



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→ **UPCGRAU**

Enfoca la física: una revisió amb història →

Enrique Alvarez Lacalle
Gabriela Aznar Siguan



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Enfoca la física: una revisió amb història →

Enrique Alvarez Lacalle
Gabriela Aznar Siguan

Primera edició: abril de 2013

Disseny i dibuix de la coberta: Jordi Soldevila

Disseny maqueta interior: Jordi Soldevila

Maquetació: Mercè Aicart

Fotografia de la coberta: © Daniel i Mireia Rodríguez Marín

© Enrique Alvarez Lacalle, 2013

© Problemes: Gabriela Aznar Siguan, 2013

© Iniciativa Digital Politècnica, 2013
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Dipòsit legal: B. 17864-2013

ISBN: 978-84-7653-958-3

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei. Si necessiteu fotocopiar o escanejar algun fragment d'aquesta obra, us he d'adreçar al Centre Espanyol de Drets Reprogràfics (CEDRO), <<http://www.cedro.org>>.





Índex

1. Introducció. Per on anàvem	11
1.1. Fins i tot un noi de setze anys ho entendria	11
1.2. Llegir és poder comptar coses. La resta és història	11
1.3. Llegir i matemàtiques	13
1.4. Problemes per pensar	15
2. La física d'un primer de grau. Unitats	19
2.1. Viatgem a Escòcia	19
2.2. 1861	21
2.3. En acabar primer has de saber el mateix que aquell escocès	22
2.4. Unitats: raonant s'arriba lluny	23
3. Comencem les matemàtiques. Babilònia, les regles de tres i la notació científica	27
3.1. Regles de tres i errors més comuns de fraccions	27
3.2. La notació científica	28
4. La matemàtica amb els grecs i els hindús	33
4.1. La trigonometria dels 360 no entén d'angles	33
4.2. Els radians	34
4.3. El problema	34
4.4. Igualtats trigonomètriques	35
5. Matemàtica àrab, matemàtica d'equilibri	39
5.1. Al-jabr	39
5.2. Àlgebra elemental i no tan elemental	40
5.3. Sistemes d'equacions	41



6. Les matemàtiques arriben a Europa	45
6.1. Descartes	45
6.2. Les coses creixen (i decreixen) de formes galdoses	46
7. La il·lustració és una derivada	53
7.1. El límit	53
7.2. La derivada	54
7.3. Ara cal fer derivades	56
8. Integrar és dividir primer, sumar després	63
8.1. Pots integrar indefinidament amb taules, però els límits els has de trobar sol	63
8.2. Teorema fonamental del càlcul	64
8.3. Molts problemes acaben integrant-se	65
9. Moure's en tres dimensions vol dir treballar amb vectors	71
9.1. La no tan subtil diferència	71
9.2. Els vectors	72
10. Cinemàtica. Les coses es mouen	81
10.1. Les coses es mouen	81
10.2. Si es mou en una dimensió, només necessites una regla, un rellotge i càlcul diferencial	82
10.3. Si tinc $x(t)$, només cal derivar i integrar	84
10.4. Uns quants exemples	85
11. Dos moviments molt importants	93
11.1. Tir parabòlic	93
11.2. Components intrínseques	94
11.3. Moviments circulars	96
12. Us hauria de sonar alguna cosa	105
12.1. Una breu història de l'inici de l'electromagnetisme	105
12.2. Els primers descobriments	106
12.3. Els descobriments comencen	109
12.4. Michael i James, associats	110
12.5. I què en podem concloure?	110
12.6. Conclusió: Prepara't, perquè les idees seran complicades	111



→ 1



Introducció. Per on anàvem?

*Clear? Why, a four-year old child could understand this report...
Run out and find me a four-year old child.*

(Groucho Marx a Duck Soup)

1.1. Fins i tot un noi de setze anys ho entendria

“Oi tant que entenc l’informe. Fins i tot un nen de quatre anys l’entendria. Porteu-me un nen de quatre anys”, va dir Groucho Marx en una de les seves grans pel·lícules. Com que Groucho Marx sempre tenia raó, aquesta introducció de Física hauria de recordar totes aquelles coses que, en un moment o altre, un ha estudiat i après abans d’arribar, si bé no als quatre anys, sí als setze.

Entendre i dominar allò que s’aprèn amb setze anys és imprescindible en començar un grau. La realitat, en canvi, és que la primera vegada que s’explica una cosa, amb prou feines s’entén prou per poder-la repetir de forma coherent. Qualsevol eina, o concepte, sembla al principi una fotografia sense enfocar. Quan la veus, o la recordes, tens una idea vaga del que hi ha, però no ho acabes de veure clar. Dit d’una altra manera, una eina matemàtica o concepte no s’entén amb claredat fins que s’utilitza de forma sistemàtica... i es domina. Aquest resum hauria de servir per recordar tots els aspectes i eines que hauríeu de poder utilitzar amb molta facilitat des de fa anys. Eines que són imprescindibles per enfocar bé aquest curs i aprovar. La part final d’aquests apunts recordarà també aspectes del temari de batxillerat relacionats amb el càlcul diferencial que, si bé no cal dominar a la perfecció quan es comença el curs, utilitzarem força al llarg d’aquest. De fet, al final de l’any, han de convertir-se en un equivalent del que sumar i restar és per a un nen de sis anys. I què millor que començar aquest repàs recordant una cosa que un nen de sis anys tot just aprèn a fer: llegir. I és que, probablement, la principal raó de la majoria de suspesos en un primer de grau és la manca de capacitat per entendre el que es llegeix.

1.2. Llegir és poder comptar coses. La resta és història

Per entendre com la dificultat de la lectura fa suspendre anem al Tibidabo de fa uns 12.000 anys. La mar apareix, de sobte. En una banda, on només es veia terra, ara només es



veu aigua. El que havia estat terra ferma es converteix en l'actual mar Mediterrània a causa de la pujada forta del nivell del mar al final de l'última glaciació. El clima estava canviant, cada cop més benigne per la multiplicació i expansió de tota mena de plantes i animals. L'*Homo sapiens*, que havia superat la glaciació, tot just comptava amb un parell de milions de membres a tot el món. A mesura que la temperatura millorava, més i més plantes es feien comestibles, més caça es trobava, i un nombre més grans de caçadors i recol·lectors era sostenible en l'hàbitat. En constant moviment, tenien tot el menjar necessari, un menjar que necessitaven poc temps per trobar. La resta, i majoria, del temps era per l'oci. La societat era també molt igualitària, no hi havia reserves d'aliments, ni conflictes sobre aquests. Hi havia, però, un petit problema, molta inseguretat en el subministrament de menjar. Però, si deixem de banda l'elevada mortalitat infantil (una boca era molt cara de mantenir), era l'edat daurada de l'*Homo sapiens*.

Si durant aquesta edat daurada anem cap a l'est, a l'actual sud de Turquia, l'abundància de caça, fruites, gra i plantes era tan gran, que gairebé no calia moure's. I aleshores, alguns *Homo sapiens* van decidir quedar-se quietes. Fer construccions fortes, i intentar reduir la dificultat del subministrament de menjar coneixent i conservant millor el que recollien. I aleshores, un darrere l'altre, van aparèixer els (probablement) dos canvis més importants en la història de la humanitat: l'agricultura i l'escriptura. El primer, anomenat també el pitjor invent de la història de la humanitat, va aparèixer a poc a poc, sense que ningú se n'adonés. El segon va ser gairebé un resultat del primer. L'agricultura no és res més que la domesticació de plantes, i aquestes plantes domesticades van aparèixer lentament, per selecció natural causada per la recol·lecció sistemàtica d'aquestes per part de recol·lectors sedentaris. Aquests anaven als mateixos llocs on havien recollit l'any passat. Aquelles varietats que tenien el gra a la part de dalt i queien abans eren les que després tornaven a créixer. I en algun moment, en algun lloc, algú va començar a prémer aquella llavor que queia per ajudar-la a tornar a créixer. I generació darrere generació, la recol·lecció es feia més "domesticada".

La "sembla primitiva" apareix de forma independent a diferents parts del món amb mil·lennis de diferència, i allà on l'agricultura es va anar formalitzant de mica en mica, es va expandir atraient, o empenyent lluny, els caçadors recol·lectors. La ramaderia va seguir el mateix procés lent, tot i que va començar una mica més tard. Però va ser l'agricultura la que va significar el canvi més important que la humanitat hagi conegut mai (si més no el canvi més important fins al segle XIX): els nens eren, per primera vegada, benvinguts. Més nens, més fàcil era conrear el camp. Més mans, més capacitat d'emmagatzemar. Més nens que, per primera vegada, es poden alimentar. I és clar, més població: d'uns quants milions vam passar a un centenar de milions. I una població gran amb reserves d'aliment porta problemes.

Quan tens tant gra i no pots fugir carregant-lo a sobre ja no és tan fàcil mantenir un tabú en contra de les grans diferències en el repartiment del menjar. Quan hi ha tanta gent, ja no és tan difícil ajuntar-ne un nombre suficient, més forts o murrís que els altres, que puguin demanar aquell sobrant de menjar en nom d'una divinitat. Mantenir la igualtat es fa molt difícil, i el descobriment del tractament del metall (del bronze, concretament) va ser el cop de gràcia. Si abans del metall ja havien aparegut les primeres construccions pertanyents només a una elit separada dels camperols (elit típicament religiosa que governava un gran nombre de poblats agricultors), aviat va aparèixer el guerrier, la jerarquia, la propietat i, encara més important per a nosaltres, els impostos a canvi de protecció, també anomenada extorsió. I l'extorsió fou l'origen de l'escriptura.



I tanta xerrameca per explicar que l'escriptura apareix perquè els impostos s'havien de comptar? Doncs sí. Llegir és difícil perquè pensar en termes lògics és difícil. Per comptar es van sistematitzar les marques sobre terracota (ja conegudes per comptar). Aquestes petites marques cuneïformes es van anar afinant per tal que l'escriptor reial pogués anar més ràpid i fer una llista completa de tots els objectes confiscats. Van aparèixer els símbols per a cada una de les coses que es recaptaven. Aviat van aparèixer símbols per a tot, i aquests símbols s'assemblaven cada cop menys a l'objecte original. L'aparició de l'escriptura, igual que la del metall, apareix en moments diferents en llocs diferents de la Terra, però sempre un cop alguna planta ha estat domesticada i la vida sedentària s'ha estabilitzat. I sempre comença amb símbols per comptar. Només després apareix en alguns llocs la generalització i "banalització" de l'escriptura (en molts llocs l'escriptura era sagrada en un principi) en la forma d'escriptura alfabètica. Cada símbol utilitzat per l'elit es converteix en mans de la multitud en un fonema per reproduir el so dels mots. En lloc d'aprendre un símbol per cada objecte, només en calen uns 20 per representar tots els fonemes. Aquesta democratització produïda a l'Orient Mitjà es va traslladar a Grècia i Roma, on va esdevenir un instrument per diferenciar l'estatus social i mantenir tota una jerarquia legal. Ja no eren només l'escrivà i el sacerdot els que sabien escriure, eren els ciutadans (i fins i tot molts esclaus triats per fer-los escriure)... La resta és història.

1.3. Llegir i matemàtiques



Fig. 1.1
Les cartes cuneïformes eren una miqueta diferents de les nostres. Aquesta portava males notícies segons indica la Wikipedia. Wikipedia Commons té el copyright obert de totes les imatges aquí presentades, amb l'excepció de les fetes pels autors per il·lustrar exercicis.

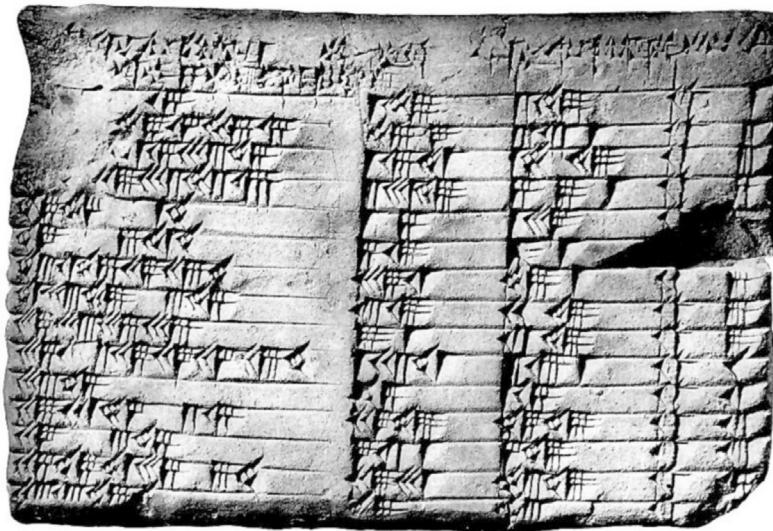
Però no és pas història sinó present el fet que, des que els romans ho van decidir així, la forma d'expandir l'escriptura hagi estat ensenyar als nens petits com funciona. Concretament, creant aquest invent força recent anomenat *escola*. I és que els nens de cinc anys poden entendre un idioma i parlar-lo sense instrucció; només necessiten escoltar-lo en un context social. No necessiten res més. En canvi, així no s'aprèn a escriure. Sense instrucció no hi ha lectura ni escriptura. Així doncs, tot i que l'escriptura va començar com una forma de comptar coses, ha estat durant molts anys una manera de mantenir una estructura social jeràrquica i complexa a base de, naturalment, fer possible la transmissió d'*històries*. L'escriptura ja no servia només per comptar sinó també per contar (des de coses per imaginar fins a lleis per obeir).

Però això no ens ha de fer oblidar el seu origen i la dificultat que comporta entendre les coses que un llegeix quan aquestes no són una simple simbolització d'una operació matemàtica.

Per exemple, considera el problema següent:

$$\text{Troba } y \text{ si } 2x + 6y = z \text{ amb } z = \frac{2 \cdot 1500}{4 \cdot 5} \text{ i } x = y^2.$$

Fig. 1.2
Si no saps resoldre una equació de segon ordre sempre pots practicar amb aquesta taula d'exercicis que un escriva utilitzava per ensenyar als seus alumnes com resoldre $x - 1/x = c$ (equivalent a $x^2 - cx - 1 = 0$). Per sort, aquesta taula (la Plimco 322) té totes les solucions als problemes plantejats. Només cal aprendre els números babilonis.



Fàcil? Si saps àlgebra (una mica més difícil que explicar una història, però no gaire més) aquest exercici és ben simple. Si en saps, sabràs substituir el que val z de la segona equació i x de la tercera equació en la primera equació, i trobar que en el fons et demanen que trobis una y tal que $2y^2 + 6y = 150$. Això és el mateix que trobar $2y^2 + 6y - 150 = 0$ (si la part de la dreta ha de ser igual a 150, la part de la dreta menys 150 ha de ser forçosament zero). I això és una equació de segon ordre que saps resoldre si has fet matemàtiques d'ESO. La solució té la forma següent:

$$ay^2 + by + c = 0 \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.1)$$

I substituint $a = 2$, $b = 6$ i $c = -150$, dóna 7,3. Això és un problema en el fons matemàtic. O saps les matemàtiques necessàries o no. Espero que les sàpigues. Considera, en canvi, el següent enunciat:

Un company et diu que ha comprat dues pel·lícules al mateix preu i sis litres d'un vi de Somontano. En aquesta compra s'ha gastat dues setmanades. Cada setmanada és una cinquena part de la quarta part del sou mitjà de 1500 euros dels seus pares. A més a més, sap que si multiplica el preu que costa un litre de vi per ell mateix obté el mateix valor numèric que el que costa una de les pel·lícules. Quant li ha costat un litre de vi?

És molt probable que aquest problema et costi molt més de resoldre. Abans de continuar llegint, intenta-ho. T'ha costat el doble... o menys? T'has adonat que el resultat és el mateix que la variable y del problema anterior? I t'has adonat que de fet és el mateix problema? Hi ha molts estudiants que poden resoldre el primer però no aquest segon problema. La raó és que no saben transformar un text en simbologia matemàtica. Si ets



d'aquests estudiants et recomano, sincerament, que llegeixis i llegeixis... molt. Aquesta incapacitat per entendre un problema i transformar-lo en un esquema teòric que saps resoldre és la raó darrera de molts suspesos. Aquesta dificultat de llegir històries que has de transformar en matemàtiques porta associada la dificultat d'entendre un concepte físic i aplicar-lo en un problema matemàtic. Si no saps llegir, estudiar es converteix en l'intent de recordar tècniques per resoldre problemes patró. "Quan em treuen del patró suspenc", dirien molts.

I és que llegir històries no és fàcil. Llegir el problema anterior i adonar-se que t'estan demanant una incògnita y (el preu d'un litre de vi) no és fàcil. Adonar-se que t'estan donant dades que pots posar en termes d'equacions és encara més difícil. No deixar-se cap d'aquestes dades encara costa més. I sobretot, el que més costa és desfer-se de les coses que no són necessàries. Tan difícil és això últim que els professors sabem que si posem una dada no necessària en un problema el percentatge d'estudiants que no el resol s'aproxima perillosament al cent per cent. I no hauria de ser així. Hauríeu de llegir i entendre el que llegiu. Hauríeu de saber transformar el segon problema.

Malauradament aquesta mancança no es soluciona en un dia ni en dos, sinó en anys dedicats a llegir. Gran part de la dificultat d'aprovar una assignatura com física consisteix a entendre idees complexes escrites en textos. A vegades, fins i tot, a entendre què és el que exactament t'està demanant un enunciat d'un problema. Si tens experiència a llegir i entendre textos, aquesta assignatura et requerirà simplement un temps d'estudi. Si no, cal que practiquis la lectura d'històries. I com més complexes siguin les idees a entendre en aquesta història millor. Només s'aprèn practicant la lectura.

1.4. Problemes per pensar

Diuen que un famós científic anomenat Fermi, per ensenyar els seus alumnes a llegir i a pensar, els posava problemes que semblaven no tenir solució. De fet, no tenien solució exacta, però sí una solució aproximada si s'aprenia a pensar.

Un problema tipus Fermi és el següent:

Quants afinadors de piano hi ha a Chicago?

Sembla que no ho puguis respondre si no ho mires a Google. I realment, saber exactament quants n'hi ha, no ho sap ni Google. En canvi, sí que es pot dir si són uns 10, uns 50, uns 100, uns 500, uns 1.000, uns 10.000...

Com? Doncs aprenent a pensar. Quina informació et permetria saber quants afinadors de piano hi ha en una ciutat? Probablement el primer que necessites és saber els pianos que hi ha a Chicago. Si saps quants pianos hi ha, podries saber quants afinadors hi ha? Pots pensar que sí, ja que un afinador ha de tenir suficients pianos per guanyar-se la vida. Suposa que treballa unes 30 hores setmanals afinant pianos. Si saps quantes hores necessita un afinador per afinar un piano sabries quants pianos s'han d'afinar per any per afinador. El número d'afinadors actius ha d'estar relacionat amb el número de pianos. Si saps el número de pianos a Chicago i cada quant s'afina un piano, pots fer una bona estimació de quants afinadors hi ha.



Per altra banda, com podries saber quants pianos hi ha a Chicago? Bé, hauries de saber, primer de tot, la població de Chicago i quin percentatge d'aquesta té un piano. Això ho pots saber si tens alguna idea de quin percentatge de gent no només està interessada en la música sinó que la practica o l'estudia. El piano és un dels instruments més comuns; probablement la meitat o més de la gent interessada fortament en la música té un piano a casa.

I amb aquest esquema, ara podem intentar fer algunes suposicions. Chicago és una ciutat gran, més que Barcelona, però menys que Nova York, així que deu estar entre els 2 i els 10 milions d'habitants. Posem uns 5 milions (entre 3 i 7 si volem estudiar els marges d'error). Això implica entre un milió i dos milions d'habitatges. D'aquests, es poden permetre un piano un 70%. Posem, doncs, que com a molt hi ha un milió d'habitatges amb mitjans per tenir un piano. Quin percentatge estarà interessat en la música? Mira al teu voltant: els barcelonins no devem ser gaire diferents de la gent de Chicago, i si ho creus pots posar un factor de correcció. Però al teu voltant, entre l'1 i el 5 % com a mínim i el 20% de persones com a màxim estan interessades fortament en la música. Agafem el 10% dels habitatges; això fan 100.000 pianos.

És important adonar-se que aquest és el número més important de tot el raonament; per tant, has de mirar de comprovar si té sentit. Té sentit que hagin passat 100.000 persones per les escoles de música al llarg de la vida útil dels pianos? Si suposem que entren com a mínim unes 1.000 persones a fer música a Chicago, en 100 anys en tindríem 100.000. Si considerem que entren menys persones o que 100 anys és massa per renovar la població interessada, aleshores el número de pianos és una mica massa exagerat. Podem, doncs, fer una forquilla. Els pianos estaran entre 20.000 pel cap baix (agafant 500 estudiants durant una vida útil de 40 anys) i 100.000 pel cap alt, depenent de quin sigui el número real de gent interessada.

I cada quant s'afina un piano? Doncs no es fa cada any ni cada dos anys si no ets un professional. Es deu fer cada cinc o deu anys, si ets amateur. Ens plantejem, doncs, que dels 100.000 pianos, com a màxim 10.000 es necessitaran afinar molt sovint, la resta menys sovint. Posem, doncs, que hi ha unes 50.000 afinacions per any. Quanta gent necessites per fer aquestes afinacions? Doncs a veure, un afinador deu necessitar un mínim d'una hora per fer-ho. Potser això d'afinar és delicat, posem que necessita 4 hores. Així, imaginem que es fan entre 2 i 8 afinacions per dia. En un any hi ha uns 250 dies laborables. Això fa que cada afinador pugui fer entre 500 i 2.000 afinacions per any. Així doncs, pel cap alt hi ha 100 afinadors. Pel cap baix uns 25. Tenint en compte que el número d'afinacions el sabem amb un marge d'error, i el nombre d'hores també, podem ara agafar situacions més extremes. Uns 20 com a mínim (si fessin 1.000 afinacions per any amb només 20.000 afinacions l'any) i uns 200 com a màxim (si cadascun pot fer 500 pianos l'any amb 100.000 afinacions). Solució: entre 20 i 200 afinadors.

El nombre real es troba a l'entorn de 100. No està malament, oi?

Podries ara saber *Quants afinadors d'acordió hi ha a Barcelona?* o *Quants estudiants de la UPC es compren un mòbil avui?* Espero que, si no ho saps, hi pensis.



→ 2



La física d'un primer de grau.

Unitats

Però no només cal saber llegir, cal saber fer alguna cosa més abans de començar aquest curs. Per saber-ho, comencem a Escòcia.

2.1. Viatgem a Escòcia

Escòcia, anys trenta. Però els anys trenta de fa dos segles. Som en el que seria ara una gran masia (i en aquell temps era un espècie de palau) on el nen acaba de recitar de memòria el salm 119 de la Bíblia. I el nen només té sis anys. Com és típic (recordem, llocs i temps diferents, vida i costums diferents), la mare només permet que el nen aprengui a llegir si utilitza la Bíblia, i vet aquí que un nen d'una masia d'Escòcia s'aprèn de memòria el que llegeix. El dia d'eufòria per les virtuts del nen aviat es transforma en una mica de neguit: al nen, la Bíblia l'avorreix. L'ha llegit de dalt a baix i és un rotllo. Preocupada per com el nen utilitzarà el seu talent, la mare veu amb alegria que el nen també trobi avorrides totes les seves joguines. No tenen cap gràcia, massa simples, es diu. El noi aviat dirigeix l'atenció, amb vuit anys, a fer coses ell mateix. Li agrada molt la llum i estudiar com s'il·luminen les coses. Aviat fabrica un mirall d'estany. També li agraden les granotes; així que, a més a més de fer, suposo, el que tot nen fa amb les granotes, comença a anotar amb detall el seu cicle de naixement, reproducció i mort.

La mare, en veure que li interessa la ciència, es torna a tranquil·litzar. No hi ha millor camí per trobar Déu que entendre la natura. Com a tot el món europeu, que just acabava de donar a la ciència el poder de dictaminar sobre les coses d'aquest món (la religió era sobre coses de l'altre món), la religió de la mare no representa cap problema per a la carrera futura de James (que així es deia el nen, igual que el seu pare, i el seu avi, i el seu besavi...). En una altra època el nen hauria estat apartat de les funestes maquinacions de Galileu i els seus acòlits. Ara, en canvi, la mare no en tenia cap dubte: James havia de deixar de banda tot el món legal, on habitava el seu pare, i el religiós, on habitava la seva mare. Hauria de ser científic. I ella pregaria contínuament per la salut del noi, una salut dèbil que era l'únic impediment per un futur científic brillant.

Fig. 2.1
La mare de James
i el noi.



Les pregàries van ser escoltades (o no). El cas és que el nen va patir cinc anys de malalties contínues, però va sobreviure. I als quinze anys va publicar el seu primer article científic sobre els eclipses, tot just després d'entendre les lleis de la mecànica i la gravitació que Newton havia formulat el 1687. Jo als quinze anys no sabia ben bé com treure'm els mocs. En James també va estudiar òptica geomètrica per entendre les lleis més bàsiques de la llum. Després va arribar el torn d'aprendre les lleis de la termodinàmica, tot just establertes, que explicaven com funcionaven aquelles grans màquines que començava a escampar la Revolució Industrial per tot el continent (on per continent hem d'entendre, com els anglesos, la Gran Bretanya). A més d'entendre aquestes lleis, les va millorar i ampliar a l'estudi de sistemes amb molts elements (tants elements com àtoms hi ha en un litre de gas).

El jove va captar aviat que la base del coneixement científic clàssic no estava completa, hi faltava alguna cosa. Hi havia un munt d'experiments del que la gent anomenava electricitat que s'entenien parcialment. Hi havia un altre grup de propietats de materials relacionades que no s'entenien. També hi havia moltes propietats i experiments sobre magnetisme que s'explicaven en forma de noves lleis. Eren experiments i lleis diferents dels elèctrics, però semblava que alguns experiments permetien relacionar alguns aspectes. I no es sabia ben bé per què.

Un dia del mateix any que comença la Guerra Civil americana (amb Lincoln d'una banda i un grup d'Estats del sud per l'altra), aquell James –més concretament James Clark Maxwell– revoluciona el món publicant el primer d'una sèrie de quatre articles (dos dobles) que “ho explicaven tot”:

- Explicaven tota una sèrie d'experiments relacionats amb l'electricitat.
- Explicaven tota una sèrie d'experiments relacionats amb el magnetisme.



- Explicaven tota una sèrie d'experiments que relacionaven l'electricitat amb el magnetisme.
- Demostrava que, no només uns quants, sinó tots els fenòmens elèctrics i magnètics (entre ells moltes propietats de materials) tenien un origen comú.
- I per culminar-ho demostrava que la llum i tota l'òptica geomètrica es derivaven de les mateixes lleis que explicaven els experiments elèctrics i magnètics. Tota una llarga llista d'experiments d'òptica recollits durant més de 2.500 anys (si bé en molta més quantitat en els segles XVIII i XIX) s'explicava des d'un nou punt de vista. La llum era electricitat i magnetisme.



Fig. 2.2
El jove Maxwell a la universitat.

I per descomptat, també proposava tota una nova sèrie de fenòmens, ara ja *electromagnètics*, que haurien de ser observats si el que deia era veritat... I es van observar. Ja no hi havia electricitat per un costat, magnetisme per un altre i llum per un altre. Només hi havia electromagnetisme. I ones, moltes ones. Tan gran va ser l'èxit de Maxwell que després d'aquests articles els científics van pensar que ho sabien tot, on per *tot* entenem totes les lleis fonamentals. Mecànica, termodinàmica i electromagnetisme: ja no hi havia res més per explicar... I ho van pensar fins a principis del segle XX. Cinquanta anys on tots els experiments que es feien es podien explicar amb les lleis conegudes, només calia saber destriar quins aspectes eren rellevants. Només quan es van començar a investigar coses molt petites, les lleis de la física clàssica (que així és com tothom va anomenar els coneixements que tenia el món cap al 1870) van començar a no ser vàlides. I és que pràcticament tots els fenòmens que veus en la teva vida diària es poden explicar sabent el mateix que Maxwell sabia el 1870. En el món de l'aeronàutica, per exemple, la termodinàmica per a motors i l'aplicació de les lleis de Newton als fluids són molt importants. En el món de les telecomunicacions, tot s'explica amb les lleis de l'electromagnetisme, que porten el nom del seu autor: equacions de Maxwell.

2.2. 1861

Algú va dir que si per alguna cosa ha de ser recordat el 1861 ha de ser per aquest descobriment de Maxwell i no pas per la Guerra Civil americana. Per què? Fem un breu



repàs del que va significar per al món conèixer les lleis de l'electromagnetisme. El món de la termodinàmica ens va donar els motors, i el de Newton el moviment d'objectes sòlids i fluids tant terrestres com celestials, però l'electromagnetisme ens va donar la ràdio, el microones, el sonar, el radar, la televisió, els telèfons, els circuits, els ordinadors, l'electricitat, les centrals elèctriques i el principi de l'aparell elèctric. Ens va donar, en definitiva, el món modern. Sense els científics que s'havien posat a fer experiments i van descobrir fenòmens elèctrics o magnètics increïbles, i sense la contribució d'aquell nen escocès, potser avui en dia no ens podríem comunicar; o bé potser hauríem trigat un segle més a fer-ho, esperant un altre nen que trobés profundament avorrides les seves joguines.

Un altre físic més contemporani, famós per la seva capacitat de tocar els bongos i descobrir grans lleis de la física en una barra americana, va dir d'en Maxwell:

“Perhaps the most dramatic moment in the development of physics during the 19th century occurred to J. C. Maxwell one day in the 1860's, when he combined the laws of electricity and magnetism with the laws of the behavior of light. As a result, the properties of light were partly unravelled – that old and subtle stuff that is so important and mysterious that it was felt necessary to arrange a special creation for it when writing Genesis. Maxwell could say, when he was finished with his discovery, «Let there be electricity and magnetism, and there is light!»”

2.3. En acabar primer has de saber el mateix que aquell escocès

Doncs sí. En la majoria de primers cursos de grau us demanem que entengueu el que va trobar Maxwell. Us podeu imaginar la dificultat. Recordem breument quines coses sabia Maxwell abans d'entendre el món elèctric, magnètic i de la llum. Entenia les lleis del moviment de les coses i de la gravetat, sabia molt bé com funciona la transmissió de calor i la generació de treball i sabia que la llum, a l'hora de fer estris òptics com ulleres o telescopis, es podia entendre com rajos que segueixen lleis ben establertes. En definitiva, entenia en profunditat les lleis bàsiques de la mecànica i la gravitació, la termodinàmica, l'òptica geomètrica... I a més sabia moltes mates.

Preguntem-nos quina part d'aquest coneixement era imprescindible per entendre el seu descobriment. Primer i segur, la mecànica. Sense Newton no s'entendria com funcionen les coses que es mouen, i en electromagnetisme hi ha moltes coses que es mouen. I la termodinàmica? Doncs seria molt útil per entendre circuits i alguns efectes de l'electromagnetisme. És fonamental per entendre aplicacions de l'electromagnetisme. Però per entendre l'electromagnetisme en si? Doncs no. Per sort de molts estudiants, no cal. I l'òptica geomètrica? Doncs sí, seria necessària per entendre un dels nuclis fonamentals de l'electromagnetisme, la llum. Però hi ha una cosa curiosa, les propietats de la llum potser que s'entenguin millor estudiant primer les equacions de Maxwell. Així doncs, la majoria d'universitats del món dediquen un any d'estudi intens per entendre i utilitzar les lleis de Newton en problemes difícils. I després, s'ensenya termodinàmica i l'electromagnetisme en classes separades durant els anys següents. I si interessa molt l'òptica i la llum, s'estudia en detall l'òptica geomètrica en el marc de l'electromagnetisme.

A Espanya, en canvi, és molt típic fer un primer semestre de mecànica i un segon d'electromagnetisme condensant el temari en un any sense entrar en problemes molt difícils.



Termodinàmica, si cal, es deixa per a cursos superiors (tot i que no sempre). Així doncs, l'única manera d'entendre la mecànica de Newton i l'electromagnetisme és amb una bona base matemàtica, llegint molt i, potser, afegint-hi creença. Creença en el que et diran els professors, perquè no tindràs temps de comprovar que totes les coses que et diuen són certes.

Així doncs, necessites una bona base matemàtica. Però abans necessites saber una mica de les coses amb què mesuraràs les coses. Cal fer un repàs de les unitats que veuràs en aquest primer curs de Física.

2.4. Unitats: raonant s'arriba lluny

Distància, temps, massa i càrrega. Amb aquestes quatre unitats faràs la resta. On per *resta* vull dir poder obtenir la resta d'unitats i comprovar si molts exercicis que has fet són correctes.

Comencem per la distància, ja que la seva unitat de mesura probablement et deu sonar. La mesura que es fa amb un regle en un sistema de referència donat és la distància. La unitat fonamental són els metres, sempre agafant el Sistema Internacional (SI) de mesures. Un sistema que vol deixar en desús les milles.

Per altra banda tenim el temps, allò que mesurem amb un rellotge. Et pot semblar una banyada, però aquesta és la definició correcta. El que és més difícil és decidir què és un bon rellotge.

La massa també és una unitat fonamental, però en el sistema mètric decimal fem una cosa especial: la unitat bàsica no és el gram, que no té prefix, sinó que la unitat bàsica és agafar un múltiple, és a dir, un kilogram. Sembla estrany, però es va fer així. La massa és massa complicada de definir. De fet, no es defineix com allò que mesura una bàscula. Tenim un patró del kilogram, una barra guardada a París que pesa exactament 1 kilogram per definició. El problema és que aquesta barra perd massa amb el temps, així que un dia s'haurà de canviar.

I per últim, cal conèixer la unitat de càrrega, que és el coulomb. És una mica estranya, perquè té poc a veure amb les coses que sabem ara sobre els electrons i protons, les partícules elementals més que conegudes que tenen càrrega. Però és que la ciència necessitava trobar moltes coses abans d'adonar-se que existia l'electró. La càrrega ja existia per als físics abans que ningú descobrís d'on provenia. Com en el cas de la massa, tenim un estàndard per mesurar un coulomb. De fet, el nom de la unitat es deu a Coulomb, el científic que va ser capaç de fer mesures amb prou precisió per poder mesurar les forces que es realitzen entre elles càrregues relativament petites i a partir d'aquí tenir prou precisió per mesurar càrregues.

Un cop saps aquestes quatre unitats, la resta d'unitats et vindrà derivada de les lleis que aniràs veient al llarg del curs. I com és, això? Imagina't que el professor et diu que l'acceleració és una cosa que es mesura en metres per cada segon per cada segon. O dit d'una altra manera, en metres partit per segons al quadrat. I a més et diu que la força és igual a la massa multiplicada per l'acceleració. Immediatament pots saber les unitats de la força. Només cal que apliquis la fórmula a les unitats. Si resulta que $F = ma$, on m és



massa (kg) i a és acceleració (m/s^2), resulta que, sigui el que sigui la F , aquesta tindrà unitats de kg m/s^2 . Això s'escriu $[M][L]/[T]^2$, on $[M]$ indica unitat fonamental de massa, $[L]$ de longitud i $[T]$ de temps.

Si ara, d'aquesta combinació d'unitats en diem newton, sabràs la definició de la nova unitat newton en funció de les altres. I a partir d'aquestes, en podràs generar més. Així, si algú et diu que l'energia és força multiplicat per distància, això vol dir que serà newton per metre, i això vol dir $[M][L]^2/[T]^2$. I si et diuen que l'energia es mesura en joules, ja saps com escriure aquesta unitat en termes de les bàsiques.

Però l'anàlisi d'unitats és molt més potent que això. Pots resoldre problemes d'un tema sense tenir-ne pràcticament ni idea. Durant el curs ho pots necessitar. Necessitaràs també treballar amb múltiples d'unitats en l'anomenada notació científica. Necessitaràs també canviar d'unitats en alguns casos. Són coses que ja hauràs vist en cursos anteriors. Per recordar-les hem d'anar cap a Babilònia.

Problema 1

Dóna les dimensions i unitats de la constant de gravitació universal, G , sabent que es compleix l'equació $F = -GM_1M_2/r^2$. On F és una força, M_1 i M_2 són masses i r és una longitud.

Solució

Aïllant G de l'equació de la força, tenim: $G = -F \frac{r^2}{M_1M_2}$.

Per tant,

$$[G] = [F] \frac{[L]^2}{[M]^2} = \frac{[L]^3}{[T]^2[M]}$$

Així, si fem servir el Sistema Internacional, les unitats de G són:

$$[G]_{SI} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{kg}}$$

Problema 2

Quan un objecte *quadrat* cau en presència de l'atmosfera, apareix una força de resistència que depèn del producte de l'àrea de l'objecte i el quadrat de la seva velocitat, és a dir, $F = CAv^2$, on C és una constant i A és l'àrea. Determina les dimensions de C .

Solució

$$F = CAv^2 \Rightarrow C = \frac{F}{Av^2} \quad (2.1)$$

Com que $[v] = \frac{L}{T}$ i $[A] = L^2$, podem deduir les dimensions de la constant C :

$$[C] = [F][A]^{-1}[v]^{-2} = \frac{ML}{T^2} \frac{1}{L^2} \frac{T^2}{L^2} = \frac{M}{L^3} \quad (2.2)$$



→ 3



Comencem les matemàtiques. Babilònia, les regles de tres i la notació científica

La primera gran expansió de les matemàtiques va passar a Grècia. En canvi, la majoria dels càlculs que s'han de realitzar en un examen vénen de molt abans, de Babilònia i de l'Índia. A Babilònia ja coneixen tots els números sencers i l'Índia va transformar i inventar el número zero, que els babilonis només havien intuït. El zero és probablement el primer gran invent de les matemàtiques. Per al segon gran invent jo votaria per la regla de tres.

3.1. Regles de tres i errors més comuns de fraccions

Un cop sabem sumar i multiplicar, el següent pas en dificultat, probablement, són les fraccions i les regles de tres. En el fons, fraccions i regles de tres són el mirall una de l'altra. Això ja ho sabien al segle VII abans de Crist les civilitzacions més importants. I en la nostra civilització actual a vegades sembla que encara no ho acabem d'entendre. És realment increïble les vegades que en exàmens universitaris es poden trobar *errors com aquests*:

$$x = \frac{6+4}{y+4} = \frac{6}{y} + 1 \quad (3.1)$$

$$x = \frac{4}{6} + \frac{y}{2} = \frac{4y}{12} = \frac{y}{3} \quad (3.2)$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1 \quad (3.3)$$

En una altra època universitària això hauria garantit el suspens. Tots aquests errors demostren que darrere no hi ha un concepte clar del que és una fracció. El numerador i el



denominador d'una fracció no es poden separar de la manera indicada als errors. Per altra banda, és fàcil comprovar que aquestes igualtats no són certes quan es substitueixen les variables mudes per un número arbitrari. Per exemple, en el primer error, si decideixes que $y = 6$ tindries que la banda dreta és igual a $\frac{6+4}{y+4} = \frac{10}{6+4} = \frac{10}{10} = 1$; a l'esquerra donaria 2.

Un error d'aquest tipus no només fa mal a la vista sinó que porta directament a un resultat erroni en la solució de qualsevol problema. No hi ha dubte que tots sabeu calcular amb fraccions; molt diferent és que domineu aquest càlcul. És recomanable practicar i practicar si creieu que podeu arribar a fer alguna d'aquestes errades.

Recordeu que l'únic que heu de recordar per entendre les fraccions és la regla de tres:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a = b \frac{c}{d} = \frac{bc}{d} \quad (3.4)$$

En altres paraules: *4 és a 2,5 el que 12,5 és a?*, o d'una altra manera *Si 4 euros paguen 2 quilos i mig de mangos, quants quilos de mango pots comprar amb 12,5 euros?*

$$\frac{2,5 \text{ kg mangos}}{4 \text{ euros}} = \frac{x \text{ kg mangos}}{12,5 \text{ euros}} \Rightarrow x = \frac{2,5 \text{ kg mangos } 12,5 \text{ euros}}{4 \text{ euros}} = 7,81 \text{ kg mangos} \quad (3.5)$$

3.2. La notació científica

També és bastant habitual que un estudiant es faci un embolic amb les regles de tres i la notació científica inventada uns quants segles després. La dinàmica d'un sistema es mesura en metres, segons i kilograms. I els múltiples d'aquests són molt necessaris, ja que aplicar les lleis a un problema diferent dona lloc a diferents distàncies característiques. No és el mateix tractar un problema de moviment d'una pilota a la terra que la d'un planeta al sistema solar. L'ordre de magnitud de les distàncies és completament diferent. I aquests ordres de magnitud diferent s'anomenen tal com indica la figura 3.1, una taula que hauries de conèixer. Recorda, doncs, que $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, etc. A més a més, $10^{-1} = 0,1 = 1/10$, $10^{-2} = 0,01 = 1/100$... I amb això pots construir qualsevol número en notació científica. Així, 43.200 m són $4,32 \cdot 10^4 = 43,2 \cdot 10^3$ m i 43,2 km.

Costa una miqueta més adonar-se que $10^4/10^5 = 10^{4-5} = 10^{-1} = 0,1$ o que $10^4/10^{-5} = 10^{4+5} = 10^9$. Tot i així, encara s'embolica més quan has de passar d'una unitat a una altra. *Quants quilòmetres per hora al quadrat és una acceleració de 20 nanòmetres per microsegon al quadrat?* Aquest problema sembla fàcil; en canvi, és normal que els estudiants no arribin a la solució correcta:

$$\begin{aligned} a &= 20 \text{ nm}/\mu\text{s}^2 = 20 \frac{10^{-9} \text{ m}}{1 \text{ nm}} \frac{10^{-3} \text{ km}}{1 \text{ m}} \frac{1 \mu\text{s}}{10^{-6} \text{ s}} \frac{3.600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \frac{1 \mu\text{s}}{10^{-6} \text{ s}} \frac{3.600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \\ &= 20 \cdot 3,6^2 10^{-9-3+6+3+6+3} = 259,2 \cdot 10^6 \text{ km/h}^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

I si agafes pràctica ho podràs escriure així:

$$a = 20 \text{ nm}/\mu\text{s}^2 = 20 \frac{10^{-12} \text{ km}}{1 \text{ nm}} \frac{1^2 \mu\text{s}^2}{(10^{-6})^2 \text{ s}^2} \frac{3.600^2 \text{ s}^2}{1 \text{ h}^2} = 259,2 \cdot 10^6 \text{ km/h}^2 \quad (3.7)$$



10^n	Prefix	Símbol	Any [nota 1]	Nom	Nombre decimal
10^{24}	yotta	Y	1991	Quadrilió	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	zetta	Z	1991	Mil trillions	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	exa	E	1975	Trilió	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	peta	P	1975	Mil bilions	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	1960	Bilió	1 000 000 000 000
10^9	giga	G	1960	Mil milions	1 000 000 000
10^6	mega	M	1960	Milió	1 000 000
10^3	kilo	k	1795	Mil	1 000
10^2	hecto	h	1795	Cent	100
10^1	deca	da/D	1795	Deu	10
10^0	(cap)	(cap)	S/O	Unitat	1
10^{-1}	deci	d	1795	Dècim	0,1
10^{-2}	centi	c	1795	Centèsim	0,01
10^{-3}	mil·li	m	1795	Mil·lèsim	0,001
10^{-6}	micro	μ	1960	Milionèsim	0,000 001
10^{-9}	nano	n	1960	Mil milionèsim	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	1960	Bilionèsim	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto	f	1964	Mil bilionèsim	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto	a	1964	Trilionèsim	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto	z	1991	Mil trilionèsim	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yocto	y	1991	Quadrilionèsim	0,000 000 000 000 000 000 000 001

Fig. 3.1
Taula de múltiples i submúltiples de les unitats en el Sistema Internacional (SI). L'any indica quan es va formalitzar la nomenclatura.

Si ha quedat clar, ara cal tornar a centrar-nos en els grecs, afegint-hi una miqueta de coneixement hindú. Arriba el moment de repassar trigonometria. Sense dominar-la, esteu perduts.



Problema 1

Efectua els següents canvis d'unitats expressant el resultat final en notació científica:

- a) $3.656 \text{ mm} \rightarrow \text{m}$
- b) $36 \text{ m/min}^2 \rightarrow \text{cm/s}^2$
- c) $1,5 \text{ ml} \rightarrow \text{cm}^3$
- d) $3,5 \times 10^6 \text{ ns} \rightarrow \text{min}$
- e) $33 \text{ rpm} \rightarrow \text{rad/s}$
- f) $1,2 \times 10^{12} \text{ kg/cm}^3 \rightarrow \text{g/m}^3$

Solució

$$\text{a) } 3.656 \text{ mm} = 3.656 \frac{1 \text{ m}}{10^3 \text{ mm}} = 3.656 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3,656 \text{ m}$$

$$\text{b) } 36 \text{ m/min}^2 = 36 \frac{10^2 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \frac{1 \text{ min}^2}{60^2 \text{ sec}^2} = 36 \cdot 10^2 \cdot 60^{-2} \text{ cm/s}^2 = 1 \text{ cm/s}^2$$

$$\text{c) } 1,5 \text{ ml} = 1,5 \frac{1 \text{ l}}{10^3 \text{ ml}} \frac{1 \text{ dm}^3}{1 \text{ l}} \frac{10^3 \text{ cm}^3}{1 \text{ dm}^3} = 1,5 \cdot 10^{-3+3} \text{ cm}^3 = 1,5 \text{ cm}^3$$

$$\text{d) } 3,5 \times 10^6 \text{ ns} = 3,5 \cdot 10^6 \frac{1 \text{ s}}{10^9 \text{ ns}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 3,5 \cdot 10^{6-9} \cdot 60^{-1} \text{ min} = 5,8\bar{3} \times 10^{-5} \text{ min}$$

$$\text{e) } \text{rpm} \equiv \frac{\text{rev}}{\text{min}}$$

$$33 \text{ rev/min} = 33 \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 33 \frac{0,1047 \text{ rad/s}}{1 \text{ rpm}} = 3,456 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 1,2 \times 10^{12} \text{ kg/cm}^3 &= 1,2 \cdot 10^{12} \frac{10^3 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \frac{(10^2)^3 \text{ cm}^3}{1 \text{ m}^3} = 1,2 \cdot 10^{12+3+2 \cdot 3} \text{ g/m}^3 = \\ &= 1,2 \times 10^{21} \text{ g/m}^3 \end{aligned}$$

Problema 2

La massa d'un protó és aproximadament $1,67 \times 10^{-24} \text{ g}$ i, si considerem que té forma esfèrica, el seu diàmetre és de $2,4 \times 10^{-13} \text{ cm}$.

- a) Calcula la densitat i el volum d'un protó en SI (recorda que el volum d'una esfera és $4\pi r^3/3$).
- b) Calcula, aproximadament, la massa d'1 cm^3 d'un material format per protons.



Solució

Primer de tot expressem les dades disponibles en unitats del SI:

$$m_p = 1,67 \times 10^{-24} \text{ g} = 1,67 \cdot 10^{-24} \frac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$d_p = 2,4 \times 10^{-13} \text{ cm} = 2,4 \cdot 10^{-13} \frac{1 \text{ m}}{10^2 \text{ cm}} = 2,4 \times 10^{-15} \text{ m}$$

- a) Com que considerem el protó esfèric, $V_p = 4\pi r^3/3$ és el seu volum. Coneixent el diàmetre d_p del protó, com que $r_d = \frac{d_p}{2}$ és el radi, podem calcular V_p :

$$V_p = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{d_p}{2} \right)^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2,4 \cdot 10^{-15}}{2} \right)^3 = \frac{4}{3} \left(\frac{2,4}{2} \right)^3 \pi \cdot 10^{-15 \cdot 3} = 2,30 \pi \times 10^{-45} \text{ m}^3$$

La densitat és la quantitat de massa continguda en un determinat volum. Per tant, la densitat d'un protó és:

$$\rho_p = \frac{m_p}{V_p} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27}}{2,30\pi \cdot 10^{-45}} = \frac{1,67}{2,30\pi} \cdot 10^{-27+45} \text{ kg/m}^3 = 2,31 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

- b) Si tenim un volum d'1 cm³ de protons, podem calcular la seva massa multiplicant per la densitat dels protons. Recordem abans que la densitat està expressada en m, de manera que el volum també haurà d'estar expressat en m.

$$V = 1 \text{ cm}^3 = 1 \frac{1 \text{ m}^3}{(10^2)^3 \text{ cm}^3} = (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$m = \rho_p V = \frac{1,67}{2,30\pi} \cdot 10^{18} \cdot 10^{-6} = \frac{1,67}{2,30\pi} \cdot 10^{12} \text{ kg} = 2,31 \times 10^{11} \text{ kg}$$

Per tant, 1 cm³ de protons té una massa de $2,31 \times 10^{11} \text{ kg}$.



La matemàtica amb els grecs i els hindús

4.1. La trigonometria dels 360 no entén d'angles

T'has preguntat mai per què l'angle recte són 90 graus? Amb altres paraules, per què l'angle relacionat amb tota una circumferència són 360 graus? Per què no 435 castons (per posar una unitat inventada) o 33.3 tonfles? Si l'angle de tota la circumferència són 435 castons, aleshores l'angle recte serien $435/4 = 108,75$ castons. De fet, quan utilitzem radians, 360 graus són 2π radians. Per tant, l'angle recte són $\pi/2$. De la mateixa manera, seguint la mateixa regla de tres, 180 graus són el doble de 90 graus, i per tant són π radians. $\pi/4$ radians seran 45 graus, etc.

𐀀 1	𐀀𐀀 11	𐀀𐀀𐀀 21	𐀀𐀀𐀀𐀀 31	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀 41	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀 51
𐀁 2	𐀁𐀀 12	𐀁𐀀𐀀 22	𐀁𐀀𐀀𐀀 32	𐀁𐀀𐀀𐀀𐀀 42	𐀁𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀 52
𐀂 3	𐀂𐀀 13	𐀂𐀀𐀀 23	𐀂𐀀𐀀𐀀 33	𐀂𐀀𐀀𐀀𐀀 43	𐀂𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀 53
𐀃 4	𐀃𐀀 14	𐀃𐀀𐀀 24	𐀃𐀀𐀀𐀀 34	𐀃𐀀𐀀𐀀𐀀 44	𐀃𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀 54
𐀄 5	𐀄𐀀 15	𐀄𐀀𐀀 25	𐀄𐀀𐀀𐀀 35	𐀄𐀀𐀀𐀀𐀀 45	𐀄𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀 55
𐀅 6	𐀅𐀀 16	𐀅𐀀𐀀 26	𐀅𐀀𐀀𐀀 36	𐀅𐀀𐀀𐀀𐀀 46	𐀅𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀 56
𐀆 7	𐀆𐀀 17	𐀆𐀀𐀀 27	𐀆𐀀𐀀𐀀 37	𐀆𐀀𐀀𐀀𐀀 47	𐀆𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀 57
𐀇 8	𐀇𐀀 18	𐀇𐀀𐀀 28	𐀇𐀀𐀀𐀀 38	𐀇𐀀𐀀𐀀𐀀 48	𐀇𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀 58
𐀈 9	𐀈𐀀 19	𐀈𐀀𐀀 29	𐀈𐀀𐀀𐀀 39	𐀈𐀀𐀀𐀀𐀀 49	𐀈𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀 59
𐀉 10	𐀉𐀀 20	𐀉𐀀𐀀 30	𐀉𐀀𐀀𐀀 40	𐀉𐀀𐀀𐀀𐀀 50	

Fig. 4.1
Un sistema basat en el
número 60 i no en el 10.
Els babilonis
són a l'origen,
indirectament, de
mesurar els angles en
360 graus.

Així doncs, per què 360? Doncs perquè, si bé la idea d'angle d'un triangle és purament grega, els grecs van agafar la nomenclatura dels babilonis. Els babilonis sabien molta astronomia/astrologia i també havien de repartir terres, així que sabien molt bé com dividir el dia en parts i com mesurar costats de triangles, però no pensaven gaire (no gens) en angles. Però quan els grecs van desenvolupar la idea d'angle, van dividir-la (probablement) tal com els babilonis dividien els dies.

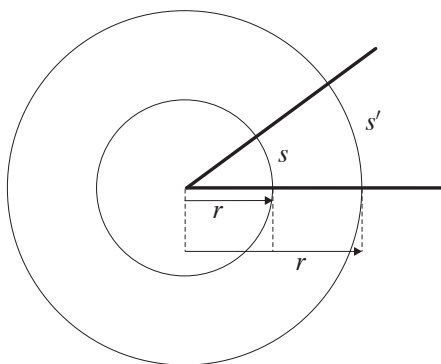


Hiparc, el grec “inventor” de la trigonometria sistematitzada, va pensar que dividir l’angle en unitats de 360 tenia molt de sentit. La base dels números babilonis és el 60, no el 10 com ara. Ells tenien símbols diferents fins al 60 i després tornaven a repetir. De fet, els números fins al seixanta eren iteracions de tres símbols (vegeu la figura 4.1). I quina és la gràcia de treballar amb 60 i múltiples de 60? Doncs que el 60 es pot dividir per molts números sencers menors que ell i encara donar resta zero. El 60 és divisible per 12 factors: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. No és estrany, doncs, que aquesta forma de numerar els angles agradés als grecs.

4.2. Els radians

El problema és que aquesta manera d’anomenar els angles està una mica en contradicció amb la forma natural de definir un angle. Si ens oblidem de l’angle com una cosa associada amb els triangles, la clau per definir l’angle de manera natural és dir que *l’angle és el quocient entre un arc de circumferència i el seu radi*. Observa la figura 4.2. L’arc s i el s' tenen longituds diferents; els radis de cada circumferència r i r' , també. En canvi, el quocient s/r i el s'/r' són idèntics (pots fer tu mateix les mesures). Així doncs, l’angle α es defineix de manera unívoca com a $\alpha = s/r = s'/r'$. Per a qualsevol radi que agafis, l’angle és intrínsec. Si el definim d’aquesta manera, quant val l’angle de la circumferència completa? Doncs per a un radi qualsevol tenim que $s = 2\pi r$ (la longitud d’una circumferència), i per tant el quocient $s/r = 2\pi r/r = 2\pi$. Així doncs, l’angle és 2π . I per a mitja circumferència seria π . Escriure l’angle en radians et dona de manera natural una mesura entre radi i arc de circumferència. La mateixa definició és la mesura.

Fig. 4.2
Definició d’angle que no
implica cap formatget de
trivial.



És per això que a partir d’ara utilitzarem molt els radians. Els graus tenen sentit si la base del teu càlcul de triangles és el mateix que el grec, però no és el cas. Els grecs utilitzaven la corda d’arc com a base del seus teoremes. En canvi, nosaltres utilitzem els triangles rectangles i les funcions sinus, cosinus i tangent..., i aquestes no són pas gregues, són hindús.

4.3. El problema

Tot i que els grecs van ser els primers que van trobar totes les maneres de resoldre el triangle, nosaltres no utilitzem els seus mètodes. Però abans de descriure què és el sinus



i el cosinus (i la tangent) expliquem el problema que els grecs, i els hindús, van resoldre i tu mateix et trobaràs contínuament.

El problema és sempre el mateix: tenir una informació parcial dels costats i angles d'un triangle i ser capaç de trobar tots els costats i tots els angles (o aquells que interessin). El descobriment rellevant és adonar-se que si saps dos costats d'un triangle saps totes les seves propietats, i si saps un angle (no el de $\pi/2$) i un costat, també. Primer, si en un triangle saps un dels angles no rectes saps l'altre, ja que la suma sempre és π . A més a més, si saps dos costats pots utilitzar el teorema de Pitàgores per trobar el tercer (teorema descobert pels babilonis però que Pitàgores va demostrar en lloc d'inferir). Per tant, el problema principal és trobar dos costats quan només en saps un, amb el benentès que sàpigues els angles. I aquest problema, és clar, té solució, només que la dels grecs és bastant més difícil d'explicar que la dels hindús.

I és que la dels hindús és la més clara. Per resoldre el problema anterior van crear unes taules idònies per a cada cas. Si saps la hipotenusa d'un triangle i un dels angles, i vols saber el catet oposat a l'angle, la solució hindú és directa. Es troba multiplicant la longitud de la hipotenusa per un factor que dependrà de l'angle. Aquest factor anirà canviant amb l'angle, i cal fer una taula on per cada angle tens el factor de proporcionalitat entre la hipotenusa i el catet oposat a un angle en funció de l'angle. Va néixer la taula del sinus. Utilitzant la nomenclatura de la figura 4.3, el catet oposat a el pots trobar com a $a = \sin(\alpha)c$. Dit d'una altra manera, la taula del sinus es troba definint $\sin(\alpha) = a/c$.

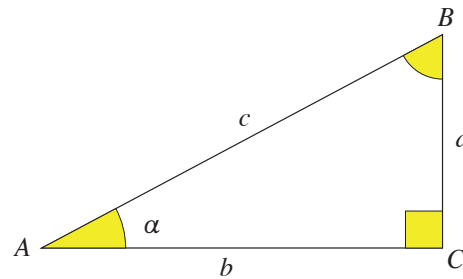


Fig. 4.3
Esquema de triangle rectangle sobre el que es defineixen les funcions sinus, cosinus i tangent.

Si el que vols trobar és el catet adjacent, aleshores neix la taula del cosinus, $b = \cos(\alpha)c$, és a dir, $\cos(\alpha) = b/c$. I si el que coneixes és un dels catets, aleshores tens la funció tangent $a = \operatorname{tg}(\alpha)b$ o $b = (1/\operatorname{tg}(\alpha))a = \operatorname{cotg}(\alpha)a$. On pots demostrar fàcilment amb les definicions anteriors que $\operatorname{tg}(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$.

4.4. Igualtats trigonomètriques

Com hem dit, la trigonometria et permet obtenir totes les dades d'un triangle a partir d'informacions parcials. Això és molt útil per a tota mena de tasques. Pensa si es poden dividir terres sense trigonometria. Igualment són molt útils les anomenades igualtats trigonomètriques. Si pensem en el sinus, el cosinus i la tangent com a funcions dels angles (és a dir, com una taula que tens a la teva calculadora cada cop que calcules, per exemple, el sinus d'alguna cosa), es poden trobar igualtats entre elles. Aquest pas endavant es va fer durant l'expansió científica sense precedents que van portar unes tribus d'Àrabia a conquerir gran part del món. La primera igualtat trigonomètrica és la següent, molt famosa:



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (4.1)$$

on x és qualsevol angle. Aquesta igualtat es demostra considerant un triangle amb hipotenusa igual a 1 i aplicant el teorema de Pitàgores. Altres relacions importants són:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad (4.2)$$

Les pots comprovar calculant el sinus de qualsevol angle i el sinus i el cosinus de la meitat d'aquest angle. Veuràs com es compleix sempre la relació indicada. Igualment es compleix:

$$\sin(x) \cdot \cos(y) = 0.5(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \quad \sin(x) \cdot \sin(y) = 0.5(\cos(x+y) - \cos(x-y)) \quad (4.3)$$

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = 0.5(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \quad (4.4)$$

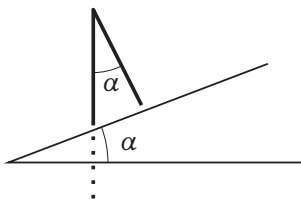
Potser necessitaràs algunes de les fórmules de la figura 4.4. Una altra cosa que necessitaràs bastant és saber que dos parelles de rectes perpendiculars dos a dos tenen el mateix angle entre elles (vegeu la figura 4.5). Aquesta igualtat té poc a veure amb el que hem dit fins ara, però és una relació entre angles força important.

Fig. 4.4
Taula de relacions
trigonòmriques que
pots necessitar.

$\sin X + \sin Y = 2 \sin \left(\frac{X+Y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{X-Y}{2} \right)$	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$
$\sin X - \sin Y = 2 \sin \left(\frac{X-Y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{X+Y}{2} \right)$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$
$\cos X + \cos Y = 2 \cos \left(\frac{X+Y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{X-Y}{2} \right)$	$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
$\cos X - \cos Y = -2 \sin \left(\frac{X+Y}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{X-Y}{2} \right)$	

Ara bé, si aquestes igualtats et poden ser útils, el que és imprescindible de la cultura àrab, i necessitaràs recordar/aprendre, és l'àlgebra. La raó per la qual els àrabs van trobar moltes d'aquestes relacions i els grecs no. La forma de, literalment, resoldre molts problemes.

Fig. 4.5
Per a molts exercicis és
bo recordar que dos
rectes
perpendiculars en
parelles sostenen el
mateix angle.



Problema 1

Feu els següents canvis d'unitat:

- a) 180° , 90° i $57,6^\circ$ a radians



- b) $2\pi/3$ radians i $3,5\pi$ radians a graus
 c) $\pi/2$ radians, $12,7\pi$ radians i $50,3^\circ$ a revolucions

Solució

$$\text{a) } 180^\circ = 180 \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \pi \text{ rad}, \quad 90^\circ = 90 \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{2} \text{ rad},$$

$$57,6^\circ = 57,6 \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = 0,32\pi \text{ rad}$$

$$\text{b) } \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 120^\circ, \quad 3,5\pi \text{ rad} = 3,5\pi \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 630^\circ$$

$$\text{c) } \frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{1}{4} \text{ rev}, \quad 12,7\pi \text{ rad} = 12,7\pi \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} = 6,35 \text{ rev},$$

$$50,3^\circ = 50,3 \frac{1 \text{ rev}}{360^\circ} = 0,140 \text{ rev}$$

Problema 2

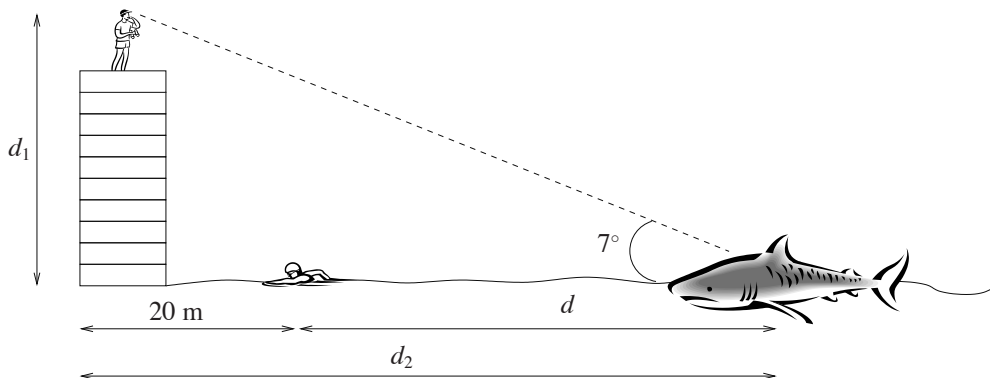
Un socorrista veu un tauró des d'una torre de vigilància d'una platja. El socorrista es troba a 50 m d'alçada i el peu de la torre està situat a 20 m d'un banyista. Si la línia que uneix el punt d'observació i el tauró forma 7° amb l'horitzontal, a quina distància està el tauró del banyista?

Solució

Siguin $d_1 = 50$ m l'alçada a la que es troba el socorrista, d_2 la distància del tauró al peu de la torre del socorrista i d la distància del tauró al banyista, tal com es representa en el dibuix. Aleshores:

$$\operatorname{tg}(7^\circ) = \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow d_2 = \frac{d_1}{\operatorname{tg}(7^\circ)} = \frac{50}{\operatorname{tg}(7^\circ)} = 407 \text{ m}$$

I per tant, la distància entre el tauró i el banyista és $d = d_2 - 20 = 387$ m.



→ 5



Matemàtica àrab, matemàtica d'equilibri

No sabeu reduir els ossos luxats i això us perd, podria dir algú que ha estudiat les matemàtiques àrabs. La matemàtica àrab que has de conèixer en aquest curs és la de l'equilibri i l'Al-jabr. I això, encara que sembli mentida, són ossos luxats.

5.1. Al-jabr

Abdal·là es va aixecar com tots els dies, ben a trenc d'alba, per anar a treballar. Bagdad, com gairebé sempre, era un enorme guirigall de gent de tot el món buscant-se la vida a la capital de totes les terres conegudes. Després de la neteja física i espiritual de cada matí va sortir al carrer. Es preparava un dia llarg. El seu principal benefactor, el califa al-Ma'mun visitaria Bait al-Hikma per veure com anaven els seus progressos, i ell encara no tenia un títol. La seva feina, la hi devia a ell. De fet, tots els científics i estudiosos de la Casa eren allà gràcies a ell o al seu pare. Sabia que els matemàtics només eren allà perquè ell i els seus somnis clarividents ho volien. Així doncs, atendre les visites dels científics xinesos i hindús que havien arribat feia una setmana havia d'esperar un dia més. L'estudi dels mètodes de càlcul d'àrees i volums provinent de l'est s'havia d'esperar.

Com tots els dies va entrar al Bait al-Hikma per la porta del darrere (més ben dit, la porta no principal de la Casa de la Saviesa). Va saludar els guàrdies i es va dirigir cap al seu despatx. Va saludar els companys de medicina i astronomia que meditaven a la sala de recepció, i que ocupaven les zones més grans de la Casa, i va fer cap a la zona de matemàtiques, la seva. Però un soroll estrident el va fer parar, era el soroll fort i continu darrere una porta del departament de medicina. Va entreobrir la porta i va veure com els metges restauraven i completaven els ossos d'una criatura de Déu. Un animaló era l'objecte de pràctiques per al cas que el portador de l'os luxat o trencat tingués certes prerrogatives funcionaries dins el califat. I la llum del profeta li vingué de cop. Al-jabr. En diria al-jabr.



Va començar a córrer. En arribar al despatx, demanà la tinta i ràpidament, abans que no se n'oblides, va escriure el títol. El llibre no estava acabat, sabia que només n'havia escrit els dos primers capítols, però la idea per resoldre aquell problema era única. Sabia que podria resoldre totes les formes de l'equació de segon grau d'aquella manera, i estava segur que es podria utilitzar per a moltes coses més. Però ara no valia badar, el títol. Es va concentrar i amb la millor calligrafia que va poder crear sota pressió, va escriure: *El llibre compendi sobre calcular pel mètode d'Al-jabr i el balanceig escrit per al-Khwarizmí durant el califat de al-Ma'mun l'any 215 d.H.* (cap al 830 en termes cristians). Al-jabr, al-jabr, manoi, sí quedava bé el títol.

5.2. Àlgebra elemental i no tan elemental

Quan al-Khwarizmí va presentar el llibre al califa i als seus companys matemàtics va ser un èxit rotund. Aviat el seu mètode, descrit únicament amb paraules i sense cap fórmula matemàtica, seria utilitzat per resoldre les equacions lineals i no lineals més avançades de l'època. Tot i que el problema que havia resolt amb aquell mètode era molt, molt senzill si es comparava amb els problemes molt més difícils però similars que havia resolt el monstre grec de les matemàtiques Diofant, ell no ho havia fet en termes geomètrics. Diofant plantejava el problema amb algun símbol que representava la variable incògnita, però la solució era en termes geomètrics. Ell no, ell havia trobat un altre mètode: l'àlgebra (o al-jabr).

Fig. 5.1
Pàgina del llibre.
L'al-jabr ha nascut.



La millor manera de conèixer aquest mètode és llegir l'original (traduït, si cal), però és que a l'original tot és text, no hi ha cap equació. I és que les equacions són un dels primers grans invents matemàtics dels europeus quan la truita es va girar i el centre del món va deixar la zona de Pèrsia, l'Iraq i Turquia per anar cap a Europa i la Xina. En termes que nosaltres puguem entendre, quin mètode per resoldre problemes havia descobert al-Khwarizmí?



Primer plantejament que volia trobar ell. Volia trobar solucions a una equació general $ax^2 + bx + c = fx^2 + gx + h$, on x és la incògnita i a, b, c, f, g i h són nombres concrets. Posem un exemple. Suposem que volem resoldre $4x^2 - 12 = 2x^2 + 2x + 14$. Com ho fem? El gran descobriment d'al-Khwarizmi va ser trobar que això es podia reescriure sempre com a $ax^2 + bx = c$ o $ax^2 + c = bx$ o $bx + c = ax^2$, on les constants a, b, c són números positius. I un cop reduït, s'utilitzava un mètode per trobar x . Així doncs, al-Khwarizmi va descobrir l'àlgebra elemental. És a dir, sempre podem sumar o restar a tots dos costats d'una equació el mateix número i després simplificar:

$$4x^2 - 12 = 2x^2 + 2x + 14 \Rightarrow 4x^2 - 2x^2 - 12 = \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + 2x + 14 \Rightarrow \quad (5.1)$$

$$2x^2 - 12 = 2x + 14 \Rightarrow \cancel{2x^2} - \cancel{12} + \cancel{12} = 2x + 14 + 12 \Rightarrow 2x^2 = 2x + 26$$

És el que has après a fer a l'escola: àlgebra elemental. I no només es pot sumar el mateix número a dues bandes de la igualtat, també es pot multiplicar i dividir pel mateix número, tal com veiem a les regles de tres. I en el mateix llibre també s'explica com es poden expandir operacions del tipus $(a + bx)(c + dx)$. Tots sabem que

$$(a + bx)(c + dx) = ac + adx + bcx + bdx^2 = ac + (ad + bc)x + bdx^2. \quad (5.2)$$

Quan s'agafa pràctica, un número es pot passar a l'altre costat d'una igualtat amb el signe canviat si no està multiplicat per res més. El mateix es pot fer passant un número que multiplica a l'altra banda com una divisió. De la mateixa manera un quocient de factors es pot entendre ara també com un producte $a/b = a \cdot (1/b)$. Trobar la forma simplificada d'una equació quadràtica utilitzant l'àlgebra és la base del càlcul en un examen. Mitjançant el domini de l'àlgebra, es resolen els sistemes d'equacions.

5.3. Sistemes d'equacions

El llibre que va inventar l'àlgebra va ser ràpidament utilitzat pels compatriotes d'al-Khwarizmi per resoldre el que ara anomenem sistemes d'equacions. Si hi ha alguna cosa que es fa constantment durant la carrera és utilitzar lleis que et permetin trobar certes incògnites que voldries conèixer. Quan s'investiga un fenomen, moltes vegades hi ha dues o més variables desconegudes que es creu que estan relacionades. La ciència es dedica sovint a investigar com escriure aquestes relacions entre les variables per resoldre el problema en qüestió. En el cas àrab el que es volia trobar eren solucions a les complicades lleis d'herències del califat. Per fer-ho s'havien de resoldre sistemes lineals plantejats, en aquell temps, en prosa.

Ara, en canvi, un problema d'herència s'escriu de la forma següent:

$$\text{Troba } x, y, z \text{ si } \sqrt{3}x + y = \frac{z}{2} + 2, z - y = x, i x - 3y = 0$$

Si tens una base matemàtica sabràs com resoldre el problema. El procés de resolució més directe, sense necessitat d'estudiar matrius i determinants, és aïllar una variable d'una equació i substituir-la en les restants. Aleshores s'aplica l'àlgebra i es torna a aïllar una altra variable, que es torna a substituir, i així fins que només et queda un equació amb una incògnita. Deixo que ho facis tu.



Una miqueta més difícil és trobar la solució a un problema plantejat per un dels lectors del llibre de l'al-jabr. Abu Kamil va aconseguir resoldre el problema plantejat a continuació també durant el segle IX després de Crist:

$$\text{Troba } x, y, z \text{ si } x + y + z = 10, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad i \quad xz = y^2$$

La solució és molt més fàcil si es pot fer servir la notació actual (imagina't escriure aquest problema i resoldre'l en prosa o geomètricament). Substituint la y de la primera i la tercera equació en la segona equació, trobem les dues expressions següents: $x^2 + (10 - x - z)^2 = z^2$ i $x^2 + xz = z^2$. Desenvolupant la primera d'aquestes, $x^2 + 100 + x^2 + z^2 - 20x - 20z + 2xz = z^2$, i simplificant $2x^2 - 20(x + z) + 2xz + 100 = 0$, d'on podem aïllar z : $2x^2 - 20x + 100 = -z(2x - 20)$, quedant

$$z = -\frac{x^2 - 10x + 50}{x - 10}.$$

Substituint aquest valor en la segona, queda

$$x^2 - x \frac{x^2 - 10x + 50}{x - 10} = \left[\frac{x^2 - 10x + 50}{x - 10} \right]^2, \quad (5.3)$$

que es pot reduir a una equació de cinquè grau:

$$x^2(x - 10)^2 - x(x - 10)(x^2 - 10x + 50) - (x^2 - 10x + 50)^2 = 0 \quad (5.4)$$

El que hem fet és utilitzar l'àlgebra per arribar a un problema de tipus polinomi amb una sola variable. I és clar, ara cal resoldre aquest sistema. Et puc donar una pista, és millor reformular el problema en termes de $x = r \cos(\alpha)$ i $y = r \sin(\alpha)$.

Problema 1

Resol el sistema d'equacions:

$$\sqrt{3}x + y = \frac{z}{2} + 2 \quad (5.5)$$

$$z - y = x \quad (5.6)$$

$$x - 3y = 0 \quad (5.7)$$

Solució

Solucionarem el problema expressant explícitament dues variables en funció de la tercera. Això ho farem fent servir dues equacions, per exemple la (5.6) i la (5.7). Després substituïrem aquestes expressions de les dues variables triades en l'equació que no haguem fet servir, en aquest cas l'equació (5.5). Així haurem obtingut una equació que només dependrà d'una variable i podrà ser resolta. Vegem-ho:

$$\begin{cases} (5.6) \quad z - y = x \\ (5.7) \quad x - 3y = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3y} \end{cases} \Rightarrow z - y = x = 3y \Rightarrow \boxed{z = 4y}$$



$$(5.5) \sqrt{3}x + y - \frac{z}{2} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot 3y + y - \frac{4y}{2} - 2 = 0 \Rightarrow (3\sqrt{3} + 1 - 2)y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(3\sqrt{3} - 1)y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3\sqrt{3} - 1} \cong 0,477$$

Per tant, si tornem cap enrere, ja tindrem la solució completa:

$$x = 3y \cong 1,43, \quad y \cong 0,477, \quad z = 4y \cong 1,91$$

Problema 2

Un col·lega et diu que ha comprat dues pel·lícules al mateix preu i cinc litres i mig de vi de Somontano. En aquesta compra, s'ha gastat dues setmanades. Cada setmanada és una cinquena part de la quarta part del sou mitjà de 1.500 euros dels seus pares. A més, sap que, si multiplica el preu que li costa mig litre de vi pel mateix valor (s'eleva al quadrat), obté el mateix valor numèric que el que li costa una de les pel·lícules. Quant li ha costat cada pel·lícula i quant val un litre de vi de Somontano?

Solució

Siguin p el preu de la pel·lícula, l el preu del litre de vi i s el valor de la setmanada. A partir de l'enunciat podem deduir les tres següents equacions:

$$2p + 5,5l = 2s \quad (5.8)$$

$$s = \frac{1}{5} \frac{1}{4} 1.500 = 75 \quad (5.9)$$

$$(0,5l)^2 = p \quad (5.10)$$

Com que el número d'incògnites és igual al d'equacions, ja tenim tot el necessari per trobar la solució. Podem resoldre aquest sistema d'equacions de la manera següent:

$$\begin{cases} 2p + 5,5l = 2s \\ s = 75 \end{cases} \Rightarrow 2p + 5,5l = 2s = 150$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2p + 5,5l = 150 \\ (0,5l)^2 = p \end{cases} \Rightarrow 2(0,5l)^2 + 5,5l = 150 \Rightarrow 0,5l^2 + 5,5l - 150 = 0$$

$$\Rightarrow l = \frac{-5,5 \pm \sqrt{5,5^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-150)}}{2 \cdot 0,5}$$

Com que ens interessa la solució positiva, obtenim que un litre de Somontano val

$$l = -5,5 + \sqrt{5,5^2 + 300} = 12,67 \text{ euros.}$$

D'altra banda, reprenent l'equació (5.10), concloem el preu buscat de la pel·lícula:

$$p = (0,5 \cdot 12,67)^2 = 40,13 \text{ euros.}$$





Les matemàtiques arriben a Europa

Una cosa que podem fer ara que pensem en termes de x com una incògnita o una variable, depenent del cas, és entendre com poden créixer i decreixer les coses. En moltes ocasions el que volem saber és si alguna cosa, pujarà, incrementarà o, en general, canviarà a l'alça o no. Però moltes d'altres el que voldrem saber o estudiar és com ho fan. Recordarem en aquest capítol què vol dir créixer linealment i què vol dir créixer exponencialment. Aquesta és una de les anàlisis més interessants fetes pels europeus, la de tractar les variables com a funcions, com a “coses a representar”.

6.1. Descartes

La passejada pel riu IJssel de cada tarda després d'ensenyar física era una necessitat vital per a René. Després d'haver voltat massa com a membre del cos d'enginyers de l'exèrcit i com a alumne particular de professors diferents arreu d'Europa, aquell passeig era un recordatori de la tranquil·litat merescuda. Una pau que necessitava si volia aconseguir allò que realment volia: explicar al món què era el món.

En arribar a casa va a tornar a repassar i rellegir totes les notes del llibre que volia publicar. Encara li quedava el capítol més difícil, encara no havia aconseguit acabar d'expressar amb claredat com veia l'àlgebra àrab en el món modern cristià. Però de ben segur que se'n sortiria. I mentrestant havia d'acabar el seu recopilatori. Un compendi on demostrava en un sol llibre que Aristòtil no només estava equivocacat en petites cosetes, sinó que la tècnica havia avançat prou per saber que Aristòtil estava equivocacat en pràcticament tot. Si les proves de Galileu i Copèrnic no eren suficients, les que havia recollit, i clarificat, en els seus viatges eren molt més contundents. Com més hi pensava més dubtava de quasi tota l'estructura de la filosofia natural que s'explicava com a veritat absoluta.

Quan estava a punt de plegar a mitjanit li va arribar la carta. Va pensar deixar-la per a l'endemà, però el va estranyar la urgència que envoltava l'entrega a aquelles hores tan poc cristianes. La va obrir, la va llegir i l'esglai de por li va recórrer tot el cos. Després de l'inici de pànic va arribar la reflexió. Ell era a Holanda, a Deventer, allà l'Església de



Roma no hi arribava. Però ell tampoc es pensava que gosarien tocar Galileu. I Galileu era mort en vida, per decret de l'Església. No podia publicar aquelles notes. No en podia fer pas un llibre. La religió que en aquells moments dictaminava sobre la vida celestial i terrenal, sobre la natura viva i la morta, havia fet una aliança total durant més de mil anys amb la visió de la natura d'Aristòtil. I ara no podia acceptar que estava equivocada. El món natural, per a l'Església, era tal com havia explicat aquell filòsof grec. Sortir d'aquella visió no era una crítica a un company filòsof, era enfrontar-se amb el poder a la terra.

No tenia més remei, no podia publicar. No encara. Potser va ser aquest temps de reflexió o potser aquella por li va servir per aclarir el pensament. El cas és que uns anys més tard el problema sobre la matemàtica àrab basada en l'àlgebra, que no aconseguia quadrar amb les ensenyances clàssiques, era resolt. Per ell. Aquell temps de descans li va permetre fer el descobriment més important d'Europa des de segles, i el més antiaristotèlic. Al cap de tres anys, quan a la veïna ciutat de Leiden li van prometre que no havia de patir per l'Església de Roma, quan el protestantisme s'imposava a tots els Països Baixos, quan el nord d'Europa tenia clar que fugiria de les ensenyances d'Aristòtil, ja que necessitava nous aliats, aleshores va publicar el *Discours*.

Suposo que tots sabeu l'equació d'una recta tal com la va descriure Descartes. Som ara ja a l'Europa del 1600 i Descartes comença el camí dels grans descobriments matemàtics. Recordem el que ha pensat/descobert Descartes. Amb ell apareix una variable x que tant pot ser algebraica com indicadora d'una posició, és a dir, tant pot ser un objecte amb el qual pots fer àlgebra com la coordenada en un sistema de referència. De fet, és totes dues coses alhora. Igualment, també representa una funció que quan la dibuixes et dona l'objecte geomètric. Una autèntica revolució.

6.2. Les coses creixen (i decreixen) de formes galdoses

Així, si vols representar tota parella de punts que tens si ets en una recta, això s'escriu:

$$y = y_o + K(x - x_o) \quad (y - y_o) = K(x - x_o) \quad y = y_o - Kx_o + Kx = A + Kx \quad (6.1)$$

Com es pot veure, en una recta hi ha dues incògnites A i K , o dit d'una altra manera, necessites dues parelles de punts per on passa una recta si vols saber tota la recta. Una és x_o, y_o . Per exemple, si $x_o = 2$ i $y_o = 4$, ja ho podem posar a les equacions.

$$y = 4 + K(x - 2) \quad y - 4 = K(x - 2) \quad (6.2)$$

Observa que, si la parella de punts que coneixes és la variable y per $x = 0$ ($y(0) = y_a$), aleshores pots substituir directament A per y_a . Però encara necessites una segona parella de punts, que anomenarem x_1, y_1 . D'aquest valor en pots trobar K

$$K = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} \quad y = y_o + \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}(x - x_o). \quad (6.3)$$

La forma d'aquesta funció és la indicada a la figura 6.1. Al seu costat pots veure el creixement, que no és lineal sinó exponencial (suposo que tots sabreu el que és exponenciar... i que $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $2^{-2} = 1/2^2$). I en general, quan l'exponent és una variable o funció i fem una gràfica, obtenim funcions com les de la figura.

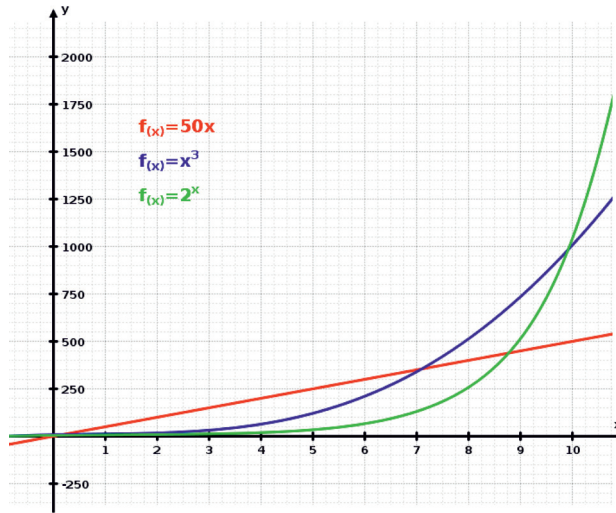


Fig. 6.1
Diferents formes de créixer. Es compara un créixement lineal amb un de cúbic i un d'exponencial.

Passem ara al créixement exponencial, però abans de veure exemples pràctics, cal recordar l'invers de l'exponencial, és a dir, el logaritme. En 1614 ja es van preguntar quin seria el número al qual haig d'eleva 2 per tal d'obtenir 24. En moltes ocasions vull resoldre l'equació $2^x = 24$. La solució? Doncs taules un altre cop (pots trobar-ne una al *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* o a la calculadora), taules que es transformen en una funció a la calculadora. Formalment diem $x = \log_2 24$. O d'una altra manera, $2^{\log_2 24} = 24$ i en general $2^{\log_2 x} = x$. Hi ha dues propietats del logaritme que són molt importants. Provenen de considerar que $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$, que són $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ i que $\log(1/a) = -\log(a)$. D'aquesta última és fàcil deduir-ne el següent:

$$\log(a/b) = \log(a \cdot (1/b)) = \log(a) + \log(1/b) = \log(a) - \log(b).$$

Considerem aquest exemple pràctic. Una parella d'home i dona inicial (Adam i Eva, dues persones al món) que tenen 4 fills, dos nois i dues noies: cada noi s'emparella amb una noia i tenen 4 fills. I així successivament cada 20 anys. Quanta gent naixeria al món al cap de 10.000 anys si cadascun dels seus fills s'ajuntés amb una parella? En aquest cas el créixement és exponencial. Vegem-ho. 10.000 anys són 500 generacions de persones. A la primera generació hi ha 2 persones, a la segona generació n'hi ha 4. A la tercera generació es formen dues parelles, cadascuna amb 4 fills: neixen 8 persones. A la quarta generació es formen 4 parelles, cadascuna amb 4 fills: en tenim 16. I en general el nombre de naixements és $N = 2^i$, on i és el número de la generació. I quant és 2^{500} ? Si ho poses a la calculadora et sortirà un número de 150 xifres. Trilions i trilions de persones. Així doncs, la reproducció és un àmbit, on si no hi ha limitacions de menjar, les coses creixen exponencialment.

El punt clau del créixement exponencial és que sempre es pot escriure com a $y = c \cdot a^{bx}$, on c és el valor de y per $x = 0$, a és l'exponent de créixement i b és el factor de créixement (on $\tau = 1/b$ s'anomena també el temps característic de créixement si x és una variable temporal). De fet, qualsevol créixement exponencial es pot reescriure en termes del ja conegut número irracional trobat per Euler: $e = 2,71828\dots$ (no es pot expressar com a quocient de números sencers). La raó per la qual és tan important, malauradament, no es



pot saber fins al següent apartat (si heu fet derivades sabreu quin és el número que fa que la derivada de la funció exponencial sigui ella mateixa). Vegem ara com es pot passar d'una funció exponencial en base 2 a una de base e :

$$y = y_0 2^{bx} = y_0 (e^{\ln(2)})^{bx} = y_0 e^{b \ln(2)x} = y_0 e^{b'x} \quad (6.4)$$

on es pot veure que el factor de creixement de l'exponencial es veu modificat pel logaritme en base e , anomenat neperià ($\ln$), del nombre original.

Ara que ja sabem la forma general d'un creixement lineal (recta) o d'un creixement exponencial, veiem com de diferents són els dos creixements. Considera el següent problema:

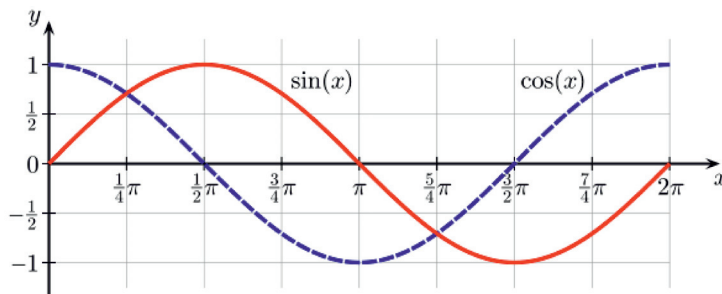
La temperatura en dues olles d'aigua és inicialment 20 graus centígrads. En una de les olles la temperatura comença a pujar linealment i dobra la temperatura els dos primers minuts. En l'altra olla, la temperatura creix exponencialment amb un temps característic de dos minuts. Quina és la diferència de temperatura entre les dues olles després de cinc minuts?

Per saber la solució hem de trobar la temperatura de cada olla en funció del temps. En l'olla lineal $T = a + bt$, en l'olla exponencial $T = ce^{dt}$, on a, b, c, d són constants que hem de trobar. En tots dos casos la temperatura inicial són 20 graus; per tant, $T(t=0) = a + b \cdot 0 = a = 20$, i per altra banda, $T(t=0) = c \cdot 1 = c$. Per tant, ja sabem que $T = 20 + bt$ en un cas i $T = 20e^{dt}$ en l'altra. Per trobar b utilitzem que la temperatura val el doble al cap de 2 minuts. Si el temps el prenem en segons, seran 40 graus al cap de 120 segons; per tant, $40 = 20 + b \cdot 120$, d'on $b = 1/6$ i $T = 20 + t/6$. Per al cas exponencial sabem que el temps característic són 120 segons, d'on $d = 1/120$, que queda $T = 20e^{t/120}$. Ara podem comparar què passa al cap de 5 minuts o 300 segons. En l'olla lineal $T = 20 + 300/6 = 70$ graus, en l'exponencial $T = 20e^{(300/120)} = 244$ graus, una diferència de 174 graus.

6.2.1. I si no creixen, potser oscil·len

Però és evident que a vegades les coses no creixen i decreixen de forma sistemàtica, sinó que comencen pujant i després baixen, per tornar a pujar i baixar, i així successivament sense arribar mai a allunyar-se d'un valor. Una de les formes més comunes d'aquest tipus de moviment és l'oscil·lació de forma harmònica. O amb altres paraules, seguint el mateix tipus de moviment que segueix el valor de les funcions trigonomètriques quan canviem l'angle.

Fig. 6.2
La funció sinus i cosinus
entre 0 i 2π . Aquesta
periodicitat es pot repetir.





En les seccions anteriors hem definit el sinus i el cosinus com a taules, o en el fons funcions, ja que depenen de l'angle. A la figura 6.2 veiem la representació gràfica d'aquesta dependència. En l'eix x tenim radianats i en l'eix y el valor de la funció trigonomètrica indicada. Podem veure que el sinus comença en zero i puja fins al valor 1 per tornar a baixar, decreix, passa pel zero fins al valor -1 i després torna al cap de 2π al mateix punt que el zero. I quan passem de 2π i continuem com si donéssim voltes en una circumferència sense parar, tornem a repetir exactament el mateix resultat. El cosinus és semblant, però comença en 1 i baixa fins al zero, arriba fins a -1 i torna al mateix punt $+1$ al cap de 2π . Si t'hi fixes, la funció sinus i la del cosinus són la mateixa si desplaces el cosinus un angle de $\pi/2$ cap a la dreta (de la taula de la figura 4.4 en pots extreure que $\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$).

Però, per a un moviment qualsevol, el punt més llunyà del centre no pren el valor $+1$ sinó un arbitrari a . Les funcions trigonomètriques es poden transformar en $y = a \sin(x)$. A més a més, en general no ens volem referir a angles, sinó a posicions d'objectes, o temps; no volem que valgui zero sempre a 2π , sinó en un valor arbitrari. Per aconseguir-ho escrivim $y = a \sin(kx + \phi)$. Quan $x = 0$, tenim $y = a \sin(\phi)$; així doncs, ϕ és un angle que denota quant de desplaçada es troba la funció en $x = 0$ respecte al màxim. Per la seva banda, introduint k , ara els zeros de la funció no passen a $x = \pi, 2\pi \dots$ sinó a $x = (\pi - \phi)/k, (2\pi - \phi)/k$. k ens dóna l'escala que volem en la variable x .

Així doncs, podem escriure molts moviments oscil·latoris (que no creixen fins a infinit) utilitzant petites variacions de les funcions trigonomètriques. De fet, quan una variable oscil·la seguint la funció $y = a \sin(kx + \phi)$, es diu que oscil·la harmònicament. Moltes vegades, quan és un moviment, per a una funció del temps $y(t)$ o $x(t)$ s'utilitza la nomenclatura $k = 2\pi/T$ per escriure $x(t) = A \cos(\frac{2\pi t}{T} + \phi)$. La forma de la funció és la indicada a la figura 6.3.

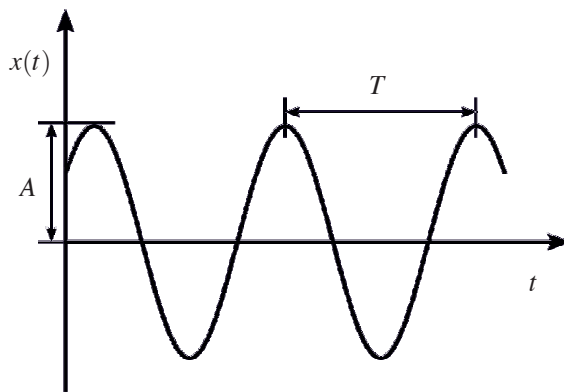


Fig. 6.3
Una funció $x(t) = A \cos(\frac{2\pi t}{T} + \phi)$ que pot representar un moviment. El significat de A i T estan indicats a la figura. A més a més, ϕ no és zero ja que $x(0) \neq A$. Com podries trobar gràficament quant val ϕ ?

No tots els moviments oscil·lants són harmònics; hi ha moltes altres maneres d'oscil·lar a l'entorn d'un punt, però aquesta manera és particularment important, ja que un tal senyor Fourier va demostrar que qualsevol manera d'oscil·lar es pot entendre com la suma de diferents oscil·lacions harmòniques. I això sí que va ser un descobriment molt important. Aquí no utilitzaràs aquest teorema, però al grau l'utilitzaràs a dojo.

Abans de passar al següent capítol, et deixo per demostrar (utilitzant les relacions trigonomètriques de la taula de la figura 4.4) que qualsevol oscil·lació que pugués escriure



com a $y = a \sin(kx + \phi)$, també la pots escriure com a $y = a \cos(kx + \psi)$, on has de trobar la relació entre ϕ i ψ .

Problema 1

Si el creixement de la població mundial ha sigut exponencial del tipus ae^{bt} en els últims 100 anys, en què ha passat de 500 milions a 5.000 milions, quant ha canviat el logaritme de la població mundial en els últims 20 anys?

Solució

Primer de tot intentem buscar la funció que ens indica el creixement de la població. Prenem l'origen temporal fa 100 anys. Així doncs, sabem que en $t = 0$ hi ha 500 milions de persones i en $t = 100$ anys n'hi ha 5.000 milions. També ens diuen que la població es pot expressar exponencialment, $p = ae^{bt}$. Per tant, només cal trobar el valor de a i de b utilitzant les dades donades. Notem que treballem en anys i milions de persones a partir d'ara per simplificar la notació. Així, obtenim:

$$\text{quan } t = 0, p = ae^{0b} = a = 500 \Rightarrow a = 500$$

quan $t = 100$ anys,

$$p = ae^{100b} = 500e^{100b} = 5.000 \Rightarrow e^{100b} = 10 \Rightarrow 100b = \ln(10) \Rightarrow b = \frac{\ln(10)}{100}$$

$$\Rightarrow p(t) = 500e^{\frac{\ln(10)t}{100}} \quad (\text{en anys i milions de persones})$$

Ara hem de calcular quant ha canviat el logaritme de la població mundial en els últims 20 anys. És a dir, calcular la diferència del logaritme de la població quan $t = 100$ anys i quan $t = 80$ anys:

$$\begin{aligned} \Delta &= \ln[p(t = 100)] - \ln[p(t = 80)] = \ln[5.000] - \ln\left[500e^{\frac{\ln(10)80}{100}}\right] = \ln\left[\frac{5.000}{500e^{0,8\ln(10)}}\right] = \\ &= \ln\left[\frac{10}{e^{0,8\ln(10)}}\right] = \ln\left[\frac{10}{e^{\ln(10^{0,8})}}\right] = \ln\left[\frac{10}{10^{0,8}}\right] = \ln[10^{0,2}] = 0,2\ln(10) = 0,46 \end{aligned}$$

Per tant, el logaritme de la població mundial ha canviat un 0,46 en els últims 20 anys.



→7



La il·lustració és una derivada

En l'apartat anterior hem vist com les coses poden créixer linealment o exponencialment, o com es poden quedar a l'entorn d'un punt creixent primer i decreixent després, oscil·lant. Evidentment, hi ha moltes altres formes de créixer, decreixer o oscil·lar que les discutides abans. Per exemple, alguna cosa pot créixer amb una forma funcional tipus polinomi amb una potència més elevada. Així, un creixement pot ser quadràtic, o cúbic, tal com ja hem vist a la figura 6.1. Pot haver-hi creixement que sigui exponencial d'exponencial. De totes maneres, hauries de poder dibuixar i entendre qualsevol comportament funcional (creixement i decreixement). Repassem ara les matemàtiques del batxillerat, és a dir, les matemàtiques del segle XVII, que us han de permetre dibuixar qualsevol funció i entendre les lleis bàsiques de la dinàmica. Començarem per la noció de límit i seguirem amb la noció de diferencial per acabar amb la famosa derivada. La derivada ens permetrà entendre si les coses creixen o decreixen de forma “local”. I aquesta paraula, *local*, la utilitzarem molt.

7.1. El límit

Comencem, doncs, per la noció de límit, que, per cert, no és una idea del segle XVIII, sinó que, com a molt sovint, té l'origen entre els grecs (la versió moderna és del s. XIX). Suposo que tots heu escoltat alguna vegada el mite d'Arquimedes, que va sortir despullat cantant “eureka” quan va entendre la llei que porta el seu nom sobre els fluids. Potser també sabeu que era un geni de les invencions. Potser també que amb els seus ginyes va intentar defensar la ciutat on vivia (Siracusa) dels romans. I deus saber que, si aquest mite fos veritat, els seus ginyes no li van servir de res davant la força de l'exercit romà. Però el que sí va fer Arquimedes va ser calcular el nombre π utilitzant la noció de límit.

La idea de crear una successió de números a partir d'alguna regla i dir que aquella successió de números té un número definit com a límit si t'hi pots apropar tant com vulguis és una idea poderosa.

Un exemple fàcil és crear la successió de números 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, 0,99999... on afegim un nou al final de cada dígit. És clar que el límit de la sèrie és 1. Un altre



exemple més útil és analitzar la funció $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. Si generem una sèrie de números apropant la variable x a 1, i.e. $f(0,9), f(0,99), f(0,999) \dots$ trobem diverses coses. Primer, que la funció és perfectament avaluable en tots aquest punts. $f(x)$ només deixa de ser avaluable per $x = 1$, ja que només una divisió per zero no està definida. Segon, si trobem els valor successius de la sèrie, s'apropen cada cop més a 2 (1,9, 1,990, 1,9990...) i efectivament, 2 és el límit de la funció quan x s'apropa a 1. Això s'escriu:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = 2 \quad (7.1)$$

La demostració exacta es pot fer utilitzant que $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ amb el factor $x - 1$ simplificat a dalt i a baix, amb què queda $x + 1$. Això clarament val 2 quan x s'apropa a 1.

A la plana http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_limits tens regles per calcular límits quan la variable x es fa, en valor absolut, cada cop més gran. El límit quan x tendeix a infinit el trobaràs molt sovint: és el límit que es pregunta què passa quan x es fa molt gran. Moltes vegades, el resultat del límit és obvi. I d'altres necessites diverses regles per fer el càlcul. Aquestes situacions no òbvies es donen en quocients de polinomis on tots dos factors van en la mateixa direcció (tots dos cap a zero o tots dos es fan molt grans). Un altre cas no obvi és el producte de dos termes on un va cap a zero i l'altre es fa cada cop més gran. La regla bàsica per trobar la solució és analitzar quin creixement (o aproximació a zero) és més fort si tenim dos efectes contraris. Per exemple, una exponencial sempre venç un polinomi. Per tant, una funció que sigui exponencial creixent dividida per un polinomi també creixent anirà cap a infinit. Igualment, un polinomi de grau n sempre venç qualsevol altre polinomi de grau menor.

Un últim apunt, la noció de límit també és important per a la suma infinita de números. No sempre una sèrie infinita de números dóna infinit, sinó que el resultat està acotat i el seu límit és un número racional. Moltes vegades, però, la suma infinita dóna un número irracional; el límit de la suma infinita és aquest número irracional. Per exemple, el número e o el π es poden escriure de la manera següent:

$$e = 2 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! \dots \quad (7.2)$$

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 + \dots \quad (7.3)$$

7.2. La derivada

La derivada és el concepte matemàtic més important de la dinàmica. El càlcul diferencial és la peça fonamental d'una gran part de les matemàtiques modernes. Va ser el gran descobriment matemàtic del segle XVII i el devem a Newton, o potser no, potser li devem a Leibniz, ja que va ser ell el que va presentar el mètode per trobar màxims i mínims d'una funció, calcular la tangent a qualsevol punt de la funció, calcular l'àrea sobre una corba (cosa que es fa amb l'operació inversa de la derivada: integrar) i trobar el teorema fonamental del càlcul. Però potser no, potser va ser Newton. No Leibniz, no Newton. De fet, l'autoria del càlcul diferencial va portar cua durant tot un segle i unes rivalitats entre dues escoles que podrien haver arribat a les mans. D'una banda, l'anglès Newton; de l'altra, l'alemany Leibniz. Probablement el van descobrir els dos alhora,



seguint camins diferents, idees preconcebudes diferents, i és clar, una notació diferent (http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_calculus).

I aquesta disputa ens porta de cap a discutir quina és la millor forma d'entendre el concepte de derivada. Un cop entès, no cal aprendre's la demostració de cadascuna de les fórmules per derivar, però sí el resultat. Un ha de saber derivar un polinomi, una exponencial o una funció trigonomètrica sense taules. I amb les lleis de la composició, ser capaç de derivar qualsevol funció.

Comencem, però, per entendre què és la derivada. Recordem per un moment l'equació de la recta $y = y_0 + K(x - x_0)$, si tenim una funció qualsevol resulta geomètricament intuïtiu que, per cada punt on no hi hagi una discontinuïtat, podem dibuixar una recta tangent a la mateixa corba (vegeu la figura). A cada punt de la corba el pendent de la recta tangent, K , pren un valor diferent. Per tant, aquesta K és una funció de la coordenada x , és a dir, una altra funció. Definim $f'(x)$ com aquella funció que a cada punt $x = x_0$ dóna $f'(x_0) = K$, sent K el pendent de la recta tangent a la corba $f(x)$ en el punt x_0 . D'aquesta definició es dedueix que un màxim o un mínim de la funció tenen $f'(x_0) = 0$, ja que la tangent és una recta de pendent 0.

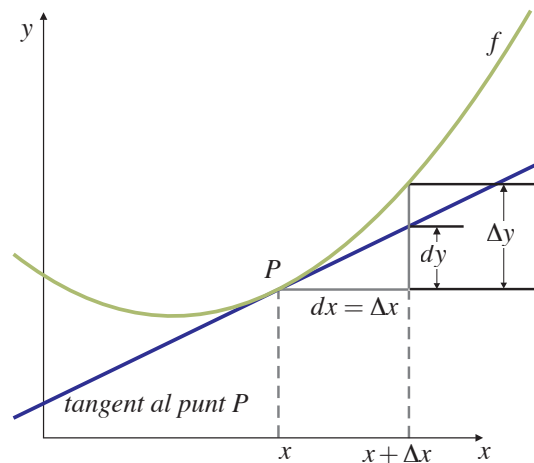


Fig. 7.1
Exemple de càlcul de derivada. La fracció $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sempre val K , el pendent. Per trobar-la fem ús de que en el límit Δy és dy .

Aquesta interpretació geomètrica de la derivada va molt bé per a les persones que tenen intuïció espacial, però hi ha una altra manera d'entendre la derivada, que posa l'èmfasi en la seva relació amb la "velocitat" o flux (*fluxional calculus*, com deia en llatí Newton) de la funció. Així $f'(x)$ és una funció que et dóna la rapidesa amb què canvia la funció a cada punt, és a dir, la seva "velocitat". De fet si la funció $f(x)$ indica realment una trajectòria on x és el temps (normalment s'escriu aleshores $f(t)$), la derivada és realment la velocitat de l'objecte. En altres termes, una funció creix més o menys en una zona segons si l'increment de y a prop d'aquell punt, Δy , és molt o poc més gran per a un Δx fixat. S'anomena derivada el quocient $\Delta y/\Delta x$ quan tots dos increments es van fent petits. La funció $f'(x)$ és el límit del valor aquest quocient quan tots dos van cap a zero.

És fàcil de veure que totes dues formes d'entendre el problema són la mateixa. El límit del quocient $\Delta y/\Delta x$ no és res més que K en aquell punt, si recordes com es mesurava K en qualsevol recta. Així doncs, en tots dos casos $f'(x)$ t'indica si la funció $f(x)$ creix o



decreix en cada punt i en quina magnitud ho fa. I aquest número és exactament el mateix que el pendent de la recta tangent K .

7.3. Ara cal fer derivades

La forma matemàtica de calcular aquest pendent és realitzar el següent càlcul. La derivada de $f(x)$ en un punt a és:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (7.4)$$

i si ho generalitzem a un punt general x (on x és la variable que indica el punt on realitzes la derivada):

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (7.5)$$

on es pot veure que la derivada d'una funció és una altra funció, ja que et dona el pendent en cada punt on existia la funció $f(x)$.

Buscant a internet pots trobar grans taules amb derivades (vegeu, per exemple <http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada>). A les taules pots veure el resultat quan apliques aquesta darrera fórmula per trobar la derivada de diferents funcions. Com hem dit abans, no cal que recordis les demostracions, però sí que cal que aprenguis a derivar de forma sistemàtica. A la taula de la figura 7.2 tens les derivades més fonamentals que has de conèixer. Però per derivar una funció general com $f(x) = x^2 + e^{x^2 \sin x}$ has de saber, a més de la taula fonamental abans indicada, la regla de la suma de derivades i la regla de la composició (també a les taules).

Típicament, amb uns bons exemples s'agafa el truc per trobar la derivada de qualsevol funció:

Calcula la derivada de la funció $f(x) = (x^2 - 1)e^{x^2} + ((x - 1)/(x^2 + 2)) + 34$.

El primer pas és sempre trobar quants termes sumats hi ha a l'expressió. En aquest cas tres. Això vol dir que has de fer tres derivades, una per cada terme, i sumar-ho a la solució. Aquestes tres funcions $f(x) = g(x) + h(x) + s(x)$ són $g(x) = (x^2 - 1)e^{x^2}$, $h(x) = (x - 1)/(x^2 + 2)$ i $s(x) = 34$. La més fàcil de fer és $s(x)$, ja que és una constant i la derivada és zero. Per tant, només cal calcular $h'(x)$ i $g'(x)$. Comencem per $h(x)$. Hem de veure quants termes en producte hi ha. Encara que sembli que no n'hi ha cap, sí que hi ha dos termes, perquè una divisió s'ha de prendre com una multiplicació per l'invers. Així doncs, escrivim sempre $h(x) = (x - 1)(x^2 + 2)^{-1}$, i ara apliquem la regla de la multiplicació i fem la derivada del primer pel segon sense derivar, més la derivada del segon pel primer sense derivar. La derivada de $x - 1$ és 1 (de les taules). La derivada de $(x^2 + 2)^{-1}$ és una mica més complicada. Primer de tot és una funció elevada a -1 , per tant, si $d(x) = (x^2 + 2)^{-1}$, aleshores $d'(x) = -1(x^2 + 2)^{-2}(x^2 + 2)'$. Fixem-nos que hem d'aplicar la regla de la cadena que ens indica com fer la derivada d'una funció d'una funció. Realitzant la segona derivada, queda $d'(x) = -(x^2 + 2)^{-2}(2x)$. Ajuntant les peces, $h'(x) = (x^2 + 2)^{-1} - (x - 1)2x(x^2 + 2)^{-2}$. Però ara encara queda el primer tros:



$g'(x)$. Seguint el mateix procediment tenim $g'(x) = 2xe^{x^2} + (x^2 - 1)(e^{x^2})' = 2xe^{x^2} + (x^2 - 1)2xe^{x^2}$. Queda:

$$f'(x) = 2xe^{x^2} + (x^2 - 1)2xe^{x^2} + (x^2 + 2)^{-1} - 2x(x - 1)(x^2 + 2)^{-2} \quad (7.6)$$

Llarg, oi? Bé, en un examen no poden entrar derivades tan llargues... però, sabries fer en menys d'un minut la derivada de $w(x) = \sin(x)e^{-x^2}$?

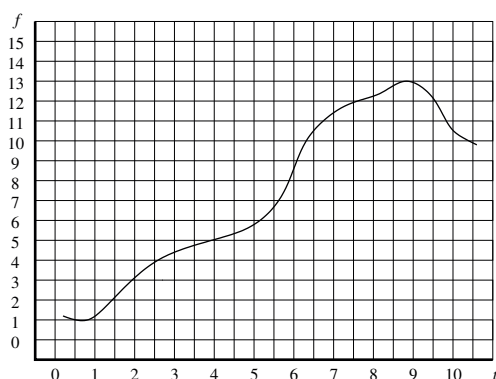
Tipus	Funció simple		Funció composta	
Constant	$f(x) = k$	$f'(x) = 0, k \in \mathbb{R}$		
Identitat	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
Potència	$f(x) = x^a$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$	$f(x) = f^a$	$f'(x) = a \cdot f^{a-1} \cdot f'$
Potència irracional	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[n]{f}$	$f'(x) = \frac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$
Exponencial	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^f$	$f'(x) = e^f \cdot f'$
	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$f(x) = a^f$	$f'(x) = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
Logaritme	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln f$	$f'(x) = \frac{f'}{f}$
	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$f(x) = \log_a f$	$f'(x) = \frac{f'}{f \cdot \ln a}$
Trigonomètriques				
Sinus	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin f$	$f'(x) = \cos f \cdot f'$
Cosinus	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos f$	$f'(x) = -\sin f \cdot f'$
Tangent	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f(x) = \operatorname{tg} f$	$f'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 f) \cdot f' = \frac{f'}{\cos^2 f}$
Arcsinus	$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arcsin f$	$f'(x) = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
Arccosinus	$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos f$	$f'(x) = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
Arctangent	$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \operatorname{arctg} f$	$f'(x) = \frac{f'}{1+f^2}$
REGLES DE DERIVACIÓ				
Suma	$(f + g)' = f' + g'$	La derivada d'una suma és la suma de les derivades respectives.		
Resta	$(f - g)' = f' - g'$	La resta és en el fons una mena de suma.		
Producte	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	Important regla del producte. La derivada del producte NO és el producte de les derivades. Has de derivar la primera funció i multiplicar-la per l'altra sense derivar i sumar la derivada de la segona funció per la primera sense derivar.		
Quocient	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	I la divisió és un tipus de producte. És el producte de la funció f per la funció $g^{(-1)}$. Per fer-la, cal que apliquis la regla del producte i després la regla de la cadena a $g^{(-1)}$.		
Producte per un nombre	$(a \cdot f)' = a \cdot f'$	Un número constant surt fora de la derivada, és transparent.		
Funció de funció	$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	Regla de la cadena.		

Fig. 7.2
Taula de derivades
adaptada de la plana
<http://www.vadenumeros.es/imagenes/primero/tabla-de-derivadas.jpg>



Problema 1

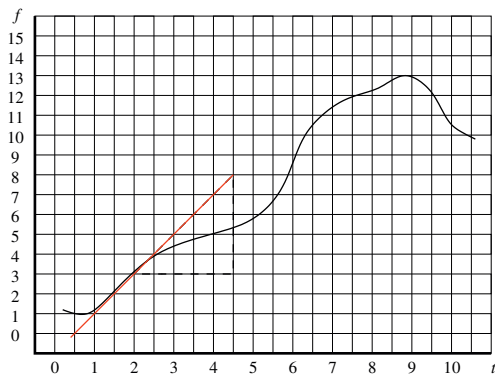
Una funció $f(t)$ està descrita per la corba de la figura següent:



- a) Trobeu la seva derivada a $t = 2$.
- b) Quan és màxima la derivada?
- c) Quan és nul·la? Quan és negativa?

Solució

a)



Podem aproximar la recta tangent a $t = 2$ amb la línia vermella de la figura. Aleshores, comptant caselles podem deduir que:

$$f'(t = 2) = \{\text{pendent recta tangent a } t = 2\} = \frac{5}{2,5} = 2$$

- b) És en $t = 6$ on el pendent de la recta tangent és més pronunciat, i per tant és on la derivada és màxima.
- c) En $t = 0,75$ i $t = 8,75$ la derivada és nul·la, ja que hi trobem pics. En canvi, a $t < 0,75$ i $t > 8,75$ la derivada és negativa, perquè és on la corba decreix.



Problema 2

Un tortuga èbria es mou seguint la funció $f(t) = 0,5 \ln(t) - 0,1/t$. Trobeu les funcions derivada i segona derivada en qualsevol temps.

Solució

Podem derivar directament, tenint sempre en compte les propietats de la derivada:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0,5 \ln(t) - 0,1/t \\ f'(t) &= (f(t))' = (0,5 \ln(t) - 0,1/t)' = (0,5 \ln(t))' - (0,1/t)' = \\ &= ((0,5)' \ln(t) + 0,5(\ln(t))') - ((0,1)'(1/t) + 0,1(1/t)') = \frac{0,5}{t} + \frac{0,1}{t^2} \\ f''(t) &= (f(t))'' = (f'(t))' = (\frac{0,5}{t} + \frac{0,1}{t^2})' = (\frac{0,5}{t})' + (\frac{0,1}{t^2})' = \\ &= ((0,5)'(1/t) + 0,5(1/t)') + ((0,1)'(1/t^2) + 0,1(1/t^2)') = -\frac{0,5}{t^2} - \frac{0,2}{t^3} \end{aligned}$$

Problema 3

Dibuixa esquemàticament la funció $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$ indicant els seus valors a l'infinit, els talls amb els eixos i els comportaments singulars.

Solució

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$$

Valors a l'infinit:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

Punts singulars:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 + 1} = -1 \quad \rightarrow \text{Per tant, 0 no és un punt singular.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cong \frac{2 \cdot (-1)^2 - 1}{0} = \pm \infty \quad \rightarrow \text{Cal distingir per quin costat ens apropem a -1:}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{2 \cdot (-1)^2 - 1}{(-1)^- + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{2 \cdot (-1)^2 - 1}{(-1)^+ + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$



Talls amb els eixos:

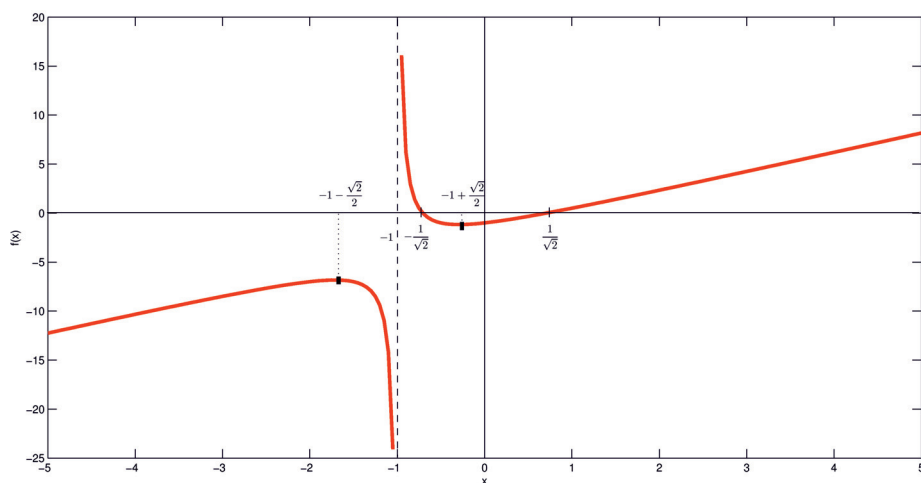
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Punts estacionaris:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = f'(x) = \frac{4x(x+1) - (2x^2-1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow 2x^2+4x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Així doncs, obtenim una representació de la funció com aquesta:







Integrar és dividir primer, sumar després

8.1. Pots integrar indefinidament amb taules, però els límits els has de trobar sol

I arribem al final del càlcul diferencial amb la integral. Suposo que la majoria de vosaltres recordeu que la integral és l'operació inversa de la derivada (com el logaritme és l'operació inversa de l'exponenciació). També deveu saber que hi ha unes taules (vegeu http://en.wikipedia.org/wiki/Lists_of_integrals) que us donen directament quina és la funció la derivada de la qual és la funció que voleu integrar. Integrar és trobar aquesta funció. Recordem que la notació és:

$$\int f(x)dx = g(x) + A \quad (8.1)$$

on $g'(x) = f(x)$ i A és una constant sempre possible, perquè la derivada d'una constant és zero. De la llista d'integrals que pots trobar a Wikipedia només cal que recordeu la integral d'un polinomi, d'una funció trigonomètrica simple i d'una exponencial simple... i res més, perquè la resta es troba a les taules.

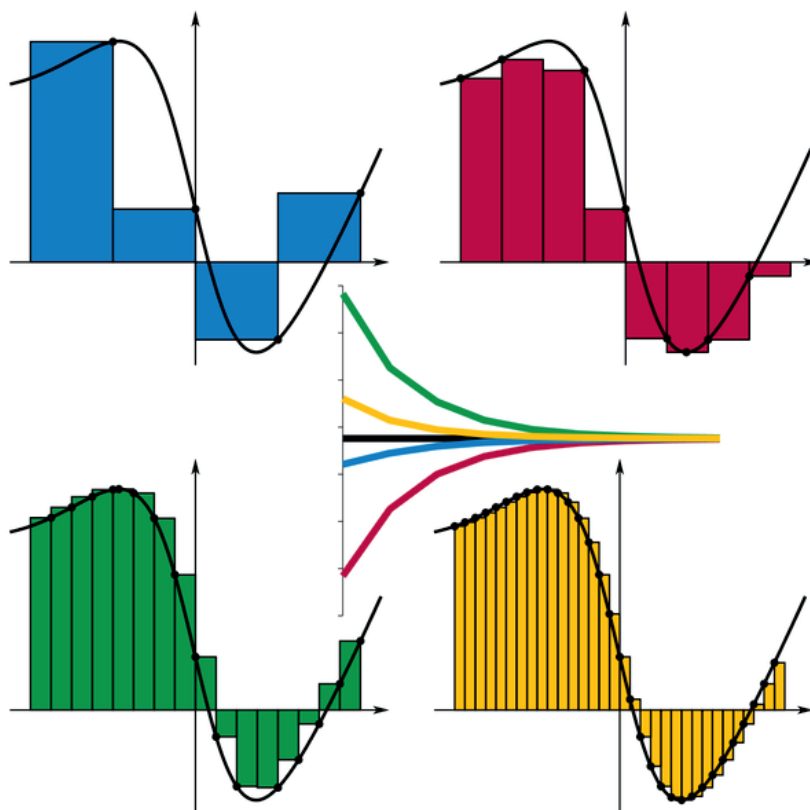
- | | |
|--|--|
| 1. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ | 2. $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$ |
| 3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$ | 4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ |
| 5. $\int e^x dx = e^x + c$ | 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ |
| 7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | 8. $\int \cos x dx = \sin x + c$ |
| 9. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$ | 10. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cotg x + c$ |
| 11. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$ | 12. $\int \operatorname{cosec} x \cotg x dx = -\operatorname{cosec} x + c$ |
| 13. $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{tg}^{-1} x + c$ | 14. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$ |
| 15. $\int \tan x dx = \ln \sec x + c$ | 16. $\int \cotg x dx = \ln \sin x + c$ |

Fig. 8.1
Taula d'integrals més bàsiques.



Fig. 8.2

La integral definida consisteix a dividir l'àrea en rectangles i anar augmentant el número de rectangles. Aquesta gràfica es llegeix de dues maneres. Cada color indica un vèrtex diferent escollit per fer la divisió. El gràfic central indica com canvia l'àrea a mesura que vas fent triangles més petits. A més, es pot notar visualment com canvia l'àrea; per a cada color hem escollit una divisió diferent. Així doncs, no importa quin punt agafis per construir els rectangles, sempre que n'agafis molts. La suma convergeix (si no hi ha cap singularitat que faci que l'àrea no estigui ben definida). I aquesta suma es pot calcular, pel teorema fonamental del càlcul, trobant la funció primitiva.



La part més difícil d'integrar no és pas aprendre una mecànica sistemàtica per aconseguir integrar qualsevol funció (malauradament, moltíssimes funcions no són gens fàcils d'integrar), sinó saber plantejar quina integral has de resoldre per arribar a la solució del problema. Dit d'una altra manera, cal aprendre què significa una integral i com l'enunciat d'un problema et porta a necessitar resoldre una integral. La dificultat d'integrar-la després si no és fàcil no existeix per a nosaltres; per això hi ha unes taules que et donen la solució (tal com la calculadora et dona la solució del ln 14).

La qüestió és, doncs, en quines situacions apareix la integral com a solució d'un problema. Normalment no hi ha cap exercici de física on sigui d'interès trobar la integral d'una funció pel pur goig de trobar-la. Sempre hi ha una raó darrere. Com ja veureu, en electromagnetisme, integrar és moltes vegades la forma de trobar el camp elèctric o el camp magnètic en un punt, i això sí que interessa en moltes circumstàncies.

8.2. Teorema fonamental del càlcul

La raó per la qual sempre hi ha una raó per fer una integral (la raó de la raó) és que la integral indefinida té molt a veure amb la definida. I què és la integral definida? És



diferent de la indefinida? Doncs comencem dient que sí, encara que després veurem que estan relacionades. Anomenem integral definida *entre dos punts* d'una funció l'àrea sota la corba d'aquesta funció. Recorda que en aquest cas tenim el següent:

$$\text{Àrea sota corba } f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=N} f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a) \quad \text{on } g'(x) = f(x) \quad (8.2)$$

o

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (8.3)$$

El fet que aquesta àrea es pugui calcular trobant la integral indefinida és el *teorema fonamental del càlcul* i que veureu en molt detall a l'assignatura de matemàtiques. Potser és millor enfocar-ho des d'un punt de vista històric per tal d'entendre el significat d'aquesta expressió. Newton, Leibniz i molts d'altres buscaven trobar l'àrea sota una corba $f(x)$ (ells no ho deien, això, però a efectes pràctics era el mateix) i van demostrar que trobar l'àrea requeria trobar la funció $g(x)$, la derivada de la qual és la funció $f(x)$. Per això, ara es parla d'integral indefinida (el fet de trobar la funció primitiva $g(x)$) i d'integral definida (àrea que calcularàs utilitzant la integral indefinida) per diferenciar els conceptes. L'important és que tinguis clar que es requereix una demostració matemàtica per relacionar àrea i inversa de la derivada. I això, si no ho has vist mai, és bo que t'ho creguis fins que hagis fet la primera assignatura de matemàtiques del grau.

8.3. Molts problemes acaben integrant-se

Intentem ara resoldre el problema següent per veure un exemple on la integral és la solució d'un problema. En concret, veurem un altre ús de la integral de l'exposat aquí i veurem com el teorema fonamental del càlcul et dona la solució del problema.

Una formiga es mou sobre el terra de la cuina. Un nen es dedica a seguir el moviment de la formiga i anota la distància x i y respecte a un escaire de la porta de la cuina en funció del temps. En la seva anotació pot veure que la corba que segueix és $x = 1,5t$, $y = 0,02t^2 + 12$, on x, y estan expressades en cm, i el temps t en segons. Quants centímetres ha recorregut la formiga en un minut?

El nen, en mesurar la trajectòria en funció del temps, ha fet una gran feina: gràcies a tenir l'equació de la trajectòria pots saber on era la tortuga al principi i en cada instant durant els primers 60 segons. En el temps inicial $x(0) = 0$ i $y(0) = 12$ cm; per tant, comença a 12 cm de l'escaire. Al cap de 60 segons es troba a $x(60) = 90$ cm i $y(60) = 0,02 \cdot 60^2 + 12 = 84$ cm. La pregunta és quina distància ha recorregut la formiga. És simplement la distància entre el punt final i el punt inicial? Aquesta distància d és $d = \sqrt{(90-0)^2 + (84-12)^2} = 115$ cm. Però no és pas aquesta la distància que fa la formiga L , ja que no segueix una trajectòria recta entre els dos punts; per tant, fa un recorregut més llarg. Per calcular quina és la longitud del recorregut, hem de calcular la longitud de la corba que representa la seva trajectòria.

Per fer-ho, comencem comparant el valor de d obtingut abans, de 115 cm, amb l'obtingut si dividim la trajectòria en dos trams. Agafem primer el temps $t = 30$ s i trobem que el



punt on es troba la formiga és $x(30) = 45$ cm, $y(30) = 30$ cm. Ara podem considerar que la formiga ha anat des del punt inicial a aquest punt $(x, y) = (45, 30)$ cm i d'aquí al punt final. Podem escriure la distància que representa anar en línia recta d'un punt a l'altre:

$$\begin{aligned} L &\geq d_1 + d_2 = \sqrt{45^2 + (30 - 12)^2} + \sqrt{(90 - 45)^2 + (84 - 30)^2} = \\ &= 50,5 + 66,5 = 117 \text{ cm} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Ara la distància $d_1 + d_2$ és més gran que abans, però encara no és pas exactament la longitud L . Una aproximació molt millor seria dividir el recorregut en 6 trossos (cada deu segons) i fer el mateix càlcul. Així obtenim el següent resultat:

$$\begin{aligned} L &\geq d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = \sqrt{(x(10) - x(0))^2 + (y(10) - y(0))^2} + \\ &\sqrt{(x(20) - x(10))^2 + (y(20) - y(10))^2} + \sqrt{(x(30) - x(20))^2 + (y(30) - y(20))^2} + \\ &+ \sqrt{(x(40) - x(30))^2 + (y(40) - y(30))^2} + \sqrt{(x(50) - x(40))^2 + (y(50) - y(40))^2} + \\ &\sqrt{(x(60) - x(50))^2 + (y(60) - y(50))^2} = 119,8 \end{aligned} \quad (8.5)$$

I si fem aquest (llarg) càlcul ens dona 119,8. Pots fer-lo tu mateix amb la calculadora. Si analitzem la figura 8.3, és evident que el resultat obtingut s'apropa molt a l'esperat. Però no és exacte, el que podem fer és considerar què obtindríem si dividíssim la trajectòria en N trossos. Tindríem:

$$L \geq \sum_{i=1}^{i=N} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \quad (8.6)$$

on això es llegeix com la suma de 1 fins a N de cada un dels trossos amb $t_0 = 0$ i $t_N = 60$. Molt més important encara, $t_{i+1} - t_i = 60/N$. Aquesta última condició és la clau. En el cas anterior hem agafat $N=6$, i per tant el salt entre un temps i el següent ha de ser $t_{i+1} - t_i = 60/6 = 10$; si no, no estaries fent increments equivalents per recórrer tota la corba.

Però ara podem utilitzar la definició de límit per trobar el resultat exacte. Si dividim la trajectòria en molts i molts trossos, la contribució de cada terme serà cada cop més petita, però si la suma convergeix (infinites termes essent cadascun infinitament petit), tenim la longitud exacta. És a dir, L és:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=N} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \\ &\text{amb } t_{i+1} - t_i = 60/N \quad t_0 = 0 \quad t_N = 60 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Molt bé, i ara, com es troba aquest límit? Doncs el punt clau és que aquest límit és la definició d'integral. Òbviament, la diferència és simplement que la funció que has d'integrar ara no és una simple funció $f(x)$, sinó una funció més complicada de $x(t)$ i $y(t)$, però això no vol dir que no ho pugués resoldre. Primer has d'intentar escriure-ho com s'escriu qualsevol integral: suma infinita d'un terme funcional per un increment

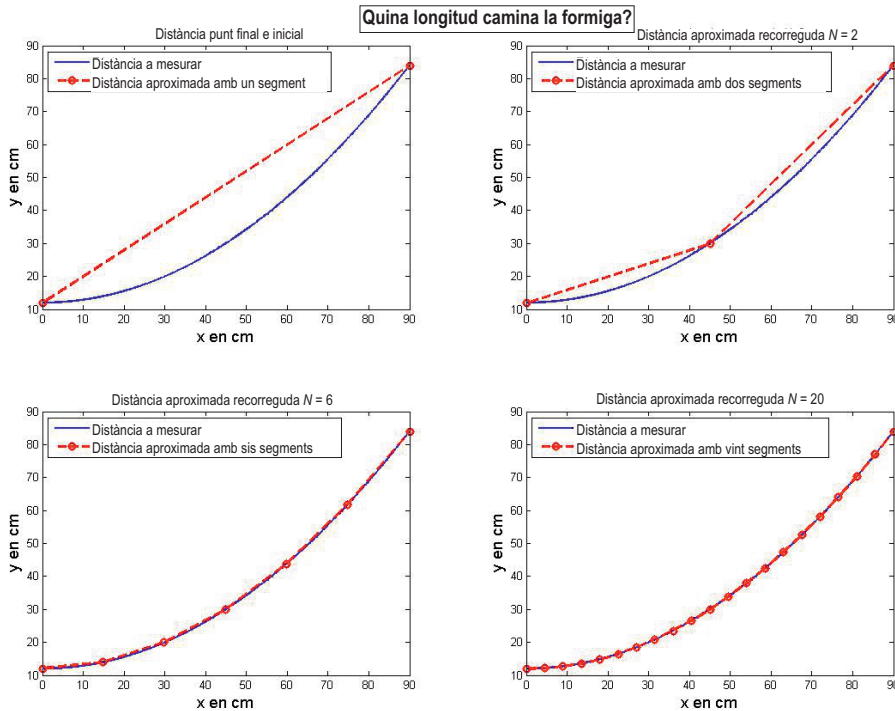


Fig. 8.3

Aquí pots veure el recorregut que fa la formiga si seguim les equacions que indica el problema (corba blava). També pots veure les diferents aproximacions de la longitud. Fent sis segments i calculant cadascun d'aquests, trobaríem pràcticament la longitud inicial; amb vint segments el resultat és totalment indistingible del correcte. Fer una integral és trobar el límit de fer cada cop més divisions amb segments cada cop més petits.

petit que es fa més petit a mesura que N va cap a infinit. En el nostre cas, escrivim explícitament les funcions i utilitzem $t_i - t_{i-1} = 60/N = \Delta t$, i per tant $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, tal com hem vist abans.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=N} \sqrt{(1,5t_i - 1,5t_{i-1})^2 + (0,02t_i^2 + 12 - 0,02t_{i-1}^2 - 12)^2} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=N} \sqrt{1,5^2 \Delta t^2 + 0,02^2 (t_i^2 - t_{i-1}^2)^2}
 \end{aligned} \quad (8.8)$$

Aplicant un altre cop la relació entre temps queda així:

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=N} \sqrt{1,5^2 \Delta t^2 + 0,02^2 ((t_{i-1} + \Delta t)^2 - t_{i-1}^2)^2} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=N} \sqrt{1,5^2 \Delta t^2 + 0,02^2 (2t_{i-1} \Delta t + \Delta t^2)^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=N} \Delta t \sqrt{1,5^2 + 0,02^2 (2t_{i-1} + \Delta t)^2}
 \end{aligned} \quad (8.9)$$

on només hem utilitzat àlgebra... La sabries reproduir aquesta àlgebra? La idea al darrere és treure un factor comú de l'increment petit. Sempre utilitzarem l'àlgebra per aconseguir tenir aquesta forma funcional. I ara que ja la tenim, només cal adonar-se que en límit d'increment anant cap a zero, Δt és el diferencial de temps que necessitem per aplicar la relació entre integral i límit. Us podeu queixar perquè hi ha un altre increment Δt dins



l'arrel quadrada. Què passa amb aquest? Doncs aquest increment va cap a zero, quan N es fa molt gran i està sumat per un terme que no es fa zero. Aplicant les regles del límit no cal considerar-lo. Escrivim, doncs:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=N} \Delta t \sqrt{1,5^2 + 0,02^2 (2t_{i-1} + \Delta t)^2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=N} \Delta t \sqrt{1,5^2 + 0,02^2 (2t_{i-1})^2} = \int_0^{60} \sqrt{1,5^2 + (2 \cdot 0,02t)^2} dt \end{aligned} \quad (8.10)$$

I ara només cal que busquis a les taules la primitiva d'aquesta integral i fer-la:

$$\begin{aligned} \int_0^{60} \sqrt{1,5^2 + (2 \cdot 0,02t)^2} dt &= 0,04 \int_0^{60} \sqrt{37,5^2 + t^2} dt \\ &= 0,04 \left[\frac{t\sqrt{t^2 + 37,5^2}}{2} + \frac{37,5^2}{2} \ln \left(t + \sqrt{t^2 + 37,5^2} \right) \right]_{t=0}^{t=60} \\ &= 0,04 \left[\frac{60\sqrt{60^2 + 37,5^2}}{2} + \frac{37,5^2}{2} (\ln 60 + \sqrt{60^2 + 37,5^2} - \ln 37,5) \right] = 120 \end{aligned} \quad (8.11)$$

En aquest cas la integral ens serveix per trobar una longitud. Observem que la integral en aquest cas és gairebé idèntica a fer el càlcul utilitzant sis trossos. Com que en general no sabràs quants trossos serien necessaris per fer una bona aproximació, cal fer la integral.

Així doncs, una integral no només serveix per trobar àrees (com a la definició d'integral definida), sinó que serveix també per trobar longituds, àrees, volums, camps elèctrics, camp magnètics... de tot, sempre que el problema que hakis de resoldre sigui una suma d'infinites parts que cada cop es van fent més petites. T'hauràs d'entrenar per identificar aquest tipus de problemes... Tens tot un curs per anar practicant, especialment quan facis electromagnetisme. Però abans hauràs de fer mecànica, i per fer-ne necessitaràs una altra eina: els vectors.

Problema 1

Una propietat qualsevol d'una partícula ve donada per l'expressió $f(t) = 7t^2 - 5$. Trobeu la funció de la seva derivada, $f'(t)$. Sabent que la integral de la funció s'anul·la quan $t = 0$, trobeu l'expressió per a la seva integral definida, $F(t)$.

Solució

$$f(t) = 7t^2 - 5$$

La derivada és: $f'(t) = 14t$

La integral indefinida és: $F(t) = \int f(t) dt = \frac{7}{3}t^3 - 5t + C$.

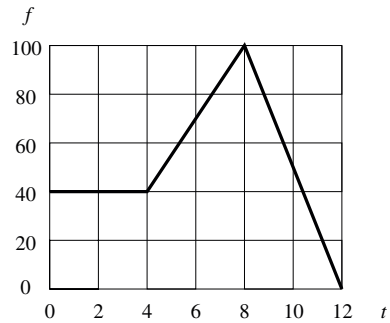
Com que quan $t = 0$ aleshores $F(t) = 0$, això vol dir que $F(0) = 0$. Amb aquesta condició podem identificar la constant C :



$$0 = F(0) = C \Rightarrow C = 0$$

Per tant, la integral definida val $F(t) = \frac{7}{3}t^3 - 5t$.

Problema 2

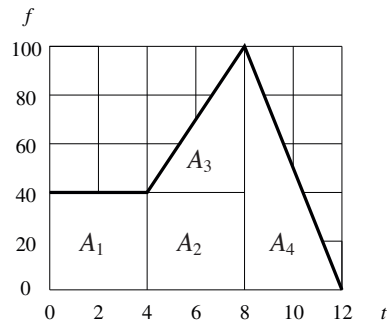


La dependència en el temps d'una funció està descrita a la figura. Trobeu la integral

$$\int_{t=0}^{t=12} f(t) dt.$$

Solució

Hem de calcular l'àrea retallada de la funció descrita en la figura entre $t = 0$ i $t = 12$. L'anomenem A . Observem que $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, on A_i , $i = 1, 2, 3, 4$ són àrees en intervals de temps intermedis que són fàcils de calcular, tal com indica la següent figura:



Aleshores:

$$A_1 = (40 - 0) \cdot (4 - 0) = 40 \cdot 4 = 160$$

$$A_2 = (40 - 0) \cdot (8 - 4) = 40 \cdot 4 = 160$$

$$A_3 = ((100 - 40) \cdot (8 - 4)) / 2 = (60 \cdot 4) / 2 = 120$$

$$A_4 = ((100 - 0) \cdot (12 - 8)) / 2 = (100 \cdot 4) / 2 = 200$$

I per tant, l'àrea total és:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 160 + 160 + 120 + 200 = 640$$





Moure's en tres dimensions vol dir treballar amb vectors

Imaginem-nos que volem saber on som en una habitació. Necessitem una regla per cada direcció de l'espai i un rellotge per saber en quin moment hi som. Així podem definir la posició general, amb tres coordenades espacials i una de temporal. Les direccions de les regles han de ser perpendiculars; si no, no podrem definir fàcilment la posició de cada punt. Si fem una taula de mesures de la nostra posició quan el temps avança, tindrem a cada t una posició definida per tres valors (anomenada per conveni x , y i z). Així doncs, si ens movem tindrem tres funcions, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, com a descripció del moviment, i en els capítols anteriors hem après moltes coses sobre les funcions. Sabem tot el que cal per entendre el moviment? Cal realment aprendre alguna cosa més?

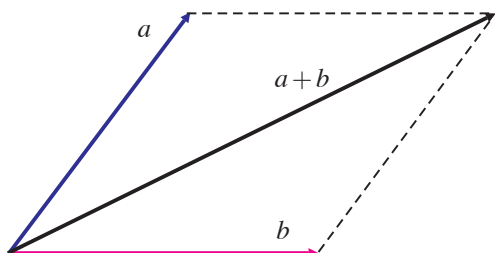
9.1. La no tan subtil diferència

Doncs sí, i malauradament és una idea molt subtil però important. Si estudiem el moviment en una dimensió, la línia recta on es posa la regla defineix el mateix moviment, però en dues o tres dimensions tot depèn de com agafem els eixos. No podem decidir de cap manera a priori quins són els millors..., però aleshores, què passa si una persona agafa uns eixos per fer una mesura que són diferents dels que estem utilitzant nosaltres? Hauríem de llençar totes les dades? El millor és intentar inventar unes eines matemàtiques amb les quals passar d'un sistema d'eixos a un altre sigui fàcil. Quines són aquestes eines? Doncs els vectors.

Els vectors no només serveixen per a això, també donen solució a un problema important. Imaginem-nos la derivada de cadascuna de les funcions $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$. Imaginem-nos que cadascuna d'elles és una constant. Aleshores diem que la velocitat és constant. Però com passes de tres números que donen tres "velocitats" a la noció única que tenim nosaltres d'anar a una única velocitat? Si vas a 3 m/s en una direcció i 4 m/s en una altra, quina és la velocitat total? (i no, el resultat no és 7 m/s). La clau és la composició de velocitats per trobar la direcció resultant. Et trobes un triangle com el de la figura 9.1. Aquesta composició et dóna cap a on s'està movent l'objecte.



Fig. 9.1
Dos velocitats en dues
direccions es sumen tal i
com ho fan els vectors.



Adona't que, si vols saber la magnitud absoluta de la velocitat, has de trobar la hipotenusa del triangle, l'anomenat *mòdul de la velocitat*. Per sistematitzar les diferències entre una velocitat que té tres components i la magnitud total també utilitzarem els vectors.

9.2. Els vectors

Els vectors per a nosaltres no seran més que una sèrie de números. En dues dimensions seran (a,b) (o (x,y) , o (p,t) com vulguis) i en 3D (a,b,c) (o (x,y,z) ...). Els escriurem d'aquesta manera, com a triplets de números. Aquests números representaran alguna cosa física (una velocitat, una acceleració, un camp elèctric...) que canvia els seus valors segons siguin els eixos de coordenades. Si les coses no canvien quan canviem el sistema de coordenades, tenim un escalar. Si canvien, tenim un vector. Però, com canvia un vector segons el sistema de coordenades que agafem? La resposta és més aviat que un objecte (o concepte físic) és un vector si es transforma de certa forma quan canviem de sistema de referència.

Un objecte vectorial ha de dependre de la direcció i del sentit; si no, no és un vector. Però, més important, quan definim operacions sobre aquest objecte, aquesta operació ha de tenir un sentit físic. Perquè una eina matemàtica sigui útil a la física, les operacions que definim han de tenir una intuïció física clara.

I quines són aquestes operacions que han de tenir un sentit per a un objecte que vol ser vectorial? Doncs són quatre: **sumar vectors** per obtenir un altre vector, fer **el producte d'un vector per un escalar** per obtenir un altre vector, fer **el producte escalar entre dos vectors** per obtenir un escalar i fer **el producte vectorial entre dos vectors** i que et doni un altre vector. Són quatre operacions que han de tenir un sentit físic. En la cinemàtica, la dinàmica i l'electromagnetisme, tenim que la posició, la velocitat, l'acceleració, les forces, el camp elèctric i el camp magnètic són magnituds vectorials. Això vol dir que en tots els casos aquestes operacions volen dir alguna cosa. Quan sumem dues forces, les sumem tal com diuen les normes de sumar vectors. El mateix passa amb les altres operacions. Anirem pas per pas veient quin sentit té cada operació, i podrem entendre allò que ha de complir qualsevol magnitud vectorial.

9.2.1. Suma de vectors i multiplicació de vectors per un escalar

En el món de les matemàtiques, sumar dos vectors és fer una operació tal que:

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \quad \vec{d} = (d_1, d_2, d_3) \quad \vec{c} + \vec{d} = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, c_3 + d_3) \quad (9.1)$$



Si ens fixem en un cas que podem representar en un pla (en 3D funciona igual), podem agafar com a exemple els vectors $\vec{c} = (1, 2, 0)$ i $\vec{d} = (3, 1, 0)$. La suma implica trobar un altre vector que va en la direcció del paral·lelogram que formen els dos vectors primitius. Una força exercida sobre un cos és un vector si a la realitat els efectes d'aplicar una força $\vec{F}_1 = (1, 2, 0)$ i una $\vec{F}_2 = (3, 1, 0)$ són exactament els mateixos que en aplicar una força que sigui la suma $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (4, 3, 0)$. Tant si apliques les dues per separat com una sola que sigui la suma resultant, els efectes físics han de ser els mateixos. Si no, la força no seria pas un vector.

Igualment important és la multiplicació d'un vector per un escalar. Si tenim $\vec{a} = (2, 4, 5)$ i un escalar $K = 3$, el producte es defineix així:

$$K\vec{a} = 3(2, 4, 5) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5) = (6, 12, 15) \quad (9.2)$$

Multiplicant només allarguem o reduïm el vector, que sempre apunta en la mateixa direcció. Si $K > 1$ el fem més gran. Si $K < 1$ però $K > 0$, l'estem fent petit. Multiplicar per $K = 1/4$ divideix per quatre la longitud del vector. Si el multipliquem per un número negatiu, estem canviant el sentit del vector. Ara podem tornar a discutir si la força compleix aquest criteri com a vector. Per fer que ho sigui, aplicar quatre forces iguals en la mateixa direcció és com aplicar una sola força quatre vegades més gran. Durant el primer curs d'un grau t'explicaran que efectivament això és així.

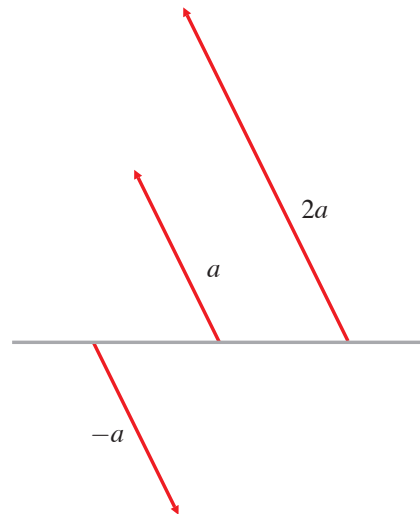


Fig. 9.2
Un vector multiplicat per un escalar dóna un altre vector més llarg o curt en la mateixa direcció que l'original.

I ara arriba una detall important: la nomenclatura. I els errors de nomenclatura, que en feu molts. Una cosa és el vector i una altra la component d'aquest vector. Així doncs, hem d'escriure coses de l'estil següent:

$$\vec{v} = (4, 2, 1) \text{ m/s} \quad v_x = 4 \text{ m/s} \quad (9.3)$$

i mai del següent:

$$v = (4, 2, 1) \quad \vec{v}_x = 4 \text{ m/s} \quad (9.4)$$



Com hem dit, un escalar té un sentit molt diferent del d'un vector. Un escalar, com la massa, no funciona igual que un vector. Quan sumes dues masses no es sumen com a vectors. Les masses es sumen en un punt: el resultat no depèn de cap direcció o sentit. El mateix passa amb una component d'un vector. Una component és un número, un escalar. Per entendre-ho millor, i mirar-ho des d'un altre punt de vista, comencem per definir els vectors més bàsics que ens podem imaginar: $\vec{i} = (1, 0, 0)$ $\vec{j} = (0, 1, 0)$ $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Aquests vectors tenen mòdul 1, són unitaris. Si treballem amb un sistema de coordenades fix, podem escriure qualsevol vector d'una manera interessant a partir de la definició de la suma de vectors i del producte d'un escalar per un vector. Per exemple, podem escriure un vector posició, que fins ara escrivíem com a (x, y, z) , de la següent manera: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Observa:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\end{aligned}\quad (9.5)$$

I això que he dit per a la posició val per a qualsevol entitat física que sigui un vector, com la velocitat o la força. Per tant, cadascuna de les components, en el fons, és un escalar.

Pensa ara un moment en les implicacions d'aquestes definicions en el món real. És molt típic que una persona es mogui en una direcció que no sigui la determinada per cap eix. Pot ser que en la direcció x avanci a 1 m/s, en la direcció y a 3 m/s i en la z a 7 m/s. La composició d'aquests moviments ens indicarà cap on es mou. I la velocitat total no serà pas $1+3+7=11$ m/s. No ho pot ser, perquè la composició de moviments es fa tal com hem indicat a la suma i productes d'un escalar per un vector: seguint la llei del paral·lelogram de la figura. Les velocitats es sumen com a vectors. Ara resulta evident que seria bo poder saber quina és la magnitud total de la velocitat, és a dir, quants metres avanço realment en longitud si avanço una certa quantitat en les tres direccions. Per això, entre altres coses, necessitem el producte escalar. Una nova operació que ha de tenir sentit si la nostra magnitud física és vectorial.

9.2.2. El producte escalar

El mòdul de la velocitat que hem dit abans és un vector o un escalar? Pensem si depèn del sistema de referència. No, no en depèn. Si definim l'operació següent:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = |\vec{v}|^2 = v^2 \quad (9.6)$$

com a producte escalar d'un vector per si mateix, tenim que el producte escalar d'un vector per si mateix dóna el seu mòdul al quadrat. Què volem dir amb això? Si $\vec{v}$ fos una posició, aquesta operació et donaria la distància de l'origen al punt. En el fons, aquesta definició no és res més que el teorema de Pitàgores aplicat a la hipotenusa d'un triangle. Però aquí, com que és una velocitat, et dóna la magnitud total de la velocitat. És a dir, et dóna la longitud del vector. I el mateix passa amb la força o el camp magnètic: aquesta operació et dóna la intensitat total d'aquesta magnitud vectorial. I aquesta magnitud, com que és una "longitud" absoluta, no depèn pas del sistema en el qual et trobes, no depèn d'on apuntin els eixos. És un número. Així doncs, el mòdul de $\vec{v}$ que escrivim com a $|\vec{v}|$ és un escalar.



Com podem generalitzar aquesta operació a dos vectors diferents? Quin sentit té fer una operació com el producte escalar? De fet, és fàcil generalitzar l'operació d'aquesta manera:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (9.7)$$

Si la força o la velocitat o la posició són vectors, això ha de tenir un sentit físic; en particular, ha de ser un escalar que no depèn del sistema de referència. Quin és aquest sentit físic? Per tal d'entendre-ho, mirem què dona el producte escalar d'un vector per un vector unitari:

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (1, 0, 0) = a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = a_1 \quad (9.8)$$

Obtenim la component en la direcció del vector unitari. De fet, un producte escalar entre un vector i un vector unitari sempre dona el mòdul de la projecció del vector no unitari sobre l'unitari. Així doncs, sempre podem escriure, formalment, això:

$$\vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{r} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{r} \cdot \vec{k})\vec{k} \quad (9.9)$$

Aquesta és la primera equació que no entenen molts estudiants. Costa entendre que el vector pot ser un objecte en si mateix, més enllà de les seves coordenades. Fins ara hem agafat vectors en tres dimensions com un triplet de números, però aquest triplet representa alguna cosa objectiva, ja sigui la posició, un camp elèctric, la velocitat o una força. Aquest objecte el podem calcular en qualsevol sistema de referència. En cada un d'ells el triplet de números serà diferent, però l'objecte en si serà el mateix. Algunes vegades fem referència a components concretes d'un vector en uns eixos concrets i a vegades parlem de l'objecte en general.

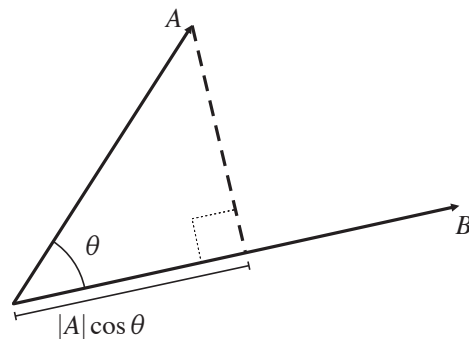


Fig. 9.3
El producte escalar de dos vectors dona la projecció d'un vector sobre l'altre vector. La projecció és una longitud, un valor absolut positiu. És un escalar.

Tal com hem vist, el significat del producte escalar és molt clar quan un dels dos vectors és unitari. Aquest dona la component del vector en la direcció del vector unitari. Però, què significa el producte escalar si cap vector és unitari? Doncs bé, fem un petit truc per entendre-ho: escrivim cada vector com el seu mòdul multiplicat pel vector unitari en la direcció del vector. Ui, aquí sí que estàs perdut. Segur. Tornem-hi. Imagina't un vector qualsevol $\vec{r}$. Segur que aquest vector apunta en una direcció; pots escriure un vector unitari $\hat{r}$ en la direcció d'aquest vector de la següent manera:

$$\hat{r} = (1/\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}})\vec{r} \quad (9.10)$$



Fixa't bé el que vol dir aquesta equació. Ho farem amb un exemple, $\vec{a} = (4, 2, -5)$:

$$\hat{a} = (1/\sqrt{4^2 + 2^2 + (-5)^2})\vec{a} = (1/\sqrt{45})(4, 2, -5) = (\frac{4}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{-5}{\sqrt{45}}) \quad (9.11)$$

Ara pots comprovar tu mateix que el mòdul d'aquest vector és 1 i que el vector unitari $\hat{a}$ apunta en la direcció de $\vec{a}$.

Molt bé, doncs. Ara qualsevol producte escalar el podem escriure com a:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\hat{a} \cdot \hat{b} \quad (9.12)$$

i trobem que el resultat depèn del producte escalar de dos vectors unitaris. I el sentit d'això, ja ho hem dit abans, és la projecció d'un sobre l'altre. Recordant trigonometria, això no és més que el cosinus de l'angle que formen els dos vectors unitaris:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha) \quad (9.13)$$

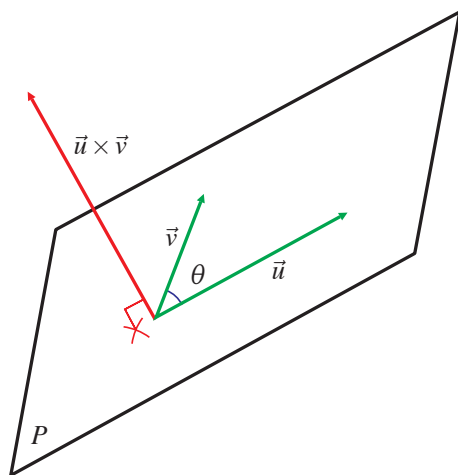
on α és l'angle entre $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (o entre els respectius unitaris). Amb això hauries de veure més clar la relació entre un vector, el seu mòdul i les seves projeccions sobre altres vectors (o eixos representats per vectors unitaris en la direcció d'aquests eixos). Per exemple, si dos vectors són perpendiculars, el seu producte escalar valdrà zero. Per què?

9.2.3. El producte vectorial

Ara només queda una operació per entendre els vectors, el producte vectorial. El producte vectorial entre dos vectors dóna un altre vector. La propietat principal d'aquesta operació, que li dóna sentit físic, és que el producte vectorial entre dos vectors et doni un altre vector que et surti del pla que formen. De moment, definim l'operació matemàticament en el cas més general $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ com a:

$$\vec{g} = \vec{c} \times \vec{d} = (c_2d_3 - c_3d_2, d_1c_3 - c_1d_3, c_1d_2 - c_2d_1) \quad (9.14)$$

Fig. 9.4
El producte vectorial de dos vectors dóna un altre vector. Aquest vector és perpendicular al pla on es troben els dos vectors amb què fas l'operació.





El sentit d'aquesta operació és més difícil d'entendre que en els casos anteriors. De moment, simplement repetirem que el producte vectorial de dos vectors et permet obtenir un altre vector que és perpendicular al pla que formen els dos vectors amb què fas l'operació. En l'exemple posat, els vectors $\vec{c}$ i $\vec{d}$ es troben en un pla. El vector $\vec{g}$ resultant serà un vector perpendicular a aquest pla. A més, tindrà una longitud donada per:

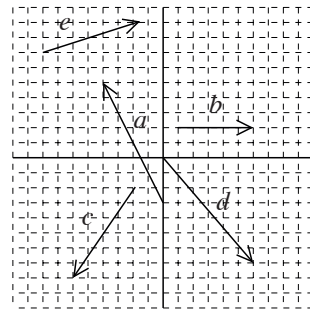
$$|\vec{g}| = |\vec{c} \times \vec{d}| = |\vec{c}||\vec{d}|\sin(\theta) \quad (9.15)$$

on θ és l'angle que formen els vectors $\vec{c}$ i $\vec{d}$. Fixa't que això és un resultat que pots obtenir amb àlgebra, ja que de la mateixa definició de producte vectorial en pots extreure quant val el mòdul de $\vec{g}$. L'únic problema és que la demostració algebraica és una mica llarga. Per fer aquesta àlgebra et pot ser útil trobar quin és el resultat de multiplicar vectorialment entre si dos vectors unitaris $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si l'operació fa el que indica la figura 9.4, multiplicar el vector $\vec{i}$ per $\vec{j}$ t'ha de donar el vector $\vec{k}$. Només cal que apliquis la definició donada a (9.14) i comprovaràs que és cert. Si canvies l'ordre, fixa't que $\vec{j}$ per $\vec{i}$ dona $-\vec{k}$. I això valdrà sempre, canvia l'ordre i canvies un signe. Amb això, pots fer-te una taula amb tots els productes vectorials possibles entre els vectors unitaris?

Ara tens tot el dret de preguntar quin sentit físic té tot això. Quin sentit físic té multiplicar vectorialment dos vectors que siguin dues velocitats o dues forces. Per a què volem un vector perpendicular a dos vectors? Per entendre-ho no va malament tenir ben clares algunes idees més pròpies de primer de grau, especialment per entendre la seva utilitat. Així doncs deixem que el teu professor de grau t'expliqui per a què et pot servir obtenir un vector que surti del pla generat per dos vectors. Una pista: et serà molt útil si vols saber com i per què les coses giren.

I amb això hem conclòs la part de repàs de matemàtiques. Ara necessitem repassar una mica cinemàtica i càrregues elèctriques. És la part de física de batxillerat que cal conèixer en profunditat.

Problema 1



Escriu les components dels vectors de la figura, on convenim que 2 caselles del dibuix són una unitat, i calcula:

- $\vec{a} + \vec{b}$
- $\vec{c} - \vec{d}$
- $2\vec{e}$
- el mòdul i la direcció de cada un d'ells

La direcció d'un vector sempre cal donar-la respecte al semieix de l'abscissa positiva.



Solució

Els vectors són:

$$\vec{a} = (-2, 4) \quad \vec{b} = (2,5, 0) \quad \vec{c} = (-2, -3) \quad \vec{d} = (3, -3,5) \quad \vec{e} = (3, 1)$$

I els resultats de les operacions són:

a) $\vec{a} + \vec{b} = (-2 + 2,5, 4 + 0) = (0,5, 4)$

b) $\vec{c} - \vec{d} = (-2 - 3, -3 - (-3,5)) = (-5, 0,5)$

c) $2\vec{e} = (2 \cdot 3, 2 \cdot 1) = (6, 2)$

d) Recordem que el mòdul d'un vector és $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Seguint aquesta indicació, obtenim que els mòduls dels vectors de la figura són:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} \cong 4,47 & |\vec{b}| &= \sqrt{(2,5)^2 + 0^2} = 2,5 \\ |\vec{c}| &= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \cong 3,6 & |\vec{d}| &= \sqrt{3^2 + (-3,5)^2} = \sqrt{21,25} \cong 4,61 \\ |\vec{e}| &= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \cong 3,16 \end{aligned}$$

Recordem ara que l'angle d'un vector ve donat per la seva tangent, $\tan \theta_v = \frac{v_y}{v_x}$. Cal anar amb compte a l'hora de fer aquest càlcul, ja que $\tan(\alpha + 180^\circ) = \tan \alpha$, i per tant, dos angles de quadrants diferents poden tenir la mateixa tangent. Així doncs, per saber quin és l'angle buscat cal saber en quin quadrant es troba aquest. Vegem quins angles, és a dir, direccions, tenen els vectors considerats:

$\theta_a = \arctan\left(\frac{4}{-2}\right) = -63,4^\circ$. També és una solució possible $\theta_a = -63,4^\circ + 180^\circ = 116,6^\circ$. Com que θ_a és al segon quadrant, concloem que $\boxed{\theta_a = 116,6^\circ}$.

$\theta_b = \arctan\left(\frac{0}{2,5}\right) = 0^\circ$ o $\theta_b = 0^\circ + 180^\circ = 180^\circ$. Com que θ_b és al primer quadrant, ha de ser $\boxed{\theta_b = 0^\circ}$.

$\theta_c = \arctan\left(\frac{-3}{-2}\right) = 56,3^\circ$ o $\theta_c = 56,3^\circ + 180^\circ = 236,3^\circ$. Com que θ_c és al tercer quadrant, deduïm que $\boxed{\theta_c = 236,3^\circ}$.

$\theta_d = \arctan\left(\frac{-3,5}{3}\right) = -49,4^\circ$ o $\theta_d = -49,4^\circ + 180^\circ = 130,6^\circ$. Com que θ_d és al quart quadrant, concloem que $\boxed{\theta_d = -49,4^\circ = 310,6^\circ}$.

$\theta_e = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 18,4^\circ$ o $\theta_e = 18,4^\circ + 180^\circ = 198,4^\circ$. Com que θ_e és al primer quadrant, deduïm que $\boxed{\theta_e = 18,4^\circ}$.



Problema 2

Calcula x perquè el vector $\vec{v} = (1/3, x)$ sigui unitari.

Solució

Un vector unitari és aquell que té un mòdul igual a 1.

$$|\vec{v}| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + x^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Leftrightarrow$$

$$x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \cong \pm 0,94$$

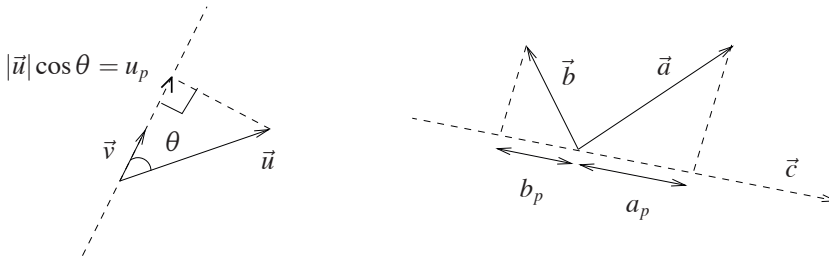
Per tant, hi ha dues opcions possibles: $x = 0,94$ i $x = -0,94$.

Problema 3

Quant valen les projeccions dels vectors $\vec{a} = (3, 2)$ i $\vec{b} = (-1, 2)$ sobre el vector $\vec{c} = (5, -1)$? Dibuixa-ho.

Solució

La projecció d'un vector $\vec{u}$ sobre un altre $\vec{v}$ és: $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| \cos \theta$



Per tant, les projeccions dels vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sobre $\vec{c}$ són:

$$proj_{\vec{c}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}} = 2,55$$

$$proj_{\vec{c}}\vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{(-1) \cdot 5 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{-7}{\sqrt{26}} = -1,37$$

→ 10



Cinemàtica. Les coses es mouen

El moviment es demostra caminant.
(ANÒNIM)

10.1. Les coses es mouen

Les coses es mouen, i es mouen molt. No és d'estranyar que, si et poses a pensar sobre quines coses són importants d'entendre en aquest món, una de les principals sigui com i per què les coses es mouen. Però de fet, durant molts anys, saber com les coses es mouen al voltant teu no interessava gaire. Interessava una miqueta saber com es movien les coses al cel, ja que la vida humana en depenia molt més. Però l'important, fins i tot en aquest cas, era saber per què les coses es movien.

En el cas dels objectes que pots veure cada dia al cel, el com i el perquè del seu moviment era objecte de tots tipus d'interpretacions, ja fossin místiques, simbòliques, màgiques o religioses. Només uns quants segles després de l'inici de l'escriptura algú, un altre cop els grecs, va pensar a relacionar de forma directa aquell món d'allà dalt amb aquest d'aquí baix. I al final, tot va acabar amb Aristòtil. No és que no hi hagués molts més pensadors grecs, però en acabar l'Imperi Romà i començar el cristianisme, el pensador grec escollit per explicar la relació del Déu cristià amb la natura va ser Aristòtil. Com que saps filosofia de Batxillerat, ja saps que en aquella època la filosofia aristotèlica era el que es considerava la descripció més fiable del que després anomenaríem fenòmens físics. En aquesta explicació hi havia dos mons: el de l'esfera celeste i el d'aquí sota. Seguien lleis diferents: aquí a la Terra hi havia quatre elements que es volien col·locar on pertocava (llum, aigua, terra i foc). Si es deixava en pau els objectes sempre es mourien en línia recta impulsats per aquesta necessitat de moure's. En canvi, a l'esfera celest, les coses es movien circularment si les deixàvem fer. La Terra al centre, és clar.

I aquest món va continuar sent així durant segles i segles. Es van realitzar petits canvis, petites millores en la relació Déu-Terra, ja que, al cap i la fi, s'havien de construir catedrals i fer alguns estris, i això requeria un coneixement més científic. Com hem dit en



capítols anteriors, només de mica en mica, cap al segle XIV es van començar a escoltar algunes veus lleugerament contràries. La tradició escolàstica (apa, a mirar el diccionari) estava en retirada. Tal com ja hem dit, Descartes va ser el cop de gràcia, perquè va dir públicament d'una forma molt més llarga i detallada que ell no es creia res de res de res.

Però el punt d'inflexió va passar, com sempre, quan algú va tenir el temps, els diners i l'entorn necessari per començar a mesurar coses. És a dir, quan algú va pensar a fer algun experiment. I aquest no és altre que Galileu. Els seus experiments van ser brillants. Posa alguna cosa a rodolar per un pla inclinat i analitza com es mou. En una dimensió. Nosaltres ara sabem el càlcul diferencial, i per tant podem saber alguna cosa més sobre com descriure aquests moviments que va estudiar Galileu. Comencem, doncs, mirant com es descriu un moviment en una dimensió.

10.2. Si es mou en una dimensió, només necessites una regla, un rellotge i càlcul diferencial

Com es descriu el moviment d'un objecte que segueix una línia recta?

Bé, per saber com es mou un objecte necessites quatre coses:

- Un sistema de referència
- Una regla
- Un rellotge
- Saber càlcul diferencial

Necessites un sistema de referència. I què vol dir, això? Doncs que el moviment mesurat depèn de quina sigui la teva situació. Si vas dins d'un tren, o dins d'una nau espacial, o simplement estàs assegut a casa, els moviments de les coses semblen diferents. Per entendre com es mouen les coses respecte a tu, has d'agafar un punt de referència de la línia per on es mou l'objecte. Respecte a aquest punt has de tenir una regla, alguna cosa que no canviï les seves dimensions en cap circumstància. Necessites també un rellotge, és a dir, algun fenomen periòdic que es repeteixi cada cert temps (per exemple, el moviment de les peces internes del teu rellotge és una bona aproximació).

Un punt de referència, que s'anomenarà origen de coordenades, des d'on tindràs una regla amb la qual podràs marcar la posició de l'objecte i el temps del rellotge en què passa per aquest punt de la regla. És el que necessites. En general no és fàcil fer aquestes mesures. És molt difícil mesurar com es mou un cotxe des del carrer. Pots tenir-ne una intuïció, però no una mesura correcta de la seva posició; no tens els estris. Però una persona que tingui una regla adequada, un punt fix i un rellotge, sí que podria. Això és el que intenta fer el GPS, Global Positioning System, posar satèl·lits en òrbita que, comunicant-se entre ells i enviant-se senyals, generin una mena de regla a tots els punts del món. Aquests satèl·lits tenen un rellotge intern molt, molt precís... Tan precís que ha de tenir en compte fins i tot teories modernes (la relativitat d'Einstein) per estar segur que el rellotge és realment periòdic.

Amb aquestes tres coses pots fer una taula amb les dades del moviment que t'interessi, escrivint en quin moment t del teu rellotge el cos que investigues passa per un punt x de



la teva regla. Un exemple de taula seria el següent. Agafem el centre geomètric d'una bola de bitlles i mesurem com cau des d'una altura de 200 metres. Tenim les dades següents:

Temps (s)	Posició (m)
0	200
0,5	198,8
1,0	195,1
1,5	189,0
2,0	180,4
2,5	169,4
3,0	155,9
3,5	140,0
4,0	121,6
4,5	100,8
5,0	77,5
5,5	54,8
6,0	30,6

Ara les podem representar en un gràfic com el que tens a la figura 10.1.

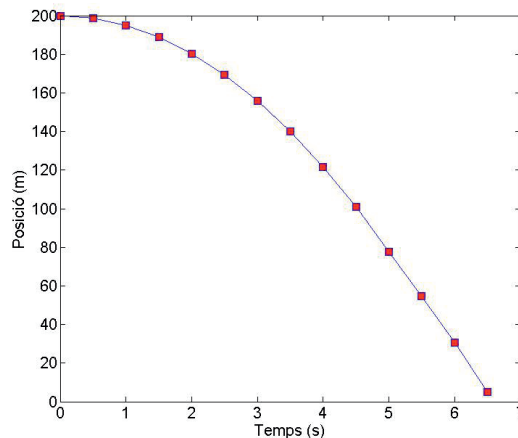


Fig. 10.1
Representació gràfica del moviment de caiguda d'una bola des d'una torre de 200 metres.

A partir del gràfic es pot intentar calcular la velocitat i l'acceleració aproximada a cada punt. La velocitat mitjana en un punt i la pots mesurar fent el quocient del que avança dividit pel temps que triga. Observa que ho podries calcular de dues maneres. En primer lloc, podries fer $v = (x_{i+1} - x_i) / (t_{i+1} - t_i)$. Així, per exemple, per $t = 2,0$ s, ($i = 5$) quan et trobes a $x = 180,4$ m la velocitat et donaria $v = (169,4 - 180,4) / 0,5 = -22,0$ m/s. També hi ha una altra manera de calcular-ho. Podries agafar el punt d'abans i fer $v = (x_i - x_{i-1}) / (t_i - t_{i-1})$. Això et dóna $v = (180,4 - 189,0) / 0,5 = -17,2$ m/s. Dóna diferent!!!

De fet, pròpiament cap de les dues mesures et dóna la velocitat correcta mitjana en aquest punt, perquè en un punt *no es pot calcular la velocitat mitjana*. Podries pensar en agafar



el punt posterior menys l'anterior i dividir-ho pel temps que ha trigat. Això és el que típicament es fa per calcular aproximadament la *velocitat instantània* en un punt. La velocitat mitjana no és el mateix que la velocitat instantània. S'ha de dir sempre que la velocitat mitjana entre *dos* punts val alguna cosa. *No es pot dir mai que la velocitat mitjana en un punt val alguna cosa, perquè la velocitat mitjana en un punt no existeix.* I el mateix passa amb l'acceleració mitjana, no es pot definir en un punt sinó entre dues parelles de punts $((i, i + j) (k, k + l))$ on tinguis calculada la velocitat mitjana $a = (v(i, i + j) - v(k, k + l)) / (t((i + j)/2) - t((k + l)/2))$.

Aleshores, què és la velocitat instantània? I l'acceleració instantània com a canvi de velocitat per unitat de temps? Per entendre-ho el primer pas és interpolat. És a dir, intentar trobar amb els punts que tenim en el gràfic una funció general que ens doni $x(t)$. Necessitem la posició no només als temps que hem mesurat sinó a qualsevol temps. Bé, i com es fa això? Inventant-se les dades intermèdies d'una forma intel·ligent. A vegades els punts de la corba indiquen clarament que ens trobem davant un moviment específic on podem ajustar un polinomi, o una funció trigonomètrica que passi per tots els punts. Però en molts casos no sembla clar com fer-ho. El que es fa és agafar grups de 3 o 4 punts i ajustar-ne una funció polinòmica, és a dir, buscar una funció d'un polinomi que passi per tots els punts i que empalmi amb suavitat un tros amb el següent. Aquesta interpolació és una manera de crear punts molt bona, i ens dóna el punt de partida per definir la velocitat i acceleració en un punt: la velocitat i acceleració instantània. Ens dóna $x(t)$. A la figura 10.1 hem fet aquesta interpolació unint els punts en vermell.

10.3. Si tinc $x(t)$, només cal derivar i integrar

Molt bé, ara ja podem trobar la velocitat instantània. Com has vist abans, la velocitat mitjana requereix dos punts. Calculem ara una velocitat mitjana moltes vegades, on deixo un punt fix i l'altre el vaig apropant més cap al primer. Si en apropar el segon punt al primer els valors de la velocitat mitjana s'apropen a un valor fix, aquest valor és la velocitat instantània. En definitiva, la velocitat és la derivada de la posició respecte al temps. I l'acceleració, la derivada de la velocitat respecte al temps. Tenim les equacions:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (10.1)$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (10.2)$$

Per què no hi ha un nom per a la tercera derivada? No l'anomenem de cap manera? I la quarta i la cinquena, tampoc? Doncs no, perquè resulta que per entendre les raons del moviment, és a dir, la dinàmica de les coses, la funció fonamental és la segona derivada de $x(t)$, l'acceleració. Si volem predir el moviment, o entendre i trobar funcions senzilles que expliquin el moviment, típicament allò que et pot donar bona informació és l'acceleració. Generalment, podem comprovar les nostres prediccions sobre les raons del moviment trobant l'acceleració si sabem quina és $x(t)$ amb el procés descrit aquí.

Però a vegades per saber $x(t)$ hi ha una idea millor. Si sabem l'acceleració d'un objecte per alguna raó, podríem calcular quina seria la seva posició en funció del temps. És a dir,



imaginem-nos que sabem $a(t)$: com trobem $x(t)$? Doncs, si has entès tot el fet fins ara, ja saps que integrant. Si tenim $a(t)$, hem d'utilitzar el càlcul integral. Posem-ne alguns exemples.

10.4. Uns quants exemples

Com es mou un objecte si té $a = 0 \text{ m/s}^2$? Integrant, queda així:

$$v(t) = \int (0 dt') = \text{cte} \quad (10.3)$$

i per tant la velocitat és una constant. Però quina constant? Doncs la que mesurem en qualsevol instant. En aquest cas, un objecte que tingui una velocitat en un instant tindrà sempre la mateixa. Així, $v = v_o$, on v_o és la velocitat particular del cas. És una constant que cal mesurar. Podríem haver utilitzat la integral definida en lloc de la indefinida dient:

$$v(t) - v(0) = \int_0^t (0 dt') = 0 \Rightarrow v(t) = v(0) = v_o \quad (10.4)$$

En aquest cas hem començat a integrar a $t = 0$, però podríem utilitzar qualsevol temps. Moltes vegades es comença a integrar des de $t = 0$ considerant que és un punt on sabem les condicions inicials. Quines són les condicions inicials de la velocitat? Saber quant val la velocitat en un punt. I ho necessites saber en totes les situacions perquè la integral té una constant indeterminada que no pots fixar. Així doncs, no et val saber només l'acceleració, has de saber la velocitat en algun punt. El punt on la saps, el pots anomenar $t = 0$, o no, depèn del que vulguis.

I $x(t)$? Tornem a integrar:

$$x(t) = \int_0^t v_o dt' = v_o t + \text{cte} \quad (10.5)$$

o bé, escollint el punt inicial:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v_o dt' = v_o t \Rightarrow x(t) = x(0) + v_o t = x_o + v_o t \quad (10.6)$$

tornem a tenir el problema de saber la condició inicial de la posició, és a dir, saber on és l'objecte a $t = 0$.

Com pots veure, hi ha dues condicions inicials que necessites saber, la posició i la velocitat, per tenir l'equació completa del moviment que segueix l'objecte. Què passa si no saps la posició i la velocitat en un instant, sinó que saps la posició en un instant inicial i la velocitat en un altre? En aquest cas en què s'allunya de forma lineal, no hi ha cap problema, la velocitat no canvia. En general tens $x(t) = At + B$ i $v(t) = A$. Només cal que imposis una condició per resoldre el sistema d'equacions. Necessites o bé dos valors de x , o un valor de x i la velocitat en qualsevol punt. En canvi, per a un cas una mica més complicat no sempre és tan directe.



Imagina't que l'acceleració és una constant positiva $a = a_o$, aleshores:

$$v(t) - v(0) = \int_0^t (a_o dt') = a_o t \Rightarrow v(t) = v(0) + a_o t \quad (10.7)$$

on necessites com sempre la condició inicial de la velocitat. Però en general $v(t) = a_o t + A$; per tant, el que necessites és alguna dada que et permeti saber A . Si tornem a integrar per trobar $x(t)$ tenim:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t (a_o t' + v_o) dt' = [0,5 a_o (t')^2 + v_o t']_0^t \Rightarrow x(t) = x(0) + v_o t + 0,5 a_o t^2 \quad (10.8)$$

En aquest cas, s'allunya de forma quadràtica del punt de referència i, com sempre, necessites conèixer la seva posició inicial. Si no saps les condicions a $t = 0$ però les saps en algun moment, has de resoldre les incògnites de la solució general:

$$v(t) = a_o t + A \quad x(t) = 0,5 a_o t^2 + A t + B \quad (10.9)$$

on A i B són les constants a determinar. Si sabem que a $t = 0$ la velocitat és 1 m/s i la posició a $t = 10$ s són 100 m, tenim el sistema d'equacions següent:

$$1 = a_o 0 + A \quad 100 = 0,5 a_o 10^2 + 10A + B \quad (10.10)$$

d'on $A = 1$ i $B = 90 - 50a_o$, amb què queda:

$$x(t) = 0,5 a_o t^2 + 1t + 90 - 50a_o \quad (10.11)$$

Et pots plantejar el cas $a(t) = a_o t^2$ sabent que a $t = 0$ l'objecte es troba a $x = 0$ i a $t = 10$ s la velocitat és 10 m/s². *Aquí explicarem en detall el cas d'un objecte amb acceleració $a(t) = \sin(10t)$ sabent que a $t = 0$ la seva velocitat és zero i es troba a 5 metres de distància de l'origen.*

$$v(t) - v(0) = \int_0^t \sin(t') dt' = [-\cos(t')]_0^t = -\cos(t) + \cos(0) = -\cos(t) + 1 \quad (10.12)$$

d'on tenim $v(t) = v(0) + 1 - \cos(t)$. Com que sabem que la velocitat $v(0)$ és zero, tenim $v(t) = 1 - \cos(t)$. Si en lloc de fer la integral definida féssim la indefinida, quedaria $v(t) = -\cos(t) + A$, i aplicant $0 = -\cos(0) + A = -1 + A$, tindríem $A = 1$, i per tant $v(t) = 1 - \cos(t)$.

Utilitzem un altre cop la integral definida sabent la condició inicial per la posició:

$$x(t) - 5 = \int_0^t [1 - \cos(t')] dt' = [t' - \sin(t')]_0^t = t - \sin(t) \quad (10.13)$$

D'on queda $x(t) = 5 + t - \sin(t)$. Això dona un moviment tal com el que es mostra a la figura 10.2. Bé, ara ja estaries llest per entendre la dinàmica si tot es mogué en una dimensió, però no tot es mou en una dimensió. Així doncs, passem a dues i tres dimensions, on farem ús extensiu dels vectors.

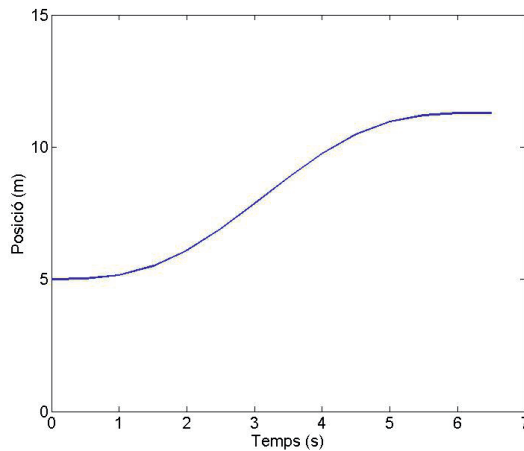


Fig. 10.2
Representació dels
primers segons del
moviment discutit al text.

Problema 1

Un cotxe de prova va a 100 km/h i xoca contra una paret d'un material una mica elàstic, per la qual cosa frena a 0,75 m. Quina ha sigut la seva acceleració si la suposes constant?

Solució

Sabem que el cotxe viatja inicialment a una velocitat $v_0 = 100 \text{ km/h} = 27,7 \text{ m/s}$ i que finalment s'atura, és a dir, $v_f = 0$. També ens diuen que triga $\Delta x = x_f - x_0 = 0,75 \text{ m}$ a frenar.

El moviment del cotxe és rectilini i uniformement accelerat, és a dir, que ve donat per les següents equacions:

$$\begin{cases} x_f = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \\ v_f = v_0 + a \Delta t \end{cases}$$

Operant amb les dues equacions del MRUA s'obté una relació que es fa servir sovint i mitjançant la qual podem obtenir l'acceleració ràpidament:

$$v_f^2 - v_0^2 = 2\Delta x \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2\Delta x} = -514,4 \text{ m/s}^2$$

Per tant, el cotxe ha experimentat una acceleració de $-514,4 \text{ m/s}^2$.

Problema 2

Ets a la cerimònia de graduació de final de carrera i, molt content, llances el teu birret enlaire amb una velocitat inicial de 14,7 m/s. Quant de temps trigarà el birret a arribar al punt més alt? Quina és l'altura d'aquest punt respecte al punt de sortida? Suposant que reculls el birret al mateix punt d'on ha sortit, quant temps està a l'aire?

Solució

El birret estarà sota l'acceleració provocada per la gravetat, $a = -g = -9,8 \text{ m/s}^2$. Per tant, l'equació de la trajectòria del birret és de la forma següent:



$$y(t) = y_0 + v_{oy}t - \frac{g}{2}t^2$$

Sabem que $v_{oy} = 14,7 \text{ m/s}$ i $y_0 = 0$. A més, hem suposat que $t_0 = 0$. Així, les equacions que descriuen el moviment del birret són:

$$y(t) = 14,7t - \frac{g}{2}t^2$$

$$v(t) = y'(t) = 14,7 - gt$$

$$a(t) = v'(t) = -g$$

Coneixent les equacions, podem resoldre qualsevol dubte respecte al moviment del birret.

- a) Quant de temps trigarà el birret a arribar al punt més alt?

El punt més alt s'aconseguirà quan $v(t) = 0 \text{ m/s}$. Vegem quan passa:

$$v(t) = 0 \Rightarrow 14,7 = gt \Rightarrow t_{\max} = \frac{14,7}{g} = 1,5 \text{ s}$$

El birret triga $\Delta t = t_{\max} - t_0 = 1,5 - 0 = 1,5 \text{ s}$ a arribar al punt més alt de la seva trajectòria.

- b) Quina és l'alçada d'aquest punt respecte al punt de sortida?

Cal mirar a quina altura és el birret quan $v(t) = 0 \text{ m/s}$, és a dir, quan $t = t_{\max}$:

$$y_{\max} = y(t_{\max}) = 14,7t_{\max} - \frac{g}{2}t_{\max}^2 = 14,7 \cdot 1,5 - \frac{g}{2}(1,5)^2 = 11,0 \text{ m}$$

Per tant, l'altura del punt més alt aconseguit pel birret és

$$\Delta y = y_{\max} - y_0 = 11 - 0 = 11 \text{ m.}$$

- c) Suposant que reculls el birret al mateix punt d'on ha sortit, quant de temps està a l'aire?

Com que recollim el birret al mateix punt des d'on l'hem llançat, $y_0 = 0 \text{ m}$, aquest punt és $y = 0 \text{ m}$. Vegem en quins instants de temps $y = 0 \text{ m}$:

$$y = 0 \Rightarrow 14,7t = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ s} \\ 14,7 = \frac{g}{2}t \Rightarrow t = \frac{2 \cdot 14,7}{g} = 3 \text{ s} \end{cases}$$

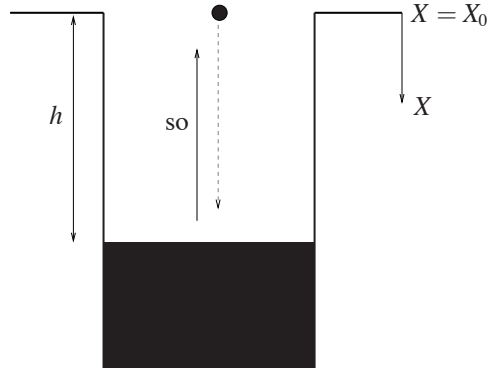
El primer valor $t = 0 \text{ s}$ és en l'instant inicial, quan $y = y_0 = 0 \text{ m}$. En canvi, quan $t = 3 \text{ s}$ és quan el birret torna al punt de sortida. Per tant, el birret està a l'aire $\Delta t = 3 - 0 = 3 \text{ s}$.



Problema 3

Deixem anar una pedra a un pou (des del repòs) i triguem 2 segons a sentir el soroll que ha fet en caure a l'aigua. A quina profunditat està l'aigua del pou? Ajuda: la velocitat del so és de 340 m/s.

Solució



Sigui h la profunditat a la qual està l'aigua del pou. Considerem el sentit de caiguda de la pedra com el sentit positiu del moviment, tal com indica la figura.

Deixem anar la pedra a l'instant $t_0 = 0$ s des de $x = 0$ m. Com que la pedra cau des del repòs, $v_0 = 0$. Per tant, l'equació de la trajectòria de la pedra és: $x_p(t) = \frac{g}{2}t^2$.

En canvi, el so comença a $t_{0so} = 0$ s a la profunditat $x = h$ i puja en sentit contrari al de la caiguda de la pedra. Per tant, l'equació del moviment del so és: $x_{so}(t) = h - v_{so}t$.

Si la pedra toca l'aigua en l'instant t_1 , aleshores sabem que $x_p(t_1) = \frac{g}{2}t_1^2 = h$.

Si és en l'instant t_2 que el so ens arriba, aleshores: $x_{so}(t_2) = h - v_{so}t_2 = 0$ m.

Per tant,

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t_2 = \frac{h}{v_{so}}$$

El temps que triguem a sentir el soroll que ha fet la pedra en caure a l'aigua serà el temps que triga a caure la pedra fins a l'aigua ($\Delta t_1 = t_1 - t_0 = t_1$) més el temps que triga a pujar el so des de l'aigua fins a nosaltres ($\Delta t_2 = t_2 - t_{0so} = t_2$), és a dir:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_{so}} \quad (10.14)$$

Sabem que triguem $\Delta t = 2$ s a sentir el soroll, de manera que de l'equació (10.14) podem aïllar l'altura h :



$$\begin{aligned}(10.14) &\Rightarrow \frac{2h}{g} = \left(\Delta t - \frac{h}{v_{so}} \right)^2 = (\Delta t)^2 - \frac{2\Delta t h}{v_{so}} + \frac{h^2}{v_{so}^2} \\&\Rightarrow (\Delta t)^2 - \left(\frac{2\Delta t}{v_{so}} + \frac{2}{g} \right) h + \frac{1}{v_{so}^2} h^2 = 0 \Rightarrow (\Delta t)^2 v_{so}^2 - \left(2 \cdot \Delta t v_{so} + \frac{2v_{so}^2}{g} \right) h + h^2 = 0 \\&\Rightarrow 4 \cdot 340^2 - \left(4 \cdot 340 + \frac{2 \cdot 340^2}{9,8} \right) h + h^2 = 0 \Rightarrow 462.4 - 24.951h + h^2 = 0 \\&\Rightarrow h = \frac{24.952}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{24.952^2 - 4 \cdot 462.400} \\&\Rightarrow h = \begin{cases} 18,5 \\ 24.933 \end{cases}\end{aligned}$$

Podem comprovar que $h = 18,5$ m és el resultat físic, ja que l'altra solució no compleix l'equació (10.14). Per tant, podem deduir que l'aigua està a 18,5 m de profunditat.





Dos moviments molt importants

11.1. Tir parabòlic

Un dels aspectes més comuns a la història del món ha estat fer armes. Des que l'agricultura es va desenvolupar, la possibilitat que un gran home en nom del gran déu Thor vingués a demanar-te la collita i les filles va esdevenir prou comuna. A diferència dels caçadors-recol·lectors, que es podien moure i eren força igualitaris, la gent del camp no tenia on anar. No podia deixar pas les terres. I amb les classes guerreres arribaren les lluites entre diferents clans. I les muralles. Llançar qualsevol cosa dins d'un recinte amurallat es va convertir en una prioritat. No és d'estranyar que un dels elements de la natura que va generar més interès com a impulsor d'una visió científica fos mesurar com cauen les bombes.

Saber la trajectòria d'un projectil no és fàcil. Estudi darrere estudi, anys i anys d'esquemes, intuïcions, regles... fins que, un dia, va quedar més o menys establert com funcionava un tir parabòlic. La idea fonamental del tir parabòlic és que es pot descompondre en dos moviments. Un primer, en la direcció horitzontal, en què la velocitat no canvia. I un altre de vertical, en què és l'acceleració la que no canvia i sempre és negativa. Com veus, la clau final va ser integrar. En termes d'àlgebra:

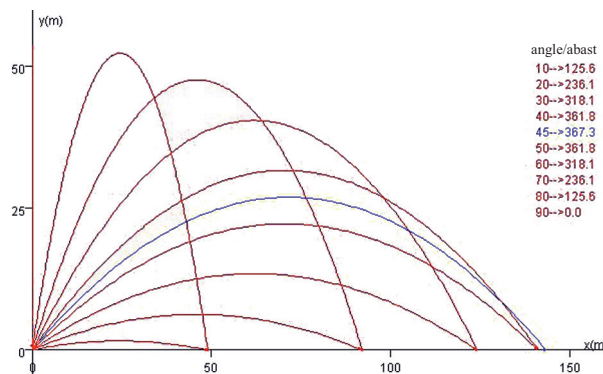


Fig. 11.1
Esquema del tir parabòlic
utilitzant diferents angles
inicials.



$$v_x = v_{ox} \quad a_y = -a_o \quad (11.1)$$

on es va trobar que $a_o = 9,8$ era independent de com llencessis el projectil, i en canvi v_{ox} depenia totalment de com el llencessis. Molt bé, però, si no saps integrar no sabràs el que t'interessa. De fet, què t'interessa? Si ets un militar, saber quina inclinació i velocitat has de donar al projectil per tal que arribi a un lloc concret passant sobre un obstacle. A partir de la velocitat inicial v_o i l'angle de sortida del projectil respecte a l'horitzontal Θ , ens agradaria saber $x(t)$ i $y(t)$. Només cal integrar, com hem fet al capítol anterior.

$$x(t) = \int_0^t v_{ox} dt' = v_{ox}t + A \quad (11.2)$$

$$y(t) = \int_0^t dt' \int_0^{t'} -a_o dt'' = \int_0^t (-a_o t' + B) dt' = -0,5a_o t^2 + Bt + C \quad (11.3)$$

Atenció, veiem que queden tres constants. Dues simplement es sumen a la posició i no depenen de t (A i C). Aquestes constants només ens diuen en quin punt es troba l'objecte a $t = 0$. Són zero suposant que hagi escollit el meu sistema de coordenades amb el mateix origen del projectil. Si no és així, $A = x_o$ i $C = y_o$.

$$x(t) = v_{ox}t + x_o \quad (11.4)$$

$$y(t) = -0,5a_o t^2 + Bt + y_o \quad (11.5)$$

I aleshores només queda saber quant val B . Observa que a $t = 0$ la velocitat en la direcció y val exactament B ; per tant, B és la velocitat inicial en la direcció y . L'expressió general és:

$$x(t) = v_{ox}t + x_o \quad (11.6)$$

$$y(t) = -0,5a_o t^2 + v_{oy}t + y_o \quad (11.7)$$

I amb això, què fem? Doncs tot, perquè si hem après prou sobre vectors sabem que:

$$v_o = \sqrt{v_{ox}^2 + v_{oy}^2} \quad \text{tg } \Theta = \frac{v_{oy}}{v_{ox}} \quad (11.8)$$

i podem relacionar la disposició del canó (o element que llança la bomba) i la trajectòria. Podries intentar apuntar cap a un objectiu. Pots anar als exercicis resolts i comprovar si series capaç d'encertar una diana.

11.2. Components intrínseques

Fins aquí la utilització del formalisme vectorial no ha servit de gaire. Podríem haver resolt el tir parabòlic parlant de components de vector, però es pot fer parlant de funcions separades. Quan són útils els vectors pel que fa al canvi d'eixos que dèiem al principi d'explicar-los? Són útils si volem obtenir més informació des del punt de vista del que

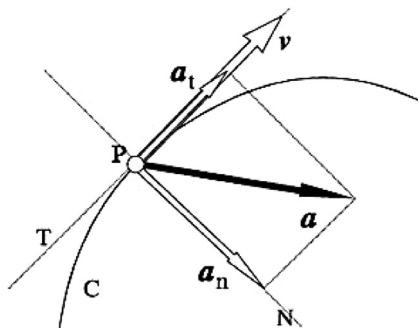


Fig. 11.2
Esquema de les
components intrínseques
de l'acceleració en un
punt de la trajectòria.

fa la trajectòria parabòlica. Moltes vegades voldràs saber com es veuen les coses des del punt de vista de l'objecte que es mou. En aquest cas, si seguim la trajectòria, podem escriure la seva recta tangent. En un moviment qualsevol l'acceleració, que té dos components en el pla que defineix la trajectòria, podem referenciar-la respecte als eixos de coordenades que es mouen amb l'objecte. I aquí és on entren els vectors. Si vols saber quina acceleració notarà l'objecte en la direcció en que es mou i com notarà que l'estan desviant necessites els vectors.

Observem l'esquema dibuixat a la figura 11.2. Podem escriure el següent:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (11.9)$$

on $\vec{a}_t$ és l'acceleració tangencial i $\vec{a}_n$ és l'acceleració normal. Com trobem els mòduls respectius de cada part? Doncs utilitzant el que hem dit al capítol de vectors. Utilitzarem la multiplicació pel vector unitari. Primer cal trobar el vector unitari en la direcció de la trajectòria, $\hat{t}$, i després fer la projecció. El vector unitari és $\hat{t} = \vec{v}/|\vec{v}|$, i el mòdul de la projecció és $\vec{a} \cdot \hat{t}$, amb què queda:

$$\vec{a}_t = (\vec{a} \cdot \hat{t})\hat{t} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}. \quad (11.10)$$

El mòdul de l'acceleració tangencial és:

$$a_t = |\vec{a}_t| = (\vec{a} \cdot \hat{t}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (11.11)$$

i es pot demostrar que és igual a la derivada del mòdul de la velocitat respecte al temps:

$$|\vec{a}_t| = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad (11.12)$$

L'acceleració normal, per altra banda, es pot trobar fent:

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t \quad (11.13)$$

amb mòdul:

$$a_n = |\vec{a}_n| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2}. \quad (11.14)$$



Si l'acceleració tangencial t'indica com s'accelera el mòdul de la velocitat, l'acceleració normal t'indica com canvia la direcció del vector velocitat. Això serà molt útil en un tipus de moviment molt comú, el d'aquell objecte que sempre ha de trobar-se en un cercle. Analitzem-ho en detall, perquè apareix molt i molt sovint a la física.

11.3. Moviments circulars

És molt comú donar voltes sempre sobre el mateix punt: una roda de fira, algunes vegades els cotxes, els discos, tot el que faci rotacions sobre un eix fix. Ara no estudiarem quina és la dinàmica d'aquest moviment, és a dir, no analitzarem què fa moure aquests objectes a l'entorn d'un eix, però sí que hem de descriure les funcions $x(t)$ i $y(t)$ en un moviment circular. Farem el cas particular on el moviment no surt d'una circumferència.

Utilitzant la nomenclatura de vectors, tenim que, necessàriament, el vector posició ha de tenir la forma següent:

$$\vec{r} = (r_o \cos(\alpha(t)), r_o \sin(\alpha(t))) \quad (11.15)$$

Hem passat de dues incògnites a una aprofitant que r_o és una constant. Ara, per descriure el moviment només necessitem alguna manera de mesurar els angles en funció del temps, i trobar en general $\alpha(t)$, és a dir, quina és la dependència funcional de l'angle en relació amb el temps.

Troblem la velocitat utilitzant la regla de la cadena que saps d'un capítol anterior:

$$\vec{v} = (-r_o \dot{\alpha}(t) \sin(\alpha(t)), r_o \dot{\alpha}(t) \cos(\alpha(t))) \quad (11.16)$$

$$\vec{a} = (-r_o \ddot{\alpha}(t) \sin(\alpha(t)) - r_o \dot{\alpha}^2(t) \cos(\alpha(t)), r_o \ddot{\alpha}(t) \cos(\alpha(t)) - r_o \dot{\alpha}^2(t) \sin(\alpha(t))) \quad (11.17)$$

I ara pensem en dues possibilitats concretes. Imaginem-nos que l'angle canvia de manera uniforme al llarg del temps. En un període de temps fixat, avança la mateixa quantitat d'angle, sense acceleració angular. Aleshores tenim el... MCU.

11.3.1. Moviment circular uniforme (MCU)

$$\vec{r}(t) = r_o \cos(\omega t + \alpha_o) \vec{i} + r_o \sin(\omega t + \alpha_o) \vec{j} \quad (11.18)$$

on r_o és el radi del moviment i ω és la velocitat angular, que en aquest moviment és una constant.

$$\vec{v}(t) = -r_o \omega \sin(\omega t + \alpha_o) \vec{i} + r_o \omega \cos(\omega t + \alpha_o) \vec{j} \quad (11.19)$$

on es pot comprovar el següent:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)} = r_o \omega \quad (11.20)$$



$$\vec{a}(t) = -r_o \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_o) \vec{i} - r_o \omega^2 \sin(\omega t + \alpha_o) \vec{j} = -\omega^2 \vec{r}(t) = -\frac{|\vec{v}|^2}{r_o^2} \vec{r}(t) = -(v/r_o)^2 \vec{r}(t) \quad (11.21)$$

i calculant el mòdul de l'acceleració obtenim això:

$$a = |\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r_o^2} |\vec{r}(t)| = \frac{v^2}{r_o} = r_o \omega^2 \quad (11.22)$$

amb:

$$a_t = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = 0 \quad (11.23)$$

i, per tant, l'acceleració només té component normal, per la qual cosa el mòdul de l'acceleració normal és igual al mòdul de l'acceleració total.

Notem que en aquest moviment $\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$ i també $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$. En un moviment circular mesurat des del centre del cercle, la posició és sempre perpendicular a la velocitat. Recordeu que la velocitat és un vector tangent a la trajectòria, i la tangent d'un cercle és sempre perpendicular a la posició mesurada des del centre. En canvi, la segona igualtat $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$ no és veritat en tots els casos, només en aquest cas, on l'acceleració és un vector paral·lel a la posició en tot moment.

I ara pensem què tenim si l'angle accelera de forma uniforme. Aleshores tenim... el MCUA.

11.3.2. Moviment circular uniformement accelerat (MCUA)

$$\vec{r}(t) = r_o \cos\left(\frac{\gamma}{2}t^2 + \omega_o t + \alpha_o\right) \vec{i} + r_o \sin\left(\frac{\gamma}{2}t^2 + \omega_o t + \alpha_o\right) \vec{j} \quad (11.24)$$

on r_o és el radi del moviment i $\omega(t) = \gamma t + \omega_o$ és la velocitat angular *no* constant del moviment.

$$\vec{v}(t) = -r_o(\gamma t + \omega_o) \sin\left(\frac{\gamma}{2}t^2 + \omega_o t + \alpha_o\right) \vec{i} + r_o(\gamma t + \omega_o) \cos\left(\frac{\gamma}{2}t^2 + \omega_o t + \alpha_o\right) \vec{j} \quad (11.25)$$

de què obtenim un mòdul de la velocitat que s'expressa així:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)} = r_o(\gamma t + \omega_o) = r_o \omega(t) \quad (11.26)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = & -r_o \left[\gamma \sin\left(\frac{\gamma}{2}t^2 + \omega_o t + \alpha_o\right) + (\gamma t + \omega_o)^2 \cos\left(\frac{\gamma}{2}t^2 + \omega_o t + \alpha_o\right) \right] \vec{i} \\ & + r_o \left[\gamma \cos\left(\frac{\gamma}{2}t^2 + \omega_o t + \alpha_o\right) - (\gamma t + \omega_o)^2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}t^2 + \omega_o t + \alpha_o\right) \right] \vec{j} \end{aligned} \quad (11.27)$$

i es pot escriure com a:

$$\vec{a}(t) = -(\gamma t + \omega_o)^2 \vec{r}(t) + \frac{\gamma}{\gamma t + \omega_o} \vec{v}(t), \quad (11.28)$$



amb:

$$|\vec{a}(t)|^2 = r_o^2(\gamma t + \omega_o)^4 + r_o^2\gamma^2. \quad (11.29)$$

Les components tangencials i normals són les següents. Primer, la tangencial:

$$a_t = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = r_o\gamma \quad (11.30)$$

on hem hagut de fer servir una mica d'àlgebra i el fet que en aquest moviment $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$.

Finalment, podem trobar l'acceleració normal com a:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{(\gamma t + \omega_o)^4 r_o^2 + r_o^2 \gamma^2 - r_o^2 \gamma^2} = (\gamma t + \omega_o)^2 r_o. \quad (11.31)$$

Podeu comprovar que fent aquest càlcul alternatiu obtenim el mateix resultat:

$$a_n = \frac{|\vec{a} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = (\gamma t + \omega_o)^2 r_o \quad (11.32)$$

Un aclariment respecte a la nomenclatura. Molta gent anomena $\gamma t + \omega_o$ com a $\omega(t)$. $\omega(t)$ és la velocitat angular, que en aquest cas creix linealment amb el temps, mentre que era una constant en el cas anterior del MCU. Utilitzant aquesta nomenclatura obtenim $a_n = \omega^2 r_o$. Noteu que és la mateixa equació que en el moviment circular uniforme, però cal esmentar que ω no és una constant, és una funció del temps $\omega(t) = \gamma t + \omega_o$. Pareu atenció i no us confoneu amb la notació.

En qualsevol cas *fixa't que tots els moviments circulars tenen acceleració*. Ho repetim, ho veus a l'equació, l'acceleració no és zero ni tan sols quan l'angle no accelera en el cas del MCU. En el MCU l'acceleració és perpendicular a la trajectòria del moviment (només hi ha component normal de l'acceleració); en canvi, en el MCUA hi ha totes dues components, la tangencial i la normal. Dit d'una altra manera, en el MCU no hi ha canvi en el mòdul de la velocitat, però sí en la direcció del vector velocitat. En canvi, en el MCUA hi ha canvi de direcció i canvi de mòdul de la velocitat.

Ara només queda repassar el concepte de càrrega, i per fer-ho, res millor que fer un petit viatge per la història de la ciència, més concretament per la història de l'electromagnetisme.

Problema 1

Un helicòpter carregat amb consoles portàtils Nintendo 3DS sobrevola el campus a una altura de 100 m i a una velocitat de 25 m/s. En un moment donat, deixa caure les consoles. A quina distància horitzontal del punt sobre el qual volava en el moment de la descàrrega tocan el terra?

Solució

Com que és un moviment en acceleració uniforme, l'equació de la trajectòria és:



$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a} \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x: x(t) = x_0 + v_{0x}t + a_x \frac{t^2}{2} \\ y: y(t) = y_0 + v_{0y}t + a_y \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

En aquest cas tenim un tir parabòlic:

$$\vec{r}_0 = (0, h) \quad \vec{v}_0 = (v_{0x}, 0) \quad \vec{a} = (0, -g)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x: x(t) = v_{0x}t \\ y: y(t) = h - g \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

on $h = 100 \text{ m}$, $v_{0x} = 25 \text{ m/s}$ i $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

El punt de contacte amb el terra és quan $y = 0 \text{ m}$.

$$y = 0 \Rightarrow h = g \frac{t_c^2}{2} \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4,52 \text{ s}$$

Per tant, les consoles toquen el terra al moment $t_c = 4,52 \text{ s}$. En aquest moment, la posició horitzontal és:

$$x(t_c) = v_{0x}t_c = v_{0x} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 113 \text{ m}$$

Així doncs, les consoles toquen el terra a $x = 113 \text{ m}$.

Problema 2

El Correcaminos és perseguit frenèticament pel Coyote fins que arriben a un profund barranc de 15 m d'amplada. El Correcaminos salta amb un angle de 15° respecte a l'horitzontal i arriba a l'altre costat, i li sobren $1,5 \text{ m}$. Quin era el mòdul de la seva velocitat en iniciar el salt? El Coyote, amb l'objectiu de superar l'obstacle, també salta amb el mateix mòdul de velocitat, però amb un angle menor, de manera que li falten $1,5 \text{ m}$ i s'encasta a la paret. Amb quin angle ha saltat?

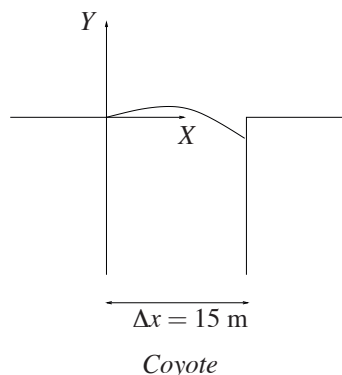
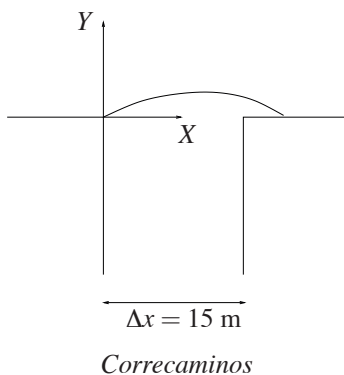
Solució

Tant el Correcaminos com el Coyote segueixen un tir parabòlic.

Correcaminos:

$$\begin{cases} y = y_0 + v \sin \theta t - g \frac{t^2}{2} \\ x = x_0 + v \cos \theta t \end{cases} \quad (11.33)$$

on $x_0 = y_0 = 0 \text{ m}$ i $\theta = 15^\circ$. El Correcaminos toca terra quan $y = 0 \text{ m}$. De l'equació (11.33) en resulta:



$$y = 0 \Rightarrow v \sin \theta t = g \frac{t^2}{2} \Rightarrow t_c = \frac{2v \sin \theta}{g} \quad (11.34)$$

En aquest instant, sabem que el Correcaminos es troba a $x_c = 15 + 1,5 = 16,5$ m. Per tant, de (11.33) i (11.34):

$$16,5 = x_c = v \cos \theta t_c = \frac{v^2}{g} 2 \cos \theta \sin \theta = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$$

(hem utilitzat la propietat trigonomètrica $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$).

De l'última equació en podem extreure el mòdul de la velocitat amb què ha saltat el Correcaminos:

$$v = \sqrt{\frac{x_c g}{\sin 2\theta}} = \sqrt{\frac{16,5 \cdot 9,8}{\sin 30^\circ}} \simeq 18 \text{ m/s}$$

Coyote:

El Coyote ha saltat amb la mateixa velocitat que el Correcaminos, però amb un angle diferent. Seguint el mateix raonament que amb el Correcaminos, arribem a l'equació següent:

$$x_c = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$$

Ara la diferència és que $y = 0$ m quan $x = 15 - 1,5 = 13,5$ m. Per tant, $x_c = 13,5$ m. D'aquesta equació en deduïm la direcció de salt del Coyote, θ :

$$\sin 2\theta = \frac{x_c g}{v^2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x_c g}{v^2} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{13,5 \cdot 9,8}{(17,98)^2} \right) = 12,1^\circ$$

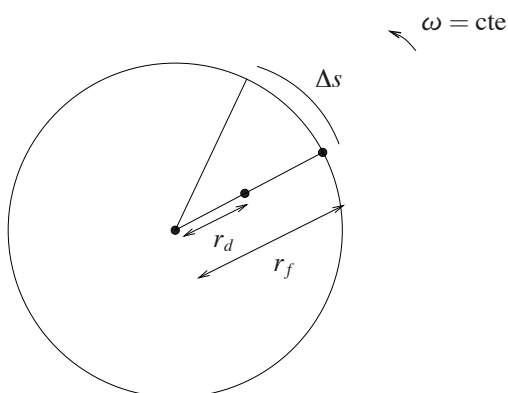


Problema 3

Dues puces són sobre un disc i giren a una velocitat angular constant: una d'elles és a la vora del disc i l'altra a meitat de distància entre la vora i l'eix. Respon les següents preguntes:

- Quina de les dues puces recorre una distància més gran en un temps determinat?
- Quina gira un angle més gran?
- Quina té una velocitat lineal més gran?
- Quina té una acceleració angular més gran?
- Quina té una acceleració tangencial més gran?
- Quina té una acceleració centrípeta més gran?

Solució



- $\Delta s = r\Delta\theta$. Com que $r_f > r_d$, aleshores $\Delta s_f > \Delta s_d$. Veiem doncs que la puça de fora recorre una distància més gran.
- $\Delta\theta_f = \Delta\theta_d = \omega t$. Així doncs, les dues giren angles iguals.
- $v = r\omega$. Com que $r_f > r_d$, aleshores $v_f > v_d$. Per tant, la de fora té una velocitat lineal més gran.
- $\alpha = 0$. Per tant, $\alpha_t = \alpha_d = 0$ i les dues tenen la mateixa acceleració angular, nul·la.
- $a_t = \alpha r = 0$. Per tant, $a_{tf} = a_{td} = 0$ i les dues tenen acceleració tangencial nul·la.
- $a_c = \omega^2 r$. Com que $r_f > r_d$, aleshores $a_{cf} > a_{cd}$. És a dir, que la puça de fora té una acceleració centrípeta més gran.

Problema 4

Una centrifugadora gira a 15.000 rev/min quan està en situació de treball. Per aconseguir aquesta velocitat màxima de rotació, la centrifugadora necessita accelerar durant 1 min i 15 s. A dins hi ha un tub amb una mostra situada a 15 cm de l'eix de rotació.



- a) Calculeu el mòdul de l'acceleració tangencial de la mostra mentre la centrifugadora accelera, suposant que ho fa a acceleració angular constant.
- b) Quan ja està en ple rendiment, calculeu el mòdul de l'acceleració centrípeta de la mostra.

Solució

- a) La velocitat angular és:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t \quad (\omega_0 = 0)$$

La màxima velocitat angular és: $\omega_{max} = 15.000 \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 500\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$

Sabem que triga 75 s a accelerar; per tant:

$$\alpha = \frac{\omega_{max}}{t} = \frac{500\pi}{75} = 20,94 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Finalment, $R = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$ és la distància al centre de rotació i per tant $a_t = \alpha R = 3,14 \text{ m/s}^2$ és l'acceleració tangencial. Per cert, t'has adonat que hem canviat la nomenclatura respecte a la teoria? Com? On?

- b) El tub de la mostra està situat a $15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}$ de l'eix de rotació. Per tant,

$$a_c = \omega^2 R = (500\pi)^2 0,15 = 3,7 \times 10^5 \text{ m/s}^2$$

és l'acceleració centrífuga que pateix la mostra.





Us hauria de sonar alguna cosa

És molt habitual que un estudiant comenci el curs havent sentit a parlar de les lleis de Newton. O, si més no, sap que un tal Newton va existir. És molt més habitual no haver sentit a parlar de l'electromagnetisme i no saber-ne res de res. És per això que la millor manera de finalitzar aquest llibre és amb un repàs històric. Una mena de guia que et pot servir per situar-te quan t'expliquin tot el temari d'electromagnetisme, ben complet. Un full de ruta, que esperem et serveixi.

12.1. Una breu història de l'inici de l'electromagnetisme

La història de l'electromagnetisme té, com la de tota ciència, dues parts. I la línia divisòria, com hauríeu d'haver estudiat a filosofia de Batxillerat, s'anomena Il·lustració. I és que la ciència és un invent del segle XVIII. Idees que ara semblen tan comunes com natura, fet, teoria, llei, experiment i, sobretot, mètode científic simplement no havien existit mai. Només una d'aquestes idees existia, la de natura, que no tenia el sentit ni el significat simbòlic que li donem ara de “coses mortes i vives que es troben per aquí al voltant del meu cos”. De fet, sembla que encara ens resistim molt a identificar el nostre cos com a natura, especialment el cervell, però ens estem desviant.

El fet que ni els experiments, ni les teories, ni la ciència existissin, no vol dir que no es sabessin coses sobre la “natura” de l'electricitat. Abans de la Il·lustració, en el món occidental, les coses naturals eren creacions divines i estaven sota la jurisdicció de l'Església. Això havia estat així des que el cristianisme ajuntant-se amb Plató, va separar el món de Déu (únic) i el de la natura. La ciència, igual que la màgia, podia existir; es podia investigar la natura per si sola, com feia la ciència, i es podia intentar fer que el món transcendental intervingués en el món natural tal com feia la màgia. Però en tots dos casos, les pràctiques i els resultats estaven controlats per la religió. La religió controlava la vida pública i bona part de la vida privada. Durant aquest temps no es van fer gaires descobriments sobre electricitat o magnetisme.

12.2. Els primers descobriments

On es van fer, doncs, els primers descobriments sobre l'electricitat i el magnetisme (que, recordem, ningú no podia pensar que fossin coses semblants abans del 1800)? Doncs va ser abans que el cristianisme i Plató controllessin les idees de l'Imperi Romà. Va ser, com quasi sempre, a Grècia, uns quants segles abans de l'arribada de Jesucrist (o com deien els romans, un quants segles després que Roma fos fundada: *ab urbe condita*), on es va fer el primer escrit parlant d'electricitat. I és que abans dels grecs tampoc es coneixia gaire cosa. O, més probablement, es coneixia, potser s'utilitzava, però ningú no es parava a escriure-ho. En la gran majoria d'imperis, ciutats, estats, poblats agrícoles i pobles caçadors-recol·lectors, la diferència entre el món supranatural i el natural no existia. No hi havia frontera; de fet, no eren dues coses diferents. Un anava pel carrer i venia un déu que se t'emportava. Potser aleshores havies de pagar un rescat, menjar d'una certa manera, i et tornaves a trobar a casa. Així doncs, tot el que passava aquí, en aquest món, estava relacionat amb el més enllà i a l'inrevés. Per tant, no hi havia cap fenomen físic, perquè simplement no era concebible. No hi havia cap frontera, tot era un continu infernal de múltiples causalitats i relacions.

De fet, van ser precisament els grecs els que van plantejar la possibilitat que hi hagués dos mons. Efectivament, la paraula *mon natural* o *natura* prové dels grecs. Un grup de grecs va decidir posar-se a pensar les diferents possibilitats de relació entre el món de més enllà i el d'aquí mateix. Com que sabeu molta filosofia, sabreu perfectament que van ser els pensadors pre-socràtics (Tales de Milet, Pitàgores, Heràclit, Parmènides, Zenó...) els que van pensar per primera vegada a dividir el món de les ànimes i els déus del món d'aquí. Però compte, no perquè el món d'aquí fos gaire diferent del d'allà (i no tingués un cert component místic). Un grec mai es podria imaginar que un riu o una pedra fos "morta" (bé, sempre hi podria haver algun escèptic, vull dir literalment, de l'escola grega de filòsofs escèptics, d'on ve la paraula). La gran novetat va ser pensar que els elements del nostre voltant podia ser que seguissin lleis i comportaments diferents de tots aquells relacionats amb el món de més enllà. I cada escola proposava quines eren aquestes lleis. L'important era el moviment, diria Heràclit, o potser les relacions numèriques, diria Pitàgores (per cada número una característica natural; així, el número

Fig. 12.1
Un parell de joies fetes
d'ambre.





7 podia ser l'alegria o la gula, vés a saber). En definitiva, podia ser que el riu, la pedra i l'ocell no es veiessin constantment afectats pel que pensava, deia o feia un déu de tercera regional. També van ser els grecs, i ja suposo que coneixeu un tal Plató, els que van donar al món una altra possibilitat: tot el que hi ha aquí és aquí perquè hi ha un món místic de les idees més enllà. Allò d'enllà és més important i primer i bo i un (sobretot un) que això d'aquí.

No és d'estranyar, doncs, que els grecs es fixessin en alguns fenòmens naturals. Moltes societats abans dels grecs s'havien adonat, probablement, que el material que hi ha a la Fig. 12.1, tenia una propietat especial. De fet, aquest material era l'ambre i era omnipresent a la Hispània romana. Juntament amb l'oli d'oliva, els minerals i materials eren els protagonistes del comerç entre Hispània i Roma. Per tant, molta gent diversa el coneixia, però només els grecs, i no els romans, s'hi van interessar prou per investigar-lo una mica. Un tal Teofrast va considerar, cap a l'any 450 *ab urbe condita* (per al despistat el 450 auc és el 300 abans de Crist), que aquell ambre era una cosa digna d'escriure en molt detall. La petita referència que hi va fer Tales de Milet 300 anys abans no li va semblar suficient. Teofrast va comprovar que aquella propietat curiosa de l'ambre també es trobava en altres materials. L'ambre tenia la capacitat d'atraure un fotimer d'objectes si abans el fregaves amb alguna cosa. I és clar, a totes les substàncies que tenien aquesta propietat les van anomenar del "tipus ambre". I així va néixer l'electricitat, ja que el nom grec per a l'ambre no és altre que *elektron*, un dels títols que tenia el déu Sol.

I com hem dit, poca cosa més sobre l'electricitat abans de la Il·lustració. En canvi, dins el magnetisme sí que va passar una cosa curiosa. És possible que moltes de les primeres civilitzacions agrícoles coneguessin les propietats de la magnetita, un mineral que atreia el ferro (les agulles d'aquell temps). Els xinesos fins i tot ho van escriure de passada en un dels molts llibres que van escriure. Però clar, l'invent clàssic de la Xina era el paper. El paper els permetia fer que tota burocràcia, o tot ritual religiós, o ofici màgic, o estudi científic, pogués ser detallat amb facilitat. I un famós geni xinès, Shen Kou, ho va detallar tot. Així doncs, tot i que per als xinesos no hi havia dos mons diferents, sí que hi havia moltes pràctiques diferents, que quedaven escrites i recopilades. Però la sorpresa no va ser tant el fet que escrivissin sobre el magnetisme cap el temps en què va néixer Crist, sinó que al segle X després de Crist (hauríem de dir durant la dinastia Song) van descobrir la brúixola. Just quan a Europa triomfava completament el cristianisme i els grups més interessats en la ciència eren els gremis i el mags, a la Xina ens trobem aquest descobriment.

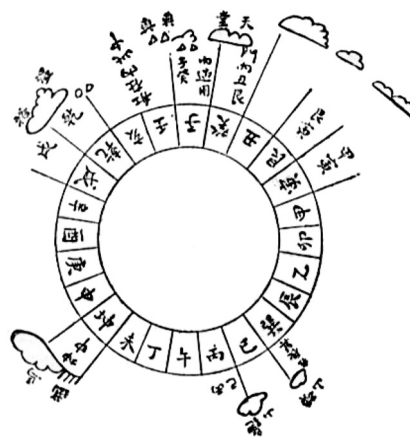
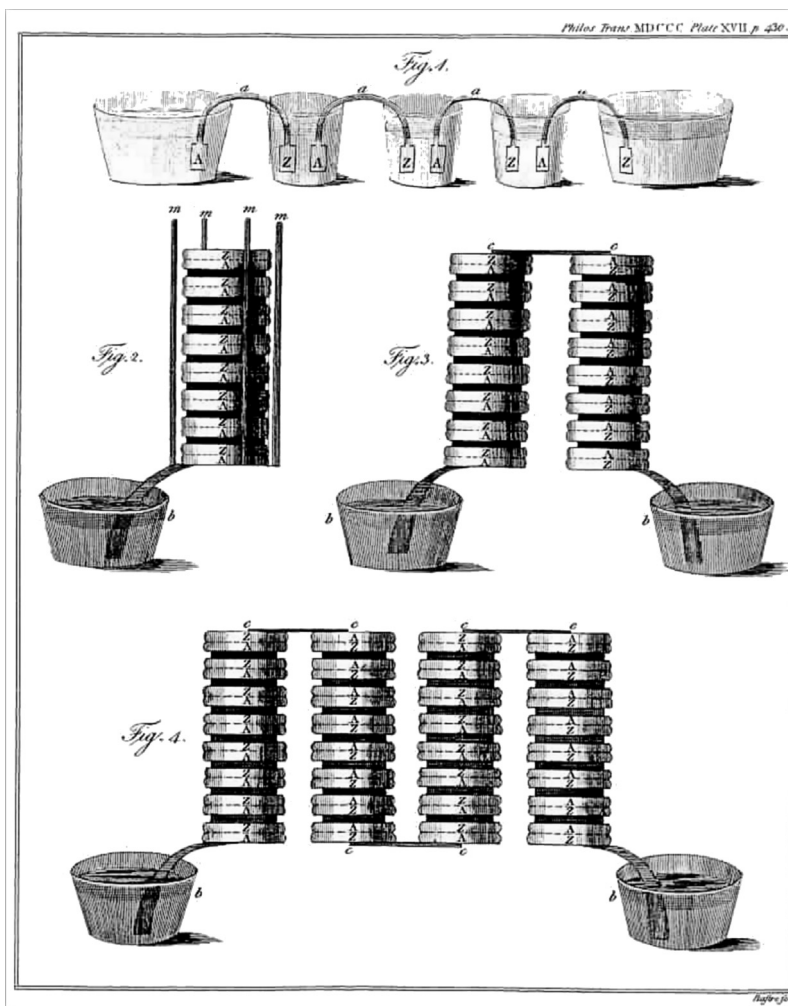


Fig. 12.2
Esquema d'una brúixola de la dinastia Ming (que com ja deveu saber és cap al 1400 dC, posterior a la dinastia Song). Però de fet fa gairebé mil anys que els xinesos saben sempre on són.



És força normal que a Europa no hi hagués cap descobriment interessant. Els gremis estaven interessats en una protociència perquè necessitaven un coneixement sistemàtic per fer els diferents estris que els pertocava realitzar (un edifici o una sabata). Els mags, per entendre millor com es podia aconseguir que el món del més enllà influís aquí a la terra. Si la màgia era invocar un sant, benvinguda era, però això no necessitava electricitat. I si era una altra cosa, era ocultisme i fora de llei. Com és que a la Xina van fer un gran descobriment en el segle X? De fet, el segle X és el segle de l'expansió musulmana. Van ser ells qui van fer en aquella època múltiples descobriments en tots els camps: les matemàtiques, l'agricultura, l'enginyeria (vegeu l'Alhambra), i fins i tot els primers llibres de física en la història de la humanitat són d'un geni anomenat Averrois, que es va treballar tota l'òptica geomètrica. A la Xina, els descobriments eren pausats, amb segles de diferència, però sorprenentment constants. Van començar a inventar molt abans que es formés l'Imperi Romà i durant tres mil·lennis van continuar inventant. Mai de cop. A la Xina no hi havia grans novetats, ja que es glorificava la tradició, però tampoc hi havia res que impedís a ningú estudiar més a fons qualsevol aspecte de l'univers xinès. La pólvora, la brúixola, el paper i la impressió en són una bona prova.

Fig. 12.3
Esquema de la primera
pila. Volta era un geni.
Així de simple.





12.3. Els descobriments comencen

Però va ser cap al 1600 a Europa quan les coses van començar a canviar de veritat. De la tradició gremial, de la renaixença i de les protociències (o màgies ben establertes, amb poc contingut sobrenatural) en naixia una visió científica que es va enfrontar a la religió en el domini públic i va culminar amb la Il·lustració. Aquesta tradició ja es feia sentir al segle XVII. Pel que fa al món del magnetisme la reina Elisabet I va ordenar que s'investigués millorar la brúixola importada de la Xina. I al final del segle XVII ja es podia controlar allò que s'anomenaven càrregues elèctriques.

I a partir del segle XVIII, l'explosió científica. Agafant un altre cop el fil d'aquella electricitat-ambre grec, els descobriments s'acumulen en un breu període de temps. El 1733 Du Fay explica que hi ha dos tipus de càrregues, que anomena electricitat vitria i resinosa, segons que el material atregui o repelli altres materials, tal com feia l'ambre. El 1745 s'aconsegueix el primer "ambre artificial" conegut com a condensador. A la dècada del 1750 Benjamin Franklin, als Estats Units, demostra la natura elèctrica dels rajos i fa la primera descripció científica del fenomen. Segons la seva hipòtesi, l'electricitat és un fluid contingut en tots els cossos. Els fenòmens elèctrics es deuen al moviment d'aquest fluid en tots els cossos. Quan n'hi ha massa, direm que en té més (positiu); quan en té poc, menys (negatiu). Reiterem, era un teoria científica, no hem dit mai que fos correcte. D'ella van quedar els noms *positiu* i *negatiu* per a les càrregues. I el 1776, com a colofó del segle, el senyor Coulomb, havent passat desapercebut durant la Revolució Francesa tot i ser un senyor acomodats, va inventar la balança de torsió, i gràcies a aquest invent per fi va poder relacionar l'electricitat i les càrregues amb Newton. Havia trobat la llei de Coulomb, que relaciona la força dinàmica amb la càrrega elèctrica.

Però potser el descobriment que realment va canviar la comprensió de l'electricitat no va ser cap d'aquestes teories o anàlisis. Va ser un desenvolupament tecnològic a partir del que es coneixia. En definitiva, la peça clau que va permetre fer experiments sobre electricitat que mai cap cultura o poble havia pogut fer va ser l'invent d'un dels italians més grans de tots els temps: Alessandro Volta. La pila. La possibilitat de crear corrents elèctrics a voluntat a partir del 1800. I és clar, del 1800 al 1815 un continu de treballs utilitzen la pila; apareixen l'electroquímica, la incandescència i l'electròlisi. I després d'una breu aturada, un descobriment que va significar un canvi radical en la comprensió de l'electricitat. Els primers experiments que demostraven que el magnetisme i l'electricitat tenien molt a veure. El 1819, en un experiment que estava pensat per a estudiants, el danès Hans Christian Ørsted descobreix l'electromagnetisme: l'agulla d'una brúixola que es trobava per accident a prop d'un cable conductor es va moure. Un dels descobriments més increïbles es va fer de pura xamba. Sense aquest descobriment, quant de temps hauríem trigat a trobar algú que pensés a buscar-ho? El cas és que, un cop trobat, va ser fàcil per a una parella de francesos (Jean-Baptiste Biot i Félix Savart) demostrar l'any següent que dos fils amb corrent s'atreïen per la mateixa raó que la brúixola es movia: càrregues en moviment generen el mateix tipus de força que el magnetisme. I a partir d'aquest descobriment va arribar la teoria de circuits que tant fareu servir. Teoria desenvolupada per múltiples investigadors des del 1820 fins al 1850, es van investigar els circuits amb piles, generadors, bateries, resistències, condensadors i electroimants. Ampère, Kirchhoff, Ohm... noms d'investigadors que us sonaran del Batxillerat. Tots científics treballant en el període 1820-1850. La invenció en el món occidental s'havia sistematitzat. Era l'època en què es va inventar la invenció.



12.4. Michael i James, associats

I potser d'aquesta llista de científics que van treballar en l'experimentació sistemàtica sobre l'electricitat i el magnetisme, n'hauríem de destacar un. Aquest científic era bastant semblant a James en diverses coses. Havia nascut uns quants quilòmetres al sud de James, prop de Londres, també amb una mare profundament religiosa en una de les moltes versions del cristianisme protestant que corrien per l'època (*the Glassites*). Com tothom en aquella època en què la idea d'adolescència encara no existia, als 13 o 14 anys va començar a treballar d'enquadrador sense gairebé cap instrucció acadèmica. Això sí, sabia llegir de mala manera. Probablement no ha nascut ningú que pogués llegir tant i entendre tantes coses de forma tan ràpida com Michael sense haver estudiat res. I, segons sembla, enquadrar li deixava molt de temps per llegir. Així doncs, es va llegir tota la física. I la va entendre tota, atenció, sense saber gaires coses de mates. No entenia el càlcul diferencial de Newton (el que tu faràs aquí), però entenia el que volia dir i ho entenia fent-se gràfics. Tenia un do increïble per fer gràfics entenedors. I quinze anys després d'entrar d'enquadrador, va començar a fer els seus experiments. I tots, absolutament tots, van ser un èxit. Va inventar una gàbia que porta el seu nom, la gàbia de Faraday. I sobretot, va descobrir l'invent que canviaria el món. Va descobrir que es podrien crear camps elèctrics simplement a partir de moviment.

Pensa per un moment què significa això. Durant molts anys, segles i mil·lennis, l'origen de la força havia estat l'animal (sigui humà, cavall o bou). Durant un breu període de temps s'havien trobat les màquines de vapor, que van significar un canvi, però no tan gran com un es podia pensar. El que realment va revolucionar-ho tot era la possibilitat de transformar aquell moviment d'aquelles màquines en electricitat. I és que l'electricitat es pot transportar ràpidament i senzillament a tot arreu; només necessites fils. Tot el nostre sistema elèctric no és res més que aplicar a gran escala el que va trobar Michael Faraday. Aquesta aplicació la va fer Tesla uns cinquanta anys després. Ara, només calia trobar inventors que sabessin què fer amb l'electricitat a l'altra banda del fil. L'Edison va inventar la bombeta, i aviat els llums d'oli que il·luminaven Londres, París o Nova York es convertiren en bombetes. Havia nascut la llum moderna. El segle de la Il·lustració es va anomenar, naturalment, segle de les llums.

I després de Faraday, ja sabeu qui era James. James va explicar tots els experiments anteriors. I ho va fer en una sola teoria, fent prediccions sobre experiments que aviat es van comprovar. Havia arribat l'electromagnetisme clàssic. I la llum va resultar no ser res més que el resultat de l'electricitat i el magnetisme.

12.5. I què en podem concloure?

Ens podem preguntar, per concloure, com és que no va existir cap Faraday o cap Maxwell a la Xina o a la Grècia clàssica. Els primers mai no van separar el món en dos grans grups, tot formava part de tot, i la tradició era una de les coses més importants a estudiar. Per tant, els James i els Michaels de la Xina es dedicaven a respectar les tradicions. I tot i així, van sorgir grans aventurers i inventors a la Xina, a poc a poc, que van anar canviant la visió del món de l'Imperi Xinès. Però no van quallar. I al segle XVII, quan semblava que podrien haver fet el mateix salt que a Europa... doncs no, i encara ara és una de les preguntes que amb més insistència es fan els historiadors. Per què no a la Xina del segle XVII?



Més fàcil d'entendre és per què els “inventors” del concepte de natura (es podria ben bé dir que la van crear del no-res, com faria un déu) no van ser els descobridors de l'electromagnetisme. No devia ser per manca de varietat d'idees ni intensitat en el món grec. D'escoles gregues n'hi havia un fotimer. Però els faltava una idea fonamental; no podien pas pensar que el món natural no estigués impulsat per forces transcendents que només podien ser enteses per l'altre element transcendental: la raó humana (el *logos*, que en deien). Només un filòsof que es deia Demòcrit va insinuar que les coses estaven formades d'àtoms i res més; ningú li va fer ni cas. La resta escoltava sobretot Plató i tota la resta que insistien que les lleis independents del món natural només podien ser captades pensant. I quina és la ciència que només pensa amb la raó i la lògica però que no es preocupa de si hi ha un fenomen natural associat? Si heu dit *matemàtiques* ho heu encertat. Les matemàtiques van ser la ciència per excel·lència a la Grècia antiga. Bé, de fet, l'única ciència que ara entendríem com a tal.

Així doncs, a Grècia no hi havia experiments i a la Xina pocs i separats. Per tant, cap avenç tecnològic que requerís experimentació insistent i contínua. Cap motor d'explosió, cap circuit elèctric. En canvi, sí que van existir, bones i grans matemàtiques. A Grècia, al món àrab i a la Xina. Unes matemàtiques que tu hauries de conèixer a la perfecció i dominar, ara ja com un “nen de quatre anys”.

12.6. Conclusió: Prepara't, perquè les idees seran complicades

Com pots extreure d'aquest petit resum, en molts primer de grau et demanem que aprenguis tot el que sabia la ciència el 1860. Bé, tot no, de termodinàmica no en veuràs res de moment, ni òptica geomètrica amb molta probabilitat, ni.... Diguem que et demanem una bona part de la mecànica i l'electromagnetisme.

I aprendre això és una fita considerable. Pensa que és una història de dos mil anys, amb cent anys molt intensos d'investigacions i recerca resumits en un semestre. El consell seria indicar-te que necessitaràs moltes, moltes, moltes hores per aprendre-ho. La classe és només una guia, la feina l'has de fer tu a casa. Bona feina i una mica de sort.



Fig. 12.4
El laboratori de Michael Faraday cap al 1850.
Una pintura de Harriet Moore.

