

TEMES CLAU

Claudi Alsina Català
Joan Jacas Moral
M. Santos Tomàs Belenguer

GEOMETRIA A L'ARQUITECTURA



TEMES CLAU 01

GEOMETRIA A L'ARQUITECTURA

Claudi Alsina Català

Joan Jacas Moral

M. Santos Tomàs Belenguer



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

Aquesta obra compta amb el suport de la Generalitat de Catalunya

Disseny de la coberta: Ernest Castelltort

Disseny de col·lecció: Tono Cristòfol

Maquetació: Mercè Aicart

Primera edició: setembre de 2007

© Els autors, 2007

© Edicions UPC, 2007

© Iniciativa Digital Politècnica, 2013

Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC

Jordi Girona Salgado 31,

Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona

Tel.: 934 015 885

www.upc.edu/idp

E-mail: info.idp@upc.edu

Producció: SERVICE POINT
Pau Casals, 161-163
08820 El Prat de Llobregat, (Barcelona)

Dipòsit legal: B-46329-2007

ISBN: 978-84-8301-923-8

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei.

Presentació de l'obra

Aquesta publicació té com a objectiu facilitar a l'estudiant del primer curs d'arquitectura l'aprenentatge dels apartats de geometria que s'ofereixen en el marc de la seva formació matemàtica inicial.

L'apartat I se centra en els sis temes bàsics de l'assignatura: geometria mètrica, teoria de la proporció, geometria vectorial, transformacions geomètriques, teoria de la simetria i quàdriques. També hi ha ajudes i/o solucionari de problemes relacionats amb cada secció i problemes que seran motiu de treball a les classes de pràctiques.

En la part II trobareu desenvolupats amb detall molts conceptes que formen part de les matemàtiques estudiades a secundària i que es pressuposen en el desenvolupament de l'assignatura de Matemàtiques I d'Arquitectura. Podeu repassar conceptes, refrescar fórmules, veure potser un apartat que no vàreu fer a classe... el material és autocontingut, trufat d'exemples pas a pas i inclou cent problemes per a fer (amb les seves corresponents solucions explicades a l'apartat final del solucionari).

Fer aquesta tasca de repàs abans de començar el curs pot ser una decisió magnífica ja que moltes de les coses aquí explicades s'usaran també en l'assignatura de Matemàtiques II. Però al marge d'aquesta labor prèvia de refrescar preliminars teniu un altre ús interessant del material que és poder-hi recórrer en qualsevol moment quan cal posar en solfa un coneixement previ i aquest no es recorda prou bé.

Tal com haureu pogut observar a la taula de continguts aquí trobareu un bloc de trigonometria, un bloc de polinomis i un bloc de problemes lineals. Tots són vells amics que no podeu aparcar i que emprareu sovint al vostre estudi d'arquitectura.

Desitgem que els preliminars us ajudin a forjar el vostre propi èxit acadèmic... I si per sort no necessiteu revisar-los... endavant!

Índex

PART I: MATEMÀTIQUES I

Invitació a Matemàtiques I	13
1 Geometria mètrica	15
2 Teoria de la proporció	31
3 Geometria vectorial	55
4 Transformacions geomètriques	81
5 Teoria de la simetria	95
6 Quàdriques	117
Pistes i solucionari dels problemes de la part I	137
Bibliografia	149

PART II: PRELIMINARS GEOMÈTRICS

1 Trigonometria	157
2 Angles i la seva mesura	158
3 Trigonometria en un triangle rectangle	162
4 Trigonometria en un triangle qualsevol	167
5 Addició de raons trigonomètriques	173
6 Resolució de triangles	176
7 Polinomis	183
8 Operacions amb polinomis	185
9 Regla de Ruffini	189
10 Arrels i teorema del residu	191
11 Fraccions polinòmiques	196
12 Nombres complexos	200
13 Equacions polinòmiques fonamentals	203
14 Sistemes d'equacions lineals i matrius	209
15 Determinants	224
16 Resolució de sistemes: regla de Cramer	230
17 Vectors, punts, rectes i plans	232
18 Producte escalar i producte vectorial	240
19 Problemes mètrics entre varietats lineals	244
20 Una visita a les còniques	250
Solucionari dels problemes de la part II	257



Part I
Mathématiques I

Índex

Invitació a Matemàtiques I	13
1 Geometria mètrica	
1.1 Sobre el regle, el compàs i l'arquitectura	15
1.2 Algunes construccions elementals	16
1.3 Mètodes per a construccions amb regle i compàs	21
1.4 Nombres construïbles amb regle i compàs	24
1.5 Quatre problemes clàssics de regle i compàs	26
2 Teoria de la proporció	
2.1 Teoria de la proporció en arquitectura	31
2.2 Propietats geomètriques de la proporció	32
2.3 El número d'or: la divina proporció	36
2.4 De les mesures i les concepcions culturals de la proporció en arquitectura	41
2.5 El Modulor de Le Corbusier	50
3 Geometria vectorial	
3.1 Espais vectorials	55
3.2 Matrius i àlgebra matricial	60
3.3 Aplicacions lineals	63
3.4 Sistemes d'equacions lineals: classificació i resolució	69
3.5 Diagonalització	72
4 Transformacions geomètriques	
4.1 Afinitats	81
4.2 Transformacions ortogonals	83
4.3 Moviments rígids	85
4.4 Semblances	89
4.5 Projeccions	90

5 Teoria de la simetria	
5.1 Simetria i arquitectura. Grup de simetria	95
5.2 Grups puntuals de simetria o de Leonardo	100
5.3 Grups de simetria dels frisos	102
5.4 Grups de simetria del pla	105
5.5 Simetria espacial	112
6 Quàdriques	
6.1 Una visita a les quàdriques	117
6.2 Equacions reduïdes de les quàdriques	123
6.3 Classificació euclidiana de quàdriques	126
6.4 Geometria gaudiniana	129
6.5 Quàdriques avui	135
Pistes i solucionari dels problemes de la part I	137
Bibliografia	149

Invitació a Matemàtiques I

Aquests apunts són el resultat d'una llarga experiència en l'ensenyament de les matemàtiques a les escoles d'arquitectura i seran la partitura del curs de Matemàtiques I. Aquesta primera assignatura de Matemàtiques de la carrera d'Arquitectura ha estat pensada per apropar-vos a aspectes geomètrics clau que incideixen en la formació arquitectònica, tant a nivell de representació gràfica, composició i projectes, com a nivell estructural o constructiu. La geometria ha estat sempre, històricament, una font interessant de formes i transformacions en l'àmbit de l'arquitectura. Avui aquest interès és encara més gran donada la dimensió tècnica de l'ofici arquitectònic i l'existència de les noves tècniques de visualització.

Però més enllà del caràcter informatiu de l'assignatura, aquesta té la voluntat d'ajudar-vos a desenvolupar *la vostra pròpia creativitat*, obrint-vos nous horitzons que us serveixin de referència per tal que un dia, molt després d'haver superat l'assignatura de Matemàtiques I, davant d'un determinat projecte us recordeu d'aquell recurs geomètric que vàreu aprendre i en feu un ús novedós. En l'estudi, al benefici immediat del joc acadèmic cal unir-hi sempre l'esperança de l'ús creatiu a llarg termini.

L'eix vertebrador de l'assignatura són sis temes molt bells: la geometria mètrica del regle i el compàs, la teoria de la proporció, la geometria vectorial i de transformacions, la teoria generativa de la simetria i les quàdriques reglades. És el nostre desig que ho trobeu interessant i que us quedeu amb les ganes d'aprofundir en aquests temes i saber-ne moltes més coses.

Geometria mètrica

1.1 Sobre el regle, el compàs i l'arquitectura

Segurament el nostre món seria diferent si durant segles no s'haguessin privilegiat en els traçats de l'arquitectura dos instruments geomètrics tan especials com són el regle i el compàs. A partir dels *Elements* d'Euclides es consolida l'ús d'aquests instruments, i amb ells, la presència hegemònica de rectes i cercles, de segments rectes combinats amb arcs de circumferència, delimitant perfils arquitectònics, distribucions urbanístiques, arcs, columnes, finestres, taules, cadires... i tot allò que ens envolta.

Ja Vitruvi en els seus *Deu llibres d'Arquitectura* ens diu:

"És l'arquitectura una ciència que ha d'anar acompanyada de molts altres coneixements i estudis, gràcies als quals pot jutjar les obres de totes les arts que s'hi relacionen. Aquesta ciència s'adquireix per la pràctica i per la teoria... és necessari tenir talent i afició a l'estudi, ja que ni el talent sense l'estudi, ni l'estudi sense el talent, poden formar un bon arquitecte. Aquest ha d'estudiar gramàtica, tenir aptituds per al dibuix; conèixer la geometria; no estar dejú en òptica; ser instruit en aritmètica i dominador de la història... Li serà de gran ajuda la geometria, que el prepararà especialment en l'ús del regle i del compàs, amb l'ajut dels quals farà molt més fàcilment les plantes dels edificis, i sabrà aixecar a escaire i a nivell els plànols d'aquests... Amb l'aritmètica calcularà els costos dels edificis, aclarirà el que val cada element i, gràcies al càlcul i al mètode aritmètic, resoldrà els difícils problemes de les proporcions, millor a vegades que amb la geometria..."

El regle i el compàs del classicisme grecoromà no sols són estris de dibuix, són també regles de joc, mètodes per a ordenar traçats, fer composicions, aplicar normatives i delimitar estils. Aquesta dimensió compositiva de la geometria tindrà al llarg de la història una enorme transcendència, aflorant en moments clau, del gòtic al renaixement, del neoclassicisme a l'arquitectura moderna.

Molts segles després de Vitruvi, el 25 de novembre de 1948, Le Corbusier acaba el seu tractat sobre *El Modulor* amb una secció sobre "regle i compàs":

"El mal de l'arquitectura és el compàs (no el de Copèrnic), el compàs de les belles arts, indiferent a les mesures... el compàs en les mans del dibuixant, col·locat sobre el tauler tic, tic, tic, tic... però hi ha un altre compàs: el de Pierre de Traon. El compàs del geometa susceptible de fer... un joc de geometria... perillós utensili segons la natura de l'esperit que dirigeix la mà... hi ha un arquitecte, un plàstic, un constructor... sense informació exacta de l'home del compàs i de l'home del regle, jo preguntava recentment: quin culminarà dels dos?..."

Le Corbusier genera grans aportacions a la modernitat arquitectònica i ho fa amb un ús renovat del regle i el compàs, un ús preocupat pels usuaris, per les mides, per la construcció...

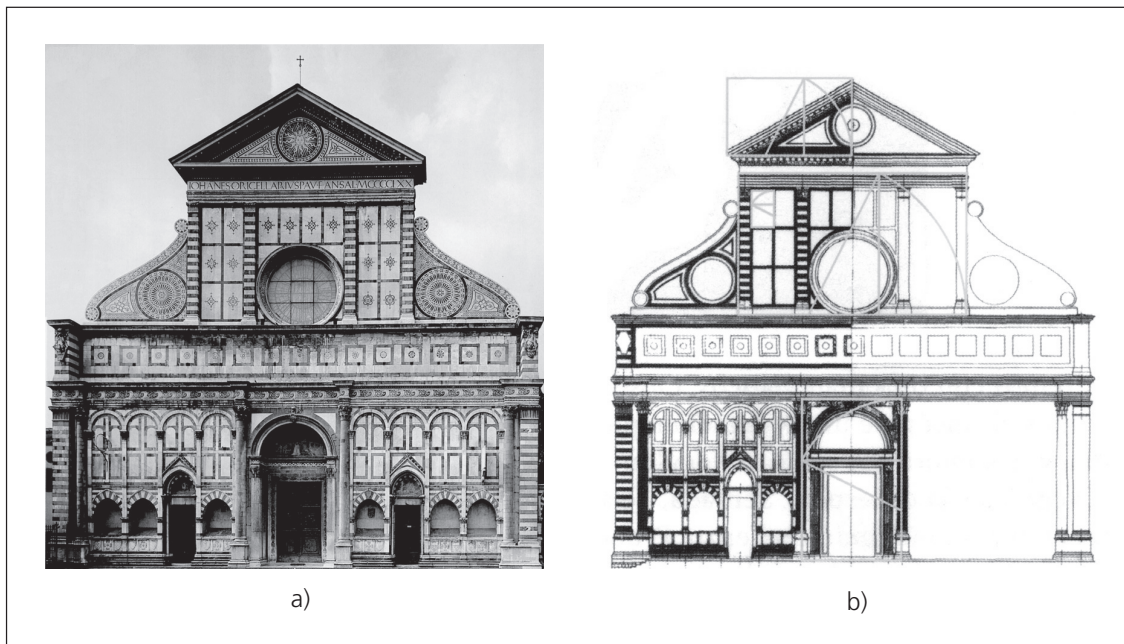


Fig. 1.1.1

Avui el compàs i el regle segueixen vigents, incorporats a tots els programaris de dibuix al servei de la creativitat.

En la figura 1.1.1. podem veure una representació de la façana de Santa Maria Novella de Florència. El regle i el compàs són sovint presents en la creació arquitectònica, en els detalls i en la composició de l'obra.

El teatre grec i el teatre romà

D'acord amb el model de Vitruvi, en el traçat del teatre grec (on els espectadors es distribueixen en semicercles d'altura creixent enfront de l'escenari) es considera clau la figura formada per una circumferència i tres quadrats inscrits determinant en ella els vèrtexs d'un dodecàgon. La prolongació dels radis corresponents a aquests vèrtexs determinava la divisió de la graderia en un nombre determinat de sectors. En el cas romà s'inscrivien en una circumferència quatre triangles equilàters, i a partir d'aquesta nova manera de subdividir es determinaven les divisions de la graderia, l'orquestra i l'escenari. Els traçats amb regle i compàs esdevenien així mètodes per a la composició arquitectònica.

1.2 Algunes construccions elementals

Un *regle* és qualsevol instrument que juntament amb un llapis o objecte marcador ens permet fer segments de línia recta. Ni més ni menys! Així, el regle genuí sembla d'entrada molt limitat i no té res a veure amb els regles comercials actuals molt més potents. Si hom mira amb atenció benedictina i ulls crítics el que podríem fer amb aquests regles graduats actuals ens adonem que poden marcar certes distàncies en el sistema mètric decimal i, per tant, traslladar segments de distància amidable, poden servir per fer segments perpendiculars i paral·lels aprofitant la forma rectangular del regle i fins i tot traçar un petit cercle, ja que molts regles tenen un forat circular per poder-los penjar fàcilment. Autolitem-nos doncs al regle genuí, és a dir, a la regla de joc de poder traçar segments rectes.

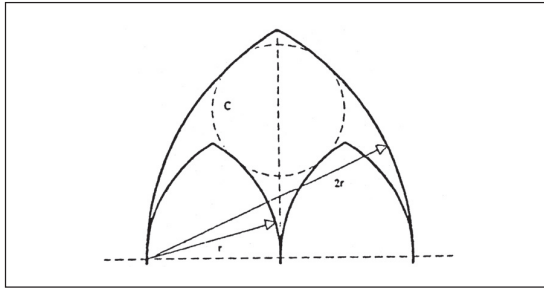


Fig. 1.2.1

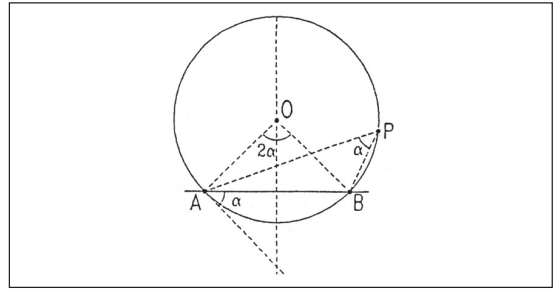


Fig. 1.2.2

Podem trobar un programari gratuït interessant per a fer dibuixos geomètrics dit GeoGebra a <http://www.geogebra.at>

Un *compàs* és qualsevol instrument que permeti, donats dos punts A i B , dibuixar el cercle de centre A que passi per B . És evident que amb un compàs no podem traçar tot un segment recte però, sorprenentment, tota construcció realitzable amb regle i compàs es pot fer utilitzant només un compàs, entenent que la construcció es dóna per acabada en el moment d'haver dibuixat la quantitat suficient de punts determinants de la solució buscada (dos punts ja fixen una recta, tres punts un cercle o un triangle, etc.).

El que interessa és combinar regle i compàs i fer construccions amb un nombre finit de passos. En la figura 1.2.2 veiem la construcció d'un arc capaç o conjunt de punts que miren un segment donat AB sota un angle α .

A continuació resumirem les construccions més elementals d'elements d'un triangle.

Mediatris i circumcentre

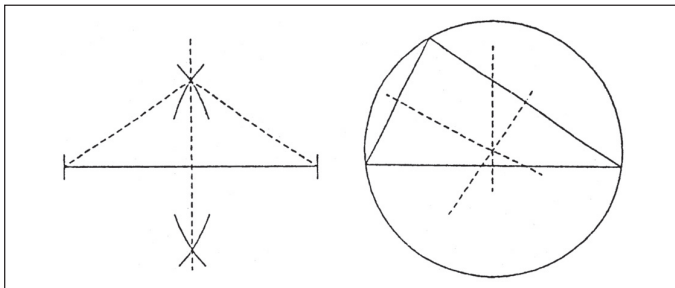


Fig. 1.2.3

La recta perpendicular al punt mitjà d'un segment, anomenada *mediatriu*, té tots els punts equidistants dels extrems del segment. Per això, en un triangle les tres rectes mediatris es tallen en un punt dit *circumcentre* que, en equidistar dels tres vèrtexs, esdevé centre de la circumferència circumscripca.

Medianes i baricentre

Des de qualsevol vèrtex d'un triangle ABC es poden traçar les medianes o segments unint cada vèrtex amb el punt mitjà del costat oposat. Fent-ne dues, per exemple, AM_a i BM_b , trobem el punt G d'intersecció. La

recta M_aM_b serà paral·lela al costat AB i $\overline{M_aM_b} = \frac{1}{2}c$ pel teorema de Tales ($\overline{M_bC}/\overline{AC} = \overline{M_aC}/\overline{CB} = 1/2$). En marcar D i E com a punts mitjans dels segments BG i AG , respectivament, descobrim que DE és de nou paral·lel a AB i $\overline{DE} = \frac{1}{2}c$ (compareu el triangle GDE amb el GAB). Així, M_aM_bED és un paral·lelogram i com que les diagonals es tallen en el punt mitjà resulta

$$\overline{GM_b} = \frac{1}{3}\overline{BM_b}, \quad \overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BM_b}, \quad \overline{GM_a} = \frac{1}{3}\overline{AM_a}, \quad \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM_a}$$

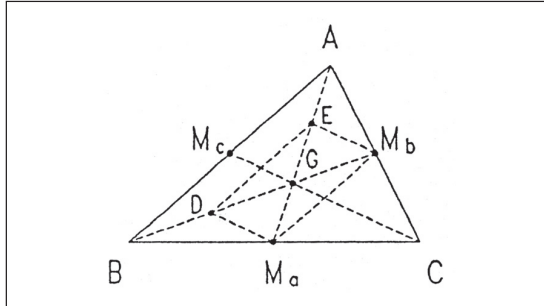


Fig. 1.2.4

és a dir, que el punt G divideix cada una de les dues medians en dos trossos de mides ben concretes. Però el raonament es pot fer amb qualsevol parella de medians! Per tant, totes tres es tallen en aquest punt tan especial de divisió terciària tan curiosa, dit baricentre o centre de gravetat del triangle. Quant a notació, tant s'escriu AM_a per indicar una mediana com m_a .

Comproveu que tota mediana és calculable en longitud a partir dels costats mitjançant la fórmula:

$$m_c^2 \equiv \overline{CM_c}^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

Bisectrius i incentre

Donat un angle, la bisectriu és la recta que divideix l'angle en dues parts iguals i queda determinada pel vèrtex i un punt obtenible com a intersecció de dos arcs de cercle d'igual radi traçables amb centres en punts A' i A'' de les dues semirectes i situats a igual distància del vèrtex. Tot punt P de la bisectriu equidista de les seves semirectes de l'angle bisecat i és per això que en un triangle ABC la bisectriu AW_a de l'angle A i la bisectriu de l'angle B es tallen en un punt I (perquè $\hat{A}/2 + \hat{B}/2 < 180^\circ$) i aquest I com que equidista dels costats a, b i c , també pertany a la bisectriu de l'angle C . Per tant, les tres bisectrius es tallen en un únic punt I , dit incentre, que és el centre de la circumferència inscrita al triangle

$$\overline{AW_a} = \sqrt{b \cdot c \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}}; \quad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Observant la figura 1.2.5 es veu que si anomenem P al punt en què W_a talla al costat a : aleshores es té el següent (teorema de la bisectriu) $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{PC} : \overline{AC}$ ja que fent per B la paral·lela a W_a que talla a la prolongació d' AC en un punt B' resulta que l'angle en B' és $A/2$ i hi ha semblança entre APC i $B'BC$.

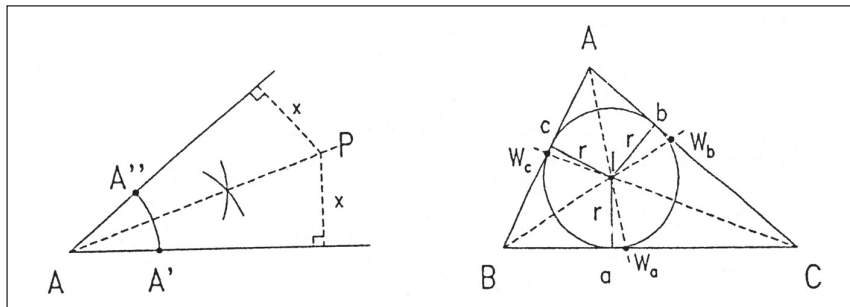


Fig. 1.2.5

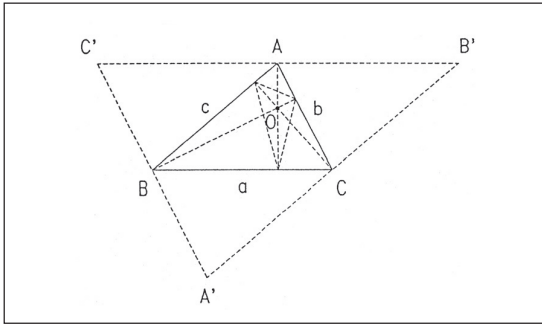


Fig. 1.2.6

Donat un triangle qualsevol ABC , des de cada vèrtex es pot traçar l'altura o segment perpendicular des del vèrtex al costat oposat (així les altures poden quedar dintre o fora del triangle). Si es fan paral·leles des de cada vèrtex als costats oposats, es forma un nou triangle $A'B'C'$ de costats dobles i angles iguals, respecte del qual les altures del triangle ABC són mediatriss. Per tant, les altures es tallen en un segment (el circumcentre del triangle $A'B'C'$!) que és dit ortocentre O del triangle ABC . Unint els tres peus de les altures tindreu el triangle òrtic o pedal. En el cas d'un triangle acutangle, les altures del triangle respecte del triangle òrtic són les bisectrius i resulta que, curiosament, si un raig de llum s'anés reflectint a l'interior d'un triangle descrivint un triangle inscrit, la trajectòria seria precisament el triangle òrtic, que resulta ser el de mínim perímetre inscrit en el triangle de partida.

Altures i ortocentre

Dibuixant cercles

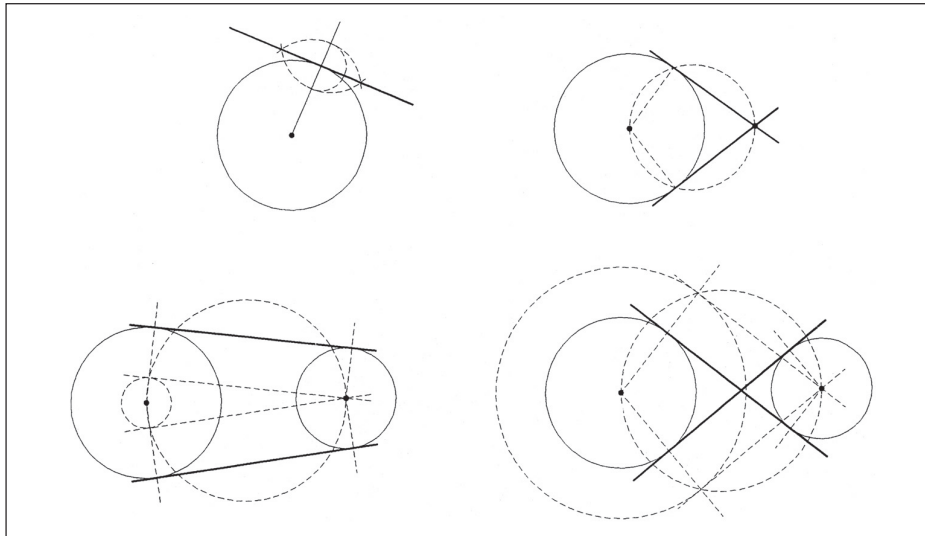


Fig. 1.2.7

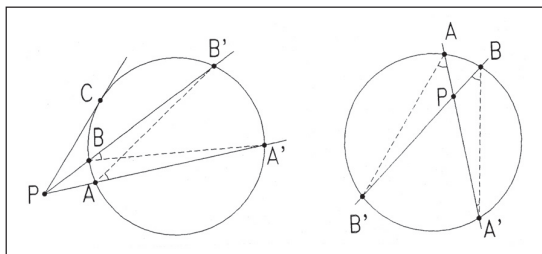


Fig. 1.2.8

A les figures hi veiem com es pot traçar la tangent a un cercle en un punt donat o com traçar des d'un punt exterior les dues tangents a un cercle o com fer les tangents comunes a dos cercles qualsevol.

Pel que fa als angles, és important recordar que tot angle inscrit en un cercle (vèrtex a la circumferència) és igual a la meitat de l'angle que des del centre abasti el mateix arc. També, és d'interès als efectes d'establir relacions mètriques lligades al cercle l'anomenada *potència d'un punt* respecte d'un cercle: (fig. 1.2.8) segons la qual, en fer secants des

d'un punt al cercle, el producte de distàncies del punt als dos punts d'intersecció de la secant amb el cercle és sempre constant. En efecte, els angles A' , B' són iguals (són inscrits i abasten el mateix arc), tal com ho són els angles A i B i d'aquí per semblança de triangles resulta:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = \overline{PC}^2$$

Aleshores es defineix la potència de P respecte del cercle com $d^2 - r^2$, essent d la distància de P al centre i r el radi d'aquest. Òbviament, si el punt P pertany al cercle la potència és nul·la.

Exemple. Construir triangles donats: a, b, C ; a, B, C ; a, b, c ; a, b, A .

Les figures adjuntes fan veure com s'han de fer aquestes construccions a partir de les dades.

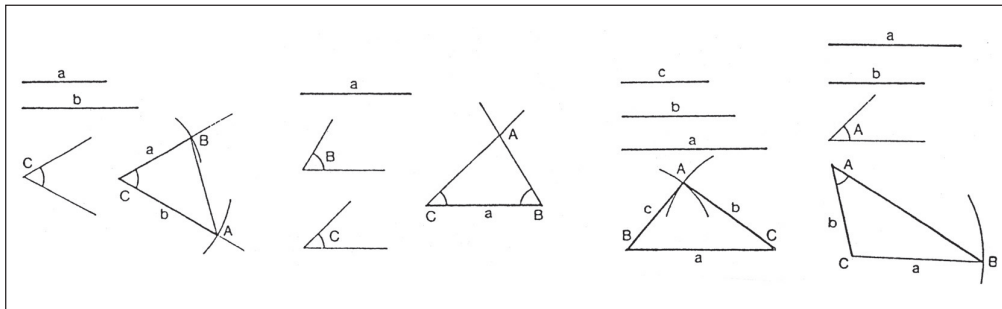


Fig. 1.2.9

Exemple. Construiu un triangle rectangle donada la hipotenusa i un angle qualsevol.

Sabem que un angle $A = 90^\circ$ i la hipotenusa a és donada. Si sols coneixem A , fent el cercle de diàmetre a qualsevol punt del cercle determina amb els extrems d' a un triangle rectangle. Si tenim B també tindreu $C = 90^\circ - B$, per tant, col·locant B i C en els extrems d' a el problema quedarà resolt.

Exemple. Construiu un triangle donats a, b i $b + c$ o bé $a + b, b - c$ i c .

Donats a, b i $b + c$ restareu del segment $b + c$ el costat b i obtindreu c ; per tant, amb els tres costats a, b i c es construeix el triangle. En un altre cas, si teniu $a + b, b + c$ i c ajuntant $b - c$ i c tindreu b i traient b a $a + b$ tindreu a d'on traureu de nou a, b i c .

Exemple. Construiu un triangle donats a, h_b i h_c .

Posant el costat a d'extrem B i C es fan els cercles de centres B i C i radis h_b i h_c respectivament. Les tangents a aquests cercles des de l'altre extrem del segment determinaran el vèrtex A .

Exemple. Construiu un triangle donades les tres altures h_a, h_b i h_c i el segment unitat.

Observeu que $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$, on S és l'àrea, i per tant el triangle de costats a, b i c és semblant (homotètic) del de costats $1/h_a, 1/h_b$ i $1/h_c$.

Exemple. Construïu un triangle donades les tres medianes m_a, m_b i m_c .

Suposeu el problema resolt amb un triangle ABC de medianes m_a, m_b i m_c i observeu que si pel punt mitjà del costat a prolonguem m_a obtenint un punt A' tal que $AA' = 2m_a$, aleshores $ABCD$ és un paral·lelogram i si G és el baricentre d' ABC i G' el de BCP resulta que $GG'B$ és un triangle de costats $GG' = 2m_a/3$, $GB = 2m_b/3$ i $G'B = 2m_c/3$ totalment construïble amb les dades. Per tant, començant per fer $GG'B$ d'ell podreu reconstruir ABC .

Problema 1

Construïu un triangle donats a, h_b i m_a .

Problema 2

Construïu un triangle donats a, c i W_c .

Problema 3

Construïu un triangle donats a, b i m_c .

Problema 4

Estudieu quan el circumcentre d'un triangle es troba sobre un costat, a l'interior del triangle o a l'exterior. On pot estar situat l'ortocentre?

Problema 5

Donat un quadrilàter convex verifiqueu que les seves quatre bisectrius es tallen determinant un nou quadrilàter que és sempre inscritible en un cercle.

1.3 Mètodes per a construccions amb regla i compàs

En aquest apartat veurem alguns mètodes per a fer construccions combinant regla i compàs.

Mètode reductiu

Consisteix a fer un esquema de la "solució final" buscada i a partir d'ella tirar enrere tot veient com és possible fer la construcció partint de les dades donades o emprant construccions ja conegudes.

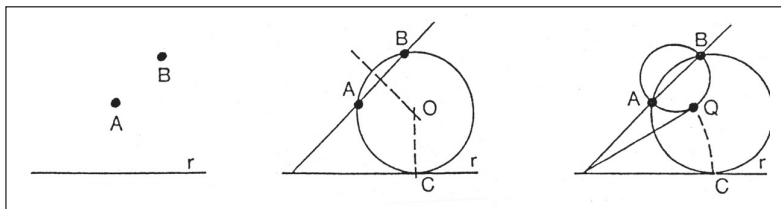


Fig. 1.3.1

Exemple. Donats dos punts diferents A i B exteriors a una recta r traçar una circumferència que passi per A i B i sigui tangent a la recta r .

Representem les dades i "la solució". Per determinar el punt C que resol el problema notem que per la potència d'un punt, el punt M intersecció de r amb la recta AB serà tal que $\overline{MC}^2 = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$ i \overline{MC} pot provenir d'un segment \overline{MQ} tangent a una circumferència de diàmetre AB .

Mètode del problema recíproc

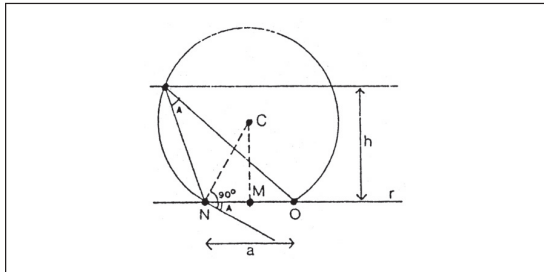


Fig. 1.3.2

Fent un esquema del que es vol aconseguir es van col·locant les dades ordenadament i s'analitza com es pot procedir a fer tota la construcció.

Exemple. Situar un segment de longitud donada a entre els costats d'un angle donat A de manera que determini un triangle d'àrea donada S .

Col·locant a en una recta r fem la construcció de l'arc capaç que correspon a mirar a segons l'angle donat A . En ser $S = \frac{1}{2}a \cdot h$, podrem conèixer h i aleshores fixar el vèrtex A .

Mètode dels llocs geomètrics

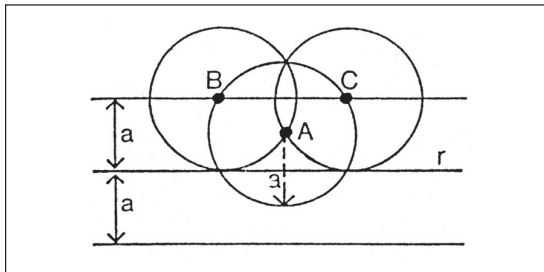


Fig. 1.3.3

Es tracta de trobar la solució com a lloc geomètric, és a dir, com a conjunt de punts que satisfan una determinada solució.

Exemple. Donat un punt A fora d'una recta r i un segment a , trobar les circumferències tangents a r , que passin per A i tinguin per radi a .

Tal com es veu al dibuix fem paral·leles a r distants a d'aquesta recta. Fent el cercle de centre A i radi a trobem dos punts solució B i C .

Mètode de les transformacions

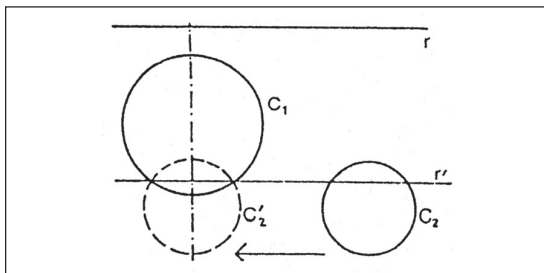


Fig. 1.3.4

Consisteix a aplicar a les dades una transformació (gir, simetria, translació, homotècia...) de manera que les figures transformades portin a una solució i, finalment, aplicar la transformació inversa a aquesta per obtenir el que es cercava.

Exemple. (Translació). Donada una recta r i dues circumferències C_1, C_2 trobar una recta r' paral·lela a r i que talli a C_1 i C_2 en dues cordes iguals.

a r . Els punts d'intersecció de C_1 i C_2 determinen una recta r' paral·lela a r i ja tenim les cordes! Qüestió: aquest problema té sempre solució?

Es mou C_2 fins que talli a C_1 de manera que la recta determinada pels centres de C_1 i C_2 sigui orthogonal

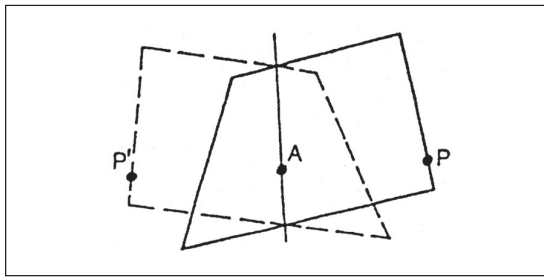


Fig. 1.3.5

Exemple. (Simetria). Donat un quadrilàter P i un punt A interior, traçar una recta per A tal que la seva intersecció amb P sigui un segment amb A com a punt mitjà.

Fent una simetria de P respecte d' A surt un quadrilàter P' i A resulta ser punt mitjà del segment que passa per A i per les interseccions de P amb P' .

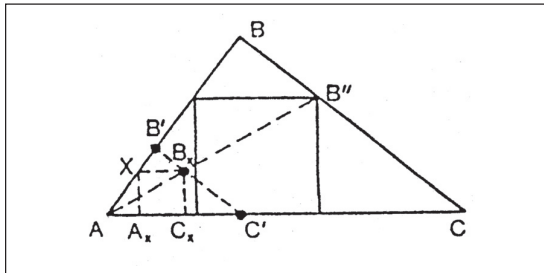


Fig. 1.3.6

Exemple. (Homotècia). Inscriure un quadrat en un triangle donat de manera que un costat del quadrat quedi sobre una base del triangle.

El quadrat solució és homotètic d'un que sols toca un costat i té la base ben col·locada.

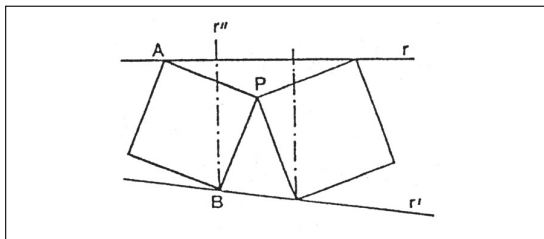


Fig. 1.3.7

Exemple. (Gir). Construïu un quadrat que tingui un vèrtex en un punt donat P i els dos vèrtexs oposats A i B en dues rectes r i r' que no passin per P .

Com que un gir de 90° al voltant de P enviaria A de r al B de r' , girant r 90° al voltant de P tindrem una recta r'' que tallarà a r' en B . Fet BF es completa el quadrat. Cal discutir altres solucions possibles.

Mètode de les tangents

El traçat de tangents a un cercle des d'un punt P o la construcció de les tangents exteriors o interiors entre dues circumferències donades s'expliciten en les figures adjuntes.

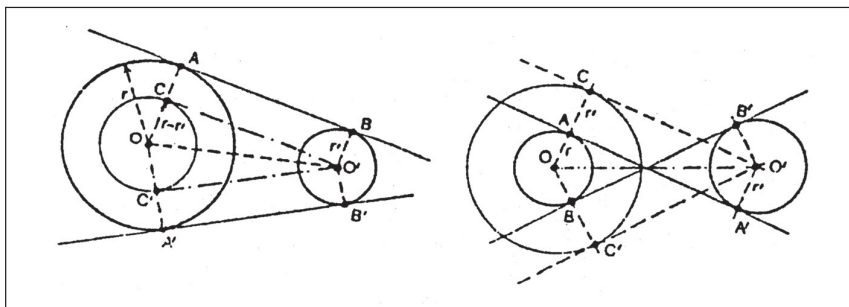


Fig. 1.3.8

Problema 1

Construïu un triangle donat un segment unitat, un costat a , un segment de longitud S (on S és l'àrea) i l'angle A .

Problema 2

D'un triangle isòsceles tenim un costat i una bisectriu. Sabríeu construir amb regla i compàs el triangle?

Problema 3

D'un quadrilàter $ABCD$ coneixem els seus quatre costats. Queda determinada la figura?

Problema 4

Inscriuiu un pentàgon regular en un quadrat de manera que un costat del pentàgon quedi sobre la base del quadrat.

1.4 Nombres construïbles amb regla i compàs

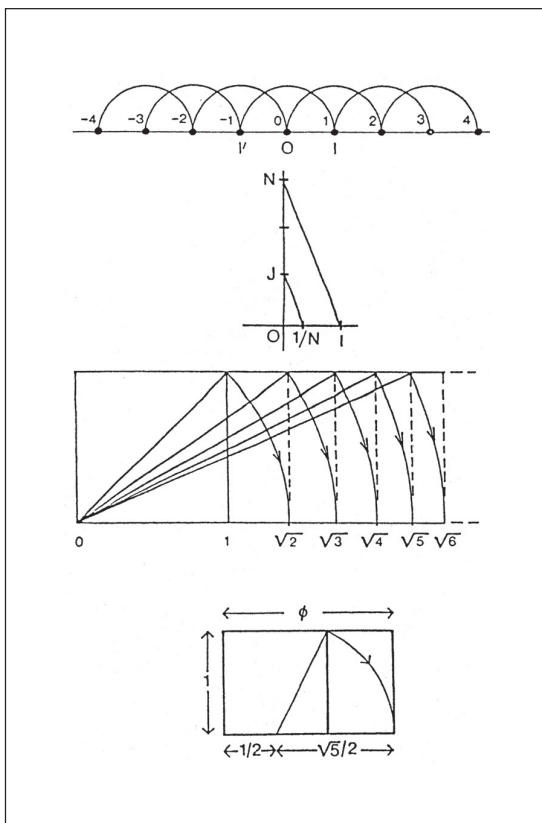


Fig. 1.4.1

Disposant d'un regla i un compàs és molt senzill marcar en una recta on s'ha fixat una unitat OI molts punts corresponents a nombres. A les figures veiem aparèixer els nombres naturals repetint el segment unitat, els nombres enters simetritzant els naturals, els nombres racionals fent ús del teorema de Tales, els nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ... via diagonals de quadrats i rectangles... i el nombre

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$$

dit nombre d'or. Altres nombres, com ara π , e , $\sqrt[3]{2}$, ... no són construïbles malauradament amb regla i compàs.

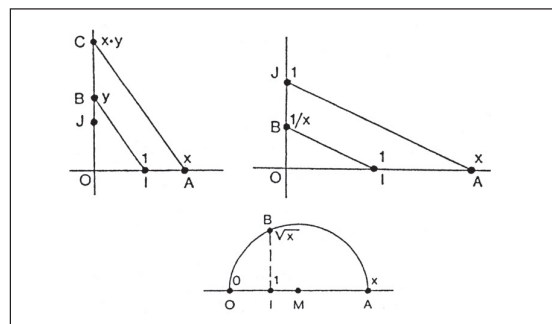


Fig. 1.4.2

Noteu que donats dos nombres construïbles x, y (tenim els dos segments) podem sumar $x + y$ concatenant, i podem multiplicar $x \cdot y$ usant el teorema de Tales, i podem fer l'arrel quadrada \sqrt{x} si $x > 0$ amb l'ajut del teorema de l'altura, etc. No ho podem fer tot, però sí que podem fer moltes coses.

Així el conjunt $C = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ és construïble amb regla i compàs}\} \subseteq \mathbb{R}$, té estructura de cos. El següent teorema de Wantzell és bó de saber

Teorema. Si $x \in C$ aleshores x és algebraic sobre \mathbb{Q} (solució d'un polinomi a coeficients racionals) i el polinomi de mínim grau (irreduïble i amb coeficient 1 en el terme de major grau) que té a x com a arrel té per grau una potència de 2.

Estudiant algebraicament aquest problema de determinar els punts construïbles amb regla i compàs es troba el següent

Teorema. Un punt pot ser obtingut mitjançant una construcció amb regla i compàs a partir d'uns punts donats si, i només si, les coordenades del punt es poden expressar en funció de les coordenades dels punts donats mitjançant un nombre finit d'operacions racionals i extracció d'arrels quadrades.

És un resultat raonable perquè tota la construcció involucra sols rectes i cercles i, per tant, sistemes d'equacions de primer i segon grau.

Exemple. $\sqrt{\sqrt{2}}$ és construïble (solució de $x^4 - 2 = 0$).

Exemple. $\sqrt[3]{5}$ és algebraic, solució de $x^3 - 5 = 0$, però no és construïble (Teorema de Wantzell).

Exemple. π o e no són solucions d'una equació polinòmica a coeficients enters i per tant no són construïbles.

Problema 1

Com justificaríeu que $(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^3$ és construïble amb regla i compàs?

Problema 2

El número π és solució de $x - \pi = 0$, equació de primer grau. Podríeu aplicar ara el teorema de Wantzell i deduir que π és construïble amb regla i compàs?

Problema 3

Si a, b, c són costats donats d'un triangle i S és la seva àrea ¿es pot construir sempre el número S ?

Problema 4

Pot ser un número construïble amb regla i compàs i ser solució d'una equació de tercer grau?

Problema 5

Verifiqueu gràficament que el número d'or $(1 + \sqrt{5})/2$ i la fracció $13/8$ són resultats molt propers.

1.5 Quatre problemes clàssics de regla i compàs

Quatre problemes de la matemàtica grega han marcat fortament el desenvolupament de les matemàtiques fins al segle XX.

Quadratura del cercle

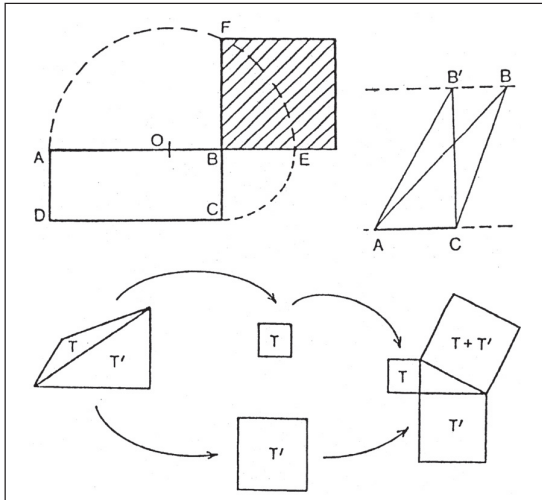


Fig. 1.5.1

Quadrar polígons vol dir construir a partir d'un polígon i usant només regla i compàs un quadrat d'àrea igual a la del polígon, és a dir, és solucionar gràficament el càlcul de l'àrea. El cercle *no admet quadratura* perquè resulta que mai no és dibuixable amb regla i compàs un segment de longitud π . No obstant això, tots els polígons admeten quadratura. Ho veiem gràficament a les figures, a les quals el lector és convidat ara a posar-hi solfa i lletra.

Cal notar que les construccions amb regla i compàs són sempre en un nombre finit de passos (no admetent processos infinits o recurrents) i per tant no és gens estrany que malgrat que els polígons siguin quadrables no ho sigui el cercle "figura límit" de polígons. La transcendència de π és la que va permetre a la fi establir la no quadratura del cercle amb regla i compàs.

Duplicació del cub

El reptre era, donat un cub de costat 1, construir amb regla i compàs l'aresta del cub de volum doble (2). Això portava doncs a poder esbrinar si $\sqrt[3]{2}$ era o no construïble amb regla i compàs. Malgrat ser un nombre algebraic (solució de $x^3 - 2 = 0$), no pot ser solució d'una equació de segon grau a coeficients enters i, per tant, la duplicació no és possible. Hi ha altres instruments per a fer-ho.

Inscriure polígons

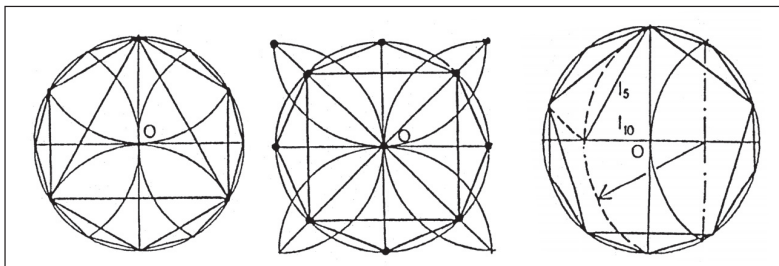


Fig. 1.5.2

Un tema clàssic de la geometria és la inscripció dels polígons regulars en un cercle donat usant regle i compàs. També en aquest cas i de forma sorprenent, no tots els polígons regulars són inscrivibles (de forma exacta i usant aquest instrumental). Així el de 7 costats no és inscrivible. A la col·lecció de figures d'aquest apartat s'hi veuen diverses construccions amb regle i compàs: quadrats, pentàgons, octàgons i decàgons. El 30 de març de 1796, Gauss (1777-1855) que sols tenia 19 anys (ànims!) va aconseguir inscriure el 17-gon. L'any 1832, F. J. Richelot ho va aconseguir amb el de 257 costats i Hermes de Lingen després de 10 anys de feina (i paciència!) construí el de 65.537 costats (el manuscrit enorme està guardat en una gran caixa a la Universitat de Göttingen). Afortunadament Gauss demostrà que els únics polígons regulars inscrivibles en una circumferència amb regle i compàs i *amb un nombre primer P* de costats són aquells en que $P = 2^{2^n} + 1$ per un cert $n \geq 0$. Així:

$$2^{2^0} + 1 = 3, \quad 2^{2^1} + 1 = 5, \quad 2^{2^2} + 1 = 17, \quad 2^{2^3} + 1 = 257, \quad 2^{2^4} + 1 = 65.537$$

Cal notar que $2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700 \cdot 417$ no és primer. Llàstima!

Trisecció de l'angle

Aquest repte era: donat un angle A gràficament, construir amb regle i compàs la seva trisecció, és a dir, marcar l'angle $A/3$. Això equival a poder marcar $\sin(A/3)$ o $\cos(A/3)$ i aquest nombre no sempre és construïble amb regle i compàs (per a 60° o 30° , per exemple, no ho és; per a 90° sí). Així doncs no tot angle és triseccable (amb instruments alternatius, sí).

Noteu que $\sin A = 3 \sin(A/3) - 4 \sin^3(A/3)$ i fent $\sin A = b$ i $\sin(A/3) = x$ caldria resoldre $4x^3 - 3x + b = 0$, cosa que en certs pocs casos dóna solucions construïbles amb regle i compàs.

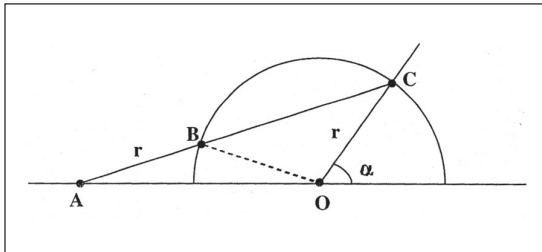


Fig. 1.5.3

La següent construcció d'Arquimedes afegeix al joc del regle i el compàs la possibilitat que el regle permeti mesurar, i aleshores dóna com triseccar un angle.

Col·locant l'angle α es fa el semicercle d'un cert radi r que talla la recta superior de l'angle en C . Passant el regle fins que A i B queden marcats. Aleshores CAO és $\alpha/3$ ja que $AB = BO = CO = r$, ABO i BOC són isòsceles i per tant $BAO = BOA = \beta$ és $OBC = OCB = 2\beta$ i $\alpha + \beta + \pi - 4\beta = \pi$, és a dir, $\beta = \alpha/3$.

Problema 1

Amb regle i compàs: és possible fer la quadruplicació del cub? I la quintuplicació? Sabríeu fer la duplicació d'un altre políedre?

Problema 2

Demostreu que un triangle rectangle, si es col·loquen tres figures semblants entre elles sobre els tres costats, l'àrea de la que es troba sobre la hipotenusa és igual a la suma de les àrees de les que es troben sobre els catets.

Problema 3

Demostreu que donat un quadrilàter sempre es pot construir un triangle d'igual àrea que té un costat amb comú en el quadrilàter de partida.

Problema 4

Es pot inscriure el polígon regular d'11 costats? I el de 13 o 19 costats?

Problema 5

Com faríeu amb regla i compàs la trisecció d'un angle de 90° ?

INTERNET

Visiteu el web

<http://mathworld.wolfram.com/topics/GeometricConstruction.html>

Hi ha moltes construccions interessants i ampliacions del que aquí s'ha fet.

Més problemes de geometria mètrica

- Si en un triangle a, b i c designen els costats; A, B i C els angles oposats respectivament als anteriors; h_a, h_b, h_c indiquen les altures sobre a, b, c ; m_a, m_b, m_c les respectives mitjanes i W_a, W_b, W_c les bisectrius, construïu el triangle ABC donats:
 - h_a, m_a, B ;
 - h_a, A, B ;
 - m_a, b, c ;
 - W_a, A, B ;
 - h_a, b, B ;
 - h_a, a, B ;
 - h_a, b, c ;
 - m_a, b, A ;
 - m_a, a, b ;
 - m_a, m_b, h_c ;
 - W_a, b, A ;
 - a, h_a, m_a ;
- Considerem un terreny en forma de triangle isòsceles amb el costat desigual més curt. Es vol partir en dues parts d'àrea igual construint-hi una tanca recta i paral·lela al costat desigual. Resoleu gràficament on s'ha de posar la tanca.
- Donat un cercle de radi 1 dibuixeu amb regla i compàs un cercle d'àrea triple i un cercle d'àrea un terç.
- Donat un angle de vèrtex O i un punt M en el seu interior dibuixeu el paral·lelogram de vèrtexs O i M , marqueu la diagonal L que no passa per O i feu una paral·lela L' a aquesta per M . Demostreu que el triangle determinat per O i L' és, dels que tenen una base per M , el de menor àrea.
- Usant només el compàs i a partir de dos punts donats A i B marqueu punts que es trobin alineats amb A i B .
- Les arrels de l'equació $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ són construïbles amb regla i compàs? i les arrels de l'equació $4x^3 - 3x + \sqrt{2}/2 = 0$ són construïbles amb regla i compàs?
- Donat un octàgon regular construïu amb regla i compàs un heptàgon d'igual àrea.
- En el tractat clàssic *De inquisitione, capacitatis figurarem* apareix aquest dibuix com a quadratura del triangle abc . Justifiqueu la seva validesa.

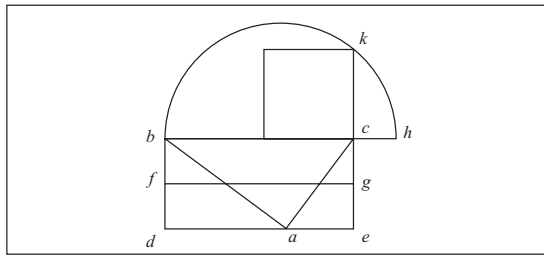


Fig. 1.6.1

9. Donat $a > 0$ teniu la gràfica de $y = a/x$ i feu la circumferència de centre

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

que passa $(a, 1)$. On talla aquesta circumferència a la hipèrbola?

10. Donat un angle α , un compàs i un regle es col·loca l'angle α de vèrtex O i amb centre el vèrtex O es fa una circumferència. Amb el regle es dibuixa el segment que passa pels dos punts d'intersecció dels costats de l'angle amb la circumferència. Fent la trisecció d'aquest segment ¿queda determinada la trisecció de l'angle?

Teoria de la proporció

2.1 Teoria de la proporció en arquitectura

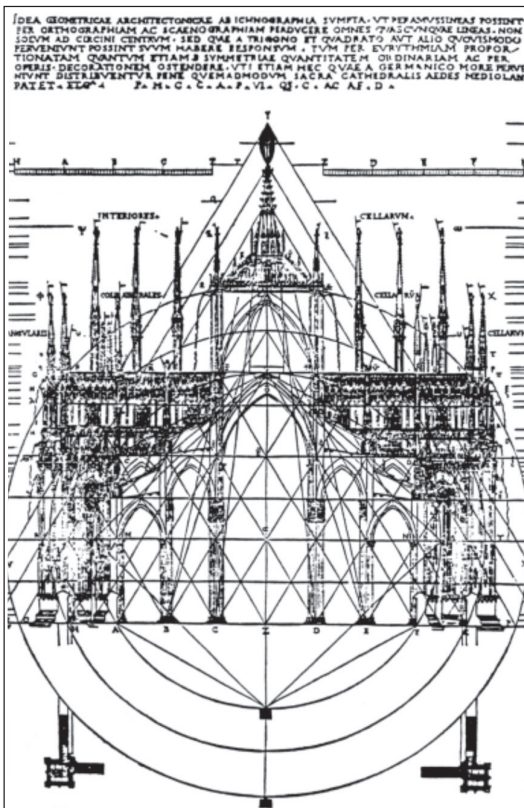


Fig. 2.1.1 Catedral de Milà (edició de l'any 1521 de Cesariano)

La teoria de la proporció forma avui un *corpus* doctrinal important dintre del marc general de les teories arquitectòniques. Aquesta teoria té uns objectius bàsics com són: *la seva intencionalitat visual*, consistent a crear un ordre aparent per repetició de figures semblants i *la seva intencionalitat formal*, basada, no en les formes mateixes, sinó en el ritme o relacions establertes entre tals formes.

De fet, la teoria de la proporció resulta de la síntesi de diverses aportacions disciplinàries:

- a) *Geometria*: la proporció pressuposa amidabilitat, comparança, traçats regulars, propietats de coordinabilitat, generació de malles fonamentals, etc.
- b) *Metrologia*: la proporció, com "invariant" de la geometria de semblances, no fixa *a priori* les mesures reals dels objectes proporcionats. L'estructura i la utilitat no determinen tals mesures. Els conceptes metrollògics tradicionals, estàtics o dinàmics, són els que marquen el dimensionament de les trames amb proporció.
- c) *Estètica*: la proporció tradicional ha estat associada a un concepte geomètric de bellesa, agradabilitat visual, ritme.
- d) *Morfologia*: la proporció en arquitectura, pintura, escultura,... etc., ha estat estretament vinculada amb la morfologia de l'home.
- e) *Antropologia*: els traçats proporcionats formen part d'un ús cultural concretat de forma diferent en distintes cultures i temps.
- f) *Història*: tant la història de l'arquitectura com la de l'art en general i l'arqueologia, la història de la música, etc., aporten la documentació i la crítica, sense les quals seria impossible entendre l'evolució en el temps de la teoria de la proporció.

g) *Metafísica*: aporta llum sobre la teoria de la proporció ja que aquesta disciplina conté, històricament, una dosi notable de metainterpretació, especialment pel que concerneix l'harmonia de les formes.

Partint d'aquestes diverses interpretacions s'entén que en el cas particular de l'*arquitectura* existeixin diverses característiques especials de la proporció: aquesta deu ser edificable, resultant dels agregats espacials de les formes arquitectòniques, deu conjugar-se amb l'aplicació d'efectes visuals constructius, etc.

De la mateixa manera que l'estudi dels ritmes per repetició de formes d'igual *grandària i forma* ha donat lloc a la *teoria de la simetria*, l'estudi dels ritmes per conjugació d'objectes d'igual *forma* ha donat lloc a la *teoria de la proporció*. A tal teoria, i a les seves aplicacions en arquitectura, es dedica el present capítol, en el qual l'eròtica, pel bell, l'harmonios i el generable, ocupa un important paper. La proporció, com els vells ritmes ancestrals, es transmet, es dilueix, es redescobreix, però sempre és present en un món subtil d'idees.

2.2 Propietats geomètriques de la proporció

Donat un rectangle de costats a i b , es defineix la *proporció del rectangle* com el quocient

$$p(a, b) = \frac{\text{Màxim}(a, b)}{\text{Mínim}(a, b)}$$

Les propietats elementals aritmètiques i geomètriques de la proporció són:

Propietat 1: *La proporció és major o igual que 1. L'únic rectangle de proporció 1 és el quadrat.*

Propietat 2: *La proporció no depèn de l'ordre dels costats.*

Propietat 3: *La proporció és invariant per a homotècies i semblances.*

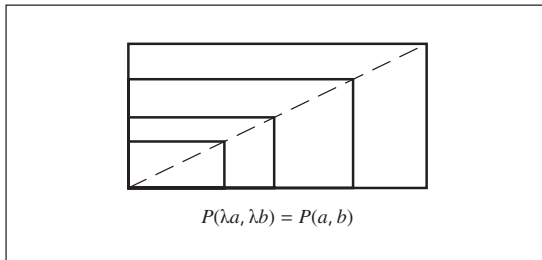


Fig. 2.2.1

En efecte, en aplicar una semblança qualsevol de raó $\lambda > 0$ al rectangle de costats a, b resulta un altre rectangle amb costats $\lambda a, \lambda b$. Així

$$p(\lambda a, \lambda b) = \frac{\text{Màx}(\lambda a, \lambda b)}{\text{Mín}(\lambda a, \lambda b)} = \frac{\text{Màx}(a, b)}{\text{Mín}(a, b)} = p(a, b)$$

Propietat 4: *La proporció és condicionalment additiva.*

Si $a \leq \text{Mín}(b, c)$ llavors resulta

$$p(a, b) + p(a, c) = \frac{\text{Màx}(a, b)}{\text{Mín}(a, b)} + \frac{\text{Màx}(a, c)}{\text{Mín}(a, c)} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a} = p(a, b+c)$$

Propietat 5: *La proporció és una funció contínua.*

Aquesta propietat analítica exigeix que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, llavors per la continuïtat de les funcions Màx i Mín,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Màx}(a_n, b_n)}{\text{Mín}(a_n, b_n)} = \frac{\text{Màx}(a, b)}{\text{Mín}(a, b)} = p(a, b)$$

Així, si un rectangle és límit de rectangles la seva proporció s'obté com a límit de la successió de proporcions dels rectangles aproximatius.

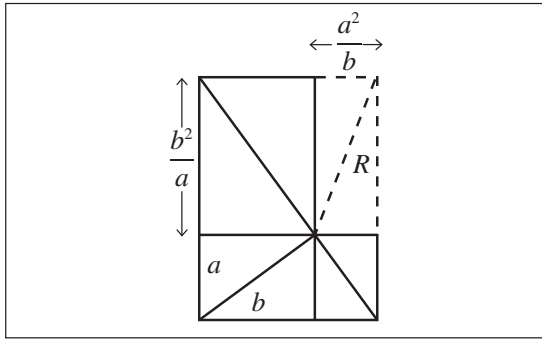


Fig. 2.2.2

$$p\left(a, \frac{a^2}{b}\right) = \frac{\text{Màx}\left(a, \frac{a^2}{b}\right)}{\text{Mín}\left(a, \frac{a^2}{b}\right)} = \frac{\text{Màx}\left(1, \frac{a}{b}\right)}{\text{Mín}\left(1, \frac{a}{b}\right)} = \frac{\text{Màx}(a, b)}{\text{Mín}(a, b)} = p(a, b)$$

i anàlogament $p\left(b, \frac{b^2}{a}\right) = p(a, b)$.

Propietat 7: La proporció entre les àrees dels quadrats sobre els costats d'un rectangle és el quadrat de la proporció de dit rectangle.

En efecte,

$$p(x^2, y^2) = \frac{\text{Màx}(x^2, y^2)}{\text{Mín}(x^2, y^2)} = \left(\frac{\text{Màx}(x, y)}{\text{Mín}(x, y)}\right)^2 = p(x, y)^2$$

Aquesta propietat dona un mètode per a construir dos quadrats la raó dels quals a nivell d'àrees està prefixada.

Propietat 8: La proporció entre els volums dels dos cilindres generables per un rectangle en unir respectivament els dos parells de costats paral·lels és igual a la proporció del rectangle (*demostris!*).

Proporcions racionals

La simetria o proporció és una concordança uniforme entre l'obra sencera i els seus membres [...] així com en el cos humà hi ha una proporció [...] entre el colze, el peu, el palmell de la mà, el dit i les parts restants, ocorre igual en tota construcció perfecta.

M. L. Vitruvi

Donat un rectangle de costats a i b i proporció $p(a, b) = \text{Màx}(a, b)/\text{Mín}(a, b)$ es diu que aquesta proporció és *estàtica* o *racional* quan $p(a, b) \in \mathbb{Q}^+$, és a dir, $p(a, b) = \frac{m}{n}$, essent m i n naturals positius. La denominació surt de la propietat següent: un rectangle té proporció racional si, i només si, és la reunió de quadrats iguals no sobreposats.

En altres paraules, la racionalitat d'un rectangle equival a l'existència d'una unitat que per repetició permeti amidar simultàniament els dos costats del rectangle. Per això els sistemes de proporcions racionals

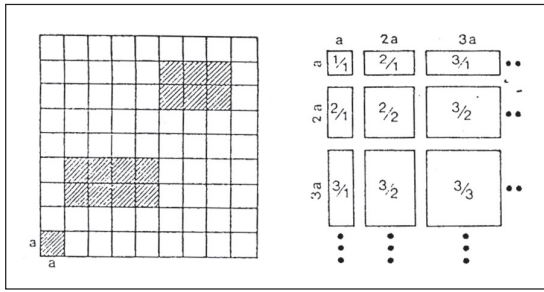


Fig. 2.2.3

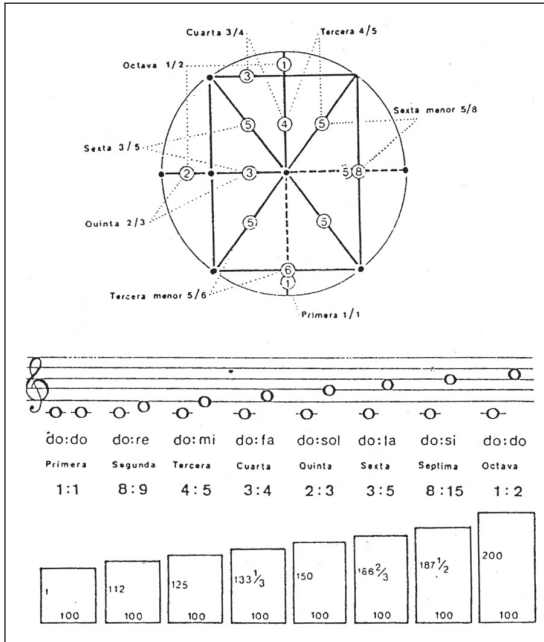


Fig. 2.2.4

proporcions auditivament belles havien de correspondre's amb proporcions arquitectònicament perfectes. Tot un intent d'harmonització de la bellesa captible pels sentits, a través d'unes mateixes proporcions.

Proporcions irracionals

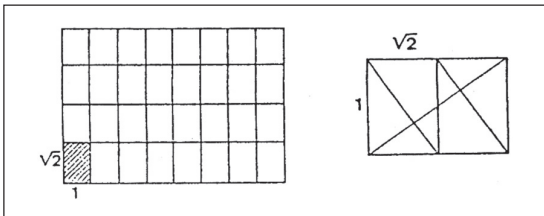


Fig. 2.2.5

són tremendament simples de generar, existint dos mètodes convenients: en un cas es traça una malla quadrangular i en ella poden anar marcant-se els diferents rectangles racionals, perquè els seus vèrtexs sempre coincidiran amb nusos de la malla, en l'altre cas pot donar-se una relació exhaustiva i generativa d'aquestes proporcions racionals mitjançant una taula. Els elements diagonals d'aquesta taula són quadrats i, simètricament respecte a aquesta diagonal, apareixen rectangles d'ídèntica proporció. Per sobre de la diagonal totes les proporcions es repeteixen, perquè tant apareix, per exemple, la proporció 3/2 com les 6/4, 9/6, 12/8, etc. Noti's que la reunió de dos rectangles d'una mateixa columna (o fila) sempre dona un altre rectangle de la mateixa columna (o fila).

Totes aquestes proporcions racionals poden trobar-se per mitjà del rectangle pitagòric. Les proporcions racionals no només van aparèixer a través dels sistemes de mesures i de l'estudi del dimensionament humà, sinó també en l'estudi musical iniciat per Pitàgores. La lectura actual de les proporcions musicals es basa en el càlcul de les raons entre les vibracions per segon que aporten les diferents notes.

Fins a la creació per Bach de la "gamma temperada", la influència musical de Pitàgores va ser notable. Si música i harmonia havien trobat en el sistema de Pitàgores el seu propi llenguatge generatiu, la teoria de la proporció racional oferia la possibilitat de ser un alfabet per a la "gramàtica" arquitectònica. La complexitat de l'arquitectura no ha permès que aquesta idea es consolidi, però com veurem, al llarg de la història de l'arquitectura, la recerca de l'"analogia musical" ha estat constant:

La proporció $p(a, b) = \text{Màx}(a, b) / \text{Mín}(a, b)$ d'un rectangle de costats a i b es diu *irracional* o *dinàmica* quan $p(a, b) \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$, és a dir $p(a, b)$ és un nombre irracional positiu. Geomètricament el fet $p(a, b) \notin \mathbb{Q}^+$ indica que el rectangle de proporció $p(a, b)$ no serà repetició d'un quadrat o, equivalentment, que els dos costats del rectangle *no* es podran amidar simultàniament per repetició d'una mateixa unitat. Per raons històriques, *només s'han considerat d'interès geomètric i arquitectònic aquelles proporcions entre nombres construïbles amb regla i com-*

pàs, és a dir, $p(a, b) \in C$ amb $a, b \in C$. En aquest apartat estudiarem les proporcions dinàmiques del tipus \sqrt{n} i en el següent estudiarem la proporció divina. Comencem amb les propietats següents de \sqrt{n} :

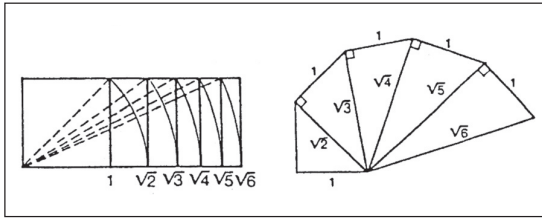


Fig. 2.2.6

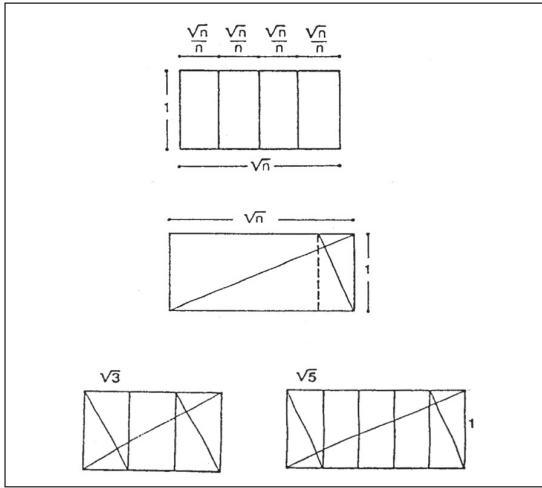


Fig. 2.2.7

és a dir, $b/a = a/(b/n) = na/b$; així $(b/a)^2 = n$ i necessàriament $b/a = \sqrt{n}$.

Per ser cadascun d'aquests n rectangles idèntics al seu recíproc es denominen *rectangles recíprocs interns*. Per a la seva construcció, en lloc de dividir el costat major del rectangle donat en n parts, es pot traçar una diagonal d'aquest costat, i des de qualsevol vèrtex no contingut en aquesta diagonal, la perpendicular a aquesta. Aquesta perpendicular resulta ser la diagonal del rectangle recíproc intern.

Propietat 3. *Tot rectangle de proporció \sqrt{n} pot subdividir-se indefinidament en una sèrie de subrectangles d'igual proporció determinant els vèrtexs una espiral de costats rectes.*

En efecte, primer es divideix el costat major \sqrt{n} en n parts, donant lloc per la propietat 2 als n rectangles recíprocs interiors. Un dels subrectangles (de proporció \sqrt{n}) es divideix de nou pel seu costat major en n rectangles recíprocs interiors i així successivament.

Propietat 4. *Tot quadrat pot descompondre's simètricament com a reunió de 4 subquadrats i 4 subrectangles de proporció \sqrt{n} .*

Propietat 5. *En tot rectangle de proporció $\sqrt{n}/1$ l'àrea del quadrat sobre la diagonal val $n + 1$ i és igual a la suma de les àrees dels quadrats sobre els costats del rectangle.*

Propietat 1. *Els rectangles de proporció \sqrt{n} formen una sèrie autogenerable en la forma següent: es parteix del quadrat unitari i la diagonal val $\sqrt{2}$, abatent aquesta diagonal s'obté el rectangle de proporció $\sqrt{2}$, i la seva diagonal val $\sqrt{3}$..., etc. També poden ordenar-se els segments \sqrt{n} en forma d'espiral.*

Propietat 2. *Els rectangles de proporció \sqrt{n} són els únics que es poden obtenir com a reunió de n vegades el rectangle recíproc menor, és a dir, dividint aquests rectangles en n parts (pel costat major) s'obtenen n rectangles d'igual proporció al donat i iguals al recíproc menor.*

En efecte, en dividir el rectangle de proporció $\frac{\sqrt{n}}{1}$ en n parts resulten n rectangles de costats 1 i $\frac{\sqrt{n}}{n}$ d'on $p\left(1, \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = \sqrt{n}$.

Recíprocament, si un rectangle de costats $a, b, a \leq b$ és reunió de n rectangles amb proporcions idèntiques a b/a i és

$$p(a, b) = p\left(a, \frac{b}{n}\right)$$

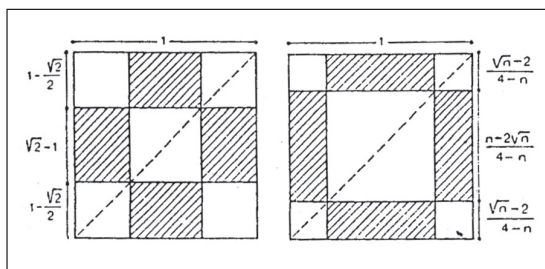


Fig. 2.2.8

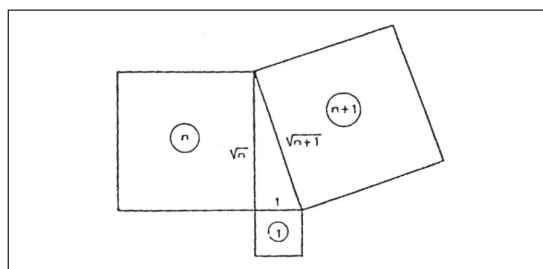


Fig. 2.2.9

Si bé aquesta propietat és un cas particular del teorema de Pitàgores (vàlid en tot triangle rectangle) la citem aquí per a ressaltar el fet que si bé la diagonal $\sqrt{n+1}$ no és commensurable, com a longitud, amb els costats del rectangle, a nivell d'àrees sí que l'àrea del quadrat sobre la diagonal és *commensurable* amb les àrees dels quadrats sobre els costats.

Problema 1

Considerem un cercle de radi 1 i sigui P_n el polígon regular inscrit en el cercle amb n costats ($n \geq 3$). Calculeu per $n = 3, 4, 5, 6, 8$ les proporcions dels rectangles d'altura 1 i llargada el costat l_n del polígon P_n . Què observeu en aquesta successió de proporcions?

Problema 2

Dintre d'un quadrat dibuixeu un rectangle màxim de proporció $\sqrt{2}$, un de proporció $\sqrt{3}$, un de proporció $\sqrt{4}$ i un de proporció $\sqrt{5}$.

Problema 3

S'anomena gnòmon d'una figura F aquella figura F' tal que en ser ajuntada amb F es forma una nova figura semblant a la F . Quin és el gnòmon d'un rectangle F ? Què representa F' respecte de la figura final?

Problema 4

Si un rectangle té àrea $\sqrt{5}$ i un costat val $\sqrt{2}$; quant val la seva diagonal i la seva proporció?

2.3 El número d'or: la divina proporció

La geometria té dos grans tresors: un és el teorema de Pitàgores; l'altre és la divisió d'un segment en raons extrema i mitjana. El primer el podem comparar amb una peça d'or; el segon el podem considerar una preciosa joia.

Kepler

Que una determinada proporció mantingui amb el pas dels segles un interès creixent i una actualitat constant és un fet insòlit, gairebé mític. Tal és el cas de la divina proporció o nombre d'or. Un rectangle de

costats a i b es diu *amb proporció divina* o àuria si $p(a, b) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

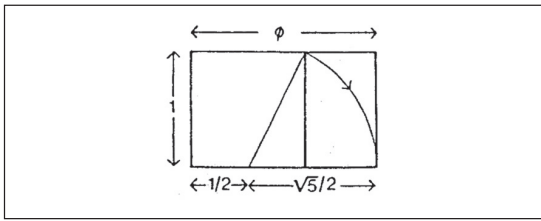


Fig. 2.3.1

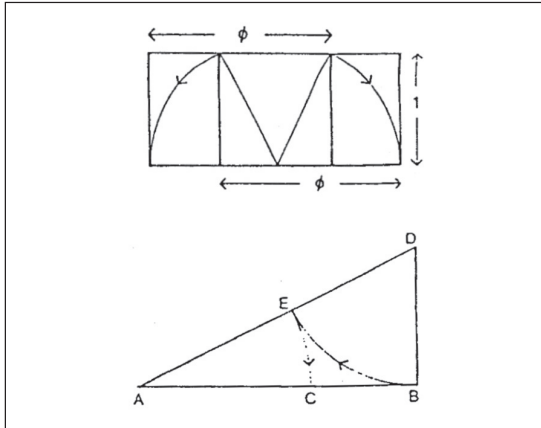


Fig. 2.3.2

A tal nombre $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, se l'anomena nombre d'or i és simbolitzat, després de Mark Bar, per una lletra grega, ϕ , inicial de Fidias, escultor grec que va utilitzar dit nombre.

Ceràmica Roca i nombre d'or

En l'actual catàleg de Roca Ceràmica destaca la nova col·lecció Rock & Rock, on totes les rajoles tenen per proporció el nombre d'or. Així, doncs, parets i terres enrajolats amb aquesta gamma presentaran unes proporcions divines.

Ara estudiarem primerament les propietats geomètriques i aritmètiques de ϕ més importants.

Propietat 1. *El rectangle de proporció ϕ es construeix a partir d'un quadrat, abatent sobre un costat, des del punt mitjà d'aquest, el segment que uneix dit punt mitjà amb un vèrtex qualsevol del quadrat que no estigui alineat amb dit punt.*

Notem que realitzant dues vegades aquesta construcció s'obtenen dos rectangles auris superposats que posseeixen en comú el quadrat inicial.

Propietat 2. (Euclides II, 11). *El nombre d'or ϕ es correspon amb la divisió àuria d'un segment (o divisió en mitjana extrema raó).*

Si el segment \overline{AB} pretén dividir-se per un punt C de forma que $\overline{AB}/\overline{AC} = \overline{AC}/\overline{CB}$, fent $\overline{AC} = a$ i $\overline{CB} = b$ resulta la relació $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, o equivalentment $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$; és a dir, si fem $a/b = x$ resulta $1 + \frac{1}{x} = x$, i per tant $x^2 = 1 + x$.

Les solucions de tal equació de segon grau $x^2 - x - 1 = 0$, són $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Com que $\phi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, la solució al problema proposat resulta ser el nombre d'or:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{a}{b} = x = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Si, en la prolongació \overline{AB} , es marca el punt D de forma que sigui $\overline{AD} = \overline{AC}$, resulta

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AB} + \overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{AB}} = 1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 1 + \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC} + \overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \quad (1)$$

és a dir, el mateix A marca la divisió àuria del segment \overline{BD} . Antigament es deia que el segment \overline{AB} estava dividit per C "en raó extrema i mitjana". Va ser Kepler l'autor de la denominació "divina proporció" resultant així l'harmonia d'aquesta divisió àuria: "el total és al major com el major és al menor".

Per a construir efectivament el punt C de divisió àuria del segment AB mitjançant l'ús del regle i el compàs, es procedeix tal com indica la figura adjunta.

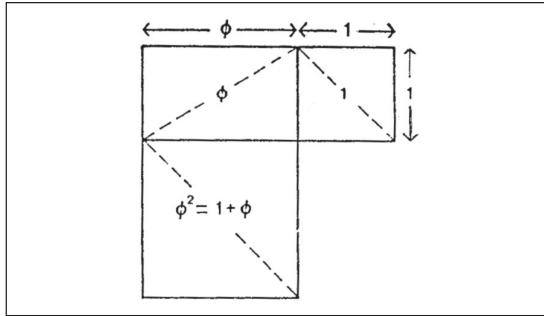


Fig. 2.3.3

Propietat 3. El nombre d'or ϕ és l'únic nombre positiu que satisfà $\phi^2 = 1 + \phi$. Així l'àrea del rectangle de proporció àuria més l'àrea del quadrat sobre el costat menor és igual a l'àrea del quadrat sobre el costat major.

En efecte,

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

és la solució positiva de $x^2 - x - 1 = 0$, i per tant $\phi^2 = 1 + \phi$.

Propietat 4: Donada la successió de Fibonacci

$$a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, \dots$$

és a dir, $o_0 = a, o_1 = b$ i $o_n = o_{n-1} + o_{n-2}$; resulta $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o_{n+1}}{o_n} = \phi$.

Aquesta propietat (vegeu el tema 4) permet obtenir bones aproximacions de ϕ . Per exemple $o_{33}/o_{32} = 5781196/3570847 = 1.618\dots$ aproxima ϕ fins a la mil·lèsima.

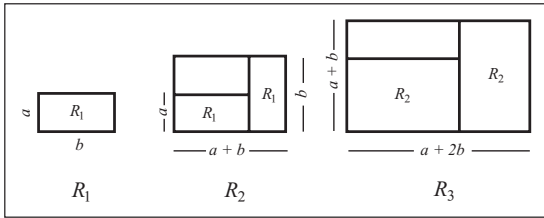


Fig. 2.3.4

Propietat 5: Donat un rectangle R_1 , de costats a i b , es forma el rectangle R_2 de costats $a, a + b$, i així successivament els rectangles R_n els costats dels quals són dos termes consecutius de la successió de Fibonacci; llavors, la successió de rectangles R_n tendeix a un rectangle de proporció àuria.

Noti's que cada rectangle R_n s'obté col·locant horitzontalment R_{n-1} i verticalment al costat R_{n-1} , completant llavors el mínim rectangle que conté ambdues còpies de R_{n-1} . Tant els costats verticals com els horitzontals de R_n determinen sengles successions de Fibonacci.

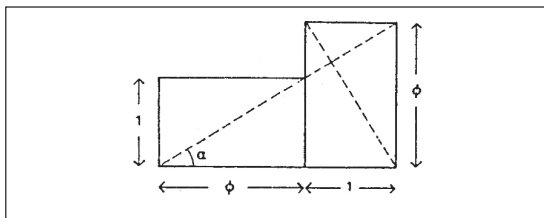


Fig. 2.3.5

Propietat 6: El rectangle auri és l'únic en el qual la prolongació d'una diagonal conté el vèrtex del rectangle adjacent col·locat verticalment al costat.

Fixeu-vos que

$$\tan \alpha = \frac{1}{\phi} = \frac{\phi}{\phi^2} = \frac{\phi}{1 + \phi}$$

Recíprocament, si un rectangle de costats a, b ($a < b$) és tal que verifica la propietat

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

llavors se segueix $\frac{b}{a} = \phi$.

La propietat 6 també pot interpretar-se en termes de propietat "límit" de la successió de les diagonals dels rectangles R_n construïts en la demostració de la propietat 5.

Propietat 7. La successió de Fibonacci de termes inicials a i $a\phi$, coincideix amb la progressió geomètrica del primer terme a i raó ϕ .

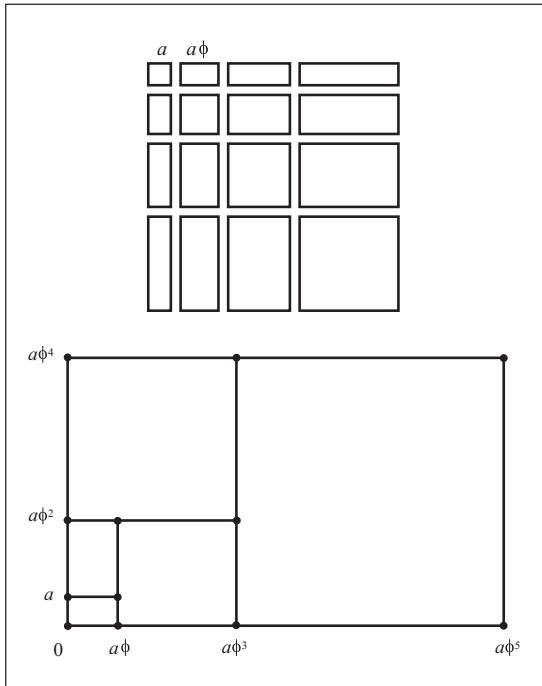


Fig. 2.3.6

En efecte,

$$a, a\phi, a + a\phi, a + 2a\phi, 2a + 3a\phi, 3a + 5a\phi \dots$$

té la forma:

$$a, a\phi, a(1 + \phi), a(1 + 2\phi), a(2 + 3\phi), a(3 + 5\phi), \dots$$

i tenint en compte les igualtats $1 + \phi = \phi^2$, $1 + 2\phi = 1 + \phi + \phi = \phi^2 + \phi = \phi^3$, etc., resulta

$$a, a\phi, a\phi^2, a\phi^3, a\phi^4, a\phi^5 \dots$$

Aquesta progressió geomètrica dóna lloc a una taula de rectangles auris. Els rectangles col·locats paral·lelament a la diagonal posseeixen proporcions ϕ^2 ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Propietat 8. $\phi = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{5}$.

Aquesta igualtat geomètrica implica la presència del nombre d'or en multitud de proporcions entre elements de polígons regulars, ja que l'angle 36° o $\pi/5$ és típic del pentàgon, decàgon, estrelles pentagonals i decagonals, etc.

Problema 1

Una proporció p és dita mòrfica si existeixen dos enters positius m, n tals que $p^n = 1 + p$ i $p - 1 = p^{-m}$. Verifiqueu que tant el número d'or com el número plàstic són proporcions mòrfiques.

Problema 2

Si (F_n) indica la successió de Fibonacci amb $F_1 = F_2 = 1$ i $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ verifiqueu que $\phi^n = F_{n-1} + F_n\phi$, per tant $n \geq 2$.

El nombre plàstic

L'arquitecte (i monjo) holandès Dom Hans van der Land (1904-1991), motivat per descobrir relacions espacials en edificis i, en particular, per trobar un model explicatiu de la composició romànica i gòtica, va estudiar la seqüència

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, \dots$$

on els tres primers termes són $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ i els termes següents es generen per la relació $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$, $n > 2$. Les raons entre ells porten a un límit P :

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \dots \longrightarrow P = 1.324 \dots$$

anomenat *nombre plàstic*, solució de l'equació $x^3 = 1 + x$.

Una obra de van der Land totalment composta amb les proporcions plàstiques és l'església de Sint Benedictusberg a Mamelis (Vaals, Holanda).

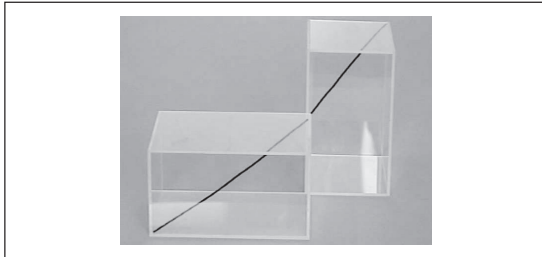


Fig. 2.3.7

En estudiar proporcions a l'espai, C. Alsina i J.L. Garcia-Roig han descobert moltes propietats de P , aclarint que el nombre d'or ϕ solució de $x^2 = 1 + x$ és típicament del pla i P és típicament de l'espai. Mirem el dibuix de la diagonal de la caixa prolongada passant pel vèrtex de la còpia de la caixa girada vertical. Si $0 < c < b < a$ aquesta propietat és possible si, i només si, $a = P^2c$, $b = Pc$ on P resulta ser, doncs, la proporció entre b i c .

Problema 3

Si (F_n) és la successió de Fibonacci demostreu que $(F_n)^2 - F_{n-1} \cdot F_{n+1} = \pm 1$.



Fig. 2.3.8



Fig. 2.3.9

Problema 4

Analitzeu les proporcions de la façana de Santa Maria de Novella (Florència).

Problema 5

Analitzeu les proporcions de la façana de l'edifici Espanya (1953) fet per Josep M. Otamendi i Joaquin Otamendi a la plaça d'Espanya de Madrid.

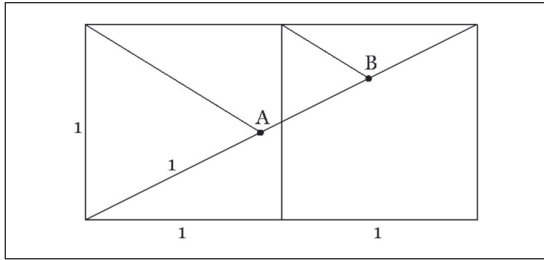


Fig. 2.3.10

Problema 6

Partint de la figura 2.3.10, calculeu la distància \overline{AB} .

2.4 De les mesures i les concepcions culturals de la proporció en arquitectura

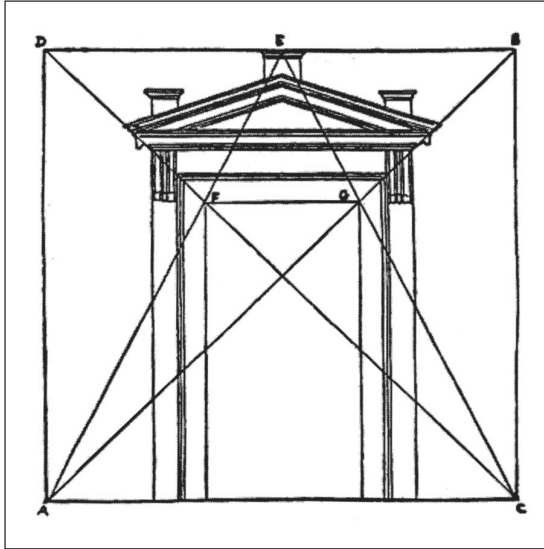


Fig. 2.4.1 Anàlisi d'una porta (Sebastiano Serlio)

Al concepte primitiu de *quantitat* aviat se li va associar, històricament, el concepte de *comparança*, concepte que en el cas de les longituds es va resoldre establint unes mesures bàsiques o patrons, d'arrel humana per a, amb referència a elles (per múltiples i submúltiples), establir un sistema consistent de mesurament. El dit, el palmell, el pam, el colze, el braç, el peu, el pas, etc., van ser patrons referencials de les cultures primitives. Precisament, la comparança relativa d'aquestes mesures antropomòrfiques va donar lloc a diferents sistemes metrològics de proporcions. En la taula següent es resumeixen alguns sistemes, i s'hi dona l'equivalència d'alguns dels patrons principals que s'han conservat fins avui. Noti's, com a denominador comú de tals sistemes, l'ús reiterat del dit o del peu com a unitats i la repetició de certes subdivisions com, per exemple, la partició del colze en 6 pams o 24 dits (a excepció del colze real egipci de 7 pams o 28 dits). De fet, els sistemes babilònics i egipcis van influir enormement en l'establiment dels sistemes assiris, fenicis, hebreus, grecs i romans. És també notable remarcar certes subdivisions donades en base 60.

La metrologia antiga va tenir un paper important en el dimensionament arquitectònic d'edificacions notables. Per exemple, la gran Piràmide de Kheops té una altura de 280 colzes reals, la càmera del faraó amida 10 colzes reals de llargada, el perímetre de la base amida 440 colzes reals (la base s'amidava també en peus reals), etc. Un altre exemple notable és el dimensionament del temple de Júpiter Capitolino, a Roma,

realitzat sobre la base del peu romà de 0,295 m. De fet, la proporcionalitat constructiva també es va desenvolupar com la proporcionalitat usada en pintura i escultura. Analitzarem ara com històricament aquest sistema proporcionat de la figura humana es va anar desenvolupant, ja que la seva evolució va influir notablement en la teoria de la proporció en l'art i en l'arquitectura: en l'art en el seu vessant de representar la figura humana i en l'arquitectura en la seva finalitat de crear espais per a l'ús de l'home.

En el llibre III dels seus *Deu Llibres d'Arquitectura*, Vitruvi dedica el capítol primer al tema "D'on s'han pres les mesures per a l'erecció de temples". En el dit apartat estableix com un principi el fet que "la proporció és una correspondència de mesures entre una determinada part dels membres de cada obra... No pot parlar-se d'una obra ben realitzada si no existeix aquesta relació de proporció, regulada com ho està en el cos d'un home format". Per això analitza amb detall les principals proporcions humanes:

Altura de l'home	= 1
Cara	= 1/10
Barba a la coroneta	= 1/8
Clatell a la part superior del pit	= 1/8
Part superior del pit al cabell	= 1/6
Part superior del pit a la coroneta	= 1/4
Peu	= 1/6
Colze	= 1/4
Pam	= 1/24
Melic al cabell	= 1/2
Braçada	= 1
Mentó al nas = nas a l'entrecella = entrecella al cabell	= 1/30

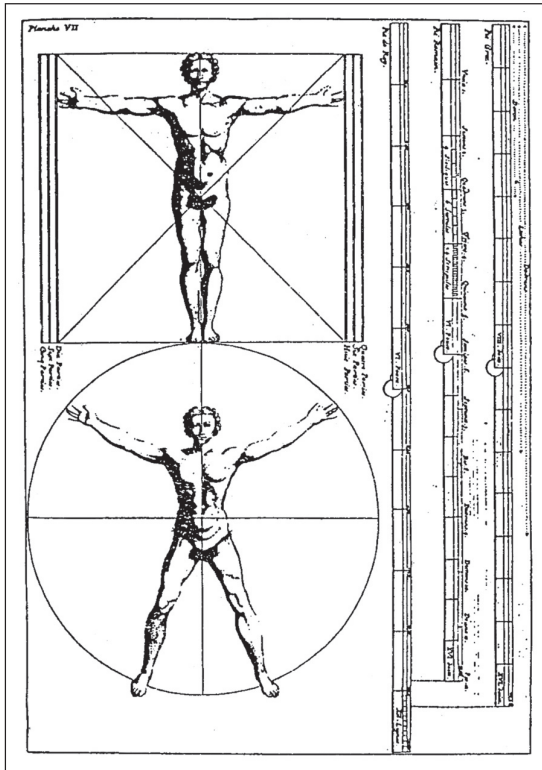


Fig. 2.4.2

Aquesta geometrització vitruviana de la figura humana s'enllaça amb la proporcionalitat arquitectònica clàssica i amb els estils dòric, jònic i corinti. Per això aquest sistema de Vitruvi va influir en el desenvolupament posterior dels cànons de Gaurico, Vasari i Leonardo da Vinci.

La figura següent correspon a una il·lustració de l'any 1684 feta sobre les bases vitruvianes de proporció (noti's l'existència de 3 escales laterals que comparen unitats gregues, romanes i franceses).

En definitiva, l'escala humana de Vitruvi consisteix a considerar l'altura com un mòdul (o el rostre) i referenciar les altres parts del cos com a submúltiples de tal unitat. Dit sistema s'ha denominat *harmònic*.

Leone Battista Alberti, en el seu tractat *Sobre la pintura*, de 1435, estableix alternativament el sistema harmònic, ja descrit, i el sistema *aritmètic* basat en la modulació de la figura humana per múltiples d'una unitat prefixada. En la pintura, el mòdul albertià és el "cap humà"; en escultura va considerar el peu. Curiosament, Alberti va expressar el raonament següent: "L'arquitecte Vitruvi amida l'altura de l'home amb peus. Jo penso que és més digne si els restants es refereixen a la quantitat del cap; bé que he observat que és comú en els homes

que la longitud del peu sigui igual a la distància que hi ha entre el mentó i la part superior del cap." Per a arribar a una modulació fina que permeti la precisió dels traçats de figures humanes, Alberti va considerar el peu dividit en 10 parts, cadascuna subdividida en 10 parts. Com que va considerar que el peu era la sisena part de l'altura de l'home, va resultar una subdivisió total finíssima en 600 parts. Alberti va realitzar una multitud de treballs empírics sobre persones, abans de fixar un sistema de proporcions, igual que ho va fer Durero en la mateixa època. Durero va investigar les possibilitats tant del sistema harmònic com de l'aritmètic. En el seu primer tractat sobre la figura humana (Durero va escriure la monumental obra *Els quatre llibres de les proporcions humanes*) va considerar la tradició de Vitruvi, estudiant inscripcions de la figura en un quadrat o cercle i donant aproximacions de parts corporals mitjançant traços de corbes geomètriques regulars. És famosa l'afirmació de Durero segons la qual el quadrat de la distància del genoll al maluc és igual al producte de la distància del coll al maluc per la del genoll al turmell. En les figures adjuntes es reproduïxen les escales bàsiques humanes de Durero, així com la seva famosa *Regula* basada en proporcions racionals.

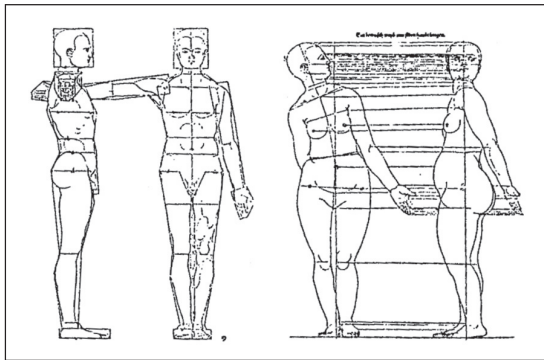


Fig. 2.4.3

Els estudis d'aquest estil, elaborats a Itàlia durant el Renaixement, van ser culminats per Leonardo da Vinci, que, partint de Vitruvi, va elaborar en els seus *Quaderns* una autèntica teoria minuciosa sobre la figura humana en repòs o en moviment. És ben coneguda la figura feta per Leonardo on apareix el famós esquema geomètric d'un home inscrit en un quadrat i un pentàgon sobre el qual va escriure la consideració següent: "si obres les cames fins a reduir la teva altura en una catorzena part, i si estens i aixeques els braços fins que els extrems dels dits arribin al nivell del cim del cap, veuràs que el centre dels membres estesos es troba en el melic, i que l'espai entre les cames formarà un triangle equilàter".

Leonardo, a part de tals especulacions geometrizants, no només va realitzar experiències empíriques de mesurament sinó també estudis anatòmics que incloïen la dissecció. Bàsicament va considerar que l'altura humana als tres anys d'edat era la meitat de l'altura adulta, la qual corresponia (idealment) a unes "3 braccias", uns 185 cm, o nou vegades la longitud de la mà o nou vegades la longitud vertical del rostre. Altres proporcions estudiades per Leonardo van ser:

Nas a la boca	= 1/7 rostre
Boca al mentó	= 1/4 rostre
Nas	= 1/3 rostre
Entrecella al mentó	= 2/3 rostre
Orella	= 1/3 rostre
Altura de l'home agenollat	= 3/4 altura total
Altura de l'home tombat	= 1/9 altura total
Altura total	= braça

Per la seva difusió i prestigi, les idees de Leonardo van prevaler fins al segle XIX sense que sorgissin altres estudis alternatius als cànons dels *Quaderns*. Durant el segle XIX van ser elaborats nous estudis sobre el tema, especialment per Fechner i Zeising.

Alternativament a la tradició vitruviana-renaixentista basada en la mesura, els estudis vuitcentistes van tendir a l'anàlisi de proporcions dinàmiques o irracionals, fent ús especial de les raons divines. Aquesta tendència va continuar en el segle XX sota la pauta de Schooling i Cook, sent Cook qui va estudiar en profunditat el tema de les proporcions clàssiques de la pintura.

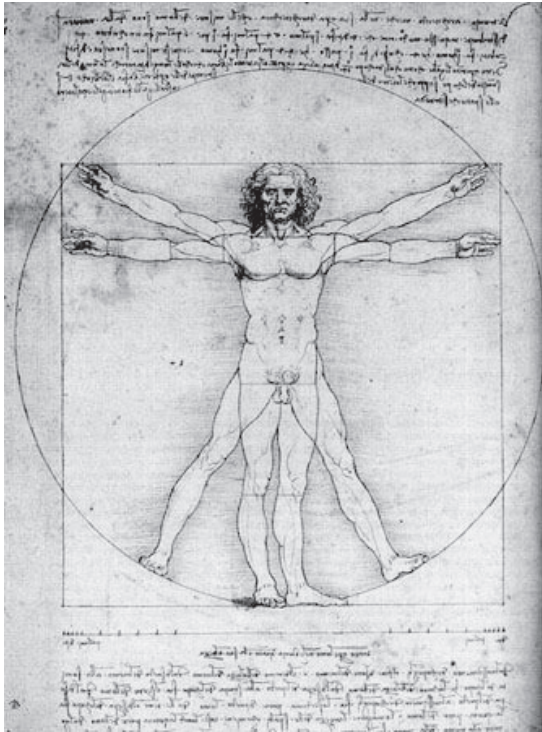


Fig. 2.4.4

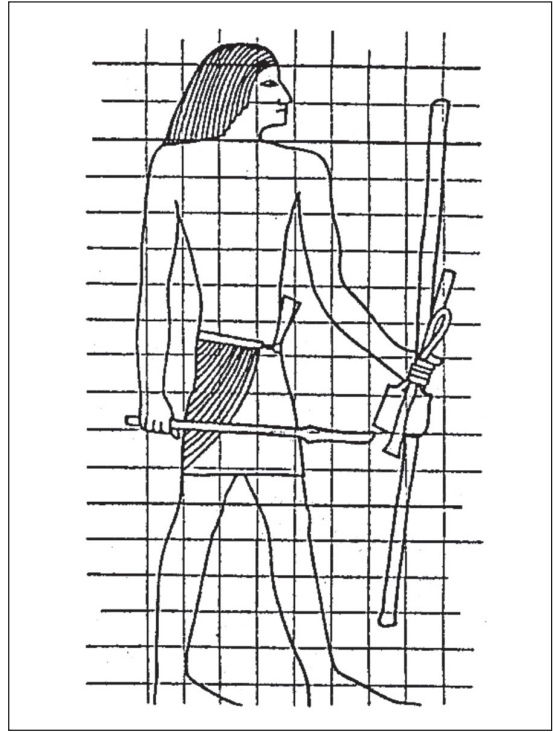


Fig. 2.4.5

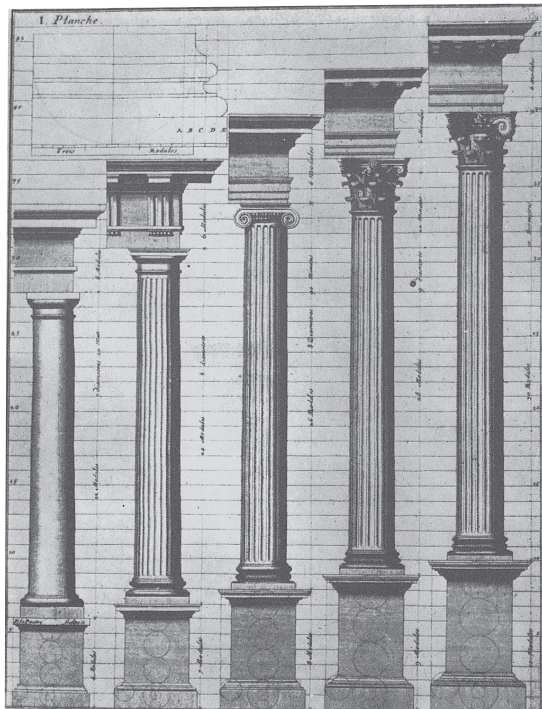


Fig. 2.4.6

Més enllà de l'especulació teòrica o històrica, va sorgir el problema de crear una arquitectura modular reproduïble en sèrie, cosa que va motivar Le Corbusier a estudiar el seu *Modulor* i amb ell la teoria de la proporció humana.

En les piràmides i temples egipcis hi ha traçats proporcionats d'una bellesa singular. En les formes triangulars de les piràmides hi ha gran part del misticisme cultural egipci sobre els nombres i les formes. En la distribució de les parts del temple, d'acord amb les parts de l'home (la planta del temple s'assimila a una figura humana), es pretén adaptar la modulació arquitectònica de l'espai sagrat a les dimensions de l'home.

És així com en l'arquitectura monumental el caràcter sagrat es deriva de les proporcions i del dimensionament. És freqüent trobar les proporcions del triangle sagrat egipci: $3 - 4 - 5$ ($5^2 = 3^2 + 4^2$) i fins i tot certes aproximacions del nombre d'or. (Altura de la Piràmide de Kheops = 148, 208, costat de la base = 232, 805 m: $148,2/232,8 = 2,1,273 \approx 2 \cdot \sqrt{\phi}$). En paraules de Spengler, l'arquitectura egípcia és un "tractat mut de geometria".

Amb l'aparició dels pitagòrics, la visió numerològica de l'Univers va arribar a un punt culminant. El "nombre", com a essència o símbol de totes les coses, era la clau del pitagorisme. L'estudi de relacions numèriques, i en particular de les proporcions, es corresponia amb l'establiment de relacions entre coses més abstractes com ara les emocions, els sentiments, etc. En el pitagorisme s'ha de buscar l'arrel de la relació entre proporció i bellesa, proporció geomètrica i proporció musical, simplicitat numèrica i harmonia generativa o ritme, etc. Aquesta mística del nombre marcaria, durant segles, les concepcions sobre la proporció en arquitectura. Els temples grecs i els ordres clàssics són expressions subtils, però evidents, de la perfecció i l'ordre retrobat per mitjà del nombre. La geometria euclidiana dóna als temples un llenguatge essencial. El Partenó, les ruïnes d'Agrigento i de Pesto i tota una sèrie d'arquitectures singulars van elevar a la categoria de perfecció el traçat arquitectònic. Els escrits de Plató i d'Aristòtil van influir notablement en el desenvolupament de les concepcions clàssiques de la proporció grega.

Globalment l'arquitectura i l'escultura a Grècia van utilitzar tant proporcions commensurables (per exemple, l'ordre jònic es va basar en les raons 1/1, 2/1, 3/1,...) com incommensurables (ϕ , $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, θ ,...). Però s'ha de tenir en compte que els edificis grecs eren dissenyats per a ser visualment perfectes, per la qual cosa les tècniques constructives amb il·lusions òptiques alteraven de fet les proporcions "ideals" dels elements per a contrarestar les deformacions visuals. Tots els estudis sobre l'art grec que es van desenvolupar en el segle XIX (Penrose, Cockerell, Pennethorne...) tendeixen a assenyalar la tendència grega *visual* cap a les proporcions estàtiques. En els *Deu llibres d'Arquitectura* del romà Vitruvi s'apunta també aquesta tendència, per mitjà d'exemples sobre proporcions en els ordres grecs i sobre les mesures dels temples.

L'arquitectura romana, creadora de volums monumentals i d'espais adequats a la seva funcionalitat, va deixar en certa manera el misticisme grec per a incorporar, en bona dosi, tecnicismes constructius. La basílica de Constantí, el Panteó, Sant Stefano Rotonda, el Coliseu, els ponts... són exponents de la claredat arquitectònica romana, de la seva força i de la seva funcionalitat.

En aquesta arquitectura romana s'inclouen tant les columnes, les llindes i els arquiteaus dels grecs, com les voltes de canó dels etruscs, les cúpules o els nous elements constructius de mig punt, la volta de ciment d'un sol bloc, etc. Seria en llocs com Santa Sofia on es podria parlar d'un eclecticisme arquitectònic, síntesi dels sistemes grec, romà i alexandrí. En paraules de Ghyka: "l'estructura de Santa Sofia és lògica i definitiva com un teorema de geometria alexandrí dibuixat sobre l'esfera de cristall de la cosmografia de Ptolomeu".



Fig. 2.4.7

Durant l'Edat mitjana les concepcions estètiques de la proporció van ser considerades per Sant Agustí, Boeci, Casiodor i Sant Tomàs d'Aquino ("proporció o harmonia, plenitud i claredat determinen la bellesa"). Aquestes concepcions s'aproparen més a les interpretacions cosmològiques i a les analogies musicals que al desenvolupament de la proporció com a element artístic. Les tendències constructives egípcies o les antropomètriques gregues van ser substituïdes per un estudi abstracte i esquemàtic de la proporció on no va faltar una abundant influència geometritzadora (és suficient recordar el plànol de Sant Gall, els dibuixos de Villard de Hounecourt en el segle XIII, les construccions de Roriczer o els estudis sobre polígons estrellats de Bradwardine).

Estudis del pare van der Laand i les tesis de Vila, Millán i d'altres han demostrat que el romànic català (especialment el temple de Sant Pau del Camp a Barcelona) és un cas típic de proporcions simples i de modulació sobre la base de la cana destre (dividida en 12 pams destres i equivalent a 2,81 m).

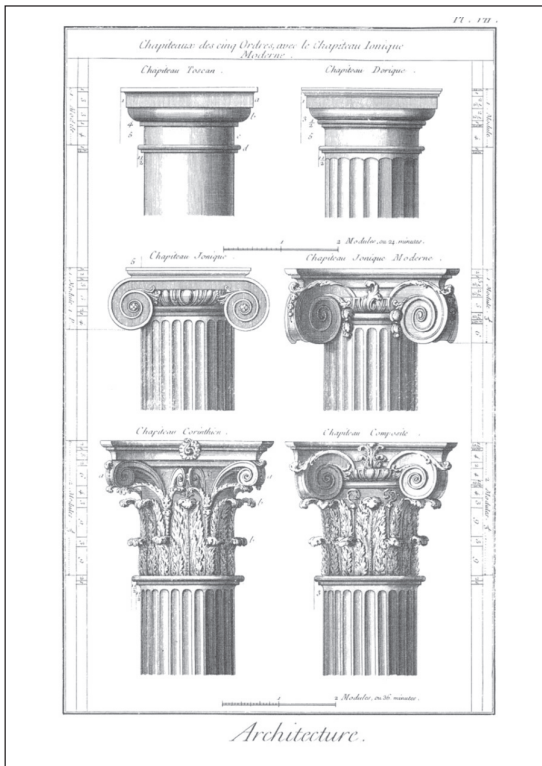


Fig. 2.4.8 Santa Maria del Mar

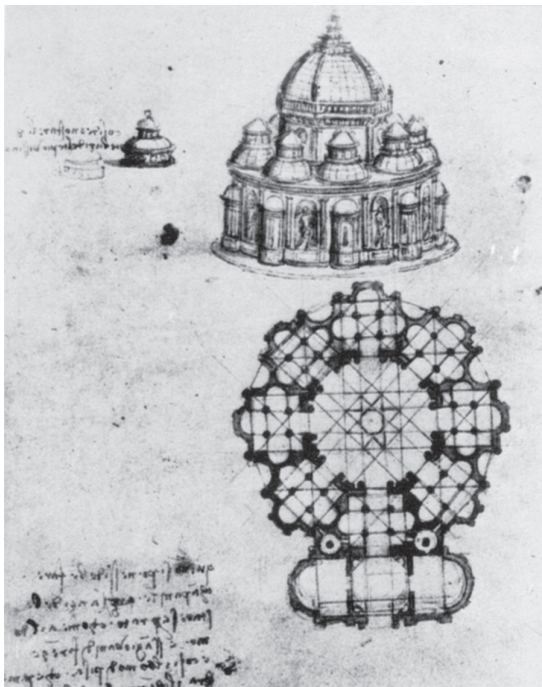


Fig. 2.4.9 Capella de Leonardo

La geometrització apareix amb tota plenitud en l'arquitectura gòtica. En aquest procés va ocupar un paper fonamental la traducció dels *Elements*, d'Euclides, feta en el segle XII, que aviat es va convertir en el text bàsic de formació geomètrica. Constructivament, la figura *vesica piscis* descrita en el Llibre I d'Euclides va adquirir aviat la notorietat de determinar els traçats reguladors de les construccions gòtiques. En opinió de Cesarià (s. XVI) les tres regles bàsiques dels traçats gòtics són: la fixació del llarg i de l'ample via la *vesica piscis*, la divisió del plànol en "obertures" iguals i la determinació de les altures amb triangles equilàters. La catedral de Milà pot ser un bon exemple de constructivisme gòtic i Santa Maria del Mar de Barcelona també. Geometria, simetria i proporció van trobar en les catedrals gòtiques un perfecte acoblament.

Va ser precisament la construcció (costosa i llarga) d'aquestes catedrals la que va donar lloc a la "massoneria" o gremi de constructors de catedrals. Els massons medievals, amb una jerarquització absoluta quant a poders i treballs, reunits en les seves "lògies" o tallers de treball, van desenvolupar sobre la base de l'esoterisme tot el saber constructiu medieval, reencarnant amb molta exactitud la tradició de les sectes pitagòriques gregues. Els "mestres" de la massoneria van convertir la geometria en "secret" bàsic de la construcció, signant fins i tot sobre pedra la realització de les seves obres mitjançant dibuixos poligonals i revisant de nou les idees místico-geomètriques del pentàgon i de l'estrella pentagonal de Pitàgores.

En el Renaixement, la proporció va deixar de ser el simple tecnicisme de la praxi constructiva medieval per a adquirir un rang superior: la proporció s'unia a la creença en la bellesa objectiva, s'establia l'analogia musical que generava la teoria harmoniosa dels traçats proporcionats, es redescobria la proporcionalitat geomètrica de la figura humana, s'imposava la relació microcosmos-macrocosmos per mitjà d'unes proporcions comunes, etc.; és a dir, la proporció renaixentista constitueix un neoplatonisme reestablert a partir de l'obra de Vitruvi. Els escrits de Vitruvi, al costat de les traduccions d'Euclides i Plató, van influir de forma decisiva en les concepcions de la proporció en el Renaixement. Sens dubte hauria estat més aclaridor i creatiu que s'hagués partit de zero en proporcions, tal com es va fer en perspectiva.

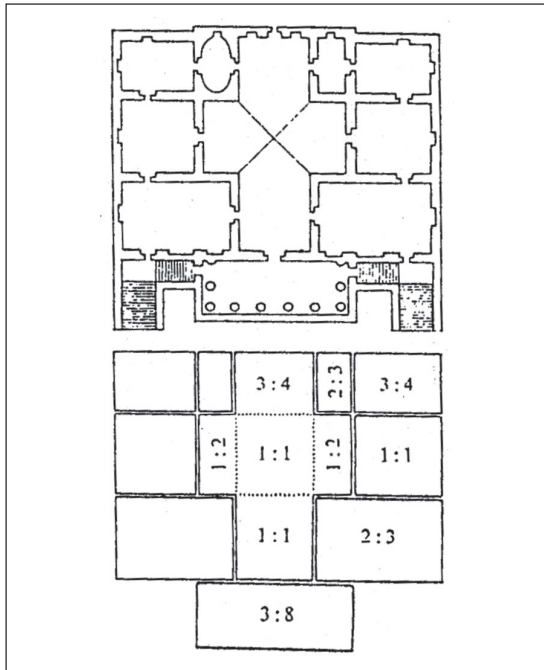


Fig. 2.4.10 Planta de Palladio

Leon Battista Alberti (1404-1472) va ser l'home clau del sistema renaixentista de proporcions. En les seves obres escrites, com ara *De Pictura* (1435) o *De re aedificatoria* (1450), Alberti redescobreix el cànon grec, i en els seus dissenys d'arquitectura religiosa (Santa Maria Novella de Florència, façana; Santa Maria Maggiore i Sant Teodoro a Roma; capella del Sant Sepulcre a Sant Pancraccio de Florència; restauració del pont de Sant Angelo de Roma; Santa Andrea de Màntua, etc.), Alberti va incorporar bona part dels traçats reguladors clàssics. Fidel creient en l'analogia musical, en les proporcions edificatòries, va fer estudis especials sobre proporcions de les habitacions: (1, $3/2$, $4/3$), (2, $9/4$, $16/9$), (3, $8/3$, 4). Alberti és, a més, un dels grans creadors de la perspectiva. En la línia d'Alberti, cal també ressaltar les aportacions de Leonardo da Vinci (1452-1519) i Albrecht Dürer (1471-1528) (Dürero) a la proporcionalitat humana i arquitectònica. El tractat *De Divina Proportione* (1498), de Luca Pacioli, va ampliar el sistema de proporció estàtica amb l'estudi de la proporció divina, estudi també considerat per Piero della Francesca i per Kepler.

Un ús constant de proporcions estàtiques pot apreciar-se en les obres d'Andrea Palladio (Vil·la Malcontenta, Vil·la Pisani, Vil·la Godi...) on la simetria i les proporcions simples es veuen incorporades al disseny d'edificis privats. Giorgi, Temanza i Vignola són seguidors de les proporcions simples.

L'èxit de la teoria de la proporció experimentat durant el Renaixement va donar pas al seu oblit absolut durant dos segles. Així, en el període que va del segle XVII al XIX, el concepte de proporció va ser absolutament canviant (vegeu: "The changing concept of proportion", de Wittkower a *Daedalus*, 1960) i, lluny d'existir uns usos coherents de sistemes proporcionats, només cal considerar exemples puntuals: certes obres de manierisme, esquemes geomètrics del jardí barroc, certes obres del neoclassicisme (Laugier, Brisieux), les obres d'Iñigo Jones seguint a Palladio, les proporcions constructives de Robert Morris, les obres de l'escola barroca de Treviso, etc.

Al llarg del segle XIX es produeix una extensa contribució teòrica sobre la proporció. Globalment pot dir-se que si bé el Renaixement va tendir a l'estudi de les proporcions estàtiques, seguint la tradició vitruviana, en el segle XIX es va voler redescobrir el sistema de proporcions gòtic i grec via l'estudi de les raons dinàmiques. En aquest estil d'idees van sobresortir els estudis teòrics de Billings, Robinson, Thiersch, Wölfflin, Pearce, Trustan Edwards, Gwilt, etc.; els estudis sobre el *vesica piscis* gòtic de Kerrich; els estudis poligonals de Cresy; les teories crítiques de Ruskin, etc. L'arquitecte Viollet le Duc va ser un prototip de la visió arquitectònica de la proporció; defensor de les "infinites variacions en l'aplicació de les lleis de la geometria", va partir del principi que "els arquitectes de l'antiguitat van seguir les fórmules aritmètiques en la composició dels seus ordres i els de l'Edat mitjana es van servir de triangles per a obtenir relacions harmòniques". Tant en proporcions com en simetria, Viollet le Duc va realitzar aportacions substancials.

Altres intents de retrobar les proporcions gregues amb el criteri estàtic van ser fets per Penrose i Cockerell.

Una contribució bàsica de la crítica del segle XIX va ser el fet de posar en crisi l'"analogia musical en proporcions", diferenciant el sentit auditiu del visual a partir de la manera d'observar, amb angles canviant, proporcions diverses i llums variables, el traçat arquitectònic. Es va desmitificar el sentit estètic *per-se* de

les proporcions, per a incloure un sentit més global i harmoniós del conjunt compositiu, i en definitiva, una base de subjectivisme estètic.

Cal assenyalar, no obstant això, que a part dels estudis sobre proporcions *dinàmiques* ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $1 + \sqrt{2}$, $\sqrt{5}/\sqrt{3}$, $2/\sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3}$,...) es va produir un redescobriment dels traçats de secció ϕ . Lucas va estudiar diversos tipus de successions de Fibonacci; Binet redescobrí el 1843 la relació entre ϕ i els termes de la successió de Fibonacci, relació ja vista per Daniel Bernouilli el 1832; Wundt va estudiar l'harmonia compositiva de ϕ respecte a la visió; Zeinig i Fechner van iniciar la branca de l'estètica experimental en realitzar experiències que possessin de manifest (estadísticament) el sentit de bellesa de les proporcions divines.

Durant el segle XX s'han produït contribucions notables, teòriques i pràctiques, a la teoria de la proporció. D'una banda un bon grup d'autors han desenvolupat importants tractats sobre proporcions: els estudis sobre Grècia i l'art gòtic de Lund i Moessel; els traçats exhaustius d'Hambidge sobre proporcions dinàmiques i estàtiques; els estudis dels ritmes, els ritus i l'estètica del nombre d'or portats a terme per Ghyka; les investigacions sobre esquadres d'H. Roberts i sobre sistemes de plànols ortogonals de Lutzens; i a més, les contribucions de Schooling, Cook, Speiser, Vantongerloo i, molt especialment, la de Wittkower. Però, simultàniament a aquest enriquitment teòric de la teoria general de la proporció, se n'han donat aplicacions rellevants en l'art i en l'arquitectura. L'escola cubista, dita inicialment Section d'Or, va contribuir notablement al desenvolupament de les tendències abstractes-geomètriconumèriques en l'art. Segons Villon, teòric de la Section d'Or, la primera fase del moviment cubista es va caracteritzar per l'estudi de les relacions, de les proporcions encara no revestides de forma.

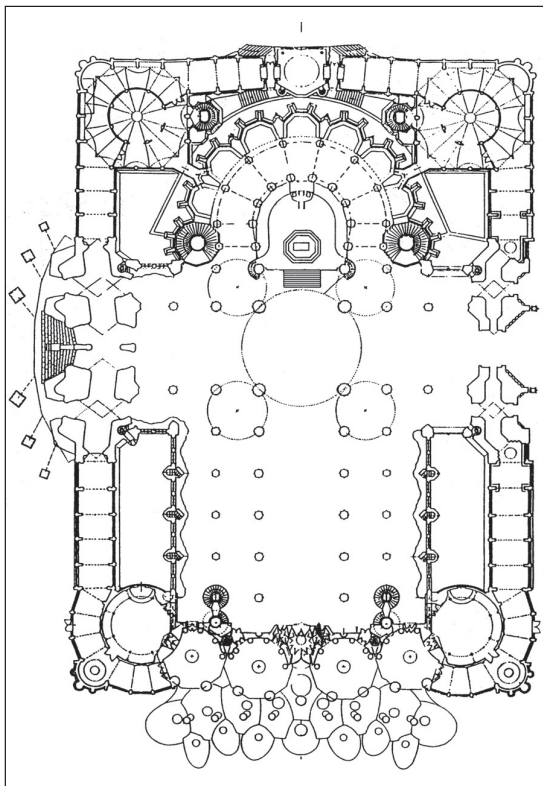


Fig. 2.4.11 Planta de la Sagrada Família

Un altre impuls important va ser donat per l'Esprit Nouveau, el grup Effort Moderne, el moviment De Stijl i la Bauhaus. Si bé els seus plantejaments teòrics van ser molt diferenciats, va existir un especial interès cap a la proporció i les tècniques dels traçats reguladors en arquitectura. Tant en els cursos sobre l'home impartits per Oscar Schlemmer, com en els cursos de Klee, a la Bauhaus, es recupera la tradició científica de l'arquitectura a través de la geometria, les sèries i les relacions numèriques. El rigor constructiu de Mondrian expressa vivament la importància donada pel grup De Stijl al mètode científic en el disseny.

Però sens dubte, el Modulor de Le Corbusier marca el punt culminant d'aquest renaixement de la proporció. Le Corbusier enllaça en el seu Modulor l'estat teòric de les sèries proporcionals, la reconsideració del dimensionament humà i el problema de la industrialització de la construcció a nivell internacional. La contribució de Le Corbusier marcaria el moviment modern de l'arquitectura, i trobaria seguidors entusiastes com A. Neumann (inventor del sistema ϕ , síntesi del sistema mètric decimal i del sistema proporcional auri) i com I. Ehrenkrautz (inventor del "Modular Number Pattern" (MNP)).

Avui l'interès pels problemes de coordinació modular ha superat al de la teoria de la proporció, però donades les tendències actuals de racionalització del procés projectual i constructiu, continua en molts casos l'ús general d'aquesta teoria.

Recentment, Alsina, Bonet, Faulí i Gómez han aconseguit aclarir per exemple les proporcions de la Sagrada Família, on Gaudí va usar un mòdul de 7,5 m i proporcions del tipus $1/4$, $1/3$, $1/2$, $2/3$, $3/4$, 1. El coneixement d'aquest sistema de proporcions facilita en l'actualitat la construcció d'aquesta genial obra geomètrica.

El mòdul L de Rafael Leoz

L'arquitecte Rafael Leoz (1921-1976) va dedicar la seva vida professional a l'estudi de l'habitatge social. De la mateixa manera que Le Corbusier cercava un "mòdul amidable" i un sistema de proporcions, Rafael Leoz va desenvolupar una exhaustiva recerca d'un mòdul geomètric, una forma, a partir de la qual generar amb elements prefabricats una gran varietat d'espais habitables. Així és com va descobrir el mòdul L format per quatre cubs (tres de verticals i un quart formant la L) verificant la seva potència generadora (Redes y Ritmos especiales, 1968).

Internet: <<http://descartes.cnice.mecd.es/Geoemtria/belleza/canonicordobes.htm>>

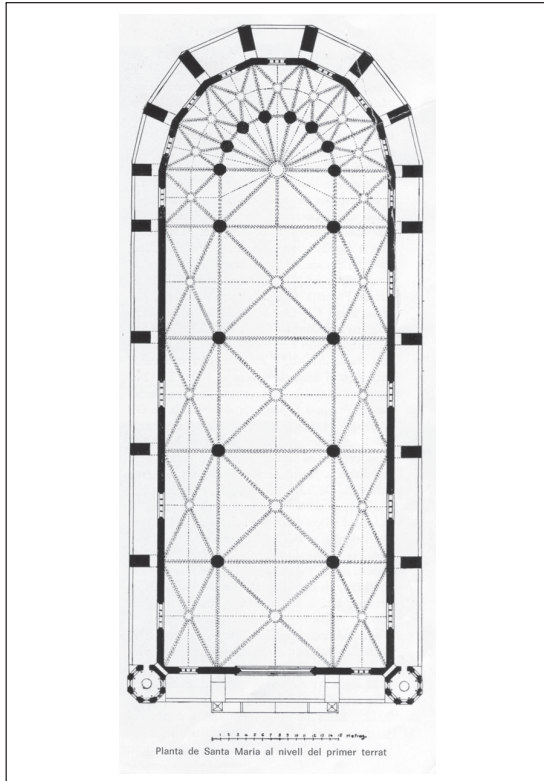


Fig. 2.4.12

Problema 1

Analitzeu les proporcions en la planta de Santa Maria del Mar (figura 2.4.12).

Problema 2

Analitzeu les proporcions en la façana del Palau de la Generalitat.

Problema 3

Feu una anàlisi de proporcions en l'Home de Vitruvi de Leonardo.

2.5 El modulator de Le Corbusier

El Modulor és una gamma de proporcions que fa l'inconvenient difícil i el que és bo fàcil

A. Einstein

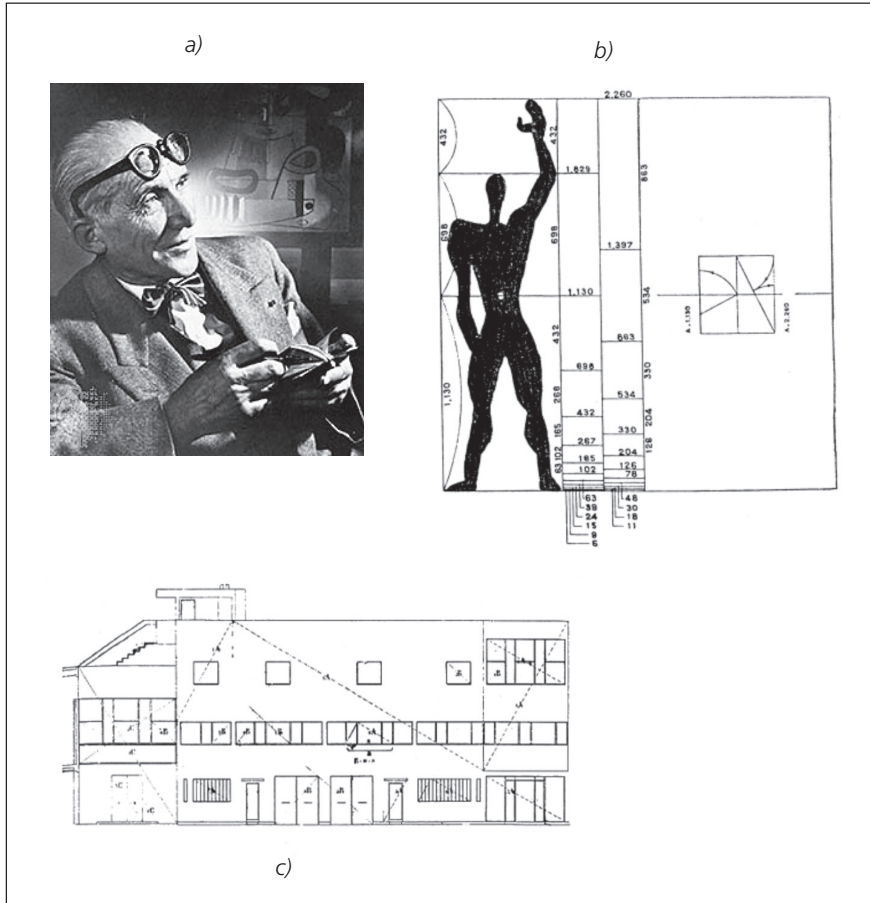


Fig. 2.5.1

L'aparició del Modulor de Le Corbusier (acabat d'escriure a París, el 25 de novembre de 1948) marca un punt culminant de la teoria de la proporció en el segle XX. En síntesi, *la proposta de disseny que fa Le Corbusier és l'establiment d'un mòdul arquitectònic que consideri alhora el dimensionament humà i la necessitat internacional de producció en sèrie*: una mesura universal, coordinable i humana, per a l'arquitectura (entesa aquesta en el més ampli sentit possible: construcció de cases, temples, mitjans de transport, utensilis, publicacions, etc). L'ambició de tal proposta induïx Le Corbusier a proposar per a l'arquitectura un sistema generatiu modular tan susceptible de crear l'harmonia arquitectònica com el sistema musical crea l'harmonia musical. Le Corbusier va realitzar treballs empírics i experimentals que poguessin conduir amb rigor al Modulor. Per a contemplar el dimensionament humà calia recuperar l'antiga base metrològica basada en les longituds antropomòrfiques (colzes, braços, palmells, peus...). Per a facilitar la producció en sèrie calia crear un mòdul geomètricament generatiu, repetible, subdivisible. Per a aconseguir la producció internacional calia arribar a un dimensionament modular que fes compatible el sistema mètric decimal europeu amb l'anglosaxó (cal remarcar que la proposta del Modulor apareix històricament en el moment clau de la reconstrucció europea just després de la Segona Guerra Mundial).

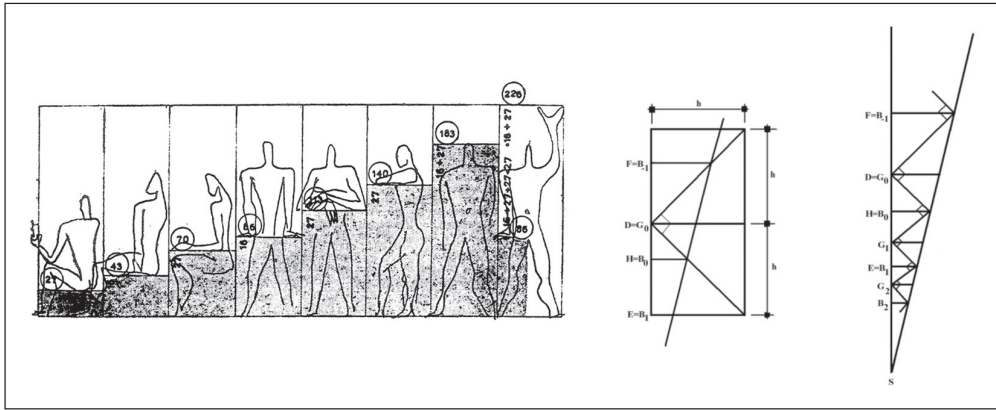


Fig. 2.5.2

Des del punt de vista geomètric, Le Corbusier va optar per interessar-se en els rectangles auris.

Així, a partir d'aquests rectangles (per superposició i subdivisió), Le Corbusier podia construir la malla fonamental del Modulor. Una vegada fixada la unitat d o altura de l'home va considerar les anomenades sèrie vermella i sèrie blava.

Sèrie vermella: $d, \phi d, \phi^2 d, \phi^3 d, \phi^4 d, \dots$

Sèrie blava: $2d, 2\phi d, 2\phi^2 d, 2\phi^3 d, 2\phi^4 d, \dots$

ambdues sèries eren de Fibonacci i la blava era el doble de la vermella.

Notem que en la malla fonamental apareixen quadrats, rectangles de proporció 2 i rectangles auris; i mirant, en cada columna o fila, dos rectangles adjacents de la mateixa sèrie (vermella o blava) es forma el següent de la sèrie per juxtaposició. Establert aquest entramat geomètric, quedava pendent concretar la unitat d que, amb arrel humana, tingués viabilitat metrològica.

Le Corbusier dóna definitivament a llum el seu Modulor quan fixa l'altura d de l'home estàndard en 183 cm o 6 peus:

$$6 \text{ peus anglesos} = 6 \times 30,48 \text{ cm} = 182,88 \text{ cm} \approx 183 \text{ cm}$$

Fixada aquesta altura era possible establir ràpidament una escala o subdivisió de la figura humana, tal com mostren els següents esquemes del Modulor, jugant amb raons del nombre d'or.

A través d'aquesta escala es pot donar una escala relativa a les posicions humanes més habituals, escala que marca molt estretament el nivell constructiu projectual, tant de l'arquitectura com dels elements supletoris incidents amb ella.

De fet, en analitzar totes les mesures introduïdes, es pot apreciar la coexistència de dues sèries numèriques concretades sobre la base de la mesura de 183 cm:

Sèrie vermella: 6, 5, 11, 16, 27, 43, 70, 113, 183, 296, ...

Sèrie blava: 12, 10, 22, 32, 54, 86, 140, 226, 366, ...

Aquestes sèries donen lloc a les malles corresponents.

Els anteriors valors sencers de les sèries vermella i blava constitueixen, per ser sèries de Fibonacci, bones aproximacions de les sèries vermella i blava ideals definides en funció de ϕ .

El mateix Le Corbusier va utilitzar el seu Modulator en multitud de projectes: seu de les Nacions Unides, a Nova York; la unitat d'habitatge, de Marsella, al Boulevard Michelet; l'oficina al carrer De Sèvres, de París; i un llarg etcètera en el qual no hem d'oblidar multitud d'objectes de disseny i normalitzacions tipogràfiques.

El 12 de maig de 1955, Le Corbusier acaba d'escriure el *Modulor 2* amb les paraules següents: "Perquè sóc músic en l'ànima, però de cap manera de fet. De nou el *Modulor 2* obre portes, es dirigeix a desconeguts, concedeix la paraula als usuaris..."

Le Corbusier havia aconseguit per mitjà de la proposta formal del seu Modulator, presentar una nova manera de concebre l'arquitectura i la seva projecció universal.

Problema 1

Analitzeu les proporcions en la façana de l'edifici de l'ONU de Le Corbusier a Nova York (figura 2.5.3).



Fig. 2.5.3

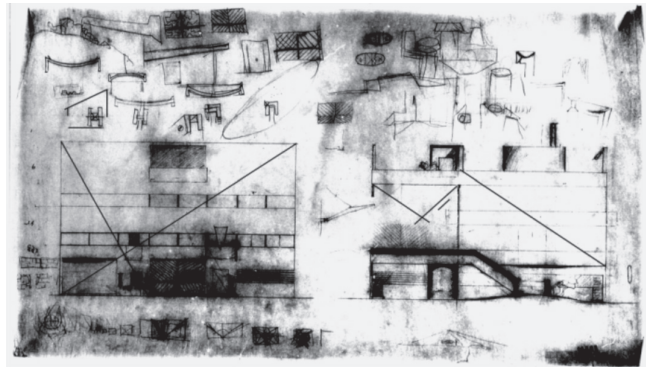


Fig. 2.5.4

Problema 2

Analitzeu les proporcions a les façanes Nord i Sud de la vil·la a Garches (França) obra de Le Corbusier del 1927.

Apèndix: la coordinació modular

El terme *mòdul* té dos sentits diferents: el d'*unitat de mesura* i el de *factor numèric*. El mòdul com a unitat de mesura ja ha aparegut en aquesta lliçó: el radi de la columna helènica, el peu humà o el rostre, el modulator d'1,83 m o 6 peus...; en tots els casos la unitat o mòdul és la base per a compondre de forma rítmica, generant proporcions, fixant dimensions. Com a factor numèric, el mòdul permet correlacionar els termes d'una sèrie amb els valors d'una gamma de dimensions, és a dir, el mòdul és el màxim comú denominador de les dimensions coordinades i alhora és la base per a generar tals dimensions.

El problema de la *coordinació modular* va sorgir amb motiu de la producció industrial internacional d'elements arquitectònics, buscant la fixació d'uns mòduls que poguessin garantir, alhora, factors tan contraposats com: màxim rendiment econòmic mitjançant la producció en sèrie, màxima facilitat d'acoblements, independència dels sistemes metrològics locals... i, per sobre de tot, modulació susceptible de creativitat.

En l'obra *The Evolving house*, d'Alfred Farwell Bemis (1930), s'introdueix per primera vegada el plantejament de tal problema i s'apunta una solució: *el mòdul cúbic de 4 polzades*. Posteriorment, gran quantitat d'associacions han tractat d'enfocar i resoldre aquest problema de modulació:

- 1) ASA (American Standards Association, OSA)
- 2) AFNOR (Associació Francesa per a la Normalització, França)
- 3) ISO (International Standards Organization, Anglaterra)
- 4) BSI (British Standard Institution, Anglaterra)
- 5) ONI (Ente Nazionale di Unificazione, Itàlia)

etcètera.

A partir de 1950, es va intentar crear una organització que dugués a l'establiment d'una coordinació modular constructiva internacional. A aquest efecte l'AIP (Agenzia Europea per la Produttività) va procedir a organitzar les primeres gestions i va aconseguir la participació de tretze països: Alemanya, Àustria, Bèlgica, Dinamarca, França, Grècia, Itàlia, Noruega, Holanda, Gran Bretanya, Suècia, a més d'USA i Canadà. Actuant com a secretària tècnica la BSI es van anar elaborant informes, síntesis d'aquests i en una segona fase aplicacions reals a tals principis generals sobre modulació, submodulació, adaptabilitat, etc.

El mòdul internacionalment adoptat és de 4 polzades per als països amb sistema anglès de mesures i és de 100 mil·límetres en els països amb sistema mètric decimal. Notem que així 10 mòduls corresponen a 1 metre i a 3 peus 4 polzades. Per ells les mesures modulares corresponen al conjunt

$$M = \{100 \cdot x \text{ mm}/x \in \mathbb{N}\} = \{4 \cdot x \text{ polzades}/x \in \mathbb{N}\}$$

denominat *conjunt modular*.

En la modulació arquitectònica pot usar-se el mòdul de 100 mm per a detalls o elements menors i el múltiple convenient d'aquest (amplitud de finestra o porta, rajola, etc.) per a la modulació de major escala. Diverses solucions han estat analitzades per a la fixació de tal mòdul estructural, apuntant la majoria d'estudis cap a criteris antropomòrfics: modulació basada en el dimensionament humà estàndard. El Modulator de Le Corbusier constitueix un bon exemple, el tatami o matalàs japonès és la base de la modulació clàssica japonesa... La il·lustració següent sintetitza una sèrie de mesures proposades en l'obra de Bussalt.

Tècnicament, una vegada acceptat el mòdul o mòduls bàsics es pot procedir a realitzar les corresponents *trames o reticles modulars* sobre les quals es van modulant els elements, creant espais.

Superat aquest problema apareix, a nivell pràctic i especialment productiu, el problema de les *sèries modulars*, és a dir, de tots els possibles múltiples i submúltiples del mòdul (¡que són infinits!), i de seleccionar-ne aquells més convenients tant per a la modulació usual com per a la producció en sèrie de les peces. Alguns autors fan la distinció entre el "mòdul amidat", que és la quantitat acordada com a unitat de modulació, i els "mòduls objectes" que són les peces efectivament construïdes en la sèrie modular.

Les sèries modulars més usuals (estudiades per l'European Productivity Agency i la British Building Research Station) s'han basat en les progressions geomètriques o en successions mixtes:

- a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...
- b) 1, 3, 9, 27, 81, 243, ...
- c) $\{2^i 3^j 5^k / i, j \in \mathbb{N}, k \in \{0, 1\}\}$
...etc.

Més problemes de teoria de la proporció

1. A un rectangle de costats a i b amb $a \leq b$ s'hi posa un marc d'amplada x . Quan serà possible que la proporció del rectangle emmarcat sigui igual a la del rectangle de partida?
2. Donada una el·lipse de centre l'origen i de semieixos a i b , $b < a$, estudeu quan la seva àrea és igual a l'àrea de la corona determinada entre els cercles de centre l'origen i radis b i a , respectivament.
3. Si en un rectangle $a \times b$ amb $a < b$, es retalla el quadrat de costat a i del rectangle que queda es retalla el quadrat de costat $b - a$ queda un petit rectangle. Determineu-ne la proporció. Quan tindrà la mateixa proporció que el rectangle inicial?
4. Donat un octàgon regular estudeu les raons entre les diagonals des d'un vèrtex i el costat de l'octàgon.
5. Donada la successió de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., F_n , ... verifiqueu gràficament que

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

6. Si $c < b < a$ són les longituds de les tres arestes d'una caixa $a \times b \times c$, demostreu que la caixa $(a - c) \times b \times c$ és homotètica a la de partida si, i nomès si, $a = P^2c$ i $b = Pc$, on P és el nombre plàstic.
7. El peu de l'altura sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle divideix la hipotenusa en dos segments. Si l'altura coincideix amb la diferència d'aquests dos segments, calculeu la proporció entre els dos catets del triangle rectangle.
8. Sabent que tots els fulls de la família DIN A tenen proporció $\sqrt{2}$, que es passa d'un full a la mida immediatament menor dividint per la meitat i que el full DIN A0 té una superfície d'1 m², calculeu les mides, en mil·límetres, dels DIN A0, A1, A2, A3, A4 i A5.
9. Donat un pentàgon regular, considereu les seves cinc diagonals. Aquestes formen una estrella de cinc puntes i un segon pentàgon regular al seu interior. Calculeu la proporció entre els costats dels dos pentàgons regulars.
10. Donat un el·lipsoide de revolució amb semieixos a , b amb $a < b$ estudeu quan el seu volum és igual al volum que queda entre l'esfera de radi b que conté la figura i l'esfera de radi a continguda en ella.

Geometria vectorial

El llenguatge dels vectors i les matrius permet fer una modelització vectorial del pla i de l'espai que possibilita descripcions precises algebraiques de figures i transformacions, i càlculs numèrics efectius de problemes geomètrics. A través d'aquest llenguatge l'aritmètica, l'àlgebra i la geometria es fonen resultant una interessant teoria. Però la potència del llenguatge vectorial va molt més enllà de la simple descripció bi o tri dimensional. El càlcul d'estructures, i en particular l'actual teoria dels elements finits, usa vectors i matrius de dimensions grans, i resol sistemes lineals amb moltíssimes incògnites.

El càlcul tradicional d'estructures es basa en la mecànica dels medis continus (elasticitat i plasticitat) i la resistència de materials. Hom parla d'estudiar l'elasticitat per referir-se a les tensions i deformacions d'un sòlid (biga, barra, pòrtic, marc...) i s'estudien les equacions d'equilibri, les de compatibilitat de deformacions, les constitutives, etc. Sovint el càlcul és *lineal* suposant que les reaccions, esforços, tensions, deformacions, etc. són *proporcionals* a les accions. Vectors i matrius són el llenguatge adequat per a representar la majoria de forces, esforços, deformacions, etc.

Així, àdhuc perdent-se la representació ingènua dels vectors i la visualització de les transformacions, es pot treballar amb grans vectors i matrius la missió formal de les quals serà guardar enormes quantitats ordenades de variables, estudiar les seves dependències i resoldre problemes complexos.

3.1 Espais vectorials

Sigui \mathbb{R} el cos numèric dels reals.

Definició. Un conjunt E admet estructura d'*espai vectorial sobre el cos* \mathbb{R} si es satisfan les dues condicions següents:

- a) Existeix una operació interna $+$ (dita *suma vectorial*) entre els elements de E (dits *vectors*) que compleix les propietats:

$$a1) \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z},$$

$$a2) \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x},$$

$$a3) \vec{x} + \vec{0} = \vec{x},$$

$$a4) \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}.$$

és a dir, tal que $(E, +)$ té estructura de grup abelià;

- b) Existeix una aplicació de $\mathbb{R} \times E$ en E que, a tot *escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ i tot vector $\vec{x} \in E$, assigna el vector $\lambda \cdot \vec{x} \in E$, de forma que:

$$b1) \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y},$$

$$b2) (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x},$$

$$b3) (\lambda\mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}),$$

$$b4) 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

Exemple. En $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ es defineixen:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

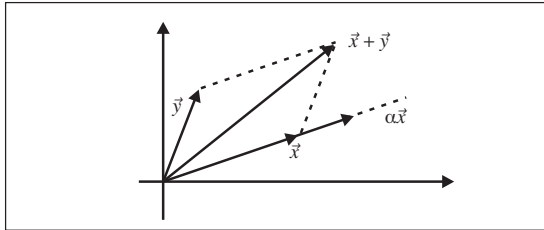


Fig. 3.1.1

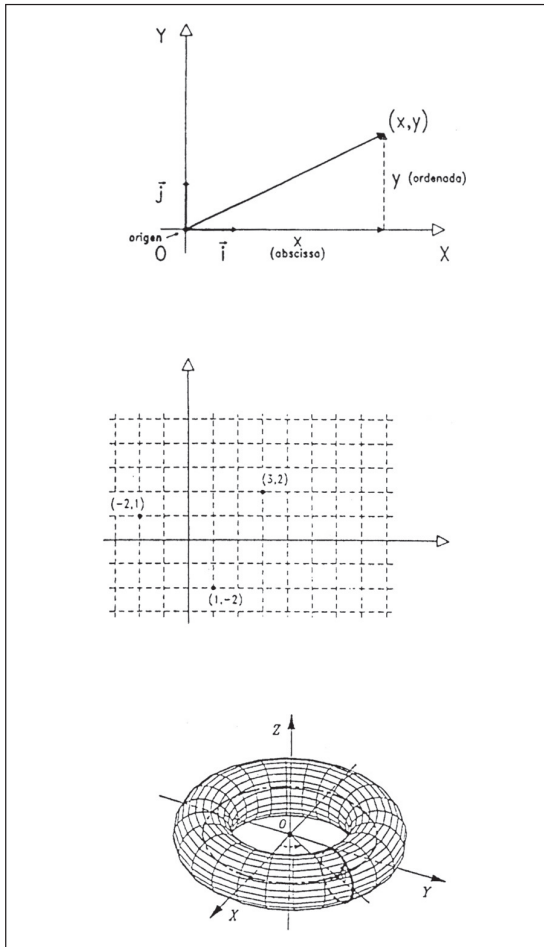


Fig. 3.1.2

llavors \mathbb{R}^n , amb tals suma i producte (realitzats component a component) és un espai vectorial sobre \mathbb{R} . A nivell gràfic, cada element (x_1, x_2, \dots, x_n) s'identifica amb el vector, fletxa o punt de \mathbb{R}^n i les coordenades cartesianes en una referència ortogonal donada són les components (x_1, x_2, \dots, x_n) . Amb aquesta representació, la suma de vectors equival a la *suma del paral·lelogram*: la suma $\vec{x} + \vec{y}$ correspon al vector diagonal del paral·lelogram de costats \vec{x}, \vec{y} ; el producte per un escalar equival a la dilatació o contracció del mòdul del vector \vec{x} (si $\lambda > 0$ no hi ha canvi de sentit, si $\lambda < 0$ sí que n'hi ha).

Teorema. Si E és un espai vectorial sobre el cos \mathbb{R} , qualssevol que siguin \vec{x}, \vec{y} de E i λ, μ de \mathbb{R} es verifica:

$$i) \vec{0} = 0 \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{0}$$

$$ii) (-\lambda) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (-\vec{x}) = -(\lambda \cdot \vec{x})$$

$$iii) (\lambda - \mu) \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot \vec{x}) - (\mu \cdot \vec{x}), \lambda \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{y}$$

$$iv) \lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ implica } \lambda = 0 \text{ o } \vec{x} = \vec{0}$$

Demostració. Provarem cada apartat per separat:

i) És $0 \cdot \vec{x} = (0 + 0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$ i, resultant en ambdós costats $0 \cdot \vec{x}$, resulta $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Anàlogament $\lambda \cdot \vec{0} = \lambda \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = \lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0}$, implica $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

ii) Com que $(-\lambda) \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{x} = (-\lambda + \lambda) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$, obtenim $(-\lambda) \cdot \vec{x} = -(\lambda \cdot \vec{x})$. Anàlogament surt $\lambda \cdot (-\vec{x}) = (-\lambda) \cdot \vec{x}$.

iii) Aquesta propietat se segueix de ii) i b1), b2).

iv) Si $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ i $\lambda \neq 0$, llavors, en existir $1/\lambda$, resulta

$$\vec{0} = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{0} = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \left(\frac{1}{\lambda} \lambda\right) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

En el que segueix $\lambda \cdot \vec{x}$ s'escriurà també mitjançant la simple adjacència $\lambda\vec{x}$, sense necessitat d'usar el punt.

Definició. Un subconjunt no buit F de E es diu *subespai vectorial* si compleix les dues condicions següents:

- a) Si $\vec{x}, \vec{y} \in F$ llavors $\vec{x} + \vec{y} \in F$;
- b) Si $\vec{x} \in F$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ llavors $\lambda\vec{x} \in F$.

Ambdues condicions a) i b) poden sintetitzar-se en una única expressió:

- c) Si $\vec{x}, \vec{y} \in F$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ llavors $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F$.

En qualsevol espai vectorial E existeixen els *subespais trivials* $\vec{0}$ i el mateix E ; qualsevol altre subespai F es denomina *propi*.

Exemple. El subconjunt $F = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) | x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ és un subespai vectorial propi de \mathbb{R}^n .

Estudiarem ara operacions entre subespais vectorials.

Teorema. Si $(F_i)_{i \in \mathbb{I}}$ és una família qualsevol (no buida) de subespais vectorials d'un espai E llavors la seva intersecció $F = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} F_i$ és un subespai vectorial.

Demostració. És $\vec{0} \in F$ i, per tant, és $F \neq \emptyset$. Si $\vec{x}, \vec{y} \in F$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ llavors $\vec{x}, \vec{y} \in F_i$, per a tot $i \in \mathbb{I}$, i, per ser cada F_i subespai, serà $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F_i$, qualsevol que sigui $i \in \mathbb{I}$, és a dir, $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F$.

Exemple. En \mathbb{R}^3 siguin $F_1 = \{(x, y, 2x + 3y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ i $F_2 = \{(x, y, x + y) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Ambdós subconjunts són subespais i és $F_1 \cap F_2 = \{(-2t, t, -t) | t \in \mathbb{R}\}$.

Exemple. En \mathbb{R}^2 siguin $F_1 = \{(x, 2x) | x \in \mathbb{R}\}$ i $F_2 = \{(x, 3x) | x \in \mathbb{R}\}$. La intersecció és $F_1 \cap F_2 = \vec{0}$.

Aquest últim exemple mostra que la reunió conjuntista $F_1 \cup F_2$ de dos subespais no és, en general, un subespai perquè $(1, 2) \in F_1 \subset F_1 \cup F_2$, $(1, 3) \in F_2 \subset F_1 \cup F_2$ i no obstant això $(1, 2) + (1, 3) = (2, 5) \notin F_1 \cup F_2$. Per això es dona la següent

Definició. La suma $F_1 + F_2$ de dos subespais és

$$F_1 + F_2 = \{\vec{x} + \vec{y} | \vec{x} \in F_1, \vec{y} \in F_2\}$$

És immediat verificar que $F_1 + F_2$ és un subespai vectorial, que conté $F_1 \cup F_2$ i que és el més petit dels que compleixen tal propietat; així la suma és el mínim subespai que conté, alhora, F_1 i F_2 .

Exemple. Siguin $F_1 = \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ i $F_2 = \{(y, y, 2y) | y \in \mathbb{R}\}$. Llavors

$$F_1 + F_2 = \{(x, 0, 0) + (y, y, 2y) | x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x + y, y, 2y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

A nivell de representació gràfica els subespais de \mathbb{R}^3 són només $\vec{0}$ i \mathbb{R} . En \mathbb{R}^2 existeixen només com subespais propis les rectes que passen per l'origen. En \mathbb{R}^3 existeixen les rectes i els plans per l'origen.

A nivell d'intersecció, aquesta resulta pròpia en \mathbb{R}^3 quan es tracta de dos plans que es tallen en una recta que passa per l'origen. En \mathbb{R}^3 la suma d'una recta i un pla exterior a ella (ambdós per l'origen) dona tot \mathbb{R}^3 ; en canvi, la suma de dues rectes diferents és el pla que les conté. En geometria afí, totes les altres rectes i plans de \mathbb{R}^3 s'obtidran sempre mitjançant translacions adequades dels corresponents subespais paral·lels que passen per l'origen.

Definició. Donat un espai vectorial E sobre el cos \mathbb{R} es denomina *combinació lineal* dels vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in E$ qualsevol expressió del tipus

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$$

on $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Definició. Fixats $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in E$, l'*envolvent lineal* o espai vectorial generat pels n vectors és el conjunt $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n]$ de totes les combinacions lineals d'aquests, és a dir,

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n] = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

És immediat comprovar que $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n]$ és sempre un subespai vectorial i que de fet és el mínim subespai que conté els vectors donats $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Definició. Els vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ *no nuls* es diuen *linealment independents* si $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ implica necessàriament $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Si aquesta implicació no és certa, els vectors es diuen *linealment dependents*. Quan $E = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n]$ llavors els vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ es diuen *generadors*. Una base de E és qualsevol família de generadors linealment independents.

Que els vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ siguin linealment dependents vol dir que és possible trobar escalars $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ no tots nuls i tals que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$, però això implica, si per exemple $\lambda_1 \neq 0$, que sigui $\vec{v}_1 = -\frac{1}{\lambda_1} (\lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n)$, és a dir, el vector de coeficient no nul pot posar-se com a combinació lineal dels altres. Així, la independència assegura que cap vector de la família donada pot expressar-se com combinació lineal dels altres. Notem que els vectors són generadors només quan *qualsevol* vector de l'espai és combinació lineal d'ells. La generació i la independència són criteris no necessàriament coincidents; per això, quan ambdós es donen alhora s'introdueix el nom especial de base.

Exemple. Els vectors $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(5, 2)$ són generadors de \mathbb{R}^2 , però no independents. En efecte, $(5, 2) = 2(2, 1) + 1(1, 0)$ i se segueix la dependència. Són generadors, perquè tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pot expressar-se en la forma $(x, y) = (x - 2y)(1, 0) + y(2, 1) + 0(5, 2)$.

Exemple. Els vectors $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$ són independents, però no generadors de \mathbb{R}^3 . En efecte, si és $\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ resulta $(\lambda_1, \lambda_2, 0) = (0, 0, 0)$ i se segueix $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. No generen \mathbb{R}^3 perquè donat $(0, 0, 1)$ no existeixen valors $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $(0, 0, 1) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0)$.

Notem que, per definició, el vector $\vec{0}$ no pot ser independent de cap altre vector i per això no pot formar part de cap base. Un punt clau referent a les bases és el següent:

Teorema. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ és una base de E , qualsevol vector $\vec{x} \in E$ s'expressa en forma única com una combinació lineal dels vectors de la base: $\vec{x} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$. Als coeficients únics x_1, x_2, \dots, x_n se'ls denomina les *coordenades* de \vec{x} en la base donada.

Demostració. Per ser $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ generadors és $\vec{x} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$ per a certs $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Els coeficients són únics, perquè en el cas d'expressar-se \vec{x} mitjançant altra combinació lineal $\vec{x} = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \dots + y_n \vec{v}_n$ resultaria:

$$\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = (x_1 - y_1) \vec{v}_1 + (x_2 - y_2) \vec{v}_2 + \dots + (x_n - y_n) \vec{v}_n$$

i per la independència lineal de la base seria $x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$, és a dir, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

La pregunta que surgeix immediatament és si poden existir bases amb distint nombre d'elements en un mateix espai. La resposta ve donada en el següent resultat de fàcil comprovació:

Teorema. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ i $\vec{o}_1, \vec{o}_2, \dots, \vec{o}_m$ són bases d'un espai vectorial E , és $n = m$.

Gràcies a aquest teorema té sentit donar la següent

Definició. La *dimensió* d'un espai vectorial E sobre un cos \mathbb{R} és el nombre d'elements d'una base qualsevol d' E (i s'escriu $\dim E$). Per conveni es defineix $\dim \vec{0} = 0$.

Si coneixem la dimensió d'un espai vectorial, per veure si una col·lecció de vectors formen base només cal verificar una de les dues condicions:

Teorema. Sigui E un espai vectorial de $\dim n$ i $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in E$

- a) Si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ generen E , llavors són base d' E ;
- b) Si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ són linealment independents, llavors són base d' E ;

Problema 1

Demostreu gràficament que els únics subespais propis de \mathbb{R}^2 són les rectes que passen per l'origen.

Problema 2

Quins dels següents subconjunts de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 són subespais vectorials? Doneu la dimensió dels que ho siguin:

$$A = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$B = [(1, 1, 2), (1, a, -1)] \text{ on } a \in \mathbb{R}$$

$$C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, xy = 1\}$$

$$D = \{(x + y, 2x + z, y) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Problema 3

Si \vec{v}_1, \vec{v}_2 són base de \mathbb{R}^2 i $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{u}_2 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \in E$

- a) Demostreu que \vec{u}_1, \vec{u}_2 són base de \mathbb{R}^2
- b) Doneu les coordenades de \vec{u}_1 en la base \vec{u}_1, \vec{u}_2 i en la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 .
- c) Doneu les coordenades del vector $\vec{w} = 5\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ en la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 i en la base \vec{u}_1, \vec{u}_2 .

Problema 4

Per quin valor de a el vector $(a, 1, -2)$ pertany a $F = [(1, 1, 0), (1, 0, -1)]$?

3.2 Matrius i àlgebra matricial

Una *matriu* de nombres de \mathbb{R} amb n files i m columnes (breument, una *matriu* $n \times m$) és una expressió del tipus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

en la qual figuren $n \cdot m$ nombres de \mathbb{R} col·locats ordenadament en n files i en m columnes. Noti's que a_{ij} significa l'element situat en la fila i -èsima i en la columna j -èsima. Sempre que n i m siguin fixos i ens vulguem referir a una matriu arbitrària $n \times m$ com l'anterior, escriurem simplement $A = (a_{ij})$. Per descomptat dues matrius són *iguals* si tots els seus elements són idèntics: $(a_{ij}) = (b_{ij})$ si $a_{ij} = b_{ij}$ per a tot i, j .

Matrius i estructures

El mètode dels elements finits en la mecànica d'estructures basa el seu èxit en el potencial computacional de càlcul que permet "discretitzar" en parts petites estructures complexes. El llenguatge de *vectors* permet descriure les forces que actuen en tots els nusos, els desplaçaments nodals, les forces nodals necessàries per a l'equilibri, etc.

El llenguatge de matrius s'usa per expressar les tensions, o representar la rigidesa dels elements, etc. Ja no són vectors o matrius 2×2 o 3×3 sinó vectors o matrius amb molts elements segons la complexitat de forces actuant, tensions, graus de llibertat, etc.

Una matriu catalana de 900×900

Un tema rellevant a la Catalunya actual són els nombrosos desplaçaments diaris entre poblacions per motius de feina. Aquest tema té grans implicacions per a la xarxa viària, per a les polítiques de serveis, localització d'espais públics, etc. Per això s'estudien 900 poblacions i es disposa d'una estructura matricial (a_{ij}) de 900×900 on a_{ij} indica els desplaçaments des de la població i a la j . Òbviament les matrius tenen molts zeros però també sorpreses com ara casos on $a_{ij} = a_{ji}$. A partir d'aquesta informació complexa es deriven moltes anàlisis de gran interès local i per a la planificació.

Definició. Donades dues matrius $n \times m$, (a_{ij}) i (b_{ij}) , anomenarem *matriu suma* a l'obtinguda sumant els elements amb índexs iguals:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, anomenarem *matriu producte de λ* per (a_{ij}) a la matriu obtinguda multiplicant per λ tots els elements a_{ij} :

$$\lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

Ambdues definicions s'escriuen en forma explícita com segueix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Llavors el conjunt de les matrius $n \times m$, que denotarem per $M_{n \times m}$ amb la suma i producte que hem definit, és un espai vectorial sobre \mathbb{R} .

Aquestes operacions són anàlogues a les introduïdes amb vectors de \mathbb{R}^n i, de fet, són extensió d'aquelles, ja que tot element de \mathbb{R}^n pot considerar-se com una matriu $1 \times n$.

Observi's que tota matriu $(a_{ij}) \in M_{n \times m}$ admet la descomposició lineal següent:

$$(a_{ij}) = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nm} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

on cadascun dels sumands resulta de multiplicar un dels coeficients a_{ij} per la matriu que té "tot zeros, excepte un 1 en el lloc (i,j) ".

D'on deduïm que aquestes matrius formen una base de l'espai vectorial $M_{n \times m}$ i, per tant, la dimensió d'aquest espai és $n \cdot m$.

Establirem a continuació un producte matricial.

Definició. Donades dues matrius $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$ i $B = (b_{ij}) \in M_{r \times m}$, la matriu $C = (c_{ki}) \in M_{r \times n}$ obtinguda mitjançant la regla de càlcul:

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^m b_{kj} \cdot a_{ji}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

es diu la *matriu producte* de la A per la B i, abreujadament, s'escriu $C = B \cdot A$.

Així, cada element c_{ki} de la matriu producte $B \cdot A$ s'obté en sumar els productes dels elements de la fila k -èsima de B pels elements de la columna i -èsima de A . Ressaltem que aquesta regla de càlcul només té sentit quan el nombre de columnes de la primera matriu multiplicand B és igual al nombre de files de la segona matriu del producte $B \cdot A$.

El producte de matrius $n \times n$ és associatiu, té per element unitat la *matriu identitat*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

i és distributiu respecte a la suma.

Cal assenyalar immediatament que el producte definit no és, en general, commutatiu i admet divisors de zero. Observeu l'exemple següent:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, trobeu $A + C$,

$A \cdot B$ i $\sqrt{2}A + \sqrt{3}C$. Les operacions esmentades són:

$$A + C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 3-1 & 1+0 \\ 4+2 & 6+3 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{2}A + \sqrt{3}C = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} - \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} & 6\sqrt{2} + 3\sqrt{3} & 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Bits i matrius

Les imatges digitals estan guanyant terreny. Ja sigui usant una càmera digital que "retrata" una escena o un escàner que "digitalitza" una determinada imatge ja existent en un altre format, s'obté una imatge digital que es codifica en sistema binari 0, 1, és a dir, en base 2.

Un BIT (binary digit) és la unitat d'informació més petita, és quan es dona un 0 o un 1. Els múltiples del bit són:

Nibble o quartet	4 bits
Byte o octet	8 bits
Kilobyte (Kb)	1024 bits
Megabyte (Mb)	1024 Kb
Gigabyte (Gb)	1024 Mb
Terabyte (Tb)	1024 Gb

Les imatges esdevenen grans "matrius" de bits!

Problema 1

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu AB i B^{-1} .

Problema 2

Demostreu que les matrius $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ són una base de $M_{2 \times 2}$.

Problema 3

Si A és una matriu $n \times n$, quan és $\det A = \det(-A)$?

Problema 4

Calculeu el determinant d'una matriu 8×8 que té com a molt 7 elements diferents de zero.

3.3 Aplicacions lineals

Començarem amb la següent:

Definició. Les *aplicacions o transformacions lineals* són aplicacions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que verifiquen la propietat

$$f(a\vec{x} + b\vec{y}) = af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) \quad (*)$$

per a tot \vec{x}, \vec{y} de \mathbb{R}^n i per a tots els possibles escalars $a, b \in \mathbb{R}$. Quan $n = m$ a l'aplicació lineal se l'anomena endomorfisme. Fruit d'aquesta definició resulta que $f(\vec{0}) = \vec{0}$, $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$. Com sigui que el conjunt:

$$P(\vec{x}, \vec{y}) = \{a\vec{x} + b\vec{y} \mid 0 \leq a, b \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

és un paral·lelogram (degenerat a un segment o al vector $\vec{0}$ en algun cas) per la condició (*) resulta que

$$f(P(\vec{x}, \vec{y})) = P(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = \{af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) \mid 0 \leq a, b \leq 1\} \subset \mathbb{R}^m$$

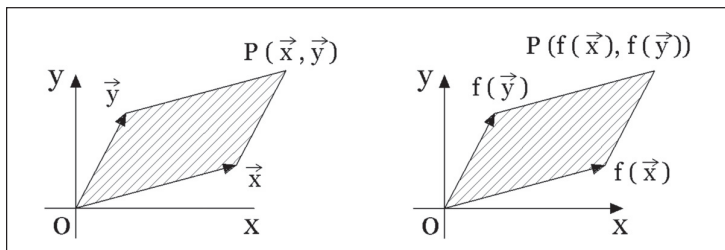


Fig. 3.3.1

Cal notar que tot punt $a\vec{x} + b\vec{y}$ va a parar al "corresponent" punt $af(\vec{x}) + bf(\vec{y})$ mantenint-se sempre el paral·lelisme. A més si $F \subset \mathbb{R}^n$ i $G \subset \mathbb{R}^m$ són subespais, aleshores $f(F) \subset \mathbb{R}^m$ i $f^{-1}(G) \subset \mathbb{R}^n$ també ho són.

Destaquem el subespai *nucli* de f , escrit $\text{Ker } f$ i donat per:

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$

i el subespai *imatge*

$$\text{Im } f = f(\mathbb{R}^n) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

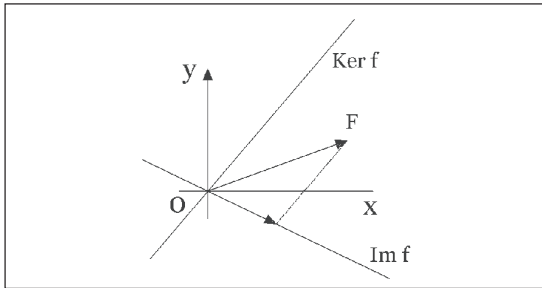


Fig. 3.3.2

Aquests subespais són bàsics per a entendre el comportament de l'aplicació lineal. Si $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ l'aplicació és injectiva (monomorfisme) enviant punts diferents a punts diferents i si $\text{Im } f = \mathbb{R}^m$ aleshores f és exhaustiva (epimorfisme) tenint tot vector antiimatge. El cas $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ i $\text{Im } f = \mathbb{R}^m$ assegura que f és una correspondència biunívoca punt a punt (isomorfisme).

És important remarcar el resultat següent:

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = n$$

on n és la dimensió de l'espai de partida de f i on en el cas $\{\vec{0}\}$ es pren $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

En la taula veiem com el nucli i la imatge determinen certs tipus d'aplicacions lineals:

n	$\dim \text{Ker } f$	$\dim \text{Im } f$	Tipologia f
1	0	1	$f(x) = f(1)x$ homotècia
	1	0	$f \equiv \vec{0}$
2	0	2	Isomorfisme
	1	1	Projecció sobre una recta segons $\text{Ker } f$
	2	0	$f \equiv \vec{0}$
3	0	3	Isomorfisme
	1	2	Projecció sobre un pla segons $\text{Ker } f$
	2	1	Projecció sobre una recta segons $\text{Ker } f$
	3	0	$f \equiv \vec{0}$

Representació matricial i gràfica d'aplicacions lineals

Sigui f una aplicació lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m . Siguin $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ base de \mathbb{R}^n i $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ base de \mathbb{R}^m . Aleshores f queda determinada en saber els valors de f sobre la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, ja que, per a tot $x \in \mathbb{R}^n$, si (x_1, \dots, x_n) són les coordenades de \vec{x} en la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, és $f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1f(\vec{e}_1) + \dots + x_nf(\vec{e}_n)$. Així, si

$$\begin{aligned}
 f(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{v}_m \\
 f(\vec{e}_2) &= a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \cdots + a_{m2}\vec{v}_m \\
 &\dots\dots\dots \\
 f(\vec{e}_n) &= a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{v}_m
 \end{aligned}$$

f queda identificada coneixent tots els coeficients (a_{ij}) de les relacions anteriors.

Definició. Es diu *matriu* (a_{ij}) d'una aplicació lineal a la matriu que té per columnes les coordenades de les imatges dels vectors d'una base, respecte a una base fixa de l'espai d'arribada. Així, escrivim:

$$f \equiv [f] \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notem que els coeficients de la matriu de f depenen de les bases emprades en la representació matricial.

A nivell de càlcul, per a trobar la imatge $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de qualsevol vector de \mathbb{R}^n , utilitzant la matriu de f , s'usa la regla del producte de la matriu (a_{ij}) de f pel vector donat escrit en columna (matriu $n \times 1$):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Destaquem que, per conveni, identifiquem qualsevol vector \vec{x} de \mathbb{R}^n amb la matriu $1 \times n : (x_1, x_2, \dots, x_n)$

o amb la matriu $n \times 1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En algunes ocasions usarem les notacions

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{y} \quad \vec{x}^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

on el superíndex t indica *transposició* de vector.

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ són aplicacions lineals, la composició $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$ resulta ser també lineal:

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(\vec{x} + \vec{y}) &= g[f(\vec{x} + \vec{y})] = g[f(\vec{x}) + f(\vec{y})] \\
 &= g[f(\vec{x})] + g[f(\vec{y})] = (g \circ f)(\vec{x}) + (g \circ f)(\vec{y})
 \end{aligned}$$

Si f té una matriu $m \times n$, $[f] = (a_{ij})$, i g té una matriu $r \times m$, $[g] = (b_{ij})$, llavors cal trobar la matriu $r \times n$ (c_{ki}) de la composició $g \circ f$.

Teorema. En les notacions anteriors, és $(c_{ki}) = (b_{ij}) \cdot (a_{ij})$, on per a $1 \leq k \leq r$ i $1 \leq i \leq n$ es pren

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^m a_{ji} b_{kj} = (b_{k1}, \dots, b_{km}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

és a dir, la matriu de la composició de dues aplicacions lineals és precisament el producte de les matrius d'aquestes aplicacions.

A continuació veurem com es canvien coordenades i matrius:

a) **Canvis de coordenades**

Si en \mathbb{R}^n es té una base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, tot vector \vec{x} admetrà certes coordenades:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

En considerar una nova base $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$, el mateix vector \vec{x} tindrà noves coordenades:

$$\vec{x} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{e}'_i$$

És natural preguntar-se com calcular aquestes noves coordenades en funció de les primitives. A aquest efecte, sigui $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'isomorfisme definit per $a(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i$, $1 \leq i \leq n$. Aleshores

$$a(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} \vec{e}_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

on (α_{ji}) és la matriu d' a en la base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Amb això obtindrem:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{e}'_i = \sum_{i=1}^n x'_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} \vec{e}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} x'_i \right) \vec{e}_j$$

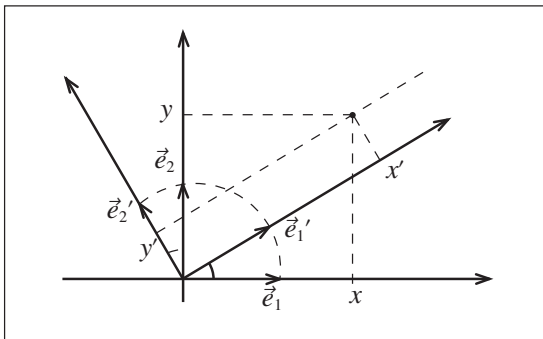


Fig. 3.3.3

d'on, per $1 \leq j \leq n$, tenim

$$x_j = \alpha_{j1} x'_1 + \alpha_{j2} x'_2 + \dots + \alpha_{jn} x'_n$$

el que equival a la igualtat matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

és a dir, $(x'_i) = (\alpha_{ij})^{-1} \cdot (x_j)$, que resol per complet el problema proposat.

Exemple. Si en \mathbb{R}^2 tenim la base constituïda pels vectors $\vec{e}_1 = (1, 0)$ i $\vec{e}_2 = (0, 1)$ i considerem la nova base (girant la primitiva un angle θ) donada per $\vec{e}'_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$ i $\vec{e}'_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$, les coordenades primitives es relacionaran amb les noves mitjançant la relació

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

b) **Canvis de base i matrius**

Donat un endomorfisme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, mitjançant una base $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ formarem una matriu (a_{ij}) de f . En una altra base $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ tindrem la representació matricial (b_{ij}) de f . La qüestió a resoldre és quina relació existeix entre ambdues matrius de la mateixa aplicació lineal f . Per a això considerem el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) & \xrightarrow{f \equiv (a_{ij})} & (\mathbb{R}^n; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \\ \uparrow j & & \downarrow j^{-1} \\ (\mathbb{R}^n; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) & \xrightarrow{f \equiv (b_{ij})} & (\mathbb{R}^n; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \end{array}$$

L'aplicació lineal $j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida per $j(\vec{v}_i) = \vec{u}_i$, $1 \leq i \leq n$, tindrà una matriu $C = (c_{ij})$ obtinguda en posar com a columnes les coordenades de la nova base respecte a la primitiva i dita *matriu del canvi de base*. Llavors es verificarà, a la llum de la commutativitat de l'anterior diagrama,

$$(b_{ij}) = (c_{ij})^{-1} \cdot (a_{ij}) \cdot (c_{ij})$$

fórmula anomenada del canvi de base. Breument

$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C$$

on A és la matriu original, C és la matriu del canvi de base i B és la matriu en la nova base.

Exemple. Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, x + y)$ doneu la matriu de f quan en \mathbb{R}^2 es treballa amb la base usual i quan es treballa amb la base $\vec{v}_1 = (2, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1)$.

En la base usual $\vec{u}_1 = (1, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1)$ tindrem $f(\vec{u}_1) = (1, 1)$ i $f(\vec{u}_2) = (0, 1)$, resultant la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 tindrem

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & -1/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

També arribaríem aquí fent

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1) &= f((2, 1)) = f(2\vec{u}_1 + 1\vec{u}_2) = 2f(\vec{u}_1) + 1f(\vec{u}_2) = \\ &= 2(1, 1) + 1(0, 1) = (2, 3) = \frac{5}{3}(2, 1) + \frac{4}{3}(-1, 1) = \frac{5}{3}\vec{v}_1 + \frac{4}{3}\vec{v}_2 \end{aligned}$$

i, anàlogament,

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_2) &= f((-1, 1)) = f(-\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = -f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2) \\ &= -1(1, 1) + (0, 1) = (-1, 0) = -\frac{1}{3}(2, 1) + \frac{1}{3}(-1, 1) = -\frac{1}{3}\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_2 \end{aligned}$$

Com s'ha vist, tota aplicació lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ queda unívocament determinada en conèixer-se les imatges per f dels vectors de la base canònica de \mathbb{R}^n : $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ i és així, posant com a columnes aquestes imatges, que es forma la matriu (a_{ij}) de f . Per aquest fet, a nivell gràfic l'aplicació f queda unívocament determinada quan es coneix la imatge gràfica per a f del cub unitat n -dimensional (les arestes del qual són els vectors de la base canònica.) Analitzem dos primers exemples en \mathbb{R}^2 (mireu bé la figura 3.3.4(a), (b))

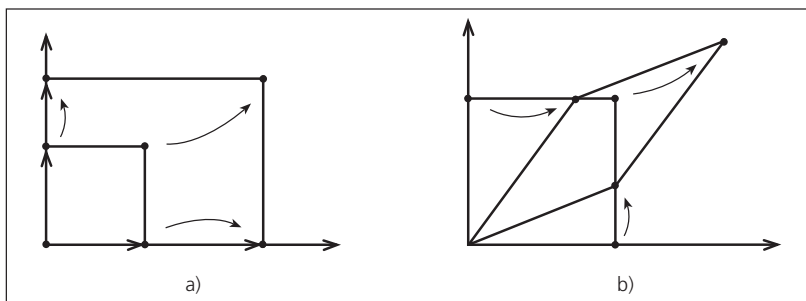


Fig. 3.3.4

a) **Matrius diagonals:** Si calculem la imatge del quadrat unitat per una matriu del tipus diagonal:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

sobre la base canònica tindrem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Així doncs, el quadrat unitat es transforma en un *rectangle* els costats del qual tenen com a valors els valors absoluts dels elements de la diagonal. Aquesta transformació es diu *canvi d'escala*, quan $a_{11} \cdot a_{22} \neq 0$.

b) **Matrius amb uns en la diagonal:** Si es considera una matriu del tipus

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

tindrem

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ 1 \end{pmatrix}$$

i el quadrat unitat es transforma en el *paral·lelogram* de costats generadors $(1, a_{21})$ i $(a_{12}, 1)$. Tal transformació rep el nom de *cisalladura*.

En general, tindrem, si $a_{11} \cdot a_{22} \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{22}} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Gràficament, tota aplicació lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 transforma el cub unitat en un paral·lelepípede. Si $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \neq 0$ aquesta transformació és el resultat d'aplicar successivament un canvi d'escala (que passa del cub a un ortoedre) i una cisalladura (que transforma l'ortoedre en paral·lelepípede).

Problema 1

Doneu les coordenades del vector $(1, 1, 3)$ en la base de \mathbb{R}^3 formada pels vectors $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 1)$ i $(0, 0, 2)$.

Problema 2

Doneu la matriu de l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$, $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ i $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 - \vec{e}_2$. Doneu la dimensió i una base de $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.

Problema 3

Doneu la matriu en base canònica de l'aplicació lineal a \mathbb{R}^2 que transforma el paral·lelogram generat pels vectors $(1, 2)$ i $(0, 3)$ en el paral·lelogram generat pels vectors $(2, 4)$ i $(0, 9)$.

Problema 4

- Demostreu que una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mai no pot ser injectiva.
- Demostreu que tota aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ exhaustiva és injectiva.

3.4 Sistemes d'equacions lineals: classificació i resolució

Un sistema d'equacions lineals és una col·lecció d'equacions del tipus:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

on els termes a_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, són els *coeficients* del sistema; els termes b_1, b_2, \dots, b_m són els *termes independents*, i x_1, x_2, \dots, x_n són les *incògnites* del sistema. Qualsevol n -pla de nombres que satisfaci les m equacions, en substituir a les incògnites x_1, x_2, \dots, x_n , es denomina *solució*. El sistema es diu *compatible* si existeixen solucions i *incompatible* en cas contrari. Finalment, el sistema és *determinat* si té solució única i *indeterminat* en cas d'existir diverses solucions.

Notem que amb les notacions matricials

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

i si f és l'aplicació lineal de matriu (a_{ij}) en la base usual, podem reescriure (*) en la forma

$$f(\vec{x}) = \vec{b} \quad (**)$$

i, en ser f una aplicació lineal, (**) admet la lectura: *trobar les antiimatges del vector \vec{b} per l'aplicació lineal f* . Recíprocament, donada una aplicació lineal f entre dos espais vectorials de dimensió finita, la matriu (a_{ij}) , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ de f , i un vector $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, la igualtat $f(\vec{x}) = \vec{b}$ és equivalent al sistema (*).

Teorema. Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ és una transformació lineal i és $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ l'equació vectorial $f(\vec{x}) = \vec{b}$ té solució si, i només si, $\vec{b} \in \text{Im}f$. En aquest cas, el conjunt S de totes les seves solucions és:

$$S = \{\vec{x}_0 + \vec{v} \mid \vec{v} \in \text{Ker}f\} = \vec{x}_0 + \text{Ker}f$$

on \vec{x}_0 és una solució particular del sistema, és a dir, un qualsevol dels $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tals que $f(\vec{x}_0) = \vec{b}$.

Demostració. És evident que $f(\vec{x}) = \vec{b}$ admet solució si, i només si, $\vec{b} \in \text{Im}f$. Si aquest és el cas, existirà almenys un \vec{x}_0 tal que $f(\vec{x}_0) = \vec{b}$. Si escollim qualsevol $\vec{v} \in \text{Ker}f$, en ser $f(\vec{v}) = \vec{0}$, serà

$$f(\vec{x}_0 + \vec{v}) = f(\vec{x}_0) + f(\vec{v}) = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

per tant, qualsevol element de $\vec{x}_0 + \text{Ker}f$ és solució del sistema.

A més, si \vec{x}_1 és una solució de $f(\vec{x}) = \vec{b}$ diferent de \vec{x}_0 , serà

$$f(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) = f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_0) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

és a dir, $\vec{x}_1 - \vec{x}_0 \in f$ i $\vec{x}_1 \in \vec{x}_0 + \text{Ker}f$.

Donat un sistema $f(\vec{x}) = \vec{b}$, amb $[f] = (a_{ij})$, considerarem sempre dues matrius associades: la mateixa (a_{ij}) i la matriu-ampliada (a_{ij}, b_i) obtinguda en afegir a la matriu (a_{ij}) una columna més formada per les components de \vec{b} .

Teorema. (Rouché-Frobenius). El "sistema" $f(\vec{x}) = \vec{b}$ és compatible si, i només si, $\text{rang}(a_{ij}) = \text{rang}(a_{ij}, b_i)$ ($= r$). En aquest cas el sistema és determinat si $r = n$ (nombre d'incògnites) i indeterminat si $r < n$.

Demostració. Si el sistema és compatible, existirà almenys una solució $\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^n x_0^i \vec{e}_i$ d'aquest: $f(\vec{x}_0) = \vec{b}$.

Amb ella és: $\vec{b} = f(\vec{x}_0) = f\left(\sum_{i=1}^n x_0^i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_0^i f(\vec{e}_i)$, és a dir, \vec{b} és combinació lineal de $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$ que són precisament els vectors-columnes de la matriu (a_{ij}) . Per tant, és $\text{rang}(a_{ij}) = \text{rang}(a_{ij}, b_i)$. Recípro-

cament, si val aquesta igualtat de rangs és que \vec{b} serà combinació lineal de les columnes de (a_{ij}) , és a dir, $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j$, $1 \leq i \leq m$. Escollint $\vec{x} = \sum_{j=1}^n c_j \vec{e}_j$ resultarà

$$f(\vec{x}) = f\left(\sum_{j=1}^n c_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n c_j f(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n c_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n c_j a_{ij}\right) \vec{v}_i = \sum_{i=1}^m b_i \vec{v}_i = \vec{b}$$

i \vec{x} és solució (aquí $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ és la base de l'espai de definició de f i $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ és base de l'espai d'arribada de f).

A més, si el sistema és compatible i $r = \text{rang}(a_{ij}) = n$ serà $\dim \text{Ker} f = 0$, $\text{Ker} f = \vec{0}$ i la solució serà única (sistema determinat). Si $r < n$ serà $\dim \text{Ker} f > 0$, $\text{Ker} f \supseteq \vec{0}$ i existiran infinites solucions: $\vec{x}_0 + \text{Ker} f$ (sistema indeterminat).

En un sistema homogeni $f(\vec{x}) = \vec{0}$ sempre existeix la solució $\vec{x} = \vec{0}$. Aquesta solució és única si $\text{rang}(a_{ij}) = n$ i existeixen infinites solucions (tot $\text{Ker} f$) si $\text{rang}(a_{ij}) < n$.

Problema 1

Discutiu els següents sistemes d'equacions lineals i resoleu els que siguin compatibles

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + y + z = 2 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

Problema 2

Resoleu, segons els valors d' a

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = -1 \\ -x + ay + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

Problema 3

Si $x = 1, y = 1, z = 0$ és una solució del sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ y - z = 1 \end{array} \right\}$$

Doneu el conjunt de totes les seves solucions.

Problema 4

Sabent que el rang de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ és 2, resolcu el sistema $\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\}$

3.5 Diagonalització

Donada una aplicació lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ direm que un vector no nul \vec{v} és un *vector propi* o *autovector* si existeix un número real λ dit *valor propi* o *autovalor* tal que $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, és a dir, la recta generada per \vec{v} queda invariant (va a parar a ella mateixa) en aplicar T . Així si T és una simetria del pla admet vectors propis (un de l'eix de simetria i un de perpendicular a ell) però si T és un gir de 30° no hi ha vectors propis.

L'estudi dels vectors propis permet veure quines rectes o plans queden preservats per les aplicacions lineals. En particular quan es puguin reunir una base de vectors propis aleshores la matriu de l'aplicació lineal sols tindrà a la seva diagonal els valors propis corresponents i la transformació es dirà *diagonalitzable*.

Estudiar la condició $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ és equivalent a veure quan $T(\vec{v}) - \lambda\vec{v} = \vec{0}$, la qual es pot presentar en la forma:

$$(T - \lambda I_n)(\vec{v}) = \vec{0}$$

el que posa de manifest que els vectors propis de T seran exactament els elements $\text{Ker}(T - \lambda I_n)$. Així cal tenir $\dim \text{Ker}(T - \lambda I_n) > 0$, o equivalentment, $\text{rang}(T - \lambda I_n) < n$. En particular, és necessari que sigui:

$$\det(T - \lambda I_n) = 0$$

Així, el procés de determinar els autovectors de T comença resolent aquesta equació.

Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ és una base de \mathbb{R}^n i $[T] = (a_{ij})$ és la matriu de T en aquesta base, aleshores

$$\det(T - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = p_n(T; \lambda)$$

és un polinomi de grau n , (*polinomi característic* de T). Aquest polinomi és intrínsec, no depèn de la base que s'hagi usat per expressar inicialment T de forma matricial.

Teorema. Cal tenir en compte que:

- Dos vectors propis amb valors propis diferents són independents.
- Si $\lambda \neq \mu$ són dos valors propis és $\text{Ker}(T - \lambda I_n) \cap \text{Ker}(T - \mu I_n) = \vec{0}$.

En efecte, si $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, $T(\vec{w}) = \mu\vec{w}$ i $\lambda \neq \mu$, si fos $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \vec{0}$, aplicant T seria

$$\vec{0} = T(\vec{0}) = \alpha T(\vec{v}) + \beta T(\vec{w}) = \alpha\lambda\vec{v} + \beta\mu\vec{w}$$

Si fos $\alpha \neq 0$ seria $\vec{v} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{w}$ i resultaria

$$\vec{0} = -\beta\lambda\vec{w} + \beta\mu\vec{w} = (\mu - \lambda)\beta\vec{w}$$

i en ser $\lambda \neq \mu$ i $\vec{w} \neq \vec{0}$ sortiria $\beta = 0$, $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{w} = \vec{0}$, que és absurd. Així $\alpha = 0$, anàlogament $\beta = 0$ i els vectors són independents.

Si $\vec{x} \in \text{Ker}(T - \lambda I_n) \cap \text{Ker}(T - \mu I_n)$; llavors és $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x} = \mu\vec{x}$, d'on $(\lambda - \mu)\vec{x} = \vec{0}$ i $\vec{x} = \vec{0}$.

Exemple. Sigui $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, amb matriu en la base usual

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'equació característica és

$$p_4(T; \lambda) = (2 - \lambda)^2(\lambda^2 + 1)$$

i els autovalors de T són $2, 2, +i, -i$. T no serà diagonalitzable i sols podem calcular $\text{Ker}(T - 2I_4)$. Fent

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resulta el sistema

$$\left. \begin{aligned} 3x + y - 2z - t &= 0 \\ 2y + z - 2t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

amb dues solucions independents $\vec{v}_1 = (5, -3, 6, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0, 1)$ que seran els vectors propis de valor propi 2.

Les aplicacions T diagonalitzables tindran una base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, formada per autovectors de T , i la seva matriu en aquesta base serà:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

en ser $T(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Si T té n valors propis $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ diferents dos a dos, sempre és diagonalitzable.

Exemple. Sigui $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ amb matriu

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

La seva equació característica és

$$p_3(T; \lambda) = -(\lambda + 5)(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

i resulta $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -5$. Es comprova que bases corresponents a $\text{Ker}(T - I_3)$, $\text{Ker}(T + 2I_3)$ i $\text{Ker}(T + 5I_3)$ són, respectivament,

$$\vec{v}_1 = (2, -1, 0), \quad \vec{v}_2 = (1, -1, 1), \quad \vec{v}_3 = (0, 0, 1)$$

En aquesta base de la matriu de T és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Si A_D és la matriu diagonal d'una matriu A és $A_D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ on P és la matriu del canvi de base (de la base antiga a la formada pels vectors propis).

Teorema. Sigui $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal i siguin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ els p valors propis de T , diferents dos a dos, i m_1, m_2, \dots, m_p les multiplicitats dels valors $p_n(T; \lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$. Aleshores T és diagonalitzable si, i només si, $m_i = \dim \text{Ker}(T - \lambda_i I_n)$, per a $i = 1, 2, \dots, p$.

Així l'algorisme de diagonalització és:

- (1) Resoldre l'equació característica $\det(T - \lambda I_n) = 0$ i obtenir les solucions $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de multiplicitats m_1, m_2, \dots, m_p ;
- (2) Si algun λ_i és complex T no diagonalitza en \mathbb{R}^n ;
- (3) Si tots els valors propis són reals cal veure que $\dim \text{Ker}(T - \lambda_i I_n) = m_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) o que $\text{rang}(T - \lambda_i I_n) = n - m_i$, $i = 1, 2, \dots, p$;
- (4) Si falla alguna de les condicions (3) T no diagonalitza;
- (5) Si (3) val, cal resoldre per a cada i el sistema $(T - \lambda_i I_n)\vec{x} = \vec{0}$ escollint m_i solucions independents del sistema.
- (6) Formar la matriu diagonal de T .

Exemple. Sigui $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'equació característica és

$$p_3(T; \lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 - \lambda)^2(\lambda - 2)$$

i $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $m_2 = 1$. El cas $\lambda_1 = 1$ porta al sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $x + y = 0$, és a dir, podem escollir

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 0), \quad \vec{v}_2 = (0, 0, 1)$$

Per a $\lambda_2 = 2$ es té

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

així $z = 0$ i $x + 2y = 0$. Agafem $\vec{v}_3 = (-2, 1, 0)$.

Així la matriu és diagonalitzable i resulta

$$A_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple. Sigui $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ amb matriu

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La seva equació característica és $(1 - \lambda)^2(2 - \lambda) = 0$. En el cas $\lambda_1 = 1$ hi ha multiplicitat 2, però el rang de $(T - 1I_3)$ és

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 - 2 = 1$$

per tant T no és diagonalitzable.

Potència d'una matriu

Si A és una matriu diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ és } A^q = \begin{pmatrix} \lambda_1^q & & 0 \\ & \lambda_2^q & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n^q \end{pmatrix}$$

i com que $A_D = P^{-1}AP$ resulta

$$A^q = (PA_D P^{-1})^q = PA_D P^{-1} PA_D P^{-1} \dots PA_D P^{-1} = PA_D^q P^{-1}$$

Exemple. Calculeu la potència de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicant el procés de diagonalització:

$$A_D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'on,

$$A^p = P \cdot A_D^p \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A^p = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2^p + 2(-1)^p & 2^p - (-1)^p & 2^p - (-1)^p \\ 2^p - (-1)^p & 2^p + 2(-1)^p & 2^p - (-1)^p \\ 2^p - (-1)^p & 2^p - (-1)^p & 2^p + 2(-1)^p \end{pmatrix}$$

Terme general de una successió recurrent lineal

Fixats $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sigui

$$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_{n-1}, \quad n \geq 1$$

determinada si sabem els dos primers termes u_0, u_1 . Escrivim

$$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n \tag{1}$$

$$v_{n+1} = u_n \tag{2}$$

Considerem $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Aleshores $\vec{u}_{n+1} = A\vec{u}_n$.

És immediat que si és $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$, resulta

$$\vec{u}_{n+1} = A^n \cdot \vec{u}_1$$

Exemple. Trobar el terme general de la successió de Fibonacci $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, on $u_0 = 1$, $u_1 = 1$.

Aplicant l'anterior:

$$\vec{u}_{n+1} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Aplicant el procés de diagonalització

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, & \phi' &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \\ A_D &= \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi' \end{pmatrix}, & P &= \begin{pmatrix} \phi & \phi' \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'on

$$A^n = P \cdot A_D^n \cdot P^{-1} = \frac{1}{\phi - \phi'} \cdot \begin{pmatrix} \phi^{n+1} - \phi'^{n+1} & \phi\phi'(\phi^n - \phi'^n) \\ \phi^n - \phi'^n & \phi\phi'(\phi^{n-1} - \phi'^{n-1}) \end{pmatrix}$$

i usant $\vec{u}_{n+1} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenim la sorprenent solució del tema 2:

$$u_{n+1} = \frac{\phi^{n+2} - \phi'^{n+2}}{\phi - \phi'}$$

Problema 1

Estudieu la diagonalització de $f(x, y, z) = ((k-1)x, 3kx + y + 6z, -kx - z)$ segons els valors de k .

Problema 2

Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal tal que $\vec{u}_1 = (3, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ i $\vec{u}_3 = (2, 0, -1)$ són vectors propis de valor propi 2, 2 i 1 respectivament. Doneu el polinomi característic de f i la matriu de f en la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, i en la base canònica.

Problema 3

Digueu si cadascuna de les afirmacions següents és certa o falsa. Raoneu les respostes:

- Si el polinomi característic d'un endomorfisme de \mathbb{R}^3 es $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$ llavors és diagonalitzable.
- Si un endomorfisme de \mathbb{R}^2 té un valor propi real llavors tots els seus valors propis són reals.
- Si en un endomorfisme f de \mathbb{R}^3 , $f(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$ i $f(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, llavors tots els valors propis de f són reals i si $(0, 1, 0) \in \text{Ker } f$, f diagonalitza.

Problema 4

Estudieu per a quins valors de $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfisme de matriu

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 3-k \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

és diagonalitzable.

Més problemes de geometria vectorial

- Comproveu que els vectors $\vec{u}_1 = (-1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 1)$ i $\vec{u}_3 = (1, 1, -1)$ són linealment independents i cerqueu les coordenades del vector $\vec{x} = (2, -3, -1)$ en la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.
- Determineu quins dels següents conjunts són subespais vectorials de \mathbb{R}^3 :

$$A = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad C = \{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

- Donades les matrius

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

calculeu $(P + M) \cdot N$ i $P \cdot M \cdot N$.

- Trobeu equacions cartesianes d'una recta que sigui paral·lela als plans $x + 2y = 1$ i $x - z = 2$ i que passi per l'origen.
- Estudieu quines de les aplicacions següents són lineals:

$$\begin{array}{ll} f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 & f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \rightarrow (\sin x, \cos y, x, y) & (x, y, z) \rightarrow (x + y, x + z, y + x) \\ f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 & f_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \rightarrow (x + y + z, 1, 0) & (x, y, z) \rightarrow x + y - z \end{array}$$

Busqueu, en cas que siguin aplicacions lineals, el seu nucli i la seva imatge.

6. Comproveu que l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $f(x, y, z) = (ax - y, x + y + z, 2x)$ on $a \in \mathbb{R}$ és una aplicació lineal. Segons els valors d' a calculeu la dimensió de la $\text{Im}f$ i doneu una base de $\text{Ker}f$ i la seva dimensió.
7. Considereu $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $f(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z, ax + by + cz)$. Trobeu, segons els valors d' a, b i c :
 - a) La matriu de f en la base canònica.
 - b) Bases de $\text{Ker}f$ i $\text{Im}f$.
 - c) $f^{-1}(1, 4, 3)$.
8. Determineu la matriu de la projecció de l'espai en la direcció de la recta $x = y = z$ amb imatges en el pla $x + y + z = 0$.
9. Donat un pentàgon regular amb un vèrtex en el punt $(1, 0)$ inscrit en la circumferència de centre l'origen i radi 1 doneu les coordenades de tots els seus vèrtexs.
10. Estudieu si és possible la diagonalització de les matrius següents. En cas afirmatiu doneu una base de vectors propis, la matriu de canvi de la base canònica a aquesta nova base i la matriu diagonal associada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 12 & 12 & -7 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformacions geomètriques

La geometria vectorial ens dóna un recurs basat en els nombres per a modelitzar la recta, el pla o l'espai. Amb ella podem situar punts, descriure equacions d'elements lineals o presentar figures. En aquest tema farem un pas endavant descrivint el món de les *transformacions geomètriques*, la qual cosa ens permet introduir una visió dinàmica a la geometria vectorial.

El concepte modern de geometria va ser formulat pel matemàtic alemany Felix Klein en fer notar que cada geometria es caracteritza no solament per l'*espai* que modelitza (recta, pla, esfera, espai...) sinó també pel *grup de transformacions* que es considera que actuen en aquest espai (moviments rígids, semblances, etc.). De cada grup de transformacions es deriva una *classificació de figures* (identificant, o fent equivalents, les relacionades per una transformació del grup). I, en conseqüència, és essencial veure en cada cas quins són els *invariants* del grup de transformacions, és a dir, allò que és conservat o respectat.

A la geometria euclidiana, les transformacions considerades són les isometries o moviments rígids. Aquestes transformacions classifiquen les figures d'acord amb el conegut criteri usual de "superposició". A la geometria equiforme, es consideren les semblances o composicions d'homotècies amb isometries. El resultat és que els invariants euclidians també són equiformes, però existeix una excepció: la distància que es pot alterar per una homotècia per la via de la raó corresponent. A la geometria afí, les afinitats conserven paral·lelismes, incidències, raons dobles, etc., però no respecten ni posicions, ni distàncies, ni angles. A la geometria projectiva, les projectivitats conserven raons dobles, però els altres invariants euclidians es poden alterar. S'ha de notar que com més ampli és el grup de transformacions, menys invariants hi ha.

Les transformacions i els seus invariants

	Distàncies	Angles	Paral·lelisme	Raons dobles	Continuïtat
Isometries	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Semblances	—	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Afinitats	—	—	SÍ	SÍ	SÍ
Projeccions	—	—	—	SÍ	SÍ
Deformacions	—	—	—	—	SÍ
Salvatjades	—	—	—	—	—

4.1 Afinitats

Una *afinitat* és una aplicació de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n que resulta de compondre una transformació lineal f amb una translació $T_{\vec{a}}$ ($T_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$), és a dir, $T_{\vec{a}} \circ f$.

Santiago Calatrava

Aquest singular arquitecte i enginyer de València ha desenvolupat una tasca impressionant de projectes arreu del món que destaquen per l'originalitat de la geometria formal en les seves composicions. Són remarcables els seus espais per a fires, estacions, aeroports, torres, instal·lacions esportives, mesures, etc. La Ciutat de les Arts i de les Ciències a València és especialment sorprenent. La torre Calatrava de Telefònica a la zona olímpica de Montjuïc és una construcció ben especial, essent a la vegada un rellotge de sol. Les seves estructures de gran altura juguen especialment amb les transparències i els efectes de la llum. La simetria és un component essencial en Calatrava, tant la derivada de les formes que usa, com la que s'origina en la creació de repeticions o com a conseqüència de la mateixa coherència estructural.

El conjunt de les afinitats és tancat per composició perquè és

$$(T_{\vec{a}} \circ f) \circ (T_{\vec{b}} \circ g) = T_{\vec{a}+f(\vec{b})} \circ (f \circ g)$$

Quan f és isomorfisme, l'afinitat $T_{\vec{a}} \circ f$ és dita regular i aleshores té inversa: $T_{f^{-1}(-\vec{a})} \circ f^{-1}$. Amb matrius, una afinitat es podrà escriure en la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

és a dir, per a $i = 1, 2, \dots, n$,

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + a_i$$

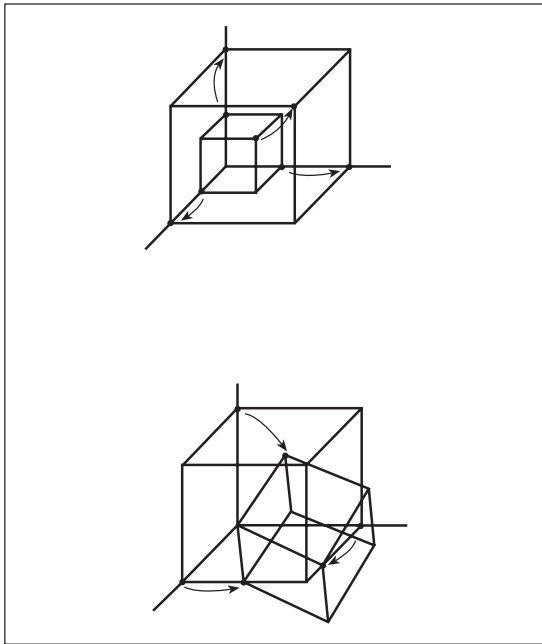


Fig. 4.1.1

Així les afinitats són assignacions entre punts del pla tals que la imatge de qualsevol rectangle és un paral·lelogram, o assignacions a l'espai tals que la imatge de qualsevol ortòedre és un paral·lelepípede. Examinem casos simples derivats de l'anàlisi feta amb aplicacions lineals.

Canvis d'escala: La imatge d'un quadrat unitat és un rectangle de costats a (horitzontal) i b (vertical). Qualsevol altre rectangle de costats c i d tindrà per imatge un rectangle de costats $c \cdot a$ i $d \cdot b$. En el sentit horitzontal es multipliquen les longituds per una constant a i en el vertical per una constant b . Aquest canvi d'escala és respectuós amb els angles i el paral·lelisme, però pot distorsionar les dimensions. Podem notar certs casos particulars interessants. Si $a = b = 1$ tenim la transformació *identitat*. Si $a = b = k$ es tractarà d'una *homotècia*. El cas espacial resultarà de multiplicar en les tres direccions per certes constants a , b i c .

Cisalladures: La imatge d'un quadrat unitat és un paral·lelogram pur. Mides i angles es poden alte-

rar, però el paral·lelisme es conserva. És el típic cas de dibuixar un rectangle vist en perspectiva espacial. En el cas espacial, un cub es transforma en un paral·lelepípede.

Problema 1

Demostreu que l'afinitat d'equacions

$$x' = x + y - z + 2$$

$$y' = x - y + 1$$

$$z' = z - 1$$

és regular i calculeu la seva inversa.

Problema 2

Donat el triangle de vèrtexs $(0, 0)$, $(3, 0)$ i $(1, 2)$ doneu les equacions de l'afinitat que transforma cada vèrtex en el punt mitjà del costat oposat. Estudieu aquesta afinitat.

Problema 3

Doneu les equacions de l'afinitat tal que la imatge dels punts $(0, 0)$, $(1, 2)$ i $(0, 1)$ són, respectivament, els punts $(1, 2)$, $(3, -1)$ i $(-1, 1)$. Determineu els punts fixos.

Problema 4

Trobeu l'afinitat que transforma l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = 1$.

4.2 Transformacions ortogonals

Una aplicació lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diu *ortogonal* si conserva el producte escalar, és a dir,

$$T(\vec{x}) \cdot T(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (*)$$

Quan tinguem (*) aleshores T també conservarà les normes, les distàncies i els angles. En particular, si hi ha un vector propi $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \neq \mathbf{0}$, necessàriament serà $\lambda = \pm 1$.

Si A és la matriu de T en una base ortonormal de vectors unitaris ortogonals entre ells resulta

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = T(\vec{x}) \cdot T(\vec{y}) = (A\vec{x}) \cdot (A\vec{y}) = \vec{x}'(A' \cdot A)\vec{y}$$

i, per tant, $A' \cdot A = I_n$, o sigui que la transposada d' A és la seva inversa: $A^{-1} = A'$. En particular: $\det A = \det A' = \det A^{-1} = 1/\det A$, és a dir, $\det A = \pm 1$.

Si $\det A = 1$ es diu que T conserva l'orientació i si $\det A = -1$ es diu que T no conserva l'orientació.

Un important resultat a tenir en compte és el següent

Teorema. Tota matriu simètrica diagonalitza en una base ortonormal de vectors propis. La matriu del canvi de base està formada (columnes) per aquests vectors propis i és la matriu d'una transformació ortogonal.

Ara ja podem classificar les transformacions ortogonals:

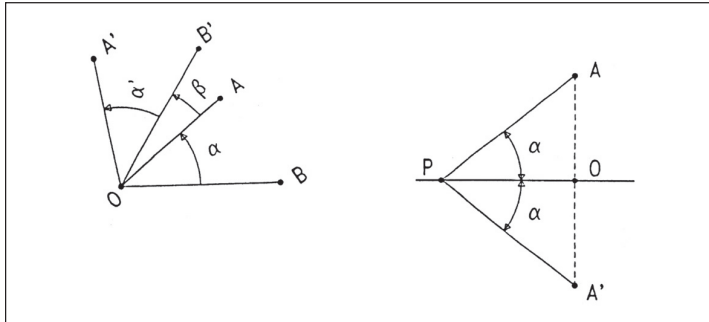


Fig. 4.2.1

Transformacions ortogonals en el pla

Considerem el conjunt de punts fixos de T , és a dir, $F(T) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid T(\vec{x}) = \vec{x}\}$ que és un subespai. Si $F(T) = \mathbb{R}^2$ seria $T = I_2$, la identitat. Si $F(T)$ és una recta per l'origen prenent $\vec{e}_1 \in F(T)$ unitari resultarà que un \vec{e}_2 unitari i ortogonal a \vec{e}_1 anirà a parar a un $T(\vec{e}_2)$ que també serà unitari (T conserva normes) i ortogonal a $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, és a dir, $T(\vec{e}_2) = \lambda\vec{e}_2$ per un cert λ . Però com que $\lambda = \pm 1$ i λ no pot ser 1 car $\vec{e}_2 \notin F(T)$ no és fix, necessàriament, $T(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$ i es tracta d'una *simetria axial*. Si $F(T) = \{\vec{0}\}$, agafant \vec{e}_1, \vec{e}_2 base ortonormal, aquesta anirà a parar a una nova base ortonormal que serà un gir de la base de partida.

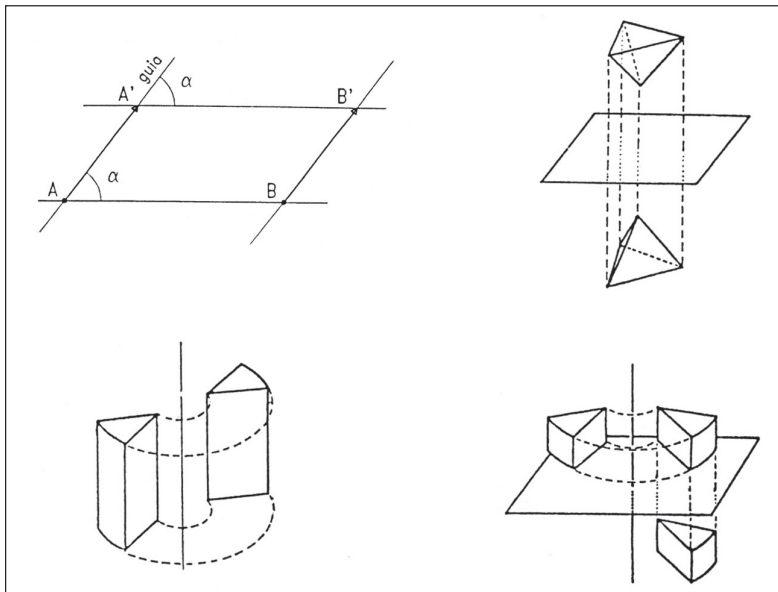


Fig. 4.2.2

Transformacions ortogonals a l'espai

Considerem de nou el subespai dels punts fixos $F(T) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \vec{x}\}$. Si $F(T) = \mathbb{R}^3$ és $T = I_3$. Si $\dim F(T) = 2$, $F(T)$ és un pla i considerem la base ortonormal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ amb \vec{e}_1 i \vec{e}_2 en $F(T)$ i \vec{e}_3 ortogonal a $F(T)$, invariants per T i per conservar angles i normes $T(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3$ tractant-se d'una *simetria respecte del pla* $F(T)$. Si $\dim F(T) = 1$, $F(T)$ és una recta considerem $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ base ortonormal amb \vec{e}_1 en $F(T)$, llavors tots els vectors del pla generat per \vec{e}_2, \vec{e}_3 aniran a parar al mateix pla (on T no hi té vectors fixos). Per tant T actuarà en aquest pla com un gir, essent doncs T a l'espai una *rotació al voltant de l'eix* $F(T)$. Finalment si $F(T) = \{\vec{0}\}$ com que $\det(T - \lambda I_3) = 0$ és una equació de tercer grau i per tant sempre té una solució real, existirà un λ_0 tal que $T(\vec{x}) = \lambda_0 \vec{x}$. Però sabem que $\lambda_0 \neq +1$ car T no té vectors fixos. Aleshores $\lambda_0 = -1$ i agafem una base ortonormal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ tal que $T(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$. De nou en el pla generat per \vec{e}_2 i \vec{e}_3 , T s'haurà de comportar com a gir i a l'espai T és una *simetria rotacional*.

Problema 1

Doneu les matrius de les transformacions ortogonals de \mathbb{R}^3 que transformen el quadrat de vèrtexs $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)$ i $(0, 0, 1)$ en el quadrat de vèrtexs $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)$ i $(0, 0, 1)$ respectivament.

Problema 2

Trobeu els valors de a i b per tal que la matriu

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$$

sigui ortogonal i, en aquests casos, classifiqueu-la donant els elements característics.

Problema 3

Calculeu la matriu d'un gir respecte de l'eix $2x = y = 2z$ i angle de gir 60° .

Problema 4

- Si f és una transformació ortogonal de \mathbb{R}^2 diferent de la identitat que té 1 com a valor propi i g és una altra transformació ortogonal de \mathbb{R}^2 sense valors propis, classifiqueu $g \circ f$.
- A \mathbb{R}^3 classifiqueu i doneu els elements característics de la composició de les simetries especulars respecte dels plans $x + y + z = 0$ i $x = y$.

4.3 Moviments rígids

Un *moviment rígid* o *isometria* és una aplicació $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que conserva les distàncies, és a dir, $\|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$, per a tot parell de punts \vec{x}, \vec{y} de \mathbb{R}^n .

Exemples d'isometries són:

– **Les transformacions ortogonals,**

$$\begin{aligned}\|T(\vec{x}) - T(\vec{y})\| &= \|T(\vec{x} - \vec{y})\| = \sqrt{T(\vec{x} - \vec{y}) \cdot T(\vec{x} - \vec{y})} \\ &= \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \|\vec{x} - \vec{y}\|\end{aligned}$$

– **Les translacions** $T_{\vec{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tals que $T_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$, encara que no siguin lineals si $\vec{a} \neq \vec{0}$, conserven les distàncies:

$$\|T_{\vec{a}}(\vec{x}) - T_{\vec{a}}(\vec{y})\| = \|(\vec{x} + \vec{a}) - (\vec{y} + \vec{a})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Notant que si F i G són isometries la seva composició $F \circ G$ també ho és:

$$\|(F \circ G)(\vec{x}) - (F \circ G)(\vec{y})\| = \|F(G(\vec{x})) - F(G(\vec{y}))\| = \|G(\vec{x}) - G(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

i resulta un tercer exemple:

– **Les composicions de translacions i transformacions ortogonals** són isometries.

Teorema. Tota isometria F és una transformació ortogonal, o bé una translació composta amb una transformació ortogonal.

Demostració. Sigui $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isometria. Ara distingirem dos casos:

Cas 1. Sigui $F(\vec{0}) = \vec{0}$. En aquest cas per a tot $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$:

$$F(\vec{z}) \cdot F(\vec{z}) = \|F(\vec{z})\|^2 = \|F(\vec{z}) - F(\vec{0})\|^2 = \|\vec{z} - \vec{0}\|^2 = \|\vec{z}\|^2 = \vec{z} \cdot \vec{z}$$

Com que $\|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\|^2 = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$ resulta

$$F(\vec{x}) \cdot F(\vec{x}) + F(\vec{y}) \cdot F(\vec{y}) - 2F(\vec{x}) \cdot F(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} - 2\vec{x} \cdot \vec{y}$$

i utilitzant la propietat primerament verificada [$F(\vec{x}) \cdot F(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x}$, $F(\vec{y}) \cdot F(\vec{y}) = \vec{y} \cdot \vec{y}$] se segueix $F(\vec{x}) \cdot F(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$. Així doncs, F conserva els productes escalars. Falta verificar que F és lineal per a poder concloure que, en aquest cas de $F(\vec{0}) = \vec{0}$, F és una transformació ortogonal. Per a això notem que si $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ és base ortonormal de \mathbb{R}^n , en conservar F els productes escalars necessàriament $F(\vec{e}_1), \dots, F(\vec{e}_n)$ és una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Considerem ara $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Per a cada $i = 1, 2, \dots, n$ es satisfà:

$$\begin{aligned}F(\vec{e}_i) \cdot [F(\vec{x} + \lambda\vec{y}) - F(\vec{x}) - \lambda F(\vec{y})] &= F(\vec{e}_i) \cdot F(\vec{x} + \lambda\vec{y}) - F(\vec{e}_i) \cdot F(\vec{x}) - \lambda F(\vec{e}_i) \cdot F(\vec{y}) \\ &= \vec{e}_i \cdot (\vec{x} + \lambda\vec{y}) - \vec{e}_i \cdot \vec{x} - \lambda \vec{e}_i \cdot \vec{y} = 0\end{aligned}$$

per tant, en ser el vector $F(\vec{x} + \lambda\vec{y}) - F(\vec{x}) - \lambda F(\vec{y})$ ortogonal a tots (!) els elements $F(\vec{e}_1), \dots, F(\vec{e}_n)$ de la base ortonormal, necessàriament l'esmentat vector és nul; és a dir,

$$F(\vec{x} + \lambda\vec{y}) - F(\vec{x}) - \lambda F(\vec{y}) = \vec{0}$$

i F és lineal, com es volia demostrar.

Cas 2. Sigui $F(\vec{0}) \neq \vec{0}$. Considerem llavors l'aplicació $\bar{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donada per $\bar{F}(\vec{x}) = F(\vec{x}) - F(\vec{0})$. Evidentment $\bar{F}(\vec{0}) = F(\vec{0}) - F(\vec{0}) = \vec{0}$ i essent F isometria \bar{F} també ho és, doncs,

$$\|\bar{F}(\vec{x}) - \bar{F}(\vec{y})\| = \|F(\vec{x}) - F(\vec{0}) - F(\vec{y}) + F(\vec{0})\| = \|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Per tant, és una isometria que deixa fix l'origen i, per al cas 1, \bar{F} és una transformació ortogonal. En ser $F(\vec{x}) = \bar{F}(\vec{x}) + F(\vec{0})$, es podrà escriure $F = T_{F(\vec{0})} \circ \bar{F}$, i resulta que F es la composició de la transformació ortogonal \bar{F} amb la translació de vector $F(\vec{0})$. El teorema està demostrat.

ISOMETRIES ——— ***				
	TRANSLACIÓ	$\left(\begin{array}{cc c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$	+ 1	
\mathbb{R}^2	TRANSLACIÓ I GIR	$\left(\begin{array}{cc c} \cos \theta & -\text{sen} \theta & a \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$	+ 1	
	TRANSLACIÓ I SIMETRIA AXIAL	$\left(\begin{array}{cc c} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$	- 1	
	TRANSLACIÓ	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$	+ 1	
	TRANSLACIÓ I SIMETRIA ESPECULAR	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$	- 1	
\mathbb{R}^3	TRANSLACIÓ I ROTACIÓ AXIAL	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta & b \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$	+ 1	
	TRANSLACIÓ I SIMETRIA ROTACIONAL	$\left(\begin{array}{ccc c} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta & b \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$	- 1	

Fig. 4.3.1

A nivell de descripció matricial de la isometria $F = T_{F(\vec{0})} \circ \bar{F}$, essent $[\bar{F}] = (a_{ij})$ una matriu ortogonal i $F(\vec{0}) = (a_1, \dots, a_n)$ el vector translació, es pot escriure la transformació F en la forma següent:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

on implícitament s'assumeix el conveni d'identificar els vectors de $\mathbb{R}^n : (x_1, x_2, \dots, x_n)$ amb els de $\mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$ d'última coordenada 1.

La taula (figura 4.3.1.) resumeix les isometries de \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 i s'indica amb +1 la conservació de l'orientació, i amb -1, el canvi. La taula permet que s'intueixi la importància que té la posició relativa de la translació de la isometria amb els elements fixos de la transformació ortogonal associada. En el cas particular que existeixi paral·lelisme s'han introduït denominacions especials. Tal és el cas del *moviment helicoidal* (rotació axial amb translació paral·lela a l'eix) o *simetria amb lliscament* (simetria axial del pla amb translació paral·lela a l'eix).

Problema 1

Trobeu l'equació de la imatge de les diagonals del quadrat de vèrtexs $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ i $(0, 1)$ per a la isometria de matriu

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Demostreu que $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu d'una isometria i classifiqueu-la.

Problema 3

A \mathbb{R}^2 quina isometria resulta de fer la composició d'un gir d'angle α i centre el punt $(1, 1)$ amb una simetria respecte de la recta $x = y$. Donarà el mateix si intercanviem l'ordre de la composició?

Problema 4

- a) Si F i G són dos isometries a \mathbb{R}^n , $F + G$ és una isometria a \mathbb{R}^n ?
 b) Si F és una isometria a \mathbb{R}^n , λF és isometria a \mathbb{R}^n per $\lambda \in \mathbb{R}$?

4.4 Semblances

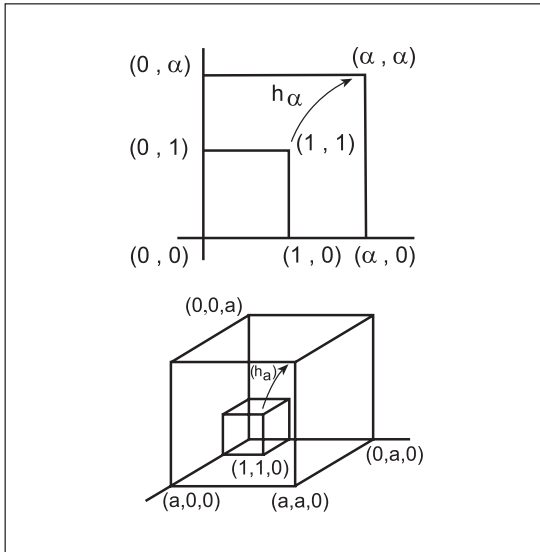


Fig. 4.4.1

Transformar les dimensions mantenint les formes és una interessant possibilitat: el món de les semblances. Una semblança S és una transformació entre punts que multiplica les distàncies per una raó o constant positiva $|k|$. Per això, escrivim S_k per indicar la semblança de raó k . El cas $k = 1$ vol dir que les distàncies es conserven, és a dir, tenim els moviments ja estudiats, per tant, fixarem l'atenció en $k \neq 1$. Vegem algun cas simple: el de l'homotècia lineal respecte de l'origen de raó k , H_k , definida per

$$H_k(\vec{x}) = k\vec{x}$$

Llavors H_k deixa l'origen O fix i a cada punt P n'assigna un altre P' alineat amb P i O , de manera que la distància de P' a O sigui la distància de P a O multiplicada per $|k|$. Si $k > 0$, el P' estarà a la semirecta determinada per O i P (entre O i P si $k < 1$ i després de P si $k > 1$). Si $k < 0$, el P' estarà a l'altra part de la semirecta.

Donat un segment qualsevol AB , la seva imatge per H_k serà un altre $A'B'$ que, pel teorema de Tales, tindrà per longitud $d(A', B') = |k|d(A, B)$. Així doncs, tota homotècia lineal respecte de l'origen és una semblança.

Sota una homotècia, qualsevol figura conserva angles i paral·lelismes, però les distàncies queden multiplicades per la constant k en valor absolut.

Com fer a mà la figura homotètica d'una de donada? Existeixen al mercat instruments anomenats pantògrafs i ampliadors que ho poden fer perfectament. En el dibuix per ordinador (i a la fotocopiadora) és automàtic.

Què succeeix si es van combinant homotècies? Si primer tenim en compte H_k i després apliquem H_L , les distàncies s'hauran multiplicat primer per $|k|$ i després per $|L|$, és a dir, $|k \cdot L|$: les raons es multipliquen. En particular, el procés invers a H_k serà $H_{1/k}$. La matriu d'una homotècia lineal a \mathbb{R}^n és doncs $k \cdot I_n$.

Si fixem una raó k i considerem les homotècies $h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definides com les aplicacions que satisfan $h_k(\vec{x}) - h_k(\vec{y}) = k(\vec{x} - \vec{y})$ aleshores resulta que fent $\vec{y} = \vec{0}$ és

$$h_k(\vec{x}) = h_k(\vec{0}) + k\vec{x}$$

és a dir, es tracta d'una homotècia lineal $H_k(\vec{x}) = k\vec{x}$ seguida d'una translació. Així les homotècies respecte de qualsevol punt es poden descriure en funció d'homotècies lineals i translacions.

Visitades les homotècies lineals H_k caldria esperar més exemples genuïns de semblances S_k , però la sorpresa és majúscula (!). Donada una semblança S_k considerem la transformació T que resulta d'aplicar primer la semblança S_k i a continuació l'homotècia de raó $1/k$ ($T = H_{1/k} \circ S_k$). Com es comporta T ?

$$\|T(\vec{x}) - T(\vec{y})\| = \|H_{1/k}(S_k(\vec{x})) - H_{1/k}(S_k(\vec{y}))\| = \left\| \frac{1}{k}S_k(\vec{x}) - \frac{1}{k}S_k(\vec{y}) \right\| = \frac{1}{|k|} |k| \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

és a dir, les distàncies s'han conservat. ¡Al-leluia! T és un moviment rígid, una isometria. Per tant, resulta de $T = H_{1/k} \circ S_k$ que serà $S_k = H_k \circ T$, és a dir, *tota semblança resulta d'aplicar una isometria i a continuació una homotècia lineal respecte de l'origen* (girar, traslladar i fer homotècia; simetritzar, traslladar i fer homotècia, etc.). Un fet interessant sobre les semblances és que sempre tenen un *punt fix* anomenat *centre de la semblança*.

Escala adequada

En el tema de la representació a escala (ja sigui a nivell gràfic o fent maquetes) interessa treballar sempre amb una escala adequada a l'*objectiu* de la representació. La notació $1 : k$ indicarà que 1 cm de la representació equival a k cm de la realitat, és a dir, s'hauran dividit per la raó k (homotècia de raó $1/k$) les mides reals. Així un mapa a escala 1:500 té molt sentit per a una secció municipal d'urbanisme i cap sentit per a un constructor. No cal dir que l'escala 1:1 és la realitat!

4.5 Projeccions

En les figures adjuntes veiem un resum visual de les principals representacions d'un cub en el pla del dibuix. Cal distingir bé les representacions que conserven el paral·lelisme de les perspectives que en introduir-hi punts de fuga el trenquen.

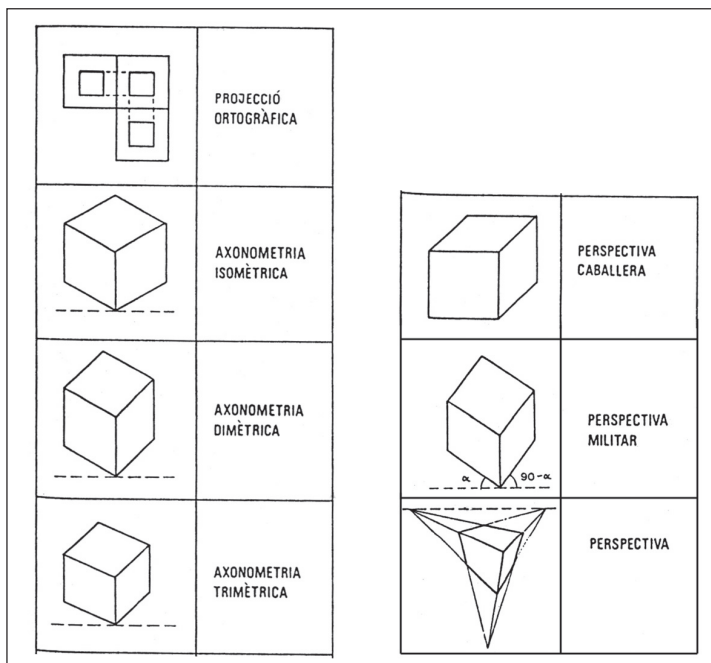


Fig. 4.5.1

En el model matemàtic projectiu s'introdueix l'espai projectiu $P(\mathbb{R}^n)$ associat a un espai euclidià \mathbb{R}^n com $P(\mathbb{R}^n) = \{ \lambda \vec{p} \mid \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{p} \in \mathbb{R}^n, \vec{p} \neq 0 \}$, és a dir, cada "punt projectiu" ve identificat per una recta $|\vec{p}\rangle = \{ \lambda \vec{p} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$. Així en \mathbb{R}^2 , si r és una recta i $0 \notin r$ aleshores cada recta $\{ \lambda \vec{p} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ (no paral·lela a r) es pot associar al punt $\lambda_0 \vec{p}$ de r que és el de tall amb la recta donada. Però si la recta és paral·lela a r aleshores cal identificar-la amb "punts de l'infinit" de r . Anàlogament en \mathbb{R}^3 hom identifica els punts d'un pla amb rectes que el tallen i "punts de l'infinit" amb rectes paral·leles al pla.

L'espai projectiu també es pot estructurar amb un sistema de coordenades a estudiar algebraicament i per les *projectivitats* (associades a les aplicacions lineals entre els espais vectorials corresponents) destacant les *perspectivitats* entre rectes i les *homografies* o projectivitats bijectives. El teorema fonamental estableix que una projectivitat queda unívocament determinada en donar tres punts alineats i els seus punts corresponents en una recta.

Els punts projectius són descrits per coordenades homogènies: agafant una base $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ en l'espai de dimensió $n + 1$, es pot expressar tot \vec{x} en la forma $\vec{x} = x_0 \vec{e}_0 + x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n \equiv (x_0, x_1, \dots, x_n)$ però en identificar-se $\vec{x} \neq 0$ amb el punt projectiu $|\vec{x}\rangle = \{ \lambda (x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \}$ cal fer *equivalents* les expressions (x_0, x_1, \dots, x_n) i $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ si un és igual a l'altre per un escalar no nul. Així en el pla projectiu s'usen tres coordenades homogènies, i en l'espai projectiu, quatre. Com a conseqüència d'això també s'usen matrius de 3×3 en el pla projectiu i de 4×4 en l'espai projectiu:

TRANSFORMACIÓ LINEAL	$\left(\begin{array}{ccc c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline - & - & - & - \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 & a_{44} \end{array} \right)$	TRANSLACIÓ
PROJECCIÓ		CANVI D'ESCALA GLOBAL

Punts de mira

Quan un pintor usava els mètodes de la perspectiva lineal introduint de forma coherent els punts de fuga, ho feia des d'una posició determinada. L'ull del pintor, la realitat a representar i el quadre com a "finestra" entre l'ull i la realitat formaven una unitat. Així doncs, aquell observador exigent que volgués assegurar-se de reviuir aquesta unitat no podria mirar l'obra des de qualsevol lloc: caldria que sabés col·locar el seu ull d'observador exactament en el lloc (relatiu al quadre) des d'on l'obra es va realitzar.

Geometria descriptiva o projectiva?

El problema de la representació gràfica té una llarga història amb una lenta evolució fins al segle XIV, quan neix a Itàlia la perspectiva sota el guiatge dels pintors. Noms com Van Eyck, Filippo Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Luca Pacioli, Donato Bramante, Albert Durero o Leonardo da Vinci... són referents essencials en tècniques de representació. Aquest procés culminaria acadèmicament amb la fonamentació de la *Geometria Descriptiva* feta per Gaspard Monge (1746-1818) i la seva escola, amb L. N. Carnot, C. J. Brianchon, V. Poncelet, etc.

Paral·lelament, G. Desargues (1593-1662) i d'altres matemàtics havien desenvolupat la *Geometria Projectiva*. Aquestes geometries es complementen però es diferencien en els resultats: la descriptiva s'ocupa de les resolucions gràfiques, i la projectiva, dels models matemàtics.

Problema 1

La imatge del punt $(2, 1)$ per una homotècia lineal respecte de l'origen és a la recta $x - 3y = 2$. Calculeu la raó de l'homotècia.

Problema 2

Trobeu la relació entre les àrees d'un triangle i la de l'obtingut en aplicar una homotècia de raó k .

Problema 3

Enumereu totes les semblances de \mathbb{R}^2 i descriuiu en què transformen un cercle i un quadrat.

Problema 4

Expliqueu el funcionament del pantògraf.

Més problemes de transformacions geomètriques

1. Digueu quines de les matrius 2×2 següents són ortogonals. Per a les que ho siguin classifiqueu-les i doneu els seus elements característics:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}; \quad B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Quines d'aquestes matrius 3×3 són ortogonals? En els casos afirmatius classifiqueu-les i doneu els seus elements invariants a l'espai:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix};$$
$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 0 & 1/3 \\ \sqrt{2}/6 & -\sqrt{2}/2 & -2/3 \\ \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/2 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

3. Trobeu les matrius associades a les transformacions del pla:
- Simetria respecte a l'eix $x = y$.
 - Simetria respecte a l'eix $y = 2x$.
 - Gir d'angle 45°
4. Trobeu les matrius de les transformacions espacials:
- Simetria respecte al pla $x + y + z = 0$.
 - Gir de 30° respecte a l'eix $x = y = z$.

5. Si una transformació del pla és lineal i transforma el cercle unitat en una el·lipse de semi-eixos 2 i 3, serà una afinitat? Quina imatge tindria el quadrat de centre $(0, 0)$ i un vèrtex en el punt $(1, 1)$?
6. Trobeu una transformació del pla que conservi àrees de paral·lelograms i no sigui una isometria.
7. Si una transformació de l'espai 2 en l'espai conserva el volum, conservarà les àrees i longituds?
8. En fer un dibuix a escala 1:100 com canvia l'àrea representada? Quina és l'àrea màxima d'un terreny quadrat que es pot dibuixar en un DIN A4 a l'escala 1:100?
9. Trobeu quines transformacions poden transformar el quadrat centrat de centre $(0, 0)$ i costat 2 en un rectangle de costats paral·lels als eixos de valor 2 i 3 i centre al $(4, 5)$.
10. Dibuixeu les imatges possibles d'un cub per totes les transformacions espacials descrites en aquest capítol.

Teoria de la simetria

5.1 Simetria i arquitectura. Grups de simetria

La teoria de la simetria constitueix avui un bell exemple de teoria interdisciplinària, en la qual problemes de diversos camps científics, artístics i tècnics són abordats amb la metodologia comuna de la simetria.

Aclarim en primer lloc l'evolució, que respecte del punt de vista de l'Arquitectura, ha tingut la concepció de "simetria".

Les primeres concepcions sobre simetria arquitectònica van identificar "simetria" amb "la proporció, l'equilibri i la bellesa". Aquesta equivalència mantinguda per Policleto, Plató i Pitàgores, entre altres, va quedar perfectament enquadrada amb la definició vitruviana de simetria:

"La simetria, o commensuració és, precisament, el vincle harmònic de cadascun dels membres de l'edifici [...] és la correspondència proporcional [...] de cadascuna de les parts considerades en si, respecte a la figura global de l'obra. Així com en el cos de l'home la qualitat de l'eurítmia està commensurada per l'avantbraç, el peu, el palmell de la mà, el dit i les altres parts, el mateix passa en l'edifici perfecte i complet".

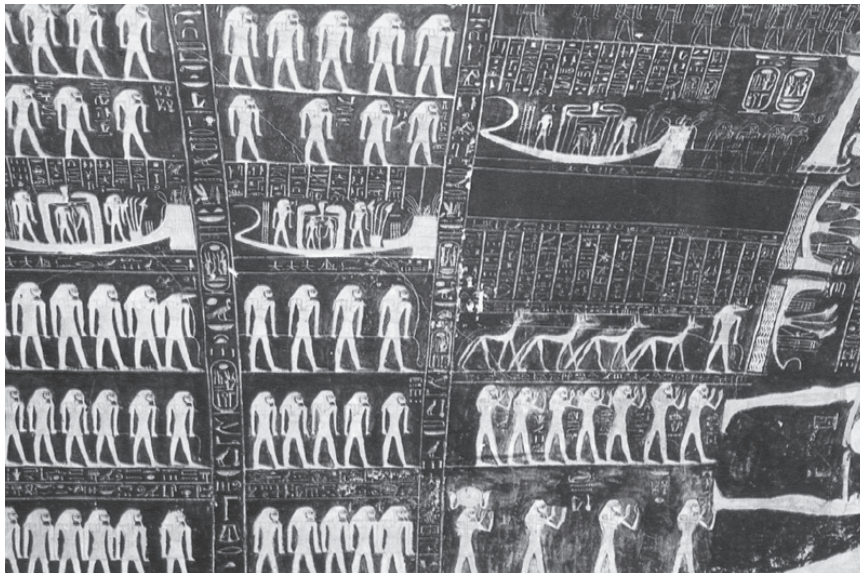


Fig. 5.1.1 Fris egipci

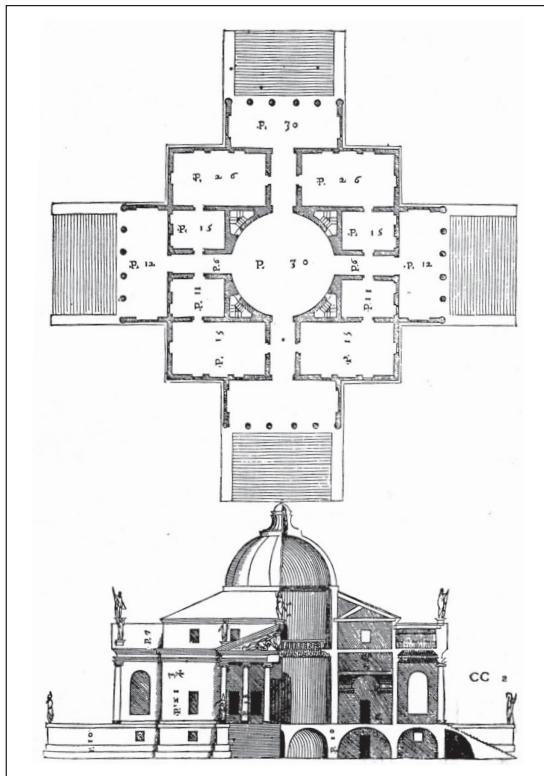


Fig. 5.1.2 Vil·la de Palladio

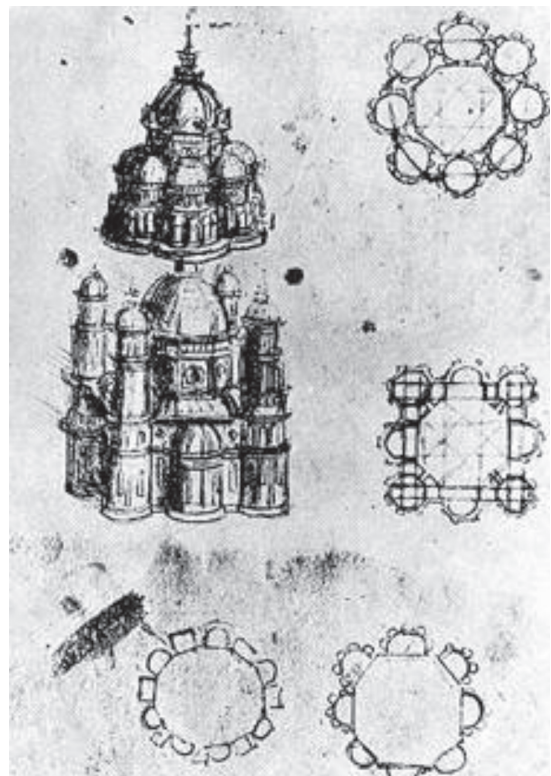


Fig. 5.1.3 Capella de Leonardo

Aquesta concepció va influir notablement en el Renaixement: Durero, Miquel Angel, Piero della Francesca, Paccioli, Leonardo da Vinci... van fer notables contribucions a la simetria sense deslligar-la mai de la proporcionalitat de l'obra. La referència de Palladio: "entenc que els edificis han de semblar un cos enter i ben definit en el qual un membre convingui a l'altre i tots els membres siguin necessaris a allò que es vol fer", sintetitza perfectament aquesta *vinculació arquitectònica de simetria i proporció en el seu aspecte global*.

Des dels gravats sumeris amb simetria bilateral, fins a les vil·les de Palladio amb sala central i habitacions equidistribuïdes (amb un caràcter centralitzador i simètric) tota una multitud d'exemples van anar marcant la reafirmació constant de la necessitat de "simetria-proporció", en el seu aspecte global i sistemàtic: els temples grecs i romans, les termes i arcs de Roma, les basíliques cristianes, les capelles de Leonardo, les façanes modularment dissenyades en el Renaixement, etc.

Aquesta recerca constant del cànon i l'ordre amb simetria i proporció es va reflectir no només en els dissenys de les plantes i façanes sinó en tots els elements integrants de l'edifici: frisos, columnates, mosaics... En molts casos el tribut a la bellesa esteticista no es va correspondre amb l'adequació funcional, per això, en tot aquest tipus de distribucions rigorosament simetritzades i proporcionades apareix més un culte al símbol i a l'harmonització que una intencionalitat resolutiva. Cal "llegir" la majoria d'aquestes obres en un sentit més simbòlic i ideològic que funcional: el símbol preponderant sobre la funció s'expressa per mitjà del cànon.

No obstant això, aquesta concepció una mica rígida de la simetria (present especialment a nivell edificatori o de detall) no sempre es va mantenir en l'estructura urbanística: mentre els romans, per exemple, tendien a distribucions urbanes "centralitzades", amb "focus centrals" i "eixos" principals, els grecs van usar criteris una mica més flexibles.

En Viollet le Duc trobarem ja una nova conceptualització de la simetria. Així, en el seu *Diccionari d'Arquitectura* s'afirma:

...simetria significa avui, en el llenguatge dels arquitectes, no un equilibri ni una relació harmoniosa de les parts amb el tot, sinó una similitud de parts oposades, la reproducció exacta, a l'esquerra d'un eix, del que hi ha a la dreta.

En el fons, la definició anterior desmarca la teoria de la proporció de la teoria de la simetria, redueix aquesta al seu aspecte euclidià (simetries axials, girs, etc.) i suprimeix el vessant equiforme (proporcions, modulacions i submodulacions...). En aquest sentit, les composicions, en perdre l'exigència proporcionada, van gaudir d'una flexibilitat major: podien donar-se simetries locals, en zones o en elements, que en absolut condicionaven la simetria global.



Fig. 5.1.4 Projecte de Frank Lloyd Wright

Per exemple, en les primeres dècades d'aquest segle, el moviment modern va apuntar cap a l'opció de distribucions d'elements més condicionades per criteris de funcionalitat i aïllament, creació d'espais intermedis, etc., que no per criteris formals de simetria.

Avui en dia, difícilment pot parlar-se de concepcions simètriques genèriques: la simetria en arquitectura i urbanisme queda relegada a aspectes parcials. Es pot parlar de *simetria en els elements* (arc, estructura, mobiliari ...); *simetria en la distribució* (accessos viaris a places, creixements urbans en filera ...); *simetria en la creació d'imatges* ("façanes mirall", llacs com miralls d'edificis ...); *simetria en la col·locació d'instal·lacions* (centralitzacions de serveis ...), etc.

En definitiva, la "macrosimetria" resulta de la reunió de les "microsimetries", havent-se alliberat aquest concepte de reunió de les exigències d'acoblament sistemàtic i coherència externa, desenvolupades per les òptiques clàssiques de l'arquitectura. En aquesta línia d'idees s'enquadra la definició de Bonelli:

L'ordre arquitectònic és un sistema d'elements morfològicament determinats, lligats per relacions sintàctiques recíproques per a formar una unitat orgànica.



Fig. 5.1.5 La trama de Cerdà



Fig. 5.1.6 La Géode, París

Fins i tot a nivell lingüístic, com assenyalava H. Weyl, avui en dia existeixen dos significats distints de la paraula simetria: d'una banda, l'acceptació "simetria" equivalent a "concordança, equilibri, bona proporció", i per una altra, la connotació geomètrica de la paraula. En aquest sentit s'entendrà que la *teoria de la simetria és una part de la geometria que, operant sobre l'espai euclidià, engloba com a transformacions totes les isometries, essent el seu interès específic l'estudi dels grups d'isometries que deixen invariants les figures*. En tal teoria s'enquadren els grups de simetria puntuals, els grups de frisos, els grups de simetria del pla, la teoria de mosaics, la simetria espacial, etc.

La Géode a la Villette de París

A la ciutat de les Ciències i la Indústria (La Villette) de París, el 1987 s'edificà la Géode. Es tracta d'un cinema per a grans projeccions a l'interior d'una esfera. A. Fainsilber i G. Chamayen dissenyaren aquesta estructura seguint les idees de Richard Buckminster Fuller. En l'estructura polièdrica hi ha 835 nusos i barres que formen una malla de 6.433 triangles. Però potser el més espectacular del conjunt és el recobriments-mirall que permet atractives imatges per a qui mira de prop i interessants reflexos dels raigs solars per a qui, estant a París, molt lluny, mira en direcció a La Villette. La simetria esfèrica és sempre sorprenent.

Grup de simetria d'una figura plana

Si considerem una figura com un subconjunt de punts del pla (figura plana) o de l'espai (figura espacial), podem interessar-nos pel conjunt de moviments que deixen invariant una figura donada, F .

Donada una figura F , designarem per S_F el conjunt dels moviments T que transformen F en ella mateixa (la deixen invariant):

$$S_F = \{T \text{ és moviment rígid i } T(F) = F\}$$

és clar que:

- Si T i $T' \in S_F$ la seva aplicació successiva $T \circ T' \in S_F$.
- Si $T \in S_F$ aleshores T^{-1} (moviment invers) també és de S_F .
- La identitat I és de S_F .

Aquestes tres propietats les resumirem dient que el conjunt S_F amb l'operació de composició de moviments és un grup anomenat grup de simetria de la figura F . Fer la taula del grup és donar el resultat de compondre tot parell d'elements del mateix grup.

Exemple. Un rectangle R té dos eixos de simetria, r_1 i r_2 , i és invariant per un gir de centre O i angle $180^\circ \cdot G_0^{180}$, per tant, el seu grup de simetria és

$$S_R = \{S_{r_1}, S_{r_2}, G_0^{180}, I\}$$

i la taula del grup és la següent:

GRUP	I	S_{r_1}	S_{r_2}	G_0^{180}
I	I	S_{r_1}	S_{r_2}	G
S_{r_1}	S_{r_1}	I	G_0^{180}	S_{r_2}
S_{r_2}	S_{r_2}	G_0^{180}	I	S_{r_1}
G_0^{180}	G	S_{r_2}	S_{r_1}	I

El grup de simetria permet classificar les figures: dues figures es consideraran equivalents si tenen el mateix grup de simetria.

Les figures amb "molta simetria" tenen un grup S_F gran, i les "més irregulars" són aquelles en què $S_F = \{I\}$. En el cas finit, S_F té tants elements com maneres hi ha de recol·locar la figura F retallada d'una cartolina en el seu motlle-mare.

La simetria d'una figura depèn dels moviments rígids. En conseqüència dimensions, angles, paral·lelismes i formes són conservats però l'orientació pot canviar, i s'observa una *permutació dreta-esquerra*. (Què passarà si el lector es posa davant del mirall i avança la seva mà dreta per fer una cordial encaixada amb la seva pròpia imatge?)

La simetrització apareix de forma natural en moltes formes de la natura (minerals, éssers vius, etc.) i en fenòmens (moviments periòdics, trajectòries, reflexió de la llum, etc.), i es veu en el reflex de les aigües tranquil·les, i intencionadament provocada, en els miralls.

Problema 1

Quin és el grup de simetria d'una mansana típica de l'Eixample de Barcelona?

Problema 2

Estudieu el grup de simetria d'un rombe i d'un mosaic de rombes.

Problema 3

Quan el grup de simetria d'una figura plana pot tenir un nombre senar d'elements? Pot existir un grup de simetria que tingui sols un gir? Si dues figures són homotètiques, com són els seus grups de simetria?

5.2 Grups puntuals de simetria o de Leonardo

Un tipus especial de grup de simetria és l'anomenat grup puntual o de Leonardo, en honor de Leonardo da Vinci, que va utilitzar tals grups en alguns dels seus dissenys arquitectònics de capelles.

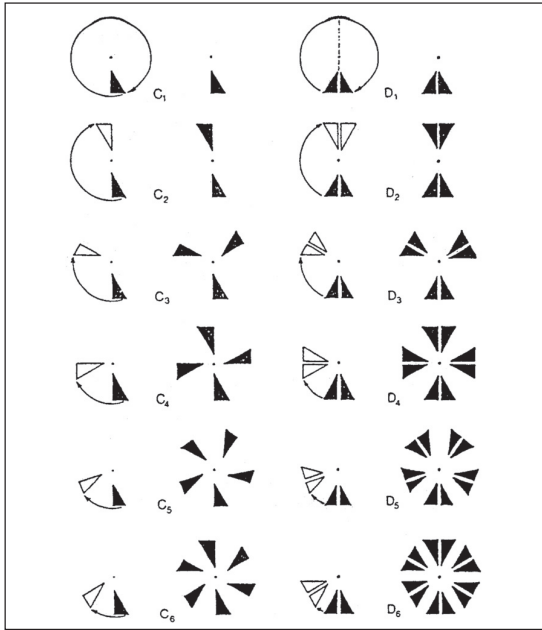


Fig. 5.2.1

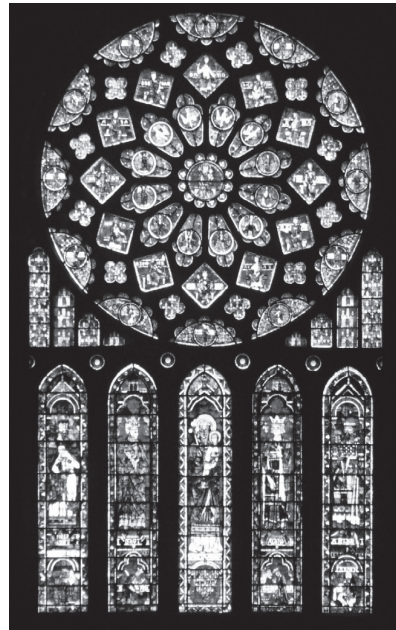


Fig. 5.2.2

Definició. Un grup de simetria S_F , d'una figura plana F , es diu *puntual o de Leonardo* si S_F és un grup finit i existeix un punt θ de F , fix per a tots els elements de S_F (*centre de simetria de F*).

Anem a trobar tots els possibles grups de Leonardo, treballant sempre amb angles en els girs que siguin menors o iguals a 2π . En efecte, si S_F és un tal grup finit amb un punt θ fix S_F no pot contenir cap translació en ser θ fix, per tant, S_F només podrà tenir girs amb centre θ i simetries axials amb θ en l'eix.

Teorema de Leonardo. Els únics grups puntuals de simetria de Leonardo són els grups cíclics C_n o els grups diedrals D_n , per a $n = 1, 2, \dots$

El/la lector/a està convidat/da a demostrar aquest teorema.

En les imatges s'han donat figures generades a partir d'un mòdul, per iteració dels grups C_n i D_n . Ara evidenciem que *els grups de Leonardo per a $n \geq 3$ es corresponen unívocament amb els grups de simetria dels polígons*.

Igual que succeeix amb els grups D_1 i D_2 també els grups cíclics C_1 i C_2 són especials.

Tot polígon de n -costats està determinat per n vèrtexs distints A_1, A_2, \dots, A_n i els n costats o segments $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ (els costats només tenen en comú els vèrtexs). Cada tres vèrtexs consecutius determinen un *angle*. El polígon es diu *convex* si donats dos punts qualssevol, situats en els costats, el segment que els uneix està contingut en l'interior del polígon o en la seva frontera. Quan el n -polígon és convex i tots els seus costats i angles són iguals, es diu que és un polígon *regular*.

Teorema. Per a tot $n \geq 3$ el grup diedral D_n és exactament el grup de simetria del n -polígon regular.

I posant fletxes (orientació) a un polígon regular, resulta

Teorema. Per a tot $n \geq 3$ el grup cíclic C_n és exactament el grup de simetria del n -polígon orientat.

En introduir els grups de Leonardo s'ha citat de passada l'interès que aquests grups van tenir en el Renaixement per al disseny de plantes de capelles. Concretament, Leonardo va realitzar un estudi sistemàtic de tals grups de simetria amb vista a establir els mètodes òptims d'adjuntar elements i capelles adjacents a un nucli central (o capella principal), sense trencar la simetria central del nucli. Leonardo va usar essencialment els grups diedrals en els seus dissenys arquitectònics, usant només alguns grups cíclics en certes invencions d'enginyeria. Leon Battista Alberti, en els seus *Deu llibres sobre Arquitectura*, afirma que "...els polígons usats pels antics eren de sis, vuit, o algunes vegades de deu costats", fent clara referència als dissenys diedrals de les plantes dels temples clàssics. Essencialment l'ús més constant de grups diedrals s'ha donat en la que podríem anomenar arquitectura religiosa, ja que la simetria poligonal aportada per les plantes enllaça amb el caràcter netament simbòlic que pretén expressar l'edifici. Naturalment, existeixen usos de grups de Leonardo a nivell arquitectònic civil. Dissenys de Soane, Ledoux, Wright, etc., n'ofereixen exemples.

En temps recents l'ús de grups de Leonardo en el disseny de plantes s'ha vist enriquit amb una nova idea: *l'existència d'un punt central de simetria en la planta (punt que donarà lloc a un eix de simetria en l'edifici) permet localitzar en el centre tots aquells serveis i instal·lacions d'interès general* (escales, ascensors, conduccions elèctriques, d'aigua, de gas o d'aire condicionat, etc.). Aquesta centralització geomètrica aporta un notable estalvi econòmic i, el que és més important, un recobriment natural de tals instal·lacions. Per descomptat el disseny de caràcter centralitzat implica problemes difícils de resoldre, com és el de la il·luminació solar dels edificis. Ara bé, en edificis singulars aquests problemes són pràcticament irrelevants.

Des del punt de vista de l'arquitectura generativa i de l'urbanisme, tant els grups cíclics com els diedrals són de màxim interès. Per exemple, una distribució poligonal amb edificis en els vèrtexs o les arestes permet generar en el centre un espai comú susceptible de contenir una plaça o zona enjardinada o bé algun edifici d'interès comunitari (escola, serveis administratius, etc.).

Al marge del projecte arquitectònic o del disseny urbanístic, es poden citar altres usos dels grups de Leonardo en el disseny de rosasses, elements de mobiliari, elements constructius, etc.

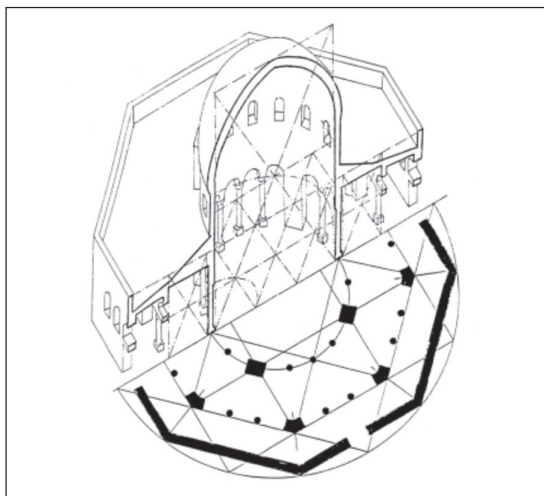


Fig. 5.2.3 Centralitat en planta

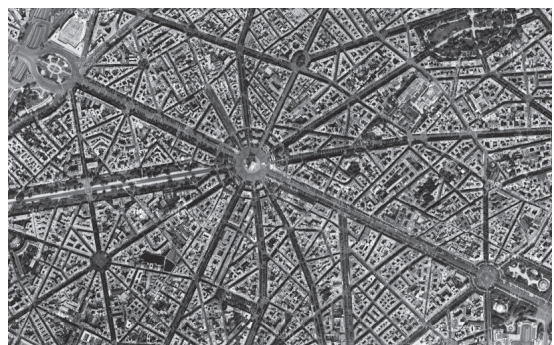


Fig. 5.2.4 Simetria urbana central

Problema 1

Descriu els grups de simetria de la figura 5.2.2.

Problema 2

Descriu els grups de simetria de les figures 5.2.3 i 5.2.4

Problema 3

Un grup de simetria de Leonardo té un nombre senar de moviment. Què podem dir del grup?

5.3 Grups de simetria dels frisos

Els frisos o sanefes són les decoracions rítmiques pròpies de l'ornamentació clàssica: la decoració periòdica que va omplint una banda. A partir d'un motiu o mòdul determinat i amb moviments rígids el motiu es va repetint, amb un ritme determinat, decorant la banda. Per descriure matemàticament les sanefes tenim la següent:

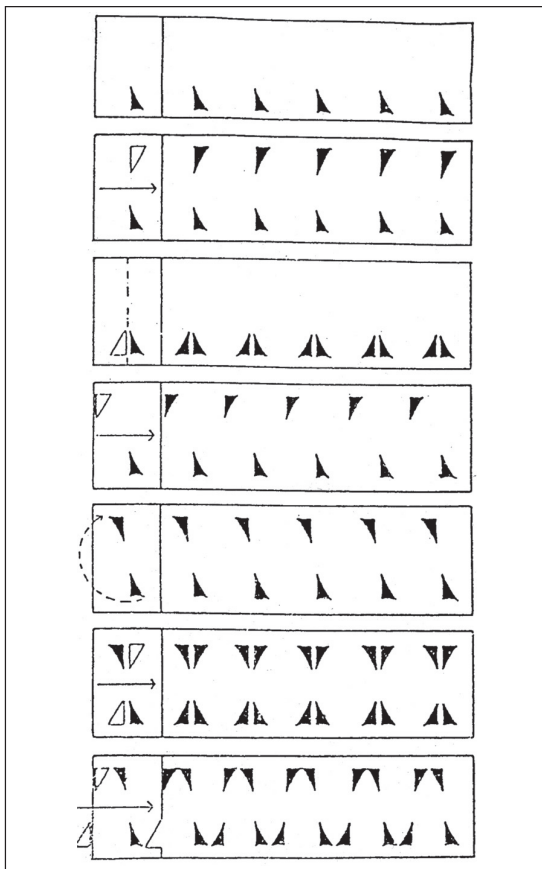


Fig. 5.3.1

Definició. Sigui una recta generada per un vector \vec{a} , $\vec{a} \neq 0$. Una figura F que contingui r , es dirà una sanefa si en el seu grup de simetria S_F tots els moviments rígids deixen r invariant i les úniques translacions que hi ha són les generades pel vector \vec{a} .

D'acord amb la definició, el grup de simetria sempre serà infinit i contindrà com a mínim el grup de translacions $\{T_{n\vec{a}} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Així, una recta o un parell de rectes paral·leles no són una sanefa perquè moltes translacions les deixen invariants. La translació $T_{\vec{a}}$ és la que marca el ritme de repetició. I si no hi ha ritme no hi ha sanefa. Cal també notar que la recta no necessàriament s'ha de "veure".

És fàcil justificar que els únics moviments rígids que poden formar part del grup de simetria d'una sanefa són:

- *Translacions:* $T_{n\vec{a}}$ amb \vec{a} generador de la recta r ;
- *Simetria* S_r respecte de la recta r ;
- *Simetries* $S_{r'}$ respecte de rectes r' perpendiculars a r ;
- *Lliscaments* determinats per la simetria S_r respecte de r seguida de translacions del tipus $T_{n\frac{\vec{a}}{2}}$ $n \in \mathbb{Z}$;
- *Gir de 180°*, G_P^{180} al voltant de centres de gir P situats a r .

Vet aquí que combinant aquestes transformacions resulten sols 7 tipus possibles de sanefes com les representades a les figures adjuntes. Els generadors s'especifiquen a la taula següent:

Grup	Notació	Generadors
1	11	$T_{\bar{a}}$
2	1m	$T_{\bar{a}}, S_r$
3	m1	$T_{\bar{a}}, S_r(r' \perp r)$
4	1g	$T_{\bar{a}}, T_{\frac{1}{2}\bar{a}} \circ S_r$
5	12	$T_{\bar{a}}, G_p^{180}(p \in r)$
6	mm	$T_{\bar{a}}, S_r, S_r(r' \perp r)$
7	mg	$T_{\bar{a}}, G_p^{180}(p \in r), T_{\frac{1}{2}\bar{a}} \circ S_r$

Cal notar que no es tracta de mirar la simetria parcial del motiu generador sinó sempre la *simetria global de tota la sanefa*.

L'algorisme següent ajuda a classificar les sanefes. Localitzada la imprescindible translació $T_{\bar{a}}$ mireu el següent:

SI	Simetria horitzontal	mm	...HHH...	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>mm</td> <td>H H H H H H...</td> </tr> <tr> <td>mg</td> <td>M W M W M W...</td> </tr> <tr> <td>m1</td> <td>A A A A A A...</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>N N N N N N...</td> </tr> <tr> <td>1m</td> <td>C C C C C C...</td> </tr> <tr> <td>1g</td> <td>D M D W D M D W...</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>L L L L L L...</td> </tr> </tbody> </table>	mm	H H H H H H...	mg	M W M W M W...	m1	A A A A A A...			12	N N N N N N...	1m	C C C C C C...	1g	D M D W D M D W...	11	L L L L L L...
	mm	H H H H H H...																		
	mg	M W M W M W...																		
m1	A A A A A A...																			
12	N N N N N N...																			
1m	C C C C C C...																			
1g	D M D W D M D W...																			
11	L L L L L L...																			
Lliscament	mg	...MWM...																		
No més isometries	m1	...MMM...																		
Simetria vertical?	Gir de 180	12	...NNN...																	
	Simetria horitzontal	1m	...BBBB...																	
	Lliscament	1g	...DMDW...																	
	No més isometries	11	...JJJ...																	

Fig. 5.3.2

Introduint 2 colors hi ha 31 sanefes bicolors, i canviant translació per homotècia hom troba 11 sanefes.

La mateixa denominació "grups de frisos" té el seu origen en els frisos arquitectònics. Com a exemple remot podria considerar-se que les fileres uniformes de monuments megalítics constitueixen un fris espacial sobre el paisatge. Això no obstant, a Egipte és on apareixen, amb tota la seva intencionalitat i tècnica, els frisos ornamentals. En multitud de càmeres de les piràmides existeixen frisos geomètrics, ja sigui com a simple decoració o com a bandes limitants entre el final del mur i el principi del sostre. Els motius que generen dits frisos acostumen a ser representacions estilitzades de flors, animals o esquemes geomètrics de figures planes.

En el temple grec és on el fris adquireix notorietat constructiva: el fris com una banda que limita a l'acabament dels murs o les columnates, sobre l'arquitrau, marcant l'element sobre el qual reposa el sostre o cornisa. Amb això el fris comença a fer el doble paper d'element arquitectònic construït i espai susceptible d'ornamentació. A més, pel seu emplaçament peculiar, el fris constitueix un element clau de la façana, el que fa que la seva decoració adquireixi una càrrega simbòlica notable.



Fig. 5.3.3

No cal dir que en l'ornamentació del fris van existir les distintes opcions de pintura, escultura, baixrelleu, ceràmica... o simplement el fris rectangular, net, que afirmava simplicitat i delimitació. Així, els frisos dòrics posseeixen escultures (aïllades o formant un conjunt); els frisos jònics estan esculpits; els frisos paleocristians són d'obra vista (ceràmica, rajola... etc.). En la *Gramàtica de l'ornamentació*, Owen Jones inclou multitud d'exemples de frisos egipcis i grecs. Per descomptat, en el temple romà se segueix privilegiant també l'ús del fris i al llarg de tota la història de l'arquitectura apareix dit element, sent especialment notable el disseny de frisos àrabs, com per exemple, els existents a l'Alhambra de Granada.

Un tema interessant d'estudi no arquitectònic (però sí decoratiu) ha estat l'anàlisi de tipus de sanefes en decoracions d'instruments musicals, en tipografia i orles i en elaboracions tèxtils.

En el present segle, si bé es continua usant la concepció clàssica del fris arquitectònic (no només en exteriors, sinó també en interiors: frisos de guix), s'ha posat repetidament en crisi l'aforisme de Jones: "Les construccions han de ser decorades. La decoració mai no ha de ser construïda a propòsit". Per a arquitectes del Moviment Modern racionalista, com Le Corbusier i Frank Lloyd Wright, la ornamentació, més enllà d'un ritm, seria el resultat d'una síntesi, una articulació d'elements o l'existència d'un motlle generador estructural.

Però precisament amb les tendències modernes en arquitectura sorgeix una nova concepció del fris: *el fris de les edificacions enllaçades*. Amb això, el clàssic motiu geomètric que es repeteix al llarg d'una banda es veu substituït per la planta (de l'edifici o apartament) capaç de generar, per translació horitzontal, una sèrie d'edificis o apartaments en filera.

Problema 1

Trobeu els grups de simetria de les sanefes següents:

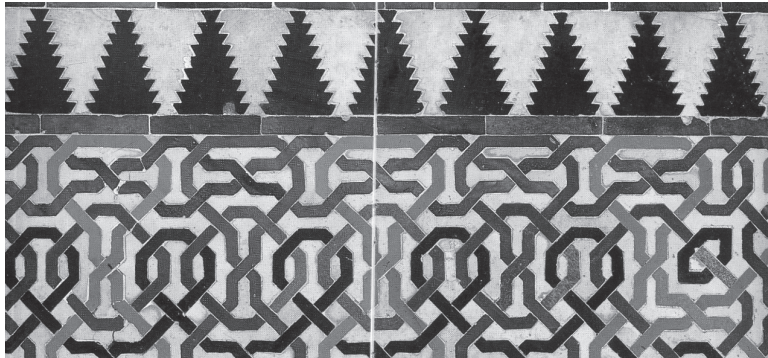


Fig. 5.3.4

Problema 2

Quin és el grup de simetria de la corba sinusoide? I el de la cosinusoide?

Problema 3

Estudieu els frisos en repetir cadascuna de les lletres de l'alfabet complementant els exemples de la figura 5.3.2

5.4 Grups de simetria del pla

En aquest apartat estudiarem certs grups de isometries que actuen sobre tot el pla \mathbb{R}^2 i que per això es diuen *grups de simetria del pla*. I. S. Fedorov, estudiant cristal·lografia, va demostrar l'existència d'únicament 17 grups de simetria del pla. De fet, com cita el mateix Fedorov, ja el 1869 C. Jordan havia descrit 16 de tals grups, i el 1874, L. Sohncke va reconèixer el que faltava; oblidant-se no obstant això, en la seva consideració, de 3 dels que Jordan ja havia parlat amb anterioritat. El 1924, G. Pólya i P. Nigghi redescobriren els 17 grups de Fedorov. Des de llavors, tals grups han estat estudiats exhaustivament i aplicats no només a cristal·lografia (els 17 grups són simbolitzats avui d'acord amb les Taules Internacionals de Cristal·lografia de Raigs X), sinó també a diversos aspectes de disseny: mosaics, pintura, escultura, i, és clar, arquitectura.

Per a començar l'estudi dels 17 grups mirem-ne primer una descripció visual.

En tots els casos s'observa que, a partir d'una figura irregular, aplicant diversos tipus d'isometries es genera un *paral·lelogram* que per repetició és susceptible de cobrir el pla, de forma que la distribució plana final és al seu torn invariant per les mateixes isometries que van generar la figura inicial. Concretarem aquesta idea amb les definicions següents:

Un *mosaic periòdic* M és una figura plana tal que el subgrup $T(M)$ de translacions que transformen M en si mateix està generat per dues translacions $T_{\vec{a}}$ i $T_{\vec{b}}$ amb vectors $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ que són linealment independents. Així tindrem

$$T(M) = \{T_{n\vec{a}+m\vec{b}} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

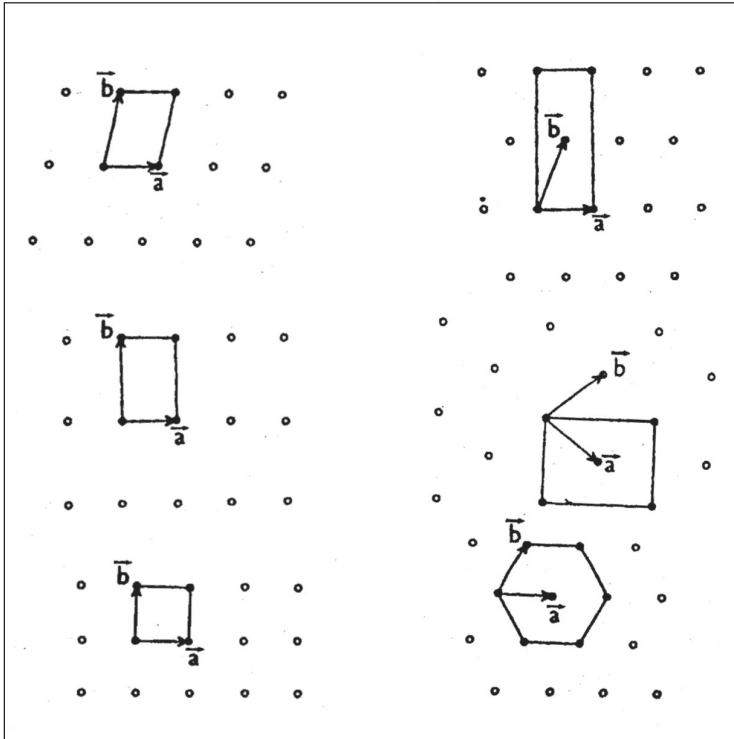


Fig. 5.4.1

En un mosaic periòdic M una cèl·lula és una part C del pla tal que C és convexa i compacta, les imatges de C per les translacions de $T(M)$ recobreixen el pla i cap subconjunt tancat de C diferent d'ell pot tenir aquesta propietat de recobriment. Així quan es té una cèl·lula C pot assegurar-se que:

$$M = \cup_{t \in T(M)} t(C \cap M)$$

Si M és un mosaic periòdic designarem per $G(M)$ el grup que transforma el mosaic periòdic M en si mateix:

$$G(M) = \{g \text{ moviment rígid} \mid g(M) = M\}$$

sent $T(M)$ subgrup de $G(M)$, i aquest, subgrup discret del de moviments rígids. No cal dir que el cas més simple es donarà quan es consideri un mosaic periòdic M amb $G(M) = T(M)$, amb només les translacions bàsiques en joc. Els altres grups de simetria del pla resultaran d'ampliar $T(M)$ amb certs girs, reflexions i reflexions amb lliscament.

Es dirà *domini fonamental* del mosaic periòdic M a un subconjunt del pla D convex, compacte i d'interior no buit tal que les seves imatges per les isometries de $G(M)$ recobreixen el pla sense que aquestes imatges puguin sobreposar-se.

Així, en tot mosaic periòdic M podrem sempre localitzar tant la cèl·lula bàsica com el domini fonamental. En M sempre existirà una xarxa de paral·lelograms generada pels dos vectors \vec{a}, \vec{b} de $T(M)$. Aquesta xarxa pot ser obliqua, rectangular, ròmbica, quadrada i hexagonal (el paral·lelogram és reunió de triangles equilàters). Aquestes xarxes subjacents condicionen les possibles composicions dels grups $G(M)$.

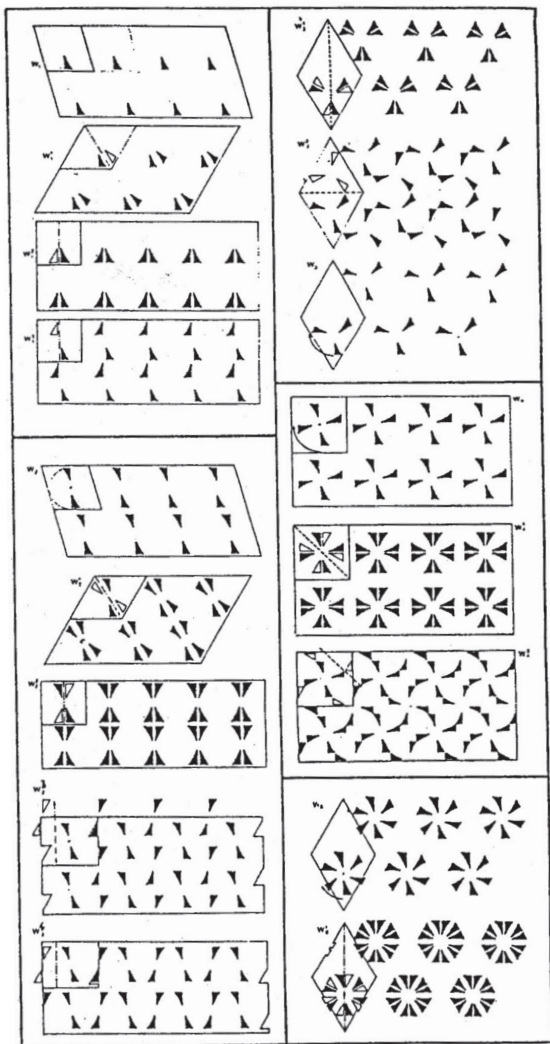


Fig. 5.4.2

Curiosament la *restricció cristal·logràfica* assegura que si hi ha girs no trivials en $G(M)$ aquests només poden ser d'ordre 2, 3, 4 i 6, és a dir, amb angles corresponents a

$$180^\circ, 120^\circ, 90^\circ, \text{ o } 60^\circ$$

i els seus múltiples.

Teorema. Existeixen només 5 tipus de grups d'isometria del pla que contenen isometries que conserven l'orientació, i aquests grups estan generats per les isometries següents:

$$p_1 = \langle T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}} \rangle,$$

$$p_2 = \langle T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}, G_{\vec{p}}^{2\pi/2} \rangle,$$

$$p_3 = \langle T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}, G_{\vec{p}}^{2\pi/3} \rangle,$$

$$p_4 = \langle T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}, G_{\vec{p}}^{2\pi/4} \rangle,$$

$$p_5 = \langle T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}, G_{\vec{p}}^{2\pi/6} \rangle$$

Es poden deduir de la figura quins són els 12 grups que apareixen a partir dels cinc bàsics sota la norma d'estudiar quines simetries axials i simetries amb lliscament poden afegir-se a cadascun dels p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 i p_6 .

Teorema. Només existeixen 17 tipus de grups isometria del pla, 5 dels quals només contenen isometries que conserven l'orientació i en els 12 restants, a més, apareixen simetries axials i lliscaments.

Estudis sobre distribucions d'edificis segons grups de simetria del plànol han rebut especial atenció i han donat a aquest tema continguts funcionals, més enllà dels problemes formals de decoració.

A continuació esmentarem per a cadascun dels grups de simetria els seus generadors característics:

- P1: Translacions. És el grup amb menys elements de simetria.
- Pg: Translacions i lliscaments en una sola direcció (sense girs ni simetries axials).
- Pm: Translacions i simetries en una sola direcció (sense girs ni lliscaments).
- cm: Translacions, simetries axials i lliscaments (d'eixos diferents) (sense girs).
- p2: Translacions i girs de 180° (sense simetries ni lliscaments).
- pmm: Translacions, girs de 180° i simetries en dues direccions perpendiculars.
- pmg: Translacions, gir de 180° i simetries en una sola direcció.
- pgg: Translacions, gir de 180° i lliscaments (sense simetries axials).

- cmm: Translacions, gir de 180° i simetries respecte de dues direccions perpendiculars.
- P4: Translacions i girs de 90° (i per tant de 180° i 270°) (sense simetries ni lliscaments).
- P4m: Translacions, girs de 90° (i 180° , 270°) i simetries en 4 direccions.
- P4g: Translacions, girs de 90° (i 180° , 270°) i simetries en 2 direccions.
- P3: Translacions i girs de 120° (i 240°) (sense simetries ni lliscaments).
- P31m: Translacions, girs de 120° (i 240°) i simetries amb eixos sense centres de gir.
- P3ms: Translacions, girs de 120° (i 240°) i simetries amb eixos que tenen centre de gir.
- P6: Translacions i girs de 60° (i 120° , 180° , 240°) (sense simetries ni lliscaments).
- P6m: Translacions, girs de 60° (i 120° , 180° , 240°) i simetries.

L'Alhambra de Granada

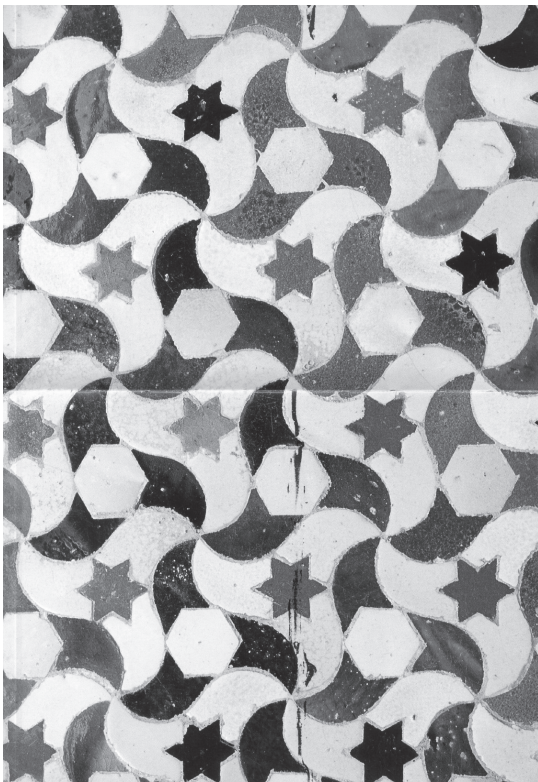


Fig. 5.4.3

moltes generacions d'artesans... però per mitjà de la geometria dels escaires i d'anar cercant innovacions s'acaben exhaurint totes les possibilitats.

Miguel de la Fuente, estudiant la mesquita de Còrdova, ha localitzat 14 tipus de grups de simetria.

A l'Alhambra també hi ha un joc fi de formes arquitectòniques simètriques (columnes, cúpules, finestral, arcs, patis...) i una presència de l'aigua exuberant (piscines-mirall, raigs distribuïts simètricament,...).

Un dels complexos arquitectònics més bells del món és el de l'Alhambra de Granada. Al llarg de segles d'esplendor la dinastia nassarita va anar creant palaus exquisidament decorats i jardins plens de jocs d'aigua. Els estucats, les gelosies i els enrajolats omplien parets, els sostres exhibien formes cupulars diverses i els poemes dedicats a Al·là s'integraven en la decoració. El matemàtic Rafael Pérez Gómez ho descriu molt bé:

"Per als musulmans el poder prové d'Al·là i, a més, els protegeix. Per això Al·là ha d'estar present a tots els palaus nassarites. Com se'l pot posar de manifest si la religió musulmana prohibeix fer servir imatges seves? La resposta és matemàtica. Una característica fonamental de la decoració geomèrica és l'ús d'un sol disseny que per multiplicació d'ell mateix cobreix tota una superfície. Així s'aconsegueix representar la unitat –Al·là és u– amb la multiplicitat –i és a tot arreu"

Durant anys, molts matemàtics del segle XX van estar classificant els grups de simetria de l'Alhambra (vegeu més endavant l'apartat dedicat a Escher) i no estava clar quants tipus diferents n'hi havia. Va ser Rafael Pérez Gómez el que finalment va poder demostrar en la seva important tesi que... hi ha els 17 grups de simetria. Sorprenent! L'obra va ser feta durant segles, sense un projecte preconcebut, amb

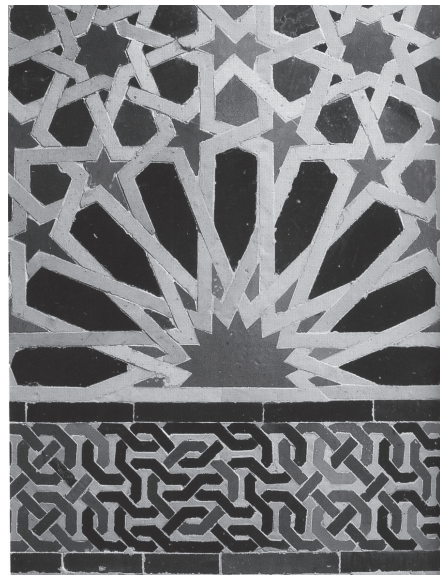
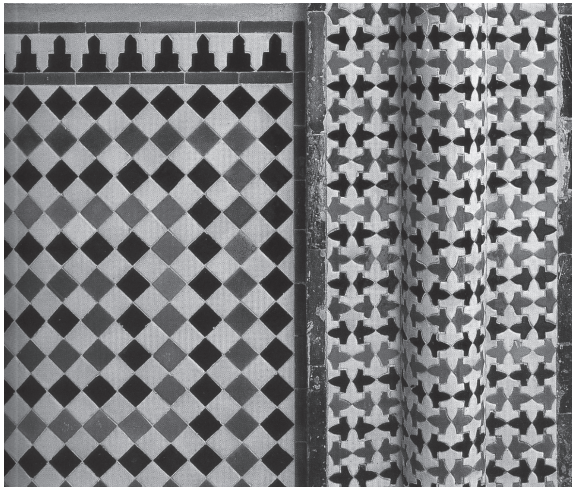


Fig. 5.4.4 Simetria a l'Alhambra de Granada

Els mosaics

Un tipus especial de recobriment del pla és el del mosaic. Els diferents tipus de mosaics sorgeixen d'afegir, al principi general de repetició d'un mòdul en dues direccions, condicions restrictives d'acoblament i regularitat. Vegem els mosaics principals.

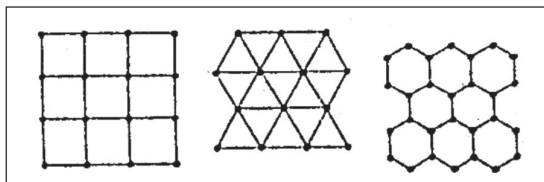


Fig. 5.4.5 Mosaics regulars

Mosaics regulars

Resulten d'acoblar entre si una sèrie infinita de polígons regulars idèntics. Els únics mosaics regulars són els quadrangulars, triangulars i hexagonals.

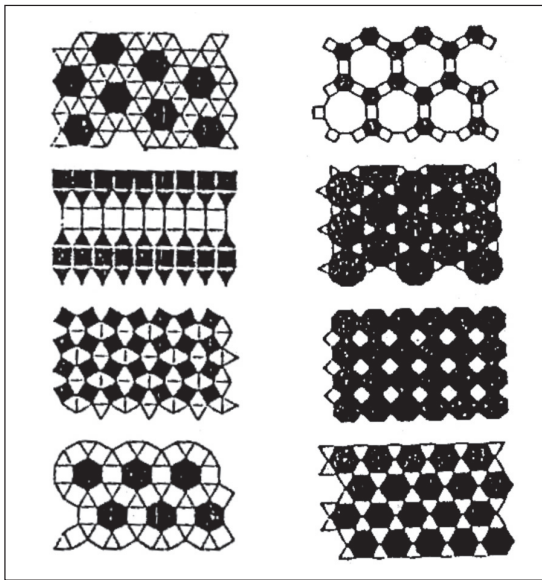


Fig. 5.4.6 Mosaics semiregulars

Mosaics semiregulars

Són els generats en combinar dos tipus de polígons regulars de dimensions apropiades per a l'acoblament. Existeixen 8 tipus de tals mosaics, com il·lustra la figura.

Mosaics pentagonals no regulars

Malgrat quedar els pentàgons regulars exclosos dels mosaics regulars, s'han aconseguit construir, repetint una sola peça, fins a 14 tipus de mosaics pentagonals no regulars (K. Reinhardt (1918), R.B. Kershner (1968), R. James (1975), M. Rice (1976), R. Stein (1985)).

Mosaics no periòdics aleatoris

Partint de qualsevol mosaic s'associa un algorisme aleatori (tirar una moneda per exemple) i una manera d'associar a cada rajola una tirada. Si es pinta de negre quan surt cara i de blanc quan surt creu, la no periodicitat queda garantida.

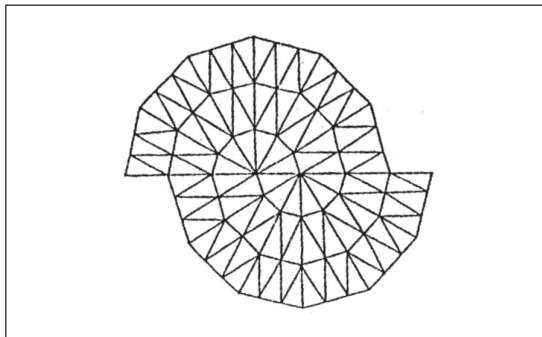


Fig. 5.4.7 Mosaics en espiral

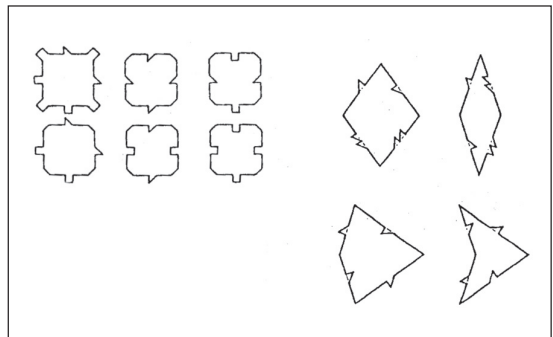


Fig. 5.4.8 Peces de Robinson i Penrose

Mosaics en espiral

Van omplint el pla però creixent en forma espiral. Curiosament una mateixa peça que pot fer un mosaic periòdic també pot fer de vegades un mosaic-espiral.

Mosaics de Robinson i Penrose

L'any 1971, M. R. Robinson va trobar sis rajoles que combinades formen un mosaic no periòdic. El 1974, R. Penrose va descobrir dues parelles de formes (els dos rombes de $(72^\circ, 108^\circ)$ i $(36^\circ, 144^\circ)$ i la parella de l'estel i la sageta) que formen mosaics (molts i diferents) no periòdics. Concretament l'estel (amb tres angles de 72° i un de 144°) i la sageta (amb dos angles de 36° , un de 72° i un de 216°) deriven de bocins de pentàgon i en els mosaics que formen hi ha simetries amb girs d'ordre 5 (la qual cosa està renyida amb la periodicitat!). També surt la no periodicitat per un altre fet curiós: la raó entre el nombre de les peces més repetida d'un tipus i el nombre de peces de l'altre tipus, té com a límit el nombre d'or ϕ .

En l'apartat següent veurem els mosaics d'Escher.

M. C. Escher

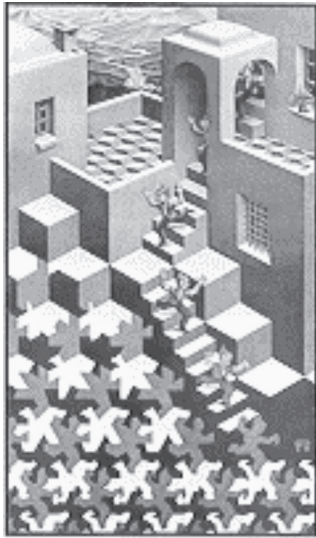


Fig. 5.4.9

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) va ser un gran artista holandès que va saber fondre com ningú geometria, art i imaginació. A part de les seves obres sobre la figura humana, la natura i l'arquitectura, destaquen entre totes les obres d'Escher les arquitectures impossibles (edificis bellament dibuixats que mai no podrien existir en la realitat), les metamorfosis on evolucionen les formes transformant-se i els mosaics escherians.

Va ser visitant l'Alhambra de Granada diverses vegades que Escher va tenir la brillant idea de captar la forma de decorar dels àrabs (motius geomètrics o florals) i aplicar-se la generació a d'altres formes animals, humanes, etc.

En els esquemes de P. Butzbach (fig. 5.4.11) podem veure la forma sublim d'Escher de retallar i enganxar (equilibrant concavitats i convexitats) creant noves rajoles i mosaics sorprenents.



Fig. 5.4.10

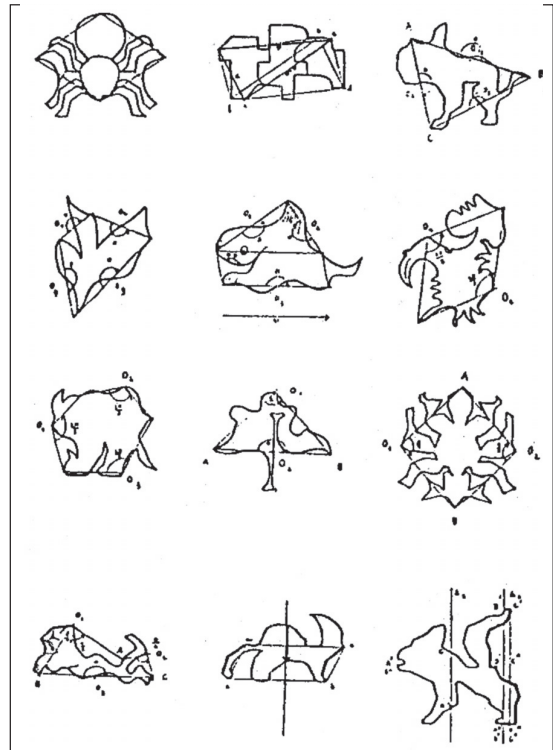


Fig. 5.4.11

Problema 1

Un mosaic està format per triangles isòsceles (no equilàters). Estudieu el grup de simetria en el pla.

Problema 2

S'ha adornat un pla repetint cercles, formant un empaquetament hexagonal. Com és el grup de simetria d'aquesta decoració?

Problema 3

Trobeu els grups de simetria dels 3 mosaics regulars i dels 8 mosaics semiregulars.

5.5 Simetria espacial

Fins ara hem centrat l'atenció en grups de simetria del pla. Tot això té la seva versió tridimensional. Així, donada una figura F de \mathbb{R}^3 podem també trobar el seu grup de simetria

$$S_F = \{T \mid T \text{ isometria de } \mathbb{R}^3 \text{ i } T(F) = F\}$$

En la figura 5.6.1 veiem els cinc políedres regulars: cub i octàedre tenen el mateix grup de simetria, dodecàedre i icosaèdre també i, per tant, entre els 5 tipus de políedres sols tenim de fet 3 grups de simetria.

Prismes, antiprismes, piràmides i figures obtingudes traslladant cap a l'espai figures planes amb un determinat grup de Leonardo donen lloc a figures espacials de simetria simple.

En el cas de políedres estelats regulars de Kepler i Poinçot les simetries es deriven de les figures polièdriques que menen a l'estelació.

També es poden estudiar sanefes a l'espai i els grups discrets d'isometries amb tres translacions independents... però d'aquests grups n'hi ha 230.

Un altre tema espacial rellevant és el d'empaquetament (mosaics espacials) on cub i rombododecaedre hi tenen un paper especial.

Alguns políedres donen lloc a sorprenents dissenys d'edificis o d'escultures.

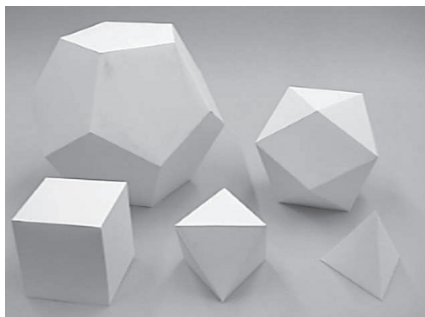


Fig. 5.6.1



Fig. 5.6.2

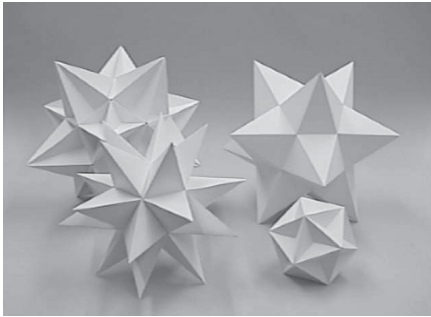


Fig. 5.6.3

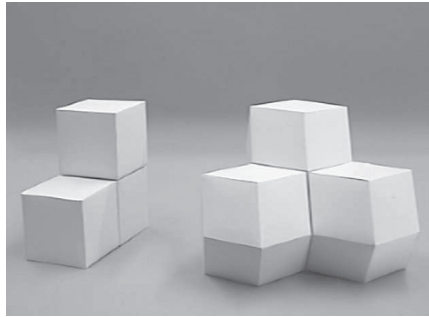
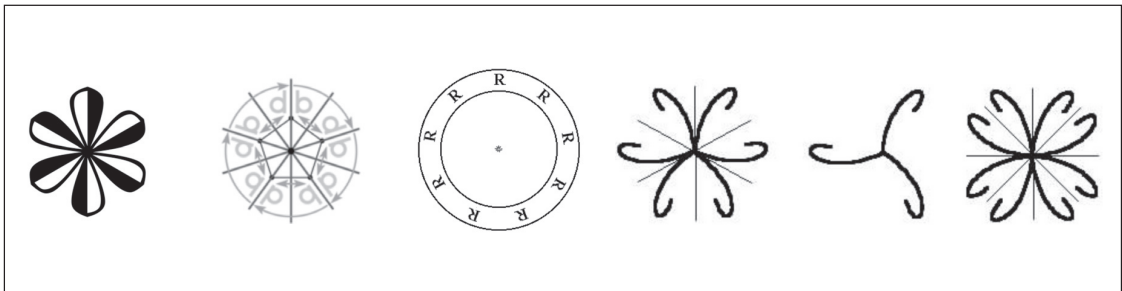


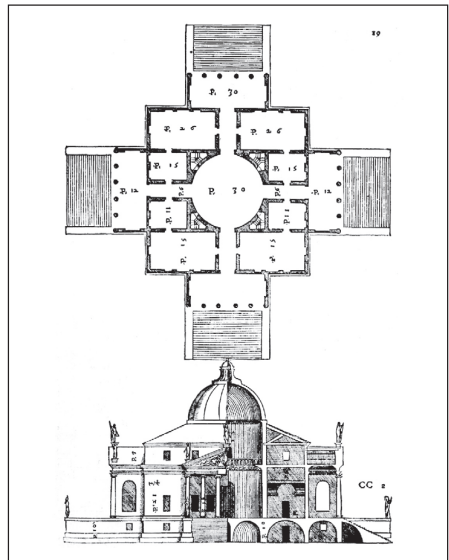
Fig. 5.6.4

Més problemes de teoria de la simetria

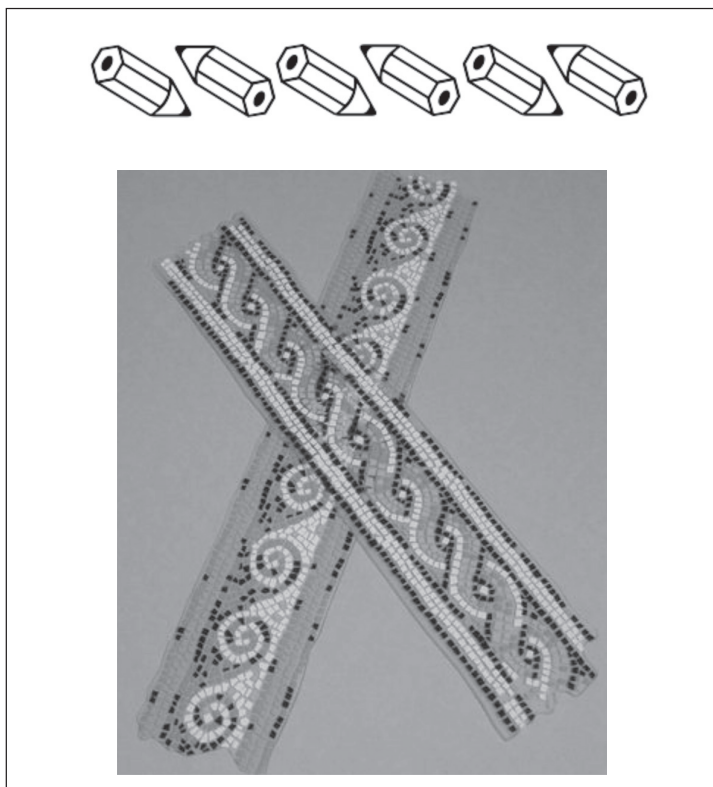
1. Analitzeu el grup de simetria dels motius ornamentals següents:



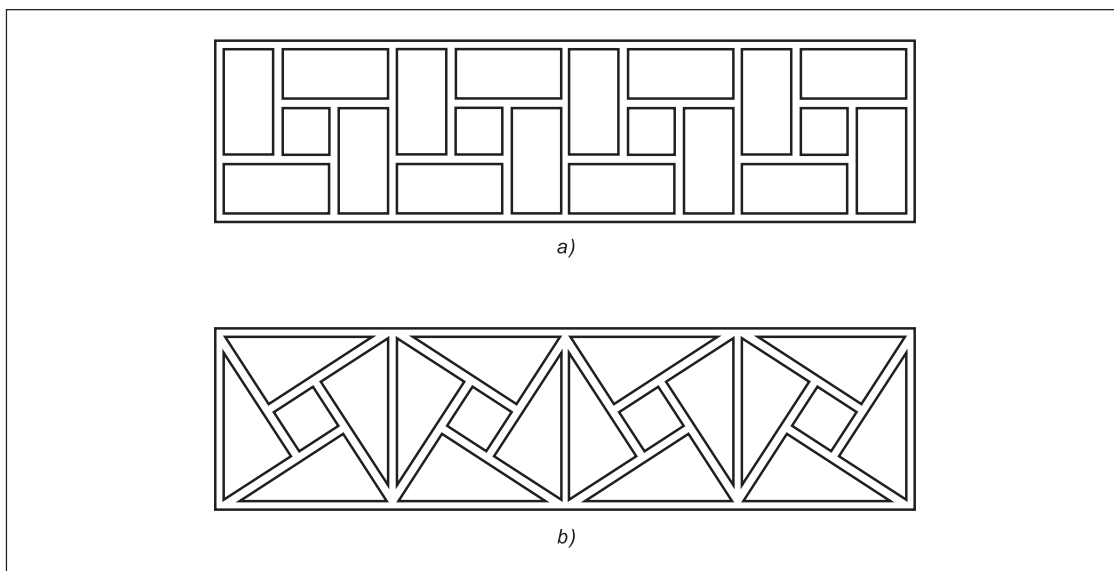
2. Estudieu la simetria present en aquestes plantes:



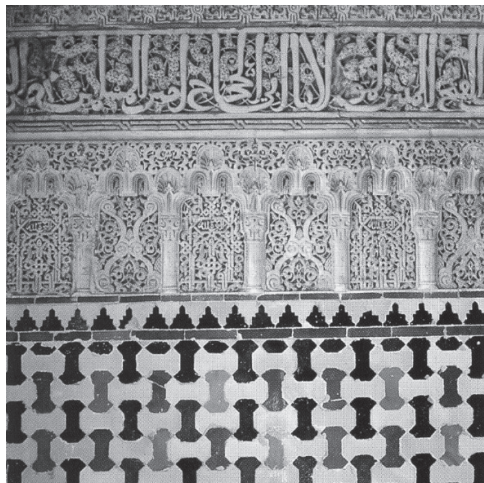
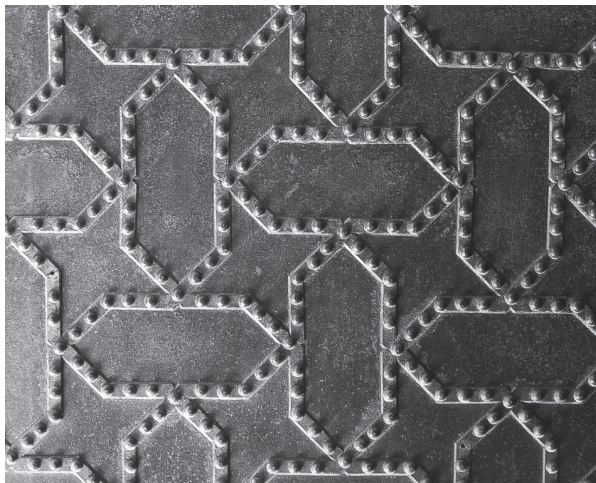
3. Asenyaleu el motiu generador i estudeu el grup de simetria de les sanefes següents:



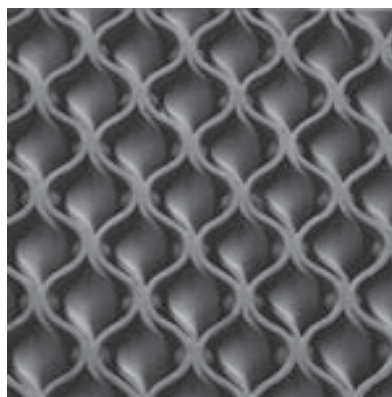
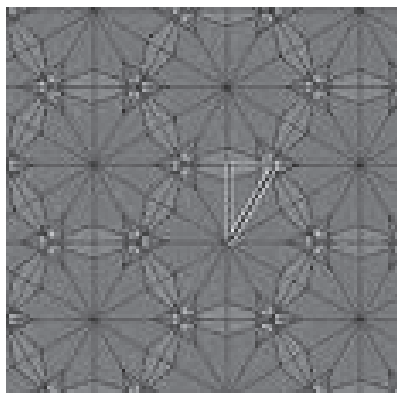
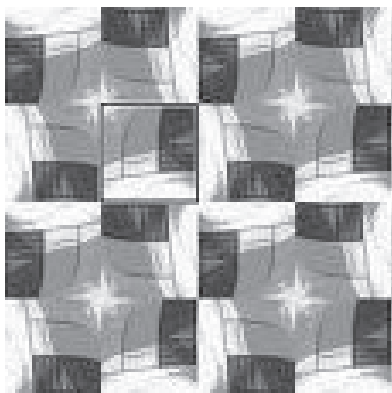
4. Aquestes sanefes corresponen a rajoles de ceràmica. Quins grups de simetria presenten?



5. Estudieu a fons aquests mosaics de l'Alhambra de Granada.

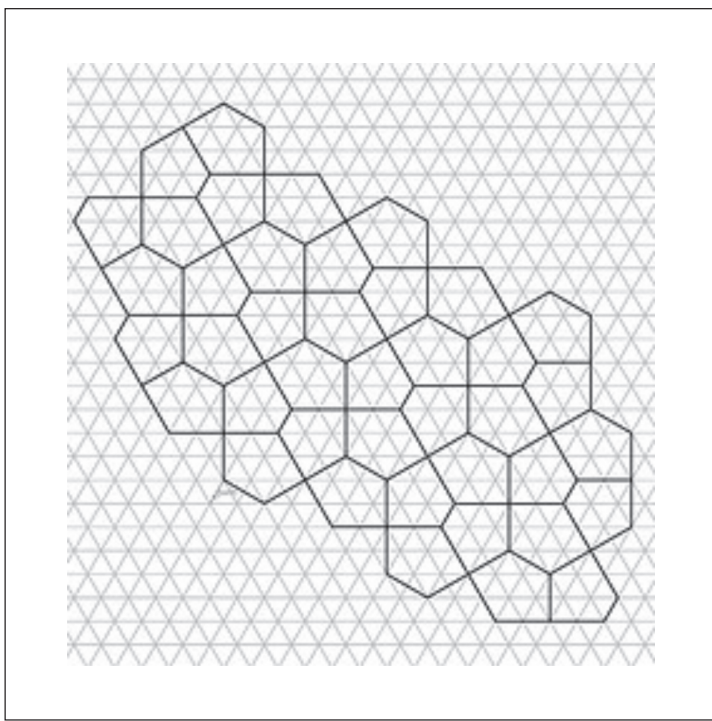


6. Determineu el grup de simetria de les decoracions següents:



7. Aquest és un conegut disseny d'Antoni Gaudí. Expliciteu un procés de disseny per obtenir aquesta figura.

8. A molts carrers del Caire (Egipte) hom troba el mosaic pentagonal de la figura. Doneu una construcció gràfica de la rajola tipus.



9. Inventeu noves formes de rajoles partint d'un mosaic hexagonal regular, seguint les idees d'Escher.
10. Determineu el grup de simetria d'un paral·lelogram segons les seves característiques.

Quàdriques

En aquest tema coneixerem les quàdriques, unes belles superfícies que tenen per seccions planes còniques. Així, doncs, les quàdriques són l'extensió natural de les còniques del pla quan hom passa a l'espai. Les quàdriques que són reglades, és a dir, formades i generades per rectes, tenen especial interès en arquitectura i són fonamentals en el cas de Gaudí.

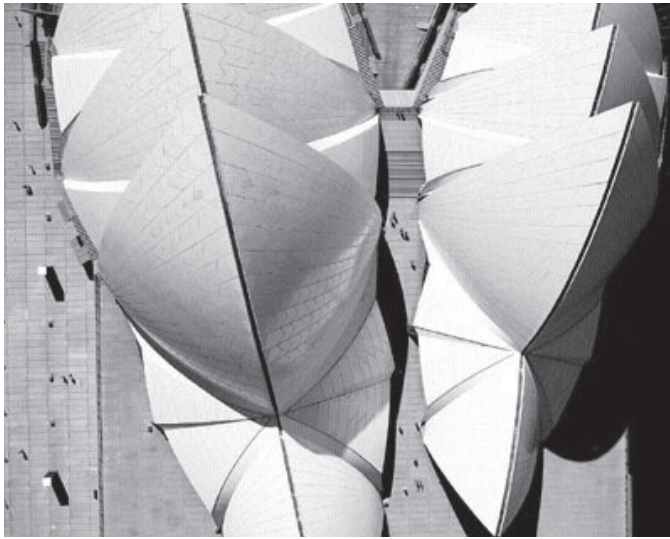


Fig. 6.1.1

6.1 Una visita a les quàdriques

"El paraboloides hiperbòlic és el pare de tota la geometria"

Antoni Gaudí

Visitarem ara totes les anomenades *quàdriques*, és a dir, els conjunts de punts de l'espai que satisfan una equació del tipus:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yx + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

això equival geomètricament a buscar superfícies en l'espai tridimensional tals que *qualsevol* secció plana sigui una cònica. Anem comentant ara, cas per cas, les quàdriques.

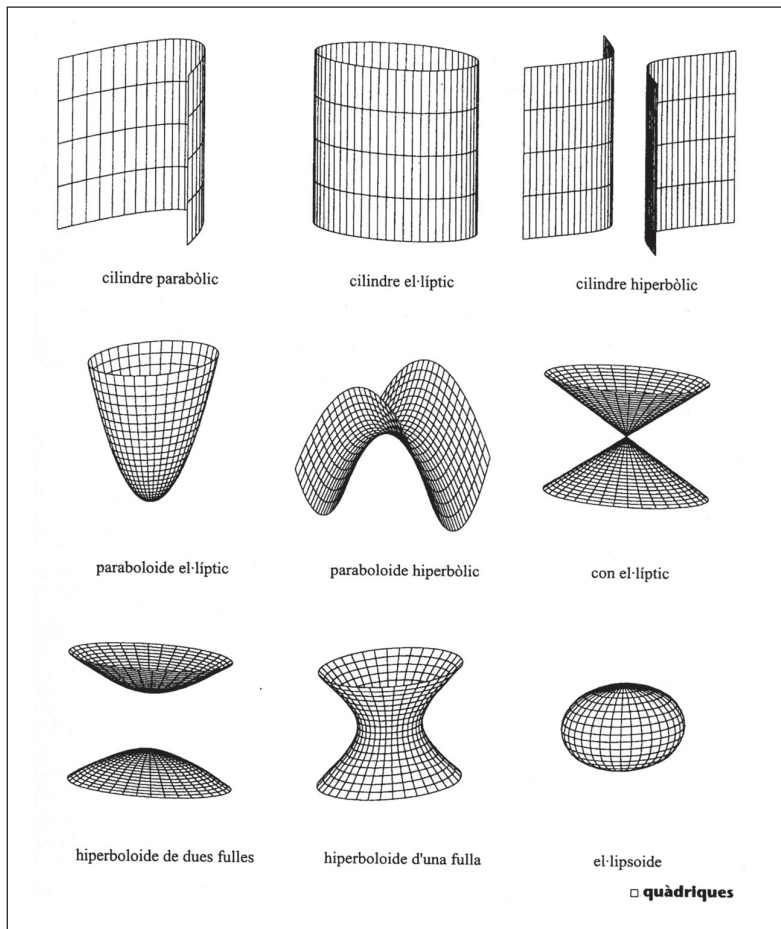


Fig. 6.1.2. Quàdriques principals

Cilindre el·líptic

A partir d'una el·lipse, considerant en l'espai totes les rectes perpendiculars a aquesta neix el cilindre el·líptic. És tracta, doncs, d'una superfície *reglada* (formada per rectes) que serà *desenvolupable* en el pla.

Totes les possibles seccions planes del cilindre el·líptic seran: el buit, una recta, un parell de rectes paral·leles i el·lipses.

En el cas particular del cilindre circular (que és de revolució) s'ha de notar que si considerem una secció plana d'aquest per un pla que talla l'eix de simetria del cilindre i dues esferes idèntiques tangents al cilindre i a la secció plana per damunt i per sota de l'esmentada secció, les esmentades esferes tocaran la secció plana en dos punts F i F' que seran precisament els focus de la secció el·líptica. En efecte, considerem qualsevol punt P de l'esmentada corba. La distància \overline{PF} és igual a la distància \overline{PG} on G és el punt de l'equador de l'esfera de dalt propera a P (ja que des de P tot el con de vèrtex P tangent a l'esfera té segments iguals entre el punt i la circumferència de tangència). Anàlogament $\overline{PF'}$ és igual a $\overline{PG'}$ on G' és el punt corresponent de l'equador de l'esfera de sota. Per tant $\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{PG} + \overline{PG'} = \overline{GG'}$ que es la distància (constant!) entre els dos equadors de les esferes, tractant-se doncs d'una el·lipse.

Cilindre parabòlic

A partir d'una paràbola, considerant en l'espai les rectes perpendiculars a aquesta, es genera el cilindre parabòlic. Es tracta d'una *reglada, desenvolupable*. Les seccions planes de l'esmentada superfície seran: el buit, una recta, una parella de rectes paral·leles i paràboles. Pot ser una forma interessant com una paret, una bóveda o un canal.

Cilindre hiperbòlic

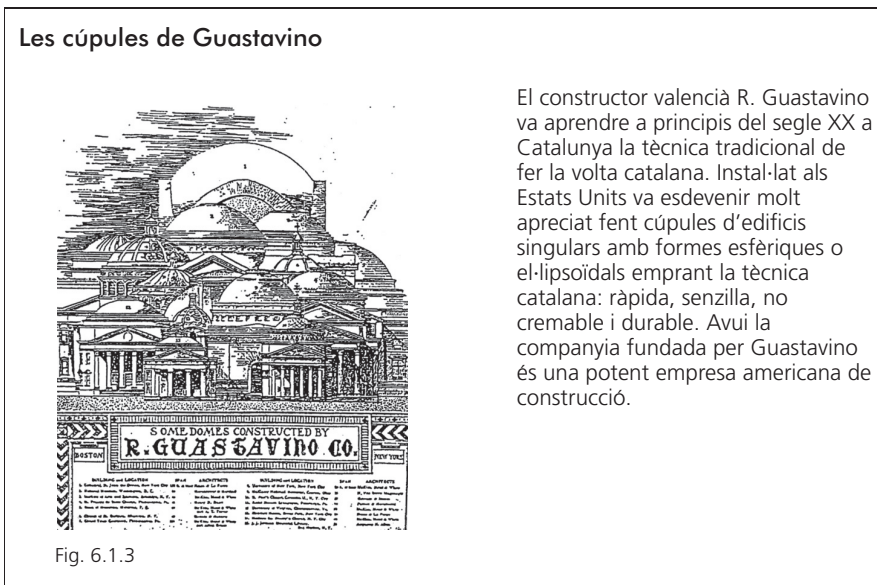
A partir d'una hipèrbola, les rectes perpendiculars a les dues branques d'aquesta generen, a l'espai, el cilindre hiperbòlic, superfície reglada, desenvolupable amb dues components, amb seccions planes: el buit, una recta, una parella de rectes paral·leles i hipèrboles. Malgrat ser fàcilment construïble, no ha tingut mai un interès especial.

Con el·líptic

És la quàdriga reglada i desenvolupable en el pla generada per una el·lipse, un punt exterior al pla de l'el·lipse i les rectes pel punt que tallen l'el·lipse. S'ha de notar que es tractarà d'un con doble, les seccions del qual seran sempre un punt, una recta, una parella de rectes concurrents o el·lipses, paràboles i hipèrboles. En el cas de les seccions el·líptiques els seus focus seran els punts de tangència d'esferes tangents al con i al pla determinant de la secció. El con circular, de revolució, és necessàriament el més simple i emblemàtic.

El·lipsoide

Aquesta quàdriga especial és una superfície tancada, ni desenvolupable, ni reglada, les seccions planes de la qual són totes el·lipses. En particular l'*esfera* és l'el·lipsoide amb totes les seves seccions circumferències i qualsevol el·lipsoide es pot considerar com el resultat d'una transformació afí (canvi d'escala als tres eixos) d'una esfera.



Els el·lipsoïdes de revolució poden descriure's com el lloc geomètric de punts de l'espai tals que la suma de distàncies a dos punts fixos anomenats focus és constant, però en general, un el·lipsoïde no de revolució no admet una descripció com a lloc geomètric simple.

Paraboloïde el·líptic

Superfície quàdrlica, ni reglada ni desenvolupable, les seccions planes de la qual o són paràboles o són el·lipses o el buit. El cas de revolució és el més interessant en ser generat per una paràbola girant al voltant del seu eix de simetria. Aquesta forma constitueix una bella forma de cúpula de la qual es troben en la Història de l'Arquitectura casos molt bonics construïts (per exemple, per Brunelleschi a Florència com un exemple paradigmàtic)... i a les antenes actuals.

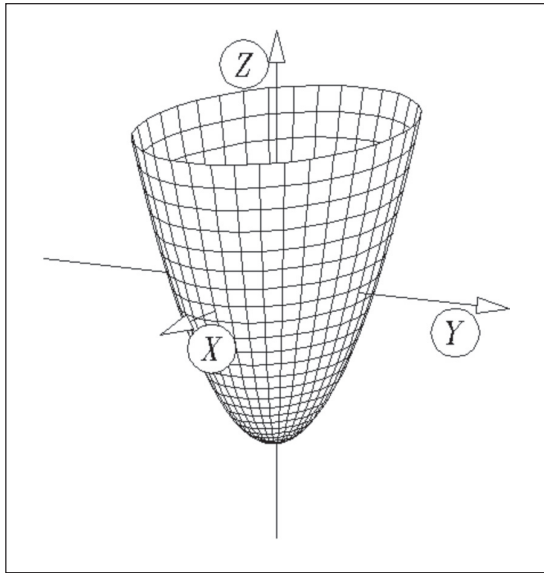


Fig. 6.1.4



Fig. 6.1.5

Hiperboloïde de dos fulls

Quàdrlica doble les seccions planes de la qual són o hipèrboles, o el·lipses o el buit. No és desenvolupable, ni reglada, ni presenta cap interès especial. S'ha de notar que admet un cas de revolució corresponent a la superfície generada per una hipèrbola que gira al voltant de l'eix de simetria que talla a les seves dues branques.

Hiperboloïde d'un full

Quàdrlica que té seccions planes que són hipèrboles o el·lipses i la seva versió de revolució correspon a la hipèrbola que gira al voltant de l'eix de simetria situat entre les dues branques de la corba. Aquesta superfície té un enorme interès constructiu, en disseny, en arquitectura i en enginyeria. La clau del seu èxit és que es tracta, sorprenentment, d'una superfície reglada. No és desenvolupable en el pla però és construïble mitjançant rectes.

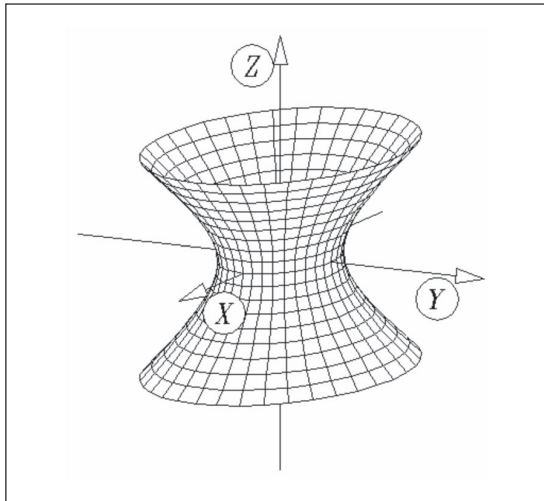


Fig. 6.1.6

En el cas més simple, considerem dues circumferències paral·leles iguals, amb n divisions numerades però amb una de les circumferències girada respecte de l'altra. En unir mitjançant rectes els punts de numeració corresponent es genera un hiperboloide d'un full. S'ha de notar que si les circumferències no estiguessin girades resultaria un cilindre i si ho estiguessin 180° resultaria un con, així doncs, els hiperboloides formen una família intermèdia entre cilindre i con.

Aquesta forma és típica de campanes, de cistells, de papereres, d'instruments de música de vent, d'enormes xemeneies de centrals tèrmiques (de mínim grossor maximitzant altura i assegurant rigidesa) i també forma part d'elements arquitectònics interessants (per exemple, a la Sagrada Família).

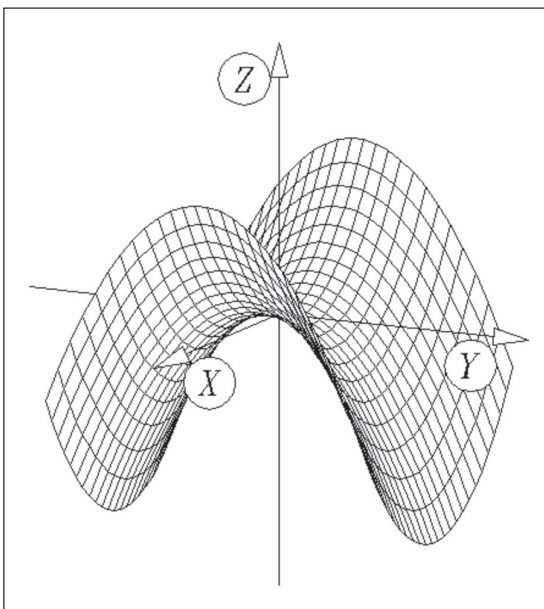


Fig. 6.1.7

Una propietat geomètrica d'enorme interès és la següent: considerem tres rectes r_1, r_2, r_3 a l'espai, en posició general. Interessa trobar la figura espacial formada per totes les rectes que es recolzen a la vegada en les tres rectes donades. En prendre un pla π que contingui r_1 , aquest tallarà r_2 i r_3 a P_2 i P_3 . Llavors en el pla determinat per r_1 i P_2 i P_3 es determinarà la recta que passant per P_3 talli r_2 a P_2 i la perllongació de la qual necessàriament tallarà r_1 en un punt P_1 . En girar el pla π s'anirà generant així un hiperboloide d'un full.

Paraboloide hiperbòlic

És la quàdrica reglada més important i útil, les seves seccions són hipèrboles, paràboles o rectes, essent generable com un conjunt de rectes que es recolzen en un quadrilàter espacial. Per construir aquesta figura podeu considerar 2 rectes no paral·leles en plans paral·lels i amb punts numerats i anar col·locant rectes entre punts corresponents (totes paral·leles a un pla). Félix Candela i Gaudí han estat els creadors d'interessants paraboloides hiperbòlics.

Les reglades de Félix Candela

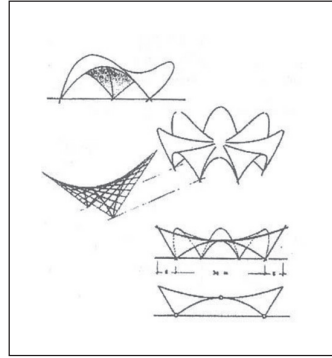


Fig. 6.1.8

L'arquitecte espanyol Félix Candela Outeriño (1910-1997) va desenvolupar la seva obra a Mèxic i d'altres països iberoamericans com a resultat del seu exili forçat l'any 1939. En la seva obra cal recordar les cobertes de grans edificis singulars que són superfícies reglades molt creatives. S'interessà en l'ús del formigó i de les estructures laminars. Destaquem les seves obres de l'Hotel a Acapulco (1940), nombroses capelles i esglésies a Mèxic D.F., el restaurant Los Manantiales també a la mateixa capital (1957) i el Palau d'Esports Olímpic (1968) a Mèxic D.F.

Quàdriques degenerades

Objectes tan poc destacats com el conjunt buit, un punt, una recta, una parella de rectes paral·leles, un pla, una recta doble, un parell de plans paral·lels, dos plans que es tallen, un pla doble... poden considerar-se en la família de quàdriques perquè les seves seccions són còniques degenerades i poden aparèixer com a solucions de polinomis de grau dos igualats a zero i com a seccions de cons i cilindres.

Problema 1

Quins tipus de quàdriques no degenerades són reglades i quins no?

Problema 2

Quines quàdriques poden tenir dos plans de simetria perpendiculars entre ells?

Problema 3

Quines quàdriques poden ser de revolució i quines no?

6.2 Equacions reduïdes de les quàdriques

Si una quàdrica es defineix mitjançant una expressió coneguda o una propietat determinada és senzill identificar el tipus de superfície a què correspon. Per exemple, en l'expressió

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$$

podem reconèixer el conjunt de punts de l'espai (x, y, z) tals que la seva distància al punt $(1, 1, 1)$ és 2, és a dir, una esfera. Però, curiosament, si hom desenvolupa l'expressió algebraica anterior, resulta

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$$

equació explícita que no reconeixem d'entrada. En aquest breu apartat indicarem com l'artilleria algebraica dels temes anteriors es pot aplicar per a resoldre aquest problema d'identificar equacions amb superfícies. En efecte, partim de l'equació

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

i la passem a forma matricial:

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(b_1, b_2, b_3) \cdot (x, y, z) + c = 0$$

Si $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $A = (a_{ij})$ és la matriu donada podem anotar simbòlicament

$$\vec{x} \cdot A \cdot \vec{x} + 2\vec{b} \cdot \vec{x} + c = 0$$

Exemple 1. Escriurem en forma matricial l'equació $-2z^2 + 2xy + x + y = 4$.

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(1, 1, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 4 = 0 \quad (1)$$

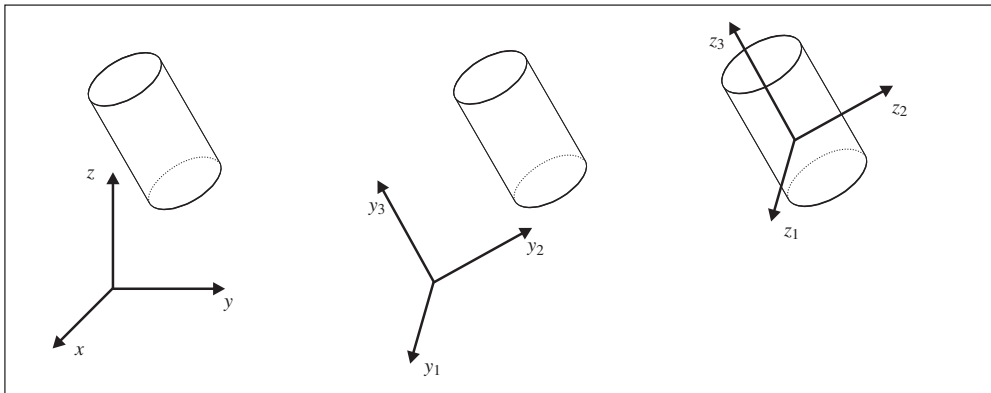


Fig. 6.2.1. Dos canvis buscant una referència on l'equació sigui el més simple possible.

Primera reducció

Donat que la matriu A de la quàdrica és (per construcció) sempre *simètrica*, sabem pels temes anteriors que A sempre diagonalitza en una base de vectors propis que són ortogonals entre ells i de longitud 1. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ són els seus valors propis reals i Q és la matriu del canvi de base (que té per columnes els vectors propis d' A). També sabem que Q és una transformació ortogonal, $Q^t = Q^{-1}$ i $A_D = Q^t A Q$. Es fa el primer canvi $\vec{x} = \vec{y} \cdot Q^t$, essent $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ les noves variables i resultant

$$\vec{x} \cdot A \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot Q^t \cdot A \cdot Q \cdot \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

amb la qual cosa obtenim una nova equació

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + 2l_1 y_1 + 2l_2 y_2 + 2l_3 y_3 + c = 0 \quad (*)$$

Així en aquest pas els tres termes creuats de xy, xz, yx han desaparegut, els tres termes lineals hauran canviat de coeficients, i el terme c serà el mateix. Tenim 10 termes en començar i ara en tindrem com a màxim 7. Però cal notar que com que el canvi de variables l'hem fet amb una matriu Q d'una transformació ortogonal, geomètricament, la superfície ha mantingut la seva forma i les seves característiques mètriques. No l'hem canviat, simplement hem passat a una millor referència que dona una equació més simple.

Exemple 1 (continuació). A la vista de l'equació (1) procedim a diagonalitzar la matriu:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$$

resultant els valors propis $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Els possibles vectors propis ortogonals entre ells i de norma unitària són

$$\vec{v}_1 = (0, 0, 1), \quad \vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

i, per tant, el canvi a fer és

$$(x, y, z) = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{y_2 + y_3}{\sqrt{2}}, \frac{y_2 + y_3}{\sqrt{2}}, y_3 \right)$$

Ja sabem que en lloc dels primers termes de (1) aquest canvi ens portarà a $-2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. La part lineal hem de mirar què dona:

$$x + y = \frac{y_2 + y_3}{\sqrt{2}} + \frac{y_2 - y_3}{\sqrt{2}} = \frac{2y_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}y_2$$

i, per tant, (1) porta a

$$-2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 - 4 = 0 \quad (2)$$

Segona reducció

Un cop tenim (*) per a cada $\lambda_i \neq 0$, podem fer la reagrupació

$$\lambda_i y_i^2 + 2l_i y_i = \lambda_i \left(y_i + \frac{l_i}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{l_i^2}{\lambda_i^2}$$

cosa que ens permet fer ara una *translació* de variables:

$$\begin{aligned} z_i &= y_i + \frac{l_i}{\lambda_i}, & \text{si } \lambda_i \neq 0 \\ z_i &= y_i & \text{si } \lambda_i = 0 \end{aligned}$$

i aleshores passem de (*) a la nova forma

$$\lambda_1^2 z_1^2 + \lambda_2^2 z_2^2 + \lambda_3^2 z_3^2 + 2\widehat{l}_1 z_1 + 2\widehat{l}_2 z_2 + 2\widehat{l}_3 z_3 + d = 0 \quad (**)$$

on el terme independent d haurà eventualment canviat i els coeficients de la part lineal són o iguals als d'abans o nuls:

$$\widehat{l}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_i \neq 0 \\ l_i & \text{si } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Així si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ l'expressió (**) es redueix a

$$\lambda_1^2 z_1^2 + \lambda_2^2 z_2^2 + \lambda_3^2 z_3^2 + d = 0$$

i en cas d'un $\lambda_i = 0$ no existiria en (*) el terme $\lambda_i^2 z_i^2$ però sí que quedaria el corresponent terme lineal $2l_i z_i$. (Si es desitja, encara es poden fer més canvis per simplificar una mica més l'expressió).

Exemple 1 (continuació). De l'expressió (1) havíem passat pel primer canvi a (2). En ser $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = +2$ podem considerar la translació:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_3 &= y_3 \end{aligned}$$

la qual porta a

$$-2z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - \frac{9}{2} = 0$$

equació ja perfectament reduïda.

Exemple 2. Reduirem $x^2 - y^2 + 2x + 2z - 1 = 0$.

No cal pensar en la primera reducció en no existir termes creuats xy , xz o yz . Aplicant la segona, en ser $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ fem

$$z_1 = x + 1, \quad z_2 = y, \quad z_3 = z$$

resultant

$$z_1^2 - z_2^2 + 2z_3 - 2 = 0$$

i si encara féssim $z'_4 = z_3 - 1$ tindriem $z_1^2 - z_2^2 = -2z'_4$.

Problema 1

Reduïu al màxim les equacions següents:

a) $2x^2 - y^2 + z^2 + 2x + 3y + 4z - 2 = 0$

c) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4x$

b) $xy + yz + xz - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + z = 8$

6.3 Classificació euclidiana de quàdriques

Tota quàdrica

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

admet, amb les tècniques de reducció que hem vist a l'apartat 6.2, una equació canònica del tipus

$$\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \lambda_3z^2 + c = 0 :$$

o

$$\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 = Kz + c :$$

Mirant les seccions d'aquestes superfícies (que són còniques!) pels plans de referència $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$ o per plans paral·lels acabareu identificant la quàdrica corresponent.

1. *Quàdriques amb centre que no són cons:* $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot c \neq 0$

Fent $a_i = \sqrt{\left| \frac{c}{\lambda_i} \right|}$, $i = 1, 2, 3$, resulta una equació del tipus

$$\pm \frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{a_2^2} \pm \frac{z^2}{a_3^2} = 1$$

i podem distingir els casos (sg indica signe):

1.1. $sg \lambda_1 = sg \lambda_2 = sg \lambda_3 \neq sg c \cdots \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1 \cdots$ **El·lipsoide**

1.2. $sg \lambda_1 = sg \lambda_2 = sg \lambda_3 = sg c \cdots \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = -1 \cdots$ **Buit**

$$1.3. \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} c^1 \operatorname{sg} \lambda_2 = \operatorname{sg} \lambda_3 \cdots - \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1 \cdots \text{Hiperboloide d'un full}$$

$$1.4. \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2 = \operatorname{sg} c \neq \operatorname{sg} \lambda_3 \cdots \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{a_3^2} = -1 \cdots \text{Hiperboloide de dos fulls}$$

2. Quàdriques amb centres que són cons: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \neq 0, c = 0$

Fent de nou $a_i = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_i|}}$, $i = 1, 2, 3$, resulta l'equació del tipus

$$\pm \frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{a_2^2} \pm \frac{z^2}{a_3^2} = 0$$

i hi ha dos casos:

$$2.1. \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2 = \operatorname{sg} \lambda_3 \cdots \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 0 \cdots \text{Punt}$$

$$2.2. \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2 \neq \operatorname{sg} \lambda_3 \cdots \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 0 \cdots \text{Con}$$

3. Quàdriques amb $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$

Tindrem una equació del tipus $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2Kz + c = 0$ i els casos:

$$3.1. \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2 = \operatorname{sg} K, (K \neq 0), c = 0, \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 2Kz \cdots \text{Paraboloide el·líptic}$$

$$3.2. \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} K = \operatorname{sg} \lambda_2, (K \neq 0), c = 0, \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} = 2Kz \cdots \text{Paraboloide hiperbòlic}$$

$$3.3. \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2 = \operatorname{sg} c, K = 0, c \neq 0, \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1 \cdots \text{Cilindre}$$

$$3.4. \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2 \neq \operatorname{sg} c, K = 0, \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = -1 \cdots \text{Buit}$$

$$3.5. \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} c \neq \operatorname{sg} \lambda_2, K = 0, \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} = 1 \cdots \text{Cilindre hiperbòlic}$$

$$3.6. \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2, K = c = 0, \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 0 \cdots = \operatorname{sg} \lambda_2 \text{ Recta doble}$$

$$3.7. \operatorname{sg} \lambda_1 \neq \operatorname{sg} \lambda_2, K = c = 0, \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} = 0 \cdots \text{Dos plans que es tallen}$$

4. Quàdriques amb $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Queda una equació del tipus $\lambda_1 x^2 = 2Kz + c$:

4.1. $K \neq 0 \dots x^2 - 2bz = 0 \dots$ **Cilindre parabòlic**

4.2. $K = 0 \neq c > 0 \dots x^2 - a^2 = 0 \dots$ **Dos plans paral·lels**

4.3. $K = 0 \neq c < 0 \dots x^2 + a^2 = 0 \dots$ **Buit**

4.4. $K = c = 0 \dots x^2 = 0 \dots$ **Pla doble**

Podem veure ara exemples concrets de com identificar quàdriques a partir d'equacions reduïdes mirant les seves seccions còniques principals.

Exemple. Identifiquem les quàdriques

(a) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

(d) $z^2 - 9 = 0$

(b) $x^2 + y^2 = 3$

(e) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

(c) $x^2 - y^2 + z = 1$

(f) $x^2 + y^2 = -1$

En el cas (a) la secció $x = 0$ dóna $y^2 - z^2 = (y + z)(y - z) = 0$ que és un parell de rectes que es tallen, la secció $y = 0$ dóna de nou la parella de rectes tallant-se, i fent $z = 0$ surt $x^2 + y^2 = 0$, és a dir, el punt $(0, 0, 0)$; i per a qualsevol altre pla $z = k \neq 0$ surt $x^2 + y^2 = k^2$ que és un cercle, tractant-se doncs d'un con de revolució. En (b) $x^2 + y^2 = 3$ és un cercle en el pla $z = 0$ i la variable z és lliure, tractant-se, doncs, del cilindre de revolució d'eix l'eix OZ i base el cercle donat. En (c) $x = 0$ porta a $z = y^2 + 1$ que és una paràbola convexa; $y = 0$ dóna $z = 1 - x^2$ que és paràbola còncaua i $z = 0$ (o $z = \pm k$) dóna hipèrboles... tractant-se, doncs, d'un paraboloides hiperbòlic. En el cas (d) és $z = \pm 3$ i x, y lliures, és a dir, els plans paral·lels $z = +3$ i $z = -3$. En (e) reconeixem una esfera de radi 4 i en (f) el conjunt buit perquè $x^2 + y^2$ mai no pot valer -1 .

Problema 1

Classifiqueu les quàdriques següents:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

d) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 0$

g) $y = 4x^2 + 4z^2$

b) $5x^2 + 3y^2 = 15z$

e) $3x^2 - 7y^2 = 21 + z$

h) $x + 8y = 0$

c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = z^2$

f) $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{144} = 1$

"Jo soc geòmetra, que vol dir sintètic"

Antoni Gaudí

Referents culturals i naturals en Gaudí



Fig. 6.4.1

Una part de la geometria que està immersa en l'obra de Gaudí podria considerar-se associada als referents naturals i culturals que l'arquitecte va observar amb especial complaença durant la seva joventut. Les decoracions de l'Alhambra de Granada, els arcs de Poblet, les roques de Montserrat, les formes dels fruits i els arbres, la torsió de troncs i ossos... tota una sèrie d'elements esdevenen referents que fan entendre parcialment molts detalls del primer Gaudí.

Una recerca experimental a l'obrador

A l'estudi de Gaudí no hi havia biblioteca i el material gràfic era reduït a l'imprescindible. A l'obrador del mestre hi havia un taller fotogràfic, un espai per a fer escultures, i un magatzem on dipositar-les, una àmplia zona per a fer-hi maquetes de guix, miralls per assajar visions indirectes, campanes tubulars per a

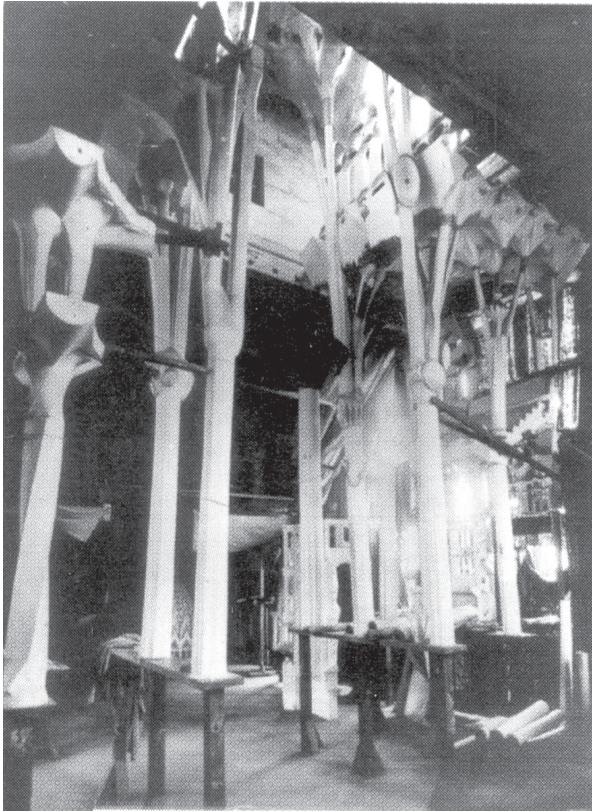


Fig. 6.4.2

estudiar la sonoritat, sostres movibles per experimentar il·luminació i una infinitud de *models* amb els quals es podia fer una recerca activa de solucions òptimes.

L'obra final és sempre el resultat d'una profunda reflexió experimental geomètrica guiada per la funcionalitat, la constructibilitat i l'estructura que donaran sentit arquitectònic a la creació. Abans, però, de la maqueta a escala (1:10 o 1:25) que concretarà el projecte, Gaudí haurà descartat mil solucions parcials tot seguint una reflexió metòdica i sistemàtica, aliena a les presses i als compromisos temporals o econòmics.

Una creativitat tridimensional

Si bé en una primera etapa, fins al 1900, Gaudí practica un historicisme eclèctic tridimensionalment moderat, en el darrer tram de la seva vida, 1900-1926, Gaudí donarà sortida a tota la seva creativitat espacial. Aquest domini de l'espai, però, no el porta mai a la creació d'"objectes escultòrics". Les seves novedoses "formes" són sempre elements arquitectònics, amatents a una funcionalitat imprescindible i exhibint de cara a l'exterior dues menes de bellesa: la derivada de la decoració i la de la mateixa originalitat compositiva.

A continuació sintetitzarem algunes de les característiques dels recursos d'exploració de l'espai que Gaudí utilitza

Translació

És el procés de repetir desplaçant, creant l'efecte sanefa (tan celebrat al pla en les decoracions que Jujol fa al Parc Güell) però que Gaudí usa també espacialment en els merlets i els arcs de Bellesguard, els arcs del Col·legi de les Teresianes, el rosari d'esferes de pedra del Parc Güell, etc.

Simetrització

És el procés d'emprar plans de simetria, generant objectes amb simetria especular. La façana de les cases Calvet i Batlló, l'escalinata d'accés al Parc Güell, les plantes del Palau Episcopal d'Astorga, etc. són clars

exemples de simetrització com és el dels seus estudis *estereofuniculars* usant fils, cadenes i càrregues per obtenir (reflectida en un mirall) l'estructura buscada.

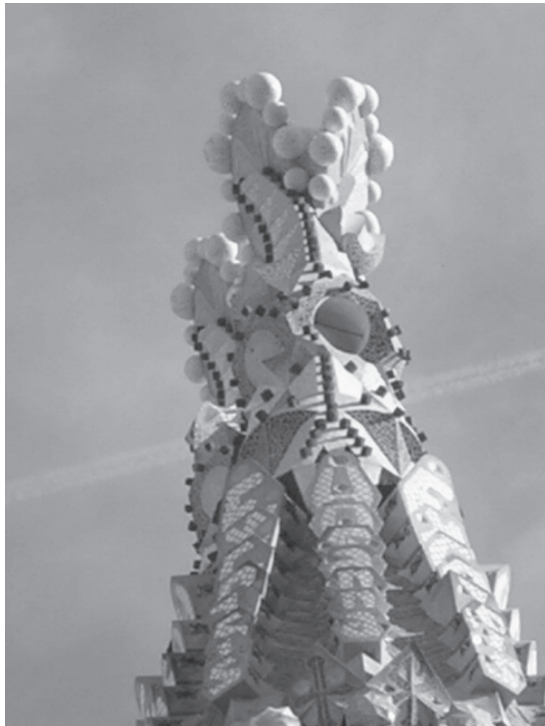


Fig. 6.4.3

Modulació

L'ús de mòduls prefabricats al Parc Güell, el sistema de proporcions a la Sagrada Família (1, 1/3, 1/4, 1/2, 3/4, 2/3, 1) o el reticulat a l'estructura de la Casa Milà en són exemples .

Helicoïdalització cilíndrica

Aquest principi combina de forma complexa rotacions al voltant d'un eix i translacions en la direcció de l'eix, creant un interessant moviment vertical lligat a les hèlices cilíndriques, l'helicoïde i les rampes helicoïdals. Moltes columnes, escales de cargol, xemeneies, etc. gaudinianes ens mostren aquest principi.

Helicoïdalització conoïdal

És afegir al procés anteriorment descrit la possibilitat de fer homotècies, creant un efecte propi de les hèlices en cons. Les xemeneies del Palau Güell o l'agulla del Pavelló d'entrada al Parc Güell en són exemples espectaculars.

Arrodoniment

Correspon al procés de suavitzar angles i punxes afegint-hi contorns suaus emprant paràboles, arcs de cercle, perfils sinusoidals, etc. En un cas extrem tindríem la deformació topològica suau d'un cos.

Maclatge

L'operació, complexa, d'intersecar diverses figures geomètriques culmina en l'obra gaudiniana a la Sagrada Família amb el maclatge de superfícies reglades, el·lipsoides, i, molt especialment, amb la creació dels pinacles.

Buidatge

Aquest procediment correspon a obtenir un cos espacial per sustracció de determinades parts i el trobem en Gaudí, per exemple, a l'arc de la porta principal del Palau Episcopal d'Astorga.

Dissecció

Aquest principi, de disseccionar figures espacials (en especial superfícies) i aprofitar-ne sols una part és usat per Gaudí molt selectivament, fent de vegades difícil descobrir el motlle de procedència. Per exemple, Gaudí usa magistralment parts de l'hiperboloïde d'una fulla i del paraboloid hiperbòlic a la Sagrada Família.

Fractalitat

El principi natural de la fractalitat en el creixement de les branques dels arbres és aprofitat per Gaudí en el disseny de columnes de la Sagrada Família: el "tronc" dona pas per mitjà dels "nusos" el·lipsoidals a noves "columnes-branques". Una forma magistral de distribuir i transmetre els càrregues.

Autosemblança

Aquest és el principi d'usar a la vegada una mateixa forma amb les dimensions molt diferents, a escales distants. Gaudí en fa un ús magistral quan, per exemple, a la Sagrada Família usa paraboloides hiperbòlics gegantins a nivell de voltes a la vegada que usa models minúsculs de la mateixa superfície per a decorar l'entrega de les columnes al terra.

Formes poligonals gaudinianes

Les formes poligonals planes són omnipresents en l'obra de Gaudí en dos nivells: com a formes determinants d'elements constructius (plantes, finestres, separadors, rajoles...) i com a formes generadores de decoració (ceràmica, lletres, trencadís...). Els polígons plans regulars més usuals són els triangles, quadrats, pentàgons, hexàgons, octàgons, decàgons i dodecàgons. En són exemples emblemàtics els triangles de maó de Bellesguard, les rajoles quadrades de la Casa Vicens, les finestres pentagonals del Capricho, les rajoles hexagonals del Passeig de Gràcia, etc.

A nivell de políedres trobem polígons associats a cubs, octàedres, dodecàedres o llurs interseccions.

Les columnes de la Sagrada Família neixen d'un joc geomètric finíssim movent polígons i interseccionant volums, esdevenint sens dubte una culminació del mesurat i profund itinerari geomètric de Gaudí.

Corbes planes gaudinianes

Catenària

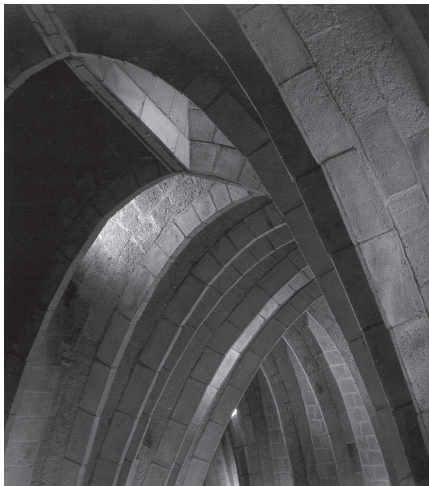


Fig. 6.4.4

La corba catenària, a nivell de física i de matemàtiques, havia estat totalment estudiada molt abans de Gaudí perquè aquesta corba es corresponia amb la forma d'una cadena que penja lliurement de dos extrems, essent la seva equació

$$y = a \cosh(x/a) = a(\exp(x/a) + \exp(-x/a))/2$$

on a és constant; \cosh indica el cosinus hiperbòlic i \exp la funció exponencial de base el nombre e . Prop del seu mínim, la catenària s'aproxima molt bé per la paràbola $a + x^2/2a$ (divergint molt d'aquesta paràbola per valor grans de x) i això ha portat sovint a la confusió entre "paràbola" i "catenària".

Però va ser Gaudí el primer a descobrir que la simetrització de la catenària donava lloc a un dels arcs més perfectes: el que s'aguanta a si mateix. Trobem bells arcs gaudinians al convent de les Teresianes, al mirador de la Finca Güell, a les portes del Palau Güell, a les quadres dels Pavellons de la Finca Güell i a la Casa Milà.

Espirals

Amb fils que es bobinen o rebobinen a l'entorn de cilindres o cons podem dibuixar les espirals més belles. En l'*espiral d'Arquímedes* la distància al pal central cilíndrica és proporcional a l'angle girat. En l'*espiral logarítmica, equiangular o logística* les rectes des de l'origen són tallades amb igual angle. Les dues classes són omnipresents arreu de la Natura (closques de cargols, flors de girasol, corns, cues...). En l'obra de Gaudí hi tenen un important rol decoratiu: a les reixes del Parc de la Ciutadella, al balcó de la Casa Vicens, al drac de la Finca Güell, al mosaic del Passeig de Gràcia, al timbre de la Casa Calvet...

Sinusoides

Les formes sinusoidals són pròpies dels moviments serpentejants, de les onades del mar, de les ombres d'hèlixs espacials i apareixen en l'obra gaudiniana en el respatller del banc del Parc Güell, en el mur de la Casa Miralles, en diverses decoracions, i de forma sorprenent i magistral, en les escoles de la Sagrada Família (vegeu l'apartat de superfícies conoidals).

Còniques

Circumferències, el·lipses, paràboles i hipèrboles són corbes omnipresents en moltes formes gaudinianes per ser seccions principals de les superfícies reglades que, com veurem, són peces clau del repertori geomètric.

Corbes arrodonides

Són corbes topològicament equivalents a un cercle, obtingudes per deformació contínua d'aquest i són un segell característic del modernisme. En l'obra de Gaudí les trobem decorant portes, sofàs, façanes, balcons, finestres, escales, etc.



Fig. 6.4.5

Superfícies reglades gaudinianes

Cilindres

Els cilindres circulars són superfícies reglades generades per una recta que gira a l'entorn d'un eix.

L'ús clàssic de formes cilíndriques el trobem en les primeres obres de Gaudí: bases de les torretes de la Casa Vicens; torretes i cobertes als Pavellons de la Finca Güell, torre principal a la Vil·la El Capri-cho, torres del Palau Episcopal d'Astorga; de la Casa Fernández Andrés de Lleó.

Helicoides

Un helicoides és una superfície generada pel moviment d'una recta que es mou paral·lelament a un pla, recolzant-se en una recta perpendicular al pla i en una hèlix associada a un cilindre perpendicular al pla i d'eix central la recta fixada. Neix,

doncs, d'aplicar un moviment helicoidal (rotació, a l'entorn de l'eix, composta amb translació de direcció paral·lela a l'eix) a una recta perpendicular a l'eix fixat. Trobem espectaculars escales de cargols, per exemple, al Capricho i a la Sagrada Família en diversos llocs de les torres.

Rampes helicoidals

La rampa helicoidal que D. J. Struik anomena "helicoides desenvolupable" es descriu a moltes publicacions de geometria diferencial amb la llarga expressió "*superfície desenvolupable tangencial a una hèlix*". La *rampa helicoidal* és la superfície reglada i desenvolupable que neix a partir d'un cilindre i una hèlix fixada a la superfície cilíndrica, considerant totes les rectes tangents a l'hèlix. Al Palau Güell, a la Casa Milà i a la cripta de la Colònia Güell trobem interessants rampes helicoidals d'obra vista.

Cons

Totes les rectes que passant per un punt recolzen en una corba espacial (que no conté el punt donat) donen lloc a una superfície conoidal. Al Palau Güell trobem formes conoidals en els capitells de les columnes interiors dels menjadors, al suport del sòl del pannel que simbolitza els raigs solars i, naturalment, a les xemeneies del terrat. També a la Casa Batlló descobrim xemeneies que culminen amb cons i una boleta-vèrtex, evocació possiblement de l'apagallums de metall.

Superfícies conoidals rectes

Aquestes superfícies reglades venen determinades per una recta, un pla perpendicular i una corba a l'espai i estan formades per totes les rectes que recolzen en la recta donada i en els punts corresponents de la corba fixada, essent totes paral·leles al pla donat. Entre les superfícies conoidals tenim un pla, un helicoides i un paraboloides hiperbòlic. Així doncs, ens preocuparem aquí dels casos que no són precisament aquests tres exemples. A les escoles de la Sagrada Família i a la coberta del magatzem d'escultures de l'obra de Gaudí trobem usos especials d'aquestes superfícies.

Hiperboloides d'una fulla

Aquestes notables superfícies estan formades com hem vist per rectes que recolzen entre dues el·lipses iguals i paral·leles unint una col·lecció ben definida de punts corresponents entre les dues corbes. Tenen dues famílies de rectes generadores, unes en un sentit i les altres en sentit contrari i representen un cas entre els cons el·líptics i els cilindres el·líptics. Gaudí les usà en columnes del Palau Güell i de la Casa Calvet i formant voltes o finestrals a la Sagrada Família, sempre lligades a la il·luminació del temple.

Paraboloides hiperbòlics

La primera obra en la qual Gaudí usa la forma del paraboloides hiperbòlic és el 1884 a la glorieta del Camp de les Figueres de la Finca Güell a les Corts de Sarrià, en el sostre de la cripta de la Colònia Güell, i a la coberta del pavelló de l'entrada al Parc Güell. Serà a la Sagrada Família on els paraboloides hiperbòlics tindran la seva culminació.

Les altres superfícies

Entre les superfícies no reglades Gaudí fa un ús singular del paraboloides de revolució a la cúpula del Palau

Güell; dels el·lipsoïdes als nusos de les columnes de la Sagrada Família i d'esferes a un nivell simbòlico-religiós al rosari de pedra del Parc Güell, a la xemeneia de la Casa Batlló, etc.

Altres formes de Gaudí resulten d'imitació directa natural quan mirem escultures, fruits, arbres, etc però un camp obert de recerca és l'estudi de les moltes superfícies gaudinianes que no responen a un referent geomètric clàssic (les formes de la façana i el terrat de la Casa Milà, balcons de la casa Batlló, deformacions al Parc Güell, etc.).

6.5 Quàdriques avui

Les quàdriques com a polinomis de grau dos en tres variables tenen assegurat un paper important en l'aproximació local d'altres superfícies. De la mateixa manera que rectes, paràboles, cúbiques, etc. són fusions que s'usen per aproximar altres corbes planes (i per tant, fer càlculs) també els polinomis de grau dos tenen el seu paper per aproximar càlculs i superfícies de natura tridimensional.

Amb l'obra de Guadí les quàdriques reglades han esdevingut una referència obligada. No cal ni dir que els arquitectes lligats al gaudinisme com són Rubió, Berenguer, Jujol, etc. usaren aquesta mena de superfícies en les seves obres. Gustavino i Félix Candela també reberen directament la influència gaudiniana. Ara, molts anys després, s'han produït tres fenòmens que han revitalitzat l'ús de superfícies no planes en cobertes i formes arquitectòniques o de disseny.

El primer fenomen és el de l'enorme potencial de càlcul estructural que avui donen les possibilitats computacionals. El segon fenomen és el dels nous materials que permeten fer formes abans impensables (plàstics, titani...). El tercer fenomen és el de la necessitat funcional de grans espais que cal cobrir (espais esportius, aeroports, fires, etc.).

És en aquest ordre d'idees com cal mirar obres de Frank Gehry, Santiago Calatrava, Norman Foster, Jean Nouvel, etc.

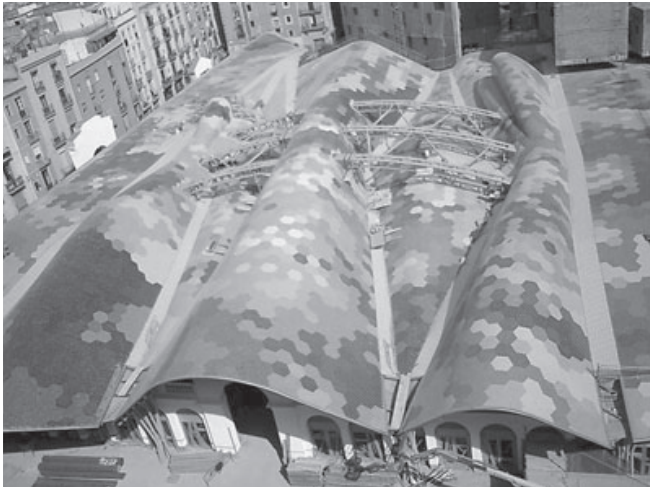


Fig. 6.5.1

A la figura 6.5.1 veiem el mercat de Santa Caterina de Barcelona, projecte nat de la visió imaginativa d'Enric Miralles (1955-2000). Les superfícies reglades de la coberta recobertes de mosaics hexagonals són tot un exemple de com l'esperit gaudinià es posa al servei de la creativitat en arquitectura.

INTERNET

Visiteu els webs dedicats a Gaudi:

<http://www.sagradafamilia.org/cat/index.htm>

<http://www.gaudi2002.bcn.es>

<http://www.arsvirtual.com>

També podeu visitar webs d'arquitectura on s'aprecien presències importants de superfícies creatives:

<http://www.calatrava.com>

<http://www.fosterandpartners.com>

<http://www.gratbuildings.com/gbc.html>

Més problemes de quàdriques

1. Determineu les quàdriques que passen pels vuit vèrtexs d'un cub.
2. Donats dos punts $P = (0, 0, 0)$ i $Q = (3, 0, 0)$ de \mathbb{R}^3 , considereu el conjunt de punts $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(P, x) = 2d(Q, x)\}$. Pot ser una quàdrica?
3. Classifiqueu i representeu gràficament les quàdriques següents:
 - a) $2x^2 - 3y^2 - 1 = 0$
 - b) $2x^2 = 5y^2 + z^2$
 - c) $x^2 + y^2 + 2z = 0$
 - d) $y^2 - 8 = 0$
 - e) $x^2 = 2 - 2y^2 - 2z^2$
 - f) $x = 2y^2 + y + 1$
4. El conjunt de punts de l'espai tals que el producte de les seves distàncies a dos punts fixos (dits focus) és constant, pot ser una quàdrica?
5. Quina quàdrica és $z = xy$?
6. Determineu el conjunt de punts P tals que el segment PA , amb $A = (1, 0, 1)$ sigui sempre perpendicular al segment PB , amb $B = (0, 0, 3)$. És una quàdrica?
7. Tenim una superfície $z = f(x, y)$ tal que en tallar-la pel pla $z = 1$ resulta l'el·lipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ i en tallar-la pel pla $z = -1$ resulta l'el·lipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Pot ser una quàdrica?
8. Quines quàdriques poden tenir almenys una secció parabòlica?
9. Una cònica C en girar a l'espai al voltant d'una recta r coplanària de la cònica genera una superfície. Quan és una quàdrica?
10. Classifiqueu i dibuixeu esquemàticament les quàdriques:
 - a) $x^2/8 + y^2/9 + z^2/8 = 1$
 - b) $2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 1$
 - c) $x - z^2 = 1$
 - d) $x^2 + 4y^2 - z^2/9 = 0$
 - e) $y^2 - 2x^2 = 1$
 - f) $x^2 + y^2 + kz^2 = 0$

Pistes i solucionari dels problemes de la part I

1. Geometria mètrica

1.2. Algunes construccions elementals

Problema 1

Col·locar $BC = a$; fer el semicercle de diàmetre a i des de B col·locar h_b que talla el semicercle en P ; traceu la recta CP i trobeu la seva intersecció A fent el cercle de centre el punt mitjà de BC i radi m_a .

Problema 2

Col·loqueu $BC = a$ i l'angle C en un extrem C ; pel seu punt mitjà i B traceu W_c , l'extrem del qual amb B determina ja el triangle.

Problema 3

Feu el triangle de costats a, b i $2m_c$ i reconstruiu a partir d'ell ABC .

Problema 4

Distingiu els casos en què el triangle és rectangle, acutangle o obtusangle. En el cas del ortocentre feu la mateixa distinció.

Problema 5

Poseu lletres als angles $ABCD$, marqueu els angles meitat i verifiqueu que en el quadrilàter determinat per les bisectrius angles oposats sumen 180° .

1.3. Mètodes per a construccions amb regle i compàs

Problema 1

Useu $2S = a \cdot h_a$ i 1 per construir h_a . Feu l'arc capaç sobre a d'angle A .

Problema 2

Si $a < b$ i a, b , són els costats, a i W_a determineu el triangle isòsceles; b i W_a també; a i W_b no.

Problema 3

No (cal tenir algun element més per rigiditzar la figura).

Problema 4

Appliqueu el mètode d'homotècies (figura 1.3.6).

1.4. Nombres construïbles amb regla i compàs

Problema 1

$2, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ i x^3 són construïbles si x ho és.

Problema 2

No. El teorema val amb polinomis a coeficients racionals o enters.

Problema 3

Per la fórmula d'Heron S s'expressa en funció d' a, b, c , i $s = (a + b + c)/2$ i és construïble.

Problema 4

Si 2 és solució de $x^3 - 8 = 0$.

Problema 5

Representar gràficament els dos segments.

1.5. Quatre problemes clàssics de regla i compàs

Problema 1

Resoldre $x^3 = 4$ o $x^3 = 5$ no és possible amb regla i compàs. Les duplicacions de políedres tampoc són possibles.

Problema 2

Aplicar teorema de Pitàgores i relació de les àrees de les figures semblants.

Problema 3

Donat $ABCD$, traceu BD i la seva paral·lela per c que talli la prolongació d' AD en E , aleshores ABE té la mateixa àrea que $ABCD$.

Problema 4

Ni 11, ni 13, ni 19.

Problema 5

Cal marcar $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Teoria de la proporció

2.2. Propietats geomètriques de la proporció

Problema 1

$$l_n = 2 \sin(\pi/n).$$

Problema 2

$\sqrt{2}$ és la diagonal d'un quadrat unitari. Usant diagonals dels rectangles $1 \times \sqrt{n}$ neixen els valors $\sqrt{n+1}$.

Problema 3

Si F és rectangle $a \times b$ amb $b < a$, F' és rectangle de costats $(a^2 - b^2)/b$ i a . F és el recíproc de F' reunit amb F' .

Problema 4

$$3\sqrt{2}/2; \sqrt{5}/2.$$

2.3. El número d'or: la divina proporció

Problema 1

El nombre d'or correspon a $n = 2$ i el plàstic a $n = 3$.

Problema 2

Apliqueu el principi de la figura 2.3.5 a un rectangle $1 \times \phi$ i el fet $\phi^2 = 1 + \phi$.

Problema 3

Apliqueu inducció o verifiqueu la relació de forma recurrent.

Problema 4

Nombre d'or.

Problema 5

Proporcions divines pertot arreu.

2.4. De les mesures i les concepcions culturals de la proporció en arquitectura

Problema 1

Quadrats i interessants rectangles auris a la planta. Observeu el polígon al voltant del centre de l'altar.

Problema 2

Més proporcions divines.

Problema 3

El pentàgon associat és la clau. Noteu els punts de divisió de l'home.

2.5. El modulator de Le Corbusier

Problema 1

Rectangles auris i façana àuria.

Problema 2

Proporcions dinàmiques i quadrats.

3. Geometria vectorial

3.1. Espais vectorials

Problema 2

A Si, dim 1

B no

C si, dim 2

D si, dim 3

Problema 3

- b) $(1, 0)$ coordenades de \vec{u}_1 en la base \vec{u}_1, \vec{u}_2
 $(1, 1)$ coordenades de \vec{u}_1 en la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 .
- c) $(5, -1)$ coordenades de \vec{w} en la base \vec{v}_1, \vec{v}_2
 $(3, -2)$ coordenades de \vec{w} en la base \vec{u}_1, \vec{u}_2 .

Problema 4

$a = 3$.

3.2. Matrius i àlgebra matricial

Problema 1

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3

Quan n és parell.

Problema 4

Val 0.

3.3. Aplicacions lineals

Problema 1

$$\left(1, 0, \frac{3}{2}\right)$$

Problema 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \dim \operatorname{Im} f = 2, \quad \text{base } \operatorname{Im} f(0, 1, 0), (0, 1, 2)$$

$\dim \operatorname{Ker} f = 1, \quad \text{base } \operatorname{Ker} f(-3, 1, -2).$

Problema 3

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3.4. Sistemes d'equacions lineals: classificació i resolució

Problema 1

a) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} - z, z \in \mathbb{R}.$

b) $x = y = z = 0.$

Problema 2

Si $a = -1, x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}, z = 0.$ Si $a \neq -1, x = -\frac{3a+2}{2a^2+2}, y = \frac{3a-2}{2a^2+2}, z = \frac{1(a+1)(a+2)}{2(a^2+2)}$

Problema 3

$$x = 1, y = 1, z = 0$$

Problema 4

$$x = -z, y = -z, \forall z \in \mathbb{R}.$$

3.5. Diagonalització

Problema 1

$k \neq 0, 2,$ diagonalitza, matriu diagonal $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix},$ matriu canvi base $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

$k = 0,$ diagonalitza, matriu diagonal $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$ matriu canvi base $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Problema 2

Polinomi característic $-(\lambda - 2)^2(\lambda - 1),$ matriu en la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

matriu en la base canònica

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Problema 3

a) F. b) C. c) C.

Problema 4

$K \neq -1$.

4. Transformacions geomètriques

4.1. Afinitats

Problema 1

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z' - 1$$

$$y = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z'$$

$$z = z' + 1$$

Problema 2

$$x' = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$y' = -\frac{1}{2}y + 1$$

És regular

Problema 3

$$x' = 6x - 2y + 1$$

$$y' = -x - y + 2$$

$$\text{Punt fix } \left(\frac{1}{6}, \frac{11}{12} \right)$$

Problema 4

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4.2. Transformacions ortogonals

Problema 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2

$$a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2} \text{ rotació d'angle } \frac{3\pi}{2} \text{ al voltant de l'eix } z = 0, x = y.$$

$$a = -\sqrt{2}, b = \sqrt{2} \text{ rotació d'angle } \frac{\pi}{2} \text{ al voltant de l'eix } z = 0, x = y.$$

Problema 3

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{12} - \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{6} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

Problema 4

a) Simetria axial.

b) Rotació d'angle π al voltant de l'eix $x = y, z = -2x$.

4.3. Moviments rígids

Problema 1

$$\frac{x-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{y-2}{\sqrt{3}+1}, \quad \frac{2x-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2y-(\sqrt{3}+4)}{1-\sqrt{3}}$$

Problema 2

Translació i rotació axial.

Problema 3

Una simetria d'eix la recta que passa per $(1, 1)$ i forma un angle $\frac{\alpha}{2}$ amb r .

Si $\alpha \neq \pi$ no dóna el mateix.

Problema 4

- a) No.
- b) Només per $\lambda = \pm 1$.

4.4. Semblances

Problema 1

$$k = -2$$

Problema 2

$$k^2$$

Problema 3

- Translació, gir i homotècia lineal respecte de l'origen.
- Translació, simetria axial i homotècia lineal respecte de l'origen.

5. Teoria de la simetria

5.1. Simetria i arquitectura. Grups de simetria

Problema 1

Girs 90° , 180° , 240° , 360° i 4 simetries axials.

Problema 2

Rombe amb girs de 180° , 360° , dues simetries axials. Per translació d'aquests elements en dues direccions s'analitza la simetria global del mosaic ròmbic.

Problema 3

Una sola simetria, un nombre senar de gir, etc. Una figura irregular de $\{I\}$, gir de 0° , no pot tenir cap altre gir. Figures homotètiques tenen igual simetria.

5.2. Grups puntuals de simetria o de Leonardo

Problemes 1 i 2

Marqueu els eixos de simetria i mireu si hi ha centre de gir i quins girs deixen les figures iguals.

Problema 3

$$C_1 = \{I\}.$$

5.3. Grups de simetria dels frisos

Problema 1

Compareu amb la figura 5.3.1.

Problema 2

Són el mateix fris amb girs de 180° , translacions, simetries verticals i llicaments.

Problema 3

Apliqueu l'algorisme de classificació ja fet per a les altres lletres.

5.5. Simetria espacial

Problema 1

Gir 180° , eixos verticals i horitzontals, translacions.

Problema 2

Relacioneu-lo amb la malla d'hexàgons regulars associada.

Problema 3

Apliqueu la classificació (figura 5.4.2.).

6. Quàdriques

6.1. Una visita a les quàdriques

Problema 1

No reglades són el·lipsoide, paraboloides el·líptic, hiperboloides de dos fulls. Reglades les altres.

Problema 2

Totes les no degenerades.

Problema 3

Cilindre circular, con circular, el·lipsoide de revolució (inclou esfera), paraboloides de revolució, hiperboloides de dos fulls, hiperboloides de revolució.

6.2. Equacions reduïdes de les quàdriques

Problema 1

- a) $2X^2 - Y^2 + Z^2 - 17/4 = 0$;
- b) $-X^2 + ((1 + \sqrt{5})/2)Y^2 + ((1 - \sqrt{5})/2)Z^2 - 8 = 0$;
- c) $X^2 + 3Y^2 - 3Z^2 - 4 = 0$;
- d) $X^2 + Y^2 + Z - 26 = 0$.

6.3. Classificació euclidiana de quàdriques

Problema 1

- a) cilindre el·líptic,
- b) paraboloides el·líptic,
- c) con el·líptic,
- d) dos plans que es tallen,
- e) paraboloides hiperbòlic,
- f) cilindre el·líptic,
- g) paraboloides de revolució,
- h) pla.

Bibliografía

ALBERTI, L. B. (1976) *Sobre la Pintura*. Fernando Torres Editor: Valencia.

ALEXANDER, Ch. (1976) *Ensayo sobre la síntesis de la forma*. Ediciones Infinito: Buenos Aires.

ALEXANDER, Ch. (1965) "The Patten of Streets", en *Architectural Form*.

ALEXANDER, Ch. (1969) "A City Is Not a Tree", en *Design*, 1966; véase del autor: *Tres aspectos de matemática y diseño*. Tusquets Editor: Barcelona.

ALEXANDER, Ch. (1971) *La estructura del medio ambiente*. Tusquets Editor: Barcelona.

ALSINA, C. (2005) *Geometría cotidiana. Placeres y sorpresas del diseño*. Ed. Rubes: Barcelona.

ALSINA, C.; NELSEN, R. (2006) *Math Made Visual*. Math. Ass. of America, Washington.

ALSINA, C.; TRILLAS, E. (1990) *Lecciones de Álgebra y Geometría. Curso para estudiantes de Arquitectura*. Ed. Gustavo Gili: Barcelona.

BANCHOFF, T.; WERMER, J. (1983) *Beyond the Third Dimension: Geometry, Computer Graphics and Higher Dimensions*. New York: Springer-Verlag.

BOHIGAS, O. (1978) *Proceso y erótica del diseño*. La Gaya Ciencia. S.A.: Barcelona.

BOLT, B. (1991) *Mathematics meets technology*. Cambridge: U.P.

BOSSARD, Y. (1977): *Rosaces, frises et pavages*. Vol. 1: *Étude pratique*, CEDIC, París.

BROADBENT, G.; A. WARD (eds.) (1971) *Metodología del diseño arquitectónico*. Editorial Gustavo Gili, S. A.: Barcelona.

BROADBENT, G. (1976) *Diseño arquitectónico. Arquitectura y Ciencias Humanas*. Editorial Gustavo Gili, S. A.: Barcelona.

CAPORIONI; GARLATTI; TENCA-MONTINI (1971) *La coordinación modular*. Editorial Gustavo Gili, S. A.: Barcelona.

COFFIN, S.T. (1989) *The Puzzling World of Polyhedra Dissections*. Oxford University Press: New York.

- COOK, T.A. (1979) *The Curves of Life: Being an Account of Spiral Formations and their Applications to Growth in Nature, to Science, and to Art*. New York: Dover Publications.
- COUSIN, J. (1970) "Topological organization of architectural space", en *Architectural Design*.
- COXETER, H.S.M.; EMMER, M.; PENROSE R.; TEUBER, M.L. (eds.) (1986) *M.C. Escher: Art and Science*. North-Holland: New York.
- CRUELLS, P.; GUIJARRO, P. (2002) *Matemàtiques a l'Arquitectura. Problemes resolts*. Ed. UPC.
- CUNDY, M.H.; ROLLENT, A.P. (1961) *Mathematical Models*. Oxford: Clarendon.
- DAVIS, P.J.; HERSH, R. (1981) *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhauser.
- DIXON, J.R. (1970) *Diseño en Ingeniería*. Editorial Limusa-Wiley, S. A.: México, D.F.
- DÜURER, A. (1973) *Della simmetria dei corpi humani*. Gabriele Mazzotta, Editore SpA: Milán.
- ERNST, B. (1976) *The Magic Mirror of M.C. Escher*. New York: Random House.
- EVES, H. (1963) *Estudio de las Geometrías*. 2 Vols, Uteha, México.
- EVES, H. (1992) *Modern Elementary Geometry*. Boston: Jones and Bartlett Publishing.
- FEJES TOTH, L. (1964) *Regular Figures*. Pergamon Press Ltd.: Oxford.
- GAMOW, G. (1961) *One, Two, Three... Infinity*. New York: Bantam Books.
- GHYKA, M. C. (1964) *Geometrical Composition and Design*. Tiranti: Londres.
- GHYKA, M. C. (1977) *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Editorial Poseidón, S. L.: Barcelona.
- GHYKA, M. C. (1978) *El número de oro*, 2 vols., Editorial Poseidón, S. L.: Barcelona.
- GOMBRICH, E. H. (1979) *Arte e ilusión. Estudio sobre psicología de la representación pictórica*. Ed. Gustavo Gili: Barcelona.
- GÓMEZ, J. ET ALTRI (1996) *La Sagrada Familia de Gaudí al CAD*. UPC: Barcelona.
- GREENBERG, M. (1993) *Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History*, 3rd de. W. H. Freeman, New York.
- GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G.C. (1986) *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman: New York.
- GUILLÉN, G. (1990) *Poliedros*. Ed. Síntesis: Madrid.
- GUZMÁN, M. DE (1991) *Para pensar mejor*. Ed. Labor: Barcelona.
- HAMBIDGE, G. (1924) *The Partenon and others Greek Temples*. Yale U.P.: New Haven.
- HAMBIDGE, G. (1967) *The Elements of Dynamic Symmetry*. Dover Publications Inc.: Nueva York.

- HARGITTAI, I. (ed.) (1986) *Symmetry*. Pergammon Press: New York.
- HENDERSON, D.W. (1995) *Experiencing Geometry: On Plane and Sphere*. Prentice Hall, Englewood Cliffs: New Jersey.
- HOLT, M. (1971) *Mathematics in Art*. Studio Vista: Londres.
- HUNTLEY, H. E. (1970) *The Divine Proportion. A Study in Mathematical Beauty*, Dover Publications, Inc.: Nueva York.
- IVINS, W. H. (1946) *Art and Geometry*. Dover Publications, Inc.: Nueva York.
- KASNER, E.; NEWMAN, J. (1972) *Matemáticas e imaginación*. ed. Continental: México.
- KEPES, O. (1966) *Module Symmetry*. Proportion, Studio Vista Publishers: Londres.
- LE CORBUSIER (1977) *Hacia una arquitectura*, Editorial Poseidón, S. L.: Barcelona.
- LE CORBUSIER (1976) *El Modulor. Ensayo sobre una medida armónica a la escala humana aplicable universalmente a la arquitectura y a la mecánica y Modulor 2 (1955). Los usuarios tienen la palabra. Continuación de "El Modulor" (1948)*, Editorial Poseidón, S. L.: Barcelona.
- LEONARDO DA VINCI (1976) *Tratado de la Pintura*. Editora Nacional: Madrid.
- MANDELBROT, B. (1982) *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman: New York.
- MARCH, L. (1976) *The Architecture of Form*. Cambridge U. P., Cambridge, (Massachusetts).
- MARCH, L.; STEADMAN, P. (1971) *The Geometry of environment*. Londres: RIBA.
- MARTIN, L.; MARCH, L.; STEADMAN, P.; ECHENIQUE, M. (1975) *La estructura del espacio urbano*. Editorial Gustavo Gili, S. A.: Barcelona.
- MOORE, Ch.; ALLEN, G. (1978) *Dimensiones de la arquitectura. Espacio, forma y escala*. Editorial Gustavo Gili, S. A.: Barcelona.
- PACIOLI, M. (1494) *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*. Venecia.
- PEDOE, D. (1982) *La Geometría en el Arte*. Ed. Gustavo Gili: Barcelona.
- PIERO DELLA FRANCESCA (1942) *De prospectiva pigendi*, ed. crítica al cuidado de G. Nicco Fasola, Florencia.
- PÓLYA, G. (1976) *Polyhedra, a visual approach*, U. Cal. Press: Londres.
- PUIG ADAM, P. (1956) *Curso de Geometría métrica*, 2 vols., Biblioteca Matemática, S. L.: Madrid.
- QUARONI, L. (1980) *Proyectar un edificio. Ocho lecciones de arquitectura*. Xarait Ediciones: Madrid.
- SALVADORI, M. (1990) *Why buildings stand up*. WW Norton: New York.
- SCHOLFIELD, P. H. (1972) *La teoría de la proporción en arquitectura*. Editorial Labor, S. A.: Barcelona.
- SENECHAL, M.; FLECK, G. (1974) *Patterns of Symmetry*. Cambridge, U. P.: Cambridge (Massachusetts).

- SERRA, M. (1989) *Discovering Geometry: An Inductive Approach*. Key Curriculum Press: Berkeley, California.
- STARK, R. M.; NICHOLLS, R. (1972) *Mathematical Foundations for Design*. McGraw-Hill Book Co.: Nueva York.
- STEEN, L.A., ET AL. (1999) –COMAP– *Matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley, UAM: Madrid.
- SUMMERSON, J. (1972) *El lenguaje clásico de la arquitectura. De L. B. Alberti a Le Corbusier*. Editorial Gustavo Gili, S. A.: Barcelona.
- THOMPSON, V. A. (1980) *Sobre el crecimiento y la forma*. Hermann Blume Edición: Madrid.
- TIMOSHENKO, S. P.; YOUNG, D. H. (1970) *Elementos de resistencia de materiales*. Editorial Muntaner y Simón, S. A.: Barcelona.
- VITRUVIO (1960) *Los Diez Libros de Arquitectura*. Editorial Iberia, S.A.
- WEEKS, J. (1985) *The Shape of Space*. New York: Marcel Dekker.
- WEYL, H. (1952) *Symmetry*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- WILLIAMS, R. (1979) *The Geometrical Foundation of Natural Structure: A Source Book of Design*. New York: Dover.
- WITTKOWER, R. (1945) *Brunelleschi and Proportion in Perspective*. Warburg Institute: Londres.
- WITTKOWER, R. (1964) "The Changing Concept of Proportion" en *Daedalus*.
- WITTKOWER, R. (1979) *Sobre la Arquitectura en la Edad del Humanismo. Ensayos y escritos*. Editorial Gustavo Gili, S. A.: Barcelona.
- WONG, W. (1982) *Fundamentos del diseño bi- y tri-dimensional*. Gustavo Gili: Barcelona.



Part II
Preliminars geomètrics

Índex

1	Trigonometria	157
2	Angles i la seva mesura	158
3	Trigonometria en un triangle rectangle	162
4	Trigonometria en un triangle qualsevol	167
5	Addició de raons trigonomètriques	173
6	Resolució de triangles	176
7	Polinomis	183
8	Operacions amb polinomis	185
9	Regla de Ruffini	189
10	Arrels i teorema del residu	191
11	Fraccions polinòmiques	196
12	Nombres complexos	200
13	Equacions polinòmiques fonamentals	203
14	Sistemes d'equacions lineals i matrius	209
15	Determinants	224
16	Resolució de sistemes: regla de Cramer	230
17	Vectors, punts, rectes i plans	232
18	Producte escalar i producte vectorial	240
19	Problemes mètrics entre varietats lineals	244
20	Una visita a les còniques	250
	Solucionari dels problemes de la part II	257

Trigonometria

La trigonometria és una ciència amb uns orígens, en part mítics i en part pràctics, que es perden en el passat, localitzats a l'antiga Babilònia i també a la Xina (any 3.000 aC), però que té aplicacions modernes. L'objectiu de la trigonometria és la *resolució de triangles* i, per tant, és una ciència arrelada a l'agrimensura, a l'astronomia i a la topografia, si bé actualment té nombroses aplicacions en diferents parts de la física, principalment en la descripció de fenòmens que tinguin caràcter repetitiu (periòdic).

Històricament, la necessitat de fixar les festes religioses d'una banda i, de l'altra, la necessitat de conèixer els cicles de la naturalesa per saber amb precisió l'època de la sembra i de la collita determinen la confecció del calendari; l'any, el mes i el dia són quantitats astronòmiques que cal obtenir acuradament i aleshores sorgeix la trigonometria com a instrument per als càlculs astronòmics. En aquest aspecte els babilonis, segles abans de Crist, van ser-ne els iniciadors. Posteriorment, el grecs (segles I-II dC) van desenvolupar la trigonometria per confeccionar el calendari i per aplicar-la a la navegació i a la geografia. Van destacar en aquest període: Hiparc (125 dC), que segueix el sistema sexagesimal; Menelau (98 dC), que en la seva obra *Esfèrica*, dona teoremes relatius a triangles plans; Ptolomeu (168 dC) és la figura cabdal i, en el seu *Almagest*, deixa la trigonometria en la forma que perdurarà per un mil·leni.

L'aparició de la teoria heliocèntrica de Copèrnic i de Kepler en contraposició a la geocèntrica d'Aristòtil va revifar l'interès per l'astronomia als segles XV i XVI. *Regiomontanus* (1436-1476), en la seva obra *De triangulis omnimodis*, exposa els coneixements de trigonometria plana i esfèrica disponibles a l'època. Rhaeticus (1514-1576), deixeble de Copèrnic, va utilitzar totes les sis *raons trigonomètriques*: *sinus*, *cosinus*, *tangent*, *cotangent*, *secant* i *cosecant*.

Aquest tema té com a objectiu prioritari que estudeu la trigonometria pensant-la geomètricament; a tal fi es procurarà sempre fer palès el substrat geomètric que hi ha en els conceptes trigonomètrics que anirem introduint.

Angles i la seva mesura

Definició. Angle és la porció de pla limitada per dues semirectes a i b amb origen comú V (figura 1a).

El punt V s'anomena *vèrtex* de l'angle i les semirectes a i b són els *costats*. És usual representar l'angle de vèrtex V i costats a i b mitjançant una lletra grega, p.e., α . En el cas en què les dues rectes a les quals pertanyen els costats a i b divideixen el pla en quatre parts iguals, l'angle es diu *recte* (figura 1b).

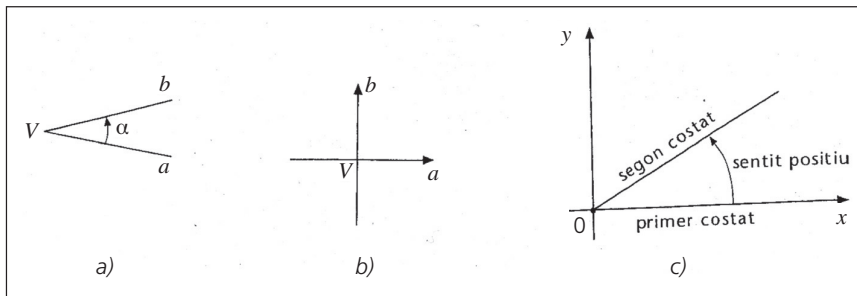


Fig. 1

Aquesta definició d'angle presenta algunes dificultats tant a l'hora de mesurar angles com a l'hora d'interpretar certs angles; cal adoptar una definició diferent que interpreti l'angle com a gir. Si en un angle, segons la definició, establim un ordre entre els seus costats (figura 1c) es pot interpretar l'angle com la mesura del camí per passar d'un punt P del primer costat a un punt P' del segon costat, és a dir, un gir de centre V al qual associem la mesura de l'angle mitjançant un arc PP' recorregut en un sentit escollit i comprès entre els costats.

Mesures d'angles

Per comparar i mesurar angles del pla s'adopta una estratègia que consisteix a

- prendre un sistema de coordenades;
- situar el vèrtex de l'angle en l'origen O ;
- col·locar el primer costat de l'angle en el semieix positiu OX ;
- establir un sentit de gir que transformi el primer costat en el segon: usualment el sentit positiu és antihorari, és a dir, el contrari del recorregut per les agulles del rellotge (i, en conseqüència, el negatiu és horari).

Un dels sistemes més utilitzat per a mesurar angles és el *sistema sexagesimal*. En aquest sistema l'angle recte es divideix en 90 parts iguals, cadascuna rep el nom de *grau*.

A la vegada cada grau es divideix en 60 parts, anomenada cadascuna *minut*, i cada minut es divideix en 60 parts, cadascuna de les quals s'anomena *segon*. Tenim, doncs, les relacions

$$\begin{aligned} 1 \text{ recte} &= 90 \text{ graus} = 90^\circ \\ 1^\circ &= 60 \text{ minuts} = 60' \\ 1' &= 60 \text{ segons} = 60'' \end{aligned}$$

Radiant

En matemàtiques, física i altres ciències, molt sovint s'utilitza per a mesurar angles el radiant. Donada una circumferència C de centre O i radi r és fàcil observar l'existència d'una correspondència bijectiva entre els angles de vèrtex amb el centre O i els arcs de C (figura 2)

$$\alpha \Leftrightarrow AB$$

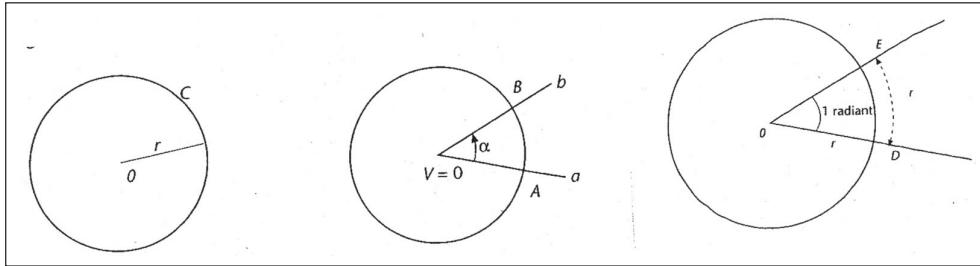


Fig. 2

Aquests angles que tenen el seu vèrtex en el centre O de la circumferència s'anomenen *angles centrals*. D'ara en avant, basant-nos en la correspondència bijectiva esmentada, parlarem indistintament d'angles o d'arcs segons convingui en cada cas.

Definició. Un radiant és un angle central al qual correspon un arc de circumferència la longitud del qual coincideix amb la longitud del radi d'aquesta circumferència.

L'angle central mesura 1 radiant si la longitud de l'arc DE és igual al radi OD de la circumferència. D'altra banda sabem que la longitud d'una circumferència ve donada per la fórmula

$$L = 2\pi r$$

Per aquest motiu en una circumferència hi ha

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radiants}$$

La igualtat anterior ens permet trobar l'equivalència entre els dos sistemes d'unitats de mesura d'angles

$$2\pi \text{ radiants} = 360^\circ \quad \text{o bé} \quad \pi \text{ radiants} = 180^\circ$$

i, d'acord amb aquesta darrera igualtat, tenim que

$$1 \text{ radiant} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3,1416} \approx 57^\circ 17' 44''$$

Exemple. Canvi d'unitats

a) Expressar en radiants l'angle de 135° :

$$\left. \begin{array}{l} 180^\circ \rightarrow \pi \text{ radiants} \\ 135^\circ \rightarrow x \text{ radiants} \end{array} \right\} x = \frac{\pi \cdot 135^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4} \text{ radiants}$$

En general,

$$\left. \begin{array}{l} 180^\circ \rightarrow \pi \text{ radiants} \\ n^\circ \rightarrow x \text{ radiants} \end{array} \right\} x = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ} \text{ radiants}$$

Per a passar de graus n a radiants x es multiplica per $\frac{\pi}{180}$

b) Expressar en el sistema sexagesimal l'angle de $\pi/3$ radiants:

$$\left. \begin{array}{l} 180^\circ \rightarrow \pi \text{ radiants} \\ x^\circ \rightarrow \pi/3 \text{ radiants} \end{array} \right\} x^\circ = \frac{180^\circ \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

En general,

$$\left. \begin{array}{l} 180^\circ \rightarrow \pi \text{ radiants} \\ x^\circ \rightarrow n \text{ radiants} \end{array} \right\} x^\circ = \frac{180^\circ \cdot n}{\pi}$$

Per passar de radiants n a graus x es multiplica pel factor $\frac{180}{\pi}$

Problema 1

a) Expressu en radiants els angles de: 30° , 45° , 60° , 120° , 210° , 270° , 315° , 715° , 390° i 1345° .

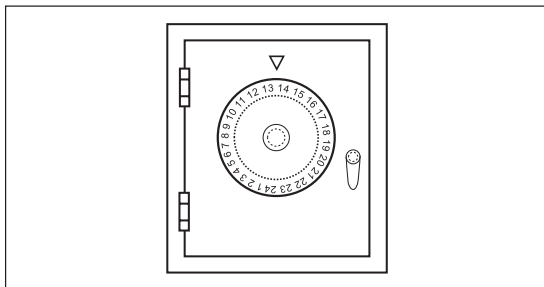


Fig. 3

b) Expressu en el sistema sexagesimal els angles la mesura dels quals en radiants és:

$$\pi/7, 3\pi/10, 2\pi/5, \pi/12, 9\pi/5, 3 \text{ i } 17.$$

Problema 2

Una caixa de cabdals té un sistema d'obertura consistent en un disc de 24 nombres que es troba en la posició indicada a la figura 3.

Trigonometria en un triangle rectangle

Raons trigonomètriques d'un angle agut

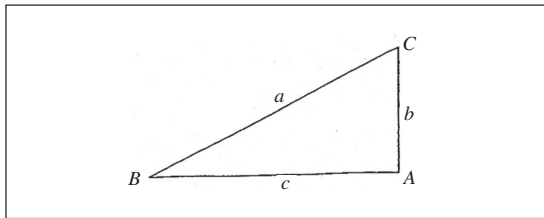


Fig. 5

Considerem el triangle rectangle ABC (figura 5).
Són prou conegudes les propietats

$$a) a^2 = b^2 + c^2 \text{ (Teorema de Pitàgores)}$$

$$b) A + B + C = 180^\circ = \pi \text{ rad.} \Rightarrow B + C = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad.}$$

Cal observar que en a) intervenen únicament els costats del triangle, mentre que en b) solament apareixen els angles. Doncs bé, aquí es tracta de relacionar angles i costats del triangle.

Definició. Es defineixen sis raons trigonomètriques anomenades *sinus*, *cosinus*, *tangent*, *cotangent*, *secant* i *cosecant* de l'angle agut B mitjançant les fórmules

$$\left. \begin{array}{l} \sin B = \frac{CA}{BC} \quad \cos B = \frac{BA}{BC} \quad \tan B = \frac{AC}{AB} \\ \operatorname{cosec} B = \frac{BC}{AC} \quad \sec B = \frac{BC}{BA} \quad \cot B = \frac{AB}{AC} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Exemple. Calcularem les raons trigonomètriques de l'angle més petit d'un triangle rectangle els catets del qual fan 3 cm i 4 cm. Busquem en primer lloc la hipotenusa

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Segons les fórmules donades:

$$\sin B = 3/5, \quad \cos B = 4/5, \quad \tan B = 3/4, \quad \cot B = 4/3, \quad \sec B = 5/4, \quad \operatorname{cosec} B = 5/3$$

Raons trigonomètriques dels angles complementaris

Sabem que dos angles són *complementaris* si la seva suma val 90° o $\pi/2$ radians. En qualsevol triangle rectangle els angles aguts són complementaris. Si considereu ara la figura 5 i la definició de les raons trigonomètriques, veureu que

$$\left. \begin{aligned} \sin C &= \frac{BA}{BC} = \cos B & \cos C &= \frac{AC}{BC} = \sin B & \tan C &= \frac{AB}{AC} = \cot B \\ \operatorname{cosec} C &= \frac{BC}{BA} = \sec B & \sec C &= \frac{BC}{AC} = \operatorname{cosec} B & \cot C &= \frac{AC}{AB} = \tan B \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Raons trigonomètriques d'angles usuals

Per tal de familiaritzar-nos amb les raons trigonomètriques, ara calcularem les dels angles $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad i $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad.

Raons trigonomètriques de l'angle de 45°

Dibuixem un triangle rectangle amb els dos catets iguals a la unitat.

La hipotenusa $BC = a$ val, segons el teorema de Pitàgores,

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

i, d'acord amb les definicions, s'obté

$$\sin 45^\circ = \sin B; \quad \cos 45^\circ = \cos B = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \tan 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{1} = 1$$

i, per tant,

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \sec 45^\circ = \sqrt{2}; \quad \cot 45^\circ = 1$$

Raons trigonomètriques de l'angle de 60°

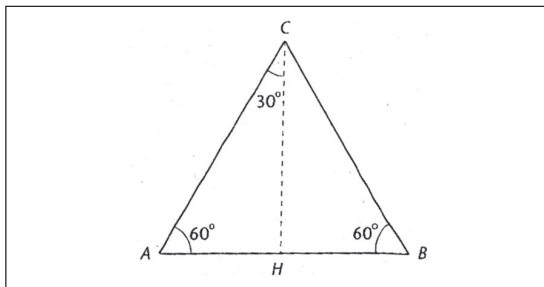


Fig. 6

Dibuixem ara un triangle equilàter (figura 6) amb costats de 2 unitats: els tres angles són iguals i mesuren 60° cadascun.

L'altura CH divideix el triangle ABC en dos triangles rectangles iguals AHC i CHB . Treballarem en el primer AHC calculant en primer lloc el catet CH , ja que $AB = 2$ i $AH = 1$ per construcció:

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Tenim, doncs, que

$$\sin 60^\circ = \sin A = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2}; \quad \tan 60^\circ = \tan A = \frac{BH}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

D'aquestes igualtats es dedueixen

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \sec 60^\circ = 2; \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Raons trigonomètriques de l'angle de 30°

Es podrien calcular a partir del mateix triangle AHB de la figura 6 (intenteu-ho). Però, com que l'angle de 30° és complementari del de 60°, podem aplicar les relacions (2). Així tenim

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \cos 60^\circ = 1/2; & \cos 30^\circ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; & \tan 30^\circ &= \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{cosec} 30^\circ &= \sec 60^\circ = 2; & \sec 30^\circ &= \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}; & \cot 30^\circ &= \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Resolució de triangles rectangles

Resoldre un triangle rectangle és calcular tots els seus elements (angles i costats) partint del coneixement d'alguns d'ells. La trigonometria ens permet solucionar aquest problema si es coneixen dos elements, anomenats *dades*, del triangle, dels quals un almenys ha de ser un costat. Tractarem tots els casos possibles en els exemples següents.

Exemple. Resoldrem el triangle rectangle en el qual les dades són: la hipotenusa $a = 12$ cm i l'angle $B = 25^\circ$.

Les raons trigonomètriques $\sin 25^\circ$, $\cos 25^\circ$ es troben utilitzant una calculadora (vigileu que sigui en mode DEG, ja que els angles són en graus sexagesimals).

$$\text{Sabem que } B + C = 90^\circ \Rightarrow C = 90^\circ - B = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

De les definicions de sinus i cosinus tenim

$$\sin B = b/a \Rightarrow b = a \cdot \sin B = 12 \cdot \sin 25^\circ = 12 \cdot 0,4226 = 5,07 \text{ cm}$$

$$\cos B = c/a \Rightarrow c = a \cdot \cos B = 12 \cdot \cos 25^\circ = 12 \cdot 0,9063 = 10,87 \text{ cm}$$

Exemple. Resoldrem el triangle rectangle, del qual es coneixen un catet $b = 5$ cm i l'angle oposat $B = 40^\circ$.

Tenim: $C = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

$$\sin B = b/a \Rightarrow a = b / \sin B = 5 / \sin 40^\circ = 5 / 0,6427 = 7,78 \text{ cm}$$

$$\tan B = b/c \Rightarrow c = b / \tan B = 5 / \tan 40^\circ = 5 / 0,8390 = 5,96 \text{ cm}$$

Exemple. Resoldrem el triangle rectangle que té per dades el catet $c = 20$ cm i l'angle contigu $B = 35^\circ$.

En aquest cas: $C = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

$$\cos B = c/a \Rightarrow a = c/\cos B = 20/\cos 35^\circ = 20/0,8191 = 24,42 \text{ cm}$$

$$\tan B = b/c \Rightarrow b = c \cdot \tan B = 20 \cdot \tan 35^\circ = 20 \cdot 0,7002 = 14 \text{ cm}$$

Exemple. Resoldrem el triangle rectangle, coneguts els catets $b = 6$ cm i $c = 8$ cm.

En primer lloc calcularem la hipotenusa $a = BC$:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

L'angle B es pot calcular a partir de la definició de tangent:

$$\tan B = b/c = 6/8 = 0,75 \Rightarrow B = \arctan(0,75) = 36^\circ 52' 12''$$

i, per tant,

$$C = 90^\circ - 36^\circ 52' 12'' = 53^\circ 7' 48''$$

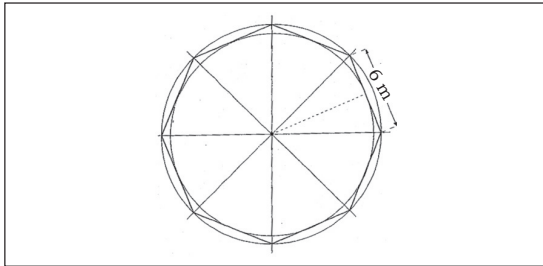


Fig. 7

Problema 4

Un octàgon regular (figura 7) té un costat de 6 m. Trobeu el radi del cercle circumscrit, el del cercle inscrit i l'àrea de l'octàgon.

Problema 5

Trobeu l'àrea d'un polígon regular de n costats inscrit en un cercle de r metres de radi. Feu el mateix càlcul per al polígon circumscrit.

Problema 6

Un hexàgon i un octàgon regulars tenen tots dos el mateix perímetre: $p = 48$ m. Trobeu la diferència entre les seves àrees.

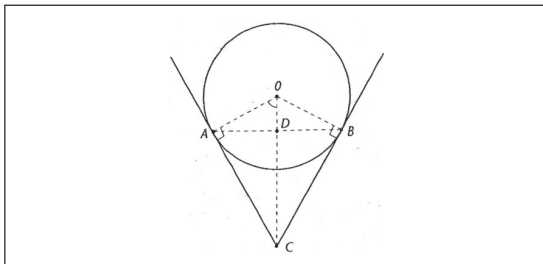


Fig. 8

Problema 7

Un dipòsit cilíndric d'1,5 m de diàmetre descansa sobre un suport en forma de díedre rectilini de 58° . Trobeu la distància entre dos punts oposats A i B situats en les línies de contacte del cilindre amb el suport i que siguin corresponents a una secció perpendicular.

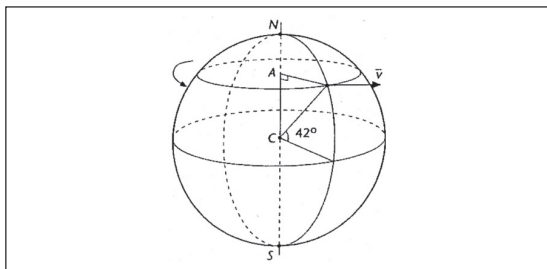


Fig. 9

Problema 8

El diàmetre mitjà de la terra és de 12.751,2 km. A quina velocitat lineal, en km/h, es mou una persona situada sobre un punt del paral·lel 42 N (figura 9).

Problema 9

Resoleu un triangle rectangle coneguts l'angle $B = 30^\circ$ i l'altura relativa a la hipotenusa 5 cm.

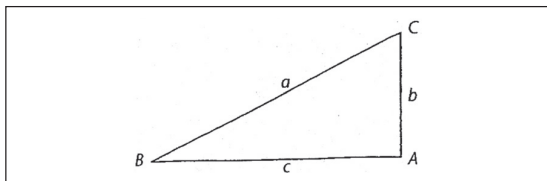


Fig. 10

Problema 10

Calculeu la longitud de la bisectriu de l'angle C en un triangle rectangle coneguts el costat a i l'angle B (figura 10).

Trigonometria en un triangle qualsevol

Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol

Es tracta, en aquest apartat, d'estendre les definicions de les raons trigonomètriques donades en l'apartat anterior per a angles qualssevol. Per a aconseguir definicions similars per a un angle orientat B qualsevol, cal

- Suposar un sistema de coordenades rectangulars en el pla i situar-hi l'angle B en "posició estàndard".
- Escollir sobre el segon costat de l'angle B un punt P .
- Trobar les coordenades (x, y) de P i la seva distància a l'origen O , $d = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Amb aquest esquema es defineixen les raons trigonomètriques de l'angle B mitjançant les igualtats:

$$\begin{aligned} \sin B &= y/d; & \cos B &= x/d; & \tan B &= y/x; \\ \operatorname{cosec} B &= d/y; & \sec B &= d/x; & \cot B &= x/y. \end{aligned} \quad (3)$$

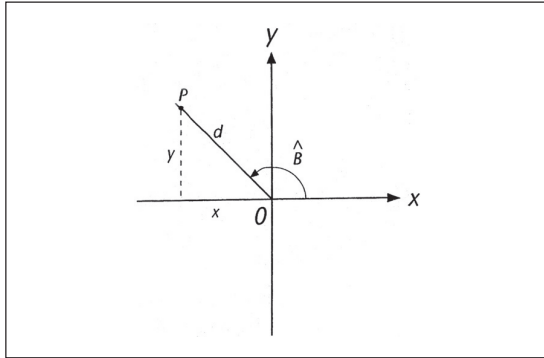


Fig. 11

D'aquestes definicions es dedueix que dos angles que es diferencien en un nombre enter de voltes, és a dir, B i $B + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) tenen les mateixes raons trigonomètriques, per la qual cosa únicament caldrà estudiar les raons dels angles més petits que 2π radians o 360° . Els angles la diferència dels quals és igual a un nombre enter de voltes s'anomenen *trigonomètricament equivalents*. Per calcular les raons trigonomètriques d'un angle que mesura més de 360° (2π radians), es calcula l'angle equivalent de mesura compresa entre 0 i 360° (0 i 2π). Així, l'angle de 1.125° és equivalent al de 45° ja que $1.125^\circ = 3 \times 360^\circ + 45^\circ$.

Exemple. Calcularem les raons trigonomètriques de l'angle B entre l'eix OX i el segment OP amb $P = (-2, 1)$.

El punt P escollit en el segon costat de l'angle B té coordenades $(x, y) = (-2, 1)$. Per tant, la seva distància a l'origen O val

$$d = OP = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Així doncs:

$$\sin B = \frac{y}{d} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos B = \frac{x}{d} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \tan B = \frac{y}{x} = \frac{1}{(-2)} = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{cosec} B = \sqrt{5}; \quad \sec B = -\frac{\sqrt{5}}{2}; \quad \cot B = -2$$

Circumferència trigonomètrica

Definició. *Circumferència trigonomètrica o goniomètrica* és la que té radi igual a la unitat, $r = 1$, i el seu centre en l'origen de coordenades O .

En aquest cas, si considerem un angle B qualsevol en "posició estàndard", el seu segon costat talla la circumferència goniomètrica en un punt $P = (x, y)$ tal que $OP = \sqrt{x^2 + y^2} = r = 1$. D'acord amb les definicions (3), tenim ara les expressions més senzilles

$$\sin B = y; \quad \cos B = x; \quad \tan B = y/x; \quad \cot B = x/y; \quad \sec B = 1/x; \quad \operatorname{cosec} B = 1/y$$

Exemple. Calculem les raons trigonomètriques de l'angle de 0° .

Observem la figura 12. El segon costat de l'angle de 0° (que coincideix amb el primer) talla la circumferència goniomètrica en el punt $A(1, 0)$ i, per tant, tenim $\sin 0^\circ = y = 0$; $\cos 0^\circ = x = 1$; $\tan 0^\circ = y/x = 0/1 = 0$; $\cot 0^\circ = x/y = 1/0$ (no està definida); $\sec 0^\circ = 1/x = 1/1 = 1$; $\operatorname{cosec} 0^\circ = 1/y = 1/0$ (no està definida).

Problema 11

Observeu la figura 12 i calculeu les raons trigonomètriques dels angles de 90° , 180° i 270° .

Signe de les raons trigonomètriques

De la representació gràfica del sinus i del cosinus (figura 13) es veu que:

– el sinus és positiu en I i II, i negatiu en III i IV

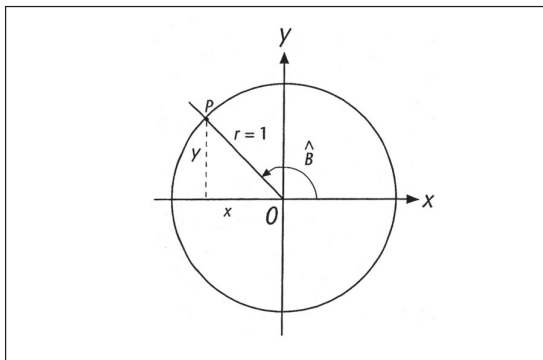


Fig. 12

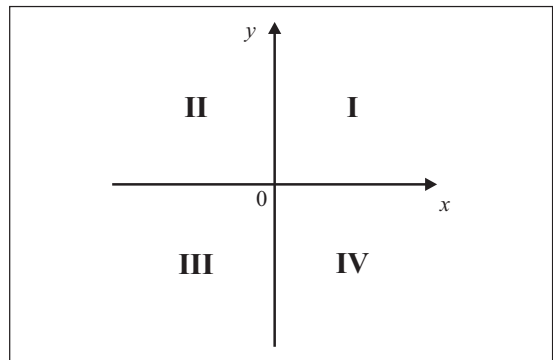


Fig. 13

– el cosinus és positiu en I i IV, i negatiu en II i III

La tangent = sinus/cosinus és positiva en I i III, i negativa en II i IV.

La cosecant, la secant i la cotangent tenen el mateix signe que el sinus, el cosinus i la tangent respectivament.

Relacions entre les raons trigonomètriques d'un mateix angle

Considerem un angle α qualsevol en "posició estàndard" i sigui C la circumferència goniomètrica (figura 14).

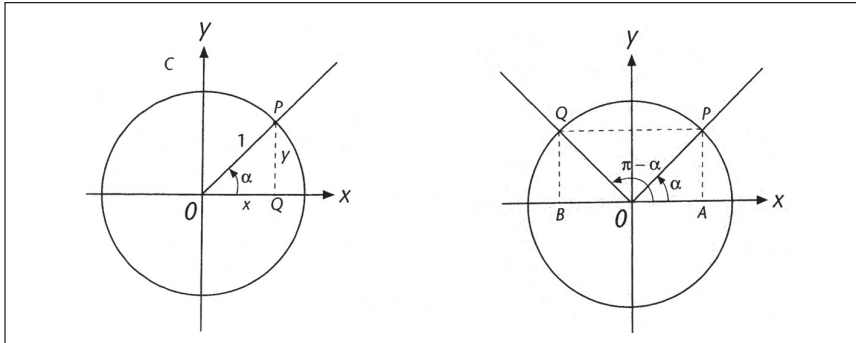


Fig. 14

De les definicions donades a l'apartat anterior, es veu que les raons cosec α , sec α i cot α són recíproques de sin α , cos α i tan α respectivament:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} \alpha &= 1/y = 1/\sin \alpha && \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha \cdot \sin \alpha = 1 \\ \sec \alpha &= 1/x = 1/\cos \alpha && \Rightarrow \sec \alpha \cdot \cos \alpha = 1 \\ \cot \alpha &= x/y = 1/(y/x) = 1/\tan \alpha && \Rightarrow \cot \alpha \cdot \tan \alpha = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

D'altra banda tenim la relació

$$\tan \alpha = y/x = \sin \alpha / \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha \quad (5)$$

Finalment, el teorema de Pitàgores aplicat al triangle OPQ ens dóna $x^2 + y^2 = 1$, és a dir

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (6)$$

i, dividint la igualtat $x^2 + y^2 = 1$ per x^2 ó per y^2 es té

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{1}{y^2}$$

que es pot escriure

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha; \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (7)$$

Aquestes relacions ens permeten, d'una forma senzilla, donada una raó trigonomètrica calcular les cinc restants.

Exemple. Si $\sin \alpha = 1/3$, trobeu les altres cinc raons de α .

Sabem que $\operatorname{cosec} \alpha = 1/\sin \alpha = 3$. D'altra banda

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

El doble signe del $\cos \alpha$ indica que la solució no és única. Si prenem $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, aleshores

$$\sec \alpha = 1/\cos \alpha = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Finalment tenim

$$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \cot \alpha = 2\sqrt{2}$$

De manera anàloga es fa amb el $\cos \alpha$ negatiu. Per tal que la solució sigui única s'ha de saber a quin dels quatre quadrants del pla pertany l'angle α donat.

Problema 12

Calculeu les altres raons trigonomètriques sabent que

- $\cos \alpha = 1/4$ i α pertany al quart quadrant
- $\tan B = -3$ i B pertany al segon quadrant
- $\operatorname{cosec} C = -3/2$ i C pertany al tercer quadrant

Relacions entre les raons trigonomètriques d'alguns angles

- a) α i $180^\circ - \alpha$ (angles suplementaris):

De la igualtat dels triangles OPA i OQB (figura 14) es dedueixen les relacions entre les raons trigonomètriques dels angles suplementaris α i $180^\circ - \alpha$:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= QB = PA = \sin \alpha & \Rightarrow & \operatorname{cosec}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= OB = -OA = -\cos \alpha & \Rightarrow & \sec(180^\circ - \alpha) = -\sec \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha & \Rightarrow & \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha \end{aligned} \quad (8)$$

Exemple. Hem calculat abans les raons trigonomètriques de l'angle $\alpha = 30^\circ$. Les raons de l'angle $180^\circ - \alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ són

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 1/2; \quad \operatorname{cosec} 150^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sec 150^\circ = -\sec 30^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cot 150^\circ = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

b) α i $180^\circ + \alpha$ (angles que es diferencien en 180°):

Considerem la igualtat dels triangles OAP i OBQ (figura 15a). Tenim:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ + \alpha) &= BQ = -AP = -\sin \alpha; & \operatorname{cosec}(180^\circ + \alpha) &= -\operatorname{cosec} \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= OB = -OA = -\cos \alpha; & \sec(180^\circ + \alpha) &= -\sec \alpha \\ \tan(180^\circ + \alpha) &= \tan \alpha; & \cot(180^\circ + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned} \quad (9)$$

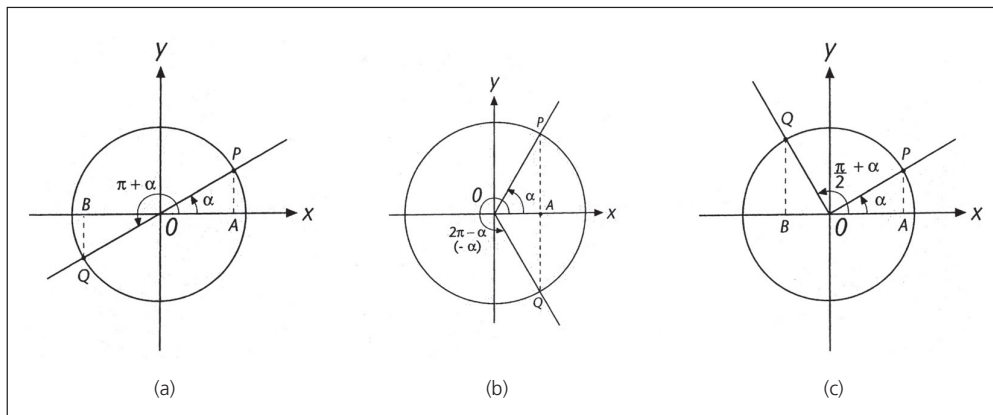


Fig. 15

Exemple. Raons trigonomètriques de l'angle 210° . Aquest angle és igual a $180^\circ + 30^\circ$ i, per tant,

$$\begin{aligned} \sin 210^\circ &= -\sin 30^\circ = -1/2; & \operatorname{cosec} 210^\circ &= -\operatorname{cosec} 30^\circ = -2 \\ \cos 210^\circ &= -\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; & \sec 210^\circ &= -\sec 30^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \tan 210^\circ &= \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; & \cot 210^\circ &= \cot 30^\circ = \sqrt{3} \end{aligned}$$

c) α i $360^\circ - \alpha$ (ó α i $-\alpha$):

Les relacions entre les raons trigonomètriques d'aquests angles es dedueixen de la igualtat dels triangles OPA i OQA (Figura 15b):

$$\begin{aligned} \sin(360^\circ - \alpha) &= \sin(-\alpha) = AQ = -AP = -\sin \alpha; & \operatorname{cosec}(360^\circ - \alpha) &= -\operatorname{cosec} \alpha \\ \cos(360^\circ - \alpha) &= \cos(-\alpha) = OA = \cos \alpha; & \sec(360^\circ - \alpha) &= \sec \alpha \\ \tan(360^\circ - \alpha) &= \tan(-\alpha) = -\tan \alpha; & \cot(180^\circ - \alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned} \quad (10)$$

Problema 13

Calculeu les raons trigonomètriques de l'angle de $300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$.

Comproveu mitjançant la igualtat dels triangles OPA i OQB de la figura 15c que es verifiquen les relacions següents

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha; & \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha; & \tan(90^\circ + \alpha) &= -\cot \alpha; \\ \operatorname{cosec}(90^\circ + \alpha) &= \sec \alpha; & \sec(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{cosec} \alpha; & \cot(90^\circ + \alpha) &= -\tan \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Problema 14

Calculeu les raons trigonomètriques de l'angle de $120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$.

Addició de raons trigonomètriques

Es tracta de trobar fórmules que relacionin les raons trigonomètriques dels angles suma $\alpha + \beta$ i diferència $\alpha - \beta$ amb les raons dels angles α i β . La importància d'aquestes fórmules es basa en el fet que

$$\sin(\alpha \pm \beta) \neq \sin \alpha \pm \sin \beta \quad \text{i} \quad \cos(\alpha \pm \beta) \neq \cos \alpha \pm \cos \beta$$

Per exemple: $\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$ mentre que

$$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \neq 1$$

Cosinus i sinus de la suma i de la diferència d'angles

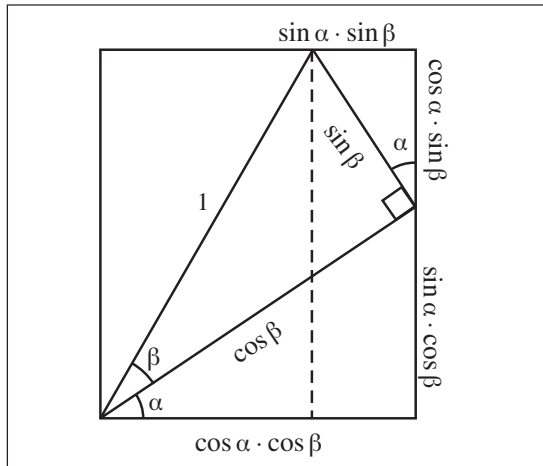


Fig. 16

Trobarem, en primer lloc, la relació existent entre les raons de $\alpha \pm \beta$ i les de α i β . Si mirem bé la figura 16 podrem deduir que

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad (12)$$

Pel que fa, per exemple, al cosinus de $\alpha - \beta$ tenim la igualtat

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

En efecte, reduïm la suma $\alpha + \beta$ a la diferència $\alpha - (-\beta)$ i apliquem la fórmula (12) de la suma recordant que

$$\cos(-\beta) = \cos \beta \quad \text{i} \quad \sin(-\beta) = -\sin \beta$$

Exemple. Per a calcular $\cos 15^\circ$ expressem l'angle de 15° com la diferència de 45° i 30° , és a dir, $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ i aleshores tenim

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Problema 15

Calculeu $\cos 105^\circ$ ($105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$).

Ara recollim algunes fórmules útils.

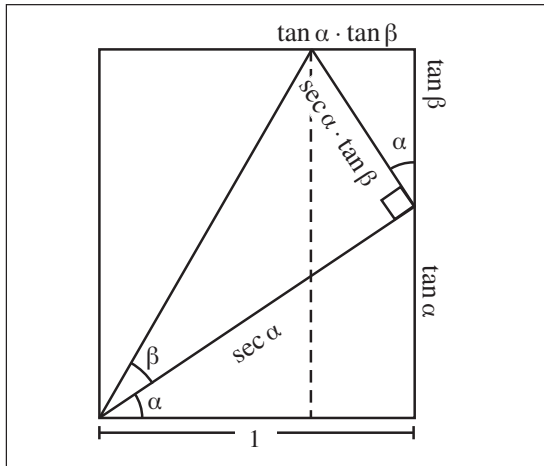


Fig. 17

Tangent de la suma i de la diferència d'angles

Observant la figura següent resulta la fórmula buscada:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad (13)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Raons trigonomètriques dels angles doble i meitat

Usant les expressions ja deduïdes

Angle doble: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$; $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ (14)

Angle meitat:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (15)$$

Relacions entre sumes i productes

$$\left. \begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}; \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}; \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Exemple

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 240^\circ = \sin(270^\circ - 30^\circ) = \sin 270^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 270^\circ \cdot \sin 30^\circ = (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple.
$$\tan 75^\circ = \tan(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \cdot \tan 45^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

Exemple. Com que $22^\circ 30' = 45^\circ/2$, les raons trigonomètriques de $22^\circ 30'$ valen:

$$\sin 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

Problema 16

Comproveu les igualtats següents:

a) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 4x$

b) $\frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{\sin(a + b) + \sin(a - b)} = \tan b$

c) $\frac{\sin(a + b) + \sin(a - b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)} = \tan a$

d) $\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c = \frac{\sin(a + b + c)}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}$.

Problema 17

Resoleu les equacions trigonomètriques:

a) $\sin^2 x = \cos^2 x$.

c) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

b) $\sin x + \sin 3x = \cos x$.

Problema 18

Verifiqueu que en tot triangle ABC es verifica la igualtat

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

Resolució de triangles

Hem vist ja la resolució de triangles rectangles, ara voldríem fer el mateix però amb triangles qualssevol per a la qual cosa cal disposar de noves eines que ens donin els lligams existents entre els sis elements fonamentals del triangle: costats a, b, c i angles A, B, C . Aquestes eines vénen donades pels següents

Teoremes del sinus i del cosinus

Teorema del sinus

En tot triangle ABC els costats són proporcionals als sinus dels angles oposats

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (18)$$

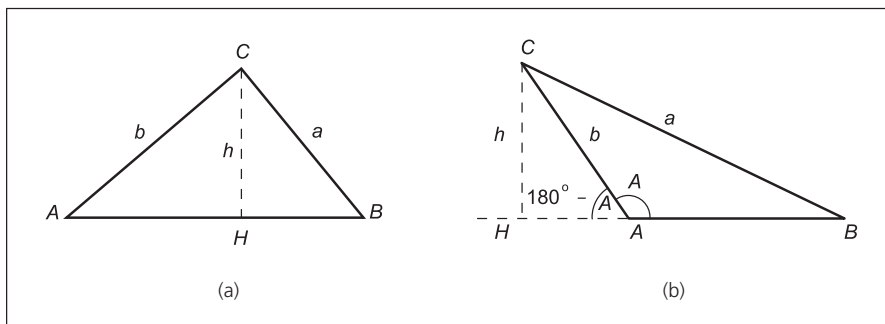


Fig. 18

En efecte, donat un triangle qualsevol ABC (figura 18) tracem l'altura h , que divideix ABC en dos triangles rectangles AHC i BHC . En el primer tenim

$$\sin A = h/b \Rightarrow h = b \cdot \sin A$$

i en BHC tenim

$$\sin B = h/a \Rightarrow h = a \cdot \sin B$$

d'on resulta la igualtat

$$a \cdot \sin B = b \cdot \sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Per a deduir la igualtat $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ es traça l'altura corresponent al vèrtex A .

En el cas de la figura 18b l'altura h està fora del triangle ABC , però també es formen dos triangles rectangles AHC i BHC ; en AHC tenim

$$\sin(180^\circ - A) = h/b \Rightarrow h = b \cdot \sin(180^\circ - A)$$

i en BHC tenim

$$\sin B = h/a \Rightarrow h = a \cdot \sin B$$

Per tant

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - A)} = \frac{b}{\sin B}$$

i com que $\sin(180^\circ - A) = \sin A$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Problema 19

Calculeu l'altura relativa al vèrtex A en un triangle ABC coneguts: $a = 22,34$ m, $B = 69^\circ 54' 38''$ i $C = 27^\circ 18' 22''$.

Problema 20

Mitjançant la fórmula (18) demostreu que en qualsevol triangle ABC es verifica

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$$

Problema 21

Teorema de les tangents: En tot triangle ABC es té

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}; \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan \frac{A+C}{2}}{\tan \frac{A-C}{2}}; \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}} \quad (19)$$

(Feu servir el problema 20 i (18)).

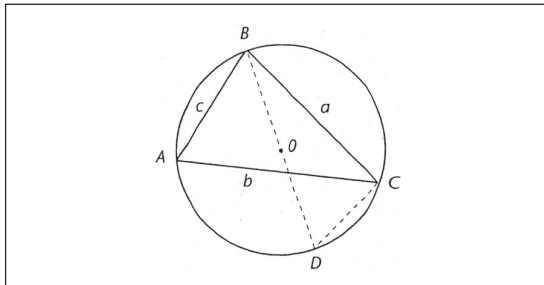


Fig. 19

Interpretació geomètrica del teorema del sinus

El valor constant que apareix en el teorema del sinus és igual al diàmetre de la circumferència circumscrita al triangle ABC .

En efecte, considerem el triangle ABC i la circumferència circumscrita a aquest (figura 19). El diàmetre que passa per B , BD , és la hipotenusa del triangle rectangle BCD (l'angle C és recte) i, per tant, es

compleix $\sin D = BC/BD = a/2R$ on R és el radi de la circumferència. Però $D = A$, ja que tots dos són inscrits i abasten el mateix arc de circumferència. Així, doncs, tenim que

$$\sin A = a/2R \Rightarrow a/\sin A = 2R = \text{diàmetre}$$

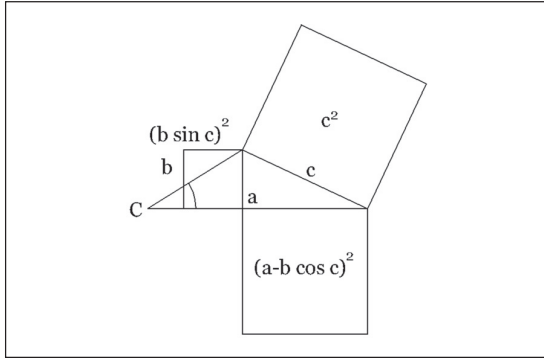


Fig. 20

Teorema del cosinus:

En tot triangle ABC el quadrat d'un costat és igual a la suma dels quadrats dels altres costats menys el doble producte d'aquests pel cosinus de l'angle que formen

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \quad (20)$$

Demostrarem visualment la tercera igualtat (les altres es fan de forma anàloga) usant el teorema de Pitàgores.

Problema 22

Calculeu l'altura d'un triangle ABC del qual es coneixen els tres costats: $a = 12$ cm, $b = 15$ cm i $c = 10$ cm.

Problema 23

(Fórmules de Briggs): En qualsevol triangle ABC es compleixen les igualtats següents, anomenades fórmules de Briggs

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \quad \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad (21)$$

on p és el semiperímetre de ABC , és a dir, $p = (a + b + c)/2$.

(Per demostrar-les utilitzeu les fórmules primera i segona de (15) i la primera de (20)).

Àrea del triangle

a) *Conegudes la base b i l'altura h* : és coneguda de tothom la fórmula de l'àrea S d'un triangle en funció de la base b i de l'altura h

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

b) *Coneguts dos costats i l'angle que formen*: veurem altres fórmules per a calcular l'àrea d'un triangle. En el triangle rectangle AHB tenim

$$\sin A = h/c \Rightarrow h = c \cdot \sin A$$

que portat a la fórmula de l'àrea ens dona

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

c) *Fórmula d'Heró (coneguts els tres costats)*: Ve donada per $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ on p és el semiperímetre de ABC .

Per comprovar aquesta fórmula substituïrem en $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$ pel $\sin A$ per

$$\begin{aligned}\sin A &= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = 2 \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}} = \\ &= 2 \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}\end{aligned}$$

amb la qual cosa s'obté

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \frac{2}{b \cdot c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Exemple. Calculeu l'àrea d'un triangle ABC els costats del qual fan 10, 13 i 17 cm.

En aquest cas el semiperímetre $p = (10 + 13 + 17)/2 = 20$ cm. Per tant

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{20 \cdot (20-10) \cdot (20-13) \cdot (20-17)} = \\ &= \sqrt{20 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 3} = \sqrt{4200} = 64,8 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Resolució de triangles

Per a resoldre un triangle qualsevol cal conèixer tres dels seus elements entre els quals almenys hi ha d'haver un costat. Els teoremes anteriors ens proporcionen les eines per a la resolució.

a) *Coneguts un costat a i dos angles A i B* : L'angle $C = 180^\circ - (A + B)$

Aplicant el teorema del sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

tenim

$$b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}; \quad c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$$

b) *Coneguts dos costats a , b i l'angle que formen C* : Del teorema del cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C$$

es dedueix

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

Del teorema del sinus $\sin A = (a \cdot \sin C)/c$. I, finalment, $B = 180^\circ - (A + B)$.

c) *Coneguts dos costats a, b i l'angle oposat a un d'aquests, A:* Pel teorema del sinus

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$$

$C = 180^\circ - (A + B)$. I, pel teorema del sinus, $c = (a \cdot \sin C) / \sin A$.

d) *Coneguts els tres costats a, b, c:* S'aplica el teorema del cosinus:

$$\text{De } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

De forma anàloga $\cos B = (a^2 + c^2 - b^2) / 2ac$; $\cos C = (a^2 + b^2 - c^2) / 2ab$.

Exemple. Resolem el triangle de costats $a = 10$ cm, $b = 12$ cm i $c = 17$ cm.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{12^2 + 17^2 - 10^2}{2 \cdot 12 \cdot 17} = 0,81617 \Rightarrow A = \arccos 0,81617 = 35^\circ 1' 74'' 6$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{10^2 + 17^2 - 12^2}{2 \cdot 10 \cdot 17} = 0,72058 \Rightarrow B = \arccos 0,72058 = 43^\circ 5' 34'' 9$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{10^2 + 12^2 - 17^2}{1 \cdot 10 \cdot 12} = -0,1875 \Rightarrow C = \arccos(-0,1875) = 100^\circ 4' 82'' 5$$

Comprovació: $A + B + C = 35^\circ 17' 46'' + 43^\circ 53' 49'' + 100^\circ 48' 25'' = 180^\circ$.

Exemple. Es tracta de resoldre un triangle les dades del qual són: $B = 130^\circ 15' 20''$, $b = 151,23$ m i $c = 120,38$ m. De

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{c \cdot \sin B}{b} = \frac{120,38 \cdot \sin 130^\circ 1' 52'' 0}{151,23} = 0,60748 \Rightarrow C = 37^\circ 2' 42'' 9$$

$$A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - 167^\circ 39' 49'' = 12^\circ 20' 11''$$

$$\text{De } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B} = 42,34 \text{ m.}$$

Aplicacions pràctiques: càlcul d'altures i distàncies

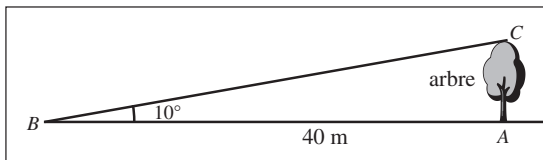


Fig. 21

a) **Altura d'un punt de peu accessible:** volem calcular l'altura d'un arbre al qual es pot arribar (figura 21),

El triangle ABC és rectangle. Sabem que

$$\tan B = AC/BA \Rightarrow AC = BA \cdot \tan B \Rightarrow$$

$$AC = 40 \cdot \tan 10^\circ = 40 \cdot 0,1763 = 7,05 \text{ m}$$

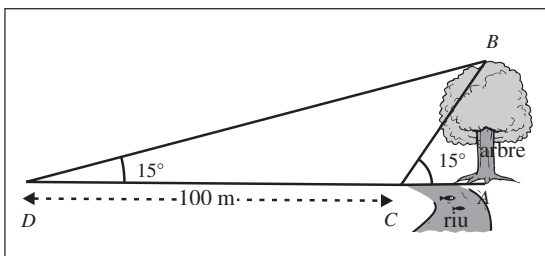


Fig. 22

$$\frac{BC}{\sin D} = \frac{DC}{\sin B} \Rightarrow \frac{BC}{\sin 15^\circ} = \frac{100}{\sin 45^\circ} \Rightarrow BC = \frac{100 \cdot \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{100 \cdot 0,2588}{0,7071} = 36,6 \text{ m}$$

Ara en el triangle rectangle CAH : $AB = CB \cdot \sin 50^\circ = 36 \cdot 6 \cdot 0,766 = 28 \text{ m}$.

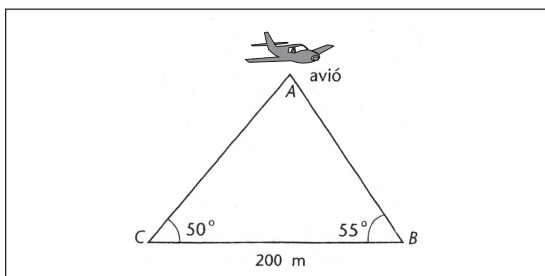


Fig. 23

b) **Altura d'un punt de peu inaccessible:** ara es tracta de calcular l'altura d'un arbre al qual no es pot arribar (figura 22).

En aquest cas necessitem un costat del triangle rectangle ABC , per això calculem en primer lloc BC en el triangle BCD , (del qual són coneguts el costat $DC = 100 \text{ m}$ i els angles $D = 15^\circ$ i $C = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$), mitjançant el teorema del sinus

c) **Distància a un punt inaccessible:** Cal trobar la distància AC des d'un avió A fins a un punt C (figura 23).

Es tracta de calcular el costat AC en el triangle ABC del qual es coneixen: el costat $BC = 200 \text{ m}$ i els angles $C = 50^\circ$ i $B = 55^\circ$. Apliquem el teorema del sinus

$$\frac{AC}{\sin 55^\circ} = \frac{BC}{\sin 75^\circ} \Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin 55^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{200 \cdot 0,8191}{0,9659} = 169,6 \text{ m}$$

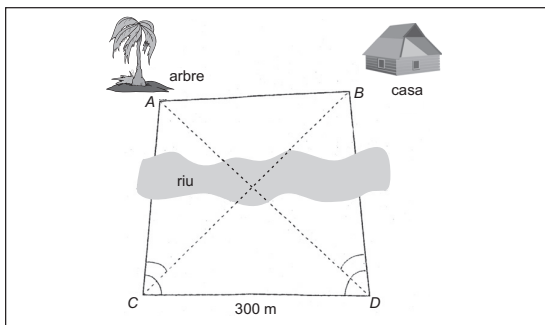


Fig. 24

d) **Distància entre dos punts inaccessibles:** tenim un arbre A i una casa B a un costat d'un riu i volem calcular la seva distància des de l'altre costat del riu (figura 24).

Mesurem la distància entre dos punts C i D , $CD = 300 \text{ m}$, i els angles $ACD = 95^\circ$, $ACB = 40^\circ$, $BDC = 85^\circ$ i $BDA = 50^\circ$. Es tracta de trobar el costat AB del triangle ABC , del qual, en principi, únicament es coneix l'angle $ACB = 40^\circ$. Calculem els costats AC (en ACD) i CB (en BCD) mitjançant el teorema del sinus:

$$\frac{AC}{\sin ACD} = \frac{CD}{\sin A} \Rightarrow AC = \frac{CD \cdot \sin ADC}{\sin A} = \frac{CD \cdot \sin(BDC - BDA)}{\sin A} = \frac{300 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{300 \cdot 0,5736}{0,8660} = 149 \text{ m}$$

$$\frac{CB}{\sin BDC} = \frac{CD}{\sin B} \Rightarrow CB = \frac{CD \cdot \sin BDC}{\sin B} = \frac{300 \cdot 0,9962}{0,7660} = 390,1 \text{ m}$$

Ara podem calcular AC en ABC pel teorema del cosinus:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 + CB^2 - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos ACB} = \\ &= \sqrt{149^2 + 390,1^2 - 2 \cdot 149 \cdot 390,1 \cdot 0,7660} = 255,6 \text{ m} \end{aligned}$$

Així, doncs, la distància entre l'arbre A i la casa B és de 255,6 m.

Problema 24

Ompliu la taula següent:

x graus	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
x (rad)																
sin																
cos																
tan																
cot																
sec																
cosec																

Polinomis

El tema dels polinomis és un bon exemple del *llenguatge matemàtic*, en el qual sovint s'utilitzen nombrosos símbols. Per aquest motiu molta gent considera les matemàtiques com una ciència difícil, opinió certa sense cap dubte quan no es coneixen bé els símbols emprats. Una propietat molt important que han de tenir els simbolismes és la concisió, que s'aconsegueix d'una manera elegant amb la juxtaposició dels signes + i -, els quals sembla que J. Widman va fer servir per primera vegada durant el segle XVI.

En l'actualitat és difícil fer-se una idea de com l'aparició de símbols, com +, -, ⟨, =, ⟩ (apareguts entre 1500 i 1650) van contribuir de manera tan important al desenvolupament de la matemàtica. Un matemàtic que, en el seu temps lliure, donà un gran impuls a l'àlgebra simbòlica fou François Viète (1540-1650).

Suposem que és conegut el conjunt dels nombres reals \mathbb{R} i la seva estructura.

Definició. Un *polinomi amb coeficients reals* és una expressió de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

en la qual a_0, a_1, \dots, a_n són números reals qualssevol i n és un nombre natural.

Els sumands $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$ que constitueixen el polinomi $p(x)$ s'anomenen *termes del polinomi* (també reben el nom de monomis).

Exemple. Són polinomis: $p(x) = 2 + 3x + 5x^2 - 9x^3 + 8x^4$; $q(x) = 1/2 - 3x^2 + (1/4)x^5$.

Grau d'un polinomi és el més gran dels exponents de x que apareix en el polinomi esmentat. Així, en l'exemple el grau de $p(x)$ és 4 i el grau de $q(x)$ és 5.

Coefficients d'un polinomi són els números reals a_0, a_1, \dots, a_n que multipliquen les potències de x .

Terme independent d'un polinomi $p(x)$ és el primer dels seus coeficients, és a dir, el a_0 .

Els coeficients del polinomi $p(x)$ de l'exemple són: 2, 3, 5, -9, 8 i els de $q(x)$ són: 1/2, 0, -3, 0, 0, 1/4. El terme independent del polinomi $p(x)$ és 2 i el de $q(x)$ és 1/2.

Si l'únic terme diferent de 0 d'un polinomi és el seu terme independent, el polinomi és de grau 0. Un polinomi pot tenir el seu terme independent igual a 0, per exemple, $r(x) = 6x + 3x^2 - 9x^4$.

Indeterminada o variable d'un polinomi és la lletra x que hi apareix. Per bé que aquesta lletra x és la que s'utilitza gairebé sempre, de fet se'n pot emprar qualsevol altra.

Exemple. Un polinomi en la indeterminada t podria ser $p(t) = 2 - 3t + t^2$.

L'única cosa que ens interessa saber d'aquesta indeterminada x és, ara com ara, que es comporta com un nombre qualsevol pel que fa a les lleis formals de l'aritmètica. En particular, cal recordar:

$$\begin{aligned}x + x &= 2x; & 2x^3 + 4x^3 &= 6x^3; & x^4 - 3x^4 &= -2x^4; \dots \\x \cdot x &= x^2; & x^2 \cdot x^5 &= x^7; \dots\end{aligned}$$

Representarem el conjunt dels polinomis amb coeficients reals per $R[x]$.

Problema 25

Escriuiu

- Polinomis de graus: 3, 5, 1, 2, 0.
- Quatre polinomis de grau 6 que tinguin, respectivament, coeficients naturals, enters no naturals, racionals no enters i irracionals.

Operacions amb polinomis

El que és més important en els conjunts matemàtics és la possibilitat d'operar amb els seus elements. Segons les operacions definides en un conjunt i les propietats que aquestes verifiquen s'obtenen les diferents estructures matemàtiques.

En el cas dels polinomis les operacions fonamentals són la suma, la resta, el producte i la divisió.

Suma (o resta) de polinomis

La suma (o resta) de dos polinomis donats $p(x)$ i $q(x)$ és el polinomi que s'obté sumant (o restant) els coeficients corresponents a la mateixa potència de la x en els dos polinomis. Es representa per $p(x) + q(x)$.

Exemple. Per efectuar la suma dels polinomis $p(x) = 4 + 5x - 2x^2$ i $q(x) = 7 + x + 4x^2 + 6x^3$ d'una manera còmoda, s'escriuen en la forma següent:

$$\begin{array}{r} 4 + 5x - 2x^2 \\ 7 + x + 4x^2 + 6x^3 \\ \hline 11 + 6x + 2x^2 + 6x^3 \end{array}$$

Quan ja es té una mica de pràctica, per tal de no perdre temps, es fa la suma directament:

$$p(x) + q(x) = (4 + 5x - 2x^2) + (7 + x + 4x^2 + 6x^3) = 11 + 6x + 2x^2 + 6x^3$$

Propietats de la suma

És fàcil de comprovar que la suma de polinomis té les propietats següents:

- Associativa: $[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$
- Commutativa: $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$
- Element neutre: és el polinomi que té tots els coeficients iguals a 0: $0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$.
- Element oposat: tot polinomi $p(x)$ té un oposat $-p(x)$ obtingut en canviar el signe de tots els coeficients de $p(x)$.

L'oposat a $p(x) = 1 - 3x + 5x^2$ és $-p(x) = -1 + 3x - 5x^2$.

Sumant $p(x)$ i $-p(x)$ s'obté l'element neutre.

El conjunt $R[x]$ amb aquesta operació suma es diu que té estructura de *grup commutatiu*.

Producte de polinomis

Considerarem en primer lloc el producte de dos monomis, després el d'un monomi per un polinomi i finalment el de dos polinomis:

- a) **Producte de dos monomis:** es multipliquen els coeficients (tenint molta cura de la regla dels signes per a la multiplicació de nombres reals) i se sumen els exponents de la x

$$4x^3 \cdot 2x^5 = 8x^8; \quad (-2x) \cdot 5x^2 = -10x^3; \quad (-3x^2) \cdot (-1/2x^7) = 3/2x^9$$

- b) **Producte d'un monomi per un polinomi:** es multiplica el monomi per cadascun dels termes del polinomi

$$3x^2 \cdot (2 - 4x + 7x^3) = 6x^2 - 12x^3 + 21x^5$$

També es pot escriure així

$$\begin{array}{r} 2 - 4x + 7x^3 \\ 3x^2 \\ \hline 6x^2 - 12x^3 + 21x^5 \end{array}$$

- c) **Producte de dos polinomis:** es multiplica cada terme del primer polinomi per cadascun dels termes del segon polinomi, després se sumen els monomis que tenen la x amb el mateix exponent.

La disposició pràctica dels càlculs és la següent

$$\begin{array}{r} 3 - 2x + 5x^2 \\ 7 + 3x - 2x^2 \\ \hline 21 - 14x + 35x^2 \\ 9x - 6x^2 + 15x^3 \\ - 6x^2 + 4x^3 - 10^4 \\ \hline 21 - 5x + 23x^2 + 19x^3 - 10x^4 \end{array}$$

Propietats del producte

El producte de polinomis té les propietats següents

- a) Associativa: $[p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x) = p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)]$
b) Commutativa: $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$
c) Element unitat: és el polinomi 1
d) Distributiva respecte a la suma: $p(x) \cdot [q(x) + r(x)] = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$

El conjunt $R[x]$ amb les operacions suma i producte té estructura d'anell i s'anomena l'*anell dels polinomis*.

Problema 26

Com calcularíeu la diferència de $p(x)$ menys $q(x)$?

Apliqueu-ho al cas $p(x) = 3 - 2x^2 + 3x^3$ i $q(x) = 5 + x - 2x^2 + 6x^3$.

Problema 27

Donats els polinomis $p(x) = 3 - x + 2x^2 + 5x^3$; $q(x) = 1 + x^2$; $r(x) = x + 3x^2 - x^3$ comproveu les propietats associativa i commutativa de la suma i del producte, com també la distributiva del producte respecte a la suma.

Problema 28

Efectueu les operacions següents amb els polinomis del problema 27:

- | | | |
|---------------------------|--|----------------------|
| a) $p(x) + q(x) - r(x)$ | d) $p(x) \cdot [q(x) - r(x)]$ | g) $p^2(x) - q^2(x)$ |
| b) $p(x) - [q(x) + r(x)]$ | e) $p^2(x) = p(x) \cdot p(x)$ | |
| c) $p(x) - [q(x) - r(x)]$ | f) $[p(x) + q(x)] \cdot [p(x) - q(x)]$ | |

Problema 29

Tenint en compte els resultats anteriors, quina relació hi ha entre els graus dels polinomis suma $p(x) + q(x)$ i producte $p(x) \cdot q(x)$ i els graus de $p(x)$ i $q(x)$?

Problema 30

Feu les operacions:

- $(a + 2bx + cx^2 - 3dx^3) + (2a - bx + 3cx^2 + 5dx^3)$
- $(2 + ax + 3x^2 - bx^3) + (c - 3x + 4x^2 - dx^3 + x^5)$
- $(a + bx - 3x^2) \cdot (2 - 3bx + x^2)$

Divisió de polinomis

Sabem que en l'anell \mathbb{Z} dels nombres enters no sempre és possible fer una divisió exacta, però donats dos enters qualssevol D i d sempre existeixen enters q i r que verifiquen:

- $D = d \cdot q + r$
- $0 \leq r < d$

els números q i r s'anomenen, respectivament, *quocient* i *residu* de la divisió de D per d . En l'anell $R[x]$ que tractem aquí la situació és gairebé la mateixa: Si $D(x)$ i $d(x)$ són dos polinomis qualssevol es pot trobar un parell de polinomis $q(x)$ i $r(x)$ que compleixen les condicions:

- a) $D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$
 b) grau de $r(x) <$ grau de $q(x)$.

Els polinomis $q(x)$ i $r(x)$ reben els noms de *quocient* i *residu*, respectivament, de la divisió de $D(x)$ per $d(x)$.

Per tal de fer la divisió de $D(x)$ per $d(x)$, és a dir, de trobar el quocient $q(x)$ i el residu $r(x)$, s'ordenen ambdós polinomis segons els exponents de la x des del més gran fins al més petit.

Una vegada feta l'ordenació, es divideix el primer terme de $D(x)$ pel primer terme de $d(x)$, el resultat es multiplica per $d(x)$ i aquest darrer resultat es resta de $D(x)$; amb el polinomi obtingut mitjançant la resta es repeteix el procediment fins a arribar a un polinomi de grau més petit que el de $d(x)$.

La disposició pràctica dels polinomis $D(x)$ i $d(x)$ a l'hora d'efectuar la divisió és la que ja coneixem:

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 3x - 10 \quad | \quad x^2 - 4x + 1 \\
 -x^4 + 4x^3 - \quad x^2 \qquad \qquad \qquad x^2 + 6x + 17 \\
 \hline
 6x^3 - 7x^2 + 3x \qquad \qquad \qquad \text{quocient} \\
 -6x^3 + 24x^2 - 6x \\
 \hline
 17x^2 - 3x - 10 \\
 -17x^2 + 68x - 17 \\
 \hline
 65x - 27 \\
 \text{residu}
 \end{array}$$

Si el residu de la divisió dels polinomis $D(x)$ per $d(x)$ és 0, la divisió s'anomena *exacta*.

A l'hora d'efectuar una divisió s'ha tenir en compte que si algun terme del dividend $D(x)$ té coeficient 0, cal deixar un "forat":

$$\begin{array}{r}
 x^5 \qquad - 3x^3 + 2x^2 \qquad - 7 \quad | \quad x^3 - 2x^2 + 3 \\
 -x^5 + 2x^4 \qquad - 6x^2 \qquad \qquad \qquad x^2 + 2x + 1 \\
 \hline
 + 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 \\
 - 2x^4 + 4x^3 \qquad - 6x \\
 \hline
 x^3 - 4x^2 - 6x - 7 \\
 - x^3 + 2x^2 \qquad - 3 \\
 \hline
 - 2x^2 - 6x - 10
 \end{array}$$

Regla de Ruffini

Aquesta regla és un cas particular de la divisió quan el divisor té la forma $x \pm a$. Constitueix una forma ràpida de fer la divisió emprant solament els coeficients; així, per a dividir el polinomi $p(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 7x - 10$, en ordre descendent, pel binomi $x - 2$ procedim com s'indica

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 5 \quad -3 \quad 7 \quad -10 \\
 2) \quad 2 \quad 14 \quad 22 \quad 58 \\
 \hline
 1 \quad 7 \quad 11 \quad 29 \quad 48 = \text{residu} \\
 \text{quocient}
 \end{array}$$

En la primera fila s'escriuen els coeficients del dividend $p(x)$; en la segona fila un 2) del divisor $x - 2$. La tercera fila ens dóna els coeficients del quocient: el primer, 1, és el mateix que el primer del dividend, 1; el segon s'obté multiplicant el primer per 2 i sumant-li el segon del dividend, $1 \cdot 2 + 5 = 7$, i així successivament; llavors el quocient és el polinomi $c(x) = x^3 + 7x^2 + 11x + 48$ (que té per grau una unitat menys que el grau del dividend) i el residu, que sempre és de grau 0, és el número real $r = 48$.

Cal recordar que si el polinomi divisor té termes amb coeficient nul, s'ha d'escriure un 0 en el lloc corresponent.

Per exemple, per a dividir el polinomi $2x^5 - 6x^2 + 3x - 5$ per $x + 1$, escriurem

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 0 \quad 0 \quad -6 \quad 3 \quad -5 \\
 -1) \quad -2 \quad 2 \quad -2 \quad 8 \quad -11 \\
 \hline
 2 \quad -2 \quad 2 \quad -8 \quad 11 \quad -16
 \end{array}$$

el quocient és $c(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x + 11$ i el residu $r = -16$.

Múltiples i divisors

Si donats dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$ existeix un altre polinomi $c(x)$ tal que $p(x) = q(x) \cdot c(x)$ es diu que $q(x)$ és un *divisor* de $p(x)$ i que $p(x)$ és un *múltiple* de $q(x)$. (El que es diu del polinomi $q(x)$ es pot dir també del polinomi $c(x)$).

Exemple. Es verifica la igualtat $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, d'on $x + 1$ i $x - 1$ són divisors de $x^2 - 1$, el qual és múltiple de $x + 1$ i de $x - 1$.

Comproveu que es verifiquen sempre les relacions següents

- i) $D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$
- ii) grau de $r(x) <$ grau de $d(x)$.

Problema 31

Feu les divisions següents i indiqueu quins són el quocient i el residu de cadascuna:

- a) $D(x) = 2 + 5x - 4x^2 + x^3 + 2x^4$, $d(x) = 3 - 2x + x^2$
- b) $D(x) = 1/2 + x - 3/4x^3 + 5x^5$, $d(x) = 3x + x^2 - 2x^3$
- c) $D(x) = 5 - 1/2x + 4x^2 + 2x^3$, $d(x) = -1/3 + x + 3x^2$

Problema 32

Feu les divisions següents:

- a) $D(x) = -10x^3 + 11x - 21x^2 + 12$, $d(x) = 2x^2 - 4 + 3x$
- b) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $d(x) = x + 1$

Escriuiu el dividend $D(x)$ com a producte de dos polinomis.

Problema 33

Amb la regla de Ruffini calculeu el quocient i el residu de:

- a) $(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) : (x - 1)$
- b) $(2/3x^4 + 1/2x^3 - 5x^2 + 4/5x + 1) : (x + 1/3)$
- c) $(x^5 - a^5) : (x - a)$
- d) $(x^5 - a^5) : (x + a)$
- e) $(x^3 + a^3) : (x - a)$
- f) $(x^3 + a^3) : (x + a)$

Quan la divisió sigui exacta, expresseu el dividend com a producte de polinomis.

Arrels i teorema del residu

Hem dit al principi que la lletra x que apareix en els polinomis es diu *indeterminada* o *variable*. Quan es dóna un valor numèric concret a la lletra x , com ara 3, $1/2$, ..., els polinomis es converteixen en nombres reals.

El *valor numèric* del polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ per a $x = a$ és el valor que assoleix aquest polinomi quan substituïm la x per a i efectuem les operacions indicades. El valor numèric de $p(x)$ per a $x = a$ es representa amb $p(a)$.

Exemple. Calculem el valor numèric del polinomi $p(x) = 2 - 3x + x^3$ per a $x = -3$ i per a $x = 1/2$.

Tindrem

$$p(-3) = 2 - 3(-3) + (-3)^3 = 2 + 9 - 27 = -16$$

$$p(1/2) = 2 - 3(1/2) + (1/2)^3 = 2 - 3/2 + 1/8 = 16/8 - 12/8 + 1/8 = 5/8$$

Teorema del residu

Aquest teorema relaciona el valor numèric d'un polinomi $p(x)$ per a $x = a$ amb el residu de la divisió de $p(x)$ per $x - a$. Amb aquesta finalitat, considerem, per exemple, el polinomi

$$p(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 7$$

En primer lloc calculem el valor numèric per $x = 1$:

$$p(1) = 1^4 - 1^2 + 5 \cdot 1 - 7 = 1 - 3 + 5 - 7 = -4$$

Ara trobem el residu de la divisió de $p(x)$ per $x-1$:

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ -3 \ 5 \ -7 \\ 1) \ 1 \ 1 \ - \ 2 \ 3 \\ \hline 1 \ 1 \ -2 \ 3 \ -4 \end{array}$$

el residu de la divisió és $r = -4$.

Tenim, doncs, que el valor numèric $p(1)$ és igual al residu de $p(x)$ per $x - 1$. Aquest fet és generalitzable a tots els polinomis $p(x)$ i a tots els binomis del tipus $x \pm a$? La resposta és afirmativa i es dedueix del teorema següent:

Teorema. El valor numèric d'un polinomi $p(x)$ per a $x = a$ és igual al residu de la divisió del polinomi $p(x)$ pel binomi $x - a$.

En efecte, feta la divisió de $p(x)$ per $x - a$, sabem que es verifica la igualtat $p(x) = (x - a) \cdot c(x) + r$, i, substituint la x pel valor a , tenim $p(a) = (a - a) \cdot c(a) + r = 0 \cdot c(a) + r = r$.

Així un polinomi $p(x)$ és divisible pel binomi $x - a$ si el valor numèric de $p(x)$ per a $x = a$ és igual a 0, $p(a) = 0$.

Arrels d'un polinomi

S'anomena *arrel* d'un polinomi $p(x)$ a tot nombre real a tal que $p(a) = 0$. Per aquest motiu les arrels d'un polinomi reben també el nombre de zeros del polinomi.

Per exemple, el nombre real $1/4$ és una arrel o un zero del polinomi $p(x) = x^2 - 3x + 11/16$ ja que $p(1/4) = (1/4)^2 - 3 \cdot 1/4 + 11/16 = 1/16 - 12/16 + 11/16 = 0$.

Segons el corol·lari les arrels dels polinomis es relacionen amb la divisibilitat.

Descomposició d'un polinomi en factors

Es tracta ara de disposar d'un procediment que ens permeti conèixer si un polinomi $p(x)$ té divisors. D'acord amb el teorema del residu, si un nombre real a és arrel del polinomi $p(x)$, aquest és divisible pel binomi $x - a$ i aleshores es pot escriure de la manera següent

$$p(x) = (x - a) \cdot c(x)$$

on $c(x)$ és el quocient de la divisió.

La igualtat anterior ens diu que conèixer un zero o arrel a del polinomi $p(x)$ és equivalent a conèixer un divisor $x - a$ d'aquest polinomi. El problema d'esbrinar si un polinomi $p(x)$ té divisors de primer grau es redueix a trobar un mètode per al càlcul de les arrels d'un polinomi. La qüestió no és, en general, senzilla; és fàcil trobar les arrels en el cas de polinomis de grau 1 o 2, per a polinomis de grau superior a 2 estudiarem només les arrels enteres.

Proposició. Si un nombre real a és arrel del polinomi amb coeficients enters $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ aleshores a divideix el terme independent a_0 .

En efecte, com que a és arrel del polinomi $p(x)$ es verifica $p(a) = a_0 + a_1 \cdot a + a_2 \cdot a^2 + \dots + a_n \cdot a^n = 0$ que es pot escriure en la forma $a_0 = -a_1 \cdot a - a_2 \cdot a^2 - \dots - a_n \cdot a^n = a \cdot (-a_1 - a_2 \cdot a - \dots - a_n \cdot a^{n-1})$ la qual cosa ens diu que a divideix a_0 .

Cal tenir en compte, però, que no tots els divisors del terme independent a_0 són arrels del polinomi.

Per trobar, per tant, les arrels d'un polinomi $p(x)$ es comença calculant els divisors del seu terme independent

i després es comprova per a quins d'entre ells el valor numèric del polinomi és igual a 0; només aquests divisors són arrels.

Exemple. Calculem les arrels enteres del polinomi $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Els divisors del terme independent, 4, són: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Calculem el valor numèric de $p(x)$ per a aquests valors:

$$\begin{array}{ll}
 p(1) = 1 - 5 + 4 = 0 & 1 \text{ és arrel de } p(x) \\
 p(-1) = 1 - 5 + 4 = 0 & -1 \text{ és arrel de } p(x) \\
 p(2) = 16 - 20 + 4 = 0 & 2 \text{ és arrel de } p(x) \\
 p(-2) = 16 - 20 + 4 = 0 & -2 \text{ és arrel de } p(x) \\
 p(4) = 256 - 80 + 4 = 180 & 4 \text{ no és arrel de } p(x) \\
 p(-4) = 256 - 80 + 4 = 180 & -4 \text{ no és arrel de } p(x)
 \end{array}$$

Les arrels del polinomi són: 1, -1, 2, -2.

Aleshores el polinomi $p(x)$ es descompon en producte de factors de grau 1

$$p(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

Observació. El càlcul del valor numèric també es pot fer mitjançant la regla de Ruffini. Així tenim

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\
 1) & & 1 & 1 & -4 & -4 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -4 & -4 & 0 & 1 \text{ és arrel} \\
 -1) & & -1 & 0 & 4 & & \\
 \hline
 & 1 & 0 & -4 & 0 & & -1 \text{ és arrel} \\
 2) & & 2 & 4 & & & \\
 \hline
 & 1 & 2 & 0 & & & 2 \text{ és arrel} \\
 -2) & & -2 & & & & \\
 \hline
 & 1 & 0 & & & & -2 \text{ és arrel}
 \end{array}
 \end{array}$$

Ara podem escriure les igualtats següents:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x^3 + x^2 - 4x - 4) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

En aquest procediment s'observa que la primera arrel, 1, l'hem assajada en el polinomi $p(x)$, però la segona, -1, l'hem assajada al polinomi $p(x) : (x - 1)$ i la tercera, 2, en el polinomi $p(x) : (x - 1)(x + 1)$, etc. la qual cosa ens permet fer els càlculs de manera més ràpida. Ara bé, pot succeir que un mateix divisor a del terme independent sigui arrel de $p(x)$ i també de $p(x) : (x - a)$, ... com veurem en l'exemple següent:

Exemple. Trobem les arrels del polinomi $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$.

Els divisors del terme independent són: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad -2 \quad -8 \quad 18 \quad -9 \\
 1) \quad \quad \quad 1 \quad -1 \quad -9 \quad 9 \\
 \hline
 1 \quad -1 \quad -9 \quad 9 \quad 0 \quad 1 \text{ és arrel} \\
 1) \quad \quad \quad 1 \quad 0 \quad -9 \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad -9 \quad 0 \quad 1 \text{ és arrel} \\
 3) \quad \quad \quad 3 \quad 9 \\
 \hline
 1 \quad 3 \quad 0 \quad 3 \text{ és arrel} \\
 -3) \quad \quad -3 \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad -3 \text{ és arrel}
 \end{array}$$

Les arrels del polinomi són: 1, 3, -3.

La descomposició del polinomi donat és la següent

$$x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9 = (x - 1)(x - 1)(x - 3)(x + 3) = (x - 1)^2(x - 3)(x + 3)$$

Arrels múltiples

Una arrel a de $p(x)$ es diu *simple* si $x - a$ divideix $p(x)$ però no divideix $p(x) : (x - a)$; s'anomena *doble* si $x - a$ divideix $p(x)$ i $p(x) : (x - a)$ però no divideix $p(x) : (x - a)^2$, i així successivament. Les arrels que no són simples reben, en general, el nom de *múltiples*. En l'últim exemple, l'1 és una arrel doble, el 3 i -3 són arrels simples.

La descomposició de polinomis en factors primers o irreductibles es pot utilitzar per calcular el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple de dos o més polinomis. Es fa servir la mateixa regla que en el cas de l'anell \mathbb{Z} dels nombres enters:

El *màxim comú divisor* de dos o més polinomis descompostos en factors primers és el producte dels factors comuns a tots ells amb el menor exponent amb què apareixen en les corresponents descomposicions.

El *mínim comú múltiple* de dos o més polinomis és el producte dels factors comuns i no comuns amb el major exponent amb què apareixen en les descomposicions.

Problema 34

Calculeu el valor numèric dels polinomis següents per als valors que s'indiquen:

a) $p(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x - 3, x = 3$

c) $r(x) = x^6 + 2x^5 - x^3 + 6, x = 1/2$

b) $q(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 17x - 30, x = -2$

d) $a(x) = 2/3x^4 + 1/2x^3 - x^2 + 1/3, x = 3$

Comproveu el teorema del residu amb aquests polinomis.

Problema 35

Calculeu les arrels enteres dels polinomis:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $x^4 + 7x^3 + 5x^2 - 31x - 30$

b) $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$

e) $x^5 - 4x^3 - x^2 + 4$

c) $2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 7x - 6$

f) $x^4 + x^3 - x^2 + 1$

Problema 36

Descomponeu els polinomis del problema 35 en producte de factors.

Problema 37

Descomponeu els polinomis següents en producte de factors:

a) $x^3 - x^2 - 4x + 4$

d) $3x^3 - 11x^2 + 10x$

b) $x^3 - 7x + 6$

e) $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$

c) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

f) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

Problema 38

Trobeu el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple dels parells de polinomis a) i b) , c) i d) , e) i f) de l'exercici anterior.

Problema 39

Escriviu

a) Un polinomi de tercer grau que tingui com a arrels: 1, -1, 2

b) Un polinomi de quart grau que tingui com a arrels: 1 doble i -2 doble.

c) Un polinomi de cinquè grau que tingui com a arrels: -1 doble, 3 doble i -3 simple.

d) El polinomi de segon grau que tingui com a arrels 4 i -5, i com a coeficient de x^2 el número 3.

Fraccions polinòmiques

Hi ha un gran paral·lelisme entre el desenvolupament de la divisibilitat en els anells \mathbb{Z} dels nombres enters i $R[x]$ dels polinomis. Sabem que en \mathbb{Z} , donats dos enters a i b ($b \neq 0$) no sempre és possible la divisió exacta $a : b$, és a dir, $a : b$ no sempre pertany a l'anell \mathbb{Z} , per la qual cosa s'introdueix el concepte de fracció a/b i, a partir d'aquí, el conjunt \mathbb{Q} dels nombres racionals.

En l'anell $R[x]$ dels polinomis succeeix exactament el mateix: donats dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$ ($q(x) \neq 0$), no sempre és possible la divisió exacta $p(x) : q(x)$ i, per tant, introduïm les fraccions polinòmiques.

Una *fracció polinòmica* és un parell ordenat de polinomis $(p(x), q(x))$ amb la condició que el polinomi $q(x)$ no sigui el polinomi zero.

El parell ordenat $(p(x), q(x))$ s'escriu tradicionalment en la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$; $p(x)$ i $q(x)$ reben els noms de numerador i denominador respectivament.

Exemple. Són fraccions polinòmiques: $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 + x^2 + 2}$; $\frac{3}{2x + 5}$; $\frac{x^2 - 1}{4}$.

Equivalència de fraccions: propietat fonamental

Dues fraccions $\frac{a(x)}{b(x)}$ i $\frac{c(x)}{d(x)}$ es diu que són *equivalents* si compleixen la igualtat $a(x) \cdot d(x) = b(x) \cdot c(x)$. Si

$\frac{a(x)}{b(x)}$ i $\frac{c(x)}{d(x)}$ són equivalents, s'escriu $\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{c(x)}{d(x)}$.

Exemple. Les fraccions $\frac{x+1}{x-1}$ i $\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}$ són equivalents ja que:

$$(x+1)(x^2+2x-3) = (x-1)(x^2+4x+3) = x^3 + 3x^2 - x - 3$$

Si multipliquem o dividim el numerador i el denominador d'una fracció polinòmica per un mateix polinomi no nul, la fracció que resulta és equivalent a la primera.

Exemple

$$a) \frac{2x-1}{x+3} = \frac{(2x-1)(3x)}{(x+3)(3x)} = \frac{(2x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \dots$$

b) El polinomi $x+3$ divideix el numerador i el denominador de la fracció $\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}$ ja que tots dos s'anul·len per a $x = -3$ i, per tant, es verifica la igualtat

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x-1}$$

Dividir el numerador i el denominador d'una fracció polinòmica per un mateix polinomi, com en l'exemple b), rep el nom de *simplificació* de fraccions.

Una fracció polinòmica $p(x)/q(x)$ es diu *irreductible* si $p(x)$ i $q(x)$ són primers entre ells, és a dir, si $\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = k (k \in \mathbb{R})$.

Problema 40

Donades les fraccions

$$\frac{x^2-1}{x+1}, \frac{x^2-2x+1}{x-1}, \frac{x^2+2x-1}{x+2}$$

esbrineu si hi ha algun parell d'equivalents.

Problema 41

Escriu una fracció equivalent a $\frac{3x^3-5}{x-1}$ amb denominador x^2+2x-3 .

Problema 42

Busqueu un polinomi $a(x)$ tal que la fracció $\frac{a(x)}{x^2-1}$ sigui equivalent a la fracció $\frac{x+3}{x+1}$.

Problema 43

Existeix algun polinomi $p(x)$ tal que les dues fraccions $\frac{x^2+2x-1}{3x+2}$ i $\frac{p(x)}{x^2+1}$ siguin equivalents?

Problema 44

Escriu dues fraccions equivalents a $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$, l'una amb numerador de primer grau i l'altra amb denominador de grau 3.

Problema 45

Simplifiqueu les fraccions polinòmiques següents:

a) $\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 4x}$

b) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 3x}$

c) $\frac{2x^3 - 5x^2 - 23x - 10}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$

Operacions amb fraccions polinòmiques

Les operacions amb fraccions polinòmiques s'efectuen i tenen les mateixes propietats que les fraccions numèriques. Així, doncs:

$$\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a(x) \cdot q(x)}{b(x) \cdot q(x)} + \frac{p(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot q(x)} = \frac{a(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot q(x)}$$

Problema 46

Amb les fraccions

$$\frac{x-1}{x+1}, \quad \frac{3x}{x-1}, \quad \frac{2}{x^2-1}$$

comproveu la propietat associativa de la suma i del producte, com també la distributiva del producte respecte a la suma.

Problema 47

Trobeu l'oposat i l'invers de la fracció $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$.

Com definiríeu la *diferència* i el *quocient* de dues fraccions polinòmiques?

Com a aplicació, calculeu

$$\frac{x+5}{x+2} - \frac{x^2-x+1}{x^2+1} \quad \text{i} \quad \frac{x+5}{x+2} : \frac{x^2-x+1}{x^2+1}$$

Problema 48

Efectueu les operacions següents i simplifiqueu-ne els resultats si cal:

a) $\frac{x}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4}$

c) $\left(\frac{3x^2-1}{x+1} + 2x\right) \cdot \frac{x^2-1}{x+2}$

e) $\left(1 + \frac{x+1}{x-1}\right) : \left(1 - \frac{x+1}{x-1}\right)$

b) $\frac{(x+1)^2}{x-1} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

d) $\frac{3x+1}{x^2+2} : \frac{5x}{x-1}$

Problema 49

Calculeu les expressions següents, simplificant al màxim:

$$\text{a) } \left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} \right) \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$\text{b) } \left(\frac{2x}{x-a} + \frac{2a}{x+a} \right) : \left(\frac{2x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} \right)$$

$$\text{c) } \left(x+1 + \frac{x^2}{1-x} \right) : \left(1 - \frac{x}{1+x} \cdot \frac{x+1}{x^2-x} \right)$$

Nombres complexos

Ja en temps d'Heró d'Alexandria s'havien considerat expressions misterioses com $\sqrt{81 - 144}$. Apareixien arrels quadrades de nombres negatius formalment, essent impossible trobar un valor real corresponent. Així $x^2 = +1$ tenia dues solucions reals ± 1 però $x^2 = -1$ no en tenia cap.

Cardano va proposar en una ocasió descompondre el nombre $10 = x + y$ de forma que $x \cdot y = 40$ i malgrat adonar-se que no podien trobar-se solucions reals va trobar formalment els nombres $x = 5 + \sqrt{-15}$ i $y = 5 - \sqrt{-15}$. Anys més tard Euler, Wessel, Argand i Gauss varen fer el salt necessari per construir el conjunt \mathbb{C} dels *nombres complexos* els quals eren una extensió dels nombres reals \mathbb{R} i en els quals queda resolt el problema de les arrels quadrades dels negatius. Introduint el símbol $i = \sqrt{-1}$ es considera

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

i es visualitza \mathbb{C} usant el pla cartesià associant l'eix OX a la part real "a" del nombre $z = a + bi$ i considerant l'eix OY com a eix imaginari on es marca la part imaginària "bi".

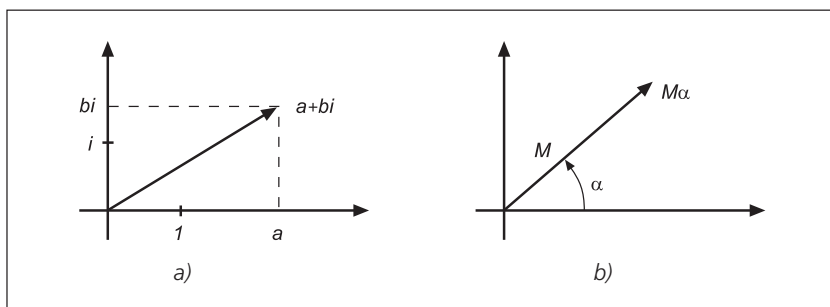


Fig. 25

Així tot complex $z = a + bi$ es pot representar pel punt (a, b) en el pla complex o mitjançant el vector que va del $(0, 0)$ al punt (a, b) . També $z = a + bi$ queda ben identificat en donar la longitud del vector dita *mòdul* de z i escrita $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i l'angle α del vector amb l'eix real OX orientant els angles en sentit antihorari, és a dir, $\tan \alpha = b/a$ o sigui $\alpha = \arctan(b/a)$.

Exemple. El $3 + 4i$ s'identifica amb el punt $(3, 4)$, té mòdul $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ i l'angle $\alpha = \arctan 4/3$. La mateixa unitat imaginària i correspon a $(0, 1)$, de mòdul 1 i angle $\pi/2$.

Aritmètica en \mathbb{C}

Hom defineix la suma i el producte següents:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

en què aquestes operacions gaudeixen de les mateixes propietats algebraïques que tenim en els nombres reals.

En el cas de considerar mòduls i angles si anotem M_α on $M = |z|$ i $\alpha = \arctan b/a$ resulta

$$M_\alpha \cdot M_{\alpha'} = (M \cdot M')_{\alpha+\alpha'}$$

Exemple. Tenim

$$(2 + i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (1 + 4)i = 5 + 5i$$
$$(2 + i) + (2 - i) = (2 + 2) + (1 - 1)i = 4 + 0i = 4$$
$$(2 + i) \cdot i = 2i + i \cdot i = -1 + 2i$$
$$(1 + i) \cdot (1 - i) = (1 + 1) + (-1 + 1)i = 2$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4 \equiv (1_{\pi/4})^4 = (1^4)_{4 \cdot \pi/4} = 1_\pi \equiv -1$$

Cal notar que en \mathbb{C} el que no es té és una ordenació com es tenia en els reals: dos complexos no es poden ordenar, no es pot dir quin és més gran que l'altre. En canvi tenim el següent

Teorema fonamental de l'àlgebra

Tota equació polinòmica del tipus

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

amb coeficients reals o complexos, té n solucions reals o complexes i és de la forma

$$(x - A_1)(x - A_2) \cdots (x - A_n) = 0$$

És a dir, en \mathbb{C} es poden resoldre totes les equacions polinòmiques de qualsevol grau.

Exemple. Resoldre l'equació $x^3 + x = 0$.

En ser $x^3 + x = x(x^2 + 1) = 0$ les tres solucions són $x = 0$, $x = i$, $x = -i$. En un polinomi amb coeficients reals, si hi ha una solució complexa $a+bi$ també hi ha la seva *conjugada* $a - bi$ la qual cosa implica, per exemple, que en tota equació amb coeficients reals de tercer grau (o senar) hi ha sempre una solució real.

Problema 50

Verifiqueu que les solucions de l'equació $x^3 - 1 = 0$ són 1 , $-1/2 + (\sqrt{3}/2)i$, $-1/2 - (\sqrt{3}/2)i$.

Problema 51

Calculeu els valors següents

a) $(1 + i) + (2 + i)$, $(1 + i) \cdot (2 + i)$, $(1 + i)^3$

b) Calculeu el mòdul i l'angle de $1/2 + (\sqrt{3}/2)i$,

c) Si el mòdul d'un número és 10 i l'angle 45° expresseu el número en la forma $a + bi$.

Problema 52

On es situen els punts $2 + 3i$ i $2 - 3i$? I els punts i , i^2 , i^3 , i^4 ?

Equacions polinòmiques fonamentals

Breument considerem les equacions i funcions polinòmiques de primer i segon grau i la seva relació. El seu estudi és molt elemental però és de gran interès pràctic, perquè apareixen de forma natural en problemes reals. En particular, certes funcions polinòmiques de primer grau tenen la propietat que la variació de la variable dependent és proporcional a la variació de la variable independent, fet molt freqüent en casos reals. La seva gràfica és una línia recta (per això també s'anomenen funcions lineals) i el seu pendent és precisament el factor de proporcionalitat.

En moltes situacions se sap que un cert valor que ens interessa trobar satisfà alguna condició expressable mitjançant una igualtat. Aquesta igualtat rep el nom d'equació. Resoldre una equació és trobar el valor (o els valors) que la satisfan.

A cada equació del tipus $p(x) = 0$, s'hi associa la funció $y = p(x)$. Aleshores trobar les solucions de l'equació és equivalent a trobar els punts on la gràfica de la funció talla l'eix d'abscisses. Aquesta interpretació geomètrica és útil per a discutir el nombre de solucions d'una equació o trobar-ne les solucions de forma aproximada quan és difícil trobar-les de forma exacta.

Equacions de primer grau

Comencem amb un problema:

Problema

Un taller produeix un únic producte que ven a 8€ la unitat. El cost de producció de cada unitat és de 6€ i les despeses mensuals generals (llum, lloguer del local, impostos, etc.) són de 500€. Quantes unitats ha de produir i vendre al mes per a cobrir les despeses?

Anomenem x el nombre d'unitats que s'han de produir com a mínim i que cal vendre al mes per a cobrir despeses. Amb aquest nombre d'unitats, els guanys són $8x$ i les despeses $500 + 6x$. Volem saber en quin moment els guanys coincideixen amb les despeses. És a dir, volem trobar el valor de x que satisfà $8x = 500 + 6x$ que és una igualtat entre polinomis de primer grau.

Abans de seguir, farem uns quants comentaris:

Definició. Una equació de primer grau és una igualtat entre dos polinomis de primer grau. Resoldre una equació és trobar els nombres que en substituir-los per la incògnita fan que la igualtat sigui certa. Aquests nombres són les solucions de l'equació.

Exemple. L'equació $3(x-2) = x+4$ és una equació de primer grau. 5 és la solució, perquè $3(5-2) = 5+4$.

Per a trobar la solució d'una equació de primer grau, es poden seguir els passos següents:

1. Transformar-la fins que quedi de la forma $ax + b = cx + d$.
2. Restar cx i b a ambdós membres de l'equació.
3. Després del punt anterior, queda una equació del tipus $mx = n$ (amb $m \neq 0$). Dividint els dos membres per m , s'obté el valor de x (és a dir, la solució de l'equació).

Exemple. Per a resoldre l'equació de l'exemple $3(x-2) = x+4$ procedim de la manera següent:

1. Fem les operacions indicades (multiplicar per 3): $3x - 6 = x + 4$.
2. Restem x i -6 : $3x - 6 - x - (-6) = x + 4 - x - (-6)$ i simplificant $2x = 10$.
3. Dividim per 2: $x = 10/2$ i simplificant $x = 5$.

Tornant al problema amb què hem iniciat aquest apartat, havíem arribat a l'equació: $8x = 500 + 6x$ i per tant $8x - 6x = 500$, és a dir, $2x = 500$ i $x = 500/2 = 250$ unitats.

Problema 53

Resoleu les equacions lineals de primer grau següents:

- a) $9x = 27$
- b) $x + 40 = 3x + 10$
- c) $4(x - 3) - 7(x - 4) = 6 - x$
- d) $5x + 9 + \frac{x}{3} = 8x - 7$
- e) $4 - \frac{x + 3}{6} = 2 + \frac{9 - 2x}{3}$

Problema 54

En una banyera hi ha 40 litres d'aigua freda a 18° . Quants litres d'aigua calenta a 60° hem d'afegir-hi perquè l'aigua estigui a una temperatura confortable al voltant de 40° ?

Relació entre equacions i funcions polinòmiques

Hi ha una estreta relació entre les equacions i les funcions que permet donar una interpretació geomètrica a les solucions d'una equació i fins i tot trobar-les geomètricament de forma aproximada.

Una equació polinòmica, "passant tots els termes al membre de l'esquerra", es pot escriure de la forma $p(x) = 0$, on $p(x)$ és un polinomi.

Donada una equació polinòmica $p(x) = 0$, la funció $y = p(x)$ direm que és la seva funció polinòmica associada.

Exemple. La funció associada a $2x - 6 = 0$ és $y = 2x - 6$. La funció associada a $x^2 + 3x + 2 = 0$ és $y = x^2 + 3x + 2$.

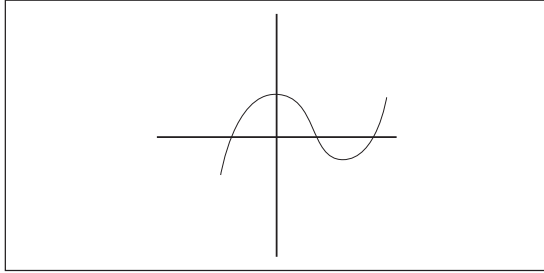


Fig. 26

Fixem-nos en els punts on la gràfica de la funció associada talla l'eix d'abscisses: són els valors de x on y és igual a 0. Escrit d'una altra manera, són els valors de x que fan que $p(x)$ sigui igual a 0 (és a dir, les arrels de $p(x)$). Però això són les solucions de l'equació.

Per tant, les solucions de l'equació $p(x) = 0$ són els valors de la primera coordenada dels punts on la gràfica de la funció associada $y = p(x)$ talla l'eix d'abscisses.

Exemple. La gràfica de la funció $y = 2x - 6$ talla l'eix d'abscisses en el punt de primera coordenada 3. Per tant 3 és la solució de l'equació $2x - 6 = 0$.

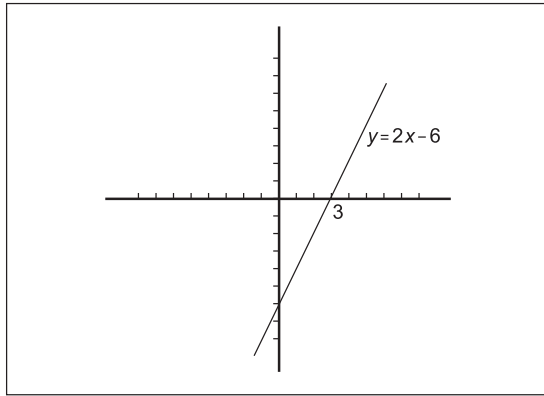


Fig. 27

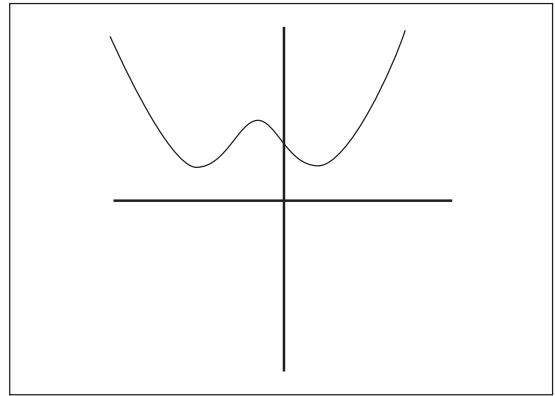


Fig. 28

Una conseqüència del teorema és que les equacions de primer grau tenen sempre una solució i solament una.

En efecte, la gràfica de la funció associada $y = ax + b$ és una recta no horitzontal ($a \neq 0$) que talla l'eix d'abscisses exactament en un punt on a és el pendent de la recta, b el punt de tall $(0, b)$ amb l'eix OY i quan $a \neq 0$ $x = -b/a$ dona el punt de tall $(-b/a, 0)$ amb l'eix OX .

Problema 55

- Escriu la funció associada a l'equació $4x^2 - 2x + 8 = 0$.
- Resoleu gràficament l'equació $3x - 6 = 0$.
- Dibuixeu la gràfica d'una funció l'equació associada de la qual tingui tres solucions.

Equacions de segon grau

És important recordar com resoldre equacions polinòmiques de segon grau.

Les solucions de l'equació polinòmica de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$ es poden trobar amb la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

on el signe \pm significa que l'arrel quadrada tant pot ser sumada com restada.

Exemple. Resolguem l'equació $9x^2 - 21x + 10 = 0$.

En aquest cas $a = 9$, $b = -21$, $c = 10$ i les solucions són:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{21 \pm \sqrt{(-21)^2 - 4 \times 9 \times 10}}{2 \times 9} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 360}}{18} = \frac{21 \pm \sqrt{81}}{18} = \\ &= \frac{21 \pm 9}{18}; \quad \frac{21 + 9}{18} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}; \quad \frac{21 - 9}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

L'equació té dues solucions $x_1 = 5/3$ i $x_2 = 2/3$.

Demostració de la fórmula. Es tracta d'aïllar x . L'equació es pot escriure $ax^2 + bx = -c$. Multiplicant els dos membres de la igualtat anterior per $4a$ s'obté

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

i sumant-hi b^2 , és $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$.

Gràcies a aquests passos, el membre de l'esquerra és una igualtat notable (comproveu-ho!): $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$. Per tant, $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$. Aïllant x , s'obté

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemple. Resoldre l'equació $-x^2 + 8x - 15 = 0$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times (-1) \times (-15)}}{2 \times (-1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{-2} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{-2} = \\ &= \frac{-8 \pm 2}{-2} = \begin{cases} = \frac{-8 + 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \\ = \frac{-8 - 2}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Les equacions de segon grau poden tenir dues solucions reals, com hem vist en els dos problemes anteriors. Però hi ha equacions de segon grau que tenen només una, i fins i tot cap, solució real:

Exemple. L'equació $x^2 + 8x + 16 = 0$ té una única solució. En efecte, aplicant la fórmula,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 1 \times 16}}{2 \times 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2} = -4$$

Exemple. L'equació $x^2 + 2x + 3 = 0$ no té solució real; en aplicar la fórmula,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

i com que l'arrel quadrada d'un nombre negatiu no és real, x tampoc no ho és.

Fixant-nos en els exemples analitzats, veiem que una equació de segon grau tindrà dues, una o cap solucions reals segons que l'expressió $b^2 - 4ac$ sigui positiva, zero o negativa respectivament.

Definició. L'expressió $b^2 - 4ac$ és el discriminant de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ i es denota per la lletra grega Δ (delta).

Exemple. L'equació $2x^2 + 3x + 5 = 0$ no té solució real, perquè $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0$.

Proposició. L'equació $ax^2 + bx + c = 0$ té dues, una o cap solució real segons que el seu discriminant Δ sigui positiu, zero o negatiu respectivament. Si el discriminant és negatiu, les dues solucions són complexes conjugades.

Que les equacions de segon grau només poden tenir dues, una o cap solució real és immediat a partir de la interpretació geomètrica: donada una equació $ax^2 + bx + c = 0$, la gràfica de la seva funció associada $y = ax^2 + bx + c$ és una paràbola. Hi ha tres possibilitats:

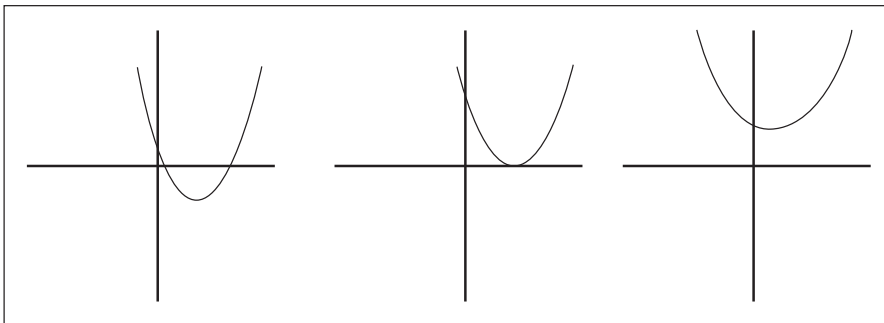


Fig. 29

- La paràbola talla l'eix d'abscisses en dos punts. Les primeres coordenades d'aquests punts són les dues solucions de l'equació
- La paràbola és tangent a l'eix d'abscisses. La primera coordenada del punt de tangència (que és el vèrtex de la paràbola) és l'única solució de l'equació.
- La paràbola no talla ni és tangent a l'eix d'abscisses. L'equació no té solució real.

Els casos a), b), c) corresponen, respectivament, al discriminant positiu, zero i negatiu. En el darrer cas tindrem solucions en \mathbb{C} de la forma:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{|b^2 - 4ac|i}$$

Problema 56

a) Resoleu les equacions següents:

$$x^2 + 4x - 96 = 0; \quad 2x^2 + 3x - 2 = 0; \quad 6x^2 - 3x + 4 = 20x + 82; \quad x^2 + 3 = 19$$

b) Calculeu el discriminant de les equacions següents i digueu quantes solucions diferents tenen.

$$x^2 - 6x + 9 = 0; \quad x^2 + 4x + 27 = 0; \quad x^2 - 5x - 12 = 0$$

c) Calculeu gràficament les solucions de l'equació $x^2 - 4x + 3 = 0$.

d) Comproveu gràficament que l'equació $x^2 - 2x + 2 = 0$ no té solució real. Trobeu les seves solucions complexes.

Nota. Equació de tercer grau

Si es té

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

es fa el canvi $y = x - a/3$ i resulta una equació del tipus

$$x^3 + px + q = 0$$

donant la fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

expressió difícil de recordar i aplicar. Recordant que en les de tercer grau sempre hi ha una solució real és usual calcular aquesta (calculadora, gràfica...) i dividint per $x - a$ surt una equació de segon grau simple de resoldre.

Sistemes d'equacions lineals i matrius

Molts problemes admeten models matemàtics que usen equacions lineals. Quan diverses condicions donades per aquests tipus d'equacions s'imposen a la vegada s'obtenen sistemes d'equacions lineals.

Exemple. Un pla en l'espai \mathbb{R}^3 ve donat mitjançant una equació del tipus $Ax + By + Cz = D$. Donats els tres plans

$$\left. \begin{aligned} x + y - z &= 4 \\ 2x - y + z &= 2 \\ 3x + 2y + 3z &= 5 \end{aligned} \right\}$$

quina és la seva posició relativa en l'espai?

Introduïrem els conceptes generals sobre sistemes de m equacions lineals amb n incògnites, i discutirem i resoldrem aquests sistemes d'acord amb el seu tractament matricial (mètode de Gauss, teorema de Rouché-Fröbenius). Això ens portarà, de manera natural, a introduir els determinants i a aplicar-los en la discussió i la resolució de sistemes lineals (regla de Cramer).

Una equació lineal amb n incògnites és una equació del tipus $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ on a_1, a_2, \dots, a_n , anomenats *coeficients* i b , anomenat *terme independent*, són nombres reals.

Exemple. Són equacions lineals

$$2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 = 7; \quad x_1 + 1/2x_2 = 5; \quad \frac{1}{3}x_1 + \frac{5}{6}x_2 - \sqrt{2}x_3 = 113$$

Una *solució* d'una equació lineal amb n incògnites és un conjunt ordenat de n nombres reals (s_1, s_2, \dots, s_n) els quals, posats en el lloc de les incògnites corresponents, transformen l'equació en una identitat.

Exemple. Mirant les equacions anteriors resulta:

- a) $(1, 2, 3, 13)$ és una solució de la primera equació ja que $2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 3 + 13 = 7$.
- b) $(3, 4)$ és una solució de la segona equació del mateix exemple ja que $3 + 1/2 \cdot 4 = 5$.

c) $(9, 12/5, \sqrt{8})$ és una solució de la tercera equació del mateix exemple ja que

$$\frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{5}{6} \cdot \frac{12}{5} - \sqrt{2} \sqrt{8} = 3 + 2 - 4 = 1$$

Un sistema de m equacions lineals amb n incògnites és un conjunt de m equacions lineals amb n incògnites que s'han de verificar totes a l'hora (simultàniament). Es representa de la manera següent:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Exemple

a) Un sistema de 2 equacions amb 3 incògnites té la forma

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \end{array} \right\}$$

b) Un sistema de 3 equacions amb 2 incògnites s'escriu

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 = -3 \\ 3x_1 + 3x_2 = 7 \end{array} \right\}$$

c) Un sistema de 4 equacions amb 4 incògnites es representa per

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -5 \end{array} \right\}$$

Una *solució* d'un sistema de m equacions lineals amb n incògnites és un conjunt ordenat de n nombres reals (s_1, s_2, \dots, s_n) que són solucions de cadascuna de les m equacions del sistema.

Problema 57

Comproveu que:

$(1, 1, 1)$ és solució del sistema a) de l'exemple anterior.

$(1, 0, 2, 1)$ és solució del sistema c) de l'exemple anterior

Resoldre un sistema de m equacions lineals amb n incògnites és trobar totes les seves solucions o bé demostrar que no en té cap.

Classificació dels sistemes segons el nombre de solucions

A l'hora de resoldre un sistema de m equacions amb n incògnites ens podem trobar amb les possibilitats següents:

- a) que no tingui cap solució
- b) que tingui solució; en aquest cas pot ser que:
 - b₁) tingui una sola solució
 - b₂) tingui més d'una solució

D'acord amb aquestes possibilitats, els sistemes es classifiquen de la manera següent:

- a) Un sistema s'anomena incompatible si no té cap solució; s'anomena compatible determinat si té solució única, i compatible indeterminat si té més d'una solució.
- b) S'entén per *discutir* un sistema el fet de determinar si és compatible o incompatible i, en el cas que sigui compatible, si és determinat o indeterminat.

Exemple

- a) El sistema b) de l'exemple anterior és incompatible ja que la solució $(2, -1)$ de les dues primeres equacions no satisfà la tercera.
- b) El sistema c) de l'exemple anterior és compatible determinat; l'única solució que té és $(1, 0, 2, 1)$.
- c) El sistema a) de l'exemple anterior és compatible indeterminat:

$$(1, 1, 1), \quad (0, -25, -6), \quad (6/7, -13/7, 0), \dots \text{són solucions}$$

Sistemes equivalents: transformacions elementals

Dos sistemes són *equivalents* si tots dos tenen les mateixes solucions o bé cap d'ells no té solució.

L'objectiu dels mètodes de resolució de sistemes consisteix a transformar el sistema donat en un altre que sigui equivalent i més senzill de resoldre que el primer.

Anomenarem *transformació elemental* tota operació efectuada sobre un sistema que ens dona un sistema equivalent i són operacions elementals:

- a) Canviar l'ordre de les equacions en el sistema.
- b) Multiplicar una equació qualsevol per un nombre real.
- c) Sumar a una equació qualsevol una altra de multiplicada per un número real.

Sistemes lineals de dues equacions amb dues incògnites

Per comoditat, usualment s'escriuen les incògnites x, y en lloc de x_1, x_2 . Així, doncs, partim d'un sistema del tipus

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array} \right\} \text{ amb } a, b, c, d, e, f \text{ reals donats}$$

Exemple

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 5y = -1 \end{array} \right\}$$

Ja sabeu que es poden utilitzar diferents mètodes per a resoldre els sistemes; recordarem els següents:

1) Mètode de reducció

Consisteix a transformar el sistema donat en un altre d'equivalent en el qual una de les equacions tingui només una incògnita, per exemple la y : en l'exemple multipliquem la primera equació pel coeficient de la x en la segona (2) i la segona pel coeficient de la x en la primera (3) i restem:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot (3x - 2y) = 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot (2x + 5y) = 3 \cdot (-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x - 4y = 16 \\ 6x + 15y = -3 \end{array} \right\} \text{ restant } -19y = 19$$

amb la qual cosa tenim dos sistemes equivalents:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 18 \\ 2x + 5y = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 8 \\ -19y = 19 \end{array} \right\}$$

Ara resollem l'últim sistema aïllant la y en la segona equació $y = \frac{19}{-19} = -1$ i substituint aquest valor en la primera:

$$3x - 2(-1) = 8 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2.$$

La solució del sistema és, doncs, $(2, -1)$.

És molt útil, una vegada trobada la solució del sistema, comprovar-la substituint els valors de les incògnites en el sistema donat

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 - 2(-1) &= 8 \Rightarrow 6 + 2 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 5(-1) &= -1 \Rightarrow 4 - 5 = -1. \end{aligned}$$

2) Mètode d'igualació

Es tracta d'aïllar una incògnita en ambdues equacions i igualar després els resultats obtinguts: això ens dona una equació amb una incògnita, es calcula aquesta i es porta el valor trobat a qualsevol de les equacions del sistema per calcular el valor de l'altra.

Resolguem el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = \frac{5}{2} \\ -2 + 3y = -\frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

De la primera equació resulta $x = \frac{5}{2} - 2y$ i de la segona $x = \frac{-\frac{3}{2} - 3y}{-2}$. Igualant aquests resultats, s'obté

$$\frac{5}{2} - 2y = \frac{-\frac{3}{2} - 3y}{-2} \Rightarrow -5 + 4y = -\frac{3}{2} - 3y \Rightarrow 7y = \frac{7}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

En la primera equació del sistema:

$$x + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

La solució del sistema és $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3) Mètode de substitució

S'aïlla una de les incògnites en una de les equacions i es substitueix en l'altra. S'obté així una equació amb una incògnita. La resta, com sempre.

Exemple. Resolguem el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 3 \\ 6x - 2y = -2 \end{array} \right\}$$

Aillem y en la primera equació: $y = 3 - 3x$; substituïm en la segona equació

$$6x - 2(3 - 3x) = -2 \Rightarrow 12x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

La solució és $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$.

Problema 58

Resoleu mitjançant els mètodes de reducció, igualació i substitució els sistemes:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x + 5y = -1 \\ -x + \frac{5}{3}y = 2 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 25 \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{2y} = 5 \end{array} \right\} \end{array}$$

4) Mètode gràfic

Sabem que una equació amb dues incògnites representa una recta en el pla i que la solució d'un sistema de dues equacions amb dues incògnites és el punt en què ambdues rectes es tallen. Per tant, per a resoldre un sistema es poden dibuixar totes dues rectes i el punt de tall dona la solució.

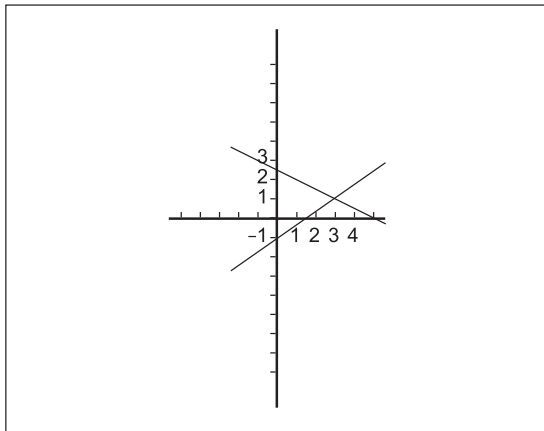


Fig. 30

Exemple. Resolguem gràficament el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{array} \right\}$$

Representem totes dues rectes i observem que es tallen en el punt de coordenades (3, 1). La solució del sistema donat és, doncs, (3, 1).

Discussió dels sistemes lineals

La discussió d'un sistema lineal de dues equacions amb dues incògnites

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right\} \quad (1)$$

equivol, des del punt de vista gràfic, a l'estudi de la posició relativa de dues rectes en el pla. Per tant, els casos possibles són tres:

- a) Totes dues rectes es tallen en un punt (sistema compatible determinat).
- b) Totes dues rectes coincideixen (sistema compatible indeterminat).
- c) Totes dues rectes són paral·leles (sistema incompatible).

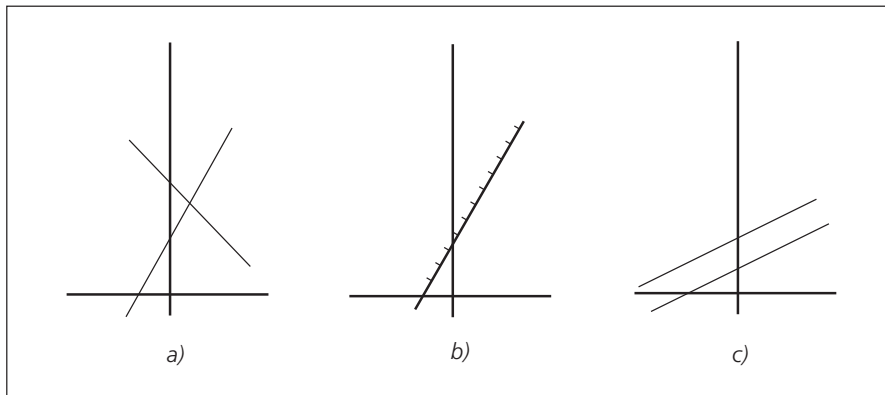


Fig. 31

Pel que fa als coeficients del sistema tenim que:

- a) Si totes dues rectes es tallen en un punt, els pendents han de ser diferents; el pendent de la primera recta val $m = -\frac{a}{b}$ i, el de la segona val $m' = -\frac{a'}{b'}$ i, per tant,

$$m \neq m' \Rightarrow \frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow \frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b}.$$

b) Si totes dues rectes coincideixen, és a dir, són la mateixa recta, llavors una equació és igual a l'altra multiplicada per un número λ i, per tant,

$$a' = \lambda a; \quad b' = \lambda b; \quad c' = \lambda c \quad \Rightarrow \quad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

c) Si totes dues rectes són paral·leles, tenen el mateix pendent, però no coincideixen i, per tant,

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$$

En resum, tenim que el sistema (1) és

$$\begin{aligned} & \text{– compatible determinat} && \text{si } \frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b} \\ & \text{– compatible indeterminat} && \text{si } \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \\ & \text{– incompatible} && \text{si } \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c} \end{aligned} \tag{2}$$

Exemple

a) El sistema

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 3x - 2y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

és compatible determinat, ja que $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{3}$.

b) El sistema

$$\left. \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -2x - 4y &= -8 \end{aligned} \right\}$$

és compatible indeterminat, ja que $-\frac{2}{1} = -\frac{4}{2} = -\frac{8}{4}$.

c) El sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y &= 1 \\ x + \frac{3}{4}y &= 2 \end{aligned} \right\}$$

és incompatible, ja que $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} \neq \frac{2}{1}$.

Problema 59

Discuti el sistema segons els valors d' a i de b .

$$\left. \begin{array}{l} ax + 2y = 2 \\ 3x - 5y = b \end{array} \right\}$$

Problema 60

Demostreu, amb el mètode de reducció, que la solució del sistema (1) ve donada per

$$x = \frac{a'c - c'a}{a'b - b'a}; \quad y = \frac{c'b - b'c}{a'b - b'a}$$

A partir d'aquest resultat, justifiqueu les conclusions (2).

Sistemes lineals qualsevol

Tractarem en aquest apartat la discussió i resolució d'un sistema qualsevol de m equacions lineals amb n incògnites com el de la definició 23, és a dir,

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \quad (3)$$

Per a aquest estudi és de gran utilitat l'ús de les matrius.

Una *matriu* $m \times n$ és un conjunt de $m \cdot n$ nombres reals disposats en m files i n columnes.

Es representa per

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple

a) Matrius 2×3 i 3×2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Matrius 1×4 , 3×1 i 4×4

$$C = (2 \ 1 \ 3 \ 4); \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Una matriu es diu quadrada si $m = n$, és a dir, si el nombre de files coincideix amb el nombre de columnes.

En el cas dels sistemes que ens ocupa són fonamentals: la *matriu A del sistema* (formada pels $m \cdot n$ coeficients de les incògnites) i la *matriu ampliada A'* (obtinguda afegint a A la columna dels termes independents).

Així en el sistema (3) tenim

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Exemple. Donat el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 8 \\ x + 2y + z = -5 \\ -3x - y - 3z = 1 \end{array} \right\} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Representació matricial d'un sistema lineal

Tenint en compte el producte de matrius, el sistema lineal (3) es pot expressar com un producte de matrius

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o, de forma abreujada,

$$A \cdot X = B$$

on A és la matriu del sistema, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és la matriu de les incògnites i $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ és la matriu dels

termes independents.

El mètode de reducció que hem emprat per als sistemes de dues equacions amb dues incògnites es pot generalitzar als sistemes de m equacions amb n incògnites amb l'eliminació de x_1 de totes les equacions menys de la primera, dels x_2 de totes menys de la primera i la segona, i així successivament.

Aquest procés fa servir únicament operacions elementals i, per tant, transforma sistemes en sistemes equivalents. Per comoditat es treballa amb matrius (sense les incògnites) i es transformen les matrius A i A' del sistema en matrius corresponents a un sistema equivalent al donat, però amb zeros sota la diagonal.

Exemple A

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y - 2z = -5 \\ x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -11 & -32 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -11 & -32 \\ 0 & 0 & 50 & 150 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 11 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que ens permet escriure el sistema donat en la forma (equivalent)

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 9 \\ y + 11z = 32 \\ z = 3 \end{array} \right\}$$

Per tant, tenim $z = 3$, valor que substituït en la segona equació ens dona $y = 32 - 11z = 32 - 33 = -1$ i, finalment, de la primera equació $x = 9 - 2y - 3z = 9 + 2 - 9 = 2$. Aquest sistema és compatible determinat i la seva solució, única, és $(2, -1, 3)$.

Exemple B

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + z = 4 \\ 7x + 2y - 3z = 2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{que s'escriu}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ -5x + 4z = 1 \\ 0 = -9 \end{array} \right\} \text{Òbviament l'última equació és impossible. Per tant, aquest és un sistema incompatible.}$$

Exemple C

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - 3z &= 5 \\ -3x + 2y + z &= -4 \\ x + 4y - 5z &= 6 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 14 & -14 & 14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que porta al sistema de dues equacions amb tres incògnites

$$\left. \begin{aligned} x + 4y - 5z &= 6 \\ -y + z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

que podem expressar en funció de z : $y = -1 - z$; $x = 6 - 4y + 5z = 2 + z$.

La solució *general* d'aquest sistema s'escriu en la forma

$$\begin{cases} x = 2 + z \\ y = -1 - z \\ z = z \end{cases}$$

Donant valors a z s'obtenen solucions anomenades *particulars*. Així, per a $z = 1$ tenim la solució $(3, 2, 1)$. Podem trobar totes les que vulguem: aquest és un sistema compatible indeterminat.

S'anomena *rang* d'una matriu A el nombre de files no nul·les de la matriu triangularitzada obtinguda a partir d' A .

Exemple

- Les matrius A i A' del sistema de l'exemple A tenen ambdues rang igual a 3.
- En el sistema de l'exemple B la matriu A té rang igual a 2 mentre que el rang d' A' és igual a 3.
- El rang de les matrius A i A' del sistema de l'exemple C és 2.

Discussió dels sistemes $m \times n$. Teorema de Rouché-Fröbenius

L'exemple anterior ens posa de manifest que si les matrius A i A' tenen el mateix rang (a i c) aleshores el sistema corresponent és compatible, i si el rang d' A és diferent del rang d' A' (b) el sistema és incompatible. A més a més, en el cas de compatibilitat, si el rang d' A i A' és igual al nombre d'incògnites (a) el sistema és determinat, però si el rang d' A i A' és més petit que el nombre d'incògnites (c) el sistema és indeterminat. Doncs bé, aquest fet és completament general i constitueix l'anomenat teorema de Rouché-Fröbenius.

c)

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = c_r \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$$

i, per tant, $\text{rang } A = \text{rang } A' = r < n \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

Exemple D Discutim el sistema següent

$$\left. \begin{array}{l} x + y + x - 2t = 9 \\ x + 2y - z + t = 12 \\ x + 3y + 5z - 8t = 7 \\ x + y + 3z - 5t = 7 \end{array} \right\}$$

Triangularitzarem les matrius A i A' :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 5 & -8 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & -5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $r = \text{rang } A = 3 = r' = \text{rang } A' \Rightarrow$ Sistema compatible i $r < n = 4 \Rightarrow$ Indeterminat.

Problema 61

Discutiu els sistemes:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{array} \right\} \text{ a) } \quad \left. \begin{array}{l} x - 3y - 2z = 7 \\ 2x - y + 15z = 3 \\ x - 8y - 21z = 11 \end{array} \right\} \text{ b) } \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y = -1 \\ x + 3y = -5 \\ 4x + y = 3 \end{array} \right\} \text{ c) } \end{array}$$

Una vegada discutit un sistema, el pas següent consisteix a trobar-ne les solucions: una si és determinat, i la solució general, si és indeterminat. Si és incompatible no podem trobar cap solució.

El mètode emprat en els exemples A, B consistent en la triangularització de les matrius A i A' associades al sistema, rep el nom de *mètode de Gauss*.

Exemple. Resolguem el sistema de l'exemple D. Hem vist que el sistema donat és compatible indeterminat. Hem de trobar, doncs, la solució general d'aquest sistema. Tenint en compte les matrius triangularitzades, el sistema primer és equivalent al sistema

$$\left. \begin{aligned} x + y + z - 2t &= 9 \\ y - 2z + 3t &= 3 \\ 2z - 3t &= -2 \end{aligned} \right\}$$

De la 3a $\Rightarrow z = (-2 + 3t)/2$

De la 2a $\Rightarrow y = 3 + 2z - 3t = 3 + (-2 + 3t) - 3t = 1$

De la 1a $\Rightarrow x = 9 - y - z + 2t = 9 - 1 - (-2 + 3t)/2 + 2t = (18 + t)/2$

Podem obtenir solucions particulars donant valors a t . El grau d'indeterminació d'aquest sistema és $4 - 3 = 1$; per això la solució general ve donada en relació amb un paràmetre.

Problema 62

Resoleu els sistemes del problema 61.

Operacions amb matrius

En el conjunt de les matrius d'un mateix tipus $m \times n$, $M_{m,n}$, es poden definir operacions com les següents:

Suma de matrius: donades dues matrius $m \times n$, A i B , la matriu suma $A + B$ és la que s'obté sumant els elements corresponents en totes dues matrius

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

La suma de matrius gaudeix de les propietats següents:

- a) Associativa $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- b) Commutativa $A + B = B + A$.
- c) Element neutre: és la matriu que té tots els seus elements nuls.
- d) Element oposat: donada una matriu A , la seva oposada $-A$ és la matriu que s'obté en canviar el signe de tots els elements d' A .

Producte d'una matriu per un escalar: Per a multiplicar una matriu A per un nombre real λ es multipliquen tots els elements d' A per λ

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -4 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Propietats del producte d'una matriu per un escalar:

$$\text{a) } \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \text{b) } (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \quad \text{c) } \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \quad \text{d) } 1 \cdot A = A$$

Producte de matrius: L'element c_{ij} de la matriu C , producte d' A per B , és igual a la suma dels productes dels elements de la fila i de la matriu A pels elements de la columna j de la matriu B .

Per a poder fer el producte de la matriu A per la B és necessari que el nombre de columnes n de la matriu A sigui igual al nombre de files m de la matriu B .

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-3) + 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & 4 \cdot 6 + 1 \cdot (-3) + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 46 \\ 29 & 51 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 6 + (-4) \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 6 + 3 \cdot 3 \\ 7 \cdot (-2) + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Determinants

Hem vist que la solució d'un sistema de dues equacions amb dues incògnites s'expressa en forma de fraccions i el mateix veurem més tard quan resolguem sistemes de tres equacions amb tres incògnites amb la regla de Cramer. Per aquest motiu introduïrem aquí els determinants com una eina pràctica per a calcular rangs de matrius i per a resoldre sistemes lineals.

Determinants d'ordre 2

Sigui $M_{2,2}$ el conjunt de totes les matrius quadrades d'ordre 2, i considerem una aplicació

$$M_{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

donada per la definició següent:

S'anomena *determinant* de la matriu quadrada

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

al nombre real $ad - bc$. S'escriu $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Observeu que el valor del determinant és igual al producte dels elements de la diagonal principal menys el producte dels elements de la diagonal secundària.

Exemple

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 3 = 14 - 12 = 2 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-4) = 6 + 4 = 10$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 16 = -31$$

Propietats dels determinants d'ordre 2

A partir de la definició anterior es poden comprovar fàcilment les propietats següents:

- a) Un determinant canvia de signe si es permuten les columnes:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

- b) Si una columna és suma de dues, llavors el determinant és suma de dos determinants segons la igualtat següent:

$$\begin{vmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}.$$

- c) Si es multiplica una columna per un nombre λ , el determinant queda multiplicat per aquest número:

$$\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Com a conseqüència d'aquestes propietats tenim

- d) Si un determinant té les dues columnes iguals, el seu valor és 0: $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$.

- e) El valor d'un determinant no canvia si es suma a una columna l'altra multiplicada per qualsevol número

$$\lambda : \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b + \lambda a \\ c & d + \lambda c \end{vmatrix}$$

Es compleix també

- f) Donada una matriu A , s'anomena matriu transposada d' A , A' o A^t la matriu que s'obté en canviar les files per les columnes de la matriu A . El determinant d'una matriu A coincideix amb el de la seva transposada

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

D'aquesta última propietat es dedueix que les cinc primeres, relatives a les columnes de la matriu, són vàlides si s'apliquen a les seves files.

Problema 63

Comproveu les propietats dels determinants d'ordre 2.

Determinants d'ordre 3

Si considerem ara el conjunt de totes les matrius quadrades d'ordre 3, $M_{3,3}$, podem establir una aplicació entre aquest conjunt i el conjunt \mathbb{R} dels nombres reals

$$M_{3,3} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mitjançant la definició següent

El *determinant* d'una matriu quadrada d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

que s'escriu

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

és el nombre real donat per la suma algebraica de productes

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

Exemple

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \cdot 4 + 5 \cdot 1 \cdot 2 - (4 \cdot 7 \cdot 5 + 2 \cdot 9 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \cdot 3) = 230 - 200 = 30$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 0 \cdot (-1) - [5 \cdot 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 3 \cdot 3 + 7 \cdot 0 \cdot (-4)] = \\ = 57 - (-49) = 106$$

Propietats dels determinants d'ordre 3

Es demostra que els determinants d'ordre 3 verifiquen les mateixes propietats que hem vist per als determinants d'ordre 2, és a dir:

- Si en un determinant es permuten dues columnes, el seu valor canvia de signe.
- Si una columna d'un determinant és la suma de dues, el determinant és igual a la suma de dos determinants.
- Si es multipliquen tots els elements d'una columna per un número λ el determinant queda multiplicat per aquest número.
- Si un determinant té dues columnes iguals, el seu valor és 0.
- El valor d'un determinant no varia si a una columna qualsevol se n'hi suma una altra de multiplicada per un número λ .
- El determinant d'una matriu A és igual al de la seva transposada A' .

Com a conseqüència d'aquesta última propietat tenim que les cinc propietats primeres, enunciades per les columnes, són vàlides també per a les files.

Problema 64

Escriuiu les propietats dels determinants d'ordre 3 amb fórmules (com en el cas de la segona propietat).

Reducció d'un determinant d'ordre 3 a determinants d'ordre 2

Menor complementari d'un element a_{ij} en un determinant d'ordre 3 és el determinant d'ordre 2 que s'obté en suprimir la fila i la columna en la qual està situat aquest element.

Exemple. En el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

a) el menor complementari de l'1 és $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$. b) el menor complementari del 8 és $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Adjunt d'un element a_{ij} és el producte del seu menor complementari per $(-1)^{i+j}$. Es representa per A_{ij} .

Exemple. En l'exemple anterior

a) L'adjunt de l'1 és $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$. b) L'adjunt del 8 és $-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

El valor d'un determinant d'ordre 3 és igual a la suma dels productes dels elements d'una fila (o columna) pel seus adjunts respectius:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Exemple. Aplicarem la propietat anterior (desenvolupament del determinant):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 2(56 - 18) - 1(24 - 10) + 4(27 - 35) = 76 - 14 - 32 = 30$$

Aquesta propietat i l'exemple analitzat ens permeten observar el fet que si en una fila o columna hi ha zeros, el desenvolupament del determinant serà més curt. Per altra banda, les propietats dels determinants

fan possible el pas d'un determinant donat a un altre, amb el mateix valor, que tingui zeros en una fila o columna.

Exemple. El determinant de l'exemple anterior val el mateix que el determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 7 & -26 \\ -13 & 9 & -28 \end{vmatrix}$$

obtingut sumant a la primera columna la segona multiplicada per -2 i a la tercera columna la segona multiplicada per -4 . Ara desenvolupem el determinant per la primera fila i gràcies als zeros resulta

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 7 & -26 \\ -13 & 9 & -28 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -11 & -26 \\ -13 & -28 \end{vmatrix} = 30$$

Cal notar que, en un determinant, la suma dels productes dels elements d'una fila (o columna) pels adjunts corresponents d'una de paral·lela és igual a zero.

Donat el determinant $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ es verifica $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

Problema 65

Demostreu, mitjançant les propietats dels determinants, que

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3 \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c).$$

Rang d'una matriu per determinants

El rang d'una matriu es pot calcular amb determinants; però com que els determinants s'apliquen únicament en el cas de matrius quadrades, donem la següent definició alternativa de rang d'una matriu:

El *rang* d'una matriu A qualsevol és l'ordre del menor determinant més gran que es pot formar en A i que sigui diferent de 0.

Exemple. Calculem el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Agafem un menor d'ordre 2, p. e., el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$ per tant, el rang d' A és ≥ 2 .

Ara agafem un menor d'ordre 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Com que aquest menor val 0, agafem un altre

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 11 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

No cal agafar més menors d'ordre 3, una vegada que s'han utilitzat totes les files i totes les columnes de la matriu A donada (es demostra que tots els menors possibles d'ordre 3 valen 0).

Tenim, doncs, que rang $A = 2$.

Problema 66

Calculeu, utilitzant determinants, el rang de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Resolució de sistemes: regla de Cramer

Es tracta d'aprofitar les propietats dels determinants per a resoldre sistemes d'equacions lineals. En principi s'utilitza en el cas de *sistemes compatibles determinats*, però també es pot fer servir aquesta regla en altres sistemes.

Suposem, doncs, un sistema de tres equacions amb tres incògnites compatible determinat

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right\}$$

Per ser un sistema compatible determinat sabem que el rang de la matriu A del sistema és 3 i, per tant, $\det A \neq 0$.

Per a aïllar la incògnita x_1 multipliquem la primera equació per l'adjunt de a_{11} , A_{11} ; la segona equació per l'adjunt de a_{21} , A_{21} , i la tercera equació per l'adjunt de a_{31} , A_{31} . Després sumem i traiem factor comú de cadascuna de les incògnites. Tenim així

$$\left. \begin{aligned} A_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1) \\ A_{21}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2) \\ A_{31}(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})x_2 + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})x_3 &= \\ = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \end{aligned}$$

Segons la propietat referida al desenvolupament d'un determinant, el primer parèntesi equival al determinant de la matriu A : Δ . I, per la propietat referida a la suma dels productes de l'element d'una fila pels adjunts corresponents d'una paral·lela, els parèntesis segon i tercer valen 0. Per altra banda, el segon membre de l'última equació correspon al desenvolupament del determinant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

obtingut en substituir la primera columna de la matriu A (coeficients de la x_1) pels termes independents.

Ara podem escriure l'última equació en la forma

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

D'una manera anàloga es troben les igualtats $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ i $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Exemple. Discutiu i resoleu el sistema

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned} \right\}$$

La matriu A del sistema és

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$$

Per tant, tenim $\text{rang } A = 3$ i el sistema és compatible determinat. Calculem

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -60; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -30; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 90$$

i, finalment,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-60}{-30} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-30}{-30} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{90}{-30} = -3$$

La solució única del sistema és $(2, 1, -3)$.

Problema 67

Discutiu i resoleu, per determinants, els sistemes

$$\begin{aligned} \text{a) } x + y + z &= 1 \\ 3x - 4y &= 5 \\ 7x - y - 3y &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}$$

Vectors, punts, rectes i plans

En aquest apartat repassarem aspectes molt elementals de geometria en el pla i l'espai. L'aproximació serà algebraica i farem servir coordenades per a determinar punts, rectes, plans i altres objectes geomètrics. D'aquesta manera, els objectes geomètrics es defineixen com a conjunts de punts les coordenades dels quals satisfan certes relacions algebraiques. Per exemple, ja hem vist que el conjunt de punts (x, y) del pla les coordenades dels quals satisfan una equació del tipus $y = mx + n$ és una recta. D'aquesta manera, els conceptes geomètrics es poden traduir a conceptes algebraics, després es poden fer les manipulacions algebraiques convenients i finalment es pot traduir el resultat algebraic a un de geomètric.

Sistemes de coordenades a l'espai

En un apartat anterior hem vist que un sistema de coordenades del pla consta de dos eixos perpendiculars la intersecció dels quals es diu l'origen de coordenades. Cada punt del pla queda determinat per dos nombres: les seves coordenades.

En l'espai, calen tres nombres per a determinar un punt. Un sistema usual de coordenades en l'espai consta de tres eixos perpendiculars dos a dos que es tallen en un punt O anomenat l'origen de coordenades. Aquests eixos es denoten per OX , OY i OZ . A l'hora de representar-los, és costum dibuixar els eixos OY i OZ en el pla del paper (el primer horitzontal i el segon vertical) i dibuixar l'eix OX "sortint del paper perpendicularment".

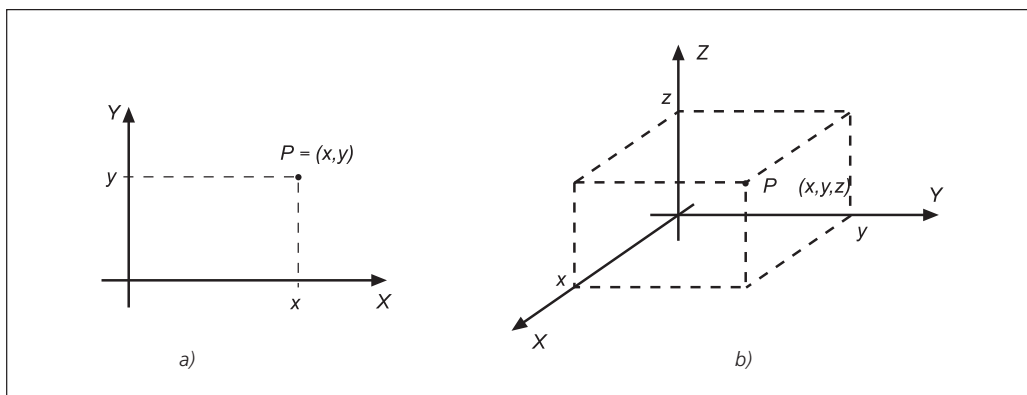


Fig. 32

Vectors

Hi ha magnituds que no queden del tot determinades amb un valor numèric. La velocitat del vent en un cert lloc no queda determinada per la seva intensitat, sinó que cal conèixer també la seva direcció i el seu sentit. L'efecte d'aplicar una força a un objecte no depèn sols de la seva intensitat, sinó també de la direcció i el sentit en què s'aplica.

Aquests tipus de magnituds s'anomenen vectors i tenen aplicació en moltíssims camps. En aquest punt es faran servir en l'estudi de qüestions geomètriques i, sobretot, per a determinar direccions i sentits.

Representarem un vector mitjançant una fletxa. La longitud de la fletxa s'anomena norma o mòdul.

Donats dos punts A i B podem considerar el vector que té l'origen en el punt A i l'extrem en el punt B . Aquest vector l'escriurem \vec{AB} .

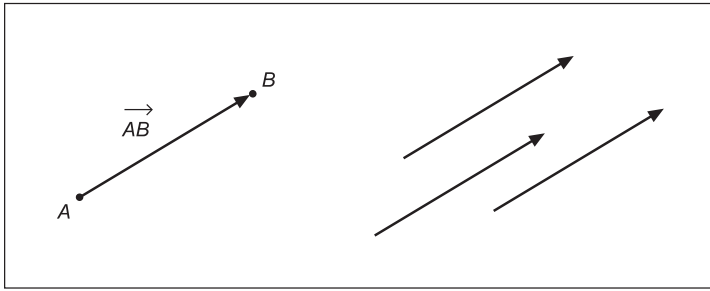


Fig. 33

Cal tenir en compte que els vectors \vec{AB} i \vec{BA} tenen la mateixa direcció i norma, però diferent sentit. Direm que el vector és del pla, si A i B són punts del pla, i direm que és de l'espai, si A i B ho són. Considerarem iguals i intercanviables dos vectors que tinguin la mateixa direcció, norma i sentit. Dit d'una altra manera, un vector es pot representar mitjançant moltes fletxes diferents (vectors lliures que s'obtenen per translacions).

Donats dos punts A i B del pla de coordenades $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$, les components o coordenades del vector \vec{AB} són $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Això s'escriu $\vec{AB} = B - A$ i també $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Exemple. Si $A = (2, 3)$ i $B = (3, 5)$, aleshores $\vec{AB} = B - A = (3 - 2, 5 - 3) = (1, 2)$.

Així, els components del vector \vec{AB} són les quantitats que s'han d'afegir a les coordenades d' A per a obtenir les coordenades de B . Escrit breument, $B = A + \vec{AB}$.

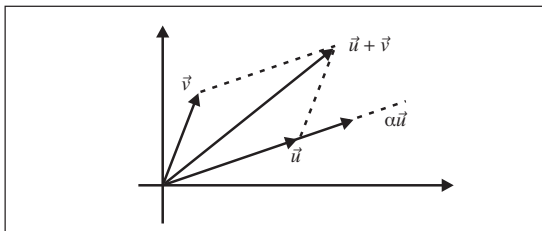


Fig. 34

Hi ha dues operacions bàsiques amb vectors que definirem tot seguit: la suma de vectors i el producte d'un vector per un escalar:

La suma de dos vectors és un vector que equival a considerar l'efecte del vector \vec{u} seguit del vector \vec{v} . Geomètricament, la suma $\vec{u} + \vec{v}$ es pot fer de la manera següent: col·loquem tots dos vectors de manera que l'origen del vector \vec{v} coincideixi amb l'extrem del vector \vec{u} . Aleshores el vector $\vec{u} + \vec{v}$ té l'origen del vector \vec{u} i l'extrem del vector \vec{v} . (Figura 34)

Mirant la figura anterior, coneixent les components dels vectors \vec{u} i \vec{v} es poden trobar les del vector $\vec{u} + \vec{v}$: Si $\vec{u} = (a, b)$ i $\vec{v} = (c, d)$ són dos vectors del pla, el vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ és el vector $\vec{u} + \vec{v} = (a + c, b + d)$.

Exemple. a) $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (1, 5)$, $\vec{u} + \vec{v} = (3, 8)$. b) $\vec{u} = (-2, 3)$, $\vec{v} = (3, -1)$, $\vec{u} + \vec{v} = (1, 2)$.

L'oposat del vector $\vec{u} = (a, b)$ és el vector que s'obté canviant el signe a totes les components de \vec{u} i s'indica amb $-\vec{u}$. Així $-\vec{u} = (-a, -b)$. Els vectors \vec{u} i $-\vec{u}$ tenen la mateixa norma i direcció, però sentits oposats. La resta de vectors es pot definir a partir de la suma del seu oposat.

Exemple. $(8, 5) - (3, 1) = (8 - 3, 5 - 1) = (5, 4)$.

El producte $\alpha\vec{v}$ d'un vector \vec{v} per un número real α és el vector α vegades més llarg que \vec{v} , té la mateixa direcció que \vec{v} i el mateix sentit si α és positiu i sentit oposat si α és negatiu.

Si $\vec{v} = (a, b)$ és un vector del pla i α un número real, el producte $\alpha\vec{v}$ és el vector $\alpha\vec{v} = (\alpha a, \alpha b)$.

Exemple. a) $3(-2, 5) = (-6, 15)$. b) $-4(2, -1) = (-8, 4)$.

Dos vectors són paral·lels quan tenen la mateixa direcció.

Tots els conceptes anteriors es poden definir també a l'espai. Així, si A i B són dos punts de l'espai, els components del vector \overrightarrow{AB} són $\overrightarrow{AB} = B - A$.

La suma de vectors i el producte d'un vector per un escalar es defineixen també component a component: Si $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ i $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ són vectors de l'espai i α és un escalar, $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ $\alpha\vec{u} = (\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha c_1)$.

Els vectors del pla i de l'espai comparteixen moltes propietats. En particular, en tots dos conjunts hi ha definida una suma i un producte per escalars. Pel que fa a la suma, tenen estructura de grup commutatiu, i el producte per escalars satisfà, entre d'altres, les propietats següents:

Si α, β són dos escalars i \vec{u}, \vec{v} dos vectors,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\vec{u} &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} & \alpha(\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ (\alpha\beta)\vec{u} &= \alpha(\beta\vec{u}) & 1\vec{u} &= \vec{u} \end{aligned}$$

Problema 68

- Si $A = (2, 3)$ i $B = (5, 1)$ són punts del pla, trobeu els vectors \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{BA} . Dibuixeu els punts i els vectors en un sistema de coordenades.
- Dibuixeu els vectors $\vec{u} = (3, 2, 5)$ i $\vec{v} = (5, 4, 6)$ en un sistema de coordenades.
- Si $\vec{u} = (3, 4, 2)$, $\vec{v} = (4, -2, -8)$, $\vec{w} = (6, 3, -2)$ són tres vectors de l'espai, calculeu
 - $3\vec{u} + 2\vec{v}$
 - $5(\vec{u} - \vec{v}) - 3\vec{w}$

Punts, rectes i plans

En aquest primer punt veurem com podem determinar i expressar les rectes en el pla fent ús dels conceptes introduïts anteriorment.

Proposició. Si P és un punt del pla i \vec{v} un vector del pla, la recta que passa per P i té la direcció de \vec{v} està formada per tots els punts Q pels quals existeix un escalar λ tal que $Q = P + \lambda\vec{v}$.

Perquè Q sigui de la recta, el vector \overrightarrow{PQ} ha de ser paral·lel a \vec{v} . Per tant, $\overrightarrow{PQ} = \lambda\vec{v}$. Però $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ i, per tant, $Q - P = \lambda\vec{v}$.

Definició. L'equació $Q = P + \lambda\vec{v}$ és l'equació vectorial de la recta que passa per P i té \vec{v} per vector director.

Exemple. La recta que passa per $P = (2, 3)$ i té $\vec{v} = (5, 2)$ per vector director té l'equació vectorial $(x, y) = (2, 3) + \lambda(5, 2)$.

Si escrivim l'equació vectorial d'una recta r component a component, s'obté un parell d'igualtats que s'anomenen les equacions paramètriques (o equació paramètrica) de r . El nom prové del fet que es pot considerar que els punts de la recta depenen del "paràmetre" λ .

Exemple. La recta de l'exemple anterior té l'equació paramètrica
$$\begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Si aïllem el paràmetre en ambdues igualtats de l'equació paramètrica i igualem, s'obté l'equació contínua de la recta.

Exemple. Si aïllem λ en l'exemple anterior, obtenim

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x-2}{5} \\ \lambda = \frac{y-3}{2} \end{cases}$$

Igualant: $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{2}$, que és l'equació contínua de r .

Fixem-nos que en el numerador apareixen les coordenades del punt P i en el denominador, les components del vector director \vec{v} .

Definició. L'equació contínua de la recta que passa pel punt $P = (p_x, p_y)$ i té el vector director $\vec{v} = (v_x, v_y)$, és

$$\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y}.$$

L'equació contínua d'una recta es pot reescriure de la forma $Ax + By + C = 0$.

Definició. L'equació $Ax + By + C = 0$ s'anomena *equació implícita* de la recta.

Exemple. Continuant amb l'exemple anterior, a partir de l'equació contínua s'obté

$$2(x - 2) = 5(y - 3), \quad 2x - 4 = 5y - 15, \quad 2x - 5y + 11 = 0$$

Si s'aïlla la y de l'equació implícita, s'obté una equació del tipus $y = mx + n$.

Definició. L'equació $y = mx + n$ s'anomena *equació explícita* de la recta.

Recordeu que aquesta és la forma en què havíem estudiat les rectes del pla i que m s'anomena pendent de la recta.

Si $y = mx + n$ és l'equació explícita de la recta r , $(1, m)$ és un vector director de r . Sols cal recordar que quan la x augmenta una unitat, la y augmenta m .

Per a trobar l'equació de la recta que passa per dos punts P i Q , només cal notar que el vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ és un vector director de la recta.

Exemple. L'equació contínua de la recta que passa per $P = (2, 3)$ i $Q = (5, 10)$ és $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{7}$, perquè $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, 7)$.

Noti's que si \vec{v} és un vector director d'una recta, qualsevol múltiple de \vec{v} també ho és. Així, per exemple, les equacions

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y-1}{8} \quad ; \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4}$$

representen la mateixa recta.

Així mateix, agafant punts diferents d'una mateixa recta s'obtenen equacions diferents d'aquesta recta.

Exemple. $\frac{x-5}{3} = \frac{y-10}{7}$ també és l'equació contínua de la recta de l'exemple anterior.

A vegades cal trobar el vector director d'una recta de la qual coneixem l'equació implícita. Una manera de fer-ho és buscar dos punts P i Q de la recta. Aleshores \overrightarrow{PQ} és un vector director. Una altra manera més senzilla i ràpida és aplicar el fet que un vector director de la recta $Ax + By + C = 0$ és $(-B, A)$.

En efecte, aïllant y s'obté l'equació explícita $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ i per la segona proposició d'aquest apartat $(1, -A/B)$ és un vector director. Multiplicant aquest vector per $-B$, s'obté un nou vector director $(-B, A)$.

(Si $B = 0$, el raonament anterior no és correcte, perquè estaríem dividint per zero. No obstant això, el resultat continua sent cert en aquest cas).

Exemple. $(-3, 2)$ és un vector director de la recta $2x + 3y + 8 = 0$.

Els resultats d'aquesta secció ens permeten resoldre dos problemes bàsics: decidir si dues rectes del pla són paral·leles o no i, en cas negatiu, trobar la seva intersecció:

Definició. Dues rectes són *paral·leles* si, i solament si, els seus vectors directors són paral·lels.

Exemple. Les rectes d'equacions $(x, y) = (2, 3) + \lambda(1, 5)$ i $\frac{x-3}{2} = \frac{y-8}{10}$ són paral·leles perquè els vectors $(1, 5)$ i $(2, 10)$ ho són.

Si coneixem les equacions de dues rectes, el seu punt d'intersecció és el punt que satisfà totes dues equacions. És a dir, la intersecció de dues rectes és el punt solució del sistema format per les seves equacions.

Problema 69

Escriu les equacions vectorial, paramètrica, contínua, implícita i explícita de la recta que passa pels punts $P = (2, 4)$ i $Q = (-3, 2)$.

Problema 70

Esbrineu si els punts $P = (2, 3)$ i $Q = (-1, 2)$ són de la recta d'equació $3x + y + 1 = 0$.

Problema 71

Estan alineats els punts $P = (2, 4)$, $Q = (3, 6)$ i $R = (4, 7)$?

Problema 72

Calculeu el punt d'intersecció de les rectes de les equacions $x + 2y = 0$ i $(x, y) = (0, -5) + \lambda(2, 4)$.

Problema 73

Escriu l'equació de la recta que passa pel punt $P = (3, -2)$ i és paral·lela a la recta $2x + 3y - 4 = 0$.

Problema 74

Escriu l'equació de la recta que passa pel punt $P = (3, -2)$ i és paral·lela a la recta $(x, y) = (3, -1) + \lambda(4, 3)$.

Rectes i plans a l'espai. Problemes lineals

Una recta a l'espai es pot expressar mitjançant la seva equació vectorial, paramètrica o contínua de forma similar a les rectes del pla:

La recta r que passa pel punt $P = (p_x, p_y, p_z)$ i té vector director $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ té les equacions següents:

Equació vectorial: $(x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \lambda(v_x, v_y, v_z)$

$$\text{Equació paramètrica: } \begin{cases} x = p_x + \lambda v_x \\ y = p_y + \lambda v_y \\ z = p_z + \lambda v_z \end{cases}$$

$$\text{Equació contínua: } \frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y} = \frac{z - p_z}{v_z}$$

L'anomenada equació contínua, de fet, està formada per tres equacions (si bé n'hi ha una que és conseqüència immediata de les altres dues). En aquest mateix apartat, veurem que, geomètricament, es tracta de les equacions de tres plans que contenen la recta (com tres fulls d'un llibre obert).

Un pla π es pot determinar per un dels seus punts i dues de les seves direccions, és a dir, per dos vectors directores \vec{u} i \vec{v} no paral·lels.

Definició. L'equació $Q = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ on λ i μ són dos escalars s'anomena *equació vectorial* del pla que passa pel punt P i té \vec{u} i \vec{v} com a vectors directores.

El pla que passa per $P = (2, 3, 1)$ i té $\vec{u} = (1, 4, 0)$ i $\vec{v} = (5, 0, 3)$ per vectors directores té l'equació vectorial $(x, y, z) = (2, 3, 1) + \lambda(1, 4, 0) + \mu(5, 0, 3)$.

Definició. L'equació vectorial d'un pla escrita component a component s'anomena *equació paramètrica*.

Exemple. L'equació paramètrica del pla de l'exemple anterior és

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda + 5\mu \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = 1 + 3\mu \end{cases}$$

Un pla queda determinat per tres dels seus punts no alineats, ja que si P, Q, R són tres punts del pla no alineats, aleshores \vec{PQ} i \vec{PR} són vectors directores del pla no paral·lels.

L'equació vectorial del pla es podria escriure $Q - P = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ i com que $Q - P = \vec{PQ}$, $\vec{PQ} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Però això ens diu que la condició perquè un punt Q sigui del pla és que \vec{PQ} sigui combinació lineal de \vec{u} i \vec{v} ; i això és equivalent a imposar que $\det(\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$. Desenvolupant aquest determinant, s'obté l'equació implícita del pla:

Definició. L'equació implícita del pla que passa per $P = (p_x, p_y, p_z)$ i té vectors directores $u = (u_x, u_y, u_z)$ i $v = (v_x, v_y, v_z)$ és

$$\begin{vmatrix} x - p_x & u_x & v_x \\ y - p_y & u_y & v_y \\ z - p_z & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0$$

Exemple. L'equació implícita del pla de l'exemple anterior és

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 5 \\ y-3 & 4 & 0 \\ z-1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

i desenvolupant, $12x - 3y - 20z + 5 = 0$.

Per tant, l'equació implícita d'un pla és una equació del tipus $Ax + By + Cz + D = 0$.

Proposició. Dos plans d'equacions $Ax + By + Cz + D = 0$ i $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ són paral·lels si, i solament si, els vectors (A, B, C) i (A', B', C') ho són.

La intersecció de dos plans no paral·lels és una recta. Així, una recta de l'espai es pot expressar amb un sistema del tipus

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Problema 75

- Calculeu les equacions vectorial, paramètrica i contínua de la recta que passa pels punts $P = (2, 4, 5)$ i $Q = (-3, 2, 0)$.
- Calculeu les equacions vectorial, paramètrica i implícita del pla que passa pels punts $P = (3, -2, 0)$, $Q = (1, 1, 1)$ i $R = (3, 2, 2)$.
- Calculeu el punt d'intersecció de la recta $(x, y, z) = (0, -5, 4) + \lambda(2, 4, 3)$ i el pla $2x + 3y - z = 0$.
- Calculeu l'equació del pla que passa pel punt $P = (3, -2, 0)$ i és paral·lel al pla $2x - 3y + 2z + 3 = 0$.
- Calculeu l'equació contínua de la recta intersecció dels plans $x + y + z = 0$ i $2x + z + 1 = 0$.
- Esbrineu si els punts $P = (3, 0, 2)$, $Q = (2, 1, 0)$, $R = (1, 1, 2)$ i $S = (-2, 1, 4)$ són coplanaris.
- Es vol traçar la recta paral·lela al pla $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ que passa pel punt $(3, -2, -4)$ i talla la recta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

Calculeu l'equació

- Donat el pla $\pi: x + 2y + 3z - 4 = 0$,
 - Calculeu el pla paral·lel a π que passi pel punt $(2, 1, -3)$.
 - Calculeu una recta paral·lela a π que passi per $(2, 1, -3)$.

Producte escalar i producte vectorial

El producte escalar és una eina que ens permet estudiar la perpendicularitat i el càlcul d'angles, longituds i distàncies, essencial per a poder fer geometria mètrica amb coordenades. Començarem estudiant el producte escalar, que assigna un nombre a cada parella de vectors (d'aquí ve el nom d'escalar).

Definició. Si $\vec{u} = (a, b)$ i $\vec{v} = (c, d)$ són dos vectors del pla, el *producte escalar* de \vec{u} per \vec{v} és l'escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$.

Exemple. Si $\vec{u} = (2, 7)$ i $\vec{v} = (3, 4)$, aleshores $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 34$.

Definició. La *norma* $\|\vec{u}\|$ del vector $\vec{u} = (a, b)$ és $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pel teorema de Pitàgores, la norma d'un vector no és res més que la seva longitud. En física se l'acostuma a anomenar mòdul.

Exemple. La norma del vector $\vec{v} = (3, 4)$ és $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Definició. Diem que un vector és *unitari* si la seva norma és 1.

Per a qualsevol vector no nul $\vec{x} \neq \vec{0}$ el vector $\frac{1}{\|\vec{x}\|}\vec{x}$ és sempre unitari.

Exemple. Donat $\vec{x} = (1, -1)$ calculem $\|\vec{x}\| = \sqrt{2}$ i aleshores $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ja és unitari.

Definició. El *cosinus de l'angle* que determinen dos vectors \vec{u} i \vec{v} (diferents del $\vec{0}$) es calcula amb la fórmula

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

En alguns llibres, el producte escalar es defineix mitjançant el resultat anterior: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ i a partir d'aquí es demostra la fórmula d'abans involucrant coordenades.

Definició. Dos vectors diferents del vector $\vec{0}$ es diuen *ortogonals* (o *perpendiculars*) si, i solament si, el seu producte escalar val 0.

Els vectors $(6, 5)$ i $(-10, 12)$ són ortogonals, perquè el seu producte escalar és $6(-10) + 5 \cdot 12 = 0$.

De la definició de l'angle es dedueix que dos vectors \vec{u} i \vec{v} són ortogonals quan $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ i això passa quan determinen un angle recte.

Un mètode molt senzill per a obtenir un vector ortogonal a un de donat és el següent: un vector ortogonal a (a, b) és $(-b, a)$.

El producte escalar de vectors de l'espai, la norma, el cosinus de l'angle que determinen i l'ortogonalitat es defineixen de forma anàloga al pla:

Definició. Si $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ i $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ són dos vectors de l'espai, el *producte escalar* de \vec{u} per \vec{v} és l'escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

Definició. La *norma* $\|\vec{v}\|$ del vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ és $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Definició. El *cosinus de l'angle* que determinen dos vectors \vec{u} i \vec{v} de l'espai (diferents del $\vec{0}$) es pot calcular amb la fórmula

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Definició. Dos vectors de l'espai diferents del vector $\vec{0}$ són *ortogonals* (o *perpendiculars*) si, i només si, el seu producte escalar val 0.

Exemple. El cosinus de l'angle que determinen els vectors $\vec{u} = (3, 4, 12)$ i $\vec{v} = (-8, 0, 6)$ és

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{3(-8) + 4 \cdot 0 + 12 \cdot 6}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} \sqrt{(-8)^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{-24 + 0 + 72}{13 \cdot 10} = \frac{48}{130} = \frac{24}{65}$$

Definim ara el producte vectorial de vectors de l'espai.

Definició. El producte vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de dos vectors \vec{u} i \vec{v} de l'espai és el vector obtingut del desenvolupa-

ment formal del determinant
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Fixem-nos que el producte vectorial de dos vectors és un vector; en canvi, el producte escalar és un nombre.

Els coeficients de \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} són la primera, segona i tercera component de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ respectivament.

Exemple. Per a calcular el producte vectorial $(1, -1, 2) \wedge (2, 3, -4)$ desenvolupem el "determinant"

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (4 - 6)\vec{i} + (4 + 4)\vec{j} + (3 + 2)\vec{k} = -2\vec{i} + 8\vec{j} + 5\vec{k}$$

Per tant $(1, -1, 2) \wedge (2, 3, -4) = (-2, 8, 5)$.

Propietats. Donats tres vectors \vec{u} , \vec{v} i \vec{w} de l'espai, se satisfà

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ és ortogonal a \vec{u} i a \vec{v} .

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = (\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2)^{1/2} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha \text{ on } \alpha \text{ és l'angle determinat per } \vec{u} \text{ y } \vec{v}.$$

Notem, per exemple, que:

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \alpha = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \alpha$$

Aquestes propietats mereixen alguns comentaris:

Per $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$, sabem que el producte vectorial no és commutatiu. En canviar l'ordre dels factors, canvia el sentit del vector producte. (En alguns textos es diu que el producte vectorial és anticommutatiu).

La propietat $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ és molt útil i la farem servir per a calcular distàncies entre rectes i plans.

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ s'anomena *producte mixt* dels vectors \vec{u} , \vec{v} i \vec{w} .

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ és ortogonal a \vec{u} i \vec{v} és la propietat més important i usada del producte vectorial, perquè permet trobar d'una manera senzilla un vector ortogonal a dos de donats.

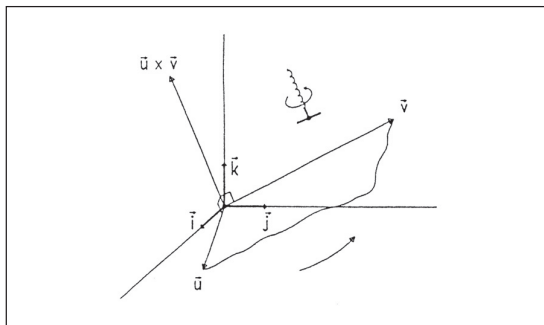


Fig. 35

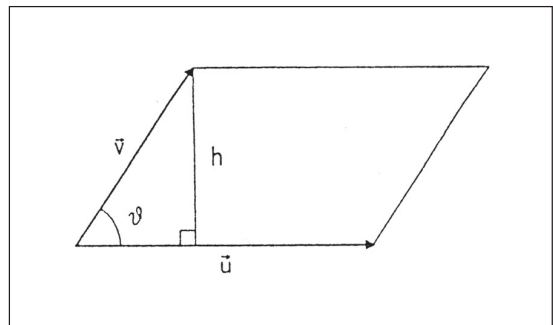


Fig. 36

Aquesta és la dita regla del tirabuixó: donats \vec{u} i \vec{v} el vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ és perpendicular a \vec{u} i \vec{v} i el seu sentit és el que seguiríem amb un tirabuixó d'obrir ampolles anant de \vec{u} cap a \vec{v} .

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha$ on α és l'angle determinat per u i v té la interpretació geomètrica següent: la norma del producte vectorial de dos vectors \vec{u} i \vec{v} a l'espai és l'àrea del paral·lelogram determinat per \vec{u} i \vec{v} (figura 36).

Problema 76

- a) Donats els vectors $\vec{u} = (2, 3, 4)$ i $\vec{v} = (3, -1, 2)$, calculeu
i) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ii) $\|\vec{u}\|$ i $\|\vec{v}\|$ iii) $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ iv) $\vec{u} \wedge \vec{v}$
- b) Escriviu un vector ortogonal a $\vec{u} = (2, 1, 0)$ i $\vec{v} = (0, 2, -1)$.
- c) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs $A = (1, 2)$, $B = (3, 2)$ i $C = (-1, 0)$.

Problema 77

Calculeu l'angle que determinen una aresta i una cara d'un tetràedre regular.

Problema 78

Calculeu l'altura sobre la base ABC del tetràedre (no regular) de vèrtexs $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 2, 0)$, $C = (2, 1, 2)$ i $D = (1, 0, 0)$.

Problema 79

Proveu que dos vectors \vec{u}, \vec{v} de \mathbb{R}^3 són ortogonals si i només si $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Problema 80

Demostreu el teorema de Pitàgores. (Indicació: si C és l'angle recte del triangle ABC , escriviu

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB})$$

Problemes mètrics entre varietats lineals

Perpendicularitat de rectes i plans. Angles

El producte escalar ens permetrà definir la perpendicularitat de rectes i plans i calcular l'angle que determinen.

Definició. Dues rectes r i r' del pla o de l'espai són perpendiculars si, i solament si, els seus vectors directors són ortogonals. S'escriu $r \perp r'$.

Exemple. Les rectes d'equació $(x, y) = (2, 1) + \lambda(3, 2)$ i $(x, y) = (7, 4) + \lambda(4, -6)$ són perpendiculars, perquè $(3, 2)$ i $(4, -6)$ són ortogonals (el producte escalar és zero: $(3, 2)(4, -6) = 12 - 12 = 0$).

Definició. Diem que un vector ortogonal a tots els vectors directors d'un pla es diu que és normal al pla.

La proposició següent permet trobar un vector normal a un pla.

Proposició. El vector de components (A, B, C) és normal al pla π d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$.

Si \vec{v} és un vector director de π , podem trobar dos punts $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ de π tals que $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Com que P_1 i P_2 són punts del pla, satisfan l'equació: $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$ i $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Restant totes dues igualtats, s'obté $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$, que es pot escriure $(A, B, C) \cdot \vec{v} = 0$. I aquesta és la condició perquè el vector (A, B, C) sigui ortogonal a \vec{v} .

Exemple. El vector $(3, 2, 5)$ és normal al pla $3x + 2y + 5z - 2 = 0$.

La perpendicularitat entre dos plans i entre un pla i una recta es pot determinar fent ús de la proposició anterior.

Definició. Dos plans són perpendiculars si, i solament si, els seus vectors normals són ortogonals.

Exemple. Els plans $3x - 2y + 4z + 3 = 0$ i $8x + 6y - 3z + 5 = 0$ són perpendiculars, perquè $(3, -2, 4)$ i $(8, 6, -3)$ són ortogonals.

Definició. Un pla i una recta són perpendiculars si, i solament si, els vectors normal al pla i director de la recta són paral·lels.

Exemple. El pla $3x + 2y - 5z + 1 = 0$ i la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{5}$ són perpendiculars.

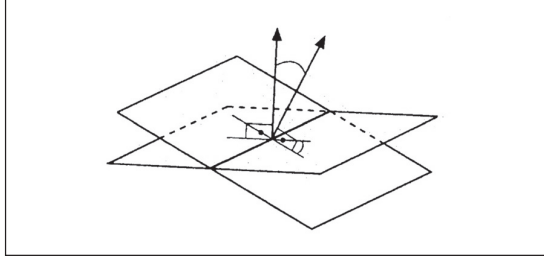


Fig. 37

L'angle que determinen rectes i plans es defineix i calcula de forma anàloga: a partir dels seus vectors directors i normals.

Definició. L'angle que determinen dues rectes (del pla o de l'espai) és l'angle que determinen els seus vectors directors.

Definició. L'angle que determinen dos plans és l'angle que determinen els seus vectors normals.

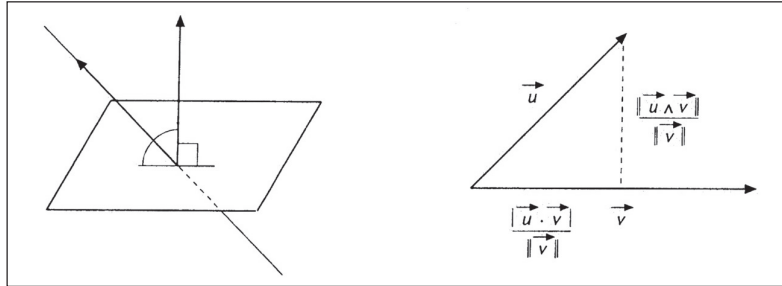


Fig. 38

Definició. L'angle que determinen un pla i una recta és el complementari de l'angle que determinen el vector director de la recta i el vector normal del pla.

Problema 81

Trobeu el simètric del punt $P = (1, 0, 0)$ respecte de la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$$

Problema 82

Trobeu l'angle determinat pels plans $x - 2y + z = 0$ i $2x + 3y - 4z + 2 = 0$.

Problema 83

Donats el punt $P = (1, 2, 3)$, la recta r que passa pel punt $(3, 2, 1)$ i té vector director $(-1, -1, 2)$ i el pla π que passa pel punt $(1, 1, 1)$ i és perpendicular al vector $(2, 1, -1)$,

- Comproveu que la recta r no és paral·lela al pla π .
- Escriviu l'equació de la projecció ortogonal de la recta r sobre π .
- Calculeu el simètric del punt P respecte de la recta r .

Problema 84

Calculeu la recta perpendicular a les rectes de les equacions

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-7} = \frac{z+1}{3}, \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+3}{-2}$$

que passa pel punt $(-4, 7, 3)$.

Problema 85

Donades les rectes $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ i $r' : (x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(0, 1, 2)$:

- Comproveu que es creuen.
- Calculeu la recta que talla r i r' perpendicularment.
- Calculeu la recta que passa per $(1, 0, 2)$ i talla r i r' .

Problema 86

Donat el pla $\pi : x + 2y + 3z - 4 = 0$:

- Calculeu el pla perpendicular a π que passi pels punts $(2, 1, -3)$ i $(0, 1, 2)$.
- Calculeu la recta perpendicular a π que passi per $(2, 1, -3)$.
- Calculeu la recta paral·lela a π que passi per $(2, 1, -3)$, tal que la projecció del seu vector director sobre el pla π sigui $(2, -1, 0)$.

Distàncies entre punts, rectes i plans

Els productes escalar, vectorial (i mixt) ens serviran en aquesta secció per calcular distàncies.

La distància entre dos punts es defineix com la longitud del segment que determinen la distància $d(P, Q)$ entre dos punts P i Q és $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$.

Exemples

- Si $P = (2, 5)$ i $Q = (5, 3)$, aleshores

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, -2) \cdot d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

b) Si $P = (1, 2, 5)$ i $Q = (5, 4, 3)$, aleshores

$$\vec{PQ} = Q - P = (4, 2, -2) \cdot d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24}$$

La distància entre dos punts, dues rectes o dos plans es defineix com la menor distància dels punts de l'un als punts de l'altre.

1) Vegem en primer lloc com podem trobar la distància entre rectes i punts i rectes en el pla en les dues proposicions següents:

Proposició. La distància entre el punt $P = (x_0, y_0)$ i la recta r d'equació $Ax + By + C = 0$ es pot trobar amb la fórmula

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

És un càlcul llarg: es troba la recta r' que passa per P i és perpendicular a r i el punt Q d'intersecció d'aquestes dues rectes. La distància entre P i r és la distància entre P i Q que es comprova que coincideix amb la fórmula.

Proposició. La distància entre dues rectes r i r' del pla és

$$d(r, r') = \begin{cases} 0, & \text{si es tallen} \\ d(P, r') & \text{on } P \text{ és un punt qualsevol de } r, \text{ si } r \parallel r' \end{cases}$$

2) Calculem ara distàncies en l'espai.

Proposició. La distància $d(P, r)$ del punt P a la recta r que passa per Q i té \vec{v} com a vector director és

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{PQ} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Comparem la figura 38 amb la figura 39.

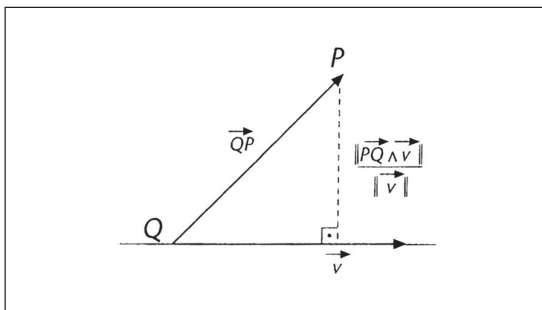


Fig. 39

Proposició. La distància del punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ al pla π d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ és

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

És un càlcul anàleg al de la proposició per a calcular la distància entre un punt i una recta en el pla. Cal trobar el punt Q d'intersecció del pla π amb la recta que passa per P i és perpendicular a π ; $d(P, \pi)$ és la distància entre P i Q que es comprova que coincideix amb la fórmula.

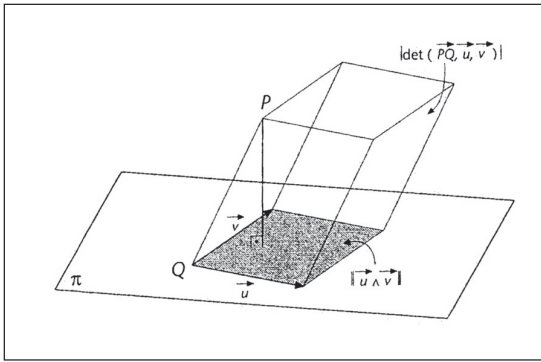


Fig. 40

Proposició. La distància del punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ al pla π que passa per Q i té u i v com a vectors directores és

$$d(P, \pi) = \frac{|\det(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

$\overrightarrow{PQ}, \vec{u}$ i \vec{v} determinen un paral·lelepípede de volum $|\det(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v})| = \text{àrea de la base} \times \text{altura}$. La base té com a àrea $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ i l'altura és la distància buscada.

Proposició. La distància $d(r, \pi)$ d'una recta r a un pla π és

$$d(r, \pi) = \begin{cases} 0, & \text{si es tallen} \\ d(P, \pi) & \text{on } P \text{ és un punt qualsevol de } r, \text{ si } r \parallel \pi \end{cases}$$

Proposició. La distància entre dues rectes r i r' que passen per P, P' i tenen \vec{v} i \vec{v}' com a vectors directores respectivament és

$$d(r, r') = \frac{|\det(\overrightarrow{PP'}, \vec{v}, \vec{v}')|}{\|\vec{v} \wedge \vec{v}'\|}$$

Únicament cal que ens fixem que això és el mateix que calcular la distància entre la recta r i el pla que passa per P' i té \vec{v} i \vec{v}' com a vectors directores.

Problema 87

Siguin el punt $P = (1, 2, 3)$, la recta r que passa pel punt $(3, 2, 1)$ i té vector director $(-1, -1, 2)$ i el pla π que passa pel punt $(1, 1, 1)$ i és perpendicular al vector $(2, 1, -1)$. Calculeu la distància del punt P a la recta r .

Problema 88

Donat un cub d'aresta 1, trobeu la distància d'una diagonal del cub a una diagonal d'una cara, sabent que les dues diagonals es creuen.

Problema 89

Donats els punts $A = (3, 6, 7)$, $B = (4, 8, 10)$, $C = (5, 1, -9)$ i $D = (6, 0, 23)$

- Comproveu que són els vèrtexs d'un tetràedre (no necessàriament regular).
- Calculeu el seu volum.

- c) Calculeu l'àrea de la cara ABC .
- d) Calculeu l'alçada del tetràedre sobre la cara ABC .
- e) Calculeu el baricentre del tetràedre.

Problema 90

Calculeu la distància entre les rectes

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1} \quad \text{i} \quad r' : (x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(0, 1, 2)$$

Problema 91

Calculeu la distància entre els plans $2x - y + 4z + 2 = 0$ i $2x - y + 4z + 5 = 0$.

Problema 92

Calculeu la distància del punt $P = (3, 2, 4)$ a la recta intersecció dels plans $x - y = 0$ i $2x + z - 3 = 0$.

Una visita a les còniques

En els apartats anteriors hem estudiat propietats d'objectes que es podien expressar mitjançant equacions lineals (de primer grau): rectes i plans. Les còniques (el·lipse, paràbola i hipèrbola) són corbes els punts de les quals satisfan equacions quadràtiques (de segon grau). El seu estudi és interessant per diferents motius.

Des del punt de vista algebraic, presenten un món diferent del món lineal que hem estudiat fins ara.

Històricament són corbes que han estat estudiades des dels antics grecs, ja que satisfan propietats belles, elegants i útils.

En general, el món no lineal és difícil d'estudiar, i necessita tècniques sofisticades, però el cas quadràtic és encara assequible. Mirem en primer lloc la cònica més simètrica i simple.

Circumferència

Donat un punt del pla (a, b) , en el sistema de coordenades usual, i un nombre (real) positiu r , s'anomena circumferència de centre (a, b) i radi r el lloc geomètric (o conjunt) de punts del pla que disten r del punt (a, b) . La condició perquè un punt (x, y) sigui de la circumferència de centre (a, b) i radi r és:

$$\|(x - a, y - b)\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

o, equivalentment

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

La condició anterior és l'equació de la circumferència de centre (a, b) i radi r . Un cop desenvolupada té la forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ amb $A = -2a$, $B = -2b$ i $C = a^2 + b^2 - r^2$. Considerem ara una equació polinòmica de segon grau en x, y :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \epsilon y + k = 0$$

Per tal que aquesta equació representi una circumferència, és fàcil veure que ha de ser, primer de tot, $\alpha = \beta \neq 0$, $\gamma = 0$, de manera que, dividint per α si cal –procés que s'anomena de normalització de l'equació de la circumferència–, es pot suposar l'equació sota la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

però, a més, cal tenir present que $r > 0$, motiu pel qual ha de ser

$$r^2 = a^2 + b^2 - C = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$$

Resumint el pas final, l'equació (normalitzada)

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

representa una circumferència si, i només si, $A^2 + B^2 > 4C$ i, en aquest cas, el centre és $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ i el radi és

$$r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C} = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

Si $A^2 + B^2 = 4C$, la circumferència es redueix al punt $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ i si $A^2 + B^2 < 4C$, la figura corresponent és buida (es parla d'una circumferència imaginària).

Partirem ara de la definició clàssica de les còniques i després buscarem les equacions i algunes de les propietats que satisfan.

Definició. Una cònica és una secció plana produïda en un con de revolució per un pla que no passa pel seu vèrtex.

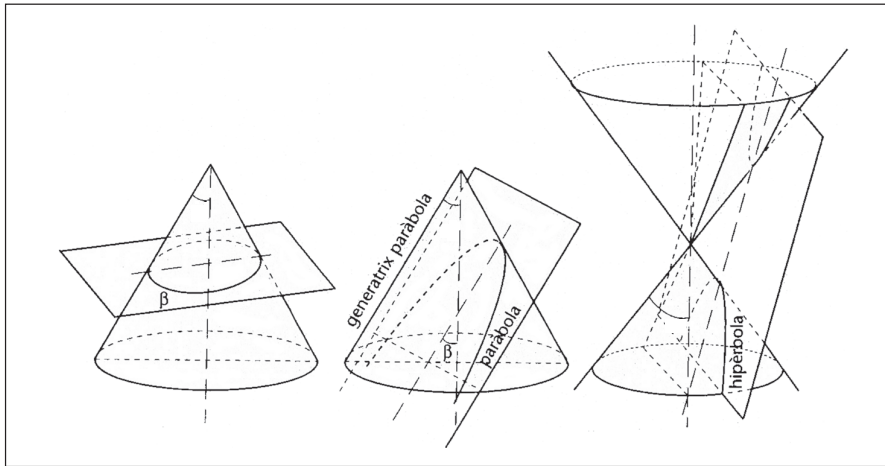


Fig. 41

Sigui α l'angle de les generatrius del con amb l'eix del con i β l'angle de l'eix amb el pla de la secció π .

Si $\alpha < \beta$, la cònica es diu el·lipse.

Si $\alpha = \beta$, la cònica es diu paràbola.

Si $\alpha > \beta$, la cònica es diu hipèrbola.

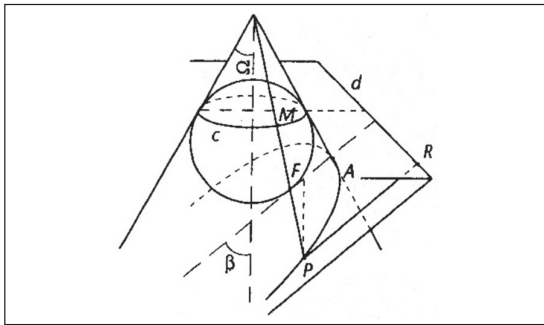


Fig. 42

Definició. Considerem les esferes tangents al con i al pla de la secció π . (Dues en l'el·lipse i la hipèrbola, i una en la paràbola). Els punts de tangència d'aquestes esferes amb el pla π es diuen els *focus de la cònica*. La recta intersecció del pla que conté la circumferència intersecció d'una d'aquestes esferes amb el con i el pla π s'anomena *directriu* de la cònica respecte al focus corresponent.

La proposició següent dóna una definició mètrica de les còniques.

Proposició. La raó de distàncies d'un punt d'una cònica a un focus i a la seva directriu és una constant ε independent del punt de la cònica. S'anomena *excentricitat* de la cònica.

Demostració. $PF = PM$, ja que són segments de rectes tangents a una esfera pel punt P i PM forma l'angle α amb l'eix del con. El segment PR perpendicular a la directriu mesura la distància de P a la directriu i determina l'angle β amb l'eix del con i les projeccions de PM i PR sobre l'eix del con són iguals perquè R i M són en un pla normal a l'eix. Per tant $PM \cos \alpha = PR \cos \beta$ i obtenim

$$\frac{PF}{PR} = \frac{PM}{PR} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \varepsilon \quad (\text{constant})$$

De la demostració que acabem de veure es dedueix que l'excentricitat d'una el·lipse, paràbola i hipèrbola és $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon > 1$ respectivament. Es pot demostrar (no ho farem aquí) que, recíprocament, el lloc geomètric dels punts del pla la raó de les distàncies dels quals a un punt fix F i a una recta fixa d és constant ε és una cònica. Això dóna, per tant, una definició alternativa de cònica.

Una altra definició d'el·lipse i hipèrbola, útil per a estudiar-ne les propietats, és la que es dedueix de la proposició següent.

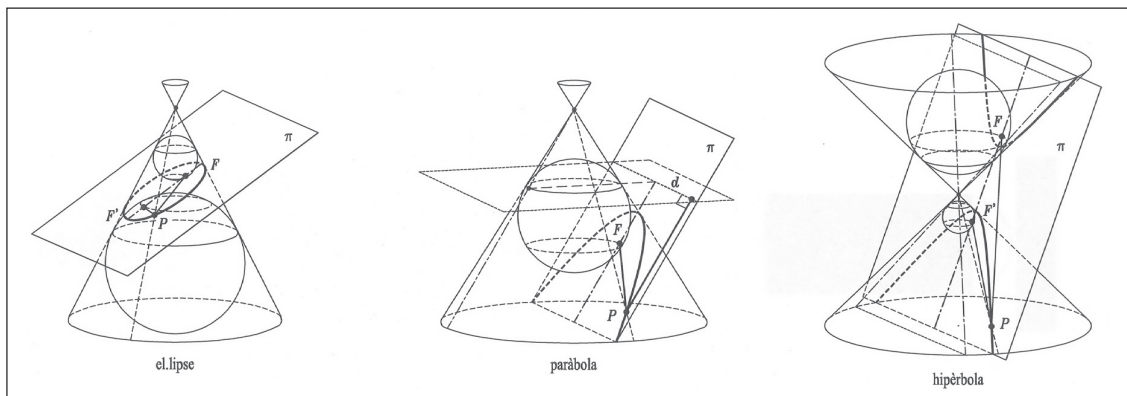


Fig. 43

Proposició. Sigui P un punt qualsevol de l'el·lipse o la hipèrbola. En l'el·lipse $PF + PF' = \text{constant}$. En la hipèrbola $|PF' - PF| = \text{constant}$.

Demostració

En l'el·lipse $PF + PF' = PM + PN = MN = \text{constant}$.

En la hipèrbola $PF' - PF = PN - PM = MN = \text{constant}$.

Recíprocament es pot demostrar que una el·lipse (hipèrbola) és el lloc geomètric dels punts del pla la suma (resta) de les distàncies dels quals a dos punts fixos és constant.

Aquesta propietat dóna, doncs, una tercera definició d'el·lipse i hipèrbola:

Definició. L'el·lipse de focus els punts F i F' és el lloc geomètric dels punts del pla la suma de les distàncies dels quals a F i F' és constant.

La hipèrbola de focus F i F' és el lloc geomètric dels punts del pla la diferència de les distàncies dels quals a dos punts fixos és constant.

Gràcies a les definicions anteriors i a la primera proposició d'aquest punt, podem fer un estudi analític de les còniques. Considerem sistemes de referència com els de la figura 44.

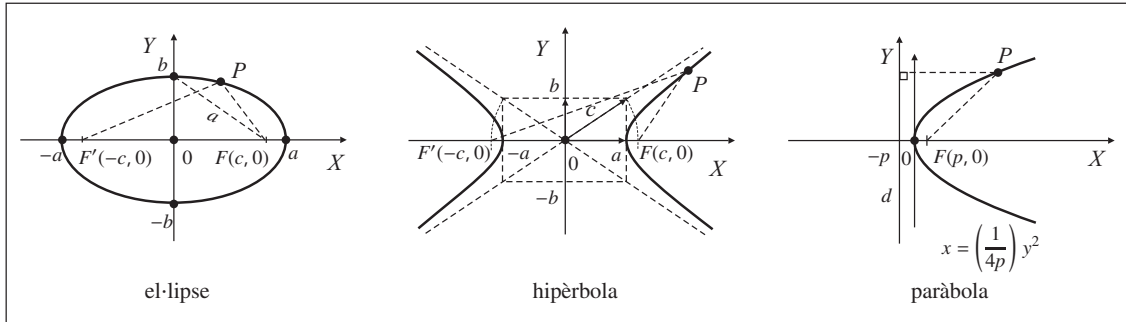


Fig. 44

Si escrivim les condicions perquè un punt (x,y) sigui de la cònica, ens queda (la constant de l'el·lipse i la hipèrbola $2a$):

$$\text{El·lipse} \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\text{Hipèrbola} \quad \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$\text{Paràbola} \quad x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Si desenvolupem aquestes igualtats (és un càlcul pesat) i definim $b^2 = a^2 - c^2$ en l'el·lipse i $b^2 = c^2 - a^2$ en la hipèrbola es tenen les equacions cartesianes de les còniques:

Proposició. L'equació de l'el·lipse de focus $F_1 = (c, 0)$ i $F_2 = (-c, 0)$ i constant $2a$ és

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{on } b^2 = a^2 - c^2$$

Proposició. L'equació de la hipèrbola de focus $F_1 = (c, 0)$ i $F_2 = (-c, 0)$ i constant $2a$ és

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on $b^2 = c^2 - a^2$.

Proposició. L'equació de la paràbola de focus $F = (p/2, 0)$ i directriu la recta $x = -p/2$ és $y^2 = 2px$.

A partir d'aquestes proposicions es dedueixen fàcilment les propietats següents:

- 1) Els punts de l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ situats a l'eix OX tenen coordenades $(-a, 0)$ i $(a, 0)$.
- 2) Els punts de l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ situats a l'eix OY tenen coordenades $(0, -b)$ i $(0, b)$.
- 3) Els punts de la hipèrbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ situats a l'eix OX tenen coordenades $(-a, 0)$ i $(a, 0)$.
- 4) Els eixos OX i OY són eixos de simetria i l'origen O és centre de simetria de l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 5) Els eixos OX i OY són eixos de simetria i l'origen O és centre de simetria de la hipèrbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 6) L'excentricitat de l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i de la hipèrbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ és $\varepsilon = \frac{c}{a}$.
- 7) La hipèrbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ té dues *asíptotes* d'equació $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Aquesta última propietat dona un significat geomètric a b i permet dibuixar hipèrboles amb bastant precisió.

Propietat reflectora de la paràbola: la tangent a una paràbola en un punt P forma angles iguals amb la recta que passa per P i pel focus i la recta que passa per P i és paral·lela a l'eix de simetria de la paràbola.

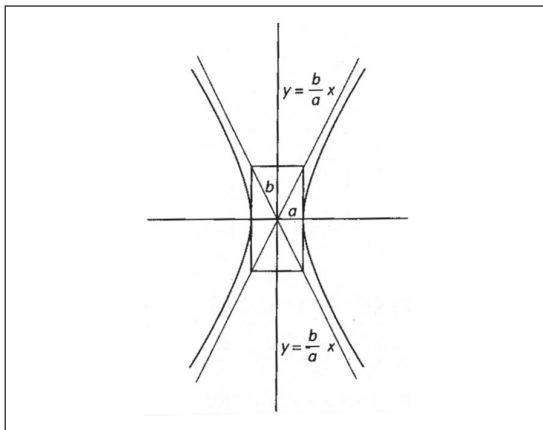


Fig. 45

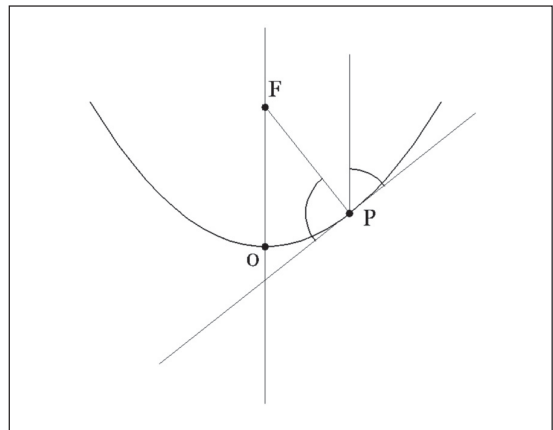


Fig. 46

Demostració. (Vegeu la figura 46)

Sigui $P = (x_0, y_0)$ un punt de la paràbola $y = \frac{x^2}{4p}$. La recta tangent t té l'equació

$$y - y_0 = \frac{x_0}{2p}(x - x_0)$$

La intersecció de t amb l'eix OY és el punt Q de coordenades $(0, q)$ amb

$$q = y_0 - \frac{x_0^2}{2p} = \frac{x_0^2}{4p} - \frac{x_0^2}{2p} = -\frac{x_0^2}{4p}$$

Si veiem que el triangle FPQ és isòsceles haurem acabat.

Però $FQ = p + \frac{x_0^2}{4p}$ i tenim:

$$FP = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0^2}{4p} - p\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_0^2}{4p} + p\right)^2} = \frac{x_0^2}{4p} + p$$

La propietat anterior té aplicacions en la il·luminació i l'acústica. Els focus dels automòbils i les llanternes, per exemple, tenen forma parabòlica i el punt d'il·luminació està situat en el focus. El mateix passa amb les antenes parabòliques, on el receptor es troba en el focus.

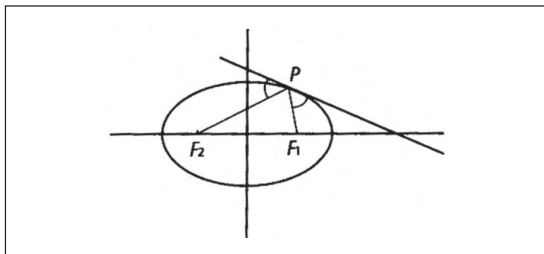


Fig. 47

L'el·lipse satisfà una propietat similar que enunciem sense demostració:

Propietat reflectora de l'el·lipse: la recta tangent a una el·lipse en un punt P forma angles iguals amb les rectes que uneixen P amb els focus.

Problema 93

Justifiqueu que les construccions de la figura 48 són correctes.

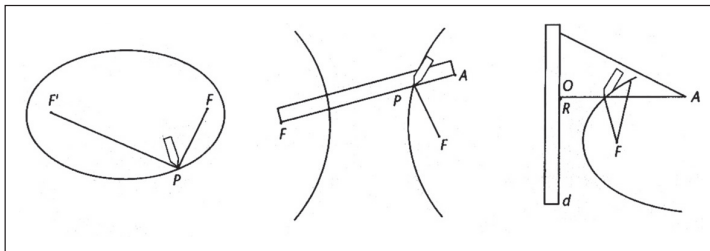


Fig. 48

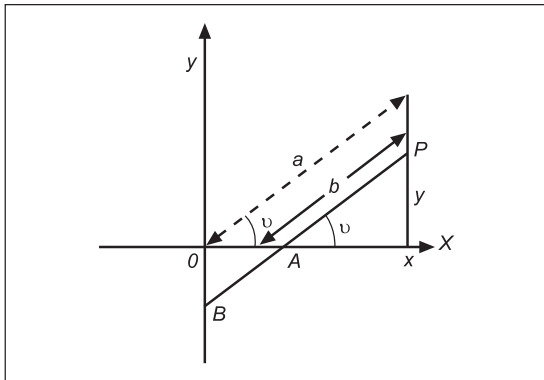


Fig. 49

Problema 94

Comproveu que els punts (x,y) de la forma $x = a \cdot \cos \theta$, $y = b \cdot \cos \theta$ són punts de l'el·lipse d'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

per a qualsevol valor de θ . Considereu ara el dit compàs el·líptic, el lipsògraf o mètode de la targeta, justificant que el següent instrument (figura 49) permet construir una el·lipse d'eixos a i b . Una vareta BP de longitud a té marcat un punt A a distància b de P . A llisca sobre l'eix OX i B sobre l'eix OY . P determina una el·lipse.

Problema 95

Demostreu que el producte de les distàncies d'un punt d'una hipèrbola a les seves asímptotes és una constant (independent del punt).

Problema 96

El receptor d'una antena parabòlica de televisió dista un metre del vèrtex i es troba en el seu focus. Trobeu l'equació de la secció de l'antena (suposant que el vèrtex és l'origen de coordenades i que l'antena està dirigida verticalment).

Problema 97

L'aigua d'una font de 48 cm d'altura surt a una velocitat horitzontal de 10 cm/s. A quina distància horitzontal de la font cau l'aigua a terra?

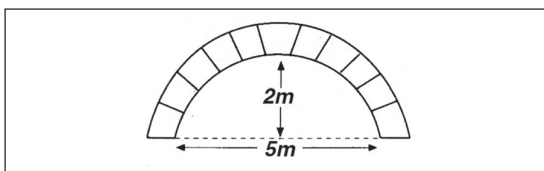


Fig. 50

Problema 98

Volem construir un arc semiel·líptic amb les dimensions expressades en la figura adjunta. Si fem servir una corda de 5 metres, on hem de clavar els seus extrems?

Problema 99

El semieix major de l'òrbita de la Terra mesura 14.957.000 km i la seva excentricitat és 0,0167. Calculeu les distàncies màxima i mínima de la Terra al Sol.

Problema 100

Dos micròfons separats 2 km registren una explosió. El so va arribar al micròfon 1 dos segons abans que al micròfon 2. Cerqueu tots els possibles punts de l'explosió. (Velocitat del so: 340 m/s) Quants micròfons caldrien per determinar el punt d'explosió?

Solucionari dels problemes de la part II

Problema 1

- a) $30^\circ = \pi/6$, $45^\circ = \pi/4$, $60^\circ = \pi/3$, $120^\circ = 2\pi/3$, $210^\circ = 7\pi/6$,
 $315^\circ = 7\pi/4$, $715^\circ = 143\pi/36$, $390^\circ = 13\pi/6$, $1345^\circ = 269\pi/36$.
- b) $\pi/7 = 25^\circ 42' 51''$; $3\pi/10 = 54^\circ$; $2\pi/5 = 72^\circ$; $\pi/12 = 15^\circ$;
 $9\pi/5 = 324^\circ$; $3 = 171^\circ 53' 14''$; $17 = 974^\circ 1' 41''$.

Problema 2

Cada pas correspon a $\pi/12$ radian. Considereu com a positiu el gir en sentit antihorari.

- a) $13(E) = \pi/12$; $6(D) = -7\pi/12$; $4(D) = -2\pi/12$; $15(E) = 11\pi/12$;
 $21(D) = -18\pi/12$. Angle més gran = $11\pi/12$; més petit = $-18\pi/12$.
- b) Angle total girat = -225° .

Problema 3

- a) 18,42 revolucions per segon = 120,37 radian per segon.
- b) $51.757.187,4^\circ$
- c) 347° .

Problema 4

R = radi del cercle circumscrit, r = radi del cercle inscrit,

$$R = \frac{3}{\sin(22^\circ 3')} \approx 7,83 \text{ m}, \quad r = \frac{3}{\tan(22^\circ 3')} \approx 7,24 \text{ m}. \quad \text{Àrea} = 173,8 \text{ m}^2.$$

Problema 5

- *Polígon inscrit*: l'angle central corresponent a un costat és $\alpha = \pi/n$. L'àrea del triangle OAB és

$$AB/2 \cdot h = r \cdot \sin(\alpha/2) \cdot r \cdot \cos(\alpha/2) = r^2 \cdot \sin(\pi/n) \cdot \cos(\pi/n)$$

L'àrea del polígon serà

$$n \cdot r^2 \cdot \sin(\pi/n) \cdot \cos(\pi/n)$$

- *Polígon circumscrit*: anàlogament, l'àrea del triangle OAB és

$$AB/2 \cdot r = r \cdot \tan(\alpha/2) \cdot r = r^2 \cdot \tan(\pi/n)$$

L'àrea del polígon serà

$$n \cdot r^2 \cdot \tan(\pi/n)$$

Problema 6

Àrea hexàgon = $96\sqrt{3} \approx 166,27 \text{ m}^2$; Àrea octàgon = $72(\sqrt{2}+1) \approx 173,82 \text{ m}^2$. Diferència = $7,55 \text{ m}^2$.

Problema 7

$$AB = 2 \cdot OA \cdot \sin(61^\circ) \approx 91,3 \text{ m}$$

Problema 8

Velocitat angular $\omega = \pi/12 \text{ rad/h}$. Velocitat lineal $v = \omega \cdot r = 2.481 \text{ km/h}$

Problema 9

En (figura 5) AHB : $\sin B = h/c \Rightarrow c = \frac{h}{\sin B} = \frac{5}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10 \text{ cm}$

$$\tan B = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \tan B = 10 \cdot \tan 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{100 + \frac{100}{3}} = \sqrt{\frac{400}{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

$$C = 90^\circ - B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Problema 10

$$C = 90^\circ - B \Rightarrow C/2 = 45^\circ - B/2; \quad b = a \cdot \sin B$$

El triangle ACD és rectangle amb hipotenusa CD

$$\Rightarrow \cos \frac{C}{2} = \frac{b}{CD} \Rightarrow CD = \frac{b}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{a \cdot \sin B}{\cos(45^\circ - B/2)}$$

Problema 11

a) Raons de l'angle 90° : el segon costat d'aquest angle talla la circumferència goniomètrica en el punt $B(0, 1)$ i, per tant,

$$\sin 90^\circ = 1; \quad \cos 90^\circ = 0; \quad \tan 90^\circ \text{ no definida};$$

$$\operatorname{cosec} 90^\circ = 1; \quad \sec 90^\circ \text{ no definida}; \quad \cot 90^\circ = 0.$$

b) $\sin 180^\circ = 0; \quad \cos 180^\circ = -1; \quad \tan 180^\circ = 0;$

$$\operatorname{cosec} 180^\circ \text{ no definida}; \quad \sec 180^\circ = -1; \quad \cot 180^\circ \text{ no definida}.$$

c) $\sin 270^\circ = -1; \quad \cos 270^\circ = 0; \quad \tan 270^\circ \text{ no definida};$

$$\operatorname{cosec} 270^\circ = -1; \quad \sec 270^\circ \text{ no definida}; \quad \cot 270^\circ = 0.$$

Problema 12

a) $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ (α al quart quadrant).

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\sqrt{15}; \quad \cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{15}}; \quad \sec \alpha = 4; \quad \operatorname{cosec} \alpha = -\frac{4}{\sqrt{15}}.$$

b) $\tan B = -3 \Rightarrow \frac{\sin B}{\cos B} = -3 \Rightarrow \frac{\sqrt{1 - \cos^2 B}}{\cos B} = -3 \Rightarrow \frac{1 - \cos^2 B}{\cos^2 B} = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 = 10\cos^2 B \Rightarrow \cos B = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ (} B \text{ al segon quadrant)} \Rightarrow \cos B = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Per tant } \sin B = -3 \cdot \cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \operatorname{cosec} B = \frac{\sqrt{10}}{3}; \quad \sec B = -\sqrt{10}; \quad \cot B = -\frac{1}{3}.$$

c) $\operatorname{cosec} C = -\frac{3}{2} \Rightarrow \sin C = -\frac{2}{3} \Rightarrow \cos C = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} =$

$$= \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ (} C \text{ al tercer quadrant)}$$

$$\cos C = -\frac{\sqrt{5}}{3}. \text{ I, per tant, } \tan C = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad \sec C = -\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Problema 13

$$\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 300^\circ = \cos 60^\circ = 1/2$$

$$\tan 300^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}; \quad \operatorname{cosec} 300^\circ = -\operatorname{cosec} 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \sec 300^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

$$\cot 300^\circ = -\cot 60^\circ = -\sqrt{3}$$

Problema 14

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 120^\circ = -\sin 30^\circ = -1/2$$

$$\tan 120^\circ = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}; \quad \operatorname{cosec} 120^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \sec 120^\circ = -2; \quad \cot 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Problema 15

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Problema 16

$$\text{a) } \sin x + \sin 7x = 2 \sin 4x \cdot \cos 3x; \quad \sin 3x + \sin 5x = 2 \sin 4x \cdot \cos x \Rightarrow$$

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 2 \sin 4x(\cos 3x + \cos x) = 2 \sin 4x \cdot 2 \cos 2x \cdot \cos x = 4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 4x$$

$$\text{b) } \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)} = \frac{\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b - (\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)}{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b} = \frac{2 \sin a \cdot \sin b}{2 \sin a \cdot \cos b} = \tan b$$

$$\text{c) } \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b} = \frac{2 \sin a \cdot \cos b}{2 \cos a \cdot \cos b} = \tan a$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sin(a+b+c) &= \sin[a+(b+c)] = \sin a \cdot \cos(b+c) + \cos a \cdot \sin(b+c) = \\ &= \sin a(\cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c) + \cos a(\sin b \cdot \cos c + \cos b \cdot \sin c) = \\ &= \sin a \cdot \cos b \cdot \cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos a \cdot \sin b \cdot \cos c + \cos a \cdot \cos b \cdot \sin c; \\ \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c} &= \tan a - \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c + \tan b + \tan c \end{aligned}$$

Problema 17

$$\text{a) } \sin^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/4, 3\pi/4$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 5\pi/4, 7\pi/4$$

En general $x = (2k + 1)\pi/4, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{b) } \sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cdot \cos x \Rightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos x = \cos x \Rightarrow$$

$$\cos x(2 \sin 2x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \text{ o } \sin 2x = 1/2$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2, 3\pi/2 \Rightarrow x = (2k + 1)\pi/2$$

$$\sin 2x = 1/2 \Rightarrow 2x = \pi/6 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi \Rightarrow x = \pi/12 + k\pi, 5\pi/12 + k\pi$$

$$\text{c) } \cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 2 \cos 3x \cdot \cos x \Rightarrow 2 \cos x(\cos 2x + \cos 3x) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cos x(2 \cos 5x/2 \cdot \cos x/2) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \text{ o } \cos 5x/2 = 0 \text{ o } \cos x/2 = 0$$

$$\text{De } \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\text{De } \cos 5x/2 = 0 \Rightarrow 5x/2 = (2k + 1)\pi/2 \Rightarrow 5x = (2k + 1)\pi \Rightarrow x = (2k + 1)\pi/5$$

$$\text{De } \cos x/2 = 0 \Rightarrow x/2 = (2k + 1)\pi/2 \Rightarrow x = (2k + 1)\pi$$

Problema 18

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B = 180^\circ - C; \quad \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$$

$$\tan(180^\circ - C) = -\tan C \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan C \Rightarrow$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

Problema 19

$$A = 180^\circ - (B + C) = 82^\circ 46'$$

$$\text{En el triangle } AHB : h = c \cdot \sin B$$

Per altra banda

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} \Rightarrow h = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} \cdot \sin B = 9,70 \text{ m}$$

Problema 20

$$\text{De (22)} : \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = k \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a = k \sin A \\ b = k \sin B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = k(\sin A + \sin B) \\ a - b = k(\sin A - \sin B) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a + b}{a - b} = \frac{k(\sin A + \sin B)}{k(\sin A - \sin B)} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$$

Problema 21

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}}{2 \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}} = \tan \frac{A + B}{2} \cdot \cot \frac{A - B}{2} = \frac{\tan \frac{A + B}{2}}{\tan \frac{A - B}{2}}$$

Les altres fórmules es demostren anàlogament.

Problema 22

L'àrea ve donada per $S = 1/2 \cdot AC \cdot h = 1/2 \cdot AC \cdot AB \cdot \sin A$. Però

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{15^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 15 \cdot 10} = 0,6033 \Rightarrow A = \arccos 0,6033 = 52^\circ 53' 27''$$

I, per tant, $S = 1/2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \sin 52^\circ 53' 27'' = 59,81 \text{ m}^2$.

Problema 23

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}} \end{aligned}$$

$$c) \tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Problema 24

x graus	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
x (rad)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—
sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	—	-2	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	-2	—	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
cosec	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	—	-2	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	-2	—

Problema 25

a) $a(x) = 2 + x - 1/2 \cdot x^3$

$b(x) = 4 + 3x^2 - 5x^3 + x^4 - 7x^5$

$c(x) = 3 + 2x$

$d(x) = x - 8x^2$

$e(x) = 5$

b) $\sqrt{2} + \frac{3}{5}x - x^2 + 2x^3 + \pi x^5 + 2x^6$

Problema 26

La diferència de $p(x)$ menys $q(x)$ és igual a la suma de $p(x)$ amb l'oposat de $q(x)$, és a dir

$$p(x) - q(x) = p(x) + [-q(x)]$$

Aplicació:

$$(3 - 2x^2 + 3x^3) + (-5 - x + 2x^2 - 6x^3) = -2 - x - 3x^3$$

Problema 27

Associativa de la suma:

$$\begin{aligned} [(3 - x + 2x^2 + 5x^3) + (1 + x^2)] + (x + 3x^2 - x^3) &= (3 - x + 2x^2 + 5x^3) + [(1 + x^2) + (x + 3x^2 - x^3)] \\ (4 - x + 3x^2 + 5x^3) + (x + 3x^2 - x^3) &= (3 - x + 2x^2 + 5x^3) + (1 + x + 4x^2 - x^3) \\ 4 + 6x^2 + 4x^3 &= 4 + 6x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

Commutativa de la suma:

$$\begin{aligned} (3 - x + 2x^2 + 5x^3) + (1 + x^2) &= (1 + x^2) + (3 - x + 2x^2 + 5x^3) \\ 4 - x + 3x^2 + 5x^3 &= 4 - x + 3x^2 + 5x^3 \end{aligned}$$

Associativa del producte:

$$\begin{aligned} [(3 - x + 2x^2 + 5x^3) \cdot (1 + x^2)] \cdot (x + 3x^2 - x^3) &= (3 - x + 2x^2 + 5x^3) \cdot [(1 + x^2) \cdot (x + 3x^2 - x^3)] \\ (3 - x + 5x^2 - 4x^3 + 2x^4 + 5x^5) \cdot (x + 3x^2 - x^3) &= (3 - x + 2x^2 + 5x^3) \cdot (x + 3x^2 + 3x^4 - x^5) \\ 3x + 8x^2 - x^3 + 12x^4 - 15x^5 + 16x^6 + 13x^7 - 5x^8 &= 3x + 8x^2 - x^3 + 12x^4 - 15x^5 + 16x^6 + 13x^7 - 5x^8 \end{aligned}$$

Commutativa del producte:

$$\begin{aligned} (3 - x + 2x^2 + 5x^3) \cdot (1 + x^2) &= (1 + x^2) \cdot (3 - x + 2x^2 + 5x^3) \\ 3 - x + 5x^2 - 4x^3 + 2x^4 + 5x^5 &= 3 - x + 5x^2 - 4x^3 + 2x^4 + 5x^5 \end{aligned}$$

Distributiva del producte respecte a la suma:

$$\begin{aligned} (3 - x + 2x^2 + 5x^3)[(1 + x^2) + (x + 3x^2 - x^3)] &= (3 - x + 2x^2 + 5x^3)(1 + x^2) + (3 - x + 2x^2 + 5x^3)(x + 3x^2 - x^3) \\ (3 - x + 2x^2 + 5x^3)(1 + x + 4x^2 - x^3) &= (3 - x + 5x^2 + 4x^3 + 2x^4 + 5x^5) + \\ &+ (3x + 8x^2 - 4x^3 + 12x^4 + 13x^5 - 5x^6) \\ 3 + 2x + 13x^2 + 14x^4 + 18x^5 - 5x^6 &= 3 + 2x + 13x^2 + 14x^4 + 18x^5 - 5x^6 \end{aligned}$$

Problema 28

- | | |
|---|--|
| a) $4 - 2x + 6x^2$ | e) $9 - 6x + 13x^2 + 26x^3 - 6x^4 + 20x^5 + 25x^6$ |
| b) $2 - 2x - 2x^2 + 6x^3$ | f) $8 - 6x + 11x^2 + 26x^3 - 7x^4 + 20x^5 + 25x^6$ |
| c) $2 + 4x^2 + 4x^3$ | g) $8 - 6x + 11x^2 + 26x^3 - 7x^4 + 20x^5 + 25x^6$ |
| d) $3 - 4x - 3x^2 + 8x^3 - 10x^4 - 8x^5 + 5x^6$ | |

Problema 29

grau de $[p(x) + q(x)] \leq \text{Màxim (grau de } p(x) \cdot \text{ grau de } q(x))$

grau de $[p(x) \cdot q(x)] = \text{grau de } p(x) + \text{ grau de } q(x)$

Problema 30

- a) $3a + bx + 4cx^2 + 2dx^3$
 b) $(2 + c) + (a - 3)x + 7x^2 - (b + d)x^3 + x^5$
 c) $2a + (2b - 3ab)x + (a - 6 - 3b)x^2 + 10bx^3 - 3x^4$

Problema 31

- a) Quocient = $5x + 2x^2$; residu = $2 - 10x$
 b) Quocient = $-4 - 5/4 \cdot x - 5/2x^2$; residu = $1/2 + 13x + 31/4x^2$
 c) Quocient = $10/9 + 2/3x$; residu = $145/27 - 25/18x$

Problema 32

- a) $q(x) = -3 - 5x$; $r(x) = 0$; $-10x^3 - 21x^2 + 11x + 12 = (2x^2 + 3x - 4)(-5x - 3)$
 b) $q(x) = 1 + x^2$; $r(x) = 0$; $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$

Problema 33

- a) $q(x) = 7 - 6x + 5x^2 - 4x^3 + 3x^4 - 2x^5 + x^6$; $r(x) = -8$
 b) $q(x) = 2023/810 - 275/54x + 5/18x^2 + 2/3x^3$; $r(x) = 407/2430$
 c) $q(x) = a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4$; $r(x) = 0$
 d) $q(x) = a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4$; $r(x) = -2a^5$
 e) $q(x) = a^2 - ax + x^2$; $r(x) = 0$
 f) $q(x) = a^2 + ax + x^2$; $r(x) = 2a^3$

Problema 34

- a) $p(3) = 81 - 27 - 45 + 12 - 3 = 93 - 75 = 18$
 b) $q(-2) = 16 - 8 - 12 + 34 - 30 = 50 - 50 = 0$
 c) $r(1/2) = 1/64 + 2/32 - 1/8 + 6 = (1 + 4 - 8 + 384)/64 = 381/64$
 d) $a(3) = 2/3 \cdot 81 + 1/2 \cdot 27 - 9 + 1/3 = 353/6$

Problema 35

Recorda que les arrels enteres han de ser divisors del terme independent.

- a) 1, -2, 3
- b) 1 (triple), -2 (doble)
- c) 1, -1, -2
- d) -1, 2, -3, -5
- e) 1, 2, -2
- f) -1

Problema 36

- a) $(x-1)(x+2)(x-3)$
- b) $(x-1)^3(x+2)^2$
- c) $(x-1)(x+1)(x+2)(2x+3)$
- d) $(x+1)(x-2)(x+3)(x+5)$
- e) $(x-1)(x-2)(x+2)(x^2+x+1)$
- f) $(x+1)(x^3-x+1)$

Problema 37

- a) $(x-1)(x-2)(x+2)$
- b) $(x-1)(x-2)(x+3)$
- c) $x(x-1)(x+1)(x-2)$
- d) $x(x-2)(3x-5)$
- e) $(x-1)^2(x+2)(2x+1)$
- f) $(x-1)(x+2)(3x-1)$

Problema 38

$$\text{m.c.d.}(a, b) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

$$\text{m.c.m.}(a, b) = (x-1)(x-2)(x+2)(x+3) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$$

$$\text{m.c.d.}(c, d) = x(x-2) = x^2 - 2x$$

$$\text{m.c.m.}(c, d) = x(x-2)(x-1)(x+1)(3x+5) = 3x^5 - 11x^4 + 7x^3 + 11x^2 - 10x$$

$$\text{m.c.d.}(e, f) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$$

$$\text{m.c.m.}(e, f) = (x-1)^2(x+2)(2x+1)(3x-1) = 6x^5 + x^4 - 19x^3 + 9x^2 + 5x - 2$$

Problema 39

- a) $(x-1)(x+1)(x-2) = 2 - x - 2x^2 + x^3$
- b) $4 - 4x - 3x^2 + 2x^3 + x^4$
- c) $27 - 63x + 42x^2 - 2x^3 - 5x^4 + x^5$
- d) $3(x-4)(x+5) = -60 + 3x + 3x^2$

Problema 40

Són equivalents la 1^a i la 2^a .

Problema 41

La fracció serà

$$\frac{a(x)}{x^2 + 2x - 3}$$

i ha de ser equivalent a

$$\frac{3x^3 - 5}{x - 1} \Rightarrow a(x) \cdot (x - 1) = (x^2 + 2x - 3)(3x^3 - 5) \Rightarrow a(x) = 3x^4 + 9x^3 - 5x - 15$$

Problema 42

$$\frac{a(x)}{x^2 - 1} = \frac{x + 3}{x + 1} \Rightarrow a(x) = \frac{(x^2 - 1)(x + 3)}{x + 1} = (x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3$$

Problema 43

Per tal que les dues fraccions siguin equivalents s'ha de verificar la igualtat

$$p(x) \cdot (3x + 2) = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) \Rightarrow p(x) = \frac{(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1)}{3x + 2} \notin \mathbb{R}[x]$$

per tant, no existeix cap polinomi que verifiqui la condició.

Problema 44

$$a) \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$b) \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x^2 - 1)(2x + 3)}{(x^2 - 2x + 1)(2x + 3)} = \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$$

Problema 45

$$a) \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 4x} = \frac{x(x - 2)(x - 3)}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{x - 3}{x + 2}$$

$$b) \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 3x} = \frac{(x - 1)(x + 4)}{x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})} \text{ no es pot simplificar}$$

$$c) \frac{2x^3 - 5x^2 - 23x - 10}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12} = \frac{(x + 2)(x - 5)(2x + 1)}{(x + 2)(x - 2)(x + 3)} = \frac{(x - 5)(2x + 1)}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{x^2 - 9x - 5}{x^2 + x - 6}$$

Problema 46

Associativa de la suma:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x+1} + \left(\frac{3x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} \right) &= \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{3x}{x-1} \right) + \frac{2}{x^2-1} \\ \frac{x-1}{x+1} + \frac{3x^2+3x+2}{x^2-1} &= \frac{4x^2+x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1} \\ \frac{4x^2+x+3}{x^2-1} &= \frac{4x^2+x+3}{x^2-1}\end{aligned}$$

Associativa del producte:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x+1} \cdot \left(\frac{3x}{x-1} \cdot \frac{2}{x^2-1} \right) &= \left(\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{3x}{x-1} \right) \cdot \frac{2}{x^2-1} \\ \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{6x}{x^3-x^2-x+1} &= \frac{3x}{x+1} \cdot \frac{2}{x^2-1} \\ \frac{6x^2-6x}{x^4-2x^2+1} &= \frac{6x}{x^3+x^2-x-1}, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Distributiva del producte respecte a la suma:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x+1} \cdot \left(\frac{3x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} \right) &= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{3x}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{2}{x^2-1} \\ \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{3x^2+3x+2}{x^2-1} &= \frac{3x}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \\ \frac{3x^2+3x+2}{(x+1)^2} &= \frac{3x^2+3x+2}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Problema 47

L'oposat és $\frac{-x^2+x-1}{x^2+1}$ i l'invers és $\frac{x^2+1}{x^2-x+1}$

Definició de diferència:

$$\frac{a(x)}{b(x)} - \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} + \frac{-c(x)}{d(x)}$$

Definició de quocient:

$$\frac{a(x)}{b(x)} : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{d(x)}{c(x)}$$

Aplicació:

$$\frac{x+5}{x+2} - \frac{x^2-x+1}{x^2+1} = \frac{x+5}{x+2} + \frac{-x^2+x-1}{x^2+1} = \frac{4x^2+2x+3}{(x^2+1)(x+2)}$$
$$\frac{x+5}{x+2} : \frac{x^2-x+1}{x^2+1} = \frac{x+5}{x+2} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-x+1} = \frac{x^3+5x^2+x+5}{(x+2)(x^2-x+1)}$$

Problema 48

a) $\frac{2x^2-x-3}{(x-2)(x+2)}$

b) $\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{(x-1)(x-1)(x+1)} = x+1$

c) $\frac{5x^2+2x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x+2} = \frac{(5x^2+2x-1)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{5x^3-3x^2-3x+1}{x+2}$

d) $\frac{3x+1}{x^2+2} \cdot \frac{x-1}{5x} = \frac{3x^2-2x-1}{5x(x^2+2)}$

e) $\frac{2x}{x-1} : \frac{-2}{x-1} = -x$

Problema 49

a) $\frac{2x+1}{x(x+1)} \cdot \frac{2(x^2+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{4(x+1)(x^2+1)}{x(x-1)(x+1)^2} = \frac{4(x^2+1)}{x(x-1)(x+1)}$

b) $\frac{2(x^2+2ax-a^2)}{(x-a)(x+a)} : \frac{2(x^2+a^2)}{(x-a)(x+a)} = \frac{x^2+2ax-a^2}{x^2+a^2}$

c) $\frac{1}{1-x} : \frac{x-2}{x-1} = \frac{x-1}{(1-x)(x-2)} = \frac{-1}{x-2}$

Problema 50

Noteu que $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -\frac{1}{8} - \frac{3}{8}\sqrt{3}i + \frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i = 1$ i anàlogament per a l'altre complex.

Problema 51

a) $3+2i, 1+3i, -2+2i$

c) $50\sqrt{2} + 50\sqrt{2}i$

b) Mòdul $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^{1/2} = 1$ i angle 60°

Problema 52

$2 + 3i$, $2 - 3i$ són simètrics respecte l'eix OX. Els punts potències de i es troben en el cercle unitat girats entre ells $\pi/2$.

Problema 53

a) $2 \cdot 3 + 1 = 3 + 4$

b) I) $x = 27/9 = 3$

II) $x - 3x = 10 - 40$

$$-2x = -30$$

$$x = \frac{-30}{-2} = 15$$

III) $4x - 12 - 7x + 28 = 6 - x$

$$4x - 7x + x = 6 + 12 - 28$$

$$-2x = -10$$

$$x = \frac{-10}{-2} = 5$$

IV) Multiplicant per 3,

$$15x + 27 + x = 24x - 21$$

$$15x + x - 24x = -21 - 27$$

$$-8x = -48$$

$$x = \frac{-48}{-8} = 6$$

V) Multiplicant per 6,

$$24 - x - 3 = 6 + 18 - 4x$$

(Noti's el signe del 3!)

$$-x + 4x = 6 + 18 - 24 + 3$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Problema 54

Si x són els litres d'aigua calenta que hem d'afegir, en total hi haurà $40 + x$ litres d'aigua.

$$40 \cdot 18 + 60x = (40 + x)40$$

$$640 + 60x = 1600 + 40x$$

$$60x - 40x = 1600 - 640$$

$$20x = 960$$

$$x = 960/20$$

$$x = 48 \text{ litres}$$

Problema 55

a) $y = 4x^2 - 2x + 8$

b) El gràfic de la funció associada $y = 3x - 6$ talla l'eix d'abscisses quan $x = 2$. Per tant, 2 és la solució de l'equació.

c) Ha de tallar l'eix d'abscisses exactament en tres punts.

Problema 56

a) $x_1 = 8, \quad x_2 = -12$

$x_1 = 1/2, \quad x_2 = -2$

$x_1 = 6, \quad x_2 = -13/6$

$x_1 = 4, \quad x_2 = -4$

b) $\Delta = 0$. Té una solució doble.

$\Delta = -92$. No té solució.

$\Delta = 73$. Té dues solucions.

c) La funció associada $y = x^2 - 4x + 3$ talla l'eix d'abscisses quan $x = 1$ i $x = 3$. Per tant, les solucions de l'equació són $x = 1$ i $x = 3$.

d) La funció associada $y = x^2 - 2x + 2$ no talla l'eix d'abscisses.

Problema 57

a) $2 \cdot 1 + 1 - 4 \cdot 1 = 2 + 1 - 4 = -1$

$5 \cdot 1 - 1 + 3 \cdot 1 = 5 - 1 + 3 = 7$

b) $1 + 0 - 2 + 1 = 0$

$2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 2 - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$

$-1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 = -1 + 4 + 1 = 4$

$3 \cdot 1 + 0 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 3 - 4 - 4 = -5$

Problema 58

a) Reducció:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y = -1 \\ -3x + 5y = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 10y = 5 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} 3x + 5y = -1 \\ -3x + 5y = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{6}$$

Igualació: de la 1ª equació $\Rightarrow x = (-1 - 5y)/3$

de la 2ª equació $\Rightarrow x = (5y - 6)/3 \Rightarrow (-1 - 5y)/3 = (5y - 6)/3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -1 - 5y = 5y - 6 \Rightarrow 10y = 5 \Rightarrow y = 1/2$$

portant aquest valor a la igualtat $x = (5y - 6)/3 \Rightarrow x = -7/6$.

Substitució: Aillem la x en la 2ª equació $\Rightarrow x = -2 + (5/3)y$. Ara portem aquesta expressió a la 1ª equació

$$3(-2 + (5/3)y) + 5y = -1 \Rightarrow -6 + 5y + 5y = -1 \Rightarrow 10y = 5 \Rightarrow y = 1/2$$

Per tant, $x = -2 + 5/3 \cdot 1/2 = -2 + 5/6 = -7/6$.

b) $x = 3/5; y = 2/5$.

c) No és un sistema lineal, però fent el canvi $a = 1/x, b = 1/y$ s'obté el sistema lineal

$$\begin{aligned} a + b &= 25 \\ 3a + 1/2 \cdot b &= 5 \end{aligned} \Rightarrow a = -3, b = 28 \Rightarrow x = 1/a = -1/3, y = 1/b = 1/28$$

Problema 59

D'acord amb (2), el sistema és

- compatible determinat si $\frac{3}{a} \neq \frac{-5}{2} \Rightarrow a \neq -\frac{6}{5}; b$ qualsevol.
- compatible indeterminat si $\frac{3}{a} = -\frac{5}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow a = -\frac{6}{5}; b = -5$.
- incompatible si $\frac{3}{a} = -\frac{5}{2} \neq \frac{b}{2} \Rightarrow a = -\frac{6}{5}; b \neq -5$.

Problema 60

En primer lloc igualarem els coeficients de la y :

$$\left. \begin{aligned} ab'x + bb'y &= cb' \\ a'bx + b'by &= c'b \end{aligned} \right\} \Rightarrow (ab' - a'b)x = cb' - c'b \Rightarrow x = (cb' - c'b)/(ab' - a'b)$$

Ara igualem els coeficients de la x :

$$\left. \begin{aligned} aa'x + ba'y &= ca' \\ a'ax + b'ay &= c'a \end{aligned} \right\} \Rightarrow (ab' - a'b)y = ac' - ca' \Rightarrow y = (ac' - ca')/(ab' - a'b)$$

Per tal que el sistema sigui compatible determinat han d'existir x, y i han d'ésser únics; això és equivalent al fet que el denominador sigui diferent de zero:

$$a'b - ab' \neq 0 \Rightarrow \frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b}$$

El sistema serà compatible indeterminat si els valors de x, y no són únics, la qual cosa equival al fet que s'anul·lin els numeradors i els denominadors:

$$cb' - bc' = 0, \quad ac' - ca' = 0, \quad ab' - ba' = 0 \Rightarrow a'/a = b'/b = c'/c$$

El sistema és incompatible quan no existeixen la x o la y , fet equivalent a dir que el denominador sigui zero i el numerador corresponent sigui diferent de zero:

$$ab' - ba' = 0 \Leftrightarrow a'/a = b'/b; \quad cb' - bc' \neq 0 \quad \text{o} \quad ac' - ca' \neq 0 \Leftrightarrow a'/a = b'/b \neq c'/c$$

Problema 61

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang } A = 3 = \text{rang } A' = n \Rightarrow$ Compatible determinat.

$$b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 15 & 3 \\ 1 & -8 & -21 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & -5 & -19 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$\text{rang } A = 2 < 3 = \text{rang } A' \Rightarrow$ Incompatible.

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rang } A = 2 = \text{rang } A' = n \Rightarrow$ Compatible indeterminat.

Problema 62

a) Segons l'última matriu triangularitzada el sistema és $x - 2y + z = 3$
 $-y + z = -2$

De la 3ª: $z = -2$; de la 2ª: $y = 0$; de la 1ª: $x = 5$. $13z = -26$ La solució única és $(5, 0, -2)$.

b) No té cap solució.

c) El sistema és equivalent a $x + 2y = -1$
 $7y = -7$

De la 2ª: $y = -1$; de la 1ª: $x = 1$. Solució única $(1, -1)$.

Problema 63

$$2a) \begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = (a+a')d - b(c+c'); \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} = ad - bc + a'd - b'c = (a+a')d - b(c+c')$$

$$3a) \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - b\lambda c = \lambda(ad - bc) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$4a) \Delta = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = -\Delta \Rightarrow 2 \cdot \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

$$5a) \begin{vmatrix} a & b + \lambda a \\ c & d + \lambda c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \lambda \cdot 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$6a) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc; \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Problema 64

$$1a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & k \end{vmatrix}$$

$$5a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \lambda b & b & c \\ d + \lambda e & e & f \\ g + \lambda h & h & k \end{vmatrix}$$

$$3a) \begin{vmatrix} a & b & \lambda c \\ d & e & \lambda f \\ g & h & \lambda k \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

$$6a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix}$$

$$4a) \begin{vmatrix} a & a & c \\ d & d & f \\ g & g & k \end{vmatrix} = 0$$

Problema 65

$$a) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & ab - b^2 & b^2 \\ 2a - 2b & a - b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) \\ 2(a-b) & a-b \end{vmatrix} = \\ = (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3.$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ba & c^2-ca \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = \\ = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Problema 66

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -8 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & -8 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 24 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2$$

Problema 67

$$a) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 46 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3 = \text{rang } A' = n \Rightarrow \text{Compatible determinat.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 11 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 54$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 10 & 11 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} = -17$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 7 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 \\ 7 & -8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = 9 \quad x = \frac{54}{46} = \frac{27}{23}; \quad y = -\frac{17}{46}; \quad z = \frac{9}{46}$$

$$b) \Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$$

Si $a \neq 1, a \neq -2 \Rightarrow \text{rang } A = 3 = \text{rang } A' = n \Rightarrow \text{Compatible determinat.}$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & 1 - a^2 & a \end{vmatrix} = (a^2 - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = (a^2 - 1)(1 - a) = -(a-1)^2(a+1)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 - a & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1 - a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = (1 - a)(1 - a) = (1 - a)^2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 - a^2 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2 - 1) \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a^2 - 1)(a^2 - 1) = (a - 1)^2(a + 1)^2$$

Per tant,

$$x = -\frac{(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = -\frac{a+1}{a+2}; \quad y = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}; \quad z = \frac{(a-1)^2(a+1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}$$

Si $a = 1 \Rightarrow$ el sistema esdevé $x + y + z = 1$ que és compatible indeterminat.

$$\begin{aligned} \text{Si } a = -2 \Rightarrow & -2x + y + z = 1 \\ & x - 2y + z = -2 \quad \text{rang } A = 2 \text{ i rang } A' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible.} \\ & x + y - 2z = 4 \end{aligned}$$

Problema 68

a) $\vec{AB} = (3, -2), \vec{BA} = (-3, 2)$

b) Figura a l'espai.

c) I) $3u + 2v = 3(3, 4, 2) + 2(4, -2, -8) = (9, 12, 6) + (8, -4, -16) = (17, 8, -10)$

II) $5(u - v) - 3w = 5((3, 4, 2) - (4, -2, -8)) - 3(6, 3, -2) = 5(-1, 2, -6) - 3(6, 3, -2) = (-5, 10, -30) - (18, 9, -6) = (-23, 1, -24)$

d) $(\alpha + \beta)\vec{u} = (2 + 3)(2, 3) = 5(2, 3) = (10, 15)$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{u} = 2(2, 3) + 3(2, 3) = (4, 6) + (6, 9) = (10, 15)$$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = 2((2, 3) + (4, 1)) = 2(6, 4) = (12, 8)$$

$$\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} = 2(2, 3) + 2(4, 1) = (4, 6) + (8, 2) = (12, 8)$$

$$(\alpha\beta)\vec{u} = (2 \cdot 3)(2, 3) = 6(2, 3) = (12, 18)$$

$$\alpha(\beta\vec{u}) = 2(3(2, 3)) = 2(6, 9) = (12, 18)$$

$$1\vec{u} = 1(2, 3) = (2, 3) = \vec{u}$$

Problema 69

Un vector director de la recta és el $\vec{PQ} = Q - P = (-3, 2) - (2, 4) = (-5, -2)$

Equació vectorial: $(x, y) = (2, 4) + \lambda(-5, -2)$

Equació paramètrica:
$$\begin{aligned} x &= 2 - 5\lambda \\ y &= 4 - 2\lambda \end{aligned}$$

Equació contínua: $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-4}{-2}$

Equació implícita: $-2(x-2) = -5(y-4)$
 $-2x+4 = -5y+20$
 $-2x+5y-16 = 0$

Equació explícita: aïllem y de l'equació implícita: $5y = 2x + 16$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$$

Problema 70

Seran de la recta si les seves coordenades satisfan l'equació de la recta.

$3 \cdot 2 + 3 + 1 \neq 0$ i per tant P no és de la recta.

$3(-1) + 2 + 1 = 0$ i per tant Q sí que és de la recta.

Problema 71

Estaran alineats si els vectors \overrightarrow{PQ} i \overrightarrow{PR} són paral·lels.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - R = (1, 2)$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (2, 3)$$

No són paral·lels, perquè un vector no és múltiple de l'altre. Per tant, els tres punts no estan alineats.

Un altre mètode és trobar l'equació de la recta que passa per dos dels punts donats i veure que el tercer no és d'aquesta recta.

Problema 72

L'equació implícita de la segona recta (obtinguda a partir de la contínua) és $2x - y - 5 = 0$. El punt buscat és la solució del sistema

$$\begin{aligned}x + 2y &= 0 \\2x - y &= 5\end{aligned}$$

La solució del sistema és $(2, -1)$.

Problema 73

La recta serà de la forma $2x + 3y + C = 0$ perquè ha de ser paral·lela a la recta donada. El punt P ha de ser de la recta i, per tant, ha de satisfer l'equació $2x + 3y + C = 0$: $2 \cdot 3 + 3(-2) + C = 0$, d'on $C = 0$. Així, l'equació de la recta buscada és $2x + 3y = 0$.

Problema 74

Ha de tenir el mateix vector director (o paral·lel):

$$(x, y) = (3, -2) + \lambda(4, 3)$$

Problema 75

a) Un vector director de la recta és $\overrightarrow{QP} = P - Q = (5, 2, 5)$

Equació vectorial: $(x, y, z) = (2, 4, 5) + \lambda(5, 2, 5)$

Equació paramètrica: $x = 2 + 5\lambda$
 $y = 4 + 2\lambda$
 $z = 5 + 5\lambda$

Equació contínua: $\frac{x-2}{5} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{5}$

Nota: Hem triat el vector \overrightarrow{QP} perquè les seves components fossin números positius, però també hauríem pogut agafar el vector \overrightarrow{PQ} .

b) Dos vectors directors del pla són $\overrightarrow{PQ} = (-2, 3, 1)$ i $\overrightarrow{PR} = (2, 1, 1)$.

Equació vectorial: $(x, y, z) = (3, -2, 0) + \lambda(-2, 3, 1) + \mu(2, 1, 1)$

Equació paramètrica: $x = 3 - 2\lambda + 2\mu$
 $y = -2 + 3\lambda + \mu$
 $z = \lambda + \mu$

Equació implícita:
$$\begin{vmatrix} x-3 & -2 & 2 \\ y+2 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolupant el determinant: $2x + 4y - 8z + 2 = 0$. Dividint la igualtat per 2, $x + 2y - 4z + 1 = 0$

c) L'equació contínua de la recta és $\frac{x}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-4}{3}$

El punt d'intersecció és la solució del sistema format per les equacions de la recta i del pla:

$$\begin{array}{l} \pi : 2x + 3y - z = 0 \\ r : \quad 2x - y = 5 \\ \quad 3x - 2z = -8 \end{array} \quad \text{La solució és } \left(\frac{38}{13}, \frac{11}{13}, \frac{109}{13} \right)$$

d) El pla ha de ser de la forma $2x - 3y + 2z + D = 0$.

Per a trobar D , imposem que el punt sigui del pla:

$$2 \cdot 3 - 3(-2) + 2 \cdot 0 + D = 0$$

$$6 + 6 + D = 0$$

$$D = -12. \quad \text{Per tant, el pla té equació } 2x - 3y + 2z - 12 = 0.$$

e) La recta és el conjunt de punts que componen la solució del sistema format per les equacions dels dos plans:

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \lambda \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

L'equació contínua és per tant $\frac{x + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{z}{1}$.

f) Ara hem de trobar el pla que passa pels punts P, Q i R , i esbrinarem si el punt S hi pertany. En cas afirmatiu són coplanaris i en cas negatiu no ho són: $PQ = (-1, 1, -2)$, $PR = (-2, 1, 0)$.

El pla és $\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ y & 1 & 1 \\ z-2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ i, desenvolupant el determinant, $2x + 4y + z - 8 = 0$.

El punt S no és del pla, perquè $2(-2) + 4 \cdot 1 + 4 - 8 \neq 0$. Per tant, els quatre punts no són coplanaris.

g) Trobem primer el pla π que passa pel punt i és paral·lel al pla donat.

Aquest pla talla la recta donada en un punt P .

La recta buscada passa pel punt donat i P .

El pla π és de la forma $3x - 2y - 3z + D = 0$. Com que el punt ha de ser de π , $3 \cdot 3 - 2(-2) - 3(-4) + D = 0$. $D = 25$. L'equació de π és $3x - 2y - 3z + 25 = 0$.

El punt d'intersecció P és la solució del sistema format per les equacions del pla π i la recta donada:

$$P = \left(\frac{5}{7}, \frac{-22}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

La recta buscada passa per $(3, -2, -4)$ i té $(3, -2, -4) - \left(\frac{5}{7}, \frac{-22}{7}, \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{16}{7}, \frac{8}{7}, \frac{29}{7}\right)$ per vector director.

Multiplicant per 7, es té un nou vector director: $(16, 8, 29)$. L'equació de la recta és

$$\frac{x-3}{16} = \frac{y+2}{8} = \frac{z+4}{29}$$

h) I) El pla és de la forma $x + 2y + 3z + D = 0$. Imposant que el punt sigui del pla, $2 + 2 \cdot 1 + 3(-3) + D = 0 \Rightarrow D = 5$. El pla buscat té l'equació

$$x + 2y + 3z + 5 = 0$$

II) Hi ha una infinitat de solucions: la família de rectes del pla que acabem de trobar i que passen per $(2, 1, -3)$. Agafem un punt qualsevol del pla (per exemple el $(-5, 0, 0)$). La recta que passa per aquest punt i per $(2, 1, -3)$ és una solució al problema.

Problema 76

a) I) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3, 4)(3, -1, 2) = 2 \cdot 3 + 3(-1) + 4 \cdot 2 = 6 - 3 + 8 = 11$

$$\text{II) } \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

$$\text{III) } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{11}{\sqrt{29} \sqrt{14}} = \frac{11}{\sqrt{406}}$$

$$\text{IV) } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (10, 8, -11)$$

b) El producte vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-1, 2, 4)$ és ortogonal a \vec{u} i a \vec{v} .

c) Si A, B i C fossin tres punts de l'espai, aleshores l'àrea del triangle seria $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|/2$ (la meitat de l'àrea del paral·lelogram que determinen \vec{AB} i \vec{AC}). Però podem considerar els punts situats en el pla OXY si els afegim una tercera coordenada igual a 0: $A = (1, 2, 0)$, $B = (3, 2, 0)$ i $C = (-1, 0, 0)$. $\vec{AB} = (-2, 0, 0)$, $\vec{AC} = (-2, -2, 0)$. $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|/2 = \|(0, 0, 4)\|/2 = 4/2 = 2$.

Problema 77

Sigui el tetràedre $ABCD$, que podem suposar que té les arestes de longitud 1. Anem a trobar l'angle determinat per l'aresta AD i la cara ABC . Aquest angle és el determinat per AD i la seva projecció sobre ABC que és la bisectriu de l'angle BAC . Un vector director d'aquesta bisectriu és $\vec{AB} + \vec{AC}$. Per tant, el cosinus de l'angle buscat és

$$\cos(\vec{AD}, \vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{\vec{AD} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC})}{\|\vec{AD}\| \|\vec{AB} + \vec{AC}\|} = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AD}\| \|\vec{AB} + \vec{AC}\|}$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AD}\| \|\vec{AB}\| \cos(\vec{AD}, \vec{AB}) = 1 \cdot 1 \cdot 1/2 = 1/2$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AD}\| \|\vec{AC}\| \cos(\vec{AD}, \vec{AC}) = 1 \cdot 1 \cdot 1/2 = 1/2$$

$$\|\vec{AB} + \vec{AC}\| = \sqrt{(\vec{AB} + \vec{AC})^2} = \sqrt{\vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2} = \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{3}$$

El cosinus de l'angle buscat és $\frac{1}{\sqrt{3}}$. L'angle és $54,73^\circ$.

Problema 78

L'altura buscada és la mateixa que la del paral·lelepípede π generat pels vectors \vec{AB} , \vec{AC} i \vec{AD} sobre la base generada per AB i AC . El volum de π és $\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \cdot \text{altura}$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) &= 4 \\ \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| &= |(4, -2, -3)| = \sqrt{29} \\ \text{altura} &= 4 / \sqrt{29}\end{aligned}$$

Nota: Una altra manera seria trobar la distància del punt D al pla ABC .

Problema 79

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2\end{aligned}$$

Que aquestes expressions coincideixin és equivalent a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, és a dir, al fet que \vec{u} i \vec{v} siguin ortogonals.

Problema 80

$$\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{AC} + \vec{CB}\|^2 = \vec{AC}^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{CB} + \vec{CB}^2$$

Com que C és un angle recte, $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = 0$. Per tant, $\|\vec{AB}\|^2 = \vec{AC}^2 + \vec{CB}^2$ que és el que afirma el teorema de Pitàgores.

Problema 81

Troblem el pla π que passa per P i és perpendicular a la recta. El pla i la recta es tallen en un punt Q . $P + 2PQ$ és el punt buscat.

π és de la forma $2x + y - z + D = 0$ i ha de passar per $(1, 0, 0)$. Per tant, $D = -2$ i π és el pla $2x + y - z - 2 = 0$.

Q és la solució del sistema format per les equacions del pla i de la recta: $(1/3, -1/3, -5/3)$.

$$PQ = (-2/3, -1/3, -5/3) \quad P + 2PQ = (-1/3, -2/3, -10/3).$$

Problema 82

És el mateix que el determinat pels seus vectors normals $\vec{u} = (1, -2, 1)$ i $\vec{v} = (2, 3, -4)$. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Rightarrow$ són perpendiculars.

Problema 83

l) Si la recta fos paral·lela al pla, els vectors $(-1, -1, 2)$ i $(2, 1, -1)$ serien ortogonals. Però no ho són.

- II) Podem projectar dos punts Q i R de la recta. La recta projectada ha de passar per aquests dos punts. El pla π té l'equació $2x + y - z - 2 = 0$. Un punt Q de la recta és el $(3, 2, 1)$. Per a trobar la seva projecció sobre π , es pot buscar la intersecció de π amb la recta que passa per Q i és perpendicular a π . Això dóna el punt $Q^* = (4/3, 7/6, 11/6)$. Un altre punt R de la recta és $Q + (-1, -1, 2) = (2, 1, -1)$. La seva projecció és $R^* = (2/3, 1/3, -1/3)$. La recta buscada és la que passa per Q^* i R^* .
- III) El pla π' que passa per P i és perpendicular a r talla r en un punt T . El simètric P^* de P és el punt $P^* = P + 2PT$.

Problema 84

El vector director de la recta ha de ser ortogonal als vectors directors $(-4, -7, 3)$ i $(3, -4, -2)$ de les rectes donades. Pot ser, per tant, el seu producte vectorial $(-4, -7, 3) \wedge (3, -4, -2) = (26, 1, 37)$.

La recta és $(x, y, z) = (-4, -7, 3) + \lambda(26, 1, 37)$.

Problema 85

- I) Escrivim l'equació contínua de r' i comprovem que el sistema és incompatible.
- II) Un vector director de la recta t que busquem és el producte vectorial $(2, 3, -1) \wedge (0, 1, 2) = (-1, -4, 2)$. Ens cal trobar un punt de t . Per això, considerem el pla π que conté la recta r i també té la direcció de

$$r' : (x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(0, 1, 2)$$

Aquest pla tallarà r' en un punt P , que és un punt de t .

- III) Considerem el pla π que passa per $(1, 0, 2)$ i conté la recta r :

$$(x, y, z) = (1, 0, -2) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(0, 0, 1)$$

(El vector $(0, 0, 1)$ uneix $(1, 0, 2)$ amb el punt $(1, 0, -1)$ de la recta). π tallarà r' en un punt que serà de la recta buscada.

Problema 86

- I) Perquè sigui perpendicular a π , $(1, 2, 3)$ ha de ser un vector director. El vector $(-2, 0, 5)$, que uneix $(2, 1, -3)$ i $(0, 1, 2)$, és un altre vector director. L'equació vectorial del pla buscat és

$$(x, y, z) = (0, 1, 2) + \lambda(1, 2, 3) + \mu(-2, 0, 5)$$

- II) $(1, 2, 3)$ és un vector director de la recta. La seva equació vectorial és

$$(x, y, z) = (2, 1, -3) + \lambda(1, 2, 3)$$

- III) El vector director de la recta és el propi $(2, -1, 0)$. La seva equació vectorial és

$$(x, y, z) = (2, 1, -3) + \lambda(2, -1, 0)$$

Problema 87

Si Q és un punt de la recta i \vec{v} un vector director, la distància buscada és

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{PQ} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

En aquest cas, $\vec{PQ} = (2, 0, -2)$ i $\vec{v} = (-1, -1, 2)$. $d(P, r) = \sqrt{2}$.

Problema 88

Situem el cub en un sistema de coordenades de manera que els seus vèrtexs tinguin les coordenades $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$, $D = (0, 1, 0)$, $E = (0, 0, 1)$, $F = (1, 0, 1)$, $G = (1, 1, 1)$, $H = (0, 1, 1)$. Hem de trobar la distància entre, per exemple, les rectes AG i BD .

$$d(AG, BD) = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{AG}, \vec{BD})|}{\|\vec{AG} \wedge \vec{BD}\|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Problema 89

- I) Són els vèrtexs d'un tetràedre si no són coplanaris. Es pot trobar el pla que passa per A, B i C i comprovar que D no és d'aquest pla. Una altra manera és calcular el volum del tetràedre (apartat b). Si dóna diferent de zero, és efectivament un tetràedre.
- II) Els vectors \vec{AB} , \vec{AC} i \vec{AD} generen un paral·lelepípede de volum el valor absolut del seu determinant. El volum del tetràedre és la sisena part d'aquest volum. Així, volum = $109/2$.
- III) Els vectors \vec{AB} i \vec{AC} generen un paral·lelogram d'àrea $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$. L'àrea de la cara ABC és la meitat. Per tant, àrea $\frac{\sqrt{854}}{2} 11$.
- IV) El volum d'un tetràedre és: $\text{volum} = \frac{\text{Àrea de la base} \times \text{altura}}{3}$.
Aïllant, altura = $\frac{327}{\sqrt{854}}$.
- V) El baricentre té coordenades $(A + B + C + D)/4 = (9/2, 15/4, 31/4)$.

Problema 90

$P = (1, 0, -1)$ és un punt de r , $Q = (2, 1, 3)$ és un punt de r' , $\vec{u} = (2, 3, -1)$ és un vector director de r i $\vec{v} = (0, 1, 2)$ un vector director de r' . La distància és

$$d(r, r') = \frac{|\det(\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{11}{\sqrt{69}}$$

Problema 91

Són paral·lels. Per tant, la distància és la d'un punt qualsevol d'un pla a l'altre pla. $(-1, 0, 0)$ és un punt del primer pla. Per tant, la distància és:

$$\frac{|2(-1) - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{3}{\sqrt{21}}$$

Problema 92

Per trobar un punt i un vector de la recta, es resol el sistema format per les equacions dels dos plans. Un punt de la recta és $Q = (0, 0, 3)$ i un vector director és $\vec{v} = (1, 1, -2)$.

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{PQ} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Problema 93

És una aplicació directa de les definicions.

Problema 94

Només cal veure que en substituir x i y en la fórmula, se satisfà la igualtat:

$$\frac{a^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \theta}{b^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

Problema 95

Si l'equació de la hipèrbola és $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, les asymptotes són $y = \pm \frac{b}{a}x$, és a dir, $bx - ay = 0$ i $bx + ay = 0$.

Aïllant y de l'equació de la hipèrbola, els seus punts tenen coordenades $\left(x, \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}\right)$. El producte de les distàncies és:

$$\frac{|bx - b\sqrt{x^2 - a^2}|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{|bx + b\sqrt{x^2 - a^2}|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{b^2 x^2 - (b^2 x^2 - b^2 a^2)}{b^2 + a^2} = \frac{b^2 a^2}{b^2 + a^2}$$

que no depèn del punt.

Problema 96

Trobarem l'equació de la secció situada en el pla XZ. L'equació de la paràbola és $z = ax^2$. Els punts són $(x, z) = (x, x^2)$. El vèrtex és en el punt $(0, 1)$ i la directriu és la recta $z = -1$. Imposant que la distància al

vèrtex ha de coincidir amb la distància a la directriu trobarem: La distància a la directriu és $ax^2 + 1$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + (ax^2 - 1)^2} \\ \sqrt{x^2 + (ax^2 - 1)^2} &= ax^2 + 1 \\ x^2 + a^2x^4 - 2ax^2 + 1 &= a^2x^4 + 2ax^2 + 1 \\ 4ax^2 &= x^2 \\ 4a &= 1 \\ a &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

La distància al vèrtex és $a = \frac{1}{4}$.

La paràbola té l'equació $z = x^2/4$.

Problema 97

Sabem per la física que l'altura recorreguda per un objecte en caure (en aquest cas l'aigua) es pot trobar en funció del temps $h = 1/2gt^2$ on $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. A partir d'aquesta fórmula podem saber quant temps trigarà l'aigua en arribar a terra (l'altura l'expressem en metres 0,48 m):

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,48}{9,8}} = 0,31 \text{ s}$$

Cada segon, l'aigua recorre 10 cm en sentit horitzontal. En 0,31 segons haurà recorregut $10 \cdot 0,31 = 3,1 \text{ cm}$.

Problema 98

Els extrems s'han de clavar en els focus. El semieix menor amida $b = 2\text{m}$, el semieix major $a = 2,5\text{m}$. La semidistància focal c la calculem amb la fórmula

$$c^2 = a^2 - b^2 = 6,5 - 4 = 2,5 \Rightarrow c = \sqrt{2,5} = 1,6 \text{ m}$$

Els extrems de la corda els hem de clavar a una distància de $2c = 3,2 \text{ m}$.

Problema 99

El Sol és en un dels focus de l'òrbita (el·líptica) de la Terra.

L'excentricitat $\varepsilon = c/a$ i per tant $c = \varepsilon a = 0,0167 \cdot 14957000 = 249.782 \text{ km}$. Els punts on la Terra és a les distàncies màxima i mínima al Sol són els de l'eix major.

La distància màxima és per tant $a + c = 14.957.000 + 249.782 = 15.206.782 \text{ km}$.

La distància mínima és per tant $a - c = 14.957.000 - 249.782 = 14.707.218 \text{ km}$.

Problema 100

En dos segons, el so recorre $2 \cdot 340 = 680$ m. Els possibles punts de l'explosió són els punts la diferència de distàncies dels quals al micròfon 2 i al micròfon 1 és 680 m. Són, per tant, els punts de la branca de la hipèrbola els focus de la qual són els micròfons i la diferència de distàncies al micròfon 2 i al micròfon 1 és 680 m.

Amb un tercer micròfon, el 3, es podria determinar el punt com a intersecció de les hipèrboles de focus els micròfons.

