AULA D'ARQUITECTURA

Piedad Guijarro Carranza
Pere Cruells Pagès

Matemàtiques per a l'arquitectura

Problemes resolts

EDICIONS UPC

AULA ARQUITECTURA 49

Matemàtiques per a l'arquitectura

Problemes resolts

AULA ARQUITECTURA

Piedad Guijarro Carranza
Pere Cruells Pagès

Matemàtiques per a l'arquitectura

Problemes resolts

EDICIONS UPC

Aquesta obra fou guardonada en el vuité concurs
"Ajut a l'elaboració de material docent" convocat per la UPC.

Primera edició: febrer de 2002
Reimpressió: novembre de 2005
Segona edició: juny de 2007

Aquest llibre s'ha publicat amb la col·laboració
del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament
d'Universitats, Recerca i Societat de la Informació.

En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC.

Disseny de la coberta: Jordi Calvet

© Els autors, 2002

© Edicions UPC, 2002
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel.: 93 401 68 83 Fax: 93 401 58 85
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
A/e: edicions-upc@upc.es

Producció: CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)
La Cup. Gran Capità s/n, 08034 Barcelona

Dipòsit legal: B-5088-2002
ISBN: 978-84-8301-915-3

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions establertes a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reprografia i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.

Presentació

Aquest llibre ha sorgit de la necessitat d'oferir als estudiants de primer curs de les Escoles d'Arquitectura un bon grapat d'exercicis que els ajudin a assimilar els conceptes que es treballen a les assignatures de matemàtiques.

Alguns enunciats han estat seleccionats entre les proves que s'han fet als estudiants durant els darrers anys dins l'assignatura de *Matemàtiques* I del primer curs dels estudis d'arquitectura de l'ETSAB. També hi ha alguns exercicis clàssics que es proposen a les assignatures de matemàtiques d'un primer curs universitari. Hem intentat, però, orientar aquest recull d'exercicis cap a enunciats relacionats amb arquitectura i disseny, incloent-hi construccions típiques de dibuix tècnic, disseny d'objectes geomètrics i altres aplicacions més o menys relacionades amb els coneixements bàsics que se suposa que ha de tenir un futur arquitecte.

És clar que el mercat ens ofereix una àmplia oferta de llibres d'exercicis per a primers cursos d'àlgebra i de geometria. Però creiem que faltava omplir un espai, fins ara buit, amb exercicis pensats per a aplicacions més arquitectòniques, entre d'altres l'estudi de les proporcions, les construccions amb regle i compàs, o el disseny d'objectes geomètrics que involucren certs tipus de simetries, com ara les rosasses, les sanefes o els mosaics. El llibre també conté una col·lecció de problemes per treballar amb les còniques, com a primeres corbes fàcils de tractar de cara al disseny i construcció en arquitectura.

Per al seguiment d'aquest llibre, se suposa que el lector està familiaritzat amb el vocabulari i els conceptes matemàtics d'un primer curs universitari. Tot i així, cada capítol s'inicia amb un petit resum teòric per refrescar els conceptes necessaris per a la bona comprensió dels exercicis. Cada capítol consta d'una col·lecció de problemes resolts i uns quants problemes proposats, aquests darrers amb la solució, o bé amb alguna indicació per a la seva resolució, al final del llibre.

Els autors del llibre volem agrair a tot el professorat de la Secció de Matemàtiques i Informàtica de l'ETSAB la seva col·laboració a l'hora de cedir-nos enunciats de problemes originals per a l'elaboració d'aquest recull.

Índex

1 Construccions amb regle i compàs

1.1 Coneixements bàsics 11
1.2 Problemes resolts..... 17
1.3 Poblemes proposats 33

2 Teoria de la proporció

2.1 Coneixements bàsics 35
2.2 Problemes resolts..... 39
2.3 Problemes proposats..... 50

3 Matrius. Determinants. Espais vectorials

3.1 Coneixements bàsics 53
3.2 Problemes resolts..... 62
3.3 Problemes proposats..... 74

4 Aplicacions lineals. Diagonalització d'endomorfismes

4.1 Coneixements bàsics 77
4.2 Problemes resolts..... 81
4.3 Problemes proposats..... 101

5 Transformacions ortogonals al pla i a l'espai

5.1 Coneixements bàsics 105
5.2 Problemes resolts..... 112
5.3 Problemes proposats..... 125

6 Isometries del pla i de l'espai

6.1 Coneixements bàsics 127
6.2 Problemes resolts..... 138
6.3 Problemes proposats..... 162

7 Grup de simetria d'una figura plana

7.1 Coneixements bàsics 165
7.2 Problemes resolts 173
7.3 Problemes proposats 181

8 Còniques

8.1 Coneixements bàsics 185
8.2 Problemes resolts 192
8.3 Problemes proposats 213

9 Solucionari

9.1 Construccions amb regle i compàs 215
9.2 Teoria de la proporció 217
9.3 Matrius. Determinants. Espais vectorials 218
9.4 Aplicacions lineals. Diagonalització d'endomorfismes 220
9.5 Transformacions ortogonals al pla i a l'espai 224
9.6 Isometries del pla i de l'espai 226
9.7 Grup de simetria d'una figura plana 229
9.8 Còniques 233

10 Bibliografia 241

1 Construccions amb regle i compàs

1.1 Coneixements bàsics

1.1.1 Definicions

Una *construcció amb regle i compàs* és un dibuix geomètric fet amb circumferències i rectes. Per construir una recta es necessiten dos punts. Per construir una circumferència cal conèixer-ne el centre i el radi.
Representarem per $R_{A,B}$ la recta que passa pels punts *A* i *B* i per $C_O(r)$ la circumferència de centre *O* i radi *r*.

1.1.2 Construccions elementals

Són construccions amb regle i compàs que es consideren conegudes pel lector i que no es detallaran a l'hora de fer una construcció més complexa. Són les següents:

Mediatriu d'un segment:

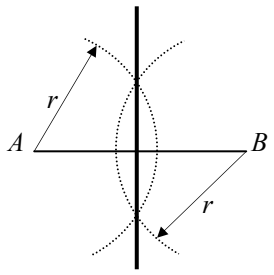


Fig. 1.1

Bisectriu d'un angle:

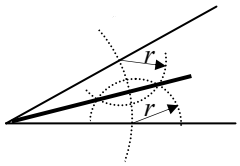


Fig. 1.2

Recta perpendicular a una altra per un punt *P* donat:

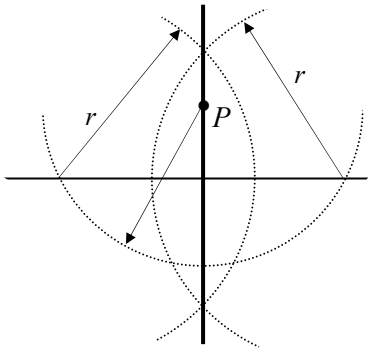


Fig. 1.3

Recta paral·lela a una altra per un punt *P* donat:

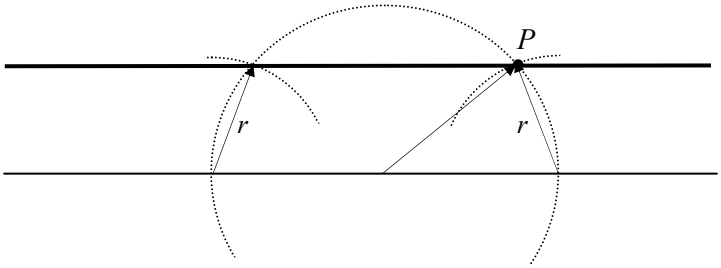


Fig. 1.4

Rectes tangents a una circumferència des d'un punt exterior:

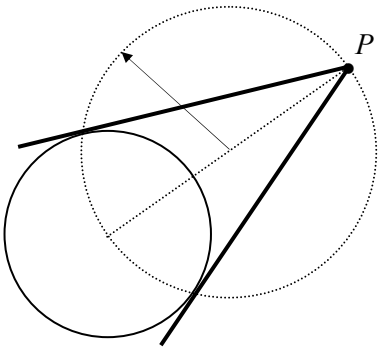
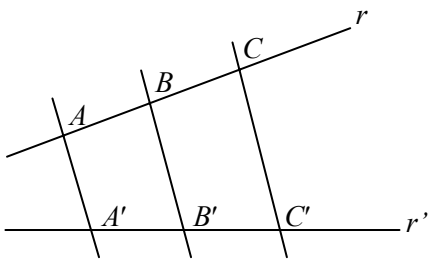


Fig. 1.5

1.1.3 Teorema de Tales

Si un sistema de rectes paral·leles es talla per dues rectes qualssevol, aleshores els segments que aquestes hi determinen són proporcionals.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Fig. 1.6

1.1.4 Triangles semblants. Criteris de semblança

Dos triangles són semblants si tenen els angles iguals i els costats corresponents proporcionals

$$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{C} = \widehat{C'} \ \text{ i } \ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Fig. 1.7

Criteris de semblança. Qualsevol de les condicions següents és suficient perquè dos triangles siguin semblants:

1. Que tinguin els angles iguals:

$$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'} \ \text{ i } \ \widehat{C} = \widehat{C'}$$

2. Que tinguin els costats proporcionals:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

3. Que tinguin un angle igual i els costats corresponents proporcionals:

$$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

1.1.5 Punts notables d'un triangle

Baricentre (B): Intersecció de les medianes. Aquest punt és el centre de gravetat del triangle i parteix cada una de les medianes en dos segments de longituds un doble que l'altre.
Incentre (I): Intersecció de les bisectrius. És el centre de la circumferència inscrita al triangle.
Circumcentre (C): Intersecció de les mediatrius. És el centre de la circumferència circumscrita al triangle.
Ortocentre (T): Intersecció de les altures.

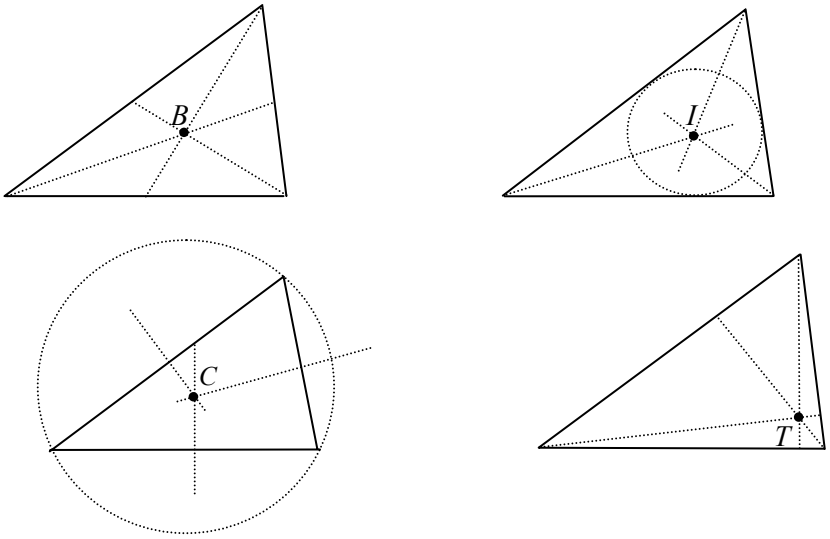
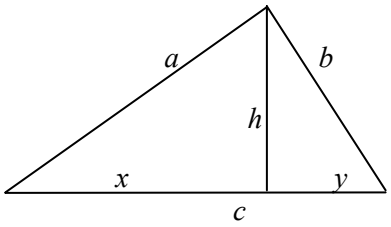


Fig. 1.8

1.1.6 Teoremes clàssics per a triangles rectangles



$c^2=a^2+b^2$ *Teorema de Pitàgores*

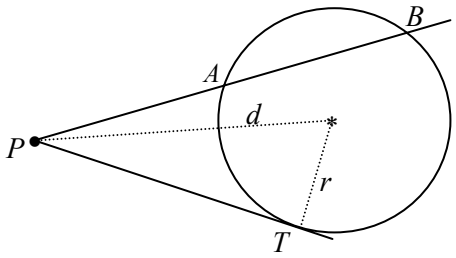
$a^2 = x\cdot c$ *Teorema d'Euclides o del catet*

$h^2 = x\cdot y$ *Teorema de l'altura*

Fig. 1.9

1.1.7 Potència d'un punt respecte d'una circumferència

Per a qualsevol recta que passi per un punt *P* i que talli una circumferència C en dos punts *A* i *B*, ocasionalment iguals *A=B=T*, el producte dels segments $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ és constant i igual a $d^2 - r^2$ on *d* és la distància de *P* al centre de la circumferència i *r*, el radi d'aquesta. Aquesta constant rep el nom de *potència* de *P* respecte de C.



$$\mathrm{Pot}(P,\mathcal{C}) = \overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

Fig. 1.10

L'eix radical de dues circumferències és el lloc geomètric en què els punts tenen la mateixa potència respecte de les dues circumferències. L'eix radical és una recta perpendicular al segment que uneix els centres de les dues circumferències.

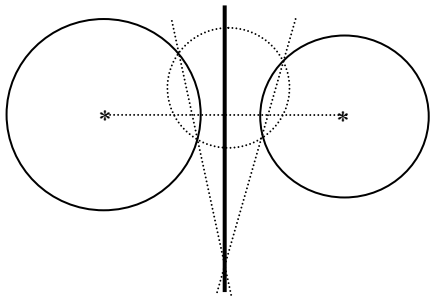


Fig. 1.11

El centre radical (*CR*) de tres o més circumferències és el punt del pla que té la mateixa potència respecte de totes les circumferències. El centre radical és la intersecció dels eixos radicals.

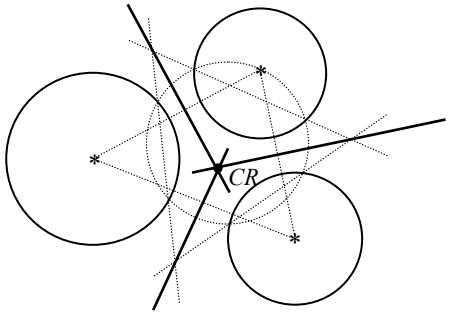
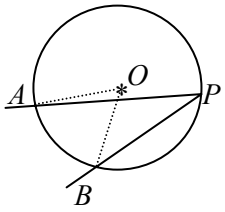
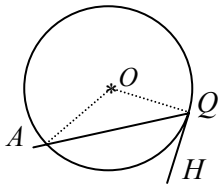


Fig. 1.12

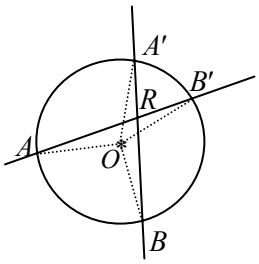
1.1.8 Angles en una circumferència



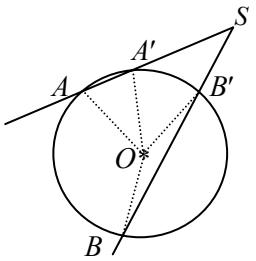
Angle inscrit $\widehat{APB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$



Angle semiinscrit $\widehat{AQH} = \frac{1}{2}\widehat{AOQ}$



Angle interior $\widehat{ARB} = \dfrac{\widehat{AOB} + \widehat{B'OA'}}{2}$

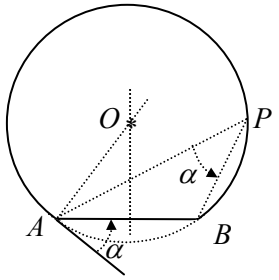


Angle exterior $\widehat{ASB} = \dfrac{\widehat{AOB} - \widehat{B'OA'}}{2}$

Fig. 1.13

1.1.9 Arc capaç

L'arc capaç d'angle α sobre un segment $\overline{AB}$ és el lloc geomètric dels punts d'un dels semiplans que determina la recta que conté $\overline{AB}$ i que formen un angle α amb els extrems del segment $\overline{AB}$.



$\widehat{AOB} = 2\alpha$

$\widehat{APB} = \alpha$

Fig. 1.14

1.2 Problemes resolts

Problema 1

Siguin r i r' dues rectes paral·leles i h la distància entre elles. Sigui ABC un triangle isòsceles situat com indica la figura i P un punt qualsevol del segment $\overline{CB}$. Si pel punt P es tracen les perpendiculars al costats iguals del triangle.

a) Demostreu que $\overline{PP_1} + \overline{PP_2} = h.$

b) Demostreu que hi ha una circumferència que passa per P_1, P, A i P_2.

c) Com es pot construir un triangle isòsceles entre dues rectes paral·leles com el de la figura si només es coneixen els punts A i P?

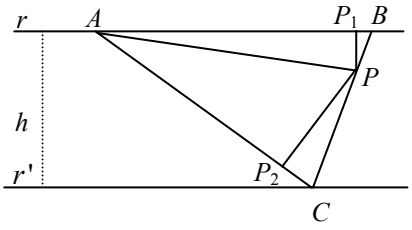


Fig. 1.15

Resolució

a) Si descomponem el triangle ABC en dos: ABP i APC i calculem l'àrea de tots tres, tenim:

$$\overline{AB}\cdot h = \overline{AB}\cdot\overline{PP_1} + \overline{AC}\cdot\overline{PP_2} = \overline{AB}\cdot\overline{PP_1} + \overline{AB}\cdot\overline{PP_2} = \overline{AB}\cdot\left(\overline{PP_1} + \overline{PP_2}\right) \Rightarrow h = \overline{PP_1} + \overline{PP_2}.$$

b) L'arc capaç de 90º sobre $\overline{AP}$ passa per A, P, P_1 i P_2.

c) Sigui C l'arc capaç de 90º sobre $\overline{AP}$. Si

$$P_1 = \mathsf{C} \cap r \text{ i } P_2 = \mathsf{C} \cap \mathsf{C}_P(h - \overline{PP_1})$$

llavors, els altres dos vèrtexs del triangle són

$$C = R_{A,P_2} \cap r' \text{ i } B = R_{C,P} \cap r.$$

Problema 2

Donada una circumferència C, de centre O i radi r, i donat un angle α,

a) Determineu el lloc geomètric dels punts des dels quals es veu C sota un angle α i descriviu un mètode per obtenir-lo. (Es defineix l'angle sota el qual un punt veu una circumferència com l'angle que formen les dues tangents a la circumferència des del punt.)

b) Construïu un triangle ABC, circumscrit a C, donats l'angle $\widehat{A}$, l'altura h_a i el punt P en el qual el costat a és tangent a C. Discutiu per a quins valors de h_a el problema té solució.

Resolució

a) Suposem el problema resolt. Si un punt Q veu la circumferència $\mathcal{C}$ sota un angle α, aleshores

$$\sin \alpha/2 = \frac{r}{\overline{OQ}}$$

i, per tant, Q és un punt de la circumferència $\mathcal{C}_O(r')$ de centre O i radi $r' = \overline{OQ} = \dfrac{r}{\sin\ \alpha/2}$.

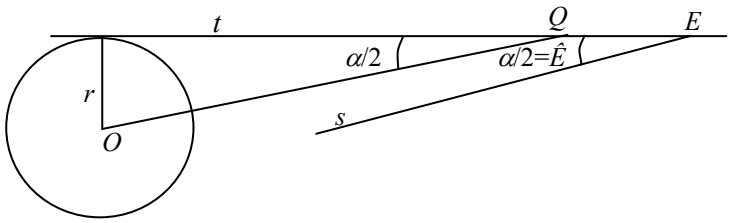


Fig. 1.16

Per construir aquesta circumferència, només necessitem trobar un d'aquests punts Q. Per això, considerem una tangent, t, qualsevol a $\mathcal{C}$. En un punt E de la recta t col·loquem l'angle $\hat{E} = \alpha/2$ com indica la figura. Si per O tracem una paral·lela al costat s de l'angle $\hat{E}$, aleshores la seva intersecció amb la recta t és un punt Q de la circumferència $\mathcal{C}_O(r')$ on $r' = \dfrac{r}{\sin\ \alpha/2}$.

b) Sigui t la tangent a $\mathcal{C}$ en el punt P i sigui s la paral·lela a t a una distància h_a. Per l'apartat anterior, si $A \in s \cap \mathcal{C}_O\left(r/\sin(\widehat{A}/2\right)$ i fem per A les dues tangents a $\mathcal{C}$, llavors les seves interseccions amb t ens donen els altres dos vèrtexs B i C del triangle buscat.

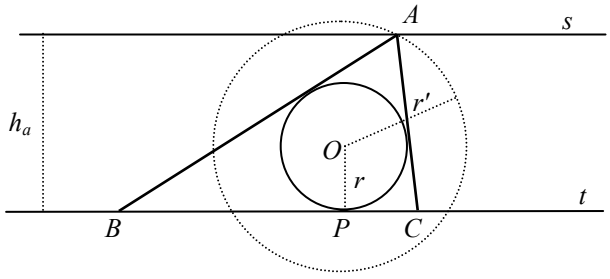


Fig. 1.17

El problema té solució si $\mathcal{C}_O\left(\dfrac{r}{\sin\ \widehat{A}/2}\right) \cap s \neq \varnothing$, o el que és equivalent, si $2r < h_a < r + r/\sin\left(\widehat{A}/2\right)$.

Problema 3

Sigui ABC un triangle amb l'angle $\hat{B} = 120º = 120º$. Si $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ i $\overline{CM}$ són les seves bisectrius, demostreu que:

a) $\overline{DE}$ i $\overline{DM}$ són les bisectrius dels angles $\widehat{BDC}$ i $\widehat{ADB}$ respectivament i que l'angle $\widehat{MDE} = 90º$.

b) Construïu aquest triangle si, a més de l'angle $\hat{B} = 120º$ coneixeu els segments $\overline{DE}$ i $\overline{DM}$.

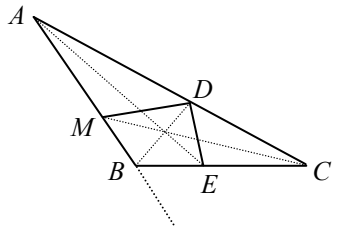


Fig. 1.18

Resolució

a) Com que l'angle $\hat{B} = 120º$ i $\overline{BD}$ és la seva bisectriu, es té que $\overline{BC}$ és la bisectriu de l'angle que formen $\overline{BD}$ i la perllongament del costat $\overline{AB}$, i com que el punt E està en aquesta bisectriu i també en la bisectriu $\overline{AE}$, la seva distància a cadascun dels costats d'aquests angles és la mateixa, en particular

$$d(E, R_{A,C}) = d(E, R_{B,D})$$

i, per tant, el punt E està en la bisectriu de l'angle $\widehat{BDC}$. Anàlogament per a $\overline{DM}$.

D'altra banda,

$$\widehat{ADM} + \widehat{MDB} + \widehat{BDE} + \widehat{EDC} = 180º$$

i com que $\widehat{ADM} = \widehat{MDB}$ i $\widehat{BDE} = \widehat{EDC}$ es té

$$\widehat{MDE} = \widehat{MDB} + \widehat{BDE} = 90º$$

b) Si coneixem l'angle $\hat{B} = 120º$ i els segments $\overline{DE}$ i $\overline{DM}$, per obtenir el triangle ABC, fem la construcció següent:

1. Tracem dos segments perpendiculars de longituds $\overline{DE}$ i $\overline{DM}$ respectivament.
2. Fem un arc capaç de 60º sobre $\overline{DE}$ i un altre sobre $\overline{DM}$. La intersecció d'aquest arcs ens dóna el vèrtex B del triangle.
3. Amb el mateix vèrtex D dupliquem l'angle $\widehat{BDE}$ amb costat comú $\overline{DE}$ i prolonguem l'altre costat fins a trobar les interseccions amb les rectes $R_{B,E}$ i $R_{B,M}$, així obtenim els altres dos vèrtexs A i C del triangle buscat.

Problema 4

Donat un triangle *ABC* i la seva circumferència circumscrita, $\mathcal{C}$, considerem el punt *P* obtingut com a intersecció de la mediatriu M_a i la circumferència $\mathcal{C}$. Si P' és el punt d'intersecció del segments $\overline{BC}$ i $\overline{AP}$,

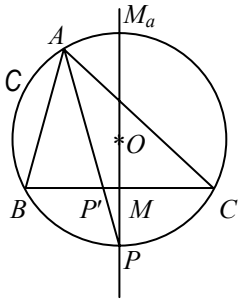


Fig. 1.19

a) Demostreu que el segment $\overline{AP'}$ és la bisectriu, b_a, de l'angle $\widehat{A}$.

b) Construïu un triangle *ABC* donats: l'altura h_a, la bisectriu b_a i la mitjana m_a.

Resolució

a) Com que M_a és la mediatriu del segment $\overline{BC}$, aleshores l'arc $\widehat{BP}$ és igual a l'arc $\widehat{PC}$ i, per tant, els angles inscrits $\widehat{BAP}$ i $\widehat{PAC}$ són iguals.

b) Construcció:

1. Sigui *r* una recta i *A* un punt tals que $d(A, r) = h_a$.
2. De les interseccions de les circumferències $\mathcal{C}_A(b_a)$ i $\mathcal{C}_A(m_a)$ amb *r* ens quedem amb els punts P' i *M* respectivament.
3. Fem la perpendicular, M_a, per *M* a la recta *r*. La intersecció de M_a amb la recta $R_{A,P'}$ ens dóna el punt *P*.
4. Per l'apartat a) els punt *A* i *P* són dos punts de la circumferència circumscrita al triangle demanat, per tant, el centre d'aquesta circumferència serà la intersecció de M_a i la mediatriu del segment $\overline{AP}$.
5. La intersecció d'aquesta circumferència amb la recta *r* dóna els altres dos vèrtexs *B* i *C* del triangle buscat.

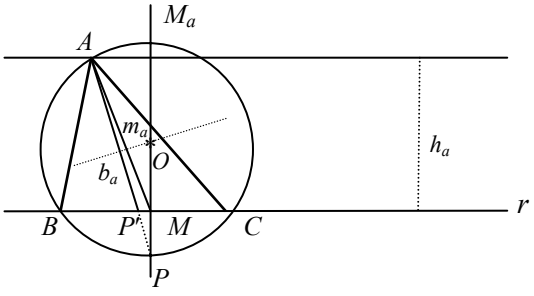


Fig. 1.20

Problema 5

Donat un triangle qualsevol *ABC*:

a) Traceu la circumferència $\mathcal{C}_1$ inscrita i la circumferència $\mathcal{C}_2$ tangent a $\overline{CB}$ i als perllongaments dels costats $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$.

b) Proveu que hi ha una circumferència que passa per *B*, per *C* i pels centres de $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$.

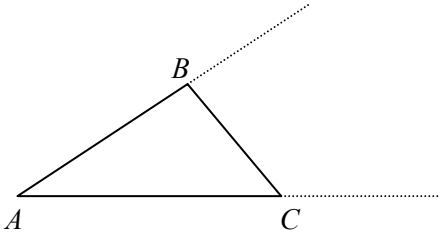


Fig. 1.21

Resolució:

a) El centre de $\mathcal{C}_1$ és el punt O_1, intersecció de les bisectrius del triangle *ABC*. Així mateix, el centre de $\mathcal{C}_2$ és el punt O_2, intersecció de la bisectriu de l'angle $\widehat{A}$ i la bisectriu de qualsevol dels angles que forma el costat $\overline{CB}$ amb els perllongaments dels costats $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Fent les perpendiculars des de O_1 i O_2 a la recta $R_{A,B}$, obtenim els radis de les dues circumferències demanades.

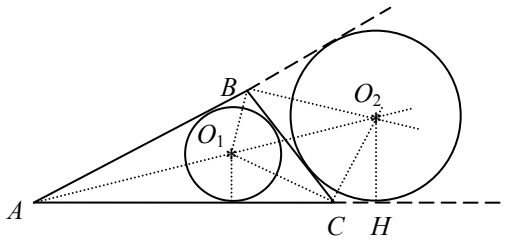


Fig. 1.22

b) La suma dels angles $\widehat{ACO_1} + \widehat{O_1CB} + \widehat{BCO_2} + \widehat{O_2CH} = 180º$, i com que

$$\widehat{ACO_1} = \widehat{O_1CB} \text{ i } \widehat{BCO_2} = \widehat{O_2CH} ,$$

aleshores,

$$\widehat{O_1CO_2} = \widehat{O_1CB} + \widehat{BCO_2} = 90º .$$

Anàlogament $\widehat{O_1BO_2} = 90º$, per tant, *B* i *C* són dos punts de l'arc capaç de 90º sobre el segment $\overline{O_1O_2}$.

Problema 6

Donades tres rectes paral·leles *r*, *s* i *t*, construïu un triangle equilàter amb els vèrtexs situats cada un damunt d'una de les tres rectes.

Resolució

Suposem el problema resolt i sigui *ABC* un triangle equilàter amb els seus vèrtexs *A*, *B* i *C* sobre les rectes *r*, *s* i *t* respectivament.

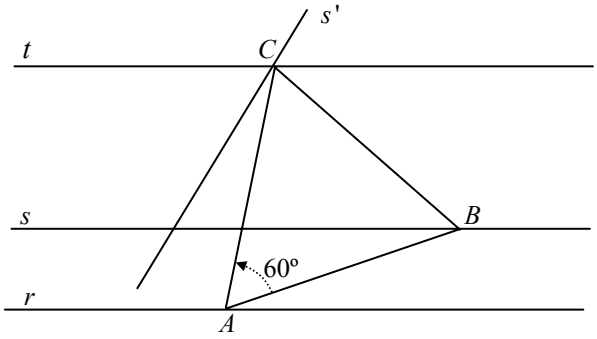


*Fig.*1.23

Observem que si fem un gir de 60º amb centre el punt *A*, el vèrtex $B \in s$ es transformar en *C*, per tant, si apliquem aquest gir a la recta *s*, la seva transformada, *s*', passarà per *C*. Això ens permet fer la construcció següent:

1. Fixem un punt *A*, qualsevol, de la recta *r*.
2. Per girar 60º la recta *s* al voltant del punt *A*, en girarem dos punts *P* i *Q*, i per això, només cal construir dos triangles equilàters *APP*' i *AQQ*' de costats $\overline{AP}$ i $\overline{PQ}$ respectivament. La recta girada, *s*', serà la passa per *P*' i *Q*'.
3. La intersecció de *s*' amb *t* serà el vèrtex *C* del triangle.
4. Finalment fent un arc amb centre *A* i radi $\overline{AC}$, la seva intersecció amb *s* ens dóna el tercer vèrtex *B* del triangle.

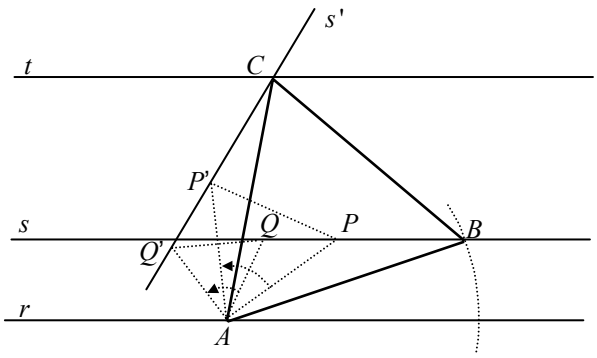


Fig. 1.24

Problema 7

Donat un quadrilàter *ABCD* i el segment $\overline{EF}$ que uneix els punts mitjos dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$

a) Demostreu que si $\overline{CC'}$ és paral·lel a $\overline{BD}$ i de la mateixa longitud, aleshores $\overline{AC'}$ és paral·lel a $\overline{EF}$ i $\overline{AC'} = 2\overline{EF}$ (vegeu fig. 1.25).

b) Construïu un quadrilàter *ABCD* coneguts els quatre costats i el segment $\overline{EF}$ que uneix els punts mitjos dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$.

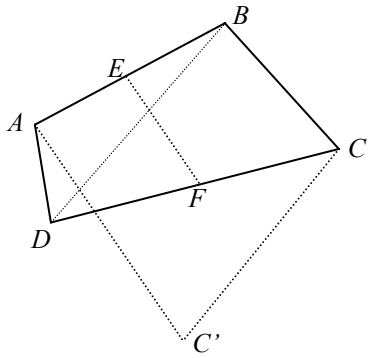


Fig. 1.25

Resolució

a) Tenint en compte les hipòtesis del problema, el quadrilàter *BCC'D* és un paral·lelogram i, per tant, les seves diagonals $\overline{BC'}$ i $\overline{DC}$ es tallen en el punt mig, es a dir a *F*. Per altra banda, com que *E* és el punt mig de $\overline{AB}$, es té que els triangles ABC' i *EBF* són semblants i la raó de semblança és 2, per tant, $\overline{AC'}$ és paral·lel a $\overline{EF}$ i $\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{EF}} = 2$.

b)

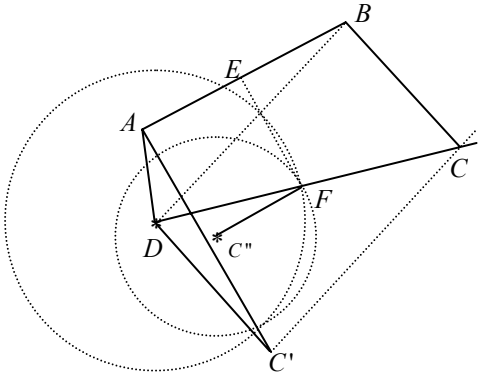


Fig. 1.26

Construcció:

1. Fem el triangle ADC' de costats: $\overline{AD}$, $\overline{DC'} = \overline{BC}$ i $\overline{AC'} = 2\overline{EF}$.

2. Sigui C'' el punt mig de $\overline{AC'}$. Per l'apartat a) $AEFC''$ és un paral·lelogram, i per tant,

$$\overline{C''F} = \overline{AE} = \overline{AB}/2$$

i

$$F \in \mathcal{C}_{C''}\left(\overline{AB}/2\right) \cap \mathcal{C}_{D}\left(\overline{DC}/2\right).$$

3. Fem per A la paral·lela a la recta $R_{C'',F}$ i portem a partir de A la longitud $\overline{AB}$ per obtenir B.
4. Finalment, fem per C' una paral·lela a $\overline{DB}$. La intersecció d'aquesta amb la recta $R_{D,F}$ ens dóna el quart vèrtex, C, del quadrilàter.

Problema 8

Construïu una circumferència que passi per dos punts A i B i que sigui tangent a una recta r. Discutiu el problema segons les posicions dels punts A i B.

Resolució

Evidentment, el problema no té solució si els dos punts estan sobre la recta r o no estan al mateix costat de r.

Cas 1. El segment $\overline{AB}$ és paral·lel a la recta r.

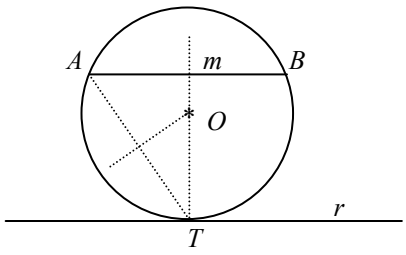


Fig. 1.27

Construcció:

1. Fem la mediatriu m del segment $\overline{AB}$.
2. La intersecció de m amb la recta r ens dóna el punt T de tangència.
3. Fem la intersecció de m amb la mediatriu de $\overline{AT}$ i obtenim el centre O de la circumferència buscada.

Cas 2. El segment $\overline{AB}$ no és paral·lel a la recta r.
Suposem el problema solucionat (vegeu la figura 1.28). Si $\mathcal{C}$ és la circumferència buscada, T el punt de tangència de $\mathcal{C}$ i r, i P el punt d'intersecció de r amb la recta $R_{A,B}$, per les propietats de la potència d'un punt respecte d'una circumferència, tenim

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \mathrm{Pot}(P,\ \mathcal{C}) = \overline{PT}^{\,2}$$

Per tant, hem de trobar un punt $T \in r$, tal que

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PT}^{\,2}$$

i per això, fem la construcció següent:

1. Fem una circumferència auxiliar, C', que passi per A i B.
2. Des del punt P, intersecció de la recta $R_{A,B}$ i r, fem una tangent a C'. Si T' és el punt de tangència

$$\overline{PT'}^{\,2} = \text{Pot}\,(P,\, C') = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$$

   (Observeu que la recta $R_{A,B}$ és l'eix radical de les dues circumferències.)
3. Fem la circumferència de centre P i radi $\overline{PT'}$. La intersecció d'aquesta circumferència amb la recta r, ens dóna el punt T de tangència que busquem.
4. Finalment, la intersecció de les mediatrius de $\overline{AB}$ i $\overline{AT}$ és el centre de la circumferència que ens demanen.

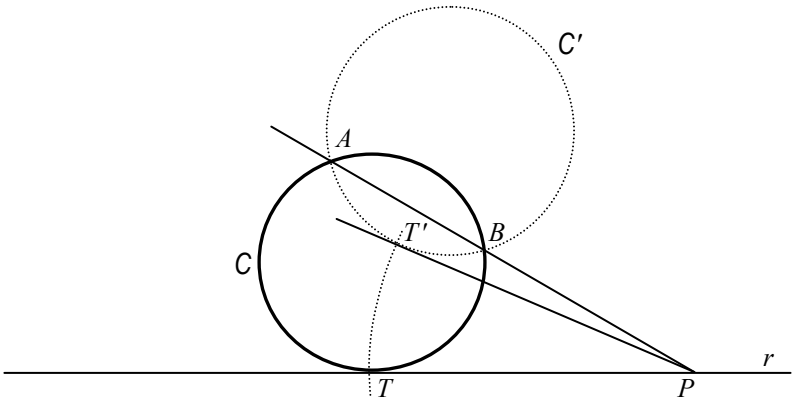


Fig. 1.28

Cas 3. Un dels punts és de la recta r.
Si $A \in r$ i $B \notin r$, aleshores la intersecció de la mediatriu de $\overline{AB}$ i la perpendicular a r des de A, ens dóna el centre O de la circumferència buscada.

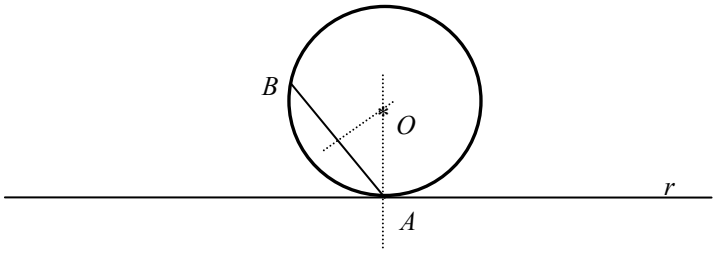


Fig. 1.29

Problema 9

Traceu una circumferència tangent a dues rectes, paral·leles o no, i que passi per un punt donat P.

Resolució

Segons la posició de les rectes donades tenim els casos següents:

Cas 1: Les dues rectes, r i s, són paral·leles.
En aquest cas, el centre de la circumferència buscada es troba en la recta m, paral·lela a r i s i que equidista d'ambdues.
Construcció:
Fem una circumferència centrada en el punt P i de radi la distància entre r i m. La intersecció d'aquesta amb la recta m són els centres O_1 i O_2 de les dues circumferències solució.

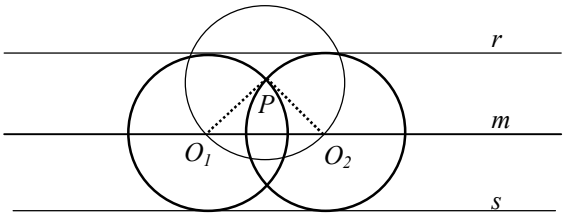


Fig. 1.30

Cas 2: Les dues rectes, r i s, no són paral·leles.
Ara el centre de la circumferència buscada es troba sobre la bisectriu, b, de les dues rectes r i s.
Construcció:

1. Fem una circumferència auxiliar, C', centrada en algun punt de la bisectriu b i que passi pel punt P. Per simetria, aquesta circumferència també passa pel punt, P', simètric de P respecte de b. Per tant, la recta $R_{P,P'}$ és l'eix radical de la circumferència C' i de la circumferència buscada, i talla la recta s en un punt que anomenem Q.

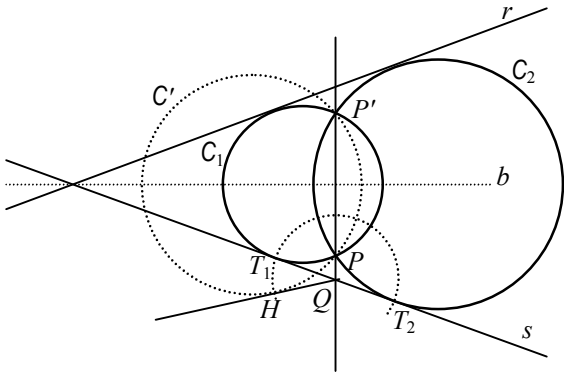


Fig. 1.31

2. Fem una tangent a la circumferència auxiliar C' des del punt Q i obtenim el punt H de tangència. Aleshores, la intersecció de la circumferència de centre Q i radi $\overline{QH}$ amb la recta s ens dóna els dos punts de tangència, T_1 i T_2, de les dues circumferències, C_1 i C_2, que són solució del problema plantejat: la circumferència C_1 que passa per P, P' i T_1 i la circumferència C_2 que passa per P, P' i T_2.

Problema 10

Donats una circumferència $\mathcal{C}$ de centre O i radi r, una recta l exterior a $\mathcal{C}$ i un punt P de l, construïu, amb regle i compàs, una circumferència amb centre en algun punt de l, que passi per P i que sigui tangent a $\mathcal{C}$.

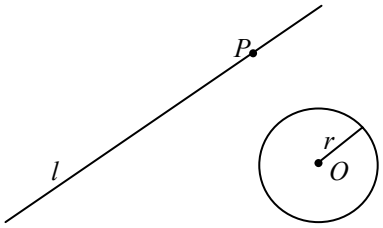


Fig. 1.32

Resolució

Suposem que tenim el problema resolt.

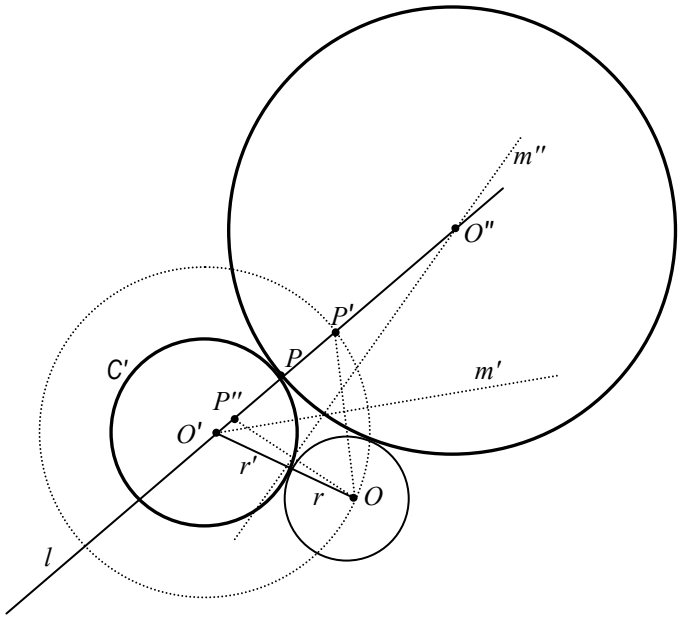


Fig. 1.33

Si la circumferència $\mathcal{C}'$ de centre O' i radi r' és una solució del problema plantejat aleshores, la circumferència de centre O' i radi $r' + r$ talla la recta l en un punt P' tal que

$$d(P,P') = r \text{ i } d(P',O') = d(O,O')$$

per tant, O' serà un punt de l situat en la mediatriu m' del segment $\overline{P'O}$, i podem fer la construcció següent:

1. Portem la longitud *r* sobre *l* a partir de *P* i obtenim P'.
2. La intersecció de la mediatriu, *m*, del segment $\overline{OP'}$ amb la recta *l* ens dóna el punt O'.
3. La circumferència de centre O' i radi $\overline{OP'}$ és una solució.

Observacions:

a) Si portem la longitud *r* a l'altre costat de *P*, obtenim el punt P'' i fent el mateix procés es té una segona circumferència, solució del problema.

b) Si la mediatriu del segment $\overline{OP'}$ o la del segment $\overline{OP''}$ és paral·lela a *l*, aleshores només hi ha una solució.

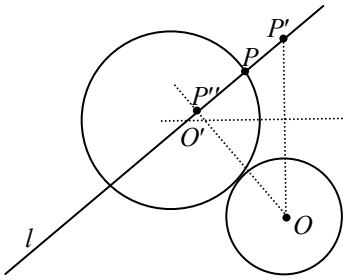


Fig. 1.34

Problema 11

Donats una circumferència $\mathcal{C}$ i dos punts *A* i *B*, traceu una circumferència tangent a $\mathcal{C}$ i que passi per *A* i *B*.

Resolució

Segons sigui la posició del punts *A* i *B* respecte de la circumferènica $\mathcal{C}$, hem de considerar els casos següents:

Cas 1. Els dos punts *A* i *B* són exteriors a la circumferència.
Suposem el problema resolt i sigui $\mathcal{C}_1$ la circumferència tangent a $\mathcal{C}$ que passa per *A* i *B*. Aleshores, la tangent comuna de $\mathcal{C}$ i de $\mathcal{C}_1$ és el seu eix radical, per tant, si trobem un punt d'aquest eix fent la tangent des d'ell a la circumferència $\mathcal{C}$ trobarem el punt de tangència de $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}_1$, la qual cosa ens permetrà construir la circumferència $\mathcal{C}_1$.

Construcció:

1. Fem una circumferència auxiliar, $\mathcal{C}'$, que passi pels punts *A* i *B* i que talli la circumferència donada en dos punts *M* i *N*.
2. Si $P = R_{A,B} \cap R_{M,}$, aleshores *P* és el centre radical de les circumferències $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ i la que busquem. En efecte:

$$\text{Pot}\,(P, \mathcal{C}_1) = \overline{PA}\cdot\overline{PB} = \text{Pot}\,(P, \mathcal{C}') = \overline{PM}\cdot\overline{PN} = \text{Pot}\,(P, \mathcal{C})$$

   En particular, *P* és un punt de l'eix radical de $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}_1$ com volíem.
3. Des de *P* fem una recta tangent, *t*, a la circumferència $\mathcal{C}$, el seu punt de tangència, *T*, és també el punt de tangència de les dues circumferències, la donada, $\mathcal{C}$, i la que busquem $\mathcal{C}_1$.
4. Finalment, fem la circumferència $\mathcal{C}_1$ que passa per *A*, *B* i *T*.

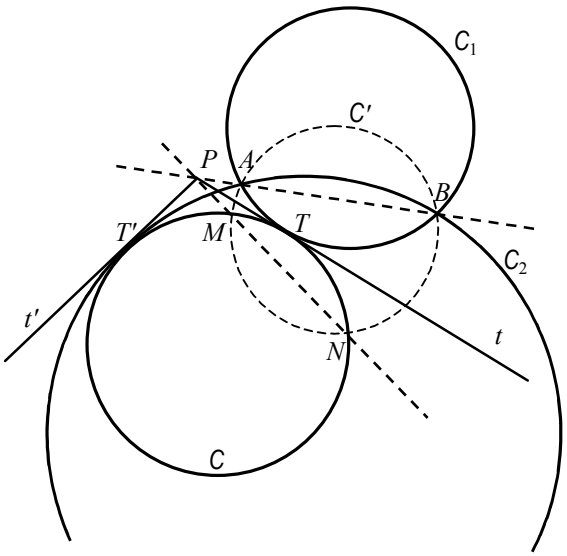


Fig. 1.35

És clar, que si fem l'altra tangent a C des de *P,* tindrem un altre punt, *T',* de tangència, el de l'altra circumferència solució, C_2, la que passa per *A*, *B* i *T'*.

Observació:
A l'hora de fer aquesta construcció pot passar que la recta $R_{A,B}$ sigui paral·lela a la recta $R_{M,N}$. En aquest cas, la mediatriu del segment $\overline{AB}$ passa pel centre de C i de la circumferència buscada i, per tant, la intersecció d'aquesta mediatriu amb C seran els punts *T* i *T'* de tangència amb C de les dues circumferències solució C_1 i C_2.

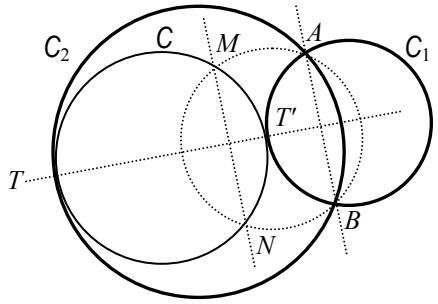


Fig. 1.36

Cas 2. Si els dos punts són interiors a la circumferència cal seguir exactament els mateixos passos per trobar les solucions.

Cas 3. Si un dels punts és exterior i l'altre interior, el problema no té solució.

Cas 4. Si un dels dos punts pertany a C, aquest serà el punt de tangència i, si tots dos punts es troben damunt de C, aquesta serà la solució al problema.

Problema 12

Donada una circumferència C i dues rectes s_1 i s_2 que es tallen en un punt P de C, trobeu una circumferència tangent a C i a les dues rectes que sigui exterior a C.

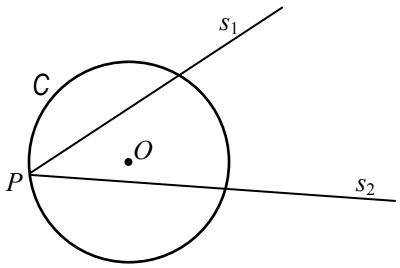


Fig. 1.37

Resolució

Suposem el problema resolt, i sigui O' el centre i r' el radi de la circumferència solució que anomenarem C'. Si O és el centre de C i r el seu radi, aleshores la circumferència C'' de centre O' i radi $r + r'$ passarà pel punt O i serà tangent a dues paral·leles a s_1 i s_2 respectivament, situades a una distància r. I ara, per ser C' i C'' dues circumferències concèntriques, la intersecció del segment $\overline{OO'}$ amb C ens dóna el punt, T, de tangència de C amb la circumferència buscada.

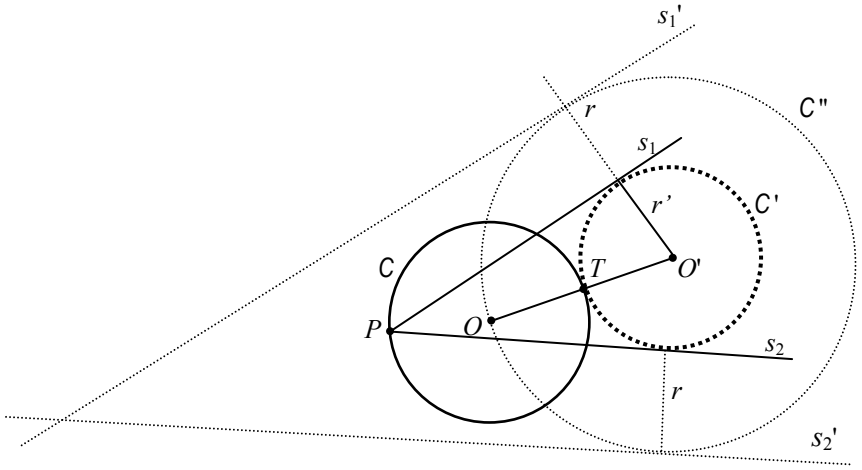


Fig. 1.38

Construcció:

1. Siguin s_1' i s_2' dues paral·leles a s_1 i s_2, respectivament, situades a una distància r.
2. Sigui C'' una circumferència tangent a s_1' i s_2' i que passi per O, (vegeu problema 9) i sigui O' el seu centre.
3. Si $T = C \cap R_{O,O'}$, aleshores la circumferència de centre O' i radi $\overline{OT}$ és una solució.

Problema 13

Traceu una circumferència que passi per un punt *A,* i que talli ortogonalment a una circumferència $\mathcal{C}$ amb centre un punt $O \neq A$ i radi *r*.
Nota. Es diu que dues circumferències es tallen ortogonalment si les seves tangents són ortogonals als punts comuns.

Resolució

Suposem que tenim el problema resolt i sigui $\mathcal{C}'$ la circumferència que busquem, aleshores

$$\text{Pot}\,(O, \mathcal{C}') = \overline{OH}^2 = r^2$$

on *H* és un dels dos punts d'intersecció de $\mathcal{C}'$ i $\mathcal{C}$. Però també

$$\text{Pot}\,(O, \mathcal{C}') = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$$

on *A*' és el punt d'intersecció de la recta $R_{O,A}$ amb la circumferència buscada. Per tant,

$$r^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}.$$

Així doncs, el problema quedarà resolt si podem construir aquest punt *A*'. Un punt *A*' que satisfaci aquesta condició s'anomena el *simètric* de *A* respecte de $\mathcal{C}$.

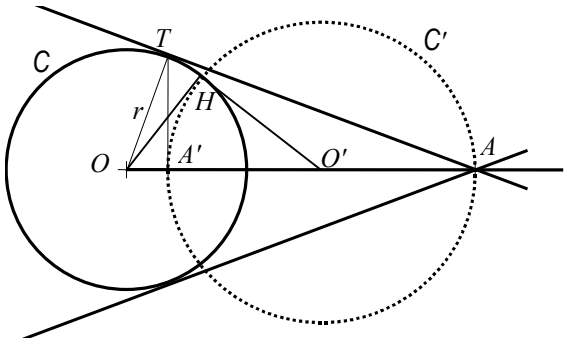


Fig. 1.39

Construcció:

Cas 1. *A* és un punt exterior a la circumferència.

1. Fem una recta tangent a $\mathcal{C}$ des del punt *A* i sigui *T* el punt de tangència.
2. Si projectem ortogonalment el punt *T* sobre la recta $R_{O,A}$ el punt *A*' és el que busquem. En efecte, pel teorema del catet

$$r^2 = \overline{OA'} \cdot \overline{OA}$$

3. La circumferència buscada té el seu centre en el punt mig del segment $\overline{A'A}$ i radi $\dfrac{\overline{A'A}}{2}$.

Cas 2. El punt A és interior a la circumferència.

1. Fem la recta R_{OA} i una perpendicular a aquesta per A. Sigui T la intersecció d'aquesta perpendicular amb la circumferència.
2. Fem la recta tangent a la circumferència en el punt T. Tallem aquesta tangent amb la recta R_{OA} i així trobem el punt A'.
3. Igual que abans, la circumferència buscada té el centre en el punt mig del segment $\overline{AA'}$ i radi $\frac{\overline{AA'}}{2}$.

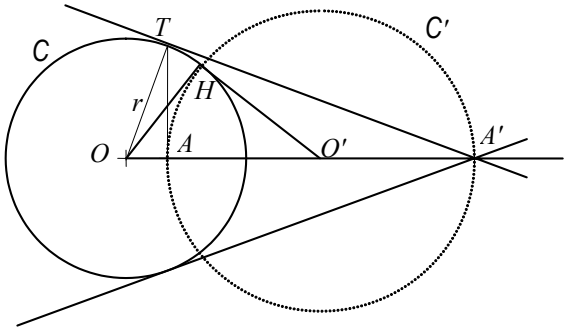


Fig. 1.40

Cas 3. A és un punt de la circumferència C.
Si fem la tangent, t, a C per A llavors, qualsevol circumferència amb centre en un punt, $P \in t$ i radi $\overline{PA}$ és ortogonal a C.

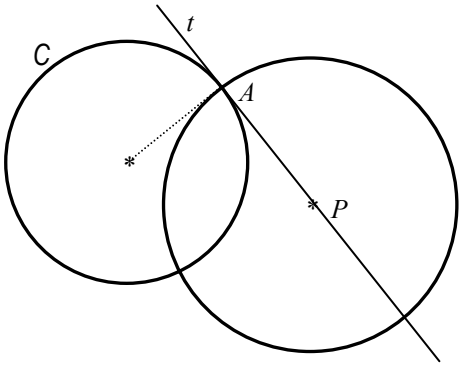


Fig. 1.41

1.3 Problemes proposats

Problema 1

Indiquem per *ABC* el triangle de costats *a, b, c.* Si h_a, h_b, h_c són les altures sobre els costats *a, b, c*; m_a, m_b, m_c les medianes respectives, b_a, b_b, b_c les bisectrius, i *A, B, C* els angles interiors, construïu un triangle *ABC* coneguts:

a) *a, b, c*
b) h_a, *b, c*
c) m_a, *b, c*
d) m_a, *b, C*
e) *a,* h_a, *A*
f) b_a, *b, A*
g) m_a, m_b, m_c
h) h_a, h_b, h_c

Problema 2

Considerem tres circumferències tangents dues a dues i T_1, T_2 i T_3 els tres punts de tangència.

a) Demostreu que el centre radical d'aquestes tres circumferències és un punt notable del triangle de vèrtex T_1, T_2 i T_3 i, al mateix temps, també és un altre punt notable del triangle que formen els centres de les tres circumferències.
b) Construïu tres circumferències tangents dues a dues coneguts els tres punts de tangència T_1, T_2 i T_3. Expliqueu i justifiqueu els passos detalladament.

Problema 3

Proveu que els punts mitjos dels costats d'un quadrilàter qualsevol formen un paral·lelogram.

Problema 4

Donats dos rectangles, doneu dues maneres diferents per comprovar quin té l'àrea més gran fent ús només del regle i el compàs.

Problema 5

Construïu un triangle equilàter amb un vèrtex en un punt, *P*, donat del pla, sabent que els altres dos estan sobre dues circumferències donades.

Problema 6

a) Construïu un quadrilàter *ABCD* del que coneixem el costat $\overline{AB}$, la diagonal $\overline{BD}$ i l'angle $\widehat{A}$, si sabem que l'angle $\widehat{C}$ és suplementari del $\widehat{A}$ i que les diagonals es tallen perpendicularment.
b) Quina relació hi ha entre els angles $\widehat{B}$ i $\widehat{D}$?

Problema 7

Donada una circumferència C i dos radis no colineals, traceu una circumferència tangent a C i als dos radis.

Problema 8

Siguin A i B els extrems d'un diàmetre d'una circumferència $\mathcal{C}$. Sigui t la tangent a $\mathcal{C}$ en B i P un punt de t diferent de B. Considerem A' el punt d'intersecció del segment $\overline{AP}$ amb la circumferència $\mathcal{C}$ i P' el punt d'intersecció de la recta t amb la paral·lela al segment $\overline{AP}$ que passa pel centre de la circumferència, O. Demostreu que $\widehat{A'OB} = 2\widehat{P'OB}$.

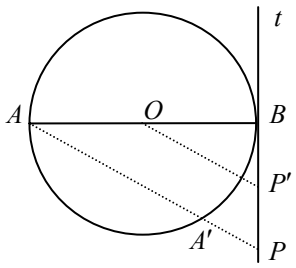


Fig. 1.42

Problema 9

Feu la circumferència circumscrita a un triangle acutangle. Per a cada un dels arcs que queden sobre cada costat, feu-ne l'arc simètric.

a) Justifiqueu que aquests arcs són concurrents en un punt P.
b) Demostreu que P és l'ortocentre del triangle.

Problema 10

a) Traceu una circumferència tangent a una circumferència donada, $\mathcal{C}$, i a una recta r en un punt fixat $P \in r$.
b) Traceu una circumferència que passi per dos punts donats, A i B, i que talli a una altra circumferència donada, $\mathcal{C}$, en punts diametralment oposats.

Problema 11

Donada una circumferència i un punt P, traceu una recta que passi per P i talli a la circumferència en dos punts A i B de manera que $\overline{AP} = 2\overline{BP}$. Discutiu les possibles solucions segons la posició del punt P respecte de la circumferència.

2 Teoria de la proporció

2.1 Coneixements bàsics

2.1.1 Proporció d'un rectangle

Donat un rectangle de costats a i b, es defeneix la *proporció* $p(a,b)$ d'aquest rectangle com el nombre real positiu

$$p(a,b) = \frac{\text{màx } (a,b)}{\text{mín } (a,b)}$$

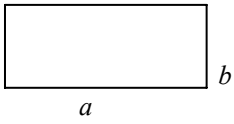


Fig. 2.1

2.1.2 Propietats de la proporció

a) $p(a,b) \geq 1$
b) $p(a,b) = 1 \Leftrightarrow a = b$
c) $p(a,b) = p(b,a)$
d) $p(ka,kb) = p(a,b)$ per a tot k positiu.

2.1.3 Rectangles recíprocs

Donat un rectangle qualsevol *ABCD*, els rectangles *CDEF* i *BCGH* reben el nom de *rectangles recíprocs* del rectangle *ABCD* i s'obtenen traçant una perpendicular a una de les diagonals del rectangle *ABCD* i trobant les seves interseccions amb els perllongaments dels costats del rectangle donat, com es veu a la figura:

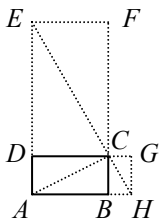


Fig. 2.2

El rectangle *CDEF* es diu *recíproc major* i el rectangle *BCGH recíproc menor*. Aquests dos rectangles tenen la mateixa proporció que el rectangle *ABCD*. En efecte, pel teorema de l'altura

$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{BH} \quad \text{i} \quad \overline{DC}^2 = \overline{AD}\cdot\overline{DE},$$

per tant,

$$\overline{BH} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{AB}} \quad \text{i} \quad \overline{DE} = \frac{\overline{DC}^2}{\overline{AD}}.$$

Aleshores, la proporció del rectangle recíproc menor és

$$p\left(\overline{BC},\overline{BH}\right) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BC}}{\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

i la del recíproc major

$$p\left(\overline{DE},\overline{DC}\right) = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} = \frac{\frac{\overline{DC}^2}{\overline{AD}}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

2.1.4 Rectangles de proporció $\sqrt{n}$

A partir del quadrat de costat 1 i de la igualtat

$$\sqrt{n} = \sqrt{(\sqrt{n-1})^2 + 1}$$

es poden construir rectangles de proporció $\sqrt{n}$.

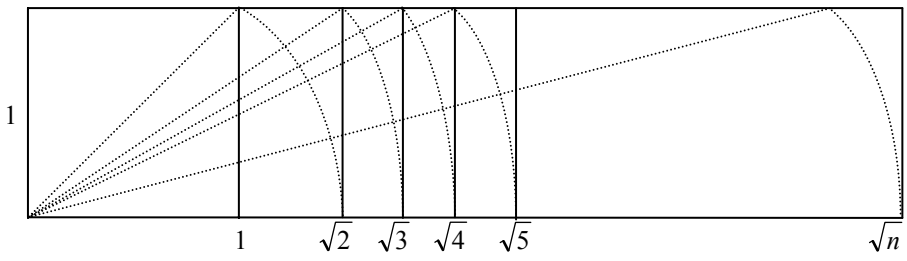
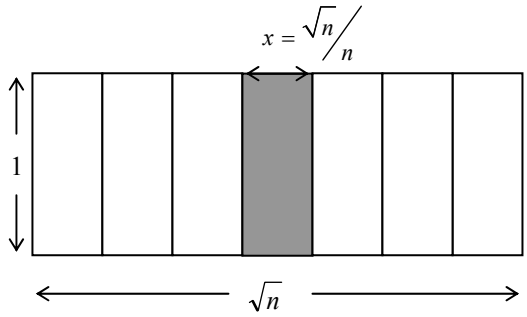


*Fig.*2.3

Aquests rectangles són els únics que es poden dividir en *n* rectangles iguals de la mateixa proporció que el primer:



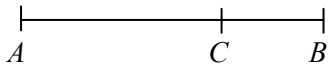
$$p(1,x) = \frac{1}{x} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

*Fig.*2.4

2.1.5 El número d'or

Donat un segment d'extrems A i B i un punt C d'aquest segment, es diu que el punt C divideix el segment $\overline{AB}$ en *secció àuria* si

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$



Com que $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$, tenim

$$\frac{\overline{AC} + \overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

i, per tant,

$$1 + \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Si anomenem x la proporció $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$, aleshores

$$1 + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \qquad (*)\,.$$

Aquesta equació té per solucions

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ i } \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

però $x = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ és positiu, per tant,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398874989484820458683436564...$$

aquest número rep el nom de *número d'or* i es denota per ϕ. Així doncs,

aquest número rep el nom de *número d'or* i es denota per ϕ. Així doncs,

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

i per $(*)$

$$\phi^2 = \phi + 1 \Leftrightarrow \phi^{-1} = \phi - 1$$

2.1.6 Divisió àuria d'un segment

Donat el segment d'extrems A i B, fem dues circumferències: la primera, C_1, tangent al segment $\overline{AB}$ en el punt B i de radi $r = \frac{\overline{AB}}{2}$ i la segona, C_2, de centre en A i radi $\overline{AF}$, com es veu a la figura següent:

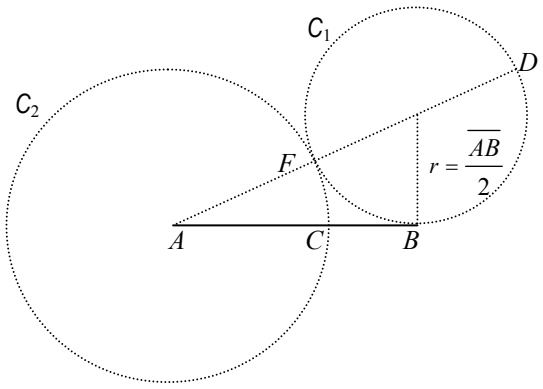


Fig. 2.5

Si C és el punt d'intersecció de C_2 amb $\overline{AB}$, per les propietats de la potència d'un punt respecte d'una circumferència, tenim que

$$\mathrm{Pot}\left(A,\ \mathsf{C}_1\right) = \overline{AB}^{\,2} = \overline{AF}\cdot\overline{AD} = \overline{AF}\cdot\left(\overline{AF}+\overline{FD}\right) = \overline{AF}^{\,2} + \overline{AF}\cdot\overline{AB} = \overline{AC}^{\,2} + \overline{AC}\cdot\overline{AB}$$

i per tant,

$$\overline{AB}\cdot(\overline{AB}-\overline{AC}) = \overline{AC}^{\,2} \Leftrightarrow\ \overline{AB}\cdot\overline{CB} = \overline{AC}^{\,2} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

d'on es dedueix que el punt C divideix el segment $\overline{AB}$ en secció àuria.

2.2 Problemes resolts

Problema 1

a) Demostreu que en un pentàgon regular la diagonal i el costat estan en proporció àuria.

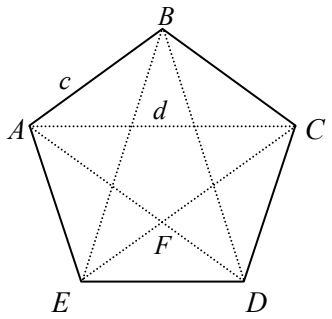


Fig. 2.6

b) Comproveu que dues diagonals del pentàgon es tallen en un punt que correspon a la divisió àuria de la diagonal.
c) Construïu un pentàgon regular partint de la seva diagonal, *d*.

Resolució

a) Tenint en compte que en un pentàgon regular cada diagonal és paral·lela a un dels costats del pentàgon, resulta que els triangles *ABC* i *EFD* són semblants, i per tant, els seus costats són proporcionals. En particular

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EC} - \overline{FC}}$$

i com que *ABCF* és un paral·lelogram $\overline{FC} = \overline{AB} = c$ i la igualtat anterior es pot reescriure així:

$$\frac{d}{c} = \frac{c}{d-c} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \phi$$

b) Les dues diagonals $\overline{AD}$ i $\overline{EC}$ es tallen en el punt *F* i per l'apartat a)

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = \frac{c}{d-c} = \phi.$$

c) Construcció:
   1. Fem la divisió àuria d'un segment $\overline{AD}$ de longitud *d*.
   2. Si *F* és el punt del segment $\overline{AD}$ que fa la seva divisió àuria, llavors $c = \overline{AF}$ és el costat del pentàgon.
   3. Ara només hem de fer un triangle isòsceles de costats *d*, *d* i *c*, i sobre cada un dels dos costats iguals fer-hi un altre triangle isòsceles de costats *c*, *c* i *d*.

Problema 2

Donat un trapezi de vèrtexs *A, B, D* i *E*, sigui *F* la intersecció de les dues diagonals i *C*, *G* i *L* els punts de la figura:

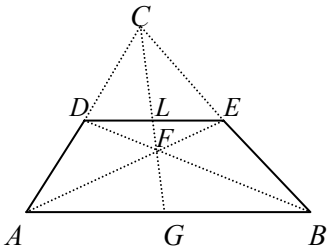


Fig. 2.7

a) Demostreu que $\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{LE}}{\overline{DL}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{AG}}$.

b) Demostreu que $\overline{CG}$ és una mediana del triangle *ABC*.

Resolució

a) Els triangles *AFG* i *LFE* són semblants així com els triangles *FGB* i *DLF*, per tant,

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{LE}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{LF}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{DL}} \Rightarrow \frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{LE}}{\overline{DL}}.$$

Anàlogament, de la semblança dels triangles *ACG* i *CDL* i del triangles *CGB* i *CLE* deduïm

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{DL}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{LE}} \Rightarrow \frac{\overline{LE}}{\overline{DL}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{AG}}$$

b) Per l'apartat a)

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{AG}} \Rightarrow \overline{AG}^2 = \overline{GB}^2 \Rightarrow \overline{AG} = \overline{GB}.$$

per tant, el segment $\overline{CG}$ és una mediana del triangle *ABC*.

Problema 3

Quina proporció té un rectangle d'àrea $\sqrt{2}$ si un costat té per longitud el número d'or, ϕ. Quant val la seva diagonal?

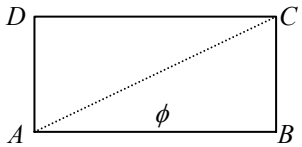


Fig. 2.8

Resolució:

Si $\overline{AB} = \phi$ i l'àrea és $\sqrt{2}$, aleshores

$$\phi \cdot \overline{BC} = \sqrt{2} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\phi}.$$

Per tant, la proporció d'aquest rectangle serà

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\phi}{\sqrt{2}/\phi} = \frac{\phi^2}{\sqrt{2}} = \frac{(1+\phi)\sqrt{2}}{2}$$

i la seva diagonal

$$\overline{AC} = \sqrt{\phi^2 + \frac{2}{\phi^2}} = \sqrt{\phi + 1 + 2(\phi - 1)^2} = \sqrt{-3\phi + 3 + 2\phi^2} = \sqrt{-3\phi + 3 + 2(1+\phi)} = \sqrt{5 - \phi}\,.$$

Problema 4

Demostreu que un rectangle té proporció $\sqrt{3}$ si i només si aquest rectangle s'obté com a reunió de tres vegades el seu rectangle recíproc menor.

Resolució

Considerem el rectangle *ABCD* de proporció $\sqrt{3}$ i sigui *BHGC* el seu recíproc menor

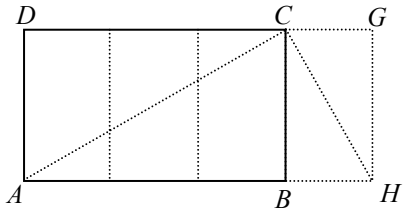


Fig. 2.9

Pel teorema de l'altura

$$\overline{BH} = \frac{\overline{BC}^{\,2}}{\overline{AB}}.$$

Per tant, si la proporció $p\left(\overline{AB},\ \overline{BC}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \sqrt{3}$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}^{\,2}/\,\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}^{\,2}}{\overline{BC}^{\,2}} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

i podem afirmar que el rectangle *ABCD* és la reunió de tres rectangles iguals al *BHGC*.

Recíprocament, si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = 3$, llavors

$$\overline{AB} = 3\overline{BH} = 3\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB}^2 = 3\overline{BC}^2$$

i per tant

$$p\left(\overline{AB},\ \overline{BC}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \sqrt{3}\ .$$

Problema 5

Si *G* és el baricentre d'un triangle *ABC*, demostreu que l'àrea del triangle *AGB* és un terç de la del triangle *ABC*.

Resolució

Recordem que el baricentre és el punt on es tallen les tres medianes.
Com que els triangles *ABG* i *ABC* tenen la mateixa base $\overline{BC}$, el problema quedarà demostrat si provem que l'altura *h* del triangle *ABG* és un terç de l'altura *H* del triangle *ABC*. Per això, observem que els triangles *CDF* i *GDE* són semblants perquè tenen dos angles iguals: el $\widehat{D}$ per comú i el $\widehat{E} = \widehat{F} = 90º$.

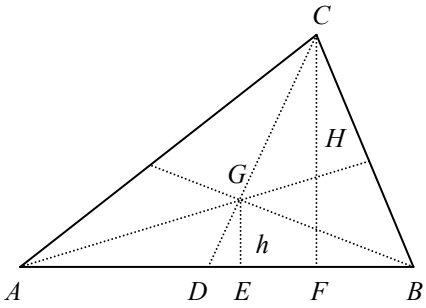


Fig. 2.10

Per tant,

$$\frac{\overline{GD}}{\overline{CD}} = \frac{h}{H}$$

i tenint en compte que $\overline{GD} = \dfrac{1}{3}\overline{CD}$ (propietat de les medianes d'un triangle), resulta

$$h = \frac{1}{3}H.$$

Problema 6

D'un trapezi de vèrtexs *A, B, C* i *D*, se sap que l'àrea del triangle *ABC* és tres vegades l'àrea del triangle *BCD*.

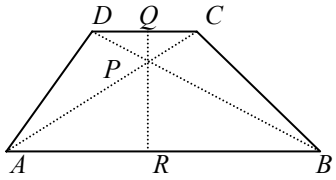


Fig. 2.11

a) Quina relació hi ha entre les bases d'aquest trapezi?
b) Demostreu que les altures *PR* i *PQ* dels triangles *ABP* i *PCD* també satisfan aquesta relació. Això també és veritat per a les àrees?
c) Feu la construcció d'aquest trapezi si se'n coneixen l'altura i les dues diagonals.

Resolució

a) $\overline{QR}$ és l'altura del triangle *ABC* sobre la base $\overline{AB}$ i també l'altura del triangle *BCD* sobre la base $\overline{CD}$, per tant

$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{QR}}{2}=3\frac{\overline{CD}\cdot\overline{QR}}{2}\Leftrightarrow\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=3.$$

b) De la semblança dels triangles *DQP* i *BRP* i dels triangles *APB* i *CPD*, resulta

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{DP}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=3.$$

D'altra banda,

$$\frac{\text{Àrea } ABP}{\text{Àrea } PCD}=\frac{\frac{\overline{AB}\cdot\overline{PR}}{2}}{\text{Àrea } PCD}=\frac{\frac{3\overline{CD}\cdot 3\overline{PQ}}{2}}{\text{Àrea } PCD}=\frac{9(\text{Àrea } PCD)}{\text{Àrea } PCD}=9=3^2$$

i podem afirmar que la relació de l'apartat a) no és certa per a les àrees.

Nota: En general, si dos triangles són semblants amb proporció *p*, les seves àrees tenen proporció p^2.

c) Construcció:
Si *h* és l'altura del trapezi i d_1 i d_2 les seves diagonals,
1. Dibuixem un segment de longitud *h* i el dividim en quatre parts iguals (per exemple, per Tales).
2. Siguin r_1, r_2 i r_3 tres rectes paral·leles tals que $d(r_1,r_2)=\frac{h}{4}$ i $d(r_1,r_3)=h$.

3. Fixem un punt A de r_3. La intersecció de la circumferència amb centre A i radi d_1 amb la recta r_1 ens dóna el vèrtex C del trapezi.
4. La intersecció del segment $\overline{AC}$ amb la recta r_2 és el punt P.
5. La intersecció de la circumferència amb centre P i radi $\frac{d_2}{4}$ amb la recta r_1 dóna el vèrtex D.
6. Finalment, la intersecció de la recta que passa per D i P amb la recta r_3 ens dóna el quart vèrtex, B, del trapezi.

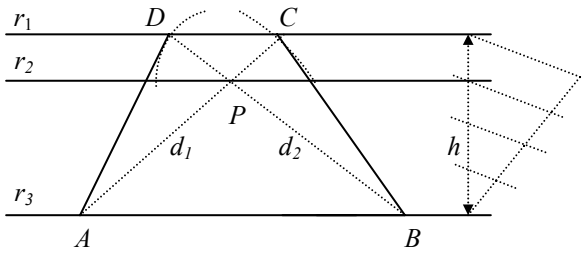


Fig. 2.12

Problema 7

Volem partir un terreny que té forma de trapezi amb una tanca paral·lela als costats paral·lels del terreny i de forma que la part de la base gran tingui àrea doble que l'altra.

a) Calculeu la longitud de la tanca i expliqueu com es pot construir aquesta longitud amb regla i compàs a partir de les mesures del terreny.
b) Doneu les distàncies de la tanca als costats paral·les del terreny.

Resolució

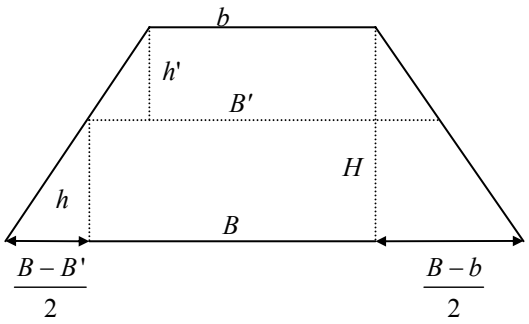


Fig. 2.13

Per la condició del problema

$$\frac{B+B'}{2}h = 2\left[\frac{B'+b}{2}(H-h)\right]$$

o el que és equivalent

$$\frac{B+B'}{2(B'+b)} = \frac{H}{h} - 1\,.$$

D'altra banda, de la semblança dels triangles rectangles d'altures H i h respectivament, tenim

$$\frac{H}{h}=\frac{(B-b)/2}{(B-B')/2}=\frac{B-b}{B-B'}.$$

Per tant,

$$\frac{B+B'}{2(B'+b)}=\frac{B-b}{B-B'}-1\Leftrightarrow\frac{B+B'}{2(B'+b)}=\frac{B'-b}{B-B'}\Leftrightarrow$$

$$B'=\frac{\sqrt{B^2+2b^2}}{3}\sqrt{3}.$$

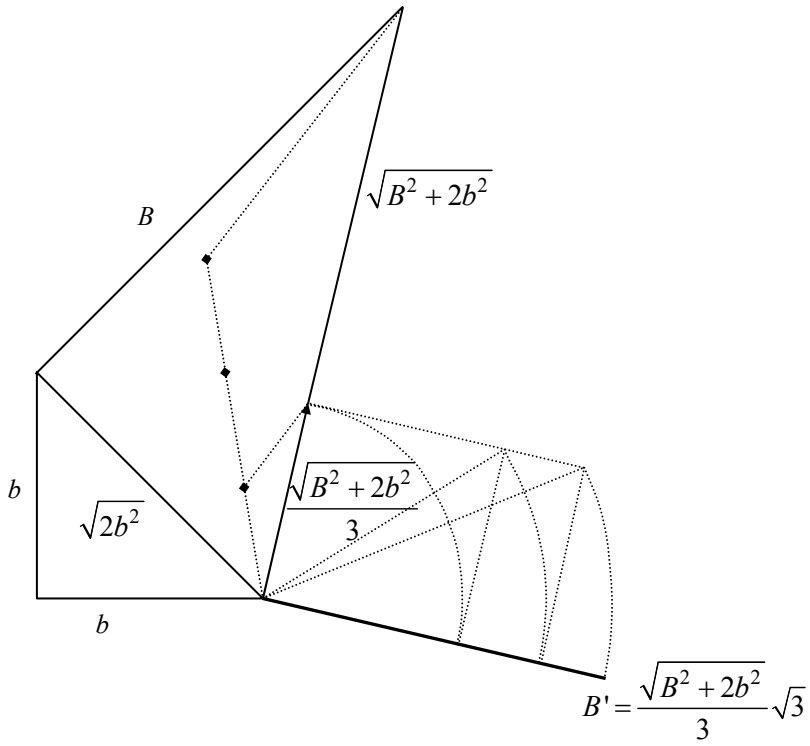


Fig. 2.14

c) Les distàncies de la tanca als costats paral·leles del terreny són les altures h i h' de les dues parts en que queda dividit el terreny

$$h=H\frac{B-B'}{B-b},\quad h'=H-h=H\frac{B'-b}{B-b}.$$

Problema 8

Donat un pentàgon regular de vèrtexs *A, B, C, D* i *E*, es considera el punt, *P*, d'intersecció dels prolongaments dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{ED}$

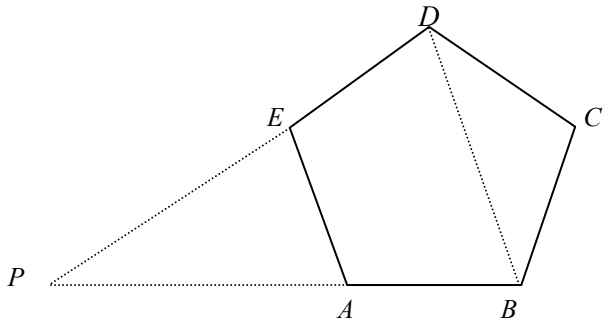


Fig. 2.15

a) Demostreu que *A* és la divisió àuria del segment $\overline{PB}$.
b) Demostreu que el triangle *PBE* és isòsceles.

Resolució

a) En un pentàgon regular, la diagonal $\overline{DB}$ és paral·lela al costat $\overline{EA}$, per tant els triangles *APE* i *BPD* són semblants i

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AE}}.$$

A més, com que la diagonal i el costat del pentàgon tenen proporció àuria (Problema 1)

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AE}} = \phi \Rightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \phi$$

i, per tant, *A* divideix al segment $\overline{PB}$ de forma àuria.

b) Per demostrar que el triangle *PBE* és isòsceles provarem que els costats $\overline{EB}$ i $\overline{PE}$ són iguals. En efecte, com que $\overline{EB}$ és una diagonal del pentàgon i $\overline{AB}$ un costat, tenim

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}} = \phi \Leftrightarrow \overline{EB} = \overline{AB} \cdot \phi$$

i per l'apartat a)

$$\overline{PE} = \overline{PA} = \overline{AB} \cdot \phi .$$

Així doncs, $\overline{EB} = \overline{PE}$ i el triangle *PBE* és isòsceles.

Problema 9

Considereu el triangle rectangle *ABC* de costats $\overline{AB}=4,\ \overline{BC}=3$ i $\overline{AC}=5$. Sigui *O* la intersecció de la bisectriu de l'angle *C* amb $\overline{AB}$ i *P* i *Q* les interseccions d'aquesta bisectriu amb la circumferència de centre *O* que passa per *B*.

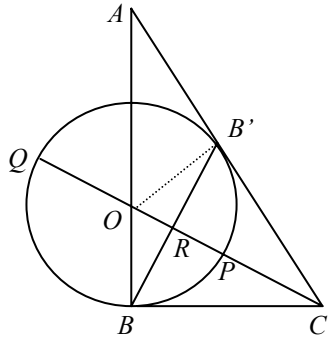


Fig. 2.16

a) Justifiqueu que aquesta circumferència és tangent a la hipotenusa del triangle *ABC* en el punt *B'* i que la divideix en dos segments de longituds 2 i 3.
b) Calculeu el radi d'aquesta circumferència.
c) Calculeu les proporcions: $\frac{\overline{AO}}{\overline{OB}}$ i $\frac{\overline{BC}}{\overline{CP}}$.

Resolució

a) Per ser *O* un punt de la bisectriu de l'angle $\hat{C}$, la distància de *O* al costat $\overline{BC}$ és igual a la distància de *O* al costat $\overline{AC}$, per tant, la circumferència de centre *O* que passa per *B* és tangent als dos costats de l'angle $\hat{C}$, en particular a la hipotenusa del triangle *ABC*. A més,

$$\overline{B'C}=\overline{BC}=3 \text{ i } \overline{AB'}=\overline{AC}-\overline{B'C}=5-3=2.$$

b) Els triangles *AOB'* i *ABC* són semblants (tenen els angles iguals), per tant,

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{AB'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

i el radi de la circumferència de centre *O* que passa per *B* és

$$\overline{OB}=\overline{OB'}=\overline{AB'}\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=2\frac{3}{4}=\frac{3}{2}.$$

c)

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OB}}=\frac{4-\overline{OB}}{\overline{OB}}=\frac{4-3/2}{3/2}=\frac{5}{3} \text{ i } \frac{\overline{BC}}{\overline{CP}}=\frac{3}{\overline{OC}-\overline{OP}}=\frac{3}{\frac{\sqrt{45}}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi.$$

Problema 10

Siguin A i B dos punts d'una circumferència i P un punt de la recta $R_{A,B}$ des del qual la recta tangent a la circumferència compleix la igualtat

$$d(A,B) = d(P,T)$$

on T és el punt de tangència.

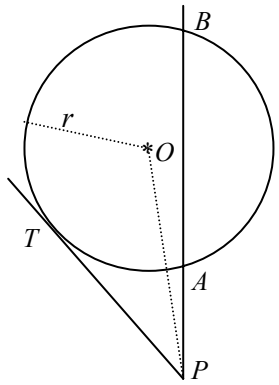


Fig. 2.17

a) Calculeu les proporcions següents:

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{PA}}, \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \text{ i } \frac{\overline{BT}}{\overline{AT}}.$$

b) Doneu una relació entre el radi, r, de la circumferència, la longitud del segment $\overline{AB}$ i la distància de P al centre, O, de la circumferència.

c) Donada una circumferència i una recta, r, secant a la circumferència en dos punts, A i B, determineu un punt $P \in r$, tal que si T és el punt de tangència d'une de les tangents a la circumferència des de P, aleshores

$$d(A,B) = d(P,T).$$

Resolució

a) Per les propietats de la potència d'un punt respecte d'una circumferència

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 \quad (*)$$

i, per tant,

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA} + \overline{AB}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} + 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \phi .$$

D'altra banda, per $(*)$

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PT}^2}{\overline{PA}^2} = \left(\frac{\overline{PT}}{\overline{PA}}\right)^2 = \phi^2 = 1 + \phi\,.$$

Finalment, com que els triangles *PBT* i *PTA* són semblants (tenen els angles iguals)

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \phi\,.$$

b) Sabem que la potència d'un punt respecte d'una circumferència és igual a la diferència entre el quadrat de la seva distància al centre de la circumferència i el quadrat del radi. Per tant,

$$\overline{AB}^2 = d(A,B)^2 = d(P,T)^2 = \overline{PT}^2 = \mathrm{Pot}(P,\mathsf{C}) = d(P,O)^2 - r^2.$$

c) Si $d = d(P,O)$, per l'apartat anterior

$$d^2 = r^2 + \overline{AB}^2$$

d'on resulta que *d* és la hipotenusa del triangle rectangle de catets *r* i $\overline{AB}$, i en conseqüència, el punt *P* es pot obtenir fent la intersecció de la circumferència de centre *O* i radi *d* amb la recta $R_{A,B}$.

Problema 11

Siguin C i C' dues circumferències tangents interiors en un punt *P* i tals que el radi de C és el doble del radi de C'. Proveu que qualsevol recta que passi per *P*, diferent de la tangent comuna a C i C', determina en aquestes circumferències dues cordes que tenen proporció 2.

Resolució

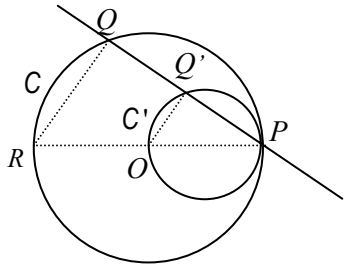


Fig. 2.18

Com que el radi de la circumferència C és el doble del radi de C' i aquestes dues circumferències són tangents interiors, aleshores el centre *O* de C és un punt de la circumferència C', d'on s'obté que els triangles *PQR* i *PQ'O* són semblants (tenen l'angle $\hat{P}$ igual per comú i els angles $\hat{Q} = \hat{Q}' = 90^\circ$) i, per tant,

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PQ'}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PO}} = 2.$$

2.3 Problemes proposats

Problema 1

Construïu amb regle i compàs un trapezi rectangle si es coneix la base gran B i se sap que

$$\frac{B}{d} = \frac{d}{h} = \phi$$

on d és una diagonal i h l'altura del trapezi.

Problema 2

Construïu un rectangle de proporció àuria que tingui un perímetre de 20 cm i calculeu-ne l'àrea.

Problema 3

Estudieu la proporció entre els perímetres, les àrees i les diagonals dels rectangles recíprocs d'un rectangle de costats a i b.

Problema 4

Donat un pentàgon regular $ABCDE$, considereu el punt P d'intersecció de la bisectriu de l'angle $\widehat{BAC}$ amb el costat $\overline{BC}$.

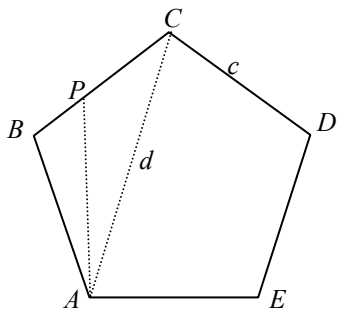


Fig. 2.19

a) Doneu una relació entre les àrees dels triangles APC i ABP i els segments $\overline{PC}$ i $\overline{BP}$?
b) Com divideix el punt P al costat $\overline{BC}$ del pentàgon?

Problema 5

Dividiu un triangle rectangle en dues parts d'àrea igual,
a) Per una recta perpendicular a la hipotenusa.
b) Per una recta perpendicular a un catet.

Problema 6

Considereu un pentàgon regular i el que determinen les seves diagonals:

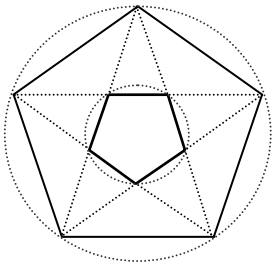


Fig. 2.20

Per a aquests dos pentàgons, calculeu la proporció entre:
a) Els seus costats.
b) Les seves diagonals.
c) Les seves àrees.

Problema 7

Calculeu quina proporció té un rectangle de costats a i b, tal que quan li retallem un quadrat màxim i al rectangle que queda li tornem a retallar un altre quadrat màxim, obtenim un rectangle que té la mateixa proporció que l'inicial, si
a) $2a < b < 3a$
b) $a < b < 2a$

Problema 8

Considereu el triangle ABC i siguin A', B' i C' els punts mitjans dels seus costats.

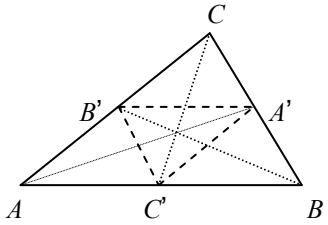


Fig. 2.21

Raoneu si els enunciats següents són falsos o vertaders:
a) Els triangles ABC i $A'B'C'$ són semblants i la raó de proporció entre els seus costats és 2.
b) Els dos triangles tenen el mateix baricentre.
c) L'ortocentre d'un d'ells coincideix amb el circumcentre de l'altre.

Problema 9

a) Demostreu que dues diagonals d'un pentàgon regular concurrents en un vèrtex divideixen l'angle intern del pentàgon en tres angles iguals.

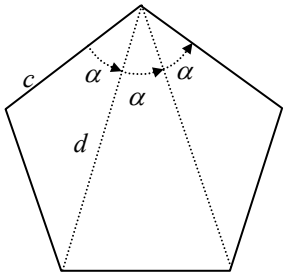


Fig. 2.22

b) Calculeu en funció del costat, *c*, l'àrea de les tres regions en que queda dividit el pentàgon

Problema 10

Siguin $ABCD$ i $A'BCD'$ dos rectangles amb $\overline{AD} = \overline{AA'}$

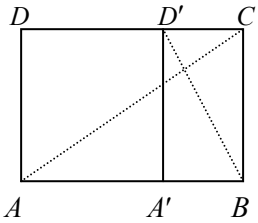


Fig. 2.23

Justifiqueu que si les dues diagonals $\overline{AC}$ i $\overline{BD'}$ són perpendiculars, aleshores la proporció d'aquests dos rectangles és àuria.

Problema 11

Donat un segment $\overline{AC}$, construïu un quadrilàter *ABCD* inscriptible en una circumferència, tal que les seves diagonals siguin perpendiculars, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \phi$ i l'angle $\widehat{D} = 45º$.

3 Matrius. Determinants. Espais vectorials

3.1 Coneixements bàsics

3.1.1 Matrius

Una *matriu* $m \times n$ és un conjunt de $m \cdot n$ nombres reals distribuïts en m files i n columnes que escriurem de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Diem que una matriu és *quadrada* si té el mateix nombre de files que de columnes: $m = n$. En una matriu quadrada, els elements a_{ii} formen la *diagonal principal* de la matriu. La matriu quadrada $n \times n$ en què els elements a la diagonal principal són 1 i 0 a la resta s'anomena *matriu identitat* o bé *matriu unitat*:

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Donada una matriu $m \times n$, A, la seva matriu *transposada* és la matriu $n \times m$, que s'obté d'intercanviar files per columnes, i la designarem A^t:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matriu quadrada es diu *simètrica* quan $A = A^t$.

3.1.2 Suma de matrius

Donades dues matrius $m \times n$, A i B, la seva *suma* és una nova matriu $m \times n$, $A + B$, els elements de la qual s'obtenen sumant els dos elements corresponents a les matrius inicials, tal com s'indica a continuació:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Propietats

La suma de matrius:

1. És associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. És commutativa: $A + B = B + A$
3. Té element neutre, que és la matriu 0, que té tots els elements iguals a 0, i satisfà que $A + 0 = 0 + A = A$
4. Té element oposat, és a dir, si A és una matriu qualsevol, podem prendre $-A$, formada pels oposats de cada un dels elements de la matriu A, que satisfà $A + (-A) = 0$

3.1.3 Producte d'un escalar per una matriu

Donada una matriu $m \times n$, A, i un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, el *producte* de l'escalar per la matriu, $\lambda \cdot A$, és una matriu $m \times n$, els elements de la qual s'obtenen de multiplicar cada element de la matriu A per l'escalar λ, tal com s'indica a continuació:

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Generalment, si no hi ha confusió, el punt que indica el producte d'un escalar per una matriu es pot ometre.

Propietats

El producte d'un escalar per una matriu:

1. És associatiu respecte als escalars: $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$
2. Té element neutre: $1 \cdot A = A$
3. És distributiu respecte a la suma de matrius: $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
4. És distributiu respecte a la suma d'escalars: $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

3.1.4 Producte de matrius

Donades una matriu $m \times n$, A, i una altra matriu $n \times k$, B, el *producte* d'aquestes dues matrius, $A \cdot B$, és una matriu $m \times k$, on cada element de la fila i i la columna j s'obté de sumar els productes dels elements de la fila i de la matriu A amb els elements de la columna j de la matriu B. És a dir:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix} = C$$

on $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ per a cada $i = 1,\ldots,m$ i $j = 1,\ldots,k$.

Propietats

El producte de matrius satisfà les propietats següents, tenint en compte que cada matriu ha de tenir el nombre de files i columnes convenient per poder realitzar els productes:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ i $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

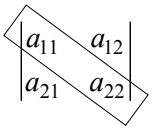
Cal destacar que, en general, el producte de matrius no és commutatiu. Si no hi ha confusió, el punt que indica el producte de matrius es pot ometre.

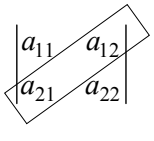
3.1.5 Determinant d'una matriu quadrada 2×2 i 3×3

Donada una matriu 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el seu *determinant* es defineix per l'expressió $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, i el denotarem per $\det A$ o bé $|A|$, de manera que:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

És convenient observar que el valor del determinant s'obté com a diferència dels productes dels elements de la matriu triats de la manera següent:

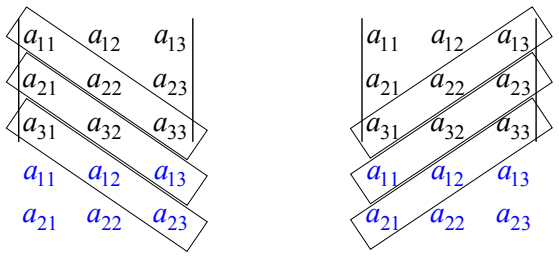




Donada una matriu 3×3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, el seu *determinant* es defineix com:

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Aquesta fórmula per al càlcul del determinant és coneguda com a *regla de Sarrus*. És convenient observar que el determinant s'obté a partir dels productes que s'assenyalen a continuació, sumant els de l'esquerra i restant els de la dreta:



3.1.6 Menor complementari i adjunt

Donada una matriu 3×3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, s'anomena *menor complementari* α_{ij} d'un element a_{ij} el determinant 2×2 que s'obté quan se suprimeixen els tots elements de la fila *i* i la columna *j* de la matriu *A*.

Exemple:

El menor complementari del terme a_{32} és:

$$\alpha_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

El resultat de multiplicar el menor complementari de l'element a_{ij} per $(-1)^{i+j}$ s'anomena *adjunt* d'aquest element, i el denotarem per A_{ij}. Així, tenim $A_{ij}=(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ i, seguint amb l'exemple anterior, l'adjunt del terme a_{32} és:

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\alpha_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Propietats

1. $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$, essent *A* i *B* són dues matrius quadrades 2×2 o 3×3.
2. $\det A^t=\det A$, on *A* és una matriu quadrada 2×2 o 3×3.
3. $\det Id_n=1$ per a $n=2,3$.
4. Si una matriu té dues files o dues columnes iguals, el valor del seu determinant és 0.
5. Si intercanviem dues files o dues columnes, el valor del determinant canvia de signe. Ho escrivim per una matriu 3×3 intercanviant la segona i la tercera columnes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6. Si multipliquem una fila, o una columna, per un escalar, el valor del determinant també queda multiplicat per aquest escalar. Per exemple, per a una matriu 2×2, en multiplicar la segona fila per $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

7. El valor d'un determinant no varia si substituïm una fila, o una columna, per ella mateixa més un múltiple d'una altra fila, o una altra columna. Per exemple:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{11} & a_{32} + \lambda a_{12} & a_{33} + \lambda a_{13} \end{vmatrix}$$

8. El valor d'un determinant d'una matriu 3×3 és igual a la suma dels productes dels elements d'una fila, o una columna, pels seus adjunts corresponents. Per exemple:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

3.1.7 Rang d'una matriu

En una matriu $m\times n$, A, s'anomena *menor d'ordre k* de la matriu A cada un dels determinats de les matrius quadrades que resulten de suprimir $n-k$ files i $m–k$ columnes de A.

Exemple:

Si considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, només li podem considerar menors d'ordre 1 i 2, ja que aquesta matriu només té dues files. Els seus menors d'ordre 2 són:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Diem que el *rang d'una matriu* $m\times n$, A, és r si existeix un menor d'ordre r diferent de zero i tots els menors d'ordre superior que s'obtenen orlant aquest menor, és a dir, menors que continguin aquest menor d'ordre r, són zero.

3.1.8 Matriu inversa

Donada una matriu quadrada $n\times n$, A, es diu que admet *inversa* si existeix una matriu, que anomenarem A^{-1}, tal que

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = Id_n$$

La matriu inversa d'una matriu A es pot calcular sempre que el determinant de A sigui diferent de zero. Així tenim que, si $\det A \neq 0$, aleshores:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}^t.$$

3.1.9 Espai vectorial

Un conjunt $E \neq \varnothing$ té estructura d'*espai vectorial* sobre el cos dels nombres reals, $\mathbb{R}$, si hi ha definides dues operacions, una d'interna anomenada *suma* que representem per "+" i una altra d'externa anomenada *producte* que representem per "·", definides per:

$$\begin{aligned} + &: E \text{x} E \to E & \cdot &: \mathbb{R} \text{x} E \to E \\ &(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} & &(\lambda, \boldsymbol{y}) \to \lambda \cdot \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

i que satisfan les propietats següents:

1. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ per a tots els elements $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ de E.
2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ a tots els elements $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$.
3. Existeix un element $\mathbf{0} \in E$ tal que $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.
4. Per a cada $\boldsymbol{x} \in E$, existeix un element $-\boldsymbol{x} \in E$ tal que $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.

   Per tenir aquestes quatres propietats amb l'operació suma, el conjunt E té estructura de grup abelià.
5. $\lambda \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \lambda \cdot \boldsymbol{y}$ per a tots $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ i per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$.
6. $(\lambda + \mu) \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \mu \cdot \boldsymbol{x}$ per a tot $\boldsymbol{x} \in E$ i per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
7. $(\lambda\mu) \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{x})$ per a tot $\boldsymbol{x} \in E$ i per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
8. $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ per a tot $\boldsymbol{x} \in E$.

A partir d'ara els elements de E els anomenem *vectors*. Si no hi ha confusió, el punt que indica el producte d'un escalar per un vector es pot ometre.

Exemples:

- El conjunt $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) / x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ amb les operacions
  - Suma $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...x_n + y_n)$
  - Producte per escalars $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$
- El conjunt de polinomis amb coeficients reals de grau igual o més petit que un determinat natural n.
- El conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres complexos.
- El conjunt de les matrius d'ordre $m \times n$.

En els tres darrers exemples, les operacions suma i producte per escalars són les habituals en aquests conjunts.

3.1.10 Subespai vectorial

Un subconjunt F d'un espai vectorial E és un subespai vectorial de E si $F \neq \varnothing$ i si F té estructura d'espai vectorial amb la suma i el producte induïts per E en F.

En general, un subconjunt $F \subset E$ és un subespai vectorial de E si i només si

- $F \neq \varnothing$.
- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in F \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in F$ per a tots els elements $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in F$.
- $\boldsymbol{x} \in F, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x} \in F$ per a tot $\boldsymbol{x} \in F$ i per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples:

1. E i $\{\mathbf{0}\}$ sempre són subespais vectorials de E i reben el nom de *subespais impropis* o *subespais trivials* de E. Qualsevol subespai vectorial diferent d'aquests dos es diu que és un *subespai propi* de E.
2. A $\mathbb{R}^2$, el conjunt $\{(x,0) / x \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$. En general, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, el conjunt $\{\lambda(a,b) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.
3. A $\mathbb{R}^3$, si (a,b,c), $(a',b',c') \in \mathbb{R}^3$, el conjunt $\{\lambda(a,b,c) + \lambda'(a',b',c') / \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

3.1.11 Combinació lineal. Generadors

Si E és un espai vectorial i $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k \in E$, qualsevol expressió de la forma:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{v}_k \in E \text{ on } \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$$

es diu que és una *combinació lineal* dels vectors $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$. El conjunt de totes les combinacions lineals de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k \in E$:

$$\{\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{v}_k / \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

es representa per $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k \rangle$ i és un subespai vectorial de E que rep el nom de *subespai generat pels vectors* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$, anomenats *vectors generadors* del subespai. Aquest subespai també s'anomena *envolupant lineal* dels vectors $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$.

Exemples:

1. A $\mathbb{R}^2$, el vector $(6,-1)$ és combinació lineal del vectors $(3,1)$ i $(0,3)$
$$(6,-1) = 2(3,1) - 1(0,3)$$
2. En tot espai vectorial E, el vector $\mathbf{0}$ és sempre combinació lineal de qualsevol nombre de vectors $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k \in E$:
$$\mathbf{0} = 0\,\boldsymbol{v}_1 + 0\,\boldsymbol{v}_2 + ... + 0\,\boldsymbol{v}_k$$
3. Si $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k \rangle = E$, aleshores, per tot $\mathbf{w} \in E$, també $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k, \mathbf{w} \rangle = E$
$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{v}_k \Rightarrow \boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{v}_k + 0\mathbf{w}$$

3.1.12 Vectors linealment independents i vectors linealment dependents

Siguin $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ vectors d'un espai vectorial *E*. Es diu que $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ són *linealment independents* si qualsevol combinació lineal d'ells igual al vector $\mathbf{0}$ només és possible si tots els escalars són zero:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$$

Si $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$, amb no tots els escalars iguals a zero, aleshores es diu que els vectors $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ són *linealment dependents*.

Propietats:

1. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ són linealment dependents si i només si un d'aquests vectors és combinació lineal dels altres.
2. Si $\mathbf{0} \in \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k\}$, aleshores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ són linealment dependents.
3. Si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ són linealment dependents, aleshores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, ..., \boldsymbol{v}_l$, amb $k \le l$, també són linealment dependents.
4. Si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ són linealment independents, aleshores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_j$, amb $j \le k$, també són linealment independents.

3.1.13 Base i dimensió d'un espai vectorial

Una *base* d'un espai vectorial *E* és una família de vectors de l'espai que genera *E* i que són linealment independents. Així, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ és una base de *E* si

1. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ són linealment independents.
2. $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n \rangle = E$.

Propietats

1. Totes les bases d'un espai vectorial tenen el mateix nombre de vectors. Aquest nombre comú s'anomena *dimensió* de l'espai vectorial.
2. Si $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ és una base de *E*, llavors qualsevol vector $\boldsymbol{x} \in E$ es pot expressar de manera única com a combinació lineal dels vectors de la base:

   $$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + ... + \lambda_n \boldsymbol{e}_n .$$

   Aquests escalars únics, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, són els *components* o les *coordenades* del vector $\boldsymbol{x}$ a la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ i ho representem per $\boldsymbol{x} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)_B$. Si no hi ha confusió, simplement escrivim $\boldsymbol{x} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

3. Si $\dim E = n$, les proposicions següents són equivalents:
   a) $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ és una base de *E*.
   b) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ generen l'espai *E*, és a dir, $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n \rangle = E$.
   c) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ són linealment independents.

4. Si F és un subespai vectorial de E, aleshores $\dim F \le \dim E$. I tenim que $\dim F = \dim E$, si i només si $F = E$.
5. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ són linealment independents, si i només si el rang de la matriu que té per files o per columnes les coordenades d'aquests vectors és k.

D'ara endavant, només considerarem el cas de $E = \mathbb{R}^n$. En el cas particular de $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \ / \ x,y \in \mathbb{R}\}$ i $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ / \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$, les bases naturals per treballar amb ells són $\{\boldsymbol{e}_1 = (1,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1)\}$ i $\{\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)\}$, respectivament. Aquestes dues bases s'anomenen *bases canòniques*.

Canvi de base en un espai vectorial

Siguin $B_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ i $B_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ dues bases de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$ amb la relació

$$\boldsymbol{v}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta_2 \boldsymbol{e}_2$$

Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, i $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2$ i $\boldsymbol{x} = x'_1 \boldsymbol{v}_1 + x'_2 \boldsymbol{v}_2$, aleshores:

$$\boldsymbol{x} = x'_1 \boldsymbol{v}_1 + x'_2 \boldsymbol{v}_2 = x'_1 (\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2) + x'_2 (\beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta_2 \boldsymbol{e}_2) =$$
$$= x'_1 \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + x'_1 \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + x'_2 \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + x'_2 \beta_2 \boldsymbol{e}_2 = (x'_1 \alpha_1 + x'_2 \beta_1) \boldsymbol{e}_1 + (x'_1 \alpha_2 + x'_2 \beta_2) \boldsymbol{e}_2$$

i per la unicitat dels components d'un vector en una base:

$$x_1 = x'_1 \alpha_1 + x'_2 \beta_1$$
$$x_2 = x'_1 \alpha_2 + x'_2 \beta_2$$

Aquestes equacions es poden escriure matricialment de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \text{ o simplement } \begin{pmatrix} \uparrow \\ \boldsymbol{x} \\ \downarrow \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}_{B_2, B_1} \begin{pmatrix} \uparrow \\ \boldsymbol{x} \\ \downarrow \end{pmatrix}_{B_2}$$

on $\begin{pmatrix} \uparrow \\ \boldsymbol{x} \\ \downarrow \end{pmatrix}_{B_1}$ i $\begin{pmatrix} \uparrow \\ \boldsymbol{x} \\ \downarrow \end{pmatrix}_{B_1}$ són les coordenades del vector $\boldsymbol{x}$ en les bases B_1 i B_2, respectivament, escrites en columna. La matriu $\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}_{B_2, B_1}$ està formada pels vectors de la base B_2, expressats en la base B_1 i s'anomena *matriu del canvi de base*. La seva matriu inversa proporciona la matriu del canvi de base invers.

En general, si $B_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_2\}$ i $B_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ són dues bases de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, llavors:

$$\begin{pmatrix} \uparrow \\ \boldsymbol{x} \\ \downarrow \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \boldsymbol{v}_1 & \dots & \boldsymbol{v}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}_{B_2, B_1} \begin{pmatrix} \uparrow \\ \boldsymbol{x} \\ \downarrow \end{pmatrix}_{B_2} .$$

3.2 Problemes resolts

Problema 1

Feu les operacions indicades a cada apartat amb les matrius:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\\ -5 & 4\end{pmatrix}$$

a) $AB+B^tA^t$
b) BA
c) $\det(AB)$
d) $\det(BA)$

Resolució

a) Calculem el primer producte:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\\ -5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot(-5) & 1\cdot(-2)+2\cdot 1+3\cdot 4\\ 0\cdot 2+(-3)\cdot 3+4\cdot(-5) & 0\cdot(-2)+(-3)\cdot 1+4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 12\\ -29 & 13\end{pmatrix}$$

Ara observem que $B^tA^t=(AB)^t$ i, per tant, tenim:

$$AB+B^tA^t=\begin{pmatrix}-7 & 12\\ -29 & 13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & -29\\ 12 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & -17\\ -17 & 26\end{pmatrix}$$

b) Calculem el producte:

$$BA=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\\ -5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 2\cdot 2+(-2)\cdot(-3) & 2\cdot 3+(-2)\cdot 4\\ 3\cdot 1+1\cdot 0 & 3\cdot 2+1\cdot(-3) & 3\cdot 3+1\cdot 4\\ (-5)\cdot 1+4\cdot 0 & (-5)\cdot 2+4\cdot(-3) & (-5)\cdot 3+4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 10 & -2\\ 3 & 3 & 13\\ -5 & -22 & 1\end{pmatrix}$$

Observem que, efectivament, el producte de matrius no és commutatiu, ja que en aquest cas $AB\neq BA$.

c) Calculem el determinant:

$$\det(AB)=\det\begin{pmatrix}-7 & 12\\ -29 & 13\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-7 & 12\\ -29 & 13\end{vmatrix}=-7\cdot 13-12\cdot(-29)=257$$

d) Calculem el determinant:

$$\det(BA)=\det\begin{pmatrix}2 & 10 & -2\\ 3 & 3 & 13\\ -5 & -22 & 1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 10 & -2\\ 3 & 3 & 13\\ -5 & -22 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot 3\cdot 1+10\cdot 13\cdot(-5)+(-2)\cdot 3\cdot(-22)-(-2)\cdot 3\cdot(-5)-2\cdot 13\cdot(-22)-10\cdot 3\cdot 1=0$$

Problema 2

Calculeu els determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$

Resolució

a) Apliquem la definició de determinant 2×2 i tenim:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 6 - 4\cdot(-5) = 14$$

b) Apliquem directament la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+1-1-1-1 = 0$$

c) Fem el càlcul fent ús de les propietats dels determinants. En primer lloc, substituïm la segona fila per ella mateixa i li restem la primera, i fem el mateix amb la tercera fila, a la qual també li restem la primera. En el segon pas, traiem 3 com a factor comú de la segona fila i 6 de la tercera. Finalment, obtenim un determinant que té dues files iguals i, per tant, el seu valor és 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

També es pot fer aplicant directament la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45+96+84-(105+48+72) = 225-225 = 0$$

d) Fem servir les propietats dels determinants:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1+\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 (2+\lambda)$$

Problema 3

Calculeu el rang de les matrius següents:

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & 13 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ b) $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Resolució

a) Veiem que hi ha un menor d'ordre 2 que és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

i, per tant, el rang $M = 2$, ja que no és possible fer menors d'ordre més gran.

b) Observem que el menor d'ordre 2 assenyalat és diferent de zero:

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{matrix}} & 3 & 1 \\ -1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Els dos únics menors d'ordre 3 que podem orlar amb aquest menor d'ordre 2 són:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix}} & 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}} & 3 & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{matrix}} \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i calculant aquests menors tenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Amb això podem assegurar que la matriu N no té cap menor d'ordre 3 diferent de zero i, per tant, el seu rang és 2.

Problema 4

Calculeu, si és possible, les matrius inverses de les matrius següents:

a) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 14 & -4 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Resolució

a) Només podem calcular la inversa de la matriu A per aquells valors de a, b, c i d que fan que el determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$ sigui diferent de zero. Per aquests valors tenim:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

b) El determinant d'aquesta matriu és zero i, per tant, no admet inversa. El fet que aquest determinant sigui zero es justifica pel fet que la tercera fila d'aquesta matriu és la suma de la primera i la segona files.

c) La matriu C admet inversa ja que $\det C=-1\neq 0$. Fem el càlcul i tenim:

$$C^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 14 & -5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & -4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 14 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t=-\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 5

Estudieu quins dels subconjunts següents de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ són subespais vectorials i, en cas que ho siguin, doneu-ne una base i la dimensió.

a) $A=\{(x,y)\ /\ 5x-2y=0\}$

b) $B=\{(x,y)\ /\ x^2-y^2=1\}$

c) $C=\{(2x-y,3x-5y)\ /\ x,y\in\mathbb{R}\}$

d) $D=\{(x,y,z^2)\ /\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$

e) $E=\{(x,x+2y,x)\ /\ x,y\in\mathbb{R}\}$

Resolució

a) $A=\{(x,y)\ /\ 5x-2y=0\}=\left\{(x,y)\ /\ y=\frac{5}{2}x\right\}=\left\{x\left(1,\frac{5}{2}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\left(1,\frac{5}{2}\right)\right\rangle$

A és el subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$ generat pel vector $\left(1,\frac{5}{2}\right)$. Així, una base de A és: $\left\{\left(1,\frac{5}{2}\right)\right\}$ o també $\{(2,5)\}$ i $\dim A=1$.

b) $B=\left\{(x,y)\ /\ x^2-y^2=1\right\}$ no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$ ja que, per exemple, $(0,0)\notin B$.

c) $C=\{(2x-y,3x-5y)\ /\ x,y\in\mathbb{R}\}=\{x(2,3)+y(-1,-5)/x,y\in\mathbb{R}\}=\langle(2,3),(-1,-5)\rangle$

C és el subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$ generat pels vectors $(2,3)$ i $(-1,-5)$. Com que aquests vectors són linealment independents (observeu que $rang\begin{pmatrix}2&-1\\3&-5\end{pmatrix}=2$ o també que $\frac{2}{-1}\neq\frac{3}{-5}$), resulta que $\{(2,3),(-1,-5)\}$ és una base de C, i la seva dimensió és 2, d'on es dedueix que $C=\mathbb{R}^2$.

d) $D=\left\{\left(x,y,z^2\right)\ /\ x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$, per exemple $(1,1,1)\in D$, però $\lambda(1,1,1)\notin D$ per a tot $\lambda\in\mathbb{R}$ amb $\lambda<0$.

e) $E=\left\{\left(x,x+2y,x\right)\ /\ x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\left(1,1,1\right)+y\left(0,2,0\right)\ /\ x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\left(1,1,1\right),\left(0,2,0\right)\right\rangle$

E és el subespai vectorial generat pels vectors $(1,1,1)$ i $(0,2,0)$ que, a més, són linealment independents; per tant, una base de E és $\{(1,1,1),(0,2,0)\}$ i la seva dimensió és 2.

Problema 6

a) Expresseu el vector $(1,1,1)$ com a combinació lineal dels vectors $(1,-1,-1)$, $(0,1,0)$ i $(0,1,1)$. Es pot expressar de dues formes diferents?

b) Doneu un exemple d'un vector de $\mathbb{R}^3$ que es pugui expressar de dues formes diferents com a combinació lineal d'un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^3$. Què es pot dir d'aquest conjunt de vectors?

Resolució

a) $(1,1,1)=\alpha(1,-1,-1)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,1,1)\Leftrightarrow\begin{cases}1=\alpha & \alpha=1\\ 1=-\alpha+\beta+\gamma\Leftrightarrow & \beta=0\\ 1=-\alpha+\gamma & \gamma=2\end{cases}$

per tant, el vector $(1,1,1)$ només es pot expressar d'una manera com a combinació lineal dels vectors $(1,-1,-1)$, $(0,1,0)$ i $(0,1,1)$:

$$(1,1,1)=1(1,-1,-1)+0(0,1,0)+2(0,1,1)$$

En realitat, qualsevol vector de $\mathbb{R}^3$ es pot expressar de manera única com a combinació lineal d'aquests vectors ja que formen una base per ser tres vectors linealment independents en un espai vectorial de dimensió 3.

b) Per exemple, si considerem el conjunt de vectors $\{(1,-1,-1),\ (0,1,0),\ (1,0,-1)\}$ i el vector $(2,0,-2)$:

$$(2,0,-2) = 1(1,-1,-1) + 1(0,1,0) + 1(1,0,-1)$$

i també:

$$(2,0,-2) = 3(1,-1,-1) + 3(0,1,0) - 1(1,0,-1)$$

A diferència de l'apartat a), aquí els vectors $(1,-1,-1),\ (0,1,0),\ (1,0,-1)$ no són linealment independents, $(1,0,-1) = 1(1,-1,-1) + 1(0,1,0)$.

Problema 7

Determineu si els vectors d'aquests subconjunts de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ són o no linealment independents. Si són linealment dependents, doneu-ne la relació de dependència. Calculeu-ne també la dimensió i doneu una base de l'espai generat pels vectors de cada un d'aquests conjunts.

a) $A = \{(0,-1),(2,3),(-3,-5)\}$

b) $B = \{(4,3),(4,1)\}$

c) $C = \{(2,1,3),((1,4,3),(3,2,1)\}$

d) $D = \{(1,-1,1),(3,2,1)\}$

Resolució

a) Com que $\mathbb{R}^2$ és un espai vectorial de dimensió 2, no hi pot haver un subconjunt de tres vectors linealment independents i, com que el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, l'espai generat pels tres vectors de A és el mateix que generen els vectors $(0,-1),(2,3)$:

$$\langle (0,-1),(2,3),(-3,-5) \rangle = \langle (0,-1),(2,3) \rangle$$

i aquest subespai té dimensió 2 per tant, serà tot $\mathbb{R}^2$, i una base és $\{(0,-1),(2,3)\}$.

Trobem la relació de dependència dels vectors $(0,-1),(2,3),(-3,-5)$:

$$\alpha(0,-1) + \beta(2,3) + \gamma(-3,-5) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta - 3\gamma = 0 \\ -\alpha + 3\beta - 5\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{3}{2}\gamma \\ \alpha = 3\beta - 5\gamma = -\frac{1}{2}\gamma \end{cases}$$

Així, per a $\gamma = 2 \Rightarrow \alpha = -1,\ \beta = 3$:

$$-1(0,-1) + 3(2,3) + 2(-3,-5) = (0,0).$$

b) Ara tenim un conjunt de dos vectors a $\mathbb{R}^2$. N'hi ha prou que comprovem que el determinant de la matriu formada pels vectors de B és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8 \neq 0$$

Així, podem afirmar que aquests dos vectors de $\mathbb{R}^2$ són linealment independents i que el conjunt *B* és una base de l'espai generat pels seus elements. Aquest subespai, com que té dimensió 2, coincideix amb tot $\mathbb{R}^2$.

c) Veiem que el rang de la matriu formada pels vectors de *C* és 3, ja que el determinant d'aquesta matriu és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -26 \neq 0$$

Això ens permet afirmar que $C = \mathbb{R}^3$ i, per tant, la seva dimensió és 3.

d) Observem que el rang de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és 2, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Així, els dos vectors que formen el conjunt *D* són linealment independents i l'espai que generen té dimensió 2.

Problema 8

Considereu els subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$, $F_1 = \langle (0,1,2),(2,03) \rangle$ i $F_2 = \langle (1,0,-1) \rangle$.

a) Calculeu-ne la dimensió i doneu-ne una base de F_1 i F_2.

b) Demostreu que el conjunt $F_1 + F_2 = \{ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \ / \ \boldsymbol{x}_1 \in F_1, \boldsymbol{x}_2 \in F_2 \}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$. Doneu-ne una base i la seva dimensió.

c) Comproveu que $F_2 = \{ (x,y,z) \ / \ x = -z,\ y = 0 \}$.

Resolució

a) Els dos vectors que generen F_1 són linealment independents; per tant, $\{(0,1,2),(2,03)\}$ és una base de F_1 i $\dim F_1 = 2$. Respecte a F_2, és un subespai vectorial format per tots els múltiples del vector $(1,0,-1)$; així, una base de F_2 és $\{(1,0,-1)\}$ i la seva dimensió és 1.

b) Si $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \in F_1 + F_2$ i $(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) \in F_1 + F_2$, aleshores:

$$(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + (\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2) \in F_1 + F_2 \quad (*)$$

i, per a qualsevol $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda \boldsymbol{x}_1 + \lambda \boldsymbol{x}_2 \in F_1 + F_2 \quad (**)$$

De (*) i (**) es dedueix que $F_1 + F_2$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$. Calculem-ne la dimensió. Si $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in F_1 + F_2$, aleshores:

$$\boldsymbol{x}_1 = \alpha_1(0,1,2) + \beta_1(2,03) \ \text{ i } \ \boldsymbol{x}_2 = \gamma_2(1,0,-1)$$

per determinats α_1, β_1 i $\gamma_2 \in \mathbb{R}$; per tant:

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \alpha_1(0,1,2) + \beta_1(2,03) + \gamma_2(1,0,-1) \Rightarrow F_1 + F_2 \subset \langle (0,1,2),(2,03),(1,0,-1) \rangle$$

Anàlogament, si $\alpha_1(0,1,2) + \beta_1(2,03) + \gamma_2(1,0,-1) \in \langle (0,1,2),(2,03),(1,0,-1) \rangle$

$$\alpha_1(0,1,2) + \beta_1(2,03) + \gamma_2(1,0,-1) = [\alpha_1(0,1,2) + \beta_1(2,03)] + \gamma_2(1,0,-1) \in F_1 + F_2 .$$

Així, doncs:

$$F_1 + F_2 = \langle (0,1,2),(2,03),(1,0,-1) \rangle$$

i com que $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, una base de $F_1 + F_2$ és el conjunt $\{(0,1,2),(2,03),(1,0,-1)\}$ i la dimensió d'aquest subespai és $3 = \dim \mathbb{R}^3$; per tant, $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.

c)

$$\begin{aligned} F_2 &= \langle (1,0,-1) \rangle = \{ \lambda(1,0,-1) \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ (\lambda,0,-\lambda) \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (x,y,z) \ / \ x = \lambda, y = 0, z = -\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ (x,y,z) \ / \ x = -z, \ y = 0 \} \end{aligned}$$

Problema 9

Si el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ té components $(2,1,3)$ en la base $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, trobeu les coordenades de $\boldsymbol{x}$ en la base $B' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, si sabeu que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 &= -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

Resolució

En aquest cas:

$$\begin{pmatrix} \uparrow \\ \boldsymbol{x} \\ \downarrow \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} \uparrow \\ \boldsymbol{x} \\ \downarrow \end{pmatrix}_{B'} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{B'}$$

i això es pot resoldre com un sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{B'} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2\alpha + \beta - \gamma \\ 1 = 3\alpha + 4\beta + 2\gamma \\ 3 = -\alpha + \beta + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -5/2 \\ \beta = 15/4 \\ \gamma = -13/4 \end{cases}$$

o bé operant amb matrius:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&4&2\\-1&1&1\end{pmatrix}_B\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}_{B'}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&4&2\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\Leftrightarrow-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&-2&6\\-5&1&-7\\7&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-5/2\\15/4\\-13/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}.$$

Problema 10

Demostreu que els vectors $(-1,-1,0)$, $(-1,0,1)$ i $(1,1,1)$ formen una base de $\mathbb{R}^3$. Trobeu les matrius de canvi de base entre aquesta i la base canònica i, fent-ne ús, calculeu els components en l'altra base del vector $(1,2,3)$, expressat en la base canònica i $(2,0,1)$ expressat en la nova base.

Resolució

Observem que $\begin{vmatrix}-1&-1&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$. Així, tenim que aquests tres vectors són linealment independents i, per tant, $B_N=\{(-1,-1,0),\ (-1,0,1),\ (1,1,1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$. La matriu del canvi de base que passa vectors de base nova, B_N, a base canònica, B_C, serà:

$$\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}_{B_N,B_C},\ \text{i es té}\ \begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}_{B_N,B_C}\begin{pmatrix}\uparrow\\\boldsymbol{x}\\\downarrow\end{pmatrix}_{B_N}=\begin{pmatrix}\uparrow\\\boldsymbol{x}\\\downarrow\end{pmatrix}_{B_C}$$

I la seva inversa, que ens permetrà passar de la base canònica a la base nova, serà:

$$\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}_{B_N,B_C}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}_{B_C,B_N}\ \text{i, en aquest cas,}\ \begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}_{B_C,B_N}\begin{pmatrix}\uparrow\\\boldsymbol{x}\\\downarrow\end{pmatrix}_{B_C}=\begin{pmatrix}\uparrow\\\boldsymbol{x}\\\downarrow\end{pmatrix}_{B_N}$$

Així, tenim que:

$$\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}_{B_C,B_N}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}_{B_C}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_{B_N}\ \text{i}\ \begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}_{B_N,B_C}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}_{B_N}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}_{B_C}.$$

Problema 11

Sigui $B_C = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^2$, i siguin $B_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ i $B_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ dues bases de $\mathbb{R}^2$, definides per

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \qquad \boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 \qquad \boldsymbol{v}_2 = -2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$$

Determineu els vectors de $\mathbb{R}^2$ tals que:

a) les coordenades en la base canònica coincideixin amb les coordenades en la base B_1.
b) les coordenades en la base canònica coincideixin amb les coordenades en la base B_2.
c) les coordenades en la base B_1 coincideixin amb les coordenades en la base B_2.

Resolució

Les matrius del canvi de base són:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{B_1,B_C} \text{ i } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}_{B_2,B_C}$$

a) Estem buscant els vectors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_C}$ tals que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{B_1,B_C} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_C}$. Resolent el sistema, tenim:

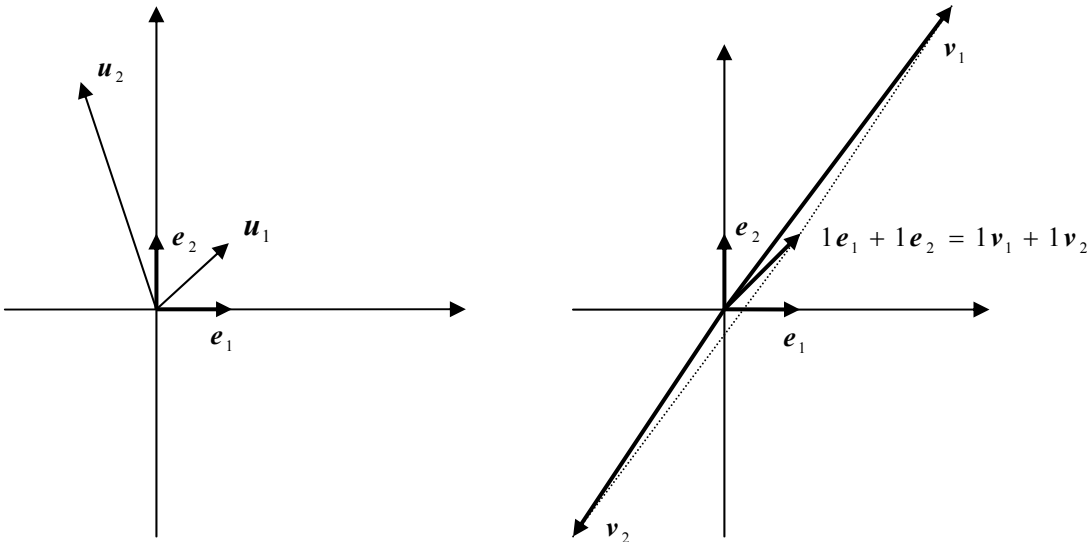
$$\left.\begin{array}{l} x - y = x \\ x + 3y = y \end{array}\right\} x = y = 0$$

L'únic vector que té els mateixos components en una base i en l'altra és el vector **0**.

b) Anàlogament, busquem els vectors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_C}$ tals que $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}_{B_2,B_C} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_C}$. Resolent el sistema, tenim:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = x \\ 4x - 3y = y \end{array}\right\} x = y$$

Així, podem afirmar que tots els vectors del subespai vectorial $\langle (1,1) \rangle$ són vectors que tenen els mateixos components en ambdues bases.



c) Finalment, busquem els vectors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_C}$ tals que les seves coordenades en les dues bases B_1 i B_2 siguin les mateixes i, per tant:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{B_1,B_C} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{B_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{B_1,B_C} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}_{B_2,B_C} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{B_2}.$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_C} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}_{B_2,B_C} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{B_2}$$

Resolent el sistema, tenim:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 3\alpha - 2\beta \\ \alpha + 3\beta = 4\alpha - 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ 3\alpha - 6\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{B_1,B_C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'únic vector que té els mateixos components en les dues bases noves és el vector **0**.

Problema 12

a) Justifiqueu que el conjunt $F = \{(x,y,z) \ / \ 3x + y - 3z = 0, y - 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ i doneu-ne una base.
b) Comproveu que $B = \{(1,6,3),(-2,5,0),(0,3,1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ i doneu-ne les matrius de canvi de base. Quines són les coordenades del vector $\boldsymbol{w} = (1,0,1)$ en la base B?
c) Descriviu el subespai vectorial F en la base B.

Resolució

a) Observem que $F=\{(x,y,z)\ /\ 3x+y-3z=0, y-2z=0\}=\{(t,6t,3t)\ /\ t\in\mathbb{R}\}=\langle(1,6,3)\rangle$ i, per tant, F és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensió 1. El conjunt $\{(1,6,3)\}$ és una base de F.

b) El conjunt $B=\{(1,6,3),(-2,5,0),(0,3,1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ ja que

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 6 & 5 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Si anomenem C la base canònica, aleshores tenim que les matrius del canvi de base són:

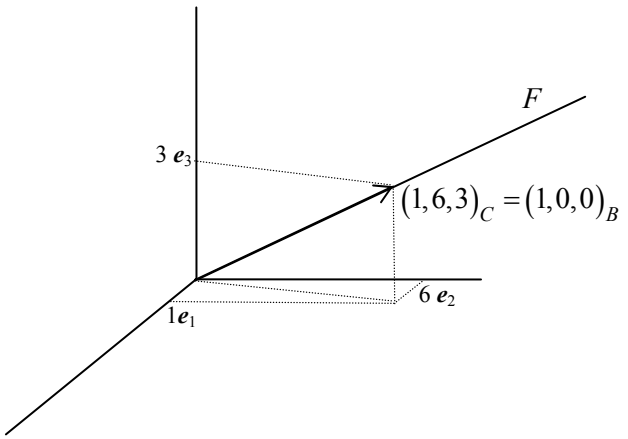
$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 6 & 5 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}_{BC} \text{ i } \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 6 & 5 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}_{BC}^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & -2 & 6\\ -3 & -1 & 3\\ 15 & 6 & -17\end{pmatrix}_{CB}$$

Aleshores, les coordenades del vector $\boldsymbol{w}=(1,0,1)_C$ en la base B són:

$$\begin{pmatrix}-5 & -2 & 6\\ -3 & -1 & 3\\ 15 & 6 & -17\end{pmatrix}_{CB}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}_C=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}_B$$

c) El conjunt F està generat pel primer vector de la base B; per tant, podem expressar-lo molt fàcilment en aquesta base:

$$F=\langle(1,6,3)_C\rangle=\langle(1,0,0)_B\rangle=\{(x,y,z)_B\ /\ y=0, z=0\}$$



3.3 Problemes proposats

Problema 1

Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 0 & 5 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Comproveu que $AB \neq BA$

b) Calculeu $\det A$, $\det A^t$, $\det A^{-1}$, $\det B$, $\det B^t$ i $\det B^{-1}$

c) Calculeu A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$ i $(BA)^{-1}$

Problema 2

Estudieu per a quins valors del paràmetre $\lambda \in \mathbb{R}$ els determinants següents valen 0:

a) $\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & \lambda & \lambda^2\\ 1/\lambda & 1 & \lambda\\ 1/\lambda^2 & 1/\lambda & 1\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}1 & 3 & \lambda\\ 2 & 2 & \lambda\\ 3 & \lambda/4 & 4\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}-15-\lambda & 40 & -14\\ -6 & 16-\lambda & -6\\ -2 & 5 & -3-\lambda\end{vmatrix}$

Problema 3

Calculeu els rangs de les matrius següents:

a) $A=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ -1 & 7\\ 5 & 0\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 3 & 1\\ 2 & -4 & -2 & 6 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$

Problema 4

Estudieu quins dels subconjunts següents de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ són subespais vectorials i, en cas que ho siguin, doneu-ne una base i la dimensió.

a) $A=\{(x,y) \ / \ 2+5x-2y=0\}$

b) $B=\{(2+s,3+t) \ / \ s,t\in\mathbb{R}\}$

c) $C=\{(x,y) \ / \ 3x-2y=0\}$

d) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ y\geq 0\}$

e) $E=\{(3t,-5t)\in\mathbb{R}^2 \ / \ t\in\mathbb{R}\}$

f) $F=\{(x,0,0) \ / \ x\in\mathbb{R}\}$

g) $G=\{(x,y,z) \ / \ 2xy+5x=z\}$

h) $H=\{(x,y,z) \ / \ 3x-2y=\sqrt{2}z\}$

i) $I=\{(s+t,2s-3t,s+t) \ / \ s,t\in\mathbb{R}\}$

j) $J=\langle(2,3,5),(1,1,0),(4,7,15)\rangle$

Problema 5

a) Determineu els valors del paràmetre λ pels quals el vector $(5,1,\lambda)$ pertany al subespai vectorial $F=\langle(2,-1,0),(1,3,-1),(7,0,-1)\rangle$.
b) Determineu els valors del paràmetre α pels quals els vectors $u_1=(1,\alpha,1)$, $u_2=(\alpha,1,1)$ i $u_3=(1,1,\alpha)$ són linealment independents.

Problema 6

Considereu els subconjunts de $\mathbb{R}^3$ següents: $A=\{(x,y,z)\,/\,x+y+z=0\}$ i $B=\{(2t,-3t,t)\,/\,t\in\mathbb{R}\}$.
a) Comproveu que són subespais vectorials. Doneu-ne una base i la dimensió de cada un d'ells.
b) Comproveu que el subespai vectorial *A* inclou el subespai vectorial *B*.
c) Preneu la base del subespai vectorial *A* i completeu-la en una base de $\mathbb{R}^3$.

Problema 7

A $\mathbb{R}^3$ considerem el conjunt $B=\{(1,7,-5),(0,1,-1),(6,8,3)\}$.
a) Comproveu que *B* és una base de $\mathbb{R}^3$.
b) Doneu les coordenades del vector $\boldsymbol{w}=(1,1,1)$ en la base *B*.
c) Quines coordenades té cada un dels vectors de la base canònica en la base *B*?

Problema 8

Considereu a $\mathbb{R}^2$ les bases $B=\{(1,0),(0,1)\}$ i $B'=\{(1,1),(0,1)\}$.
a) Trobeu el conjunt de vectors de $\mathbb{R}^2$ que tenen iguals les dues coordenades en la base B'. Interpreteu geomètricament aquest conjunt.
b) Trobeu el conjunt de vectors de $\mathbb{R}^2$ que tenen les mateixes coordenades en les dues bases.
c) Quines són les coordenades dels vectors de la base *B* en la base B'

Problema 9

Demostreu que si $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ és un subconjunt de $\mathbb{R}^3$ i $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3$ i $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_3$, aleshores $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ si, i només si, $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$. En aquest cas, doneu les matrius de canvi de base.

Problema 10

a) Justifiqueu que el conjunt $F=\{(x,y,z)\ /\ 2x-y+6z=0\}\subset\mathbb{R}^3$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ i que $\{(1,2,0),(-3,0,1)\}$ és una base de *F*.
b) Comproveu que $B'=\{(1,2,0),(-3,0,1),(-2,1,1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ i doneu les matrius de canvi de base. Quines són les coordenades del vector $\boldsymbol{w}=(1,1,0)$ en la base B'?
c) Descriviu el subespai vectorial *F* en la base B'.

4 Aplicacions lineals. Diagonalització d'endomorfismes

4.1 Coneixements bàsics

4.1.1 Aplicacions lineals

Siguin E i F dos espais vectorials sobre el cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals. Una aplicació f: $E \to F$ es diu que és lineal si satisfà:

1. $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ per a tots els elements $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ de E.
2. $f(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{y})$ per a tot $\boldsymbol{x}$ de E i per a tot λ de $\mathbb{R}$.

Propietats

1. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ per a qualsevol $\boldsymbol{x} \in E$
3. Si $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_m \in E$ i $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$, aleshores

$$f(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + ... + \lambda_m\boldsymbol{x}_m) = \lambda_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 f(\boldsymbol{x}_2) + ... + \lambda_m f(\boldsymbol{x}_m).$$

4. L'aplicació f queda determinada de manera única per les imatges dels elements d'una base de E. Així, si $B = \{ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n \}$ és una base de E, $B' = \{ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_m \}$ una base de F i $\boldsymbol{x} \in E$ amb

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + ... + x_n\boldsymbol{e}_n$$

aleshores

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + ... + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + ... + x_n f(\boldsymbol{e}_n).$$

Matricialment, aquesta última expressió es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} \uparrow \\ f(\boldsymbol{x}) \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & ..... & f(\boldsymbol{e}_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

La matriu

$$\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & ..... & f(\boldsymbol{e}_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

és una matriu d'ordre $n \times m$ anomenada *matriu de l'aplicació*, i que d'ara endavant representarem per $(f)_{B,B'}$.

Recíprocament, per a qualsevol matriu A d'ordre n x m, l'aplicació g: $E \to F$ definida per

$$\begin{pmatrix} \uparrow \\ g(\boldsymbol{x}) \\ \downarrow \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}$$

per a tot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ... x_n) \in E$ és una lineal i té per matriu associada en la base B la matriu A, és a dir

$$A = (g)_{B,B'}.$$

4.1.2 Nucli i imatge d'una aplicació lineal

Donada una aplicació lineal $f : E \to F$, es defineix el *nucli* de f com el conjunt de tots els vectors de E que tenen per imatge el $\mathbf{0}$ i es representa per *Ker f*, i es defineix la *imatge* de f com el conjunt de totes les imatges dels element de E i es representa per *Im f*. Així

$$Ker\, f = \{ \boldsymbol{x} \in E / f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \} \qquad Im\, f = \{ f(\boldsymbol{x}) \in F / \boldsymbol{x} \in E \}$$

Propietats

1. *Ker f* és un subespai de E.
2. *Im f* és un subespai de F. A més, si $B = \{ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n \}$ és una base de E i $B' = \{ \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_m \}$ una base de F, aleshores *Im f* és l'espai generat per les imatges dels elements de B, és a dir

$$Im\, f = < f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), ..., f(\boldsymbol{e}_n) >$$

   i, per tant, la dimensió de l'espai *Im f* és igual al rang de la matriu associada a f

$$\dim Im\, f = rang\, (f)_{B,B'}$$

3. L'aplicació f és injectiva si i només si $Ker\, f = \{\mathbf{0}\}$.
4. L'aplicació f és exhaustiva si i només si $Im\, f = F$.

Teorema de les dimensions. Si f és una aplicació lineal entre els espais vectorials E i F i si la dimensió de E és n, aleshores

$$dim\, Ker\, f + dim\, Im\, f = n.$$

4.1.3 Canvi de bases en aplicacions lineals

Si *f* és una aplicació lineal entre els espais vectorials *E* i *F*, B_1 i B_1' dues bases de *E* i B_2 i B_2' dues bases de *F*, aleshores

$$\begin{array}{ccc} E_{B_1} & \xrightarrow{f} & F_{B_2} \\ \uparrow{\scriptstyle id_E} & & \downarrow{\scriptstyle id_F} \\ E_{B_1'} & \xrightarrow{f} & F_{B_2'} \end{array} \qquad (f)_{B_1',B_2'} = (id_F)_{B_2,B_2'} \cdot (f)_{B_1,B_2} \cdot (id_E)_{B_1',B_1} .$$

En particular, si $E = F$ i *B* i *B*' són dues bases de *E*, es té

$$\begin{array}{ccc} E_B & \xrightarrow[M]{f} & E_B \\ P\uparrow{\scriptstyle id_E} & & {\scriptstyle id_F}\downarrow P^{-1} \\ E_{B'} & \xrightarrow[N]{f} & E_{B'} \end{array} \qquad N = P^{-1} \cdot M \cdot P$$

on $M = (f)_{B,B}$, $P = (id_E)_{B',B}$ i $N = (f)_{B',B'}$.

4.1.4 Diagonalització d'endomorfismes

Definicions

- Donat l'espai vectorial *E*, qualsevol aplicació lineal $f: E \to E$ es diu que és un *endomorfisme* de l'espai *E*.

- Un nombre real λ és diu que és un *valor propi* d'un endomorfisme *f* de *E*, si existeix un vector $\boldsymbol{v}$ de *E*, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, tal que

$$f(\boldsymbol{v}) = \lambda\, \boldsymbol{v}.$$

  El vector $\boldsymbol{v}$ rep el nom de *vector propi* de *f* associat a λ.

- Un endomorfisme *f* és *diagonalitzable* si existeix una base de *E* formada per vectors propis. En aquest cas, la matriu de *f* en aquesta base és una matriu diagonal.

- Una matriu quadrada d'ordre *n* és *diagonalitzable* si és la matriu associada a un endomorfisme diagonalitzable d'un espai vectorial de dimensió *n*.

Propietats

1. El conjunt dels vectors propis associats a un valor propi λ, juntament al vector **0,** és un subespai vectorial de *E* que coincideix amb el nucli de l'endomorfisme $f - \lambda\, id$

$$Ker(f - \lambda\, id) = \{\boldsymbol{v} / f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$$

2. Els valors propis de f són les arrels reals del polinomi

$$P(\lambda) = \det(f - \lambda\, id).$$

   Aquest polinomi és independent de la base de E i rep el nom de *polinomi característic* de f.
3. Vectors propis de f associats a valors propis diferents són linealment independents.
4. Si λ i λ' són dos valors propis de f diferents, aleshores

$$Ker(f - \lambda\, id) \cap Ker(f - \lambda' id) = \{\mathbf{0}\}.$$

5. Si λ és un valor propi de f i és una arrel d'ordre m del polinomi característic de f, aleshores

$$1 \le \dim Ker(f - \lambda\ id\ ) \le m$$

Teorema de diagonalització. Sigui E un espai vectorial de dimensió n i f un endomorfisme de E. Si

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

és la descomposició en factors del polinomi característic de f, aleshores existeix una base B' de vectors propis de f si i només si

a) Totes les arrels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ del polinomi característic són reals.

b) $\dim Ker(f - \lambda_i\, id) = m_i$, $i = 1,2,\ldots, p$.

En aquest cas, si B_i és una base del $Ker(f - \lambda_i\, id\ )$ $i = 1,2,\ldots, p$, aleshores

$$B' = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_p$$

és una base de E de vectors propis i la matriu de f en aquesta base és la matriu diagonal

$$(f)_{B',B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & & & & & & \\ \vdots & \overset{m_1)}{\ddots} & \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & \cdots & 0 & & & \\ & & & \vdots & \overset{m_2)}{\ddots} & \vdots & & & \\ & & & 0 & \cdots & \lambda_2 & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_p & \cdots & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \overset{m_p)}{\ddots} & \vdots \\ & & & & & & & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

4.2 Problemes resolts

Problema 1

Sigui $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^2$ i f un endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$f(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$$
$$f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2.$$

a) Doneu la matriu de f i l'expressió general de $f(x, y)$.
b) Trobeu la imatges del quadrat de vèrtexs $O = (0,0)$, $A = (1,\ 0)$, $B = (1,\ 1)$ i $C = (0,\ 1)$ i del segment $\overline{GH}$ amb $G = (1, -1)$ i $H = (\ 2, -1)$.

Resolució

a) La matriu de f en la base B és

$$(f)_{B,B} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'expressió general de $f(x, y)$ l'obtenim a partir de l'equació matricial

$$\begin{pmatrix} \uparrow \\ f(x,y) \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x,y) = (2x+y,\ x+2y).$$

b) Per al quadrat $OABC$

$$f(O) = f(0,0) = (0,0) = O, \quad f(A) = f(1,0) = (2,1) = A'$$
$$f(B) = f(1,1) = (3,3) = B', \quad f(C) = f(0,1) = (1,2) = C'$$

i per al segment $\overline{GH}$

$$f(G) = f(1,-1) = (1,-1) = G', \quad f(H) = f(2,-1) = (3,0) = H'.$$

Per tant, la imatge del quadrat $OABC$ és el paral·lelogram $O'A'B'C'$ de vèrtexs

$$O = (0,\ 0),\ A' = (2,\ 1),\ B' = (3,\ 3) \text{ i } C' = (1,\ 2)$$

i la imatge del segment $\overline{GH}$ és el segment $\overline{G'H'}$ de vèrtexs

$$G' = (1,-1) \text{ i } H' = (3,0)$$

com es veu a la figura següent

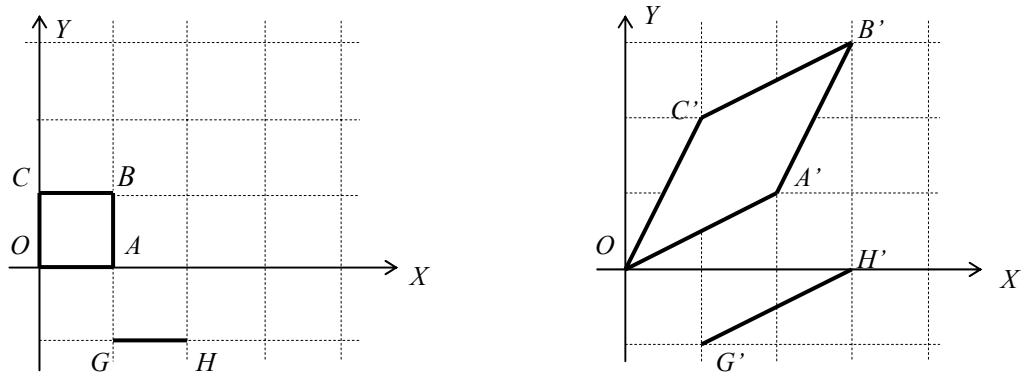


Fig. 4.1

Problema 2

D'una aplicació lineal *f*: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se sap que transforma els vèrtexs P =(1,1) i Q = (3, 1) del quadrat *PQRS* en els punts $P' = (1,2)$ i $Q' = (2,1)$ respectivament.

Fig. 4.2

a) Doneu la matriu i l'expressió de $f(x,y)$ en la base canònica.
b) Trobeu la imatge del quadrat *PQRS*.
c) Doneu una base i la dimensió del *Ker f* i de la *Im f*.

Resolució

a) Si considerem la base canònica de $\mathbb{R}^2$ formada pels vectors $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$ i $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$, llavors

$$\left.\begin{array}{l} f(P) = P' \\ f(Q) = Q' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \\ f(3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \\ 3f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{2}\boldsymbol{e}_2 \end{array}\right\}$$

d'on s'obté que la matriu de *f* en aquesta base és

$$(f)_{B,B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

i per a tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y,\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y \right).$$

b) Com que ja coneixem les imatges del punt *P* i *Q*, per trobar la imatge del quadrat *PQRS* només hem de calcular les imatges dels altres dos vèrtexs *R* i *S*, així

$$R' = f(R) = f(3,\ 3) = \left(\frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}3,\ -\frac{1}{2}3 + \frac{5}{2}3 \right) = (3,\ 6)$$
$$S' = f(S) = f(1,\ 3) = \left(\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}3,\ -\frac{1}{2}1 + \frac{5}{2}3 \right) = (2,\ 7)$$

i la imatge del quadrat *PQRS* serà el paral·lelogram *P'Q'R'S'*.

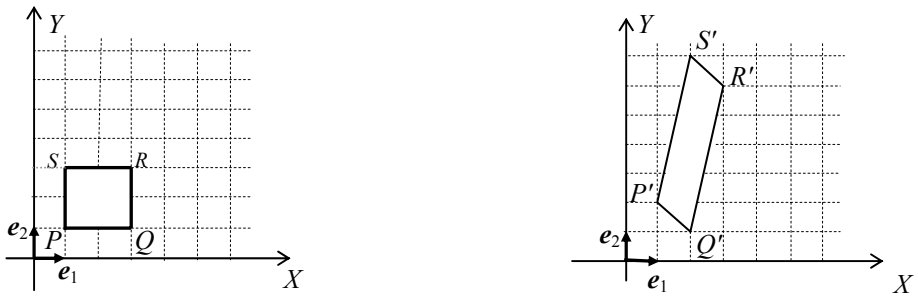


Fig. 4.3

c) $Ker\ f = \{(x, y) /\ f(x, y) = (0, 0)\} = \left\{ (x,\ y) / \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0,\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y = 0 \right\}$

Així doncs, hem de resoldre el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ -x + 5y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = y = 0$$

per tant,

$$Ker\, f = \{(0, 0)\} \text{ i } dim\ Ker\, f = 0.$$

Finalment, pel teorema de les dimensions

$$\dim Im\, f = 2 - \dim Ker\, f = 2 \Rightarrow Im\, f = \mathbb{R}^2$$

i una base de *Im f* seria qualsevol base de $\mathbb{R}^2$, en particular la formada pels vectors

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2,\ \ f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{2}\boldsymbol{e}_2\,.$$

Problema 3

Un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ transforma els vèrtexs de la piràmide $OABC$ en els vèrtexs respectius de la piràmide $OA'B'C'$.

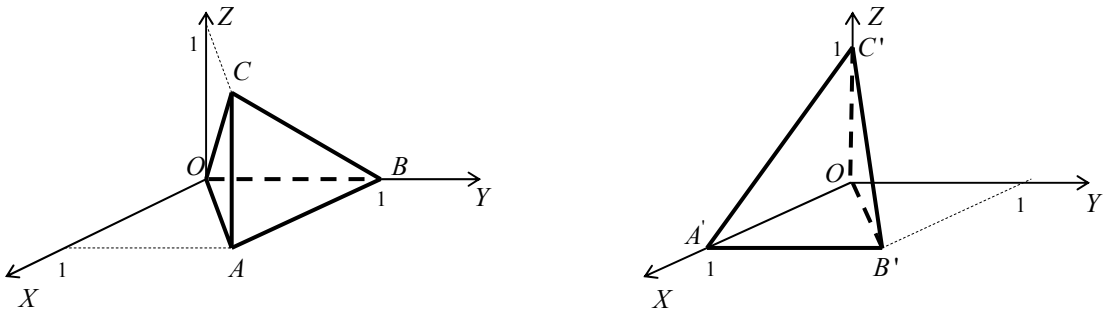


Fig. 4.4

a) Calculeu l'expressió de $f(x,y,z)$.
b) Quina és la imatge del paral·lelepípede de la figura

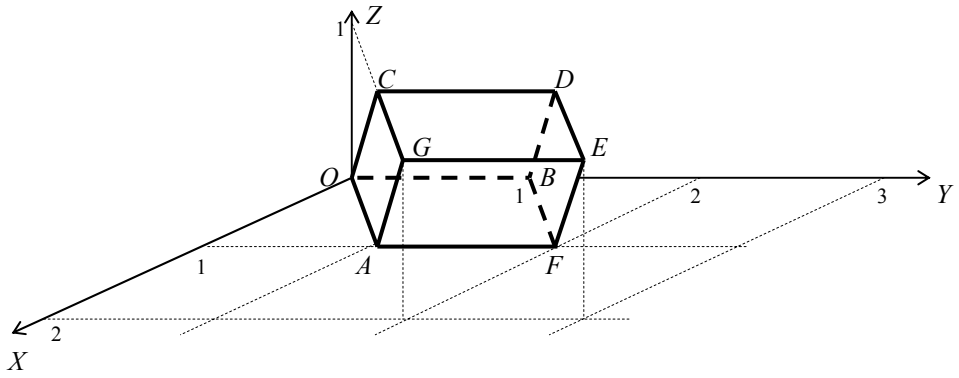


Fig. 4.5

Resolució

a) Si prenem com a base de $\mathbb{R}^3$ els vectors $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ i $\boldsymbol{e}_3 = (0,1,0)$, aleshores

$$\left.\begin{array}{l} f(A)=A' \\ f(B)=B' \\ f(C)=C' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(1,1,0)=(1,0,0) \\ f(0,1,0)=(1,1,0) \\ f(1,1,1)=(0,0,1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1 \\ f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1 \\ f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_3 \end{array}\right\}$$

i resolent aquest sistema, obtenim

$$f(\boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{e}_2,\ f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ f(\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3.$$

Així doncs, la matriu de l'endomorfisme f en la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x,\, y,\, z) = (y - z,\ -x + y,\, z)$$

i

$$f(x,\, y,\, z) = (y - z,\ -x + y,\, z)$$

per a tot $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Com que ja coneixem la imatge dels vèrtex O, A, B i C del paral·lelepípede, només hem de calcular la imatge de la resta de vèrtexs

$$f(D) = f(1,\, 2,\, 1) = (1,\, 1,\, 1) = D' \qquad f(E) = f(2,\, 3,\, 1) = (2,\, 1,\, 1) = E'$$
$$f(F) = f(1,\, 2,\, 0) = (2,\, 1,\, 0) = F' \qquad f(G) = f(2,\, 2,\, 1) = (1,\, 0,\, 1) = G'$$

Així, la imatge del paral·lelepípede de la figura 4.4 és el paral·lelepípede de la figura següent:

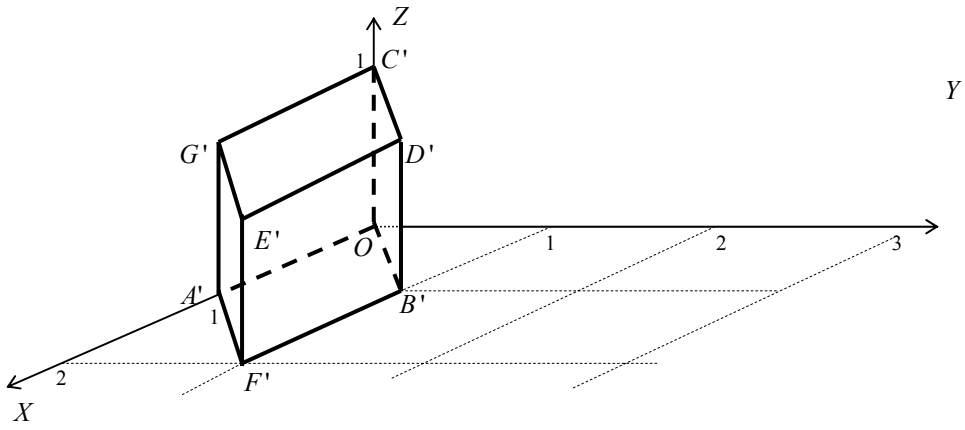


Fig. 4.6

Problema 4

Sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicació lineal tal que

$$f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$$
$$f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{v}_2$$
$$f(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{v}_1.$$

on $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ i $B' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ són les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ respectivament.

a) Doneu la matriu de f en aquestes bases.

b) Trobeu la imatge del tetraedre de vèrtexs $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,0)$, $B = (1,0,1)$ i $C = (0,1,1)$.

c) Trobeu la dimensió i una base del *Ker f* i de la *Im f*.

Resolució

a) Resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2 \\ f\,(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3)=2\boldsymbol{v}_2 \\ f\,(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)=-\boldsymbol{v}_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2 \\ f\,(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_3)=2\boldsymbol{v}_2 \\ f\,(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=-\boldsymbol{v}_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{0} \\ f(\boldsymbol{e}_3)=-\boldsymbol{v}_1 \end{array}\right\}$$

Així doncs, si en $\mathbb{R}^3$ es considerem la base B i en $\mathbb{R}^2$ la base B', la matriu de f és

$$(f)_{B,B'}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) La imatge dels vèrtex del tetraedre $OABC$ són els punts

$$O'=f(0,0,0)=(0,0), \qquad A'=f(A)=f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2=(1,2)$$
$$B'=f(B)=f\,(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3)=2\boldsymbol{v}_2=(0,2), \qquad C'=f(C)=f\,(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)=-\boldsymbol{v}_1=(-1,0)$$

per tant, la imatge del tetraedre $OABC$ és el paral·lelogram $O'A'B'C'$ de $\mathbb{R}^2$.

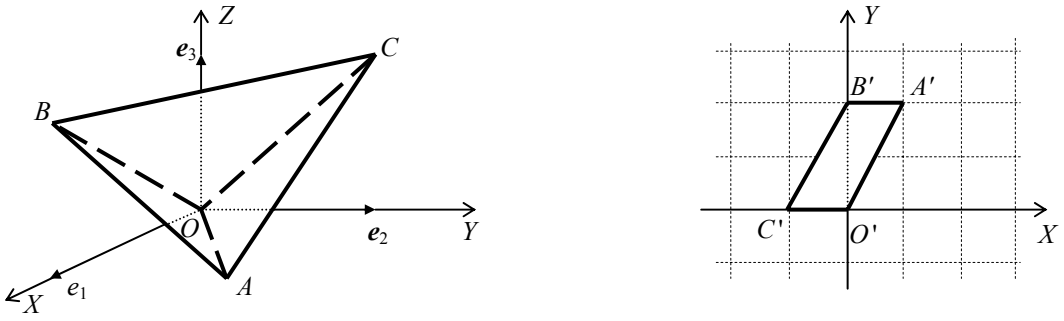


Fig. 4.7

c) La *Im f* és el subespai generat per les imatges dels elements d'una base, en particular

$$Im\,f=\langle f(\boldsymbol{e}_1),f(\boldsymbol{e}_2),f(\boldsymbol{e}_3)\rangle=\langle \boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{0},-\boldsymbol{v}_1\rangle=\langle\ \boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2,-\boldsymbol{v}_1\rangle$$

i com que aquests dos vectors són linealment independents, podem afirmar que una base de $Im\,f$ és $\{\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2,\ -\boldsymbol{v}_1\}$ i $\dim Im\,f=2$.
D'altra banda,

$$Ker\,f=\{(x,y,z)/\,f(x,y,z)=(0,0)\}=\left\{(x,y,z)/\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=$$
$$=\{(x,y,z)/\,x-z=0,\ \ 2x=0\}=\{(0,y,0)/\,y\in\mathbb{R}\}=\langle(0,1,0)\rangle$$

i una base del *Ker f* és $\{(0,1,0)\}$ i la seva dimensió és 1.

Problema 5

D'una aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ se sap que la imatge del quadrat *OABC* és el paral·lelogram *OPQR*, i la imatge del triangle *OAD*, el triangle *OPS*.

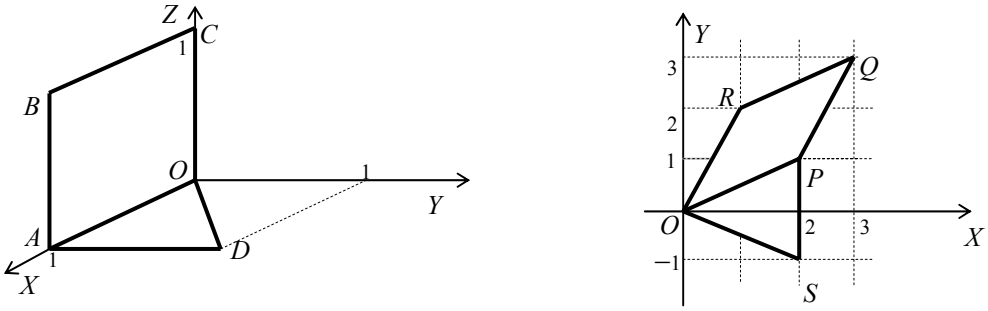


Fig. 4.8

a) Trobeu la matriu de f i l'expressió genèrica de $f(x,y,z)$ si en $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ considerem les bases canòniques

$$B_3 = \{\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0),\ \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0),\ \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)\} \text{ i } B_2 = \{\boldsymbol{v}_1 = (1,0),\ \boldsymbol{v}_2 = (0,1)\}$$

respectivament.

b) Doneu la matriu de f si en $\mathbb{R}^3$ considerem la base $B_3' = \{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OC}\}$ i en $\mathbb{R}^2$ la base B_2.

c) Doneu la matriu de f si en $\mathbb{R}^3$ considerem la base $B_3' = \{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OC}\}$ i en $\mathbb{R}^2$ la base $B_2' = \{\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OR}\}$.

Resolució

a) El segment $\overline{OA}$ és un costat del quadrat *OABC* i també del triangle *OAD*, per tant, la seva imatge ha de ser el segment $\overline{OP}$ que és el costat comú del quadrat *OPQR* i del triangle *OPS*, així si considerem els vectors $\overrightarrow{OA} = (1,0,0) = \boldsymbol{e}_1$ i $\overrightarrow{OP} = (2,1) = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, resulta

$$f\left(\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow f\left(\boldsymbol{e}_1\right) = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 .$$

D'altra banda, com que la imatge del quadrat *OABC* és el paral·lelogram *OPQR*, i la del triangle *OAD*, el triangle *OPS*, es té

$$\left.\begin{matrix} f(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OR} \\ f(\overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OS} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - f(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - (2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = -2\boldsymbol{v}_2 . \end{cases}$$

Així, si en $\mathbb{R}^3$ considerem la base $B_3 = \{ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ i en i $\mathbb{R}^2$ la base $B_2 = \{ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, la matriu de f serà

$$(f)_{B_3,B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Si $B_3' = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}\} = \{ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, la matriu del canvi de base de B_3' a B_3 és

$$(id)_{B_3',B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i si en $\mathbb{R}^3$ considerem la base B_3' i en $\mathbb{R}^2$ la base B_2 , la matriu de f és

$$(f)_{B_3',B_2} = (f)_{B_3,B_2} \cdot (id)_{B_3',B_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Si ara prenem en $\mathbb{R}^2$ la base $B_2' = \{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}\} = \{2\boldsymbol{v}_1 + v_2, \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2\}$, la matriu del canvi de base de B_2' a B_2 és

$$(id)_{B_2',B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

i si en $\mathbb{R}^3$ considerem la base B_3', la matriu de f serà

$$(f)_{B_3',B_2'} = (id)_{B_2,B_2'} \cdot (f)_{B_3,B_2} \cdot (id)_{B_3',B_3} = \left((id)_{B_2',B_2}\right)^{-1} \cdot (f)_{B_3,B_2} \cdot (id)_{B_3',B_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Problema 6

Estudieu detalladament la diagonalització de les matrius següents:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 12 & 12 & -7 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolució

a) El polinomi característic de la matriu A és

$$\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -3\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda+1.$$

Aquest polinomi no té arrels reals i, per tant, la matriu A no és diagonalitzable.

b) Calculem el polinomi característic de la matriu B

$$\det(B-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2$$

Així, $\lambda=1$ és un valor propi amb multiplicitat 2. El subespai de vectors propis l'obtenim resolent el sistema:

$$\begin{pmatrix}1-1 & 0\\ 4 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=0$$

d'on s'obté que la dimensió del subespai de vectors propis de valor propi $\lambda=1$ és 1, diferent de la multiplicitat de λ, per tant, la matriu B no és diagonalitzable.

c) Calculem els valors propis de la matriu C

$$\det(C-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-6=(\lambda+2)(\lambda-3)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-2\\ \lambda=3.\end{cases}$$

Com que aquests dos valors propis són diferents, podem assegurar que la matriu C és diagonalitzable i, per tant, hi ha una base de $\mathbb{R}^2$ formada per vectors propis. Calculem aquesta base.

Per a $\lambda=-2$

$$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow y=-4x\Rightarrow \boldsymbol{v}=(1,-4)\text{ és un vector propi associat a }\lambda=-2.$$

Per a $\lambda=3$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow y=x\Rightarrow \boldsymbol{u}=(1,1)\text{ és un vector propi associat a }\lambda=3.$$

Així, la matriu diagonal associada a C en la base de vectors propis $\{(1,-4),(1,1)\}$ és:

$$C_d=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

i la relació entre C i C_d ve donada pel canvi de base:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Els valors propis de la matriu D són:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 3 & 3-\lambda & -5 \\ 1 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3. \end{cases}$$

Com que són diferents dos a dos, podem assegurar que la matriu D és diagonalitzable. Calculem una base de vectors propis.

Per a $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = z \Rightarrow \boldsymbol{u} = (1,1,1) \text{ és un vector propi associat a } \lambda = 1.$$

Per a $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{v} = (2,-1,1) \text{ és un vector propi associat a } \lambda = 2.$$

Per a $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{w} = (0,1,0) \text{ és un vector propi associat a } \lambda = 3.$$

Per tant, $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ és una base formada per vectors propis i en aquesta base la matriu diagonal associada a D és:

$$D_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) El aquest cas, els valors propis de E són

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 8 & 7-\lambda & -4 \\ 12 & 12 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \text{ amb multiplicitat } m = 2 \\ \lambda = 1 \text{ amb multiplicitat } m = 1. \end{cases}$$

Per saber si la matriu E és diagonalitzable, només hem de considerar el valor propi $\lambda = -1$, que és l'únic que té multiplicitat més gran que 1, i calcular la dimensió del subespai de vectors propis corresponent, o també, comprovar si per a aquest valor propi se satisfà la igualtat següent

$$3 - \text{rang}\,(A - \lambda I_3) = \text{multiplicitat de } \lambda\,.$$

En aquest cas,

$$3 - \text{rang}\,(A-(-1)I_3) = 3 - \text{rang}\,(A+I_3) = 3 - \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -4 \\ 12 & 12 & -6 \end{pmatrix} = 3-1 = 2 = m$$

i, per tant, la matriu E és diagonalitzable. La base de vectors propis en què diagonalitza la traurem dels sistemes d'equacions:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -4 \\ 12 & 12 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x+2y-z=0 \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{u} = (1,0,2) \\ \boldsymbol{v} = (0,1,2) \end{cases} \text{ vectors propis associats a } \lambda = -1,$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & -4 \\ 12 & 12 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2}{3}z \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{w} = (0,2,3) \text{ vector propi associats a } \lambda = 1.$$

Així, la matriu diagonal associada a E en la base $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ és:

$$E_d = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 12 & 12 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

f) El polinomi característic de F és

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 4 \\ 5 & 1-\lambda & -8 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(1-\lambda)$$

i els valors propis són $\lambda = -1$ amb multiplicitat $m = 2$ i $\lambda = 1$ que és una arrel simple. En aquest cas

$$3 - \text{rang}\,(F+I_3) = 3 - \text{rang}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3-2 = 1 \neq 2 = m$$

i per tant, la matriu F no és diagonalitzable.

Problema 7

a) Quina és la imatge de la figura següent per l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^2$ que en la base canònica té per matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

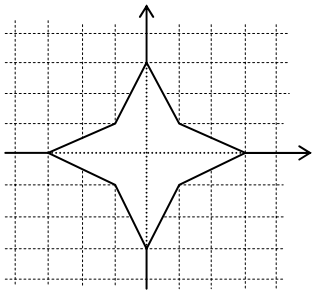


Fig. 4.9

b) Quins vectors són fixos per aquest endomorfisme?
c) f és diagonalitzable?

Resolució

a) Calculem les imatges dels vèrtexs de la figura

$$f(3,0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f(1,1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(0,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f(-1,1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(-3,0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad f(-1,-1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f(0,-3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad f(1,-1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Així, la imatge de la figura és el polígon de vèrtexs: $(3,3)$, $(1,2)$, $(0,3)$, $(-1,0)$, $(-3,-3)$, $(-1,-2)$, $(0,-3)$ i $(1,0)$.

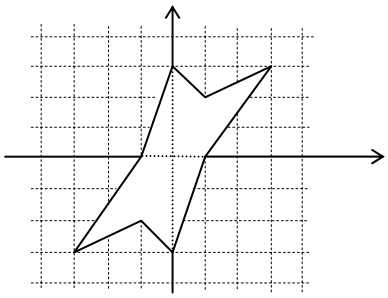


Fig. 4.10

b) Un vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ és fix per l'endomorfisme f si

$$f(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ x + y = y \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Per tant, tots els vectors de la recta $x = 0$ són vectors fixos per l'endomorfisme f.

c) Calculem primer el polinomi característic de f i les seves arrels:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ amb multiplicitat } m = 2$$

Ara bé, el subespai de vectors propis associats a $\lambda = 1$ és el dels vector fixos per l'endomorfisme f, i per l'apartat a), aquest subespai té dimensió 1 diferent de la multiplicitat de $\lambda = 1$, d'on es dedueix que f no és diagonalitzable.

Problema 8

Donat l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ de matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Per a quins valors de a l'endomorfisme f no és injectiva .
b) Per a quins valors de a l'endomorfisme f admet vectors fixos no nuls?
c) Esbrineu si f diagonalitza o no per als valors precedents de a.

Resolució

a) Sabem que

$$f \text{ és injectiva} \Leftrightarrow Ker\, f = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1.$$

Així doncs, l'únic valor de a pel qual f no és injectiva és $a = 1$.

b) Un vector $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \neq 0$ és un vector fix de f si

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

o el que és equivalent, si

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$$

c) Calculem els valors propis per a $a = 1$

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & -2\\ 1 & -1-\lambda & 1\\ -1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2+3\lambda=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{13}}{2}\\ \lambda=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$

Anàlogament, per a $a=\dfrac{5}{2}$

$$P(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & -2\\ 1 & -1-\lambda & 1\\ -1 & \dfrac{5}{2} & 1-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2+\frac{9}{2}\lambda-\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\\ \lambda=-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\end{cases}.$$

Com que en tots dos casos, els valors propis de *f* són reals i diferents, pel teorema de diagonalització, podem afirmar que per a aquests dos valors de *a f* diagonalitza.

Problema 9

A $\mathbb{R}^2$ considerem la figura següent:

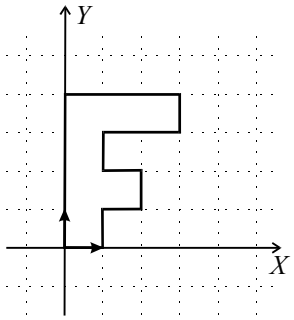


Fig. 4.11

a) Estudieu quina és la seva transformació pels endomorfismes *f* i *g*, que tenen per matriu en la base canònica

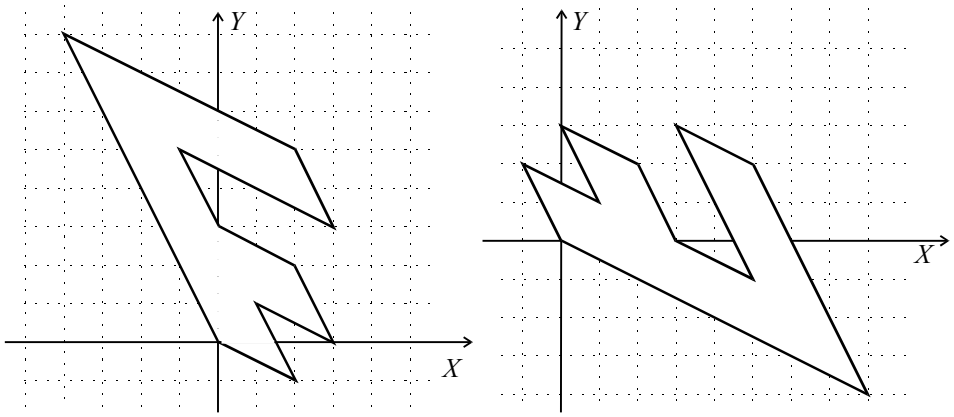
$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\quad\text{i}\quad\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

respectivament.

b) Estudieu quina relació hi ha entre la superfície d'aquesta figura i la de les seves imatges per aquests dos endomorfismes.

Resolució

a) Calculant les imatges dels vèrtexs d'aquesta figura per cada un dels endomorfismes *f* i *g*, obtenim que les imatges de la figura són les següents:



Imatge de la figura per l'endomorfisme f *Imatge de la figura per l'endomorfisme g*

Fig. 4.12

Observeu que la diferència entre els dos endomorfismes és simplement un intercanvi entre les columnes de les seves matrius i, per tant, les imatges dels dos vectors de la base queden intercanviades d'un endomorfisme a l'altre. Aquesta diferència es tradueix en què les imatges de la figura per aquests dos endomorfismes són simètriques respecte de la recta $y = x$, i el resultat és que l'orientació de la figura es manté per a l'endomorfisme *f*, però queda canviada per a *g*.

b) Si prenem com a unitat d'àrea (u.a.) l'àrea del quadradet format pels dos vectors de la base canònica, tenim que l'àrea de la figura inicial és 7 u.a.

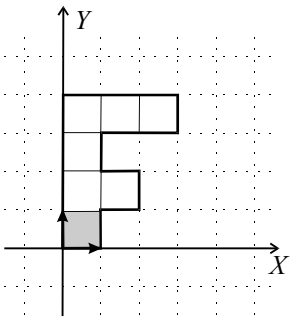


Fig. 4.13: *Àrea de la figura*

D'altra banda, aquest quadradet es transforma per l'aplicació *f* en el paral·lelogram que determinen els vectors $(2, -1)$ i $(-1, 2)$, per tant, l'àrea de la figura transformada per *f* serà 7 vegades l'àrea d'aquest paral·lelogram.

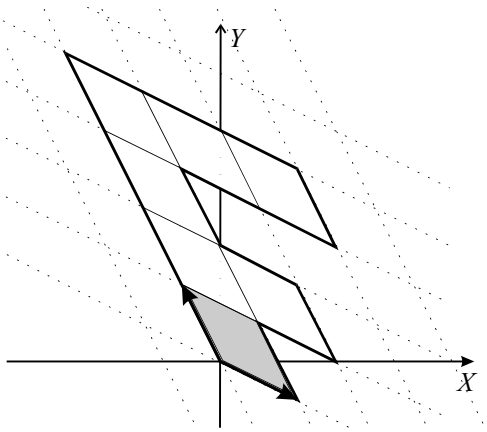


Fig. 4.14: *Àrea de la imatge de la figura per l'endomorfisme f*

Ara bé, com que l'àrea del paral·lelogram determinat pels vectors $(2,-1)$ i $(-1,\ 2)$ és el valor absolut del determinant $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, resulta que l'àrea de la imatge de la figura per l'endomorfisme f és

$$7(4-1) = 21 \text{ u.a.}$$

i, per tant, 3 vegades l'àrea de la figura original.

Es pot observar que el determinant anterior, a partir del qual s'obté l'àrea del paral·lelogram, coincideix amb el determinant de la matriu de l'endomorfisme f.

A l'hora de calcular com ha variat l'àrea de la figura quan se li ha aplicat l'endomorfisme g, podem procedir de manera similar, però al calcular el determinant de l'endomorfisme g resulta que és negatiu. Aquest signe ens indica el canvi d'orientació dels objectes per la transformació g. Per aquesta raó, la figura obtinguda per g ha quedat orientada negativament respecte de la figura inicial. No obstant això, com en el cas de f, la seva àrea també és 3 vegades l'àrea de la figura inicial, ja que el determinant val –3.

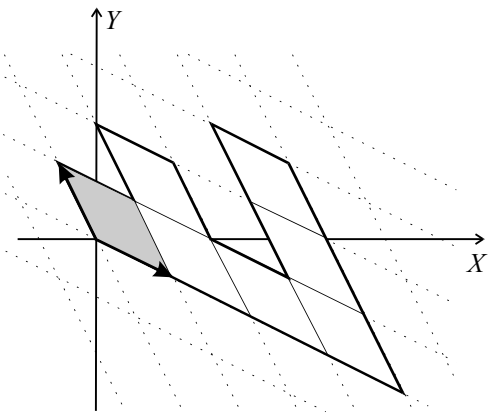


Fig. 4.15*: Àrea de la imatge de la figura per l'endomorfisme g*

Problema 10

Sigui f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x, y, z) = (2x, 2x + 2y + z, 2z).$$

a) Trobeu la imatge del tetraedre *OABC*.
b) Calculeu el volum del tetraedre *OABC* i el de la seva imatge.

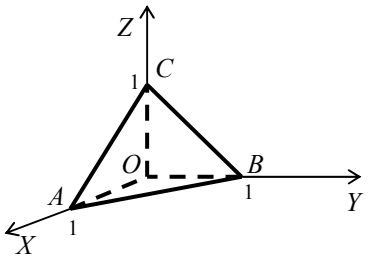


Fig. 4.16

Resolució

a) Per calcular la imatge del tetraedre *OABC* hem de calcular les imatges del vectors $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$

$$f(1,0,0) = (2,2,0) \equiv A', \; f(0,1,0) = (0,2,0) \equiv B' \text{ i } f(0,0,1) = (0,1,2) \equiv C'.$$

Així, la imatge del tetraedre *OABC* és el tetraedre $OA'B'C'$.

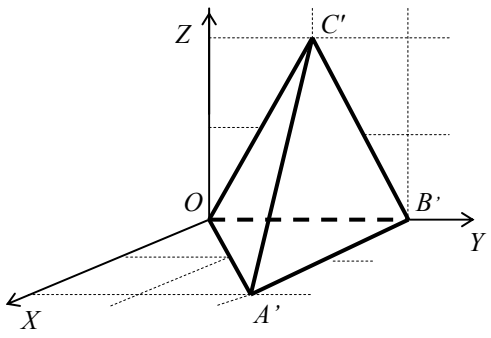


Fig. 4.17

b)

$$\text{Volum } OABC = \frac{1}{3}\text{àrea base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3}\frac{1\cdot 1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$\text{Volum } OA'B'C' = \frac{1}{3}\text{àrea base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3}\frac{2\cdot 2}{2}\cdot 2 = \frac{4}{3}$$

Observeu que el volum del tetraedre $OA'B'C'$ és 8 vegades el volum del tetraedre *OABC* i que aquest factor de variació, 8, coincideix amb el valor absolut del determinant de la matriu de *f*.

Problema 11

a) Calculeu el terme general de la successió de Fibonacci que ve donada per la recurrència:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n = 1,2...$$

amb $a_0 = 1$ i $a_1 = 1$.

b) Demostreu que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi$,on ϕ és el nombre d'or.

Resolució

a) A partir de la successió de Fibonacci $\{a_n\}$, definim una nova successió de terme general

$$u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \quad n = 0,1,2... \qquad (*)$$

Així, tenim

$$u_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 + a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot u_0$$

.....

$$u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_n + a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot u_{n-1}$$

A partir d'aquesta darrera igualtat, podem escriure:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot u_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot u_{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot u_{n-2} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot u_{n-3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 \cdot u_{n-3} = \\ &\quad \cdots\cdots \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot u_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ara calculem la potència *n*-èssima de la matriu *A*, podrem obtenir l'expressió del terme general a_n a partir les dues expressions de u_n obtingudes en $(*)$ i $(**)$.

Per realitzar el càlcul de A^n, diagonalitzarem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^2$ donat per la matriu A, i per a això, calculem primer el polinomi característic de f i les seves arrels:

$$\det(A-\lambda Id)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)-1=\lambda^2-\lambda-1=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi\\[2ex]\lambda=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\varphi\end{cases}$$

i com que es tracta de dos nombres reals i diferents, podem assegurar que la matriu A diagonalitza. Per obtenir una base de vectors propis en què f diagonalitzi, hem de buscar els subespais de vectors propis associats a ϕ i φ:

$$Ker(f-\phi id)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\begin{pmatrix}-\phi & 1\\ 1 & 1-\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases}-\phi x+y=0\\ x+(1-\phi)y=0\end{cases}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases}x=x\\ y=\phi x\end{cases}\right\}=\langle(1,\phi)\rangle.$$

Anàlogament,

$$Ker(f-\varphi\cdot Id)=\langle(1,\varphi)\rangle.$$

Així, $\{(1,\phi),(1,\varphi)\}$ és una base de $\mathbb{R}^2$ formada per vectors propis, i podem escriure la relació:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}^{-1}$$

i, per tant,

$$A^n=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n=\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}^{-1}\right)^n=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}^{-1}\right)\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}^{-1}\right)\cdots\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}^{-1}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^n & 0\\ 0 & \varphi^n\end{pmatrix}\frac{1}{\varphi-\phi}\begin{pmatrix}\varphi & -1\\ -\phi & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\varphi-\phi}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \phi & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^n\varphi & -\phi^n\\ -\varphi^n\phi & \varphi^n\end{pmatrix}=\frac{1}{\varphi-\phi}\begin{pmatrix}\phi^n\varphi-\varphi^n\phi & -\phi^n+\varphi^n\\ \phi^{n+1}\varphi-\varphi^{n+1}\phi & -\phi^{n+1}+\varphi^{n+1}\end{pmatrix}.$$

Finalment,

$$u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varphi - \phi} \begin{pmatrix} \phi^n\varphi - \varphi^n\phi & -\phi^n + \varphi^n \\ \phi^{n+1}\varphi - \varphi^{n+1}\phi & -\phi^{n+1} + \varphi^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{\varphi - \phi} \begin{pmatrix} \phi^n\varphi - \varphi^n\phi - \phi^n + \varphi^n \\ \phi^{n+1}\varphi - \varphi^{n+1}\phi - \phi^{n+1} + \varphi^{n+1} \end{pmatrix} \Bigg\} \Rightarrow a_n = \frac{\phi^n\varphi - \varphi^n\phi - \phi^n + \varphi^n}{\varphi - \phi}.$$

I recordant que $\phi + \varphi = 1$, tenim que el terme general, a_n, de la successió de Fibonacci és

$$a_n = \frac{\phi^n\varphi - \varphi^n\phi - \phi^n + \varphi^n}{\varphi - \phi} = \frac{-\phi^n(1-\varphi) + \varphi^n(1-\phi)}{\varphi - \phi} = \frac{\phi^{n+1} - \varphi^{n+1}}{\phi - \varphi}$$

o numèricament

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

b) Anàlogament,

$$a_{n+1} = \frac{\phi^{n+2} - \varphi^{n+2}}{\phi - \varphi}$$

per tant,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\phi^{n+2} - \varphi^{n+2}}{\phi^{n+1} - \varphi^{n+1}} = \frac{\phi - \dfrac{\varphi^{n+2}}{\phi^{n+1}}}{1 - \dfrac{\varphi^{n+1}}{\phi^{n+1}}} = \frac{\phi - \left(\dfrac{\varphi}{\phi} \right)^{n+1} \varphi}{1 - \left(\dfrac{\varphi}{\phi} \right)^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi$$

Nota. Observeu que

$$\left| \frac{\varphi}{\phi} \right| = \left| \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\varphi}{\phi} \right)^{n+1} = 0.$$

4.3 Problemes proposats

Problema 1

Siguin $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ i $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ dues bases de $\mathbb{R}^3$ i $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal. Si

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{u}_1 & f(\boldsymbol{u}_1) &= \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 & f(\boldsymbol{u}_2) &= 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 &= -\boldsymbol{u}_3 & f(\boldsymbol{u}_3) &= \boldsymbol{u}_2 - 3\boldsymbol{u}_3 \end{aligned}$$

a) Doneu la matriu de *f* en la base $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$.
b) Doneu la matriu de *f* en la base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$.
c) Trobeu una base i la dimensió de *Im f* i *Ker f.*

Problema 2

Considereu $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x, y, z) = (x + y + z,\ ax + z,\ -x + y).$$

a) Calculeu la matriu de *f* en la base canònica.
b) Doneu bases de *Ker f* i *Im f* segons els diferents valors de *a*.
c) Demostreu que $\boldsymbol{v}_1$=(1, 1, –1), $\boldsymbol{v}_2$ = (1, 0, 1), $\boldsymbol{v}_3$ = (1, 1, 0) formen una base de $\mathbb{R}^3$ i per a = 1 doneu la matriu de *f* en aquesta base.

Problema 3

Sigui $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x, y) = (2x - y,\ x + y).$$

Quina és la imatge per aquesta aplicació de la figura *OABCDE* ?

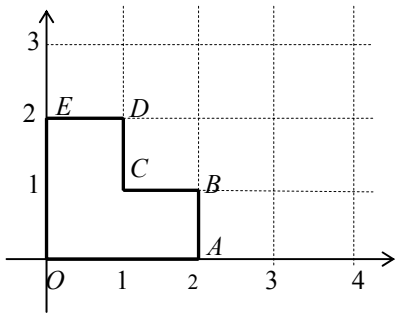


Fig. 4.18

Problema 4

Considereu les aplicacions lineals f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i g : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donades per les matrius

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivament.

a) Demostreu que f és exhaustiva i g injectiva.

b) Calculeu la matriu de $g \circ f$ en la base canònica. L'aplicació $g \circ f$ és injectiva? I exhaustiva?

c) Per a quins valors de a els vectors

$$\boldsymbol{v}_1 = (1, a, 0),\ \boldsymbol{v}_2 = (0,\ 1, a) \text{ i } \boldsymbol{v}_3 = (1,1,0)$$

formen una base? Trieu un d'aquests valors i expresseu la matriu de $g \circ f$ en la base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$.

Problema 5

Considereu la base canònica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ i els vectors

$$\boldsymbol{u}_1 = (0, 0, 1),\ \boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 1) \text{ i } \boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 1).$$

Si f és l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$f(x, y, z) = (y - z,\ z - x,\ x + 2y - z)$$

a) Demostreu que $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ formen una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Doneu la matriu de f en cada una de les dues bases.

c) Doneu una base i la dimensió del *Ker f* i de la *Im f*.

d) Calculeu $f^{-1}(\boldsymbol{v})$ on $\boldsymbol{v}$ és el vector de coordenades (1, 2, 0) en la base canònica.

Problema 6

D'una aplicació lineal f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, sabem que la seva matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & b \end{pmatrix}$$

és de rang 2.

a) Calculeu a i b.

b) Doneu una base del *Ker f* i de la *Im f*.

Problema 7

Donada l'aplicació f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x, y, z) = (2x, 2y, -2x+y+z).$$

a) Demostreu que f és lineal i doneu-ne la matriu en la base canònica.
b) Trobeu els valors propis de f i doneu una base de cadascun dels subespais de vectors propis.
c) Demostreu que la reunió de les bases trobades a l'apartat anterior és una base, B', de $\mathbb{R}^3$. Quina relació hi ha entre la matriu de f en aquesta base B' i l'obtinguda a l'apartat a)?

Problema 8

Donada l'aplicació f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x, y, z) = (2x + z,\ 2y,\ 2x + z)$$

a) Demostreu que f és lineal i doneu-ne la matriu en la base canònica.
b) Trobeu una base del *Ker f* i de *Im f*. Aquesta aplicació és bijectiva?
c) Trobeu els valors propis de f. Per què podem assegurar que aquest endomorfisme diagonalitza?
d) Trobeu una base B' de $\mathbb{R}^3$ de vectors propis i doneu la matriu de f en aquesta nova base. Quina relació hi ha entre aquesta matriu i la trobada a l'apartat a)

Problema 9

Sigui

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

la matriu d'un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica.
a) Comproveu que els vectors $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, -2)$ i $\boldsymbol{v}_3 = (0, 1, 1)$ són vectors propis i trobeu-ne els valors propis corresponents.
b) Doneu la matriu de f en la base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$.

Problema 10

Estudieu detalladament la diagonalització de les matrius següents:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 25 & -25 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Problema 11

Fent ús del polinomi característic, proveu que tota matriu simètrica d'ordre 2,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

diagonalitza.

Problema 12

D'un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ se sap que transforma el vector $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1)$ en el vector $(2, 4, 2)$ i que els vectors $\boldsymbol{v} = (1, -1, 0)$ i $\boldsymbol{w} = (3,0, -1)$ són vectors propis de f associats a 1 i 0 respectivament.
Demostreu que $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ formen una base de vectors propis de f i doneu la matriu de f en aquesta base i en la base canònica.

5 Transformacions ortogonals al pla i a l'espai

5.1 Coneixements bàsics

5.1.1 Definicions

Siguin $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dos vectors qualssevol de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$.

- El *producte escalar* dels vectors $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ és el nombre real.

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n$$

Propietats

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$ i $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
2. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$
3. $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$
4. $(\lambda \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \lambda (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$

- La *norma* del vector $\boldsymbol{x}$ és el nombre real positiu

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + ... + x_n^{\,2}}\ .$$

Es diu que el vector $\boldsymbol{x}$ és *unitari* si la seva norma val 1.

Propietats

1. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$
2. $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|$
3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$
4. $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$.

- La *distància* entre els vectors $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ és el nombre real positiu

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Propietats

1. $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq 0$ i $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$
2. $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$
3. $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$.

- L'*angle* entre els vectors $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ és

$$\widehat{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \arccos \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}.$$

- Dos vectors no nuls, $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, són *ortogonals* si

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$$

o el que és equivalent, si l'angle que formen els dos vectors és de 90º.

- Una base $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, es diu que és una *base ortogonal* si està formada per vectors ortogonals dos a dos, és a dir:

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = 0 \text{ si } i \neq j \text{ per a } i,j = 1,2,\ldots,n.$$

- Una base $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ es diu que és *ortonormal* si és ortogonal i els vectors que la formen són unitaris.

5.1.2 Transformacions ortogonals

Una *transformació ortogonal* de $\mathbb{R}^n$ és un endomorfisme f d'aquest espai que conserva el producte escalar, és a dir

$$f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$$

per a tot $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$.

Propietats

Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^n$.

1. Si f és una transformació ortogonal, aleshores f conserva les normes, les distàncies i els angles, és a dir:
   a) $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$
   b) $d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
   c) $\widehat{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})} = \widehat{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$
2. f és una transformació ortogonal si i només si transforma bases ortonormals en bases ortonormals.
3. Si f és una transformació ortogonal que admet algun valor propi, aquest només pot ser o +1 o -1.

5.1.3 Matrius ortogonals

Una matriu quadrada, d'ordre *n,* es diu que és una *matriu ortogonal*, si és la matriu d'una transformació ortogonal de $\mathbb{R}^n$ en una base ortonormal.

Propietats

- Si A és una matriu quadrada d'ordre n, aleshores són equivalents:
  1. A és ortogonal
  2. $A^{-1} = A^t$
  3. $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n$ (matriu unitat d'ordre n)

  A més a més, si A és ortogonal, aleshores

$$\det A = +1 \text{ o } \det A = -1 .$$

- Les transformacions ortogonals que tenen determinant +1, es diu que *conserven l'orientació*, i les que tenen determinant −1, que *canvien l'orientació.*

Tenint com a objectiu les aplicacions arquitectòniques de les matemàtiques, les transformacions ortogonals més interessants són les dels espais euclidians $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, per això farem la classificació de totes només en aquests dos espais.

5.1.4 Transformacions ortogonals de $\mathbb{R}^2$

Fixada una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, la matriu de tota transformació ortogonal que en aquesta base tingui determinant 1 s'escriu de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

i es correspon amb un *gir centrat a l'origen d'angle* α, que denotarem per g_α.

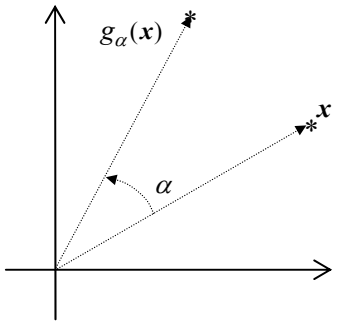


Fig. 5.1

Propietats dels girs

1. El seu determinant val +1 (conserven l'orientació).
2. No tenen vectors propis, llevat del cas en què $\alpha = 0^o$ o $\alpha = 180^o$.
   - Si $\alpha = 0^o$ tenim la *identitat*.
   - Si $\alpha = 180^o$ tenim una *simetria central*, per la qual cosa tot vector de $\mathbb{R}^2$ és vector propi de valor propi -1.

Si la matriu de la transformació ortogonal de $\mathbb{R}^2$ té determinant -1, aquesta es pot escriure de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

i es correspon amb una *simetria axial*, on l'eix de simetria és la recta, *r*, d'equació:

$$y = \tan\frac{\alpha}{2}x$$

i que representarem o bé per s_r, o bé per $s_{\alpha/2}$.

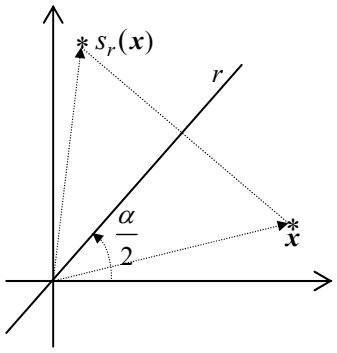


Fig. 5.2

Propietats de les simetries

1. El seu determinant val -1 (no conserven l'orientació).
2. Tenen com a valors propis $\lambda = +1$ i $\lambda = -1$.
3. La direcció de l'eix de simetria ve donada per a qualsevol vector propi associat a $\lambda = +1$.

5.1.5 Transformacions ortogonals de $\mathbb{R}^3$

Per a l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ tenim:

1. Les úniques transformacions ortogonals de $\mathbb{R}^3$ que conserven l'orientació són els *girs* respecte de rectes que passen per l'origen.

En una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ on el primer vector de la base és un vector director de l'eix, *r*, de gir, la matriu del gir es pot escriure com:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (*)$$

on α és l'angle del gir. Aquest gir el representarem per g_r^α.

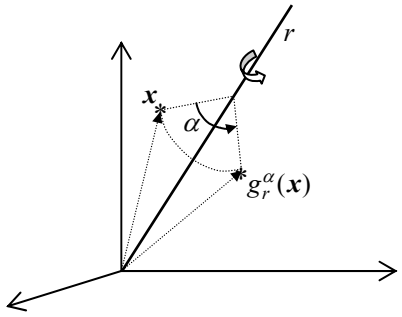


Fig. 5.3

En general, la matriu, A, d'un gir en qualsevol base ortonormal no tindrà l'aparença de (*), però sí que conservarà el determinant i la traça, és a dir:

$$\det A = +1$$
$$\text{traça } A = 1 + 2\cos\alpha$$

i en aquest cas, l'eix de gir es pot determinar com la recta que passa per l'origen de coordenades i que té per vector director qualsevol vector propi de valor propi $\lambda = +1$.

En el cas particular en què $\alpha = 0^\text{o}$ tenim la transformació *identitat* i (*) és la matriu unitat I_3.

2. Les transformacions ortogonals de $\mathbb{R}^3$ que no conserven l'orientació són: les *simetries especulars* (simetries respecte d'un pla que passa per l'origen) i les *simetries rotacionals*.

   - La matriu d'una *simetria especular* en una base ortonormal on el primer vector és perpendicular al pla, Π, de la simetria és:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Aquesta simetria especular la representarem per S_Π.

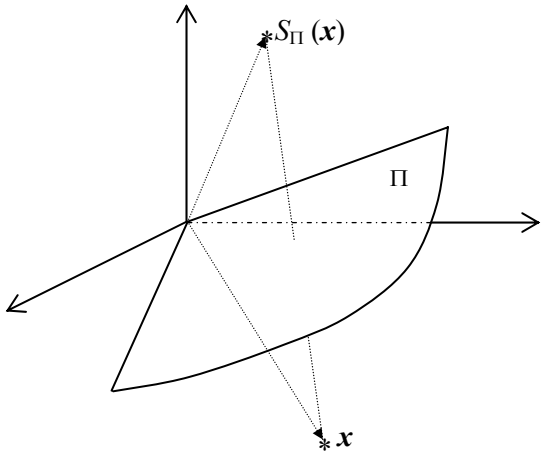


Fig. 5.4

En aquest cas, el pla de simetria es correspon amb el subespai de vectors propis de valor propi $\lambda = +1$.
En general, la matriu A d'una simetria especular, en una base ortonormal qualsevol, es podrà classificar pel valor del seu determinat i per ser A una matriu simètrica:

$$\det A = -1 \text{ i } A^t = A.$$

L'únic cas en què aquests dos fets no es corresponen amb una simetria especular és per la simetria central, que exposem en el paràgraf següent.

- Una *simetria rotacional* és la composició d'una simetria especular amb un gir, o rotació, respecte de la recta perpendicular al pla de simetria i que passa per l'origen.
Si triem una base ortonormal on el primer vector sigui perpendicular al pla Π de simetria, i per tant, en la direcció de l'eix de gir, la matriu de la simetria rotacional és:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

on α és l'angle del gir. Aquesta simetria la representarem per s_Π^α.

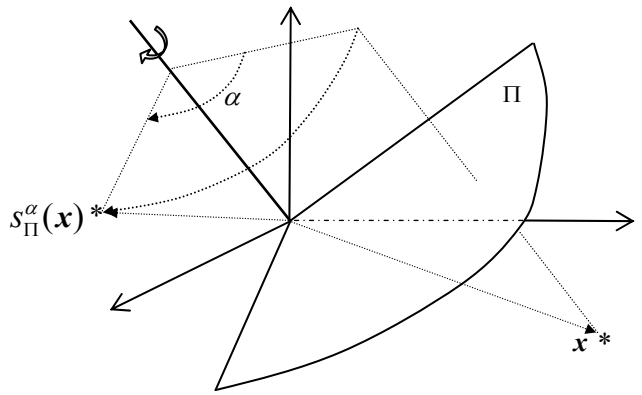


Fig. 5.5

La dimensió del subespai de vectors propis de valor propi –1 és 1, llevat del cas en què $\alpha = 180º$, en què aquesta dimensió val 3 i es tracta d'una *simetria central*.
En general, la matriu, A, d'una simetria rotacional (amb angle de gir $\alpha \neq 180º$) en una base ortonormal qualsevol, es pot identificar pel valor del seu determinant i perquè A no és simètrica

$$\det A = -1 \text{ i } A^t \neq A.$$

A més, l'angle del gir satisfà

$$\text{traça } A = -1+2\cos\alpha$$

Resum

Donada una matriu, A, ortogonal d'ordre 3, podem fer-ne la classificació observant-ne únicament el determinant i, en cas de ser negatiu, mirant si la matriu és simètrica o no. Això es resumeix seguint l'algorisme següent:

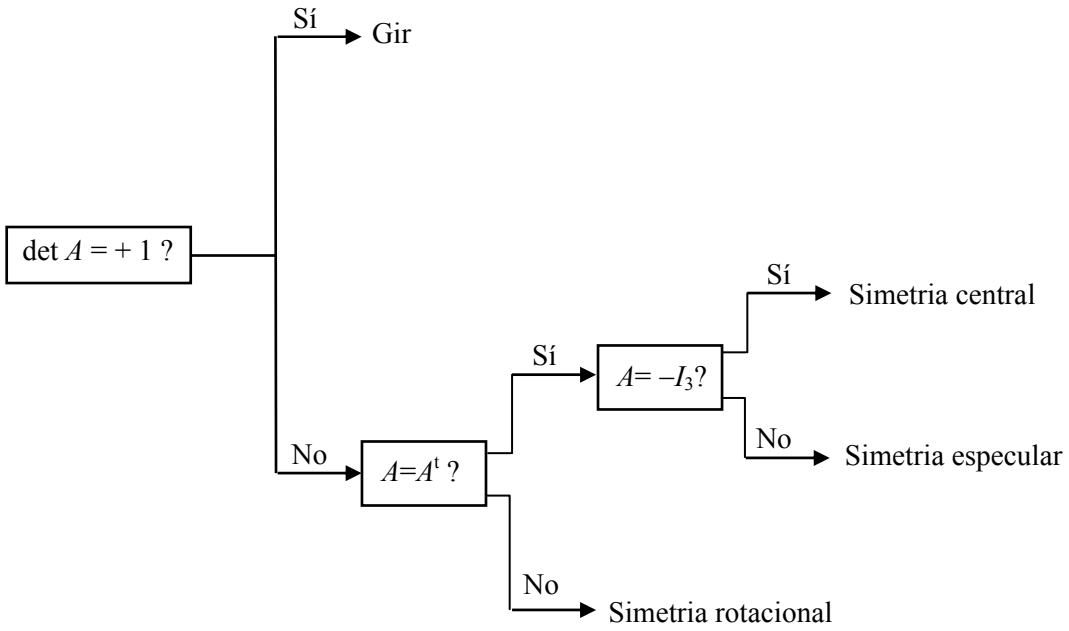


Fig. 5.6

Si $A = I_3$, la transformació ortogonal és la identitat que es considera com un gir d'angle $\alpha = 0º$.

5.2 Problemes resolts

Problema 1

Sigui *f* un gir del pla de 150º respecte de l'origen i *g* una simetria respecte de la recta *y=x*. Justifiqueu que $g \circ f$ és una transformació ortogonal, digueu de quina es tracta i classifiqueu-la donant-ne els elements característics.

Resolució

La composició de dues transformacions ortogonals és una transformació ortogonal ja que

$$(g \circ f)^{-1} = (f)^{-1} \cdot (g)^{-1} = (f)^T \cdot (g)^T = (g \circ f)^T .$$

La matriu del gir serà:

$$(f) = \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

i mirant quines són les imatges dels vectors $(1,0)$ i $(0,1)$ per la simetria *g* tenim la seva matriu:

$$(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fent producte de matrius tenim la matriu de la composició:

$$(g \circ f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sabem que $g \circ f$ és una transformació ortogonal i com que el seu determinant, $\det(g \circ f) = -1$, es tracta d'una simetria respecte de la recta que té la direcció que dóna el subespai de vectors propis associats a $\lambda = +1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y = 0 \end{cases} \quad (\text{equacions equivalents})$$

Així, l'equació de la recta de simetria és:

$$x + \sqrt{3}y = 0.$$

Problema 2

Trobeu la matriu, A, respecte de la base canònica, associada a una simetria de $\mathbb{R}^2$ que té per eix la recta $y = 3x$.

Resolució

Hi ha diverses maneres de resoldre aquest exercici.

Si l'angle que forma la recta de simetria amb l'eix d'abscisses és $\frac{\alpha}{2}$, tenim que $\tan\frac{\alpha}{2} = 3$ i a partir de la relacions trigonomètriques

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \text{ i } \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

podem deduir que $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Així, podem afirmar que la matriu de la simetria és:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (*).$$

Una segona manera de donar aquesta matriu és calculant les imatges dels vectors $(1,0)$ i $(0,1)$ per la simetria. Si (a,b) és la imatge del vector $(1,0)$, aleshores el punt mig $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b}{2}\right)$ és un punt de la recta $y = 3x$ i el vector $(a-1,b)$ és perpendicular a la recta $y = 3x$. Això ens porta al sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 3a - b = -3 \\ a + 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{4}{5},\ b = \frac{3}{5}.$$

De manera anàloga, es calcula la imatge del vector $(0,1)$ i així tenim la matriu de la simetria (*).

Finalment, una altra manera de resoldre aquest exercici consisteix a escriure la matriu de la simetria en una base adequada i després fer un canvi de base. Considerem un vector director i un vector normal de la recta, els prendrem unitaris per tal que formin una base ortonormal:

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \text{ i } \boldsymbol{v}_2 = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

En aquesta base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ la matriu de la simetria és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i en la base original serà:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Problema 3

En l'espai euclidià $\mathbb{R}^2$, se sap que les úniques transformacions ortogonals són els girs g_α d'angle α, i les simetries axials $s_{\alpha/2}$ d'eix de simetria, la recta $y = \tan\frac{\alpha}{2}x$. Trobeu quines transformacions ortogonals s'obtenen de les composicions següents:

a) $g_\beta \circ g_\alpha$

b) $s_{\beta/2} \circ s_{\alpha/2}$

c) $s_{\beta/2} \circ g_\alpha$

d) $g_\beta \circ s_{\alpha/2}$

Resolució

Sabem que les matrius del gir g_α i de la simetria axial $s_{\alpha/2}$ en la base canònica són:

$$(g_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad (s_{\alpha/2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

respectivament, per tant:

a)

$$(g_\beta \circ g_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = (g_{\alpha+\beta}).$$

b)

$$(s_{\beta/2} \circ s_{\alpha/2}) = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha & \sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha) & -\sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix} = (g_{\beta-\alpha}).$$

c) Fent ús dels apartats anteriors tenim:

$$s_{\beta/2} \circ g_\alpha = s_{\beta/2} \circ g_{\beta-(\beta-\alpha)} = s_{\beta/2} \circ s_{\beta/2} \circ s_{(\beta-\alpha)/2} = Id \circ s_{(\beta-\alpha)/2} = s_{(\beta-\alpha)/2}$$

d) De manera anàloga:

$$g_\alpha \circ s_{\beta/2} = g_{(\alpha+\beta)-\beta} \circ s_{\beta/2} = s_{(\alpha+\beta)/2} \circ s_{\beta/2} \circ s_{\beta/2} = s_{(\alpha+\beta)/2} \circ Id = s_{(\alpha+\beta)/2}$$

Problema 4

Què podem dir de la traça d'una matriu A ortogonal d'ordre 3? I si només en coneixem la traça, què podem dir de la transformació ortogonal que representa?

Resolució

Sabem que la traça de les matrius es conserva per canvis de base. Per tant, la traça de la matriu A només pot ser:

- 3 si $A = I_3$.
- $1 + 2\cos\alpha$ si A és la matriu d'un gir d'angle α.
- 1 si A és la matriu d'una simetria especular.
- $-1 + 2\cos\alpha$ si A és la matriu d'una simetria rotacional i l'angle del gir és α.

Ara bé, per a tot valor d'α tenim

$$1 + 2\cos\alpha \in [-1,3] \quad \text{i} \quad -1 + 2\cos\alpha \in [-3,1]$$

així, podem afirmar que tota matriu d'una transformació ortogonal té la traça compresa entre –3 i 3.

Observem que pels extrems d'aquests intervals tenim casos especials. En el cas d'un gir que tingui traça igual a -1, l'angle de gir és 180º, aquest cas es pot mirar com una *simetria respecte d'un eix*, també anomenada *simetria axial*. Si la traça és 3, l'angle de gir és 0º que correspon a l'aplicació *identitat*. L'única simetria rotacional que té traça -3 és la simetria rotacional d'angle 180º, també anomenada *simetria central*, i si la traça és 1, l'angle de gir de la simetria rotacional és 0º i, per tant, es tracta d'una *simetria especular*.

Ara podem afirmar que si d'una matriu A ortogonal d'ordre 3 en coneixem la traça, aleshores:

- Si traça $A = -3$, aleshores $A = -I_3$, és a dir, A és la matriu d'una *simetria central*.
- Si traça $A \in (-3,-1)$, aleshores A és la matriu d'una *simetria rotacional*.
- Si traça $A \in [-1,1)$, A és la matriu d'un *gir* o bé la matriu d'una *simetria rotacional*.
- Si traça $A = 1$, A és la matriu d'un *gir* d'angle 90º o 270º o bé la matriu d'una *simetria especular*.
- Si traça $A \in (1,3)$, A només pot ser la matriu d'un *gir*.
- Si traça $A = 3$, aleshores $A = I_3$, és a dir, és la matriu de la *identitat*.

Problema 5

Considerem un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ que, en una certa base ortonormal, té per matriu:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Justifiqueu que és una transformació ortogonal, classifiqueu-la i doneu-ne els elements característics.

Resolució

f és una transformació ortogonal ja que:

$$A^t \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i com que el $\det(A) = -1$ i A és simètrica, $A^t = A$, podem afirmar que és una simetria especular. El pla de simetria, Π, serà el subespai de vectors propis de valor propi $\lambda = +1$

$$\Pi = \left\{ (x,y,z) / \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) / \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

d'on s'obté que l'equació del pla Π és

$$\Pi \equiv x + y - z = 0.$$

Problema 6

Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que té per matriu en base canònica:

$$A_k = k\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculeu els valors de $k \in \mathbb{R}$, pels quals aquesta matriu correspon a una transformació ortogonal. Per aquests valors classifiqueu-la i doneu-ne els elements característics.

Resolució

Imposant que la matriu A sigui ortogonal

$$A_k \cdot A_k^t = I_3 \Leftrightarrow k\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} k\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 6k^2 = 1$$

tenim dos possibles valors de k

$$k = \frac{-1}{\sqrt{6}} \quad \text{i} \quad k' = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Per a $k = \frac{-1}{\sqrt{6}}$, el $\det A_k = -1,$ i com que la matriu no és simètrica, podem afirmar que es tracta d'una simetria rotacional. Per trobar un vector normal al pla, Π, de simetria, calculem el subespai de vectors propis associats a $\lambda = -1$

$$\left\{(x,y,z)/\left(A_k + I_3\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{(x,y,z)/\frac{-1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{6} & 1 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-\sqrt{6} & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z)/\begin{pmatrix}1-\sqrt{6} & 1 & -2\\ 1 & 1-\sqrt{3} & 1\\ 1 & -1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\langle\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{6}, 1+\sqrt{2}, -2+\sqrt{3}\right)\right\rangle.$$

Aquest subespai és perpendicular al pla. Així doncs, es tracta d'una simetria rotacional respecte del pla d'equació:

$$\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)x + \left(1+\sqrt{2}\right)y + \left(-2+\sqrt{3}\right)z = 0$$

seguit d'un gir respecte de la recta, *r*, que passa per l'origen i té la direcció del vector normal al pla

$$r \equiv \frac{x}{1-\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{y}{1+\sqrt{2}} = \frac{z}{-2+\sqrt{3}}.$$

L'angle de gir α satisfà

$$-1 + 2\cos\alpha = -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{-1-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$$

el sentit de l'angle es pot determinar a partir d'un vector de Π i la seva imatge.

Per $k' = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\det A_{k'} = 1$ i es correspon a un gir. Per trobar la direcció de l'eix de gir, *r*, cal estudiar el subespai de vectors propis de valor propi $\lambda = +1$

$$\left\{(x,y,z)/\left(A_{k'} - I_3\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{(x,y,z)/\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{6} & 1 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-\sqrt{6} & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

que dóna el mateix sistema d'equacions que en el cas anterior, per tant

$$r \equiv \frac{x}{1-\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{y}{1+\sqrt{2}} = \frac{z}{-2+\sqrt{3}}.$$

L'angle de gir α es determina a partir de la igualtat

$$1+2\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$$

i d'un vector perpendicular a l'eix de gir i la seva imatge.

Problema 7

Si M és la matriu d'una transformació ortogonal de l'espai $\mathbb{R}^3$, a quina transformació correspon la matriu M^t? I a quina la matriu M^2?

Resolució

Bàsicament, tenim tres casos diferents de transformació ortogonal, si bé per a tots ells

$$M^t = M^{-1}.$$

Fem la resposta per a cada un dels casos:

Si M correspon a la matriu d'un gir d'angle α respecte d'una recta, M^t serà la matriu del moviment invers, és a dir, un gir d'angle $-\alpha$ respecte de la mateixa recta. Mentre que la matriu M^2 correspon a un gir d'angle 2α respecte del mateix eix.

Si M és la matriu d'una simetria especular, M^t és la matriu que correspon al mateix moviment, ja que en aquest cas $M^t = M$, i pel mateix motiu tenim que $M^2 = Id$.

Finalment, si M és la matriu d'una simetria rotacional, M^t és la matriu d'una altra simetria rotacional, on el pla de simetria és el mateix i l'angle de gir canvia de signe. La matriu M^2 serà la matriu d'un gir d'angle 2α.

Problema 8

Doneu la matriu d'una simetria rotacional respecte del pla $2x + y + 2z = 0$ i angle de gir de 90º.

Resolució

Considerem una base ortonormal en què el primer vector de la base és un vector normal al pla de simetria, per exemple:

$$\left\{\boldsymbol{v}_1=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\boldsymbol{v}_2=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right),\boldsymbol{v}_3=\left(\frac{-2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

En aquesta base, la matriu de la simetria rotacional serà:

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos 90^{\circ} & -\sin 90^{\circ}\\ 0 & \sin 90^{\circ} & \cos 90^{\circ}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Fent un canvi de base tindrem la matriu de la simetria rotacional en la base original:

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4 & -8 & -1\\ 4 & -1 & -8\\ -7 & 4 & -4\end{pmatrix}$$

Problema 9

Demostreu que a $\mathbb{R}^3$ la composició d'un gir d'angle α respecte d'una recta r i d'una simetria especular respecte d'un pla Π que conté r, és una simetria especular. Doneu el pla de simetria de les seves composicions.

Resolució

Sigui g_r^{α} un gir d'angle α respecte de la recta r, i s_{Π} una simetria especular respecte de Π. Si $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ on $\boldsymbol{v}_1$ és un vector director de r, i per tant també del pla Π, $\boldsymbol{v}_2$ un altre vector director de Π i $\boldsymbol{v}_3$ un vector normal d'aquest pla, aleshores les matrius d'aquestes dues transformacions ortogonals en aquesta base són:

$$\left(g_r^{\alpha}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\ \text{ i }\ \left(s_{\Pi}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

La matriu de la simetria seguida del gir serà:

$$\left(g_r^{\alpha}\circ s_{\Pi}\right)=\left(g_r^{\alpha}\right)\left(s_{\Pi}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$$

que, efectivament, correspon a la matriu d'una simetria especular, ja que el seu determinant és -1 i és una matriu simètrica. El pla de simetria ve donat pel subespai dels vectors propis de valor propi $\lambda=+1$:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha-1 & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}(\cos\alpha-1)y+\sin\alpha z=0\\ \sin\alpha\, y-(\cos\alpha+1)z=0\end{cases}\ (\text{equacions equivalents}).$$

Així, en la base que hem triat, l'equació del pla de simetria de $g_r^\alpha \circ s_\Pi$ té per equació

$$\Pi' \equiv (\cos\alpha-1)y+\sin\alpha z=0.$$

Per donar la solució relativa a les dades del problema, calculem l'angle que formen els dos plans Π i Π'. Considerem el vector $\boldsymbol{w}=(0,\cos\alpha-1,\sin\alpha)$ normal a Π' i calculem l'angle que formen els dos plans:

$$\widehat{\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{w}}=\arccos\frac{\boldsymbol{v}_3\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}_3\|\|\boldsymbol{w}\|}=\arccos\frac{(0,0,1)\cdot(0,\cos\alpha-1,\sin\alpha)}{\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha}}=\arccos\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}$$

i tenint en compte que $2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$ i $\sin\alpha=2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ obtenim que:

$$\widehat{\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{w}}=\arccos\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\alpha}{2}.$$

Així, podem afirmar que la composició $g_r^\alpha \circ s_\Pi$ és una simetria especular respecte d'un pla que conté la recta r i que forma un angle $\pm\frac{\alpha}{2}$ amb el pla Π. El signe dependrà de l'orientació de l'espai triada a l'hora de fer el gir.

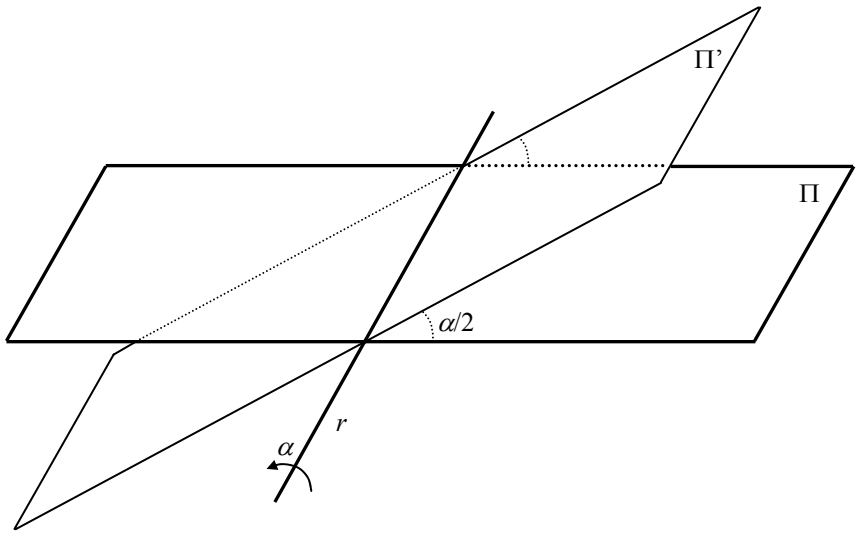


Fig. 5.7

Si ara fem la composició en ordre invers, $s_\Pi \circ g_r^\alpha$, tenim:

$$\left(s_\Pi \circ g_r^\alpha\right) = \left(s_\Pi\right)\left(g_r^\alpha\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

que torna a ser la matriu d'una simetria especular. Anàlogament al cas anterior, trobem l'equació del pla de simetria Π''

$$\Pi'' \equiv (\cos\alpha - 1)y - \sin\alpha z = 0.$$

Aquesta simetria especular també ho és respecte d'un pla que conté la recta r, però ara l'angle que formen els dos plans serà $\mp\frac{\alpha}{2}$.

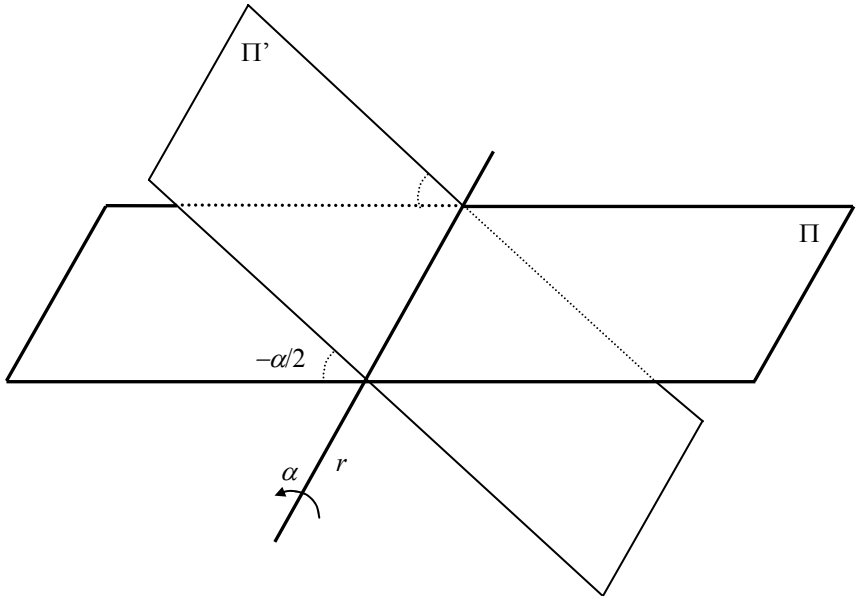


Fig. 5.8

Problema 10

Estudieu quina transformació ortogonal s'obté de la composició d'una simetria especular respecte del pla d'equació $x = y$ i el gir axial de 60º respecte de la recta d'equació $x = y = z$.

Resolució

La matriu de la simetria en la base canònica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ s'obté fàcilment observant les imatges dels seus vectors, que són $(0,1,0),(1,0,0)$ i $(0,0,1)$, respectivament.

$$\left(s_{x=y}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pel gir, considerem la base ortonormal

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$$

on el primer vector és un vector director de l'eix, *r*, de gir. En aquesta base la matriu del gir, $g_r^{60^\circ}$, és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

i en la base canònica

$$\left(g_r^{60^\circ}\right)=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & -\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriu de la composició $s_{x=y}\circ g_r^{60^\circ}$ serà

$$\left(s_{x=y}\circ g_r^{60^\circ}\right)=\left(s_{x=y}\right)\left(g_r^{60^\circ}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

que correspon a la matriu d'una simetria especular, ja que el seu determinant val -1 i és una matriu simètrica. El pla de simetria, Π, és el subespai de vectors propis de valor propi $\lambda=+1$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3 & 2 & -1 \\ 2 & -1-3 & 2 \\ -1 & 2 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \Pi\equiv x-2y+z=0$$

Per l'altra composició, $g_r^{60^\circ}\circ s_{x=y}$

$$\left(g_r^{60^\circ}\circ s_{x=y}\right)=\left(g_r^{60^\circ}\right)\left(s_{x=y}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

també ens dona una simetria especular i en aquest cas el pla de simetria, Π', serà:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1-3 & 2 & 2 \\ 2 & 2-3 & -1 \\ 2 & -1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \Pi'\equiv 2x-y-z=0.$$

Problema 11

Estudieu quina transformació ortogonal s'obté de la composició d'una simetria especular respecte del pla d'equació $x = 0$ i el gir axial de 120º respecte de la recta d'equació $x = y = 2z$.

Resolució

La matriu de la simetria és

$$\left(s_{x=0}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En una base ortonormal on el primer vector sigui un vector director de l'eix de gir, r:

$$\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\}$$

la matriu del gir és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

i la matriu del gir en la base canònica l'obtenim fent el canvi de base següent:

$$\left(g_r^{120^\circ}\right) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4-\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} \\ 4+\sqrt{3} & 1 & 2-2\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

Així, la matriu de la composició $s_{x=0} \circ g_r^{120^\circ}$ serà:

$$\left(s_{x=0} \circ g_r^{120^\circ}\right) = \left(s_{x=0}\right)\left(g_r^{120^\circ}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4-\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} \\ 4+\sqrt{3} & 1 & 2-2\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -4+\sqrt{3} & -2-2\sqrt{3} \\ 4+\sqrt{3} & 1 & 2-2\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

que correspon a la matriu d'una simetria rotacional, ja que el seu determinant val -1 i no és una matriu simètrica. L'eix de gir és el subespai de vectors propis de valor propi $\lambda = -1$:

$$r \equiv \left\{ (x,y,z) / \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1+6 & -4+\sqrt{3} & -2-2\sqrt{3} \\ 4+\sqrt{3} & 1+6 & 2-2\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} & -2+6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \left(\sqrt{3}, -1, 2\right) \right\rangle$$

L'angle de gir serà un angle, α, tal que:

$$-1 + 2\cos\alpha = \text{traça}\left(s_{x=0} \circ g_r^{120^\circ}\right) \Rightarrow -1 + 2\cos\alpha = \frac{-1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

I el pla de simetria tindrà per equació:

$$\sqrt{3}x - y + 2z = 0.$$

Anàlogament, la composició $g_r^{120^\circ} \circ s_{x=0}$ també dóna com a resultat una simetria rotacional

$$\left(g_r^{120^\circ} \circ s_{x=0}\right) = \left(g_r^{120^\circ}\right)\left(s_{x=0}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4-\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} \\ 4+\sqrt{3} & 1 & 2-2\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 4-\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} \\ -4-\sqrt{3} & 1 & 2-2\sqrt{3} \\ -2+2\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, l'eix de gir és el subespai

$$r \equiv \left\{ (x,y,z) / \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 4-\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} \\ -4-\sqrt{3} & 1 & 2-2\sqrt{3} \\ -2+2\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \left(\sqrt{3}, 1, -2\right) \right\rangle \Leftrightarrow r \equiv \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2},$$

i el pla de simetria Π té per equació

$$\Pi \equiv \sqrt{3}x + y - 2z = 0.$$

Finalment, l'angle del gir, α ,verificarà $-1 + 2\cos\alpha = \text{traça}\left(g_r^{120^\circ} \circ s_{x=0}\right)$ i per tant, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

5.3 Problemes proposats

Problema 1

Doneu la matriu del gir de 30º a $\mathbb{R}^2$. Quina és la imatge del triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(2,0)$ i $(1,2)$?

Problema 2

Donat un endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ que, en una base ortonormal, té matriu

$$\begin{pmatrix} -3/4 & \sqrt{7}/4 \\ \sqrt{7}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

justifiqueu que és una transformació ortogonal, classifiqueu-la i doneu-ne els elements característics.

Problema 3

Considereu la simetria de $\mathbb{R}^2$ respecte de la recta $x = \sqrt{5}y$.

a) Doneu-ne la matriu. Quins valors i vectors propis té aquesta transformació ortogonal?

b) Calculeu la imatge de la recta que té per equació $y = \sqrt{5}$.

Problema 4

Si f és un gir de $\mathbb{R}^2$ de 45º i g una simetria respecte de la recta $y = x$, calculeu i doneu la matriu de les composicions $g \circ f$, $f \circ g$ i $f^{-1} \circ g$.

Problema 5

a) Quins possibles valors pot prendre la traça d'una transformació ortogonal de $\mathbb{R}^2$?

b) D'una transformació ortogonal de $\mathbb{R}^2$, sabem que la seva traça és 0 i el seu determinant positiu. Què podem dir-ne?

Problema 6

Estudieu si les matrius següents són ortogonals. En cas afirmatiu digueu a quina transformació ortogonal corresponen i doneu els seus elements característics:

a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 7

Considereu el gir, a $\mathbb{R}^3$, respecte de la recta $x = -y = z$ i d'angle 60º.

a) Doneu-ne la matriu.
b) Calculeu la imatge de la recta d'equació vectorial $(x, y, z) = (1, 0, -1) + t(0, -1, 1)$.

Problema 8

Trobeu els valors d'a, b i c pels quals la matriu

$$\begin{pmatrix} 1/9 & 4/9 & a \\ 4/9 & 7/9 & b \\ 8/9 & -4/9 & c \end{pmatrix}$$

és ortogonal. Classifiqueu les transformacions ortogonals que s'obtenen i doneu-ne els elements característics.

Problema 9

Calculeu la matriu associada a cada una de les transformacions següents:

a) Simetria especular respecte del pla d'equació $x - 8y + 4z = 0$.
b) Simetria rotacional respecte del pla d'equació $7x + 4y + 4z = 0$ i angle de gir 120º.

Problema 10

Estudieu quina transformació ortogonal s'obté de la composició d'una simetria especular respecte del pla d'equació $x + y = 0$, i el gir axial de 45º respecte de la recta que té per equacions $x + y = 0$ i $z = 0$.

Problema 11

Estudieu quina transformació ortogonal s'obté de la composició d'una simetria especular respecte del pla d'equació $2x + 2y - z = 0$, i el gir axial de 270º respecte de la recta d'equacions $x = y = 0$.

Problema 12

Digueu si les afirmacions següents són certes o falses i justifiqueu-ne la resposta.

a) A $\mathbb{R}^2$, la composició de dues simetries respecte de dues rectes perpendiculars que passen per l'origen, és una simetria central.
b) Les transformacions ortogonals de $\mathbb{R}^2$ que conserven l'orientació no tenen vectors propis.
c) Si una transformació ortogonal de $\mathbb{R}^3$ té -1 com a valor propi, segur que no és un gir.
d) La matriu d'una simetria especular és simètrica.
e) A $\mathbb{R}^3$, la composició d'una simetria rotacional amb una simetria especular és una simetria central.
f) Si la matriu d'un gir a $\mathbb{R}^3$ és simètrica, aleshores l'angle de gir és de 0º o bé 180º.

6 Isometries del pla i de l'espai

6.1 Coneixements bàsics

6.1.1 Definicions

Una *isometria* o *moviment rígid* de l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ és una aplicació $\mathcal{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que conserva les distàncies, és a dir,

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{F}(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

per a qualssevol $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$.

Com a conseqüència d'aquesta definició, es tenen les propietats següents:

1. Si $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ són dues isometries, aleshores $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ és una isometria.
2. Si $\mathcal{F}$ és una isometria, $\mathcal{F}^{-1}$ també és una isometria.

Exemple 1. Totes les transformacions ortogonals de $\mathbb{R}^n$ són isometries.

Exemple 2. Si $\boldsymbol{v}$ és un vector de $\mathbb{R}^n$, l'aplicació $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida per

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

és una isometria anomenada *translació* de vector $\boldsymbol{v}$. (Observeu que les translacions no són aplicacions lineals)

En general, si $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ són dos vectors de $\mathbb{R}^n$:

1. $\mathcal{T}_{\boldsymbol{w}} \circ \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} = \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{T}_{\boldsymbol{w}} = \mathcal{T}_{\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}}$
2. $\left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}\right)^{-1} = \mathcal{T}_{-\boldsymbol{v}}$

Teorema. Les úniques isometries de $\mathbb{R}^n$ són:

1. Les transformacions ortogonals.
2. Les translacions.
3. Les composicions de transformacions ortogonals i translacions. En aquest cas, es prova que si $\mathcal{F}$ és una d'aquestes composicions, aleshores $\mathcal{F}$ sempre es pot descompondre de la forma

$$\mathcal{F} = \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ f$$

on f és una transformació ortogonal de $\mathbb{R}^n$, que es dirà *associada* a $\mathcal{F}$, i $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}$ la translació de vector $\boldsymbol{v} = \mathcal{F}(\mathbf{0})$ i es té

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \mathcal{F}(\mathbf{0})$$

i

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{F}(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

per a qualssevol $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Si B és una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ i en aquesta base

$$(f)_B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ i } \quad \boldsymbol{v} = \mathcal{F}(\mathbf{0}) = (v_1, ..., v_n)$$

aleshores, podem escriure l'expressió del moviment $\mathcal{F}$ de forma matricial

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{x}))^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

per a tot $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si ara afegim un 1 a la darrera coordenada dels elements de $\mathbb{R}^n$ i els identifiquem com a $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \equiv (x_1, ..., x_n \mid 1)$, aquesta equació matricial es pot escriure així

$$(\mathcal{F}(x_1, ..., x_n \mid 1))^t = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{n1} & v_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & & a_{nn} & v_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

La matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{n1} & v_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & & a_{nn} & v_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} & (f)_B & & \boldsymbol{v}^t \\ & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

s'anomena *matriu de la isometria* i es representa per $(\mathcal{F})_B$ o simplement per $(\mathcal{F})$.

Si $\det(f)_B = +1$, es diu que $\mathcal{F}$ conserva l'orientació de les figures o que és un moviment *directe*, i si $\det(f)_B = -1$, es diu que $\mathcal{F}$ canvia l'orientació o també que és un moviment *invers*.

Recíprocament, fixada una base ortonormal, B, de $\mathbb{R}^n$, si M és una matriu ortogonal d'ordre n i $\boldsymbol{v}$ un element de $\mathbb{R}^n$, llavors l'aplicació $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida de forma matricial per

$$\left(\mathcal{F}(\boldsymbol{x})\right)^t = M\cdot\boldsymbol{x}^t + \boldsymbol{v}^t$$

és una isometria que té com a transformació ortogonal associada l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$ definit en la base B per la matriu M.

De les propietats de les isometries, es té que si $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ són dues isometries de $\mathbb{R}^n$ amb transformacions ortogonals associades f i g respectivament, aleshores,

1. $\left(\mathcal{G}\circ\mathcal{F}\right)_B = \left(\mathcal{G}\right)_B\cdot\left(\mathcal{F}\right)_B$ i $g\circ f$ és la transformació ortogonal associada a $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$.
2. $\left(\mathcal{F}^{-1}\right)_B = \left(\mathcal{F}\right)_B^{-1}$ i f^{-1} és la transformació ortogonal associada a $\mathcal{F}^{-1}$.

Notació. A partir d'ara, considerarem els elements $\left(p_1,...,p_n\right)\in\mathbb{R}^n$ tant punts com vectors. Així, escriurem $P=\left(p_1,...,p_n\right)$ si el prenem com un punt, i $\boldsymbol{P}=\left(p_1,...,p_n\right)$ si és com un vector. En aquest cas, $\left(p_1,...,p_n\right)$ seran les coordenades de $\boldsymbol{P}$ en la base canònica

$$\left\{\boldsymbol{e}_1=(1,0,...,0),\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,...,0),...,\ \boldsymbol{e}_n=(0,...,1)\right\}.$$

6.1.2 Isometries del pla

Sabem que les úniques transformacions ortogonals de $\mathbb{R}^2$ són els girs amb centre l'origen de coordenades i les simetries axials amb eix de gir una recta que passa per l'origen. Quan es fan totes les composicions possibles entre aquestes transformacions i les translacions, les diferents isometries que poden aparèixer són:

- *Girs* amb centre un punt qualsevol del pla.
- *Simetries* axials amb eix una recta qualsevol del pla.
- *Translacions*.
- *Lliscaments*: simetria seguida de translació de vector paral·lel a l'eix de simetria.

Girs

Els girs són els moviments del pla que només tenen un punt fix, que és el *centre de gir*.
Si $\mathcal{G}_P^\alpha$ és el gir de centre el punt $P=\left(p_1,\ p_2\right)$ i angle α, es té

$$\mathcal{G}_P^\alpha = \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}\circ g_\alpha$$

on g_α és el gir de centre l'origen i angle α i $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}$ la translació de vector $\boldsymbol{v}=\mathcal{G}_P^\alpha(\boldsymbol{0})$, per tant

$$\mathcal{G}_P^\alpha(\boldsymbol{x}) = g_\alpha(\boldsymbol{x})+\mathcal{G}_P^\alpha(\boldsymbol{0})$$

per a tot $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$.

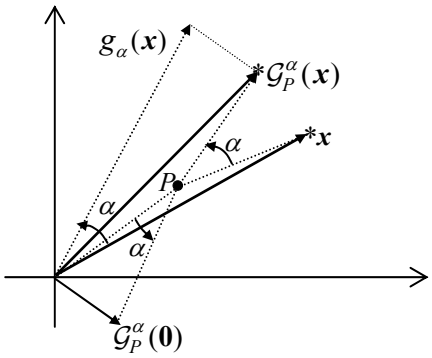


Fig. 6.1

Com que el centre de gir és un punt fix

$$\boldsymbol{P} = \mathcal{G}_P^\alpha(\boldsymbol{P}) = g_\alpha(\boldsymbol{P}) + \mathcal{G}_P^\alpha(\mathbf{0})$$

i podem escriure l'expressió de $\mathcal{G}_P^\alpha$ en funció de la seva transformació ortogonal associada, g_α, (gir de centre l'origen i angle α) i de $\boldsymbol{P}$

$$\mathcal{G}_P^\alpha(\boldsymbol{x}) = g_\alpha(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{P} - g_\alpha(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} + g_\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}).$$

Finalment, si $\mathcal{G}_P^\alpha(\mathbf{0}) = (a, b)$

$$\left(\mathcal{G}_P^\alpha\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & a \\ \sin\alpha & \cos\alpha & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

és la matriu del gir $\mathcal{G}_P^\alpha$. Els valors de *a i b* es poden determinar a partir de la propietat que el centre del gir és un punt fix, és a dir, $\mathcal{G}_P^\alpha(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$.

Simetries axials

Una simetria axial, o simplement simetria, és el moviment del pla que té tota una recta de punt fixos anomenada *eix de simetria*. Si $\mathcal{S}_r$ és la simetria d'eix la recta *r*, llavors

$$\mathcal{S}_r = \mathcal{T}_{\boldsymbol{u}} \circ s_{r_O}$$

on s_{r_o} és la simetria axial d'eix la recta, r_O, paral·lela a *r* i que passa per l'origen de coordenades, *O*, i $\mathcal{T}_{\boldsymbol{u}}$ la translació de vector $\boldsymbol{u} = \mathcal{S}_r(\mathbf{0})$. Per tant,

$$\mathcal{S}_r(\boldsymbol{x}) = s_{r_o}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{S}_r(\mathbf{0})$$

per a tot $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

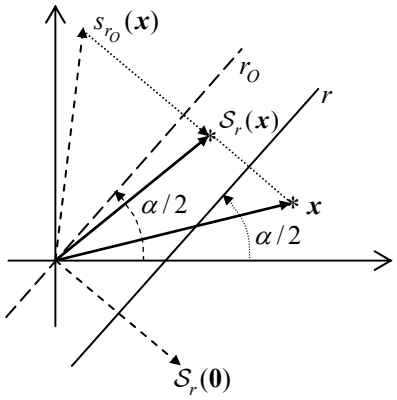


Fig. 6.2

Si $\mathcal{S}_r(\mathbf{0}) = (a,\ b)$, aleshores

$$(\mathcal{S}_r) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin a & a \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

és la matriu de la simetria $\mathcal{S}_r$. Els valors de a i b es poden obtenir imposant que la recta r quedi invariant per aquest moviment.

Translacions

Les translacions són els moviments del pla que no tenen cap punt fix però que tenen infinites rectes fixes, totes les paral·leles al vector de translació.
Si $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}$ és la translació de vector $\boldsymbol{v} = (a, b)$

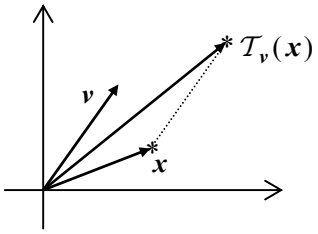


Fig. 6.3

la seva matriu és:

$$(\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Lliscaments

Un lliscament al pla és la composició d'una simetria axial amb una translació de vector paral·lel a l'eix de simetria. Els lliscaments no tenen cap punt fix, però sí que tenen una recta fixa que és l'eix de la simetria.
Si $\mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}}$ és el lliscament d'eix la recta r i vector de translació $\boldsymbol{w}$ (paral·lel a r), aleshores

$$\mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}} = \mathcal{T}_{\boldsymbol{w}} \circ \mathcal{S}_r$$

on $\mathcal{S}_r$ és la simetria d'eix r i $\mathcal{T}_{\boldsymbol{w}}$ la translació de vector $\boldsymbol{w}$.

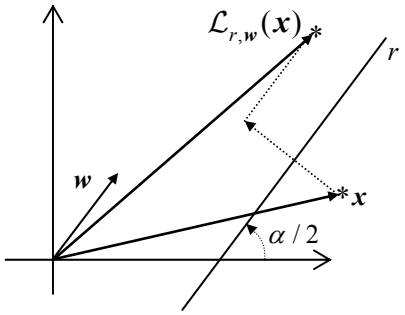


Fig. 6.4

I, per tant, la matriu d'aquest moviment serà de la forma

$$\left(\mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & c \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on $\alpha/2$ és l'angle que forma la recta r amb l'eix d'abscisses. Els valors de c i d es poden determinar a partir d'un punt qualsevol de r i de la seva imatge

$$\boldsymbol{x} \in r \Leftrightarrow \mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}.$$

6.1.3 Classificació de les isometries del pla segons la seva matriu

Si $\mathcal{F}$ és una isometria del pla donada per la matriu

$$\left(\mathcal{F}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & M & & \boldsymbol{v}^t \\ & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on M és una matriu ortogonal d'ordre 2 i $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, aleshores:

1. Si det $M = 1$, $\mathcal{F}$ és un moviment directe i tenim dos casos:
   - Si $M = I_2$, $\mathcal{F}$ és una *translació* si $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, i és la *identitat* si $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.
   - Si $M \neq I_2$, $\mathcal{F}$ és un *gir*. El centre de gir és l'únic punt fix per aquest moviment i l'angle de gir s'obté a partir dels termes de la matriu ortogonal M. En el cas particular que l'angle de gir sigui π, el gir és una *simetria central* respecte del punt fix de $\mathcal{F}$.

2. Si det $M = -1$, estudiem l'existència de punts fixos de $\mathcal{F}$:
   - Si $\mathcal{F}$ té punts fixos: *simetria axial*. L'eix de la simetria és el conjunt de punts fixos per $\mathcal{F}$

$$\text{Eix} = \{ \boldsymbol{x} / \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \}.$$

   - Si $\mathcal{F}$ no té punts fixos: *lliscament*. El vector $\boldsymbol{v}$ de la translació es pot obtenir a partir de la relació

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \mathcal{T}_{2\boldsymbol{v}}$$

   i l'eix de simetria per la seva propietat de ser una recta invariant per $\mathcal{F}$

$$\text{Eix} = \{ \boldsymbol{x} / \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \}.$$

6.1.4 Isometries de l'espai

Sabem que a l'espai $\mathbb{R}^3$ les úniques transformacions ortogonals són: els girs d'eix una recta que passa per l'origen, les simetries especulars respecte d'un pla que passa per l'origen i les simetries rotacionals amb pla de simetria i eix de gir que passen per l'origen. Aleshores, tots els moviments de l'espai són, a més dels que acabem de descriure, les translacions i totes les possibles composicions entre tots ells.

A continuació, donem els moviments resultants d'aquestes composicions i les seves matrius en una base ortonormal adequada relacionada amb la transformació ortogonal del moviment.

Translació: $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}$

$$(\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

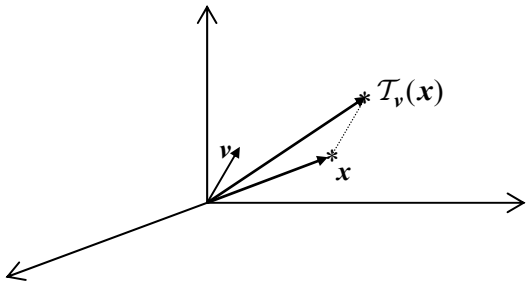


Fig. 6.5

Simetria especular i translació: $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ s_{\Pi}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

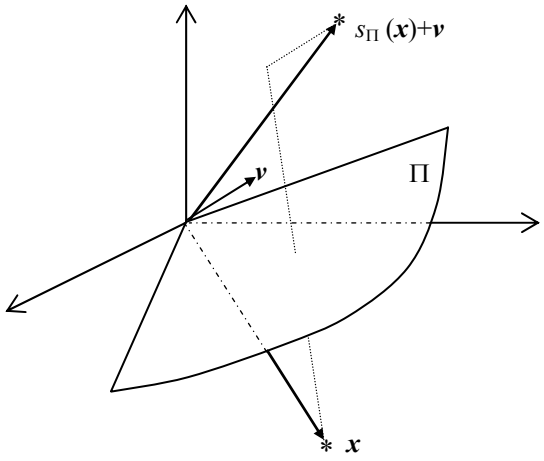
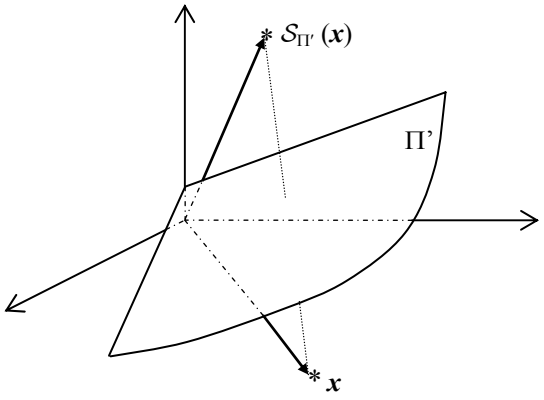


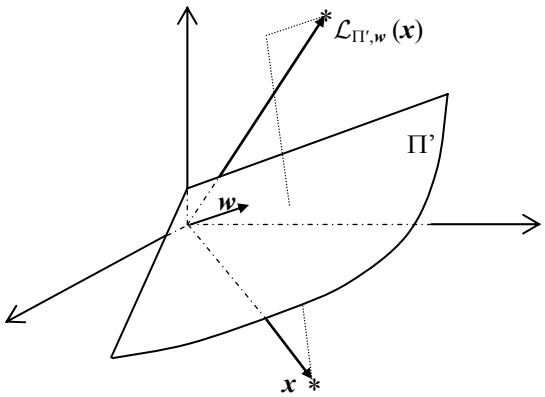
Fig. 6.6

Segons la posició del vector ***v*** de la translació respecte del pla Π de simetria, aquest moviment serà:

- Una *simetria especular*. El pla Π' de simetria és un pla paral·lel a Π format pels punts fixos pel moviment.
- Un *lliscament*: simetria especular composta amb una translació de vector paral·lel al pla de simetria. El pla Π' de la simetria és paral·lel a Π i invariant pel moviment.



Simetria especular $\left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ s_{\Pi} = \mathcal{S}_{\Pi'}\right)$



Lliscament $\left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ s_{\Pi} = \mathcal{L}_{\Pi',\boldsymbol{w}}\right)$

Fig. 6.7

Gir i translació: $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ g_r^{\alpha}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & b \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

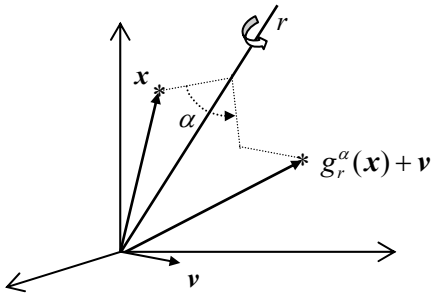
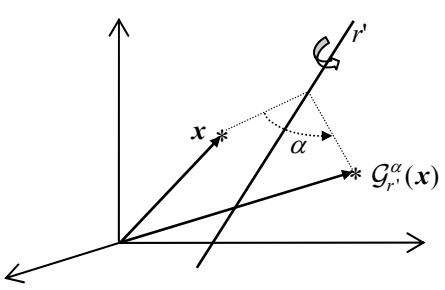


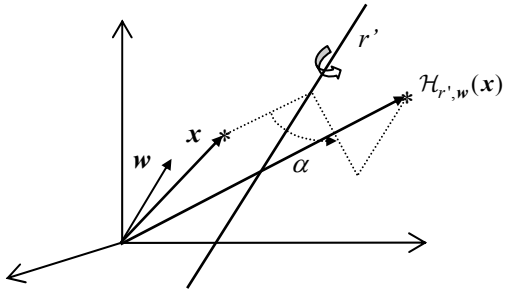
Fig. 6.8

Segons la posició del vector $\boldsymbol{v}$ de la translació respecte de l'eix de gir, *r*, aquest moviment serà:

- Un *gir*. L'eix de gir és una recta paral·lela a *r* i està formada per tots els punts fixos del moviment. En el cas particular de $\alpha = \pi$ el gir s'anomena *simetria axial* respecte de la recta *r*.
- Un *moviment helicoïdal* (gir compost amb una translació de vector paral·lel a l'eix de gir). En aquest cas l'eix de gir és paral·lel a *r* i invariant pel moviment.



Gir $\left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ g_r^{\alpha} = \mathcal{G}_{r'}^{\alpha}\right)$



Moviment helicoïdal $\left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ g_r^{\alpha} = \mathcal{H}_{r',w}\right)$

Fig. 6.9

Simetria rotacional i translació: $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ s_{\Pi}^{\alpha}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & b \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

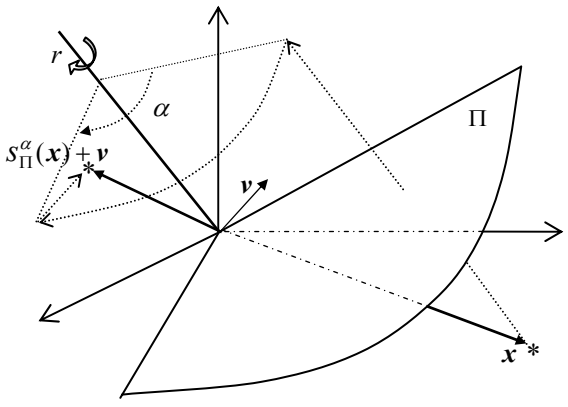
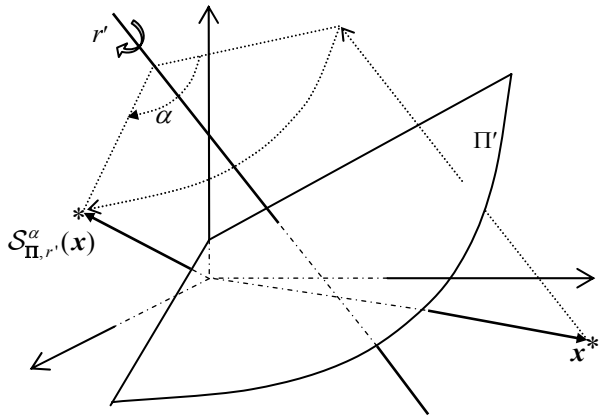


Fig. 6.10

Aquesta composició $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ s_{\Pi}^{\alpha}$ és una *simetria rotacional* amb el pla de simetria i l'eix de gir paral·lels als corresponents de la simetria s_{Π}^{α}.



Simetria rotacional: $\mathcal{S}^{\alpha}_{\boldsymbol{\Pi}',r'}$

Fig. 6.11

6.1.5 Classificació de les isometries de l'espai segons la seva matriu

Sigui

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \boldsymbol{v}^t \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

la matriu d'una isometria $\mathcal{F}$ de l'espai, on M és una matriu ortogonal d'ordre 3, i $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.

1. Si $\det M = 1$, $\mathcal{F}$ és un moviment directe. En aquest cas,
   a) Si $M = I_3$, ens fixem en el vector $\boldsymbol{v}$:
      - Si $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, $\mathcal{F}$ és una *translació*.
      - Si $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, $\mathcal{F}$ és la *identitat*.
   b) Si $M \neq I_3$, estudiem el punts fixos de $\mathcal{F}$:
      - Si $\mathcal{F}$ té punts fixos: *gir*. L'eix de gir és la recta formada pels punts fixos de $\mathcal{F}$:

$$\text{Eix} = \{\boldsymbol{x} \,/\, \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$$

i l'angle de gir α satisfà la relació

$$\text{traça } M = 1 + 2\cos\alpha \qquad (*).$$

En el cas particular de $\alpha = \pi$, $\mathcal{F}$ és una *simetria axial* respecte de la recta de punt fixos.

- Si $\mathcal{F}$ no té punts fixos: *moviment helicoïdal* (gir compost amb una translació de vector $\boldsymbol{v}$ paral·lel a l'eix de gir). L'eix de gir és una recta invariant per $\mathcal{F}$ que té la direcció del subespai de vectors propis associats al valor propi $\lambda = +1$ de la matriu M.

$$\text{Eix de gir} = \{\boldsymbol{x} / \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}\}, \quad \boldsymbol{v} \in \{\boldsymbol{x} / (M - I_3)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}.$$

I igual que abans, l'angle α del gir ve donat per (*).

2. Si $\det M = -1$, $\mathcal{F}$ és un moviment invers i n'estudiem els punts fixos.
   a) Si $\mathcal{F}$ té punts fixos, hi ha dues possibilitats:
      - $\mathcal{F}$ té més d'un punt fix: *simetria especular*. El pla de simetria, Π, és el conjunt de punts fixos

$$\Pi = \{\boldsymbol{x} / \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}.$$

      - $\mathcal{F}$ només té un punt fix. En aquest cas, tenim:
        - Si $M = -I_3$: *simetria central*. El centre de la simetria és el punt fix .
        - Si $M \neq -I_3$: *simetria rotacional*. En aquest cas, el pla de simetria i l'eix de gir passen pel punt fix, P, i són invariants per aquest moviment. La direcció de l'eix del gir ve donada pel subespai de vectors propis associats al valor propi $\lambda = -1$ de la transformació ortogonal de matriu M.

$$\text{Eix de gir} = \{\boldsymbol{P} + \lambda\boldsymbol{v} / \ \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \boldsymbol{v} \in \{\boldsymbol{x} / (M + I_3)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}.$$

        Finalment, l'angle del gir, α, s'obté a partir de la relació

$$\text{traça } M = -1 + 2\cos\alpha.$$

   b) Si $\mathcal{F}$ no té cap punt fix: *lliscament*. El vector $\boldsymbol{v}$ de la translació del lliscament es pot obtenir a partir de la relació

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \mathcal{T}_{2\boldsymbol{v}},$$

   i el pla Π de la simetria, com el conjunt de punts que només es traslladen.

$$\Pi = \{\boldsymbol{x} / \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}\}$$

6.2 Problemes resolts

Problema 1

Estudieu gràficament i analíticament quina és la composició en el pla de les isometries següents:
a) Dues simetries.
b) Dos girs.

Resolució

a) Siguin S_r i S_t dues simetries del pla d'eixos *r* i *t* respectivament.
Si les rectes *r* i *t* són iguals:

$$\mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_t = Id.$$

Si *r* i *t* són diferents, hem de considerar dos casos:
1. Les rectes *r* i *t* són paral·leles. Aleshores,

$$\mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}$$

és la translació de vector $\boldsymbol{v}$ perpendicular a les rectes *r* i *t*, de longitud el doble de la distància entre aquestes dues rectes i que té el sentit que va de *r* a *t*.
2. Les rectes *r* i *t* no són paral·leles. En aquest cas,

$$\mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{G}^{\alpha}_{t\cap r} = \mathcal{G}^{\alpha}_{P}$$

és el gir de centre el punt $P = t \cap r$ i angle de gir α, tal que $\frac{\alpha}{2} = \widehat{r,t}$.

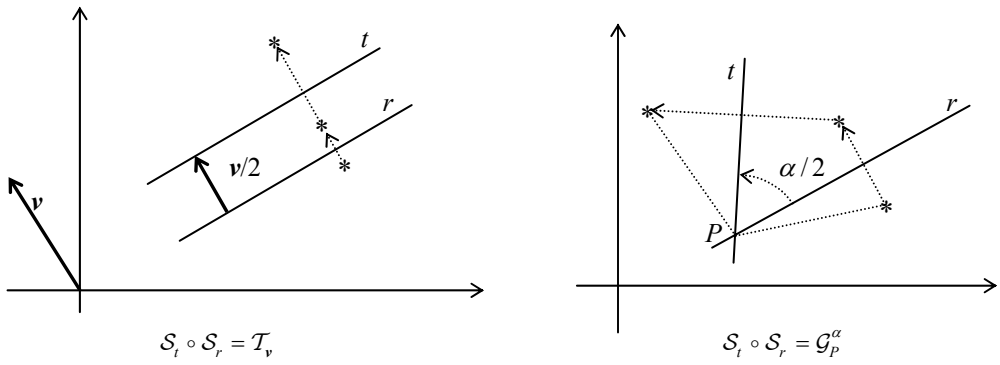


Fig. 6.12

b) Siguin $\mathcal{G}^{\alpha}_{P}$ i $\mathcal{G}^{\beta}_{Q}$ dos girs del pla.

1. Si $P = Q$, llavors $\mathcal{G}^{\beta}_{P} \circ \mathcal{G}^{\alpha}_{P} = \mathcal{G}^{\beta+\alpha}_{P}$ és el gir de centre *P* i angle $\alpha + \beta$.

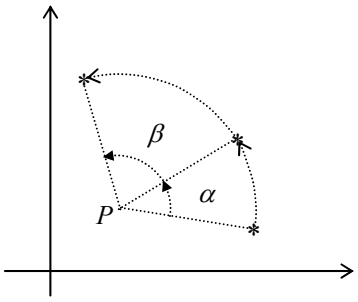


Fig. 6.13

2. Si els punts P i Q són diferents, sigui r la recta que passa per aquests punts. Si r' i r'' són les rectes que passen per P i Q respectivament, i tals que els angles $\widehat{r',r}=\alpha/2$ i $\widehat{r,r''}=\beta/2$, per l'apartat a)

$$\mathcal{G}_P^{\alpha}=\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_{r'} \text{ i } \mathcal{G}_Q^{\beta}=\mathcal{S}_{r''}\circ\mathcal{S}_r$$

i es poden presentar dos casos:

- r' i r'' no són paral·leles ($\alpha+\beta\neq 2\pi$), aleshores

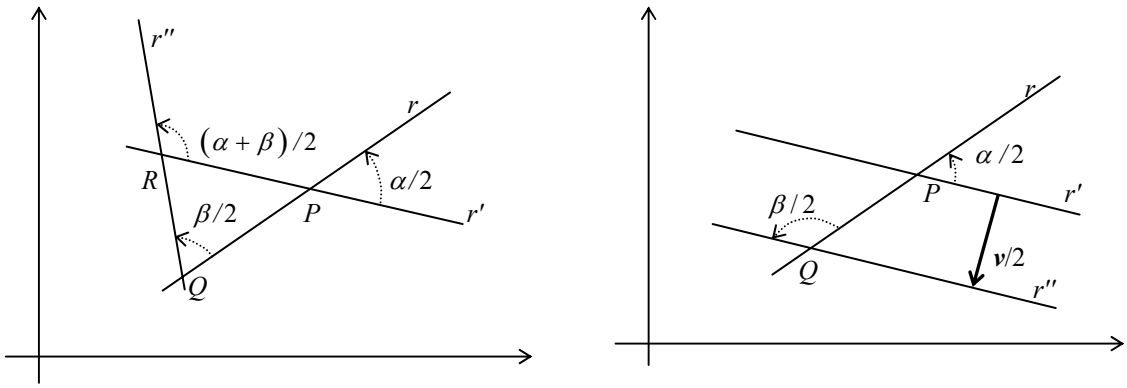
$$\mathcal{G}_Q^{\beta}\circ\mathcal{G}_P^{\alpha}=\left(\mathcal{S}_{r''}\circ\mathcal{S}_r\right)\circ\left(\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_{r'}\right)=\mathcal{S}_{r''}\circ\left(\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_r\right)\circ\mathcal{S}_{r'}=\mathcal{S}_{r''}\circ\mathcal{S}_{r'}=\mathcal{G}_{r''\cap r'}^{\alpha+\beta}=\mathcal{G}_R^{\alpha+\beta}$$

és el gir de centre el punt $R=r''\cap r'$ i angle de gir $\alpha+\beta$.

- r' i r'' són paral·leles, llavors $\alpha+\beta=2\pi$ i, en aquest cas,

$$\mathcal{G}_Q^{\beta}\circ\mathcal{G}_P^{\alpha}=\left(\mathcal{S}_{r''}\circ\mathcal{S}_r\right)\circ\left(\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_{r'}\right)=\mathcal{S}_{r''}\circ\left(\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_r\right)\circ\mathcal{S}_{r'}=\mathcal{S}_{r''}\circ\mathcal{S}_{r'}=\mathcal{T}_v$$

és una translació de vector $\boldsymbol{v}$ com es veu a la figura següent:



$\mathcal{G}_Q^{\beta}\circ\mathcal{G}_P^{\alpha}=\mathcal{G}_R^{\alpha+\beta}$ $\qquad$ $\mathcal{G}_Q^{\beta}\circ\mathcal{G}_P^{\alpha}=\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}$

Fig. 6.14

Problema 2

Estudieu gràficament i analíticament la composició en el pla de:
a) Un gir i una translació.
b) Una simetria i una translació.
c) Un gir i una simetria. És commutativa aquesta composició?

Resolució:

a) Siguin $\mathcal{G}_P^\alpha$ el gir de centre el punt *P* i angle de gir α i $\mathcal{T}_v$ la translació de vector $\boldsymbol{v}$. Per estudiar el moviment que resulta de les dues composicions: $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{G}_P^\alpha$ i $\mathcal{G}_P^\alpha \circ \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}$ considerem la recta *r* que passa per *P* i que és perpendicular a $\boldsymbol{v}$.
En el cas de $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{G}_P^\alpha$, sigui r' la recta que passa per *P* i que forma un angle $\alpha/2$ amb la recta *r,* i *t* la recta paral·lela a *r* a una distància $\|\boldsymbol{v}/2\|$, de manera que el sentit de *r* a *t* sigui el que marca el vector $\boldsymbol{v}$ com es veu a la figura 6.15. Llavors,

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{G}_P^\alpha = (\mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_r) \circ (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_{r'}) = \mathcal{S}_t \circ (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_r) \circ \mathcal{S}_{r'} = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_{r'} = \mathcal{G}_{t \cap r'}^\alpha = \mathcal{G}_Q^\alpha$$

és el gir de centre $Q = t \cap r'$ i angle α.
Anàlogament, per calcular $\mathcal{G}_P^\alpha \circ \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}$ considerarem la recta r'' que passa per *P* i tal que l'angle $\widehat{r, r''} = \alpha/2$ i la recta t' paral·lela a *r* a una distància $\|\boldsymbol{v}/2\|$ de manera que el sentit de *t'* a *r* és el donat pel vector $\boldsymbol{v}$. Així,

$$\mathcal{G}_P^\alpha \circ \mathcal{T}_v = (\mathcal{S}_{r''} \circ \mathcal{S}_r) \circ (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_{t'}) = \mathcal{S}_{r''} \circ (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_r) \circ \mathcal{S}_{t'} = \mathcal{S}_{r''} \circ \mathcal{S}_{t'} = \mathcal{G}_{r'' \cap t'}^\alpha = \mathcal{G}_R^\alpha$$

és el gir de centre $R = r'' \cap t'$ i angle α.

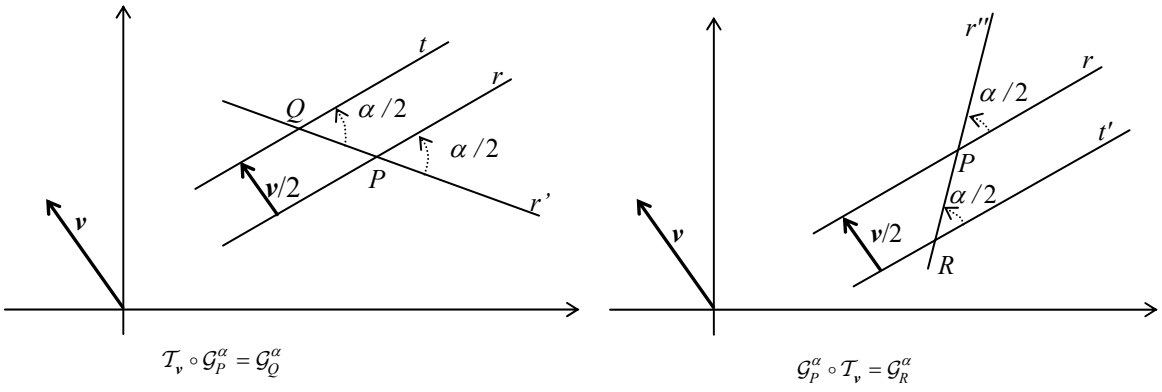


Fig. 6.15

Finalment, com que els punts $Q = t \cap r'$ i $R = r'' \cap t'$ són diferents, podem afirmar que la composició de gir i translació no és commutativa

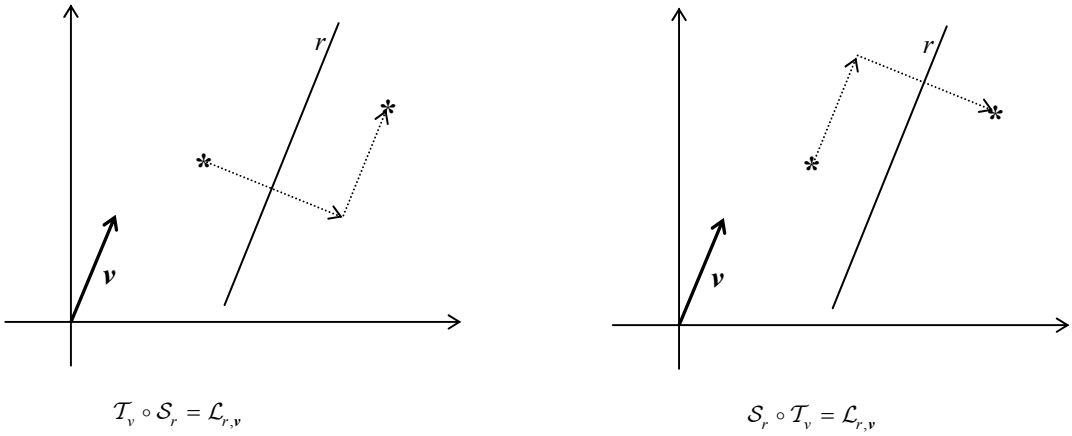
$$\mathcal{T}_v \circ \mathcal{G}_P^\alpha \neq \mathcal{G}_P^\alpha \circ \mathcal{T}_v.$$

b) Siguin $\mathcal{T}_v \circ \mathcal{S}_r$ i $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{T}_v$ les dues composicions entre la simetria $\mathcal{S}_r$ d'eix la recta *r* i la translació $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}}$ de vector $\boldsymbol{v}$.

- Si el vector $\boldsymbol{v}$ és paral·lel a la recta *r*

$$\mathcal{T}_v \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{L}_{r,\boldsymbol{v}}$$

és el lliscament $\mathcal{L}_{r,\boldsymbol{v}}$ d'eix la recta *r* i vector de translació $\boldsymbol{v}$.



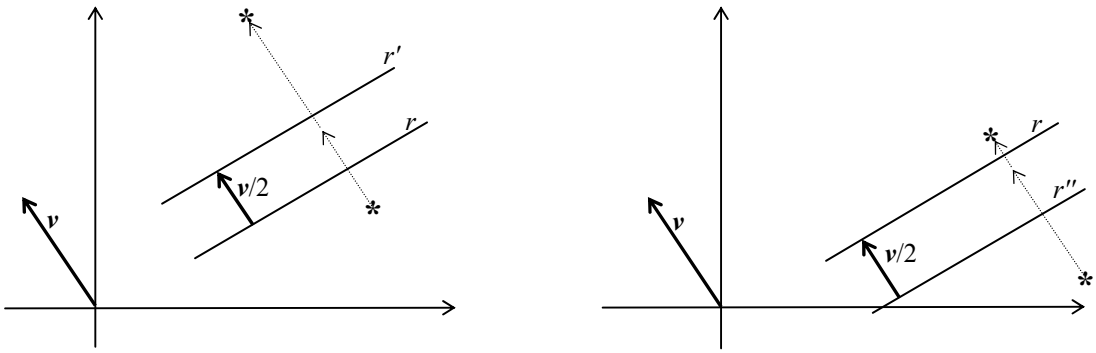
$\mathcal{T}_v \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{L}_{r,\boldsymbol{v}}$ $\quad$ $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{L}_{r,\boldsymbol{v}}$

Fig. 6.16

- Si el vector $\boldsymbol{v}$ és perpendicular a la recta *r*, aleshores

$$\mathcal{T}_v \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_{r'} \text{ i } \mathcal{S}_r \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{S}_{r''}$$

són dues simetries d'eixos les rectes r' i r'', paral·leles a *r* a una distància $\|\boldsymbol{v}/2\|$, de manera que el sentit de *r* a r' i de r'' a *r* és el que marca el vector $\boldsymbol{v}$, respectivament.



$\mathcal{T}_v \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_{r'}$ $\quad$ $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{S}_{r''}$

Fig. 6.17

- Si el vector $\boldsymbol{v}$ no és paral·lel ni perpendicular a la recta r, llavors $\boldsymbol{v}$ es pot posar com a suma d'altres dos vectors:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}^{\perp}$$

on $\boldsymbol{v}_r$ és paral·lel a la recta r i $\boldsymbol{v}^{\perp}$ perpendicular. D'aquesta manera:

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}^{\perp}} \circ \mathcal{S}_r = \left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}_r} \circ \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}^{\perp}}\right) \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}_r} \circ \left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}^{\perp}} \circ \mathcal{S}_r\right)$$

$$S_r \circ \mathcal{T}_v = S_r \circ \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}^{\perp}} = S_r \circ \left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}^{\perp}} \circ \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}_r}\right) = \left(S_r \circ \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}^{\perp}}\right) \circ \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}_r}.$$

Si ara r' i r'' són dues rectes paral·leles a r a una distància $\left\|\boldsymbol{v}^{\perp}/2\right\|$, de manera que el sentit de r'' a r i de r a r' és el que dóna el vector $\boldsymbol{v}$, com es veu a la figura 6.18, es té

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}^{\perp}} \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_{r'} \text{ i } \mathcal{S}_r \circ \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}^{\perp}} = \mathcal{S}_{r''}$$

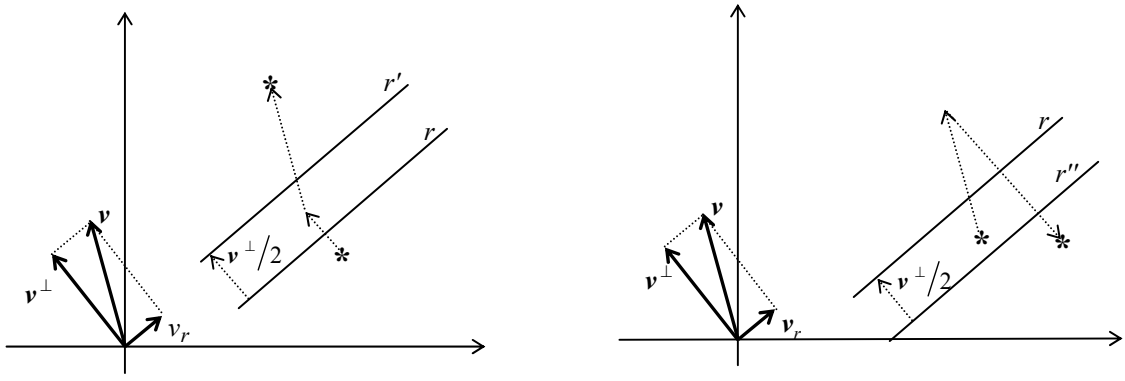
i per tant,

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}_r} \circ \mathcal{S}_{r'} = \mathcal{L}_{r',\boldsymbol{v}_r}$$

és el lliscament d'eix la recta r' i translació $\boldsymbol{v}_r$, i

$$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{S}_{r''} \circ T_{v_r} = \mathcal{L}_{r'',v_r}$$

el lliscament d'eix la recta r'' i translació el vector $\boldsymbol{v}_r$.



$\mathcal{T}_v \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{L}_{r',\boldsymbol{v}_r}$ $\qquad$ $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{L}_{r'',\boldsymbol{v}_r}$

Fig. 6.18

c) Si $\mathcal{S}_r$ és la simetria d'eix la recta r i $\mathcal{G}_P^\alpha$ el gir de centre el punt P i angle de gir α, tenim dues composicions

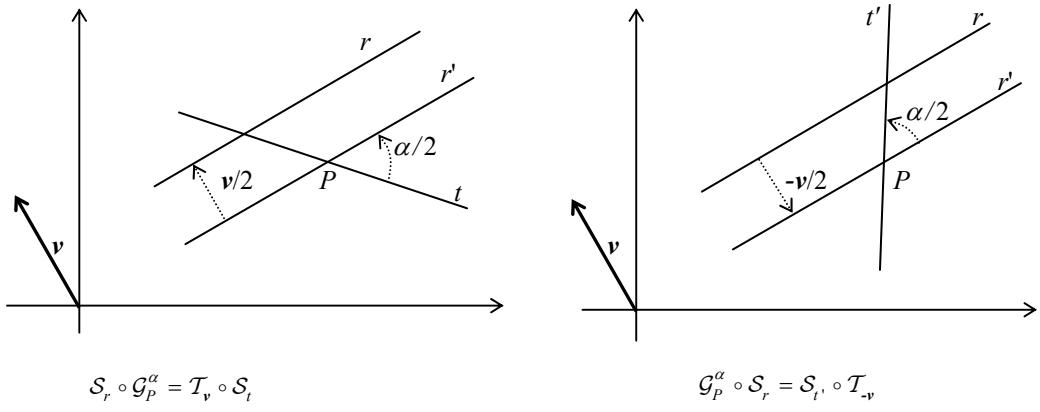
$$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{G}_P^\alpha \quad \text{i} \quad \mathcal{G}_P^\alpha \circ \mathcal{S}_r.$$

Per calcular aquests dos moviments, hem de tenir en compte la posició del punt P respecte de la recta r.

- Si $P \notin r$, sigui r' la recta que passa per P i és paral·lela a r. En el cas de $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{G}_P^\alpha$, considerarem també la recta t que passa per P i tal que $\widehat{t,r'} = \alpha/2$ i per a $\mathcal{G}_P^\alpha \circ \mathcal{S}_r$ la recta t' que passa per P i tal que l'angle $\widehat{r',t'} = \alpha/2$. Si $\boldsymbol{v}$ és un vector perpendicular a r i r', de mòdul el doble de la distància entre aquestes dues rectes i en la direcció de r' a r com es veu a la figura 6.19, aleshores

$$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{G}_P^\alpha = \mathcal{S}_r \circ (\mathcal{S}_{r'} \circ \mathcal{S}_t) = (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_{r'}) \circ \mathcal{S}_t = \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{S}_t$$

$$\mathcal{G}_P^\alpha \circ \mathcal{S}_r = (\mathcal{S}_{t'} \circ \mathcal{S}_{r'}) \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_{t'} \circ (\mathcal{S}_{r'} \circ \mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_{t'} \circ \mathcal{T}_{-v}$$



$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{G}_P^\alpha = \mathcal{T}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{S}_t$ $\qquad$ $\mathcal{G}_P^\alpha \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_{t'} \circ \mathcal{T}_{-\boldsymbol{v}}$

Fig. 6.19

i per l'apartat anterior, les composicions $T_{\boldsymbol{v}} \circ S_t$ i $S_{t'} \circ T_{-\boldsymbol{v}}$ seran un lliscament, excepte quan el vector $\boldsymbol{v}$ sigui perpendicular a t en el cas de $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{G}_P^\alpha$, o quan $\boldsymbol{v}$ sigui perpendicular a t' en el cas de $\mathcal{G}_P^\alpha \circ \mathcal{S}_r$, però llavors $\alpha = 2\pi$ i

$$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{G}_P^\alpha = \mathcal{G}_P^\alpha \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r.$$

- Si el punt $P \in r$, aleshores la recta r' del cas anterior coincideix amb r i per tant,

$$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{G}_P^\alpha = \mathcal{S}_r \circ (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_t) = (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_r) \circ \mathcal{S}_t = Id \circ \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_t$$

$$\mathcal{G}_P^\alpha \circ \mathcal{S}_r = (\mathcal{S}_{t'} \circ \mathcal{S}_r) \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_{t'} \circ (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{G}_P^\alpha) = \mathcal{S}_{t'} \circ Id = \mathcal{S}_{t'}$$

són dues simetries d'eixos les rectes t i t', respectivament.

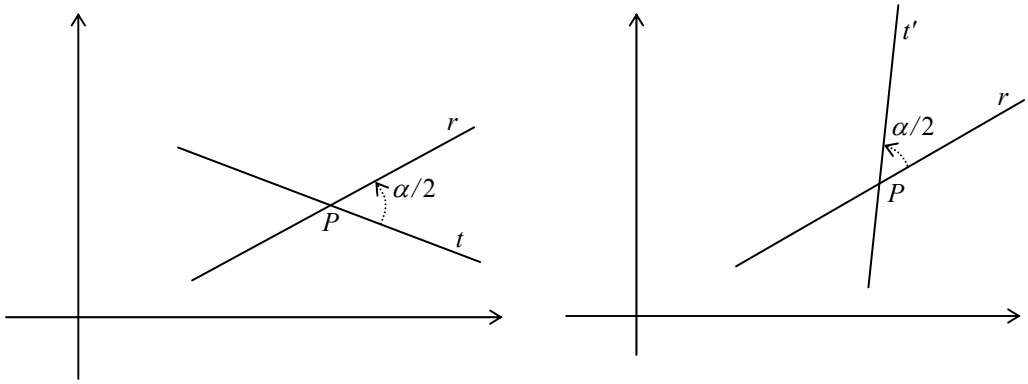


Fig. 6.20

Finalment, estudiem la commutativitat:

$$\mathcal{S}_r \circ G_P^\alpha = G_P^\alpha \circ \mathcal{S}_r \;\Leftrightarrow\; \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_{t'} \;\Leftrightarrow\; t = t' \;\Leftrightarrow\; \alpha = 2\pi \;\Leftrightarrow \mathcal{G}_P^\alpha = Id$$

Problema 3

Siguin $\mathcal{G}_P^{\pi/3}$ i $\mathcal{G}_Q^{5\pi/3}$ els girs del pla de centre el punt $P = (2, 2)$ i $Q = (1, 2)$, respectivament.

a) Trobeu la matriu de $\mathcal{G}_Q^{5\pi/3} \circ \mathcal{G}_P^{\pi/3}$.

b) Quina seria la imatge de la circumferència de centre l'origen i radi 1 per aquest moviment? Doneu-ne l'equació.

Resolució:

a) Les matrius dels girs són

$$\mathcal{G}_P^{\pi/3} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 & a \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & a \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{G}_Q^{5\pi/3} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos 5\pi/3 & -\sin 5\pi/3 & c \\ \sin 5\pi/3 & \cos 5\pi/3 & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & \sqrt{3}/2 & c \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on a, b, c i d es determinaran per les condicions:

$$\mathcal{G}_P^{\pi/3}(P) = P \;\text{ i }\; \mathcal{G}_Q^{5\pi/3}(Q) = Q$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & a \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} 1-\sqrt{3}+a=2 \\ \sqrt{3}+1+b=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1+\sqrt{3} \\ b=1-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & \sqrt{3}/2 & c \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} 1/2+\sqrt{3}+c=1 \\ -\sqrt{3}/2+1+d=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2} \\ d=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Per tant,

$$\left(\mathcal{G}_Q^{5\pi/3}\circ\mathcal{G}_P^{\pi/3}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & \sqrt{3}/2 & \left(1-2\sqrt{3}\right)/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & \left(2+\sqrt{3}\right)/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1+\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1-\sqrt{3} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3}/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

que és la matriu d'una translació, $\mathcal{T}_{\boldsymbol{w}}$, amb $\boldsymbol{w}=\left(-1/2,-\sqrt{3}/2\right)$.

Una altra forma d'obtenir aquesta composició de girs seria a partir de les seves transformacions ortogonals associades: els girs $g_{\pi/3}$ i $g_{5\pi/3}$ de centre l'origen i angles π/3 i 5π/3, respectivament. Així:

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{G}_Q^{5\pi/3}\circ\mathcal{G}_P^{\pi/3}\right)(\boldsymbol{x})&=\mathcal{G}_Q^{5\pi/3}\left(\mathcal{G}_P^{\pi/3}(\boldsymbol{x})\right)=\mathcal{G}_Q^{5\pi/3}\left(\boldsymbol{P}+g_{\pi/3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{P})\right)\\ &=\boldsymbol{Q}+g_{5\pi/3}\left(\boldsymbol{P}+g_{\pi/3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{P})-\boldsymbol{Q}\right)\\ &=\boldsymbol{Q}+g_{5\pi/3}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q})+g_{5\pi/3+\pi/3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{P})\\ &=\boldsymbol{Q}+g_{5\pi/3}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q})+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{P}\\ &=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P})+g_{5\pi/3}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q})\\ &=\mathcal{T}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

on $\mathcal{T}_{\boldsymbol{w}}$ és la translació de vector:

$$\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P})+g_{5\pi/3}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q})=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos 5\pi/3 & -\sin 5\pi/3\\ \sin 5\pi/3 & \cos 5\pi/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$$

b) Si $(x',y')=\left(\mathcal{G}_Q^{5\pi/3}\circ\mathcal{G}_P^{\pi/3}\right)(x,y)$, aleshores

$$\left(\begin{array}{c} x' \\ y' \\ \hline 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3}/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} x-1/2 \\ y-\sqrt{3}/2 \\ \hline 1 \end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} x'=x-1/2 \\ y'=y-\sqrt{3}/2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=x'+1/2 \\ y=y'+\sqrt{3}/2 \end{cases}\qquad (*).$$

Per calcular la imatge de la circumferència de centre l'origen i radi 1, considerarem la seva equació

$x^2 + y^2 = 1$. Per les equacions (*), els punts (x', y') de la imatge satisfaran l'equació

$$\left(x' + 1/2\right)^2 + \left(y' + \sqrt{3}/2\right)^2 = 1$$

que correspon a la circumferència de centre el punt $(-1/2,\ -\sqrt{3}/2)$ i de radi 1.

Problema 4

Considereu el lliscament d'eix la recta $r \equiv y = x + 1$ i vector de translació $\boldsymbol{w} = (2, 2)$.

a) Trobeu la matriu d'aquest moviment.
b) Doneu la imatge del triangle de vèrtexs $A = (0, 2)$, $B = (0, 4)$, $C = (1, 4)$.
c) Doneu la imatge de l'el·lipse d'equació

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Resolució

a) Si denotem per $\mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}}$ aquest lliscament, es té

$$\mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}} = \mathcal{T}_{\boldsymbol{w}} \circ \mathcal{S}_r$$

on $\mathcal{S}_r$ és la simetria d'eix la recta r i $\mathcal{T}_{\boldsymbol{w}}$ la translació de vector $\boldsymbol{w}$.
La transformació ortogonal associada a $\mathcal{S}_r$ és la simetria d'eix la recta $y = x$ que forma un angle de 45º amb l'eix d'abscisses, per tant, la matriu del lliscament és

$$\left(\mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & c \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & c \\ 1 & 0 & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on els valors de c i d els determinarem per la propietat que els punts de l'eix de simetria només es traslladen. Així, si considerem les equacions paramètriques de l'eix

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \end{cases}$$

tenim

$$\left(\mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}}\right)\begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{w}}\right)\begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ \hline 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & c \\ 1 & 0 & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ \hline 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

i la matriu del lliscament és

$$\left(\mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

b) La imatge del triangle de vèrtexs $A = (0, 2)$, $B = (0, 4)$, $C = (1, 4)$ és el triangle de vèrtexs

$$A' = \mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}}(A) = (3,3),\ \ B' = \mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}}(B) = (5,3),\ \ C' = \mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}}(C) = (5,4)\,.$$

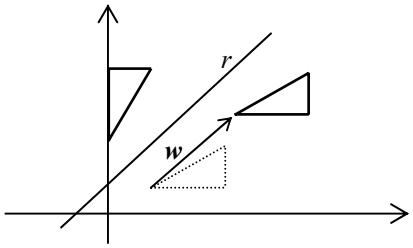


Fig. 6.21

c)

$$\left(\mathcal{L}_{r,\boldsymbol{w}}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ \hline 1 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ \hline 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y+1 \\ x+3 \\ \hline 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \hline 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} y = x'-1 \\ x = y'-3 \end{cases}$$

Per tant, la imatge de l'el·lipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, serà l'el·lipse d' equació

$$\frac{(y'-3)^2}{9}+\frac{(x'-1)^2}{4}=1.$$

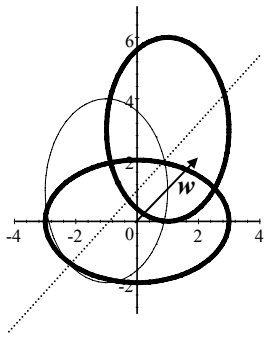


Fig. 6.22

Problema 5

a) Trobeu les matrius de les simetries del pla $\mathcal{S}_r$ i $\mathcal{S}_t$ d'eixos les rectes $r \equiv x = 1$ i $t \equiv y = 3x - 1$, respectivament.

b) Descriviu el moviment resultant de la composició $\mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_r$ i doneu-ne la matriu.

Resolució

a) La recta r forma un angle $\alpha/2 = 90º$ amb l'eix d'abscisses, per tant, la matriu de la simetria $\mathcal{S}_r$ serà de la forma

$$(\mathcal{S}_r) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos 180º & \sin 180º & a \\ \sin 180º & -\cos 180º & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Els valors de a i b queden determinats imposant que qualsevol punt de r sigui fix per aquest moviment, per exemple el punt (1,0)

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{S}_r) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

També podríem haver calculat aquests valors de a i b fent servir que (a, b) és el simètric de l'origen respecte de r

$$(a, b) = \mathcal{S}_r(\mathbf{0}) = (2, 0).$$

La matriu de la simetria $\mathcal{S}_t$ és de la forma

$$(\mathcal{S}_t) = \left(\begin{array}{cc|c} & M & c \\ & & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on M és la matriu en la base canònica de la simetria axial d'eix la recta t_O que passa per l'origen i que és paral·lela a t.
En una base ortonormal del pla, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, on el primer vector és un vector en la direcció de la recta t, per exemple: $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$ i $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)$, la matriu de la simetria d'eix la recta t_O és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$M=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&3\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}\Rightarrow(\mathcal{S}_t)=\left(\begin{array}{cc|c}-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&c\\\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&d\\\hline 0&0&1\end{array}\right)$$

Si ara agafem un punt qualsevol de la recta *t*, per exemple el (1, 2), i imposem que aquest sigui fix per aquesta simetria, resulta

$$\left(\begin{array}{cc|c}-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&c\\\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&d\\\hline 0&0&1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{4}{5}+\frac{6}{5}+c=1\\\frac{3}{5}+\frac{8}{5}+d=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\frac{3}{5}\\d=-\frac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow(\mathcal{S}_t)=\left(\begin{array}{cc|c}-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\\hline 0&0&1\end{array}\right)$$

b) La composició de dues simetries d'eixos no paral·lels és un gir $\mathcal{G}_P^\alpha$ de matriu

$$\left(\mathcal{G}_P^\alpha\right)=(\mathcal{S}_t\circ\mathcal{S}_r)=(\mathcal{S}_t).(\mathcal{S}_r)=\left(\begin{array}{cc|c}-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\\hline 0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c}-1&0&2\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&-1\\-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&1\\\hline 0&0&1\end{array}\right)$$

El centre del gir, $P = (p_1, p_2)$, és l'únic punt fix per aquest moviment, així

$$\mathcal{G}_P^\alpha(P)=P\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&-1\\-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&1\\\hline 0&0&1\end{array}\right)\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{5}p_1+\frac{3}{5}p_2-1=p_1\\-\frac{3}{5}p_1+\frac{4}{5}p_2+1=p_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p_1=1\\p_2=2\end{cases}\Leftrightarrow P=(1,2).$$

Finalment, l'angle de gir, α, s'obté a partir de les relacions

$$\cos\alpha=\frac{4}{5}\ \text{ i }\ \sin\alpha=-\frac{3}{5}.$$

Observeu que α és un angle negatiu degut al fet que el sentit del gir determinat per l'ordre de les simetries $\mathcal{S}_r$ i $\mathcal{S}_t$ és el de les agulles del rellotge.

També es podria haver obtingut el punt *P* com la intersecció de les rectes *r* i *t* i l'angle α a partir de l'angle que formen aquestes dues rectes

$$\frac{\alpha}{2}=\widehat{r,t}.$$

Problema 6

a) Estudieu el moviment que resulta de la composició del gir de 45º i centre el punt $C = (1,1)$ amb la simetria d'eix la recta r d'equació $y = 3$.
b) Trobeu la imatge del quadrat de vèrtexs $A = (-1,-1)$, $B = (1,-1)$, $C = (1,1)$ i $D = (-1,1)$ per aquesta composició.

Resolució

a) La matriu d'un gir de 45º és

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & a \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & a \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

i com que el centre del gir és un punt fix, resulta

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & a \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1-\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\mathcal{G}_C^{45^\circ}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En el cas de la simetria $\mathcal{S}_r$, la transformació ortogonal associada és la simetria d'eix la recta paral·lela a r que passa per l'origen i que en la base canònica té per matriu $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, per tant

$$\left(\mathcal{S}_r\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c \\ 0 & -1 & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Determinem c i d per la condició de punts fixos que tenen els punts de r, en particular el punt (0,3)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c \\ 0 & -1 & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 6 \end{cases} \Rightarrow \left(\mathcal{S}_r\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Així doncs, la matriu de la composició $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{G}_C^{45^\circ}$ és

$$\left(\mathcal{S}_r \circ \mathcal{G}_C^{45^\circ}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}+5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Com que el determinant de la transformació ortogonal associada a aquest moviment és -1, aquesta composició o bé és una simetria o bé és un lliscament. Per veure quin és, estudiem-ne els punts fixos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}+5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=-1\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)y=-\sqrt{2}-5\end{cases}$$

Aquest sistema és incompatible, per tant, $\mathcal{S}_r\circ\mathcal{G}_C^{45^\circ}$ no té cap punt fix i la composició serà un lliscament

$$\mathcal{S}_r\circ\mathcal{G}_C^{45^\circ}=\mathcal{L}_{t,\boldsymbol{u}}.$$

El vector de la translació d'aquest lliscament el determinem a partir de la igualtat

$$\mathcal{L}_{t,\boldsymbol{u}}\circ\mathcal{L}_{t,\boldsymbol{u}}=\mathcal{T}_{2\boldsymbol{u}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}+5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}+5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 4-2\sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=(\mathcal{T}_{2\boldsymbol{u}})\Leftrightarrow\boldsymbol{u}=\left(-\sqrt{2},2-\sqrt{2}\right)$$

i l'equació de l'eix de simetria, *t*, l'obtenim per la propietat que els seus punts només es traslladen,

$$\boldsymbol{x}=(x,y)\in t\Leftrightarrow\mathcal{L}_{t,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})=\mathcal{T}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}+5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2-\sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{2}-2\right)x-\sqrt{2}y=-2-2\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}x-\left(\sqrt{2}+2\right)y=-6-4\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow t\equiv\left(\sqrt{2}-2\right)x-\sqrt{2}y=-2-2\sqrt{2}.$$

b) La imatge és el quadrat de vèrtexs:

$$A'=\mathcal{L}_{t,\boldsymbol{u}}(A)=\left(1,5+2\sqrt{2}\right)\quad B'=\mathcal{L}_{t,\boldsymbol{u}}(B)=\left(1+\sqrt{2},5+\sqrt{2}\right)$$

$$C'=\mathcal{L}_{t,\boldsymbol{u}}(C)=(1,5)\qquad D'=\mathcal{L}_{t,\boldsymbol{u}}(D)=\left(1-\sqrt{2},5+\sqrt{2}\right)$$

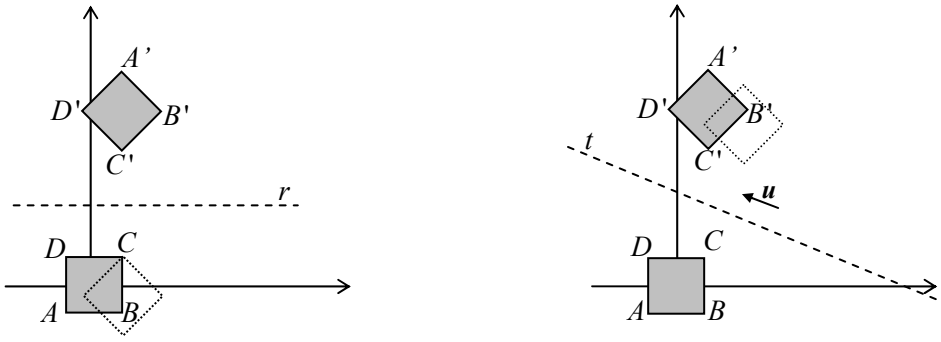


Fig. 6.23

Problema 7

Considereu la simetria respecte del pla $\Pi \equiv x + y + z = 1$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Trobeu-ne la matriu.
b) Doneu la imatge de la piràmide de vèrtexs A = (0,0,0), B = (0,1,0), C = (0,1,0) i D =(0,0,1) per aquesta simetria.

Resolució

a) La matriu d'aquesta simetria serà de la forma

$$(\mathcal{S}_\Pi) = \left(\begin{array}{ccc|c} & M & & a \\ & & & b \\ & & & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on M és la matriu en la base canònica de la simetria especular respecte del pla $\Pi_0 \equiv x + y + z = 0$, paral·lel al pla Π i que passa per l'origen.

Si prenem una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, on $\boldsymbol{v}_3$ és un vector normal al pla Π_0, per exemple $\left\{\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-1,0),\ \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1-1,2) \text{ i } \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$, es té

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

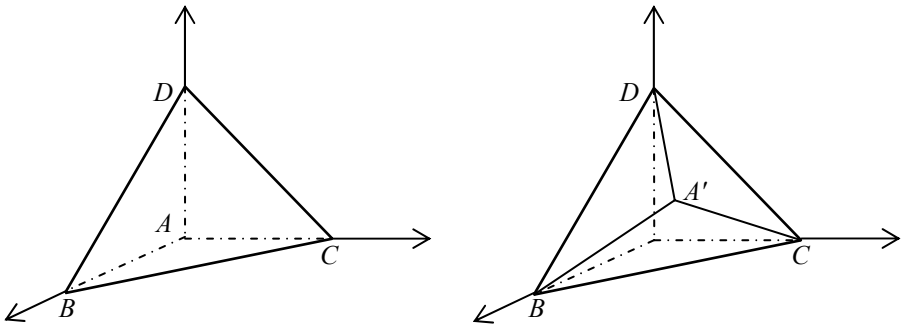
i la matriu de la simetria $\mathcal{S}_\Pi$ és

$$(\mathcal{S}_\Pi) = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & a \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & b \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Els valors de a, b i c els determinarem per la propietat de punts fixos dels punts del pla Π, en particular si agafem el punt $(0,0,1) \in \Pi$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & a \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & b \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{2}{3} \Rightarrow (\mathcal{S}_\Pi) = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

b) La imatge del vèrtex $A = (0, 0, 0)$ és el punt $A' = (2/3, 2/3, 2/3)$ i la imatge del altres vèrtexs són ells mateixos per ser punts del pla de simetria. Per tant, la imatge de la piràmide de vèrtexs *A, B*, *C* i *D* és la piràmide de vèrtexs *A'*, *B*, *C* i *D*:



Piràmide original *Piràmide imatge*

Fig. 6.24

Problema 8

a) Trobeu la matriu de la composició a $\mathbb{R}^3$ del gir, $\mathcal{G}_r^\alpha$, de 90º al voltant de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ amb la simetria rotacional, $\mathcal{S}_{\Pi,t}^\beta$, respecte del pla de simetria $\Pi \equiv z = 2$, eix de gir la recta $t \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ i angle de gir $\beta = 90º$.

b) Doneu la imatge del triangle de vèrtexs $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$ i $C = (1, 1, 0)$ per aquesta composició.

Resolució

a) La matriu del gir serà de la forma:

$$\left(\mathcal{G}_r^{90^\circ}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} & M & & a \\ & & & b \\ & & & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on M és la matriu de la seva transformació ortogonal associada que en aquest cas és el gir de 90º respecte de l'eix Z, i que en la base canònica té per matriu

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així doncs, la matriu del gir $\mathcal{G}_r^{90^\circ}$

$$\left(\mathcal{G}_r^{90^\circ}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on a, b i c queden determinats per la condició de punts fixos dels punts de l'eix de gir r, per exemple el punt $(1,1,0)\in r$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}\Rightarrow\left(\mathcal{G}_r^{90^\circ}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En el cas de la simetria rotacional $\mathcal{S}_{\Pi,t}^{\beta}$, la transformació ortogonal associada és la simetria rotacional respecte del pla $z=0$ i angle de gir $\alpha=90^\circ$, i per tant la matriu de $\mathcal{S}_{\Pi,t}^{\beta}$ és

$$\left(\mathcal{S}_{\Pi,t}^{\beta}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & a' \\ 1 & 0 & 0 & b' \\ 0 & 0 & -1 & c' \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

els valor de a', b' i c' els podem obtenir a partir de la propietat de punt fix per aquest moviment que té el punt $P=\Pi\cap t=(0,\ 1,\ 2)$.

$$\mathcal{S}^{\beta}_{\Pi,t}(P)=P\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&0&a\\1&0&0&b\\0&0&-1&c\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}0\\1\\2\\\hline 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}0\\1\\2\\\hline 1\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\Rightarrow\left(\mathcal{S}^{\beta}_{\Pi,t}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&-1&4\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right).\\c=4\end{cases}$$

Finalment, la matriu de la composició del gir $\mathcal{G}_r^{90^\circ}$ i la simetria $\mathcal{S}^{\beta}_{\Pi,t}$, serà el moviment de matriu:

$$\left(\mathcal{S}^{\beta}_{\Pi,t}\circ\mathcal{G}_r^{90^\circ}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&-1&4\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&0&2\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&0&1\\0&-1&0&3\\0&0&-1&4\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right).$$

Com que la matriu ortogonal associada a aquesta composició és

$$N=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I_3\Rightarrow\det N=-1$$

resulta que $\mathcal{S}^{\beta}_{\Pi,t}\circ\mathcal{G}_r^{90^\circ}$ és un moviment invers. Per classificar-lo estudiem-ne els punts fixos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&0&1\\0&-1&0&3\\0&0&-1&4\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x\\y\\z\\\hline 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}x\\y\\z\\\hline 1\end{array}\right)\Leftrightarrow x=\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{2},\ z=2.$$

Així doncs, $\mathcal{S}^{\beta}_{\Pi,t}\circ\mathcal{G}_r^{90^\circ}$ només té un punt fix: $Q=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 2\right)$ i com que la seva matriu ortogonal associada és $N=-I_3$, tenim que $\mathcal{S}^{\beta}_{\Pi,t}\circ\mathcal{G}_r^{90^\circ}$ és una simetria central respecte del punt Q.

b) La imatge és el triangle de vèrtexs: $A'=(1,3,4)$, $B'=(0,3,4)$ i $C'=(0,2,4)$

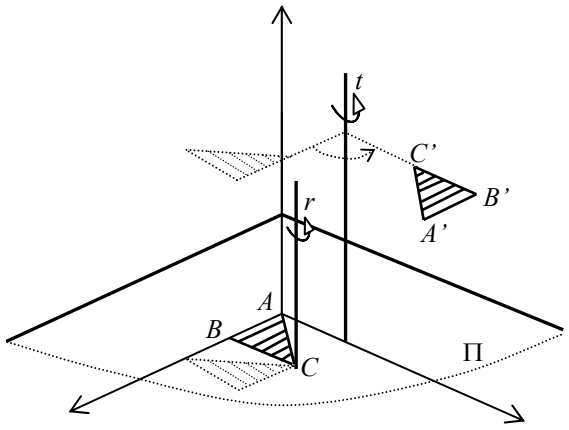


Fig. 6.25

Problema 9

Es considera l'aplicació $\mathcal{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida per

$$\mathcal{F}(x,y,z)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}z+1,\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z,\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z+a\right).$$

Demostreu que $\mathcal{F}$ és una isometria de l'espai. Trobeu els punts fixos d'aquest moviment i classifiqueu-lo segons els valors de a.

Resolució

$\mathcal{F}$ es pot expressar matricialment com

$$\left(\mathcal{F}(x,y,z|1)\right)^t=\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&a\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}$$

Si considerem la seva matriu associada

$$M=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

es té que $M\cdot M^t=I_3$. Per tant, $\mathcal{F}$ és una isometria per a tot valor de a. A més, com que $\det M=1$, $\mathcal{F}$ serà un gir o un moviment helicoïdal. Per determinar-ho, calculem els punts $\boldsymbol{x}=(x,\ y,\ z)$ fixos per $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&a\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x-2y+z+3=0\\2x-2y-2z=0\\x+2y-z+3a=0\end{cases}$$

sistema compatible si i només si $a=-1$, i en aquest cas la solució és

$$\begin{aligned}x&=1+z\\y&=1.\end{aligned}$$

Així doncs, si $a=-1$, $\mathcal{F}$ és un gir d'eix la recta, r, d'equacions paramètriques

$$r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1\\ z=\lambda\end{cases}$$

amb angle de gir α tal que

$$\cos\alpha=\frac{\text{traça } M-1}{2}=\frac{\frac{5}{3}-1}{2}=\frac{1}{3}.$$

El sentit de rotació l'obtenim a partir d'un vector $\boldsymbol{u}$ perpendicular a la direcció de l'eix de rotació i la seva imatge per l'endomorfisme f de matriu M, per exemple:

$$\boldsymbol{u}=(0,\,1,\,0)\ \text{ i }\ f(\boldsymbol{u})=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right).$$

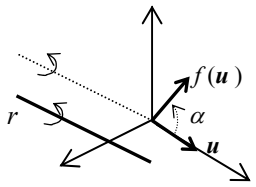


Fig. 6.26

Si $a=-1$, el sistema és incompatible i, en conseqüència, $\mathcal{F}$ no té cap punt fix. Es tractaria doncs, d'un moviment helicoïdal $\mathcal{H}_{r,\boldsymbol{w}}$. La direcció del vector $\boldsymbol{w}$ ve donada pel subespai de vectors propis de valor propi $\lambda=+1$ de la transformació ortogonal associada a $\mathcal{H}_{r,\boldsymbol{w}}$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-1 & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{w}=(\lambda_0,\,0,\,\lambda_0)$$

on λ_0 es pot determinar a partir de la propietat que els punts de l'eix de gir, r, només es traslladen per aquest moviment

$$\boldsymbol{x}\in r\Leftrightarrow\mathcal{H}_{r,\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x})=\mathcal{T}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x})\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & a\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x\\ y\\ z\\ \hline 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \lambda_0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda_0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x\\ y\\ z\\ \hline 1\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_0=\frac{1}{2}(1+a)\\ x=\frac{1}{2}(1-a)+z\\ y=\frac{1}{2}(1-a)\end{cases}$$

D'on resulta que

$$\boldsymbol{w} = \left(\frac{1}{2}(1+a),\ 0,\ \frac{1}{2}(1+a)\right)$$

i l'eix de gir r té per equacions paramètriques

$$r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(1-a) + \lambda \\ y = \dfrac{1}{2}(1-a) \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 10

Demostreu que la matriu

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

correspon a un moviment de l'espai euclidià. Classifiqueu-lo i doneu-ne els elements característics.

Resolució

Si M és la matriu

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow M^t \cdot M = I_3 \ \text{ i } \ \det M = -1\,,$$

per tant, A representa la matriu d'un moviment invers que serà una simetria o un lliscament. Per determinar-ho, calculem els punts fixos d'aquest moviment

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \\ y + 1 = y \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)z + 1 = 0. \end{cases}$$

Com que aquest sistema és incompatible, el moviment serà un lliscament: $\mathcal{L}_{\Pi,\boldsymbol{w}}$. El vector $\boldsymbol{w}$ de la translació el calculem a partir de la relació $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\Pi},\boldsymbol{w}} \circ \mathcal{L}_{\boldsymbol{\Pi},\boldsymbol{w}} = \mathcal{T}_{2\boldsymbol{w}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{w} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\ 1,\ \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$$

i el pla Π per la propietat $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Pi} \Leftrightarrow \mathcal{L}_{\boldsymbol{\Pi},\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{T}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x})$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\Pi} \equiv \left(2-2\sqrt{2}\right)x - z = -1.$$

Problema 11

Un moviment $\mathcal{F}$ de l'espai transforma els punts

$$P_1 = (1,0,0),\ P_2 = (1,1,0),\ P_3 = (-1,-1,-1) \text{ i } P_4 = (1,0,-1)$$

en els punts

$$P_1' = \left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right),\ P_2' = \left(1,2,2\right),\ P_3' = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right) \text{ i } P_4' = \left(0,2,1\right).$$

Comproveu que $\mathcal{F}$ és un moviment, trobeu-ne la matriu, classifiqueu-lo i doneu-ne els elements característics.

Resolució

Si f és l'endomorfisme associat a $\mathcal{F}$, es té

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{u}) - \mathcal{F}(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$$

per a tots $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ de l'espai $\mathbb{R}^3$, per tant, si identifiquem els punts $P = (x, y, z)$ de l'espai amb els corresponents vectors $\boldsymbol{P} = (x, y, z)$ en la base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, i tenim en compte que

$$\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_4 = (0,0,1),\ \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_4 = (0,1,0) \text{ i } \boldsymbol{P}_4 - \boldsymbol{P}_3 = (2,1,0)$$

resulta

$$f(0,0,1) = f\left(\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_4\right) = \mathcal{F}\left(\boldsymbol{P}_1\right) - \mathcal{F}\left(\boldsymbol{P}_4\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$f(0,1,0) = f\left(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1\right) = \mathcal{F}\left(\boldsymbol{P}_2\right) - \mathcal{F}\left(\boldsymbol{P}_1\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
$$f(2,1,0) = f\left(\boldsymbol{P}_4 - \boldsymbol{P}_3\right) = \mathcal{F}\left(\boldsymbol{P}_4\right) - \mathcal{F}\left(\boldsymbol{P}_3\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

d'on s'obté

$$f(1,0,0) = \frac{1}{2} f(2,1,0) - \frac{1}{2} f(0,1,0) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

i les matrius de f i $\mathcal{F}$ seran, respectivament,

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & a \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & b \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Calculem a, b i c a partir d'un dels punts donats i la seva imatge, per exemple el punt P_1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & a \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & b \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \hline 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 1$$

i, per tant,

$$(\mathcal{F}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Per ser $\det M = -1,$ podem afirmar que $\mathcal{F}$ és un moviment invers. Per determinar quin és, en calculem els punts fixos:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right). \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Com que només hi ha un punt fix, $\mathcal{F}$ és una simetria rotacional: $\mathcal{S}^{\alpha}_{\Pi,r}$. El pla de simetria Π i l'eix de gir *r* passen per aquest punt fix, i la direcció de *r*, i per tant la d'un vector normal a $\Pi,$ és la del subespai de vectors propis de valor propi $\lambda = -1$ de l'endomorfisme *f*,

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}+1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}+1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ z = y \end{cases}$$

Així doncs,

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} - 3\lambda \\ y = -\frac{3}{2} + \lambda \\ z = \frac{5}{2} + \lambda \end{cases}$$

i

$$\boldsymbol{\Pi} \equiv -3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{3}{2}\right) + \left(z - \frac{5}{2}\right) = 0\,.$$

Finalment, l'angle, α, del gir s'obté a partir de la relació

$$\text{traça } M = -1 + 2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{5}{6}.$$

6.3 Problemes proposats

Problema 1

Calculeu gràficament i analíticament la composició en el pla de tres simetries:

$$\mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_{t'} \circ \mathcal{S}_r,$$

on t i t' són dues rectes paral·leles i r una recta perpendicular a aquestes.

Problema 2

Descriviu gràficament la composició a $\mathbb{R}^2$ de

$$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{G}_P^{\alpha} \circ \mathcal{S}_r$$

on P és un punt sobre la recta r.

Problema 3

Trobeu la imatge a $\mathbb{R}^2$ de la circumferència de centre el punt (1, 0) i radi 2 pel gir de centre el punt $(3,\ 3)$ i angle $\pi/2$.

Problema 4

Trobeu la imatge de l'el·lipse d'equació:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

per la simetria d'eix la recta $x = y + 2$.

Problema 5

a) Trobeu les matrius de la simetria d'eix la recta $y = 2$ i la del gir de centre el punt (1, 1) i angle de gir $\pi/3$.
b) Descriviu les dues possibles composicions d'aquests moviments i doneu-ne les matrius.

Problema 6

Quins moviments transformen l'el·lipse de centre l'origen i semieixos 3 i 2 en les direccions dels vectors (1,0) i (0,1) en l'el·lipse de centre el punt (3, 4) i semieixos en les direccions dels vectors (1, 1) i $(1, -1)$ respectivament? Quina és la seva equació?

Problema 7

Considereu el lliscament d'eix la recta $r \equiv x + y = 2$ i translació de vector $\boldsymbol{v} = (1, -1)$.

a) Calculeu-ne la matriu.
b) Doneu la imatge del quadrat de vèrtexs $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ i $(1, -1)$.
c) Quina seria la imatge de la circumferència de centre l'origen i radi 2?

Problema 8

Considereu la simetria especular respecte del pla $x + 2y - z = 1$.

a) Calculeu-ne la matriu.
b) Quina és la imatge de la recta $x = y = z$ per aquest moviment?

Problema 9

A $\mathbb{R}^3$ considereu la simetria axial respecte de la recta $x - 1 = y = z$.

a) Calculeu-ne la matriu.
b) Quina és la imatge per aquest moviment de l'esfera de centre l'origen i radi 1? I la de l'esfera de centre el punt $(1,1,1)$ i radi 2?

Problema 10

Si

$$\mathcal{F}(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} z + 1, \frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} z, y + 2 \right)$$

a) Demostreu que $\mathcal{F}$ és un moviment de l'espai i doneu-ne la matriu.

b) Trobeu els punts fixos de $\mathcal{F}$ i classifiqueu-lo.

7 Grup de simetria d'una figura plana

7.1 Coneixements bàsics

7.1.1. Definició de grup de simetria d'una figura

Donada una figura *F* del pla, considerem el conjunt, G_F, de totes les isometries del pla que deixen fixa la figura *F*:

$$G_F = \left\{ \mathcal{F} \text{ isometria de } \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \mathcal{F}(F) = F \right\}.$$

Amb la composició d'isometries, aquest conjunt és un grup, és a dir, la composició és una operació interna i per a tot $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ de G_F, se satisfan les propietats:

a) Associativa: $(\mathcal{H} \circ \mathcal{G}) \circ \mathcal{F} = \mathcal{H} \circ (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})$.

b) Existència d'element neutre $Id \in G_F$ (aplicació identitat): $\mathcal{F} \circ Id = Id \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

c) Existència d'element invers $\mathcal{F}^{-1} \in G_F$ tal que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = Id$.

En general, es diu que un grup G està generat per un conjunt $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset G$, si qualsevol element de G es pot obtenir com a composició d'un nombre finit d'elements d'aquest conjunt o dels seus inversos. En aquest cas escriurem

$$G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle.$$

Un grup, G, es diu *cíclic* si està generat per un sol element $g \in G$. Si en aquest cas G té n elements, serà $G = \left\{ Id, g, g^2, \ldots, g^{n-1} \right\}$ i escriurem $G = \langle g \rangle$.

7.1.2 Grups de simetria puntuals o de Leonardo

Només hi ha dos tipus de grups de simetria d'una figura que són finits: els *grups cíclics* i els *grups diedrals*, en ambdós casos tenen un punt fix i s'anomenen *grups puntuals de simetria*. Aquests grups van ser estudiats per Leonardo da Vinci i per això també s'anomenen *grups de simetria de Leonardo.*
Els grups cíclics estan generats per un gir i es denoten per C_n, on *n* indica el número de girs del grup. Així tenim

$$C_n = \left\langle \mathcal{G}_O^{2\pi/n} \right\rangle = \left\{ \mathcal{G}_O^{2\pi/n}, \mathcal{G}_O^{4\pi/n}, \ldots, \mathcal{G}_O^{2(n-1)\pi/n}, \mathcal{G}_O^{2n\pi/n} = Id \right\}.$$

Els grups diedrals són els que estan generats per un gir i una simetria. En un grup diedral, el nombre de simetries coincideix amb el nombre de girs, així si aquest nombre és *n*, el grup es denota per D_n, de manera que

$$D_n = \left\langle \mathcal{G}_O^{2\pi/n}, \mathcal{S}_1 \right\rangle = \left\{ \mathcal{G}_O^{2\pi/n}, \mathcal{G}_O^{4\pi/n}, \ldots, \mathcal{G}_O^{2(n-1)\pi/n}, \mathcal{G}_O^{2n\pi/n} = Id, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n \right\}$$

on $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_{n-1}$ i $\mathcal{S}_n$ són simetries respecte de rectes que es tallen en el centre de la figura, O, i formen angles de π/n d'una recta a la següent.

Alguns exemples de figures amb grup de simetria cíclic o diedral són les següents:

Fig. 7.1

que té per grup de simetria un grup cíclic: $C_3 = \left\langle \mathcal{G}_O^{120^\circ} \right\rangle = \left\{ \mathcal{G}_O^{120^\circ}, \mathcal{G}_O^{240^\circ}, Id \right\}$,

Fig. 7.2

en aquest cas el grup de simetria és cíclic: $C_4 = \left\langle \mathcal{G}_O^{90^\circ} \right\rangle = \left\{ \mathcal{G}_O^{90^\circ}, \mathcal{G}_O^{180^\circ}, \mathcal{G}_O^{270^\circ}, Id \right\}$,

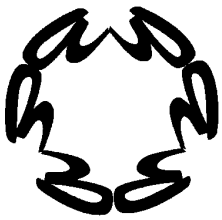


Fig. 7.3

el grup de simetria d'aquesta figura és diedral: $D_3 = \left\langle \mathcal{G}_O^{120^\circ}, \mathcal{S}_1 \right\rangle = \left\{ \mathcal{G}_O^{120^\circ}, \mathcal{G}_O^{240^\circ}, Id, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3 \right\}$.

7.1.3 Sanefes

Un element decoratiu molt utilitzat en arquitectura és la sanefa. Es tracta del disseny d'una banda produïda per la repetició infinita d'un cert patró. L'ús d'unes isometries determinades donarà al conjunt un cert ritme i disseny a la sanefa.
Per omplir una banda infinita només podem utilitzar les isometries del pla següents:
- *Translacions* de vector $\boldsymbol{v}$ paral·lel a la direcció de la banda i mòdul la longitud del patró.
- *Girs* de 180º amb centre de gir damunt de l'eix central de la banda.
- *Simetries,* els eixos de les quals només poden ser:
  - La recta que segueix la direcció de la banda i que hi està centrada.
  - Rectes perpendiculars a la banda.
- *Lliscament,* amb eix de simetria la recta central de la banda i vector de la translació $\boldsymbol{v}/2$.

Amb aquestes restriccions resulta que, a partir d'un motiu generador que no presenti cap tipus de simetria de les esmentades anteriorment, es poden crear set tipus de sanefes amb grup de simetria diferent.

A continuació fem una descripció dels *set grups de simetria de sanefes* mostrant un exemple de sanefa per a cadascun. Cada grup de simetria de sanefes rep un nom format per quatre símbols establerts per la Unió Internacional de Cristal·lografia i que estan relacionats amb les isometries que el formen.

Exemple. Prenem el motiu generador següent:

El nom del grup, els moviments i la sanefa corresponent a cada un dels set grups de simetria són:

- *p*111. Translacions.

- *p*1*m*1. Translacions i simetria respecte de l'eix central de la banda.

- *pm*11. Translacions i simetries respecte a rectes perpendiculars a l'eix central de la banda.

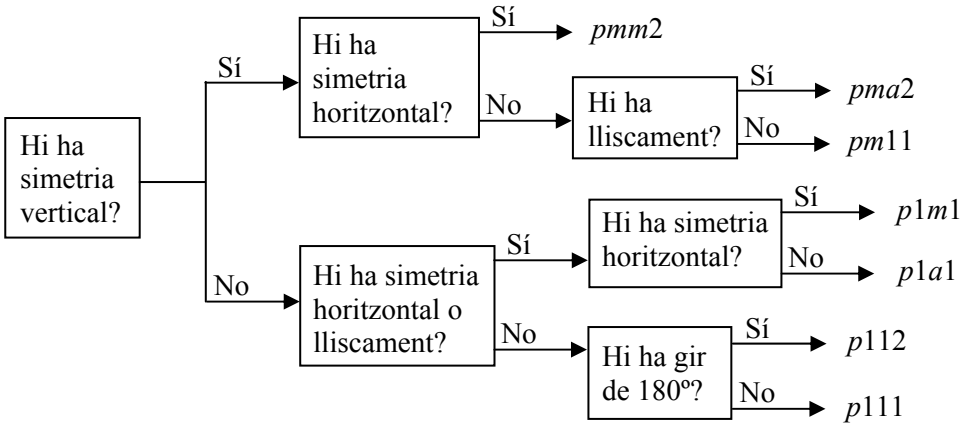
- *p*1*a*1. Translacions i lliscaments.

- *p*112. Translacions i girs de 180º.

- *pmm*2. Translacions, simetries respecte a rectes perpendiculars a l'eix central de la banda, i també simetria respecte de l'eix central de la banda.

- *pma*2. Translacions, simetries respecte a rectes perpendiculars a l'eix central de la banda i lliscaments.

Donada una sanefa, podrem saber-ne el grup de simetria estudiant les isometries que deixen la sanefa invariant. Una manera còmoda de fer aquest estudi és seguir l'algorisme següent:



7.1.4 Mosaics

De manera similar a les sanefes, es poden crear mosaics que s'obtindran a partir d'un motiu generador i la utilització d'algunes isometries del pla. Considerarem que un mosaic s'estén indefinidament a tot el pla.

Es pot veure que les úniques isometries possibles per a la creació de mosaics són:

- *Translacions:* hi ha dues direccions principals per a les translacions.
- *Girs:* els únics girs possibles són de 60º, 90º, 120º i 180º.
- *Simetries:* hi pot haver diversos eixos de simetria.
- *Lliscaments:* hi pot haver diversos eixos de simetria pel lliscament.

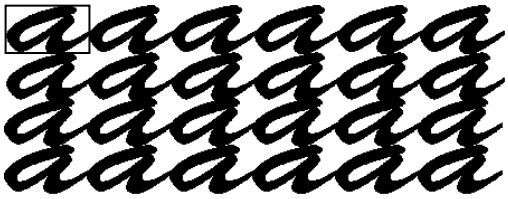
Per crear qualsevol mosaic, es pren un motiu generador al qual s'apliquen simetries, girs o lliscaments fins a crear un primer paral·lelogram, que anomenarem patró, que s'estén per tot el pla mitjançant translacions.

Estudiant detalladament els grups de simetria de tots els mosaics que es poden crear a partir d'un motiu generador que no presenti cap tipus de simetria, es pot veure que només hi ha *disset grups de simetria* per construir mosaics.

De forma similar a les sanefes, la Unió Internacional de Cristal·lografia ha establert una notació per a cada un dels 17 grups de simetria de mosaics. A continuació detallem cada un dels 17 grups, indicant-

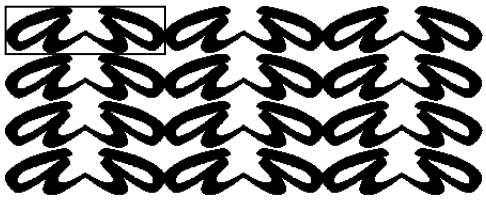
ne el nom, els elements generadors i un exemple de mosaic per a cada grup que s'ha creat amb el mateix motiu generador que els exemples de sanefes anteriors. En alguns casos es destaquen algunes de les isometries del grup a part de les generadores o s'anomenen algunes isometries que no són al grup.

- *p*1. Únicament translacions. Dues direccions principals que configuren la malla fonamental del mosaic. No hi ha girs, ni simetries ni lliscaments.

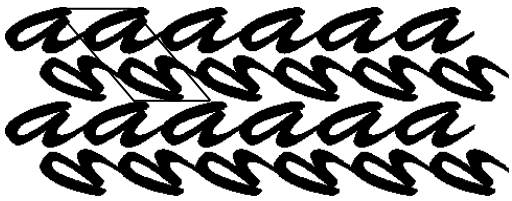


- *p*2. Translacions que configuren la malla del mosaic i girs de 180º. No hi ha simetries ni lliscaments.

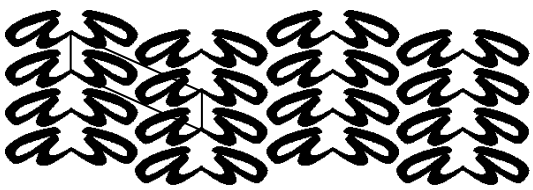
- *pm*. Translacions que configuren la malla del mosaic i simetries en una sola direcció. No hi ha girs ni lliscaments (llevat de les composicions de les simetries amb les translacions que ja hem dit).



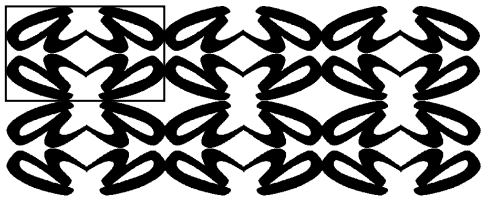
- *pg*. Translacions que configuren la malla del mosaic i lliscaments en una sola direcció. No hi ha simetries ni girs.



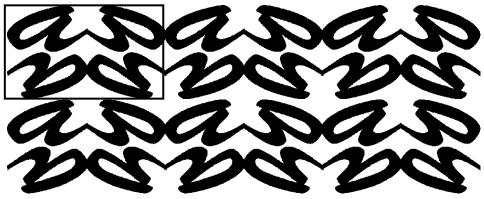
- *cm*. Translacions que configuren la malla del mosaic, simetries i lliscaments. No hi ha girs. Cal observar que hi ha lliscaments que tenen eix diferent de l'eix de les simetries.



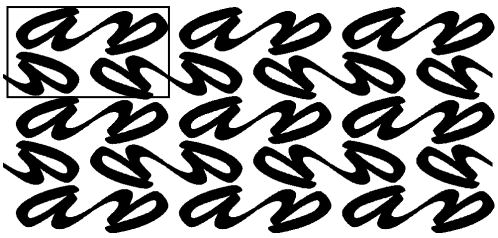
- *pmm*. Translacions que configuren la malla del mosaic, girs de 180º, simetries en dues direccions perpendiculars del mosaic. Cal observar que tots els centres de gir es troben damunt dels eixos de simetria.



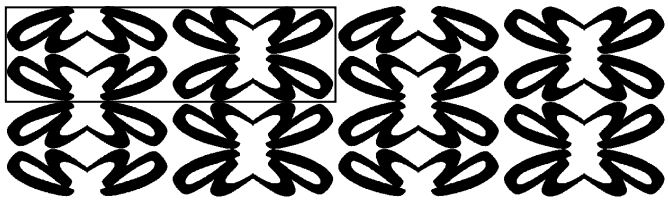
- *pmg*. Translacions que configuren la malla del mosaic, girs de 180º, simetries en una sola direcció. No hi ha lliscaments.



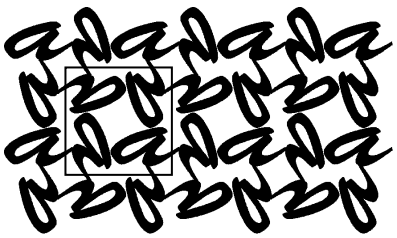
- *pgg*. Translacions que configuren la malla del mosaic, girs de 180º i lliscaments. No hi ha simetries.



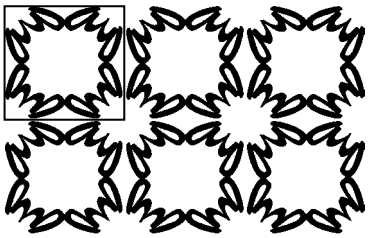
- *cmm*. Translacions que configuren la malla del mosaic, girs de 180º, simetries respecte de dues direccions perpendiculars. Cal observar que hi ha centres de gir que no estan damunt dels eixos de simetria.



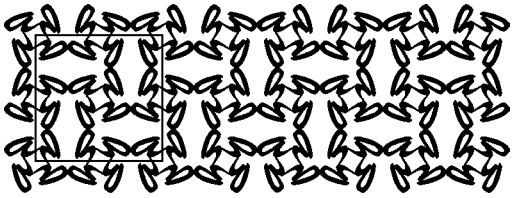
- *p*4. Translacions que configuren la malla del mosaic i girs de 90º. No hi ha simetries ni lliscaments. Cal observar que a l'haver-hi girs de 90º, també hi ha girs de 180º i de 270º.



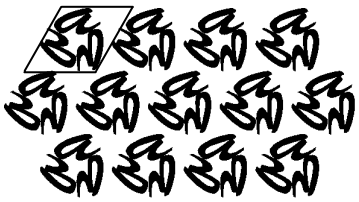
- *p*4*m*. Translacions que configuren la malla del mosaic, girs de 90º i simetries. Cal observar que hi ha quatre direccions per als eixos de simetria, l'angle que formen aquestes direccions és de 45º o 90º. Igual que al cas anterior, hi ha girs de 180º i 270º.



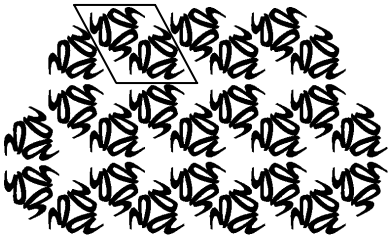
- *p*4*g*. Translacions que configuren la malla del mosaic, girs de 90º i simetries. En aquest cas només hi ha dues direccions per als eixos de simetria. Naturalment també hi ha girs de 180º i 270º.



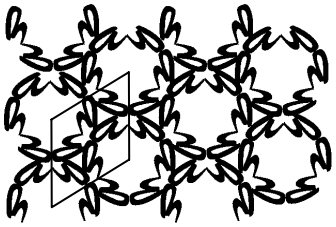
- *p*3. Translacions que configuren la malla del mosaic i girs de 120º. No hi ha simetries ni lliscaments. També hi ha girs de 240º.



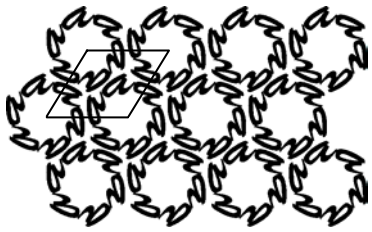
- *p*31*m*. Translacions que configuren la malla del mosaic, girs de 120º i simetries. Hi ha centres de gir fora dels eixos de simetria. També hi ha girs de 240º.



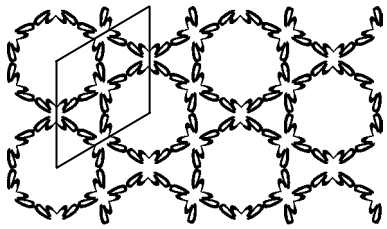
- *p*3*m*1. Translacions que configuren la malla del mosaic, girs de 120º i simetries. Tots els centres de gir es troben damunt dels eixos de simetria. També hi ha girs de 240º.



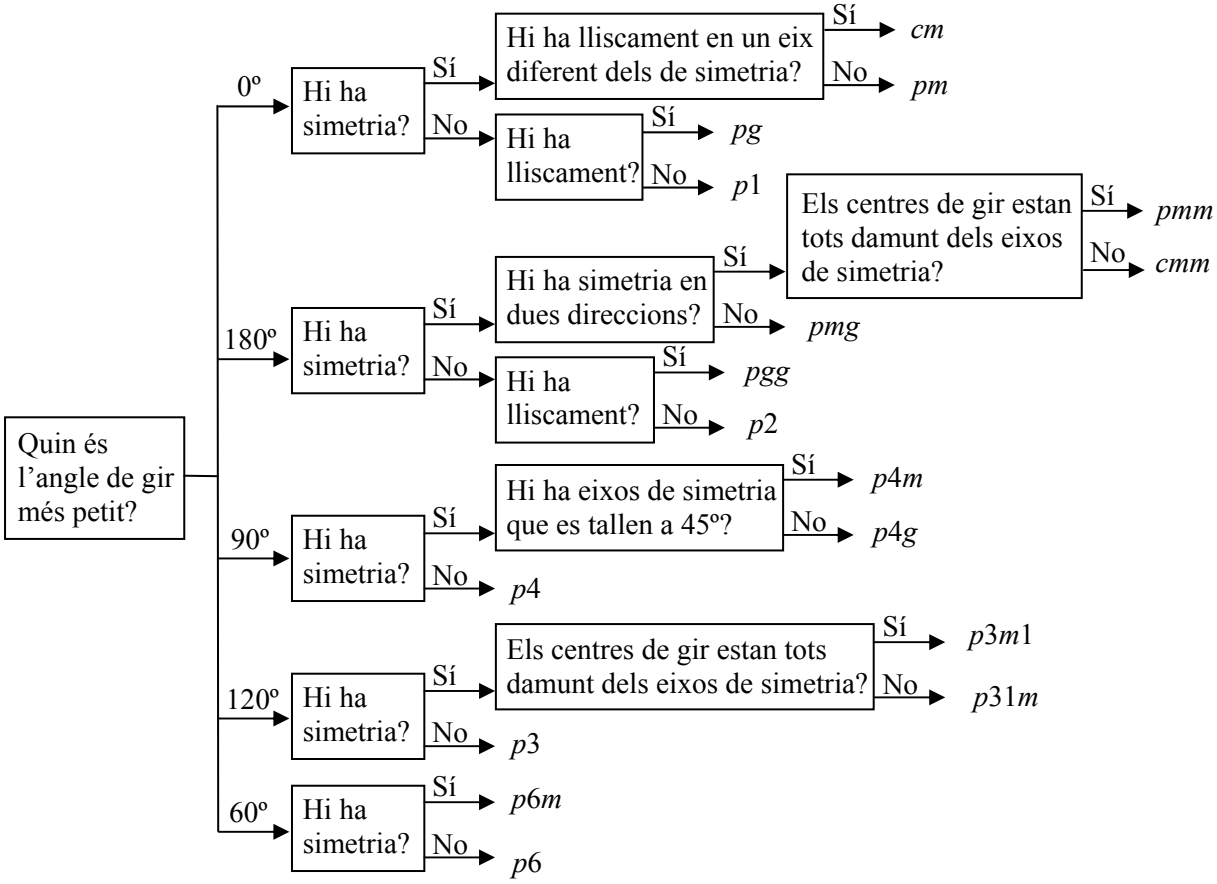
- *p*6. Translacions que configuren la malla del mosaic i girs de 60º. No hi ha simetries ni lliscaments. Naturalment hi ha girs de 120º, 180º i 240º que s'obtenen com a composició dels girs de 60º.



- *p*6*m*. Translacions que configuren la malla del mosaic, girs de 60º i simetries. Hi ha girs de 120º, 180º i 240º.



Anàlogament al cas de les sanefes, podrem seguir l'algorisme següent per conèixer el grup de simetria d'un mosaic:



7.2 Problemes resolts

Problema 1

Feu la descripció del grup de simetria d'un rectangle i doneu-ne la taula de composició.

Resolució

Considerem un rectangle, les dues rectes de simetria, r i s, i el centre del rectangle, O.

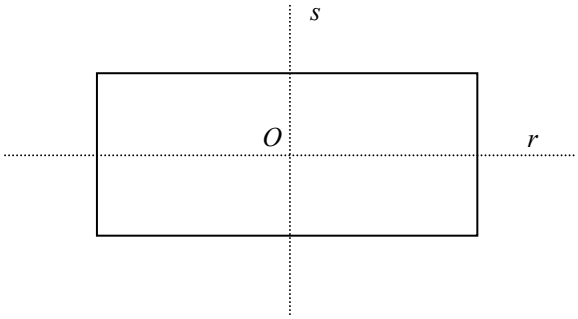


Fig. 7.4

Identifiquem quines isometries deixen aquest rectangle invariant:

- La identitat *Id*.
- La simetria $\mathcal{S}_r$ d'eix *r*.
- La simetria $\mathcal{S}_s$ d'eix *s*.
- El gir $\mathcal{G}_O^{180^\circ}$ de 180º de centre *O*.

Així, el grup de simetria del rectangle és:

$$G = \left\{ Id, \mathcal{S}_r, \mathcal{S}_s, \mathcal{G}_O^{180^\circ} \right\}.$$

i la seva taula de composició és:

$\circ$	Id	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_s$	$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$
Id	Id	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_s$	$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$
$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_r$	Id	$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$	$\mathcal{S}_s$
$\mathcal{S}_s$	$\mathcal{S}_s$	$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$	Id	$\mathcal{S}_r$
$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$	$\mathcal{S}_s$	$\mathcal{S}_r$	Id

on primer apliquem la isometria de dalt i després la de l'esquerra. Observem que aquest grup de simetria és finit, per tant, és un grup de simetria puntual o de Leonardo, concretament és el grup diedral D_2. A més a més, aquest grup és commutatiu i això es reflecteix en la simetria de la seva taula de composició.

Problema 2

Estudieu el grup de simetria d'una quadrícula suposadament infinita.

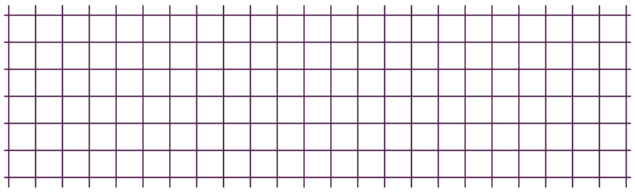


Fig. 7.5

Resolució

Les isometries del grup de simetria d'aquesta quadrícula són:
- La identitat.
- Translacions: qualsevol translació que porti un vèrtex de la quadrícula a un altre vèrtex de la quadrícula.
- Girs:
  - Qualsevol gir centrat en un vèrtex de la quadrícula i angles 90º, 180º o 270º.
  - Qualsevol gir centrat al centre d'un quadrat de la quadrícula i angles 90º, 180º o 270º.
  - Qualsevol gir centrat al punt mig d'un costat d'un quadrat de la quadrícula d'angle 180º.
- Simetries: totes les simetries que tenen per eixos una recta de la mateixa quadrícula, una recta que passa pels centres dels quadrats d'una mateixa fila o columna de la quadrícula i, també, una recta diagonal a un quadrat de la quadrícula.
- Lliscaments: aquesta quadrícula admet molts lliscaments, es poden fer lliscaments on la recta de simetria sigui qualsevol recta paral·lela a les rectes que hem descrit en el cas de les simetries, i a continuació, fer la composició amb una translació triant el vector que situï la quadrícula al seu lloc.

Aquest grup té infinites isometries. Per no haver de donar tots els elements del grup, n'hi ha prou amb donar-ne els generadors, que són:
- Dues translacions de vectors linealment independents.
- Tres simetries d'eixos: una recta de la mateixa quadrícula, una recta que passi pels centres dels quadrats d'una mateixa fila o columna de la quadrícula i una recta diagonal a un quadrat de la quadrícula.

Com que aquesta figura recobreix tot el pla de forma periòdica, el seu grup de simetria es correspon a un grup de simetria de mosaics, concretament és el *p*4*m*.

Problema 3

Estudieu el grup de simetria de les figures següents:

a) b) c)

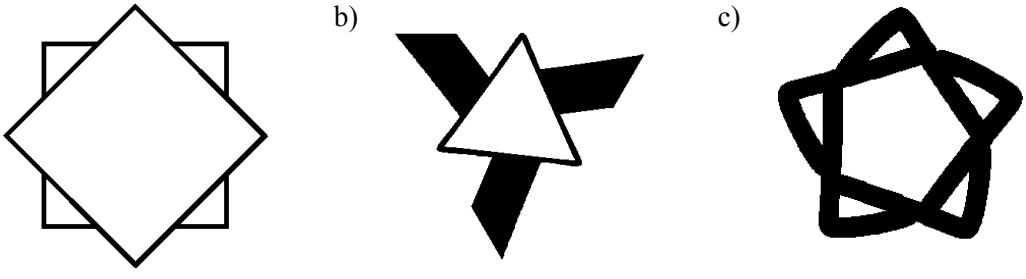


Fig. 7.6

Resolució

Les isometries que deixen invariants aquestes figures tenen el centre de la figura com a punt fix. Així els seus grups de simetria seran grups de simetria puntual. En cada apartat cal assenyalar el centre de la figura i mirar quins girs admet. Un cop tenim els girs, cal estudiar si la figura accepta simetries. Així tenim que el grup de simetria de cada una d'aquestes figures és:

a) Diedral D_4.

b) Cíclic C_3.

c) Cíclic C_5.

Problema 4

Utilitzeu el motiu següent:

per construir una figura que tingui per grup de simetria:

a) Un grup cíclic C_6.

b) Un grup diedral D_6.

Resolució

a) Cal prendre el motiu generador i aplicar-hi girs de 60º successivament. Segons el centre de gir que prenguem, obtindrem una figura o una altra. Un parell d'exemples poden ser:

Fig. 7.7

b) En aquest cas, cal aplicar una simetria al motiu generador i després girs de 60º. Un parell d'exemples són:

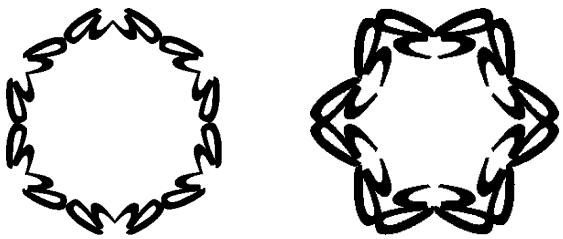


Fig. 7.8

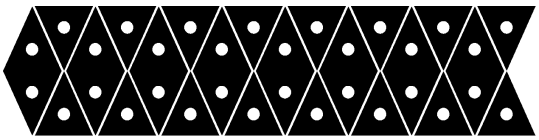
Problema 5

Per a cada una de les sanefes següents, doneu-ne el motiu generador i el grup de simetria.

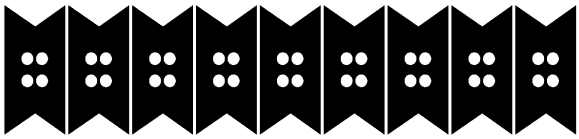
a)

b)

c)



d)



Resolució

a) Aquesta sanefa s'ha generat a partir del motiu:

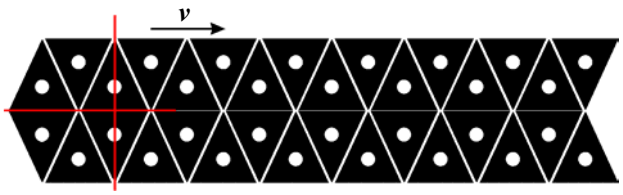
aplicant-hi una simetria vertical i un gir de 180º, així s'obté el patró que després es repeteix per translacions de vector $\boldsymbol{v}$. El seu grup de simetria és el *pma*2.

b) En aquest cas, el motiu generador és:

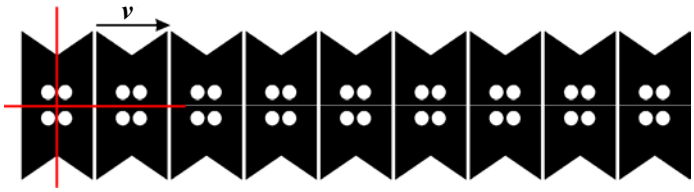
al qual s'ha aplicat una simetria vertical per obtenir el patró que es repeteix per translacions de vector $\boldsymbol{v}$. El grup de simetria obtingut és el *pm*11.

c) El motiu generador és:

En aquest cas s'ha aplicat una simetria vertical i una simetria horitzontal per obtenir el patró. Amb l'ús de translacions, s'ha acabat de construir la sanefa. El seu grup de simetria és el *pmm*2.



d) Aquesta sanefa s'ha generat amb el mateix motiu que la sanefa de l'apartat b i utilitzant les isometries del grup de simetria de l'apartat c, per tant, el grup de simetria torna a ser el *pmm*2.



Problema 6

Estudieu quines sanefes es poden construir amb la figura següent:

Resolució

Aquesta figura presenta una simetria respecte d'un eix vertical, per tant no és possible construir 7 sanefes amb grup de simetria diferents, sinó que només es poden construir sanefes que tinguin dins del seu grup de simetria aquest tipus d'isometria. D'aquests, només n'hi ha tres:

1. Fent únicament translacions, obtenim una sanefa el grup de simetria de la qual també conté simetries verticals, per tant, és el *pm*11.

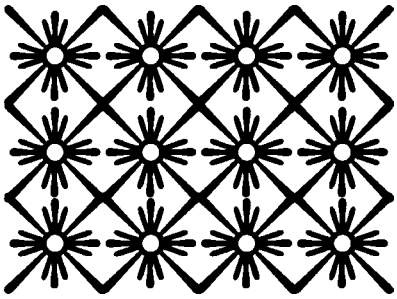
2. Fent una simetria respecte d'una recta horitzontal i translacions, obtenim una sanefa que té grup de simetria el *pmm*2 que, naturalment, també conté simetries verticals.

3. Fent un lliscament i translacions, tenim una sanefa amb grup de simetria *pma*2.

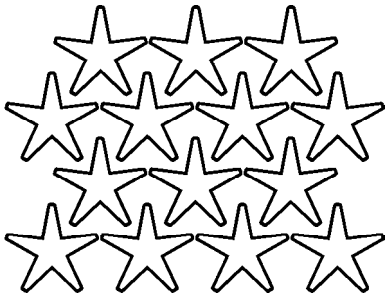
Problema 7

Doneu el motiu generador i estudieu el grup de simetria dels mosaics següents:

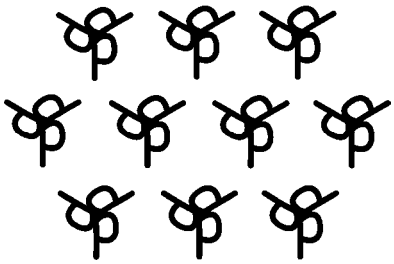
a)



b)



c)



d)

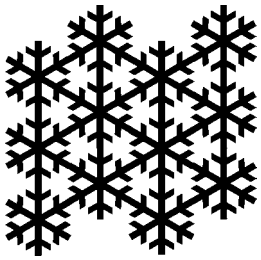


Fig. 7.9

Resolució

a) Primer de tot, ens fixem en l'angle de gir mínim que deixa aquest mosaic invariant. El gir és de 90º, així podem afirmar que el grup de simetria d'aquest mosaic és el *p*4, o el *p*4*m*, o bé el *p*4*g*. El fet que admeti simetries descarta el *p*4, i com que l'angle que formen els eixos de simetria és de 45º, deduïm que es tracta del grup de simetria de mosaics *p*4*m*.

Aquest mosaic s'ha generat a partir del motiu següent:

aplicant-hi les isometries esmentades.

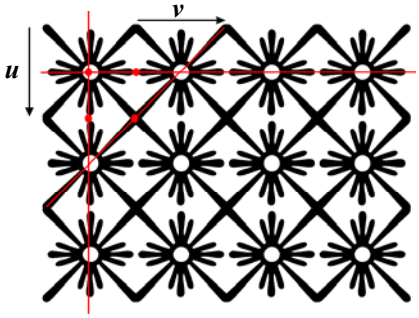
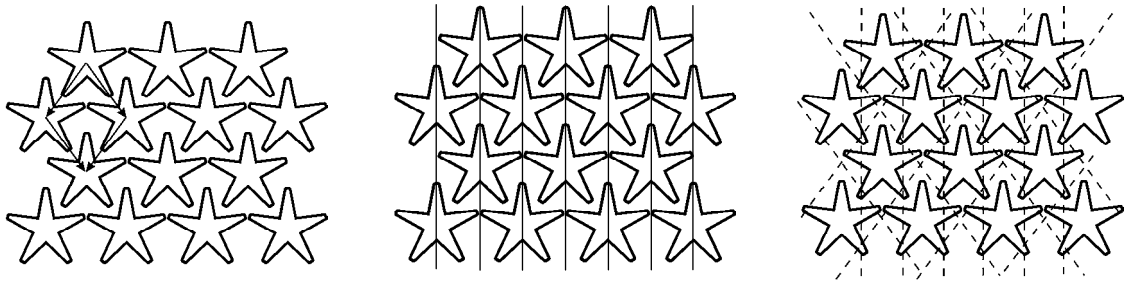


Fig. 7.10

b) El grup de simetria d'aquest mosaic no conté girs, però sí que conté simetries i lliscaments. Així doncs, es tracta del grup anomenat *cm*. Les imatges següents mostren algunes de les isometries que deixen invariant aquest mosaic.



Translacions *Simetries* *Lliscaments*

Fig. 7.11

Per trobar el motiu amb què s'ha generat el mosaic ens fixem en la malla de paral·lelograms idèntics formats amb els vectors de translació:

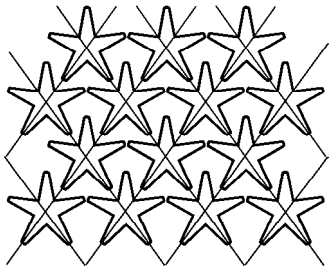


Fig. 7.12

Per tant, podem considerar un dels paral·lelograms com el patró amb el que s'ha format el mosaic. Aquest patró presenta una simetria vertical i, per tant, el motiu generador d'aquest mosaic coincideix amb la meitat d'aquest patró:

Patró *Motiu generador*

Fig. 7.13

c) A partir del motiu

i girs de 120º s'ha creat el patró

fent ús de translacions s'obté la resta del mosaic. Així, el grup de simetria d'aquest mosaic té girs de 120º, però no té simetries. Es tracta, doncs, del grup de simetria anomenat *p*3.

d) El motiu generador d'aquest mosaic és

i aplicant-hi una simetria i després girs de 60º successius obtenim el patró

El grup de simetria d'aquest patró és el grup diedral D_6, així tenim girs de 60º i simetries, de manera que el mosaic generat al fer translacions d'aquest patró té per grup de simetria el *p*6*m*.

Problema 8

Doneu dos exemples de mosaics que es puguin crear amb la figura següent i que tinguin el mateix grup de simetria.

Resolució

El grup de simetria d'aquesta figura és el grup cíclic C_6. Si no li apliquem simetries, qualsevol mosaic creat a partir d'ella tindrà com a grup de simetria el *p6*. Dos exemples de mosaics construïts amb aquesta són:

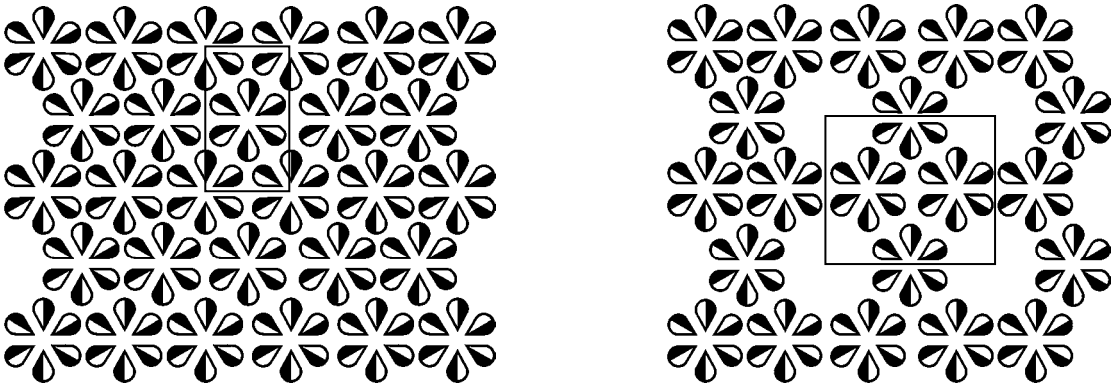


Fig. 7.14

7.3 Problemes proposats

Problema 1

Doneu el grup de simetria d'un triangle equilàter i feu-ne la taula de composició.

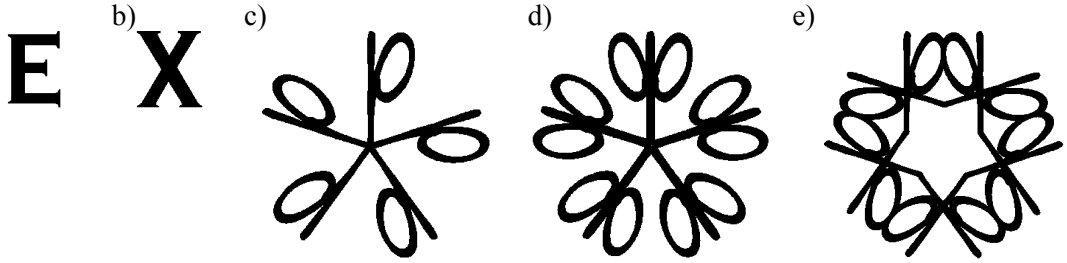
Problema 2

Doneu el grup de simetria del conjunt format per tots els punts del pla compresos entre les rectes $x = 0$ i $x = 1$.

Problema 3

Digueu quin és el grup de simetria i feu la taula de composició de les figures següents:

a) b) c) d) e)



Problema 4

Dibuixeu una figura en què el grup de simetria sigui:

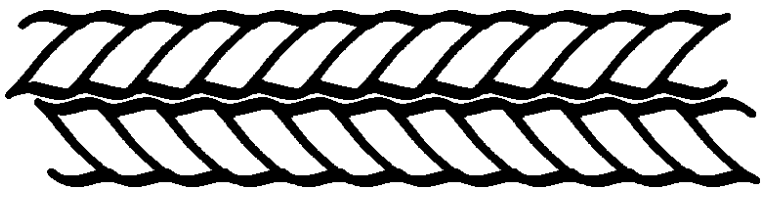
a) Un diedral D_5.

b) Un cíclic C_4.

Problema 5

Estudieu el grup de simetria de les sanefes següents:

a)



b)

c)

Problema 6

A partir de cada un de les figures següents, construïu totes les sanefes possibles amb grup de simetria diferent. Tingueu en compte les simetries de cada figura.

a) **E** b) **X** c) **Y**

Problema 7

Estudieu el grup de simetria de les sanefes següents:

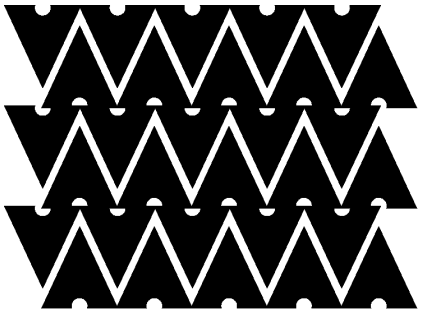
a)

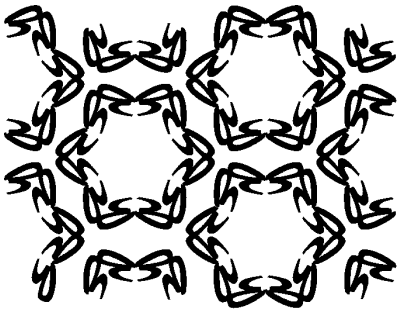
b)

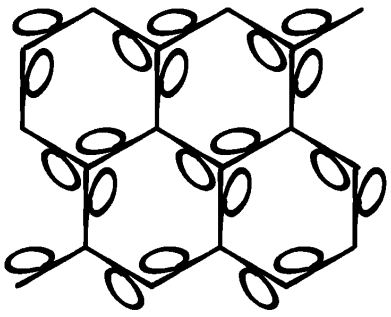
c)

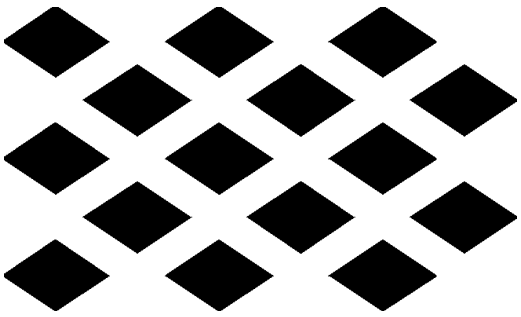
Problema 8

Identifiqueu el grup de simetria dels mosaics següents:

a) 

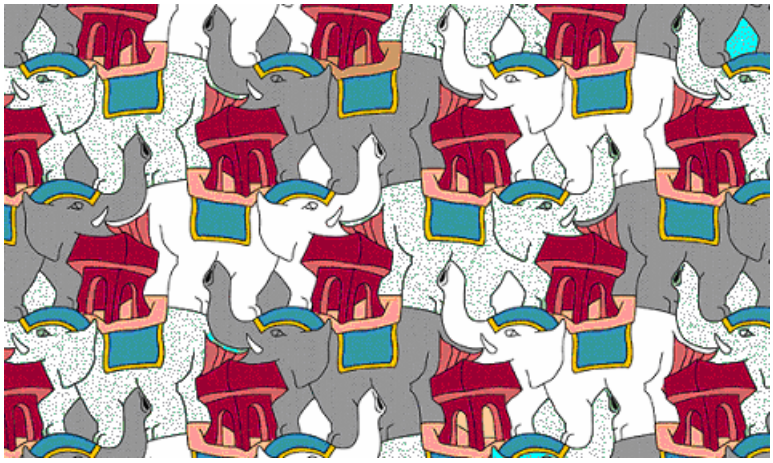
b) 

c) 

d) 

Problema 9

Estudieu el grup de simetria del mosaic següent creat per M.C. Escher

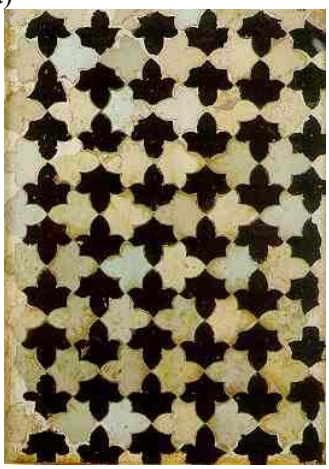


a) Tenint en compte que hi ha diferents tons de gris.
b) Sense tenir en compte els diferents tons de gris.

Problema 10

Estudieu el grup de simetria dels següents mosaics de l'Alhambra de Granada, sense tenir en compte els diferents tons de gris:

a)



b)

8 Còniques

8.1 Coneixements bàsics

En fer la intersecció d'un con de revolució amb un pla, obtenim una corba. Segons la inclinació del pla respecte de les generatrius del con, la corba pot ser una el·lipse, una hipèrbola o una paràbola, entre d'altres. Les corbes obtingudes així s'anomenen còniques i, justament, les més significatives són les tres que hem anomenat.

8.1.1. L'el·lipse

Corba que s'obté en tallar un con de revolució per un pla que talli totes les generatrius del con i que no passi pel seu vèrtex.

Si considerem les dues esferes tangents al con i al pla simultàniament, tenim dos punts de tangència d'aquestes esferes amb el pla. Aquests punts s'anomenen *focus* de l'el·lipse. Aleshores els punts de l'el·lipse coincideixen amb el lloc geomètric dels punts del pla tals que la suma de distàncies als dos focus és constant (vegeu el problema 2).

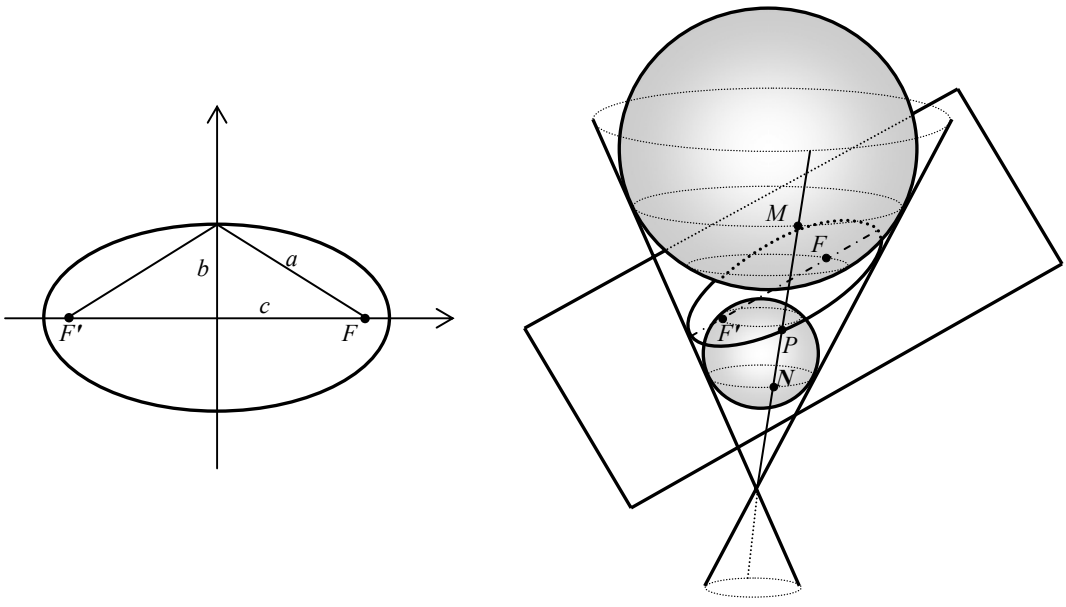


Fig. 8.1

Equació de l'el·lipse

Siguin F i F' els focus, $2c$ la distància entre els focus, anomenada *distància focal*, i $2a$ la constant a la qual es refereix la propietat del lloc geomètric. Si prenem la recta que passa pels focus com a eix d'abscisses i el punt mig dels focus com l'origen de coordenades, aleshores per qualsevol punt $P=(x,y)$ de l'el·lipse tenim

$$d(P,F)+d(P,F')=2a \Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

De la relació $\overline{PF'}+\overline{PF}>\overline{FF'}$, obtenim que $2a>2c$, i per tant, podem prendre $b>0$ tal que

$$a^2=b^2+c^2.$$

Així, l'equació de l'el·lipse es pot escriure com:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Aquesta equació és coneguda com l'*equació reduïda* o *canònica* de l'el·lipse.

El punt mig dels focus s'anomena *centre* de l'el·lipse que en la referència triada és l'origen de coordenades. Els punts de tall de l'el·lipse amb els seus eixos, $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$ i $(0,-b)$, són els *vèrtexs* de l'el·lipse. El segment comprès entre els vèrtexs $(a,0)$ i $(-a,0)$ és l'*eix major* de l'el·lipse i el comprès entre $(0,b)$ i $(0,-b)$ l'*eix menor*. El valor a s'anomena *semieix major* i el valor b, *semieix menor.*

El quocient

$$e=\frac{c}{a}$$

es coneix com a *excentricitat* de l'el·lipse i és un número positiu més petit que 1. Si $e=0$, aleshores $c=0$ i $a=b$, i l'el·lipse és una circumferència de radi a que té per equació

$$x^2+y^2=a^2.$$

8.1.2. Definició i propietats de la hipèrbola

Corba que s'obté en tallar un con de revolució per un pla que sigui paral·lel a dues generatrius del con i que no passi pel seu vèrtex.

Considerant les dues esferes tangents al con i al pla simultàniament, tenim dos punts de tangència d'aquestes esferes amb el pla. Aquests punts s'anomenen *focus* de la hipèrbola. Aleshores, els punts de la hipèrbola coincideixen amb el lloc geomètric dels punts del pla tals que la diferència de distàncies als dos focus és constant (vegeu el problema 4).

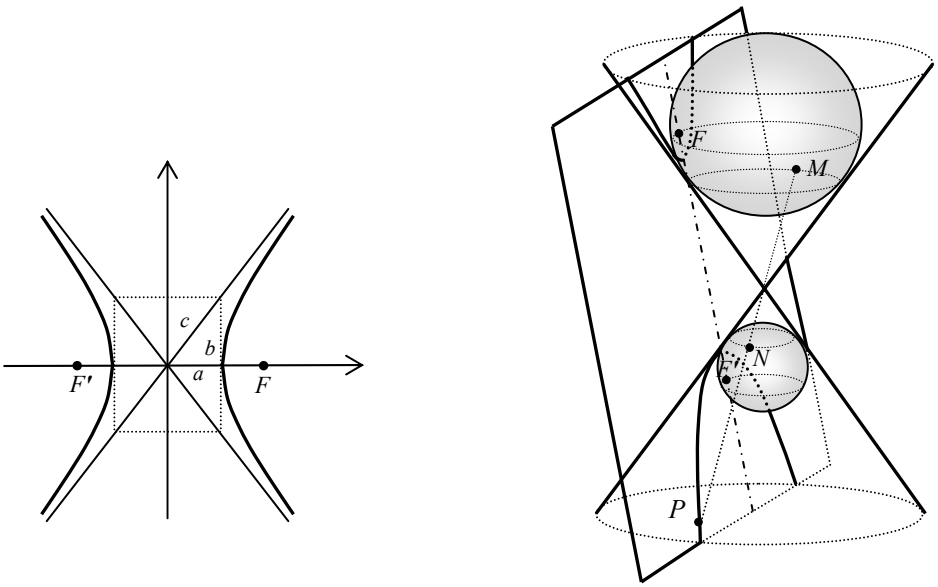


Fig. 8.2

Equació de la hipèrbola

Siguin F i F' els focus, $2c$ la distància entre els focus, anomenada *distància focal*, i $2a$ la constant a la qual es refereix la propietat del lloc geomètric. Si es pren la recta que passa pels focus com a eix d'abscisses i el punt mig dels focus com a origen de coordenades, aleshores per a qualsevol punt $P=(x,y)$ de la hipèrbola

$$\left|d(P,F)-d(P,F')\right|=2a \Leftrightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

i tenint en compte que

$$\overline{PF'}-\overline{PF}<\overline{FF'} \Rightarrow 2a<2c \Rightarrow c^2-a^2>0$$

si prenem $b>0$ tal que $b^2=c^2-a^2$, l'equació de la hipèrbola es pot escriure com:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Aquesta equació és coneguda com l'*equació reduïda* o *canònica* de la hipèrbola.

La recta que passa pels focus és *l'eix real* de la hipèrbola i la mediatriu del segment que determinen els dos focus, *l'eix imaginari*. L'eix imaginari no talla la hipèrbola, mentre que l'eix real la talla en dos punts, anomenats *vèrtexs* de la hipèrbola, que en la referència triada tenen coordenades $(\pm a,0)$.

El punt mig dels focus és el *centre* de la hipèrbola. El valor a s'anomena *semieix real* de la hipèrbola i el valor b, *semieix imaginari*. Se satisfà la igualtat:

$$c^2=a^2+b^2.$$

Les rectes $y = \pm\frac{b}{a}x$ són les *asímptotes* de la hipèrbola. En el cas que $a = b$ es diu que la hipèrbola és *equilàtera* i les asímptotes són dues rectes perpendiculars.

El quocient

$$e = \frac{c}{a}$$

es coneix com l'*excentricitat* de la hipèrbola i, com que $a < c$, podem afirmar que l'excentricitat d'una hipèrbola sempre és més gran que 1.

8.1.3. La paràbola

Corba que s'obté en tallar un con de revolució per un pla que sigui paral·lel a una única generatriu del con i que no passi pel seu vèrtex.

Considerant l'esfera tangent al con i al pla simultàniament, tenim un punt de tangència, *F*, d'aquesta esfera amb el pla. Aquest punt s'anomena *focus* de la paràbola. L'esfera és tangent al con en una circumferència i el pla que conté aquesta circumferència talla al pla que conté a la paràbola en una recta, *d*, que s'anomena *directriu*. Aleshores, els punts de la paràbola coincideixen amb el lloc geomètric dels punts que equidisten del focus i de la directriu (vegeu el problema 6).

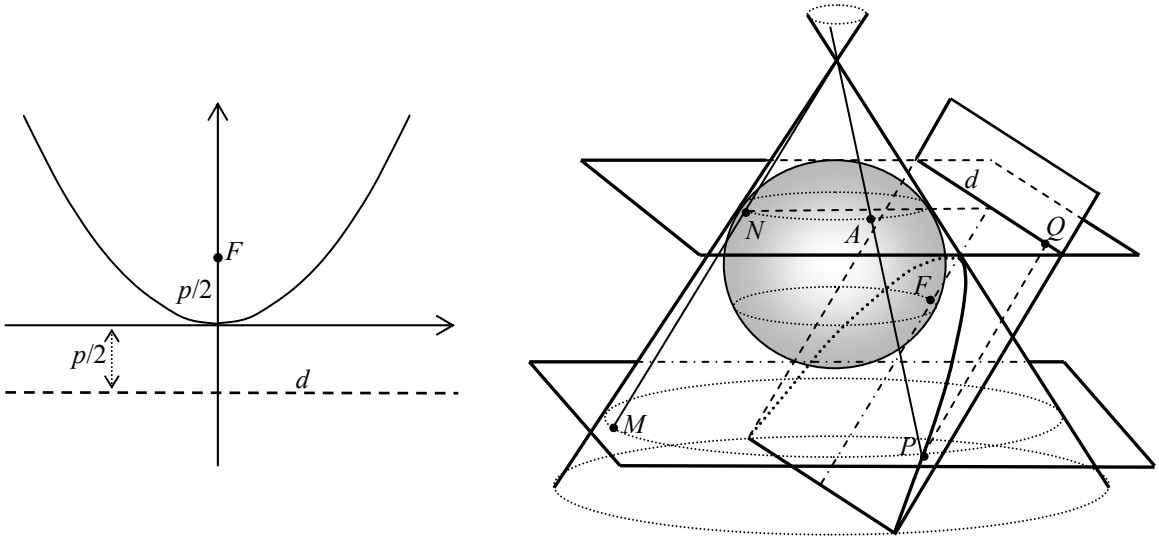


Fig. 8.3

Equació de la paràbola

Sigui F el focus, d la directriu i p la distància entre el focus i la directriu de la paràbola. Si prenem com a eix d'abscisses la recta paral·lela a la directriu que equidista del focus i la directriu, i com a eix d'ordenades la recta perpendicular que passa pel focus, tenim que $F = (0, p/2)$ i l'equació de la directriu és $y = -p/2$. Aleshores, si $P = (x, y)$ és un punt de la paràbola, tenim

$$d(P,F) = d(P,d) \Leftrightarrow x^2 = 2py.$$

Aquesta equació és coneguda com l'*equació reduïda* o *canònica* de la paràbola.

La recta perpendicular a la directriu que passa pel focus és l'*eix* de la paràbola, i el punt de tall d'aquest amb la paràbola és el *vèrtex* de la paràbola. Aquest vèrtex en la referència triada té de coordenades $(0,0)$.

8.1.4. Classificació euclidea de les còniques

Tota cònica té una equació de segon grau. Aquesta equació serà la reduïda (o canònica) sempre que la cònica vingui donada amb uns eixos de coordenades tal com s'ha explicat anteriorment. En qualsevol altre cas, la seva equació serà de la forma:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

i el problema que tindrem serà determinar de quina cònica es tracta i quina és la seva posició al pla. A continuació expliquem una manera de resoldre'l.

En primer lloc, s'escriu l'equació de la cònica en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \Leftrightarrow X^t AX + bX + c = 0$$

on

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Ara els passos que es segueixen són els següents:

1. Diagonalizatció de A (eliminació del terme xy)
   - $\det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1,\ \lambda_2$ valors propis.
   - $B' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ base ortonormal de vectors propis, $P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$ matriu del canvi de base (és una matriu ortogonal: $P^t = P^{-1}$).
   - Fem el canvi:

$$X = PX' \text{ on } X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

i l'equació matricial que en resulta és:

$$X'^t P^t APX' + bPX' + c = 0 \Leftrightarrow X'^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X' + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} PX' + c = 0.$$

I operant, arribem a una expressió de la forma:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + l_1 x' + l_2 y' + c = 0$$

2. Eliminació de termes lineals (completesa de quadrats)
Agrupem termes:

$$\left(\lambda_1 x'^2 + l_1 x'\right) + \left(\lambda_2 y'^2 + l_2 y'\right) + c = 0$$

a) Si $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2 \neq 0$ es tracta de còniques amb centre. Completant quadrats, l'equació anterior es pot escriure així:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{l_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{l_2}{2\lambda_2} \right)^2 = k$$

i si ara fem el canvi

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{l_1}{2\lambda_1} \\ y'' = y' + \dfrac{l_2}{2\lambda_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x'' - \dfrac{l_1}{2\lambda_1} \\ y' = y'' - \dfrac{l_2}{2\lambda_2} \end{cases}$$

obtenim l'equació

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = k.$$

Si $k \neq 0$, prenem

$$a = \sqrt{\left|\frac{k}{\lambda_1}\right|} \text{ i } b = \sqrt{\left|\frac{k}{\lambda_2}\right|}$$

i segons el valor del signe de cada un d'aquests tres coeficients, s'obté una equació de la forma:

$$\pm \frac{x''^2}{a^2} \pm \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

Així tindrem les tres possibilitats següents:

- $\dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = 1$ *El·lipse*.
- $\dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2} = 1$ o bé $-\dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = 1$ *Hipèrbola*.
- $-\dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2} = 1$ El conjunt buit, ϕ.

Si $k = 0$, prendrem

$$a=\sqrt{\left|\frac{1}{\lambda_1}\right|} \quad \text{i} \quad b=\sqrt{\left|\frac{1}{\lambda_2}\right|}$$

i segons el signe de λ_1 i λ_2, arribarem a una de les dues possibilitats següents:

- $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=0$ *Un sol punt*, el $(0,0)$.
- $\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=0$ *Un parell de rectes*: $\frac{x''}{a}+\frac{y''}{b}=0$ i $\frac{x''}{a}-\frac{y''}{b}=0$.

b) Si $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2=0$, la cònica no té centre. Completant quadrats s'arriba a l'equació:

$$\lambda_1\left(x'+\frac{l_1}{2\lambda_1}\right)^2+l_2y'=k.$$

Si $l_2 \neq 0$, aleshores

$$\left(x'+\frac{l_1}{2\lambda_1}\right)^2=-\frac{l_2}{\lambda_1}\left(y'-\frac{k}{l_2}\right)$$

i fent el canvi

$$\begin{cases} x''=x'+\dfrac{l_1}{2\lambda_1} \\ y''=y'-\dfrac{k}{l_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x''-\dfrac{l_1}{2\lambda_1} \\ y'=y''+\dfrac{k}{l_2} \end{cases}$$

l'equació que en resulta és:

- $x''^2=l_3y''$ *Paràbola*.

Si $l_2=0$, s'obté una equació de la forma

$$\left(x'+\frac{l_1}{2\lambda_1}\right)^2=k'$$

i en aquest cas es fa el canvi

$$\begin{cases} x''=x'+\dfrac{l_1}{2\lambda_1} \\ y''=y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x''-\dfrac{l_1}{2\lambda_1} \\ y'=y'' \end{cases}$$

obtenint l'equació $x''^2=k'$ que, segons els valors de k', ens portarà a una de les equacions següents:

- $x''^2=a^2$ *Dues rectes paral·leles*: $x''=a$ i $x''=-a$.
- $x''^2=0$ *Una recta doble*: $x''=0$.
- $x''^2=-a^2$ El conjunt buit, ϕ.

8.2 Problemes resolts

Problema 1

Trobeu l'equació i feu les gràfiques de les el·lipses següents:

a) L'el·lipse de focus els punts $F_1 = (-2,0)$, $F_2 = (2,0)$ i eix major igual a 6.

b) L'el·lipse de focus els punts $F_1 = (-2,1)$, $F_2 = (4,1)$ i eix menor igual a 4.

c) L'el·lipse de focus els punts $F_1 = (-2,0)$, $F_2 = (2,2)$ i eix major igual a 6.

Resolució

a) El centre de l'el·lipse és el punt mig dels focus

$$\frac{F_1 + F_2}{2} = (0,0).$$

La distància focal és $2c = d(F_1, F_2) = 4$ i per tant, $c = 2$. L'eix major val 6 i així $a = 3$. Finalment, de la relació:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

i com que els eixos d'aquesta el·lipse coincideixen amb els eixos de coordenades, la seva equació serà

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Finalment la gràfica de l'el·lipse és

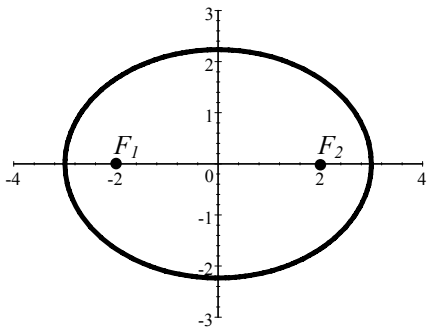


Fig. 8.4

b) Anàlogament calculem el centre, els semieixos i la distància focal:

$$C = \frac{F_1 + F_2}{2} = (1,1) \qquad 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$2c = d(F_1, F_2) = 6 \Rightarrow c = 3 \qquad a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$$

Els eixos de l'el·lipse són paral·lels als eixos de coordenades i el seu centre és el punt (1,1), per tant la seva equació és:

$$\frac{(x-1)^2}{13}+\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

La gràfica de l'el·lipse és:

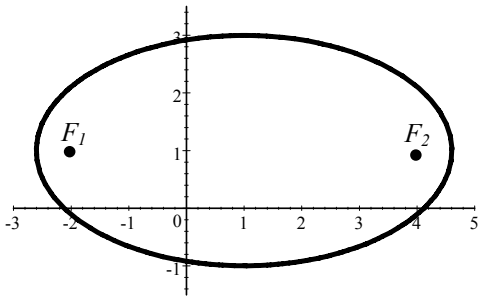


Fig. 8.5

c) A partir de les dades de l'enunciat, calculem el centre, els semieixos i la distància focal:

$$C=\frac{F_1+F_2}{2}=(0,1) \qquad 2a=6\Rightarrow a=3$$
$$2c=d(F_1,F_2)=\sqrt{20}\Rightarrow c=\sqrt{5} \qquad a^2=b^2+c^2\Rightarrow b^2=9-5=4\Rightarrow b=2.$$

Els eixos de l'el·lipse no són paral·lels als eixos de coordenades i, per tant, haurem de considerar l'el·lipse de centre l'origen i semieixos 3 i 2 que té per equació

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad (*)$$

i aplicar-hi un gir respecte de l'origen de coordenades d'angle, α, format per l'eix d'abscisses i el vector $\overrightarrow{F_1F_2}$ i, després, una translació de vector $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OC}=(0,1)$. L'el·lipse així obtinguda serà la que busquem.

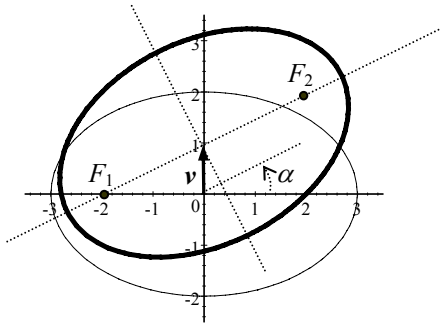


Fig. 8.6

La figura 8.6 representa les gràfiques de les dues el·lipses. Com que

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{\left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\|} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(4,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$$

les equacions d'aquest moviment són:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y' - 1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y' - 2) \end{cases}$$

i la imatge de l'el·lipse (*) tindrà per equació:

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y' - 1)\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y' - 2)\right)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 5x'^2 + 8y'^2 - 4x'y' + 4x' - 16y' - 28 = 0.$$

Una altra manera de calcular aquesta equació és utilitzant la definició d'el·lipse com a lloc geomètric de punts pels quals la suma de les seves distàncies als focus és constant i igual a $2a$:

$$(x, y) \in \text{el·lipse} \Leftrightarrow d((x, y), F_1) + d((x, y), F_2) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 6$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 8y^2 - 4xy + 4x - 16y - 28 = 0$$

Problema 2

Justifiqueu la propietat d'el·lipse com a lloc geomètric de punts a partir de la definició d'intersecció d'un con per un pla. (Vegeu la figura 8.1.)

Resolució

Sigui P un punt qualsevol de l'el·lipse. La generatriu del con que passa per P és tangent a les dues esferes en els punts M i N. El pla que conté l'el·lipse també és tangent a les dues esferes i, per tant, podem afirmar que $d(P,M) = d(P,F)$ i $d(P,N) = d(P,F')$. Així tenim que:

$$d(P,F) + d(P,F') = d(P,M) + d(P,N) = d(M,N)$$

i aquesta última distància és contant per qualsevol parell de punts, *M* i *N*, del con, situats a la mateixa generatriu, i cada un d'ells en una de les dues circumferència de tangència del con amb les esferes.

Problema 3

Trobeu l'equació de les hipèrboles següents:

a) La hipèrbola de focus els punts $F_1=(-3,0)$ i $F_2=(3,0)$ i excentricitat $e=\frac{3}{2}$.

b) La hipèrbola de vèrtexs els punts $V_1=(2,-3)$ i $V_2=(2,1)$ i asímptotes $y=3x-7$ i $y=-3x+5$.

c) La hipèrbola de focus els punts $F_1=(2,2)$ i $F_2=(4,4)$ i semieix real de longitud $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolució

a) El centre de la hipèrbola és el punt

$$\frac{F_1+F_2}{2}=(0,0).$$

La distància focal és $2c=d(F_1,F_2)=6$ i, per tant, $c=3$ que juntament amb l'excentricitat ens permet calcular el semieix real

$$e=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{3}{a}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=2.$$

L'eix imaginari l'obtenim de la relació: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow b^2=9-4=5.$

Els eixos de la hipèrbola coincideixen amb els eixos de coordenades i, per tant, la seva equació és:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$

i la seva gràfica

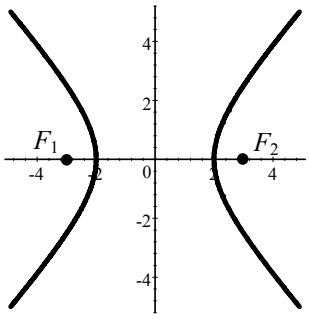


Fig. 8.7

b) A partir dels vèrtexs podem calcular el centre i el semieix real de la hipèrbola.

$$C=\frac{V_1+V_2}{2}=(2,-1)$$

$$2a = d(V_1, V_2) = 4 \Rightarrow a = 2$$

Com que l'eix real d'aquesta hipèrbola és paral·lel a l'eix d'ordenades, podem calcular el semieix imaginari a partir del pendent de les asímptotes

$$\frac{a}{b} = 3 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

Així, l'equació de la hipèrbola és:

$$\frac{(y+1)^2}{2^2} - \frac{(x-2)^2}{(2/3)^2} = 1$$

i la seva gràfica és:

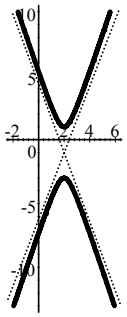


Fig. 8.8

c) Amb les dades del problema calculem el centre, la distància focal i els semieixos de la hipèrbola:

$$C = \frac{F_1 + F_2}{2} = (3,3)$$
$$2c = d(F_1, F_2) = 2\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

En aquest, cas la hipèrbola no té els eixos paral·lels als eixos de coordenades i, per tant, caldrà aplicar un moviment a la hipèrbola d'equació:

$$\frac{x^2}{1/2} - \frac{y^2}{3/2} = 1 \qquad (*)$$

El moviment que cal aplicar-li és un gir de centre l'origen i angle el que forma el vector $\overrightarrow{F_1F_2}$ amb l'eix d'abscisses, que en aquest cas és $\alpha = 45º$, seguit de la translació de vector $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OC} = (3,3)$. Aquest moviment té per equacions:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y' - 6) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y') \end{cases}$$

Per tant, si un punt (x, y) satisfà l'equació (*), la seva imatge (x', y') ha de satisfer

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y' - 6)\right)^2}{1/2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')\right)^2}{3/2} = 1 \Leftrightarrow 2x'^2 + 2y'^2 - 36x' - 36y' + 8x'y' + 105 = 0 \qquad (**).$$

La figura 8.9 representa les gràfiques de les dues hipèrboles.

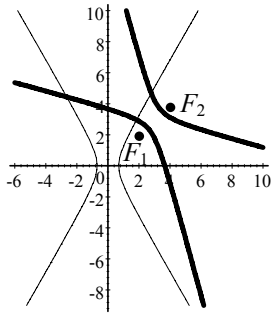


Fig. 8.9

Una altra manera de calcular l'equació demanada és fent ús de la definició d'hipèrbola com a lloc geomètric de punts. En aquest cas, els punts (x, y) de la hipèrbola són els punts tals que

$$\left| d((x, y), F_1) - d((x, y), F_2) \right| = 2a \Leftrightarrow \left| \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} \right| = \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 36x - 36y + 8xy + 105 = 0$$

que coincideix amb l'equació (**).

Problema 4

Justifiqueu la propietat d'hipèrbola com a lloc geomètric de punts a partir de la definició d'intersecció d'un con per un pla. (Vegeu la figura 8.2.)

Resolució

Sigui P un punt qualsevol de la hipèrbola. La generatriu del con que passa per P és tangent a les dues esferes en els punts M i N. El pla que conté la hipèrbola també és tangent a les dues esferes i, per tant, podem afirmar que

$$d(P,M) = d(P,F) \text{ i } d(P,N) = d(P,F').$$

Així, tenim que

$$\left|d(P,F) - d(P,F')\right| = \left|d(P,M) - d(P,N)\right| = d(M,N)$$

i aquesta última distància és contant per a qualsevol parell de punts, M i N, d'una mateixa generatriu del con i cada un d'ells en una de les dues circumferències de tangència del con amb les esferes.

Problema 5

Trobeu l'equació de les paràboles següents:

a) La paràbola de vèrtex el punt $V = (0,0)$ i focus el punt $F = (3,0)$.
b) La paràbola de vèrtex el punt $V = (-1,1)$ i focus el punt $F = (2,1)$.
c) La paràbola de vèrtex el punt $V = (-1,1)$ i directriu la recta $y = 2$.
d) La paràbola de vèrtex el punt $V = (-1,1)$ i focus el punt $F = (2,2)$.

Resolució

a) Si el vèrtex és el punt $V = (0,0)$ i el focus el punt $F = (3,0)$, aleshores $p = 2\,d(F,V) = 6$. L'eix de la paràbola coincideix amb l'eix d'abscisses i el seu vèrtex coincideix amb l'origen, per això l'equació de la paràbola serà

$$y^2 = 12x$$

i la seva gràfica

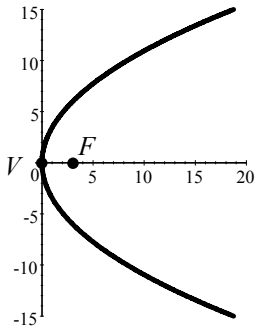


Fig. 8.10

b) Com que el vèrtex d'aquesta paràbola és el punt $V = (-1,1)$ i el focus el punt $F = (2,1)$, l'eix de la paràbola és la recta $y = 1$, que és paral·lela a l'eix d'abscisses. La distància entre el focus i la directriu ens permet calcular $p = 2\,d(F,V) = 6$, així l'equació de la paràbola és:

$$(y-1)^2 = 12(x+1) \Leftrightarrow y^2 - 12x - 2y = 11$$

i la seva gràfica

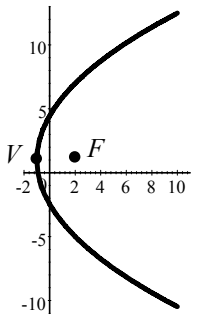


Fig. 8.11

c) Si la directriu és la recta $y = 2$, l'eix d'aquesta paràbola serà paral·lel a l'eix d'ordenades i com que el vèrtex queda per sota de la directriu i la distància entre ambdós és 1, resulta que $p = -2$ i l'equació de la paràbola és:

$$(x+1)^2 = -4(y-1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4y = 3$$

que té la gràfica següent:

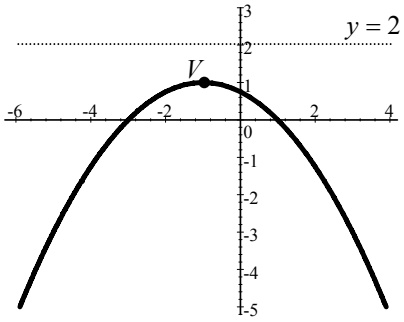


Fig. 8.12

d) La directriu d'aquesta paràbola és la recta perpendicular al seu eix i que passa per un punt *P* tal que

$$V = \frac{P+F}{2} \Rightarrow P = 2V - F = (-4,0).$$

Com que la direcció de l'eix és la del vector $\overrightarrow{VF} = (3,1)$, l'equació de la directriu serà

$$\frac{x+4}{-1} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow 3x + y + 12 = 0.$$

Si ara considerem la paràbola com el lloc geomètric dels punts (x, y) que equidisten de la directriu i del focus, n'obtindrem l'equació

$$\frac{|3x+y+12|}{\sqrt{3^2+1^1}} = \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow x^2+9y^2-6xy-112x-64y-64=0.$$

Una altra manera d'obtenir aquesta equació, seria considerar la paràbola d'eix l'eix d'abscisses i vèrtex l'origen de coordenades, i per a la qual

$$p = 2\,d(V,F) = 2\sqrt{(2+1)^2+(2-1)^2} = 2\sqrt{10}.$$

Aquesta paràbola té per equació

$$y^2 = 4\sqrt{10}x \qquad (*).$$

Si considerem l'angle, α, que forma el vector $\overrightarrow{VF} = (3,1)$ amb l'eix d'abscisses, resulta que la paràbola que busquem és la imatge de la paràbola (*) pel gir de centre l'origen i angle α seguit de la translació de vector $\overrightarrow{OV} = (-1,1)$. Les equacions d'aquest moviment són:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x'+y'+2) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-x'+3y'-4) \end{cases}$$

per tant, la paràbola que busquem tindrà per equació

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(3x'+y'+2)\right)^2 = 4\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-x'+3y'-4)\right) \Leftrightarrow$$

$$x'^2+9y'^2-6x'y'-112x'-64y'-64=0.$$

La figura 8.13 representa les gràfiques de les dues paràboles.

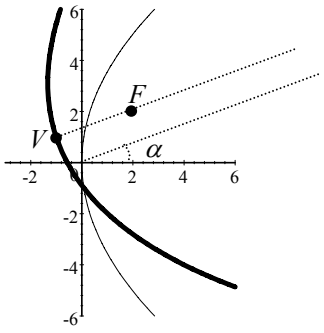


Fig. 8.13

Problema 6

Justifiqueu la propietat de paràbola com a lloc geomètric de punts a partir de la definició d'intersecció d'un con per un pla. (Vegeu la figura 8.3.)

Resolució

Sigui P un punt qualsevol de la paràbola. La generatriu del con que passa per P és tangent a l'esfera en el punt A. El pla que conté la paràbola és tangent a l'esfera en el punt F i, per tant, podem afirmar que $d(P,A) = d(P,F)$. Així tenim que:

$$d(P,F) = d(P,A) = d(M,N) = d(P,Q) = d(P,d)$$

i obtenim la propietat esmentada de la paràbola.

Problema 7

Volem moure l'el·lipse d'equació:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

de manera que el seu centre sigui el punt $(5,3)$ i l'eix gran tingui la direcció del vector $\boldsymbol{v} = (1,3)$.

a) Doneu les equacions d'aquest moviment.
b) Trobeu l'equació de la nova el·lipse.

Resolució

a) Un moviment que porta aquesta el·lipse a la posició demanada és el gir de centre l'origen i angle el que forma el vector $\boldsymbol{v}$ amb l'eix d'abscisses, seguit de la translació de vector $\boldsymbol{w} = (5,3)$.

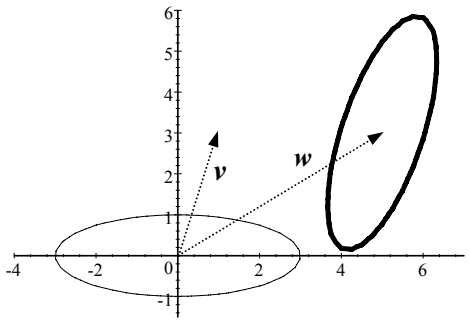


Fig. 8.14

Com que $\boldsymbol{v} = (1,3)$ i $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{10}$, l'angle de gir α serà tal que $(\cos\alpha, \sin\alpha) = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$ i les equacions d'aquest moviment seran:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{10}}(x - 3y) + 5 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x + y) + 3 \end{cases}$$

b) De les equacions anteriors s'obté

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y' - 14) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + y' + 12) \end{cases}$$

Per tant, la imatge de l'el·lipse: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ tindrà per equació

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y' - 14)\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + y' + 12)\right)^2}{1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$41x'^2 + 9y'^2 - 24x'y' - 338x' + 66y' + 701 = 0.$$

Problema 8

Es vol fer una tanca el·líptica al voltant del punt (4,3) de manera que la longitud dels eixos sigui 6 i 4 metres i que l'eix major sigui paral·lel al vector $\boldsymbol{u} = (1,1)$.

a) Quina és l'equació de l'el·lipse que forma la tanca?
b) On hem de posar els extrems d'una corda que serveix de guia per marcar l'el·lipse a terra? Quina serà la seva longitud?

Resolució

a) Es tracta de trobar els focus de l'el·lipse de centre el punt (4,3) i semieixos 3 i 2. Aquesta el·lipse serà la que resulti de fer un gir de centre l'origen i angle 45° (angle que forma $\boldsymbol{u}$ amb l'eix d'abscisses), seguit de la translació de vector $\boldsymbol{w} = (4,3)$, a l'el·lipse de centre l'origen i semieixos 3 i 2 que té per equació:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \qquad (*).$$

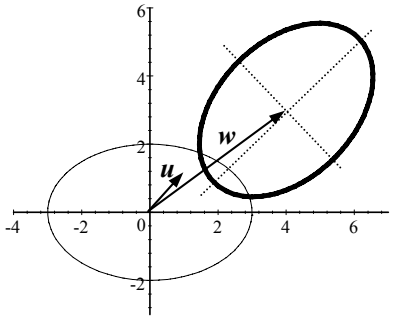


Fig. 8.15

Les equacions d'aquest moviment són

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y' - 7) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y' + 1) \end{cases}$$

per tant, l'equació de l'el·lipse que forma la tanca serà

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y' - 7)\right)^2}{3^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y' + 1)\right)^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$13x'^2 + 13y'^2 - 10x'y' - 74x' - 38y' + 133 = 0.$$

b) Els focus de l'el·lipse de la tanca són les imatges, F_1' i F_2', pel moviment anterior dels focus $F_1 = (-c, 0),\ F_2 = (c, 0)$ de l'el·lipse (*). Com que $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$, resulta

$$F_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{10}}{2} + 4 \\ -\dfrac{\sqrt{10}}{2} + 3 \end{pmatrix}$$

$$F_2' = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{10}}{2} + 4 \\ \dfrac{\sqrt{10}}{2} + 3 \end{pmatrix}$$

Finalment, la longitud de la corda serà igual a la longitud de l'eix major de l'el·lipse, i per tant, la corda tindrà 6 metres.

Problema 9

Trobeu l'equació reduïda de la còmica

$$x^2 + 9y^2 - 6xy - 112x - 64y - 64 = 0.$$

Dibuixeu-la i doneu-ne els elements característics.

Resolució

- Escrivim l'equació matricial d'aquesta còmica

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-112 \quad -64)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 64 = 0.$$

- Eliminació del terme *xy*.
  En calculem els valors propis:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(9-\lambda) - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 10 \end{cases}$$

  Per a $\lambda = 0,$ els vectors propis (x, y) són de la forma

$$\begin{pmatrix} 1-0 & -3 \\ -3 & 9-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 3y.$$

  Si prenem el vector $\boldsymbol{v} = (3,1)$, aleshores $\boldsymbol{w} = (-1,3)$ és un vector propi associat a $\lambda = 10.$ Per tant, si fem el canvi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

  obtenim l'equació de la còmica:

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-112 \quad -64)\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 64 = 0 \Leftrightarrow$$

$$10y'^2 - \frac{400}{\sqrt{10}}x' - \frac{80}{\sqrt{10}}y' - 64 = 0.$$

- Eliminació de termes lineals:

$$10y'^2 - 40\sqrt{10}x' - 8\sqrt{10}y' - 64 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(y' - \frac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2 - \frac{16}{10}\right] - 4\sqrt{10}x' - \frac{64}{10} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(y'-\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2-4\sqrt{10}x'-8=0\Leftrightarrow\left(y'-\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2-4\sqrt{10}\left(x'+\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=0.$$

Fent el canvi:

$$\begin{cases}x''=x'+\dfrac{\sqrt{10}}{5}\\ y''=y'-\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\end{cases}$$

obtenim l'equació reduïda de la cònica que en aquest cas és una paràbola

$$y''^2=4\sqrt{10}x''.$$

Observant els canvis que hem fet,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\\ \dfrac{2}{5}\sqrt{10}\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

podem considerar que la paràbola d'equació $x^2+9y^2-6xy-112x-64y-64=0$ és la imatge de la paràbola $y''^2=4\sqrt{10}x''$ pel moviment, $\mathcal{F}$, d'equacions

$$\left(\mathcal{F}(x'',y'')\right)^t=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Com que el determinant de la transformació ortogonal associada

$$\det\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}\right)=1,$$

es tracta d'un gir de centre l'origen i angle $\alpha=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, compost amb la translació de vector $\boldsymbol{v}=(-1,1)$.

Els elements característics de la paràbola $x^2+9y^2-6xy-112x-64y-64=0$ s'obtenen a partir dels de la paràbola $y''^2=4\sqrt{10}x''$, aplicant-los el moviment $\mathcal{F}$:

- Vèrtex: $\mathcal{F}(0,0)=(-1,1)$.
- Focus: $\mathcal{F}(\sqrt{10},0)=(2,2)$.
- Directriu: $d\equiv\mathcal{F}(d'')$, on $d''\equiv\begin{cases}x''=-\sqrt{10}\\ y''=t\end{cases}$ és la directriu de la paràbola $y''^2=4\sqrt{10}x''$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{10} \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow d \equiv\ 3x + y + 12 = 0.$$

Les gràfiques de les dues paràboles són:

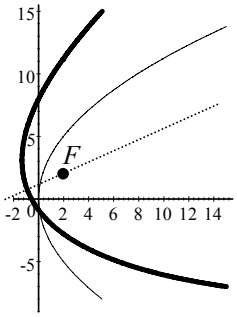


Fig. 8.16

Problema 10

Trobeu l'equació reduïda de la cònica

$$x^2 + y^2 - 6xy + 6x + 6y + 9 = 0.$$

Dibuixeu-la i doneu-ne els elements característics.

Resolució

- Escrivim l'equació matricial d'aquesta cònica:

$$(x \quad y) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (6 \quad 6) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 9 = 0.$$

- Eliminació del terme *xy*.
  Els valors propis són:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

  El vector $\boldsymbol{v} = (1,1)$ és un vector propi de valor propi $\lambda = -2$ i el vector $\boldsymbol{w} = (-1,1)$ és un vector propi de valor propi $\lambda = 4,$ per tant, si fem el canvi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

  obtenim l'equació de la cònica:

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+(6 \quad 6)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+9=0 \Leftrightarrow -2x'^2+4y'^2+6\sqrt{2}x'+9=0.$$

- Eliminació de termes lineals:

$$-2x'^2+4y'^2+6\sqrt{2}x'+9=0 \Leftrightarrow -2\left[\left(x'-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{9}{2}\right]+4y'^2+9=0 \Leftrightarrow -2\left(x'-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+4y'^2+18=0.$$

Fent el canvi

$$\begin{cases}x''=x'-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\\ y''=y'\end{cases}$$

obtenim l'equació reduïda de la cònica que en aquest cas correspon a una hipèrbola

$$2x''^2-4y''^2=18 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{9}-\frac{y''^2}{9/2}=1.$$

Observant els canvis que hem fet

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3/2\\ 3/2\end{pmatrix}$$

podem considerar que la hipèrbola d'equació $x^2+y^2-6xy+6x+6y+9=0$ és la imatge de la hipèrbola $\dfrac{x''^2}{9}-\dfrac{y''^2}{9/2}=1$ pel moviment, $\mathcal{F}$, d'equacions

$$\left(\mathcal{F}(x'',y'')\right)^t=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3/2\\ 3/2\end{pmatrix}$$

El determinant de la transformació ortogonal associada al moviment $\mathcal{F}$ és 1, per tant, es tracta d'un gir de centre l'origen i angle $\alpha=45º$, ja que $\cos\alpha=1/\sqrt{2}$ i $\sin\alpha=1/\sqrt{2}$, compost amb la translació de vector $\boldsymbol{v}=(3/2,3/2)$.

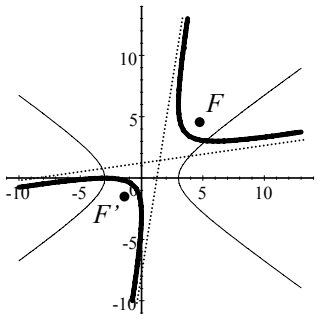


Fig. 8.17

De la hipèrbola $\frac{x''^2}{9}-\frac{y''^2}{9/2}=1$ podem dir que $a=3$, $b=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ i, per tant, que $c^2=9+\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$, així els seus vèrtexs són els punts de coordenades $(-3,0)$ i $(3,0)$, els focus són els punts de coordenades $\left(\frac{-3\sqrt{6}}{2},0\right)$ i $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2},0\right)$, les asímptotes són les rectes $y''=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x''$ i l'excentricitat és $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Els elements característics de la hipèrbola $x^2+y^2-6xy+6x+6y+9=0,$ s'obtenen a partir dels de la hipèrbola $\frac{x''^2}{9}-\frac{y''^2}{9/2}=1,$ aplicant-los el moviment $\mathcal{F}$:

- Vèrtexs: $\mathcal{F}(-3,0)=\left(3\frac{1-\sqrt{2}}{2},3\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$ i $\mathcal{F}(3,0)=\left(3\frac{1+\sqrt{2}}{2},3\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$
- Focus: $\mathcal{F}\left(-\frac{3\sqrt{6}}{2},0\right)=\left(\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}\right),\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\right)$ i $\mathcal{F}\left(\frac{3\sqrt{6}}{2},0\right)=\left(\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right),\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$
- Asímptotes: apliquem el moviment $\mathcal{F}$ a les rectes $y''=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x''$. Ara, ens convé tenir les equacions del moviment en la forma:

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix}.$$

Substituïm a cada una de les equacions anteriors i tenim les equacions de les asímptotes:

$$\begin{cases}\left(1+\sqrt{2}\right)x+\left(1-\sqrt{2}\right)y=3\\\left(1-\sqrt{2}\right)x+\left(1+\sqrt{2}\right)y=3.\end{cases}$$

Problema 11

Trobeu l'equació reduïda de la còmica

$$4x^2+7y^2+4xy-32x-40y+64=0$$

Dibuixeu-la i doneu-ne els elements característics.

Resolució

- Escrivim l'equació matricial de la còmica

$$(x\quad y)\begin{pmatrix}4&2\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(-32\quad -40)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+64=0.$$

- Eliminació del terme *xy*.

  El polinomi característic de la matriu és $\lambda^2-11\lambda+24$ que té per arrels $\lambda=3$ i $\lambda=8$. Triem dos vectors propis associats a cada un d'aquests valors propis: el vector $\boldsymbol{v}=(2,-1)$ i el vector $\boldsymbol{w}=(1,2),$ respectivament. Aleshores, si fem el canvi

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

  obtenim l'equació de la cònica:

$$(x'\quad y')\begin{pmatrix}3&0\\0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+(-32\quad -40)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+64=0\Leftrightarrow$$

$$3x'^2+8y'^2-\frac{24}{\sqrt{5}}x'-\frac{112}{\sqrt{5}}y'+64=0.$$

- Eliminació de termes lineals:

$$3x'^2+8y'^2-\frac{24}{\sqrt{5}}x'-\frac{112}{\sqrt{5}}y'+64=0\Leftrightarrow 3\left[\left(x'-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{16}{5}\right]+8\left[\left(y'-\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{49}{5}\right]+64=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x'-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2+8\left(y'-\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2=24.$$

  Fent el canvi

$$\begin{cases}x''=x'-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\\ y''=y'-\dfrac{7}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

  obtenim l'equació reduïda de la cònica que en aquest cas és una el·lipse:

$$3x''^2+8y''^2=24\Leftrightarrow\frac{x''^2}{8}+\frac{y''^2}{3}=1.$$

  Observant els canvis que hem fet

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

  podem considerar que l'el·lipse d'equació $4x^2+7y^2+4xy-32x-40y+64=0$ és la imatge de l'el·lipse $\dfrac{x''^2}{8}+\dfrac{y''^2}{3}=1$ pel moviment, $\mathcal{F}$, d'equacions

$$\left(\mathcal{F}(x'',y'')\right)^t = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la transformació ortogonal associada és 1 i, per tant, es tracta d'un gir de centre l'origen i angle α, tal que $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$ i $\sin\alpha = -1/\sqrt{5}$, compost amb la translació de vector $\boldsymbol{v} = (3,2)$.

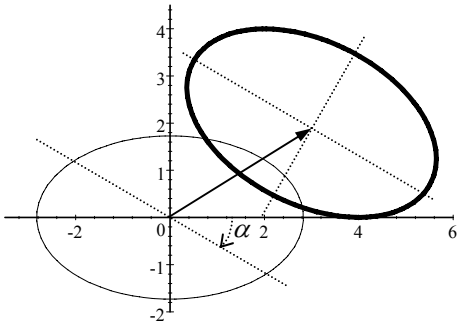


Fig. 8.18

De l'el·lipse $\frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{3} = 1$ podem dir que $a^2 = 8$, $b^2 = 3$ i, per tant, que $c^2 = 8 - 3 = 5$, així els seus vèrtexs són els punts de coordenades $\left(\pm\sqrt{8},0\right)$ i $\left(0,\pm\sqrt{3}\right)$, els focus són els punts de coordenades $\left(-\sqrt{5},0\right)$ i $\left(\sqrt{5},0\right)$ i l'excentricitat és $e = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

L'excentricitat de l'el·lipse $4x^2 + 7y^2 + 4xy - 32x - 40y + 64 = 0$ és la mateixa $e = \frac{\sqrt{10}}{4}$ mentre que la resta d'elements característics s'obtenen a partir dels de l'el·lipse $\frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{3} = 1$ aplicant-los el moviment $\mathcal{F}$:

- Vèrtexs: $\mathcal{F}\left(\pm\sqrt{8},0\right) = \left(\pm\frac{4\sqrt{10}}{5} + 3, \mp\frac{2\sqrt{10}}{5} + 2\right)$ i $\mathcal{F}\left(0,\pm\sqrt{3}\right) = \left(\pm\frac{\sqrt{15}}{5} + 3, \pm\frac{2\sqrt{15}}{5} + 2\right)$.
- Focus: $\mathcal{F}\left(-\sqrt{5},0\right) = (1,3)$ i $\mathcal{F}\left(\sqrt{5},0\right) = (5,1)$.

Problema 12

Trobeu l'equació reduïda de la còmica

$$2x^2 - 2y^2 - 3xy - x + 7y - 3 = 0.$$

Dibuixeu-la i doneu-ne els elements característics.

Resolució

- Escrivim l'equació matricial de la cònica

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-1 \quad 7)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 = 0.$$

- Eliminació del terme *xy*.

  El polinomi característic de la matriu és $\lambda^2 - 25/4$ que té per arrels $\lambda = -5/2$ i $\lambda = 5/2$. Triem dos vectors propis associats a cada un d'aquests valors propis: el vector $\boldsymbol{v} = (1,3)$ i el vector $\boldsymbol{w} = (-3,1)$, respectivament. Aleshores, si fem el canvi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

  obtenim l'equació de la cònica:

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} -5/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-1 \quad 7)\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{5}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2 + 2\sqrt{10}x' + \sqrt{10}y' - 3 = 0.$$

- Eliminació de termes lineals:

$$-5x'^2 + 5y'^2 + 4\sqrt{10}x' + 2\sqrt{10}y' - 6 = 0 \Leftrightarrow -5\left[\left(x' - \frac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2 - \frac{4}{25}10\right] + 5\left[\left(y' + \frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 - \frac{10}{25}\right] - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5\left(x' - \frac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2 + 5\left(y' + \frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = 0$$

  Fent el canvi:

$$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{2\sqrt{10}}{5} \\ y'' = y' + \dfrac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

  obtenim l'equació reduïda de la cònica:

$$-5x''^2 + 5y''^2 = 0 \Leftrightarrow x''^2 - y''^2 = 0$$

  que correspon a un parell de rectes que es tallen:

$$r'' \equiv x'' + y'' = 0, \qquad s'' \equiv x'' - y'' = 0.$$

Observant els canvis que hem fet,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{10}}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

podem considerar que la còmica d'equació: $2x^2 - 2y^2 - 3xy - x + 7y - 3 = 0$ està formada per dues rectes *r* i *s* que són les imatges de les rectes r'' i s'' pel moviment, $\mathcal{F}$, d'equació

$$\left(\mathcal{F}(x'', y'')\right)^t = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

El determinant de la transformació ortogonal associada és 1 i, per tant, es tracta d'un gir de centre l'origen i angle α, tal que $\cos\alpha = 1/\sqrt{10}$ i $\sin\alpha = 3/\sqrt{10}$, compost amb la translació de vector $\boldsymbol{v} = (1,1)$. Si considerem les equacions paramètriques de les rectes r'' i s''.

$$r'' \equiv \begin{cases} x'' = -t \\ y'' = t \end{cases} \text{ i } s'' \equiv \begin{cases} x'' = t \\ y'' = t \end{cases},$$

aleshores,

$$r \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4t}{\sqrt{10}} + 1 \\ \frac{-2t}{\sqrt{10}} + 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r \equiv x - 2y = -1$$

$$s \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2t}{\sqrt{10}} + 1 \\ \frac{4t}{\sqrt{10}} + 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s \equiv 2x + y = 3.$$

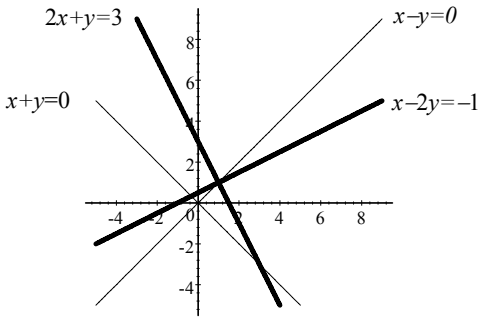


Fig. 8.19

8.3 Problemes proposats

Problema 1

Trobeu l'equació, els elements característics i feu les gràfiques de les el·lipses següents:
a) L'el·lipse de vèrtexs $(\pm 6,0)$ sobre el seu eix menor i excentricitat $e = 4/5$.

b) L'el·lipse de vèrtexs als punts $(3,3)$, $(-7,3)$, $(-2,10)$ i $(-2,-4)$.

c) L'el·lipse de focus els punts $F_1 = (-1,-1)$ i $F_2 = (3,3)$ i excentricitat $e = 1/2$.

Problema 2

Trobeu el lloc geomètric dels punts tal que la suma de distàncies als punts $F_1 = (1,1)$ i $F_2 = (2,1)$ és constant igual a 6. Doneu l'equació de la corba que s'obté, dibuixeu-la i doneu-ne els elements característics.

Problema 3

Trobeu l'equació, els elements característics i feu les gràfiques de les hipèrboles següents:
a) La hipèrbola de focus els punts $F_1 = (0,0)$ i $F_2 = (6,0)$ i semieix real $a = 2$.

b) La hipèrbola de vèrtexs els punts $V_1 = (1,3)$ i $V_2 = (3,1)$ i asímptotes d'equacions $x = 2$ i $y = 2$.

c) La hipèrbola de semieix real $a = 3$, excentricitat $e = 5/3$, el centre en el punt $(1,2)$ i eix real sobre la recta $y = 2x$.

Problema 4

Trobeu el lloc geomètric dels punts tal que la diferència de distàncies als punts $F_1 = (1,1)$ i $F_2 = (4,1)$ és constant igual a 1. Doneu l'equació de la corba que s'obté, dibuixeu-la i doneu-ne els elements característics.

Problema 5

Trobeu l'equació, els elements característics i feu les gràfiques de les paràboles següents:
a) La paràbola de focus el punt $F = (0,3)$ i directriu la recta $y = -1$.

b) La paràbola de vèrtex el punt $V = (-2,1)$ i focus $F = (0,1)$.

c) La paràbola de vèrtex el punt $V = (0,0)$, eix la recta $y = x$ i que passa pel punt de coordenades $P = (1,0)$.

Problema 6

Trobeu el lloc geomètric dels punts que equidisten del punt $F = (1,2)$ i de la recta d'equació $x + y = 1$. Doneu l'equació de la corba que s'obté, dibuixeu-la i doneu-ne els elements característics.

Problema 7

Quin moviment cal aplicar a l'el·lipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ per tal que tingui l'eix major sobre la recta $y=x$ i el centre en el punt $(2,2)$? Doneu les equacions i els elements característics de la nova el·lipse.

Problema 8

Ens interessa tenir la paràbola $y=x^2$ amb focus al punt $(3,6)$ i que tingui l'eix sobre la recta $y=2x$. Quin moviment cal aplicar-li? Doneu les equacions de les dues possibles solucions.

Problema 9

Trobeu l'equació reduïda de les còniques següents. Dibuixeu-les i doneu-ne els elements característics.

a) $-3x^2+5y^2+6xy+12x+12y=0$

b) $x^2-2xy+y^2+5\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+6=0$

c) $2x^2+2xy+2y^2+7x+6y+\frac{25}{6}=0$

d) $2x^2+2\sqrt{6}xy+y^2-\sqrt{10}x+\frac{3}{8}=0$

e) $18x^2-12xy+2y^2+3x-y-1=0$

Problema 10

Classifiqueu, segons els valors de d, la cònica d'equació

$$5x^2-6xy+5y^2-8x-8y+16-2d=0.$$

Doneu-ne els elements característics i dibuixeu la cònica que s'obté per a $d=4$.

Problema 11

Estudieu com són totes les còniques que passen pels vèrtexs d'un quadrat. Trieu els eixos de coordenades que vulgueu i doneu-ne les equacions.

9 Solucionari

9.1 Construccions amb regle i compàs

Problema 1

a) En cadascun dels extrems d'un segment de longitud a, feu dues circumferèmcies de radis b i c respectivament.
b) Feu dues paral·leles a una distància h_a.
c) Considereu el triangle de costats $2m_a$, b i c.
e) Feu dues paral·leles a distància h_a, i sobre una d'elles construïu l'arc capaç d'angle A sobre un segment de longitud a.
g) Considereu el paral·lelogram que determinen els vèrtexs i el baricentre del triangle.
h) Si considerem el triangle de costats h_a, h_b i h_c, les seves altures formen un triangle semblant al triangle demanat.

Problema 2

a) És el circumcentre del triangle de vèrtexs T_1, T_2 i T_3 i l'incentre del triangle format pels centres de les tres circumferències.
b) Fent les tres tangents a la circumferència circumscrita al triangle de vèrtexs T_1, T_2 i T_3 en cada un d'aquests vèrtexs, trobarem els tres centres de les circumferències buscades.

Problema 3

Observeu que el quadrilàter que determinen els punts mitjos té els seus costats paral·lels, dos a dos, a les diagonals del quadrilàter donat.

Problema 4

Dues possibilitats són: fent-ne les quadratures i aplicant el teorema de Tales.

Problema 5

Gireu una de les dues circumferències 60º respecte del punt P i considereu la seva intersecció amb la segona circumferència.

Problema 6

a) Es construeix el triangle *ABD* amb les dades del problema. Per construir el punt *C,* observeu que el quadrilàter és inscriptible en una circumferència.
b) *B* i *D* també són suplementaris.

Problema 7

Considereu el punt, *P*, d'intersecció de la circumferència donada amb la bisectriu de l'angle que formen els dos radis i traceu per *P* la tangent a la circumferència. Amb aquesta tangent i els perllongaments dels radis es troben les dues circumferències solució, una tangent interior i l'altra tangent exterior a la circumferència donada.

Problema 8

$\widehat{A'OB} = 2\widehat{A'AB} = 2\widehat{P'OB}.$

Problema 9

a) Observeu que l'arc que queda sobre un costat, *a*, del triangle és l'arc capaç sobre *a* d'angle $\pi - \widehat{A}$, on $\widehat{A}$ és l'angle del triangle oposat al costat *a*. Fent el mateix per cada un dels tres arcs, queda justificat.
b) Traceu les tres altures del triangle i compareu angles.

Problema 10

a) Feu una circumferència auxiliar, C', tangent a *r* en *P* i que talli a C. La intersecció de l'eix radical de C i C' amb la recta *r* és el centre radical de C, C' i la circumferència buscada.

b) Traceu una circumferència auxiliar, C', que passi per *A* i *B* i que talli a C. Considereu el punt *P* d'intersecció de l'eix radical de les dues circumferències C i C' i la recta que passa per *A* i *B*. La intersecció de la recta que passa per *P* i pel centre de C dóna dos punts diametralment oposats per on passa la circumferència buscada.

Problema 11

Observeu que la potència del punt *P* respecte de la circumferència és $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 2\left(\overline{PB}\right)^2$. Per tant, a partir de la potència podem construir el segment $\overline{PB}$. Per fer la construcció pot ser convenient diferenciar si el punt és exterior, interior o es troba damunt de la circumferència, tot i que no és necessari.

9.2 Teoria de la proporció

Problema 1

Feu la divisió àuria de B per obtenir d i h.

Problema 2

La divisió àuria d'un segment de longitud 10 dóna els costats del rectangle: $\frac{10}{\phi}$ i $\frac{10}{1+\phi}$. Àrea: $\frac{100}{1+2\phi}$.

Problema 3

La proporció dels perímetres és $p(a,b)^2$, la de les àrees $p(a,b)^4$ i la de les diagonals $p(a,b)^2$

Problema 4

a) $\frac{\text{Àrea } APC}{\text{Àrea } ABP} = \frac{\overline{PC}}{\overline{BP}}$ b) P divideix al segment $\overline{BC}$ en secció àuria.

Problema 5

En ambdós casos, una de les parts és un triangle semblant al triangle donat i d'àrea la meitat.

Problema 6

a) ϕ^2 b) ϕ^2 c) ϕ^4

Problema 7

a) $1+\sqrt{2}$ b) Hi ha dues solucions: ϕ si $3a < 2b$ i $\sqrt{2}$ si $3a > 2b$.

Problema 8

a) Vertader, b) Vertader, c) Vertader.

Problema 9

a) Els tres són angles inscrits a la circumferència circumscrita al pentàgon i tots tres abasten el mateix angle central.

b) Dues àrees valen $\frac{c^2}{4}\phi\sqrt{3-\phi}$ i la tercera $\frac{c^2}{4}\sqrt{3+4\phi}$.

Problema 10

Els angles $\widehat{CAB}$ i $\widehat{A'D'B}$ són iguals i per tant els triangles *CAB* i *A'D'B* són semblants.

Problema 11

Feu la divisió àuria del segment $\overline{AC}$ per obtenir la longitud $\overline{AB}$. L'arc capaç de 45º sobre $\overline{AC}$ és una part de la circumferència circumscrita al quadrilàter.

9.3 Matrius. Determinants. Espais vectorials

Problema 1

a)

$$AB=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & -5 & 1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 10 & -3 & 2\\ 10 & -5 & 1\end{pmatrix}.$$

b) $\det A=-1$, $\det A^t=-1$, $\det A^{-1}=-1$,

$\det B=-7$, $\det B^t=-7$ i $\det B^{-1}=-1/7$

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -2 & 5 & -2\\ 2 & -5 & 1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & -3 & -1\\ -4 & 1 & -2\\ -10 & 6 & -5\end{pmatrix}$,

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 12 & -25 & 1\end{pmatrix}\text{ i }(BA)^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 10 & 1 & -2\\ -20 & 5 & -3\end{pmatrix}$$

Problema 2

a) Per cap.
b) $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.
c) $\lambda\in\mathbb{R}-\{-16,4\}$.
d) $\lambda\in\mathbb{R}-\{-2,-1,1\}$.

Problema 3

a) $rang(A)=2$.
b) $rang(B)=3$.
c) $rang(C)=2$.

Problema 4

a) No és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.
b) $B=\mathbb{R}^2$.
c) $C=\langle(2,3)\rangle$.
d) No és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.
e) $E=\langle(3,-5)\rangle$
f) $F=\langle(1,0,0)\rangle$.
g) No és subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.
h) $H=\langle(\sqrt{2},0,3),(0,\sqrt{2},-2)\rangle$
i) $I=\langle(1,2,1),(1,-3,1)\rangle$.
j) $J=\langle(2,3,5),(1,1,0)\rangle$

Problema 5

a) $\lambda=-1$.
b) $\alpha\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

Problema 6

a) $A=\langle(1,-1,0),(1,0,-1)\rangle$, $\text{Base}(A)=\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$, $\dim A=2$.
$B=\langle(2,-3,1)\rangle$, $\text{Base}(B)=\{(2,-3,1)\}$, $\dim B=1$.
b) $(2,-3,1)=3((1,-1,0)-(1,0,-1)$.
c) $\{(1,-1,0),(1,0,-1),(0,0,1)\}$.

Problema 7

a) $\begin{vmatrix}1&0&6\\7&1&8\\-5&-1&3\end{vmatrix}=-1$.
b) $(1,-6,0)$.
c) $(1,0,0)=(-11,61,2)_B$, $(0,1,0)=(6,-33,-1)_B$ $(0,0,1)=(6,-34,-1)_B$

Problema 8

a) $\langle (1,2) \rangle$. Recta $y = 2x$.

b) $\langle (0,1) \rangle$.

c) $(1,0) = (1,-1)_B$, $(0,1) = (0,1)_B$

Problema 9

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{\{v_1,v_2,v_3\},\ \{u_1,u_2,u_3\}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{\{u_1,u_2,u_3\},\ \{v_1,v_2,v_3\}}.$$

Problema 10

a) $F = \left\{ (x,y,z) \ / \ x = \frac{1}{2}y - 3z \right\} = \langle (1,2,0), (-3,0,1) \rangle$.

b) $rg \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$.

Matrius de canvi de base: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{B',B}$ i $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}_{B,B'}$.

$(1,1,0)_B = (0,-1,0)_{B'}$

c) $F = \langle (1,0,0)_{B'}, (0,1,0)_{B'} \rangle = \{ (x,y,z)_{B'} \ / \ z = 0 \}$

9.4 Aplicacions lineals. Diagonalització d'endomorfismes

Problema 1

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) Base $(\ker f) = \{(-2,1,-1)\}$, Base $(Im f) = \{(1,0,1),\ (2,1,-1)\}$.

Problema 2

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si $a \neq 2 \begin{cases} Im\, f = \mathbb{R}^3 \\ Ker\, f = \{\mathbf{0}\} \end{cases}$, i si $a = 2 \begin{cases} Im\, f = \langle (1,0,1),\ (1,1,0) \rangle \\ Ker\, f = \langle (1,1,-2) \rangle . \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ és base de $\mathbb{R}^3$ i la matriu de f en aquesta base és: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 3

El polígon de vèrtexs: $O = (0,0),\ A' = (4,2),\ B' = (3,3),\ C' = (1,2),\ D' = (0,3),\ E' = (-2,2)$.

Problema 4

a) $rang\,(M) = 2$ i $rang\,(N) = 2$.

b) $(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $g \circ f$ no és exhaustiva ni injectiva.

c) $a \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ i la matriu de $g \circ f$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 5

a) $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ és base de $\mathbb{R}^3$ ja que el determinant format per les seves components és diferent de 0.

b) La matriu de f en la base $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ i en la base $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ és

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) dim $Ker\, f = 0$ i dim $Im\, f = 3$ d) $f^{-1}(1,2,0) = \{(-2,1,0)\}$.

Problema 6

a) $a=-3,\ b=1$ b) $\{(3,-5,1,0),\ (-1,1,0,1)\}$ base del *Ker f* i $\{(1,2,3),\ (0,1,2)\}$ base de la *Im f*.

Problema 7

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Valors propis: $\lambda=1$ i $\lambda=2$ amb multiplicitat m=2. $\{(0,0,1)\}$ és una base del subespai de vectors propis associats a $\lambda=1$ i $\{(1,0,-2),(0,1,1)\}$ és una base del subespai de vectors propis associats a $\lambda=2$.

c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow B' = \{(0,0,1),(1,0,-2),(0,1,1)\},$$ i la relació entre les dues matrius de *f* és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 8

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\{(1,0,-2)\}$ és una base del *Ker f* i $\{(2,0,2),\ (0,2,0)\}$ és una base de la *Im f*. No és bijectiva.

c) Valors propis: 0, 2 i 3. Diagonalitza perquè tots els valors propis són diferents.

d) $B' = \{(1,0,-2),(0,1,0),(1,0,1)\}$ i la matriu de f en aquesta base és $(f)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La relació entre les dues matrius de *f* és: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 9

a)

$$f(\boldsymbol{v}_1)=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=-\boldsymbol{v}_1\Rightarrow \boldsymbol{v}_1 \text{ és un vector propi associat a } \lambda=-1.$$

$$f(\boldsymbol{v}_2)=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}=\boldsymbol{v}_2\Rightarrow \boldsymbol{v}_2 \text{ és un vector propi associat a } \lambda=1.$$

$$f(\boldsymbol{v}_3)=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=3\boldsymbol{v}_3\Rightarrow \boldsymbol{v}_3 \text{ és un vector propi associat a } \lambda=3.$$

b) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Problema 10

a) No és diagonalitzable ja que les arrels del polinomi característic de la matriu A no són reals.
b) Té dos valors propis diferents, $\lambda=5$ i $\lambda=0,$ i per tant diagonalitza. Una base de vectors propis és $\{(2,1),(-3,1)\}$.
c) No diagonalitza ja que 3 és un valor propi de multiplicitat 2 i la dimensió del subespai de vectors propis associats és 1.
d) No és diagonalitzable perquè $\lambda=1$ és un valor propi de multiplicitat 3 i la dimensió del subespai de vectors propis associats és 1.
e) La matriu E té tres valors propis diferents, $\lambda=-4,\ \lambda=-1,\ \lambda=1,$ per tant, és diagonalitzable i una base de vectors propis és $\{(5,3,4),(0,1,1),(-1,1,1)\}$.
f) És diagonalitzable. Els seus valors propis són 1 (simple) i 3 (doble) i una base de vectors propis és $\{(2,1,0),(1,1,0),(-1,0,1)\}$.

Problema 11

Estudieu les arrels del polinomi $P(\lambda)=\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2.$

Problema 12

$f(\boldsymbol{u})=(2,4,2)=2(1,2,1)=2\boldsymbol{u}\Rightarrow \boldsymbol{u}$ és un vector propi associat a $\lambda=2$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ és una base de vectors propis i la matriu de f en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i en la canònica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.5 Transformacions ortogonals al pla i a l'espai

Problema 1

Matriu del gir $(g_{30^\circ}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. El triangle de vèrtex $(0,0)$, $(\sqrt{3},1)$ i $\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$.

Problema 2

Correspon a una simetria respecte de la recta d'equació $\sqrt{7}x - y = 0$.

Problema 3

a) La matriu és $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{v}_1 = (\sqrt{5},1)$ i $\boldsymbol{v}_2 = (1,-\sqrt{5})$ vectors propis de valor propi $\lambda = 1$ i $\lambda = -1$ respectivament.

b) La recta d'equació: $x - \frac{2}{5}\sqrt{5}y = 3$.

Problema 4

$g \circ f$ correspon a una simetria respecte de la recta $y = (\sqrt{2}-1)x$ i té matriu $(g \circ f) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $f \circ g$ és una simetria respecte de la recta $y = (1+\sqrt{2})x$ i $(f \circ g) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i, finalment, $f^{-1} \circ g$ és una simetria respecte de la recta $y = (\sqrt{2}-1)x$ que té per matriu $(f^{-1} \circ g) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 5

a) Les matrius dels girs tenen traces dins de l'interval $[-2,+2]$. Les traces de les simetries només poden valer 0.

b) Les úniques matrius 2×2 ortogonals amb traça 0 i determinant +1 són $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ que corresponen a un gir de 90º i un gir de –90º, respectivament.

Problema 6

a) Gir respecte de la recta d'equacions $(x,y,z) = t(1,1,0)$. L'angle de gir és α tal que $\cos\alpha = 0$.

b) Simetria especular respecte del pla d'equació $2x - 2y - z = 0$

c) Simetria rotacional respecte del pla d'equació $x - 2y + 2z = 0$ i angle de gir α tal que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Problema 7

a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. b) La recta d'equació vectorial: $(x,y,z) = (1,1,0) + t(1,-4,1)$.

Problema 8

Per $a = -\frac{8}{9}$, $b = \frac{4}{9}$ i $c = -\frac{1}{9}$ la matriu correspon a un gir d'angle α tal que $\cos\alpha = -\frac{1}{9}$ entorn de la recta d'equació vectorial $(x,y,z) = t(1,2,0)$. Per $a = \frac{8}{9}$, $b = -\frac{4}{9}$ i $c = \frac{1}{9}$ la matriu correspon a una simetria especular respecte del pla d'equació $2x - y - 2z = 0$.

Problema 9

a) $\frac{1}{81}\begin{pmatrix} 79 & 16 & -8 \\ 16 & -47 & 64 \\ -8 & 64 & 49 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{162}\begin{pmatrix} -130 & -28-36\sqrt{3} & -28+36\sqrt{3} \\ -28+36\sqrt{3} & -97 & -16-63\sqrt{3} \\ -28-36\sqrt{3} & -16+63\sqrt{3} & -97 \end{pmatrix}$

Problema 10

$$(g \circ s) = (g)(s) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} & -2 \\ -2+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -2 \\ 2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -2 \\ -2-\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} & -2 \\ -2 & -2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

que correspon a una simetria especular respecte del pla d'equació $\left(2+\sqrt{2}\right)x+\left(2+\sqrt{2}\right)y+2z=0.$

Problema 11

$(g\circ s)=(g)(s)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-8&4\\-8&1&4\\4&4&7\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-8&1&4\\-1&8&-4\\4&4&7\end{pmatrix}$ que correspon a una simetria rotacional respecte del pla d'equació $z=4x$ i angle de gir α tal que $\cos\alpha=\frac{8}{9}$.

Problema 12

a) Certa. b) Falsa. c) Falsa. d) Certa. e) Falsa. f) Certa.

9.6 Isometries del pla i de l'espai

Problema 1

$\mathcal{S}_t\circ\mathcal{S}_{t'}\circ\mathcal{S}_r=\mathcal{L}_{r,\boldsymbol{v}},$ on $\boldsymbol{v}$ és un vector perpendicular a t i a t', de mòdul $2\,d(t,t')$ i sentit de t a t'.

Problema 2

$\mathcal{S}_r\circ\mathcal{G}_P^{\alpha}\circ\mathcal{S}_r=\mathcal{G}_P^{-\alpha}.$

Problema 3

La circumferència de centre el punt (6, 1) i radi 2.

Problema 4

L'el·lipse d'equació: $\frac{(x-2)^2}{1}+\frac{(y+1)^2}{4}=1.$

Problema 5

a)

$$\left(\mathcal{S}_{y=2}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&-1&4\\\hline0&0&1\end{array}\right)\ \text{i}\ \left(\mathcal{G}_{(1,1)}^{\pi/3}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc|c}1&-\sqrt{3}&1+\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1&1-\sqrt{3}\\\hline0&0&2\end{array}\right).$$

b) $\mathcal{G}_{(1,1)}^{\pi/3} \circ \mathcal{S}_{y=2} = \mathcal{L}_{r,\boldsymbol{v}}$ és un lliscament amb $r \equiv x - \sqrt{3}y - 1 + 2\sqrt{3} = 0$, $\boldsymbol{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ i matriu

$$\left(\mathcal{G}_{(1,1)}^{\pi/3} \circ \mathcal{S}_{y=2} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \sqrt{3} & 1 - 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & 5 - \sqrt{3} \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

$\mathcal{S}_{y=2} \circ \mathcal{G}_{(1,1)}^{\pi/3} = \mathcal{L}_{t,\boldsymbol{w}}$ és un lliscament amb $t \equiv x + \sqrt{3}y - 1 - 2\sqrt{3} = 0$, $\boldsymbol{w} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ i matriu

$$\left(\mathcal{S}_{y=2} \circ \mathcal{G}_{(1,1)}^{\pi/3} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & 7 + \sqrt{3} \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Problema 6

Hi ha quatre moviments:

1. Gir de 45º de centre el punt $\left(-\frac{1 + 4\sqrt{2}}{2}, \frac{7 + 3\sqrt{2}}{2} \right)$ i matriu $\left(\begin{array}{cc|c} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

2. Gir de $-45º$ de centre el punt $\left(\frac{7 + 4\sqrt{2}}{2}, \frac{1 - 3\sqrt{2}}{2} \right)$ i matriu $\left(\begin{array}{cc|c} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

3. Lliscament d'eix la recta $x = \left(\sqrt{2} + 1 \right) y - \frac{1 + 4\sqrt{2}}{2} = 0$, vector de translació $\left(\frac{6 + 7\sqrt{2}}{4}, \frac{8 - \sqrt{2}}{4} \right)$ i matriu $\left(\begin{array}{cc|c} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

4. Lliscament d'eix la recta $y = \left(\sqrt{2} + 1 \right) x + \frac{1 - 3\sqrt{2}}{2} = 0$, vector de translació $\left(\frac{6 + \sqrt{2}}{4}, \frac{7\sqrt{2} + 8}{4} \right)$ i matriu $\left(\begin{array}{cc|c} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

Equació de la nova el·lipse: $13x^2 - 13y^2 - 10xy - 38x - 74y + 133 = 0$.

Problema 7

a) $\left(\mathcal{L}_{r,v}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

b) El quadrat de vèrtexs (2, 0), (2, 2), (4,2) i (4,0).
c) La circumferència de centre (3, 1) i radi 2.

Problema 8

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

b) La recta
$$r\equiv\begin{cases} x=(1+t)/3 \\ y=(2-t)/3 \\ z=(-1+5t)/3 \end{cases}$$

Problema 9

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/3 & 2/3 & 2/3 & 4/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

b) L'esfera de centre el punt $\left(4/3,\ -2/3,\ -2/3\right)$ i radi 1. L'esfera de centre el punt $\left(7/3,\ 1/3,\ 1/3\right)$ i radi 2.

Problema 10

a) $\left(\mathcal{F}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

b) $\mathcal{F}$ no té punts fixos. És un moviment helicoïdal d'eix de gir $\begin{cases} x-\left(1+\sqrt{2}\right)z=\left(-4-12\sqrt{2}\right)/17 \\ y-z=\left(-23-\sqrt{2}\right)/17 \end{cases}$

i vector de translació $\dfrac{11-\sqrt{2}}{17}\left(1+\sqrt{2},1,1\right)$.

9.7 Grup de simetria d'una figura plana

Problema 1

Grup diedral D_3.

Anomenem *a*, *b* i *c* els tres costats del triangle en sentit antihorari. Si $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_b$ i $\mathcal{S}_c$ són les simetries respecte les mediatrius de cada costat i *O* el centre del triangle, aleshores la taula de composició d'aquest grup és:

$\circ$	Id	$\mathcal{G}_{O}^{120^\circ}$	$\mathcal{G}_{O}^{240^\circ}$	$\mathcal{S}_a$	$\mathcal{S}_b$	$\mathcal{S}_c$
Id	Id	$\mathcal{G}_{O}^{120^\circ}$	$\mathcal{G}_{O}^{240^\circ}$	$\mathcal{S}_a$	$\mathcal{S}_b$	$\mathcal{S}_c$
$\mathcal{G}_{O}^{120^\circ}$	$\mathcal{G}_{O}^{120^\circ}$	$\mathcal{G}_{O}^{240^\circ}$	Id	$\mathcal{S}_c$	$\mathcal{S}_a$	$\mathcal{S}_b$
$\mathcal{G}_{O}^{240^\circ}$	$\mathcal{G}_{O}^{240^\circ}$	Id	$\mathcal{G}_{O}^{120^\circ}$	$\mathcal{S}_b$	$\mathcal{S}_c$	$\mathcal{S}_a$
$\mathcal{S}_a$	$\mathcal{S}_a$	$\mathcal{S}_b$	$\mathcal{S}_c$	Id	$\mathcal{G}_{O}^{120^\circ}$	$\mathcal{G}_{O}^{240^\circ}$
$\mathcal{S}_b$	$\mathcal{S}_b$	$\mathcal{S}_c$	$\mathcal{S}_a$	$\mathcal{G}_{O}^{240^\circ}$	Id	$\mathcal{G}_{O}^{120^\circ}$
$\mathcal{S}_c$	$\mathcal{S}_c$	$\mathcal{S}_a$	$\mathcal{S}_b$	$\mathcal{G}_{O}^{120^\circ}$	$\mathcal{G}_{O}^{240^\circ}$	Id

Problema 2

És el grup generat per les isometries següents:

- Les translacions de vector $\boldsymbol{v} = (0, t)$ per a qualsevol $t \in \mathbb{R}$.
- La simetria respecte de la recta $x = \frac{1}{2}$.
- Les simetries respecte les rectes de la forma $y = k$ per a qualsevol valor de $k \in \mathbb{R}$.

Problema 3

a) D_1

$\circ$	Id	$\mathcal{S}$
Id	Id	$\mathcal{S}$
$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	Id

b) D_2

$\circ$	Id	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_s$	$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$
Id	Id	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_s$	$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$
$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_r$	Id	$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$	$\mathcal{S}_s$
$\mathcal{S}_s$	$\mathcal{S}_s$	$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$	Id	$\mathcal{S}_r$
$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{180^\circ}$	$\mathcal{S}_s$	$\mathcal{S}_r$	Id

c) C_5

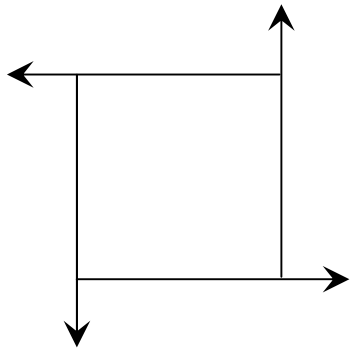
$\circ$	Id	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$
Id	Id	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$
$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	Id
$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	Id	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$
$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	Id	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$
$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	Id	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$

d) i e) D_5. Numerant les 5 simetries segons l'ordre antihorari, tenim:

$\circ$	Id	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_5$
Id	Id	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_5$
$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	Id	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{S}_1$
$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	Id	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$
$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	Id	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$
$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	Id	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	Id	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$
$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	Id	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$
$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	Id	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$
$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	Id	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$
$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{G}_O^{288^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{216^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{144^\circ}$	$\mathcal{G}_O^{72^\circ}$	Id

Problema 4

a) Un pentàgon regular.
b) Un quadrat amb els costats orientats. Per exemple, dibuixant una sageta de forma adequada a cada costat:



Problema 5

a) *p*1*a*1. b) *p*112 . c) *pma*2.

Problema 6

a) Només podrem crear sanefes que tinguin els grups de simetria següents: *p*1*m*1, *pmm*2, *p*112, *p*1*a*1 i *pma*2. Un exemple de cada una de les sanefes és:

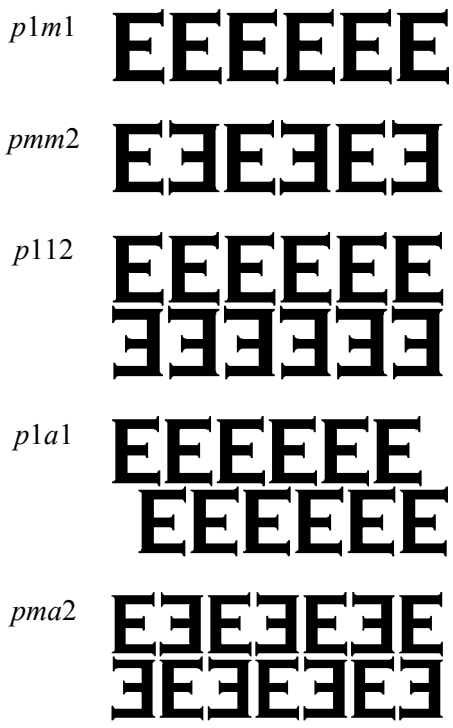


Fig. 9.14

b) Els únics grups de simetria possibles són el *pmm*2 i el *pma*2. Exemples:

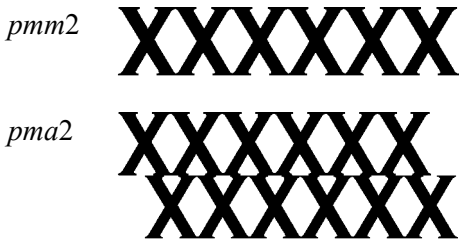


Fig. 9.15

c) Amb aquest motiu només podrem crear sanefes que tinguin com a grup de simetria *pm*11, *pmm*2 i *pma*2. Un exemple de sanefa per a cada un d'aquests grups és:

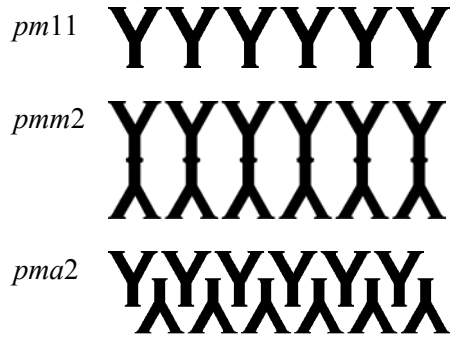


Fig. 9.16

Problema 7

a) *pm*11. b) *pmm*2. c) *p*112.

Problema 8

a) *pgm*. b) *p*6*m*. c) *p*3. d) *cmm.*

Problema 9

a) *p*1. b) *pg*.

Problema 10

a) *cmm*. b) *p*3.

9.8 Còniques

Problema 1

a) Equació de l'el·lipse: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$. Focus: $(0,\pm 8)$. Centre: $(0,0)$. Semieixos: 6 i 10.

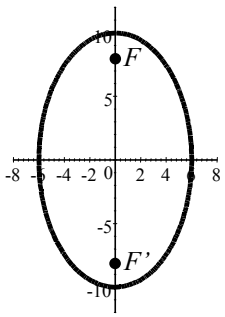


Fig. 9.17

b) Equació de l'el·lipse: $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{49}=1$. Focus: $\left(-2,3\pm\sqrt{24}\right)$. Centre: $(-2,3)$. Semieixos: 5 i 7. Excentricitat: $\sqrt{24}/7$.

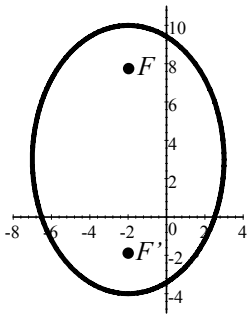


Fig. 9.18

c) Equació de l'el·lipse: $7x^2-2xy+7y^2-12x-12y=180$. Centre: $(1,1)$. Semieixos: $4\sqrt{2}$ i $2\sqrt{6}$.

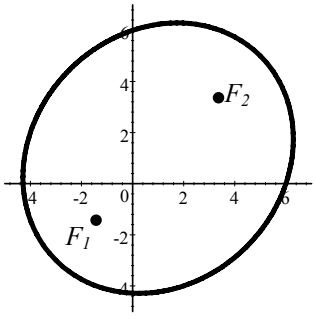


Fig. 9.19

Problema 2

Equació de l'el·lipse: $\dfrac{(x-3/2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{35/4}=1$. Centre: $\left(\dfrac{3}{2},1\right)$. Semieixos: 3 i $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$.

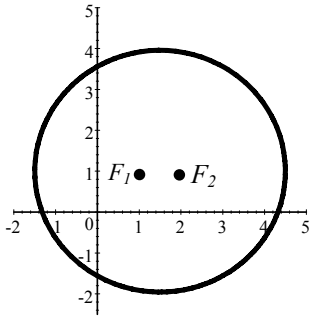


Fig. 9.20

Problema 3

a) Equació de la hipèrbola: $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$. Centre: $(3,0)$. Semieix imaginari: $\sqrt{5}$. Asímptotes: $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x-3)$.

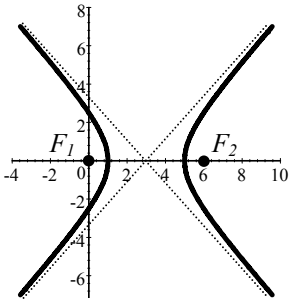


Fig. 9.21

b) Equació de la hipèrbola $(x-2)(y-2)=-1$. Centre: $(2,2)$. Semieix real: $\sqrt{2}$, semieix imaginari $\sqrt{2}$. Distància focal: 2. Focus: $\left(2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}\right)$ i $\left(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$.

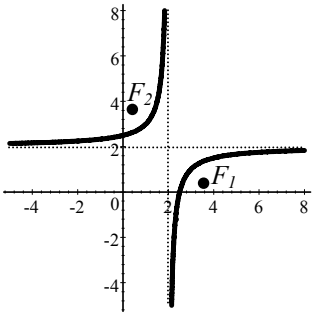


Fig. 9.22

c) Equació de la hipèrbola: $4x^2 - 11y^2 - 20xy + 32x + 64y + 64 = 0$. Focus: $\left(1+\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5}\right)$ i $\left(1-\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5}\right)$. Semieix imaginari: 4. Distància focal: 10. Asímptotes: $2x + y = 4$ i $2x - 11y = -20$.

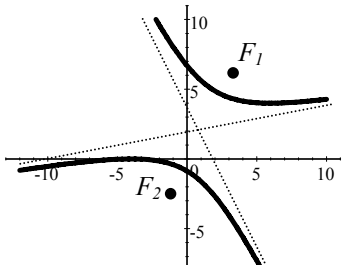


Fig. 9.23

Problema 4

Equació de la hipèrbola: $\dfrac{(x-5/2)^2}{1/4} - \dfrac{(y-1)^2}{2} = 1$. Semieix imaginari: $\sqrt{2}$. Distància focal: 3. Centre $(5/2, 1)$. Excentricitat: 3. Asímptotes: $y = \sqrt{2}(2x-5)+1$ i $y = -\sqrt{2}(2x-5)+1$.

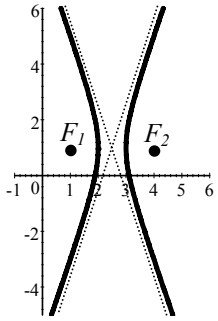


Fig. 9.24

Problema 5

a) Equació de la paràbola: $x^2 = 8(y-1)$. Vèrtex: $(0,1)$.

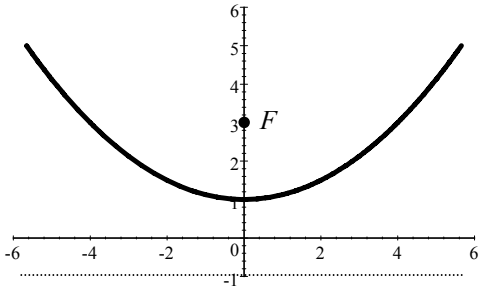


Fig. 9.25

b) Equació de la paràbola: $8(x+2)=(y-1)^2$. Directriu: $x=-4$.

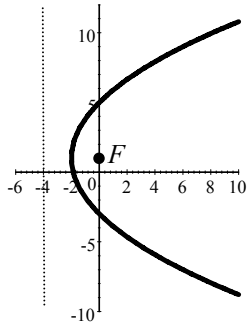


Fig. 9.26

c) Equació de la paràbola: $x^2+y^2-2xy-x-y=0$. Directriu: $4x+4y=-1$. Focus: $(1/8,1/8)$.

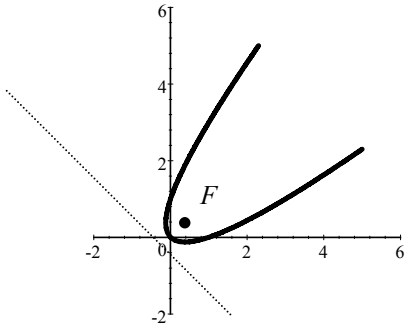


Fig. 9.27

Problema 6

Equació de la paràbola: $x^2+y^2-2xy-2x-6y+9=0$. Vèrtex: $(1/2,3/2)$.

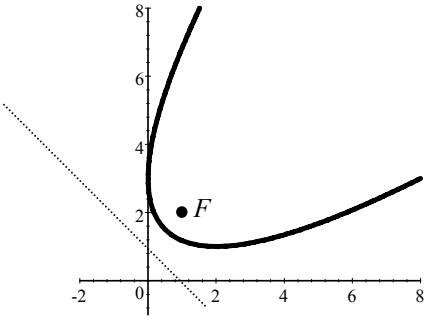


Fig. 9.28

Problema 7

El moviment és un gir de –45º seguit d'una translació de vector $(2,2)$. Equacions del moviment: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Equació de l'el·lipse: $25x^2 - 14xy + 25y^2 - 72x - 72y - 144 = 0$. Focus: $\left(\frac{4+\sqrt{14}}{2}, \frac{4+\sqrt{10}}{2}\right)$ i $\left(\frac{4-\sqrt{14}}{2}, \frac{4-\sqrt{14}}{2}\right)$. Distància focal: $2\sqrt{7}$. Excentricitat: $\sqrt{7}/4$.

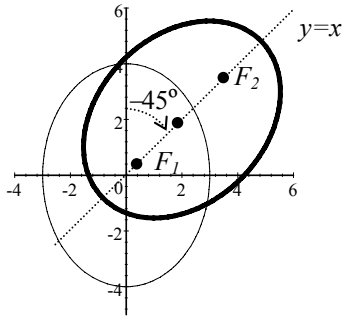


Fig. 9.29

Problema 8

Primera solució: aplicant el moviment $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-\sqrt{5}/20 \\ 6-\sqrt{5}/10 \end{pmatrix}$ obtenim la paràbola d'equació $-4x^2 + 4xy - y^2 + \sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y - 15\sqrt{5} + \frac{5}{4} = 0$. Les gràfiques de les dues paràboles són:

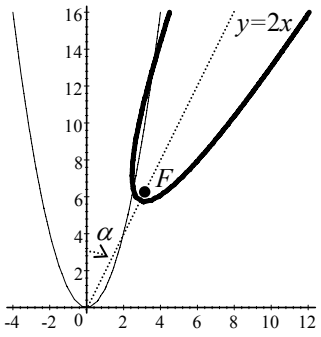


Fig. 9.30

Segona solució: aplicant el moviment $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5}/20 \\ 6+\sqrt{5}/10 \end{pmatrix}$ obtenim la paràbola d'equació: $-4x^2 + 4xy - y^2 - \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y + 15\sqrt{5} - \frac{5}{4} = 0$. Les gràfiques de les dues paràboles són:

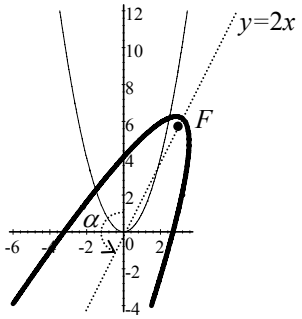


Fig. 9.31

Problema 9

a) És una hipèrbola. La seva equació reduïda és $x^2-\frac{y^2}{3/2}=1$. Centre: $(1/2,-3/2)$. Focus: $(1,0)$ i $(0,-3)$. Semieix real: 1. Semieix imaginari: $\sqrt{3/2}$. Asímptotes: $y=-\frac{1}{5}\left(3+2\sqrt{6}\right)x-\frac{1}{5}\left(6-\sqrt{6}\right)$ i $y=-\frac{1}{5}\left(3-2\sqrt{6}\right)x-\frac{1}{5}\left(6+\sqrt{6}\right)$. Excentricitat: $\sqrt{5/2}$.

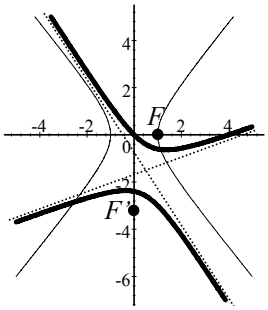


Fig. 9.32

b) És una paràbola. La seva equació reduïda és $y^2=-3x$. Vèrtex: $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$.

Focus: $\left(-\frac{29\sqrt{2}}{24},-\frac{5\sqrt{2}}{24}\right)$. Directriu: $x+y=\frac{1}{12}\sqrt{2}$. Distància del focus a la directriu: $\frac{3}{2}$.

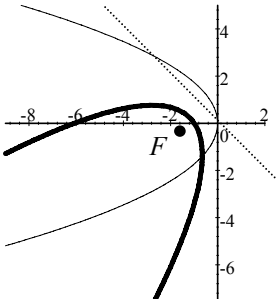


Fig. 9.33

c) És una el·lipse. La seva equació reduïda és: $x^2+\frac{y^2}{3}=1$. Focus: $\left(-\frac{1}{3},-\frac{11}{6}\right)$ i $\left(-\frac{7}{3},\frac{1}{6}\right)$. Semieix major: $\sqrt{3}$. Semieix menor 1. Excentricitat: $\sqrt{2/3}$.

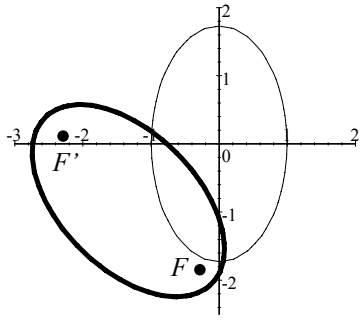


Fig. 9.34

d) És una hipèrbola. La seva equació reduïda és: $-\frac{x^2}{1/4}+y^2=1$. Semieix real: $1/2$. Semieix imaginari: 1. Excentricitat: $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Centre: $\left(-\frac{\sqrt{10}}{8},\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$. Focus: $\left(-\frac{\sqrt{10}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{10}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Asímptotes: $y=\left(-2-\sqrt{6}\right)x-\frac{\sqrt{10}}{4}$ i $y=\left(2-\sqrt{6}\right)x+\frac{\sqrt{10}}{4}$.

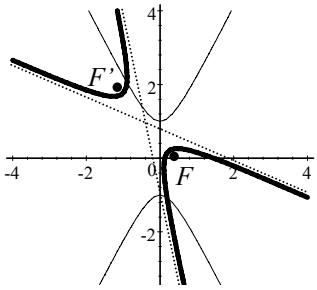


Fig. 9.35

e) Equació reduïda: $y^2=\frac{9}{160}$. La còmica està formada per dues rectes d'equacions: $3x-y=-1$ i $3x-y=1/2$.

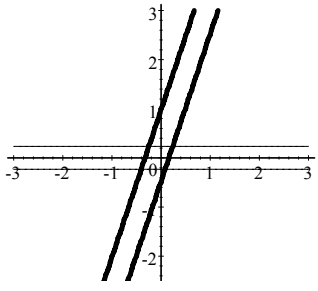


Fig. 9.36

Problema 10

Equació reduïda: $x^2 + 4y^2 = d$.

- Si $d < 0$: el conjunt buit.
- Si $d = 0$: un punt $(2,2)$.
- Si $d > 0$: una el·lipse de semieixos $\sqrt{d}$ i $\sqrt{d}/2$, excentricitat: $\sqrt{3}/2$ i focus els punts $\left(2 - \frac{\sqrt{6d}}{4}, 2 - \frac{\sqrt{6d}}{4}\right)$ i $\left(2 + \frac{\sqrt{6d}}{4}, 2 + \frac{\sqrt{6d}}{4}\right)$.

Per a $d = 4$, la gràfica que s'obté és:

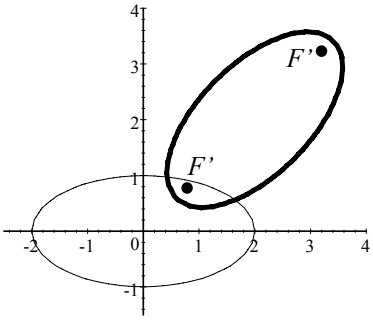


Fig. 9.37

Problema 11

Prenent com a eixos de coordenades les diagonals del quadrat de manera que els vèrtexs tinguin coordenades $(\pm 1, 0)$ i $(0, \pm 1)$, tenim les còniques d'equació $xy = 0$ o bé $x^2 + y^2 + 2kxy = 1$ per a qualsevol $k \in \mathbb{R}$.

- L'equació $xy = 0$ correspon a les dues rectes $x = 0$ i $y = 0$.

L'equació canònica de les còniques d'equació $x^2+y^2+2kxy=1$ és

$$(1+k)x^2 + (1-k)y^2 = 1$$

que corresponen a:

- Si $k < -1$: hipèrbola.
- Si $k = -1$: dues rectes paral·leles (les seves equacions són $x - y = 1$ i $x - y = -1$).
- Si $-1 < k < +1$: el·lipse. (Per a $k = 0$ és la circumferència de centre l'origen i radi 1).
- Si $k = +1$: dues rectes paral·leles (les seves equacions són $x + y = 1$ i $x + y = -1$).
- Si $k > +1$: hipèrbola.

10 Bibliografia

ALSINA, C., GARCIA, J.L., JACAS, J. *Temes clau de geometria.* Barcelona. Edicions de la UPC. 1992.

ALSINA, C. I TRILLAS, E. *Lecciones de álgebra y geometría. Curso para estudiantes de Arquitectura.* Barcelona. Ed. Gustava Gili. 1990.

AYRES, JR.F. *Álgebra moderna.* Nova York. Schaum-McGraw-Hill. 1965.

AYRES, JR.F. *Matrices.* Nova York. Schaum-McGraw-Hill. 1970.

BLANCO MARTÍN, M. F. *Movimientos y simetrías.* Valladolid. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid. 1994.

CASTELLET, M. I LLERENA, I. *Àlgebra lineal i Geometria.* Barcelona. Servei de Publicacions de la UAB. 1987.

COXETER, H.S.M. *Fundamentos de Geometría.* México. Ed. Limusa. Wiley. 1971.

CRUELLS, P., SÁEZ, G. *Comprensión matemática de los sistemas multimedia.*. Graduado Multimedia UPC-UOC. Barcelona. 2001.

DE BURGOS, J. *Álgebra lineal y geometría cartesiana*. Madrid. McGraw-Hill. 2006.

GARCIA PLANS, I I PUIG, C. *Temes clau d'àlgebra.* Barcelona. Edicions de la UPC. 1991.

GHYKA, M.C. *El número de oro.* I *Los ritmos.* II *Los ritos.* Barcelona. Ed. Poseidón. 1978.

GHYKA, M.C. *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.* Barcelona. Ed. Poseidón. 1977.

KOSTOVSKI, A.N. *Construcciones geométricas mediante un compás.* Moscú. Ed. Mir. 1984.

LARSON, L.C. *Problem-Solving Through Problems.* Nova York Springer-Verlag. 1983.

LARSON, R.E., HOSTETLER, R.P. I EDWARDS, B.H. *Cálculo. 2 vols.* Madrid. Ed. MacGraw-Hill. 1995.

PEDOE, D. *La geometría en el arte.* Barcelona. Ed. Gustava Gili. 1979.

PUERTA, F. *Àlgebra lineal.* Barcelona. Ed. T. Marcombo. 1976.

PUIG ADAM, P. *Curso de geometría métrica.* T.I-II. Madrid. Biblioteca Matemática. 1970.

ROJO GARCÍA, J. Á*lgebra lineal*. Madrid. McGraw-Hill. 2001.

ROJO GARCÍA, J., MARTIN, I. *Ejercicios y problemas de álgebra lineal*. Madrid. McGraw-Hill. 2005.

SÁNCHEZ, J.A., VILLANUEVA, L. *Temes clau de dibuix.* Barcelona. Edicions de la UPC. 1991.

SMOGORZHEVSKI, A.S. *La regla en construcciones geométricas.* Moscú. Ed. Mir. 1981.

THOMAS, G.B. JR I FINNEY, R.L. *Cálculo con geometría analítica.* México. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. 1987.

WEYL, H. *La simetría*. Buenos Aires. Ed. Nueva Visión. 1958.

UPC

Edicions UPC

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Cortar por la línea de puntos y enviar, NO NECESITA FRANQUEO

Benvolgut/uda lector/a,

Us agraïm que hàgiu triat aquest llibre i confiem que la lectura us resulti interessant.
Si desitgeu rebre informació de les novetats successives, cal que ens retorneu aquest imprès, degudament emplenat amb les dades sol·licitades.

Estimado/da lector/a,

Le agradecemos que haya escogido este libro y confiamos que la lectura le resulte interesante.
Si desea recibir información de futuras novedades, es preciso que nos devuelva este impreso, debidamente rellenado con los datos solicitados.

Cognoms Apellidos .....

Nom Nombre .....

Professió Profesión .....

Adreça Dirección .....

.....

Població Población ..... **Codi postal** Código postal .....

Província Provincia ..... **País** País .....

A/e E-mail .....

Preferències Preferencias

- ☐ Arquitectura
- ☐ Expressió gràfica
- ☐ Informàtica
- ☐ Òptica
- ☐ Telecomunicacions
- ☐ Construcció i enginyeria civil
- ☐ Enginyeria mecànica
- ☐ Matemàtiques i estadística
- ☐ Organització d'empreses
- ☐ Electricitat i electrònica
- ☐ Física
- ☐ Nàutica
- ☐ Química i enginyeria tèxtil

A quina llibreria heu trobat aquest imprès?
¿En qué librería ha encontrado este impreso? .....

Autoritzo el tractament informàtic d'aquestes dades i la seva cessió a Edicions UPC, SL. per a la realització d'activitats informatives i de màrqueting directe, sense perjudici dels meus drets d'accés, rectificació i cancel·lació.
Autorizo el tratamiento informático de estos datos y su cesión a Edicions UPC, SL. para la realización de actividades informativas y de marketing directo, sin perjuicio de mis derechos de acceso, rectificación y cancelación.

www.edicionsupc.es
edicions-upc@upc.edu

Respuesta comercial
Autorización
nº 0828594/30011

A
franquear
en
destino

Edicions UPC
Apartado 30011 PD
08034 Barcelona