \rho D_4 / d_3$ .

**Ejemplo.** Para obtener la ecuación reducida del hiperboloide reglado del ejemplo 4.30, hemos de hallar los valores propios de su matriz principal. Puesto que la ecuación secular de esta matriz es  $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$ , vemos que los valores propios son  $1, 1, -2$ . Como  $D_4 = 2$  y  $d_3 = -2$ , la ecuación reducida tiene la forma  $x^2 + y^2 - 2z^2 - 1 = 0$ . Es claro, pues, que el hiperboloide reglado en cuestión es de revolución.

#### **Cuádricas de tipo parabólico**

Existen dos valores propios no nulos,  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2$ . La cuádrica definida por la forma reducida

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - 2\sqrt{\frac{-D_4}{d_2}} z$$

referida a un sistema de coordenadas conveniente, coincide con  $Q_\phi$ .

En efecto, en términos de la ecuación reducida de tipo parabólico, tendremos  $\mu_i = \rho \lambda_i$ , para un cierto número real  $\rho > 0$ . Por tanto,  $\rho^4 D_4 = D'_4 = -\mu_1 \mu_2 = -d'_2 = -\rho^2 d_2$ ,

de donde  $\rho = \sqrt{-d_2/D_4}$ , con lo cual vemos que la ecuación del enunciado se obtiene multiplicando la reducida por  $\sqrt{-D_4/d_2} = 1/\rho$ .

E.4.47. Comprobar que la cuádrica

$$2x^2 - y^2 - z^2 - 8xy + 2yz + 8xz + 2y + 4z = 0$$

representa un paraboloides hiperbólico y encontrar su ecuación reducida.

### Cuádricas degeneradas

Los conos ya han sido considerados. En cuanto a las otras cuádricas degeneradas, la obtención de una ecuación reducida a partir de los invariantes es análoga a la obtención de las ecuaciones reducidas de las cónicas que hemos visto en la sección 4.2.

Para las cuádricas de tipo cilíndrico centrado, por ejemplo, la forma reducida es

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{D_3}{d_2}$$

y para las de tipo cilíndrico parabólico, la forma reducida es

$$\lambda_1 x^2 - 2\sqrt{\frac{-D_3}{d_1}}y.$$

Finalmente, la forma reducida de un par de planos paralelos es

$$\lambda_1 x^2 + \frac{D_2}{d_1}$$

E.4.48. Hallar la ecuación reducida del cilindro parabólico del ejemplo 4.31.

E.4.49. Comprobar que la cuádrica

$$27x^2 - 4y^2 + 36z^2 + 12xy + 72xz - 6x + 4y - 1 = 0$$

es un par de planos reales y hallar su ecuación reducida.

### *Determinación del centro y los ejes principales de las cuádricas centradas*

Se dice que un punto  $P$  es *centro* de una cuádrica si esta es invariante por la simetría  $\sigma_P$ . Las cuádricas centradas tienen un único centro: en términos de las coordenadas de la ecuación reducida, es el origen de coordenadas [ $\diamond$ ].

En términos de coordenadas arbitrarias, las coordenadas  $\mathbf{c} = (x_0, y_0, z_0)$  del centro de la cuádrica  $\mathcal{Q}_\phi$  se determinan por la fórmula

$$\mathbf{c} = -\mathbf{w}A^{-1} \tag{4.63}$$

donde  $A$  es la matriz principal de  $\phi$  y donde, con las notaciones de [4.56],  $\mathbf{w} = (p, q, r)$ .

La prueba de este hecho es análoga a la que hemos expuesto para determinar las coordenadas del centro de una cónica centrada, y se deja como ejercicio para el lector.

Igual que en el caso de las cónicas, el sistema de ecuaciones lineales (en las incógnitas  $x_0, y_0, z_0$ ) que corresponde a la relación matricial

$$cA + \mathbf{w} = 0$$

se denomina *sistema de ecuaciones del centro*. Formalmente, estas ecuaciones son (la mitad de) las derivadas parciales de  $\phi(x, y, z)$  respecto a  $x, y, z$  (sustituyendo, está claro,  $x, y, z$  por  $x_0, y_0, z_0$ , respectivamente). Observemos también que para una cuádrica cualquiera las soluciones de esta ecuación son, como en el caso de las cónicas, las coordenadas de sus *centros*, es decir, de los puntos cuya simetría central dejan invariante la cuádrica (v. nota 4.1). Así pues, el conjunto de centros puede ser vacío, como en el caso de los paraboloides; puede reducirse a un punto, como en el caso de las cuádricas centradas; puede ser una recta, como en el caso de los cilindros de base una cónica centrada; y puede ser un plano, como en el caso que la cuádrica sea un par de planos paralelos.

**Ejemplo.** Las ecuaciones del centro del hiperboloide reglado estudiado en el ejemplo 4.30 son

$$\begin{aligned} y - z - 2 &= 0 \\ x + z &= 0 \\ -x + y &= 0 \end{aligned}$$

de donde resulta que el centro es el punto  $(1, 1, -1)$ .

Las rectas por el centro de una cuádrica se denominan *diámetros*. Un diámetro es un *eje principal* si su vector director es una *dirección principal*, es decir, un valor propio del endomorfismo  $\varphi_A$  que, en la referencia a la que hemos referido la cuádrica, tiene matriz  $A$ . Debido a la manera de cambiar la matriz principal al cambiar de referencia, es inmediato comprobar que  $\varphi_A$  no depende de la referencia. El problema de encontrar los ejes principales, pues, se reduce a resolver un problema de valores y vectores propios.

Si los tres valores propios de  $A$  son distintos dos a dos, hay exactamente tres ejes principales, y estos son los ejes de la referencia reducida. Si los tres valores propios coinciden, todos los vectores son direcciones principales y cualquier referencia rectangular con origen en el centro es reducida. En el caso intermedio en que exactamente dos valores propios coinciden, la cuádrica es de revolución, con eje de revolución el eje principal que corresponde al vector propio distinto. Los otros dos ejes de la referencia reducida no están unívocamente determinados, ya que cualquier eje perpendicular al eje de revolución es principal.

**E.4.50.** Probar que una cuádrica es una esfera real si y solo si  $d_1^2 - 4d_2 = 0$  y  $D_4 < 0$ .

## 4.5 Aspectos proyectivos de las cuádricas

A toda cuádrica del espacio euclidiano le asociamos una «cuádrica proyectiva», de manera similar a como asignábamos una cónica proyectiva a una cónica del plano euclidiano. Así, además de poder considerar los puntos del infinito de una cuádrica, la cuádrica proyectiva nos permite dar un tratamiento adecuado, mediante la noción de conjugación de puntos, a la cuestión de determinar las rectas y planos tangentes a una cuádrica dada. La noción de conjugación de puntos permite también explicar otras propiedades de las cuádricas, como las propiedades proyectivas del centro y de los diámetros.

### *Cuádrica proyectiva y puntos del infinito*

Si  $\bar{A}$  es la matriz de [4.56] y  $\xi = (X, Y, Z, W)$  son las coordenadas proyectivas correspondientes a las coordenadas  $x = (x, y, z)$ , diremos que la ecuación

$$\xi \bar{A} \xi^T = 0 \quad [4.64]$$

define la *cuádrica proyectiva*  $\bar{Q}_\phi$  asociada a la cuádrica  $Q_\phi$ . La ecuación [4.64] determina la cuádrica  $Q_\phi$ , ya que si hacemos la substitución  $\xi \rightarrow \bar{x} = (x, y, z, 1)$  tenemos  $\bar{x} \bar{A} \bar{x}^T = \phi(x)$ . Observemos que si definimos

$$\bar{\phi}(\xi) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2fXY + 2gXZ + 2hYZ + 2pXW + 2qYW + 2rZW + dW^2$$

(diremos que este polinomio cuadrático homogéneo es el resultado de *homogeneizar*  $\phi(x, y, z)$ ), entonces

$$\bar{\phi}(\xi) = \xi \bar{A} \xi^T$$

Los puntos del infinito de la cuádrica  $\bar{Q}_\phi$  son los puntos  $[X, Y, Z, 0]$  tales que

$$(X, Y, Z, 0) \bar{A} (X, Y, Z, 0)^T = 0$$

es decir,  $(X, Y, Z) A (X, Y, Z)^T = 0$ . Diremos que esta ecuación determina la *cónica del infinito* de la cuádrica  $\bar{Q}_\phi$  (o de  $Q_\phi$ ).

Veamos algunos ejemplos. La cónica del infinito de una cuádrica centrada, sea  $\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_3 z^2 + \mu = 0$ , tiene ecuación  $\mu_1 X^2 + \mu_2 Y^2 + \mu_3 Z^2 = 0$ . Esta cónica no tiene puntos reales si la cuádrica es un elipsoide o un cono imaginario, y tiene puntos reales si la cuádrica es un hiperboloide o un cono real.

En el caso de un paraboloides  $\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - 2z = 0$ , la cónica del infinito tiene ecuación  $\mu_1 X^2 + \mu_2 Y^2 = 0$ , es decir, un par de rectas imaginarias si el paraboloides es elíptico, y un par de rectas reales si es hiperbólico.

### Conjugación de puntos

Se dice que dos puntos  $[\xi]$  y  $[\eta]$  son conjugados *conjugados respecto a*  $\overline{Q}_\phi$  si y solo si

$$\xi \overline{A} \eta^T = 0$$

Por ejemplo, un punto es conjugado de sí mismo (diremos *autoconjugado*) si y solo si es un punto de la cuádrica proyectiva.

Puesto que  $\overline{A}$  es una matriz simétrica, tenemos que dos puntos  $P$  y  $Q$  son conjugados si y solo si  $Q$  y  $P$  son conjugados. Diremos que la *relación de conjugación es simétrica*.

### Puntos dobles

Un punto se llama *doble* si es conjugado de cualquier otro punto. Los puntos dobles son, en particular, autoconjugados y, por lo tanto, pertenecen a la cuádrica proyectiva. Los puntos de la cuádrica que no son dobles se llaman *simples*.

Es inmediato verificar que un punto  $[\xi]$  es doble si y solo si

$$\xi \overline{A} = 0.$$

Por tanto, los puntos dobles forman una variedad lineal de dimensión  $3 - r$ , donde  $r$  es el rango de la matriz  $\overline{A}$ . Vemos así que la variedad lineal de puntos dobles es vacía si y solo si la cuádrica es no degenerada.

### Plano polar

Sea  $Q = [\eta]$  un punto y supongamos que no es un punto doble de la cuádrica proyectiva. Entonces, los puntos  $P = [\xi]$  que son conjugados con  $Q$  son los que cumplen la relación

$$\eta \overline{A} \xi = 0.$$

Como  $\eta \overline{A} \neq 0$ , ya que si no  $Q$  sería un punto doble, vemos que el conjunto de puntos  $P$ , que son conjugados con un punto dado  $Q$ , forman el plano que tiene coordenadas  $\eta \overline{A}$ . A este plano lo denominaremos *plano polar* de  $Q$  respecto a la cuádrica proyectiva. Si  $Q$  es un punto doble, el plano polar no está definido.

Reparemos en que de la simetría de la relación de conjugación se infiere que si  $Q_1$  y  $Q_2$  son puntos que no son puntos dobles de la cuádrica, entonces el plano polar de  $Q_1$  pasa por  $Q_2$  si y solo si el plano polar de  $Q_2$  pasa por  $Q_1$ .

**E.4.51.** Mostrar que el plano polar del centro de una cuádrica centrada no degenerada es el plano del infinito.

Para una cuádrica no degenerada, la aplicación de  $\mathbb{P}^3$  a  $\check{\mathbb{P}}^3$  que transforma un punto en su plano polar es una proyectividad. Dado un plano, se define su *polo* (respecto a la cuádrica) como el único punto cuyo plano polar es dicho plano. Por ejemplo, según el ejercicio anterior, el polo del plano del infinito, respecto a una cuádrica centrada, es el centro de esta cuádrica.

**E.4.52.** Probar que los planos polares de los puntos de un plano  $\Pi$ , respecto a una cuádrica no degenerada, forman el haz de planos cuyo foco es el polo de  $\Pi$ .

**E.4.53.** Dada una cuádrica no degenerada y una recta  $L$ , comprobar que el conjunto de los planos polares de los puntos de  $L$  forman una recta dual. El eje de esta recta dual se denomina *polar* de  $L$ . Mostrar que esta recta polar es la intersección de los planos polares de dos puntos distintos cualesquiera de  $L$ .

### Tangencia

Diremos que una recta  $L$  es *tangente a la cuádrica proyectiva en un punto  $P$* , si  $L$  pasa por  $P$  y la intersección de  $L$  con la cuádrica se reduce al punto  $P$  o está totalmente contenida en la cuádrica. En otras palabras, una recta contenida en la cuádrica se considera que es tangente a la cuádrica en todos sus puntos, mientras que para una recta no contenida en la cuádrica la condición de tangencia es que corte la cuádrica en un solo punto y, en este caso, este punto es el punto donde la recta y la cuádrica son tangentes, al cual también llamaremos *punto de contacto* entre la recta y la cuádrica.

### Plano tangente en un punto simple

El resultado que sigue caracteriza las rectas que son tangentes a la cuádrica proyectiva en un punto dado. Como veremos, esto nos permitirá dar una definición natural del plano tangente a la cuádrica en el punto.

**4.32 Teorema.** Sea  $Q$  un punto simple de la cuádrica y  $P$  un punto distinto de  $Q$ . Entonces, la recta  $PQ$  es tangente a la cuádrica si y solo si  $P$  y  $Q$  son conjugados, es decir, si y solo si  $P$  es del plano polar de  $Q$ .

**Demostración:** Sea  $Q = [\eta]$  y  $P = [\xi]$ . Los puntos de la recta  $PQ$  distintos de  $P$  tienen la forma  $[\eta + t\xi]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Por tanto, los puntos de intersección de  $PQ$  con la cuádrica, distintos de  $P$ , se corresponden con las soluciones  $t$  de la ecuación

$$(\eta + t\xi)\bar{A}(\eta + t\xi)^T = 0$$

Como  $\eta\bar{A}\eta^T = 0$ , por ser  $Q$  un punto de la cuádrica, la ecuación anterior equivale a

$$t(2\eta\bar{A}\xi^T + t\xi\bar{A}\xi^T) = 0$$

La solución  $t = 0$  corresponde al punto  $Q$ . Ahora hemos de distinguir dos posibilidades: que  $P$  sea de la cuádrica proyectiva o que no lo sea.

Si  $P$  es de la cuádrica proyectiva, es decir, si  $\xi\bar{A}\xi^T = 0$ , entonces la recta contiene dos puntos distintos de la cuádrica y, por tanto, solo puede ser tangente si está contenida en la cuádrica. Pero esto sólo puede ocurrir si  $\eta\bar{A}\xi^T = 0$  (en caso contrario,  $P$  y  $Q$

serían los dos únicos puntos de intersección de  $PQ$  con la cuádrica, y  $PQ$  no sería tangente), es decir, si  $P$  es conjugado de  $Q$ .

Si  $P$  no es de la cuádrica proyectiva, entonces vemos que  $PQ$  corta la cuádrica en el punto  $Q$  y el punto correspondiente a  $t = -2\eta\bar{A}\xi^T/\xi\bar{A}\xi^T$ . Para que la recta  $PQ$  sea tangente, este último punto debe coincidir con  $Q$ , es decir, debe ser  $\eta\bar{A}\xi^T = 0$ , que es de nuevo la condición que  $P$  sea conjugado de  $Q$ .  $\square$

Si  $Q$  es un punto simple de la cuádrica proyectiva  $\bar{Q}$ , definimos el *plano tangente* a  $\bar{Q}$  como el plano polar de  $Q$ . El teorema anterior nos dice que toda recta por  $Q$  contenida en el plano tangente es tangente a la cuádrica en el punto  $Q$  (y solo en el punto  $Q$  si la recta no está contenida en la cuádrica) y que toda recta por  $Q$  no contenida en el plano tangente corta la cuádrica exactamente en el punto  $Q$  y otro punto  $Q' \neq Q$ .

**E.4.54.** Mostrar que si  $Q$  es un punto doble de una cuádrica, toda recta por  $Q$  es tangente a la cuádrica en el punto  $Q$ . Esto muestra que el teorema anterior es válido para todo punto  $Q$  (simple o doble) de la cuádrica proyectiva.

### Cono de tangentes desde un punto

Sea  $P$  un punto que no pertenece a la cuádrica proyectiva. Nos planteamos encontrar todas las rectas por  $P$  que son tangentes a la cuádrica. Como  $P$  no pertenece a la cuádrica, estas rectas son las que pasan por  $P$  y que cortan la cuádrica en un único punto.

**4.33 Corolario.** Si  $Q$  es un punto de la cuádrica proyectiva, entonces la recta  $PQ$  es tangente a la cuádrica (necesariamente en el punto  $Q$ ) si y solo si  $Q$  es un punto de la intersección del plano polar de  $P$  con la cuádrica  $\bar{Q}$ .

**Demostración:** Si  $PQ = QP$  es tangente, entonces  $P$  es conjugado de  $Q$ . Por la simetría de la relación de conjugación,  $Q$  es conjugado de  $P$ . Es decir,  $Q$  pertenece al plano polar de  $P$ . Recíprocamente, si  $Q$  pertenece al plano polar de  $P$ , entonces  $P$  es conjugado de  $Q$  y la recta  $PQ$  es tangente a la cuádrica en el punto  $Q$ .  $\square$

Se define el *cono tangente* a una cuádrica proyectiva  $\bar{Q}$  desde un punto  $P$  que no le pertenece como el lugar geométrico formado por  $P$  y por los puntos  $X \neq P$  tales que  $PX$  es una recta tangente a  $\bar{Q}$ .

**4.34 Proposición.** Si  $P = [\eta]$ , un punto  $X = [\xi]$  es del cono tangente a  $\bar{Q}$  desde  $P$  si y solo si

$$(\eta\bar{A}\xi^T)^2 - (\eta\bar{A}\eta^T)(\xi\bar{A}\xi^T) = 0$$

**Demostración:** Es idéntica a la del cono de tangentes a una cónica desde un punto que no le pertenece (proposición 4.21) y la dejamos como ejercicio para el lector.  $\square$

Si el punto  $P = [\bar{p}]$  es propio, la ecuación del cono de tangentes es la ecuación proyectiva de un cono con vértice el punto  $P$ . La ecuación en las coordenadas rectangulares  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  es

$$(\bar{p} \bar{A} \bar{x}^T)^2 - (\bar{p} \bar{A} \bar{p}^T)(\bar{x} \bar{A} \bar{x}^T) = 0$$

**E.4.55.** Mostrar que el cono de las tangentes a una cuádrlica centrada no degenerada desde su centro coincide con el cono asintótico.

**E.4.56.** El *perfil de una cuádrlica desde una punto*  $P$  se define como el lugar geométrico de los puntos de contacto de las rectas por  $P$  que son tangentes a la cuádrlica. Mostrar que los puntos de este perfil coinciden con los de la intersección del plano polar de  $P$  con la cuádrlica.

La propiedad del ejercicio anterior es la que hemos utilizado para obtener los perfiles de los gráficos de cuádrlicas de este capítulo, donde el punto  $P$  es, en cada caso, el punto que hemos escogido para «mirar», desde él, la cuádrlica.

## 4.6 Problemas

**P.4.1.** Sean  $r$  y  $s$  el rango de la matriz y de la matriz principal de una cónica. Probar que los posibles valores de  $(r, s)$ , y las cónicas correspondientes, son:

- (3,2) Cónica centrada no degenerada
- (3,1) Parábola
- (2,2) Par de rectas no paralelas
- (2,1) Par de rectas paralelas distintas
- (1,1) Recta doble

**P.4.2** (Teorema 2/3 de Arquímedes). Sean  $AB$  dos puntos distintos de una parábola. Probar que existe una única tangente paralela a  $AB$ . Formemos ahora el paralelogramo  $ABCD$  tal que  $CD$  es la tangente paralela a  $AB$  y de manera que  $AD$  y  $BC$  son paralelas al eje de la parábola. Probar que el área del segmento de parábola determinado por la cuerda  $AB$  es  $2/3$  del área de  $ABCD$ .

**P.4.3** (Teorema de Chasles). Sea  $\mathcal{C}$  una cónica no degenerada y  $A$  y  $B$  dos puntos distintos de  $\mathcal{C}$ . Consideremos los haces de rectas  $A^*$  y  $B^*$  por  $A$  y  $B$ , respectivamente. Sea  $\pi: A^* \rightarrow B^*$  la aplicación definida de manera que si  $P \in \mathcal{C}$ , entonces  $\pi(AP) = BP$ , entendiendo que  $AA$  y  $BB$  son las rectas tangentes a  $\mathcal{C}$  en el punto  $A$  y en el punto  $B$ , respectivamente. Probar que  $\pi$  es una proyectividad. Obsérvese que  $\pi(AA) = BA$  y  $\pi(AB) = BB$ . En particular,  $\pi$  no es una perspectividad (es decir, la recta  $AB$  no es fija por  $\pi$ ).

**P.4.4** (Teorema de Steiner). Sean  $A$  y  $B$  dos puntos distintos del plano. Sea  $\pi: A^* \rightarrow B^*$  una proyectividad y supongamos que  $\pi$  no es una perspectividad. Probar que el lugar geométrico del punto de intersección  $\ell \cap \pi(\ell)$ , donde  $\ell \in A^*$ , es una cónica no degenerada que pasa por  $A$  y  $B$ , y tal que sus tangentes en los puntos  $A$  y  $B$  son  $\pi^{-1}(BA)$  y  $\pi(AB)$ , respectivamente.

En el problema anterior, si  $\pi$  fuese una perspectividad entre  $A^*$  y  $B^*$ , entonces el lugar geométrico de los puntos de intersección  $\ell \cap \pi(\ell)$  está formado por la recta  $v$  que forma el vértice de la perspectividad y por la recta  $AB$ . Interpretaremos, pues, que el lugar geométrico es la cónica degenerada formada por el par de rectas  $AB$  y  $v$ .

**P.4.5** (Teorema de Pascal). Los tres pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica no degenerada se cortan en tres puntos alineados.

**P.4.6** (Teorema de Brianchon). Los tres pares de vértices opuestos de un hexágono circunscrito a una cónica no degenerada determinan tres rectas concurrentes.

**P.4.7.** Demostrar que los puntos medios de todas las cuerdas de una cónica no degenerada que son paralelas a una recta dada,  $L$ , están sobre una recta  $L'$  ( $L'$  es la recta polar del punto del infinito de  $L$ , de manera que  $L'$  es un diámetro).

**P.4.8.** Supongamos que  $C$  es una cónica no degenerada. Las rectas por el centro se denominan *diámetros* de  $C$  y se dice que dos diámetros son *conjugados* si y solo si sus puntos del infinito son conjugados. Probar que si la ecuación de la cónica es  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ , entonces el diámetro conjugado del diámetro de pendiente  $m$  tiene ecuación

$$ax + by + d + m(bx + cy + e) = 0$$

Especializar esta fórmula para el caso de una elipse, una hipérbola y una parábola en forma canónica.

**P.4.9.** Sea  $\mathcal{Q}$  un cuádrice y  $\pi$  un plano tal que su recta del infinito no está contenida en  $\overline{\mathcal{Q}}$ . Probar que la intersección de  $\pi$  con  $\mathcal{Q}$  es una cónica del plano  $\pi$ .

**P.4.10.** Sea  $\mathcal{Q}$  una cuádrice no degenerada y  $P$  un punto no perteneciente a  $\mathcal{Q}$ . Sea  $\pi$  el plano polar de  $P$  respecto a  $\mathcal{Q}$ . Dado un punto  $Q$  de la cuádrice  $\mathcal{Q}$ , tal que  $Q \notin \pi$ , probar que la recta  $PQ$  corta a  $\mathcal{Q}$  en el punto  $Q$  y en otro punto distinto  $Q' \in \mathcal{Q}$ . Demostrar también que el cuarto armónico de  $P$  respecto al par  $\{Q, Q'\}$  es el punto de intersección de  $PQ$  con  $\pi$ .

**P.4.11.** Sean  $r$  y  $s$  el rango de la matriz y de la matriz principal de una cuádrice. Probar que los posibles valores de  $(r, s)$ , y las cuádrices correspondientes, son:

- (4,3) Cuádrica no degenerada centrada
- (4,2) Paraboloides
- (3,3) Cono
- (3,2) Cilindro elíptico o hiperbólico
- (3,1) Cilindro parabólico
- (2,2) Par de planos no paralelos
- (2,1) Par de planos paralelos distintos
- (1,1) Plano doble

**P.4.12.** Demostrar que el plano  $z = ax + by + r\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ , es tangente a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

**P.4.13.** Hallar la ecuación del plano tangente, en términos de la ecuación reducida, en un punto de: a) Una cuádrica centrada no degenerada; b) Un paraboloides.

**P.4.14.** Hallar los planos de la forma  $z = kx$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , que cortan el elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $a > b > c$ ) en circunferencias.

**P.4.15.** Probar que el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas que se cruzan es un paraboloides hiperbólico.

**P.4.16.** Sea  $Q$  una cuádrica reglada y  $L$  una recta contenida en  $Q$ . Probar que las rectas perpendiculares a  $Q$  en los puntos de  $L$  generan un paraboloides hiperbólico.

**P.4.17.** Probar que un paraboloides es tangente al plano del infinito. Por analogía con el tratamiento de las parábolas, diremos que el centro de un paraboloides es el punto del infinito cuyo plano polar es el plano del infinito. Probar que este centro es el punto del infinito del eje del paraboloides (el eje del paraboloides es, en coordenadas reducidas, la recta  $O'z'$ , es decir, el eje principal correspondiente al valor propio 0). Demostrar, finalmente, que el vértice del paraboloides (que en coordenadas reducidas es el origen) es el único punto propio del paraboloides que es conjugado de los puntos del infinito de los otros dos ejes principales.

**P.4.18.** Comprobar que la ecuación  $x^2 + (y \cos \alpha + z \operatorname{sen} \alpha)^2 + 2z = 1$ , siendo  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , define un paraboloides y hallar su vértice.

**P.4.19.** Probar que por un punto  $P$  distinto del centro de una cuádrica centrada no degenerada pasa un único plano que corta la cuádrica en una cónica centrada tal que su centro es  $P$ .

## Bibliografía

- [1] H. S. M. COXETER, *Fundamentos de geometría*. Limusa–Wiley, 1971.
- [2] D. PEDOE, *Geometry, a Comprehensive Course*. Dover, 1988.
- [3] P. PUIG ADAM, *Curso de geometría métrica* (2 vols.). Gómez Puig Ediciones, Madrid, 1979.
- [4] J. ROE, *Elementary Geometry*. Oxford University Press, 1993.
- [5] M. BERGER, *Geometry* (2 vols.). Springer-Verlag, 1987.
- [6] J. DE BURGOS, *Curso de álgebra y geometría*. Alhambra, 1977.
- [7] M. CASTELLET, I. LLERENA, *Álgebra lineal i geometria*. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1, 1990 (2.<sup>a</sup> edición). Con la colaboración de C. Casacuberta.
- [8] L. A. SANTALÓ, *Geometría proyectiva*. EUDEBA, 1966.
- [9] O. SCHREIR, E. SPERNER, *Projective Geometry*. Chelsea Publ. Co., 1961.
- [10] J. G. SEMPLE, G. T. KNEEBONE, *Algebraic Projective Geometry*. Oxford University Press, 1952.
- [11] J.-C. SIDLER, *Géométrie projective. Cours, problèmes classiques et exercices résolus*. InterEditions, París, 1993.
- [12] P. M. NEUMANN, G. A. STOY, E. C. THOMPSON, *Groups and Geometry*. Oxford University Press, 1994.
- [13] G. CASTELNUOVO, *Lezioni di geometria analitica*. Società Editrice Dante Alighieri, 1969 (16.<sup>a</sup> edición).
- [14] F. KLEIN, *Le programme d'Erlangen*. Collection «Discours de la méthode», Gauthier-Villars, 1974.

- [15] R. BAER, *Linear Algebra and Projective Geometry*. Pure and Applied Mathematics 2, Academic Press, 1952.
- [16] D. HILBERT, *Fundamentos de geometría*. Textos Universitarios, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1991.
- [17] B. SEGRE, *Lectures on Modern Geometry*. Edizioni Cremonese, 1961.
- [18] J. GÓMEZ, J. COLL, J. C. MELERO, M. C. BURRY, *La Sagrada Família. De Gaudí al CAD*. Edicions UPC, 1996.
- [19] M. DE GUZMÁN, *Mirar y ver*. Alhambra.
- [20] P. PRUSINKIEWICZ, *The Algorithmic Beauty of Plants*. The virtual laboratory, Springer-Verlag, 1990.
- [21] J. TRIAS, *Laboratori de geometria computacional*. Edicions UPC, 1996.
- [22] J. H. VAN LINT, R. M. WILSON, *A Course in Combinatorics*. Cambridge University Press, 1992.
- [23] V. VILLORIA SAN MIGUEL, *Curvas planas y dibujo por ordenador*. Dossat, 1992.
- [24] P. B. YALE, *Geometry and Symmetry*. Dover Publ., 1988.
- [25] M. KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.
- [26] J. L. COOLIDGE, *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*, Dover Publ., 1968.
- [27] D. J. STRUIK, *A Concise History of Mathematics*. Dover, 1967.
- [28] I. M. YAGLOM, *Felix Klein and Sophus Lie*. Birkhäuser, 1988.
- [29] G. VALIENTE, *Composició de textos científics amb L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*. Edicions UPC, 1996.
- [30] S. WOLFRAM, *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley, 1991.

# Índice alfabético

- \*-afín, 92
- \*-lineal, 92
- afinidad, 82
  - extensión proyectiva, 202
- afinidades de una recta afín, 88
- altura de un paralelepípedo, 126
- altura de un paralelogramo, 126
- análisis, proceso de, 27, 41
- ángulo
  - agudo, 110
  - entre dos vectores, 108
  - exterior (a una circunferencia), 10
  - inscrito (en una circunferencia), 10
  - interior (a una circunferencia), 10
  - orientado, 128
- ángulos
  - aditividad, 109
  - complementarios, 110
  - de un triángulo, 110
  - suplementarios, 108
- antiautomorfismo, 138
- aplicación
  - aditiva, 92
  - afín, 81
    - conserva puntos medios, 90
    - conserva razones simples, 90
  - antilineal, 92
  - bilineal (no degenerada), 159
  - estructural de un espacio afín, 58
  - lineal asociada, 81
  - semiafín, 92
  - semilineal, 92
- Apolonio de Pérgamo, 246, 259
- arco, 27
- arco capaz, 11
- área de un paralelogramo, 126
- aristas de un símplice, 184
- Arquímedes, teorema  $2/3$ , 298
- asíntotas (de una hipérbola), 241
- automorfismo, 92
- axioma de homogeneidad, 58
- axiomatización, 93
- baricentro, 17
- base
  - adaptada a una referencia proyectiva, 186
  - de un paralelogramo, 126
  - de un paralelepípedo, 126
  - $o$ -orientada, 121
  - ortonormal, 106, 113
- bases
  - con igual orientación, 121
  - con orientación opuesta o contraria, 121
- bilineal (simétrica), 101
- bisector, 110
- bisectriz, 8
- Brianchon, teorema de, 299
- caras complementarias u opuestas (de un símplice), 184
- caras de un símplice, 184
- Cartan, teorema de Duèdonné–Cartan, 159
- cateto, 110
- centro
  - del cuerpo de los cuaternios, 137
  - de una cónica centrada, 256
  - de una cónica, interpretación proyectiva, 269
  - de una cuádrlica, 292
  - de una cuádrlica centrada, 271
  - de una homología, 197
  - de una homología especial, 198
  - de una homotecia, 15
  - de una inversión, 24
- centro radical, 20
- Ceva, teorema de, 4
- ceviana, 4

- Chasles, 247  
 Chasles, teorema de, 298  
 cierre proyectivo, 180  
   de una variedad lineal, 181  
 cilindro, 280  
   elíptico, 280  
   hiperbólico, 280  
   parabólico, 280  
 círculo de Euler, 30  
 círculo de los nueve puntos, 31, 55  
 circuncentro, 6  
 circunferencia  
   circunscrita, 2, 6  
   radio de, 23  
   directriz de una elipse, 237  
   directriz de una hipérbola, 241  
   exinscrita, 22  
   focal de una elipse, 239  
   focal de una hipérbola, 242  
   inscrita, 9  
 clasificación euclidiana  
   de las cónicas, 262  
   de las cuádricas, 289  
 clausura proyectiva, 168  
 colineación, 92  
 compleción del cuadrado, 254  
 compleción proyectiva, 180  
 configuración, 184  
   subordinada, 184  
   tipo, 185  
   vértices, 184  
 configuraciones proyectivamente equivalentes, 205  
 cónica, 255  
   analítica, 248, 255  
   centrada, 256  
   centro, 256  
   ecuaciones del centro, 256  
   del infinito (de una cuádrlica), 294  
   determinada por la matriz  $\bar{A}$ , 250  
   directriz del foco, 257  
   ecuación focal, 260  
   ecuación polar, 260  
   lado, 259  
   matriz, 250  
   matriz del infinito, 251  
   matriz principal, 250  
   matriz proyectiva, 251  
   proyectiva (asociada a una cónica analítica), 249  
   puntos del infinito, 249  
   restricción al infinito, 249  
   cónicas  
   como secciones de un cono, 234  
   definición alternativa, 257  
   degeneradas, 262  
   ecuaciones canónicas, 255  
   ejes principales, 266  
   invariantes euclidianos, 261  
   invariantes euclidianos relativos, 262  
   no degeneradas, 262  
   nota histórica, 246  
   primera reducción, 253  
   segunda reducción, 254  
   semiinvariantes, 262  
   usos, 246  
   conjugación  
   de dos pares de puntos alineados, 213  
   simetría (de la relación de), 295  
   conjugados  
   puntos respecto a una cónica, 269  
   puntos respecto a una cuádrlica, 295  
   cono  
   asintótico, 279  
   circular recto, 234  
   generatriz, 234  
   hojas, 234  
   imaginario, 278  
   real, 277  
   tangente (a una cónica desde un punto), 269  
   tangente (a una cuádrlica desde un punto), 297  
   vértice, 278  
   coordenada absoluta, 189  
   coordenadas  
   afines, 72  
   afines, cambio de, 73  
   baricéntricas, 193  
   polares, 260  
   eje, 260  
   origen, 260  
   proyectivas, 187  
   trimétricas, 194  
   coordenadas proyectivas, sistema de, 185  
 Coulomb, 247  
 criterio  
   AA, 13  
   ALA, 2  
   de positividad, 129  
   LAA, 12  
   LAL, 2, 13  
   LLL, 2, 13

- cuadrángulo, 184
  - lados, 184
- cuadrático (polinomio), 248, 280
- cuádrlica
  - centro, 271
  - de revolución, 271
  - definición, 280
  - definición de, 281
  - ejes principales, 271
  - proyectiva (asociada a una cuádrlica), 294
  - reducida, 283
  - semiejes principales, 271
- cuádrlicas
  - de tipo centrado, 291
  - de tipo parabólico, 291
  - degeneradas, 288, 292
  - ecuaciones canónicas, 285
  - ecuaciones reducidas, 291
  - invariantes euclidianos, 287
  - invariantes euclidianos relativos, 287
  - no degeneradas, 288
  - semiinvariantes euclidianos, 287
- cuadrivértice, 185
- cuarto armónico, construcción, 214
- cuaterna
  - armónica, 212
  - armónica de hiperplanos, 213
  - de puntos, 184
  - equianarmónica, 215
- cuaternio
  - conjugado, 138
  - módulo, 137
  - parte real, 137
  - parte vectorial, 137
  - puro, 137
- cuaternios, 136, 161
- cuaternios, cuerpo de los, 137
- Chasles, 247
- Chasles, teorema de, 298
- definido positivo, 101
- Desargues, 166, 168, 170
- Desargues, teorema de, 170, 172, 176, 217
- Descartes, 58, 247
- Descartes, construcción del segmento áureo, 29
- desigualdad
  - de Schwarz, 102
  - triangular de la distancia, 104
  - triangular de la norma, 103
- desplazamiento, 2, 13, 140
  - directo, 13
  - directo o propio, 145
  - inverso, 13
  - inverso o impropio, 145
- desplazamientos
  - de un plano euclidiano, 147
  - del espacio, 151
- diámetros
  - conjugados (de una cónica), 299
  - de una cónica, 299
  - de una cuádrlica, 293
- Dieudonné–Cartan, teorema de, 159
- diferencia de puntos, 62
- dimensión, 174
  - de un espacio afín, 58
  - de una configuración, 184
- dirección de una variedad lineal, 66
- direcciones principales
  - de una cónica, 266
  - de una cuádrlica, 293
- directa, semejanza, 15
- directriz del foco de una cónica, 257
- discriminante
  - de la parte principal de una cónica, 261
  - de la parte principal de una cuádrlica, 287
  - de una cónica, 261
  - de una cuádrlica, 287
- distancia, 99
  - de un punto a un hiperplano, 118
  - de un punto a un subconjunto, 117
  - de un punto a una variedad lineal, 118
  - en un conjunto, 105
  - entre dos puntos, 102
  - entre dos rectas, 119
  - entre dos subconjuntos, 117
  - entre dos variedades lineales, 118
- dual
  - de un enunciado, 222
  - de un espacio proyectivo, 220
  - de un espacio vectorial, 219
- ecuación
  - continua de la recta, 78
  - de los puntos del infinito de una cónica, 249
  - de los puntos fijos, 87
  - focal de una cónica, 260
  - paramétrica vectorial, 67
  - polar de una cónica, 260
  - secular, 253
- ecuaciones
  - canónicas de las cónicas, 255
  - canónicas de las cuádrlicas, 285

- cartesianas, 76, 78
- de la recta (en forma continua), 78
- del centro de una cónica centrada, 256
- del centro de una cuádrica, 293
- paramétricas afines, 76
- paramétricas de una variedad lineal, 191
- Einstein, 58, 61, 62
- eje
  - de las coordenadas polares, 260
  - de revolución de una cuádrica, 271
  - de un cono circular recto, 234
  - de un haz de planos, 220
  - de una homología, 197
  - de una simetría, 13
  - principal de una cuádrica, 266, 293
  - radical, 20
- ejes
  - de una homología biaxial, 227
  - principales de las cónicas, 266
  - principales de las cuádricas, 271
- elipse, 234, 259
  - área, 264
  - centro, 236
  - circunferencia directriz, 237
  - circunferencia focal, 239
  - de garganta (de un hiperboloide reglado), 273
  - ecuación canónica, 236
  - excentricidad, 236
  - focos, 235
  - imaginaria, 247, 255
  - propiedad focal, 238
  - punto exterior, 239
  - punto interior, 239
  - recta tangente en un punto, 238
  - semieje principal, 236
  - semieje secundario, 236
  - vértices principales, 236
  - vértices secundarios, 236
- elipsoide, 271
  - imaginario, 271
  - real, 271
- elíptica, homología, 198
- equipolencia, 60
- equivalentes, polinomios cuadráticos, 281
- Erdős-Mordell, teorema de, 33
- esfera, 272
- esfera imaginaria, 272
- espacio
  - afín, 58
  - asociado, 61
  - como complementario de un hiperplano, 204
  - complejo, 59
  - numérico, 61
  - ordinario, 59
  - real, 59
  - dual de un espacio vectorial, 219
  - euclidiano, 101
  - proyectivo, 173
  - proyectivo dual, 220
  - vectorial asociado (a un espacio afín), 58
- espacio-tiempo, 62
- estrella (de una variedad lineal), 220
- Euclides, v, 246
- Euler, 30, 32, 55, 247
- Euler, círculo de, 30, 55
- Euler, recta de, 32
- excentricidad, 257
- excentro, 9
- extensión proyectiva de una afinidad, 202
- extremo de un segmento, 60
- extremos de un segmento, 104
- Fagnano, problema de, 32
- Fermat, punto de, 32
- foco de un hiperplano dual, 222
- foco de una cónica (polar de), 267
- foco de una parábola, 242
- focos de una elipse, 235
- focos de una hipérbola, 240
- forma diagonal, 282
- formas lineales, 219
- formas reducidas, 252
- fórmula
  - de Herón, 23
  - de las dimensiones, 70, 178
  - del producto mixto, 130
- Galileo, 247
- generatrices
  - de un cilindro, 280
  - de un cono, 234, 278
  - de un hiperboloide reglado, 274
  - de una cuádrica, 273
- geometría analítica, 94
- geometría sintética, 93
- giro, 149
- Gram-Schmidt, método de, 114
- grupo
  - afín, 86
  - de una recta afín, 88
- cambios de coordenadas afines, 73

- ortogonal, 107, 144
  - ortogonal especial, 107
  - proyectivo, 194
- Hamilton, 136
- Hamilton, relaciones de, 136
- haz de hiperplanos, 211, 221
- Herón, fórmula de, 23
- hipérbola, 240, 259
  - ángulo formado por las asíntotas, 265
  - asíntotas, 241
  - centro, 240
  - circunferencia directriz, 241
  - circunferencia focal, 242
  - ecuación canónica, 240
  - equilátera, 241
  - excentricidad, 240
  - focos, 240
  - propiedad focal, 242
  - puntos exteriores, 242
  - puntos interiores, 242
  - rama de un foco, 241
  - recta asíntótica, 241
  - semieje principal, 240
  - semieje secundario, 240
  - vértices, 240
  - zona central, 242
  - zona focal, 242
- hiperbólica, homología, 198
- hiperboloide, 271
  - no reglado, 271
  - reglado, 271, 273
- hiperplano, 66, 179
  - bisector de dos hiperplanos, 118
  - bisector de dos puntos, 116
  - bisector de dos vectores, 110
  - del infinito (o de puntos impropios), 180
  - polar armónico de un punto, 225
- hiperplanos, haz de, 211
- hipotenusa, 110
- hojas de un cono, 234
- homogeneizar (un polinomio cuadrático), 294
- homografía, 194
  - expresión en coordenadas, 203
- homología, 197
  - armónica, 213
  - biaxial, 227
  - biaxial armónica, 227
  - centro, 197
  - centro de una homología especial, 198
  - eje, 197
  - elíptica, 198
  - especial, 197
  - general, 197
  - hiperbólica, 198
  - módulo, 197
  - parabólica, 198
- homotecia, 15, 83, 148, 153
  - centro, 15
  - extensión proyectiva, 203
  - módulo, 15
- identidad de Jacobi, 160
- incentro, 8
- incidente
  - de un subespacio vectorial, 219
  - de un subespacio vectorial de formas, 219
- incidentes
  - dos variedades lineales, 174
  - un vector y una forma lineal, 219
- índice (principal) de una cuádrica, 287, 288
- invariante proyectivo (de configuraciones de puntos), 206
- invariante, variedad lineal, 151
- invariantes euclidianos
  - de las cónicas, 261
  - de las cuádricas, 287
  - relativos de las cónicas, 262
- inversa, semejanza, 15
- inversión
  - centro, 24
  - conservación de los ángulos, 27
  - de una circunferencia, 25
  - de una recta, 25
  - potencia, 24
- inversión, carácter involutivo, 24
- inversiones, 24, 230
- inverso, de un punto respecto a una circunferencia, 24
- involución, 143, 196
- involutiva, 213
- isometría, 115, 143
- Jacobi, identidad de, 160
- Kepler, 247
- Klein, vi
- lado
  - de un triángulo, opuesto a un vértice, 176
  - de una cónica, 259
- lados
  - de un cuadrángulo, 184
  - opuestos, 184

- de un triángulo, 110, 176, 184
- latitud, 158
- latus rectum* (de una cónica), 259
- Lemoine, punto de, 229
- ley de adición, 58
- longitud, 99, 102, 158
  - de un segmento, 126
- matriz
  - de una cónica, 250
  - de una cuádrica, 281
  - de una métrica, 105
  - de una proyectividad, 195
  - de una referencia proyectiva respecto a otra, 188
  - del infinito de una cónica, 251
  - del infinito de una cuádrica, 281
  - ortogonal, 107
  - principal de una cónica, 250
  - principal de una cuádrica, 281
  - proyectiva, 281
  - proyectiva de una cónica, 251
- matriz de una aplicación lineal, 82
- medianas, 5
- mediatriz, 6
- Menecmo, 246
- método de Gram-Schmidt, 114
- métrica, 101
- módulo
  - de una homología, 197
  - de una homología biaxial, 227
  - de una homotecia, 15
- Monge, 247
- Mordell, teorema de Erdős-Mordell, 33
- Morley, teorema de, 30
- movimiento helicoidal, 153
- movimiento rígido, 140
- multilineal alternada, aplicación, 122
- multilineal, aplicación, 122
- Nagel, punto de, 228
- Newton, 58, 61, 247
- norma, 99, 102
- norma (de un espacio vectorial), 105
- números complejos, 16
- orientación, 121
- orientaciones de un espacio, 121
- origen
  - de las coordenadas polares, 260
  - de un segmento, 60
  - de una referencia, 71
- ortocentro, 6
- ortogonales, subconjuntos, 111
- ortonormal, base, 106
- Pappus, teorema de, 177
- par de planos, 280
- par de rectas, 246
- par de rectas imaginarias conjugadas, 246
- par de rectas paralelas, 246
- parábola, 242, 259
  - directriz, 243
  - ecuación canónica, 243
  - eje, 243, 270
  - foco, 242
  - parámetro focal, 243
  - propiedad focal, 244
  - punto exterior, 245
  - punto interior, 245
  - recta tangente en un punto, 244
  - vértice, 270
  - vértice, 243
- parabólica, homología, 198
- paraboloide
  - elíptico, 274
  - hiperbólico, 274
- paralelepípedo, 126
- paralelogramo, 126
- parámetro focal, 257
  - de una parábola, 243
- parte principal
  - de un polinomio cuadrático, 248, 280
- Pascal, 247
- Pascal, teorema de, 299
- pedal, triángulo, 29
- perfil
  - de una cuádrica desde un punto, 298
- perspectiva, triángulos en, 176
- perspectividad, 198
  - centro de una, 198
- Pitágoras, teorema de, 4, 19, 104, 110
- plano
  - afín, 59
  - polar (de un punto respecto a una cuádrica), 295
  - polar armónico, 225
  - proyectivo, 173
  - tangente (a una cuádrica en un punto), 297
- planos, 66, 174
- polar
  - de una recta del espacio, 296

- plano (de un punto respecto a una cuádrica), 295, 299
- recta (de un punto respecto a una cónica), 267
- polinomio cuadrático, 248
- polinomio cuadrático reducido, 283
- polo
  - de un plano, 295
  - de una recta, 268
- Poncelet, 247
- Poncelet, proyectividad de, 199
- Poncelet, teorema de, 199
- potencia de un punto respecto a una circunferencia, 19
- potencia de una inversión, 24
- principio de dualidad, 222
- problema de Fagnano, 32
- producto escalar, 101
  - definido positivo, 101
- Programa de Erlangen, vi
- proyección
  - de un punto, 198
  - de un punto sobre un plano, 166
  - estereográfica, 229
  - ortogonal, 100
  - ortogonal (de un punto sobre una variedad), 114
  - ortogonal (lineal), 112
- proyectante
  - de un punto desde otro, 166
  - de un punto desde una variedad, 198
- proyectividad, 194
  - de Poncelet, 199
  - de von Staudt, 229
- proyectividades
  - teorema fundamental, 196
- Ptolomeo, teorema de, 32
- Puig-Adam, vi
- punto
  - autoconjugado (respecto a una cónica), 269
  - autoconjugado (respecto a una cuádrica), 295
  - conjugado complejo, 248, 281
  - de contacto, 238
    - de una recta tangente a una cuádrica, 296
    - de una recta tangente con una cónica, 268
  - de Fermat (de un triángulo), 32
  - de Lemoine (de un triángulo), 229
  - de Nagel (de un triángulo), 228
  - de una cónica, 248
  - de una cuádrica, 281
  - del infinito de una recta, 168
  - doble de una cuádrica, 295
  - doble de una inversión, 25
  - exterior a una variedad lineal, 174
  - exterior de una elipse, 239
  - exterior de una hipérbola, 242
  - exterior de una parábola, 245
  - imaginario de una cónica, 248
  - imaginario de una cuádrica, 281
  - impropio de una recta, 168
  - independiente de una variedad lineal, 174
  - interior de una elipse, 239
  - interior de una hipérbola, 242
  - interior de una parábola, 245
  - medio, 89
  - real de una cónica, 248
  - real de una cuádrica, 281
  - simple de una cuádrica, 295
  - unidad (de una referencia proyectiva), 185
- punto medio, 75
- puntos, 66
  - alineados, 175
  - concílicos, 20
  - conjugados respecto a una cónica, 269
  - conjugados respecto a una cuádrica, 295
  - de un espacio afín, 58
  - del infinito de una cónica, 249
  - dependientes, 183
  - diferencia de, 62
  - fijos, 87
    - de una homografía, 196
  - ecuación, 87
  - ecuación en una referencia, 88
  - impropios, 168
  - independientes, 67, 183
  - no alineados, 67
- $\mathcal{R}$ -coordenadas, 72, 187
- $r$ -símplice, 126, 184
- $(r + 1)$ -vértice  $s$ -dimensional, 185
- razón
  - áurea, 16
  - de una homotecia, 15, 83
  - de una semejanza, 140
  - doble, 207
    - de cuatro hiperplanos de un haz, 211
    - indeterminada, 208
    - invariancia proyectiva, 210
    - propiedad multiplicativa, 210
  - simple, 74

- recta  
   afín, 59  
   afín del tiempo, 61  
   asintótica, 241  
   de Euler, 32  
   doble, 246  
   polar armónica, 225  
   proyectiva, 173  
   tangente (a una cónica), 268  
   tangente (a una cuádrica), 296
- rectángulo áureo, 16
- rectas, 66, 174  
   coplanarias, 179  
   que se cruzan, 179
- referencia, 71  
   afín, 71  
   baricéntrica, 193  
   dual, 223  
   proyectiva, 185  
     asociada a una base, 186  
     asociada a una referencia afín, 187  
     base adaptada, 186  
     punto unidad, 185  
     símplice, 185  
     vértices, 185  
   rectangular, 116
- relaciones de Hamilton, 136
- representación proyectiva de un plano, 169
- representación proyectiva de una recta, 168
- representante (de un punto proyectivo), 173
- rotación, 149
- Rutherford, 247
- Schmidt, método de Gram-Schmidt, 114
- Schwarz, desigualdad de, 102
- segmento, 104  
   áureo, 16  
   construcción de Descartes, 29  
   orientado, 60
- segmentos equipolentes, 60
- semejanza, 139  
   directa (o propia), 15, 145  
   inversa (o impropia), 15, 145  
   lineal, 143  
   razón, 140
- semejanzas  
   construcción, 145  
   de un plano euclidiano, 147  
   de una recta euclidiana, 145  
   del espacio, 151
- semiafinidad, 92
- semidistancia focal, 235
- semiejes principales  
   de una cónica, 236, 240, 255, 258, 259  
   de una cuádrica, 271
- semiespacio abierto, 80
- semiespacio cerrado, 80
- semiinvariantes euclidianos  
   de las cónicas, 262  
   de las cuádricas, 287
- semilado de una cónica, 259
- semiperímetro, 21
- semiplano, 80
- semiproyectividad, 229
- semirrecta, 80
- separación armónica, 213
- signo dominante (de una ecuación reducida), 289
- simetría, 13  
   axial, 148  
   axial con deslizamiento (o con traslación paralela), 148, 153  
   central, 143, 148, 153  
   con deslizamiento, 13  
   eje, 13  
   especular, 143  
   especular con deslizamiento (o con traslación paralela), 152  
   respecto a un subespacio vectorial, 142
- simétrico  
   de un punto respecto a una variedad lineal, 141  
   de un vector respecto a un subespacio, 142
- símplice, 126  
   aristas, 184  
   caras, 184  
   de una referencia proyectiva, 185
- síntesis, proceso de, 27, 41
- sistema de ecuaciones cartesianas de una variedad lineal, 190
- sistema de vectores directores, 67
- soporte de un haz de planos, 220
- Steiner, 247
- Steiner, teorema de, 299
- subespacio director, 66
- subgrupo invariante, 86
- subgrupo normal, 86
- suceso, 61
- suma de variedades lineales, 69
- suma proyectiva, 178
- Tales, teorema de, 13, 14, 74
- tangente, plano (a una cuádrica), 297
- tangente, recta (a una cónica), 249

- tangente, recta (a una cuádrlica), 296
- teorema
- 2/3 de Arquímedes, 298
  - de Brianchon, 299
  - de Ceva, 4
  - de Chasles, 298
  - de clasificación euclidiana de las cónicas, 262
  - de clasificación euclidiana de las cuádrlicas, 289
  - de Desargues, 170, 172, 176
    - recíproco, 217
  - de Dieudonné–Cartan, 159
  - de dualidad, 221
  - de Erdős–Mordell, 33
  - de la altura, 17
  - de los senos, 5
  - de Morley, 30
  - de Pappus, 177
  - de Pascal, 299
  - de Pitágoras, 4, 19, 104, 110
  - de Poncelet, 199
  - de Ptolomeo, 32
  - de Steiner, 299
  - de Steiner–Lehmus, 22
  - de Tales, 13, 14, 74
  - de von Staudt, 229
  - del cateto, 18
  - del coseno, 4
  - del cuadrángulo completo, 214
  - fundamental
    - de la geometría afín, 92, 93
    - de la geometría proyectiva, 229
    - de las aplicaciones afines, 84
    - de las proyectividades, 196
- terna (de puntos), 184
- tetraedro, 126, 184
- tipo
- centrado, 252
  - de rectas paralelas, 252
  - de una configuración, 185
  - parabólico, 252
- transformación afín, 82
- transformación ortogonal, 143
- transformación semiafín, 92
- traslación, 63, 83, 148
  - extensión proyectiva, 203
- triángulo, 110, 184
  - diagonal (de un cuadrángulo), 184
  - lados, 176
  - ordenado, 176
  - órtico, 7
  - pedal, 29
  - rectángulo, 110
  - semiperímetro, 21
  - vértices, 176
- triángulos
- congruentes, 2
  - cráteros de igualdad (o congruencia), 2
  - cráteros de semejanza, 12
  - en perspectiva, 176
  - iguales, 2
- variedad lineal, 65, 174
  - cierre proyectivo, 181
  - del infinito, 181
  - determinada por puntos, 68, 183
  - determinada por un sistema de ecuaciones, 190
  - dimensión, 174
  - ecuaciones cartesianas, 76
  - estrella, 220
  - incidente con, 174
  - pasa por, 174
  - perpendicular (a una variedad por un punto), 112
  - real, 226
- variedades lineales
- ortogonales, 112
  - paralelas, 67
  - perpendiculares, 112
  - suma proyectiva, 178
- vector de posición, 62
- vector libre, 60
- vector unitario, 102
- vectores
- ortogonales, 110
  - perpendiculares, 108, 110
- vértice
- de un cono circular recto, 234
- vértices
- de un triángulo, 110, 176
  - de una configuración, 184
  - de una referencia proyectiva, 185
- volumen, 122
  - absoluto, 122
  - de un tetraedro, 127
  - de una base, 122
- von Staudt, proyectividad de, 229
- von Staudt, teorema de, 229
- Weyl, 58



## COL·LECCIONS D' EDICIONS UPC

### POLITEXT

Matemàtica i Estadística  
Tecnologia Elèctrica i Electrònica  
Física i Enginyeria Nuclear  
Enginyeria Química i Tèxtil  
Computació i Control  
Arquitectura i Urbanisme  
Enginyeria Civil  
Administració i Economia  
Enginyeria Mecànica  
Comunicacions  
Nàutica

### POLITECNOS

#### AULA

Aula Teòrica  
Aula Pràctica  
Quaderns d'Aula

### ARQUITECTURA

Aula d'Arquitectura  
Quaderns d'Arquitectes  
Col·lecció d'Arquitectura  
Col·lecció d'Art, Disseny, Arquitectura i Urbanisme

### TEMES (tercer cicle)

TEM (Temes d'Enginyeria Mecànica)  
TOE (Temes d'Organització d'Empreses)  
TIA (Temes d'Intel·ligència Artificial)  
TAC (Temes Audiovisuals i de Comunicació)  
TIE (Temes d'Instrumentació Electrònica)

### TEMES CLAU (llibres d'accés a la UPC)



Sebastià Xambó es catedrático del Departamento de Matemática Aplicada II de la UPC, adscrito a la Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME), donde imparte docencia de Geometría, Teoría de Códigos Correctores y Modelos Matemáticos de la Física Matemática. Posee una larga experiencia docente, especialmente en los dominios de la geometría, el álgebra y la geometría algebraica. Actualmente se interesa por las aplicaciones del álgebra y la geometría a la teoría de la codificación y al proceso de la señal, incluyendo sus aspectos algorítmicos y computacionales, y también por las relaciones profundas que se han puesto de manifiesto en los últimos años entre la geometría algebraica y las teorías cuánticas de campos.

El nivel de este texto corresponde al de un primer curso de universidad o de escuela técnica y las materias que se tratan son las de la geometría afín, la geometría euclidiana, la geometría proyectiva y las cónicas y cuádricas. Con el fin de ampliar o profundizar en la materia de cada capítulo se ha incluido una lista de problemas al final de cada uno de ellos. Asimismo, la obra empieza con un capítulo cero de geometría clásica, cuyo propósito es hacer de puente con las enseñanzas de secundaria, especialmente en lo referente a las habilidades para resolver problemas.

