

# Álgebra Lineal Motivada para un público amplio

Henar Herrero Sanz



Ediciones de la Universidad  
de Castilla-La Mancha



# Álgebra Lineal Motivada

para un público amplio

Henar Herrero Sanz



# Álgebra Lineal Motivada

para un público amplio

Henar Herrero Sanz

## Álgebra lineal motivada. Para un público amplio

Thema: YPMF2

- © del texto: Henar Herrero Sanz, 2025.
- © de la edición: Universidad de Castilla-La Mancha, 2025.

Edita: Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha, 2025.  
Colección MANUALES DOCENTES n.º 29.



Esta editorial es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización de sus publicaciones a nivel nacional e internacional.

DOI: [https://doi.org/10.18239/manuales\\_2024.29.00](https://doi.org/10.18239/manuales_2024.29.00)  
ISBN: 978-84-9044-696-6  
ISNI: 0000000506819532 (Ediciones UCLM)

Este original fue sometido al proceso de selección del Comité Editorial del sello Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha que valoró positivamente su publicación. La evaluación por pares ciegos ha sido competencia del comité científico del I Encuentro UCLM de Jóvenes Investigadores en Historia del Arte. Este libro está publicado en Acceso Abierto (ruta diamante) en el Repositorio Institucional RUIdeRA, handle: <https://hdl.handle.net/10578/39190>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons CC BY 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons CC BY 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.es>

Composición: Compobell  
Hecho en España (U.E.) – *Made in Spain (E.U.)*

# Índice general

|                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Prólogo</b>                                                         | <b>1</b>  |
| <b>1. Números complejos</b>                                            | <b>1</b>  |
| 1.1. Motivación . . . . .                                              | 1         |
| 1.2. Definiciones . . . . .                                            | 2         |
| 1.3. Operaciones con números complejos . . . . .                       | 3         |
| 1.4. Formas de los números complejos . . . . .                         | 5         |
| 1.4.1. Representación en el plano . . . . .                            | 5         |
| 1.4.2. Forma polar o módulo-argumento de un número complejo . . . .    | 5         |
| 1.4.3. Forma exponencial de un número complejo . . . . .               | 8         |
| 1.5. Más operaciones . . . . .                                         | 9         |
| 1.5.1. Producto, división y potencia de complejos en forma exponencial | 9         |
| 1.5.2. Raíces de números complejos . . . . .                           | 9         |
| 1.5.3. Exponencial de un número complejo . . . . .                     | 10        |
| 1.5.4. Logaritmo de un número complejo . . . . .                       | 11        |
| 1.5.5. Igualdad de números complejos . . . . .                         | 11        |
| 1.6. Motivación revisitada . . . . .                                   | 12        |
| <b>2. Vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales</b>         | <b>13</b> |
| 2.1. Motivación . . . . .                                              | 13        |
| 2.2. Vectores . . . . .                                                | 14        |
| 2.2.1. Operaciones con vectores . . . . .                              | 16        |
| 2.3. Matrices . . . . .                                                | 18        |

|           |                                                             |           |
|-----------|-------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.3.1.    | Tipos de matrices . . . . .                                 | 19        |
| 2.3.2.    | Igualdad de matrices . . . . .                              | 20        |
| 2.3.3.    | Operaciones con matrices . . . . .                          | 21        |
| 2.3.4.    | Trasposición de matrices . . . . .                          | 23        |
| 2.3.5.    | Determinantes . . . . .                                     | 24        |
| 2.3.6.    | Matriz inversa . . . . .                                    | 27        |
| 2.3.7.    | Rango de una matriz . . . . .                               | 29        |
| 2.4.      | Sistemas de ecuaciones lineales . . . . .                   | 32        |
| 2.4.1.    | Método de Gauss . . . . .                                   | 34        |
| 2.4.2.    | Método de Gauss-Jordan . . . . .                            | 36        |
| 2.4.3.    | Teorema de Rouché-Frobenius . . . . .                       | 37        |
| 2.5.      | Motivación revisitada . . . . .                             | 41        |
| <b>3.</b> | <b>Espacios vectoriales</b>                                 | <b>43</b> |
| 3.1.      | Motivación . . . . .                                        | 43        |
| 3.2.      | Conceptos previos . . . . .                                 | 46        |
| 3.2.1.    | Conjuntos de vectores o n-uplas de números reales . . . . . | 46        |
| 3.2.2.    | Subconjuntos . . . . .                                      | 47        |
| 3.2.3.    | Notaciones . . . . .                                        | 48        |
| 3.3.      | Espacio vectorial . . . . .                                 | 48        |
| 3.3.1.    | Combinación lineal . . . . .                                | 51        |
| 3.3.2.    | Espacio generado . . . . .                                  | 52        |
| 3.3.3.    | Subespacio vectorial . . . . .                              | 53        |
| 3.3.4.    | Dependencia e independencia lineal . . . . .                | 55        |
| 3.3.5.    | Base, dimensión y coordenadas . . . . .                     | 58        |
| 3.4.      | Ecuaciones de subespacios . . . . .                         | 62        |
| 3.4.1.    | Ecuaciones paramétricas de subespacios . . . . .            | 62        |
| 3.4.2.    | Ecuaciones cartesianas o implícitas . . . . .               | 63        |
| 3.4.3.    | Paso de paramétricas a cartesianas . . . . .                | 65        |
| 3.4.4.    | Paso de cartesianas a paramétricas . . . . .                | 66        |

|                                                                     |            |
|---------------------------------------------------------------------|------------|
| <i>ÍNDICE GENERAL</i>                                               | III        |
| 3.5. Motivación revisitada . . . . .                                | 67         |
| <b>4. Espacios vectoriales euclídeos</b>                            | <b>71</b>  |
| 4.1. Motivación . . . . .                                           | 71         |
| 4.2. Producto escalar. Espacio vectorial euclídeo . . . . .         | 73         |
| 4.3. Ortogonalidad . . . . .                                        | 76         |
| 4.3.1. Cálculo de una base ortonormal . . . . .                     | 78         |
| 4.3.2. Proyección ortogonal . . . . .                               | 81         |
| 4.3.3. Forma práctica de calcular proyecciones . . . . .            | 84         |
| 4.4. Motivación revisitada . . . . .                                | 85         |
| <b>5. Aplicaciones lineales</b>                                     | <b>89</b>  |
| 5.1. Motivación . . . . .                                           | 89         |
| 5.2. Aplicaciones lineales . . . . .                                | 90         |
| 5.3. Cambio de base . . . . .                                       | 92         |
| 5.4. Proyección ortogonal . . . . .                                 | 94         |
| 5.5. Motivación revisitada . . . . .                                | 94         |
| <b>6. Autovalores y autovectores</b>                                | <b>97</b>  |
| 6.1. Motivación . . . . .                                           | 97         |
| 6.2. Autovalores y autovectores . . . . .                           | 99         |
| 6.2.1. Polinomio característico y ecuación característica . . . . . | 103        |
| 6.2.2. Subespacios propios . . . . .                                | 103        |
| 6.3. Matriz diagonalizable . . . . .                                | 106        |
| 6.3.1. Relación con aplicaciones lineales . . . . .                 | 107        |
| 6.4. Motivación revisitada . . . . .                                | 109        |
| <b>A. Ejercicios</b>                                                | <b>115</b> |
| <b>B. Soluciones de las cuestiones</b>                              | <b>139</b> |
| <b>C. Soluciones de los ejercicios</b>                              | <b>153</b> |

# Prólogo

Este libro quiere exponer, de forma sencilla, contenidos de álgebra lineal, partiendo de problemas y situaciones de las ciencias aplicadas. Sobre la base del planteamiento matemático de esos problemas, se van haciendo preguntas acerca de las soluciones en distintas situaciones, que conducen a los conceptos del álgebra. Estos conceptos son muy abstractos, pero vienen de problemas reales. De esta manera se intenta sembrar en los estudiantes el principio de necesidad: “para que los estudiantes aprendan lo que pretendemos enseñarles, deben tener una necesidad de ello, donde necesidad se refiere a necesidad intelectual, no necesidad social o económica” [2, 3, 4]. Pretende ser un manual práctico, para que los lectores entiendan y manejen los conceptos. Cada capítulo contiene una motivación con problemas aplicados que plantean preguntas, ejemplos, definiciones, propiedades, alguna demostración, cuestiones y una motivación revisitada, que resuelve las preguntas de los problemas iniciales. Además presenta una colección de problemas propuestos y resueltos. Está expuesto de una forma asequible, que permite su lectura a un público amplio, con algunos conocimientos previos básicos de matemáticas.

Una motivación para escribir este libro son los cursos de álgebra lineal en ciencias aplicadas e ingenierías. Una forma posible de abordar las técnicas de resolución consiste en prescindir del formalismo abstracto de espacios vectoriales. Esta perspectiva es de corto alcance, porque el formalismo permite entender en profundidad un amplio abanico de cuestiones de matemáticas, y otras ciencias e ingenierías, y resolverlas con facilidad. Los espacios vectoriales te dan alas. Pero, hay una forma tradicional de introducir la teoría formal que sigue un diseño conceptual en el que las definiciones, teoremas, y propiedades abstractos se introducen en primer lugar, y los ejemplos y

ejercicios son exclusivamente teóricos, y se presentan en segundo lugar. Desde esta perspectiva de enseñanza se pide a los alumnos que aprendan formalismos abstractos sin ningún contexto, desconectados de otras asignaturas y de los problemas del mundo real, y presentados de forma forzada, sin generar dentro de sus mentes ninguna necesidad intelectual. La tarea del profesor desde esta perspectiva es ardua también, porque percibe esta falta de significado para los estudiantes, lo que suele conllevar una falta de interés o motivación en ellos. Este libro quiere mantener el formalismo abstracto conectándolo con problemas de ciencias aplicadas e ingenierías, para mejorar del proceso de enseñanza y aprendizaje. Las demostraciones se pueden encontrar en los libros [1, 5, 6, 9], y una forma práctica de realizar cálculos con software científico en [10].

# Capítulo 1

## Números complejos

### 1.1. Motivación

#### Raíces de polinomios

Por ejemplo, dado un polinomio de segundo grado,  $p(x) = x^2 - 2x + 2$ . Sus raíces son las soluciones de la ecuación de segundo grado:  $x^2 - 2x + 2 = 0$ . Si calculamos sus soluciones, obtenemos,

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1}. \quad (1.1)$$

No existe, como número real, la raíz de un número negativo. Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ . No existen, como números reales, los logaritmos de números negativos, y otras muchas operaciones no se pueden realizar con números reales.

#### Cuestiones

1. La ecuación  $2x + 4 = 0$ , no tiene solución en los números naturales, ¿en qué conjunto de números tiene solución?
2. La ecuación  $2x - 1 = 0$ , no tiene solución en los números enteros, ¿en qué conjunto de números tiene solución?

3. La ecuación  $x^2 - 2 = 0$ , no tiene solución en los números racionales, ¿en qué conjunto de números tiene solución?
4. La ecuación  $x^2 - 2x + 2 = 0$ , no tiene solución en los números reales, ¿en qué conjunto de números tiene solución?

## 1.2. Definiciones

**Definición 1.1. i unidad imaginaria.** Se define la unidad imaginaria  $i = \sqrt{-1}$ . Se cumple  $i^2 = -1$ .

Teniendo en cuenta esta definición, en la ecuación de segundo grado anterior, las soluciones se pueden escribir de la forma,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2 \cdot i}{2} = 1 \pm i. \quad (1.2)$$

$i$  es un nuevo número que permite realizar operaciones con números reales que involucren raíces de números negativos.

**Definición 1.2. Número complejo.** Un número complejo es una expresión de la forma  $z = a + bi$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales.

**Definición 1.3. Conjunto de los números complejos.** Denotamos  $\mathbb{C}$  al conjunto de los números complejos,  $\mathbb{C} = \{a + ib; a, b \in \mathbb{R}\}$ .

En los números complejos existen las raíces cuadradas de números negativos, existen los logaritmos de números negativos, y otras muchas operaciones se pueden realizar con números complejos. Los números complejos tienen menos restricciones para operar con ellos. Son números más abstractos, no tienen un referente directo en la realidad, como los números reales, pero contienen a los números reales, y mantienen la coherencia de sus operaciones.

**Definición 1.4. Parte real de un número complejo**  $z = a + bi$ . La parte real de  $z$  es  $a = \text{Re}(z)$ .

**Definición 1.5. Parte imaginaria de un número complejo**  $z = a + bi$ . La parte imaginaria de  $z$  es  $b = \text{Im}(z)$ .

**Definición 1.6. Forma binomial, binómica o cartesiana de un número complejo.** La expresión  $z = a + bi$  se llama forma binomial, binómica o cartesiana del número complejo.

Si  $b = 0$ ,  $z = a$  es un número real. Los números reales forman un subconjunto de los números complejos, son aquellos con parte imaginaria nula.  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Si  $a = 0$ ,  $z = bi$  es un número imaginario puro.

**Definición 1.7. Complejo conjugado.** Si  $z = a + bi$ , el complejo conjugado de  $z$ , que se denota  $\bar{z}$ , se define,  $\bar{z} = a - bi$ .

### Ejemplos

$-5 + i$  es un número complejo, su parte real es  $Re(-5 + i) = -5$ , su parte imaginaria es  $Im(-5 + i) = 1$ , su complejo conjugado es  $\overline{-5 + i} = -5 - i$ .

$\pi$  es un número real y también un número complejo  $\pi + 0i$ ,  $Re(\pi) = \pi$ ,  $Im(\pi) = 0$ , su complejo conjugado es  $\bar{\pi} = \pi$ .

$2i$  es un número complejo imaginario puro,  $0 + 2i$ ,  $Re(2i) = 0$ ,  $Im(2i) = 2$ , su complejo conjugado es  $\bar{2i} = -2i$ .

### Cuestiones

1. Escribe 3 números complejos, uno con las partes real e imaginaria distintas de cero, otro real y otro imaginario puro.
2. Dados los números complejos:  $1 - i$ ,  $2 + \sqrt{3}i$ ,  $-3i$ ,  $7$ ,  $e$ . Escribe la parte real e imaginaria y los complejos conjugados de cada número.
3. Calcula las soluciones de las ecuaciones de segundo grado:  $2x^2 - 3x + 5 = 0$ ,  $x^2 + 5x + 7 = 0$ .

## 1.3. Operaciones con números complejos

### Ejemplos

Suma:  $7 + 2i + 3 - 5i = 10 - 3i$ .

**Resta:**  $7 + 2i - (3 - 5i) = 4 + 7i$ .

**Multiplicación:**  $(7 + 2i)(3 - 5i) = 21 - 35i + 6i - 10i^2 = 21 + 10 + (6 - 35)i = 31 - 29i$ .

**División:**  $\frac{7 + 2i}{3 - 5i} = \frac{(7 + 2i)(3 + 5i)}{(3 - 5i)(3 + 5i)} = \frac{21 - 10 + (6 + 35)i}{9 + 25} = \frac{11 + 41i}{34} = \frac{11}{34} + \frac{41}{34}i$ .

**Suma:** Se suman las partes reales y las partes imaginarias separadamente.

$$a_1 + b_1i + a_2 + b_2i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i. \quad (1.3)$$

**Resta:** Se restan las partes reales y las partes imaginarias separadamente.

$$a_1 + b_1i - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i. \quad (1.4)$$

**Multiplicación:** Se multiplican empleando las propiedades distributivas usuales de suma y producto.

$$(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i. \quad (1.5)$$

### División

Para dividir números complejos, multiplicamos y dividimos por el complejo conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} &= \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i. \end{aligned} \quad (1.6)$$

### Cuestiones

4. Suma, resta, multiplica y divide los números complejos  $2 + 3i$  y  $6 + i$ .
5. Suma, resta, multiplica y divide los números complejos  $2 + 3i$  y  $2i$ .
6. Suma, resta, multiplica y divide los números complejos  $2 + 3i$  y  $6$ .
7. Suma, resta, multiplica y divide los números complejos  $3i$  y  $-2i$ .

## 1.4. Formas de los números complejos

### 1.4.1. Representación en el plano

Todo número complejo,  $z = a + bi$ , se pueden expresar como un par de números reales o vector  $(a, b)$ , y se puede representar en el plano  $\mathbb{R}^2$ . La parte real,  $a$ , en el eje de abscisas,  $x$ , y la parte imaginaria,  $b$ , en el eje de ordenadas,  $y$ .

**Ejemplo.**  $-5 + i$  se puede expresar en forma de par de números reales o vector,  $(-5, 1)$ .

#### Cuestiones

8. Si dividimos el plano en cuatro cuadrantes.  $Q_1$ : vectores  $(x, y)$ , tales que  $x \geq 0, y \geq 0$ ,  $Q_2$ : vectores  $(x, y)$ , tales que  $x \leq 0, y \geq 0$ ,  $Q_3$ : vectores  $(x, y)$ , tales que  $x \leq 0, y \leq 0$ ,  $Q_4$ : vectores  $(x, y)$ , tales que  $x \geq 0, y \leq 0$ . Escribe un número complejo de cada cuadrante del plano.
9. Escribe un números complejo que se sitúe en el eje de abcisas, y otro en el de ordenadas.

### 1.4.2. Forma polar o módulo-argumento de un número complejo

Al poder representar los números complejos en el plano como pares de números reales o vectores, podemos describirlos también mediante su módulo y el ángulo que forman con la parte positiva del eje de ordenadas  $x$  medido en sentido antihorario. Un ejemplo se puede visualizar en la figura 1.1.

**Definición 1.8. Módulo de un número complejo.** *Dado un número complejo,  $z = a + bi$ , se define el módulo de  $z$ , que se denota  $|z|$ , como  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .*

**Ejemplos.**  $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ,  $|2+3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ ;  $|1-2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ ,  $|5| = 5$ ,  $|-3i| = 3$ .

**Definición 1.9. Argumento de un número complejo.** Dado un número complejo

$z = a + bi$ , se define el argumento de  $z$ ,

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \text{ si } a \neq 0, \text{ tal que, } z = a + bi = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sen(\arg(z))).$$

$$\arg(z) = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ si } a = 0 \text{ y } b > 0,$$

$$\arg(z) = 3\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ si } a = 0 \text{ y } b < 0,$$

existen infinitos argumentos de un número complejo, llamaremos argumento principal,

$\text{Arg}(z) = \theta$ , al ángulo que está en el intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ . Se cumple  $\arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .<sup>1</sup>

Podemos escribir un número complejo,  $z$ , en forma polar o módulo-argumento como  $|z|_\theta$ .

### Ejemplos

$\text{Arg}(1 + i) = \arctan(1/1) = \pi/4$ ,  $\text{Arg}(2 + 3i) = \arctan(3/2) = 0.9828$ ,  $\text{Arg}(1 - 2i) = \arctan(-2/1) = -1.1071$ ,  $\text{Arg}(5) = \arctan(0/5) = 0$ ,  $\text{Arg}(-3i) = -\pi/2$ ,

$$1 + i = \sqrt{2}_{\pi/4}, 2 + 3i = \sqrt{13}_{0.9828}, 1 - 2i = \sqrt{5}_{-1.1071}, 5 = 5_0, -3i = 3_{-\pi/2}.$$

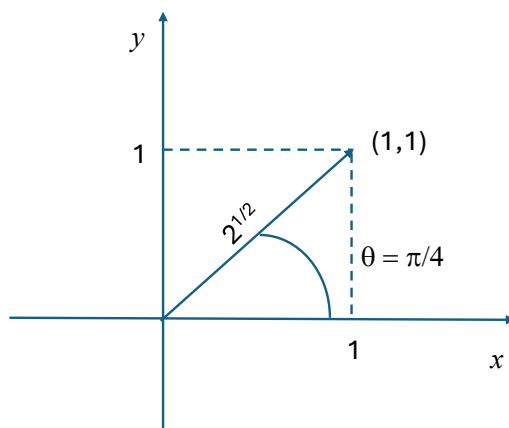


Figura 1.1: Número complejo  $i + i$  representado en el plano como un vector en forma de par de números reales  $(1, 1)$ , y en forma polar  $\sqrt{2}_{\pi/4}$ .

### Atención

<sup>1</sup>Consideramos el intervalo  $[-\pi/2, 3\pi/2)$  porque suele ser el que utilizan las calculadoras, pero se puede considerar  $[0, 2\pi)$  o  $[-\pi, \pi)$ , u otros.

En el intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ , para todo ángulo  $\theta$  del intervalo, hay otro ángulo  $\theta \pm \pi$ , que tiene la misma tangente. Las calculadoras, en general, para calcular el arco tangente de un ángulo, dan un único valor. Esto puede llevar a confusión, porque puede ser que el resultado sea  $\theta$ , pero ese no sea el argumento buscado, sino  $\theta \pm \pi$ . Hay que distinguir el argumento por el cuadrante en el que se encuentra el número complejo. Primer cuadrante: ángulos entre 0 y  $\pi/2$ . Segundo cuadrante: ángulos entre  $\pi/2$  y  $\pi$ . Tercer cuadrante: ángulos entre  $\pi$  y  $3\pi/2$ . Cuarto cuadrante: ángulos entre  $3\pi/2$  y  $2\pi$ . Por ejemplo,  $1 + i$  y  $-1 - i$ , tienen argumentos distintos. Si calculamos con la calculadora  $\arctan(b/a) = \arctan(1) = \pi/4$ , en los dos casos, da un único valor. Si los representamos en el plano, vemos que  $1 + i$  está en el primer cuadrante, entonces  $\pi/4$  es su argumento.  $-1 - i$  está en el tercer cuadrante, y su argumento es  $\pi/4 + \pi = 5\pi/4$ . Se distinguen por el cuadrante en el que se encuentra el número.

Estos números en forma polar son  $1 + i = \sqrt{2}_{\pi/4}$ ,  $-1 - i = \sqrt{2}_{5\pi/4}$ .

$1 - i$  y  $-1 + i$  tienen argumentos distintos, aunque la calculadora nos dé el mismo. Si calculamos sus argumentos,  $\text{Arg}(1 - i) = \arctan(-1/1) = \arctan(-1) = -\pi/4$ ,  $\text{Arg}(-1 + i) = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4$ . Se distinguen por el cuadrante en el que se encuentra el número. Estos números en forma polar son:  $1 - i = \sqrt{2}_{-\pi/4}$ ,  $-1 + i = \sqrt{2}_{3\pi/4}$ .

**Paso de forma polar a forma binómica.** Un número complejo en forma polar,  $z = |z|_{\theta}$ , tiene la forma binómica:  $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , que también se llama forma trigonométrica de un número complejo.

### Ejemplos

$$2_{\pi/4} = 2(\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)i) = 2(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

$$9_{\pi/2} = 9(\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)i) = 9(0 + i) = 9i.$$

### Cuestiones

10. Escribe en forma polar los siguientes números complejos:  $1 + 2i$ ,  $4 - 4i$ ,  $-4 - 4i$ ,  $-2 + 2i$ ,  $-7i$ ,  $4i$ ,  $\pi$ ,  $-3$ .
11. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:  $5_1$ ,  $2_{\pi}$ ,  $3_{-\pi/4}$ ,  $\sqrt{3}_{\pi/2}$ .

### 1.4.3. Forma exponencial de un número complejo

Dado  $\theta \in \mathbb{R}$ , se cumple  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ . Esta expresión se conoce como fórmula de Euler.<sup>2</sup>

Teniendo en cuenta la forma trigonométrica de un número complejo,  $z = |z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$ , y la fórmula de Euler, deducimos la forma exponencial de un número complejo  $z = |z|e^{i\theta}$ :

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z|e^{i\theta}. \quad (1.7)$$

Podemos escribir un número complejo de muy diversas formas: binómica, vector, módulo-argumento, exponencial y trigonométrica:

$$z = a + bi = (a, b) = |z|_{\theta} = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)). \quad (1.8)$$

### Ejemplos

Una vez que tenemos el número complejo en forma módulo-argumento, es inmediato escribir la forma exponencial. En los ejemplos anteriores tenemos:  $1 + i = \sqrt{2}_{\pi/4} = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ ,  $2 + 3i = \sqrt{13}_{0,9828} = \sqrt{13}e^{i0,9828}$ ,  $1 - 2i = \sqrt{5}_{-1,1071} = \sqrt{5}e^{-i1,1071}$ ,  $5 = 5_0 = 5e^{i0}$ ,  $-3i = 3_{-\pi/2} = 3e^{-i\pi/2}$ .

### Cuestiones

12. Escribe en forma exponencial los siguientes números complejos:  $1 + 2i$ ,  $4 - 4i$ ,  $-4 - 4i$ ,  $-2 + 2i$ ,  $-7i$ ,  $4i$ ,  $\pi$ ,  $-3$ .
13. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:  $5e^i$ ,  $2e^{i\pi}$ ,  $3e^{-ipi/4}$ ,  $\sqrt{3}e^{i\pi/2}$ .

---

<sup>2</sup>Se puede demostrar expresando las funciones en desarrollos de Taylor.

## 1.5. Más operaciones

### 1.5.1. Producto, división y potencia de complejos en forma exponencial

#### Ejemplos

Si tenemos dos números complejos en forma exponencial,  $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$  y  $z_2 = 3e^{-i\pi/2}$ , las operaciones de producto, división y potencia son muy sencillas en esta forma.

Producto:  $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \cdot 3e^{-i\pi/2} = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4-i\pi/2} = 3\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 3\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i \operatorname{sen}(-\pi/4)) = 3 - 3i$ .

División:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{3e^{-i\pi/2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\pi/4+i\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i3\pi/4} = -1/3 + i/3$ .

Potencias:  $z_1^6 = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^6 = 2^3e^{3\pi} = 8(\cos(3\pi) + i \operatorname{sen}(3\pi)) = -8$ .

Si tenemos dos números complejos en forma exponencial,  $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$  y  $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ , se realizan de forma sencilla las operaciones de producto, división y potencia.

**Producto:**  $z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\theta_1} \cdot |z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2))$ .

**División:**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2))$ .

**Potencia:**  $z_1^n = (|z_1|e^{in\theta_1}) = |z_1|^n(\cos(n\theta_1) + i \operatorname{sen}(n\theta_1))$ . Esta es la llamada **fórmula de Moivre**.

#### Cuestiones

14. Dados los números complejos en forma exponencial  $2e^{i\pi}$ ,  $3e^{-i\pi/4}$ , multiplícalos, divídelos y elévalos a la potencia 10. Escribe los complejos resultantes en forma binómica.

### 1.5.2. Raíces de números complejos

**Definición 1.10. Raíz n-ésima de un número complejo.** Dado  $z \in \mathbb{C}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , se define la raíz n-ésima de  $z$ , como el número complejo  $w$ , tal que  $w^n = z$ . Si consideramos todos los argumentos de  $z$  en su forma exponencial,  $z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$ ,

$k \in \mathbb{Z}$ , tomando la raíz  $n$ -ésima a ambos lados de la igualdad:  $w^n = z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$ , obtenemos:  $w = z^{1/n} = |z|^{1/n}e^{i(\theta+2k\pi)/n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , estos valores de  $k$  dan números complejos distintos. Todo número complejo tiene  $n$  raíces  $n$ -ésimas.

### Ejemplo

Vamos a calcular las raíces sextas de 1. 1 se escribe en forma exponencial como  $1 = 1e^{i0}$ .

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1}e^{i\frac{0+2k\pi}{6}}, k = 0, 1, \dots, 5, \quad (1.9)$$

$$k = 0, e^{i0} = 1, \quad (1.10)$$

$$k = 1, e^{i\frac{0+2\cdot 1\pi}{6}} = e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + \operatorname{sen}(\pi/3)i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad (1.11)$$

$$k = 2, e^{i\frac{0+2\cdot 2\pi}{6}} = e^{i2\pi/3} = \cos(2\pi/3) + \operatorname{sen}(2\pi/3)i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad (1.12)$$

$$k = 3, e^{i\frac{0+2\cdot 3\pi}{6}} = e^{i\pi} = \cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi)i = -1, \quad (1.13)$$

$$k = 4, e^{i\frac{0+2\cdot 4\pi}{6}} = e^{i4\pi/3} = \cos(4\pi/3) + \operatorname{sen}(4\pi/3)i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad (1.14)$$

$$k = 5, e^{i\frac{0+2\cdot 5\pi}{6}} = e^{i5\pi/3} = \cos(5\pi/3) + \operatorname{sen}(5\pi/3)i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad (1.15)$$

### Cuestiones

15. a) Calcula:  $\sqrt[5]{-2}$ . b) Resuelve:  $z^4 - 1 - i = 0$ .

### 1.5.3. Exponencial de un número complejo

Dado un número complejo  $z = a + bi$ ,  $e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$ .

### Ejemplo

$z = 2 + 3i$ ,  $e^z = e^{2+3i} = e^2 \cdot e^{3i} = e^2(\cos 3 + i \operatorname{sen} 3) = -7,3151 + 1,0427i$ .

### Cuestiones

16. Escribe en forma binómica las siguientes exponenciales de números complejos:

$$e^{1+i}, e^{2i}, e^{3-3i}, e^{\pi+5i}.$$

### 1.5.4. Logaritmo de un número complejo

Si  $z = |z|e^{i\theta}$  es un número complejo, consideramos todos los argumentos de  $z$  en su forma exponencial  $z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . El logaritmo neperiano de  $z$ , que vamos a llamar logaritmo, y denotar como  $\log(z)$  o  $\ln(z)$ , se opera utilizando la propiedad de que el logaritmo del producto es la suma de logaritmos:

$$\ln(z) = \ln(|z|e^{i(\theta+2k\pi)}) = \ln|z| + \ln(e^{i(\theta+2k\pi)}) = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.16)$$

Un número complejo tiene infinitos logaritmos. Llamamos logaritmo principal al que tiene  $k = 0$ .

$$\ln(z) = \ln(|z|e^{i\theta}) = \ln|z| + \ln(e^{i\theta}) = \ln|z| + i\theta. \quad (1.17)$$

**Ejemplo.** Calculamos los logaritmos principales siguientes:  $\ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}e^{i\pi/4}) = \ln\sqrt{2} + i\pi/4$ ,  $\ln(3i) = \ln(3e^{i\pi/2}) = \ln(3) + i\pi/2$ ,  $\ln(-3) = \ln(3e^{i\pi}) = \ln(3) + i\pi$ .

#### Cuestiones

17. Calcula el logaritmo principal y escribe el resultado en forma binómica:  $\ln(-5)$ ,  $\ln(2i)$ ,  $\ln(3-3i)$ .

### 1.5.5. Igualdad de números complejos

Dos números complejos,  $z_1 = x_1 + iy_1$  y  $z_2 = x_2 + iy_2$ , son iguales, si sus partes reales son iguales, y sus partes imaginarias son iguales:  $z_1 = z_2$ , si,  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ .

#### Cuestiones

18. ¿Son iguales  $\frac{1+i}{i}$  y  $1-i$ ?
19. Calcula  $z = x + iy$ , para que se cumpla la ecuación:  $3z - 2 = e^{i\pi}$ .

## 1.6. Motivación revisitada

La ecuación de segundo grado  $x^2 - 2x + 2 = 0$ , no tiene soluciones en el conjunto de los números reales, pero sí tiene solución en el conjunto de los números complejos,

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i.$$

No existe, como número real, la raíz de un número negativo, pero sí existe como número complejo. No existen, como números reales, los logaritmos de números negativos, pero sí como números complejos. Con los números complejos se pueden realizar todo tipo de operaciones. La única que no se puede realizar es dividir por cero.

Respondemos a las cuestiones planteadas en la motivación.

1. La solución de  $2x + 4 = 0$  es  $x = -2$ , es un número entero, no natural, por lo tanto, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ , pero sí en el de los números enteros,  $\mathbb{Z}$ .
2. La solución de  $2x - 1 = 0$  es  $x = 1/2$ , es un número racional, no entero, por lo tanto, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$ , pero sí en el de los números racionales,  $\mathbb{Q}$ .
3. Las soluciones de  $x^2 - 2 = 0$  son  $x = \pm\sqrt{2}$ , son números irracionales, no racionales, por lo tanto, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$ , pero sí en el de los números irracionales,  $\mathbb{I}$ .
4. Las soluciones de  $x^2 - 2x + 2 = 0$  son  $x = 1 \pm i$ , son números complejos, no reales, por lo tanto, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ , pero sí en el de los números complejos,  $\mathbb{C}$ .

Los números complejos son importantes en el cálculo científico con ordenadores, porque permiten todas las operaciones. Aunque el planteamiento y la solución de un problema sean números reales, los algoritmos para llegar a las soluciones pueden plantear, en el proceso de resolución, raíces cuadradas o logaritmos de números negativos, u otras operaciones no permitidas en los números reales, pero no pasa nada, estas operaciones existen en los números complejos, y al final se llega a la solución real correcta.

# Capítulo 2

## Vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales

### 2.1. Motivación

#### Resolución de sistemas de ecuaciones

Una de las motivaciones principales del álgebra lineal es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Vamos a plantear un problema ejemplo de motivación.

Un fabricante utiliza tres ingredientes,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , en la elaboración de un cierto producto alimenticio. Sean  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , las cantidades respectivas en gramos de  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , que componen el producto. Un gramo de cada uno de los ingredientes proporciona vitaminas  $A$ ,  $B$  y  $C$ , en las cantidades, en miligramos, que se expresan en la siguiente tabla.

| mg/g   | X | Y | Z |
|--------|---|---|---|
| vit. A | 2 | 1 | 1 |
| vit. B | 1 | 2 | 1 |
| vit. C | 1 | 1 | 2 |

Calcula qué cantidad de cada ingrediente es necesaria para que la composición del producto conste de  $360\text{ mg}$  de vitamina  $A$ ,  $510\text{ mg}$  de vitamina  $B$  y  $370\text{ mg}$  de vitamina  $C$ .

Planteamos el problema, se tienen que cumplir las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 360, \\ x + 2y + z &= 510, \\ x + y + 2z &= 370. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si escribimos el sistema de ecuaciones en forma vectorial, tenemos,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 510 \\ 370 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

En esta expresión aparecen dos vectores, el vector con las incógnitas  $\vec{v} = (x, y, z)^t$ , donde cada incógnita expresa la cantidad en g de cada ingrediente, y el vector con las cantidades resultantes de cada vitamina en mg,  $\vec{u} = (360, 510, 370)^t$ , donde el superíndice  $t$  quiere decir traspuesto, es decir, pasado de fila a columna.

Este sistema tiene una única solución,  $x = 50$  g de  $X$ ,  $y = 200$  g de  $Y$ ,  $z = 60$  g de  $Z$ .

### Cuestiones

1. ¿Cómo calculamos la solución? ¿Hay distintos métodos? ¿Cuál sería el mejor?
2. ¿Puede tener otras soluciones?

## 2.2. Vectores

En los vectores anteriores, aparecen gramos de cada uno de los ingredientes separadamente, y juntos en un vector, o mg de cada una de las vitaminas separadamente, pero juntos en un vector. Si queremos mantener los g de los distintos ingredientes separados o los mg de las distintas vitaminas separados, tenemos tres números,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

donde  $x$  son los gramos del ingrediente  $X$ ,  $y$  los del ingrediente  $Y$ , y  $z$  los gramos del  $Z$ ,  $\vec{v}$  es un vector columna con tres componentes. Podíamos haberlo escrito en forma de fila  $\vec{v}^t = (x, y, z)$ , donde el superíndice  $t$  quiere decir traspuesto, es decir, pasado de columna a fila. Todos los números que aparecen son números reales. Denotamos al conjunto de números reales como  $\mathbb{R}$ . Podemos definir vectores con más o menos componentes, con 1, 2, ...,  $n$  componentes.

**Definición 2.1. Vector.** *Un vector real de  $n$  componentes,  $\vec{v}$ , es un conjunto de  $n$  números reales dispuestos en fila o columna,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

### Ejemplo

Tenemos en una caja una manzana, 3 peras y 4 plátanos,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

en otra caja 2 manzanas, una pera y ningún plátano,

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

### Cuestiones

1. Escribe un vector con 10 componentes.
2. Escribe su vector traspuesto.

### 2.2.1. Operaciones con vectores

Siguiendo con el ejemplo anterior, juntamos la fruta en una única caja. En esta caja tendremos 3 manzanas, 4 peras y 4 plátanos,

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Dados dos vectores formados por números reales,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

podemos sumar vectores,

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + r \\ y + s \\ z + t \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

o restar vectores,

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - r \\ y - s \\ z - t \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

o multiplicar por un número real (que llamamos escalar),

$$c\vec{v} = c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

### Ejemplos

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, 2\vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

**Definición 2.2. Combinación lineal de dos vectores.** *La suma de los vectores  $c\vec{v}$  y  $d\vec{w}$ , donde  $c$  y  $d$  son números reales, es una combinación lineal de  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .*

**Ejemplo**

$$2\vec{v} + 3\vec{w} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

El vector  $(8, 9, 8)$  es combinación lineal de  $(1, 3, 4)$  y  $(2, 1, 0)$ . Lo mismo que hemos hecho con vectores con tres componentes lo podemos hacer con vectores con dos componentes y más.

**Definición 2.3. Combinación lineal de vectores.** *La suma de los vectores  $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_m\vec{v}_m$ , donde  $\vec{v}_i, i = 1, \dots, m$  son vectores reales, y  $c_i, i = 1, \dots, m$ , son números reales, es una combinación lineal de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ .*

**Ejemplo**

$$2\vec{v} + 3\vec{w} - \vec{u} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

El vector  $(5, 7, 7)$  es combinación lineal de  $(1, 3, 4)$ ,  $(2, 1, 0)$  y  $(3, 2, 1)$ . Lo mismo que hemos hecho con vectores con tres componentes lo podemos hacer con vectores con dos componentes y más, y con más vectores.

## Cuestiones

3. Escribe una combinación lineal de los vectores  $(1, 1)$  y  $(3, 5)$ .
4. Escribe una combinación lineal de los vectores  $(2, 4, 6, 2)$ ,  $(1, 1, 1, 0)$  y  $(1, 2, 0, 1)$ .
5. ¿Es el vector  $(2, 4, 6, 2)$  combinación lineal de los vectores  $(1, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 2, 0, 1)$  y  $(0, 0, 1, 0)$ ?
6. ¿Es el vector  $(2, 4, 6, 2)$  combinación lineal de los vectores  $(1, 0, 0, 0)$  y  $(1, 2, 0, 1)$ ?

## 2.3. Matrices

En el ejemplo inicial de la motivación aparece una matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

que es una disposición de números reales ordenada en filas y columnas, en este caso es una matriz cuadrada  $3 \times 3$ , de 3 filas y 3 columnas de números reales.

**Definición 2.4. Matriz real.** Una matriz real de orden  $m \times n$ ,  $A$ , es un conjunto  $m \times n$  números reales dispuestos en  $m$  filas y  $n$  columnas,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

también la escribiremos de la forma  $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ . Los elementos  $a_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , forman la diagonal de la matriz  $A$ .

### Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 1/5 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

### Cuestiones

7. Escribe una matriz real de tamaño  $4 \times 2$ .

8 Escribe una matriz real de tamaño  $2 \times 5$ .

### 2.3.1. Tipos de matrices

**Matriz rectangular:** el número de filas y columnas no coincide, es decir,  $m \neq n$ .

$$\text{Ejemplo : } A = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

**Matriz cuadrada:** el número de filas y columnas coincide, es decir,  $m = n$ .

$$\text{Ejemplo : } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 25 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

**Matriz fila o vector:**  $m = 1$ .

$$\text{Ejemplo : } D = \begin{pmatrix} -1 & 7 & \pi & 301 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

**Matriz columna o vector:**  $n = 1$ .

$$\text{Ejemplo : } E = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{27} \\ e \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

**Matriz diagonal:** matriz cuadrada en la que los elementos distintos de cero están en la diagonal.

$$\text{Ejemplo : } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

**Matriz triangular superior:** los elementos debajo de la diagonal son cero.

$$\text{Ejemplo : } G = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} & 5 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

**Matriz triangular inferior:** los elementos encima de la diagonal son cero.

$$\text{Ejemplo : } H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

**Matriz nula:** todos sus elementos son cero. Se representa  $0_{m \times n}$  o simplemente 0.

$$\text{Ejemplo : } 0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

**Matriz identidad** o matriz unidad: matriz diagonal con 1 en la diagonal. La matriz identidad de orden  $n$  se representa por  $I_n$ .

$$\text{Ejemplo : } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

**Notación.** Se denota por  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  el conjunto de las matrices de orden  $m \times n$  con elementos en  $\mathbb{R}$ . Se pueden definir matrices complejas si están formadas por números complejos. Vamos a utilizar principalmente matrices reales, aunque también aparecerá alguna compleja.

### Cuestiones

9. Escribe una matriz diagonal  $4 \times 4$ .
10. Escribe una matriz triangular superior  $3 \times 3$ .

### 2.3.2. Igualdad de matrices

Dos matrices de tamaño  $m \times n$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

se dice que son iguales si cada uno de sus elementos en la posición correspondiente es igual, es decir, si  $a_{ij} = b_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**Cuestiones**

11. ¿Son iguales las matrices siguientes?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

12. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 27 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

**2.3.3. Operaciones con matrices****Suma de matrices**

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices de tamaño  $m \times n$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

se define la suma de las matrices  $A + B = C$ , donde cada elemento de  $C$  es suma de los elementos de  $A$  y  $B$  en la correspondiente posición, es decir,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ .

**Ejemplo**

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

**Producto de una matriz por un escalar**

La matriz producto de un número real por una matriz,  $C = kA$  tiene por elementos los de  $A$  multiplicados cada uno por  $k$ .

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

**Ejemplo**

$$-5 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -5 & -15 \\ 20 & -10 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

**Producto de matrices**

Para poder multiplicar dos matrices,  $A$  y  $B$ , el número de columnas de  $A$  tiene que ser igual al número de filas de  $B$ , es decir, si  $A$  es  $m \times n$ ,  $B$  tiene que ser  $n \times p$ ,

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1p} + \dots + a_{1n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1p} + \dots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

**Ejemplo**

Para multiplicar dos matrices  $A$  y  $B$  (en este orden) es condición indispensable que el número de columnas de  $A$  sea igual al número de filas de  $B$ .

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 5 \\ 5 & -22 & 11 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

$(2 \times 4) \times (4 \times 3) \rightarrow 2 \times 3$

**Cuestiones**

13. Escribe dos matrices  $2 \times 2$ ,  $A$  y  $B$ , y calcula  $A + B$ ,  $2A$ ,  $AB$ .
14. Escribe dos matrices,  $A$ , de tamaño  $3 \times 1$ , y  $B$ , de tamaño  $1 \times 3$ , calcula  $AB$  y  $BA$ , y comprueba que  $AB \neq BA$ .

**2.3.4. Trasposición de matrices**

**Definición 2.5.** La traspuesta de la matriz  $A$ , que denotamos  $A^t$ , es la matriz resultante de pasar las filas de  $A$  a columnas.

**Ejemplos**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, (2 \ 1 \ 0 \ 7)^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

**Propiedades**

1.  $(A^t)^t = A$ .
2.  $(A + B)^t = A^t + B^t$ .
3.  $(kA)^t = kA^t$ .
4.  $(AB)^t = B^t A^t$ .

**Definición 2.6. Matriz simétrica.**  $A$  es simétrica si  $A^t = A$ .

**Ejemplo**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{7} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

**Cuestiones**

15. Escribe dos matrices  $2 \times 2$ ,  $A$  y  $B$ , comprueba las cuatro propiedades de la trasposición anteriores.
16. Escribe una matriz simétrica  $3 \times 3$ .

**2.3.5. Determinantes**

**Definición 2.7. Submatriz.** Se denomina submatriz de una matriz  $A$  dada, a cualquier matriz obtenida de  $A$ , eliminando un conjunto determinado de filas y/o columnas.

**Ejemplo.** Dada la siguiente matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{7} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

son submatrices de  $A$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ eliminando la tercera fila,}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & \sqrt{7} \end{pmatrix}, \text{ eliminando la segunda fila y la segunda columna,}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & \sqrt{7} \end{pmatrix}, \text{ eliminando la primera columna.}$$

**Definición 2.8. Matriz adjunta de un elemento.** Se denomina matriz adjunta del elemento  $ij$  de una matriz  $A$ , y se denomina  $A_{ij}$ , a la submatriz obtenida al eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$  de dicha matriz.

**Ejemplo**

La matriz adjunta del elemento 22 de  $A$ ,  $a_{22} = 0$ , es la submatriz,

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & \sqrt{7} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

**Definición 2.9. Determinante.** *El determinante de una matriz cuadrada  $A$  de tamaño  $n$ ,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

*que denotamos como  $|A| = \det(A)$ , es una combinación de sus elementos, que viene definida por:*

- *Si  $n = 1$  y  $A = (a)$ ,  $|A| = a$ .*
- *Si  $n > 1$ ,  $|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|$ , donde  $|A_{i1}|$  es el determinante de la matriz adjunta del elemento  $i1$ , que corresponde a una matriz cuadrada de tamaño  $n - 1$ .*

Esta definición es general para cualquier valor de  $n$ , son conocidas las fórmulas para  $n = 2$  y  $n = 3$ . Para  $n = 2$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (2.41)$$

Y para  $n = 3$ ,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \quad (2.42)$$

Esta última es la regla de Sarrus.

**Definición 2.10. Menor complementario de un elemento.** *Se denomina menor complementario del elemento  $ij$  de una matriz  $A$ , y se denomina  $|A_{ij}|$ , al determinante de la submatriz obtenida al eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$  de dicha matriz.*

### Ejemplo

El menor complementario del elemento  $a_{22}$  de  $A$ , es el determinante de la submatriz  $A_{22}$ ,

$$|A_{22}| = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & \sqrt{7} \end{pmatrix} = 2\sqrt{7} - 9. \quad (2.43)$$

**Definición 2.11. Adjunto de un elemento.** Se denomina adjunto del elemento  $ij$  de una matriz  $A$ , al determinante de la submatriz obtenida al eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$  de dicha matriz, multiplicado por  $(-1)^{i+j}$ ,  $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ .

### Ejemplo

El adjunto del elemento 22 de  $A$ ,  $a_{22} = 0$ , es el número,

$$(-1)^4|A_{22}| = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & \sqrt{7} \end{pmatrix} = 2\sqrt{7} - 9. \quad (2.44)$$

**Definición 2.12. Determinante por adjuntos de filas o columnas.** Si  $A$  es una matriz cuadrada de tamaño  $n$  (2.40), se puede definir el determinante por adjuntos de cualquier fila  $i$ ,

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|,$$

o columna  $j$ ,

$$|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}| + \dots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|.$$

El valor del determinante no depende de la fila o columna elegida.

### Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 2(-4) = 11 \\ &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2(-4) + 3 = 11. \end{aligned} \quad (2.46)$$

### Propiedades de los determinantes

Sean  $A, B$  matrices  $n \times n$ . Se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\det(A) = \det(A^t)$ .

2. Si se intercambian entre sí dos filas (o columnas), el determinante cambia de signo.
3. Si una matriz tienes dos filas (o columnas) iguales, su determinante es cero.
4. Si se multiplica una fila (o columna) de  $A$  por un escalar  $\alpha$ , el determinante de la matriz resultante es igual  $\alpha \det(A)$ .
5. Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ .
6. El determinante de una matriz no varía si a una fila (o columna) se le suma una combinación lineal de las restantes.
7. Si una matriz tiene una fila (o columna) nula, el determinante es nulo.
8.  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .
9. En general,  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ .

### Cuestiones

17. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

comprueba para  $A$  las propiedades de los determinantes 1, 2, 4, 5 y 6, y para  $A$  y  $B$ , las propiedades 8 y 9.

### 2.3.6. Matriz inversa

**Definición 2.13. Matriz inversa.** Dada una matriz cuadrada de tamaño  $n$ ,  $A$ , se dice que la matriz de tamaño  $n$ ,  $B$ , es su inversa, si  $BA = AB = I_n$ , donde  $I_n$  es la matriz cuadrada identidad de tamaño  $n$ . Se denota  $B = A^{-1}$ .

**Definición 2.14. Matriz invertible.** Si existe la matriz  $A^{-1}$ , se dice que  $A$  es regular o invertible. En caso contrario, se dice que  $A$  es singular o no invertible.

**Ejemplo**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

se cumple  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$ .

**Propiedades.** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices  $n \times n$ , se cumple,

1.  $A$  es invertible si y sólo si  $\det(A) \neq 0$ .
2. Si  $A$  es invertible, entonces  $A^{-1}$  es única y viene dada por  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{adjT}$ , donde  $A^{adj}$  es la matriz adjunta, que tiene en lugar del elemento  $ij$  su adjunto  $(-1)^{i+j} |A_{ij}|$ .
3. Si  $A$  es invertible, entonces  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .
4. Si  $A$  es invertible, entonces  $A^t$  es invertible y  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .
5. Si  $A$  y  $B$  son invertibles, entonces  $AB$  es invertible, y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**Ejemplo de cálculo de inversa**

Utilizando la fórmula  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{adjt}$ , donde  $A^{adj}$  es la matriz adjunta.

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

trasponemos la matriz,

$$(A^{adj})^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

y dividimos por el determinante,  $\det(A) = -1$ ,

$$A^{-1} = (-1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

### Cuestiones

18. Demuestra que si  $A$  y  $B$  son matrices  $n \times n$  de números reales invertibles, entonces  $AB$  es invertible y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
19. Demuestra que  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .

### 2.3.7. Rango de una matriz

**Definición 2.15. Menor.** Se denomina menor de orden  $k$  de una matriz  $A$ , al determinante de una submatriz cuadrada de orden o tamaño  $k$ .

**Ejemplo.** Dada la matriz  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & \sqrt{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

son menores de orden 2 de  $A$ ,

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.53)$$

determinante de la submatriz que se obtiene eliminando la primera fila y la primera columna de  $A$ ,

$$|A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.54)$$

determinante de la submatriz que se obtiene eliminando la segunda fila y la segunda columna de  $A$ ,

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad (2.55)$$

determinante de la submatriz que se obtiene eliminando la segunda fila y la tercera columna de  $A$ .

**Definición 2.16. Rango.** Se llama rango de una matriz  $A$ ,  $rg(A)$ , al mayor orden de los menores de  $A$ . Si  $A$  es cuadrada  $n \times n$ , y  $\det(A) \neq 0$ , el rango de  $A$  es  $n$ .

En el ejemplo anterior el rango de  $A$  es 3, porque  $\det(A) \neq 0$ .

### Método de Gauss o eliminación gaussiana

Consiste en transformar la matriz original, sustituyendo filas por combinaciones lineales de esas filas con otras, para llegar a una matriz triangular superior con el mismo rango que la original.

- Dejamos fija la primera fila, es la primera fila pivote. Buscamos hacer ceros debajo del término diagonal de dicha fila.
- Sustituimos la segunda fila por una combinación lineal de dicha fila y la fila pivote que haga cero el primer elemento de la segunda fila.
- Hacemos lo mismo con la tercera fila, y sucesivamente, hasta la última.
- La segunda fila pasa a ser la fila pivote. Buscamos hacer ceros debajo del término diagonal de dicha fila.
- Sustituimos la tercera fila por una combinación lineal de dicha fila y la fila pivote que haga cero el segundo elemento de la tercera fila.
- Hacemos lo mismo con la cuarta fila, y sucesivamente, hasta la última.
- Y así sucesivamente, buscamos hacer ceros debajo de la diagonal.

Llamamos  $F_i$  a la fila  $i$  de la matriz.

### Ejemplos

1. Empezamos considerando fila pivote la primera fila de la matriz,  $F_1$ . Queremos hacer ceros debajo del primer elemento de la fila pivote. En el ejemplo siguiente, sustituyendo la fila segunda por la fila segunda menos 2 veces la fila primera. Lo

expresamos como:  $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ . Con esto, ya tenemos una matriz triangular superior, y se termina el proceso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

El rango de la matriz  $A$  es 1, porque la matriz final solo tiene una fila distinta de cero.

2. En el siguiente ejemplo, empezamos considerando fila pivote la primera fila de la matriz,  $F_1$ . Queremos hacer ceros debajo del elemento diagonal de la fila pivote. En el ejemplo siguiente, sustituimos la fila segunda por la fila segunda menos 2 veces la fila primera:  $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ , y sustituimos la fila tercera por la fila tercera más la fila primera:  $F_3 \leftarrow F_3 + F_1$ . Con esto, ya tenemos ceros debajo del elemento diagonal de la primera fila. A continuación, consideramos fila pivote la segunda fila,  $F_2$ . Queremos hacer ceros debajo del elemento diagonal de la fila pivote. Sustituimos la fila tercera por la fila tercera más 2 veces la fila segunda:  $F_3 \leftarrow F_3 + 2F_2$ . Con esto, ya tenemos ceros debajo del elemento diagonal de la segunda fila. Ya tenemos una matriz triangular superior, y se termina el proceso.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ F_3 \leftarrow F_3 + F_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad F_3 \leftarrow F_3 + 2F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

La matriz final tiene rango 2, porque tiene 2 filas no nulas. Es el mismo rango de la matriz  $B$  inicial.

### Propiedades del rango

Si  $A$  es una matriz de tamaño  $m \times n$ ,

1.  $rg(A) \leq \min\{m, n\}$ .
2. Si  $A$  es invertible entonces  $rg(A) = n$ .



**Ejemplos**

1.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\
x_1 + x_2 &= 0, \\
2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.60}$$

en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\tag{2.61}$$

2.

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4, \\
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0, \\
-x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 &= 1,5,
\end{aligned}
\tag{2.62}$$

en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}.
\tag{2.63}$$

**Definición 2.17. Solución del sistema:** vector  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , que cumple las ecuaciones.

**Sistema homogéneo:** el término independiente es nulo ( $\vec{b} = \vec{0}$ ).

**Sistema inhomogéneo:** al menos alguna de las componentes del término independiente  $\vec{b}$  es distinta de cero, es decir,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ .

**Ejemplo.** El vector  $(50, 200, 60)$  es solución del sistema (2.1). El vector  $(1, 1, -1)$  es solución del sistema (2.62). El sistema (2.60) es homogéneo. El sistema (2.62) es inhomogéneo.

**Definición 2.18. Matriz ampliada.** Se denomina matriz ampliada o completa del sistema, y se representa por  $(A|\vec{b})$ , a la matriz que se obtiene al añadir a la matriz  $A$  la matriz columna  $\vec{b}$ . Por tanto,  $(A|\vec{b})$  es de tamaño  $m \times (n + 1)$  y toma la forma,

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

**Ejemplo.** La matriz ampliada del sistema (2.60), es,

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

## Cuestiones

22. Escribe un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas inhomogéneo, su forma matricial y su matriz ampliada.
23. Escribe un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas homogéneo, su forma matricial y su matriz ampliada.

### 2.4.1. Método de Gauss

Vimos, en la sección que trataba sobre el rango de una matriz, una forma práctica de calcularlo basada en el método de Gauss o eliminación gaussiana. El método de Gauss para resolución de un sistema consta de dos partes. En una primera parte se realiza una eliminación gaussiana a la matriz ampliada para transformar la matriz en una matriz triangular superior, como vimos en un apartado anterior. Y en una segunda parte se realiza una sustitución regresiva sobre el sistema equivalente, para obtener la solución, como se explica a continuación. Lo ilustramos con un ejemplo, buscamos llegar a una matriz triangular superior haciendo ceros debajo de la diagonal a la matriz ampliada

correspondiente al siguiente sistema,

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 11, \\ x - 3y &= -20, \\ 4x + 2y + 5z &= 8. \end{aligned} \tag{2.66}$$

La matriz ampliada es:

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & -3 & 0 & -20 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

Empezamos considerando fila pivote la primera fila de la matriz,  $F_1$ . Queremos hacer ceros debajo del elemento diagonal de la fila pivote. En el ejemplo siguiente, sustituimos la fila segunda por 2 veces la fila segunda menos la fila primera:  $F_2 \leftarrow 2F_2 - F_1$ . Sustituimos la fila tercera por la fila tercera menos 2 veces la fila primera:  $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$ . Con esto, ya tenemos ceros debajo del elemento diagonal de la primera fila. Y también tenemos cero debajo del elemento diagonal de la segunda fila, por lo que ya hemos conseguido una matriz triangular superior.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & -3 & 0 & -20 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_2 - F_1]{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & -7 & 1 & -51 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix}. \tag{2.68}$$

Llegamos a un sistema equivalente,

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 11, \\ -7y + z &= -51, \\ 7z &= -14. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Haciendo sustitución regresiva:  $z = -14/7 = -2$ ,  $y = (-51 + 2)/(-7) = 7$ ,  $x = (11 - 7 - 2)/2 = 1$ . Llegamos a la solución:  $(1, 7, -2)$ .

## Cuestiones

24. El vector fila tercera resultante del proceso de eliminación gaussiana es combinación lineal de los vectores fila de la matriz inicial  $(A|\vec{b})$ , escribe dicha combinación lineal.

25. El vector fila segunda resultante del proceso de eliminación gaussiana es combinación lineal de los vectores fila de la matriz inicial  $(A|\vec{b})$ , escribe dicha combinación lineal.

### 2.4.2. Método de Gauss-Jordan

En el método de Gauss buscamos llegar a una matriz triangular superior haciendo ceros debajo de la diagonal. Si continuamos el proceso, haciendo ceros también por encima de la diagonal, buscando llegar a la matriz identidad, tenemos el método de Gauss-Jordan. La primera parte del método de Gauss-Jordan es una eliminación gaussiana, igual que el anterior. La segunda parte es otra eliminación gaussiana para conseguir ceros por encima de la diagonal. Y la tercera parte consiste en dividir cada fila por el elemento diagonal obtenido, para conseguir la matriz identidad. El sistema equivalente obtenido nos da la solución. Lo ilustramos con un ejemplo, partiendo de la última matriz del ejemplo anterior del método de Gauss.

Empezamos considerando fila pivote la última fila de la matriz,  $F_3$ . Queremos hacer ceros encima del elemento diagonal de la fila pivote. En el ejemplo siguiente, sustituimos la fila segunda por  $7F_2 - F_3$ . Sustituimos la fila primera por  $7F_1 + F_3$ . Con esto, ya tenemos ceros encima del elemento diagonal de la última fila.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & -7 & 1 & -51 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[7F_2 - F_3]{7F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 & 63 \\ 0 & -49 & 0 & -343 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix}.$$

A continuación, consideramos fila pivote la segunda. Queremos hacer ceros encima del elemento diagonal de la fila pivote. Para ello, sustituimos la fila primera por  $7F_1 + F_2$ . Ya hemos conseguido una matriz diagonal. A continuación dividimos la primera fila por 98:  $F_1/98$ , la segunda fila por -49:  $F_2/(-49)$ , y la fila tercera por 7:  $F_3/7$ . Ya tenemos la matriz identidad a la izquierda.

$$\xrightarrow{7F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 98 & 0 & 0 & 98 \\ 0 & -49 & 0 & -343 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3/7]{F_1/98, F_2/(-49)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Llegamos a un sistema equivalente, que nos proporciona directamente la solución,

$$\begin{aligned}x &= 1, \\y &= 7, \\z &= -2.\end{aligned}\tag{2.71}$$

### Cuestiones

26. El vector fila primera resultante del proceso de Gauss-Jordan es combinación lineal de las filas de la matriz inicial  $(A|\vec{b})$ , escribe dicha combinación lineal.
27. El vector fila segunda resultante del proceso de Gauss-Jordan es combinación lineal de las filas de la matriz inicial  $(A|\vec{b})$ , escribe dicha combinación lineal.

### 2.4.3. Teorema de Rouché-Frobenius

**Definición 2.19. Sistema incompatible:** *no tiene solución.*

**Sistema compatible:** *tiene solución.*

**Sistema compatible determinado:** *tiene una única solución.*

**Sistema compatible indeterminado:** *tiene infinitas soluciones.*

**Teorema 2.20. Rouché-Frobenius.** *Un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas es:*

1. *Compatible si y sólo si  $rg(A) = rg(A|\vec{b})$ . Además,*
  - a) *Si  $rg(A) = n$ , entonces el sistema es determinado.*
  - b) *Si  $rg(A) < n$ , entonces el sistema es indeterminado.*
2. *Incompatible si y sólo si  $rg(A) < rg(A|\vec{b})$ .*

El teorema se demuestra resolviendo el sistema, por lo que podríamos intentar resolver el sistema y en ese proceso ya vemos si tiene solución o no.

En el caso de sistema compatible indeterminado,  $n - rg(A)$  son los grados de libertad del sistema, o el número de parámetros libres de la solución.

El teorema es válido para sistemas homogéneos e inhomogéneos. Los sistemas homogéneos siempre van a ser compatibles, porque el rango de la matriz ampliada es igual al rango de la matriz  $A$ .

### Ejemplos

1. Dado el sistema (2.60), se cumple  $\det(A) = 0$ ,  $rg(A) = 2$ , y  $rg(A|\vec{b}) = 2$ ,  $rg(A) = 2 = rg(A|\vec{b}) = 2 < 3$ , por lo que el sistema es compatible indeterminado, con un grado de libertad.

2. Sistema compatible determinado,

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5, \\ 5x + 6y &= 4, \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}; rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 2. \tag{2.73}$$

3. Sistema compatible indeterminado,

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1, \\ 2x + 4y &= 2, \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}; rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 1 < 2. \tag{2.75}$$

4. Sistema incompatible,

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4, \\ 2x + 4y &= 7, \end{aligned} \tag{2.76}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}; rg(A) = 1 \neq rg(A|\vec{b}) = 2. \tag{2.77}$$

Como decíamos antes, el teorema no sería necesario, vamos a intentar resolver los sistemas mediante eliminación gaussiana, y en ese proceso ya vemos si tiene solución o no.

### Ejemplos

1. Dado el sistema,

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5, \\ 5x + 6y &= 4, \end{aligned} \tag{2.78}$$

resolvemos por Gauss-Jordan,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{2F_2-5F_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & -17 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2/(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 17/3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.79}$$

el sistema equivalente es,

$$\begin{aligned} x &= -6, \\ y &= 17/3, \end{aligned}$$

tiene una solución única.

2. Dado el sistema,

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1, \\ 2x + 4y &= 2, \end{aligned} \tag{2.80}$$

resolvemos por Gauss-Jordan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.81}$$

el sistema equivalente es,

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1, \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

una ecuación y dos incógnitas, queda un parámetro libre, que podemos elegir  $y = \alpha$ , y podemos escribir la solución como,

$$\begin{aligned}x &= 1 - 2\alpha, \\y &= \alpha,\end{aligned}$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha$  es un número real cualquiera, entonces el sistema tiene infinitas soluciones, por ejemplo, si  $\alpha = 1$ ,  $x = 1 - 2 \cdot 1 = -1$ ,  $y = 1$  es solución, si  $\alpha = 27$ ,  $x = 1 - 2 \cdot 27 = -53$ ,  $y = 27$  es solución, y así para cualquier valor que tome  $\alpha$  tenemos una solución distinta.

3. Dado el sistema,

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4, \\2x + 4y &= 7,\end{aligned}\tag{2.82}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\tag{2.83}$$

el sistema equivalente es

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4, \\0 &= -1,\end{aligned}$$

es imposible  $0 = -1$ , por lo que el sistema es incompatible.

### Cuestiones

28. Escribe tres sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que sean, uno compatible determinado, otro compatible indeterminado con un grado de libertad y otro incompatible.
29. Escribe dos sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas homogéneos que sean, uno compatible determinado y otro compatible indeterminado con 2 grados de libertad.

## 2.5. Motivación revisitada

Partíamos del sistema,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 510 \\ 370 \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Hemos visto que está formado por dos vectores de 3 componentes de números reales y una matriz cuadrada  $A$ ,  $3 \times 3$ , de números reales.  $\det(A) = 4 \neq 0$ , entonces  $r(A) = 3 = r(A|\vec{b}) = 3$ , el sistema es compatible determinado, tiene una única solución, que podemos obtener mediante el método de Gauss o de Gauss-Jordan,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 360 \\ 1 & 2 & 1 & 510 \\ 1 & 1 & 2 & 370 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & -3 & -1 & -660 \\ 0 & -1 & -3 & -380 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{F_3-2F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & -3 & -1 & -660 \\ 0 & 0 & 8 & 480 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{F_2-3F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & -3 & -1 & -660 \\ 0 & 0 & 8 & 480 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{-8F_1+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & -3 & -1 & -660 \\ 0 & 0 & 8 & 480 \end{pmatrix} \xrightarrow{8F_2+F_3} \begin{pmatrix} -16 & -8 & 0 & -2400 \\ 0 & -24 & 0 & -4800 \\ 0 & 0 & 8 & 480 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{3F_1-F_2} \begin{pmatrix} -48 & 0 & 0 & -2400 \\ 0 & -24 & 0 & -4800 \\ 0 & 0 & 8 & 480 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1/(-48)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{pmatrix}. \quad (2.85) \end{aligned}$$

Llegamos a un sistema equivalente, que nos proporciona directamente la solución,

$$\begin{aligned} x &= 50, \\ y &= 200, \\ z &= 60. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Resolvemos las cuestiones planteadas.

1. ¿Cómo calculamos la solución? ¿Hay distintos métodos? ¿Cuál sería el mejor?  
Hemos estudiado dos métodos, el método de Gauss y el método de Gauss-Jordan. Hemos resuelto el sistema con Gauss-Jordan. Los dos métodos tienen el mismo nivel de complejidad, cualquiera de los dos métodos es adecuado. Existen muchos otros métodos. Estos son de los más utilizados.
2. ¿Puede tener otras soluciones? Hemos visto que el sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

# Capítulo 3

## Espacios vectoriales

### 3.1. Motivación

#### Red de flujo de tráfico

Una red consiste en un conjunto de puntos, llamados nodos, con líneas o arcos, denominados ramas, que conectan a algunos o todos los nodos, y representan los flujos. La dirección del flujo se indica en cada arco y la cantidad (o tasa) de flujo se muestra o se denota por medio de una variable. El supuesto básico del flujo de redes es la conservación del flujo, es decir, el flujo que entra a la red es el mismo que sale de la red, y el flujo entrante en un nodo es igual al flujo saliente del nodo.

Por ejemplo, en la figura 1 se muestra una red de flujo de tráfico en algunas calles de Ciudad Real. En cada calle se indica con una variable el flujo de vehículos, que se puede medir, por ejemplo, en número de vehículos que circulan en una hora. Así  $x_1$  indica el número de vehículos que entran en la calle Inmaculada Concepción desde la ronda en una hora,  $x_2$  los que llegan a la calle Bachiller Fernán-Gómez desde la calle Calatrava,  $x_3$  los que circulan en el tramo entre el cruce Bachiller-Inmaculada y el cruce Bachiller-Santa Teresa,  $x_4$  los que van por Santa Teresa provenientes de Inmaculada y  $x_5$  los que parten del cruce Inmaculada-Santa Teresa y continúan por Inmaculada.

Para realizar el balance, nos fijamos en cada nodo, de manera que los que entran en el nodo tienen que ser igual a los que salen del nodo. Así, en el nodo Inmaculada-Bachiller, se tiene que cumplir:  $x_1 + x_2 = x_3$ , y en el nodo Inmaculada-Santa Teresa:  $x_3 = x_4 + x_5$ .

Al ser las calles de dirección única, las variables tienen que ser positivas o nulas.

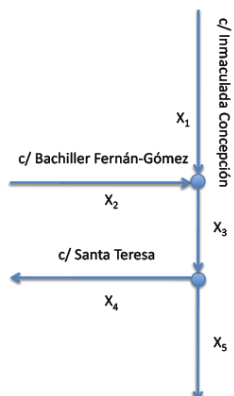


Figura 3.1: Flujo de tráfico en calles de Ciudad Real.

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 5 incógnitas,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ x_3 - x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Podemos escribir el sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

El rango de la matriz del sistema es 2, al ser un sistema homogéneo, es compatible indeterminado, con 2 ecuaciones y 5 incógnitas, por lo que tenemos 3 parámetros libres. Tomamos como parámetros libres algunas de las variables, por ejemplo,  $x_2 = \alpha$ ,  $x_3 = \beta$ ,  $x_4 = \gamma$ , y despejamos las variables,

$$\begin{aligned} x_1 &= -\alpha + \beta, \\ x_2 &= \alpha, \\ x_3 &= \beta, \\ x_4 &= \gamma, \\ x_5 &= \beta - \gamma, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Lo escribimos en forma vectorial,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \beta - \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Si tomamos  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 20$  y  $\gamma = 5$ , una solución particular es  $(10, 10, 20, 5, 15)$ . Es decir, han llegado de la ronda a la calle Inmaculada 10 vehículos, y por la calle Bachiller 10; en el tramo después del cruce Inmaculada-Bachiller han circulado 20, de estos, 5 se han ido por Santa Teresa y 15 han seguido por Inmaculada.

Las soluciones son combinaciones lineales de los vectores,

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

El conjunto de las soluciones está formado por todas las combinaciones lineales de estos tres vectores. Se dice que el conjunto de soluciones es el espacio generado por estos tres vectores, que se denota  $\mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ,

$$S_1 = \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

### Cuestiones

1. Escribe otras dos soluciones particulares de este problema.
2. ¿Qué ocurre si tomamos  $\alpha = 20$ ,  $\beta = 10$  y  $\gamma = 5$ ?

3. Escribe la solución en forma vectorial tomando como parámetros libres  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_4 = \gamma$ .
4. Hacemos 9 grupos, de manera que cada grupo considere unos parámetros libres distintos, y escribimos los distintos conjuntos de soluciones como combinaciones lineales de vectores.
5. ¿Son correctas todas las soluciones?
6. ¿Qué tienen en común los distintos vectores que aparecen en las soluciones?
7. ¿Son iguales o distintos los conjuntos de soluciones?
8. ¿Qué ocurre si tomamos como parámetros libres  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_3 = \gamma$ ?
9. ¿Qué ocurre si tomamos como parámetros libres  $x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = \beta$ ,  $x_5 = \gamma$ ?
10. Aparecen dos operaciones en las expresiones anteriores, ¿cuáles son?

## 3.2. Conceptos previos

### 3.2.1. Conjuntos de vectores o n-uplas de números reales

Definimos los conjuntos de n-uplas o vectores de números reales,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}^2 &= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, \\
 \mathbb{R}^3 &= \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}, \\
 \mathbb{R}^4 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}, \\
 &\vdots \\
 \mathbb{R}^n &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.
 \end{aligned}$$

Por ejemplo, son elementos del conjunto  $\mathbb{R}^2$ , y decimos que pertenecen,  $\in$ , a  $\mathbb{R}^2$ , los siguientes vectores:  $(-7, \pi) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(1, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ .

**Cuestiones**

1. Escribe dos elementos de cada conjunto.
2. Escribe vectores que no pertenezcan a cada conjunto.

**3.2.2. Subconjuntos**

Algunos subconjuntos de los conjuntos anteriores son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}, \\
 S_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}, \\
 S_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 2\}, \\
 S_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}, \\
 S_5 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 x_2 = 0\}.
 \end{aligned}$$

$S_1$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  porque todos sus elementos pertenecen a  $\mathbb{R}^2$ . Por ejemplo, son elementos del conjunto  $S_1$ , y decimos que pertenecen,  $\in$ , a  $S_1$ , los vectores,  $(1, -1) \in S_1$ ,  $(-7, 7) \in S_1$ .

**Cuestiones**

3. Escribe dos elementos de cada conjunto.
4. Escribe vectores que no pertenezcan a cada conjunto.

### 3.2.3. Notaciones

Los elementos o vectores de  $\mathbb{R}^2$  se denotarán como vectores fila o columna, en negrita o con una flecha encima,

$$(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (x_1, x_2), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}, \vec{u}. \quad (3.6)$$

Los elementos o vectores de  $\mathbb{R}^3$  se denotarán como vectores fila o columna, en negrita o con una flecha encima,

$$(x, y, z), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, (x_1, x_2, x_3), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}, \vec{u}. \quad (3.7)$$

Y de la misma manera los vectores de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 4, 5, \dots$ . Para describir un conjunto, sus elementos los escribiremos entre llaves  $\{\}$ .

### Cuestiones

5. Escribe un conjunto que contenga los números pares entre 1 y 10.
6. Escribe en un conjunto los vectores de  $\mathbb{R}^2$ , tales que sus dos componentes son iguales.

## 3.3. Espacio vectorial

Un espacio vectorial es un conjunto de vectores en el que están definidas las operaciones de suma de vectores y producto de un número real por un vector, de forma interna, es decir, al sumar vectores el resultado es un vector del mismo conjunto, y al multiplicar un vector por un número real el resultado es un vector del mismo conjunto, es decir, no nos salimos del conjunto. Una definición más formal es la siguiente.

**Definición 3.1. Espacio vectorial.** Sea  $\mathbb{K}$  el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  o de los números complejos  $\mathbb{C}$ , y  $V$  un conjunto no vacío. Se definen dos operaciones, *Suma*:  $\vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} + \vec{v} \in V$ .

Producto por un elemento de  $\mathbb{K}$ :  $\alpha \in \mathbb{K}, \vec{v} \in V, \alpha\vec{v} \in V$ .

$V$  recibe el nombre de espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  si se satisfacen las siguientes propiedades (a los elementos de  $V$  se les llama vectores, y a los elementos de  $\mathbb{K}$  escalares):

1.  $(V, +)$  es grupo conmutativo, es decir, la operación suma tiene las siguientes propiedades:
  - a) Asociativa:  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .
  - b) Existencia de elemento neutro,  $\vec{0}$ , tal que,  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$  para todo  $\vec{u} \in V$ .
  - c) Existencia de elemento opuesto: para todo  $\vec{u} \in V$  existe  $-\vec{u}$  tal que  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ .
  - d) Conmutativa:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .
2. Distributiva de la suma de vectores por un escalar: para todo escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  y todo par de vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v} \in V$ ,  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ .
3. Distributiva de la suma de escalares por un vector: para todo par de escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , y todo vector  $\vec{u} \in V$ ,  $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ .
4. Distributiva del producto de escalares por un vector: para todo par de escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , y todo vector  $\vec{u} \in V$ ,  $(\alpha \cdot \beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$ .
5. Propiedad del escalar unidad: el escalar unidad  $1 \in \mathbb{K}$  cumple  $1\vec{u} = \vec{u}$ .

$(V, +, \cdot \mathbb{K})$  es un espacio vectorial, es un conjunto con unos elementos y dos operaciones definidas entre los elementos, que cumplen las propiedades anteriores.

### Ejemplos

1.  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$  es un espacio vectorial. Ya definimos las operaciones de suma y producto por un escalar:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z),$$

por ejemplo,

$$\begin{aligned}(11, 2, 3) + (-5, 2, 0) &= (6, 4, 3), \\ -2(1, 2, -1) &= (-2, -4, 2).\end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que se cumplen las propiedades de la definición.

2.  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$  es un espacio vectorial. Las operaciones de suma y producto por un escalar son análogas a las de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y),\end{aligned}$$

por ejemplo,

$$\begin{aligned}(2, 31) + (7, -2) &= (9, 29), \\ 1,5(2, 6) &= (3, 9).\end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que se cumplen las propiedades de la definición.

3.  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$  es un espacio vectorial. Las operaciones de suma y producto por un escalar son análogas a las de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),\end{aligned}$$

por ejemplo,

$$\begin{aligned}(1, 2, \dots, n) + (1, 2, \dots, n) &= (2, 4, \dots, 2n), \\ 2(1, 2, \dots, n) &= (2, 4, \dots, 2n).\end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que se cumplen las propiedades de la definición.

4.  $\mathbb{R}^8$  es un espacio vectorial. Un ejemplo de las operaciones es,

$$\begin{aligned}(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0) + (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) &= (3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2), \\ 10(0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, -1) &= (0, 10, 0, 20, 0, 0, 0, -10).\end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que se cumplen las propiedades de la definición.

**Cuestiones**

7. Escribe dos elementos de cada conjunto espacio vectorial de los ejemplos anteriores.
8. Súmalos, multiplícalos por un número y calcula las correspondientes combinaciones lineales.

**3.3.1. Combinación lineal**

En el problema del flujo de tráfico las soluciones son combinaciones lineales de los vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  y  $\vec{u}_3$ ,

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Por ejemplo, el vector  $(4, -1, 3, 2, 1)$  es combinación lineal de estos vectores,

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

**Ejemplo.** Si  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 2)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1)$ ,  $\vec{v} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = 2(1, 2) + 3(0, 1) = (2, 7)$  es combinación lineal de  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ .

**Definición 3.2. Combinación lineal.** Sean  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ , vectores del espacio vectorial  $V$ . Cualquier vector  $\vec{v}$ , que se pueda escribir de la forma:  $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k$ , donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  son escalares, se llama combinación lineal de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ .

**Cuestiones**

9. Escribe tres vectores de  $\mathbb{R}^7$  y un vector que sea combinación lineal de ellos.

10. ¿Es el vector  $(1, 2, 3, 4, 5)$  combinación lineal de los vectores  $(1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 1, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 0, 1, 1)$  y  $(0, 0, 0, 0, 1)$ ?

### 3.3.2. Espacio generado

#### Ejemplos

1. En el problema del flujo de tráfico, el conjunto de soluciones del sistema está formado por todas las combinaciones lineales posibles de los tres vectores  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  y  $\vec{u}_3$ ,

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Se dice que el conjunto de soluciones es el espacio generado por estos tres vectores:

$$S_1 = \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.  $V_1 = \mathbb{R}^2$ ,  $H_1 = \mathcal{L}\{(1, 1)\} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 : \vec{v} = \alpha(1, 1), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) = (\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ .
3.  $V_2 = \mathbb{R}^3$ ,  $H_2 = \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) = (\alpha, \beta, 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .

**Definición 3.3. Espacio generado por un conjunto de vectores.** Sean  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ ,  $k$  vectores en un espacio vectorial  $V$ . El espacio generado por  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ , que denotamos  $\mathcal{L}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ , es el conjunto de combinaciones lineales de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ , es

decir,

$$\mathcal{L}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} = \{\vec{v} \in V : \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

**Teorema 3.4.** *El espacio generado por un conjunto de vectores es un espacio vectorial.*

### Cuestiones

11. Escribe dos elementos de cada conjunto espacio generado de los ejemplos anteriores,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $S_1$ .
12. Escribe vectores que no pertenezcan a cada espacio generado de los ejemplos anteriores,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $S_1$ .
13. Escribe un espacio generado por los vectores que quieras.

### 3.3.3. Subespacio vectorial

Los espacios generados de los ejemplos anteriores,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $S_1$ , son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ , y  $\mathbb{R}^5$ , respectivamente, porque son en sí mismos espacios vectoriales. Son subconjuntos de dichos espacios vectoriales, y son a su vez espacios vectoriales.

**Definición 3.5. Subespacio vectorial.** *Sea  $H$  un subconjunto de un espacio vectorial  $V$ , si  $H$  es en sí mismo espacio vectorial con las operaciones de suma y producto definidas en  $V$ , entonces  $H$  es subespacio vectorial.*

**Teorema 3.6.** *Un subconjunto,  $H$ , del espacio vectorial  $V$ , es un subespacio vectorial de  $V$ , si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

1. Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v} \in H$ , entonces  $\vec{u} + \vec{v} \in H$ .
2. Si  $\vec{u} \in H$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces  $\alpha \vec{u} \in H$ .

*Es decir, las operaciones son internas al subconjunto.*

**Ejemplos**

1.  $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Veamos si la suma de vectores de  $W_1$ , y el producto de un vector de  $W_1$  por un escalar, son operaciones internas:

- a) Tomamos dos vectores cualesquiera de  $W_1$ ,  $(0, y_1), (0, y_2) \in W_1$ , los sumamos:  $(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2) \in W_1$ , el vector suma está en  $W_1$ .
- b) Tomamos un vector cualquiera de  $W_1$ ,  $(0, y) \in W_1$ , y un escalar cualquiera  $\alpha \in \mathbb{R}$ , multiplicamos el escalar por el vector:  $\alpha(0, y) = (0, \alpha y) \in W_1$ , el vector está en  $W_1$ .

Se cumplen las dos propiedades. Podemos definir las operaciones en  $W_1$ , entonces  $W_1$  es un espacio vectorial y subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ .

2.  $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ . Veamos si la suma y el producto por un escalar son operaciones internas:

Tomamos dos vectores cualesquiera de  $W_2$ ,  $(1, y_1, z_1), (1, y_2, z_2) \in W_2$ , los sumamos  $(1, y_1, z_1) + (1, y_2, z_2) = (2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \notin W_2$ , el vector suma no está en  $W_2$ . No es necesario comprobar la segunda condición, ya podemos decir que la suma no es operación interna de  $W_2$ , entonces  $W_2$  no es un espacio vectorial y no es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .

3.  $H_1 = \mathcal{L}\{(1, 1)\} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 : \vec{v} = \alpha(1, 1), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) = (\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$  es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ :

- a) Tomamos dos vectores cualesquiera de  $H_1$ ,  $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta) \in H_1$ , los sumamos:  $(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \in H_1$ , el vector suma está en  $H_1$ ,
- b) Tomamos un vector cualquiera de  $H_1$ ,  $(\alpha, \alpha) \in H_1$ , y un escalar cualquiera  $\gamma \in \mathbb{R}$ , multiplicamos el escalar por el vector:  $\gamma(\alpha, \alpha) = (\gamma\alpha, \gamma\alpha) \in H_1$ , el vector está en  $H_1$ .

Se cumplen las dos propiedades. Podemos definir las operaciones en  $H_1$ , entonces  $H_1$  es un espacio vectorial y subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ .

**Cuestiones**

14. El conjunto  $C = \{(1, 1), (1, -1), (0, 0), (-1, 1)\}$ , ¿es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ ?
15. ¿Cuántos elementos tienen  $C$ ,  $W_1$  y  $W_2$ , que acabamos de definir?

**3.3.4. Dependencia e independencia lineal**

Dados los vectores  $(1, 1), (1, 0), (2, 3)$ , podemos escribir el vector  $(2, 3)$  como combinación lineal de los otros dos:  $(2, 3) = 3(1, 1) - (1, 0)$ . Por este motivo, se dice que los tres vectores son linealmente dependientes.

Dados los vectores  $(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)$ , no podemos escribir ninguno de los tres vectores como combinación lineal de los otros dos. Por este motivo, se dice que los tres vectores son linealmente independientes.

**Definición 3.7. Vectores linealmente dependientes o independientes.** Sean  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  ( $\vec{v}_i \neq 0, i = 1, \dots, n$ ),  $n$  vectores de un espacio vectorial  $V$ . Se dice que los vectores son linealmente dependientes si se puede escribir alguno de ellos como combinación lineal del resto, es decir, existe  $\vec{v}_j$  y escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , no todos cero, tales que  $\vec{v}_j = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{j-1} \vec{v}_{j-1} + \alpha_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ . Si los vectores no son linealmente dependientes, entonces son linealmente independientes, es decir, no se puede escribir ninguno de ellos como combinación lineal del resto.

**Definición 3.8. Vectores linealmente dependientes o independientes.** Sean  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  ( $\vec{v}_i \neq 0, i = 1, \dots, n$ ),  $n$  vectores de un espacio vectorial  $V$ . Se dice que los vectores son linealmente dependientes si existen  $n$  escalares:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , no todos cero, tales que  $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$ . Si los vectores no son linealmente dependientes, entonces son linealmente independientes, es decir,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  son linealmente independientes si  $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$  sólo se cumple para  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Ejemplos**

1.  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (2, 0) \in V$ . Se puede escribir  $(2, 0)$  como combinación

lineal de  $(1, 0)$ :  $(2, 0) = 2(1, 0)$ , entonces son linealmente dependientes. O, lo podemos comprobar de otra forma, planteamos la ecuación  $\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(2, 0) = (0, 0)$ . Igualamos componentes  $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ ,  $0 + 0 = 0$ , la ecuación tiene infinitas soluciones, por ejemplo, una de ellas  $\alpha_1 = -2$ ,  $\alpha_2 = 1$ , entonces existen valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , distintos de cero, que lo cumplen, entonces son linealmente dependientes.

2.  $\vec{w}_1 = (-1, 0)$ ,  $\vec{w}_2 = (0, 2)$ . No podemos escribir una combinación lineal del otro, si lo hiciéramos  $(-1, 0) = \alpha(0, 2)$ , entonces, igualando componentes,  $-1 = 0$ , lo cual no puede ser, por lo tanto, son linealmente independientes. Si planteamos la ecuación  $\alpha_1(-1, 0) + \alpha_2(0, 2) = (0, 0)$ . Igualamos componentes  $-\alpha_1 = 0$ ,  $2\alpha_2 = 0$ , entonces  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  es la única solución, entonces son linealmente independientes.

### Formas prácticas de estudiar la dependencia lineal

1. Dos vectores son linealmente dependientes si uno de ellos es igual a un escalar por el otro,  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son linealmente dependientes si existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_2$ .
- 2.

**Teorema 3.9. Dependencia lineal en  $\mathbb{R}^n$ .** Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ . Entonces  $\det(A) \neq 0$  si y sólo si las columnas (y las filas de  $A$ ) son linealmente independientes.

*Si tenemos  $m$  vectores de  $n$  componentes, con  $m < n$  y los colocamos por filas en una matriz  $m \times n$   $A$ , si  $\text{rg}(A) = k$  entonces  $k$  de los  $m$  vectores son linealmente independientes.*

### Ejemplos

1.  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (2, 0)$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 0) = (1/2)\vec{v}_2 = (1/2)(2, 0)$ , entonces son linealmente dependientes.
2.  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ . Si los colocamos en una matriz

$A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se cumple  $\det(A) = 1$ , entonces, los vectores fila y los vectores columna de  $A$  son linealmente independientes.

3.  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (3, 1, 0, 1)$ . Los colocamos en una matriz  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tiene un menor  $2 \times 2$  distinto de cero, y no tienen ningún menor  $3 \times 3$  distinto de cero, entonces  $\text{rg}(A) = 2$ , los tres vectores son linealmente dependientes, y sólo dos de los tres vectores son linealmente independientes,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  son linealmente independientes,  $\vec{v}_1, \vec{v}_3$  son linealmente independientes, y  $\vec{v}_2, \vec{v}_3$  son linealmente independientes.

4. Las soluciones del problema de flujo de tráfico son combinaciones lineales de los vectores,

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Podemos colocar los vectores en filas o en columnas,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

estas matrices tienen un menor  $3 \times 3$  distinto de cero,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

entonces el rango de las matrices es 3, y los tres vectores son linealmente independientes.

### Cuestiones

16. En el ejemplo anterior, ¿los vectores fila de la matriz  $3 \times 5$  son linealmente dependientes o independientes?
17. ¿Y los vectores columna?

### 3.3.5. Base, dimensión y coordenadas

Se cumple que todo vector  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  se puede escribir como combinación lineal de los vectores  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ . Por eso se dice que el conjunto de vectores  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  son un sistema de generadores de  $\mathbb{R}^2$ . Además son linealmente independientes. Por estos dos motivos forman una base de  $\mathbb{R}^2$ . Todas las bases de  $\mathbb{R}^2$  tienen el mismo número de elementos, en este caso 2. A este número de elementos de las bases se le llama dimensión del espacio vectorial,  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ .

**Definición 3.10. Sistema de generadores.** Se dice que los vectores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ , en un espacio vectorial  $V$ , generan  $V$ , si todo vector  $\vec{v}$  de  $V$  se puede expresar como combinación lineal de ellos. Dicho de otra manera: para todo  $\vec{v} \in V$ , existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , tales que,  $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n$ . Se dice que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  son sistema de generadores de  $V$ .

**Ejemplo.**  $\{(1, 0), (0, 2)\}$  son sistema de generadores de  $\mathbb{R}^2$ , porque, para todo  $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  existen  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , tales que  $(x, y) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 2) = (\alpha_1, 2\alpha_2)$ ,  $x = \alpha_1, y = 2\alpha_2, \alpha_2 = y/2$ .

**Definición 3.11. Base.** Un conjunto de vectores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  es una base de un espacio vectorial  $V$  si:

1.  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  son linealmente independientes.
2.  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  son sistema de generadores de  $V$ .

**Definición 3.12. Base canónica.** En  $\mathbb{R}^2$ :  $B_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$ .

En  $\mathbb{R}^3$ :  $B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .

En  $\mathbb{R}^n$ :  $B_c = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$ , formada por  $n$  vectores.

**Ejemplo.** En  $\mathbb{R}^2$ ,  $B = \{(1, 0), (0, 2)\}$  es base porque los vectores son linealmente independientes y sistema de generadores.

**Teorema 3.13.** Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

**Definición 3.14. Dimensión.** Si el espacio vectorial  $V$  tiene una base finita, entonces la dimensión de  $V$  es el número de vectores que tiene una base de  $V$ .  $V$  es un espacio de dimensión infinita si no tiene una base finita. Si  $V = \{\vec{0}\}$ ,  $V$  tiene dimensión 0.

**Ejemplo.**  $\mathbb{R}^3$  es de dimensión 3, todas sus bases tienen 3 vectores.

**Definición 3.15. Coordenadas.** Si  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  es una base de  $V$  y  $\vec{v} \in V$ , existe un único conjunto de escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , tales que  $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ . Estos escalares son las coordenadas de  $\vec{v}$  en  $\mathcal{B}$ .  $\vec{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$ .

**Ejemplo.** En la base de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 2)\}$ , las coordenadas del vector  $(2, 4)$  son  $(2, 2)_{\mathcal{B}}$ . Porque  $(2, 4) = 2(1, 0) + 2(0, 2)$ .

### Propiedades

1. Si  $H$  es un subespacio vectorial de  $V$  (de dimensión finita), se cumple  $\dim(H) \leq \dim(V)$ .
2. Si  $\dim(V) = n$  y  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  son sistema de generadores, entonces  $n \leq p$ .
3. Si  $\dim(V) = n$  y  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  son linealmente independientes, entonces  $k \leq n$ .
4. Si  $\dim(V) = n$  y  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  son linealmente independientes, entonces son base.

5. Si  $H$  es un subespacio vectorial de  $V$  de dimensión  $p$ , y los vectores de  $H$ ,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  son linealmente independientes, entonces, son una base de  $H$ .

### Ejemplos

1.  $H_1 = \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ , está generado por dos vectores linealmente independientes, entonces forman una base de  $H_1$ , entonces  $\dim(H_1) = 2 < \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ .
2.  $\{(1, 0)\}$  no puede ser sistema de generadores de  $\mathbb{R}^2$ , tenemos que tener el mismo número o más vectores que la dimensión, para ser sistema de generadores.
3.  $\{(1, 0), (0, 2), (1, 3)\}$  no pueden ser linealmente independientes en  $\mathbb{R}^2$ , tenemos que tener el mismo número o menos vectores que la dimensión para ser linealmente independientes.
4.  $\{(1, 0), (0, 2)\}$  son linealmente independientes en  $\mathbb{R}^2$  y  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ , entonces son base, no es necesario demostrar que son sistema de generadores.
5. El conjunto de soluciones  $S_1$ , está formado por todas las combinaciones lineales de estos tres vectores. El conjunto de soluciones es el espacio generado por estos tres vectores,

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \\
 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_3 - x_4 - x_5 = 0\}. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Los tres vectores generan el espacio de soluciones y son linealmente independien-

tes, entonces forman una base de  $S_1$ ,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como la base está formada por tres vectores, la dimensión de  $S_1$  es 3,  $\dim(S_1) = 3$ .

6.  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $W = \mathcal{L}\{(1, -1, 1, 0), (1, 1, -1, 0), (0, -2, 2, 0), (3, -1, 1, 0)\}$ . Buscamos los vectores linealmente independientes de estos,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.13)$$

Los vectores son linealmente dependientes. Vamos a calcular el rango de la matriz mediante eliminación gaussiana,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_2]{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(A) = 2$ . Sólo hay dos vectores linealmente independientes, podemos elegir cualesquiera dos linealmente independientes, y expresar  $W$  como el espacio generado por esos dos vectores,  $W = \mathcal{L}\{(1, -1, 1, 0), (1, 1, -1, 0)\}$ . Una base estará formada por esos dos vectores, por ejemplo.  $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1, 0), (1, 1, -1, 0)\}$  es una base de  $W$ , y  $\dim(W) = 2$ .

### Cuestiones

18. Escribe la base canónica de  $\mathbb{R}^4$ .
19. Escribe una base de  $\mathbb{R}^4$  que no sea la canónica.

## 3.4. Ecuaciones de subespacios

### 3.4.1. Ecuaciones paramétricas de subespacios

**Definición 3.16. Ecuaciones paramétricas.** Sea  $V$  un espacio vectorial, y  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ , una base de  $V$ . Sea  $W$  el subespacio generado por  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ ,  $W = \mathcal{L}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ , donde,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{v}_p = \begin{pmatrix} v_{1p} \\ v_{2p} \\ \vdots \\ v_{np} \end{pmatrix}.$$

Si  $\vec{x} \in W$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ , entonces  $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p$  son las ecuaciones paramétricas de  $W$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_p \begin{pmatrix} v_{1p} \\ v_{2p} \\ \vdots \\ v_{np} \end{pmatrix},$$

y operando cada coordenada, las ecuaciones paramétricas se pueden escribir también de la forma,

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 v_{11} + \alpha_2 v_{12} + \dots + \alpha_p v_{1p}, \\ x_2 &= \alpha_1 v_{21} + \alpha_2 v_{22} + \dots + \alpha_p v_{2p}, \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_1 v_{n1} + \alpha_2 v_{n2} + \dots + \alpha_p v_{np}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Las ecuaciones son propias si  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$  son linealmente independientes.

**Ejemplo.** Consideramos el espacio vectorial  $V = \mathbb{R}^4$ , y  $W$  el subespacio generado por  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ,  $W = \mathcal{L}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ , donde,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $\vec{x} \in W$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ , entonces  $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$  son las ecuaciones paramétricas de  $W$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

son las ecuaciones paramétricas de  $W$ . Operando cada coordenada, las ecuaciones paramétricas se pueden escribir también de la forma,

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \alpha_2, \\ x_2 &= -\alpha_1 + \alpha_2, \\ x_3 &= \alpha_1 - \alpha_2, \\ x_4 &= 0. \end{aligned}$$

### Cuestiones

20. Escribe dos vectores del subespacio  $W$  que acabamos de definir.
21. Escribe una base de  $W$ . ¿Cuál es la dimensión de  $W$ ?

### 3.4.2. Ecuaciones cartesianas o implícitas

**Definición 3.17. Ecuaciones cartesianas o implícitas.** Sea  $V$  un espacio vectorial, y  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ , una base de  $V$ . Sea  $W$  un subespacio de  $V$ . Todo vector  $\vec{x}$  de  $W$ ,

tiene coordenadas en  $\mathcal{B}$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Las ecuaciones cartesianas o implícitas de  $W$  son ecuaciones que relacionan las coordenadas entre sí, sin parámetros, de la forma,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Las ecuaciones son propias si son linealmente independientes.

**Propiedad.** Sea  $V$  un espacio vectorial, y  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ , una base de  $V$ . Sea  $W$  un subespacio de  $V$ , y  $\mathcal{B}_W = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\}$ , una base de  $W$ . Se cumple:

$\dim(V) = \dim(W) + \text{número de ecuaciones implícitas propias}$ ,

es decir,

$n = q + \text{número de ecuaciones implícitas de } W$ .

La demostración de esta propiedad es inmediata a la vista del rango de la matriz del sistema de ecuaciones cartesianas de  $W$ .

**Ejemplo.**  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$ , tiene por ecuación implícita,  $x + y = 0$ .

El espacio vectorial, del que  $H$  es subespacio, es,  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ . El número de ecuaciones implícitas es 1. Entonces,  $\dim(H) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{número de ecuaciones implícitas} = 3 - 1 = 2$ , es la dimensión de  $H$ .

Otra forma de estudiarlo, tenemos una única ecuación cartesiana, y tres incógnitas. Escribimos la ecuación de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0. \tag{3.16}$$

La matriz del sistema es  $A = (1 \ 1 \ 0)$ . El rango de la matriz del sistema es 1. El número de incógnitas es 3. Al ser homogéneo el sistema, es compatible, como  $\text{rg}(A) = 1 < 3$  (número de incógnitas), tenemos dos parámetros libres, que nos da la dimensión de  $H$ .

## Cuestiones

22. Escribe dos vectores del subespacio  $H$  que acabamos de definir.

23. ¿El vector  $(0, 0) \in H$ ?

### 3.4.3. Paso de paramétricas a cartesianas

Para pasar de ecuaciones paramétricas a implícitas, hay que eliminar los parámetros en las ecuaciones. Una forma de hacerlo es mediante eliminación gaussiana.

**Ejemplo.** En un ejemplo anterior, el subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^4$ , tiene ecuaciones paramétricas,

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \alpha_2, \\ x_2 &= -\alpha_1 + \alpha_2, \\ x_3 &= \alpha_1 - \alpha_2, \\ x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Lo podemos escribir en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Resolvemos en  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  mediante eliminación gaussiana,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3-F_1}]{\substack{F_2+F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_1+x_2 \\ 0 & -2 & x_3-x_1 \\ 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & x_2+x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

El sistema equivalente es,

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= x_1, \\ \alpha_2 &= x_1 + x_2, \\ 0 &= x_2 + x_3, \\ 0 &= x_4. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Las ecuaciones cartesianas o implícitas de  $W$  son las que no tienen parámetros al final del procedimiento,  $x_2 + x_3 = 0, x_4 = 0$ .

Se cumple,  $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(W) + \text{número de ecuaciones cartesianas} = 2 + 2 = 4$ .

**Cuestiones**

24. Dado el subespacio vectorial  $W = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1), (11, 12, 0, -15, 125, \pi, 0)\}$ , ¿cuántas ecuaciones implícitas linealmente independientes tiene este subespacio?
25. Si  $H$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^{25}$  que tiene 15 ecuaciones cartesianas linealmente independientes, ¿cuál es su dimensión?

**3.4.4. Paso de cartesianas a paramétricas**

Para pasar de cartesianas a paramétricas, podemos resolver el sistema mediante eliminación gaussiana, por ejemplo.

**Ejemplo.** Consideramos el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  anterior,  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$ , vimos que  $\dim(H) = 2$ , entonces las ecuaciones paramétricas tienen 2 parámetros libres. Como  $z$  no aparece en la ecuación, queda libre, o sea, que sería uno de los parámetros libres, y el otro lo elegimos entre  $x$  e  $y$ , si elegimos  $y$ ,  $\alpha_1 = y$ ,  $\alpha_2 = z$ , y obtenemos las ecuaciones paramétricas,

$$\begin{aligned}x &= -\alpha_1, \\y &= \alpha_1, \\z &= \alpha_2,\end{aligned}\tag{3.21}$$

escritas en forma vectorial son,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\tag{3.22}$$

Una base de  $H$  está formada por  $\mathcal{B}_H = \{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .

**Cuestiones**

26. Dado el subespacio vectorial  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, t = 0\}$ , ¿cuál es su dimensión?
27. Si  $H$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^{1000}$  que tiene 150 ecuaciones cartesianas linealmente independientes, ¿cuál es su dimensión?

### 3.5. Motivación revisitada

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 5 incógnitas,

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\x_3 - x_4 - x_5 &= 0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Estas son las ecuaciones cartesianas o implícitas de un subespacio vectorial, que llamamos  $S_1$ , del espacio vectorial  $V = \mathbb{R}^5$ . Podemos escribir el sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\tag{3.24}$$

El rango de la matriz del sistema es 2, al ser un sistema homogéneo, es compatible indeterminado, con 2 ecuaciones y 5 incógnitas, por lo que tenemos 3 parámetros libres. Tomamos como parámetros libres algunas de las variables, por ejemplo,  $x_2 = \alpha$ ,  $x_3 = \beta$ ,  $x_4 = \gamma$ , y despejamos las variables,

$$\begin{aligned}x_1 &= -\alpha + \beta, \\x_2 &= \alpha, \\x_3 &= \beta, \\x_4 &= \gamma, \\x_5 &= \beta - \gamma,\end{aligned}\tag{3.25}$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Lo escribimos en forma vectorial,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \beta - \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\tag{3.26}$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Estas son ecuaciones paramétricas de  $S_1$ .

Las soluciones son combinaciones lineales de los vectores,

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

El conjunto de las soluciones está formado por todas las combinaciones lineales de estos tres vectores. Se dice que el conjunto de soluciones es el espacio generado por estos tres vectores,

$$S_1 = \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Los tres vectores son soluciones y son linealmente independientes, por lo que forman una base de  $S_1$ ,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.28)$$

Respondemos a las cuestiones que nos faltaba por responder en el apartado de motivación.

1. Escribe otras dos soluciones particulares de este problema. Si consideramos  $\alpha = 10, \beta = 50, \gamma = 10$ , tenemos una solución  $(40, 10, 50, 10, 40)$ , es decir, han llegado de la ronda a la calle Inmaculada 40 vehículos, y por la calle Bachiller 10; en el tramo después del cruce Inmaculada-Bachiller han circulado 50, de estos, 10

se han ido por Santa Teresa y 40 han seguido por Inmaculada. Si consideramos  $\alpha = 20$ ,  $\beta = 60$ ,  $\gamma = 10$ , tenemos una solución  $(40, 20, 60, 10, 50)$ , es decir, han llegado de la ronda a la calle Inmaculada 40 vehículos, y por la calle Bachiller 20; en el tramo después del cruce Inmaculada-Bachiller han circulado 60, de estos, 10 se han ido por Santa Teresa y 50 han seguido por Inmaculada.

2. ¿Qué ocurre si tomamos  $\alpha = 20$ ,  $\beta = 10$  y  $\gamma = 5$ ? En este caso, la solución es  $(-10, 20, 10, 5, 5)$ . Buscamos sólo soluciones positivas, esos valores de los parámetros no nos interesan.

3. Escribe la solución en forma vectorial tomando como parámetros libres  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_4 = \gamma$ .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \\ \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

4. Hacemos 9 grupos, de manera que cada grupo considere unos parámetros libres distintos, y escribimos los distintos conjuntos de soluciones como combinaciones lineales de vectores. Obtenemos 9 combinaciones lineales de vectores distintas.
5. ¿Son correctas todas las soluciones? Todas las soluciones son correctas, porque los distintos conjuntos de 3 vectores que se obtienen son distintas bases del subespacio  $S_1$ , ya que son linealmente independientes y pertenecen al subespacio.
6. ¿Qué tienen en común los distintos vectores que aparecen en las soluciones? Todos son vectores del subespacio, es decir, cumplen las ecuaciones del subespacio.
7. ¿Son iguales o distintos los conjuntos de soluciones? Son todos iguales, porque todas las bases generan el mismo subespacio  $S_1$ . Es decir, cualquier vector de  $S_1$  se puede escribir como combinación lineal de los vectores de cada base que hemos obtenido, teniendo distintas coordenadas en cada base.

8. ¿Qué ocurre si tomamos como parámetros libres  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_3 = \gamma$ ? Esta combinación no se puede considerar porque no serían parámetros libres, porque se tiene que cumplir la ecuación  $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ . Es contrario al concepto de parámetro libre, que puede tomar cualquier valor.
9. ¿Qué ocurre si tomamos como parámetros libres  $x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = \beta$ ,  $x_5 = \gamma$ ? Lo mismo que en el caso anterior. Esta combinación no se puede considerar porque no serían parámetros libres, porque se tiene que cumplir la ecuación  $x_3 - x_4 - x_5 = 0$ . Es contrario al concepto de parámetro libre, que puede tomar cualquier valor.
10. Aparecen dos operaciones en las expresiones anteriores, ¿cuáles son? Aparecen la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector. Estas son las dos operaciones que están definidas en los espacios vectoriales.

# Capítulo 4

## Espacios vectoriales euclídeos

### 4.1. Motivación

#### Medidas

Vamos a considerar dos situaciones distintas sobre el problema planteado al inicio del capítulo 2.

1. Un fabricante utiliza tres ingredientes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , en la elaboración de un cierto producto alimenticio. Sean  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , las cantidades respectivas en gramos de  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , que componen el producto. Un gramo de cada uno de los ingredientes proporciona vitaminas  $A$ ,  $B$  y  $C$ , en las cantidades en miligramos que se expresan en la siguiente tabla.

| mg/g   | X | Y | Z |
|--------|---|---|---|
| vit. A | 2 | 1 | 1 |
| vit. B | 1 | 2 | 1 |
| vit. C | 1 | 1 | 2 |

Calcula qué cantidad de ingrediente es necesaria para que la composición del producto conste de 360 *mg* de vitamina A, 510 *mg* de vitamina B y 370 *mg* de

vitamina  $C$ . Planteamos el problema, se tiene que cumplir,

$$\begin{aligned}x + y + z &= 360, \\x + 2y + z &= 510, \\x + y + 2z &= 370.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Resolvemos este sistema, es compatible determinado, tiene una única solución,  $x = 50$  g,  $y = 200$  g,  $z = 60$  g.

2. Si queremos que el producto conste de una cantidad  $t$  de vitaminas B y C, y  $3/4t$  de A, ¿qué cantidad de cada ingrediente es necesaria? Planteamos el problema, se tiene que cumplir,

$$\begin{aligned}2x + y + z &= 3t/4, \\x + 2y + z &= t, \\x + y + 2z &= t.\end{aligned}\tag{4.2}$$

En este caso tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas, la matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3/4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\tag{4.3}$$

se cumple  $rg(A) = 3$ , tiene rango máximo, por lo que  $rg(A) = 3 < 4 =$  número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones, y queda un parámetro libre. Realizamos una eliminación gaussiana,

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{2F_2 - F_1} \\ \xrightarrow{2F_3 - F_1} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3/4 \\ 0 & 3 & 1 & -5/4 \\ 0 & 1 & 3 & -5/4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3/4 \\ 0 & 3 & 1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 8 & -5/2 \end{pmatrix}.\tag{4.4}$$

El sistema equivalente es,

$$\begin{aligned}2x + y + z - 3t/4 &= 0, \\3y + z - 5t/4 &= 0, \\8z - 5t/2 &= 0,\end{aligned}\tag{4.5}$$

elegimos el parámetro  $t = \alpha$ , y en forma vectorial podemos escribir la solución,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1/16 \\ 5/16 \\ 5/16 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

### Cuestiones

1. En la primera situación, si tenemos dos versiones de este producto que tienen 280 mg de vitamina A, 400 mg de B y 300 mg de C, una de ellas, y la otra, 310 mg de A, 410 mg de B, y 320 mg de C. ¿Cuál de estos dos productos tiene una cantidad de vitaminas más parecida a la del problema inicial? ¿cuál es mejor?
2. En la segunda situación, si tenemos en un producto las cantidades,  $x = 150$  g,  $y = 140$  g,  $z = 15$  g,  $t = 200$  mg, y en otro producto,  $x = 170$  g,  $y = 125$  g,  $z = 15$  g,  $t = 200$  mg, ¿cuál de estos dos productos tiene unas cantidades más parecidas a las proporciones de vitaminas de este caso?

## 4.2. Producto escalar. Espacio vectorial euclídeo

Un espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial en el que se introduce una forma de medir vectores, distancias entre vectores y distancias entre vectores y subespacios. La forma de medir vectores es mediante la norma del vector. La forma de medir distancias entre vectores es mediante la norma del vector diferencia de los dos vectores. La forma de medir la distancias entre un vector y un subespacio es la norma de la diferencia entre el vector y la proyección ortogonal del vector en el subespacio. Esta norma se define a través del producto escalar de vectores. Más adelante definiremos la proyección ortogonal.

Vamos a introducir el concepto con un ejemplo. Dado el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ , definimos el producto escalar: dados dos vectores  $\vec{u} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{v} = (y_1, y_2)$ , el producto escalar de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se denota  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , y se define:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ . Dados dos vectores reales,

su producto escalar es un número real. A este producto escalar se le llama producto escalar usual de  $\mathbb{R}^2$ , porque hay otros posibles, pero este es el más utilizado.

Por ejemplo,  $\vec{u} = (2, 3)$ ,  $\vec{v} = (5, 7)$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 31$ .

Vemos a continuación una definición más general y abstracta de producto escalar.

**Definición 4.1. Producto escalar.** *Dado un espacio vectorial real  $V$ , un producto escalar definido en  $V$  asigna a cada par de vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  del espacio vectorial un número real, que denotaremos  $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$ , que cumple unas propiedades que se detallan a continuación.*

Para todo  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ :

1.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$  si y sólo si  $\vec{u} = \vec{0}$ .
2.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .
3.  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ .
4.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .
5.  $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$ .

### Ejemplo

En el ejemplo anterior,  $V = \mathbb{R}^2$ , dados los vectores  $\vec{u} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{v} = (y_1, y_2)$ ,  $\vec{w} = (z_1, z_2)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , comprobamos que se cumplen las propiedades,

1.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = x_1^2 + x_2^2 = 0$  si y sólo si  $x_1 = x_2 = 0$ , es decir,  $\vec{u} = (0, 0) = \vec{0}$ .
2.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (x_1, x_2) \cdot (y_1 + z_1, y_2 + z_2) = x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1z_1 + x_2z_2 = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .
3.  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \cdot (z_1, z_2) = (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 = x_1z_1 + x_2z_2 + y_1z_1 + y_2z_2 = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ .
4.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .
5.  $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\alpha x_1, \alpha x_2) \cdot (y_1, y_2) = \alpha x_1y_1 + \alpha x_2y_2 = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$ .

**Definición 4.2. Espacio vectorial euclídeo.** *Un espacio vectorial en el que se ha definido un producto escalar se llama espacio vectorial euclídeo.*

### Ejemplos

1.  $V = \mathbb{R}^2$  con el producto escalar que hemos definido en el ejemplo anterior es un espacio vectorial euclídeo.
2. Consideramos el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^3$ .

Si  $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$  y  $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$ , el producto escalar de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ .

Por ejemplo, si  $\vec{u} = (1, 0, -1)$  y  $\vec{v} = (2, 3, 4)$ , el producto escalar de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = -2$ . Si consideramos este producto escalar en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  es un espacio vectorial euclídeo.

3. El producto escalar usual en  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , el producto escalar de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ .

Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^7$ , si  $\vec{u} = (1, 0, -1, 1, 0, -1, 0)$  y  $\vec{v} = (2, 3, 1/2, 1, 1, 1, 1)$ , el producto escalar de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 1/2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 3/2$ .

Si consideramos este producto escalar en  $\mathbb{R}^7$ ,  $\mathbb{R}^7$  es un espacio vectorial euclídeo.

**Definición 4.3. Norma.** *Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo, definimos la norma de un vector  $\vec{u}$ , denotada por  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ .*

### Ejemplos

1. En  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ;  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ .  
 $\vec{u} = (1, 3)$ ;  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ .
2. En  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ;  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ ,  
 $\vec{u} = (2, 1, 5)$ ;  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30}$ .

**Definición 4.4. Distancia.** La distancia entre dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es la norma del vector diferencia,  $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ .

### Ejemplo

Queremos calcular la distancia entre los vectores,  $\vec{u} = (1, 3)$  y  $\vec{v} = (1, 1)$ ,  $d((1, 3), (1, 1)) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|(1, 3) - (1, 1)\| = \|(0, 2)\| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$ .

El producto escalar introduce una forma de medir vectores y distancias.

### Cuestiones

1. Si la composición óptima de cierto producto es  $(5, 4, 3, 3)$ , y contamos con productos con composiciones  $(6, 5, 3, 2)$  y  $(7, 4, 3, 3)$ , ¿cuál de ellos es mejor?
2. ¿Que distancia hay entre los vectores/puntos  $(1, 1, 1)$  y  $(0, 0, 0)$ ?

## 4.3. Ortogonalidad

Queremos poder calcular también la distancia entre un vector y un subespacio de vectores. Para ello, necesitamos el concepto de ortogonalidad.

**Definición 4.5. Vectores ortogonales.** Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo, se dice que los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales ( $\vec{u} \perp \vec{v}$ ) si su producto escalar es cero,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

### Ejemplo

Los vectores  $(-3, 2)$  y  $(2, 3)$  son ortogonales, porque  $(-3, 2) \cdot (2, 3) = (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 0$ .

Se puede ver en la figura 4.1 que son perpendiculares.

Los vectores  $(0, 5)$  y  $(3, 3)$  no son ortogonales, porque  $(0, 5) \cdot (3, 3) = 0 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 15 \neq 0$ .

**Definición 4.6. Bases ortogonales en  $\mathbb{R}^n$ .** Si  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  es una base de  $\mathbb{R}^n$ , se dice que es ortogonal si sus vectores son ortogonales dos a dos, es decir, si  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_k = 0$  si  $i \neq k$ .

### Ejemplos

1. Base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , en notación física,  $\mathcal{B}_c = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , es ortogonal, porque si  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , sus productos escalares cumplen,  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$ ,  $\vec{i} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ ,  $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ .

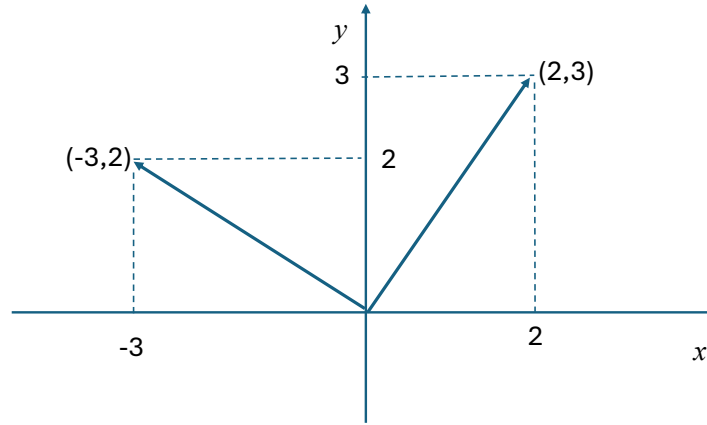


Figura 4.1: Vectores ortogonales.

2.  $\mathcal{B}_1 = \{(2, 0), (0, 1)\}$ ;  $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$  son bases ortogonales de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 4.7. Bases ortonormales en  $\mathbb{R}^n$ .** Si  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  es una base de  $\mathbb{R}^n$ , se dice que es ortonormal si es ortogonal y sus vectores son de norma 1 (unitarios), es decir,

1. sus vectores son ortogonales dos a dos,  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_k = 0$  si  $i \neq k$ .
2. sus vectores son unitarios,  $\|\vec{u}_i\| = 1, i = 1, 2, \dots, n$ .

### Ejemplos

1. Base canónica de  $\mathbb{R}^3$  en notación física,  $\mathcal{B}_c = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , vimos que son ortogonales, comprobamos ahora que son unitarios,  $\|\vec{i}\|^2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$ ,  $\|\vec{j}\|^2 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$ ,  $\|\vec{k}\|^2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$ , entonces,  $\mathcal{B}_c$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .

2.  $\mathcal{B}_2 = \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ , porque

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\left\| \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\| = \left\| \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\| = 1.$$

**Cuestiones**

3. Si los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales a  $\vec{w}$ , demuestra que  $\vec{u} + \vec{v}$  es ortogonal a  $\vec{w}$ .
4. Si los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales, y  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ , ¿son ortogonales  $\vec{u}$  y  $\alpha\vec{v}$ ?

**4.3.1. Cálculo de una base ortonormal**

Vamos a ver dos formas de calcular una base ortonormal de un subespacio. Una primera planteando las condiciones sucesivas de ortogonalidad y normalidad, y una segunda con el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.

**Condiciones sucesivas de ortogonalidad**

Vamos a ilustrarlo con un ejemplo. Queremos construir una base ortonormal del conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^3$  situados en el plano  $H$ :

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}.$$

Este subespacio tiene una única ecuación implícita, como es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ , entonces es de dimensión 2.

Un vector de este subespacio es  $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ .

Buscamos otro vector  $(x, y, z)$  de  $H$ , que sea ortogonal a  $\vec{v}_1$ , tiene que cumplir:

$x + y + z = 0$ , que es la condición de pertenecer a  $H$ , y

$(x, y, z) \cdot (1, -1, 0) = x - y = 0$ , que es la condición de ser ortogonal a  $\vec{v}_1$ .

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, queda un parámetro libre. Si consideramos  $y = \alpha$ , entonces  $x = \alpha, y = \alpha, z = -2\alpha$ , los vectores de la forma  $\vec{v}_2 = \alpha(1, 1, -2)$  pertenecen a  $H$  y son ortogonales a  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ .

Dividimos cada vector por su norma, y obtenemos una base ortonormal de  $H$ :

$$\mathcal{B}_o = \{(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0), (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3)\}.$$

**Método de ortonormalización de Gram-Schmidt**

Si  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  es una base del subespacio  $H$ , de un espacio vectorial euclídeo  $V$ , podemos construir, partiendo de  $\mathcal{B}$ , otra base que sea ortonormal mediante el método

de ortonormalización de Gram-Schmidt.

**Paso 1**

Dividimos el primer vector por su norma,  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1/||\vec{v}_1||$ . Se cumple  $||\vec{u}_1||^2 = \vec{v}_1/||\vec{v}_1|| \cdot \vec{v}_1/||\vec{v}_1|| = ||\vec{v}_1||^2/||\vec{v}_1||^2 = 1$ ,  $||\vec{u}_1|| = 1$ .

**Paso 2**

Buscamos un vector combinación lineal de  $\vec{v}_2$  y  $\vec{u}_1$ , tal que sea ortogonal a  $\vec{u}_1$ :

$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 + \alpha\vec{u}_1$ , tal que  $\vec{v}_2' \cdot \vec{u}_1 = 0$ . Multiplicamos escalarmente por  $\vec{u}_1$  a ambos lados de la igualdad,

$$(\vec{v}_2 + \alpha\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 + \alpha\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 + \alpha = \vec{v}_2' \cdot \vec{u}_1 = 0, \text{ despejamos } \alpha, \alpha = -\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1,$$

y el vector que buscamos es:

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1.$$

**Paso 3**

Dividimos  $\vec{v}_2'$  por su norma,  $\vec{u}_2 = \vec{v}_2'/||\vec{v}_2'||$ . Se cumple  $||\vec{u}_2|| = 1$ .

**Paso 4**

Buscamos un vector combinación lineal de  $\vec{v}_3$ ,  $\vec{u}_1$  y  $\vec{u}_2$ , tal que sea ortogonal a  $\vec{u}_1$  y  $\vec{u}_2$ :

$\vec{v}_3' = \vec{v}_3 + \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$ , tal que  $\vec{v}_3' \cdot \vec{u}_1 = 0$ ,  $\vec{v}_3' \cdot \vec{u}_2 = 0$ . Multiplicamos escalarmente por  $\vec{u}_1$  y por  $\vec{u}_2$  a ambos lados de la igualdad:

$$(\vec{v}_3 + \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) \cdot \vec{u}_1 = \vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = \vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_1 = \vec{v}_3' \cdot \vec{u}_1 = 0,$$

despejamos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1 = -\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1$ .

$$(\vec{v}_3 + \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) \cdot \vec{u}_2 = \vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 + \alpha_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + \alpha_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = \vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 + \alpha_2 = \vec{v}_3' \cdot \vec{u}_2 = 0,$$

despejamos  $\alpha_2$ ,  $\alpha_2 = -\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2$ , y el vector que buscamos es:

$$\vec{v}_3' = \vec{v}_3 - (\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2.$$

**Paso 5**

Dividimos el vector  $\vec{v}_3'$  por su norma,  $\vec{u}_3 = \vec{v}_3'/||\vec{v}_3'||$ , se cumple  $||\vec{u}_3|| = 1$ .

Repetimos estos procedimientos hasta llegar al penúltimo paso.

**Paso penúltimo**

Buscamos un vector combinación lineal de  $\vec{v}_m$ ,  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m-1}$ , tal que sea ortogonal a  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m-1}$ . Siguiendo razonamientos análogos a los de los pasos anteriores, el vector que se obtiene es:

$$\vec{v}_m' = \vec{v}_m - (\vec{v}_m \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_m \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_m \cdot \vec{u}_{m-1})\vec{u}_{m-1}.$$

**Paso último**

Se divide el vector  $\vec{v}'_m$  por su norma,  $\vec{u}_m = \vec{v}'_m / \|\vec{v}'_m\|$ , se cumple  $\|\vec{u}_m\| = 1$ .

Se llega a una base ortonormal,

$$\mathcal{B}_o = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}.$$

**Ejemplos**

1. Se busca construir una base ortonormal en  $\mathbb{R}^2$  partiendo de la base  $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 0)\}$ .

Llamamos  $\vec{v}_1 = (1, 1), \vec{v}_2 = (1, 0)$ .

*Paso 1*

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \vec{u}_1 = \vec{v}_1 / \|\vec{v}_1\| = (1, 1) / \sqrt{2} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2).$$

*Paso 2*

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 = (1, 0) - 1/\sqrt{2}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (1, 0) - (1/2, 1/2) = (1/2, -1/2).$$

*Paso 3*

$$\|\vec{v}'_2\| = \sqrt{1/4 + 1/4} = 1/\sqrt{2}; \vec{u}_2 = \vec{v}'_2 / \|\vec{v}'_2\| = \sqrt{2}(1/2, -1/2) = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2),$$

se cumple  $\|\vec{u}_2\| = 1$ .

La base obtenida es:  $\mathcal{B}_o = \{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)\}$ .

Comprobamos que es ortonormal:  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot (-\sqrt{2}/2) = 0$ ,

$$\|\vec{u}_1\|^2 = (\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 = 1, \|\vec{u}_2\|^2 = (\sqrt{2}/2)^2 + (-\sqrt{2}/2)^2 = 1.$$

2. Se busca construir una base ortonormal del conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^3$  situados en el plano  $H$ ,  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0\}$ .

En primer lugar buscamos una base de  $H$  pasando a paramétricas la ecuación implícita:

$1 = \text{número de ecs. impl.} = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(H) = 3 - 2; \dim(H) = 2$ . Tenemos 2 parámetros libres en las ecuaciones paramétricas, elegimos los parámetros entre las coordenadas, la coordenada  $y$  no aparece en la ecuación, queda libre, entonces es uno de los parámetros,  $y = \alpha_1$ , el otro podría ser  $x$  ó  $z$ , elegimos  $z = \alpha_2$ ,

entonces  $x = -z = -\alpha_2$ . Las ecuaciones paramétricas son,

$$x = -\alpha_2,$$

$$y = \alpha_1,$$

$$z = \alpha_2.$$

Entonces una base de  $H$  es  $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ ,  $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (-1, 0, 1)$  construimos una base ortonormal partiendo de esta.  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son ya ortogonales, sólo es necesario normalizarlos (dividirlos por su norma) para que sean vectores de norma 1:

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1+1} = 2; \vec{u}_2 = \vec{v}_2/\|\vec{v}_2\| = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2).$$

La base ortonormal es  $\mathcal{B}_o = \{(0, 1, 0), (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)\}$ .

### Cuestiones

5. ¿Son ortogonales los vectores de los subespacios de  $\mathbb{R}^2$ ,  $W = \{(x, y)/x + y = 0\}$  y  $S = \{(x, y)/x - y = 0\}$ ?
6. Si  $V = \mathbb{R}^7$ ,  $\vec{v} = (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$ , escribe las ecuaciones cartesianas del subespacio de vectores ortogonales a  $\vec{v}$ .

### 4.3.2. Proyección ortogonal

Vamos a ilustrar con un ejemplo la proyección de un vector sobre un subespacio de dimensión 1. Si tenemos el espacio vectorial  $V = \mathbb{R}^2$ , el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  generado por  $\vec{w} = (1, 1)$ ,  $W = \mathcal{L}\{(1, 1)\}$ , y el vector  $\vec{v} = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ . Dividimos  $\vec{w}$  por su norma,  $\vec{u} = \vec{w}/\|\vec{w}\|$ , y una base ortonormal de  $W$  es:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Queremos encontrar el vector de  $W$ ,  $\vec{p} = \alpha\vec{u}$ , más cercano a  $\vec{v}$ . En la figura 4.2 se puede ver la situación, y que este vector es ortogonal a  $\vec{v} - \vec{p}$ , es decir,  $\vec{p} \perp \vec{v} - \vec{p}$ , es decir,

$$\alpha\vec{u} \cdot (\vec{v} - \alpha\vec{u}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v} - \alpha\vec{u} \cdot \vec{u}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v} - \alpha) = 0, \alpha = \vec{u} \cdot \vec{v}, \quad (4.7)$$

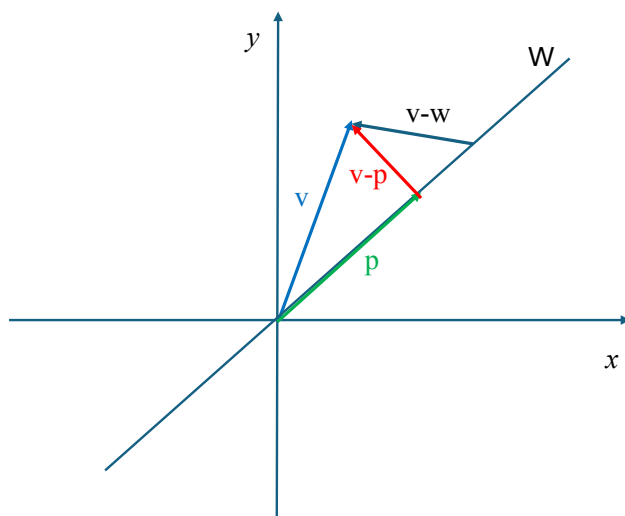


Figura 4.2: Proyección ortogonal.

y el vector que buscamos es  $\vec{p} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u}$ .

En el ejemplo,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot (1, 3) = \frac{4}{\sqrt{2}}, \vec{p} = \frac{4}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (2, 2). \quad (4.8)$$

Como se puede comprobar en la figura 4.2. Cualquier otro vector de  $W$  tendrá una distancia mayor a  $\vec{v}$ .

**Definición 4.8. Proyección ortogonal de un vector en un subespacio de dimensión 1.** Sea  $H$  un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  con base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\vec{u}\}$ . Si  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , entonces la proyección ortogonal de  $\vec{v}$  sobre  $H$ , denotada por  $\vec{p} = \text{proy}_H \vec{v}$ , está dada por:  $\vec{p} = \text{proy}_H \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$ . Se cumple que  $\vec{p} = \text{proy}_H \vec{v} \in H$ .

**Definición 4.9. Proyección ortogonal de un vector en un subespacio de dimensión  $m$ .** Sea  $H$  un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  con base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ . Si  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , entonces la proyección ortogonal de  $\vec{v}$  sobre  $H$ , denotada por  $\vec{p} = \text{proy}_H \vec{v}$ , está dada por:  $\vec{p} = \text{proy}_H \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 + \dots + (\vec{v} \cdot \vec{u}_m)\vec{u}_m$ .

Se cumple que  $\vec{p} = \text{proy}_H \vec{v} \in H$ .

Las coordenadas de  $\text{proy}_H \vec{v}$  en la base  $B$  son los productos escalares de  $\vec{v}$  con cada

elemento de la base,  $\vec{p} = \text{proy}_H \vec{v} = ((\vec{v} \cdot \vec{u}_1), (\vec{v} \cdot \vec{u}_2), \dots, (\vec{v} \cdot \vec{u}_m))_{\mathcal{B}}$ .

### Ejemplo

Calculamos la proyección del vector  $(1, 2, 3)$  sobre  $H$ , siendo  $H$  el subespacio:

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0\}$ , teníamos una base ortonormal,

$$\mathcal{B}_o = \left\{ (0, 1, 0), \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}, \quad (4.9)$$

$$\vec{p} = \text{proy}_H \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2,$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{u}_1) = (1, 2, 3) \cdot (0, 1, 0) = 2,$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{u}_2) = (1, 2, 3) \cdot (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) = 1 \cdot (-\sqrt{2}/2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (\sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2}/2 = \sqrt{2},$$

$$\vec{p} = \text{proy}_H \vec{v} = 2(0, 1, 0) + \sqrt{2}(-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) = (-1, 2, 1) \in H.$$

**Teorema 4.10. Aproximación de la norma.** *Dado  $W$ , subespacio vectorial de  $V$ , y  $\vec{v} \in V$ , la proyección de  $\vec{v}$  sobre  $W$ ,  $\vec{p} = \text{proy}_W \vec{v}$ , es el vector de  $W$  más próximo a  $\vec{v}$ ,  $\|\vec{v} - \vec{p}\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|$ , para todo  $\vec{w} \in W$ .*

*Demostración.* Se demuestra en el caso de  $V = \mathbb{R}^2$  y  $W$  subespacio de dimensión 1. Esta situación se puede ver en la figura 4.2.

Los vectores  $\vec{v} - \vec{w}$ ,  $\vec{w} - \vec{p}$  y  $\vec{v} - \vec{p}$ , forman un triángulo rectángulo, siendo  $\vec{v} - \vec{w}$  la hipotenusa y los otros dos catetos.

$\vec{w} - \vec{p}$  y  $\vec{v} - \vec{p}$  son ortogonales,  $\vec{w} - \vec{p} \perp \vec{v} - \vec{p}$ .

Entonces, por el teorema de Pitágoras, se cumple:  $\|\vec{v} - \vec{w}\| = \|\vec{w} - \vec{p}\| + \|\vec{v} - \vec{p}\|$ .

Despejamos  $\|\vec{v} - \vec{p}\| = \|\vec{v} - \vec{w}\| - \|\vec{w} - \vec{p}\|$ .

Entonces se cumple,  $\|\vec{v} - \vec{p}\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|, \forall \vec{w} \in W$ .

En más dimensiones es análogo, una demostración se puede encontrar en [7]. ■

**Definición 4.11. Distancia de un vector a un subespacio.** *Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo,  $W$ , un subespacio vectorial de  $V$ , y  $\vec{u} \in V$ . La distancia del vector  $\vec{u}$  al subespacio  $W$ , se define como la distancia del vector  $\vec{u}$  a su proyección sobre el subespacio,  $\vec{p} = \text{proy}_W \vec{u}$ , es decir  $d(\vec{u}, W) = d(\vec{u}, \vec{p}) = \|\vec{u} - \vec{p}\|$ .*

### Ejemplo

Consideramos el ejemplo anterior, el subespacio de  $\mathbb{R}^2$ ,  $W = \mathcal{L}\{(1, 1)\}$ , y el vector  $\vec{u} = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ , su proyección sobre  $W$  es:  $\vec{p} = \text{proy}_W(1, 3) = (2, 2)$ .

Por lo tanto, la distancia de  $(1, 3)$  al subespacio  $W$  es:

$$d((1, 3), W) = d((1, 3), (2, 2)) = \|(-1, 1)\| = \sqrt{2}.$$

Cualquier otro vector de  $W$  que consideremos dista más de  $(1, 3)$ .

### 4.3.3. Forma práctica de calcular proyecciones

Tenemos un subespacio generado por unos vectores  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ ,  $W = \mathcal{L}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ . Queremos calcular la proyección de un vector  $\vec{v}$  sobre  $W$ . Todo vector de  $W$  se puede escribir como  $\vec{w} = A\vec{\alpha}$ , donde  $A$  es la matriz que tiene por columnas los vectores  $\vec{a}_1$ , y  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^t \in \mathbb{R}^m$ , es una forma de escribir las ecuaciones paramétricas. El vector proyección  $\vec{p} = \text{proy}_W \vec{v} \in W$ , entonces es de la forma,  $\vec{p} = A\vec{\alpha}$ , y cumple que  $\vec{v} - \vec{p}$  es ortogonal a todos los vectores que generan  $W$ ,

$$\vec{a}_i^t \cdot (\vec{v} - A\vec{\alpha}) = 0, i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.10)$$

De estas condiciones se deducen las expresiones matriciales,

$$A^t(\vec{v} - A\vec{\alpha}) = \vec{0}, A^t A\vec{\alpha} = A^t \vec{v}. \quad (4.11)$$

La matriz  $A^t A$  es cuadrada e invertible, entonces podemos despejar  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\alpha} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{v}$ , y la proyección  $\vec{p}$  es,

$$\vec{p} = A\vec{\alpha} = A(A^t A)^{-1} A^t \vec{v}. \quad (4.12)$$

#### Ejemplo

En el ejemplo anterior, queremos calcular la proyección del vector  $(1, 2, 3)$  sobre  $H$ , siendo  $H$  el subespacio:  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0\}$ , una base de  $H$  es ,

$$\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (-1, 0, 1)\}. \quad (4.13)$$

La matriz  $A$  tiene por columnas los vectores de la base de  $H$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, (A^t A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$A(A^t A)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{p} = A(A^t A)^{-1} A^t \vec{v} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Cuestiones

7. Escribe 3 vectores de  $W = \mathcal{L}\{(1, 1)\}$ , y calcula su distancia al vector  $(1, 3)$ , comprueba que son todas mayores que  $\sqrt{2}$ .
8. Si nos dicen que  $\text{proy}_W(2, 27) = (0, 3)$ , ¿puede ser correcto?

## 4.4. Motivación revisitada

Vamos a responder a las cuestiones que planteábamos en la motivación inicial.

1. En la primera situación, si tenemos dos versiones de este producto que tienen 280 mg de vitamina A, 400 mg de B y 300 mg de C, una de ellas, y la otra, 310 mg de A, 410 mg de B, y 320 mg de C. ¿Cuál de estos dos productos tiene una cantidad de vitaminas más parecida a la del problema inicial?

Para saber cual se parece más a la inicial tenemos que calcular la distancia de cada uno de los vectores  $\vec{u} = (280, 400, 300)$  y  $\vec{v} = (310, 410, 320)$  al vector del problema inicial  $\vec{w} = (360, 510, 370)$ ,

$$\begin{aligned} d(\vec{u}, \vec{w}) &= \|\vec{u} - \vec{w}\| = \|(280, 400, 300) - (360, 510, 370)\| = \\ &= \|(-80, -110, -70)\| = \sqrt{(-80)^2 + (-110)^2 + (-70)^2} = 152,97, \\ d(\vec{v}, \vec{w}) &= \|\vec{v} - \vec{w}\| = \|(310, 410, 320) - (360, 510, 370)\| = \\ &= \|(10, -20, 10)\| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 10^2} = 122,47, \end{aligned}$$

el segundo producto tiene una cantidad de vitaminas más parecida a la del problema inicial.

2. En la segunda situación, si tenemos en un producto las cantidades,  $x = 150$  g,  $y = 140$  g,  $z = 15$  g,  $t = 200$  mg, y en otro producto  $x = 170$  g,  $y = 125$  g,  $z = 15$  g,  $t = 200$  mg, ¿cuál de estos dos productos tiene unas cantidades más parecidas a las proporciones de vitaminas de este caso?

En esta situación tenemos que calcular la distancia de cada vector,

$\vec{u} = (150, 140, 15, 200)$  y  $\vec{v} = (170, 125, 15, 200)$ , al subespacio de soluciones del sistema, y comparar estas distancias. Para ello tenemos que calcular el vector del subespacio solución más próximo a cada uno de los vectores, que son los vectores proyección. Para ello, primero buscamos una base ortonormal del subespacio. Las ecuaciones implícitas o cartesianas del subespacio solución, que llamamos  $S_2$ , son,

$$2x + y + z = 3t/4,$$

$$x + 2y + z = t,$$

$$x + y + 2z = t.$$

unas ecuaciones paramétricas del subespacio son,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1/16 \\ 5/16 \\ 5/16 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Una base del subespacio  $S_2$  es,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} \right\},$$

como tiene un único vector, para calcular una base ortonormal sólo habría que dividir este vector por su norma,  $\|(1, 5, 5, 16)\| = \sqrt{207}$ ,

$$\mathcal{B}_o = \left\{ \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{207}} \\ \frac{5}{\sqrt{207}} \\ \frac{5}{\sqrt{207}} \\ \frac{16}{\sqrt{207}} \end{pmatrix} \right\}.$$

Calculamos las proyecciones,

$$proy_{S_2} \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{w} = \begin{pmatrix} 13 \\ 67 \\ 67 \\ 215 \end{pmatrix}, proy_{S_2} \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{w} = \begin{pmatrix} 13 \\ 66 \\ 66 \\ 212 \end{pmatrix}.$$

Hemos redondeado a números enteros la solución.

Si las calculamos con la forma práctica,

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}, P = A(A^t A)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 0,0033 & 0,0163 & 0,0163 & 0,0521 \\ 0,0163 & 0,0814 & 0,0184 & 0,2606 \\ 0,0163 & 0,0814 & 0,0814 & 0,2606 \\ 0,0521 & 0,2606 & 0,2606 & 0,8339 \end{pmatrix},$$

$$proy_{S_2} \vec{u} = A(A^t A)^{-1} A^t \vec{u} = \begin{pmatrix} 13 \\ 67 \\ 67 \\ 215 \end{pmatrix}, proy_{S_2} \vec{v} = A(A^t A)^{-1} A^t \vec{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 66 \\ 66 \\ 212 \end{pmatrix},$$

donde hemos redondeado a números enteros el resultado.

$$d(\vec{u}, S_2) = \|\vec{u} - proy_{S_2} \vec{u}\| = \|(150, 140, 15, 200) - (13, 67, 67, 215)\| = 164,$$

$$d(\vec{v}, S_2) = \|\vec{v} - proy_{S_2} \vec{v}\| = \|(170, 125, 15, 200) - (13, 66, 66, 212)\| = 175,$$

en este caso el primer producto  $x = 150$  g,  $y = 140$  g,  $z = 15$  g,  $t = 200$  mg, tiene unas cantidades más parecidas a las proporciones de vitaminas.



# Capítulo 5

## Aplicaciones lineales

### 5.1. Motivación

#### Videojuegos

Los movimientos en un videojuego se plantean realizando operaciones/transformaciones sobre los puntos/vectores. Estas operaciones son giros, traslaciones, contracciones, etc. Por ejemplo, tenemos un banderín triangular de llegada a meta de una carrera. El triángulo tiene por vértices los puntos  $(0, 2)$ ,  $(0, 4)$  y  $(2, 3)$ . Queremos que se mueva girando  $45^\circ$  en sentido horario. Esto se consigue multiplicando por la matriz de giro  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

los vectores se giran  $45^\circ$  en sentido horario. En la figura 5.1 se pueden ver los puntos/vectores del banderín girados  $45^\circ$ . Si le das a la tecla para bajar el banderín, se ejecuta un programa que multiplica los vectores/puntos por la matriz de giro.

A continuación queremos que la cámara se aleje. Este efecto lo podemos conseguir multiplicando por la matriz de contracción  $B$ . De esta manera los puntos se ven más

alejados,

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

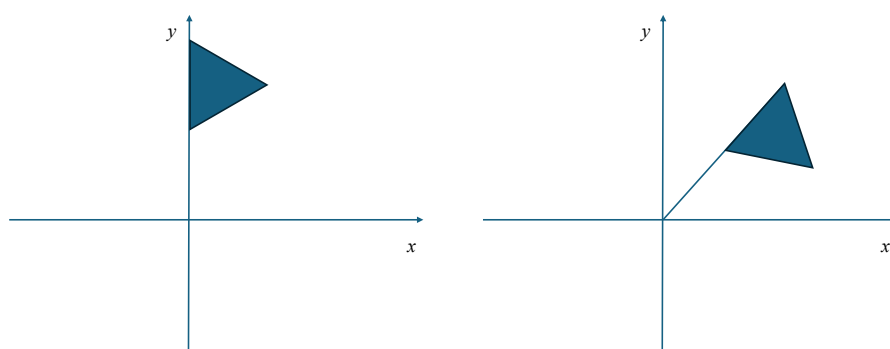


Figura 5.1: Izquierda: banderín en su posición inicial. Derecha: banderín girado.

## Cuestiones

1. ¿Qué matriz haría un giro de  $90^\circ$  en sentido antihorario?
2. ¿Existe una matriz que haga dos movimientos a la vez, giro de  $90^\circ$  horario y contracción a la mitad, a la vez?

## 5.2. Aplicaciones lineales

Estas transformaciones sobre vectores son ejemplos de funciones/aplicaciones lineales. El vector girado es una matriz por el vector original, el vector contraído es una matriz por el vector original.

**Definición 5.1.** Una aplicación lineal,  $\vec{f}$ , es una función de la forma:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y} = A\vec{x}, \quad (5.5)$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$a_{ij}, x_j, y_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \quad (5.7)$$

## Ejemplos

1. Dado un vector en el plano  $(x_1, x_2)^t$ , la siguiente aplicación lo gira un ángulo de  $\phi$  en sentido antihorario,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \phi - x_2 \sin \phi \\ x_1 \sin \phi + x_2 \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Por ejemplo, dado el vector  $(1, 1)$ , si lo queremos girar  $\pi/4$  en sentido antihorario, tomamos  $\phi = \pi/4$  en la matriz anterior, y la multiplicamos por el vector  $(1, 1)$ :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

$(0, \sqrt{2})^t$  es el vector  $(1, 1)$  girado  $\pi/4$ .

2. Dado un vector  $(x_1, x_2)^t$ , la siguiente aplicación lo transforma en su imagen especular, simétrica con respecto al eje de ordenadas  $y$ ,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Por ejemplo, al vector  $(2, 3)^t$ , lo transforma en el  $(-2, 3)^t$ ,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

3. Dado un vector  $(x_1, x_2)^t$ , la siguiente aplicación lo transforma de esta manera,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Por ejemplo, el vector  $(3, 5)^t$ , lo transforma en el vector  $(8, -2)^t$ ,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

### Cuestiones

1. Dado el vector  $(7, -1)$ , ¿en qué vector se transforma por cada una de las aplicaciones lineales de los ejemplos anteriores?

## 5.3. Cambio de base

El cambio de base es una aplicación lineal. Lo vamos a ilustrar con un ejemplo.

### Ejemplo

Si estamos en el espacio vectorial  $V = \mathbb{R}^2$ , y tenemos el vector  $\vec{v} = (1, 2)_{B_c}$  en coordenadas de la base canónica  $\mathcal{B}_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$ , ¿cuáles son las coordenadas de  $\vec{v}$  en la base  $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 2)\}$ ? Planteamos el problema,

$$\begin{aligned} (1, 2) &= \alpha(1, 1) + \beta(0, 2), \\ 1 &= \alpha, \\ 2 &= \alpha + 2\beta, \end{aligned}$$

si escribimos este sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_c} = M\vec{v}_{\mathcal{B}}, \quad (5.15)$$

donde,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

$M$  es la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_c$ , y  $M$  es la matriz que tiene por columnas los vectores de la base  $\mathcal{B}$ . Si multiplicamos por  $M^{-1}$  en la expresión (5.15),

$$M^{-1}\vec{v}_{\mathcal{B}_c} = M^{-1}M\vec{v}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{v}_{\mathcal{B}} = M^{-1}\vec{v}_{\mathcal{B}_c}, \quad (5.17)$$

$M^{-1}$  es la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}_c$  a  $\mathcal{B}$ .

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Si tenemos un vector  $\vec{w} = (1, 2)_{\mathcal{B}_c}^t$ , ¿qué coordenadas tiene en  $\mathcal{B}$ ?  $\vec{w}_{\mathcal{B}} = M^{-1}\vec{w}_{\mathcal{B}_c} = (1, 1/2)_{\mathcal{B}}^t$ . Si tenemos un vector  $\vec{u} = (1, 1/2)_{\mathcal{B}}^t$ , ¿qué coordenadas tiene en  $\mathcal{B}_c$ ?  $\vec{u}_{\mathcal{B}_c} = M\vec{u}_{\mathcal{B}} = (1, 2)_{\mathcal{B}_c}^t$ .

En general, si estamos en el espacio vectorial  $V = \mathbb{R}^n$ , y tenemos el vector  $\vec{v}_{\mathcal{B}_c}$  en coordenadas de la base canónica  $\mathcal{B}_c$  de  $\mathbb{R}^n$ , y otra base  $\mathcal{B}$ , si llamamos  $M$  a la matriz que tiene por columnas los vectores de la base  $\mathcal{B}$ , se cumple,

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_c} = M\vec{v}_{\mathcal{B}}, \quad (5.19)$$

y

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = M^{-1}\vec{v}_{\mathcal{B}_c}, \quad (5.20)$$

$M^{-1}$  es la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}_c$  a  $\mathcal{B}$ , y  $M$  es la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_c$ .

El cambio de base es una aplicación lineal, matriz por vector.

### Cuestiones

2. ¿Puede ser singular una matriz de cambio de base? ¿por qué?
3. Hemos visto cambios de base en los que está involucrada la base canónica, ¿cómo sería la matriz de cambio de base entre dos bases cualesquiera  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$ ?

## 5.4. Proyección ortogonal

Vimos en el capítulo anterior que si tenemos un espacio vectorial  $V$ ,  $H = \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ , un subespacio vectorial de  $V$ . Si  $\vec{x} \in V$ , y queremos calcular su proyección ortogonal sobre  $H$ ,

$$\vec{y} = \text{proy}_H \vec{x} = A(A^t A)^{-1} A^t \vec{x} = P\vec{x}, \quad (5.21)$$

donde  $A$  es la matriz que tiene por columnas los vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ . Es una aplicación lineal, matriz por vector.

### Ejemplo

$V = \mathbb{R}^3$ ,  $H = \mathcal{L}\{(0, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ . La aplicación proyección ortogonal tiene por matriz,

$$P = A(A^t A)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

donde  $A$  es la matriz que tiene por columnas los vectores de una base de  $H$ . Con esta matriz podemos proyectar cualquier vector en el subespacio  $H$ ,  $\vec{y} = \text{proy}_H \vec{x} = P\vec{x}$ . Por ejemplo, vamos a calcular la proyección de los vectores  $\vec{v} = (1, 2, 3)$  y  $\vec{w} = (2, 0, 0)$ ,

$$\text{proy}_H \vec{v} = P\vec{v} = (-1, 2, 1)^t, \text{proy}_H \vec{w} = P\vec{w} = (1, 0, -1)^t. \quad (5.23)$$

### Cuestiones

4 . ¿Es cuadrada toda matriz de proyección  $P$ ?

5 . ¿Puede ser singular una matriz de proyección  $P$ ? Razona la respuesta.

## 5.5. Motivación revisitada

Los movimientos en un videojuego se plantean realizando operaciones/transformaciones sobre los puntos/vectores. Estas operaciones son giros, traslaciones, contracciones, etc. Por ejemplo, tenemos un banderín triangular de llegada a meta de una carrera. El

triángulo tiene por vértices los puntos  $(0, 2)$ ,  $(0, 4)$  y  $(2, 3)$ . Queremos que se mueva girando  $45^\circ$  en sentido horario. Esto se consigue multiplicando por la matriz de giro  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

los vectores se giran  $45^\circ$  en sentido horario. En la figura 5.1 se pueden ver los puntos/vectores del banderín girados  $45^\circ$ .

A continuación queremos que la cámara se aleje. Este efecto lo podemos conseguir multiplicando por la matriz de contracción  $B$ . De esta manera los puntos se ven más alejados,

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Respondemos a las cuestiones.

### Cuestiones

1. ¿Qué matriz haría un giro de  $90^\circ$  en sentido antihorario?

Ya hemos visto la matriz de giro en sentido antihorario en general, y en particular, la matriz de giro antihorario de  $90^\circ$  corresponde al ángulo  $\phi = \pi/2$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

2. ¿Existe una matriz que haga dos movimientos a la vez, giro de  $90^\circ$  horario y contracción a la mitad, a la vez?

Sí, la matriz composición, producto de las dos matrices,

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Por ejemplo, al vector  $(0, 2)^t$ , lo transforma en el vector  $(1, 0)^t$ .

# Capítulo 6

## Autovalores y autovectores

### 6.1. Motivación

#### Rotación de una varilla en torno a un eje

Tenemos una varilla cilíndrica de masa  $m$  y longitud  $l$  colocada en cierta posición  $\vec{u}$ . Hacemos girar la varilla de forma antihoraria en torno a su centro de masas formando un plano, como se puede ver en la figura 6.1. Es decir, el eje de giro de la varilla es perpendicular a ella pasando por su centro de masas.

Se define la velocidad angular como la variación del ángulo  $\theta(t)$  con el tiempo, por el vector unitario del eje de giro,  $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{a}$ , donde  $\vec{a}$  es el vector unitario eje de giro. La aceleración angular es la variación de la velocidad angular con el tiempo,  $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ . El momento de la fuerza, o momento del par, o torque, que es necesario aplicar,  $\vec{\tau}$ , para que se produzca una aceleración angular  $\vec{\alpha}$ , en el caso de tener una varilla en cierta dirección  $\vec{u}$ , es,<sup>1</sup>

$$\vec{\tau} = \mathbb{I}_g \vec{\alpha}, \quad (6.1)$$

---

<sup>1</sup>Es la fórmula equivalente a la segunda ley de Newton fuerza = masa x aceleración para movimientos de rotación.

donde  $\mathbb{I}_g = \frac{1}{12}ml^2 A$ , es la matriz del momento de inercia,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

La expresión (6.1), desarrollando cada componente, es,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{12\sqrt{2}}ml^2\alpha_1 + \frac{1}{12\sqrt{2}}ml^2\alpha_2, \\ \tau_2 &= \frac{1}{12\sqrt{2}}ml^2\alpha_1 + \frac{1}{12\sqrt{2}}ml^2\alpha_2, \\ \tau_3 &= \frac{1}{12}ml^2\alpha_3, \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde  $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^t$  y  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^t$ .

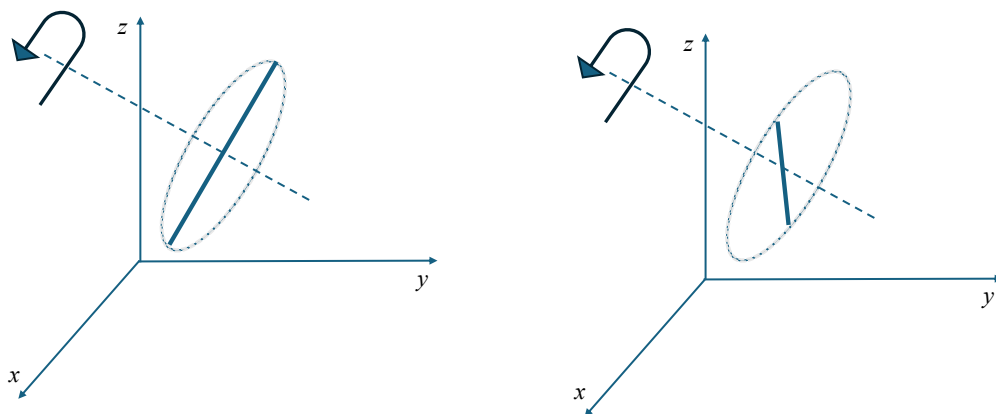


Figura 6.1: Izquierda: Varilla, eje de giro y plano de giro. Derecha: varilla girada cierto ángulo.

## Cuestiones

1. En la expresión del momento del par,  $\vec{\tau}$ , como función de la aceleración angular,  $\vec{\alpha}$ , (6.3), vemos que el momento en una dirección afecta al movimiento en las otras, y eso complica la resolución del problema. ¿Podemos cambiar el sistema de

referencia o base en la que están expresados  $\vec{\tau}$  y  $\vec{\alpha}$ , para que en dicha base cada componente del momento del par dependa únicamente de la misma componente de la aceleración angular?

2. ¿En que dirección  $\vec{u}$  está colocada la varilla?

## 6.2. Autovalores y autovectores

Los conceptos de autovalores y autovectores son muy utilizados en ciencias e ingenierías. Aquí ilustramos alguna de sus múltiples potencialidades al hilo del ejemplo de la motivación.

**Definición 6.1. Autovalor y autovector.** Sea  $A$  una matriz cuadrada  $n \times n$  de números reales. El número  $\lambda$ , real o complejo, recibe el nombre de autovalor de  $A$  si existe un vector diferente de cero,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ , tal que  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ , se dice que el vector  $\vec{v} \neq 0$  es un autovector de  $A$  correspondiente al autovalor  $\lambda$ .

También se llaman valor propio y vector propio, valor característico y vector característico, eigenvalor y eigenvector, *eigenvalue and eigenvector*, en inglés.

### Ejemplos

1. Si  $A$  es la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Buscamos  $\lambda$  y  $\vec{v}$ , tales que  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ , si  $\vec{v} = (x_1, x_2)^t$ , esta ecuación se puede expresar,

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &= \lambda x_1, \\ x_2 &= \lambda x_2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Pasando las incógnitas a la izquierda de la igualdad,

$$\begin{aligned} (-2 - \lambda)x_1 + 3x_2 &= 0, \\ (1 - \lambda)x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Esta ecuación se puede escribir en forma matricial,  $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$ ,

$$\begin{pmatrix} -2 - \lambda & 3 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Es un sistema homogéneo. Para que el sistema tenga solución distinta de la trivial,  $(0, 0)^t$ , se tiene que cumplir,  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 3 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (-2 - \lambda)(1 - \lambda) = 0. \quad (6.8)$$

Las soluciones de esta ecuación son:  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ . Estos dos números son los autovalores de A.

Para calcular los autovectores se resuelve el sistema (6.6) para cada autovalor.

Para el autovalor  $\lambda_1 = -2$ ,

$$\begin{aligned} (-2 - (-2))x_1 + 3x_2 &= 0, \\ (1 - (-2))x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

$x_2 = 0$  es la ecuación implícita de un subespacio. Pasamos a ecuaciones paramétricas. Tenemos un parámetro libre, que tiene que ser  $x_1 = \alpha$ , porque  $x_1$  no aparece en las ecuaciones. Las soluciones son,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

es el subespacio de autovectores asociado al autovalor  $\lambda_1 = -2$ . No hay un único autovector, hay todo un subespacio de autovectores, el subespacio de ecuación cartesiana  $x_2 = 0$ .

Hacemos los cálculos ahora para el otro autovalor,  $\lambda_2 = 1$ . Sustituyendo este valor de  $\lambda$  en las ecuaciones (6.6),

$$\begin{aligned} (-2 - 1)x_1 + 3x_2 &= 0, \\ (1 - 1)x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (6.11)$$

obtenemos la ecuación cartesiana:  $-x_1 + x_2 = 0$ . Paramos a paramétricas. Tenemos un parámetro libre, consideramos  $x_1 = \alpha$ . Las soluciones son,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

es el subespacio de autovectores asociado al autovalor  $\lambda_2 = 1$ . No hay un único autovector, hay todo un subespacio de autovectores, el subespacio de ecuación cartesiana  $-x_1 + x_2 = 0$ .

2. Si consideramos la matriz  $B$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Buscamos  $\lambda$  y  $\vec{v}$ , tales que  $B\vec{v} = \lambda\vec{v}$ . Si  $\vec{v} = (x_1, x_2)^t$ , esta ecuación se puede expresar de la forma,

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= \lambda x_1, \\ 4x_2 &= \lambda x_2. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Pasando las incógnitas a la izquierda de la igualdad,

$$\begin{aligned} (4 - \lambda)x_1 + x_2 &= 0, \\ (4 - \lambda)x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Podemos escribirlo de forma matricial,  $(B - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ . Es un sistema homogéneo. Para que el sistema tenga solución distinta de la trivial  $(0, 0)^t$ , se tiene que cumplir,  $\det(B - \lambda I) = (4 - \lambda)(4 - \lambda) = 0$ .

La solución de esta ecuación es  $\lambda = 4$ , con multiplicidad algebraica 2.  $\lambda = 4$  es el único autovalor de  $B$ , pero repetido dos veces, o doble.

Para calcular los autovectores se resuelve el sistema (6.11) para el autovalor  $\lambda = 4$ ,

$$\begin{aligned} (4 - 4)x_1 + x_2 &= 0, \\ (4 - 4)x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Obtenemos una ecuación cartesiana,  $x_2 = 0$ . Tenemos un parámetro libre  $x_1 = \alpha$ . Y las soluciones son de la forma:  $\vec{v} = \alpha(1, 0)$ . Es el subespacio de autovectores asociado al autovalor  $\lambda = 4$ .

3. Si consideramos la matriz  $C$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

Buscamos  $\lambda$  y  $\vec{v}$ , tales que  $C\vec{v} = \lambda\vec{v}$ . Si  $\vec{v} = (x_1, x_2)^t$ , esta ecuación se puede expresar de la forma,

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1, \\ -x_1 + 3x_2 &= \lambda x_2.\end{aligned}\tag{6.18}$$

Pasando las incógnitas a la izquierda de la igualdad, tenemos,

$$\begin{aligned}(1 - \lambda)x_1 + 2x_2 &= 0, \\ -x_1 + (3 - \lambda)x_2 &= 0.\end{aligned}\tag{6.19}$$

Se puede escribir en forma matricial,  $(C - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ . Es un sistema homogéneo. Para que el sistema tenga solución distinta de la trivial  $(0, 0)^t$ , se tiene que cumplir,

$$\det(C - \lambda I) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \cdot (-1) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Resolvemos esta ecuación,  $\lambda = (4 \pm \sqrt{16 - 20})/2$ .  $\lambda_1 = 2 + i$ ,  $\lambda_2 = 2 - i$ , son los autovalores de  $C$ .

Para calcular los autovectores se resuelve el sistema (6.19) para cada autovalor. Para el primer autovalor,  $\lambda_1 = 2 + i$ ,

$$\begin{aligned}(-1 - i)x_1 + 2x_2 &= 0, \\ -x_1 + (1 - i)x_2 &= 0.\end{aligned}\tag{6.20}$$

Tenemos una ecuación cartesiana,  $x_1 - (1 - i)x_2 = 0$ . Si pasamos a paramétricas, hay un parámetro libre,  $x_2 = \alpha$ . Podemos escribir las soluciones como  $\vec{v} = \alpha((1 - i), 1)$ . No hay un único autovector, hay todo un subespacio de autovectores.

Para el segundo  $\lambda_2 = 2 - i$ ,

$$\begin{aligned}(-1 + i)x_1 + 2x_2 &= 0, \\ -x_1 + (1 + i)x_2 &= 0.\end{aligned}\tag{6.21}$$

Tenemos una ecuación cartesiana  $x_1 - (1 + i)x_2 = 0$ . Si pasamos a paramétricas, hay un parámetro libre,  $x_2 = \alpha$ . Las soluciones son de la forma,  $\vec{v} = \alpha((1 + i), 1)$ . Hay un subespacio de autovectores.

**Cuestiones**

1. Si  $A$  es una matriz  $4 \times 4$ , ¿puede tener 5 autovalores?
2. ¿Puede tener un autovalor  $\lambda = 0$ ? ¿Y un autovector  $\vec{v} = \vec{0}$ ?

**6.2.1. Polinomio característico y ecuación característica**

En la sección anterior han aparecido unos conceptos nuevos, que vamos a definir a continuación.

**Teorema 6.2.** *Si  $A$  es una matriz  $n \times n$ ,  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  si y sólo si  $\det(A - \lambda I) = 0$ .*

**Definición 6.3. Polinomio característico.**  *$\det(A - \lambda I) = p(\lambda)$  es un polinomio en  $\lambda$  de grado  $n$ , que se llama polinomio característico de la matriz  $A$ .*

**Ejemplo.**  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 2 = p(\lambda)$  es el polinomio característico de la matriz  $A$  del ejemplo anterior.

**Definición 6.4. Ecuación característica.** *Polinomio característico igual a cero,  $\det(A - \lambda I) = p(\lambda) = 0$ .*

**Ejemplo.**  $\det(A - \lambda I) = p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  es la ecuación característica de la matriz  $A$  del ejemplo anterior.

**Cuestiones**

- 3 . Si  $A$  es una matriz  $5 \times 5$ , ¿puede su polinomio característico ser de grado 6? ¿Y de grado 4?
- 4 . ¿Y tener 6 raíces distintas? ¿y sólo 2 raíces distintas?

**6.2.2. Subespacios propios**

Seguimos definiendo algunos conceptos nuevos.

**Teorema 6.5.** *Si  $\lambda$  es un autovalor real de la matriz  $A$   $n \times n$ ,*

$E_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \text{ tales que } A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\lambda$  es un autovalor complejo de la matriz  $A$ ,  $E_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{C}^n, \text{ tales que } A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}$  es un subespacio de  $\mathbb{C}^n$ .

**Definición 6.6. Subespacio propio o característico.** Si  $\lambda$  es autovalor de  $A$ , el subespacio  $E_\lambda$  se llama subespacio propio de  $A$  asociado a  $\lambda$  o espacio característico de  $A$  correspondiente al valor característico  $\lambda$ .

### Ejemplo

En el ejemplo anterior de la matriz  $A$ , los subespacios propios asociados a los autovalores, que calculamos anteriormente, son,

$$E_{-2} = \mathcal{L}\{(1, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}, E_1 = \mathcal{L}\{(1, 1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}.$$

**Definición 6.7. Multiplicidad algebraica.** Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ ;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  los autovalores de  $A$  o raíces de su polinomio característico. Se cumple,  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$ ,  $r_1, r_2, \dots, r_m$  son las multiplicidades algebraicas (ma) de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , respectivamente;  $ma(\lambda_1) = r_1$ ,  $ma(\lambda_2) = r_2, \dots, ma(\lambda_m) = r_m$ .

### Ejemplos

1. En el ejemplo anterior de la matriz  $A$ , el polinomio característico es:  $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$ . Los autovalores son:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ , son raíces simples del polinomio, o autovalores de multiplicidad algebraica 1.
2. En el ejemplo anterior de la matriz  $B$ , el polinomio característico es:  $p(\lambda) = (\lambda - 4)^2$ . Tiene una única raíz doble,  $\lambda = 4$ , o autovalor de multiplicidad algebraica 2.

**Definición 6.8. Multiplicidad geométrica.** Si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$ , la multiplicidad geométrica de  $\lambda$  es la dimensión del subespacio propio que le corresponde,  $E_\lambda$ , es decir, la multiplicidad geométrica (mg) de  $\lambda$  es,  $mg(\lambda) = \dim(E_\lambda)$ .

### Ejemplos

1. En el ejemplo anterior de la matriz  $A$ ,

$$E_{-2} = \mathcal{L}\{(1, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}, \dim(E_{-2}) = 1, \text{ entonces } mg(\lambda_1) = mg(-2) = 1,$$

$$E_1 = \mathcal{L}\{(1, 1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}, \dim(E_1) = 1, mg(\lambda_2) = mg(1) = 1.$$

2. En el ejemplo anterior de la matriz  $B$ , el subespacio de autovectores asociado a  $\lambda = 4$  es  $E_4 = \mathcal{L}\{(1, 0)\}$ ,  $\dim(E_4) = 1$ , entonces  $mg(\lambda) = mg(4) = 1$ .

### Propiedades

1. Si  $A$  es una matriz  $n \times n$ , tiene exactamente  $n$  autovalores, incluyendo multiplicidades.

**Ejemplo.** En el caso de la matriz  $B$  anterior. Es una matriz  $2 \times 2$ . Tiene un único autovalor,  $\lambda = 4$ , de multiplicidad algebraica 2, o, dicho de otra manera,  $B$  tiene 2 autovalores, contando multiplicidad,  $\lambda_1 = 4$  y  $\lambda_2 = 4$ .

2. Si  $A$  tiene  $m$  autovalores diferentes,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , sus autovectores correspondientes,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  son linealmente independientes.

**Ejemplo.** En el ejemplo anterior de la matriz  $A$ , tiene dos autovalores diferentes simples,  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Sus autovectores asociados son  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$ , respectivamente, que son linealmente independientes.

3. Si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$ , entonces multiplicidad geométrica de  $\lambda \leq$  multiplicidad algebraica de  $\lambda$ ,  $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$ .

**Ejemplo.** En el ejemplo anterior de la matriz  $A$ . Tiene dos autovalores simples,  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Los subespacios de autovectores tienen dimensión 1. Se cumple  $mg(-2) = 1 \leq ma(-2) = 1$ ,  $mg(1) = 1 \leq ma(1) = 1$ .

### Cuestiones

5. Si  $A$  es una matriz  $2 \times 2$ , ¿puede tener un autovalor de multiplicidad algebraica 1 y geométrica 2?
6. Demuestra que si  $A$  tiene dos autovalores distintos y sus autovectores correspondientes son  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ , estos vectores son linealmente independientes.

### 6.3. Matriz diagonalizable

Los autovalores y autovectores de una matriz  $A$  nos permiten descomponer la matriz  $A$  en producto de matrices, como vemos a continuación.

**Definición 6.9. Matriz diagonalizable.** *Una matriz  $A$ ,  $n \times n$ , es diagonalizable si existe una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $M$ , tales que  $D = M^{-1}AM$ .*

Si  $A$  es diagonalizable,  $D = M^{-1}AM$  y  $A = MDM^{-1}$ .

**Teorema 6.10.** *Una matriz  $A$ ,  $n \times n$ , es diagonalizable si y sólo si tiene  $n$  autovectores linealmente independientes.*

Estos autovectores forman una base de  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ .

**Teorema 6.11.** *Una matriz  $A$ ,  $n \times n$ , tiene  $n$  autovectores linealmente independientes si y sólo si la multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor de  $A$  coinciden. Es decir, si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  son los autovalores distintos de  $A$ , se cumple  $mg(\lambda_1) = ma(\lambda_1), mg(\lambda_2) = ma(\lambda_2), \dots, mg(\lambda_m) = ma(\lambda_m)$ .*

Si  $A$  es diagonalizable, la matriz diagonal,  $D$ , tiene los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  en la diagonal,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

y la matriz invertible,  $M$ , tiene los autovectores correspondientes linealmente independientes,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ , en sus columnas,

$$M = (\vec{v}_1 \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n), \quad (6.23)$$

y se cumple  $D = M^{-1}AM$ .

**Corolario 6.12. Si una matriz tiene todos sus autovalores distintos, es diagonalizable.** *Si los autovalores de  $A$  son todos distintos ( $m = n$ ), entonces son simples, es decir, de multiplicidad algebraica 1, y entonces se cumple  $mg(\lambda_1) = ma(\lambda_1) = 1, mg(\lambda_2) = ma(\lambda_2) = 1, \dots, mg(\lambda_n) = ma(\lambda_n) = 1$  y  $A$  es diagonalizable.*

**Corolario 6.13.** *Si una matriz  $A$ ,  $n \times n$ , es diagonalizable, existe una base de  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ , formada por los  $n$  autovectores linealmente independientes,  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ .*

### Ejemplos

1. En el ejemplo de la matriz  $A$ ,  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$  son los dos autovalores de  $A$ , que son distintos, entonces simples, entonces  $mg(\lambda_1) = ma(\lambda_1) = 1$ ,  $mg(\lambda_2) = ma(\lambda_2) = 1$ , entonces  $A$  es diagonalizable. Son autovectores asociados,  $\vec{v}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1)$ . Podemos conseguir una base de  $\mathbb{R}^2$  formada por autovectores de  $A$ :  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ . Entonces, las matrices  $D$ ,  $M$  y  $M^{-1}$ , son,

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Se cumple,  $D = M^{-1}AM$ . Es más fácil verificar que  $MD = AM$ ,

$$MD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = AM.$$

2. En el caso de la matriz  $B$ . Tiene un único autovalor doble,  $\lambda = 4$ ,  $ma(4) = 2$ . El subespacio de autovectores es:  $E_4 = \mathcal{L}\{(1, 0)\}$ ,  $dim(E_4) = 1$ , entonces  $mg(\lambda) = mg(4) = 1$ .  $mg(4) \neq ma(4)$ , la matriz no es diagonalizable, no podemos conseguir una base formada por autovectores.

### Cuestiones

7. Si  $A$  es diagonalizable, con matriz diagonal  $D$  y matriz de paso  $M$ , demuestra que  $D = M^{-1}AM$ .
8. Despeja  $A$  de la expresión  $D = M^{-1}AM$ .

#### 6.3.1. Relación con aplicaciones lineales

En el capítulo anterior vimos que las aplicaciones lineales son funciones de la forma  $\vec{y} = A\vec{x}$ . Si  $A$  es una matriz cuadrada,  $n \times n$ , diagonalizable,  $A = MDM^{-1}$ . Sustituyendo  $A$  por  $MDM^{-1}$  en la expresión de la aplicación lineal,  $\vec{y} = MDM^{-1}\vec{x}$ . Multiplicando

por  $M^{-1}$  a ambos lados de la igualdad,  $M^{-1}\vec{y} = M^{-1}MDM^{-1}\vec{x}$ . Se cumple:  $M^{-1}\vec{y} = DM^{-1}\vec{x}$ .

Al ser diagonalizable la matriz  $A$ , existe una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ , y la matriz  $M$  tiene estos autovectores en sus columnas. La matriz  $M$  es la matriz de cambio de base de la base  $\mathcal{B}$  a la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_c$ .  $M^{-1}$  es la matriz de cambio de base de la canónica a  $\mathcal{B}$ . Entonces,  $M^{-1}\vec{y} = \vec{y}_{\mathcal{B}}$ ,  $M^{-1}\vec{x} = \vec{x}_{\mathcal{B}}$ . Entonces, se cumple,  $\vec{y}_{\mathcal{B}} = D\vec{x}_{\mathcal{B}}$ , es decir, la matriz de la aplicación asociada a la matriz  $A$  considerando la base  $\mathcal{B}$  para los vectores  $\vec{y}$  y  $\vec{x}$ , es diagonal.

### Ejemplo

En el ejemplo de la matriz  $A$ ,  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$  son los dos autovalores de  $A$ , que son distintos, entonces simples, entonces  $mg(\lambda_1) = ma(\lambda_1) = 1$ ,  $mg(\lambda_2) = ma(\lambda_2) = 1$ , entonces  $A$  es diagonalizable. Son autovectores asociados,  $\vec{v}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1)$ . Podemos conseguir una base de  $\mathbb{R}^2$  formada por autovectores de  $A$ :  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ . Entonces, las matrices  $D$ ,  $M$  y  $M^{-1}$ , son,

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

La aplicación lineal asociada a la matriz  $A$  es:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Cambiamos de base los vectores  $\vec{y}$  y  $\vec{x}$ .  $\vec{y}_{\mathcal{B}} = M^{-1}\vec{y}$  y  $\vec{x}_{\mathcal{B}} = M^{-1}\vec{x}$ . Sustituimos  $A$  por  $MDM^{-1}$ , multiplicamos por la izquierda por  $M^{-1}$ , y obtenemos,  $M^{-1}\vec{y} = DM^{-1}\vec{x}$ ,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Se cumple, que cada coordenada de la variable dependiente dependen sólo de la misma coordenada de la variable independiente.

### Cuestiones

9. Si la matriz  $A$  no es diagonalizable, ¿se pueden hacer estos cambios de base en los vectores  $\vec{y}$  y  $\vec{x}$  para llegar a una relación con las variables desacopladas? Razona la respuesta.

## 6.4. Motivación revisitada

Tenemos una varilla cilíndrica de masa  $m$  y longitud  $l$  colocada en cierta posición  $\vec{u}$ , de forma que la matriz del momento de inercia es,

$$\mathbb{I}_g = \frac{1}{12}ml^2A, \quad (6.28)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.29)$$

y el momento de la fuerza o momento del par es,

$$\vec{\tau} = \mathbb{I}_g\vec{\alpha}, \quad (6.30)$$

donde  $\vec{\alpha}$  es la aceleración angular. Esta expresión se puede escribir de la forma,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{24}ml^2\alpha_1 + \frac{1}{24}ml^2\alpha_2, \\ \tau_2 &= \frac{1}{24}ml^2\alpha_1 + \frac{1}{24}ml^2\alpha_2, \\ \tau_3 &= \frac{1}{12}ml^2\alpha_3, \end{aligned} \quad (6.31)$$

donde  $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^t$  y  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^t$ . Vamos a cambiar el sistema de referencia o base en la que están expresados  $\vec{\tau}$  y  $\vec{\alpha}$ , para que en dicha referencia cada componente del momento del par dependa únicamente de la misma componente de la aceleración angular. Para ello vamos a diagonalizar la matriz  $A$ .

Calculamos sus autovalores,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(1 - \lambda)(\lambda - \sqrt{2}) = 0.$$

Los autovalores son  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda_3 = \sqrt{2}$ , todos simples.

Calculamos los autovectores.

Para  $\lambda = 0$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Las ecuaciones cartesianas del subespacio de autovectores asociado a  $\lambda = 0$  son,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0, \quad (6.33)$$

$$z = 0, \quad (6.34)$$

y las paramétricas,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

Para  $\lambda = 1$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

Las ecuaciones cartesianas del subespacio de autovectores asociado a  $\lambda = 1$  son,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)y = 0, \quad (6.37)$$

que son equivalentes a  $x = 0, y = 0$ , y las paramétricas son,

$$x = 0,$$

$$y = 0,$$

$$z = \alpha,$$

o,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.38)$$

Para  $\lambda = \sqrt{2}$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.39)$$

Las ecuaciones cartesianas del subespacio de autovectores asociado a  $\lambda = \sqrt{2}$  son,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0, z = 0, \quad (6.40)$$

que son equivalentes a  $x - y = 0, z = 0$ , y las paramétricas son,

$$x = \alpha,$$

$$y = \alpha,$$

$$z = 0,$$

o,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.41)$$

Al ser un cambio de referencia o base físico buscamos que la nueva base sea también ortonormal, por ello vamos a dividir por la norma de sus vectores que ya son ortogonales y la nueva base es,

$$\mathcal{B} = \left\{ \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, 1), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}. \quad (6.42)$$

La matriz de paso  $M$  es,

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.43)$$

y la matriz diagonal  $D$  es,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (6.44)$$

Se cumple  $A = MDM^{-1}$ , sustituyendo en la expresión del momento del par,

$$\vec{\tau} = \frac{1}{12}ml^2MDM^{-1}\vec{\alpha}, \quad (6.45)$$

y multiplicando por  $M^{-1}$  a ambos lados de la igualdad,

$$M^{-1}\vec{\tau} = \frac{1}{12}ml^2 M^{-1}MDM^{-1}\vec{\alpha}, \quad (6.46)$$

tenemos,

$$M^{-1}\vec{\tau} = \frac{1}{12}ml^2 DM^{-1}\vec{\alpha}, \quad (6.47)$$

recordamos el cambio de base,  $\vec{\tau}_{\mathcal{B}} = M^{-1}\vec{\tau}$  y  $\vec{\alpha}_{\mathcal{B}} = M^{-1}\vec{\alpha}$ , hemos llegado a la expresión de la fuerza o momento del par en coordenadas de la base  $\mathcal{B}$ ,

$$\vec{\tau}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{12}ml^2 D\vec{\alpha}_{\mathcal{B}}, \quad (6.48)$$

$$\vec{\tau}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{12}ml^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \vec{\alpha}_{\mathcal{B}}, \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0, \\ \tau_2 &= \frac{1}{12}ml^2\alpha_2, \\ \tau_3 &= \frac{\sqrt{2}}{12}ml^2\alpha_3. \end{aligned} \quad (6.50)$$

La posición de la varilla está en la dirección del vector  $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ , porque en esa dirección no se produce ninguna fuerza, porque si movemos en esa dirección no se produce ningún movimiento angular. Es la dirección del autovector asociado al autovalor 0.

En muchas cuestiones de física, diagonalizar equivale a cambiar el sistema de referencia por otro sistema con los vectores rotados cierto ángulo. El resultado es que la ecuación, antes más complicada, se simplifica mucho, porque no se mezclan componentes. La elección del sistema de referencia es arbitraria, de modo que siempre interesa buscar el que deja el problema más sencillo. Además, aunque aquí se ejemplifica con una varilla, se puede hacer lo mismo con cualquier sólido. Siempre hay un sistema de referencia en que la matriz es diagonal. Los vectores de este sistema de referencia se llaman ejes principales de inercia.

# Bibliografía

- [1] J. de Burgos. Álgebra Lineal. McGraw-Hill, Madrid, 1995.
- [2] G. Harel. Principles of learning and teaching mathematics with particular reference to the learning and teaching of linear algebra: old and new observations. En J. L. Dorier (ed.): On the teaching of linear algebra (pp. 177- 189). Dordrchet: Kluwert, 2000.
- [3] G. Harel. DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. ZDM Mathematics Education 40, 487-500, 2008.
- [4] G. Harel. A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. ZDM Mathematics Education 40, 893-907, 2008.
- [5] E. Hernández. Álgebra y Geometría. Addison-Wesley, Madrid, 1994.
- [6] C. A. Rincón Orta, A. S. Granados Aguilar, E. L. Fautsch Tapia, S. Y. L. Rubín Rivero, M. Vázquez Islas, A. F. Díaz García. Álgebra Superior. McGraw-Hill, México, 2014.
- [7] G. Strang. Introduction to Linear Algebra. Cambridge University Press, 2017.  
<http://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/>
- [8] D. C. Lay. Álgebra lineal y sus aplicaciones. Prentice-Hall, Madrid, 2001.
- [9] A. de la Villa. Problemas de Álgebra. CLAGSA, Madrid, 1998.

- [10] H. Herrero and A. Díaz-Cano. Informática aplicada a las Ciencias y a la Ingeniería a con MATLAB. ETSII de Ciudad Real-EÑE, Ciudad Real, 2000.

# Apéndice A

## Ejercicios

### 1. Números complejos

1. Escribe un número complejo de cada cuadrante del plano y de cada eje.
2. Opera las siguientes expresiones, escribiendo el resultado en forma binómica, y representa en el plano los números resultantes:

|                               |                              |                                                |                               |
|-------------------------------|------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------|
| $a) (1+i) - 7i$               | $b) 1/2 + 2 + 3i$            | $c) 3 + 5i - (1 + \pi i)$                      | $d) (1+i) \cdot (7i)$         |
| $e) 0,5 \cdot (2 + 3i)$       | $f) (3 + 5i) \cdot (1 + ei)$ | $g) \frac{1}{1 + 5i}$                          | $h) \frac{3 + 2i}{4 + 3i}$    |
| $i) \frac{3 + 5i}{1 + \pi i}$ | $j) \frac{1 + i}{-7i}$       | $k) (2 + 3i)^3$                                | $l) (e + \pi i)^{-2}$         |
| $m)  1 + i $                  | $n)  3i $                    | $o)  1 + \pi i $                               | $p) \overline{1 + 7i}$        |
| $q) \overline{3i}$            | $r) \overline{3}$            | $s) \frac{(1+i)i - (\overline{7-2i})}{5+i-7i}$ | $t) \frac{(2+3i)(7-2i)}{i^5}$ |

3. Expresa en las formas exponencial y trigonométrica los siguientes números complejos:

$$a = 4 - 4i, b = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, c = i, d = 2 + i, f = 5, g = -1 - \pi i.$$

4. Opera las siguientes potencias, utilizando la forma exponencial, y expresando el resultado en forma binómica:  $(4 - 4i)^{11}$ ,  $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^{25}$ ,  $i^{37}$ ,  $(2 + i)^{10}$ ,  $5^3$ ,  $(-1 - \pi i)^{55}$ .
5. Opera los siguientes productos y cocientes, utilizando la forma exponencial, y expresando el resultado en forma binómica: a)  $i(1 + 5i)$ , b)  $(3 + 2i)(4 + 3i)$ , c)  $(1 + i)(-7i)$ , d)  $\frac{1}{1 + 5i}$ , e)  $\frac{3 + 2i}{4 + 3i}$ , f)  $\frac{1 + i}{-7i}$ .

6. Calcula las siguientes raíces: a)  $(1+i)^{1/5}$ , b)  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1/6}$ , c)  $(1-\sqrt{3}i)^{1/7}$ ,  
d)  $(-3)^{1/4}$ , e)  $i^{1/9}$ , f)  $(-1+i)^{1/3}$ .
7. Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binómica,  
a)  $(1+i)^{10}$ , b)  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{26}$ , c)  $\ln(1-\sqrt{3}i)$ , d)  $\ln(-3)$ , e)  $e^{1+\frac{\pi}{3}i}$ , f)  $i^{3825}$ , g)  $(-1+i)^{-i}$ ,  
h)  $(i)^{2-2i}$ , i)  $\ln(-3-5i)$ .
8. Halla los valores de  $z \in \mathbb{C}$ , tales que, a)  $e^z = -5$ , b)  $e^{2z} = -\sqrt{3}+i$ , c)  $\ln z = \frac{\pi}{4}i$ ,  
d)  $\ln(3z) = (1-\sqrt{3}i)$ , e)  $2e^{3z} = -5$ , f)  $z^3 = -\sqrt{3}+i$ , g)  $5 \ln(2z) = \frac{\pi}{4}i$ ,  
h)  $z^2 = -3i$ .
9. Halla los complejos  $z = x + iy$ , tales que, a)  $2z + 3 = \ln(1+i)$ , b)  $\frac{1+i}{1-i} = xe^{iy}$ .

## 2. Vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales

10. Dados los siguientes vectores,  $\vec{u} = (1, 2)$ ,  $\vec{v} = (-2, \pi)$ ,  $\vec{w} = (3, -1)$ . Calcula:  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{w}$ ,  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ ,  $2\vec{u}$ ,  $-\sqrt{2}\vec{w}$ ,  $\pi\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w}$ ,  $2\vec{u} + 10\vec{v}$ ,  $5\vec{u} - e\vec{w}$ .
11. Si  $\vec{u} + \vec{v} = (2, 1)$  y  $\vec{u} - \vec{v} = (1, 3)$ , calcula  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
12. Si  $\vec{u} = (1, 2, 3)$  y  $\vec{v} = (1, 1, 1)$ , calcula  $\alpha$  y  $\beta$ , tales que, el vector  $(3, 4, 5)$  sea combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , es decir,  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (3, 4, 5)$ .
13. ¿Es el vector  $(3, 2, 1, 2)$  combinación lineal de  $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$  y  $\vec{v} = (1, 0, -1, 0)$ ?  
¿Y el vector  $(5, 4, 3, 3)$ ?
14. Escribe un vector que sea combinación lineal de los vectores,  
 $(1, 1, 1, 0, 0)$ ,  $(2, \pi, 5, -3, -1)$  y  $(0, 1, 0, -1, 1)$ .
15. ¿Es cada uno de los siguientes vectores:  $(1/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ ,  $(\pi, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ ,  $(27, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 5/4, 3/2, 7/4, 2, 9/4)$  combinación lineal de los vectores  $\vec{u} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  y  $\vec{v} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ ?
16. Se consideran las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcula,  $2A + 5B^T$ ,  $B \cdot A$ ,  $A \cdot B$ ,  $B - 3C$ ,  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $C^2$ ,  $C^{-1}$  y  $A + B + C$ , si es posible. Calcula el rango de las matrices, y el determinante de las que sea posible.

17. Dado el vector  $\vec{x} = (1, 2)$ , y la matriz  $B$ ,

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ -1 & b \end{pmatrix}.$$

Se pide, calcular,  $B \cdot \vec{x}^t$ ,  $\vec{x} \cdot B \cdot \vec{x}^t$ ,  $B^2$ ,  $B^4$ , y, si es posible, la inversa de la matriz  $B$ .

18. Calcula  $A^{10}$  siendo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

19. Decimos que una matriz es ortogonal si cumple,  $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$ .

a) Demuestra que si  $A$  es una matriz ortogonal su inversa también lo es.

b) Comprueba que, tanto  $A$ , como su inversa, son ortogonales siendo,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

20. Dadas las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcula el determinante y el rango de todas las matrices de este ejercicio. En aquellas que tengan determinante igual a cero, indica las filas y/o columnas que sean linealmente dependientes. Halla la inversa de aquellas matrices que sea posible mediante la fórmula de adjunta traspuesta partido por el determinante, y mediante el método de Gauss-Jordan.

21. Escribe una matriz rectangular de tamaño  $3 \times 2$ , una matriz columna con 5 filas, una matriz diagonal  $2 \times 2$ , una matriz triangular superior  $4 \times 4$ , una matriz triangular inferior  $3 \times 3$ , una matriz nula  $5 \times 2$ . Halla sus traspuestas, rangos, y determinantes en los casos que sea posible.

22. Se consideran las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprueba que,  $(AB)^T = B^T A^T$ , y que,  $(A + B^T)^T = A^T + B$ .

23. Determina si son iguales las siguientes matrices  $A$  y  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 1-1 & 6-2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2^2 & -2 & 1 \\ -2-1 & 0 & 4 \\ 1+1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Calcula los determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix},$$

$$e) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad f) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

25. Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix},$$

sabiendo que,

$$\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 100.$$

26. Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c-b \\ d+2g-a & e+2h-b & f-e+2i-2h-c+b \\ g & h & i-h \end{vmatrix},$$

sabiendo que,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 100.$$

27. Halla el rango de la matriz  $A$  en función del parámetro  $\lambda$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

28. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss, y el método de Gauss-Jordan, en los casos que sea posible.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 e) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases} & \quad f) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 11 \\ 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases} & \quad g) \begin{cases} x_1 - x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \\
 h) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases} & \quad i) \begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ x + 2z = -1 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases} & \quad j) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 6z = 8 \\ 3x + 6y + 9z = 12 \end{cases}
 \end{aligned}$$

29. Una red consiste en un conjunto de puntos, llamados nodos, con líneas o arcos, denominados ramas, que conectan a algunos o todos los nodos, y representan los flujos. La dirección del flujo se indica en cada arco y la cantidad (o tasa) de flujo se muestra o se denota por medio de una variable. El supuesto básico del flujo de redes es la conservación del flujo, es decir, el flujo que entra a la red es el mismo que sale de la red, y el flujo entrante en un nodo es igual al flujo saliente del nodo. Plantea el sistema de ecuaciones que cumplen los flujos de la red que se muestra en la figura (A.1). Resuelve el sistema en general. Suponiendo que todos los flujos son no negativos ¿cuál es el máximo valor posible para  $x_3$ ? [8]

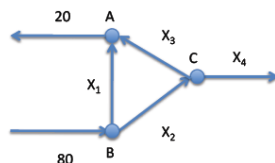


Figura A.1: Flujo de tráfico en calles.

30. Flujos en redes de tuberías entre depósitos o reactores. Un problema parecido encontramos cuando planteamos balances de masa para una sustancia que no reacciona y se mueve por tuberías entre varios depósitos o reactores. Esto se puede hacer teniendo en cuenta el caudal,  $Q$  (en  $\text{m}^3/\text{min}$ ), que entra o sale de un depósito, y la concentración de sustancia,  $C$  (en  $\text{kg}/\text{m}^3$ ), en cada depósito. La cantidad de sustancia que entra o sale de un depósito y fluye por la tubería será  $F = QC$  (en  $\text{kg}/\text{min}$ ). Una red en este caso consiste en un conjunto de

depósitos, con líneas o arcos denominados ramas que conectan a algunos o todos los depósitos. La dirección del flujo se indica en cada arco y el caudal que entra o sale se indica con su valor en cada arco. La concentración en cada depósito se denota con una variable. El supuesto básico del flujo de redes es la conservación del flujo, es decir, el flujo que entra en la red es el mismo que sale de la red, y el flujo entrante en un depósito es igual al flujo saliente del depósito.

a) Por ejemplo, en la figura (A.2) se muestra una red con cinco depósitos conectados por tuberías. En cada depósito se tiene una concentración de sustancia, y en cada tubería se indica su caudal y la dirección del flujo. Así  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , son las concentraciones de sustancia en los depósitos,  $D_1, \dots, D_5$ . Para realizar los balances nos fijamos en cada depósito, de manera que el flujo que entra tiene que ser igual al que sale. Así, en el depósito  $D_1$  entra  $10c_3$  y sale  $2c_1 + 8$ , el balance resultante es,  $10c_3 = 2c_1 + 8$ , hacemos la misma operación con cada depósito,

$D_2$ : entra  $2c_1 + 2c_4 + 3$  y sale  $3c_2 + 4c_3$ , el balance es  $2c_1 + 2c_4 + 3 = 3c_2$ ,

$D_3$ : entra  $3c_2 + 6c_4 + 1$  y sale  $10c_3$ , el balance es  $3c_2 + 6c_4 + 1 = 10c_3$ ,

$D_4$ : entra  $3c_5 + 5$  y sale  $2c_4 + 6c_3$ , el balance es  $3c_5 + 5 = 2c_4 + 6c_3$ ,

$D_5$ : entra  $4c_2$  y sale  $3c_5 + 1$ , el balance es  $4c_2 = 3c_5 + 1$ .

Halla las concentraciones de sustancia en cada depósito.

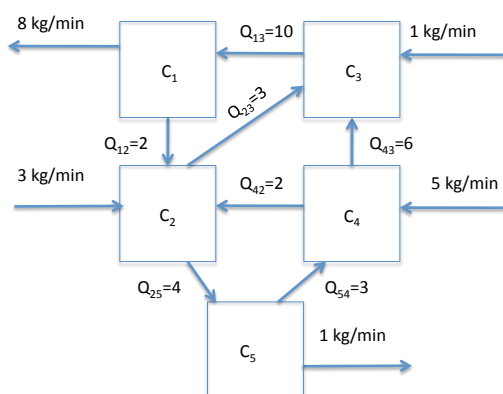


Figura A.2: Red de flujo entre depósitos.

- b) Encuentra el patrón de flujo general de la red de tuberías entre reactores que se muestra en la figura (A.3). Resuelve el sistema. ¿Qué reactor tiene la máxima concentración de sustancia si  $Q_3 = 20 \text{ m}^3/\text{min}$ ?

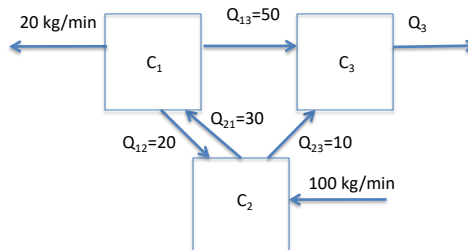


Figura A.3: Red de flujo entre reactores.

31. Balances de reacciones químicas. Las ecuaciones químicas describen las cantidades de sustancias consumidas y producidas por las reacciones químicas. Un método sistemático para calcular los coeficientes estequiométricos de ecuaciones químicas consiste en establecer una ecuación que describa el número de átomos de cada tipo presente en una reacción. El supuesto básico es la conservación de los átomos. El balance no es único, entre los posibles balances, los químicos prefieren usar una ecuación cuyos coeficientes sean los números enteros más pequeños posibles.

- a) Por ejemplo, cuando se quema gas propano,  $(C_3H_8)$ , este se combina con oxígeno,  $(O_2)$ , para formar dióxido de carbono,  $(CO_2)$ , y agua,  $(H_2O)$ , de acuerdo con una ecuación de la forma,  $x_1C_3H_8 + x_2O_2 \rightarrow x_3CO_2 + x_4H_2O$ . Para realizar el balance de esta ecuación, hay que encontrar los números enteros,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$ , tales que, el número total de átomos de carbono,  $(C)$ , hidrógeno,  $(H)$ , y oxígeno,  $(O)$ , situados a la izquierda sea igual al número correspondiente de átomos ubicados a la derecha (porque los átomos no se crean ni se destruyen en la reacción). Hacemos el balance para cada elemento:

para  $C$ : en los reactivos de la izquierda tenemos  $3x_1$  y en los productos de la derecha  $x_3$ , el balance es,  $3x_1 = x_3$ ,

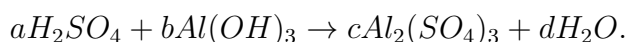
para  $H$ : en la izquierda  $8x_1$  y en la derecha  $2x_4$ , el balance es,  $8x_1 = 2x_4$ ,

para  $O$ : en la izquierda  $2x_2$  y en la derecha  $2x_3 + x_4$ , el balance es,  $2x_2 = 2x_3 + x_4$ .

Resuelve el sistema en general y escribe la reacción balanceada.

- b) En presencia del ácido sulfúrico,  $(H_2SO_4)$ , el bromato potásico,  $(KBrO_3)$ , oxida al bromuro potásico,  $(KBr)$ , para obtener bromo,  $(Br_2)$ , sulfato potásico,  $(K_2SO_4)$ , y agua,  $(H_2O)$ . Se pide ajustar dicha reacción química,  $x(H_2SO_4) + y(KBrO_3) + z(KBr) \rightarrow t(Br_2) + v(K_2SO_4) + x(H_2O)$ . Plantea el balance y resuélvelo.

- c) Encuentra los coeficientes estequiométricos de la siguiente reacción:



32. Cierta producto químico se produce con tres reactivos diferentes,  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Estos reactivos tienen que estar disueltos en agua separadamente antes de reaccionar, para formar el producto químico. Supongamos que la solución de  $x$  cm<sup>3</sup> que contiene 2 g/cm<sup>3</sup> de  $A$ , combinada con la solución de  $y$  cm<sup>3</sup> que contiene  $B$  a 4 g/cm<sup>3</sup>, combinada con la solución de  $z$  cm<sup>3</sup> que contiene  $C$  a 2 g/cm<sup>3</sup>, produce 18 g del producto. Cambiando las proporciones de  $A$ ,  $B$  y  $C$ , a 2, 5 y 3 g/cm<sup>3</sup>, respectivamente, se producen 23 g de producto. Y si las proporciones son, 1, 2 y 4 g/cm<sup>3</sup>, respectivamente, se obtienen 15 g de producto. Calcula los volúmenes (en cm<sup>3</sup>) de las soluciones que contienen  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
33. Se quiere hacer una dieta a base de verduras, carnes blancas y lácteos, que contenga 100 g de proteínas, 50 g de grasas y 120 g de hidratos de carbono. 100 g de lácteos tienen 3,3 g de proteínas, 3,8 g de grasa y 5 g hidratos de carbono. 100 g de verduras tienen 3,3 g de proteínas, 0,2 g de grasa, y 13 g de hidratos de carbono. 100 g de carnes blancas tienen 20 g de proteínas, 2 g de grasa, 0 g de hidratos de carbono. ¿Qué cantidad de cada tipo de producto tenemos que tomar para conseguir ese aporte de proteínas, grasas e hidratos de carbono?

### 3. Espacios vectoriales

34. Dados los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 : x = 0\}; S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 2z = 0\}; \\ S_3 &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 3y = -z\}; S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}; \\ S_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2x = 0\}; S_6 = \{(x, y, z, t, u, v, w) \in \mathbb{R}^7 : x = y \text{ ó } y = z\}. \end{aligned}$$

- a) ¿De qué conjunto son subconjuntos?
- b) Escribe dos elementos de cada conjunto.
- c) Define un subconjunto de cada conjunto.

35. Escribe un vector que sea combinación lineal de

- a)  $\vec{u}_1 = (1, -1)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 3)$ ,  $\vec{u}_3 = (3, -2)$ .
- b)  $\vec{v}_1 = (2, 2, -1)$ ,  $\vec{v}_2 = (4, 4, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 0, -1)$ .
- c)  $\vec{w}_1 = (3, -1, 2, 0)$ ,  $\vec{w}_2 = (2, 1, 3, 5)$ .

36. Determina si el vector  $\vec{u} = (7, 5, -2)$ , es combinación lineal de alguno de estos conjuntos de vectores de  $\mathbb{R}^3$ :

- a)  $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 3, -1)$ ,  $\vec{u}_3 = (5, 3, -2)$ .
- b)  $\vec{v}_1 = (2, 2, -1)$ ,  $\vec{v}_2 = (4, 4, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 0, -1)$ .
- c)  $\vec{w}_1 = (4, 3, 1)$ ,  $\vec{w}_2 = (1, 1, 4)$ .

37. Escribe tres vectores que pertenezcan a cada uno de los espacios generados siguientes:

- a)  $W_1 = \mathcal{L}\{(2, -3)\}$ , b)  $W_2 = \mathcal{L}\{(1, -1, 0), (0, 2, 1)\}$ , c)  $W_3 = \mathcal{L}\{(1, -1, -1, 1)\}$ ,
- d)  $W_4 = \mathcal{L}\{(1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ , e)  $W_5 = \mathcal{L}\{(1, 1), (1, -1)\}$ .

38. Determina si cada uno de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  es subespacio vectorial:

- a)  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ , b)  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 2z = 0\}$ ,
- c)  $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y = -z\}$ , d)  $S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ ó } y = z\}$ ,

- e)  $S_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y+2x = 0, z = 5x\}$ , f)  $S_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 0\}$ ,  
 g)  $S_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1\}$ , h)  $S_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$ .

39. Estudia la independencia lineal de los vectores de  $\mathbb{R}^3$ :

a)  $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 3, -1)$ ,  $\vec{u}_3 = (5, 3, -2)$ .

b)  $\vec{v}_1 = (2, 2, -1)$ ,  $\vec{v}_2 = (4, 4, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 0, -1)$ .

c)  $\vec{w}_1 = (3, -1, 2)$ ,  $\vec{w}_2 = (2, 1, 3)$ ,  $\vec{w}_3 = (0, 1, 1)$ .

En cada caso, determina las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio que generan. Busca además una base de dichos subespacios y, cuando proceda, complétalas a una base de  $\mathbb{R}^3$ .

40. Determina una base,  $\mathcal{B}$ , y las ecuaciones paramétricas del subespacio  $S$  de  $\mathbb{R}^4$ , dado por las ecuaciones,

$$\begin{cases} x & -y & +z & -t & = & 0 \\ 2x & +2y & -z & -t & = & 0 \\ 4x & & +z & & = & 0 \\ 3x & +y & & +t & = & 0 \end{cases}$$

Encuentra una base de  $\mathbb{R}^4$  que contenga a  $\mathcal{B}$ .

41. Encuentra una base de  $\mathbb{R}^4$  que contenga a los vectores  $(0, 1, 1, 1)$  y  $(1, 1, 0, 1)$ .

42. Determina una base y las ecuaciones paramétricas y cartesianas de los espacios  $F$  y  $G$  generados por,

$$\{(1, -1, 1, 2), (0, 1, 3, 1)\}, \{(1, 0, 4, 3), (1, 1, 0, -1)\},$$

respectivamente.

43. Determina una base, las coordenadas del vector que  $\vec{u}$  en dicha base, la dimensión y las ecuaciones paramétricas y cartesianas de los subespacios siguientes:

a)  $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ ,  $\vec{u} = (2, -2, 0)$ .

b)  $W_2 = \{(t, 2t, 3t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}, \vec{u} = (2, 4, 6).$

c)  $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}, \vec{u} = (3, 3, 3).$

d)  $V_2 = \{(0, y, y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}, \vec{u} = (0, -2, -2).$

e)  $V_3 = \{(z, z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}, \vec{u} = (2, 2, 2).$

f)  $V_5 = \mathcal{L}\{(0, 1, 1), (1, 2, 3)\}, \vec{u} = (1, 3, 4).$

g)  $W \equiv 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \vec{u} = (2, -1, -3).$

h)

$$V = \begin{cases} x_1 = \lambda - \gamma \\ x_2 = \mu \\ x_3 = \mu + 2\gamma \end{cases} \quad \vec{u} = (0, 1, 3).$$

44. Consideramos el espacio vectorial real  $\mathbb{R}^3$  y los vectores,  $\vec{u} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, 1)$  y  $\vec{w} = (0, a, 1)$ .

- Indica para que valores de  $a$  el conjunto  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  es linealmente dependiente, y para cuáles linealmente independiente.
- Para los valores de  $a$  para los que sean linealmente dependientes halla las ecuaciones paramétricas y cartesianas del espacio generado por  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  ( $W = \mathcal{L}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ ) y una base de dicho espacio.
- Completa la base anterior a una base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Escribe un vector de  $W$  y un vector que no esté en  $W$ .
- Escribe el vector  $(1, 1, 5)$  como suma de un vector de  $W$  y otro no de  $W$ .

45. Dados los vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $\vec{u}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 1)$  y  $\vec{u}_3 = (3, 3)$ .

- Escribe un vector que sea combinación lineal de esos vectores.
- ¿Son  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  y  $\vec{u}_3$  linealmente independientes?
- Halla las ecuaciones paramétricas y cartesianas del espacio generado por  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_3\}$  ( $W = \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_3\}$ ).
- Halla una base de  $W$ , escribe un vector de  $W$  y sus coordenadas en esa base.

46. Dados los subespacios de soluciones de los problemas de balances de reacciones químicas del ejercicio 31, demuestra que son subespacios de dimensión 1, escribe las ecuaciones cartesianas y paramétricas, y una base de dichos subespacios.
47. Dados algunos sistemas de ecuaciones lineales del ejercicio 28, se pueden escribir de la forma,

$$a) \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g) \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$h) \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Comprueba la existencia o no de soluciones, demostrando que el término independiente pertenece o no al subespacio vectorial generado por las columnas de la matriz del sistema.

48. Plantea el sistema de ecuaciones lineales que cumplen los flujos de tráfico de la red que se muestran en la siguiente figura A.4, donde  $x_i$  representa el número de vehículos que circulan por esa parte de calle  $i$  en una hora. Resuelve el sistema y escribe la solución general en forma vectorial. ¿A que espacio vectorial pertenecen

los vectores solución? Escribe un vector solución numérico. Considera el sistema homogéneo, y escribe las ecuaciones cartesianas y paramétricas del subespacio de soluciones del sistema homogéneo.

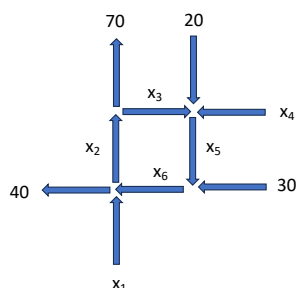


Figura A.4: Red de tráfico.

49. Plantea el sistema de ecuaciones lineales que cumplen los flujos de tráfico de la red que se muestran en la figura A.1, donde  $x_i$  representa el número de vehículos que circulan por esa parte de calle  $i$  en una hora, y suponiendo que no se conoce el flujo que vale 80, en su lugar es una variable incógnita,  $x_5$ , ni el flujo que vale 20, en su lugar es una variable incógnita,  $x_6$ . Resuelve el sistema y escribe la solución general en forma vectorial. ¿A qué espacio vectorial pertenecen los vectores solución? Escribe las ecuaciones cartesianas y paramétricas del subespacio de soluciones del sistema. Escribe un vector solución numérico.

**4. Espacios vectoriales euclídeos**

50. Dados los vectores  $\vec{u} = (1, 1, -1, -5)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, 2, 1)$ ,  $\vec{w} = (1, -2, 0, 1)$ ,  $\vec{h} = (1, 2, 1, 2)$ .

- Calcula los productos escalares,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{w}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{h}$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{h}$ ,  $\vec{w} \cdot \vec{h}$ .
- Calcula las normas,  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$ ,  $\|\vec{w}\|$ ,  $\|\vec{h}\|$ .
- ¿Puede ser negativo el producto escalar de dos vectores? ¿Puede ser negativa la norma de un vector?
- Calcula las distancias  $d(\vec{u}, \vec{v})$ ,  $d(\vec{u}, \vec{w})$ ,  $d(\vec{u}, \vec{h})$ ,  $d(\vec{v}, \vec{w})$ ,  $d(\vec{v}, \vec{h})$ ,  $d(\vec{w}, \vec{h})$ . ¿Qué dos vectores están más alejados? ¿Y cuáles más cercanos?
- Escribe un vector ortogonal al vector  $\vec{u}$ , otro ortogonal a  $\vec{v}$ , otro ortogonal a  $\vec{w}$  y otro ortogonal a  $\vec{h}$ .
- Escribe una base ortogonal de  $\mathbb{R}^4$  que no sea ortonormal.
- Escribe una base ortonormal de  $\mathbb{R}^4$  que no sea la canónica.

51. Determina una base ortonormal para el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  generado por:

- $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (5, 3, -2)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, -1, 0)$ .
- $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (3, 2, 3)$ .
- $\vec{w}_1 = (3, -1, 2)$ ,  $\vec{w}_2 = (1, 0, 2)$ ,  $\vec{w}_3 = (-2, 1, 0)$ .

Encuentra además las ecuaciones cartesianas de cada subespacio, y las ecuaciones cartesianas de los subespacios, tales que, todos sus vectores son ortogonales a los de cada subespacio.

52. En  $\mathbb{R}^4$ , con su producto escalar usual, se pide:

- Determina un vector unitario que sea ortogonal a los vectores,  $(1, 2, 1, 0)$ ,  $(0, -1, 1, 0)$  y  $(1, 1, -2, 1)$ .
- Obtén una base ortonormal para,

$$V = \mathcal{L}\{(1, 2, -1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, -2, 1)\}.$$

53. Sea  $H$  el subespacio de  $\mathbb{R}^4$  definido por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y - z - 2t = 0 \\ 2x + y - 2z - t = 0 \\ 2x + 7y - 2z - 7t = 0 \end{cases}$$

- a) Determina las ecuaciones paramétricas de  $H$ , y una base ortonormal suya.
- b) Calcula la proyección ortogonal sobre  $H$  del vector  $u = (2, -2, 3, -3)$ .
- c) Determina una base ortonormal de  $\mathbb{R}^4$  que contenga a la base de  $H$  hallada anteriormente.
- d) Halla el subespacio complemento ortogonal de  $H$ .
- e) Repite lo mismo en  $\mathbb{R}^3$  con el vector  $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$  y el subespacio,

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

54. Utilizando el producto escalar usual de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$ , encuentra el complemento ortogonal de  $W$ , siendo:

$$\text{a) } W = \mathcal{L}\{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ con } \vec{u} = (1, 0, 1), \vec{v} = (2, -1, 1), \text{ b) } W \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

55. Sea  $H$  el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  definido por la ecuación cartesiana,  $x + 2y - z = 0$ .

- a) Determina las ecuaciones paramétricas de  $H$  y una base ortonormal suya.
- b) Calcula el vector de  $H$  más próximo a  $\vec{u} = (1, 1, 1)$ , y la distancia de  $\vec{u}$  a  $H$ .
- c) Encuentra una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  que contenga a la base hallada anteriormente.

56. Consideramos el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  con el producto escalar usual, y  $H$  el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  definido por la ecuación cartesiana,  $x - 2y = 0$ .

- a) Determina una base ortonormal de  $H$ .
- b) Calcula el vector de  $H$  más próximo a  $\vec{u} = (1, 3)$ , y la distancia de  $\vec{u}$  a  $H$ .

- c) Encuentra una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  que contenga a la base hallada anteriormente.
57. Se quiere hacer una dieta a base de verduras, carnes blancas y lácteos, que contenga 100 g de proteínas, 50 g de grasas y 120 g de hidratos de carbono. Si una persona toma 110 g de proteínas, 60 g de grasas y 120 g de hidratos de carbono, y otra persona toma 100 g de proteínas, 50 g de grasas y 140 g de hidratos de carbono. ¿Cuál de las dos personas se acerca más a lo que se quiere?
58. Se quiere hacer una dieta a base de verduras, carnes blancas y lácteos, que contenga  $t$  g de proteínas,  $t/4$  g de grasas y  $t/2$  g de hidratos de carbono. 100 g de lácteos tiene 3,3 g de proteínas, 3,8 g de grasa, 5 g hidratos de carbono. 100 g de verduras tiene 3,3 g de proteínas, 0,2 g de grasa, 13 g de hidratos de carbono. 100 g de carnes blancas tienen 20 g de proteínas, 2 g de grasa, 0 g de hidratos de carbono. ¿Qué cantidad de cada tipo de producto tenemos que tomar para conseguir ese aporte alimentario? Si una persona toma 110 g de proteínas, 60 g de grasas y 120 g de hidratos de carbono, y otra persona toma 100 g de proteínas, 50 g de grasas y 140 g de hidratos de carbono. ¿Cuál de las dos personas se acerca más a las proporciones que se quieren?

## 5. Aplicaciones lineales

59. Sea  $\vec{f}$  la aplicación lineal dada por:  $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1, x_1 - x_3)$ . Encuentra la matriz de  $\vec{f}$ .
60. Escribe la matriz giro de  $180^\circ$  en sentido antihorario, y, dados los vectores de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = (1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 0)$ ,  $\vec{w} = (-2, 1)$ , gíralos utilizando dicha matriz.
61. Escribe la matriz giro de  $180^\circ$  horario, y, dados los vectores de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = (1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 0)$ ,  $\vec{w} = (-2, 1)$ , gíralos utilizando dicha matriz.
62. Escribe la matriz giro de  $180^\circ$  en sentido antihorario y la matriz de contracción por  $1/3$ . Dados los vectores de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = (1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 0)$ ,  $\vec{w} = (-2, 1)$ , gíralos utilizando dicha matriz de giro y, a continuación, aléjalos con la matriz de contracción. ¿Que matriz realiza las dos transformaciones a la vez?
63. Escribe la matriz giro de  $45^\circ$  en sentido horario y la matriz de simetría. Dados los vectores de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = (1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 0)$ ,  $\vec{w} = (-2, 1)$ , gíralos utilizando dicha matriz de giro y, a continuación, calcula su vector simétrico con la matriz de simetría. ¿Que matriz realiza las dos transformaciones a la vez?
64. Dadas las siguientes aplicaciones lineales:

$$\vec{f}(x, y) = (x - y, x + y); \quad \vec{g}(x, y) = (-y, x).$$

- a) Escribe las matrices asociadas a cada aplicación lineal.
- b) Escribe la aplicación lineal composición y la matriz asociada.
65. Halla la matriz de paso de la base  $\mathcal{B}_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$ , a la base  $\mathcal{B} = \{(2, 3), (-3, -4)\}$ , y la matriz de paso de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_c$ . Si el vector  $\vec{x}$  tiene por coordenadas  $(1, 1)_{\mathcal{B}_c}$ , en la base  $\mathcal{B}_c$ , ¿qué coordenadas tiene en la base  $\mathcal{B}$ ? Si el vector  $\vec{y}$  tiene por coordenadas  $(5, 0)_{\mathcal{B}}$ , en la base  $\mathcal{B}$ , ¿qué coordenadas tiene en la base  $\mathcal{B}_c$ ?
66. Halla la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  a la base  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ , y la matriz de cambio de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_c$ . Si el vector  $\vec{x}$

tiene por coordenadas  $(1, 1, 5)_{\mathcal{B}_c}$ , en la base  $\mathcal{B}_c$ , ¿qué coordenadas tiene en la base  $\mathcal{B}$ ? Si el vector  $\vec{y}$  tiene por coordenadas  $(1, 5, 0)_{\mathcal{B}}$ , en la base  $\mathcal{B}$ , ¿qué coordenadas tiene en la base  $\mathcal{B}_c$ ?

67. Halla la matriz de cambio de base  $\mathcal{B}_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  a la base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (-1, 3, 5), (-2, 1, 2)\}$ , y la matriz de cambio de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_c$ . Si el vector  $\vec{x}$  tiene por coordenadas  $(1, 1, 5)_{\mathcal{B}_c}$ , en la base  $\mathcal{B}_c$ , ¿qué coordenadas tiene en la base  $\mathcal{B}$ ? Si el vector  $\vec{y}$  tiene por coordenadas  $(1, 5, 0)_{\mathcal{B}}$ , en la base  $\mathcal{B}$ , ¿qué coordenadas tiene en la base  $\mathcal{B}_c$ ?
68. Si  $H = \mathcal{L}\{(0, 1, 1), (1, 0, -1)\}$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . Calcula la matriz de la aplicación proyección ortogonal sobre  $H$ , y la proyección sobre  $H$  del vector  $(1, -1, 7)$ .
69. Si  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ . Calcula la matriz de la aplicación proyección ortogonal sobre  $W$ , y la proyección sobre  $W$  del vector  $(1, 7)$ .
70. Si  $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z = 0\}$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^4$ . Calcula la matriz de la aplicación proyección ortogonal sobre  $S$ , y calcula la proyección sobre  $S$  del vector  $(1, -1, 7, 3)$ .

## 6. Autovalores y autovectores

71. Halla los valores y vectores propios de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

72. Genética. Los genotipos se pueden clasificar en 3 grupos:  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ . La probabilidad de que un individuo de tipo  $T_j$  tenga progenie del tipo  $T_i$  es  $p_{ij}$ , lo que da lugar a la matriz de probabilidades de transición,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/18 \\ 0 & 1/2 & 8/18 \\ 0 & 1/4 & 9/18 \end{pmatrix}.$$

Esto quiere decir, por ejemplo, que la probabilidad de que un individuo del tipo  $T_2$  tenga progenie del tipo  $T_3$  es  $p_{32} = 1/4$ . Los individuos del tipo  $T_1$  sólo

tienen progenie de ese mismo tipo. Si  $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  es la proporción inicial de

tipos  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ , la distribución en la siguiente generación estará dada por el vector  $\vec{u}_1 = P\vec{u}_0$ . Análogamente, la distribución al cabo de  $n$  generaciones vendrá dada por el vector  $\vec{u}_n = P^n\vec{u}_0$ , es decir, la matriz de probabilidades de

transición al cabo de  $n$  generaciones es  $P^n$ . Si  $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ , o sea, hay el mismo

número de individuos de cada tipo, halla la distribución al cabo de 10, 20, 40 y 60 generaciones e interpreta los resultados. Utiliza diagonalización de matrices.

73. El buscador de Internet Google, para ordenar las páginas que ha encontrado en las que aparece la palabra buscada por orden de ‘importancia’, sigue el siguiente criterio: la importancia de una página es proporcional a las importancias de las

páginas que tienen enlace a ella, con la misma constante de proporcionalidad. Por ejemplo, si buscamos el término ‘ajo blanco’, supongamos que se encuentra en 3 páginas (en Internet podrían ser millones), una de Sevilla, otra de Ciudad Real y otra de Jaén. Queremos ordenar estas páginas según importancia, llamemos a sus importancias respectivas:  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . Se producen los siguientes enlaces:

- Aparecen enlaces a la página de Sevilla en las páginas de Ciudad Real y Jaén. Siguiendo el criterio, esto quiere decir que,  $x_1 = K(x_2 + x_3)$ .
- Aparecen enlaces a la página de Ciudad Real en la página de Jaén. Siguiendo el criterio, esto quiere decir que,  $x_2 = Kx_3$ .
- Aparecen enlaces a la página de Jaén en la página de Ciudad Real. Siguiendo el criterio, esto quiere decir que,  $x_3 = Kx_2$ .

Si escribimos en forma matricial el problema resultante, tenemos,

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= \frac{1}{K}x_1, \\ x_3 &= \frac{1}{K}x_2, \\ x_2 &= \frac{1}{K}x_3, \end{aligned}$$

lo podemos escribir de la forma,  $A\vec{x} = \frac{1}{K}\vec{x}$ , donde  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$  y  $A$  es la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Si llamamos  $\lambda = 1/K$ , y se cumple que  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ , ¿qué son la inversa de la constante de proporcionalidad ( $\lambda = 1/K$ ) y el vector de importancias  $\vec{x}$ , con respecto a la matriz  $A$ ? b) Calcula los autovalores y autovectores de  $A$ . c) ¿Es diagonalizable la matriz  $A$ ? Razona la respuesta. d) En caso de que fuera diagonalizable, escribe la matriz diagonal y la matriz de paso  $P$ , tal que  $D = P^{-1}AP$ . e) La matriz  $A$  tiene un autovalor positivo y su correspondiente autovector es también positivo, este autovector determina las importancias de las páginas. Si

las páginas aparecen ordenadas de mayor a menor importancia, ¿en qué orden aparecerían en la página de resultados de la búsqueda de Google las direcciones de las páginas de las distintas ciudades?

74. Señala cuáles de las siguientes matrices pueden reducirse a una matriz diagonal, y encuentra la matriz diagonal y la matriz de cambio de base:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

75. Determina para que valores  $a, b \in \mathbb{R}$ , la matriz  $A$  es diagonalizable, siendo  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

76. Dada la matriz  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos números reales. Estudia para que valores de  $\alpha$  y  $\beta$  la matriz  $A$  es diagonalizable, y, para aquellos valores para los que sea diagonalizable, halla la matriz diagonal y la matriz de paso correspondientes.

77. Estudia para qué valores de los parámetros  $a$  y  $b$ , reales, la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

es diagonalizable, y calcula, en ese caso, la matriz diagonal y la matriz de paso.

78. Si tenemos una varilla cilíndrica de masa  $M$  y longitud  $L$ , colocada en la posición  $\vec{u}$ . Hacemos girar la varilla de forma antihoraria en torno a su centro de masas

formando un plano. El tensor (matriz) momento de inercia es,

$$\mathbb{I}_g = \frac{1}{12}ML^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

y el momento de la fuerza o momento del par es,  $\vec{\tau} = \mathbb{I}_g \vec{\alpha}$ , donde  $\vec{\alpha}$  es la aceleración angular. Se pide:

- Escribe la expresión de cada componente de  $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ , en función de las componentes de  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , según la relación  $\vec{\tau} = \mathbb{I}_g \vec{\alpha}$ .
- Calcula los autovalores y los subespacios de autovectores correspondientes de la matriz  $\mathbb{I}_g$ .
- ¿Es diagonalizable  $\mathbb{I}_g$ ? En caso de ser diagonalizable, escribe la matriz diagonal  $D$ , la matriz de paso,  $M$ , tales que,  $D = M^{-1}\mathbb{I}_g M$ .
- Si llamamos  $\mathcal{B}'$  a la base formada por los autovectores calculados en el apartado anterior y  $\mathcal{B}_c$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , escribe la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}_c$  a  $\mathcal{B}'$  y la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}_c$ . Si el vector  $\vec{v}$  tiene coordenadas en la base canónica  $\vec{v} = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}_c}$ , ¿qué coordenadas tiene en la base  $\mathcal{B}'$ ? Si el vector  $\vec{w}$  tiene coordenadas en la base  $\mathcal{B}'$ ,  $\vec{w} = (0, 3, -1)_{\mathcal{B}'}$ , ¿qué coordenadas tiene en la base  $\mathcal{B}_c$ ?
- En la expresión,  $\vec{\tau} = \mathbb{I}_g \vec{\alpha}$ , los vectores  $\vec{\tau}$  y  $\vec{\alpha}$  están expresados en coordenadas de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Cambia la base en la que están expresados los vectores  $\vec{\tau}$  y  $\vec{\alpha}$  a la base  $\mathcal{B}'$  y escribe la expresión de cada una de las componentes de  $\vec{\tau}_{\mathcal{B}'}$  en función de las componentes de  $\vec{\alpha}_{\mathcal{B}'}$  en la nueva base (en esta base  $\mathcal{B}'$  cada componente del momento del par depende únicamente de la misma componente de la aceleración angular).
- ¿En que posición  $\vec{u}$  estaba colocada la varilla inicialmente?

# Apéndice B

## Soluciones de las cuestiones

### Cuestiones. Números complejos

1. Escribe 3 números complejos, uno con las dos partes, real e imaginaria, distintas de cero, otro real y otro imaginario puro.  $i + 1$ ,  $2$ ,  $3i$ .
2. Dados los números complejos:  $1 - i$ ,  $2 + \sqrt{3}i$ ,  $-3i$ ,  $7$ ,  $e$ . Escribe la parte real e imaginaria y los complejos conjugados de cada número.  $Re(1-i) = 1$ ,  $Im(1-i) = -1$ ,  $Re(2 + \sqrt{3}i) = 2$ ,  $Im(2 + \sqrt{3}i) = \sqrt{3}$ ,  $Re(-3i) = 0$ ,  $Im(-3i) = -3$ ,  $Re(7) = 7$ ,  $Im(7) = 0$ ,  $Re(e) = e$ ,  $Im(e) = 0$ .
3. Calcula las soluciones de las ecuaciones de segundo grado:  $2x^2 - 3x + 5 = 0$ ,  $x^2 + 5x + 7 = 0$ .  $3/4 \pm \sqrt{31}i/4$ ,  $-5/2 \pm \sqrt{3}i/2$ .
4. Suma, resta, multiplica y divide los números complejos  $2 + 3i$  y  $6 + i$ .  $8 + 4i$ ,  $-4 + 2i$ ,  $9 + 20i$ ,  $15/37 + 16i/37$ .
5. Suma, resta, multiplica y divide los números complejos  $2 + 3i$  y  $2i$ .  $2 + 5i$ ,  $2 + i$ ,  $-6 + 4i$ ,  $3/2 - i$ .
6. Suma, resta, multiplica y divide los números complejos  $2 + 3i$  y  $6.8 + 3i$ .  $-4 + 3i$ ,  $12 + 18i$ ,  $1/3 + i/2$ .
7. Suma, resta, multiplica y divide los números complejos  $3i$  y  $-2i$ .  $i$ ,  $5i$ ,  $6$ ,  $-3/2$ .

8. Si dividimos el plano en cuatro cuadrantes.  $Q_1$ : vectores  $(x, y)$ , tales que  $x \geq 0, y \geq 0$ ,  $Q_2$ : vectores  $(x, y)$ , tales que  $x \leq 0, y \geq 0$ ,  $Q_3$ : vectores  $(x, y)$ , tales que  $x \leq 0, y \leq 0$ ,  $Q_4$ : vectores  $(x, y)$ , tales que  $x \geq 0, y \leq 0$ . Escribe un número complejo de cada cuadrante del plano.  $1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$ .
9. Escribe un número complejo que se sitúe en el eje de abscisas, y otro en el de ordenadas.  $6, 2i$ .
10. Escribe en forma polar los siguientes números complejos:  $1 + 2i, 4 - 4i, -4 - 4i, -2 + 2i, -7i, 4i, \pi, -3$ .  $1 + 2i = \sqrt{5}_{1,1071}, 4 - 4i = \sqrt{32}_{-\pi/4}, -4 - 4i = \sqrt{32}_{5\pi/4}, -2 + 2i = \sqrt{8}_{3\pi/4}, -7i = 7_{-\pi/2}, 4i = 4_{\pi/2}, \pi = \pi_0, -3 = 3_{\pi}$ .
11. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:  $5_1 = 5, 2_{\pi} = -2, 3_{-\pi/4} = 3\sqrt{2}/2 - 3\sqrt{2}/2i, \sqrt{3}_{\pi/2} = \sqrt{3}i$ .
12. Escribe en forma exponencial los siguientes números complejos:  $1 + 2i = \sqrt{5}e^{i1,1071}, 4 - 4i = \sqrt{32}e^{-i\pi/4}, -4 - 4i = \sqrt{32}e^{i5\pi/4}, -2 + 2i = \sqrt{8}e^{i3\pi/4}, -7i = 7e^{-i\pi/2}, 4i = 4e^{i\pi/2}, \pi = \pi e^{i0}, -3 = 3e^{i\pi}$ .
13. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:  $5e^i = 5(\cos(1) + i \sin(1)), 2e^{i\pi} = -2, 3e^{-ip\pi/4} = 3\sqrt{2}/2 - 3\sqrt{2}/2i, \sqrt{3}e^{i\pi/2} = \sqrt{3}i$ .
14. Dados los números complejos en forma exponencial  $2e^{i\pi}, 3e^{-i\pi/4}$ , multiplícalos, divídelos y elévalos a la potencia 10.  $6e^{i3\pi/4}, 2e^{i5\pi/4}/3, (2e^{i\pi})^{10} = 2^{10}e^{i10\pi}, (3e^{-i\pi/4})^{10} = 3^{10}e^{-i5\pi/2}$ .
15. Calcula,  $\sqrt[5]{-2} = 2^{1/5}e^{i(\pi/5 + 2k\pi/5)}, k = 0, 1, 2, 3, 4$ .  
 $\sqrt[4]{1 + i} = 2^{1/8}e^{i(\pi/16 + k\pi/2)}, k = 0, 1, 2, 3$ .
16. Escribe en forma binómica las siguientes exponenciales de números complejos:  $e^{1+i} = e(\cos(1) + i \sin(1)), e^{2i} = \cos(2) + i \sin(2), e^{3-3i} = e^3(\cos(-3) + i \sin(-3)), e^{\pi+5i} = e^{\pi}(\cos(5) + i \sin(5))$ .
17. Calcula y escribe el resultado en forma binómica:  $\ln(-5) = \ln(5) + i\pi, \ln(2i) = \ln(2) + i\pi/2, \ln(3 - 3i) = \ln(\sqrt{18}) - i\pi/4$ .

18. ¿Son iguales  $\frac{1+i}{i}$  y  $1-i$ ? Sí.
19. Calcula  $z = x + iy$ , para que se cumpla la ecuación:  $3z - 2 = e^{i\pi}$ .  $x = 1/3$ ,  $y = 0$ ,  
 $z = 1/3$ .

### Cuestiones. Vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1. Escribe un vector con 10 componentes.  $\vec{v} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0)$ .
2. Escribe su vector traspuesto.

$$\vec{v}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Escribe una combinación lineal de los vectores  $(1, 1)$  y  $(3, 5)$ .  $(4, 6)$ .
4. Escribe una combinación lineal de los vectores  $(2, 4, 6, 2)$ ,  $(1, 1, 1, 0)$  y  $(1, 2, 0, 1)$ .  
 $(4, 7, 7, 3)$ .  $(8, 14, 14, 6)$ .
5. ¿Es el vector  $(2, 4, 6, 2)$  combinación lineal de los vectores  $(1, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 2, 0, 1)$  y  $(0, 0, 1, 0)$ ? Sí, puestos en una matriz, su determinante es 0.
6. ¿Es el vector  $(2, 4, 6, 2)$  combinación lineal de los vectores  $(1, 0, 0, 0)$  y  $(1, 2, 0, 1)$ ?  
 No, puestos en una matriz su rango es 3.

7. Escribe una matriz real de tamaño  $4 \times 2$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

8. Escribe una matriz real de tamaño  $2 \times 5$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Escribe una matriz diagonal  $4 \times 4$ .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

10. Escribe una matriz triangular superior  $3 \times 3$ .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. ¿Son iguales las matrices siguientes?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

No, una es  $2 \times 2$  y la otra  $2 \times 3$ .

12. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 27 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$x = 9, y = 3, z = 1, t = -6.$$

13. Escribe dos matrices  $2 \times 2$ ,  $A$  y  $B$ , y calcula  $A + B$ ,  $2A$ ,  $AB$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 18 & -15 \end{pmatrix}.$$

14. Escribe dos matrices,  $A$ , de tamaño  $3 \times 1$ , y  $B$ , de tamaño  $1 \times 3$ , calcula  $AB$  y  $BA$ , y comprueba que  $AB \neq BA$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 12 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 15 \end{pmatrix}, AB \neq BA.$$

15. Escribe dos matrices  $2 \times 2$ ,  $A$  y  $B$ , comprueba las cuatro propiedades de la trasposición anteriores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

$$(A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A, (A + B)^t = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = A^t + B^t,$$

$$(2A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 2A^t, (AB)^t = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 18 & -15 \end{pmatrix} = B^t A^t.$$

16. Escribe una matriz simétrica  $3 \times 3$ .

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 17 . Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

comprueba para  $A$  las propiedades de los determinantes 1, 2, 4, 5 y 6, y para  $A$  y  $B$ , la propiedad 8 y 9.

$$1. \det(A) = 3 = \det(A^t),$$

$$2. \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3, \text{ intercambiando dos filas,}$$

$$3. \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0, \text{ dos filas son iguales,}$$

$$4. \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 = 6, \text{ multiplicando la primera fila de } A \text{ por } 2,$$

$$5. \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot 3 = 12, \text{ multiplicando toda la matriz } A \text{ por } 2,$$

$$6. \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ sustituyendo la segunda fila de } A \text{ por } F_1 + F_2,$$

$$7. \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ una fila es nula,}$$

$$8. \det(B) = 1, \det(AB) = 3 = \det(A)\det(B),$$

$$9. \det(A + B) = -14 \neq 3 + 1.$$

18. Demuestra que si  $A$  y  $B$  son matrices  $n \times n$  de números reales invertibles, entonces  $AB$  es invertible y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Si  $A$  y  $B$  son invertibles,  $\det(A) \neq 0$ ,  $\det(B) \neq 0$ , entonces  $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$ , entonces es invertible. Se cumple  $(AB)^{-1}AB = I$ , por la definición de matriz inversa. Multiplicamos por la izquierda por  $B^{-1}$  a ambos lados de la igualdad, y tenemos,

$$(AB)^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}, \text{ entonces } (AB)^{-1}A = B^{-1}.$$

Multiplicamos por la izquierda por  $A^{-1}$  a ambos lados de la igualdad,

$$(AB)^{-1}AA^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \text{ y llegamos a la igualdad que se pedía: } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

19. Demuestra que  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ . Se cumple  $AA^{-1} = I$ , tomando determinante a ambos lados de la igualdad,  $\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$ . Se cumple  $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = 1$ , despejando  $\det(A^{-1})$  tenemos la igualdad pedida.
20. Si la matriz  $A$  es de tamaño  $7 \times 28$ , ¿puede tener rango 15? No, el máximo posible es 7.
21. Si la matriz  $B$  es de tamaño  $14 \times 5$ , ¿puede tener rango 2? Sí, su rango puede valer entre 0 y 5.
22. Escribe un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas inhomogéneo, su forma matricial y su matriz ampliada.

$$x - 2y = 3,$$

$$2x + 3y = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. Escribe un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas homogéneo, su forma matricial y su matriz ampliada.

$$x - 2y = 0,$$

$$2x + 3y = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. El vector fila tercera resultante del proceso de eliminación gaussiana es combinación lineal de los vectores fila de la matriz inicial  $(A|b)$ , escribe dicha combinación lineal.  $F_3 - 2F_1$ .
25. El vector fila segunda resultante del proceso de eliminación gaussiana es combinación lineal de los vectores fila de la matriz inicial  $(A|b)$ , escribe dicha combinación lineal.  $2F_2 - F_1$ .

26. El vector fila primera resultante del proceso de Gauss-Jordan es combinación lineal de las filas de la matriz inicial  $(A|b)$ , escribe dicha combinación lineal. La primera combinación lineal es  $7F_1 + F_3$ , la siguiente es  $7(7F_1 + F_3) + F_2$ ,  $F_2$  también sufrió una transformación  $7F_2 - F_3$ , la combinación final dividiendo por 98 es:  $(7(7F_1 + F_3) + 7F_2 - F_3)/98 = (49F_1 + 7F_2 + 6F_3)/98$ .
27. El vector fila segunda resultante del proceso de Gauss-Jordan es combinación lineal de las filas de la matriz inicial  $(A|b)$ , escribe dicha combinación lineal.  $(7F_2 - F_3)/(-49)$ .
28. Escribe tres sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que sean, uno compatible determinado, otro compatible indeterminado con un grado de libertad y otro incompatible.

$$2x + 4y + 6z = 5,$$

$$x = 3,$$

$$x + 2y = 0.$$

$$2x + 4y + 6z = 2,$$

$$x + 2y + 2z = 1,$$

$$x + 2y = 1.$$

$$2x + 4y + 6z = 2,$$

$$x + 2y + 2z = 2,$$

$$x + 2y = 1.$$

29. Escribe dos sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas homogéneos que sean, uno compatible determinado y otro compatible indeterminado con 2 grados de libertad.

$$2x + 4y + 6z = 0,$$

$$x = 0,$$

$$x + 2y = 0.$$

$$2x + 4y + 6z = 0,$$

$$x + 2y + 3z = 0,$$

$$-x - 2y - 3z = 0.$$

### Cuestiones. Espacios vectoriales

1. Escribe dos elementos de cada conjunto.  $(1, 1), (3, -1) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(1, 1, 1), (3, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$ ,  $(-1, 0, 1, 1), (2, 3, 4, 5) \in \mathbb{R}^4$ .
2. Escribe vectores que no pertenezcan a cada conjunto.  $(1, 1, 1) \notin \mathbb{R}^2$ ,  $(1, 1) \notin \mathbb{R}^3$ ,  $(2, 3, 4, 5, 6, 7) \notin \mathbb{R}^4$ .
3. Escribe dos elementos de cada conjunto.  $(1, -1), (-3, 3) \in S_1$ ,  $(2, 1), (3, 2) \in S_2$ ,  $(3, 0, 1), (2, 3, -4) \in S_3$ ,  $(2, 8, 1, 0), (0, 0, 0, 0) \in S_4$ ,  $(1, 0, 0, 0, 0), (0, 3, 1, 23) \in S_5$ .
4. Escribe vectores que no pertenezcan a cada conjunto.  $(2, -1) \notin S_1$ ,  $(2, 2) \notin S_2$ ,  $(3, 0, -1) \notin S_3$ ,  $(2, 8, 1, 5) \notin S_4$ ,  $(1, 2, 0, 0, 0) \notin S_5$ .
5. Escribe un conjunto que contenga los números pares entre 1 y 10.  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ .
6. Escribe en un conjunto los vectores de  $\mathbb{R}^2$ , tales que sus dos componentes son iguales.  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$ .
7. Escribe dos elementos de cada conjunto espacio vectorial de los ejemplos anteriores.  $(1, 1), (3, -1) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(1, 1, 1), (3, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$ ,  $(-1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0), (2, 3, 4, 5, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^8$ .
8. Súmalos, multiplícalos por un número y calcula las correspondientes combinaciones lineales. Suma:  $(4, 0)$ ,  $(4, -1, 2)$ ,  $(1, 3, 5, 6, 1, 1, 1, 1)$ ; multiplicación por 2 y 3, respectivamente:  $(2, 2)$ ,  $(9, -13)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(9, -6, 3)$ ,  $(-2, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(6, 9, 13, 15, 3, 3, 3, 3)$ ; combinación lineal sumando los anteriores:  $(11, -11)$ ,  $(11, -4, 5)$ ,  $(4, 9, 15, 17, 3, 3, 3, 3)$ .
9. Escribe tres vectores de  $\mathbb{R}^7$  y un vector que sea combinación lineal de ellos.  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ ,  $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ ,  $(4, 5, 4, 5, 4, 5, 4)$ .

10. ¿Es el vector  $(1, 2, 3, 4, 5)$  combinación lineal de los vectores  $(1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 1, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 0, 1, 1)$  y  $(0, 0, 0, 0, 1)$ ? Sí, es la suma de todos los vectores.
11. Escribe dos elementos de cada conjunto espacio generado de los ejemplos anteriores,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $S_1$ .  $(1, 1), (2, 2) \in H_1$ ,  $(1, 2, 0), (3, 5, 0) \in H_2$ ,  $(-1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1) \in S_1$ .
12. Escribe vectores que no pertenezcan a cada espacio generado de los ejemplos anteriores,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $S_1$ .  $(2, 3) \notin H_1$ ,  $(1, 1, 1) \notin H_2$ ,  $(1, 1, 1, 1, 1) \notin S_1$ .
13. Escribe un espacio generado por los vectores que quieras.  $S = \mathcal{L}\{(1, 1), (1, 0)(2, 3)\}$ .
14. El conjunto  $C = \{(1, 1), (1, -1), (0, 0), (-1, 1)\}$ , ¿es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ ? Si sumamos  $(1, 1) + (1, -1) = (2, 0) \notin C$ , no puede ser subespacio vectorial porque la suma no es una operación interna del conjunto, nos salimos del conjunto.
15. ¿Cuántos elementos tienen  $C$ ,  $W_1$  y  $W_2$ , que acabamos de definir?  $C$  tiene 4,  $W_1$  y  $W_2$  infinitos.
16. En el ejemplo anterior, ¿los vectores fila de la matriz  $3 \times 5$  son linealmente dependientes o independientes? Independientes, porque el rango de la matriz es 3, y hay 3 vectores fila.
17. ¿Y los vectores columna? Dependientes, porque el rango de la matriz es 3, y hay 5 vectores columna, sólo 3 de ellos son linealmente independientes.
18. Escribe la base canónica de  $\mathbb{R}^4$ .  $\mathcal{B}_e = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ .
19. Escribe una base de  $\mathbb{R}^4$  que no sea la canónica.  
 $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ .
20. Escribe dos vectores del subespacio  $W$  que acabamos de definir.  $(2, 0, 0, 0), (0, -2, 2, 0)$ .
21. Escribe una base de  $W$ . ¿Cuál es la dimensión de  $W$ ?  $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1, 0), (1, 1, -1, 0)\}$ .  
 $\dim(W) = 2$ .
22. Escribe dos vectores del supespacio  $H$  que acabamos de definir.  $(1, -1, 0), (2, -2, 7)$ .

23. ¿El vector  $(0, 0) \in H$ ? No, los elementos de  $H$  son de  $\mathbb{R}^3$ .
24. Dado el subespacio vectorial,  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, t = 0\}$ , ¿cuál es su dimensión? 2.
25. Si  $H$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^{25}$  que tiene 15 ecuaciones cartesianas linealmente independientes, ¿cuál es su dimensión? 10.
26. Dado el subespacio vectorial,  $W = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 11, 12, 0, -15, 125, \pi, 1)\}$ , ¿cuántas ecuaciones implícitas linealmente independientes tiene este subespacio? 15.
27. Si  $H$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^{1000}$  que tiene 150 ecuaciones cartesianas linealmente independientes, ¿cuál es su dimensión? 850.

### Cuestiones. Espacios vectoriales euclídeos

1. Si la composición óptima de cierto producto es  $(5, 4, 3, 3)$ , y contamos con productos con composiciones  $(6, 5, 3, 2)$  y  $(7, 4, 3, 3)$ , ¿cuál de ellos es mejor?  $(6, 5, 3, 2)$ , porque su distancia a  $(5, 4, 3, 3)$  es menor.
2. ¿Que distancia hay entre los vectores/puntos  $(1, 1, 1)$  y  $(0, 0, 0)$ ?  $\sqrt{3}$ .
3. Si los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales a  $\vec{w}$ , demuestra que  $\vec{u} + \vec{v}$  es ortogonal a  $\vec{w}$ .  
 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ .
4. Si los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales, y  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ , ¿son ortogonales  $\vec{u}$  y  $\alpha\vec{v}$ ?  
 Sí,  $\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0$ .
5. ¿Son ortogonales los vectores de los subespacios de  $\mathbb{R}^2$ ,  $W = \{(x, y) / x + y = 0\}$  y  $S = \{(x, y) / x - y = 0\}$ ? Sí, porque los vectores de sus bases son ortogonales  
 $(1, -1) \cdot (1, 1) = 0$ .
6. Si  $V = \mathbb{R}^7$ ,  $\vec{v} = (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$ , escribe las ecuaciones cartesianas del subespacio de vectores ortogonales a  $\vec{v}$ .  $x - y = 0$ .

7. Escribe 3 vectores de  $W = \mathcal{L}\{(1, 1)\}$ , y calcula su distancia al vector  $(1, 3)$ , comprueba que son todas mayores que  $\sqrt{2}$ .  $d((1, 1), (1, 3)) = 2$ ,  $d((3, 3), (1, 3)) = 2$ ,  $d((4, 4), (1, 3)) = \sqrt{10}$ .
8. Si nos dicen que  $\text{proy}_W(2, 27) = (0, 3)$ , ¿puede ser correcto? No, porque si  $(0, 3)$  fuera la proyección, tendría que pertenecer a  $W$ , y una base ortonormal del subespacio  $W$  sería  $\mathcal{B} = \{(0, 1)\}$ , y esa proyección valdría  $(0, 27)$ .

### Cuestiones. Aplicaciones lineales

1. Dado el vector  $(7, -1)$ , ¿en qué vector se transforma por cada una de las aplicaciones lineales de los ejemplos anteriores?  $(4\sqrt{2}, 3\sqrt{2})^t$ ,  $(-7, -1)^t$ ,  $(6, 8)^t$ .
2. ¿Puede ser singular una matriz de cambio de base? ¿por qué? No, porque sus vectores columna forman una base, y son linealmente independientes.
3. Hemos visto cambios de base en los que está involucrada la base canónica, ¿cómo sería la matriz de cambio de base entre dos bases cualesquiera  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$ ? Cambiamos de  $\mathcal{B}_1$  a la canónica, y de la canónica a  $\mathcal{B}_2$ . La matriz del cambio es el producto de las dos matrices.
4. ¿Es cuadrada toda matriz de proyección  $P$ ? Sí.
5. ¿Puede ser singular una matriz de proyección  $P$ ? Razona la respuesta. Sí, a la vista del último ejemplo.

### Cuestiones. Autovalores y autovectores

1. Si  $A$  es una matriz  $4 \times 4$ , ¿puede tener 5 autovalores? No.
2. ¿Puede tener un autovalor  $\lambda = 0$ ? ¿Y un autovector  $\vec{v} = \vec{0}$ ? Sí,  $\lambda = 0$  puede ser autovalor, pero  $\vec{v} = \vec{0}$  no puede ser autovector, es condición de la definición.
3. Si  $A$  es una matriz  $5 \times 5$ , ¿puede su polinomio característico ser de grado 6? ¿Y de grado 4? No, es de grado 5.

4. ¿Y tener 6 raíces distintas? ¿y 2 raíces distintas? Tiene como máximo 5 raíces, no puede tener 6 distintas, pero sí 2 distintas.
5. Si  $A$  es una matriz  $2 \times 2$ , ¿puede tener un autovalor de multiplicidad algebraica 1 y geométrica 2? No, la algebraica siempre es mayor o igual que la geométrica.
6. Demuestra que si  $A$  tiene dos autovalores distintos y sus autovectores correspondientes son  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ , estos vectores son linealmente independientes. Si fueran linealmente dependientes, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_2$ . Aplicando  $A$  a ambos lados de la igualdad,  $A\vec{v}_1 = A\alpha\vec{v}_2$ ,  $\lambda_1\vec{v}_1 = \lambda_2\alpha\vec{v}_2$ , entonces  $\vec{v}_1 = \alpha \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2$ . No puede ser que tenga dos dependencias diferentes, entonces son linealmente independientes.
7. Si  $A$  es diagonalizable, con matriz diagonal  $D$  y matriz de paso  $M$ , demuestra que  $D = M^{-1}AM$ . Se cumple  $MD = AM$ , multiplicando por  $M^{-1}$  por la izquierda a ambos lados de la igualdad se llega a la expresión.
8. Despeja  $A$  de la expresión  $D = M^{-1}AM$ . Multiplicando por  $M$  por la izquierda, y por  $M^{-1}$  por la derecha a ambos lados de la igualdad,  $A = MDM^{-1}$ .
9. Si la matriz  $A$  no es diagonalizable, ¿se pueden hacer estos cambios de base en los vectores  $\vec{y}$  y  $\vec{x}$  para llegar a una relación con las variables desacopladas? Razona la respuesta. No, no existe la base en la que se pueda hacer.



# Apéndice C

## Soluciones de los ejercicios

1.  $1 + i$  en el primer cuadrante,  $-1 + i$  en el segundo,  $-1 - i$  en el tercero,  $1 - i$  en el cuarto. Hay infinitos más en cada cuadrante.

2.

|                                                               |                                  |                                      |                                                    |
|---------------------------------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------------------------|
| a) $1 - 6i$                                                   | b) $5/2 + 3i$                    | c) $2 + (5 - \pi)i$                  | d) $-7 + 7i$                                       |
| e) $1 + 1,5i$                                                 | f) $3 - 5e + (5 + 3e)i$          | g) $\frac{1}{26} - \frac{5}{26}i$    | h) $\frac{8}{25} - \frac{1}{25}i$                  |
| i) $\frac{3 + 5\pi}{1 + \pi^2} + \frac{5 - 3\pi}{1 + \pi^2}i$ | j) $-\frac{1}{7} + \frac{1}{7}i$ | k) $30 + 2i$                         | l) $\frac{e^2 - \pi^2 - 2e\pi i}{(e^2 + \pi^2)^2}$ |
| m) $\sqrt{2}$                                                 | n) $3$                           | o) $\sqrt{1 + \pi^2}$                | p) $1 - 7i$                                        |
| q) $-3i$                                                      | r) $3$                           | s) $-\frac{34}{61} - \frac{53}{61}i$ | t) $17 - 20i$                                      |

3.  $a = 4 - 4i = \sqrt{32}e^{-i\pi/4} = \sqrt{32} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \right),$

$b = -\sqrt{2} + \arctan \sqrt{2}i = 2e^{i3\pi/4} = 2 \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right),$

$c = i = e^{i\pi/2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right),$

$f = 5 = 5e^{i0} = 5 (\cos (0) + i \sin (0)),$

$g = -1 - \pi i = \sqrt{1 + \pi^2}e^{i \arctan(\pi)} = \sqrt{1 + \pi^2} (\cos (\arctan(\pi)) + i \sin (\arctan(\pi))).$

4.

$$\begin{aligned}
a) (4 - 4i)^{11} &= (\sqrt{32}e^{-i\pi/4})^{11} = \sqrt{32}^{11}e^{-i11\pi/4} = \\
&1,898 \cdot 10^8 (\cos(11\pi/4) + i \sin(11\pi/4)) = -1,34 \cdot 10^8 + 1,34 \cdot 10^8 i, \\
b) (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^{25} &= (2e^{i3\pi/4})^{25} = 2^{25}e^{i75\pi/4} = \\
&33554432(\cos(75\pi/4) + i \sin(75\pi/4)) = -2,37 \cdot 10^7 + i2,37 \cdot 10^7, \\
c) i^{37} &= i^{9 \times 4 + 1} = (i^4)^9 i = i, \quad d) (2 + i)^{10} = -237 - 3116i, \\
e) 5^3 &= 125, \quad f) (-1 - \pi i)^{55} = -2,9639 \cdot 10^{28} - 1,0134 \cdot 10^{28}i.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
a) i(1 + 5i) &= e^{i\pi/2}\sqrt{26}e^{1,37i} = -5 + i, \\
b) (3 + 2i)(4 + 3i) &= \sqrt{13}e^{0,59i}5e^{0,64i} = 5\sqrt{13}e^{1,23i} = 6 + 17i, \\
c) (1 + i)(-7i) &= \sqrt{2}e^{i\pi/4}7e^{i\pi/2} = \sqrt{27}e^{i3\pi/4} = -7 + 7i, \\
d) \frac{1}{1 + 5i} &= \frac{1}{\sqrt{26}e^{1,3734i}} = \frac{1}{\sqrt{26}}e^{-1,3734i} = \frac{1}{\sqrt{26}}(\cos(-1,3734) + i \sin(-1,3734)), \\
e) \frac{3 + 2i}{4 + 3i} &= \frac{\sqrt{13}e^{0,588i}}{5e^{0,6435i}} = \frac{\sqrt{13}}{5}e^{-0,0555i} = \frac{\sqrt{13}}{5}(\cos(-0,0555) + i \sin(-0,0555)), \\
f) \frac{1 + i}{-7i} &= \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{7e^{-i\pi/2}} = \frac{\sqrt{2}}{7}e^{i3\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{7}(\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4)).
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
a) (1 + i)^{1/5} &= (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{1/5} = \sqrt{2}^{1/5}e^{i(\pi/4+2k\pi)/5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \\
k = 0, \sqrt{2}^{1/5}e^{i\pi/4/5} &= 2^{1/10}e^{i\pi/20} = 1,06 + i0,17, \\
k = 1, \sqrt{2}^{1/5}e^{i(\pi/4+2\pi)/5} &= 2^{1/10}e^{i9\pi/20} = 0,17 + 1,06i, \\
k = 2, \sqrt{2}^{1/5}e^{i(\pi/4+4\pi)/5} &= 2^{1/10}e^{i\pi/20} = 0,95 + 0,49i, \\
k = 3, \sqrt{2}^{1/5}e^{i(\pi/4+6\pi)/5} &= 2^{1/10}e^{i\pi/20} = -0,76 - 0,76i, \\
k = 4, \sqrt{2}^{1/5}e^{i(\pi/4+8\pi)/5} &= 2^{1/10}e^{i\pi/20} = 0,49 - 0,95i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \quad & (-3)^{1/4} = 3^{1/4}(e^{i\pi})^{1/4} = 3^{1/4}e^{i(\pi+2k\pi)/4}, k = 0, 1, 2, 3, \\
& k = 0, 3^{1/4}e^{i\pi/4} = 3^{1/4}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = 0,93 + 0,93i, \\
& k = 1, 3^{1/4}e^{i(\pi+2\pi)/4} = 3^{1/4}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)) = -0,93 + 0,93i, \\
& k = 2, 3^{1/4}e^{i(\pi+4\pi)/4} = 3^{1/4}(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)) = -0,93 - 0,93i, \\
& k = 3, 3^{1/4}e^{i(\pi+6\pi)/4} = 3^{1/4}(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)) = 0,93 - 0,93i, \\
c) \quad & (1 - \sqrt{3})^{1/7} = (2e^{i(-\pi/3+2k\pi)})^{1/7} = 2^{1/7}e^{i(-\pi/21+2k\pi/7)}, k = 0, \dots, 6, \\
d) \quad & (-3)^{1/4} = (3e^{i(\pi+2k\pi)})^{1/4} = 3^{1/4}e^{i(\pi/4+k\pi/2)}, k = 0, \dots, 3, \\
e) \quad & i^{1/9} = (e^{i(\pi/2+2k\pi)})^{1/9} = e^{i(\pi/18+2k\pi/9)}, k = 0, \dots, 8, \\
f) \quad & (-1 + i)^{1/3} = (\sqrt{2}e^{i(3\pi/4+2k\pi)})^{1/3} = (\sqrt{2})^{1/3}e^{i(\pi/4+2k\pi/3)}, k = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

7. Para calcular el logaritmo principal de un número complejo lo expresamos en forma exponencial. Para calcular la exponencial de un número complejo separamos en el exponente la parte real de la imaginaria,

$$\begin{aligned}
a) \quad & \ln(1 - \sqrt{3}i) = \ln(2e^{-i\pi/3}) = \ln(2) - i\pi/3, \\
b) \quad & \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{26} = i, \\
c) \quad & \ln(1 - \sqrt{3}i) = \ln(2e^{-i\pi/3}) = \ln(2) - i\pi/3, \\
d) \quad & \ln(-3) = \ln(3e^{i\pi}) = \ln(3) + i\pi, \\
e) \quad & e^{1+i\pi/3} = e \cdot e^{i\pi/3} = e(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 1,36 + 2,35i, \\
f) \quad & i^{3825} = i, \\
g) \quad & (-1 + i)^{-i} = e^{\ln(-1+i)^{-1}} = e^{-i\ln(-1+i)} = e^{-i\ln(\sqrt{2}e^{i3\pi/4})} = e^{-i(\ln(\sqrt{2})+i3\pi/4)} = \\
& e^{3\pi/4-i\ln(\sqrt{2})} = e^{3\pi/4}e^{-i\ln(\sqrt{2})} = e^{3\pi/4}(\cos(-\ln(\sqrt{2})) + i\sin(-\ln(\sqrt{2}))) = \\
& 9,92 - 3,58i, \\
h) \quad & i^{2-2i} = e^{\ln(i^{2-2i})} = e^{(2-2i)\ln(e^{i\pi/2})} = e^{(2-2i)i\pi/2} = e^{\pi-i\pi} = -e^{\pi}, \\
i) \quad & \ln(-3 - 5i) = \ln(\sqrt{34}e^{i4,172}) = \ln(\sqrt{34}) + i4,172.
\end{aligned}$$

8. Para resolver una ecuación que tiene la incógnita en el exponente, tomamos logaritmos en los dos lados de la ecuación. Para resolver una ecuación que tiene la

incógnita en un logaritmo, tomamos exponenciales en los dos lados de la igualdad,

$$a) e^z = -\sqrt{3} + i; \ln(e^z) = \ln(-\sqrt{3} + i); z = \ln(2e^{i5\pi/6}) = \ln(2) + i5\pi/6,$$

$$b) e^{2z} = -\sqrt{3} + i; 2z = \ln(-\sqrt{3} + i); z = 0,3466 + 1,309i,$$

$$c) \ln z = i\pi/4; e^{\ln z} = e^{i\pi/4}; z = e^{i\pi/4} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2,$$

$$d) \ln(3z) = (1 - \sqrt{3}i); 3z = e^{1-\sqrt{3}i} = -0,1455 - 0,8943i,$$

$$e) 2e^{3z} = -5; e^{3z} = -5/2; \ln(e^{3z}) = \ln(-5/2); 3z = \ln(5/2e^{i\pi}) = 5/2 + i\pi,$$

$$z = 5/6 + i\pi/3.$$

$$f) z^3 = -\sqrt{3} + i; z = (-\sqrt{3} + i)^{1/3} = (2e^{i5\pi/6})^{1/3} = 2^{1/3}e^{i(5\pi/6+2k\pi)/3}, k = 0, 1, 2,$$

$$z_1 = 2^{1/3}e^{i5\pi/18}; z_2 = 2^{1/3}e^{i17\pi/18}; z_3 = 2^{1/3}e^{i29\pi/18},$$

$$g) 5\ln(2z) = \frac{\pi}{4}i; 2z = e^{i\pi/20}; z = 0,4938 + 0,0782i,$$

$$h) z^2 = -3i; z = (-3i)^{1/2} = (3e^{i(-\pi/2+2k\pi)})^{1/2} = \sqrt{3}e^{i(-\pi/4+k\pi)}, k = 0, 1.$$

9.

$$a) 2z + 3 = \ln(1 + i), 2x - 2yi + 3 = \ln(\sqrt{2}e^{i\pi/4}) = \ln(\sqrt{2}) + i\pi/4;$$

$$2x + 3 = \ln(\sqrt{2}); x = (\ln(\sqrt{2}) - 3)/2; -2y = \pi/4; y = -\pi/8,$$

$$b) \frac{1+i}{1-i} = xe^{iy}; \frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2}; x = 1, y = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$10. a) (-1, 2 + \pi); b) (3, 2 - \pi); c) (2, 1 + \pi); d) (-3\sqrt{2}, \sqrt{2}); e) (\pi - 12, 5\pi + 2));$$

$$f) (-18, 4 + 10\pi); g) (5 - 3e, 10 + e).$$

$$11. \vec{u} = \left(\frac{3}{2}, 2\right), \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -1\right).$$

$$12. \alpha = 1, \beta = 2.$$

$$13. a) \text{ Sí; } b) \text{ No.}$$

$$14. (1, 2, 1, -1, 1).$$

$$15. \text{ Todos lo son.}$$

16.

$$2A + 5B^T = \begin{pmatrix} -14 & 28 \\ 22 & 6 \\ 6 & 13 \\ 7 & -14 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & -10 \\ -10 & 0 & 0 & 5 \\ 20 & 0 & 0 & -10 \\ -10 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

(C.1)

$$C^2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -8 \\ 2 & 5 & 14 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} -0,3125 & 0,1250 & -0,2500 \\ 1,000 & 0,0000 & 1,000 \\ 0,1875 & 0,1250 & -0,2500 \end{pmatrix}.$$

El resto de operaciones planteadas no se pueden realizar.

17.

$$B \cdot \vec{x}^t = \begin{pmatrix} b \\ -1 + 2b \end{pmatrix}; \vec{x} \cdot B \cdot \vec{x}^t = 5b - 2; B^2 = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ -2b & b^2 \end{pmatrix};$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ -4b^3 & b^4 \end{pmatrix}; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/b & 0 \\ 1/b^2 & 1/b \end{pmatrix}, \text{ si } b \neq 0.$$

18.

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. a) Tomamos inversas en ambos lados de la igualdad,  $(A \cdot A^t)^{-1} = (A^t)^{-1}A^{-1} = I^{-1} = I$ , entonces se cumple que  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ , y  $(A^{-1})^tA^{-1} = I$ . Se procede igual con la otra igualdad.

b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; A \cdot A^t = I; A^{-1} \cdot (A^{-1})^t = I.$$

20.  $\det(A) = -2$ ,  $r(A) = 3$ ,  $\det(B) = 0$ ,  $r(B) = 1$ ,  $\det(C) = 0$ ,  $r(C) = 2$ ,  $\det(D) = 0$ ,  $r(D) = 2$ ,  $\det(E) = 0$ ,  $r(E) = 1$ ,  $\det(F) = 0$ ,  $r(F) = 2$ . Calculamos la inversa de la matriz  $A$  mediante Gauss-Jordan, aplicándolo a la matriz ampliada con la identidad,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Las matrices con rango 1 tienen un único vector linealmente independiente, puede ser cualquiera de los vectores que sea distinto del vector  $\vec{0}$ . Las que tienen rango 2 tienen dos vectores linealmente independientes. En la matriz  $C$ , los vectores fila/columna primero y tercero son linealmente independientes. En la matriz  $D$ , los vectores fila/columna primero y segundo son linealmente independientes. En la matriz  $F$ , los vectores fila/columna primero y tercero son linealmente independientes.

21. Hay muchas soluciones, ponemos un ejemplo de cada,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & \pi \\ 0 & 3 & 27 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las traspuestas son,

$$A^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 27 & 0 & 0 \\ \pi & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, F^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(C) = 12, \det(D) = 0, \det(E) = -12, r(A) = 2, r(B) = 1, r(C) = 2, \\ r(D) = 3, r(E) = 3, r(F) = 0.$$

22.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(AB)^t = B^t A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, (A + B^t)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A^t + B.$$

23. Sí son iguales.

24. a) 15, b) 15, c)  $-3$ , d) 0, e) 129, f) 0.

25.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 100.$$

26.

$$\begin{vmatrix} a & b & c-b \\ d+2g-a & e+2h-b & f-e+2i-2h-c+b \\ g & h & i-h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c-b \\ d-a & e-b & f-e-c+b \\ g & h & i-h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c-b \\ 2g & 2h & 2i-2h \\ g & h & i-h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c-b \\ d & e & f-e \\ g & h & i-h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c-b \\ -a & -b & -c+b \\ g & h & i-h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & -b \\ d & e & -e \\ g & h & -h \end{vmatrix} = 100.$$

27.  $\det(A) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)$ . Si  $\lambda = \pm 1$ ,  $r(A) = 2$ , si  $\lambda \neq \pm 1$ ,  $r(A) = 3$ .

28. a)  $(-1, 1, 1)$ , b)  $(1, 0, 1)$ , c)  $(5, -430, 44)$ , d) Una de las infinitas formas de escribir las infinitas soluciones

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

e) Una de las infinitas formas de escribir las infinitas soluciones,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

f) (5,6,11,2667,16,6667), g) No tiene solución, porque  $r(A) \neq r(\bar{A})$ , h) No tiene solución, porque  $r(A) \neq r(\bar{A})$ , i) Una de las infinitas formas de escribir las infinitas soluciones,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

j) Una de las infinitas formas de escribir las infinitas soluciones,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

29.

$$x_1 + x_3 = 20,$$

$$80 = x_1 + x_2,$$

$$x_2 = x_3 + x_4,$$

y una forma de escribir las infinitas soluciones,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R},$$

como todos los flujos son positivos,  $x_1 \geq 0$ , entonces  $x_3 \leq 20$ .

30. a) El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} 2c_1 - 10c_3 &= -8, \\ 2c_1 - 7c_2 + 2c_4 &= -3, \\ 3c_2 - 10c_3 + 6c_4 &= -1, \\ 8c_4 - 3c_5 &= 5, \\ 4c_2 - 3c_5 &= 1, \end{aligned}$$

la solución es,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{9}{4}\alpha - \frac{5}{4}, \\ c_2 &= \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{4}, \\ c_3 &= \frac{9}{20}\alpha + \frac{11}{20}, \\ c_4 &= \frac{3}{8}\alpha + \frac{5}{8}, \\ c_5 &= \alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) El flujo global se tiene que conservar, por lo que  $100 = 20 + Q_3c_3$ . Entonces  $Q_3c_3 = 80$ . El planteamiento del problema es:

$$\begin{aligned} 30c_2 &= 20 + 20c_1 + 50c_1, \\ 20c_1 + 100 &= 30c_2 + 10c_1, \\ 50c_1 + 10c_2 &= 80. \end{aligned}$$

Ordenando las ecuaciones, y dividiendo por 10,

$$\begin{aligned} -7c_1 + 3c_2 &= 2, \\ 2c_1 - 4c_2 &= -10, \\ 5c_1 + c_2 &= 8. \end{aligned}$$

El sistema es compatible determinado, y la solución  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 3$ ,  $c_3 = 4$ . El que tiene máxima concentración es  $D_3$ .

31. a) Pasamos las incógnitas a la izquierda de la igualdad, y el planteamiento del problema es:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_3 &= 0, \\ 8x_1 - 2x_4 &= 0, \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones se puede escribir como,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}\alpha, \\ x_2 &= \frac{5}{4}\alpha, \\ x_3 &= \frac{3}{4}\alpha, \\ x_4 &= \alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Los coeficientes tienen que ser enteros, si  $\alpha = 4$ , tenemos la solución  $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 3, x_4 = 4$ . La reacción balanceada es:  $C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$ .

b) El planteamiento del problema teniendo en cuenta que  $v = x$ , es:

$$\begin{aligned} -x + 3y &= 0, \\ 2x - y - z &= 0, \\ y + z - 2t &= 0. \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones se puede escribir como,

$$\begin{aligned} x &= \alpha, \\ y &= \frac{1}{3}\alpha, \\ z &= \frac{5}{3}\alpha, \\ t &= \alpha, \\ v &= \alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Los coeficientes tienen que ser enteros, si  $\alpha = 3$ , tenemos la solución  $x = 3, y = 1, z = 5, t = 3, v = 3$ . La reacción balanceada es:  $3H_2SO_4 + KBrO_3 + 5KBr \rightarrow 3Br_2 + 3K_2SO_4 + 3H_2O$ .

c) El planteamiento del problema es:

$$2a + 3b = 2d,$$

$$a = 3c,$$

$$4a + 3b = 12c + d,$$

$$b = 2c.$$

La solución de estas ecuaciones se puede escribir como,

$$a = 3\alpha,$$

$$b = 2\alpha,$$

$$c = \alpha,$$

$$d = 6\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si  $\alpha = 1$ , tenemos la solución  $a = 3, b = 2, c = 1, d = 6$ . La reacción balanceada es:  $3H_2SO_4 + 2Al(OH)_3 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + 6H_2O$ .

32.  $1 \text{ cm}^3, 3 \text{ cm}^3, 2 \text{ cm}^3$ .

33. 510 g de lácteos, 727 g de verduras, 278 g de carnes blancas.

34. a)  $S_1 \subset \mathbb{R}^5, S_2 \subset \mathbb{R}^3, S_3 \subset \mathbb{R}^4, S_4 \subset \mathbb{R}^3, S_5 \subset \mathbb{R}^2, S_6 \subset \mathbb{R}^7$ .

b) Una solución entre las infinitas que hay:  $(0, 1, 1, 2, 1), (0, 0, 0, 3, -1) \in S_1$ ,  
 $(2, 0, -1), (3, 1, 0) \in S_2, (3, 1, -3, 0), (-3, -1, 3, 4) \in S_3, (0, 1, 2), (1, 0, 1) \in S_4$ ,  
 $(-1, 2), (-3, 6) \in S_5, (1, 1, 1, 2, 1, 2, 1), (0, 0, 0, 3, -1, 1, 5) \in S_6$ .

c) Si incluimos una condición adicional en cada subconjunto, obtenemos un subconjunto de dicho subconjunto,

$$S_{11} = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 : x = 0, y = 0\}; S_{11} \subset S_1,$$

$$S_{21} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 2z = 0, y = 0\}; S_{21} \subset S_2,$$

$$S_{31} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 3y = -z, y = 0\}; S_{31} \subset S_3,$$

$$S_{41} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0, y = 0\}; S_{41} \subset S_4,$$

$$S_{51} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2x = 0, y = 0\}; S_{51} \subset S_5,$$

$$S_{61} = \{(x, y, z, t, u, v, w) \in \mathbb{R}^7 : x = y \text{ ó } y = z, y = 0\}; S_{61} \subset S_6.$$

35. Una solución entre las infinitas que hay: a)  $(5, 0)$ , b)  $(7, 6, -1)$ , c)  $(5, 0, 5, 5)$ .

36. a) No. b) Sí. c) Sí.

37. Una solución entre las infinitas que hay: a)  $(2, -3), (0, 0), (-2, 3)$ ,

b)  $(1, -1, 0), (0, 2, 1), (1, 1, 1)$ , c)  $(1, -1, -1, 1), (0, 0, 0, 0), (2, -2, -2, 2)$

d)  $(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 2, 1), (0, 0, 1, 1, 1)$ , e)  $(1, 1), (2, 0), (3, 1)$ .

38. a) Sí, porque se cumplen las dos propiedades,

$$(0, y_1, z_1) + (0, y_2, z_2) = (0, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S_1; \alpha(0, y, z) = (0, \alpha y, \alpha z) \in S_1.$$

b) Sí, porque se cumplen las dos propiedades,

$$(x_1, y_1, z_1) \in S_2 \rightarrow x_1 - 3y_1 + 2z_1 = 0, (x_2, y_2, z_2) \in S_2 \rightarrow x_2 - 3y_2 + 2z_2 = 0,$$

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \rightarrow$$

$$x_1 + x_2 - 3(y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) = x_1 - 3y_1 + 2z_1 + x_2 - 3y_2 + 2z_2 = 0 \rightarrow$$

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S_1;$$

$$(x, y, z) \in S_2 \rightarrow x - 3y + 2z = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \rightarrow \alpha x - 3\alpha y + 2\alpha z = \alpha(x - 3y + 2z) = 0 \rightarrow (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S_2.$$

c) Sí, porque se cumplen las dos propiedades,  $(3y_1, y_1, -3y_1) + (3y_2, y_2, -3y_2) =$

$$(3(y_1 + y_2), y_1 + y_2, -3(y_1 + y_2)) \in S_3; \alpha(3y, y, -3y) = (\alpha 3y, \alpha y, -\alpha 3y) \in S_3.$$

d) No, porque hay vectores que no cumplen las propiedades,  $(1, 1, 2) \in S_4, (1, 3, 1) \in S_4, (1, 1, 2) + (1, 3, 1) = (2, 4, 3) \notin S_4.$

e) Sí, porque se cumplen las dos propiedades,

$$(x_1, 2x_1, 5x_1) + (x_2, 2x_2, 5x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2), 5(x_1 + x_2)) \in S_1; \alpha(x, 2x, 5x) = (\alpha x, \alpha 2x, \alpha 5x) \in S_5.$$

f) No, porque hay vectores que no cumplen las propiedades,  $(1, 1, 2) \in S_6, (1, -1, 1) \in S_6, (1, 1, 2) + (1, -1, 1) = (2, 0, 3) \notin S_6.$

g) No, porque hay vectores que no cumplen las propiedades,  $(1, 2, 2) \in S_7, (2, 3, 1) \in S_7, (1, 2, 2) + (2, 3, 1) = (3, 5, 3) \notin S_7.$

h) No, porque hay vectores que no cumplen las propiedades,  $(1, 0, 2) \in S_8, (0, 3, 1) \in S_8, (1, 0, 2) + (0, 3, 1) = (1, 3, 3) \notin S_8.$

39. a) Linealmente dependientes. Si los colocamos en una matriz, esta matriz tiene determinante nulo.

Hay dos vectores linealmente independientes, unas de las posibles ecuaciones paramétricas son,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

Una de las posibles ecuaciones cartesianas es,  $x + y + 4z = 0$ . Una base es:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La podemos completar a una base de  $\mathbb{R}^3$  añadiendo un vector que sea linealmente independiente con estos dos,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- b) Linealmente independientes. Si los colocamos en una matriz, esta matriz tiene determinante 6, no nulo. El subespacio que generan es todo el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ . Los tres vectores ya forman una base de  $\mathbb{R}^3$ .

- c) Linealmente dependientes. Si los colocamos en una matriz, esta matriz tiene determinante nulo.

Hay dos vectores linealmente independientes, unas de las posibles ecuaciones paramétricas son,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Una de las posibles ecuaciones cartesianas es,  $x + y - z = 0$ .

Una base es:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La podemos completar a una base de  $\mathbb{R}^3$  añadiendo un vector que sea linealmente independiente con estos dos,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

40. En el proceso de resolver el sistema de ecuaciones por Gauss, llegamos a un sistema equivalente más sencillo,

$$x - y + z - t = 0,$$

$$4y - 3z + t = 0,$$

$$t = 0,$$

3 ecuaciones linealmente independientes, y 4 incógnitas, tenemos un parámetro libre, que lo elegimos entre las variables, salvo  $t$ , que ya vale 0, por ejemplo  $y = \alpha$ , y resolviendo este sistema, llegamos a la solución, que son las ecuaciones paramétricas,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Una base de este subespacio es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una base de  $\mathbb{R}^4$  que contenga a la anterior es

$$\mathcal{B}_{R^4} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

porque son linealmente independientes. Colocados en una matriz, su determinante es distinto de cero.

41.

$$\mathcal{B}_{R^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

porque son linealmente independientes. Colocados en una matriz, su determinante es distinto de cero.

42.  $F = \mathcal{L}\{(1, -1, 1, 2), (0, 1, 3, 1)\}$ . Estos vectores son linealmente independientes, entonces forman una base de  $F$ ,

$$\mathcal{B}_F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

unas posibles ecuaciones paramétricas son,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

y unas posibles cartesianas, eliminando los parámetros en las ecuaciones anterior-

res,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 3 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 3 & z-x \\ 0 & 1 & t-2x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & -4x-3y+z \\ 0 & 0 & -3x-y+t \end{pmatrix},$$

llegamos a las ecuaciones equivalentes, de las que cartesianas son las dos últimas, en las que no aparecen los parámetros,

$$\begin{aligned} \alpha &= x, \\ \beta &= x+y, \\ 4x+3y-z &= 0, \\ 3x+y-t &= 0. \end{aligned}$$

$G = \mathcal{L}\{(1, 0, 4, 3), (1, 1, 0, -1)\}$ . Estos vectores son linealmente independientes, entonces forman una base de  $G$ ,

$$\mathcal{B}_G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

unas posibles ecuaciones paramétricas son,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

y unas posibles cartesianas, eliminando los parámetros en las ecuaciones anteriores,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 4 & 0 & z \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -4 & z-4x \\ 0 & 4 & t-3x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & z-4x+4y \\ 0 & 0 & t-3x-4y \end{pmatrix},$$

llegamos a las ecuaciones cartesianas,

$$4x - 4y - z = 0,$$

$$3x - 4y - t = 0.$$

43. a)

$$\mathcal{B}_{W_1} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, (2, -2, 0) = -2\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 = (-2, 0)_{\mathcal{B}},$$

$$\dim(W_1) = 2.$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones cartesianas:  $x + y + z = 0$ .

b)

$$\mathcal{B}_{W_2} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, (2, 4, 6) = 2\vec{v}_1 = (2)_{\mathcal{B}}, \dim(W_2) = 1.$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones cartesianas:  $2x - y = 0; 3x - z = 0$ .

c)

$$\mathcal{B}_{U_1} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, (3, 3, 3) = 3\vec{v}_1 = (3)_{\mathcal{B}}, \dim(U_1) = 1.$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones cartesianas:  $x - y = 0; x - z = 0$ .

d)

$$\mathcal{B}_{V_2} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, (0, -2, -2) = -2\vec{v}_1 = (-2)_{\mathcal{B}}, \dim(V_2) = 1.$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones cartesianas:  $x = 0; y - z = 0$ .

e)

$$\mathcal{B}_{V_3} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, (2, 2, 2) = 2\vec{v}_1 = (2)_{\mathcal{B}}, \dim(V_3) = 1.$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones cartesianas:  $x - y = 0; x - z = 0$ .

f)

$$\mathcal{B}_{V_5} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, (1, 3, 4) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (1, 1)_{\mathcal{B}}, \dim(V_5) = 2.$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones cartesianas:  $x + y - z = 0$ .

g)

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, (2, -1, -3) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (2, -1)_{\mathcal{B}}.$$

$\dim(W) = 2$ .

Las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones cartesianas:  $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ .

h)

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, (0, 1, 3) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}.$$

$\dim(V) = 3$ .

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

No tiene ecuaciones cartesianas porque  $V = \mathbb{R}^3$ .

44. a) Si  $a = 1$  son linealmente dependientes, si  $a \neq 1$  son linealmente independientes.

b) Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones cartesianas:  $y - z = 0$ .

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c)

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

d)  $(3, 5, 5) \in W$ ,  $(1, 2, 3) \notin W$ .

e)  $(1, 1, 5) = (1, 5, 5) - (0, 4, 0)$

45. a)  $(4, 5)$ .

b) No, porque puestos en una matriz el rango máximo es 2.

c) Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones cartesianas:  $x - y = 0$ .

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, (3, 3) = 3(1, 1) = (3)_{\mathcal{B}}.$$

46. a) El planteamiento del problema es:

$$3x_1 - x_3 = 0,$$

$$8x_1 - 2x_4 = 0,$$

$$2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0.$$

Estas son las ecuaciones cartesianas. Tenemos 3 ecuaciones linealmente independientes y 4 incógnitas, entonces tenemos un parámetro libre, la dimensión del subespacio es 1. Las ecuaciones paramétricas se obtienen resolviendo el sistema,

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{4}\alpha, \\x_2 &= \frac{5}{4}\alpha, \\x_3 &= \frac{3}{4}\alpha, \\x_4 &= \alpha, \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Una base del subespacio es:  $\mathcal{B} = \{(1, 5, 4, 4)\}$ .

b) El planteamiento del problema teniendo en cuenta que  $v = x$ , es:

$$\begin{aligned}-x + 3y &= 0, \\2x - y - z &= 0, \\y + z - 2t &= 0.\end{aligned}$$

Son las ecuaciones implícitas incluyendo  $v - x = 0$ . Tenemos 4 ecuaciones linealmente independientes y 5 incógnitas, entonces tenemos un parámetro libre, la dimensión del subespacio es 1. Las ecuaciones paramétricas se obtienen resolviendo el sistema, La solución de estas ecuaciones se puede escribir como,

$$\begin{aligned}x &= \alpha, \\y &= \frac{1}{3}\alpha, \\z &= \frac{5}{3}\alpha, \\t &= \alpha, \\v &= \alpha, \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Una base del subespacio es:  $\mathcal{B} = \{(3, 1, 5, 3, 3)\}$ .

c) El planteamiento del problema es:

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 2d, \\ a &= 3c, \\ 4a + 3b &= 12c + d, \\ b &= 2c. \end{aligned}$$

Son las ecuaciones implícitas. Tenemos 3 ecuaciones linealmente independientes y 4 incógnitas, entonces tenemos un parámetro libre, la dimensión del subespacio es 1. Las ecuaciones paramétricas se obtienen resolviendo el sistema,

$$\begin{aligned} a &= 3\alpha, \\ b &= 2\alpha, \\ c &= \alpha, \\ d &= 6\alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Una base del subespacio es  $\mathcal{B} = \{(3, 2, 1, 6)\}$ .

47. a) Si colocamos los vectores en columnas en una matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$\det(A) \neq 0$ , entonces los vectores son linealmente independientes, entonces forman una base de  $\mathbb{R}^3$ , entonces para cualquier vector término independiente el sistema tendría solución.

b) Si colocamos los vectores en columnas en una matriz,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$rg(B) = 3$ , entonces los vectores columna son linealmente independientes. Si ampliamos la matriz con el término independiente  $\vec{b} = (7, 8, -1, 1)^t$ ,  $rg(B|\vec{b}) = 3$ , es decir, la última columna es linealmente dependiente de los otros tres vectores, entonces se puede escribir como combinación lineal de ellos, es decir, existe solución.

c) Si colocamos los vectores en columnas en una matriz,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$\det(C) \neq 0$ , entonces los vectores son linealmente independientes, entonces forman una base de  $\mathbb{R}^4$ , entonces para cualquier vector término independiente el sistema tendría solución.

g) Si colocamos los vectores en columnas en una matriz,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$rg(E) = 2$ , entonces los vectores son linealmente independientes. Si ampliamos la matriz con el término independiente  $\vec{b} = (10, 2, 8)^t$ ,  $rg(E|\vec{b}) = 3$ , es decir, los tres vectores son linealmente independientes, y no se puede escribir el vector término independiente como combinación lineal de los otros vectores columna, entonces no existen  $x, y$ , que cumplan la combinación lineal. No existe solución.

h) Si colocamos los vectores en columnas en una matriz,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$rg(F) = 1$ , entonces los vectores son linealmente dependientes. Si ampliamos la matriz con el término independiente  $\vec{b} = (1, 4)^t$ ,  $rg(F|\vec{b}) = 2$ , es decir, los dos vectores son linealmente independientes, y no se puede escribir el vector

término independiente como combinación lineal del otro vector columna, entonces no existen  $x, y, z$ , que cumplan la combinación lineal. No existe solución.

48. El planteamiento de la red es:

$$x_1 + x_6 = x_2 + 40,$$

$$x_2 = x_3 + 70,$$

$$x_3 + x_4 = x_5 + 20,$$

$$x_5 + 30 = x_6.$$

Las soluciones de este sistema son,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 110 \\ 70 \\ 0 \\ -50 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los vectores pertenecen a  $\mathbb{R}^6$ . Si tomamos  $\alpha = 50$  y  $\beta = 100$ , una solución numérica  $(60, 120, 50, 0, 70, 100)$ .

Unas ecuaciones cartesianas del correspondiente sistema homogéneo son:

$$x_1 - x_2 + x_6 = 0,$$

$$x_2 - x_3 = 0,$$

$$x_3 + x_4 - x_5 = 0,$$

$$x_5 - x_6 = 0.$$

Unas ecuaciones paramétricas son,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La dimensión de este subespacio es 2.

49. El planteamiento de la red es:

$$\begin{aligned}x_5 &= x_1 + x_2, \\x_1 + x_3 &= x_6, \\x_2 &= x_3 + x_4.\end{aligned}$$

Las soluciones de este sistema son,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Los vectores pertenecen a  $\mathbb{R}^6$ . Si tomamos  $\alpha = 50$  y  $\beta = 100$ ,  $\gamma = 20$  una solución numérica  $(70, 170, 50, 100, 120, 20)$ .

Unas ecuaciones son las cartesianas y la solución son las paramétricas del subespacio de soluciones. La dimensión de este subespacio es 3.

50. a) -6, -6, -8, -1, 6, -1.

b) 5.2915, 2.4495, 2.4495, 3.1623.

c) Sí, puede ser negativo el producto escalar de dos vectores, en el apartado a) hay varios ejemplos. La norma no puede ser negativa por su definición.

d) 6.7823, 6.7823, 7.3485, 3.7417, 2, 4.2426. Los más alejados son  $\vec{u}$  y  $\vec{h}$ . Los más cercanos son  $\vec{v}$  y  $\vec{h}$ .

e) Vector ortogonal a  $\vec{u} : (-1, 1, 0, 0)$ . Vector ortogonal a  $\vec{v} : (1, 0, 0, 0)$ . Vector ortogonal a  $\vec{w} : (0, 0, 1, 0)$ . Vector ortogonal a  $\vec{h} : (1, 1, -1, -1)$ .

f) Una de las infinitas soluciones:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

g) Una de las infinitas soluciones:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

51. a) Una de las posibles soluciones:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ecuaciones cartesianas:  $x + y + 4z = 0$ .

Subespacio de vectores ortogonales:  $x - y = 0, 2x + 2y - z = 0$ .

b) Una de las posibles soluciones:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Ecuaciones cartesianas:  $x - z = 0$ .

Subespacio de vectores ortogonales:  $y = 0, x + z = 0$ .

c) En este caso los vectores son linealmente independientes, por lo que generan todo el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ . Una base ortonormal es la canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

Ecuaciones cartesianas: no tiene.

Subespacio de vectores ortogonales: no existe.

52. a)  $(-3/\sqrt{27}, 1/\sqrt{27}, 1/\sqrt{27}, 4/\sqrt{27})$ .

b)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 0 \\ 0 \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/\sqrt{60} \\ -5/\sqrt{60} \\ 5/\sqrt{60} \\ 1/\sqrt{60} \end{pmatrix} \right\}.$$

53. a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

b)  $(2.5, -2.5, 2.5, -2.5)$ .

c)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

e)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(-0.2, 0.4, 0).$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

54. a)  $x + z = 0, 2x - y + z = 0$ . b)  $x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, x_3 - x_4 = 0$ .

55. a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

b)  $\text{proy}_H \vec{u} = A^t(A^t A)^{-1} A \vec{v}^t = (2/3, 1/3, 4/3)^t$ .  $d(\vec{u}, H) = \|\vec{u} - \text{proy}_H \vec{u}\| = \sqrt{6}/3$ .

c)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}.$$

56. a)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

b)  $\text{proy}_H \vec{u} = A^t(A^t A)^{-1} A \vec{u}^t = (2, 1)^t$ .  $d(\vec{u}, H) = \|\vec{u} - \text{proy}_H \vec{u}\| = \sqrt{5}$ .

c)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

57. Calculamos la distancia entre los vectores  $\vec{u} = (100, 50, 120)$  y  $\vec{v} = (110, 60, 120)$  y  $\vec{w} = (100, 50, 140)$ .  $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14, 14$ ,  $d(\vec{u}, \vec{w}) = \|\vec{u} - \vec{w}\| = \sqrt{20^2} = 20$ . Se acerca más el vector  $(110, 60, 120)$ .

58. El planteamiento del problema es:

$$3, 3x + 3, 8y + 20z = t,$$

$$3, 3x + 3, 8y + 2z = t/4,$$

$$5x + 13y = t/2.$$

La solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0,0516 \\ 0,0186 \\ 0,0379 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la distancia de los vectores  $\vec{u} = (110, 60, 120)$  y  $\vec{v} = (100, 50, 140)$  al subespacio de soluciones. Para ello hallamos las proyecciones,  $\text{proy}_S \vec{u} = A(A^t A)^{-1} A^t \vec{u} = (141, 35, 70)^t$ , y  $\text{proy}_S \vec{v} A(A^t A)^{-1} A^t \vec{v} = (139, 35, 70)$ .  $d(\vec{u}, S) = \|\vec{u} - \text{proy}_S \vec{u}\| = 63$ ,  $d(\vec{v}, S) = \|\vec{v} - \text{proy}_S \vec{v}\| = 148$ . El vector  $\vec{u}$  se acerca más a las proporciones buscadas.

59. La matriz de la aplicación lineal  $\vec{f}$  es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

60. La matriz del giro de  $180^\circ$  antihorario es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Giramos los vectores utilizando esta matriz,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

61. La matriz del giro de  $90^\circ$  horario es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) \\ \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Giramos los vectores utilizando esta matriz,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

62. La matriz del giro de  $180^\circ$  antihorario es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de contracción de  $1/3$  es:

$$B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

La matriz que realiza las dos operaciones a la vez es el producto de las dos matrices,

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

El resultado de la transformación de  $\vec{u}$  es  $(-1/3, -1/3)$ . El resultado de la transformación de  $\vec{v}$  es  $(-1/3, 0)$ . El resultado de la transformación de  $\vec{w}$  es  $(2/3, -1/3)$ .

63. La matriz del giro de  $45^\circ$  horario es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

La matriz de simetría es:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz que realiza las dos operaciones a la vez es el producto de las dos matrices,

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

El resultado de la transformación de  $\vec{u}$  es  $(-\sqrt{2}, 0)$ . El resultado de la transformación de  $\vec{v}$  es  $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ . El resultado de la transformación de  $\vec{w}$  es  $(\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$ .

64.

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de la composición es:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{f}(\vec{g}(x, y)) = (-x - y, x - y).$$

65.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si  $\vec{x} = (1, 1)_{\mathcal{B}}$ ,  $\vec{x}_{\mathcal{B}_c} = P\vec{x}_{\mathcal{B}}^t = (-1, -1)_{\mathcal{B}_c}^t$ . Si  $\vec{x} = (5, 0)_{\mathcal{B}_c}$ ,  $\vec{x}_{\mathcal{B}} = P^{-1}\vec{x}_{\mathcal{B}_c}^t = (-20, -15)_{\mathcal{B}}^t$ .

66.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $\vec{x} = (1, 5, 0)_{\mathcal{B}}$ ,  $\vec{x}_{\mathcal{B}_c} = P\vec{x}_{\mathcal{B}}^t = (6, 6, 1)_{\mathcal{B}_c}^t$ . Si  $\vec{x} = (1, 1, 5)_{\mathcal{B}_c}$ ,  $\vec{x}_{\mathcal{B}} = P^{-1}\vec{x}_{\mathcal{B}_c}^t = (5, -4, 0)_{\mathcal{B}}^t$ .

67.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si  $\vec{x} = (1, 5, 0)_{\mathcal{B}}$ ,  $\vec{x}_{\mathcal{B}_c} = P\vec{x}_{\mathcal{B}}^t = (-4, 15, 25)_{\mathcal{B}_c}^t$ . Si  $\vec{x} = (1, 1, 5)_{\mathcal{B}_c}$ ,  $\vec{x}_{\mathcal{B}} = P^{-1}\vec{x}_{\mathcal{B}_c}^t = (18, -3, 10)_{\mathcal{B}}^t$ .

68.

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

$proy_H \vec{v} = P\vec{v}^t = (-2, 2, 4)^t$ .

69.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$proy_W \vec{v} = P\vec{v}^t = (-3, 3)^t$ .

70.

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$proy_S \vec{v} = P\vec{v}^t = (-4/3, -10/3, 14/3, 3)^t$ .

71. *A*: autovalores: 1, -2; autovectores: (-2,1), (-1,1).

*B*: autovalores: 3, 3; autovectores: (1,2).

*C*: autovalores:  $(3 \pm \sqrt{11}i)/2$ ; autovectores:  $(1, (1 \pm \sqrt{11}i)/2)$ .

*D*: autovalores: -1, -1; autovectores: (1,0), (0,1).

*E*: autovalores: 1, -1, -1; autovectores: (3,2,-3), (1,0,1).

*F*: autovalores: 0,  $\pm\sqrt{5}$ ; autovectores: (0,1,2),  $(-2\sqrt{5} - 5, 1, 2 + \sqrt{5})$ ,  $(2\sqrt{5} - 5, 1, 2 - \sqrt{5})$ .

*G*: autovalores: 1, 1, 1; autovectores: (1,1,0), (1,0,-1).

72. La matriz *P* tiene autovalores 1, 1/6, 5/6. Autovectores asociados:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La matriz diagonal y la matriz de paso son,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1/8 & 1/6 \\ 0 & 1/8 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Se cumple:  $P = MDM^{-1}$ ,  $P^{20} = MD^{20}M^{-1}$ ,  $P^{40} = MD^{40}M^{-1}$ ,  $P = MD^{60}M^{-1}$ ,

$$P^{20}\vec{u}_0 = MD^{20}M^{-1} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0261 \end{pmatrix} M^{-1}\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0,9822 \\ 0,0101 \\ 0,0076 \end{pmatrix}.$$

$$P^{40}\vec{u}_0 = MD^{40}M^{-1} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0007 \end{pmatrix} M^{-1}\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0,9995 \\ 0,0003 \\ 0,0002 \end{pmatrix}.$$

$$P^{60}\vec{u}_0 = MD^{60}M^{-1} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00002 \end{pmatrix} M^{-1}\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cada vez se acerca más al límite de todos del tipo  $T_1$  con el paso de las generaciones.

73. a) Autovalores y autovector de la matriz  $A$ .

b) Autovalores: 0, 1, -1; autovectores: (1,0,0), (2,1,1), (0,-1,1).

c) Sí es diagonalizable porque todos sus autovalores son distintos y simples.

d)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Sevilla, Ciudad Real, Jaén ó Sevilla, Jaén, Ciudad Real.

74. La matriz  $A$  es diagonalizable:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $B$  es diagonalizable:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $C$  es diagonalizable:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

75.  $\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(-1 - \lambda)(1 - \lambda)$ . Los autovalores son:  $a, -1, 1$ .

Si  $a \neq \pm 1$ , la matriz es diagonalizable, porque todos los autovalores serían distintos.

Si  $a = -1$ , el autovalor  $-1$  es doble. El subespacio de autovectores,  $E_{-1}$ , tiene ecuaciones,

$$by = 0, z = 0.$$

Si  $b = 0$ , tenemos una única ecuación,  $z = 0$ , entonces  $\dim(E_{-1}) = 2$ , entonces  $mg(-1) = 2 = ma(-1)$ , y la matriz es diagonalizable.

Si  $b \neq 0$ , tenemos dos ecuaciones,  $y = 0, z = 0$ , entonces  $\dim(E_{-1}) = 1$ , entonces  $mg(-1) = 1 \neq ma(-1) = 2$ , y la matriz no es diagonalizable.

Si  $a = 1$ , el autovalor  $1$  es doble. El subespacio de autovectores,  $E_1$ , tiene una única ecuación,  $y = 0$ , entonces  $\dim(E_1) = 2 = mg(1) = ma(1)$ , y la matriz es diagonalizable.

En resumen, sólo no es diagonalizable en el caso  $a = -1, b \neq 0$ . En el resto de casos es diagonalizable.

76. Esta matriz tiene autovalores  $-1$  doble y  $2$  simple.

Estudiamos el caso del autovalor doble. Su subespacio de autovectores tiene ecuaciones,

$$\alpha y = 0, z = 0.$$

Si  $\alpha = 0$ ,  $E_{-1}$  tendría una única ecuación,  $z = 0$ , entonces  $\dim(E_{-1}) = 2$ ,  $mg(-1) = 2 = ma(-1)$ , y la matriz es diagonalizable.

Si  $\alpha \neq 0$ , entonces  $E_{-1}$  tiene dos ecuaciones,  $y = 0, z = 0$ , entonces  $\dim(E_{-1}) = 1 = mg(-1) \neq ma(-1) = 2$ , y la matriz no es diagonalizable.

En resumen, sólo no es diagonalizable en el caso  $\alpha \neq 0$ .

El valor de  $\beta$  no influye en esta cuestión, puede tomar cualquier valor.

77. Los autovalores son 5, -1,  $a$ .

Si  $a \neq 5, -1$ , la matriz es diagonalizable, porque todos los autovalores serían distintos.

Si  $a = -1$ , el autovalor -1 es doble. El subespacio de autovectores,  $E_{-1}$ , tiene ecuaciones,

$$x = 0, bz = 0.$$

Si  $b = 0$ , tenemos una única ecuación,  $x = 0$ , entonces  $\dim(E_{-1}) = 2$ , entonces  $mg(-1) = 2 = ma(-1)$ , y la matriz es diagonalizable.

Si  $b \neq 0$ , tenemos dos ecuaciones,  $x = 0, z = 0$ , entonces  $\dim(E_{-1}) = 1$ , entonces  $mg(-1) = 1 \neq ma(-1) = 2$ , y la matriz no es diagonalizable.

Si  $a = 5$ , el autovalor 5 es doble. El subespacio de autovectores,  $E_5$ , tiene dos ecuaciones,  $-6y + bz = 0, x = 0$ , entonces  $\dim(E_5) = 1 = mg(5) \neq ma(5)$ , y la matriz no es diagonalizable.

En resumen, no es diagonalizable en los caso  $a = -1, b \neq 0$  y  $a = 5$ . El resto de casos es diagonalizable.

78. a)

$$\begin{aligned}\tau_1 &= C\alpha_1, \\ \tau_2 &= \frac{C}{\sqrt{2}}\alpha_2 + \frac{C}{\sqrt{2}}\alpha_3, \\ \tau_3 &= \frac{C}{\sqrt{2}}\alpha_2 + \frac{C}{\sqrt{2}}\alpha_3,\end{aligned}$$

donde  $C = ml^2/12$ .

b) Los autovalores son 0, 1,  $\sqrt{2}$ . Los subespacios de autovectores son,

$$E_0 = \mathcal{L}\{(0, -1, 1)\}, E_1 = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}, E_{\sqrt{2}} = \mathcal{L}\{(0, 1, 1)\}.$$

c) Es diagonalizable por que todos los autovalores son diferentes.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Las matrices de cambio de base de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_c$  y viceversa son, respectivamente,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = M^{-1}\vec{v}_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_{\mathcal{B}_c} = M\vec{w}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

e) Multiplicamos por  $M^{-1}$ , matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}_c$  a  $\mathcal{B}$ , y escribimos  $\mathbb{I}_g = CDM^{-1}$ , en la expresión:  $\tau_{\mathcal{B}_c} = \mathbb{I}_g\alpha_{\mathcal{B}_c}$ ,  $M^{-1}\tau_{\mathcal{B}_c} = M^{-1}CDM^{-1}\alpha_{\mathcal{B}_c}$ , obtenemos:  $M^{-1}\tau_{\mathcal{B}_c} = DM^{-1}\alpha_{\mathcal{B}_c}$ , teniendo en cuenta el cambio de base:  $\tau_{\mathcal{B}} = CD\alpha_{\mathcal{B}}$ . Si desarrollamos esta fórmula:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0, \\ \tau_2 &= C\alpha_2, \\ \tau_3 &= C\sqrt{2}\alpha_3. \end{aligned}$$

f) Se encuentra en la posición del autovector asociado al autovalor 0,  $(0, -1, 1)$ , porque al hacer el cambio a la base de autovectores, si se aplica la fuerza en esta dirección no se produce ninguna aceleración, y eso sólo ocurre si la fuerza se aplica en la dirección en la que se encuentra la varilla.

Este libro tiene como objetivo presentar de manera sencilla los contenidos de álgebra lineal, partiendo de problemas y situaciones de las ciencias aplicadas. A partir del planteamiento matemático de estos problemas, se formulan preguntas sobre las soluciones en diferentes contextos, lo que lleva a los conceptos del álgebra. Aunque estos son muy abstractos, se derivan de problemas reales. De esta forma, se busca sembrar en los estudiantes una necesidad intelectual de estas nociones. El libro pretende ser un manual práctico para que los lectores comprendan y manejen los conceptos. Cada capítulo incluye una motivación con problemas aplicados que plantean preguntas, ejemplos, definiciones, propiedades, algunas demostraciones, cuestiones y una motivación revisitada que resuelve las preguntas iniciales. Además, presenta una colección de problemas propuestos y resueltos. Está escrito de manera accesible, permitiendo su lectura a un público amplio con conocimientos básicos de matemáticas.

