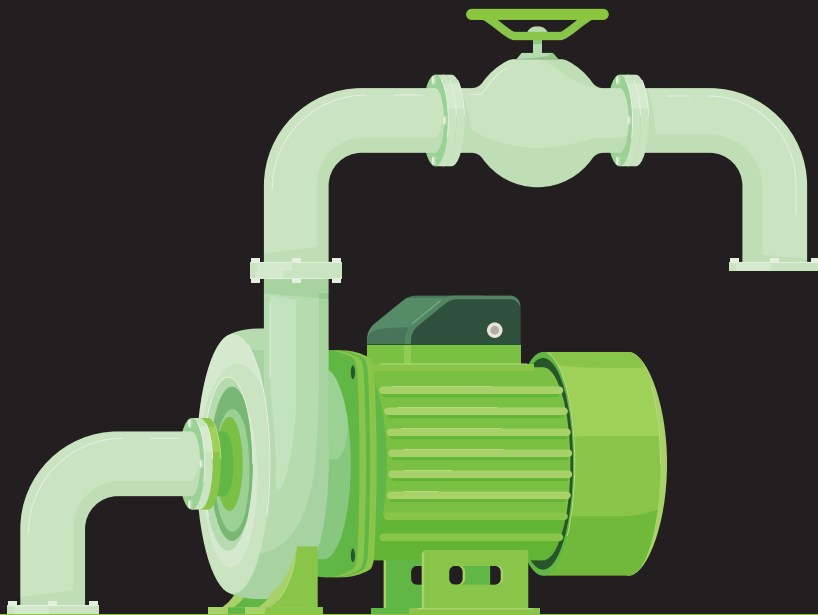


Fluids, bombes i instal·lacions hidràuliques



Salvador de las Heras

UPCGRAU 75



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Fluids, bombes i instal·lacions hidràuliques

Salvador de las Heras

Amb el suport de



Generalitat de Catalunya
**Departament de Recerca
i Universitats**

Traducció del llibre: *Fluidos, bombas e instalaciones hidráulicas*

Traductora: Marta Llorente Serichol

Primera edició maig de 2024

© Salvador de las Heras, 2024
© Iniciativa Digital Politècnica, 2024
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Edificio K2M, Planta S1, Despacho S103-S104
Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Producció: Service Point
Pau Casals, 161-163
08820 El Prat de Llobregat (Barcelona)

ISBN:978-84-10008-42-7
ISBN digital: 978-84-10008-43-4
DL:B 9039-2024
DOI: [10.5821/ebook-9788410008434](https://doi.org/10.5821/ebook-9788410008434)

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, excepte l'excepció prevista a la llei.

Als meus fills Sandro i Irene, el Sol i la Lluna dels meus dies,
i a la memòria del meu bon amic Paco, e.p.d.

Aquest llibre sorgeix de la necessitat d'adaptar el contingut de les assignatures relacionades amb les màquines i els sistemes hidràulics als diferents graus d'enginyeria que s'han posat en marxa a la UPC, com a conseqüència de la implantació dels plans d'estudis emmarcats en l'Espai Europeu d'Educació Superior (EEES).

És difícil trobar una obra concreta que cobreixi, de manera adequada, els conceptes bàsics de la mecànica de fluids, el funcionament de les màquines hidràuliques més comunes i la regulació i explotació dels sistemes en què són instal·lades, tant des del punt de vista teòric com pràctic. Per norma general, l'alumne troba per separat llibres específics de mecànica de fluids o de màquines hidràuliques, però no disposa de tots dos continguts associats adequadament en una sola obra. Aquest llibre pretén satisfer aquesta necessitat i, malgrat que tracta bàsicament de màquines hidràuliques i instal·lacions, inclou els principis de mecànica de fluids suficients per poder interpretar-les sense necessitat de consultar altres fonts.

Els diversos graus que actualment hi ha en enginyeria tenen una característica comuna: tots cobreixen, d'una manera o una altra, continguts associats amb les màquines i les instal·lacions hidràuliques. El professor d'aquestes matèries, en l'exercici responsable de la seva professió i amb la intenció benèvola de facilitar l'aprenentatge als seus estudiants, es preocupa per reunir en unes anotacions pròpies els continguts mínims exigibles, que seran la base de les classes magistrals, i, paral·lelament, elabora una llista de referències de consulta per completar la formació. Aquesta llista, malgrat la recomanació del professor, sovint és desatesa pels alumnes perquè el ritme que imposen els plans d'estudis actuals, amb una gran quantitat d'assignatures diferents en un mateix període quadrimestral, amb prou feines els deixa el temps necessari per a la lectura contrastada i assossegada d'altres textos tècnics. Hi ha d'haver, per tant, un equilibri entre el desitjable i el possible, i el professor és el responsable de trobar-lo i mantenir-lo perquè l'alumne aprofiti al màxim les seves capacitats i les seves possibilitats d'èxit augmentin.

Aquesta obra està dividida en sis temes: els dos primers fan referència a la mecànica de fluids; els dos següents, a les bombes hidràuliques, i els dos últims, a les instal·lacions. Al final del llibre, el lector trobarà un annex en què es fa un resum de les recomanacions relatives al manteniment i a la gestió de les instal·lacions hidràuliques.



En el primer tema, titulat “Conceptes de mecànica de fluids”, s’expliquen les definicions, eines i propietats que permeten interpretar el camp fluid, així com els teoremes matemàtics que són d’utilitat en la formulació dels principis i les lleis fonamentals. Aquest primer apartat conclou amb la descripció de les forces a què pot estar sotmès un fluid i la relació amb la seva consegüent deformació, cosa que finalment condueix a la coneguda equació de Navier-Stokes per a la quantitat de moviment.

El segon tema presenta els principis de conservació de massa, quantitat de moviment i energia, i altres equacions que permeten ampliar l’entorn teòric, com les de l’energia interna, l’entalpia, l’entropia o l’equació de la vorticitat. La formulació integral d’aquests principis consisteix en un balanç referit a un sistema fluid o a un volum de control de fronteres obertes per les quals es poden definir els fluxos de massa, quantitat de moviment i energia, i la seva relació temporal amb les accions externes aplicades. Aquest tipus d’anàlisi no proporciona detalls del flux a l’interior del volum, però sí que permet obtenir solucions aproximades, vàlides des d’una perspectiva industrial. El mètode diferencial és més general, però tot i que els principis generals i les equacions d’aquest tema, juntament amb les equacions d’estat, constitueixen un marc analític complet que permet resoldre qualsevol problema de mecànica de fluids i revelar tots els detalls del flux, sovint la seva resolució no és possible i cal recórrer a altres procediments d’anàlisi. Els obstacles que més dificulten l’obtenció de resultats analítics vàlids són, a més de la complexitat intrínseca de les equacions, les condicions de contorn, la geometria del problema i les propietats del fluid. L’enginyeria fa front a aquests problemes combinant la simulació per ordinador, l’experimentació i l’anàlisi dimensional, que es fonamenta en l’ordre de magnitud observat dels diferents termes que apareixen en les equacions i la seva descripció mitjançant grups adimensionals.

El tercer tema se centra en la descripció funcional de les bombes hidràuliques més comunes, mentre que el quart tracta de la teoria general de les turbomàquines hidràuliques. Per norma general, l’usuari d’una bomba està més interessat a conèixer-ne les característiques funcionals i els criteris de selecció i instal·lació, i es pot saltar la teoria descrita en el quart tema sense perdre continuïtat en el discurs. No obstant això, ja que aquesta obra es dirigeix sobretot als estudiants d’enginyeria, era pertinent incloure un tema dedicat de ple a la descripció de la teoria general que fonamenta el disseny de les bombes hidràuliques de tipus rotodinàmic. Com a autor, reconec que no m’ha estat fàcil trobar l’equilibri adequat entre tots dos temes, perquè més d’una vegada m’he vist temptat de fusionar-los. El resultat final crec que aborda les diferents qüestions amb la profunditat i l’ordre més apropiats, havent inclòs en el text les referències creuades i els peus de pàgina necessaris per poder ampliar els continguts de cada apartat i fer el millor seguiment possible del llibre.

Els dos temes següents fan referència a les instal·lacions hidràuliques i oleohidràuliques on s’instal·len les bombes descrites en el tercer tema. La quantitat d’instal·lacions d’un tipus o l’altre és ingent, de manera que s’ha preferit desenvolupar els



principis generals comuns que en permeten l'estudi, dimensionament i regulació, i concretar l'explicació mitjançant la descripció d'algunes d'instal·lacions particulars. A aquest efecte, per exemple, en el sisè tema s'expliquen els sistemes de regulació de velocitat dels actuadors, els circuits regeneratius, les transmissions hidroestàtiques i els servoactuadors, mentre que en el cinquè es dedica un apartat complet a les vàlvules de regulació emprades a les instal·lacions hidràuliques, amb especial recalcament en els criteris usuals de selecció i en com el seu acoblament a la instal·lació modifica la seva característica inherent i les pot fer entrar en bloqueig.

Per al funcionament correcte d'una instal·lació, cal que hagi estat ben dimensionada, respecte al seu punt de funcionament nominal, i haver previst els sistemes de regulació d'aquest punt. També s'han d'evitar, o contenir, en la mesura que sigui tècnica i econòmicament viable, les causes més probables del seu mal funcionament, entre les quals hi ha el cop d'ariet i les oscil·lacions en massa. Evidentment, aquests problemes d'explotació no són els únics, ja que cada bomba, vàlvula o acumulador requereixen la millor de les atencions i un bon manteniment, però la seva ocurrència afecta la major part de la instal·lació i dels seus components, i s'han de conèixer i dominar.

No voldria acabar sense expressar el meu reconeixement a les persones que m'han ajudat, de diferents maneres, durant el llarg procés de redacció i revisió; especialment, a la meua esposa, per la seva *santa paciència* i comprensió. D'altra banda, espero que la lectura d'aquesta obra sigui del seu grat i d'ajuda en l'exercici de la seva professió.

Salvador de las Heras

Maig de 2011

Pròleg	7
Índex	11
1. Conceptes de mecànica de fluids	17
1.1 El camp fluid.....	19
1.1.1 Definicions i magnituds cinemàtiques	19
1.1.2 Sistemes de coordenades ortogonals.....	22
1.1.3 Relacions de Frenet i coordenades naturals.....	25
1.1.4 La derivada substancial.....	29
1.1.5 Teoremes fluids	30
1.1.6 Integrals esteses a volums fluids.....	31
1.2 Fenòmens, processos i propietats	33
1.2.1 Fenòmens de transport, difusivitats i simultaneïtat	33
1.2.2 Viscositat i reologia.....	36
1.2.3 Densitat i estat.....	40
1.2.4 Processos termodinàmics i treballs	41
1.2.5 Coeficients de compressibilitat	44
1.2.6 Fenòmens d'interfície i capil·lars	47
1.2.7 Pressió de vapor.....	51
1.3 Forces, tensions i deformacions.....	53
1.3.1 Forces màssiques i volumètriques.....	53
1.3.2 Forces i tensions superficials.....	54
1.3.3 Descripció del moviment en el continu	56
1.3.4 Relació entre tensions i deformacions	58
1.3.5 Equacions de Cauchy i Navier-Stokes.....	59
2. Equacions fonamentals i anàlisi dimensiona	63
2.1 Principis de conservació.....	63
2.1.1 Conservació de la massa	63
2.1.2 Conservació de la quantitat de moviment.....	65
2.1.3 Conservació de l'energia	67
2.1.4 Equacions en forma diferencial	70



2.2	Anàlisi dimensional i de magnitud.....	75
2.2.1	Homogeneïtat dimensional i semblança física.....	76
2.2.2	Semblança física en mecànica de fluids.....	78
2.2.3	Grups adimensionals característics.....	81
2.2.4	Anàlisi per ordres de magnitud.....	84
2.2.5	Lleis de semblança i teoria de models.....	88
2.3	Equacions d'Euler i Bernoulli.....	91
2.3.1	Equacions d'Euler en coordenades intrínseques.....	92
2.3.2	Energia mecànica i potència d'un flux.....	94
2.3.3	Equació de Bernoulli generalitzada.....	95
2.3.4	Difusió d'energia cinètica.....	97
2.4	Aplicacions de les equacions d'Euler i Bernoulli.....	98
2.4.1	Tubs piezomètrics, de Pitot i sonda de Prandtl.....	98
2.4.2	Mesura diferencial del cabdal.....	100
2.4.3	Equació de Torricelli.....	102
2.4.4	Establiment d'un corrent.....	103
2.5	Condicions especials de flux.....	106
2.5.1	Unidireccionalitat.....	106
2.5.2	Incompressibilitat.....	110
2.5.3	Irrotacionalitat.....	113
3.	Bombes hidràuliques.....	121
3.1	Descripció general i camps d'aplicació.....	121
3.2	Balanç energètic en una bomba.....	127
3.2.1	Equació de l'energia mecànica.....	128
3.2.2	Altura manomètrica i formes d'energia específica.....	128
3.2.3	Pèrdues i rendiments característics.....	130
3.3	Bombes rotodinàmiques.....	131
3.3.1	Flux i velocitats.....	133
3.3.2	Energies dinàmica i estàtica.....	135
3.3.3	Variables de funcionament i adimensionals.....	137
3.3.4	Lleis de semblança.....	139
3.3.5	Condicions generals de disseny i selecció.....	144
3.3.6	Corbes característiques.....	148
3.3.7	Grups de bombeig.....	153
3.4	Disseny i instal·lació d'una bomba centrífuga.....	156
3.4.1	Límits funcionals i de rendiment.....	157
3.4.2	Dimensions bàsiques del rodet.....	159
3.4.3	Conductes fixos i difusors.....	162
3.4.4	Sistemes d'estanquitat.....	167
3.4.5	Instal·lació i posada en marxa.....	169



3.5	Bombes de desplaçament positiu.....	173
3.5.1	Tipus de bombes volumètriques.....	174
3.5.2	Capacitat volumètrica i cabal instantani.....	178
3.5.3	Corba característica i rendiments.....	180
3.5.4	Selecció d'una bomba oleohidràulica.....	181
3.6	Cavitació en bombes.....	183
3.6.1	Cavitació en bombes rotodinàmiques.....	184
3.6.2	Cavitació en bombes volumètriques.....	189
3.7	Generalitats sobre ventiladors.....	190
3.7.1	Tipus de ventiladors.....	191
3.7.2	Corbes característiques.....	194
3.7.3	Acoblament a una instal·lació.....	195
3.7.4	Efectes de la compressibilitat.....	199
3.7.5	Soroll generat per un ventilador.....	202
4.	Teoria general de turbomàquines hidràuliques.....	213
4.1	Transferència d'energia en una bomba.....	216
4.1.1	Triangles de velocitats en un rotor.....	216
4.1.2	Conservació del moment cinètic en el rotor.....	217
4.1.3	Generació d'empenta en una cascada lineal d'àleps.....	219
4.1.4	Equacions d'Euler per a turbomàquines.....	226
4.1.5	Discussió de les equacions d'Euler.....	227
4.2	Característiques teòriques i grau de reacció.....	230
4.2.1	Rodet radial simple.....	231
4.2.2	Cascada axial bàsica.....	234
4.2.3	Correcció clàssica de la teoria unidireccional.....	237
4.2.4	Grau de reacció teòric d'una turbomàquina.....	240
4.3	Ampliació de la teoria fonamental.....	245
4.3.1	Equacions generals del moviment en coordenades fixes.....	245
4.3.2	Equacions generals del moviment en coordenades mòbils.....	249
4.3.3	Relacions energètiques fonamentals.....	252
4.3.4	Equilibri radial en un rotor axial.....	257
4.4	Introducció al flux real en un rotor.....	261
4.4.1	Asimetria axial del flux relatiu.....	262
4.4.2	Superfícies generalitzades de corrent.....	265
4.4.3	Fluxos secundaris en un rotor axial.....	267
4.4.4	Fluxos secundaris en un rotor radial.....	271
4.4.5	Condiciones de vorticitat a l'entrada.....	273
4.4.6	Flux no estacionari i inestabilitat.....	274



5. Instal·lacions hidràuliques	283
5.1 Sistemes i equacions característiques	284
5.1.1 Equació del sistema i punt de funcionament.....	284
5.1.2 Càlcul de pèrdues.....	285
5.1.3 Sistemes simples unidireccionals	291
5.1.4 Sistemes de proveïment i xarxes	296
5.1.5 Velocitats límit i diàmetre econòmic	301
5.2 Vàlvules de regulació i d'altres.....	303
5.2.1 Establiment de la pèrdua de pressió.....	308
5.2.2 Característiques inherent i instal·lada	310
5.2.3 Selecció d'una vàlvula de control	315
5.2.4 Bloqueig i cavitació d'una vàlvula	320
5.2.5 Soroll generat per una vàlvula	323
5.2.6 Altres vàlvules	324
5.3 Regulació de sistemes.....	327
5.4 Cop d'ariet.....	331
5.4.1 Descripció del fenomen	331
5.4.2 Mètode analític i gràfic simplificat	334
5.4.3 Discussió i comentaris addicionals.....	336
5.4.4 Velocitat del so i temps de parada d'una impulsió.....	338
5.4.5 Mètodes de supressió i minoració	341
5.5 Oscil·lacions de massa.....	345
5.5.1 Xemenieies d'equilibri.....	345
5.5.2 Efecte bombeig i inestabilitat	349
5.5.3 Inestabilitat en paral·lel	352
5.6 Introducció a la ventilació	354
6. Instal·lacions oleohidràuliques	363
6.1 Sistemes de transmissió d'energia	364
6.2 Fluids hidràulics i selecció.....	365
6.2.1 Tipus de fluids hidràulics	366
6.2.2 Criteris de selecció	368
6.3 Actuadors hidràulics	370
6.3.1 Actuadors lineals	371
6.3.2 Motors oleohidràulics.....	372
6.4 Vàlvules de control i regulació.....	373
6.4.1 Vàlvules de pressió	374
6.4.2 Vàlvules de cabal.....	375
6.4.3 Vàlvules de control direccional.....	378
6.4.4 Tècnica proporcional enfront de convencional	380



6.5	Dispositius auxiliars	383
6.5.1	Dipòsits.....	383
6.5.2	Sistemes de filtració.....	385
6.5.3	Intercanviadors	391
6.5.4	Acumuladors	392
6.6	Transmissions hidrostàtiques	394
6.6.1	Acoblament ideal de bomba i motor.....	394
6.6.2	Desviacions del funcionament ideal	397
6.6.3	Relacions de potència i rendiment total	400
6.7	Circuits per a la regulació de la velocitat.....	402
6.7.1	Regulació per estrangulació	402
6.7.2	Divisors de cabal	404
6.8	Circuits regeneratius	405
6.9	Servoactuadors hidràulics.....	408
6.9.1	Condicció de potència màxima.....	410
6.9.2	Disseny del servoactuador òptim.....	412
6.9.3	Diagrama de funcionament.....	416
6.9.4	Servo de posició amb actuador simètric	421
6.10	Guia de disseny, instal·lació i posada en marxa.....	427
6.10.1	Plantejament i croquis inicial	427
6.10.2	Selecció dels conductes.....	430
6.10.3	Recomanacions finals	433
Annex. Manteniment i detecció d'avaries		439
A.1	Visió global de les classes de manteniment.....	439
A.2	Bombes centrífugues	440
A.3	Instal·lacions oleohidràuliques	443

Conceptes de mecànica de fluids

La mecànica de fluids tracta dels fluids en moviment o en repòs i, per a això, utilitza magnituds que poden ser escalars, vectorials i tensorials. Així mateix, aquestes magnituds poden estar assentades en camps, en funció de la posició i del temps, que s'anomenen escalars, vectorials o tensorials, segons el caràcter de la magnitud. Els camps es poden descriure de dues maneres en mecànica de fluids: la lagrangiana, segons la qual s'observa una partícula fluida concreta i se'n segueix el desplaçament en virtut del flux; i l'euleriana, amb què es fixa l'atenció en un punt de l'espai i es contempla la desfilada de diferents partícules que hi passen.

Les aplicacions de la mecànica de fluids són enormes, però, com a ciència, el seu estudi es basa en el compromís entre teoria i experimentació, i en la formulació d'un conjunt de principis de conservació que permeten un plantejament rigorós de qualsevol problema real. Molts dels conceptes de la física moderna estan tan íntimament lligats amb la seva forma lògica o matemàtica que, moltes vegades, el plantejament previ del tipus de solució que s'espera trobar és fonamental per descriure'ls. Així i tot, l'experiència ensenya cada dia que la diversitat de recursos de la naturalesa fa que la imaginació de l'home sigui insuficient per explicar les meravelles de la vida quotidiana.

Els dos obstacles principals a què s'enfronta un enginyer a l'hora d'aplicar els principis fonamentals en un cas concret són la geometria, o contorn, i la viscositat. Aquesta última, que és potser la propietat que defineix millor un fluid, com que està associada amb el fet de fluir, sol dificultar molt la resolució analítica dels problemes i només es pot menystenir en alguns casos idealitzats. L'estabilitat dels fluxos està condicionada per la presència de la viscositat: apareix turbulència quan el balanç entre els termes cinètics i els viscosos descrit pel número de Reynolds arriba a un valor determinat. En presència de turbulència, les variables del flux es tornen aleatòries i no permanents, la velocitat d'agitació de les partícules augmenta juntament amb el transport de qualsevol fenomen. En el flux turbulent, són més importants els transports de massa per difusió, de calor per conducció o de quantitat de moviment, que en un flux laminar (de l'ordre de cent vegades o més), i l'enginyer o enginyera han d'estar preparats per interpretar-lo, perquè hi ha aplicacions industrials en què interessa que el flux sigui laminar o turbulent, segons els casos.



Pel que fa a la geometria, cal tenir present que les lleis i els principis formulats en la física, en la mecànica i en la termodinàmica, se solen referir a volums fluids o a sistemes materials, que, per definició, són sistemes tancats de massa constant. Els sistemes fluids poden intercanviar calor amb l'entorn i també fer treball mecànic, però sempre inclouen les mateixes partícules de fluid. Això pot ser un inconvenient a l'hora d'estudiar qualsevol problema perquè, sovint, no es coneix la forma del sistema fluid, sinó la de l'entorn que l'inclou o pel qual flueix. En mecànica de fluids, aquest problema es resol mitjançant el concepte de volum de control, a partir del qual és possible estendre els principis i les lleis fonamentals al fluid contingut en contorns que poden canviar de forma o desplaçar-se. Lamentablement, aquest tractament no sempre és senzill, i sovint cal plantejar una sèrie d'hipòtesis simplificadores que l'analista ha de valorar en cada cas. Afortunadament, en canvi, els casos amb solució analítica ens han fet la vida més fàcil.

Molts càlculs tècnics es fan amb els valors mitjans de les manifestacions macroscòpiques d'un conjunt significatiu de molècules que es pot suposar que estan establertes en una distribució contínua de matèria, anomenada el continu. D'altra banda, les equacions de la termodinàmica clàssica es refereixen a magnituds del sistema mesurables en equilibri, i, segons el postulat d'estat, l'estat d'equilibri d'una substància simple i homogènia es pot determinar mitjançant l'especificació de dues de les seves propietats independents, intensives i intrínseques, quan sobre aquesta substància només es realitza una de les formes fonamentals de treball reversible, per exemple, el de compressió.

Però els processos de flux no segueixen una successió constant d'estats en equilibri ni tampoc és permisible reduir l'anàlisi als estats inicial i final del moviment, probablement de repòs. Cal estudiar el flux en si, irreversible per real, de manera que és necessari assumir la hipòtesi d'equilibri termodinàmic local, o gairebé equilibri, que justifiqui l'ús de les relacions termodinàmiques clàssiques. Aquesta hipòtesi es fonamenta en el fet que, en particular per a números de Knudsen petits, una partícula de fluid experimenta moltes col·lisions amb les seves veïnes abans d'aconseguir regions on les magnituds macroscòpiques siguin diferents. La seva energia i moviment s'adapten a les locals de manera gradual i van perdent memòria de la seva situació primitiva amb cada col·lisió. És per això que aquesta partícula sembla que està, en tot moment, en el mateix estat d'agitació tèrmica que les partícules circumdants, de manera que el problema es pot tractar mitjançant variables termodinàmiques que defineixin l'estat macroscòpic de volums infinitesimals, per als quals continuaran sent vàlides les equacions termodinàmiques.

Una vegada acceptats el continu i l'equilibri termodinàmic local, és possible deduir les equacions fonamentals que regeixen el comportament del fluid mitjançant l'aplicació dels principis de conservació de massa, quantitat de moviment i energia. Aquests principis relacionen l'evolució del fluid, observable mitjançant els canvis de



velocitat, pressió, temperatura o densitat, amb les manifestacions externes conseqüents de les quals l'enginyeria se serveix per produir treball, intercanviar calor o produir empenta. És molt important que l'enginyer o l'enginyera siguin conscients de l'ordre de magnitud d'aquests termes, per això convé descriure les propietats bàsiques dels fluids i les forces que hi poden actuar i determinar-ne el comportament.

1.1 El camp fluid

Admesa la validesa del continu en el mitjà fluid, és possible definir per a cada punt un vector de posició, \mathbf{x} , en cada instant de temps, t , al qual s'associaran les diferents variables del fluid: vector velocitat $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, pressió, temperatura, densitat, etc. Aquesta manera de descriure el camp fluid s'anomena *euleriana* i serveix per analitzar les variacions de les magnituds físiques en punts fixos de l'espai.

Es planteja l'estudi des del punt de vista *lagrangiana* si les magnituds físiques no es refereixen al punt de l'espai, sinó a la partícula fluida¹ que passa en el mateix instant per aquest punt. Des de la perspectiva lagrangiana, són vàlides les lleis fonamentals en la seva forma clàssica, de manera que aquest mètode sembla que té alguns avantatges en la seva formulació, si bé, en realitat, el tractament dels fluids aconsella adoptar la perspectiva euleriana.

1.1.1 Definicions i magnituds cinemàtiques

La *trajectòria* d'una partícula que en un instant anterior era en \mathbf{x}_0 és una equació vectorial, des del punt de vista lagrangiana, tal que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \quad [1.1]$$

de manera que la velocitat i l'acceleració del fluid es calculen de la manera següent:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \\ \mathbf{a}(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad [1.2]$$

Des del punt de vista eulerià, es pren com a variable fonamental del moviment la velocitat del fluid en un punt de l'espai, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, i el camp fluid es defineix mitjançant el camp de velocitats descrit per les *línies de corrent*, que són les línies tangents al vector velocitat en un instant donat, és a dir: $\mathbf{v} \wedge sdl$. Aquestes línies són les trajectòries del camp de velocitat i satisfan les equacions següents en coordenades cartesianes:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad [1.3]$$



Aquestes equacions es poden integrar utilitzant dues condicions de contorn i considerant que el temps hi apareix com un paràmetre constant. La trajectòria de la partícula de fluid, sota la perspectiva euleriana, es dedueix per integració del vector velocitat per a cadascuna de les coordenades i eliminant el temps corresponent del sistema de tres equacions [1.3]. En aquest cas, les constants d'integració són tres i poden ser, per exemple, les coordenades inicials de la partícula.

Les línies fluides que mostren la ubicació, a cada instant, de totes les partícules que van passar en un moment anterior per un punt de l'espai s'anomenen *traces* o *línies d'emissió*, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0, t)$. Aquestes línies es poden obtenir per integració del vector velocitat, tal com es va fer amb la trajectòria, però retenint les que passen pel punt de referència \mathbf{x}_0 en l'instant t_0 . La figura 1.1 mostra una interpretació gràfica d'aquestes línies.

Les línies de corrent, les trajectòries i les línies de traça coincideixen en el moviment permanent o estacionari, que es defineix com aquell moviment en què la velocitat no depèn del temps, encara que pugui dependre de l'espai $v(\mathbf{x})$. Per definició, en un moviment permanent, totes les magnituds fluides són independents del temps.² Si la velocitat no depèn de l'espai, encara que pugui dependre del temps $v(t)$, el moviment s'anomena uniforme. Aquesta condició és bastant restrictiva i infreqüent, perquè implica que el vector velocitat és el mateix en tot el camp fluid, tant en direcció com en mòdul, i només es presenta en els fluxos no pertorbats i en alguns casos idealitzats. A la pràctica, no obstant això, és comú descriure com a uniforme el moviment que es manté idèntic a si mateix. Per exemple, en el flux completament desenvolupat en un conducte de secció recta constant, el perfil de la distribució de la velocitat és el mateix en tot el conducte i el flux, per tant, es diu que hi és uniforme. A més, si el fluid és incompressible, i el conducte, indeformable, llavors qualsevol canvi temporal del cabal transportat afecta a l'instant tot el conducte, en el qual el flux es mantindrà uniforme,³ encara que no sigui permanent.

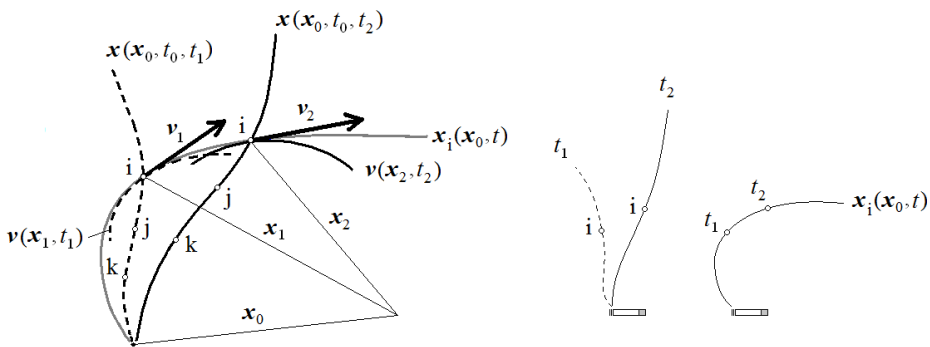


Figura 1.0.1. Definició de les línies de corrent, traça i trajectòria. La partícula "i" va passar per x_0 , passa per x_1 i passarà per x_2 seguint la seva trajectòria $\mathbf{x}(x_0, t)$. Les partícules "i", "j" i "k" formen la traça en cada instant considerat (per exemple, en t_2 , $\mathbf{x}(x_0, t_2)$) i la línia de corrent de "i" en l'instant t_2 és $\mathbf{x}(x_2, t_2)$. L'observador veu l'evolució de la línia de traça com la forma que dibuixa el fum d'un cigarret.



Els punts de velocitat nul·la són punts de *rabeig* o *estancament*, i són punts singulars de les línies de corrent perquè són els únics que poden pertànyer a més d'una. Dit d'una altra manera, dues línies de corrent no es poden tallar en cap punt que no sigui de recés perquè llavors aquest punt tindria definides dues velocitats. Com a corol·lari, cal afegir que si hi ha una línia tancada en l'espai en què recolzin línies de corrent, com a la figura 1.2, la superfície tubular que formen és un tub de corrent que tanca el fluid en el seu interior perquè no pot travessar-la.

S'anomena *flux convectiu* d'una magnitud ϕ a través d'una superfície fixa en un sistema de referència donat, la quantitat d'aquesta magnitud que la travessa per unitat de temps:

$$F_\phi = \int_S \phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad [1.4]$$

on \mathbf{n} és el vector unitari normal a dS .

El flux convectiu és una magnitud extensiva vinculada al moviment del fluid, que es pot aplicar a qualsevol magnitud intensiva, ϕ , de caràcter escalar o vectorial. Si ϕ és un escalar, llavors $\phi\mathbf{v}$ és el *vector flux* de ϕ i, per exemple, $\rho\mathbf{v}$, serà el vector flux màssic. El flux convectiu de la densitat és el flux màssic que travessa la superfície en un moment donat. Quan ϕ és un vector, la quantitat $\phi\mathbf{v}$ s'anomena *tensor flux* de ϕ .

La *circulació* del vector velocitat al llarg d'una línia qualsevol, L , es defineix com:

$$\Gamma = \int_L \mathbf{v} \cdot s dl \quad [1.5]$$

i és una magnitud cinemàtica que ajuda a interpretar el moviment fluid perquè, com es veurà a continuació, està relacionada amb l'existència de rotació o no. Són moltes les situacions pràctiques en què el moviment del fluid segueix trajectòries curvilínies al voltant d'un punt central, tot i que això no sempre indica que el fluid giri com un sòlid rígid. Quan es calcula la circulació en una línia de corrent que es tanca sobre si mateixa formant un cercle en què la velocitat és constant, s'obté la següent dependència funcional entre la circulació, la velocitat i el radi del cercle:⁴

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot s dl = v \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r v \quad [1.6]$$

En mecànica de fluids, es defineix el vector *vorticitat* o vector remolí com el rotacional del vector velocitat en un punt:

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \wedge \mathbf{v} \quad [1.7]$$

També es defineixen, per analogia a les línies i als tubs de corrent, les línies de remolí $\boldsymbol{\Omega} \wedge s dl = 0$, que són envoltants del vector vorticitat, i els tubs de vòrtexs o remolí, les parets del qual estan formades per línies de remolí (figura 1.2).

Com que el camp de vorticitat és un camp solenoidal, ja que la seva divergència $\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}$ és zero, i, en conseqüència, el flux de $\boldsymbol{\Omega}$ a través d'una superfície tancada és nul, resulta que el flux de la vorticitat és constant en el tub de remolí en un instant donat de



temps. Aquesta propietat cinemàtica és summament important i és independent de la mena de fluid o del model de flux que es presenti.

La vorticitat és una mesura de la rotació del fluid entorn d'un punt i s'anomena irrotacional el moviment per al qual és zero. Aquests moviments són potencials en un domini simplement connex, és a dir, són moviments en què la velocitat deriva d'un potencial escalar:

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi \quad [1.8]$$

En un moviment irrotacional es demostra que el potencial φ és la circulació, independent del camí, entre el punt x_0 , en què el potencial és nul, fins al punt x . En altres paraules, quan la velocitat deriva d'un potencial, la seva circulació en una línia tancada és nul·la.

De l'equació [1.8] es dedueix que les línies equipotencials i les línies de corrent són ortogonals en el camp fluid irrotacional simplement connex. Més endavant es demostrarà que la divergència de la velocitat és nul·la en els fluids incompressibles, cosa que condueix a l'equació de Laplace: $\nabla^2 \varphi = 0$.

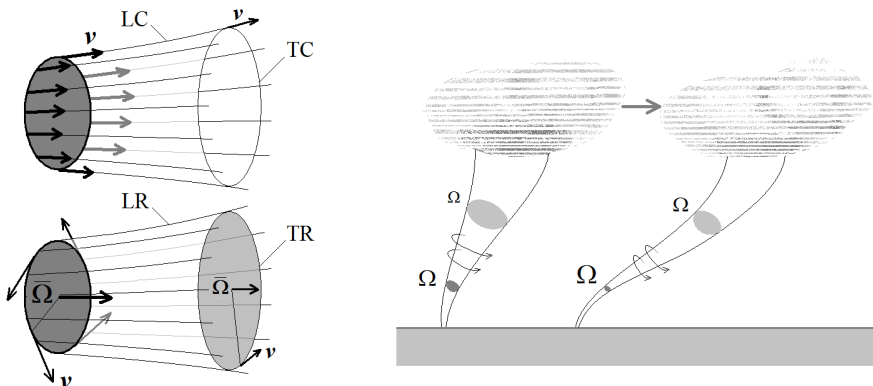


Figura 1.2. A l'esquerra, un tub de corrent format per les línies de corrent recolzades en el perímetre d'una superfície. El fluid dins del tub de corrent està tancat com si el tub de corrent fos una canonada de paret impermeable. Es dedueix que el flux convectiu de qualsevol magnitud és zero a través de la superfície del tub de corrent. A la dreta, un tub de remolí. Un tornado és un bon exemple de tub de remolí.

1.1.2 Sistemes de coordenades ortogonals

Les coordenades cartesianes $\{xyz\}$ no són l'única manera de descriure la posició d'un punt en l'espai. En general, la posició es pot determinar mitjançant fórmules del tipus: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1, q_2, q_3)$, on $\{q_1, q_2, q_3\}$ són les coordenades generalitzades del sistema de referència triat. La relació entre aquest sistema i el cartesià, o entre dos sistemes qualsevol de coordenades curvilínies, es pot fer amb les fórmules de transformació $q_i = q_i(x, y, z)$, o bé amb les seves inverses $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$.



Les equacions $q_i = q_i(x,y,z) = C$, on C és una constant, són una família de superfícies coordenades les interseccions de les quals per parelles defineixen les línies coordenades. Quan els vectors unitaris al llarg d'aquestes línies coordenades, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 i \mathbf{e}_3 , són perpendiculars en tot punt de l'espai, llavors el sistema de coordenades curvilini s'identifica com a ortogonal i la transició infinitesimal al llarg de les línies coordenades s'obté mitjançant la forma incremental:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_3} dq_3 \quad [1.9]$$

Com que el sistema és ortogonal, la longitud diferencial d'un element de línia compleix la relació:

$$(ds)^2 = (d\mathbf{x})^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right)^2 dq_i^2 = \sum_{i=1}^3 L_i^2 dq_i^2 \quad [1.10]$$

sent:

$$L_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad [1.11]$$

els coeficients de Lamé del sistema $\{q_1, q_2, q_3\}$ o coeficients mètrics. Aquests coeficients permeten escriure els vectors unitaris de la base local com:⁵

$$L_i \mathbf{e}_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right\| \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \quad [1.12]$$

i llavors l'equació [1.9] pren la forma:

$$d\mathbf{x} = L_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + L_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + L_3 dq_3 \mathbf{e}_3 \quad [1.13]$$

Els principals processos del càlcul vectorial per a les funcions escalar i vectorial, f i \mathbf{v} , respectivament, es resumeixen en les següents fórmules:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} f &= \frac{1}{L_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{L_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{L_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \\ \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left(\frac{\partial(L_2 L_3 v_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(L_1 L_3 v_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(L_1 L_2 v_3)}{\partial q_3} \right) \\ \tilde{\mathbf{N}} \wedge \mathbf{v} &= \frac{1}{L_2 L_3} \left(\frac{\partial(L_3 v_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(L_2 v_2)}{\partial q_3} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{L_1 L_3} \left(\frac{\partial(L_1 v_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(L_3 v_3)}{\partial q_1} \right) \mathbf{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{\partial(L_2 v_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(L_1 v_1)}{\partial q_2} \right) \mathbf{e}_3 \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \frac{L_2 L_3}{L_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{L_1 L_3}{L_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{L_1 L_2}{L_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \end{aligned} \quad [1.14]$$



on els coeficients de Lamé que resulten de [1.11] són els que figuren a la taula 1.1 per als sistemes ortogonals més freqüents.

Sistema de coordenades	L ₁	L ₂	L ₃
Cartesià (x,y,z)	1	1	1
Cilíndric (r,θ,z)	1	r	1
Esfèric (r,θ,φ)	1	r	r sin θ

Tabla 1.1 Coeficients de Lamé per a coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques. Cal tenir present que la coordenada r es defineix de manera diferent en els sistemes cilíndrics que en els esfèrics (figura 1.3).

De vegades, és més pràctic solucionar un problema en un sistema de coordenades, però es prefereix presentar-ne els resultats en un altre. La conversió entre dos sistemes es duu a terme mitjançant la *matriu de transformació*, a les files de la qual hi ha els components de la base destí respecte de la d'origen. Per exemple, com que la base local unitària en coordenades cilíndriques respecte de la cartesiana és:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \boldsymbol{\theta} &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k} \end{aligned} \tag{1.15}$$

si els components del vector OA de la figura 1.3 a la base rectangular són (x_A,y_A,z_A), llavors els seus components en la base cilíndrica, (c_r,c_θ,c_z), són:⁶

$$\begin{bmatrix} c_r \\ c_\theta \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_A & \sin \theta_A & 0 \\ -\sin \theta_A & \cos \theta_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Per passar aquestes coordenades a les esfèriques corresponents, (e_r,e_θ,e_φ), s'aplica el mateix criteri i resulta:

$$\begin{bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_A \cos \phi_A & \sin \theta_A \cos \phi_A & \sin \phi_A \\ -\sin \theta_A & \cos \theta_A & 0 \\ -\cos \theta_A \sin \phi_A & -\sin \theta_A \sin \phi_A & \cos \phi_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

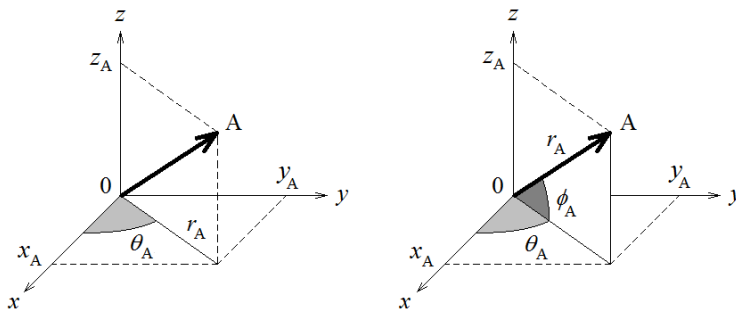


Figura 1.3. Sistemes coordinats curvilinis cilíndrics (esquerra) i esfèrics (dreta).



Per raons d'ortogonalitat entre les diferents bases, es pot afirmar que les matrius de transformació tenen com a determinant la unitat i que la matriu inversa és igual a la transposada. Això permet fer la transformació fàcilment en sentit contrari i també relacionar entre si els diferents sistemes de coordenades. Per transformar unes coordenades cilíndriques en esfèriques, s'operaria amb [1.16] i [1.17] de la següent manera:

$$\begin{bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_A \cos \phi_A & \sin \theta_A \cos \phi_A & \sin \phi_A \\ -\sin \theta_A & \cos \theta_A & 0 \\ -\cos \theta_A \sin \phi_A & -\sin \theta_A \sin \phi_A & \cos \phi_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_A & \sin \theta_A & 0 \\ -\sin \theta_A & \cos \theta_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_r \\ c_\theta \\ c_z \end{bmatrix} \quad [1.18]$$

i el resultat és:

$$\begin{bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_A & 0 & \sin \phi_A \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_A & 0 & \cos \phi_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_r \\ c_\theta \\ c_z \end{bmatrix} \quad [1.19]$$

1.1.3 Relacions de Frenet i coordenades naturals

El triedre de Frenet en geometria diferencial és un sistema de coordenades local creat sobre una corba en l'espai, la terna unitària de vectors base del qual $(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ està definida sobre la direcció de la tangent a la corba, la seva normal principal i la direcció binormal. L'orientació relativa entre els vectors de la base es defineix en sentit dextrogir i els plans que contenen els vectors (\mathbf{s}, \mathbf{n}) i (\mathbf{n}, \mathbf{b}) s'anomenen *osculador* i *normal*, respectivament.

En comparació amb altres sistemes de coordenades, el sistema de coordenades intrínseques no serveix, en general, per descriure la posició de qualsevol punt en l'espai, sinó només la seva ubicació al llarg d'una corba qualsevol, en principi coneguda i parametrizable.⁷ Per identificar la posició d'un punt P en la corba, cal definir el seu origen O, la distància mesurada al llarg de la mateixa respecte d'aquest origen i un sentit positiu de desplaçament. Sent s la coordenada genèrica o abscissa curvilínia de la corba al llarg de la seva tangent, i $\mathbf{r}(s)$ el vector OP corresponent, el vector tangent $\mathbf{s}(s)$ es defineix com:

$$\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \quad [1.20]$$

ja que el quocient $\Delta \mathbf{r} / \Delta s$ tendeix, en el límit, a ser un vector unitari tangent a la corba en P.

En mecànica de fluids, els triedres de Frenet es poden definir al llarg de trajectòries, línies de corrent i línies de remolí. L'avantatge més gran de fer servir línies de corrent és, evidentment, que llavors el vector velocitat només té component en \mathbf{s} , de manera



que les equacions bàsiques se simplifiquen notablement i el mateix camp de velocitats defineix la terna $(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.

En aquest cas, el vector tangent és:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{v}}{v} \quad [1.21]$$

on $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Com que es compleix que $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$, es dedueix que $2(\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}/ds) = 0$, i $d\mathbf{s}/ds$ és un vector perpendicular a \mathbf{s} sempre dirigit cap al centre de curvatura. El vector unitari del marc de Frenet en aquesta direcció (i sentit) és el vector normal \mathbf{n} , que resulta de:

$$\frac{d\mathbf{s}}{ds} = \left\| \frac{d\mathbf{s}}{ds} \right\| \mathbf{n} \quad [1.22]$$

Amb \mathbf{s} i \mathbf{n} definits, el vector binormal s'obté del producte vectorial:

$$\mathbf{b} = \mathbf{s} \wedge \mathbf{n} \quad [1.23]$$

A mesura que el punt P es desplaça al llarg de la corba definida per s , el marc de Frenet pot girar i els vectors de la base subjectes a P poden canviar de direcció. La rotació associada a aquest desplaçament queda recollida amb l'anomenat *vector de Darboux*, que es defineix com:

$$\mathbf{D} = \tau \mathbf{s} + \kappa \mathbf{b} \quad [1.24]$$

Els dos coeficients escalars que apareixen en aquesta fórmula són la torsió de la corba, τ , i la seva curvatura, κ . En conseqüència, el vector de Darboux proporciona una forma geomètrica concisa d'interpretar la curvatura i la torsió d'una corba en l'espai: curvatura i torsió són la mesura de la rotació del marc de Frenet sobre els vectors binormal i tangent, respectivament.

La variació dels vectors de base al llarg de la corba ve descrita per les conegudes relacions de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{s}}{ds} &= \mathbf{D} \wedge \mathbf{s} = \kappa \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \mathbf{D} \wedge \mathbf{n} = -\kappa \mathbf{s} + \tau \mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \mathbf{D} \wedge \mathbf{b} = -\tau \mathbf{n} \end{aligned} \quad [1.25]$$

La primera d'aquestes equacions permet definir analíticament la curvatura, κ , la inversa de la qual se sap que és el radi de curvatura, que, segons [1.22], és sempre positiu o zero.

Quan la corba es troba en un punt d'inflexió, té lloc una singularitat, que condueix a una indefinició del marc de Frenet que limita o en condiona l'ús. Aquesta circumstància es resol imposant restriccions al vector normal i definint-lo en els punts singulars de la corba.⁸ En resum, es defineix el sistema natural de coordenades en què el vector normal és considerat positiu quan apunta a l'esquerra de \mathbf{s} , de la corba, en



definitiva, i també en els punts d'inflexió. Com a corol·lari, la concavitat i el radi de curvatura són també definits positius en el mateix sentit, i així es compleix que la curvatura en el sistema natural de coordenades és el nombre real que resulta del producte escalar:

$$\kappa = \frac{ds}{ds} \cdot \mathbf{n} \tag{1.26}$$

i sent

$$\frac{ds}{ds} = - \left\| \frac{ds}{ds} \right\| \mathbf{n} = \kappa \mathbf{n} \tag{1.27}$$

quan ds/ds apunta a la dreta de \mathbf{s} . Cal que observem que la definició del sistema natural de coordenades no afecta les relacions de Frenet ni el sentit del vector normal, que continua dirigit cap al centre de curvatura, sinó només el seu signe.

Les relacions de Frenet-Serret [1.25] també es poden reescriure de manera matricial. A més, fent servir la regla de derivació en cadena per introduir el mòdul de la velocitat, v , resulta:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

La matriu resultant és antisimètrica i, per tant, els vectors de la base giren amb una velocitat angular $v(\kappa^2 + \tau^2)^{1/2}$ al voltant d'un eix que té la direcció del vector \mathbf{D} . Com que el vector de Darvoux de [1.24] no té component en direcció $\{n\}$, la corba només es pot torsionar en direcció $\{s\}$ i corbar-se (girar) sobre les línies en direcció $\{b\}$. Això ha donat lloc a l'estudi del flux fluid des d'una perspectiva topològica, que queda fora de l'abast d'aquesta obra, del qual s'extreuen conclusions importants quan s'analitza la forma que adquireix la superfície de corrent sobre la qual es dona suport a la corba i la seva relació amb la distribució d'energia en el flux i la seva vorticitat (vegeu apartat 2.3.1).

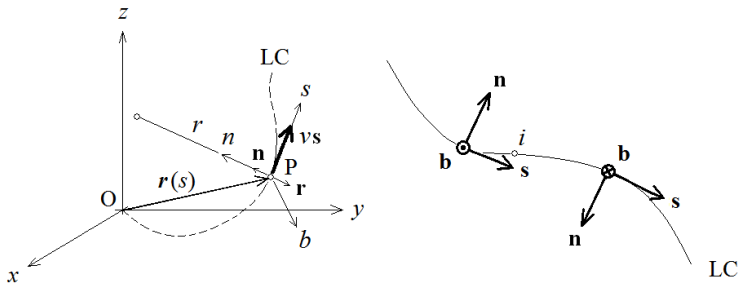


Figura 1.4. Triedre de Frenet sobre una línia de corrent (LC) el radi de curvatura del qual en P és r , i moviment del triedre de Frenet a través d'un punt d'inflexió (i). El vector normal \mathbf{n} sempre apunta cap a la concavitat de la corba, per això on la curvatura canvia de signe el vector \mathbf{n} no està definit i el vector \mathbf{b} experimenta una inversió. Per a resoldre aquest problema i donar continuïtat a la funció $\mathbf{n}(s)$, en el sistema de coordenades natural \mathbf{n} apunta a l'esquerra de \mathbf{s} en aquest punt. Quan la curvatura és a la dreta segons el sentit d'avanç de \mathbf{s} , el vector normal i la curvatura són definits positius.



Per concloure aquest apartat, cal esmentar la manera com es descriuen l'acceleració de la partícula i la seva vorticitat en coordenades naturals. És ben sabut que l'acceleració resulta de l'expressió:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{s} + \frac{1}{r} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{n} = \frac{dv}{dt} \mathbf{s} + \frac{v^2}{r} \mathbf{n} = a_t \mathbf{s} + a_n \mathbf{n} \quad [1.29]$$

on a_t representa l'acceleració tangencial, o variació del mòdul de la velocitat; a_n és l'acceleració normal, que representa la variació en direcció de la velocitat i està continguda en el pla osculador, i $r = 1/\kappa$ és el radi de curvatura en aquest punt. Se segueix que l'acceleració de la partícula no té component en direcció binormal, cosa que evidentment no vol dir que sobre la partícula no hi puguin actuar forces en aquesta direcció, sinó que la resultant de les forces aplicades en \mathbf{b} és nul·la.⁹

No és tan coneguda ni tan fàcil d'interpretar l'expressió que regeix la vorticitat en un punt. En el cas tridimensional més general, i per components, és:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \Omega_s \mathbf{s} + \Omega_n \mathbf{n} + \Omega_b \mathbf{b} = \\ &= v \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial n} \mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \mathbf{n} \right) + \frac{\partial v}{\partial b} \mathbf{n} + \left(\kappa v - \frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathbf{b} \end{aligned} \quad [1.30]$$

on apareixen les derivades del versor \mathbf{s} i de la velocitat en les direccions normal i binormal a la línia de corrent. Per determinar les primeres, és necessari operar en coordenades naturals sobre la superfície parametritzada que conté la línia de corrent, que serà una superfície de corrent.¹⁰ Les segones són conegudes si es coneix el camp de velocitats sobre aquesta superfície.

És evident que, en cas de moviment pla o axisimètric sense velocitat azimutal, la vorticitat només podria ser perpendicular al pla osculador, és a dir, només Ω_b seria no nul·la. En qualsevol altre cas, la vorticitat pot tenir components en les tres direccions de la base local, cosa que genera tot un subconjunt de superfícies de flux característiques.

Sense entrar en més detall de l'estrictament necessari, la condició $\Omega_n = 0$ per si sola és condició necessària i suficient per a l'existència d'una família de superfícies d'un sol paràmetre, en què les línies de corrent són línies geodèsiques; les línies normals, perpendiculars a la superfície, i les línies binormals, paral·leles entre si. Aquesta condició també implica que el vector de Darvoux i la vorticitat siguin paral·lels, perquè llavors el *vector de Lamb*, $\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$, és paral·lel a \mathbf{n} .¹¹ Si és Ω_s la que és nul·la, llavors les línies de corrent i les de remolí són perpendiculars entre si i ambdues són geodèsiques sobre la superfície. Aquesta condició també té una altra conseqüència important en l'estudi del flux: el sistema natural de coordenades es pot transformar en qualsevol altre sistema ortogonal, sempre que la densitat d'helicitat, $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}$, sigui nul·la; és a dir, el sistema natural de coordenades és també un sistema ortogonal en aquells moviments no helicoidals per als quals $\Omega_s = 0$.



D'altra banda, quan $\mathbf{\Omega} = \Omega_s \mathbf{s}$, s'obté el flux de Beltrami, per al qual el vector de Lamb és zero i en què el flux està format per vòrtexs longitudinals les línies de corrent dels quals tenen forma helicoidal i coincideixen amb les línies de remolí. Com més a prop es troba una línia de corrent de l'eix central, més estirada és la seva forma i més gran és la velocitat del flux. Aquest moviment és possible si les partícules de fluid per separat estan dotades del moviment d'un sòlid rígid i una velocitat paral·lela a l'eix de rotació de la partícula aïllada. Més endavant s'analitzen més extensament les característiques i les implicacions d'aquest flux.

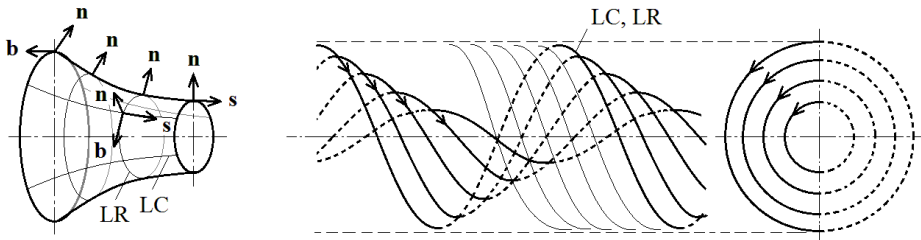


Figura 1.5. Visualització d'un flux axisimètric sense velocitat azimuthal en què $\mathbf{\Omega} = \Omega_s \mathbf{b}$ (esquerra) i del flux de Beltrami (dreta). LC i LR són les corresponents línies de corrent i de remolí.

1.1.4 La derivada substancial

Els punts de vista lagrangiana i euleriana es relacionen en mecànica de fluids mitjançant la derivada temporal d'una propietat intensiva escalar o vectorial seguint una partícula. Aquesta derivada resulta de l'operació:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi \quad [1.31]$$

El terme a l'esquerra d'aquesta equació és la derivada de la propietat quan l'observador segueix la partícula en el seu moviment i coincideix amb el punt de vista de Lagrange. El primer terme de la dreta és l'anomenada *derivada local* d'aquesta propietat, que és la seva variació temporal en el punt fix considerat, mentre que l'últim terme de la dreta és la *derivada convectiva*, o canvi de la propietat amb el moviment en el camp fluid.

L'acceleració d'una partícula fluida es calcula, conforme a [1.31], com:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} \quad [1.32]$$

El primer terme de la dreta és l'acceleració local i no té una interpretació física directa, ja que, de fet, no és una acceleració, perquè representa la diferència de velocitat de dues partícules diferents per unitat de temps (dues partícules que van passar en



instants diferents per la ubicació considerada). El segon sumand s'ha d'entendre com el producte escalar del vector velocitat pel tensor gradient de velocitat.

Quan les coordenades són cartesianes o bé ϕ és un escalar, és útil definir l'operador derivada substancial com:

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \quad [1.33]$$

ja que llavors es compleix que $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi = \mathbf{v} \cdot (\nabla\phi)$. En coordenades cartesianes, per tant, l'acceleració de [1.32] es pot calcular de manera vectorial i en notació de subíndexs de la següent manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \\ a_i &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad [1.34]$$

Moltes vegades, és preferible fer servir l'equació:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) \quad [1.35]$$

que és equivalent a [1.32] i vàlida en qualsevol tipus de coordenades, perquè és útil relacionar l'acceleració de la partícula fluida amb la seva vorticitat a través del vector de Lamb.

1.1.5 Teoremes fluids

En aquest apartat, es descriuen alguns dels teoremes més importants que s'apliquen a la cinemàtica del mitjà fluid. Aquests teoremes permeten relacionar entre si algunes de les magnituds descrites fins ara i ofereixen un marc matemàtic bàsic, alhora que necessari, que permet explicar millor el moviment fluid i ajuda a interpretar-lo.

El teorema de Gauss-Ostrogradskii relaciona el flux convectiu d'una propietat determinada a través d'una superfície tancada amb la divergència del seu vector o tensor flux en el volum tancat per aquesta superfície. Això és:

$$\int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) dV \quad [1.36]$$

amb la qual cosa $\nabla \cdot (\mathbf{v})$ és el flux de ϕ cap a l'exterior de la unitat de volum. Aquest teorema permet escriure el flux com una integral de volum i és de gran ajuda en la deducció analítica de molts principis bàsics.

El teorema de Stokes afirma que la circulació de la velocitat al llarg d'una línia tancada és igual al flux de la vorticitat a través de qualsevol superfície que hi recolzi:

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot s dl = \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad [1.37]$$



Com a conseqüència del teorema de Stokes, si la circulació és nul·la al llarg de qualsevol línia tancada, llavors la vorticitat és nul·la en tot el camp fluid i el moviment és irrotacional. El recíproc no és cert si el camp fluid no és simplement connex, com passaria, per exemple, si el fluid estigués tancat per una superfície toroidal o hi hagués un nombre finit de discontinuïtats en el camp fluid. És a dir, la circulació de la velocitat no s'anul·la quan ho fa el rotacional quan no es verifiquen les condicions d'aplicació del teorema de Stokes.

Altres teoremes relacionats amb la circulació són els de Bjerknes i Kelvin. El primer relaciona la variació en la unitat de temps de la circulació de la velocitat al llarg d'una línia fluida tancada amb la circulació de l'acceleració de la partícula:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} \quad [1.38]$$

Un resultat interessant del teorema de Bjerknes és el que enuncia el teorema de Kelvin, segons el qual, quan l'acceleració deriva d'un potencial, tal que $\mathbf{a} = \nabla\Psi$, la seva circulació és nul·la i la circulació de la velocitat al llarg de qualsevol línia tancada es manté constant i igual al seu valor inicial. Un altre enunciat del teorema de Kelvin resol que la circulació al llarg d'una línia tancada constituïda sempre pels mateixos elements de fluid és constant. El moviment pot ser rotacional o no, però, si és irrotacional perquè parteix del repòs o és uniforme, es mantindrà irrotacional mentre l'acceleració derivi d'un potencial.¹² Si el moviment és rotacional i hi ha tubs de remolí, com que la circulació és la mateixa sobre qualsevol línia perimètrica del tub de remolí i es manté constant en aquest cas, el vector $\boldsymbol{\Omega}$ s'intensifica a mesura que la secció transversal del tub tendeix a zero per mantenir el seu flux constant (figura 1.2). Com que la velocitat no pot fer infinita quan augmenta la vorticitat, es conclou que els tubs de remolí han de ser tancats o acabar en un contorn sòlid o en una superfície lliure.

1.1.6 Integrals esteses a volums fluids

En mecànica de fluids, un volum fluid, V_F , és un sistema material tancat al qual no entra i del qual no surt massa a través de la seva superfície: és un sistema fluid de massa constant. Per a la formulació dels principis fonamentals de la mecànica de fluids, és fonamental tenir en compte la variació de qualsevol magnitud física associada al volum fluid.

Si ϕ és una magnitud fluida intensiva vinculada al fluid, la propietat extensiva associada a un volum fluid és:

$$\Phi = \int_{V_F} \phi dV \quad [1.39]$$

La derivada material de Φ no es pot aplicar a través de la integral perquè el volum d'integració és una funció del temps. Aquesta integral pot variar per dues raons: perquè ϕ canvia dins del volum geomètric fix, V , que en aquest instant coincideix amb el volum



fluid, V_F , i també perquè canvia aquest volum, la superfície del qual es mou a una velocitat \mathbf{v} i es desplaça una distància $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\delta t$ en un temps diferencial. El canvi total de Φ en un diferencial de temps és:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_F} \phi dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\Phi}{\delta t} = \int_{V_F} \frac{\partial\phi}{\partial t} dV + \int_S \phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad [1.40]$$

L'equació [1.40] és el teorema del transport de Reynolds, que afirma que la variació temporal d'una funció integral vinculada al moviment és la integral de la seva variació local estesa al volum integral, que en aquest instant coincideix amb el volum fluid, més el flux net de la funció a través de la superfície frontera d'aquest volum.

Com que la segona integral de l'equació [1.40] és el flux convectiu de la propietat ϕ a través de la superfície, el teorema de Gauss-Ostrogradskii porta a:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{V_F} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\mathbf{v}) \right) dV \quad [1.41]$$

És important advertir que, malgrat que el volum fix no és el volum fluid i només hi coincideix en l'instant considerat, no hi ha límit per al seu valor. En altres paraules, el volum de l'equació [1.41] pot ser qualsevol, ja que la integral està presa en un instant i qualsevol volum pot ser volum fluid.

Sovint, és més còmode referir la derivada d'una integral a volums que coincideixin amb la geometria variable del contorn. Sigui V_C un volum de control dependent del temps i la superfície del qual es mou amb una velocitat \mathbf{v}_C . La derivada temporal de la propietat Φ_C continguda en aquest volum és:

$$\frac{d\Phi_C}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \phi dV = \int_{V_C} \frac{\partial\phi}{\partial t} dV + \int_{S_C} \phi(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{n}) dS \quad [1.42]$$

Si els volums fluid, fix i de control coincideixen en l'instant en què es pren la derivada, llavors:

$$\int_{V_C} \frac{\partial\phi}{\partial t} dV = \int_{V_C} \frac{\partial\phi}{\partial t} dV \quad [1.43]$$

i, combinant [1.40] i [1.42], s'obté:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \phi dV + \int_{S_C} \phi((\mathbf{v} - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{n}) dS \quad [1.44]$$

on $\mathbf{v} - \mathbf{v}_C$ és la velocitat relativa del fluid al volum de control mòbil. Evidentment, si el volum de control és fix, llavors:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_C} \phi dV = \int_{V_C} \frac{\partial\phi}{\partial t} dV \quad [1.45]$$



i, com que $\mathbf{v}_C = 0$, [1.44] torna a portar a l'equació [1.40].

Quan la propietat ϕ es distribueix de manera uniforme en el volum de control, $\phi(t)$, l'equació [1.44] s'escriu en funció dels canvis temporals de ϕ i del volum com:

$$\frac{d\Phi}{dt} = V_C \frac{d\phi}{dt} + \phi \frac{dV_C}{dt} + \int_{S_C} \phi((\mathbf{v} - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{n}) dS \quad [1.46]$$

que es pot aplicar en molts casos en enginyeria, tant si ϕ és un escalar com si és un vector.

1.2 Fenòmens, processos i propietats

Per dominar i fer un bon ús de les instal·lacions hidràuliques, cal conèixer les equacions que defineixen el comportament del sistema en funció de les variables d'estat i de procés, de les condicions de frontera i de les propietats del fluid. Entre les propietats més emprades pels usuaris de les instal·lacions, hi ha les que estan associades a cadascun dels fenòmens de transport: difusivitats de quantitat de moviment, massa i calor; a més de la densitat, els coeficients de compressibilitat i la pressió de vapor, o d'altres de més específiques que no tractarem aquí.

1.2.1 Fenòmens de transport, difusivitats i simultaneïtat

Els estats d'equilibri de la matèria en el continu es caracteritzen per una distribució espacial uniforme de cadascuna de les variables del material, en què cada element estigui en equilibri mecànic i tèrmic amb els del seu entorn. Amb el fluid en repòs, quan certes propietats no són uniformes, s'observa un flux d'intercanvi d'aquestes propietats que tendeix a portar-les a un nou equilibri. Hi ha una clara relació causa-efecte en aquest procés que satisfà les lleis de conservació i s'anomena *fenomen de transport*.

Els fenòmens de transport que tenen lloc en l'àmbit molecular són bàsicament de tres classes i tenen fortes analogies físiques i matemàtiques entre si, tal com es descriu a continuació. Aquests fenòmens són el transport de massa, el d'energia i el de quantitat de moviment.

El flux de massa o cabal màssic a través d'una superfície d'un fluid de densitat ρ es calcula mitjançant l'expressió [1.4], en què ϕ és la densitat:

$$G = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad [1.47]$$

Si la superfície és tancada, la integral anterior representa la quantitat de matèria que abandona el volum tancat per unitat de temps. Quan la concentració del fluid no és



uniforme, cada espècie i presenta una densitat ρ_i , de manera que el quocient ρ_i/ρ és la fracció màssica o concentració, c_i , d'aquest component.

Els resultats experimentals manifesten que el vector flux màssic d'una espècie determinada a través d'una superfície és proporcional al seu gradient de concentració, és a dir:

$$\rho_i \mathbf{v} = -\rho D \nabla \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right) \quad [1.48]$$

en què D és el coeficient de difusió de la mescla. L'equació [1.48] és la primera llei de Fick de la difusió, vàlida especialment per a mescles binàries o en què hi hagi una espècie preponderant.

Com que l'espècie i es conserva, l'aplicació del principi de l'equació [2.1] i el teorema d'Ostrogradskii resolen que:

$$\int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV = -\int_S \rho_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_V \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}) dV \quad [1.49]$$

d'on resulta, amb [1.48] i suposant que D és constant, o que els seus gradients en el mitjà són menyspreables:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = D \nabla^2 c_i \quad [1.50]$$

que és la coneguda equació de difusió¹³ o segona llei de Fick, que relaciona la variació de concentració d'una espècie amb el seu laplaciana segons una equació d'ona.

De manera anàloga al transport d'una espècie i , per al transport de calor a través d'una superfície es compleix que:

$$\int_V \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV \quad [1.51]$$

Com que la llei de Fourier indica que el flux de calor és:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad [1.52]$$

resulta:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad [1.53]$$

que és de la mateixa forma que [1.50], sent

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad [1.54]$$

la difusivitat tèrmica, funció de la conductivitat tèrmica, la densitat i la capacitat calorífica a pressió constant del fluid.



El transport de quantitat de moviment està associat a les diferències relatives de velocitat entre dos punts i a la viscositat del fluid. Un gradient de la velocitat suposa l'aparició de forces tallants, tendents a frenar i a accelerar les diferents parts mòbils. Newton va enunciar que l'esforç tallant entre capes contigües de fluid és proporcional a la velocitat relativa entre capes o velocitat de deformació,¹⁴ i va anomenar *viscositat dinàmica*, μ , la constant de proporcionalitat, de manera que:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \mu \dot{\gamma} \quad [1.55]$$

Quan el gradient de pressions i les forces màssiques són menyspreables, i no hi ha efectes convectius de velocitat, la variació de la quantitat de moviment del fluid per unitat de massa i temps es relaciona amb les forces d'origen viscós mitjançant l'expressió:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad [1.56]$$

altre cop semblant en forma a [1.50] i [1.53]. La relació $\nu = \mu/\rho$ és la viscositat cinemàtica del fluid o difusivitat de quantitat de moviment.

Els tres fenòmens de transport esmentats tenen associada una *difusivitat*, de dimensions $[L^2T^{-1}]$, que indica la rapidesa amb què es dona el transport d'aquesta propietat en funció del gradient actuant (superfície escombrada pel fenomen per unitat de temps). Per exemple, si α és gran, domina la conductivitat sobre la capacitat d'emmagatzemar calor i, per tant, no hi haurà grans gradients de temperatura. Basant-nos en aquesta idea, es defineixen una sèrie de grups adimensionals que comparen la importància relativa (simultània) d'aquestes difusivitats, que són el número de Prandtl, el de Lewis i el de Schmidt:¹⁵

$$\begin{aligned} \text{Pr} &= \frac{c_p \mu}{k} \\ \text{Le} &= \frac{\rho c_p D}{k} \\ \text{Sc} &= \frac{\mu}{\rho D} \end{aligned} \quad [1.57]$$

A més, els diferents fenòmens de transport interfereixen entre si per provocar l'aparició de nous fenòmens,¹⁶ de manera que un gradient de temperatura pot originar un gradient de quantitat de moviment, etc.

Per a estats no gaire allunyats de l'equilibri, s'accepta que els fluxos f_i dels diferents fenòmens són funcions lineals dels esforços e_j . De manera generalitzada, s'escriu:¹⁷

$$f_i = \sum_j \alpha_{ij} e_j \quad [1.58]$$



Els coeficients α_{ij} s'anomenen *coeficients cinètics* i es poden presentar en forma matricial, en què els diagonals, α_{ii} , representen els efectes directes, i els no diagonals, α_{ij} , els efectes d'acoblament.

És convenient tenir un ordre de magnitud d'aquests coeficients i de la seva tendència a l'hora de canviar la pressió o la temperatura en multitud de càlculs en enginyeria. La difusivitat de massa, per exemple, depèn de l'estat termodinàmic local del fluid i augmenta amb la temperatura. En els gasos, el coeficient de difusió disminueix amb la pressió i és de l'ordre de 10^4 vegades més gran que en els líquids. Una bona aproximació a D la proporciona la relació:

$$D = D_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^m \left(\frac{p_0}{p} \right) \quad [1.59]$$

A la taula 1.2, es mostren els valors de D_0 i m per a diferents mescles de gasos referits a una atmosfera i 273 K.

La conductivitat tèrmica sol decreixer amb la temperatura i depèn feblement de la pressió. Curiosament, l'aigua i l'aire són excepcions a aquesta regla: per a l'aire i l'aigua a 15 °C, k és $2,51 \cdot 10^2$ i $0,59$ (W/m)/K, respectivament, mentre que a 100 °C és $3,17 \cdot 10^2$ i $0,67$ (W/m)/K.

Mescla binària	D_0	m
Monòxid de carboni i oxigen	0,185	1,75
Oxigen i nitrogen	0,181	1,75
Vapor d'aigua i aire	0,220	1,75
Oxigen i aire	0,178	1,75
Diòxid de carboni i aire	0,138	2
Hidrogen i aire	0,611	2
Metà i aire	0,196	2

Taula 1.2 Coeficients de difusió de diverses parelles de gasos en $[\text{cm}^2/\text{s}]$.

1.2.2 Viscositat i reologia

La viscositat és la propietat distintiva dels mitjans fluids, perquè relaciona la força tallant aplicada per unitat de superfície amb la velocitat de deformació resultant. La viscositat es fa servir per avaluar la resistència dels fluids a fluir per l'interior de conductes o a vessar per orificis (com més gran és la viscositat, més alta és la resistència).

La unitat de la viscositat dinàmica, μ , en el sistema internacional és el $[\text{Pa}\cdot\text{s}]$. A la pràctica, també s'utilitzen el *poise*,¹⁸ definit en el sistema CGS com $[\text{g}/(\text{cm}\cdot\text{s})]$, i el *centipoise* $[\text{cPo}]$. La viscositat cinemàtica, ν , té per unitats pràctiques l'*stoke*, definit en sistema CGS com $[\text{cm}^2/\text{s}]$, i el *centistoke* $[\text{cSt}]$.



Altres mesures pràctiques de la viscositat són les viscositats expressades en segons Saybolt [S] i Redwood [R], i graus Engler [°E], que se serveixen d'aparells calibrats mitjançant els quals es mesura el temps que triga a fluir una determinada quantitat de fluid a una temperatura controlada. A la figura 1.6, es mostra l'equivalència entre totes aquestes unitats de viscositat.

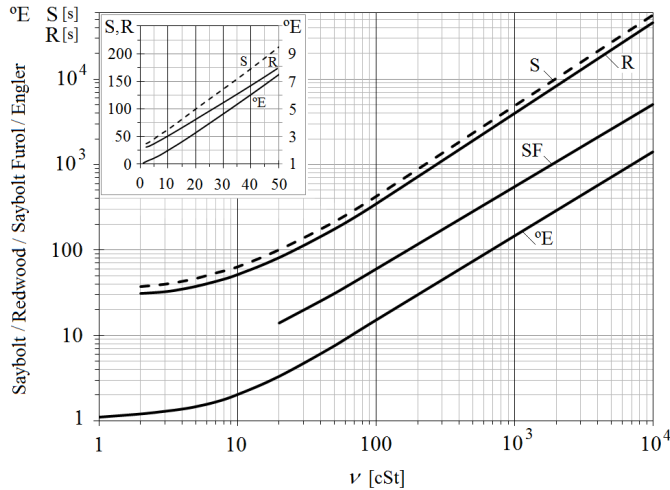


Figura 1.6. Relació entre unitats pràctiques de viscositat

La viscositat dels gasos és de l'ordre de 10⁵ Pa·s i creix amb la temperatura, en augmentar l'intercanvi d'impuls amb l'agitació molecular, normalment amb un factor $T^{2/3}$. En els líquids, en canvi, la viscositat decreix quan augmenta la temperatura perquè els moviments moleculars ajuden a contrarestar les forces viscoses. No hi ha cap teoria general que ordeni la viscositat dels líquids de manera satisfactòria, però s'observa experimentalment que la relació amb la temperatura és logarítmica, i una bona aproximació d'això és l'expressió:

$$\ln\left(\frac{\mu}{\rho M}\right) = A + \frac{B}{T} \quad [1.60]$$

en què M és la massa molecular del líquid, i A i B són dues constants que depenen de la seva estructura.

La variació de la viscositat amb la pressió en els líquids és més notòria que en els gasos, i augmenta de manera gairebé lineal a baixes pressions i de manera exponencial a altes. Una bona aproximació és:

$$\ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) = Cp \quad [1.61]$$

en què C és un paràmetre que depèn, al seu torn, de la viscositat.

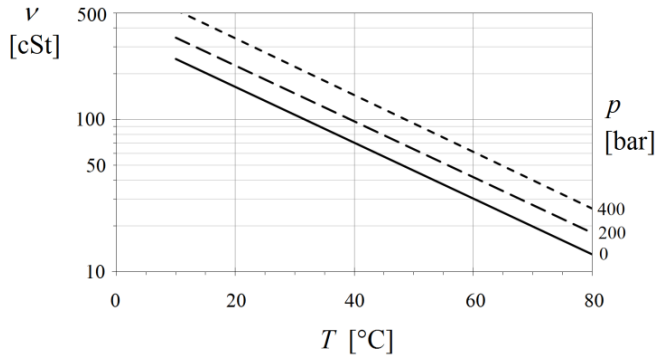


Figura 1.7. Relació de la viscositat amb la temperatura i la pressió d'un oli mineral.

Els rangs de viscositat industrial dels fluids hidràulics se subdivideixen en graus de viscositat (VG) ISO, relacionats amb determinats intervals de viscositat en centistokes i a 40 °C. Els graus de viscositat ISO es relacionen amb les classes de viscositat SAE, segons la temperatura de l'entorn on hagi de treballar l'equip. A la taula 1.3 es mostren els graus de viscositat més comuns.

Els fluids es poden classificar atenent el seu comportament al llarg del temps d'exposició davant esforços viscosos. Aquest comportament es pot descriure de manera gràfica emprant *diagrames reològics*, en què es representa la relació entre l'esforç tallant i la velocitat de deformació consegüent.

Graus ISO de viscositat	Viscositat cinemàtica a 40°C [cSt]	Límits de la viscositat mitjana a 40°C [cSt]	
		Mínim	Màxim
ISOVG5	4,6	4,14	5,06
ISOVG10	10	9,00	11,0
ISOVG22	22	19,8	24,2
ISOVG46	46	41,4	50,6
ISOVG100	100	90,0	110
ISOVG220	220	198	242
ISOVG460	460	414	506
ISOVG1000	1.000	900	1.100

Taula 1.3. Graus de viscositat ISO. Observeu que la viscositat augmenta amb el número de grau. Per tenir la viscositat adequada a cada temperatura, el VG baixa quan baixa la temperatura de treball.

Els fluids newtonians segueixen l'equació [1.55] o la més general [1.131], que es presenta mitjançant una característica lineal en un diagrama reològic. Són fluids no newtonians tots aquells la característica reològica dels quals no sigui lineal o no sigui constant en el temps.



La major part dels fluids no newtonians i independents del temps tenen un comportament que segueix la llei de potència d'Ostwald de Waele, segons la qual:

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \quad [1.62]$$

en què k i n són els índexs de consistència del fluid i de comportament al flux, respectivament. Un fluid per al qual $n < 1$ s'anomena *pseudoplàstic*, i *dilatant* si $n > 1$ (figura 1.8).

Altres fluids tenen una estructura reticular a la qual s'associa cert comportament sòlid, de manera que el fluid només es manifesta quan es trenca aquesta estructura plàstica amb una *tensió de fluència*, τ_f . A partir d'aquest moment, la característica pot ser lineal, pseudoplàstica o dilatant.

Per a una velocitat de deformació determinada, la *viscositat aparent* d'un fluid que segueixi la llei potencial és:

$$\mu_a = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad [1.63]$$

Els canvis d'esforç, en canvi, estan associats a l'anomenada *viscositat diferencial*, que és:

$$\mu_d = \frac{d\tau}{d\dot{\gamma}} = nk\dot{\gamma}^{n-1} \quad [1.64]$$

que augmenta en augmentar la velocitat de deformació en els dilatants i disminueix en els pseudoplàstics.¹⁹

El comportament reològic de molts fluids reals no es pot descriure mitjançant una simple equació perquè depèn de l'estat de deformació previ, de si van estar en repòs i, fins i tot, de quant temps ho van estar. El diagrama reològic d'aquests fluids que depenen de la història prèvia sol manifestar histèresi quan s'agiten fins a un estat de deformació particular i, després, són portats al repòs. Són tixòtrops els fluids amb un llaç d'histèresi dextrogir, és a dir, la seva tensió tangencial disminueix a mesura que augmenta el temps durant el qual ha experimentat una velocitat de deformació determinada, i antitixòtrops o reopèctics, en cas contrari.

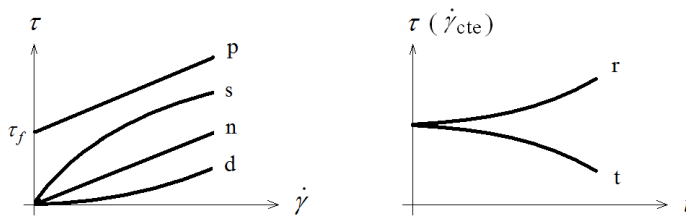


Figura 1.8. Figura 1.8A l'esquerra, el reograma tipus de diferents fluids no newtonians independents del temps. A la dreta, el comportament dels fluids la viscositat aparent dels quals depèn de temps. Llegendra: p, plàstic de Bingham; ps, pseudoplàstic; n, newtonià; d, dilatant; r, reopèctic; i t, tixòtrops.



Alguns fluids afegeixen, al seu comportament viscos, un component elàstic.²⁰ Entre altres models més complexos, el de Maxwell descriu, d'una manera senzilla, els efectes principals d'aquesta mena de fluids, i admet que la seva velocitat de deformació s'obté mitjançant la superposició de tots dos efectes:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu} + \frac{\dot{\tau}}{B} \quad [1.65]$$

en què B és el mòdul d'elasticitat volumètrica del fluid. En els fluids viscoelàstics, les tensions creades pel flux desapareixen exponencialment quan s'aturen, i el seu temps de relaxació corresponent és μ/B .

1.2.3 Densitat i estat

La densitat és la massa específica que manifesta la matèria des d'un punt de vista macroscòpic. Les unitats de la densitat són, per tant, $[\text{kg}/\text{m}^3]$, i, en sistema CGS, $[\text{g}/\text{cm}^3]$. El pes específic s'obté multiplicant la densitat per la gravetat, ρg , i té per unitats $[\text{N}/\text{m}^3]$, mentre que la inversa de la densitat és el volum específic, v $[\text{m}^3/\text{kg}]$. La gràfica 1.9 mostra la variació de la densitat d'un oli mineral amb la temperatura i la pressió.

Admesa la hipòtesi del continu, la densitat d'un gas es pot calcular mitjançant l'equació d'estat de gas ideal:

$$\rho = \frac{pM}{rT} = \frac{p}{RT} \quad [1.66]$$

amb la constant universal $r = 8,314 \text{ J}/(\text{K mol})$, i $R = 287 \text{ J}/(\text{kg K})$ per a l'aire (de massa molecular $M = 28,9 \text{ g/mol}$). Per a pressions o temperatures elevades, la hipòtesi de gas ideal no és suficient perquè un gas ideal no és més que un agregat de partícules en moviment aleatori en què les forces intermoleculares i la calor interna generada per fregament són menyspreables.

Es pot generalitzar l'equació anterior introduint el factor de compressibilitat, z , de la forma:

$$\rho = \frac{p}{zRT} \quad [1.67]$$

Aquest factor es pot interpretar com una mesura de la desviació en volum específic del comportament del gas real respecte de l'ideal, a les mateixes condicions de pressió i temperatura. El principi dels estats corresponents estableix que el factor de compressibilitat és aproximadament el mateix per a dos gasos a idèntica pressió i temperatura reduïdes, així doncs, z es representa en gràfics o taules termodinàmiques, en funció d'aquestes variables generalitzades. A l'efecte del càlcul de la desviació abans esmentada, z també es pot calcular mitjançant equacions d'estat modificades, però



llavors s'ha de prestar especial atenció que tinguin en compte, de manera adequada, l'estat del gas entorn del punt crític.²¹

L'estat d'un sistema ve determinat pel valor de les seves propietats. Per determinar l'estat intensiu d'una substància simple compressible, n'hi ha prou de fixar el valor de dues d'aquestes propietats, intrínseques i independents. Per tant, l'equació d'estat no és més que una relació funcional entre un conjunt de tres variables de les quals dues es trien com a independents. Això és útil quan, per exemple, una variable termodinàmica no es pot mesurar directament, però se sap que està relacionada amb dues que sí que són mesurables. Així, l'entropia d'una substància simple i homogènia, s , es relaciona amb la temperatura i el volum específic mitjançant una relació del tipus: $s = f(T, v)$, desconeguda a priori, però que es pot avaluar mitjançant tècniques gràfiques, analítiques, etc. Evidentment, es pot transformar la relació f en una altra g , del tipus $T = g(s, v)$, i ambdues són diferencials exactes.

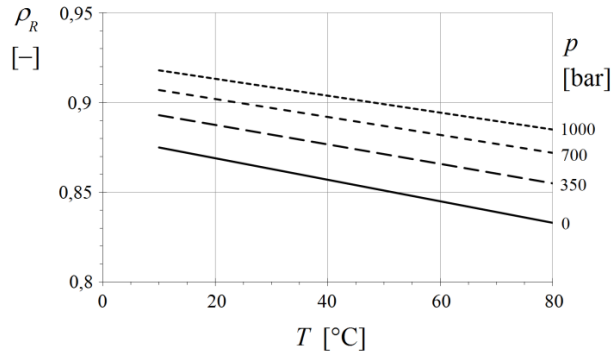


Figura 1.9. Relació de la densitat amb la temperatura i la pressió d'un oli mineral. La densitat relativa, ρ_R , es defineix com el quocient de la densitat absoluta del fluid i la d'un fluid de referència, que en el cas dels líquids i dels sòlids és l'aigua a 1 atm i a 4 °C, la densitat de la qual és 1.000 kg/m³. Aquest oli, per tant, és menys dens que l'aigua.

1.2.4 Processos termodinàmics i treballs

Els processos reals són transformacions termodinàmiques de l'estat fluid en desequilibri i impliquen sempre un augment de l'entropia del sistema. No obstant això, molts processos es poden assimilar a escenaris idealitzats en què alguna de les magnituds termodinàmiques es mantingui constant o sigui nul·la. És el cas dels processos isotèrmics, isobàrics, isocors i adiabàtics, que han estat tractats extensament en la literatura.

L'experiència ensenya que el subministrament de calor a un cos fa que s'incrementi la seva energia interna. En condicions ordinàries, per a una substància compressible, l'increment d'energia interna s'observa per un augment de la temperatura i del volum específic: els cossos s'escalfen i es dilaten. És així per a qualsevol substància, atès que



s'han de complir les condicions d'estabilitat tèrmica i mecànica definides per les relacions següents:

$$c_v = \frac{\delta q_v}{dT} > 0 \quad [1.68]$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial v} \right]_T < 0 \quad [1.69]$$

És a dir, primer, la calor específica a volum constant és sempre positiva i, segon, l'augment de pressió en un procés isoterm ocasiona sempre una disminució de volum específic. En cas contrari, el sistema físic seria inestable i no s'arribaria mai a l'equilibri.

Com que l'energia interna intrínseca és funció d'estat, el seu diferencial és exacte i es verifiquen les relacions següents:

$$\begin{aligned} du &= \left[\frac{\partial u}{\partial T} \right]_v dT + \left[\frac{\partial u}{\partial v} \right]_T dv = c_v dT + \left(T \left[\frac{\partial p}{\partial T} \right]_v - p \right) dv \\ du &= \left[\frac{\partial u}{\partial s} \right]_v ds + \left[\frac{\partial u}{\partial v} \right]_s dv = T ds - p dv \end{aligned} \quad [1.70]$$

i també per a l'entalpia:

$$\begin{aligned} dh &= \left[\frac{\partial h}{\partial T} \right]_p dT + \left[\frac{\partial h}{\partial p} \right]_T dp = c_p dT + \left(v - T \left[\frac{\partial v}{\partial T} \right]_p \right) dp \\ dh &= \left[\frac{\partial h}{\partial s} \right]_p ds + \left[\frac{\partial h}{\partial p} \right]_s dp = T ds + v dp \end{aligned} \quad [1.71]$$

Les equacions anteriors són una bona eina per interpretar els diferents processos termodinàmics. Així, per exemple, en un procés isocor,²² es verifica que:

$$du = c_v dT = T ds \quad [1.72]$$

mentre que en un d'isobàric:

$$dh = c_p dT = T ds \quad [1.73]$$

El terme $T ds$ representa la calor total rebuda per la unitat de massa de fluid, tant d'origen extern, δq , com intern i irreversible, $|\delta q_i|$.

Si el procés es pot considerar adiabàtic i, a més, és quasiestàtic, és a dir, transcorre seguint una successió d'estats d'equilibri, llavors, les equacions [1.70] i [1.71] són:

$$\begin{aligned} du &= -p dv \\ dh &= v dp \end{aligned} \quad [1.74]$$



en què pdv i dpv són, respectivament, els treballs d'*expansió* i de *compressió* rebuts o realitzats pel fluid.

Les variables de procés, calor i treball, en canvi, no són funció d'estat, de manera que el seu balanç en un cicle tancat és no nul i el seu diferencial no és exacte, però es relacionen amb les d'estat mitjançant els principis primer i segon de la termodinàmica. Així, el primer principi per a un sistema tancat en forma diferencial i per unitat de massa s'escriu de la forma:

$$\delta q - \delta w = du \quad [1.75]$$

i per a un de corrent:

$$\delta q - \delta w = dh + vdv + gdz \quad [1.76]$$

Tant en els sistemes tancats com en els oberts, el fluid realitza o rep treball d'expansió quan la seva densitat varia. Per exemple, en un sistema tancat cilindre-pistó que contingui una càrrega de gas de massa m constant, el treball d'expansió pdv és, en si mateix, el treball frontera pdV obtingut o realitzat per la unitat de massa. Amb el criteri de signes definit en l'equació [1.75], el treball extern δw és sempre menor que el treball d'expansió, per la presència de fregaments i altres irreversibilitats internes al gas.

Si el cilindre presentés una fuga de gas ($dm < 0$) mentre el pistó redueix el volum intern ($dV < 0$), és possible que el gas no faci cap expansió, i $dv = 0$, si la pèrdua de massa es compensa exactament amb la disminució del volum (en condicions quasi-estacionàries). Això és, ja que:

$$dV = mdv + vdm \quad [1.77]$$

el treball frontera es dedicaria per complet a expulsar el gas, és a dir:

$$mpdv = 0 = pdV - pvdm \quad [1.78]$$

En un corrent, el treball que es consumeix per desplaçar la unitat de massa una distància diferencial és $d(pv)$. Aquest treball s'extreu de l'expansió del fluid i s'anomena *treball d'impulsió* o *flux*. El treball d'impulsió és company inevitable de tot corrent, de manera que, de tot el treball d'expansió que el fluid, en aquest cas el flux, fa quan s'expandeix, només està disponible la part que queda després de descomptar el treball d'impulsió. És a dir, es disposa del terme:

$$-vdp = pdv - d(pv) \quad [1.79]$$

La denominació de *disponible* del treball de compressió s'entén del fet que, quan es combinen l'equació de Gibbs de l'entalpia [1.71] i l'equació del primer principi per a sistemes oberts en la seva forma diferencial [1.76], totes dues per unitat de massa, es té:



$$p dv = d(pv) + v dv + g dz + \delta w + |\delta q_i| \quad [1.80]$$

que, aplicant [1.79], porta a:

$$-v dp = v dv + g dz + \delta w + |\delta q_i| \quad [1.81]$$

En altres paraules, el treball disponible pel corrent es fa servir per accelerar el flux, augmentar-ne la cota, produir treball mecànic i vèncer les forces de fregament, que impliquen la generació irreversible de calor en el procés, i sempre suposen un excés del consum i una disminució de la producció.

Evidentment, tots els termes diferencials anteriors es poden integrar per representar el canvi corresponent entre dos estats {1,2} del procés en qüestió.

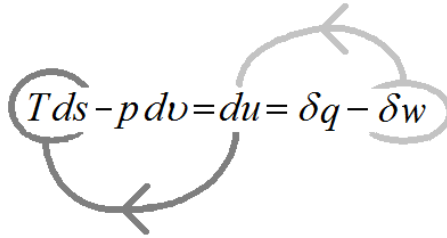


Figura 1.10. Visions interna i externa, equació de Gibbs i primer principi.

1.2.5 Coeficients de compressibilitat

És habitual emprar coeficients d'expansió, compressió o dilatació per referir els canvis de volum específic als canvis de temperatura i pressió. Aquests coeficients determinen les propietats reals de qualsevol substància i estan relacionats entre si i amb les seves propietats calòriques. Com $v = v(T, p)$, s'escriu:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{v} \left[\frac{\partial v}{\partial T} \right]_p dT + \frac{1}{v} \left[\frac{\partial v}{\partial p} \right]_T dp \quad [1.82]$$

i es defineixen el coeficient d'expansió tèrmica, $\alpha [K^{-1}]$, que representa la variació de volum amb la temperatura en un procés isobàric quasiestàtic:

$$\alpha = \frac{1}{v} \left[\frac{\partial v}{\partial T} \right]_p \quad [1.83]$$

i el coeficient de compressibilitat isoterma, $\beta_t [Pa^{-1}]$, que caracteritza el canvi de volum amb la pressió a temperatura constant:

$$\beta_t = -\frac{1}{v} \left[\frac{\partial v}{\partial p} \right]_T \quad [1.84]$$



La inversa de β_t és el mòdul volumètric isotèrmic, B_T [Pa], que relaciona el canvi de pressió amb el canvi unitari de volum específic. Aquest coeficient té el seu anàleg en condicions adiabàtiques, B_S :

$$\begin{aligned} B_T &= -\nu \left[\frac{\partial p}{\partial \nu} \right]_T = \rho \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_T \\ B_S &= -\nu \left[\frac{\partial p}{\partial \nu} \right]_s = \rho \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_s \end{aligned} \quad [1.85]$$

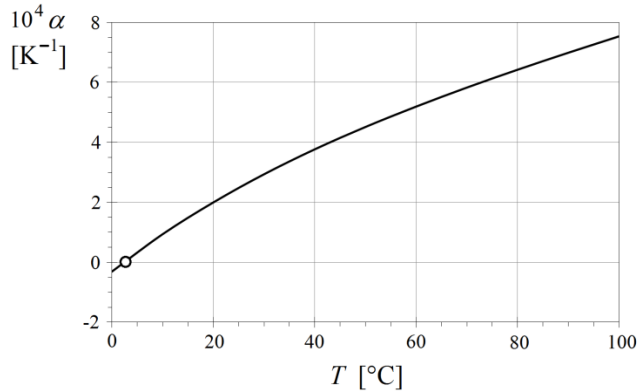


Figura 1.11. Coeficient d'expansió tèrmica per a l'aigua a pressió atmosfèrica.

En condicions ordinàries, és a dir, en estats allunyats del punt crític, els líquids són bastant incompressibles, però, en general, ho són més davant canvis de pressió que no pas de temperatura, ja que β_t és de l'ordre de 10^{10} Pa⁻¹, una mica més gran que en la majoria dels sòlids, mentre α és a l'interval $[10^4, 10^5]$ K⁻¹.

En qualsevol cas, aquests canvis tan petits del volum específic fan que la magnitud $[\partial p / \partial T]_\nu$ sigui relativament alta en els líquids, perquè s'ha de verificar la relació de Maxwell:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial T} \right]_\nu \left[\frac{\partial \nu}{\partial p} \right]_T \left[\frac{\partial T}{\partial \nu} \right]_p = - \left[\frac{\partial p}{\partial T} \right]_\nu \frac{\beta_t}{\alpha} = -1 \quad [1.86]$$

Per exemple, per a l'aigua a 20°C, són $\alpha = 1,998 \cdot 10^4$ K⁻¹ i $\beta_t = 4,456 \cdot 10^{-10}$ Pa⁻¹, per tant resulta que $[\partial p / \partial T]_\nu = 4,484 \cdot 10^5$ Pa/K. En conseqüència, quan s'escalfa aigua a volum constant, l'increment de pressió és de gairebé 4,5 bar per cada grau d'augment de la temperatura.²³

El lleu canvi de densitat dels líquids permet aproximar l'expressió [1.82] mitjançant la següent:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{E} (p - p_0) - \alpha (T - T_0) \quad [1.87]$$



en què E és el mòdul d'elasticitat, la inversa de la qual és el coeficient de compressibilitat isoterma.²⁴

Tots aquests coeficients es representen en gràfics termodinàmics, que mostren la seva evolució amb la temperatura, la pressió o la densitat. Es pot considerar que sempre són positius en la majoria de les substàncies, però, referent al coeficient d'expansió tèrmica, és ben conegut que la densitat de l'aigua a pressió atmosfèrica presenta un màxim a la temperatura de 3,98°C.²⁵ Per sota d'aquesta temperatura, α és negatiu, és a dir, des del punt de fusió fins als 3,98°C el volum de l'aigua disminueix quan s'escalfa (figura 1.11).

Per norma general, els fluids es rigiditzen a mesura que es comprimeixen, de manera que, com més pressió, més costa aconseguir el mateix augment unitari de densitat. En els gasos que segueixen un procés de compressió politròpic, es demostra que el mòdul volumètric corresponent és proporcional a la pressió absoluta, això és, $B_n = np$, on n és l'índex de politropia. Per al gas ideal, doncs, en un procés isoterm, $B_T = p$ i, en un d'adiabàtic, $B_S = \gamma p$.

Finalment, és possible relacionar els coeficients d'expansió tèrmica i de compressibilitat isotèrmica amb les calors específiques a pressió i a volum constant d'una substància mitjançant l'equació:

$$c_p - c_v = T \left[\frac{\partial p}{\partial T} \right]_v \left[\frac{\partial v}{\partial T} \right]_p \quad [1.88]$$

que, amb [1.82] i [1.86], és:

$$c_p - c_v = \frac{\alpha^2}{\beta_t} T v \geq 0 \quad [1.89]$$

Per al gas ideal, l'equació [1.89] condueix a la coneguda relació de Mayer, segons la qual:

$$c_p - c_v = R \quad [1.90]$$

ja que llavors $\alpha = 1/T$ i $\beta_t = 1/p$. Per a un líquid, en canvi, mostra que la variació de les calors específiques és menyspreable en la majoria dels càlculs tècnics. Per exemple, per a l'aigua a 20°C i a pressió atmosfèrica, resulta:

$$c_p - c_v = \frac{(1,998 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 293}{4,456 \cdot 10^{-10} \cdot 998} = 26,4 \text{ J/(kg K)} \quad [1.91]$$

és a dir, un 0,7% respecte del valor del c_v i, per tant, $c_v \approx c_p$. Aquesta diferència augmenta, no obstant això, quan augmenta la temperatura, i és del 12% a 100 °C. La figura 1.12 mostra la relació entre tots dos coeficients en funció de la temperatura, a pressió atmosfèrica.

Una altra dependència molt important en termodinàmica entre les calors específiques és la següent:



$$\left[\frac{\partial p}{\partial v} \right]_s = \frac{c_p}{c_v} \left[\frac{\partial p}{\partial v} \right]_T \quad [1.92]$$

que relaciona els processos isentròpics amb els isoterms. Aquesta equació també es pot escriure:

$$\frac{c_p}{c_v} = \rho c^2 \beta_t \quad [1.93]$$

en què c és la velocitat del so en el medi.

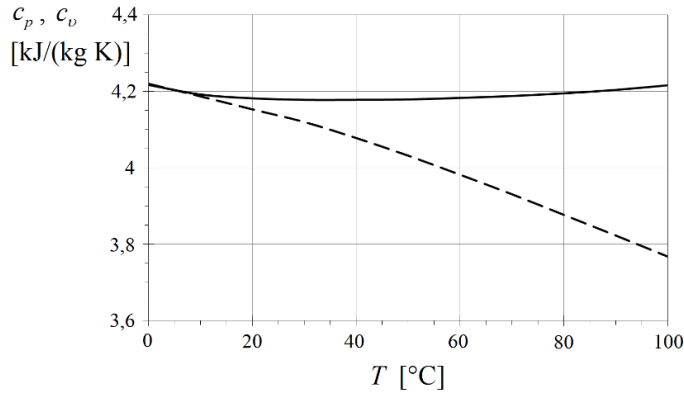


Figura 1.12. capacitats calorífiques de l'aigua a pressió atmosfèrica.

1.2.6 Fenòmens d'interfície i capil·lars

L'experiència ensenya que a la superfície de separació de dues fases diferents, no miscibles, α i β , apareixen unes tensions que s'estenen fins a la línia que les separa. La força de tracció sobre una longitud elemental de línia és normal a la mateixa, proporcional a la longitud i independent de la seva orientació. Una explicació acceptable per a l'existència d'aquesta força és que tota superfície de separació o interfície té associada una energia per unitat d'àrea amb tendència a arribar a un mínim en l'equilibri.

La tensió superficial, σ , és la força per unitat de longitud [$\text{N/m} = \text{J/m}^2$] que es requereix per mantenir la superfície d'una fase quan està en contacte amb el buit o el seu vapor, sent σdA l'energia a aportar per augmentar l'àrea un valor dA . La tensió interfacial, $\sigma^{\alpha\beta}$, representa el mateix concepte, però entre dues fases α i β , i depèn només de la temperatura en el punt considerat i, per descomptat, de les fases.²⁶ Aquest valor té gran importància en molts fenòmens de la mecànica de fluids, perquè domina la força d'adhesió entre dues superfícies, sigui entre líquids o amb un sòlid, un vapor o un gas, l'estabilitat de les emulsions, la mullabilitat, la capil·laritat, el fenomen d'extensió i l'angle de contacte entre les fases, i la propagació d'ones capil·lars.



La superfície lliure de qualsevol fluid tendeix a buscar l'equilibri entre les forces mecàniques, tèrmiques, químiques i de tensió superficial que s'hi presentin, de manera que l'energia total del sistema sigui mínima. Aquesta energia inclou l'energia de cadascuna de les fases massíques en contacte, U^α i U^β , i l'energia associada a la superfície, U^S , les variacions de la qual s'expressen per a sistemes multicomponent com:

$$dU^S = T^S dS - p^S dV + \sigma^{\alpha\beta} dA + \sum_i \mu_i^u dn_i^S \quad [1.94]$$

en què μ_i és el potencial químic de l'espècie i i n_i és el nombre de molècules corresponent (i dn_i , el seu excés respecte de la situació d'equilibri).

Com que la situació més freqüent és que la superfície lliure estigui en equilibri de pressió i temperatura, és més convenient referir l'equilibri total als canvis de l'energia de Gibbs:

$$dG = dG^\alpha + dG^\beta + dG^S = \sum_{i,\alpha} \mu_i^g dn_i^\alpha + \sum_{i,\beta} \mu_i^g dn_i^\beta + \sigma^{\alpha\beta} dA + \sum_{i,S} \mu_i^g dn_i^S \quad [1.95]$$

Si, a més, la composició química de les fases i de la superfície no canvia (cosa que no sempre és certa, perquè els fluids en contacte tendeixen a saturar), llavors la tensió interfacial és també l'energia lliure específica interfacial: $dG/dA = \sigma^{\alpha\beta}$. D'altra banda, com que es verifica:

$$g^S = \sigma^{\alpha\beta} + \sum_i \mu_i^g \frac{n_i^S}{A} \quad [1.96]$$

i en sistemes monofàsics s'anul·la el sumatori, es compleix que la tensió superficial és l'energia lliure específica de superfície del mateix component aïllat ($g^S = \sigma^\alpha$).

Les característiques de la interacció de dues fases condensades en una interfase es descriuen millor mitjançant el mètode de Dupré, segons el qual: si es vol crear una superfície entre aquestes fases, s'han de crear primer les de cada fase per separat i després unir-les. Això és:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^\alpha + \sigma^\beta - w_A \quad [1.97]$$

en què w_A és el treball d'adhesió. No es formarà superfície ni hi haurà interacció entre les dues fases si, en el procés d'unió, no es redueix l'energia lliure interfacial del sistema, cosa que passa si $w_A = 0$, i llavors es diu que les fases no es mullen entre si.

El comportament del sistema depèn del fet que el treball d'adhesió depassi o no el valor crític $2\sigma^\alpha$, sent $\sigma^\alpha < \sigma^\beta$. Aquest valor crític és el treball de cohesió, w_C , d'una de les fases, o l'energia necessària per tallar aquesta fase aïllada per la meitat i generar una superfície de separació unitària i plana. Quan el treball d'adhesió és igual al més petit dels treballs de cohesió, l'energia lliure específica interfacial està definida per la



diferència de les tensions superficials de cada fase aïllada, $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^\beta - \sigma^\alpha$, de manera que una fase no se sent estranya en presència de l'altra i no s'adhereix. En canvi, si $w_A \geq \sigma^\alpha + \sigma^\beta > 2\sigma^\alpha$, llavors $\sigma^{\alpha\beta}$ és zero o negativa i les dues fases es barregen.

La mullabilitat del sistema augmenta a mesura que augmenta w_A . El concepte de mullabilitat està associat al problema d'extensió, que consisteix en la formació de pel·lícules monomoleculares d'un líquid sobre la superfície plana d'un altre líquid immiscible o d'un sòlid. Com que els treballs d'adhesió i cohesió representen, respectivament, les forces atractives entre molècules de diferent i igual naturalesa, hi ha extensió quan el treball d'adhesió és més gran que el de cohesió. La diferència d'aquests dos treballs s'anomena *coeficient d'expansió*, S , sent:

$$S = w_A - w_C = (\sigma^\alpha + \sigma^\beta - \sigma^{\alpha\beta}) - 2\sigma^\alpha = (\sigma^\beta - \sigma^\alpha) - \sigma^{\alpha\beta} \quad [1.98]$$

En cas contrari, quan $S < 0$ i el treball d'adhesió és més petit que el de cohesió, la fase menys densa es contreu sobre la superfície de l'altra fase i adopta la forma de gotes lenticulars.

Substància	σ^α	$\sigma^{\alpha\beta}$	w_A	S
Aigua	72,8	-	-	-
Àcid oleic	32,6	15,6	89,8	24,6
Oli de oliva	35,8	22,9	85,7	14,1
Cloroform	27,1	32,8	67,1	12,9
Toluè	29,0	32,7	69,1	11,1
Tetraclorur de carboni	26,7	45,0	54,5	1,1
Vaselina líquida	33,1	53,1	52,8	-13,4

Taula 1.4. Tensions superficials, interfacials, treball d'adhesió i coeficients d'expansió inicials de diversos fluids en contacte amb aigua a 20°C. Unitats [din/cm]. Per norma general, si la tensió interfacial és gran, el treball d'adhesió és feble [1.97].

L'angle de contacte format entre les fases és molt útil per estudiar la mullabilitat i les propietats de liofilitat de diverses superfícies davant canvis de pressió, temperatura o composició. Quan es diposita una gota d'aigua ⁽¹⁾ sobre una superfície sòlida ^(s) submergida en oli ⁽²⁾, s'obté una de les configuracions de la figura 1.13, per a les quals la condició d'equilibri ve donada per l'equació de Young:

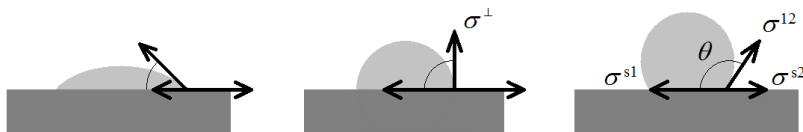


Figura 1.13. Configuracions de contacte en un sistema ideal sòlid-líquid-líquid/gas. Quan es diposita aigua sobre una superfície plana, el sòlid és hidrofilic si $q < p/2$ i hidrofòbic en cas contrari.



$$\cos \theta = \frac{(\sigma^{s2} - \sigma^{s1})}{\sigma^{l2}} \quad [1.99]$$

Es diu que la superfície és mojable per aigua si $\theta < \pi/3$, i per oli si $\theta > \pi/2$. En general, el líquid no mulla el sòlid si $\theta > \pi/2$, i, si $(\sigma^{s2} - \sigma^{s1})/\sigma^{l2} > 1$, l'equilibri no és possible i hi ha extensió.

Aquest fenomen també explica la capil·laritat. L'equació de Laplace relaciona la diferència de pressions a través d'una superfície corbada amb els radis de curvatura principals d'aquesta i la tensió interfacial:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \right) \quad [1.100]$$

on és més gran la pressió del costat còncav que la del convex.

Com que en un tub capil·lar com el de la figura 1.14, el radi de curvatura d'una secció axial del menisc format és uniforme i aproximadament $r/\cos\theta$, l'equilibri fluidoestàtic s'escriu:²⁷

$$p_{atm} - p = \frac{2\sigma \cos \theta}{r} = \rho g h \quad [1.101]$$

i el líquid es desplaça al llarg del tub una distància:

$$h = 2 \frac{\sigma}{\rho g r} \cos \theta \quad [1.102]$$

La relació:

$$r_c = \left(\frac{\sigma}{\rho g} \right)^{1/2} \quad [1.103]$$

s'anomena *radi capil·lar*. Si la longitud típica de la superfície lliure que es considera és molt inferior a aquest valor, es poden menysprear les forces màssiques respecte de les de tensió superficial, i la superfície de separació serà de curvatura constant. Per exemple, la pressió dins d'una gota de radi R és superior a la de l'entorn i, a més, uniforme si $R \ll r_c$, segons el que s'ha explicat.

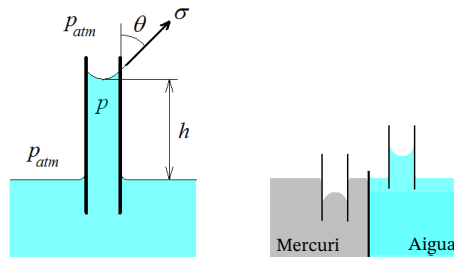


Figura 1.14. Fenomen d'ascensió capil·lar en un tub de radi r (esquerra) i meniscs formats en aigua (còncav) i mercuri (convex) en contacte amb aire.



1.2.7 Pressió de vapor

A través de la superfície lliure dels líquids, té lloc un intercanvi bidireccional continu de molècules de líquid i de gas que tendeix a un equilibri dinàmic. L'evaporació és el balanç entre els processos de vaporització i condensació, de manera que, quan la pressió del vapor sobre la superfície és molt baixa, la vaporització supera la condensació i hi ha una evaporació neta positiva que augmenta la pressió del vapor i la condensació. Si no s'elimina el vapor, com passa a dins d'un dipòsit estanc parcialment ple de líquid, la seva pressió parcial continuarà augmentant fins que la condensació equilibri la vaporització. En aquest moment, l'aire està saturat i la pressió parcial del vapor corresponent s'anomena *pressió de saturació*, p_{sat} , o, simplement, *pressió de vapor* (que cal no confondre amb la pressió de vapor parcial quan l'aire no està saturat). Si el vapor no s'acumula perquè el líquid s'evapora en un entorn obert, la pressió parcial del vapor ambiental es relaciona amb la de saturació mitjançant la humitat relativa, p_V/p_{sat} , i el líquid no deixa d'evaporar perquè no s'ha arribat a l'equilibri.

L'equilibri dinàmic s'aconsegueix més ràpidament com més gran és la superfície de contacte entre el líquid i el vapor, i persisteix mentre coexisteixen totes dues fases. La pressió de saturació depèn de la naturalesa del líquid i, ja que el procés de vaporització només depèn de l'activitat molecular quan totes dues fases estan en equilibri de pressió i temperatura, la pressió de saturació depèn només de la temperatura i augmenta amb la temperatura mateixa.

La relació entre la pressió de saturació i la temperatura durant una transició de fase es descriu mitjançant l'equació de Clausius-Clapeyron:

$$\frac{dp_{sat}}{dT} = \frac{h_{LV}}{T(v_V - v_L)} > 0 \quad [1.104]$$

Si la pressió de vapor és petita, resulta que el volum específic de la fase vapor és diversos ordres de magnitud més gran que el del líquid. Admetent també el comportament ideal del vapor, resulta:

$$\frac{dp_{sat}}{p_{sat}} = \frac{h_{LV}}{R} \frac{dT}{T^2} = \frac{Mh_{LV}}{r} \frac{dT}{T^2} \quad [1.105]$$

que pot ser integrada coneixent la variació d' h_{LV} amb la temperatura, o triant uns límits d'integració en què h_{LV} sigui gairebé constant.

En un entorn tancat com el dipòsit anterior, se sap que l'evaporació del líquid s'accelera quan la pressió absoluta augmenta en afegir, per exemple, un gas inert. Aquest resultat pot ser paradoxal perquè, quan augmenta la pressió sobre el líquid, sembla que hauria de disminuir el procés de vaporització, quan el que passa és tot el contrari,



perquè augmenta la pressió de vapor en el nou equilibri. Efectivament, estant les fases en equilibri, les seves energies lliures de Gibbs han de ser iguals i qualsevol canvi de la pressió sobre el líquid tindrà el seu efecte sobre la pressió de la fase vapor. Amb la temperatura i el potencial químic constants, es compleix:²⁸

$$v_V dp_{sat} = v_L dp_L \quad [1.106]$$

és a dir,

$$\frac{dp_{sat}}{p_{sat}} = \frac{v_L}{RT} dp_L \quad [1.107]$$

que, integrada entre tots dos estats d'equilibri, condueix a:

$$\ln \frac{p_{sat}}{p_0} = \frac{p_L - p_{L,0}}{\rho_L RT} \quad [1.108]$$

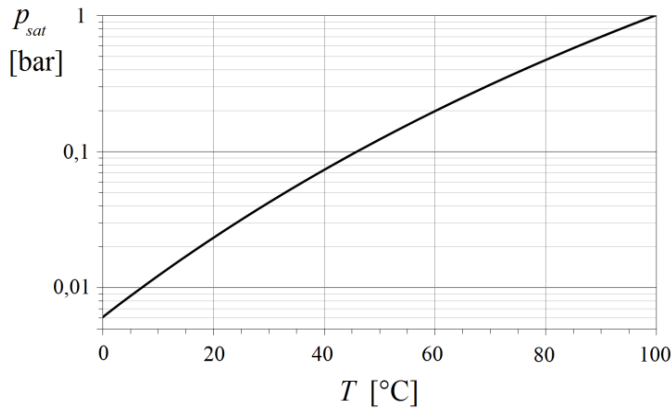


Figura 1.15. Pressió de saturació del vapor d'aigua en l'interval de temperatura [0,100] °C.

En realitat, la variació que experimenta la pressió de vapor és molt petita perquè el terme $\rho_L RT$ és molt gran, però suficient perquè aquest plantejament tingui aplicacions pràctiques molt interessants, associades a la tensió superficial. Per exemple, a dins d'una gota líquida, la pressió és superior a la de l'entorn en un valor $2\sigma/r$. Si les gotes s'han format per condensació d'un vapor superrefredat, llavors la pressió externa a la gota és la pressió de saturació, p_{sat} , i serà més gran que la pressió de vapor que hi hauria sobre una superfície plana, p_0 , en les mateixes condicions. És a dir:

$$\ln \frac{p_{sat}}{p_0} = \frac{(p_{sat} + 2\sigma/r) - p_0}{\rho_L RT} \quad [1.109]$$

Com que s'ha vist que $p_{sat} - p_0$ és molt petita, la gota està en equilibri amb el seu vapor a una pressió p_{sat} si el seu radi és:



$$r = \frac{2\sigma}{\rho_L RT} \frac{1}{\ln \frac{p_{sat}}{p_0}} \quad [1.110]$$

En un entorn en què coexisteixin gotes de diferent radi a la mateixa pressió, les gotes més petites tindran una pressió de saturació més gran i s'evaporaran abans, mentre que les més grosses condensaran més vapor i creixeran de grandària a costa de les petites.

Un fenomen semblant, però en sentit contrari, passa en els mitjans porosos saturats per aigua. La pressió dins de la fase líquida en aquests mitjans és inferior a la de l'entorn en un valor $\varepsilon\sigma/r$, on ε és un factor que depèn de la configuració del mitjà porós i de la mena de menisc format. Per això, la pressió de saturació corresponent és més petita que la que hi hauria sobre una superfície plana i el líquid no s'evapora, o ho fa molt a poc a poc. Aquesta circumstància justifica per què el terra està sempre saturat de líquid, excepte pocs centímetres per sota de la superfície, on és més important l'efecte de la radiació solar. Es dedueix de l'equació [1.109] que:

$$p_{sat} = p_0 e^{-\frac{\varepsilon\sigma}{\rho_L RT} \frac{1}{r}} \quad [1.111]$$

de manera que, si el radi capil·lar tendeix a zero, la pressió de vapor corresponent s'anul·la i l'entalpia de vaporització és altíssima. Aquest fet fonamenta també el desenvolupament dels tubs de calor com a instruments per al transport de calor a través d'un mitjà porós saturat de líquid.

1.3 Forces, tensions i deformacions

Les forces que poden actuar sobre els fluids en el continu es poden classificar en quatre categories: forces màssiques i inercials; forces volumètriques o electromagnètiques; forces superficials o de contacte, i forces lineals o capil·lars, degudes a l'acció molecular. Les tres primeres classes de forces concerneixen el moviment del fluid, mentre que les lineals només apareixen en la superfície de separació de dos mitjans no miscibles i són de tan curt abast que amb prou feines afecten el moviment general del fluid, excepte en els casos que s'han presentat en el tema anterior.

1.3.1 Forces màssiques i volumètriques

Les forces màssiques són proporcionals a la massa, sent f_m la força per unitat de massa i ρf_m la força per unitat de volum corresponent. Són forces màssiques les gravitatòries, per a les quals $f_m = -g\mathbf{k}$, i les forces d'inèrcia degudes a l'acceleració del sistema de referència no inercial al qual està associat el fluid, que són:

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{a}_0 - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r \quad [1.112]$$



Sovint, les forces màssiques deriven d'un potencial i són conservatives, és a dir, $\mathbf{f}_m = -\nabla U$. Per exemple, les forces gravitatòries deriven del potencial gz , i les centrífetes, de $\omega^2 r^2/2$, on r és la distància a l'eix de gir.

Les forces volumètriques són proporcionals al volum, no a la massa, i un exemple en són les forces electromagnètiques, per a les quals:

$$\mathbf{f}_V = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \quad [1.113]$$

en què ρ_e és la càrrega elèctrica per unitat de volum, i els vectors \mathbf{E} , \mathbf{J} i \mathbf{B} són el camp elèctric, el vector densitat de corrent i el camp magnètic, respectivament.

1.3.2 Forces i tensions superficials

Les forces superficials són les que s'exerceixen sobre el contorn d'una massa de fluid pel contacte amb un altre fluid o un sòlid. Aquestes forces resulten de realitzar la integració vectorial:

$$\mathbf{F}_S = \int_S \delta \mathbf{F}_S = \int_S \mathbf{f}_S \delta S \quad [1.114]$$

en què \mathbf{f}_S és la força actuant per unitat de superfície $[\text{N}/\text{m}^2]$, que, en general, tindrà una direcció diferent del versor de la superfície en què actua, i és:

$$\mathbf{f}_S = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \quad [1.115]$$

La distribució espacial d'aquestes forces en un instant es defineix mitjançant el *tensor de tensions* en un punt, de manera que la força vectorial que actua sobre un diferencial de superfície es calcula:

$$\delta \mathbf{F}_S = \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n} \delta S \quad [1.116]$$

L'estat de tensions s'especifica en funció de les components normal i tangencial del tensor de tensions, σ i τ , respectivament, definides en un sistema de coordenades $\{xyz\}$ determinat. Si, amb el primer subíndex, s'indica la direcció normal al pla associat amb la tensió i, amb el segon, la seva direcció, llavors s'escriu:

$$\mathbf{f}_S = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n} \quad [1.117]$$

en què els n_i són els cosinus directors del vector unitari normal a δS , \mathbf{n} , és a dir:

$$\delta S_i = n_i \delta S \quad [1.118]$$



L'expressió [1.117] indica que la component i de la tensió que actua sobre el pla de normal \mathbf{n} és la suma de tres tensions, cadascuna aplicada sobre un pla diferent, però projectades sobre el mateix eix de coordenades i . Es demostra que el tensor de tensions és simètric i que, per tant, la component segons una direcció \mathbf{n} de la tensió que actua en un pla de normal \mathbf{n}' és igual a la component segons la direcció \mathbf{n}' de la tensió que actua en un pla de normal \mathbf{n} . Una altra manera d'escriure [1.117] és la següent: $f_i = n_j T_{ji}$.²⁹

La interpretació d'aquestes forces resulta evident quan s'observen en equilibri en el tetraedre de Cauchy de la figura 1.16. La força diferencial i vectorial actuant sobre el δS és:

$$\delta F_S = \delta F_x + \delta F_y + \delta F_z \quad [1.119]$$

i

$$\delta F_i = (\sigma_{ix} \mathbf{i} + \tau_{iy} \mathbf{j} + \tau_{iz} \mathbf{k}) \delta S_i = T_i \delta S_i \quad [1.120]$$

sent T_i la tensió o força per unitat de superfície que actua sobre la superfície δS_i i que, en general, no té la direcció del seu versor. Qualsevol tensió T_i es pot descompondre en les seves projeccions normal i tangencial a la superfície sobre la qual actua. Així, la component normal de la tensió f_S resulta:

$$\sigma_n = (\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{n} \quad [1.121]$$

i la tangencial:

$$\tau_t = (|\mathbf{f}_S|^2 - \sigma_n^2)^{1/2} \quad [1.122]$$

Les tensions τ_{ij} de [1.117] són definides positives quan el vector associat té el mateix sentit que l'eix del triedre de referència, j , de manera que, per exemple, per a les tensions normals, σ_{ii} , les compressions són negatives, i les traccions, positives.

A partir de les components de la diagonal principal del tensor de tensions, es pot establir, mitjançant la llei de Navier-Poisson, una relació entre la pressió termodinàmica local, p , i la pressió mitjana o mecànica, p_m , que és el valor mitjà de les tensions normals sobre el punt.³⁰ Ja s'avança que totes dues pressions coincideixen si el fluid està en repòs, és incompressible, o es verifica la condició de Stokes.

Quan el fluid està en repòs i, per definició, no hi pot haver esforços tallants perquè llavors apareixeria moviment, el tensor de tensions es converteix en diagonal i

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_S &= -p_0 \mathbf{n} \\ -p_0 &= \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} \end{aligned} \quad [1.123]$$

es demostra, en aquest cas, que:



$$\delta \mathbf{F}_S = -\nabla p_0 \delta V \quad [1.124]$$

on p_0 és la pressió hidroestàtica, que coincideix amb la termodinàmica i la mecànica en condicions estàtiques.

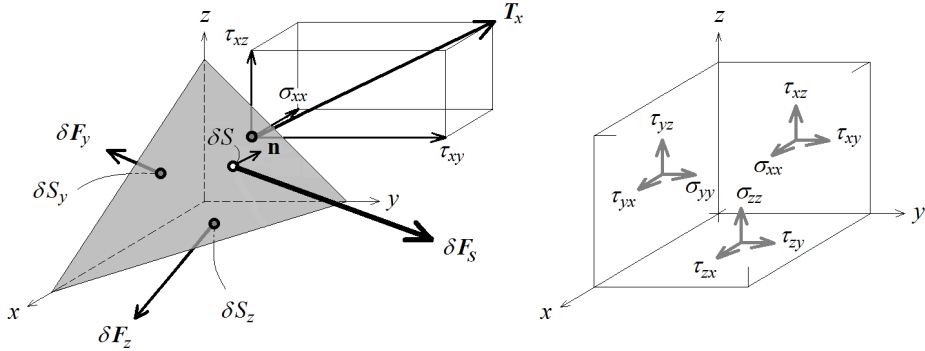


Figura 1.16. Equilibri de forces superficials i tensions actuants. Sobre cada cara del tetraedre hi actua una tensió de valor T_i , que, multiplicada pel dS_i , proporciona la força sobre aquesta cara F_i .

1.3.3 Descripció del moviment en el continu

Quan el fluid no està en repòs és perquè està en translació, en rotació o en estat de deformació lineal o angular. En general, un vector \mathbf{r}_0 de components (x, y, z) en el camp fluid en moviment es transforma en un altre $\mathbf{r}(\xi, \eta, \theta)$, canviant de mòdul i direcció. Aquest canvi es descriu, en forma matricial, mitjançant el tensor gradient de desplaçament que s'empra en elasticitat:

$$\delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \delta \xi \\ \delta \eta \\ \delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{G}}_d \cdot \delta \mathbf{r}_0 \quad [1.125]$$

Com que els fluids, contràriament als sòlids elàstics, no presenten resistència a la deformació, sinó a la velocitat de deformació o corrent, convé plantejar l'estudi respecte de les variacions de la velocitat entre dos punts. És a dir, un vector $\delta \mathbf{r}_0$, situat en un punt de referència \mathbf{r}_0 , un instant dt més tard està situat en \mathbf{r} i adopta la forma $\delta \mathbf{r}$, de manera que el corrent del vector ha estat (figura 1.17):

$$\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{r}_0 = \delta \mathbf{v} dt \quad [1.126]$$

Així es defineix el tensor no simètric gradient de velocitat o corrent, $\overline{\mathbf{G}}_v$:



$$\delta \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \delta \mathbf{r}_0 = \overline{\overline{\mathbf{G}}}_v \cdot \delta \mathbf{r}_0 \quad [1.127]$$

que es pot descompondre en les seves parts simètrica, $\overline{\overline{\mathbf{e}}}$, i antisimètrica, $\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$, de manera que:

$$\overline{\overline{\mathbf{e}}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} \quad [1.128]$$

$$\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 0 \end{vmatrix}$$

El tensor simètric representa la deformació lineal i angular, i s'anomena *tensor de deformació*, mentre que l'antisimètric té associat un vector i les seves tres components són:

$$\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix} \quad [1.129]$$

que compleixen:

$$\boldsymbol{\omega} = \left| \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \right| = \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2} \overline{\overline{\mathbf{\Omega}}} \quad [1.130]$$

És a dir, la part antisimètrica del tensor de corrent representa la velocitat de gir del fluid considerat sòlid rígid, que és la meitat del vector rotacional de la velocitat o vorticitat.

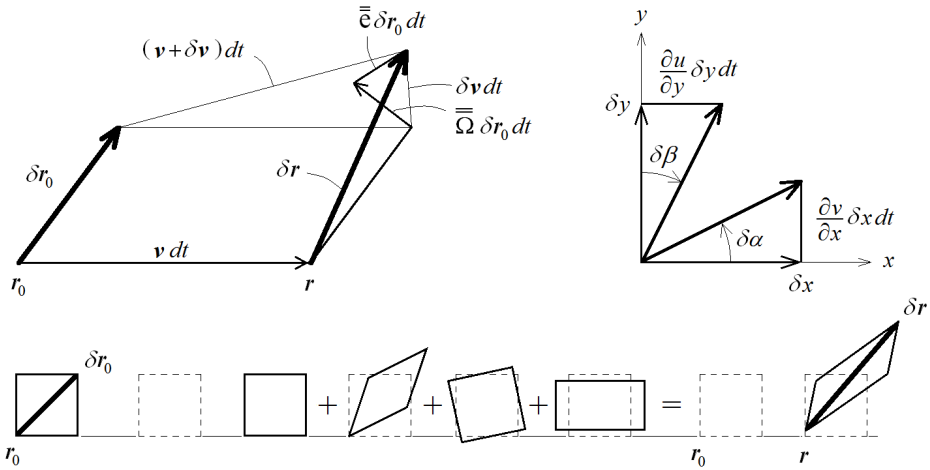


Figura 1.17. Velocitats a l'entorn d'un punt. El vector r_0 es trasllada, gira i es deforma (s'allarga, en la figura) fins a ser δr . A la dreta, es mostra el significat de les components no diagonals del tensor de deformació. La velocitat de deformació de l'angle format per les direccions ortogonals $\{x\}$ i $\{y\}$ és $2exy$. A sota, es presenta la composició del moviment total: translació, deformació angular, rotació i deformació lineal.

1.3.4 Relació entre tensions i deformacions

És evident que les tensions i les deformacions associades del mitjà fluid estan relacionades entre si. La llei experimental de Navier-Poisson per a fluids homogenis i isotrops estableix que la relació entre les tensions viscoses del tensor de tensions i la velocitat de deformació específica és lineal, això és:

$$\tau'_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij} \quad [1.131]$$

en què δ_{ij} és la delta de Kronecker (amb $\delta_{ij} = 1$, per a $i=j$), i λ i μ són dos coeficients escalars.³¹

Les tensions viscoses introduïdes a [1.131] resulten d'arreglar el tensor de tensions de la forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\bar{T}} &= -p\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}} \\ \tau_{ij} &= -p\delta_{ij} + \tau'_{ij} \end{aligned} \quad [1.132]$$

i són nul·les sempre que el tensor de deformació sigui zero, això és, quan el fluid està en repòs, es trasllada o gira com un sòlid rígid (i, llavors $\tau_{ij} = -p_0\delta_{ij}$).

L'equació de la quantitat de moviment que es presenta a continuació relaciona les forces màssiques i volumètriques que actuen sobre el fluid amb la variació espacial de les tensions, és a dir, amb la variació espacial de la pressió i les forces de fregament que troba en el seu fluir.



Les components del gradient del tensor de tensions s'obtenen per derivació de l'equació [1.132] amb [1.128] i [1.131], i són:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \quad [1.133]$$

o també, per a λ y μ constants:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad [1.134]$$

que, en notació vectorial y fent servir la llei empírica de Stokes,³² és:

$$\overline{\overline{\nabla \mathbf{T}}} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad [1.135]$$

1.3.5 Equacions de Cauchy i Navier-Stokes

Les forces màssiques i superficials que actuen sobre un δV en moviment que en l'instant t contingui un fluid de densitat ρ han de verificar l'equació de conservació de la quantitat de moviment:³³

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \delta V = \rho \mathbf{f}_m \delta V + \delta \mathbf{F}_S \quad [1.136]$$

Com que les forces superficials són:

$$\delta \mathbf{F}_S = \overline{\overline{\nabla \mathbf{T}}} \delta V \quad [1.137]$$

l'equació [1.136] queda:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f}_m + \overline{\overline{\nabla \mathbf{T}}} \quad [1.138]$$

Aquesta és l'equació de Cauchy del moviment en el mitjà continu, que es verifica per a qualsevol fluid perquè és independent de la relació entre el tensor de tensions i el tensor gradient de velocitat.

L'equació de Cauchy en components és:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_{m,i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad [1.139]$$

Les equacions anteriors es relacionen amb [1.135] i [1.134] per a fluids newtonians i proporcionen l'equació de Navier-Stokes de la quantitat de moviment. Per exemple, fent servir la llei de Stokes i en notació vectorial seria:



$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f}_m - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad [1.140]$$

i per components en cartesianes:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_{m,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad [1.141]$$

- 1 S'entén per *partícula fluida* la quantitat de substància establerta en el continu on són definides les magnituds intensives.
- 2 A més, un moviment pot ser estacionari en el seu sistema de coordenades i no ser-ho en un altre.
- 3 Evidentment, el flux no és estrictament uniforme, ja que la velocitat és més petita en la proximitat de la paret, però si el flux és turbulent i està del tot desenvolupat, la condició d'uniformitat és força aproximada.
- 4 En general, si les línies de corrent no són circulars, però el camp de velocitats és tal que el vector velocitat forma un angle constant al llarg de tot el cercle d'integració (com en un moviment en espiral, per exemple), es resol que $\Gamma = 2\pi r v_\theta$, on v_θ és la projecció de la velocitat sobre la direcció perimetral del cercle.
- 5 Aquests vectors són ortogonals entre si en un sistema ortogonal, però cal tenir sempre present que la terna de vectors unitaris varia d'un punt a un altre, ja que depenen de les coordenades. En canvi, el trièdre local en el sistema de coordenades cartesianes és invariant.
- 6 Per al vector OA de la figura amb origen en O, la component $c\theta$ és nul·la.
- 7 El paràmetre sol ser el temps o la seva longitud. La corba ha de ser diferenciable, i les seves derivades, contínues.
- 8 Aquesta indefinició no es presenta quan $\tau = 0$, atès que el vector binormal està definit per [1.23] si ho estan \mathbf{s} i \mathbf{n} .
- 9 Un exercici interessant és analitzar l'efecte que les forces de Coriolis poden tenir sobre la corba. Com que la contribució de l'acceleració de Coriolis, $-\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$, és perpendicular a la línia de corrent, només pot afectar la seva curvatura i la torsió. La presència d'acceleració de Coriolis modifica la distribució del camp de pressions en direcció perpendicular a la corba, però mai fa treball.
- 10 Les equacions [1.25] es completen en coordenades naturals amb les variacions en les direccions de \mathbf{n} i \mathbf{b} , cosa que proporciona una descripció tridimensional de l'espai en funció de les curvatures i les torsions de les corbes ortogonals en P, que són les seves línies coordenades.
- 11 El vector de Lamb també es coneix com força del vòrtex per unitat de massa (vegeu, per exemple, l'equació [1.35] següent o la [4.66]). Cal recordar també que el vector de Darvoux no té component normal, ja que, de fet, es compleix la condició: $\mathbf{n} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{s}$ per al vector Darvoux unitari. La interpretació física del vector de Darvoux com a vorticitat no és possible en els moviments anòmals, en què es compleix que $\Omega_n \neq 0$. Ω_n s'anomena anormalitat del camp de vorticitat. Cal observar que la partícula manca d'acceleració en direcció binormal, però, en canvi, el camp de velocitats canvia en aquesta direcció quan $\Omega_n \neq 0$.
- 12 Aquesta conclusió és molt important perquè hi ha moltes situacions en què es compleix que $\mathbf{a} = \nabla \Psi$; en concret, aquelles en què les forces màssiques deriven d'un potencial (no són potencials la de Coriolis ni la que es deu a l'acceleració angular del sistema de referència), les superficials són només de pressió (el fregament és menyspreable o el fluid no viscos) i hi ha una relació de barotropia en el fluid. Tant el teorema de Bjerknes com el de Kelvin són teoremes cinemàtics que no imposen cap restricció a la naturalesa del fluid.



- 13 Quan el fluid no està en repòs, s'ha d'afegir el terme convectiu $\mathbf{v} \cdot \nabla c_i$ corresponent al desplaçament de l'espècie i . Es parla, doncs, de *principi de conservació de l'espècie*.
- 14 La seva forma general és [1.131]. Aquesta llei s'ha mostrat molt convenient en la pràctica, malgrat que se sap que hi ha fluids que no la segueixen i estats fluids d'agregació capaces de resistir petits esforços de tall sense que es deformin.
- 15 Es verifica que $Pr = Le \cdot Sc$. Aquests grups adimensionals també s'anomenen *grups de separació*. Si, per exemple, els fenòmens de propagació massics són menyspreables enfront dels tèrmics, llavors $Li \approx 0$.
- 16 En mecànica de fluids, són coneguts els efectes de Souret i Dufoir, que relacionen el transport de massa com a conseqüència d'un gradient de temperatura i el transport de calor per gradient de concentració, respectivament.
- 17 En general, se sap que els fluxos i els esforços generalitzats poden ser escalars, vectorials o tensorials tot i que, segons el principi de Curie, en un sistema isotròpic només es produeix acoblament entre els transports les forces impulsores dels quals són tensors del mateix ordre o la diferència d'ordres del qual sigui parell. El principi de Curie és discutit en l'actualitat, però explica els resultats experimentals de manera adequada. Per la seva banda, Onsager va demostrar que, si es fa una tria apropiada dels fluxos i de les forces impulsores, els coeficients cinètics són simètrics i $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.
- 18 1 *poise* és 0,1 Pa·s. La viscositat dinàmica de l'aigua a 20 °C és d'1 cPo, i la cinemàtica, d'1 cSt.
- 19 És a dir, la viscositat aparent seria la viscositat del fluid newtonià equivalent, mentre que la diferencial es fa servir en el càlcul d'esforços viscosos en què el gradient de deformació varia entre dues condicions determinades.
- 20 La pasta dentífrica manifesta un comportament plàstic. Les pintures són tixòtrops, i el guix, reopèctic. La massa de farina, el betum i alguns polímers són fluids viscoelàstics.
- 21 Les fases líquida i gasosa d'una substància per sota del punt crític poden coexistir en equilibri, però, per sobre de la temperatura crítica, les fases es barregen en el continu, de manera que es pot passar d'una a l'altra sense més diferència que un canvi de densitat.
- 22 Cal observar que les expressions entre parèntesis de les equacions [1.70] i [1.71] són nul·les per al gas ideal.
- 23 $[\partial p / \partial T]_v$ no varia gaire amb la temperatura en la majoria dels líquids.
- 24 En aquest cas, per analogia als sòlids, es fa servir la lletra E i no la definició correcta, B_T , de [1.85].
- 25 Aquest màxim ($\alpha = 0$) explica per què no es congela l'aigua del fons d'un dipòsit quan fa molt de fred.
- 26 En general, la tensió superficial decreix amb la temperatura fins que s'anul·la a la temperatura crítica, en què un líquid i el seu vapor es confonen i desapareix la seva interfase.
- 27 Cal observar que també és $\pi r^2 \Delta p = 2\pi r \sigma \cos \theta$.
- 28 Els canvis d'energia lliure en una de les fases, α , resulten ser:
- $$dG^\alpha = -S^\alpha dT + V^\alpha dp + \sum_{i,\alpha} \mu_i^\alpha dn_i^\alpha$$
- 29 El tensor de tensions és isòtrop i simètric i, per tant, $\overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}$
- 30 La traça d'un tensor és un escalar invariant davant rotacions dels eixos de referència.
- 31 μ és la viscositat dinàmica, i λ , un factor dinàmic relacionat amb la viscositat volumètrica, μ_N .
- 32 La llei de Stokes indica que $\mu_N = 0 = \lambda + 2\mu/3$. El motiu real d'introduir μ_N és la seva relació amb la suma invariant dels tres elements de la diagonal del tensor d'esforços i les pressions mecànica i termodinàmica:



$$p_m = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = p - \mu_v \nabla \cdot \mathbf{v} = p - (\lambda + 2\mu/3) \nabla \cdot \mathbf{v}$$

que representa la resistència viscosa a la deformació volumètrica. En fluids incompressibles o en repòs, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, i les dues pressions coincideixen, ja que la velocitat d'expansió del fluid és nul·la.

- ³³ Les forces volumètriques també s'haurien d'incloure en aquesta equació, en el seu cas, tot i que a continuació se suposarà que són menyspreables.

2

Equacions fonamentals i anàlisi dimensional

L'estat i el moviment de qualsevol volum fluid es poden determinar utilitzant els principis fonamentals de conservació de la massa, de la quantitat de moviment i de l'energia, per a unes condicions de contorn i de valor inicial determinades, i respectant les equacions constitutives i d'estat.

Els principis i les lleis es poden expressar en forma diferencial i integral. Cadascun d'aquests mètodes presenta avantatges i inconvenients, i no es pot afirmar que un sigui millor que un altre en general, sinó en funció de l'ús que es vulgui fer de la seva aplicació. Per exemple, el plantejament diferencial és útil per revelar els detalls concrets d'un flux, però requereix la resolució d'equacions diferencials que, de vegades, només es poden resoldre numèricament i amb ordinador. El mètode integral, en canvi, no proporciona detalls del flux, però sí aproximacions vàlides en moltes situacions industrials i amb relativa senzillesa.

2.1 Principis de conservació

A continuació es presenten els principis de conservació de la massa, de la quantitat de moviment i de l'energia, en forma integral.

2.1.1 Conservació de la massa

La massa d'un volum fluid no canvia amb el temps. Fent servir l'equació [1.40], amb $\rho = \phi$ i $M = \Phi$, aquesta condició s'escriu:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad [2.1]$$

i, aplicant el teorema de Reynolds a un volum de control variable amb el temps:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \rho dV + \int_{S_C} \rho((\mathbf{v} - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad [2.2]$$

Si el volum de control no es mou, això és, ni es deforma ni es desplaça, llavors $\mathbf{v}_C = 0$ i s'aplicaria [1.45]. Si, a més, la densitat és constant, llavors:



$$\int_S \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad [2.3]$$

i el flux a través de qualsevol superfície tancada fixa és nul: no es pot acumular massa a dins del volum, de manera que tota la massa que entra ha de sortir en el mateix instant de temps.

Si la densitat és constant, però V_C es mou, llavors [2.2] és:

$$0 = \frac{dV_C}{dt} + \int_{S_c} ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n}) dS \quad [2.4]$$

Per exemple, per al cas del dipòsit que es buida de la figura 2.1 (esquerra), el principi de conservació de la massa s'escriu:

$$A \frac{dh}{dt} = - \int_{S_s} (v ds)_s = -Q_s(t) \quad [2.5]$$

en què Q_s és el cabal volumètric que s'escapa del volum. ¹

Aquest principi, aplicat al volum de control fix de la mateixa figura (dreta) que conté un gas de densitat variable i uniforme, és:

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{S_s}{V_C} \bar{v}(t) dt \quad [2.6]$$

Per poder integrar aquestes equacions, cal obtenir la dependència de la velocitat de sortida amb l'altura o la pressió, cosa que es resol aplicant l'equació de l'energia, i convenir un tipus de transformació per al procés d'expansió del gas contingut en el dipòsit, que proporcioni la relació entre la pressió i el valor mitjà de la densitat del seu interior.

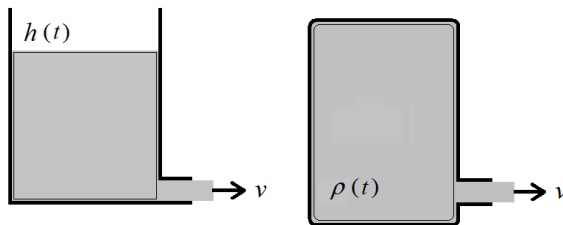


Figure 2.1. Casos especials de volums de control. A l'esquerra, un volum de control variable amb el temps que conté un fluid incompressible. A la dreta, el cas d'un volum constant ple de gas a pressió. En aquest cas, es pot suposar que la densitat del gas és uniforme a l'interior del volum, excepte a la regió pròxima a la paret i a la rodalia de l'orifici de fuga. En moltes situacions, la longitud de penetració d'aquests efectes és inferior a $V/3$ i es pot menysprear en el càlcul de la densitat mitjana. El fluid que s'ha escapat del volum de control encara forma part del volum fluid i s'avalua amb el terme convectiu de l'equació [1.46].



2.1.2 Conservació de la quantitat de moviment

El principi de conservació de la quantitat de moviment enuncia que la variació de la quantitat de moviment associada a un volum fluid és igual a la resultant de les forces exteriors que actuen sobre aquest fluid. En forma integral, aquest principi és:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_F} \rho \mathbf{f}_m dV + \mathbf{F}_S \quad [2.7]$$

La formulació integral del principi de conservació de la quantitat de moviment és útil perquè permet calcular la força que fa el fluid sobre un contorn fix o mòbil mitjançant un senzill balanç de termes. Així, aplicant el teorema de Reynolds a l'equació [2.7], i recordant la definició de \mathbf{F}_S [1.114], s'obté, per a un volum de control fix i indeformable:

$$\int_{V_C} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_{S_C} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{V_C} \rho \mathbf{f}_m dV + \int_{S_C} \overline{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}} dS \quad [2.8]$$

La integral convectiva d'aquesta equació es pot avaluar per separat per a cadascuna de les superfícies que tanquen el volum de control. En general, per a un tub de corrent per l'interior del qual flueix el fluid, aquestes superfícies inclouen les d'entrada i sortida, S_e i S_s , on hi ha flux, i la seva superfície interna lateral, S_L (figura 2.2). Si les superfícies elementals d'entrada i sortida es trien de manera que siguin normals a la velocitat en cada punt, és a dir, $-\mathbf{n}_e = \mathbf{e} = \mathbf{v}_e/v_e$ i $\mathbf{n}_s = \mathbf{s} = \mathbf{v}_s/v_s$, llavors, per a les integrals en S_e i S_s , es té:

$$\begin{aligned} \int_{S_e} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_e} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e) dS = - \int_{S_e} \rho v^2 \mathbf{e} dS \\ \int_{S_s} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_s} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s) dS = \int_{S_s} \rho v^2 \mathbf{s} dS \end{aligned} \quad [2.9]$$

i, com que la paret lateral d'un tub de corrent és impermeable, llavors:

$$\int_{S_L} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad [2.10]$$

L'última integral de l'equació [2.8] també es pot descompondre amb [1.132] per incloure per separat la contribució dels termes normal i tangencial en cadascuna de les superfícies:

$$\int_{S_C} \overline{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}} dS = - \int_{S_C} p \mathbf{n} dS + \int_{S_C} \overline{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}} dS \quad [2.11]$$

sent:

$$\begin{aligned} \int_{S_C} p \mathbf{n} dS &= - \int_{S_e} p \mathbf{e} dS + \int_{S_s} p \mathbf{s} dS + \int_{S_L} p \mathbf{n} dS \\ \int_{S_C} \overline{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}} dS &= - \int_{S_e} \overline{\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau}} dS + \int_{S_s} \overline{\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\tau}} dS + \int_{S_L} \overline{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}} dS \end{aligned} \quad [2.12]$$



Amb la tria de versors, \mathbf{e} i \mathbf{s} , els esforços en S_e i S_s només són deguts a la pressió perquè els esforços viscosos normals a la superfície són molt petits,² i:

$$-\int_{S_e} \mathbf{e} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} dS = \int_{S_s} \mathbf{s} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} dS = 0 \quad [2.13]$$

D'altra banda, la força que el contorn lateral fa contra el fluid contingut en el tub de corrent és:³

$$\mathbf{F}_{cf} = -\int_{S_L} p \mathbf{n} dS + \int_{S_L} \mathbf{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} dS \quad [2.14]$$

En definitiva, combinant i arreglant les equacions anteriors, el principi s'expressa per al camp gravitacional $U = gz$ mitjançant la igualtat:

$$\mathbf{F}_{cf} = \int_{V_c} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \mathbf{k} \int_{V_c} \rho g dV + \mathbf{s} \int_{S_s} (\rho v^2 + p)_s dS - \mathbf{e} \int_{S_e} (\rho v^2 + p)_e dS \quad [2.15]$$

Així doncs, la força que fa el contorn sobre el fluid contingut en el volum de control fix que hem considerat és la suma vectorial de la variació de la quantitat de moviment del fluid contingut, el seu propi pes i el balanç net del flux d'impulsió⁴ $\{\rho v^2 + p\}$.

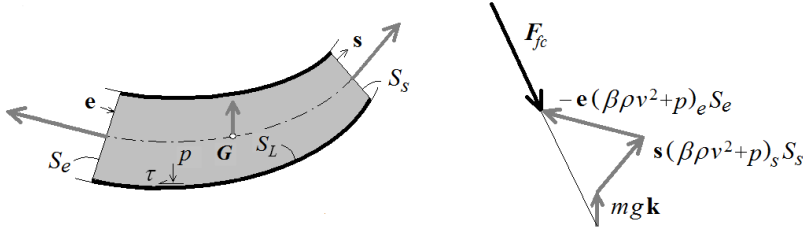


Figure 2.2. Força que el contorn d'un tub de corrent fa sobre el fluid que flueix pel seu interior en règim permanent, i reacció corresponent F_{fc} avaluada mitjançant el principi de conservació [2.15]. El resultat que es mostra a la dreta utilitza les magnituds mitjanes de la pressió, la velocitat i la densitat en cadascuna de les seccions, i el factor corrector de l'impuls, β , però això no implica que aquestes magnituds siguin iguals en totes dues (aquest principi es pot fer servir en flux compressible). Les velocitats estan relacionades entre si i amb les densitats per l'equació de continuïtat, i amb les pressions per la de l'energia.

Si el volum de control és fix però deformable o mòbil amb velocitat uniforme, l'equació [2.8], amb [1.44], és:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} (\rho \mathbf{v}) dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{k} \int_{V_c} \rho g dV + \int_{S_c} \mathbf{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} dS \quad [2.16]$$

en què \mathbf{v} i \mathbf{v}_r són les velocitats absoluta i relativa del fluid respecte del referencial fix i del volum de control, respectivament. Un desenvolupament paral·lel a l'anterior permetria deduir la força que exerceix el contorn sobre el fluid en V_C .



La segona llei de Newton aplicada a un volum de control variable i no inercial $\{xyz\}$ es deriva de l'anterior afegint la força d'inèrcia associada:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{v} dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{v} ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \rho (\mathbf{f}_m + \mathbf{a}_i) dV + \int_S \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} dS \quad [2.17]$$

on ara \mathbf{v} és la velocitat del flux respecte de la referència no inercial $\{xyz\}$; \mathbf{v}_C és la velocitat de deformació o desplaçament de la superfície de control respecte del mateix referencial, i \mathbf{a}_i és l'acceleració d'inèrcia associada al sistema de referència no inercial de l'equació [1.112].

Els principis de conservació del moment cinètic i de la quantitat de moviment responen al mateix principi fonamental de la mecànica, i la seva formulació combinada permet determinar el punt d'aplicació de la resultant. En el cas del moment cinètic, se sap que la seva variació en un sistema és igual al moment de les forces que actuen sobre seu, i que la seva conservació es verifica des de qualsevol eix. Per a una massa fluida, aquest principi és:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{v}) dV = \int_V (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{f}_m) dV + \int_S (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}) dS \quad [2.18]$$

Referint el volum fluid a un volum de control variable amb el temps, es té:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \frac{d}{dt} \int_{V_c} (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{v}) dV + \int_{S_c} (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{v}) ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{n}) dS = \\ &= \int_V (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{f}_m) dV + \int_S (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}) dS = \mathbf{M}_m + \mathbf{M}_s = \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{F} \end{aligned} \quad [2.19]$$

que assenjala que el moment de la resultant respecte d'un punt qualsevol és la suma vectorial dels moments de les forces màssiques i de superfície respecte del mateix punt. Aquestes expressions es transformen igual que les de la quantitat de moviment en el cas de tractar amb referències no inercials.

2.1.3 Conservació de l'energia

El principi de conservació de l'energia afirma que la variació de l'energia total (interna més cinètica) d'un volum fluid és igual al treball per unitat de temps de les forces exteriors (màssiques i de superfície) que actuen sobre aquest, més la calor rebuda de l'exterior per unitat de temps, i s'escriu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV &= \int_V \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} dV + \int_S (\mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}) \cdot \mathbf{v} dS - \\ &\quad - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V (q_r + q_q) dV \end{aligned} \quad [2.20]$$



en què u és l'energia interna intrínseca per unitat de massa; \mathbf{q} és el vector flux de calor per conducció que travessa S ; q_r és la calor rebuda per radiació per unitat de temps i volum, i q_q és la calor generada a l'interior del volum per transformació química en les mateixes unitats.⁵ Aquesta equació es pot arreglar convenientment per descriure la transferència d'energia que es produeix en una turbomàquina en funció de les variables del flux a la seva entrada i a la seva sortida, o en qualsevol tub de corrent.

Quan les forces màssiques deriven d'un potencial escalar U permanent, el treball que han realitzat es pot englobar juntament amb la variació d'energies interna i cinètica, i s'obté:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 + U \right) dV = \int_S (\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{v} dS - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V (q_r + q_q) dV \quad [2.21]$$

que expressa que la variació de les energies interna, cinètica i potencial d'un sistema material es deu al treball de les forces de superfície i a la calor subministrada per unitat de temps.

Per referir aquest principi a un volum de control variable amb el temps que en un instant coincideixi amb el volum fluid, n'hi ha prou d'aplicar [1.44] a la primera integral, i resulta:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 + U \right) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \rho e dV + \int_{S_C} \rho e (\mathbf{v} - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{n} dS \quad [2.22]$$

en què momentàniament s'ha utilitzat l'energia total específica, e , resultat de sumar les energies interna, cinètica i potencial, i \mathbf{v}_C és la velocitat de deformació o desplaçament de la superfície de control en el mateix referencial en què està definit \mathbf{v} .

En l'aplicació d'aquest principi a una turbomàquina, cal tenir present que, si bé el volum de control és constant i s'aplica [1.45], la seva superfície interna conté ara una part mòbil formada pel rotor o els rotors en moviment. D'altra banda, com que les superfícies de control d'entrada i sortida són fixes, el terme convectiu de [2.22] s'escriu, tornant a fer servir els versors \mathbf{e} i \mathbf{s} , i tenint en compte que $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, de la forma:

$$\int_{S_C} \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 + U \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_e} \rho e \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{e} dS + \int_{S_s} \rho e \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{s} dS \quad [2.23]$$

El treball de les forces de superfície de l'equació [2.21] es pot descompondre com es va fer en el principi de la quantitat de moviment per incloure per separat la contribució dels termes normal i tangencial en cadascuna de les superfícies. Evidentment, es continua complint [2.13], però com que ara les integrals sobre la superfície lateral també s'anul·len perquè és fixa ($\mathbf{v}_L = \mathbf{0}$), resulta:



$$\begin{aligned}
 \int_{S_c} (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{v} dS &= - \int_{S_c} (p \mathbf{n} dS) \cdot \mathbf{v} + \int_{S_c} (\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \mathbf{v} dS \\
 \int_{S_c} (p \mathbf{n} dS) \cdot \mathbf{v} &= - \int_{S_e} (p e dS) \cdot \mathbf{v}_e + \int_{S_s} (p s dS) \cdot \mathbf{v}_s + \int_{S_m} (p \mathbf{n} dS) \cdot \mathbf{v}_m \quad [2.24] \\
 \int_{S_c} (\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \mathbf{v} dS &= \int_{S_m} (\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \mathbf{v}_m dS
 \end{aligned}$$

Les integrals sobre la superfície mòbil s'han retingut perquè \mathbf{v}_m no té per què ser tangent o normal en tota la superfície o el seu efecte estar compensat. De fet, la contribució dels esforços respectius sobre cada element de superfície per la seva velocitat és la potència comunicada pel fluid en contacte, és a dir:

$$\dot{W} = \int_{S_m} (p \mathbf{n} dS) \cdot \mathbf{v}_m - \int_{S_m} (\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \mathbf{v}_m dS \quad [2.25]$$

que és negativa quan l'energia és lliurada al fluid.⁶

Per acabar, s'introdueixen aquests resultats a [2.21] i s'agrupa tota la calor rebuda pel fluid en el volum de control per unitat de temps, sigui a través de la seva superfície o generat a l'interior per reacció, i l'equació queda d'aquesta manera:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) dV - \int_{S_e} (\rho e + p) v_e dS + \int_{S_s} (\rho e + p) v_s dS = -\dot{W} + \dot{Q} \quad [2.26]$$

Amb la màquina impulsant un cabal en massa G constant i estable, no hi ha motiu per pensar que qualsevol d'aquests termes hagi de ser zero, ni tan sols el primer, perquè el moviment de les parets mòbils fa que a l'interior del volum de control el moviment no sigui permanent. No obstant això, en règim permanent, s'observa que el valor mitjà temporal de tota l'energia e continguda en el volum no canvia amb el temps i, per tant, es pot suposar que aquest terme s'anul·la. De manera similar, quan el temps de residència del fluid en la màquina és molt més baix que el temps tèrmic de la transferència de calor (que, normalment, és de l'ordre de segons), es pot suposar que el procés és adiabàtic, encara que no sigui estrictament isentròpic.

Si les condicions del flux permanent són uniformes a l'entrada i a la sortida, i són úniques, l'equació anterior es pot escriure introduint la variable entalpia com:

$$(h_s - h_e) + \frac{1}{2} (v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) = \frac{-\dot{W} + \dot{Q}}{G} = -w + q \quad [2.27]$$

que expressa que la variació de l'entalpia i de les energies cinètica i potencial per unitat de massa entre l'entrada i la sortida d'una màquina és igual a la suma del treball que intercanvia amb el fluid quan la travessa i la calor que rep de fora, sigui per radiació, conducció o reacció, en les mateixes unitats. La calor que es genera internament per l'ocurrència d'irreversibilitats no apareix en aquesta equació, tot i que és



evident que el valor dels seus termes i el treball útil que pot extreure o comunicar amb una màquina canvien amb la seva presència.⁷ També és convenient indicar que no s'ha imposat, per a la seva obtenció, que el fluid hagi de ser incompressible, només que el flux en les seccions d'entrada i sortida sigui uniforme per poder integrar [2.26]. Ni tan sols la tria subjectiva, tot i que apropiada, dels versors \mathbf{e} i \mathbf{s} n'afecta el resultat en termes del cabal màssic circulant ni suscita l'aparició d'esforços viscosos que poguessin dependre de la seva direcció. D'altra banda, aquesta equació portada al límit diferencial és [1.76].

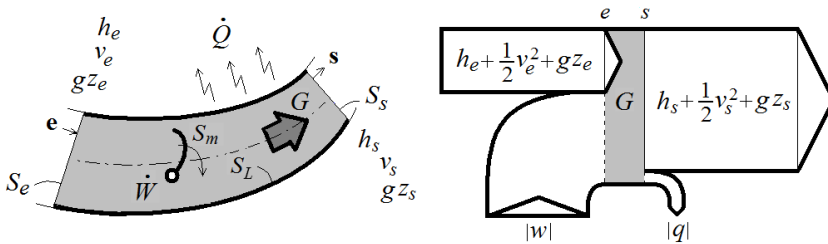


Figure 2.3. Balanç energètic en una màquina. Segons el criteri de signes emprat, tant w com q són negatius en aquest gràfic

2.1.4 Equacions en forma diferencial

La resolució d'un problema de mecànica de fluids implica la determinació de sis incògnites, a saber: les tres components de la velocitat, la pressió, la densitat i la temperatura. Per a això, es disposa de sis equacions: l'equació de continuïtat, obtinguda del principi de conservació de la massa; les tres equacions del moviment, derivades del principi vectorial de conservació de la quantitat de moviment; l'equació de conservació de l'energia, resultat d'aplicar el primer principi de la termodinàmica, i l'equació d'estat termodinàmic, que en general implica una relació $\rho = \rho(p, T)$ o $\rho = \rho(p, s)$. El marc teòric es completa amb altres equacions bàsiques de la mecànica de fluids, l'ús dels quals permet interpretar millor els fenòmens fluidodinàmics, entre les quals hi ha les equacions de l'energia mecànica, de l'energia interna, de l'entalpia i de l'entropia.

Aquest marc teòric permet, en principi, tancar qualsevol problema. No obstant això, la resolució del sistema d'equacions descrit no sol ser fàcil, i poques vegades es disposa de la solució analítica corresponent. En aquest sentit, és necessari afegir que amb prou feines es coneixen una desena de solucions exactes de les anomenades equacions de Navier-Stokes, de manera que s'ha de recórrer a l'experiència o a l'ús de mètodes de reducció de la magnitud i de la complexitat de les equacions per obtenir solucions analítiques aproximades, que seran, malgrat tot, adequades a la descripció dels fluxos corresponents conforme a les simplificacions i hipòtesis adoptades.



La forma diferencial del principi de conservació de la massa s'obté, per exemple, aplicant el teorema de Gauss-Ostrogradskii a la forma integral [2.1]. El resultat es pot expressar de qualsevol de les maneres següents, anomenades *equacions de continuïtat*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0\end{aligned}\quad [2.28]$$

L'última equació de [2.28] mostra que la densitat de la partícula fluida és constant si $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.⁸

La forma diferencial general del principi de conservació de la quantitat de moviment és l'equació de Cauchy [1.138], que condueix a la de Navier-Stokes [1.140] quan es particularitza per a fluids newtonians de viscositat constant. Si es compleix que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, aquesta equació es redueix a:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f}_m - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad [2.29]$$

Quan les forces màssiques deriven d'un potencial U , tal que $\mathbf{f}_m = -\nabla U$, llavors:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla(p + \rho U) + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad [2.30]$$

D'altra banda, si el camp potencial és el gravitacional, $U = gz$, i el fluid ideal, $\mu = 0$, es té:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad [2.31]$$

En aquestes condicions, l'acceleració de la partícula deriva d'un potencial i, per tant, es pot aplicar el teorema de Kelvin, en virtut del qual la circulació de la velocitat es mantindrà constant. Aquesta és l'equació d'Euler per a la quantitat de moviment en coordenades cartesianes, que, amb [1.7] i [1.35], també es pot generalitzar a qualssevol coordenades, com:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad [2.32]$$

Quan el fluid ideal no és barotròpic, l'equació d'Euler s'escriu:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla U = 0 \quad [2.33]$$



El tractament d'aquestes últimes equacions no és senzill, a causa de la presència del terme rotacional. Afortunadament, el seu caràcter vectorial fa que aquest terme només participi en algunes direccions particulars i que pugui ser nul en determinades condicions.⁹ Per exemple, la contribució del terme rotacional és nul·la en qualsevol direcció perpendicular al vector de Lamb, $\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v}$, cosa que passa al llarg de la línia de corrent, ja que és tangent al vector velocitat, i en el flux de Beltrami.

L'equació [2.33] en un sistema de referència relatiu a un eix mòbil que giri a la velocitat ω constant i en moviment estacionari és:

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla(U - (\omega \wedge r)^2) = \mathbf{v} \wedge (\mathbf{\Omega} + 2\omega) \quad [2.34]$$

on ara \mathbf{v} és la velocitat relativa de la partícula de fluid situada en \mathbf{r} respecte del referencial mòbil l'origen del qual no té d'acceleració. Cal observar que aquesta equació té la mateixa forma que [2.33] si s'afegeixen les forces màssiques d'inèrcia, de les quals la centrífuga és conservativa, però la de Coriolis, no.

Evidentment, si el moviment és permanent i irrotacional, l'equació d'Euler [2.32] porta a:

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} v^2 \right) = 0 \quad [2.35]$$

La relació [1.35] també es pot utilitzar per escriure [2.30] en funció de la vorticitat. Quan es pren el rotacional de l'equació resultant, s'obté, després d'una sèrie de passos que s'ometen per no perdre continuïtat en el desenvolupament:

$$\frac{D\mathbf{\Omega}}{Dt} = (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{\Omega} \quad [2.36]$$

Aquesta equació suggereix que el canvi de la vorticitat en un fluid incompressible es deu a dos efectes. El primer terme de la dreta vol dir que la velocitat de deformació del fluid indueix un canvi en el mòdul i la direcció del vector vorticitat que es pot interpretar com una font o un embornal. Aquest fenomen és anàleg al principi de conservació del moment cinètic en sòlids, segons el qual la reducció o l'augment del moment d'inèrcia indueixen un augment o una disminució de la velocitat angular en absència de parells externs. Aquest terme desapareix en moviments bidimensionals, ja que llavors els vectors \mathbf{v} i $\mathbf{\Omega}$ són perpendiculars, i és:

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \Omega \quad [2.37]$$

que indica que la vorticitat es difon com la calor (i passa a ser un escalar). Es conclou que, en els fluids ideals i incompressibles sotmesos a forces màssiques conservatives, si el moviment pla era irrotacional ho continuarà sent.



La forma diferencial del principi de conservació de l'energia s'obté de nou aplicant els teoremes de transport de Reynolds i de Gauss-Ostrogradskii a l'equació [2.20]. Com que totes les magnituds estan definides en el continu, es compleix:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} \right\} = \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q \quad [2.38]$$

El desenvolupament dels termes de l'esquerra permet simplificar-ne algun mitjançant l'equació de continuïtat. El resultat porta a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} \right\} = \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) \quad [2.39]$$

cosa que, amb [1.132], permet deduir, quan les forces màssiques deriven d'un potencial $U = U(x, t)$, que l'equació [2.38] es pot escriure de les formes:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) &= \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q + \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \nabla U \cdot \mathbf{v} \\ \rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + U \right) &= \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q + \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad [2.40]$$

Aquesta última equació assenjala que la suma $h + v^2/2 + U$ es manté constant en una partícula fluida en els processos estacionaris en què siguin menyspreables les aportacions de calor i els esforços d'origen viscosos. Aquesta suma no és constant en la majoria dels casos, encara que el camp exterior U sigui permanent perquè, o bé les tensions viscoses fan algun tipus de treball superficial entorn de l'element fluid en accelerar-lo (variant la seva energia cinètica) o deformar-lo (variant la seva energia interna), o bé aquest element bescanvia calor amb el seu entorn, o el camp de pressions al seu voltant no és permanent.

L'equació de l'energia mecànica o de conservació de l'energia cinètica s'obté multiplicant de forma escalar l'equació de Cauchy del moviment per la velocitat. Utilitzant [1.35], i després d'algunes simplificacions, s'arriba a:

$$\frac{\rho}{2} \frac{Dv^2}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f}_m - \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + p\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\bar{\mathbf{T}}} \quad [2.41]$$

que expressa que la variació de l'energia cinètica baricèntrica d'un volum elemental i unitari de fluid està associada al treball de les forces exteriors que actuen sobre el centre de gravetat del mateix per unitat de temps. Com que aquesta equació s'obté a partir de l'equació de conservació de la quantitat de moviment i, per tant, només té en compte termes mecànics, no inclou els termes associats a la deformació de la partícula. És a dir, seria el treball total de les forces exteriors si tota la massa del volum unitari considerat es mogués a la mateixa velocitat. Evidentment, hi ha un treball addicional associat a la deformació de l'element fluid que, juntament amb la calor que rep de l'exterior, es compensa amb la variació de la seva energia interna.



L'equació de l'energia interna s'obté a partir de [2.38], fent ús de l'equació de l'energia mecànica [2.41]. Restant [2.41] de [2.38] i amb [2.39], resulta:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot (\bar{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{T} - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q \quad [2.42]$$

Els dos primers termes del segon membre representen el treball exercit per les forces de superfície en deformar la partícula. Aquesta equació també pot escriure com:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q + \Phi_v \quad [2.43]$$

en què $-p \nabla \cdot \mathbf{v}$ és el treball de compressió de les forces de pressió en comprimir la partícula fluida i és nul si el fluid és incompressible, i Φ_v és la funció de dissipació de Rayleigh, que representa el treball de les forces de viscositat en deformar la partícula i és sempre positiu.¹⁰

L'equació [2.43] expressa que la variació de l'energia interna d'una partícula fluida és deguda al treball de les forces de pressió en deformar-la, més el treball de les forces viscoses i la calor que rep per conducció, radiació i reacció química. Aquesta és l'equació de l'energia per a un observador que es mogué amb la partícula.

De la interconnexió entre les energies interna i cinètica de les equacions anteriors, s'entén que un flux adiabàtic no pot ser mai estrictament isoterm. No obstant això, el treball de compressió només motiva variacions apreciables de temperatura en el flux de gasos subjectes a expansions o compressions brusques, i la funció de dissipació necessita grans gradients de velocitat per tenir un efecte sensible en la temperatura del fluid, de manera que els fluxos es poden considerar, moltes vegades i a efectes pràctics, isotèrmics i adiabàtics simultàniament.¹¹

L'equació de l'entalpia es dedueix fàcilment de l'equació de l'energia interna [2.43] i la de continuïtat [2.28], i és:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q + \Phi_v \quad [2.44]$$

L'equació de l'entropia s'obté també de l'equació de l'energia interna en forma diferencial. Emprant l'equació de Gibbs de l'energia interna per a fluids monocomponent i el principi de continuïtat, resulta:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + q_r + q_q + \Phi_v \quad [2.45]$$

Aquesta expressió indica que l'entropia d'una partícula fluida augmenta quan rep calor i treball de deformació per part de les forces viscoses.¹² La funció de dissipació és l'únic terme explícitament positiu d'aquesta equació i respon al caràcter irreversible del fenomen de transport de quantitat de moviment. Com a conseqüència de



l'anterior, l'entropia del sistema material augmenta encara que el sistema sigui adiabàtic i no hi hagi efectes de radiació o reacció química presents.

En resum, el principi de conservació de l'energia s'estén, en la dinàmica de fluids, a estats fora de l'equilibri. Aquesta generalització inclou, simultàniament, el primer i el segon principis de la termodinàmica, i a més identifica l'origen de les irreversibilitats que donen lloc a l'augment de l'entropia.

2.2 Anàlisi dimensional i de magnitud

Malgrat que la major part dels problemes dinàmics de la mecànica de fluids es poden formular amb els principis bàsics i les equacions anteriors, les solucions exactes de les equacions de Navier-Stokes són poques i corresponen a casos senzills o per als quals s'han assumit una sèrie d'hipòtesis que, en molts casos, no reflecteixen exactament el moviment real.

Els obstacles que dificulten més l'obtenció de resultats vàlids són, a banda de la mateixa naturalesa matemàtica de les equacions no lineals i en derivades parcials, les condicions de contorn i la geometria; la viscositat i la generació turbulenta, i la descripció d'una equació constitutiva per al fluid que sovint és desconeguda o extremament simplificada. A aquests obstacles, cal afegir una dificultat addicional, ja que en moltes ocasions s'han de resoldre diverses equacions simultàniament, totes vàlides per separat en regions limitades del camp fluid, de manera que la solució global ha de ser compatible a les fronteres comunes de separació de cadascuna d'aquestes regions.

L'enginyeria fa front a aquestes dificultats a partir de la combinació de dues estratègies: la simplificació dels problemes mitjançant models senzills del sistema real sobre la base de l'ordre de magnitud observat o esperat de determinades magnituds físiques; i l'experimentació, sense la qual és impossible quantificar la magnitud real de molts fenòmens o estimar els paràmetres que intervenen en les equacions resolütòries. Aquesta metodologia mixta, basada en l'anàlisi i l'experimentació, més el marc teòric que suposa l'anàlisi dimensional i la semblança física, permeten, quan el problema està ben plantejat, donar solució a moltes situacions que es presenten en enginyeria, i fins i tot extrapolar els resultats experimentals obtinguts a altres casos no assajats o respecte dels quals han canviat algunes condicions de funcionament.

De vegades, la dimensió física del problema que volem estudiar imposa que l'experimentació s'efectuï sobre models a escala. En aquests casos, el compliment de les relacions de semblança entre el model i el prototip hi ha cops que recomana utilitzar fluids o materials diferents en els assajos. Aquestes relacions de semblança, fins i tot estant ben determinades per a la major part de situacions, suposen sovint l'assumpció d'hipòtesis simplificadores, que només l'experiència acumulada per l'analista pot valorar a l'hora d'estimar el funcionament del prototip a partir del resultat obtingut durant els assajos amb el model.



2.2.1 Homogeneïtat dimensional i semblança física

L'anàlisi dimensional constitueix un mètode de tractament de les equacions generals que permet reconèixer les variables fortes d'un fenomen i identifica les dependències funcionals entre les variables definides com a dependents i independents. La magnitud dels problemes es pot reduir amb l'anàlisi dimensional formant un conjunt limitat de grups adimensionals mitjançant la combinació completa de les variables i els paràmetres del fenomen.

Per començar, sigui f una funció de n variables en un sistema bàsic d'unitats $[u]$ tal que:

$$f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0 \quad [2.46]$$

en què les magnituds mesurables, Q_i , del problema es poden descriure dimensionalment mitjançant una forma del tipus:

$$[Q_i] = \prod_{j=1}^p u_j^{a_{ij}} \quad [2.47]$$

on les u_j són les unitats fonamentals i p el seu número.¹³ Evidentment, els mesuraments Q_i es poden fer en altres unitats u_j' , proporcionals a les anteriors, de manera que:

$$[Q_i'] = \prod_{j=1}^p (u_j')^{a_{ij}} \equiv \prod_{j=1}^p (u_j k_j)^{a_{ij}} = \prod_{j=1}^p k_j^{a_{ij}} \cdot [Q_i] \quad [2.48]$$

Com que la magnitud física a què es fa referència és la mateixa independentment del sistema d'unitats emprat, es compleix que $Q_i' [Q_i'] \equiv Q_i [Q_i]$,¹⁴ i el nou valor numèric Q_i' és:

$$Q_i' = \frac{Q_i}{\prod_{j=1}^p k_j^{a_{ij}}} \quad [2.49]$$

Es diu que la relació f és invariant respecte dels canvis de les unitats fonamentals quan el canvi de u_j condueix a una relació transformada de f, f' , que defineix el mateix lloc geomètric en l'espai de dimensions n $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$. La relació [2.46] és dimensionalment homogènia quan la transformada de f en variar el sistema d'unitats compleix:

$$f'(Q_1', Q_2', \dots, Q_n') = f(Q_1', Q_2', \dots, Q_n') = 0 \quad [2.50]$$

és a dir, f' és el mateix operador que el de la transformació [2.46]. Aquest és el punt de partida de l'anàlisi dimensional: tota equació que lliga els valors numèrics de magnituds físiques és invariant davant un canvi del sistema d'unitats i és dimensionalment homogènia.



Segons el teorema de Vaschy-Buckingham, l'equació [2.46] es pot reduir a una relació monòmica de les Q_i mitjançant un conjunt de productes de potències adimensionals i independents entre si. Si m és el rang de la matriu formada pels coeficients a_{ij} ,¹⁵ llavors, amb $p \leq m < n$:

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad [2.51]$$

Com que evidentment ϕ és invariant, a la pràctica el problema consisteix a portar l'equació f , dimensionalment homogènia, a una forma adimensional ϕ que redueixi el nombre de variables Q_i . La tria adequada de les Q_i porta a l'obtenció d'un grup de variables adimensionals, π , mútuament independents, que representen el fenomen i permeten dilucidar quan hi ha semblança física entre tots dos.

Suposem, per exemple, que el coneixement d'un fenomen físic ve determinat per un conjunt de n equacions diferencials dimensionalment homogènies, E , que són, alhora, funció de n magnituds Q que intervenen en m funcions f , que les descriuen en funció del temps i de l'espai per a unes condicions de contorn i inicials determinades. En aquest cas, s'escriu:

$$E_i(Q_i, f_j; \mathbf{x}, t) = 0 \quad [2.52]$$

El sistema anterior es transforma en un altre del tipus:

$$E_i^*(Q_i^*, f_j^*; \mathbf{x}^*, t^*; l_0, t_0, Q_{i0}, f_{j0}) = 0 \quad [2.53]$$

si es defineix un canvi de variables tal que les variables asterisc siguin adimensionals i, per tant, independents del sistema d'unitats. Aquest canvi de variables podria ser del tipus:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= l_0 \mathbf{x}^* \\ t &= t_0 t^* \\ Q_i &= Q_{i0} Q_i^* \\ f_j &= f_{j0} f_j^* \end{aligned} \quad [2.54]$$

en què l_0 i t_0 són, respectivament, una longitud i un temps característics del fenomen, i Q_{i0} i f_{j0} , valors finits no nuls de referència de les magnituds corresponents. Aquests valors característics o de referència apareixen agrupats en l'equació [2.53] en forma de coeficients π_0 independents entre si.

Doncs bé, la condició necessària i suficient perquè dos fenòmens siguin físicament semblants és que aquests paràmetres característics siguin iguals. És a dir, coneguts els valors Q_{iA} que verifiquen la funció E per a un cas particular "A", i triats els valors característics l_{0A} , t_{0A} , Q_{i0A} i f_{j0A} corresponents, els valors de tals funcions per a un cas "B", amb valors característics l_{0B} , t_{0B} , Q_{i0B} i f_{j0B} , que donin idèntics valors als coeficients π_0 , es dedueixen dels corresponents a "A" fent:



$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}_B}{l_{0B}} = \frac{\mathbf{x}_A}{l_{0A}} \\ t^* &= \frac{t_B}{t_{0B}} = \frac{t_A}{t_{0A}} \\ Q_i^* &= \frac{Q_{iB}}{Q_{i0B}} = \frac{Q_{iA}}{Q_{i0A}} \end{aligned} \quad [2.55]$$

El recíproc també és cert. Per exemple, per a dos fenòmens descrits per variables que es representin en un sistema genèric d'unitats [MLT] entre els quals s'observa semblança geomètrica, cinemàtica i dinàmica, les variables adimensionals de [2.55] prenen el mateix valor en tots dos i, a més, són físicament semblants.

2.2.2 Semblança física en mecànica de fluids

Tal com s'ha vist, la formació dels factors π redueix el nombre de variables d'un problema de n a $n - m$, cosa que facilita l'estudi d'un procés i simplifica la planificació d'experiències. El mètode més complet d'obtenció dels grups adimensionals per a un fenomen determinat consisteix en la normalització de les equacions diferencials¹⁶ que el defineixen i estableixen les relacions de semblança física.

En el moviment de fluids, el grup d'equacions [2.52] està format per les equacions de continuïtat, quantitat de moviment i energia en forma diferencial:¹⁷

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla(p + \rho U) + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi_v \end{aligned} \quad [2.56]$$

a què cal afegir l'equació d'estat corresponent.

El canvi de variables que permeti escriure aquestes equacions en la forma [2.53] és crucial a l'hora d'aplicar l'anàlisi dimensional. Com que la tria és subjectiva i, per tant, no única, serà la perícia de l'analista la que, d'acord amb la seva experiència i coneixement del procés estudiat, definirà la importància d'una determinada variable

Cal tenir present que l'homogeneïtat dimensional pot quedar en dubte i deixar sense significació les equacions físiques de no prendre en consideració alguna variable rellevant. De la mateixa manera, els resultats experimentals fets per a la descripció d'un fenomen físic difereixen dels ideals quan s'han dut a terme sense tenir en compte una variable important. En canvi, la inclusió d'una variable marginal no afecta el resultat final, que revelarà llavors que la seva inclusió era innecessària i que només va introduir una complicació innecessària en l'estudi del cas.



En la tria de les variables característiques, convé partir de la velocitat característica, seguida del temps i de la longitud. La temperatura i la pressió característiques poden ser valors absoluts i de rabeig, o els seus increments, però la tria ha de ser significativa i representativa de les variacions de la temperatura i de la pressió en el medi. Una bona pràctica consisteix a fer que l'ordre de magnitud del terme adimensional corresponent sigui semblant als termes restants, per exemple, de l'ordre de la unitat, de manera que els paràmetres adimensionals mesurin la seva importància relativa.

Les equacions [2.56] s'escriuen:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 v_0}{l_0} \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) &= 0 \\ \rho^* \left(\frac{\rho_0 v_0}{t_0} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 v_0^2}{l_0} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* \right) &= -\frac{p_0}{l_0} \nabla^* p^* - \rho_0 g \rho^* \nabla^* U^* + \frac{\mu_0 v_0}{l_0^2} \nabla^* \bar{\tau}^* \\ \rho^* \left(\frac{\rho_0 u_0}{t_0} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 v_0 u_0}{l_0} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* u^* \right) &= -\frac{p_0 v_0}{l_0} p^* \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* + \frac{k_0 T_0}{l_0^2} \nabla^* \cdot (k^* \nabla^* T^*) + \frac{\mu_0 v_0^2}{l_0^2} \Phi_v^* \end{aligned} \quad [2.57]$$

quan es fa el canvi de variables [2.54], per al qual s'han triat les següents magnituds representatives: v_0 , t_0 , l_0 , p_0 , $U_0 = gl_0$, u_0 , T_0 , ρ_0 , μ_0 , k_0 , i per a l'operador vectorial gradient: $l_0 \nabla = \nabla^*$.

Els coeficients de cadascuna de les equacions [2.57] tenen les mateixes dimensions i mostren les magnituds de què depèn aquest terme. Si se'n divideixen dos, s'obté un número adimensional que representa la seva importància relativa. Per exemple, en dividir-los pel terme convectiu respectiu, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{l_0}{v_0 t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) &= 0 \\ \rho^* \left(\frac{l_0}{v_0 t_0} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* \right) &= -\frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \nabla^* p^* - \frac{gl_0}{v_0^2} \rho^* \nabla^* U^* + \frac{\mu_0}{\rho_0 v_0 l_0} \nabla^* \bar{\tau}^* \\ \rho^* \left(\frac{l_0}{v_0 t_0} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* u^* \right) &= -\frac{p_0}{\rho_0 u_0} p^* \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* + \frac{k_0 T_0}{\rho_0 v_0 l_0 u_0} \nabla^* \cdot (k^* \nabla^* T^*) + \frac{\mu_0 v_0}{\rho_0 l_0 u_0} \Phi_v^* \end{aligned} \quad [2.58]$$

En resum, les condicions necessàries i suficients de semblança física¹⁸ del moviment dels fluids són la semblança geomètrica i la igualtat dels set grups adimensionals de l'equació [2.58], de les funcions d'estat escrites en forma adimensional i de les condicions inicials, de contorn i en els límits.

En el cas d'un fluid newtonià, de μ i ρ constants, la forma adimensional de l'equació general de Navier-Stokes és:

$$\frac{l_0}{v_0 t_0} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{p_0}{\rho v_0^2} \nabla^* p^* - \frac{gl_0}{v_0^2} \nabla^* U^* + \frac{\mu}{\rho v_0 l_0} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad [2.59]$$



i l'equació de l'energia, si k i c_v són també constants i fent $u = c_v T$, es:

$$\frac{l_0}{v_0 t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* = \frac{k}{\rho v_0 l_0 c_v} \nabla^{*2} T^* + \frac{\mu v_0}{\rho l_0 c_v T_0} \Phi_v^* \quad [2.60]$$

Tot i això, de vegades el nombre de variables ha d'augmentar introduint una o més magnituds bàsiques addicionals, sobretot quan la variable té caràcter vectorial i es volen tenir en compte les seves propietats direccionals.

Per exemple, en el cas del transport de calor en un entorn en què la pressió sigui constant i el moviment sigui unidireccional,¹⁹ la contribució dels diferents termes tèrmics en funció dels diferents gradients de temperatura observats es valora mitjançant l'equació de l'entropia [2.45]. En aquest supòsit, aquesta equació s'escriu, en coordenades rectangulars, com:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + q_a + \Phi_v \quad [2.61]$$

on s'han agrupat els termes de radiació i reacció en q_a .

Si s'admet que k , c_p i ρ són constants, l'equació [2.61] es pot escriure de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{T_0 \Delta s}{t_c} \frac{Ds^*}{Dt^*} &= \frac{c_p \Delta T_0}{t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{c_p v_0 \Delta T_0}{l_{0s}} v^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \\ &= \frac{k \Delta T_0}{\rho l_{0n}^2} \left(\frac{l_{0n}^2}{l_{0s}^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right) + q_0 q_a^* + \frac{\mu v_0^2}{\rho l_{0n}^2} \Phi_v^* \end{aligned} \quad [2.62]$$

per a això s'han definit també les magnituds característiques següents:

- v_0 , la velocitat típica del fluid, de manera que $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i}$ i $v_x = v_0 v^*$.
- t_c , el temps durant el qual el fluid experimenta un canvi ΔT_0 de la seva temperatura mitjana T_0 , que serà el més petit entre el temps característic local, t_0 , i el temps de residència, t_r .
- l_{0s} , la longitud recorreguda pel fluid a la velocitat v_0 en el temps t_r en la direcció del seu moviment, és a dir, $l_{0s} = v_0 t_r$. S'admet que la temperatura del fluid experimenta un canvi de l'ordre de ΔT_0 quan recorre aquesta distància, per això aquest paràmetre està associat al gradient longitudinal de la temperatura.
- l_{0n} , la longitud perpendicular a l_{0s} en què s'observa el mateix canvi ΔT_0 de la seva temperatura. Aquest paràmetre proporciona el gradient transversal de la temperatura.
- q_0 , el flux de calor per unitat de massa i temps per radiació o reacció. La calor aportada a la unitat de massa serà tant més gran com més gran també sigui t_r .



- Δs , l'increment típic d'entropia que la partícula fluida experimenta com a conseqüència dels diferents termes tèrmics de l'equació [2.61].

Tornant a dividir pel terme convectiu, resulta:

$$\frac{t_r}{t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{kl_{0s}}{\rho c_p v_0 l_{0n}^2} \left(\frac{l_{0n}^2}{l_{0s}^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right) + \frac{q_0 t_r}{c_p \Delta T_0} q_a^* + \frac{\mu v_0 l_{0s}}{\rho c_p \Delta T_0 l_{0n}^2} \Phi_v^* \quad [2.63]$$

on apareixen cinc grups adimensionals, dels quals tres deriven dels anteriors i dos són nous. La relació de longituds característiques, l_{0n}/l_{0s} , apareix a l'interior del parèntesi del segon membre per indicar que el gradient longitudinal de temperatura és inferior al transversal quan $l_{0n} < l_{0s}$, cosa que ratifica el caràcter direccional del fenomen. L'últim grup apareix en el segon sumand de la dreta i depèn de l'aportació de calor per unitat de massa, $q_0 t_r$, que abans no s'havia considerat.

Un altre cas en què han d'afegir variables addicionals a una mateixa dimensió bàsica és el flux conduït per contorns de longitud transversal D , la longitud característica de la qual sigui L . Si Δp_0 és la caiguda de pressió observada en L , l'equació de Navier-Stokes en direcció longitudinal per a un fluid de propietats constants serà:

$$\frac{\rho v_0}{t_0} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\rho v_0^2}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{\Delta p_0}{L} \nabla^* p^* - \rho g \nabla^* U^* + \frac{\mu v_0}{D^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad [2.64]$$

L'equació [2.59] està indicada per representar, per exemple, el moviment del fluid lliure o entorn de cossos submergits, sent $l_0 = L$ la dimensió característica del cos, mentre que la [2.64] s'aplica al moviment guiat per un conducte de longitud L i diàmetre hidràulic D , per al qual el quocient L/D és la seva relació d'aspecte. La component en direcció $\{x\}$ d'aquesta equació per a un conducte horitzontal és:

$$\begin{aligned} \frac{\rho v_{0x}}{t_0} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + \frac{\rho v_{0x}^2}{L} \left(v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \frac{L}{D} v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \frac{L}{D} v_z^* \frac{\partial v_x^*}{\partial z^*} \right) = \\ = -\frac{\Delta p_0}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu v_{0x}}{D^2} \left(\frac{D^2}{L^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial z^{*2}} \right) \end{aligned} \quad [2.65]$$

en què v_{0x} , v_{0i} i v_{0z} són les velocitats característiques en les tres direccions ortogonals, la magnitud relativa de les quals depèn de les condicions d'unidireccionalitat del moviment en el conducte.

2.2.3 Grups adimensionals característics

A l'apartat anterior han aparegut una sèrie de grups adimensionals que val la pena examinar amb més atenció.

El grup que multiplica el terme local de les equacions [2.58] i següents és el número d'inèrcia o número de Strouhal:



$$\text{St} = \frac{l_0}{v_0 t_0} \quad [2.66]$$

que representa el quocient entre l'acceleració local associada a un temps t_0 i la convectoria, de manera que el procés es pot considerar quasiestacionari quan és molt més petit que u, és a dir, quan el temps de residència és molt de menor que el de canvi local. El temps característic del número de Strouhal se substitueix per la inversa de la freqüència en moviments periòdics.

El grup següent que apareix a les equacions [2.58] és el número d'Euler:

$$\text{Eu} = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \quad [2.67]$$

en què p_0 pot ser una diferència de pressions. Aquest paràmetre és característic de qualsevol procés de transformació d'energia de pressió en energia cinètica, i marca la influència dels efectes de compressibilitat en gasos i de la cavitació en líquids.²⁰

El tercer grup és el recíproc del número de Froude:

$$\text{Fr} = \frac{v_0^2}{g l_0} \quad [2.68]$$

que indica l'efecte de l'acció gravitatòria. Es pot definir un número de Froude per a cada tipus de força màssica: així, per a les forces gravitatòries, centrífugues i de Coriolis, es defineixen els números $v_0/(g l_0)^{1/2}$, $v_0/\omega l_0$ y $v_0/(\omega v_0 l_0)^{1/2}$, respectivament.

L'últim terme de l'equació de quantitat de moviment és el recíproc del número de Reynolds, que representa la relació entre les forces d'inèrcia i les viscoses:

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 v_0 l_0}{\mu_0} \quad [2.69]$$

El cinquè terme es $p_0/\rho_0 u_0$ i depèn de la naturalesa del fluid. Per exemple, en gasos perfectes, és:

$$\frac{p_0}{\rho_0 u_0} = \frac{R}{c_v} = \gamma - 1 \quad [2.70]$$

Quan es combina aquest grup amb el número d'Euler resulta el número de Mach:

$$\text{M} = \frac{v_0}{c_0} \quad [2.71]$$

en què $c_0 = (\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$ és la velocitat del so en el gas. El número de Mach és una relació entre termes cinètics i tèrmics, i representa el quocient entre les variacions de la pressió degudes a les forces d'inèrcia i la pressió mateixa, o la relació entre les forces d'inèrcia i les elàstiques. A 2.5.2 es veurà que el seu valor indica fins a quin punt un flux es pot considerar incompressible.



El penúltim terme és una forma del número de Péclet:²¹

$$\text{Pe} = \frac{\rho_0 v_0 l_0 c_v}{k_0} \quad [2.72]$$

que es pot combinar amb el número de Reynolds per proporcionar el número de Prandtl:

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu_0}{k_0} \quad [2.73]$$

El producte RePr dona la relació entre els transports de calor per convecció i difusió. El número de Péclet es pot interpretar com la relació entre el transport de calor per convecció i conducció. L'últim terme de [2.58] és una combinació dels anteriors.

Altres grups adimensionals emprats en mecànica de fluids són els números de Weber, Brinkman, Damköhler, Eckert, Roosby, els que ja hem explicat de Lewis i Schmidt, i d'altres com els números de Nusselt, Grashof, Stanton i Rayleigh. La quantitat de grups adimensionals que hi ha és enorme, però els que més es fan servir per la seva importància s'inclouen a la taula 2.1.

En turbomàquines, apareixen altres grups que defineixen les seves condicions de semblança física i serveixen d'ajuda en la fase de disseny general. Aquests grups es presentaran més endavant.

Número	Símbol	Fórmula	Definició
Bond	Bo	$\frac{\rho g \lambda^2}{\sigma}$	<u>Formació d'ones gravitacionals</u> <u>Formació d'ones capil·lars</u>
Brinkman	Br	$\frac{\mu v^2}{kT}$	<u>Calor per dissipació</u> <u>Calor per conducció</u>
Damköhler	Da	$\frac{ql}{v c_p T}$	<u>Calor per reacció</u> <u>Calor per convecció</u>
Deborah	De	$\frac{\tau}{t}$	<u>Temps de relaxació</u> <u>Temps d'observació</u>
Euler	Eu	$\frac{p}{\rho v^2}$	<u>Força de pressió</u> <u>Força d'inèrcia</u>
Fourier	Fo	$\frac{\rho c_p l^2}{kt}$	<u>Variació local de la temperatura</u> <u>Variació de la temperatura per difusió</u>
Froude	Fr	$\frac{v^2}{gl}$	<u>Força d'inèrcia</u> <u>Força de gravetat</u>



Número	Símbol	Fórmula	Definició
Grashof	Gr	$\frac{g\beta l^3 \Delta T}{\nu^2}$	$\frac{\text{Força per convecció i inèrcia}}{\text{Força de fregament}}$
Knudsen	Kn	$\frac{\lambda}{l}$	$\frac{\text{Recorregut lliure mitjà}}{\text{Longitud característica}}$
Lewis	Le	$\frac{\rho c_p D}{k}$	$\frac{\text{Difusió de massa}}{\text{Difusió de calor per conducció}}$
Mach	M	$\frac{v}{c}$	$\frac{\text{Forces de inèrcia}}{\text{Forces elàstiques}}$
Péclet	Pe	$\frac{\rho v l c_p}{k}$	$\frac{\text{Calor per convecció}}{\text{Calor per conducció}}$
Prandtl	Pr	$\frac{c_p \mu}{k}$	$\frac{\text{Difusió de quantitat de moviment}}{\text{Difusió de calor per conducció}}$
Reynolds	Re	$\frac{\rho v l}{\mu}$	$\frac{\text{Força d'inèrcia}}{\text{Força de fregament}}$
Roosby	Ro	$\frac{v}{\omega l}$	$\frac{\text{Acceleració convectiva}}{\text{Acceleració de Coriolis}}$
Schmidt	Sc	$\frac{\mu}{\rho D}$	$\frac{\text{Difusió de quantitat de moviment}}{\text{Difusió de massa}}$
Strouhal	St	$\frac{l}{vt}$	$\frac{\text{Temps de residència}}{\text{Temps característic local}}$
Weber	We	$\frac{\sigma}{\rho v^2 l}$	$\frac{\text{Força de tensió superficial}}{\text{Força d'inèrcia}}$

Taula 2.1. Grups adimensionals emprats en mecànica de fluids.

2.2.4 Anàlisi per ordres de magnitud

Les equacions [2.58] s'escriuen en funció dels grups adimensionals definits en l'aparat anterior, per a μ , k i c_v constants, de la forma:

$$\begin{aligned}
 \text{St} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) &= 0 \\
 \rho^* \left(\text{St} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* \right) &= -\text{Eu} \nabla^* p^* - \frac{1}{\text{Fr}} \rho^* \nabla^* U^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \\
 \rho^* \left(\text{St} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* \right) &= -\frac{p_0}{\rho_0 c_v T_0} p^* \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* + \frac{1}{\text{Re Pr } c_v} \nabla^{*2} T^* + \frac{1}{\text{Re Eu}} \frac{p_0}{\rho_0 c_v T_0} \Phi_v^*
 \end{aligned}
 \tag{2.74}$$



Si la pressió característica es tria igual a ρv^2 , llavors el número d'Euler és la unitat. Si, a més, es tracta d'un gas perfecte, llavors l'equació de l'energia passarà a ser, segons [2.68]:

$$\rho^* \left(\text{St} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* \right) = -(\gamma - 1) p^* \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* + \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \nabla^{*2} T^* + \frac{(\gamma - 1)}{\text{Re}} \Phi_v^* \quad [2.75]$$

L'equació de transmissió de calor [2.63] s'escriu, en general, fent ús dels grups adimensionals, com:

$$\text{St} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{x}^*} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{l_{0s}^2}{l_{0n}^2} \nabla^{*2} T^* + \text{Da} q_a^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{v_0^2}{c_p \Delta T_0} \frac{l_{0s}^2}{l_{0n}^2} \Phi_v^* \quad [2.76]$$

o també:

$$\text{St} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{x}^*} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{l_{0s}^2}{l_{0n}^2} (\nabla^{*2} T^* + \text{Br} \Phi_v^*) + \text{Da} q_a^* \quad [2.77]$$

En vista d'aquests resultats i per a totes les formes anteriors de les equacions bàsiques, es poden extreure conclusions importants basades en l'ordre de magnitud dels números adimensionals St, Re i Pr.

Per començar, qualsevol procés resulta quasiestacionari si el número de Strouhal és petit, perquè llavors les variacions locals de totes les variables són menyspreables enfront de les convectives, que seran les que equilibrin cadascuna de les equacions per ser el terme dominant a l'esquerra de la igualtat.²² D'altra banda, com que la relació de calors específiques és pròxima a la unitat i el número Prandtl és d'ordre u en la major part dels gasos i dels líquids poc viscosos, resulta que si el número de Reynolds és molt gran, almenys superior a la unitat, les condicions del moviment seran tals que es podran menysprear els efectes de la viscositat i de la conducció de calor en la major part del camp fluid.

De totes maneres, tal com a mostra, per exemple, el cas descrit per l'equació [2.64], la condició de Re elevat no sempre elimina tot l'efecte de la viscositat. Això s'entén millor quan veiem el resultat de dividir aquesta equació pel seu terme convectiu:

$$\text{St} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\text{Eu} \nabla^* p^* - \frac{1}{\text{Fr}} \nabla^* U^* + \frac{\mu}{\rho v_0 D} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad [2.78]$$

L'últim terme d'aquesta equació suggereix que l'efecte de la viscositat és important en conductes en què el factor de forma L/D és gran, a pesar que el número de Reynolds definit en funció del diàmetre, Re_D , pugui ser més gran que la unitat, i tret que aparegui turbulència en el flux.

En general, els efectes viscosos són importants i no es poden ometre en resoldre les equacions característiques quan el número de Reynolds és petit, bastant més petit



que la unitat en moviments al voltant d'objectes, o inferior a un valor aproximat de 2.300 en moviments guiats per conductes per a qualsevol valor de la relació L/D . No obstant això, i fins i tot amb Re petits, els efectes viscosos també són menyspreables si el moviment és molt no estacionari i domina l'acceleració local. En efecte, en dividir el terme viscos de l'equació de quantitat de moviment de [2.57] pel seu terme no estacionari, en lloc de pel convectiu²³ apareix el factor $\mu t_0 / \rho l^2$, que si és molt petit es podrà menysprear respecte als altres. La inversa d'aquest factor és $ReSt$, de manera que la condició completa perquè no hi hagi forces viscoses apreciables en un flux extern és que almenys un dels números, Re o $ReSt$, sigui prou gran enfront de la unitat, i, si el flux és intern, llavors la condició donada per Re s'ha de substituir per ReD/L .

De manera anàloga, també es demostra que la contribució de la viscositat i la conducció de calor a les variacions de l'entropia seran menyspreables sempre que el número de Reynolds sigui prou gran. Per exemple, en el supòsit [2.61], l'increment d'entropia de la partícula fluida associat a la conducció de calor en un camp fluid on la temperatura mitjana sigui T_0 és:

$$O\left(\frac{\Delta s}{c_p}\right) \approx \frac{1}{Re Pr} \frac{l_{0s}^2 t_c \Delta T_0}{l_{0n}^2 t_r T_0} \quad [2.79]$$

mentre que la contribució deguda a la dissipació viscosa és:

$$O\left(\frac{\Delta s}{c_p}\right) \approx \frac{1}{Re} \frac{l_{0s}^2 t_c v_0^2}{l_{0n}^2 t_r c_p T_0} \quad [2.80]$$

en què tots els termes de la dreta són, com a màxim, la unitat.²⁴ A la vista d'aquests resultats, l'equació de l'entropia se simplifica per a Re elevats a:

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{q_a}{\rho T} \quad [2.81]$$

per a aquelles partícules del camp fluid que no es trobin en regions en què la relació quadràtica de les longituds característiques sigui de l'ordre del número de Reynolds. En aquestes regions, normalment capes de gruix prim annexes als cossos o darrere seu, segons la direcció del flux, l'increment d'entropia per conducció i dissipació viscosa pot ser important i proporcional a ΔT_0 i v^2 , respectivament. Fora d'aquestes regions, l'ordre de magnitud per als canvis d'entropia corresponents és:

$$O\left(\frac{\Delta s}{c_p}\right) \approx \frac{q_0 t_c}{c_p T_0} = Da \quad [2.82]$$

Evidentment, quan el segon membre és molt més petit que la unitat, es pot considerar que l'entropia de la partícula es manté constant i que el moviment és *isentropíc* en una primera aproximació.



En un moviment isentròpic, l'entropia pot no ser la mateixa en partícules diferents d'una mateixa línia de corrent, però si totes les partícules a l'instant inicial tenen la mateixa entropia, s_0 , i el moviment és isentròpic, llavors es verifica que $\nabla s = 0$ en qualsevol direcció i es diu que el moviment és *homentròpic*. Per definició, un moviment homentròpic és tal que totes les partícules del camp fluid tenen la mateixa entropia en un instant, encara que pugui canviar amb el temps, és a dir: $s = s_0(t)$; per tant, perquè un moviment sigui homentròpic, n'hi ha prou que sigui isentròpic i que a l'instant inicial l'entropia sigui la mateixa per a totes les partícules.

D'altra banda, un moviment isentròpic que a més sigui quasiestacionari, és a dir, amb $t_0 > t_r$, serà tal que:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \approx \mathbf{v} \cdot \nabla s \quad [2.83]$$

que indica que l'entropia és constant en tota la línia de corrent. En aquestes condicions, segons [2.40], també es conserva la summa $h + v^2/2 + U$ al llarg de la línia, i si, a més, el número de Froude és gran, és a dir, el treball de les forces màssiques és menyspreable, aleshores també ho farà la quantitat $h + v^2/2$. Aquesta última suma s'anomena *entalpia de rabeig*, h_0 , i, per extensió, qualsevol magnitud de rabeig es defineix com la magnitud termodinàmica que s'obté desaccelerant de manera estacionària la partícula de fluid fins a la velocitat nul·la, sense addició de calor i sense efecte apreciable de les forces màssiques ni de les viscoses.

Les magnituds fluides de rabeig poden variar d'una línia de corrent a una altra en les condicions descrites, però no al llarg de la línia.²⁵ Quan no es verifiquen totes les condicions, poden conservar-se algunes magnituds, però no d'altres. Així, per exemple, si les forces màssiques no són menyspreables, l'entalpia de rabeig no es manté constant, i si el procés no és estacionari però transcorre a grans Re i sense addició de calor, llavors només ho farà l'entropia de la partícula.

En definitiva, n'hi ha prou que el número de Reynolds sigui molt elevat i que no hi hagi aportació externa de calor per poder admetre que el fluid a l'exterior de les capes límits, els deixants o les ones de xoc sigui ideal, és a dir, no viscos, i serà aplicable l'equació d'Euler [2.33]. Aquesta condició també implica que cada partícula conserva la seva entropia i que si, a més, el moviment és quasiestacionari i l'efecte de les forces màssiques es pot menysprear, totes les partícules d'una mateixa línia de corrent comparteixen l'entalpia de rabeig. La conservació de les propietats de rabeig permet calcular totes les propietats del camp fluid i el mòdul de la velocitat, una vegada coneguda qualsevol altra propietat termodinàmica i les equacions d'estat. En qualsevol cas, les magnituds de rabeig així definides es poden aplicar a qualsevol tipus de moviment encara que no sigui estacionari, ni ideal, etc., però llavors el seu ús serà més limitat.



2.2.5 Lleis de semblança i teoria de models

El comportament físic d'un sistema es pot investigar íntegrament o en alguna de les seves parts mitjançant tècniques experimentals. Els assajos experimentals es poden fer sobre models a escala que permetin donar resposta a problemes específics del sistema real mitjançant la programació d'una sèrie d'experiències. L'escala del model es pot ampliar o reduir en comparació amb la magnitud real del sistema original o prototip, com també es pot extrapolar l'escala temporal per reduir el temps d'observació d'un fenomen particular.

En el sentit més ampli del terme, la semblança tracta de les relacions úniques existents entre el model i el prototip objecte de recerca. Això no implica necessàriament la identitat d'aparença entre tots dos, però sí que és convenient que les característiques geomètriques i físiques essencials del prototip quedin reflectides unívocament en el model. Una altra condició necessària per a l'aplicació de les teories de models en l'experimentació és que hi hagi algun grau de semblança física, és a dir, que tant el model com el prototip comparteixin les mateixes lleis fonamentals.²⁶

En l'experimentació amb models, es tracta de reproduir aquelles característiques del prototip que defineixen la resposta del sistema, tenint en compte que els resultats sobre el model no tenen per què revelar les lleis físiques subjacents, sinó només relacionar empíricament la relació entre les diferents magnituds analitzades. La tècnica experimental utilitzada, per tant, és crucial a l'hora de jutjar els resultats, i depèn sobretot de l'habilitat, de la capacitat de percepció i del bon judici de qui la concep. Cal tenir present també que l'experimentació amb un model pot conduir a una interpretació errònia del fenomen que es vol estudiar com a conseqüència de l'efecte de l'escala.²⁷ Si es coneguessin aquests efectes per endavant, es podria seleccionar l'escala més adequada per evitar errors i fins i tot falsejar, d'alguna manera, la semblança geomètrica a fi de compensar aquest efecte. No obstant això, i com que generalment no és així, sovint cal repetir els assajos a escales diferents per quantificar-los i separar-ne la influència.

La semblança entre el model i el prototip continua sent útil encara que no sigui completa. Aquesta falta parcial de semblança física s'anomena *distorsió* i causa (o és conseqüència del fet) que algun dels grups π_i de l'equació [2.51] no mantinguin el mateix valor en model i prototip. Les causes per les quals, de vegades, cal fer servir models distorsionats del prototip són diverses, però sovint són conseqüència d'un conflicte de compatibilitat en la tria dels factors d'escala o de la impossibilitat tecnològica de satisfer alguna de les relacions de semblança.

La utilització correcta d'aquests models requereix una compressió encara més profunda del cas que quan la semblança és completa. És evident que no cal servir-se només de la intuïció a l'hora de planificar un experiment, sinó que és útil i molt recomanable elaborar una llista completa de les variables, tant dimensionals com



funcionals, que se suposen més rellevants del problema. Amb el valor d'aquestes variables sobre el prototip, es pot analitzar l'ordre de magnitud dels diferents grups adimensionals implicats i així quantificar-ne la importància relativa.

En el cas més general d'un procés permanent sense aportació de calor de l'exterior, n'hi ha prou de valorar els números de Reynolds, Froude, Mach i Weber per tenir una idea inicial de la mena de semblança parcial que cal utilitzar. Per exemple, quan el camp de velocitats és subsònic, no hi ha superfícies lliures i les forces màssiques són menyspreables; la més important de les relacions funcionals entre el model i el prototip ve donada per la semblança de Reynolds i, llavors, $Re_m = Re_p$. Aquesta igualtat definirà, per si sola, la relació entre les velocitats, les acceleracions, les forces, etc., entre el model i el prototip, i l'escala seleccionada per als assajos.

Si l_p i l_m són les longituds característiques del prototip i el model, respectivament, es defineix el factor d'escala de la manera següent:

$$\lambda = \frac{l_p}{l_m} \quad [2.84]$$

Perquè la semblança sigui geomètrica, cal que les longituds, les àrees i els volums del model i del prototip guardin relació amb λ de la forma: $\lambda, \lambda^2, \lambda^3$. En un sistema [MLT], cal definir de la mateixa manera els factors d'escala temporal i màssica, que permetin comparar el ritme en què els processos tenen lloc en el model i en el prototip i també la resta de variables, entre les quals, s'hi troben les forces i les energies implicades.

Aquests factors d'escala temporal i màssica estan relacionats amb l'escala longitudinal, una vegada seleccionat el fluid que es farà servir als assajos. Per exemple, per a la semblança de Reynolds, es compleix:

$$Re_p = \frac{\rho_p l_p v_p}{\mu_p} \equiv \frac{\rho_m l_m v_m}{\mu_m} = Re_m \quad [2.85]$$

que porta a:

$$\lambda = \frac{\rho_m \mu_p v_m}{\rho_p \mu_m v_p} \quad [2.86]$$

Si t_p i t_m són els temps característics del prototip i del model el quocient del qual defineix el factor temporal λ_t , llavors la relació entre les velocitats és:

$$\frac{v_p}{v_m} = \frac{l_p t_m}{l_m t_p} = \frac{\lambda}{\lambda_t} \quad [2.87]$$

i, aplicant [2.86], resulta, com seria d'esperar:



$$\lambda_t = \frac{\lambda^2}{\nu^*} \tag{2.88}$$

en què s'ha definit com ν^* la relació de viscositats cinemàtiques de tots dos fluids. La tria del fluid amb què es poden fer els assajos, tot i que està subjecta a altres condicionants quan no és el mateix que en el prototip, no pot ser arbitrària, atès que la tria d'un λ_t determinat imposa la relació ν^* per a una escala λ preestablerta. De la mateixa manera, condicionada la relació de densitats, ρ^* , el factor d'escala màssic ve imposat per la relació:

$$\rho^* = \frac{\lambda_m}{\lambda^3} \tag{2.89}$$

Curiosament, en la semblança de Reynolds, la relació entre les forces implicades entre el model i el prototip no està relacionada amb l'escala. En efecte, com que l'expressió dimensional de la força és $[MLT^{-2}]$, resulta:

$$F^* = \frac{\lambda_m \lambda}{\lambda_t^2} = \frac{(\rho^* \lambda^3) \lambda}{(\lambda^2 / \nu^*)^2} = \rho^* (\nu^*)^2 \tag{2.90}$$

Tipus de semblança / Factors d'escala					
Magnitud	Unitats	Fr	Re	We	M
Longitud	L	λ	λ	λ	λ
Temps	T	$(g^*)^{-1/2} \lambda^{1/2}$	$(\nu^*)^{-1} \lambda^2$	$(\sigma^*/\rho^*)^{-1/2} \lambda^{3/2}$	$(c^*)^{-1} \lambda$
Massa	M	$\rho^* \lambda^3$	$\rho^* \lambda^3$	$\rho^* \lambda^3$	$\rho^* \lambda^3$
Velocitat	LT^{-1}	$(g^*)^{1/2} \lambda^{1/2}$	$\nu^* \lambda^{-1}$	$(\sigma^*/\rho^*)^{1/2} \lambda^{-1/2}$	c^*
Acceleració	LT^{-2}	g^*	$(\nu^*)^2 \lambda^{-3}$	$(\sigma^*/\rho^*) \lambda^{-2}$	$(c^*)^2 \lambda^{-1}$
Cabdal	$L^3 T^{-1}$	$(g^*)^{1/2} \lambda^{5/2}$	$\nu^* \lambda^2$	$(\sigma^*/\rho^*)^{1/2} \lambda^{3/2}$	$c^* \lambda^3$
Força	MLT^{-2}	$\rho^* g^* \lambda^3$	$\rho^* (\nu^*)^2$	$\sigma^* \lambda$	$\rho^* (c^*)^2 \lambda^2$
Pressió	$ML^{-1} T^{-2}$	$\rho^* g^* \lambda$	$\rho^* (\nu^*)^2 \lambda^{-2}$	$\sigma^* \lambda^{-1}$	$\rho^* (c^*)^2$
Energia	$ML^2 T^{-2}$	$\rho^* g^* \lambda^4$	$\rho^* (\nu^*)^2 \lambda$	$\sigma^* \lambda^2$	$\rho^* (c^*)^2 \lambda^3$

Taula 2.2. Relacions de semblança parcial i factors d'escala corresponents. Cal observar que és bastant difícil que se'n donin diverses alhora, tret que l sigui la unitat i s'utilitzi el mateix fluid als assajos, és a dir, s'assagi directament el prototip en condicions d'autosemblança. Les variables amb asterisc indiquen la relació p/m entre una determinada propietat en el fluid real i en el s'ha fet servir en el model. La semblança de Froude es pot estendre als diferents tipus de forces màssiques.

Operant de manera anàloga amb la resta de magnituds per als diferents tipus de semblança parcial, s'obté la taula 2.2. El lector podrà simplificar fàcilment aquesta taula quan utilitzi el mateix fluid ($\sigma^* = \rho^* = \nu^* = 1$) i les experiències es realitzin en el camp



gravitatori en absència d'altres forces massíques ($g^* = 1$), i llavors observarà que les relacions només depenen del factor λ o són la unitat.

2.3 Equacions d'Euler i Bernoulli

S'ha vist que en les equacions de Navier-Stokes desapareixen els termes de conducció de calor i viscosos quan el número de Reynolds és prou elevat. Resulta, llavors, el grup d'equacions anomenat d'Euler que, quan el camp de forces massíques és conservatiu i estàtic, està format per l'equació de continuïtat:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad [2.91]$$

l'equació de la quantitat de moviment:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla U = 0 \quad [2.92]$$

i qualsevol de les següents en què no apareguin els termes viscosos: energia mecànica, energia interna o entalpia, o entropia. Per exemple, l'equació de l'entropia seria, en aquest cas, [2.81], i la de l'energia interna:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + q_a \quad [2.93]$$

A aquestes tres equacions s'hi han d'afegir les d'estat: $\rho = \rho(p, T)$ i $s = s(p, T)$. Aquest grup d'equacions forma un conjunt de cinc equacions amb cinc incògnites, de les quals l'equació [2.92] es pot substituir per la [2.31] en el camp gravitatori amb fluids incompressibles.

No obstant això, se sap que aquestes equacions no són capaces de definir el moviment real d'un fluid a la regió pròxima al contorn sòlid²⁸ i, per tant, no poden explicar molts fenòmens importants, com la fricció o la transferència de calor. Per això, cal buscar solucions discontinües que verifiquin les relacions de compatibilitat en les superfícies de separació de la regió pròxima al contorn (anomenada *capa límit*) i l'exterior, a través de les quals les magnituds fluides i les seves derivades experimenten salts finits no arbitraris subjectes als principis de conservació de la massa, de la quantitat de moviment i de l'energia. El gruix d'aquestes regions decreix quan augmenta el número de Reynolds i, com que la pressió amb prou feines experimenta canvis en la direcció normal al contorn, es pot interpretar, en una primera aproximació, que el gruix és nul en analitzar el corrent exterior, on el fluid es pot considerar ideal.



2.3.1 Equacions d'Euler en coordenades intrínseques

Quan s'escriu l'equació [2.33] per components en un triedre de referència de Frenet $\{snb\}$ com el de la figura 2.4, que segueixi el moviment d'una línia de corrent tal que $\mathbf{v} = v\mathbf{s}$, s'obté:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} + \rho \frac{\partial U}{\partial s} &= 0 \\ \rho \frac{v^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial n} + \rho \frac{\partial U}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial b} + \rho \frac{\partial U}{\partial b} &= 0 \end{aligned} \quad [2.94]$$

Aquestes equacions per a un fluid incompressible en el camp gravitatori terrestre i en moviment estacionari són:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) &= 0 \\ \frac{v^2}{r} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) &= 0 \end{aligned} \quad [2.95]$$

L'última equació indica que la suma entre parèntesi és constant en la direcció perpendicular al pla del moviment o pla osculador. L'equació en $\{s\}$ integrada al llarg d'una línia de corrent és l'equació de Bernoulli, que indica que:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C \quad [2.96]$$

És a dir, quan el moviment d'un fluid incompressible en el camp gravitatori és permanent i els efectes viscosos són menyspreables, es pot afirmar que la suma de les energies cinètica, de pressió i potencial del fluid es manté constant al llarg d'una línia de corrent.²⁹ La constant pot variar entre línies de corrent i es determina seguint la línia de corrent aigües amunt o avall, fins a arribar a una regió on les condicions del contorn o de la instal·lació imposin el seu valor. Si, donat el cas, el moviment parteix d'una regió on l'estat és uniforme i es compleixen les condicions de la fluidoestàtica, o bé és irrotacional, la constant d'integració de [2.96] és la mateixa per a tot el camp fluid (v. [2.35]).

La segona equació de [2.95] mostra que la suma $p + \rho gz$, anomenada *pressió reduïda*, és constant en la direcció normal a la línia de corrent quan és recta ($r = \infty$). Si les línies de corrent són corbes i es coneix la distribució de la velocitat en direcció normal, amb $-\mathbf{r} = \mathbf{n}$, aquesta equació pot ser integrada per conèixer la distribució de la pressió, i deduir-se que la pressió reduïda augmenta amb el radi, en ser $v^2/r > 0$.

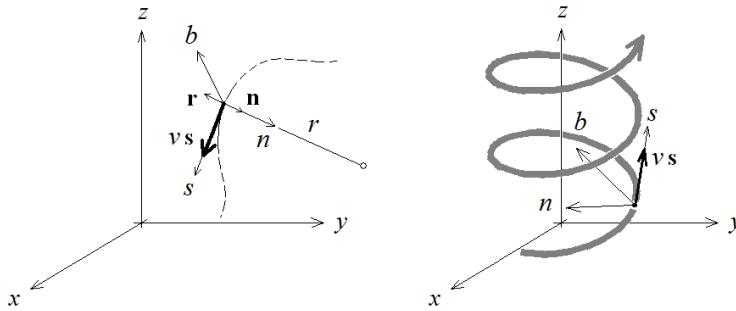


Figure 2.4. Descripció del moviment al llarg d'una línia de corrent en coordenades naturals $\{snb\}$. La velocitat de la partícula és $\mathbf{v} = v\mathbf{s}$ i la seva acceleració (de components tangencial i normal) es troba continguda en el pla osculador $\{sn\}$. El radi de curvatura és r i compleix que $\mathbf{r} = -\mathbf{n}$ i $\mathbf{b} = \mathbf{s} \wedge \mathbf{n}$.

Així mateix, cal preguntar-se per l'evolució de les altres magnituds en canviar de línia de corrent. Segons [2.83], l'entropia és constant al llarg de la línia de corrent si el moviment és isentròpic i permanent, i si, a més, les forces màssiques es poden menysprear, llavors també ho és l'entalpia de rabeig. En direcció normal $\{n\}$ a la línia de corrent, es compleix, utilitzant [2.94] i l'equació de Gibbs de l'entalpia, que:

$$T \frac{\partial s}{\partial n} = \left(\frac{\partial h_0}{\partial n} - v \frac{\partial v}{\partial n} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial h_0}{\partial n} - \left(v \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{v^2}{r} \right) \quad [2.97]$$

Com que el rotacional de la velocitat en coordenades naturals per a moviments no anòmals i sense vorticitat en la direcció de la línia de corrent és $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_b \mathbf{b}$, sent Ω_b :

$$\Omega_b = \frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad [2.98]$$

es verifica:

$$-v\Omega_b = T \frac{\partial s}{\partial r} - \frac{\partial h_0}{\partial r} \quad [2.99]$$

que mostra com varia l'entropia en direcció radial a la línia de corrent i quina relació manté amb la vorticitat del moviment i els canvis de l'entalpia de rabeig. Es conclou que un moviment homentròpic permanent ha de ser irrotacional si l'entalpia de rabeig és uniforme i que, si és rotacional i permanent, han d'existir gradients d'entropia i d'entalpia de rabeig en el camp fluid. Aquest és l'enunciat bàsic del teorema de Crocco.³⁰

L'equació [2.96] també té una interpretació topològica que mereix algunes línies en aquest text. La família de superfícies en què es manté la constant C de l'equació de Bernoulli (tot i que diferent en cadascuna) consisteix en línies de corrent i de remolí per a les quals es verifica la condició:



$$\frac{\partial C}{\partial q} = v\Omega \sin \beta \quad [2.100]$$

en què $\partial C/\partial q$ denota el canvi de C respecte de la direcció normal a la superfície, en general definida per un versor \mathbf{q} , i β és l'angle format entre els vectors velocitat i vorticitat.³¹ És evident que la constant és la mateixa en tot el camp fluid si les línies de corrent i remolí són paral·leles (flux de Beltrami) o si el moviment és irrotacional. Utilitzant ara la definició intrínseca de la vorticitat [1.30] i resolent el producte vectorial [2.100], s'arriba a l'expressió:

$$\frac{\partial C}{\partial q} = v \left[\left(\frac{\partial v}{\partial b} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial n} \right)^2 \right]^{1/2} = v(\Omega_n^2 + \Omega_b^2)^{1/2} \quad [2.101]$$

Com que, per definició, \mathbf{q} és constant entre dues superfícies de flux paral·leles (no necessàriament planes), es dedueix que la condició necessària i suficient perquè les superfícies de corrent siguin paral·leles és que $\partial C/\partial q$ també sigui constant al llarg de cada superfície de la família. En moviments no anòmals, és a dir, quan $\Omega_n = 0$, el vector \mathbf{n} és normal a la superfície; llavors, $\mathbf{n} = \mathbf{q} = -\mathbf{r}$ (v. figura 1.5), i:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = -v\Omega_b \quad [2.102]$$

en direcció radial, que serà constant i les superfícies de flux, paral·leles, si es compleixen les condicions de [2.99] i no hi ha difusió de vorticitat.

2.3.2 Energia mecànica i potència d'un flux

La primera de les equacions [2.95] permet definir l'energia mecànica per unitat de massa d'un fluid incompressible com:

$$e_m = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \quad [2.103]$$

El flux a l'interior d'un tub de corrent de secció ortogonal, S , està format per infinitat de línies de corrent en què el fluid té, o pot tenir, una energia mecànica diferent en direcció transversal. S'ha vist que l'energia mecànica és constant en S , si el moviment és irrotacional, però, si el flux és rotacional o no uniforme, llavors la constant de [2.96] canvia entre línies de corrent.

Es defineix com a potència del corrent la integral:

$$\dot{W}_C = \int_S \rho e_m \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS \quad [2.104]$$



la integració de la qual en el cas més general és complicada, fins i tot coneixent la distribució de la pressió i de la velocitat en S . Per això, és preferible definir l'energia específica mitjana en funció de la velocitat i de la pressió mitjanes en S , i introduir sengles coeficients correctors, α i α_p , de l'energia cinètica i de la pressió reduïda, respectivament, en la forma:

$$\bar{e}_m = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2} + \alpha_p \left(\frac{\bar{p}}{\rho} + g\bar{z} \right) = \frac{\dot{W}_C}{\rho Q} \quad [2.105]$$

Aquests coeficients correctors suposen una formulació aproximada del problema, perquè són desconeguts a priori, però tenen l'avantatge que poden ser tabulats per a diferents distribucions pressuposades de velocitat i pressió. En els casos en què el moviment presenta una direcció predominant per ser quasiunidireccional (com s'explica a l'apartat 2.5.1), α_p és molt pròxim a la unitat, de manera que és freqüent substituir el moviment general per l'uniforme equivalent, descrit en termes de la velocitat mitjana en S , i suposar, en el cas ideal, que:³²

$$\bar{e}_m = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C \quad [2.106]$$

El valor de α sempre és més gran que la unitat i augmenta quan ho fa la no uniformitat de la velocitat en moviment unidireccional: és de 1,06 en règim turbulent i de 2 per al flux laminar.³³ En conseqüència, sempre que el número de Reynolds sigui elevat i el terme cinètic no sigui molt gran en comparació amb els altres o les seves variacions, l'equació de Bernoulli es podrà estendre a tot el tub de corrent i suposar que $\alpha = 1$. Això és el que es fa habitualment en molts casos pràctics perquè, fins i tot en el pitjor dels casos, n'implica una solució bastant aproximada.

2.3.3 Equació de Bernoulli generalitzada

El plantejament de l'equació de Bernoulli en termes d'energia específica mitjana permet la seva generalització al cas més general de flux unidimensional en què no es pugui considerar que el fluid sigui ideal i, per tant, que e_m sigui constant al llarg del tub de corrent en la seva línia mitjana. Aquest és el cas en què es planteja un balanç energètic en un conducte de secció variable en què hi ha bombes, que incrementen l'energia específica quan comuniquen potència al fluid (o turbines que la disminueixen), i accessoris (colzes, vàlvules, filtres i altres resistències), que dissipen potència i disminueixen l'energia específica del corrent.

L'equació integral de l'energia [2.27], quan s'aplica al fluid incompressible que flueix entre les seccions (1) i (2) de la figura 2.5, condueix al resultat següent:³⁴

$$\frac{e_{m,2} - e_{m,1}}{g} = \left[\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} \right]_1^2 = H_B - \sum_i h_{f,i} \quad [2.107]$$



en què H_B és l'energia per unitat de pes aportada per la bomba (o bombes) i $h_{f,i}$ són les pèrdues d'energia del component o conducte i . Més endavant s'explicarà com es quantifiquen aquestes pèrdues; de moment, n'hi ha prou d'observar que, en un conducte de secció constant i en règim permanent, l'energia decau de manera lineal amb la distància, mentre que la pèrdua que suposa un accessori és local i gairebé una singularitat. Cal observar també que, si (1) i (2) fossin els punts d'entrada i sortida d'una bomba, l'equació [2.107] revela que la constant C de [2.106] canviaria a través de la bomba a conseqüència del treball que aporta, sent $H_B = (C_2 - C_1)/g$.

S'anomena *línia de càrrega* o *d'altura total* la línia energètica definida per l'evolució de $e_m g$ (en metres columna de fluid), que és, en tot punt, la suma dels tres termes energètics de [2.106]. La línia resultant de sumar en les mateixes unitats les energies de cota i pressió és la *línia de cotes piezomètriques*. Aquesta línia és paral·lela a l'anterior si la secció del conducte és constant, perquè llavors també ho és la velocitat en règim permanent i el terme cinètic.

A l'hora de representar les línies energètiques d'una instal·lació, és interessant tenir present: que la línia d'energia cinètica resulta del cabal i de la secció en cada punt i , en conseqüència, en una instal·lació donada no canvia si no ho fa el cabal; que la línia de cota, z , és definida per la situació de la instal·lació respecte a un pla de referència comú, que pot ser el nivell del mar, i en aquest cas és geodèsica, i que la línia de pressió estàtica s'obté de la diferència entre la línia de càrrega i les energies de cota i velocitat en cada punt. Es pot afirmar, per tant, que, per a una instal·lació donada per on circuli un cabal constant, l'energia en forma de pressió és la variable lliure que manifesta els canvis experimentats per e_m com a conseqüència de les pèrdues i les aportacions d'energia entre dos punts.

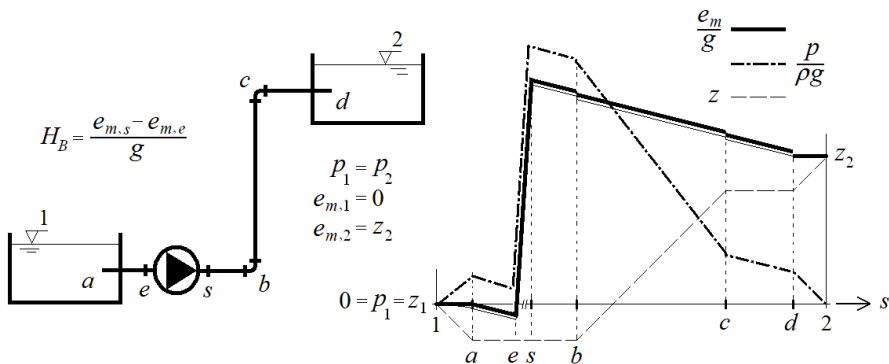


Figura 2.5. Aplicació de l'equació generalitzada de Beornoulli i línies d'energia de la línia mitjana. L'evolució de les línies energètiques entre les seccions d'entrada i sortida de la bomba és només orientativa. La línia contínua que transcorre paral·lela i per sota de la línia d'energia total és la línia piezomètrica, i la distància entre elles és el terme cinètic $0,5 \cdot v^2/g$.



2.3.4 Difusió d'energia cinètica

Un difusor és un eixamplament gradual per augment de l'àrea recta d'un conducte que té per missió recuperar l'energia de pressió d'un flux a força de reduir la seva energia cinètica. En un difusor horitzontal sense pèrdues, l'equació de Bernoulli ens senya que la suma:

$$p_0 = p + \rho \frac{v^2}{2} \quad [2.108]$$

anomenada *pressió de recés, parada o estancament*, p_0 , es manté constant. Això vol dir que els canvis de pressió (reduïda) i de velocitat estan relacionats energèticament entre si, cosa que dona lloc a multitud de fenòmens en mecànica de fluids (efectes de Venturi, de Magnus; fenòmens d'adherència a una paret, etc.), que poden ser aprofitats tècnicament o evitar, segons convingui. Per exemple, i tal com s'explicarà més endavant, la difusió de l'energia cinètica és clau en les bombes, i l'estrangulació del flux a les vàlvules pot causar l'aparició de cavitació en el seu interior i portar-les a una situació de bloqueig.

El paràmetre bàsic d'un difusor és el coeficient de recuperació, definit com:

$$c_R = \frac{p_2 - p_1}{p_{01} - p_1} = \frac{2}{\rho} \frac{p_2 - p_1}{v_1^2} \quad [2.109]$$

sent (1) i (2) els punts d'entrada i de sortida del difusor, on les àrees són A_1 i A_2 , respectivament. En el cas de flux ideal quasiunidireccional i sense fricció, es verifica:

$$c_{R,t} = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 = 1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad [2.110]$$

Evidentment, en un difusor ha de ser $A_2 > A_1$, de manera que, quan la relació entre parèntesis tendeix a zero, llavors $c_{R,t}$ es fa la unitat i tota l'energia cinètica a l'entrada és recuperable (és a dir, la velocitat a la sortida resulta nul·la). En realitat, el valor efectiu del coeficient de recuperació d'un difusor, c_R , és inferior al donat per [2.110], a causa de les pèrdues d'energia que es produeixen.

El rendiment d'un difusor es defineix com la relació entre l'energia estàtica recuperada i la que es podria haver recuperat en condicions ideals (sense pèrdues d'energia mecànica), que coincideix amb el decrement d'energia cinètica experimentat, $-\Delta v^2/2$, és a dir:³⁵

$$\eta_{dif} = \frac{2}{\rho} \frac{p_2 - p_1}{v_1^2 - v_2^2} = 1 - 2 \frac{e_{m,1} - e_{m,2}}{v_1^2 - v_2^2} \quad [2.111]$$

El decrement d'energia cinètica mitjana està relacionat amb la relació d'àrees del difusor i el cabal volumètric Q , perquè es compleix per continuïtat que $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$ en un fluid incompressible. Les pèrdues d'energia mecànica són proporcionals a



l'energia cinètica d'entrada, i es poden estimar utilitzant un coeficient de pèrdues i considerant que el difusor és una singularitat, tal com es fa en l'equació [5.12].

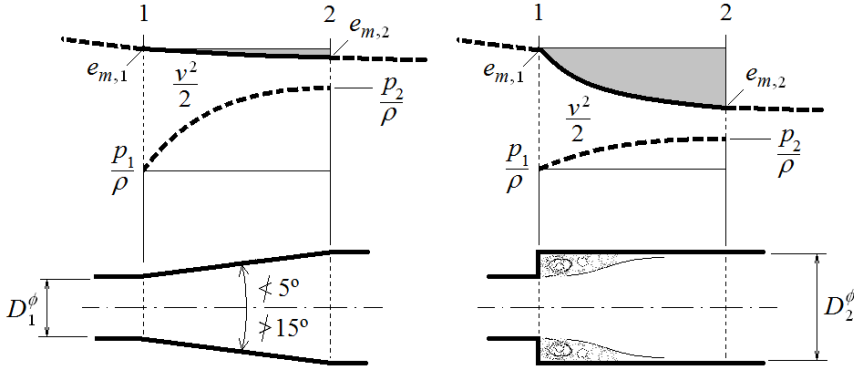


Figura 2.6. Principi de difusió d'energia cinètica. A l'esquerra, un difusor cònic "eficient" i, a la dreta, un que no ho és (en gris, la magnitud de les pèrdues d'energia mecànica, em). L'angle de difusió ha d'estar en l'interval $5^\circ < 2\alpha < 15^\circ$. Per sota de 5° , les pèrdues contínues per fricció augmenten i, per sobre de 15° , té lloc la separació del flux i una escassa recuperació de pressió. Per a un difusor cònic de longitud L , les relacions òptimes es troben per a cR 0,75 i $L/D1$ 20 (figura 5.3).

2.4 Aplicacions de les equacions d'Euler i Bernoulli

Les equacions d'Euler i Bernoulli tenen innumbrables aplicacions pràctiques, sobretot en el moviment permanent de líquids o fluids incompressibles en general, el càlcul de cabals o la descripció d'alguns fenòmens no estacionaris, com l'establiment del corrent en un conducte o les oscil·lacions de massa.

Les aplicacions de l'equació generalitzada de Bernoulli són també molt nombroses per la seva simplicitat i ús intuïtiu. Algunes d'aquestes aplicacions s'estudiaran en els temes següents.

2.4.1 Tubs piezomètrics, de Pitot i sonda de Prandtl

Els tubs piezomètrics, de Pitot i de Prandtl són instruments que permeten visualitzar els termes energètics d'un corrent.

La forma més senzilla d'un tub piezomètric consisteix simplement en un tub vertical o inclinat, connectat a la paret del conducte i obert a l'altre extrem (o connectat a una font de pressió externa constant i coneguda). El tub de Pitot i la sonda de Prandtl són cànules de petit diàmetre que se submergeixen en el flux, orientades segons la direcció dominant, i connectades per l'altre extrem a un dispositiu de mesurament de pressió estàtica. És habitual que aquest dispositiu sigui un tub en forma d'U (o manòmetre diferencial) com el que es mostra a la figura 2.7, en què s'allotja un fluid auxiliar o manomètric no miscible ni reactiu amb el fluid circulant i de densitat específica més gran.



Els manòmetres diferencials també es poden servir amb els tubs piezomètrics per mesurar la pressió estàtica (i són indispensables quan es tracta amb un gas).

Per les seves característiques constructives, es dedueix: que els tubs piezomètrics mesuren la pressió estàtica actuant en el punt on se situen; que els tubs de Pitot mesuren la pressió d'estancament del corrent i, quan es coneix la pressió estàtica, també es poden fer servir per mesurar la velocitat del flux per diferència, i que les sondes de Prandtl són una combinació d'un tub piezomètric i un tub de Pitot. Els tubs de Pitot i les sondes de Prandtl necessiten coeficients correctors perquè la seva presència pertorba el corrent. En canvi, si bé la mesura d'un tub piezomètric no és intrusiva (excepte quan es presenten fuites a través del connector), per obtenir el valor mig correcte de la pressió estàtica és convenient disposar tres, quatre i fins a vuit orificis al llarg del perímetre de la secció de mesura, sobretot quan se sospita que el flux no és unidireccional.

Si s'aplica l'equació de Bernoulli entre un punt aigües amunt de la línia de corrent que passa pel centre de la secció oberta del tub de Pitot i el punt d'estancament ($v_2 = 0$) que hi té lloc, s'obté:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_{02}}{\rho} + gz_2 \quad [2.112]$$

És a dir, en termes de pressió reduïda, o si el tub és horitzontal, es compleix:

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_{02} \quad [2.113]$$

d'on es pot aïllar v_1 .

El valor de la velocitat obtingut per aquesta expressió és el teòric, ja que és inevitable que a l'entrada del tub es presentin pèrdues d'energia i que hi hagi pertorbacions del camp de velocitats. Aquests efectes es tenen en compte introduint un *coeficient de velocitat*, C_v , que depèn de la forma del tub i del número de Reynolds del corrent, i pren valors pròxims a 0,98 a la pràctica (quan, a més, la sonda està perfectament orientada). La velocitat real del flux resulta ser, llavors:

$$v_1 = C_v \left(\frac{2}{\rho} (p_{02} - p_1) \right)^{1/2} \quad [2.114]$$

El mateix procediment, aplicat a una sonda de Prandtl, condueix també a aquesta expressió per a v_1 , però sense la incertesa associada al valor local de p_1 (que un tub de Pitot no pot dissociar del terme cinètic). Aquests dispositius es troben normalitzats de manera que la pertorbació sigui mínima i es pugui suposar que $v_1 \approx v_3$, i que $p_1 \approx p_3$, excepte per la petita pèrdua de pressió existent en la beina del tub entre les seccions (2) i (3). Evidentment, la disposició de diverses preses piezomètriques perimetrals i el petit diàmetre d'una sonda de Prandtl garanteixen que $z_1 \approx z_3$.



Quan es connecten un tub piezomètric, un de Pitot i una sonda de Prandtl a un tub en U, com es mostra a la figura 2.7, la relació teòrica entre les variables mesurades i les lectures h_1 , h_2 i h_3 dels manòmetres diferencials corresponents, per a un líquid manomètric de densitat ρ_m , i una profunditat de manòmetre h_0 , són:³⁶

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (\rho_m - \rho)gh_1 - \rho gh_0 = \rho gh \\
 p_{02} &= (\rho_m - \rho)gh_2 - \rho gh_0 & [2.115] \\
 \rho \frac{v_1^2}{2} &= (\rho_m - \rho)gh_3
 \end{aligned}$$

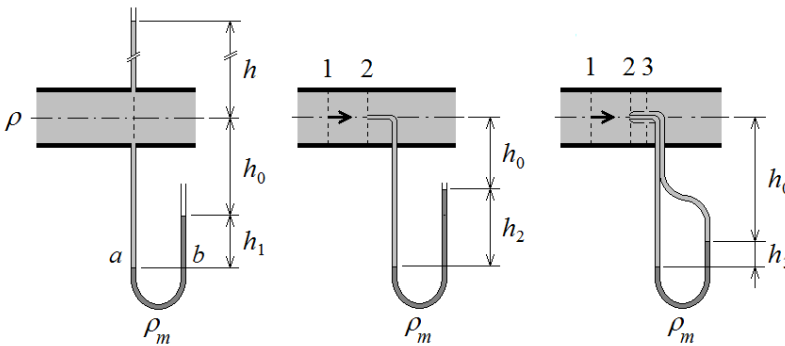


Figure 2.7. Lectures de pressió estàtica (relativa), estancament i dinàmica en un tub piezomètric (esquerra), un tub de Pitot (centre) i una sonda de Prandtl (dreta). Les dimensions dels tubs de Pitot i de Prandtl estan normalitzades. El radi del tub del manòmetre diferencial ha de ser més gran que la longitud capil·lar donada per [1.103] de tots dos fluids. Els punts a i b es troben a idèntica pressió estàtica.

2.4.2 Mesura diferencial del cabdal

La mesura del cabdal que passa per una instal·lació a pressió es pot abordar, a la pràctica, amb un gran nombre de cabalímetres, el principi de funcionament dels quals està pensat per a la mena de fluid, la precisió i el rang de mesurament desitjats (entre d'altres). El cabdal en volum es pot mesurar, per exemple, amb cabalímetres de pressió diferencial, d'àrea variable, de velocitat per ultrasons, electromagnètics, de desplaçament i de vòrtex, i el cabdal màssic, amb cabalímetres tèrmics, de Coriolis, etc. La taula 2.3 descriu les característiques i els principis de funcionament d'alguns dels tipus més comuns de cabalímetres.

En aquest apartat, s'explica com l'aplicació combinada de l'equació de Bernoulli i del principi de continuïtat a un flux escanyat permet determinar el cabdal circulant. Per a això, es pren com a exemple el tub de Venturi de la figura 2.8, tot i que el principi de funcionament és el mateix per a qualsevol dels dispositius que es mostren.

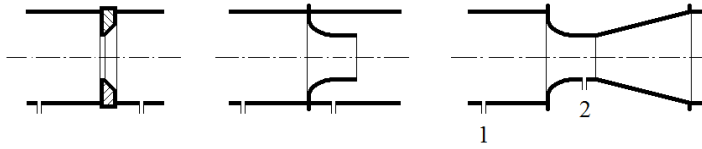


Figure 2.8. Representació esquemàtica d'un diafragma (esquerra), una tovera (centre) i un tub de Venturi (dreta). Tots aquests dispositius tenen la particularitat de produir una diferència de pressió, entre els punts on estan situades les preses piezomètriques, que és funció del cabal. El sentit del flux és d'esquerra a dreta.

	Intrusiu	No intrusiu	Volumètric	Màssic	Principio de funcionament	Fluid (*)	pmà x [bar]	Rang de diàmetres [mm]	Precisió [±%]
Rotàmetre					Flotació d'un con en un flux vertical ascendent confinat en un contorn d'àrea variable.	L/G nets	70	15-1.000	4
Vòrtex					Detecció de la freqüència de pas d'un remolí generat per un contorn estàtic.	L/G no abrasius o corrosius	300	25-300	1
DP					Similar a un motor de desplaçament positiu, però oval o cicloidal.	L/G nets	100	15-1.000	0,4
Coriolis					Deformació angular periòdica d'un tub en "U" o "Ω" sotmès a un moviment vibratori.	L/G, no V	400	2-150	1
Electro-magnètic					Tensió induïda en un fluid conductor en moviment dins d'un camp magnètic.	L una mica conductors	250	2-2.000	1
Doppler					Efecte Doppler observat en una partícula d'un flux en moviment.	L/G, sobretot aire	150	15-3.000	1

Taula 2.3. Tipus comuns de cabalímetres. (*): L, líquid; G, gas; V, vapor.

El disseny del tub de Venturi garanteix que el flux en les seccions de mesura sigui gairebé unidireccional, i les pèrdues, mínimes.³⁷ Aplicant l'equació de Bernoulli entre les seccions (1) i (2) del tub de Venturi de la figura 2.8, resulta:

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) \quad [2.116]$$

Les velocitats mitjanes v_1 i v_2 es relacionen entre si mitjançant l'equació de continuïtat. Suposant que el flux a l'entrada del tub de Venturi és uniforme, tenim:



$$v_1 A_1 = v_2 A_C \quad [2.117]$$

en què A_C és l'àrea contracta de la vena fluida en la secció (2). Aquesta àrea és inferior a A_2 , que és la secció del coll del tub de Venturi, on l'àrea geomètrica és mínima. El *coeficient de contracció* corresponent es defineix com $C_C = A_C/A_2 < 1$. Si s'anomena $\beta = (A_2/A_1)^{1/2}$ la relació dels diàmetres geomètrics del mesurador diferencial, llavors l'equació [2.116] es pot escriure de la manera següent:

$$v_2 = \frac{1}{(1 - \beta^4 C_C^2)^{1/2}} \left(\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2) \right)^{1/2} \quad [2.118]$$

Per obtenir una bona estimació del cabal real, s'han de tenir en compte altres efectes marginals que afecten la velocitat, com la rugositat de la paret, la viscositat o la uniformitat del corrent en (2). Aquests efectes s'inclouen mitjançant un coeficient de velocitat, C_V , de manera que el cabal observat en funció de l'altura manomètrica mesurada, h_m , en un tub en U és:

$$Q = \frac{C_V C_C}{(1 - \beta^4 C_C^2)^{1/2}} A_2 \left(2 \left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right) g h_m \right)^{1/2} \quad [2.119]$$

En general, en aquesta mena de dispositius, s'anomena *coeficient de cabal* el factor:

$$C_Q = \frac{C_V C_C}{(1 - \beta^4 C_C^2)^{1/2}} \quad [2.120]$$

i el producte $C_V C_C$, *coeficient de vessament*, C_D . Tots dos coeficients (o les seves parts, C_C i C_V) es troben tabulats en funció de la geometria del dispositiu, β , i del número de Reynolds. El coeficient de vessament pren valors de l'ordre de 0,95 en els tubs de Venturi normalitzats.

2.4.3 Equació de Torricelli

Quan l'equació de Bernoulli s'aplica entre un punt de la superfície lliure i un altre de la mateixa línia de corrent, però situat al centre de la secció de descàrrega del dipòsit de la figura 2.9, s'obté:

$$\frac{v^2}{2} = gh \quad [2.121]$$

S'admet que la pressió en tots dos punts és la mateixa i que el procés transcorre sense pèrdues. La velocitat resultant és la coneguda equació de Torricelli:

$$v = (2gh)^{1/2} \quad [2.122]$$

en què h és l'altura del líquid en el dipòsit respecte del centre de l'orifici. Aquesta equació és vàlida fins i tot quan no es manté constant el nivell de la superfície, sempre



que es pugui admetre que el procés de descàrrega és quasiestacionari. Per a això, cal que l'acceleració local sigui molt inferior a la convectiva, cosa que, en termes del número de Strouhal, implica que el temps de buidatge sigui molt més gran que el temps de residència del fluid en el veïnatge de l'orifici.

L'experiència ensenya que la velocitat de Torricelli només s'aconsegueix en algun punt aigües avall de l'orifici, on l'àrea del raig és mínima i sempre inferior a la geomètrica,³⁸ A_0 . Per tant, si es pretén calcular el cabal de sortida per un orifici fent servir la velocitat de Torricelli, cal introduir en el càlcul els coeficients de velocitat i contracció, igual com a [2.119]. Conegut el cabal en funció de l'altura i en el supòsit quasiestacionari, el temps de buidatge del dipòsit s'obté aplicant l'equació de continuïtat que, si el dipòsit és de secció recta constant, A_D , és [2.5]. Integrant entre els límits ($t = 0, h = H; t = t_V, h = 0$) i substituint, resulta:

$$t_V = \frac{1}{C_D} \frac{A_D}{A_0} \left(\frac{2H}{g} \right)^{1/2} \quad [2.123]$$

L'ordre de magnitud inicial entre els temps de buidatge i residència és:

$$O\left(\frac{t_V}{t_R}\right) \approx \frac{3}{2} \frac{A_D}{A_0} \left(\frac{2H}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{2gH}{A_0} \right)^{1/2} = 3 \frac{A_D H}{A_0^{3/2}} \quad [2.124]$$

en què $A_D H$ és el volum del dipòsit a $t = 0$. Per tant, la condició de quasiestacionarietat del moviment es compleix si la secció de l'orifici és molt inferior a la secció recta del dipòsit i aquest darrer és de grans dimensions, però s'invalida a mesura que el dipòsit es buida.³⁹

2.4.4 Establiment d'un corrent

La velocitat de sortida per a la descàrrega del dipòsit anterior s'aconsegueix gairebé de manera instantània, perquè els efectes inercials queden restringits a una regió de longitud característica de l'ordre del diàmetre de l'orifici, $A_0^{1/2}$. En aquesta petita regió, l'acceleració convectiva experimenta un canvi substancial i la partícula de fluid adquireix la major part de la seva velocitat. Això no és així, per exemple, quan la descàrrega té lloc a través d'un conducte de longitud L , i en aquest cas s'observa que la velocitat mitjana de sortida augmenta de manera asimptòtica fins a aconseguir el valor màxim predit per l'equació de Torricelli (en absència de pèrdues).

Suposem el dipòsit de la figura 2.9, la superfície lliure del qual es manté a un nivell H i al qual s'ha connectat un conducte indeformable de secció recta constant, A . A l'extrem del tub hi ha una vàlvula, inicialment tancada, que s'admet que no produeix pèrdues d'energia quan està completament oberta (aquesta vàlvula s'ha omès en la



figura). Per posar de manifest l'efecte inercial que donarà lloc a l'establiment del cabal en el conducte a partir de l'obertura (instantània) de la vàlvula, es parteix de l'equació completa d'Euler aplicada a la línia de corrent coincident amb l'eix del tub:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad [2.125]$$

que, integrada entre un punt de la superfície lliure (0) i un altre de la secció de sortida per la vàlvula (2), és:

$$\int_0^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right]_0^2 = 0 \quad [2.126]$$

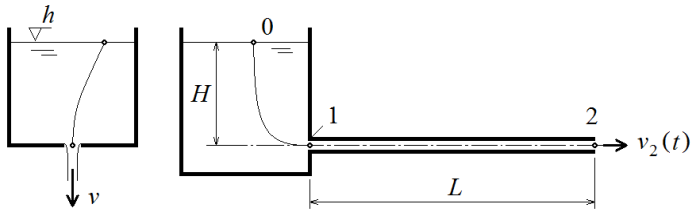


Figura 2.9. Equació de Torricelli i problema d'establiment d'un corrent en un conducte.

Les condicions de contorn són: $p_0 = p_2$; $z_0 = H$, $z_2 = 0$; i $v_0 = 0$, $v_2 = v(t)$, i les inicials: $t = 0$, $v_2 = 0$. A l'interior del conducte, es compleix per continuïtat que $v(x,t) = v(t)$, perquè el fluid és incompressible, i l'àrea recta, constant. Aquesta condició també imposa que la derivada local sigui constant al llarg del tub i que l'acceleració convectiva sigui nul·la (excepte en les proximitats de l'emboadura del dipòsit). Com que, a més, la integral temporal de [2.126] només està definida on la derivada local existeix, que és aproximadament entre els punts (1) i (2), l'equació anterior porta a:

$$L \frac{dv}{dt} = gH - \frac{v^2}{2} \quad [2.127]$$

Aquesta equació integrada és:

$$t = \frac{L}{(2gH)^{1/2}} \ln \left(\frac{(2gH)^{1/2} + v}{(2gH)^{1/2} - v} \right) \quad [2.128]$$

d'on s'aïlla la velocitat en funció del temps següent:

$$v = (2gH)^{1/2} \left(\frac{e^{\frac{(2gH)^{1/2} t}{L}} - 1}{e^{\frac{(2gH)^{1/2} t}{L}} + 1} \right) = v_\infty \left(\tanh \frac{t}{t_E} \right) \quad [2.129]$$



La tangent hiperbòlica és una funció monòtona creixent per a $t > 0$, que per a $t = t_E$ és 0,7616 i per a $t = \infty$ és la unitat (és a dir, la velocitat mitjana màxima és la donada per l'equació de Torricelli). El temps característic d'establiment, t_E , és:

$$t_E = 2 \frac{L}{v_\infty} \quad [2.130]$$

i és de l'ordre del temps de residència mitjà del fluid en el conducte. Aquest temps es pot comparar amb el temps de buidatge del dipòsit [2.123] per saber si el nivell es pot suposar constant durant la posada en marxa del flux.⁴⁰

L'equació [2.126] també es pot escriure en funció del cabal volumètric circulant i no de la velocitat. Això és interessant si el conducte no és d'àrea recta constant, perquè llavors, encara que la velocitat mitjana canviï en el seu interior, el cabal i les seves variacions no canvien i el terme integral se simplifica de la mateixa manera que fins a [2.127]. Per a fluid incompressible, s'obté el resultat:

$$\left(\rho \int_0^2 \frac{1}{A(s)} ds \right) \frac{dQ}{dt} + \left[\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gz \right]_0^2 = 0 \quad [2.131]$$

Aquesta equació posa de manifest el caràcter inercial del problema, sent la integral una propietat geomètrica del conducte que, juntament amb la densitat, es pot interpretar com una inèrcia equivalent. En un tub de secció constant i encara que pugui semblar paradoxal, la inèrcia del fluid contingut és més gran en els tubs de menys àrea recta, A , és a dir, augmenta quan disminueix el volum de fluid (i la seva massa) per a una longitud donada.⁴¹

La solució exposada en aquest apartat no ha tingut en compte la pèrdua d'energia que té lloc en el tub durant el procés d'establiment. És fàcil demostrar que la velocitat última en presència de pèrdues és:

$$v_\infty = \left(\frac{2gH}{1 + f \frac{L}{D}} \right)^{1/2} \quad [2.132]$$

en què f és el coeficient de fricció que es definirà a 5.1.2, i L/D , la ràtio d'aspecte del tub.⁴² Observem que la influència de les pèrdues és, com era d'esperar, la de disminuir la velocitat màxima i augmentar el temps característic de la descàrrega. En qual-sevol cas i fins i tot utilitzant el valor donat per [2.132], la corba asimptòtica [2.129] només representa l'evolució mitjana de la velocitat durant la posada en marxa, perquè no considera ni la compressibilitat del líquid ni la del material del conducte.

L'experiència ensenya que, en aquesta mena de processos, la velocitat augmenta molt ràpidament al principi (sent fins i tot $v_{\max} > v_\infty$) i després decau i oscil·la fins a aconseguir el règim estacionari en què $v_\infty \approx (2gH)^{1/2}$.



2.5 Condicions especials de flux

Fins ara s'ha descrit el camp fluid, les seves propietats i el conjunt complet d'equacions que regeixen el moviment i els processos termodinàmics associats. També s'ha vist com és possible simplificar el tractament analitzant la magnitud relativa dels diferents termes que apareixen en aquestes equacions. L'objectiu bàsic d'aquesta simplificació és aconseguir un grup d'equacions que prenguin forma en funció de les condicions del flux i que, juntament amb algunes consideracions de simetria i d'altres d'imposades pel contorn, permeti resoldre-les analíticament. Aquesta metodologia i el domini dels ordres de magnitud són fonamentals en un enginyer o enginyera que tracti amb fluids, màquines hidràuliques i els seus processos, perquè li permetran fer front a la gran varietat de fluxos que es poden presentar a la realitat.

Els fluxos es poden classificar segons si són rotacionals o irrotacionals, en funció de si tenen algun tipus de simetria (per exemple, axial, plana, etc.) o si són bàsicament unidireccionals. Evidentment, el fluid també condiciona el flux, de manera que pot ser viscos o no, compressible o incompressible, o barotròpic. Hi ha desenes de variacions possibles que, afortunadament, i atès que alguns criteris no són independents entre si, sovint porten a un mateix tipus de solució.

Un flux és unidireccional quan el fluid es mou en una única direcció. Perquè sigui quasiunidireccional, n'hi ha prou que l'ordre de magnitud de la velocitat transversal sigui molt inferior a la longitudinal, fet que implica, a la vegada, que el gradient transversal de la pressió reduïda també sigui inferior al longitudinal. La condició d'unidireccionalitat en el moviment és útil perquè imposa que totes les magnituds fluides, assentades en una línia de corrent, variïn a cada instant només amb la coordenada longitudinal independentment que sigui no estacionari o el fluid real, i si el fluid és, a més, incompressible, llavors la seva velocitat tampoc canvia en $\{s\}$.

La compressibilitat del flux és important quan la velocitat del fluid és elevada i en moviments no estacionaris sota determinades condicions. En canvi, perquè el moviment d'un fluid que inicialment està en repòs deixi de ser irrotacional, cal que es donin les circumstàncies que indueixen l'aparició de vorticitat, que van associades al perfil de la distribució de la velocitat resultant, que no al seu valor, i a l'aparició de deformació en el si fluid per l'ocurrència de forces viscoses o d'un altre tipus.

2.5.1 Unidireccionalitat

La condició d'unidireccionalitat d'un flux passa sovint a la pràctica i normalment és induïda per la presència d'un contorn pla o d'una geometria tal que impedeix el desenvolupament de la velocitat en qualsevol altra direcció.

Si bé qui imposa la unidireccionalitat al moviment és el contorn, no és cert que aquesta condició es pugui admetre en tota la seva extensió, tret que sigui infinita. Per



exemple, a la regió d'entrada a un conducte, la velocitat transversal disminueix a mesura que apareix el moviment unidireccional. L'ordre de magnitud de la velocitat transversal fora d'aquesta regió es pot estimar a partir de l'equació [2.65] o de la de continuïtat en forma adimensional, d'on:

$$O(v_{0y}) \approx O(v_{0z}) \approx \frac{D}{L} O(v_{0x}) \quad [2.133]$$

Evidentment, la velocitat transversal és menyspreable enfront de la longitudinal quan L és molt més gran que D . Es pot considerar que el moviment és quasiunidireccional amb viscositat dominant o apreciable si, a més, els termes convectius són inferiors als viscosos, és a dir, es verifica la condició de [2.78]:

$$O\left(\frac{\rho v_{0x}^2 / L}{\mu v_{0x} / D^2}\right) = O\left(\frac{\rho v_{0x} D D}{\mu L}\right) = O\left(\text{Re}_D \frac{D}{L}\right) \ll 1 \quad [2.134]$$

En cas contrari, el moviment en el conducte (prou llarg perquè $L \gg D$ i el moviment sigui guiat però, alhora, prou curt perquè no es compleixi [2.134]) es podrà suposar ideal i els efectes viscosos menyspreables.

L'ordre de magnitud dels gradients longitudinal i transversal de la pressió reduïda en moviments quasiunidireccionals es pot deduir de l'equació de quantitat de moviment corresponent. En direcció longitudinal $\{x\}$, l'equació [2.64] indica que la variació de la pressió ha de ser de l'ordre major d'entre els següents:

$$O(\Delta p_{0x}) \approx O_{\max} \left(\frac{\rho v_{0x} L}{t_0}, \rho v_{0x}^2, \frac{\mu v_{0x}}{D} \frac{L}{D} \right) \quad [2.135]$$

Com que en direcció transversal $\{y\}$ es compleix:

$$\frac{\rho v_{0y}}{t_0} \frac{\partial v_y^*}{\partial t^*} + \frac{\rho v_{0x} v_{0y}}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{\Delta p_{0y}}{D} \nabla^* p^* + \frac{\mu v_{0y}}{D^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad [2.136]$$

la variació transversal de la pressió reduïda serà de l'ordre més gran que:

$$O(\Delta p_{0y}) \approx O_{\max} \left(\frac{\rho v_{0y} D}{t_0}, \rho v_{0x} v_{0y} \frac{D}{L}, \frac{\mu v_{0y}}{D} \right) \quad [2.137]$$

i, amb [2.133], serà, en qualsevol cas:

$$O(\Delta p_{0y}) \approx O_{\max} \left(\frac{\rho v_{0x} D D}{t_0 L}, \rho v_{0x}^2 \frac{D^2}{L^2}, \frac{\mu v_{0x}}{L} \right) \approx \left(\frac{D}{L} \right)^2 O(\Delta p_{0x}) \quad [2.138]$$

Tal com s'havia avançat, de [2.138] es desprèn que l'ordre de la variació transversal de la pressió reduïda és molt inferior a la variació longitudinal en condicions de quasiunidireccionalitat (és a dir, $\alpha_p \approx 1$ a [2.105]).



Suposant el moviment unidireccional d'un fluid de densitat constant, per al qual es compleix $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i}$, sent v_y , v_z i les seves derivades nul·les, l'equació de continuïtat diu que:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad [2.139]$$

cosa que implica que $v_x = v_x(y, z, t)$. En aquestes condicions, a més, $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{0}$, i les equacions de quantitat de moviment en eixos $\{xyz\}$ queden de la forma:⁴³

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ 0 &= -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial z} \end{aligned} \quad [2.140]$$

Les dues últimes equacions de [2.140] confirmen que el moviment és unidireccional segons [2.138], mentre que la primera mostra que el gradient longitudinal de la pressió reduïda només pot dependre del temps pel fet que la pressió és constant en $\{yz\}$ i v_x no depèn de $\{x\}$. Així doncs, aquesta equació es pot escriure com:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \Delta p_L(t) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad [2.141]$$

Són conegudes diverses solucions exactes d'aquesta equació:⁴⁴ corrents no estacionaris de Rayleigh i Stokes, i estacionaris de Couette, Hagen-Poiseuille, o particulars per al moviment per un pla inclinat o en cercles concèntrics. Aquestes solucions analítiques tenen un evident interès acadèmic, però també pràctic, perquè són moltes les situacions en què es verifiquen les condicions d'unidireccionalitat en la major part del camp fluid. A més, el caràcter lineal d'aquesta equació i de les seves condicions inicials i de contorn fa vàlid el principi de superposició, de manera que la solució final es pot obtenir com la suma de les solucions conegudes en diferents condicions ja resoltes. D'altra banda, el contorn també imposa condicions de simetria en el moviment i permet calcular el gradient de pressió reduïda, coneguda en dos punts en un instant donat: $\Delta p_L = (p_1 - p_2)/L$.

Les solucions estacionàries de l'equació [2.141] impliquen el moviment unidireccional d'un fluid incompressible viscos en contorns bidimensionals, per exemple, entre dues plaques infinites i paral·leles, amb un valor Δp_L que pot ser no nul, o en conductes de secció circular constant en moviment laminar. L'equació de Navier-Stokes en aquests casos pren la forma general:⁴⁵

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\Delta p_L \quad [2.142]$$



La solució d'Hagen-Poiseuille es pot aplicar a conductes bidimensionals en què, per simetria, es pot admetre que la velocitat, v_x , només depèn de la seva distància al centre del tub, r . L'equació de Navier-Stokes en coordenades cilíndriques és:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right) = \frac{d^2 v_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_x}{dr} = -\frac{\Delta p_L}{\mu} \quad [2.143]$$

que, per a la condició de contorn ($r = R = D/2$, $v_x = 0$), proporciona la solució general:

$$v_x = \frac{\Delta p_L}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad [2.144]$$

corresponent a una distribució parabòlica de velocitats.

El cabal transportat pel conducte, en aquestes condicions, és:

$$Q = \int_0^R v_x 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \Delta p_L = \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad [2.145]$$

per a una velocitat mitjana:

$$\bar{v}_x = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{D^2}{32\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad [2.146]$$

que és la meitat de la màxima, tal como és fàcil de comprovar.

L'esforç tallant present en el flux és mínim al centre del tub, on la velocitat és màxima, i es pot obtenir fàcilment fent:

$$\tau = -\mu \frac{dv_x}{dr} = \frac{r}{2} \Delta p_L \quad [2.147]$$

en què el signe indica que la força tallant s'oposa al moviment. A la paret, segons el balanç de forces sobre l'element diferencial de la figura 2.10, es compleix:

$$2\pi R\tau - \pi R^2 \Delta p_L = 0 \quad [2.148]$$

cosa que posa de manifest l'equilibri axial del moviment.

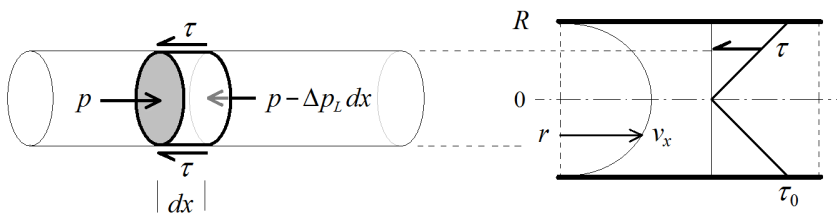


Figura 2.10. Equilibri de forces diferencials en un conducte de radi R .



S'obté un resultat interessant expressant la pèrdua de pressió reduïda en funció de l'energia cinètica mitjana del flux de Hagen-Poiseuille en un conducte. En efecte, utilitzant l'equació [2.146], es dedueix que:

$$\Delta p = \frac{32\mu L}{D^2} \bar{v}_x = \frac{64\mu}{\rho D \bar{v}_x} \frac{L}{D} \frac{\rho \bar{v}_x^2}{2} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D} \frac{\rho \bar{v}_x^2}{2} \quad [2.149]$$

i la pèrdua de pressió reduïda és proporcional a la relació d'aspecte del conducte, L/D , i a l'energia cinètica mitjana, sent el factor de proporcionalitat una funció inversa del número de Reynolds.

2.5.2 Incompressibilitat

Si bé s'accepta de manera tàcita, gairebé col·loquial, que els líquids es comporten de manera incompressible i els gasos no, no és així en qualsevol circumstància, perquè hi ha fluxos i situacions de treball que obliguen a tenir en compte els efectes de la compressibilitat en els líquids i d'altres en què els gasos es poden admetre incompressibles.

Les condicions d'incompressibilitat d'un fluid van associades al canvi unitari de la densitat durant el procés i són subjacents a la mateixa equació de Bernoulli. Si el fluid és incompressible, o gairebé, els canvis de la pressió en el flux estacionari són de l'ordre ρv^2 , i es demostra que el canvi de densitat consegüent és de l'ordre ρM^2 , per això és aplicable l'equació de Bernoulli sempre que el número de Mach sigui petit, almenys inferior a 0,3.⁴⁶

La condició cinemàtica perquè un fluid es pugui considerar incompressible en un camp de velocitat tal que v_0 és la seva velocitat típica i l_0 la seva longitud característica és:

$$O(\nabla \cdot \mathbf{v}) \ll \frac{v_0}{l_0} \quad [2.150]$$

és a dir: les variacions espacials de la velocitat sobre l'escala l_0 s'han de compensar entre si de manera que el camp de velocitat sigui solenoidal en bona aproximació. Segons l'equació de continuïtat, aquesta condició equival a:

$$O\left(\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}\right) \ll \frac{v_0}{l_0} \quad [2.151]$$

i com que, en un fluid homogeni, la pressió, la densitat i l'entropia estan relacionades per l'equació d'estat, la condició anterior es pot escriure com:

$$O\left(\frac{1}{\rho c^2} \left\{ \frac{Dp}{Dt} - \left[\frac{\partial p}{\partial s} \right]_\rho \frac{Ds}{Dt} \right\}\right) \ll \frac{v_0}{l_0} \quad [2.152]$$



D'ara endavant, se suposarà que els termes del claudàtor interior d'aquesta equació no es cancel·len entre si, però es preveu que, si ho fessin, s'enfortiria la incompressibilitat.

Evidentment, el segon terme de l'esquerra s'anul·la si el flux és isentròpic. Quan no ho fa, els canvis de densitat deguts a la variació entròpica han d'anar associats a la calor aportada al fluid, sigui per conducció, per reacció o radiació, o per dissipació viscosa. Per veure-ho millor, tinguem present la igualtat:

$$\frac{1}{\rho c^2} \left[\frac{\partial p}{\partial s} \right]_{\rho} = -\frac{1}{\rho c^2} \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_{s} \left[\frac{\partial \rho}{\partial s} \right]_{\rho} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_{p} \left[\frac{\partial T}{\partial s} \right]_{\rho} = \frac{\alpha T}{c_p} \quad [2.153]$$

que resulta d'aplicar la relació de Maxwell i la definició [1.82] del coeficient d'expansió tèrmica a pressió constant, α . Aquesta equació, juntament amb la de l'entropia [2.45] o la [2.61], i la [2.151], condueixen al resultat adimensional següent:

$$O\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right) \approx \frac{\alpha T_0}{c_p} \frac{l_0}{v_0} \frac{\Delta s}{t_c} \frac{Ds^*}{Dt^*} = \frac{\alpha k}{\rho c_p v_0} \frac{\Delta T_0}{l_0} \nabla^{*2} T^* + \frac{\alpha q_0}{c_p} \frac{l_0}{v_0} q_a^* + \frac{\alpha \mu}{\rho c_p} \frac{v_0}{l_0} \Phi_V^* \quad [2.154]$$

Arreglant aquesta expressió en funció dels grups adimensionals comuns, s'arriba a la conclusió que el canvi unitari de densitat per variació de l'entropia de la partícula ha de ser de l'ordre major de:

$$O\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right) \approx O_{\max} \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\text{Pr}} \alpha \Delta T_0, \text{Da} \alpha T_0, \frac{1}{\text{Re}} \frac{\alpha v_0^2}{c_p} \right) \quad [2.155]$$

que es podrà menysprear sempre que sigui inferior a la unitat, és a dir, sempre que el nombre de Reynolds sigui gran i l'aportació de calor per reacció o radiació sigui menyspreable.⁴⁷

Referent al primer terme de [2.152], sens dubte el més transcendent en la pràctica perquè el fluid sigui considerat incompressible, és fàcil veure que es pot escriure de la forma:

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v^2 \right) + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_m \quad [2.156]$$

ja que:

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \frac{Dv^2}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f}_m \quad [2.157]$$

de l'equació de l'energia mecànica [2.41] sense termes viscosos. L'ordre de magnitud de cadascun dels termes de la dreta de l'equació [2.156], introduïts a [2.151], permet deduir el canvi unitari de la densitat per variació de la pressió de la partícula, que és de l'ordre major de:



$$\begin{aligned} O\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) &\approx O_{\max}\left(\frac{l_0^2}{c^2 t_0^2}, \frac{l_0 v_0}{c^2 t_0}, \frac{v_0^2}{c^2}, \frac{l_0 g}{c^2}\right) = \\ &= O_{\max}\left(\text{St}^2 \text{M}^2, \text{StM}^2, \text{M}^2, \frac{\text{M}^2}{\text{Fr}}\right) \end{aligned} \quad [2.158]$$

que també es podrà menysprear sempre que sigui inferior a la unitat. Les dues primeres condicions fan referència a l'efecte que la no estacionarietat del moviment té sobre la compressibilitat, i la quarta s'ha escrit per al camp gravitatori terrestre.

S'observa d'aquestes condicions que el flux no permanent —per exemple, oscil·latori, tot i que no necessàriament periòdic— pot condicionar la incompressibilitat. Si la freqüència típica de les variacions temporals de la pressió o de la velocitat és de l'ordre de $f_0 \approx 1/t_0 \approx v_0/l_0$, llavors la no estacionarietat del flux és una condició d'incompressibilitat que coincideix amb l'oferta pel número de Mach en el tercer grup: $\text{M}^2 \ll 1$. En canvi, si la freqüència de les oscil·lacions és més gran que v_0/l_0 , és a dir, t_0 és inferior a l_0/v_0 , llavors aquesta condició, la de no estacionarietat, és més restrictiva que $\text{M}^2 \ll 1$. També es dedueix de l'ordre de magnitud de les dues condicions no estacionàries, que la primera, la que es deu als canvis de la pressió local, és més restrictiva que la de v^2 i que, per tant, aquesta última es pot obviar.

En conclusió, el flux isentròpic es pot considerar incompressible si es verifica la condició:

$$O\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \approx O_{\max}\left(\frac{l_0^2 f_0^2}{c^2}, \text{M}^2, \frac{l_0 g}{c^2}\right) \ll 1 \quad [2.159]$$

L'acústica, la dinàmica de gasos i la meteorologia s'ocupen de cadascuna d'aquestes condicions per separat, però la més important és, sens dubte, la que es deu al número de Mach.

Per quantificar la influència del número de Mach en el flux estacionari, se sol fer servir, en la literatura especialitzada, el coeficient de pressió de rabeig. Aquest coeficient es defineix com:

$$c_{p,0} = \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho v^2} \quad [2.160]$$

i mesura la desviació de la diferència entre les pressions de rabeig i estàtica en una condició de flux determinada respecte de la incompressible. Evidentment, és la unitat en el cas incompressible i creix alhora que el número de Mach (figura 2.11), en funció del qual s'escriu com:

$$c_{p,0} = 2 \frac{p_0 - p}{\rho c^2 \text{M}^2} = \frac{2}{\gamma \text{M}^2} \left(\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{M}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right) \quad [2.161]$$



L'expansió binomial d'aquesta expressió per a $\gamma=1,4$ és la següent:

$$c_{p,0} = 1 + \frac{1}{4}M^2 + \frac{1}{40}M^4 + \frac{1}{1600}M^6 + \dots \quad [2.162]$$

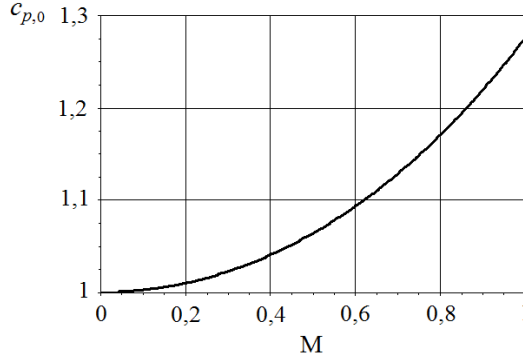


Figura 2.11. Influència del número de Mach en la compressibilitat d'un flux estacionari. L'error que es comet quan s'assumeix un flux com a incompressible és inferior al 2,5 % per a $M < 3$.

2.5.3 Irrotacionalitat

Es diu que un moviment és irrotacional en una regió del camp fluid quan $\nabla \wedge \mathbf{v} = 0$ en tots els punts d'aquesta regió. El teorema de Stokes [1.37] assegura que aquesta condició es compleix sempre que la circulació de la velocitat entorn de qualsevol línia tancada sigui nul·la, i el de Kelvin [1.38] imposa les condicions necessàries perquè ho continuï sent. Dit això, els moviments de fluids ideals descrits per les equacions d'Euler compleixen la condició d'irrotacionalitat sempre que siguin i es mantinguin isentròpics.

Un dels avantatges més importants dels moviments irrotacionals és que són també potencials. En aquests moviments, el camp de velocitats queda definit només especificant el valor del potencial en cada punt, fet que comporta, al seu torn, que les equacions del moviment prenguin una forma molt més simple. Així, l'equació de continuïtat per a un fluid incompressible és:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \Delta \varphi = 0 \quad [2.163]$$

i la quantitat de moviment:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + U = C(t) \quad [2.164]$$

Aquestes són les equacions d'Euler-Bernoulli generalitzades. La constant $C(t)$ encara pot dependre del temps, però ara és la mateixa per a tot el camp fluid, cosa que augmenta la importància de l'equació de Bernoulli en l'estudi del flux potencial incompressible.



El fet que φ segueixi l'equació de Laplace [2.163] en un moviment potencial i incompressible, i que aquesta equació sigui lineal i homogènia, permet aplicar el principi de superposició a les seves solucions, de manera que, en general, es verifica que si, per exemple, φ_a i φ_b són solucions de l'equació de Laplace, llavors:

$$\begin{aligned}\varphi &= a\varphi_a + b\varphi_b \\ \mathbf{v} &= a\mathbf{v}_a + b\mathbf{v}_b\end{aligned}\quad [2.165]$$

també és solució, on a i b són dues constants que poden dependre del temps.

Ha de quedar clar que el flux pot ser rotacional encara que les línies de corrent siguin línies rectes i el fluid no sembli que gira entorn d'un punt. El moviment de Hagen-Poiseuille descrit per l'equació [2.144], per exemple, és un moviment amb vorticitat no nul·la en tots els seus punts, excepte al centre del conducte, on la velocitat és màxima. La vorticitat implica la rotació de les partícules fluids i, per tant, va associada a la deformació del camp de velocitats. En un fluid real, viscos i homogeni, la seva existència està íntimament lligada a les tensions tangencials presents en el flux; s'origina en els contorns sòlids, on el fluid ha de verificar la condició de no lliscament, i es propaga després seguint una llei de difusió.

De la mateixa manera, un flux pot ser irrotacional encara que les línies de corrent siguin corbes. Un dels exemples més senzills de moviment potencial és el vòrtex lliure, per al qual el potencial de velocitats és:

$$\varphi = k\theta \quad [2.166]$$

sent k una constant. Aquest potencial s'incrementa en $2k$ cada vegada que la circulació fa un gir en sentit antihorari al voltant de l'origen i les seves línies de corrent són cercles concèntrics. La velocitat definida per aquest potencial en coordenades cilíndriques⁴⁸ és:

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{k}{r}\end{aligned}\quad [2.167]$$

de manera que v_θ és constant per a cada radi. Evidentment, la circulació és la mateixa per a qualsevol circumferència centrada en $r=0$ o que tanqui aquest punt una vegada:⁴⁹

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r v_\theta = 2\pi k \quad [2.168]$$

Un altre exemple de gran interès en les turbomàquines resulta de la combinació dels fluxos potencials (bidimensionals): el vòrtex lliure anterior i una font puntual en $r=0$, amb un potencial que és:



$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln r \quad [2.169]$$

Tots dos potencials sumats condueixen a solucions del tipus:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + \frac{q}{2\pi} \ln r \quad [2.170]$$

les línies de corrent de les quals compleixen la condició:

$$\ln r = \frac{q\theta - 2\pi C}{\Gamma} \quad [2.171]$$

o bé:

$$r = e^{\frac{q\theta - 2\pi C}{\Gamma}} = ke^{\frac{q\theta}{\Gamma}} \quad [2.172]$$

i són de forma espiral (figura 2.12). Es demostra que les línies de corrent i les equipotencials són perpendiculars entre si.

El terme més interessant de l'equació de la vorticitat [2.36]⁵⁰ és el que fa referència a l'ampliació i rotació del vector vorticitat com a conseqüència de la deformació del fluid, e_{ij} . Això últim s'entén millor si es presenta aquesta equació en components:

$$\frac{D\Omega_i}{Dt} = \Omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad [2.173]$$

El primer terme del segon membre implica el sumatori del producte de cada component del vector vorticitat per les tres components del tensor gradient de velocitat [1.127] associades a v_i . El desenvolupament d'aquesta operació, tenint en compte que la vorticitat es relaciona amb la part antisimètrica d'aquest tensor, condueix a:

$$\frac{D\Omega_i}{Dt} = \Omega_j e_{ij} + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad [2.174]$$

segons la qual, la vorticitat és amplificada si el moviment és tal que la component e_{ij} de la part simètrica del tensor gradient de velocitat és positiu i reduïda en cas contrari. En conseqüència, el moviment d'un camp de vorticitat es pot comprendre de la interacció espai-temps entre la vorticitat i la deformació del fluid o, dit d'una altra manera, entre les parts antisimètrica i simètrica del tensor gradient de velocitat.

El segon terme del segon membre de l'equació [2.174] representa la variació de la vorticitat deguda a la difusió molecular de vorticitat. La vorticitat es difon com la calor o qualsevol altra propietat de transport, de manera que les partícules que no giren adquireixen vorticitat de les seves contigües, a les quals frenen. Aquest terme és el responsable del transport de la vorticitat lluny de les zones on es crea, i està associat als gradients de velocitat i pressió causats pel contorn (de tal manera que la



inversió d'aquests gradients també causa la inversió del sentit de la vorticitat generada).

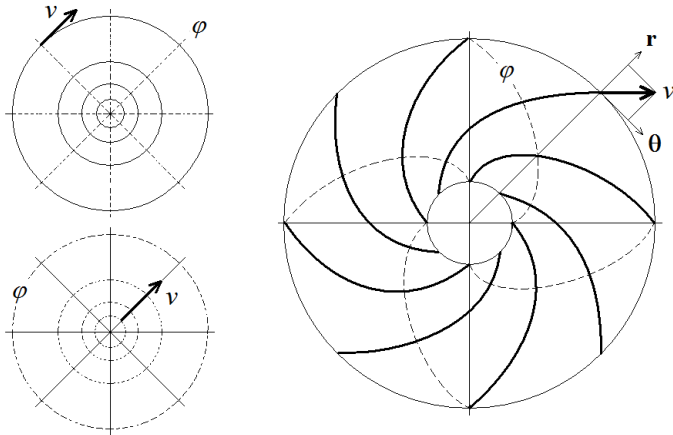


Figura 2.12. Configuració de les línies de corrent del potencial [2.170], que resulta de combinar un vòrtex lliure irrotacional (a dalt, a l'esquerra) i una deu de cabal per unitat d'ample q (a baix, a l'esquerra). Les línies discontinües són les línies equipotencials, i les contínues, les línies de corrent.

Una altra manera d'escriure l'equació [2.36] en el cas de forces màssiques conservatives i fluids ideals barotròpics, tot i que no necessàriament incompressibles, és:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \quad [2.175]$$

expressió coneguda com l'equació de Helmholtz per als vòrtexs, que indica que el canvi del vector $\boldsymbol{\Omega}/\rho$ associat a un element fluid és proporcional al d'un element material de longitud infinitesimal paral·lel a $\boldsymbol{\Omega}/\rho$. És a dir, les línies de vòrtexs es mouen amb el fluid si és ideal, barotròpic, i el camp de forces, conservatiu. En aquestes condicions, l'acceleració deriva d'un potencial (v. [2.31]) i, en aplicació del teorema de Kelvin, la circulació es mantindrà constant al llarg d'una línia tancada.

Si bé el canvi en la vorticitat per estirament o escurçament del vòrtex descrit pel primer terme de [2.173], o de [2.36], és una conseqüència del principi de conservació del moment cinètic en absència d'efectes viscosos, que l'equació de Helmholtz estén a fluids compressibles,⁵¹ aquest fenomen també es presenta en fluids viscosos, en què a més es produeix difusió de vorticitat. En canvi, la variació de la vorticitat per deformació del vòrtex desapareix quan el moviment és pla.⁵² En aquest últim cas, l'equació de Helmholtz adopta una forma més senzilla, ja que llavors $\boldsymbol{\Omega}/\rho$ és constant, i la vorticitat d'una partícula material varia en proporció a la seva densitat. Evidentment, si el fluid és incompressible, aquesta equació diu que la vorticitat està congelada sobre el fluid i l'arrossega en el seu moviment.



- 1 La integral es calcula només en la superfície de sortida, perquè la velocitat del fluid i la del volum de control coincideixen en la superfície lliure.
- 2 Tret de rares excepcions, com a l'interior d'una ona de xoc, per exemple.
- 3 La força que el fluid fa contra el contorn és la reacció $F_{fc} = -F_c$. El versor n es dirigeix sempre cap a l'exterior del volum de control.
- 4 Si bé és admissible que la pressió sigui constant a les seccions d'entrada i sortida, no sol ser així per a la velocitat, de manera que s'introdueix el factor corrector de la quantitat de moviment o impuls, β , definit com:

$$\beta = \frac{1}{S} \int_S \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^2 dS$$

que és calculable quan es coneix o se suposa la distribució de velocitat a la superfície S .

- 5 Cal observar que es tracta d'una equació escalar. La calor aportada per les reaccions químiques a l'interior del fluid s'inclou a la dreta de l'equació, perquè s'admet que el fluid es manté homogeni en composició, per això no cal introduir l'energia de formació quan es calcula l'energia interna u . Per tant, la transformació de l'energia química se suposa que és una aportació de calor de l'exterior.
- 6 Es recorda que el versor n es dirigeix cap a fora del volum de control, és a dir, en aquest cas, cap a l'interior de la paret mòbil. El terme de pressió és important en el moviment lineal d'un pistó, i llavors el treball frontera per unitat de temps és pSv_m , o bé pdV/dt , que serà negatiu si el pistó redueix el volum de control comprimint el fluid en ser $n \cdot v_m = -1$. El viscos apareix, per exemple, en discos flotants i dona compte de les pèrdues per fricció en el disc de 3.2.3 i 3.4.1. Tots dos són no nuls en els àleps d'un rotor d'una turbomàquina.
- 7 En general, els signes de w i q poden ser positius o negatius en funció de la comesa de la màquina, però, per a un mateix balanç ($-w+q$), aquesta equació afirma que la diferència dels termes de l'esquerra és unívoca i independent de les pèrdues irreversibles.
- 8 La condició $D\rho/Dt = 0$ revela que la densitat de la partícula és constant en el seu moviment, però no diu que la densitat sigui uniforme en un volum fluid. $\nabla \cdot v = 0$ és l'equació de la plastilina: $\partial v_x / \partial x = -\partial v_y / \partial y$ si $\partial v_z / \partial z = 0$.
- 9 Entre les quals, les òbvies: $v = 0$ o $\Omega = 0$.
- 10 Aquesta funció per components en coordenades cartesianes és:

$$\begin{aligned} \Phi_v &= \tau_{ij}' \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \tau_{xx}' \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}' \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zz}' \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy}' \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau_{xz}' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \tau_{yz}' \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \\ &= 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \lambda (\nabla \cdot v)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

- 11 Entre els casos en què això no és cert, destaquen precisament el flux en turbomàquines de flux compressible, el flux extern supersònic, o la lubricació i l'extrusió a alta velocitat.
- 12 La importància de la variable entropia consisteix en el fet que és l'única variable fluida que manté el seu valor en un moviment adiabàtic de forces viscoses menyspreables, encara que el moviment no sigui permanent ni incompressible. Compareu [2.45] amb [2.43] i [2.44].
- 13 Per exemple, el cabal volumètric seria $[Q] = m^3 s^{-1}$. Les magnituds Q poden ser escalars o vectorials, i algunes a_{ij} poden ser nul·les.
- 14 Una magnitud física s'admet que està composta de dues parts: una de numèrica, que en quantifica el valor, i una altra que representa la unitat emprada, a efectes de comparació.
- 15 En aquesta matriu, les files representen les magnituds ($i=1 \dots n$) i a les columnes hi ha les unitats fonamentals ($j=1 \dots p$). El teorema de π demostra que $n-m$ es el nombre màxim de combinacions adimensionals que es poden



formar amb les n magnituds físiques Q_i , ja que m és l'ordre del major determinant diferent de zero possible amb la matriu a_{ij} . Generalment, m és igual p , és a dir, igual a 1 en problemes geomètrics, a 2 en cinemàtics, a 3 en mecànics, a 4 en termodinàmics, etc., i el rang de la matriu ve determinat pel nombre de columnes, p .

- 16 Els grups adimensionals també es poden deduir per anàlisi inspeccional.
- 17 A l'equació de l'energia, s'han omès els termes de radiació i reacció, sense que per això el mètode que es presenta pugui perdre generalitat, i s'ha utilitzat la forma [1.52] per a la conducció.
- 18 La semblança física completa aplicada al moviment dels fluids és molt difícil d'aconseguir, perquè no sempre és possible la igualtat simultània de tots els coeficients adimensionals que apareixen a [2.58]. Per això, en general es retindran els que es cregui que són més influents en el fenomen estudiat per obtenir diversos tipus de semblança física parcial. L'acarament dels resultats experimentals determinarà si la tria ha estat adequada, legítima i prou aproximada.
- 19 Les condicions perquè el moviment es pugui considerar unidireccional s'analitzen a 2.5.1.
- 20 En aquest últim cas, p_0 és la diferència entre la pressió absoluta i la de vapor del líquid a la temperatura de treball. El perill d'aparició de cavitació és més gran com més petit és aquest número.
- 21 A la pràctica, se sol substituir la calor específica a volum constant pel de pressió constant.
- 22 El terme convectiu pot, així mateix, ser menyspreable si predominen almenys dos dels termes de la dreta, i fins i tot completament nul si el contorn o les condicions del flux n'eviten l'aparició.
- 23 Tots els resultats d'aquesta secció es poden ampliar comparant els termes de cadascuna les equacions entre si i no sols amb el convectiu. S'anima el lector que extregui les seves pròpies conclusions seguint la guia oferta en aquest apartat i en què s'han presentat els fenòmens de transport.
- 24 Excepte el terme $v^2/c_p T$, que és proporcional a M^2 als gasos i pot ser més gran que la unitat en els fluxos supersònics.
- 25 En resum: moviments permanents a alts número de Reynolds, sense addició de calor i amb forces màssiques menyspreables. En aquestes condicions, si totes les línies de corrent provenen d'una regió uniforme, llavors les magnituds d'estancament són les mateixes en tot el camp fluid.
- 26 Des d'una perspectiva general, perquè també és possible experimentar amb models mitjançant les tècniques de l'analogia hidràulica, elèctrica, tèrmica, etc.
- 27 Aquests efectes apareixen, per exemple, com a conseqüència d'un diferent acabat superficial i la seva incidència sobre la capa límit, o per l'ocurrència de forces de tensió superficial en un model molt reduït.
- 28 La raó d'això és que el contorn impermeable només pot imposar que la velocitat normal sigui nul·la en els fluids ideals, però la condició de no lliscament en el contorn no pot es admetre en absència d'efectes viscosos.
- 29 L'equació de Bernoulli [2.96] no es pot aplicar en gasos o fluids compressibles perquè la densitat varia amb la pressió i amb una altra variable d'estat. En els gasos l'equació d'Euler-Bernoulli és:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} + h + U \right) = 0$$

que indica que l'entalpia de recés és constant al llarg d'una línia de corrent en els processos estacionaris que involucrin gasos perquè són molt lleugers. Es comprova que aquesta equació també és vàlida en líquids a entropia constant, perquè llavors es compleix que $dh = dp/\rho$, al ser $du = 0 = Tds - pdv$.

- 30 La forma completa d'aquest teorema afirma que, en un moviment homentròpic irrotacional, l'entalpia d'estancament només pot canviar si el procés no és estacionari (v. [4.97]).
- 31 Observeu que el terme a la dreta de l'equació [2.100] és el mòdul del vector de Lamb.



³² D'ara endavant, s'entendrà que e_m és l'energia mecànica específica mitjana [J/kg] de la secció corresponent de flux en la seva línia mitjana. La relació e_m/g s'anomena *altura total* [m] i ρe_m , *pressió total* [Pa], i són també formes d'energia específica, ja que [m]=[J/N] y [Pa]=[J/m³]. Comproveu que [J/kg]=[m²/s²].

³³ Es dedueix que α ha de ser:

$$\alpha = \frac{\int_S v^2 dQ}{v^2 Q} = \frac{1}{S} \int_S \left(\frac{v}{v}\right)^3 dS$$

perquè les expressions [2.104] i [2.105] coincideixin quan $\alpha_p=1$. Compareu aquesta equació amb la definició del coeficient corrector de la quantitat de moviment, β .

³⁴ Per a l'obtenció d'aquesta equació, s'ha de procedir com a [3.5], estenent els límits de la màquina, (e) i (s) fins a les seccions (1) y (2). Les pèrdues d'energia entre els límits de la màquina estarien, llavors, incloses en el valor de H_B mitjançant el seu rendiment i no apareixerien a [2.107]. S'ha suposat que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

³⁵ En aquestes equacions, se suposa que el difusor és horitzontal, o bé el terme de cota s'ha inclòs en la pressió reduïda. Malgrat que les definicions del coeficient de recuperació i del rendiment d'un difusor són semblants, el primer es fa servir en el seu disseny (per triar en taules la seva relació d'àrees i esveltesa en funció de l'energia cinètica d'entrada), mentre que el segon té un caràcter més funcional quan es combina amb l'equació de l'energia. Comproveu que es compleix que $C_R/C_{R,1} = \eta_{diff}$.

³⁶ Pressions relatives. El lector pot deduir aquestes relacions per si mateix tenint present que el fluid manomètric està en repòs i, per tant, els punts a i b de la figura 2.7 es troben a la mateixa pressió estàtica.

³⁷ Per a això, s'han de respectar les recomanacions normalitzades de disseny per a un rang de mesurament determinat, funció del número de Reynolds. ISO 5167-4:2003 *Measurement of fluid flow by means of pressure differential devices inserted in circular cross-section conduits running full -- Part 4: Venturi tubes*.

³⁸ A més, l'àrea del raig vertical disminueix a mesura que descendeix, perquè la velocitat del fluid augmenta.

³⁹ La condició de quasiestacionarietat comporta, també, que es pugui menysprear la velocitat de la superfície lliure respecte de la de sortida, com s'ha fet a [2.121], ja que en general es compleix que $A_D > A_0$ i l'altura h és més gran que el diàmetre de l'orifici durant gairebé tota la descàrrega. La relació entre totes dues velocitats és A_0/A_D , evidentment, i és independent de l'altura.

⁴⁰ Es dedueix que $O(t_v/t_e) \approx (A_D/A)(H/L) = (A_D H)/(AL)$.

⁴¹ L'equació [2.131] comparteix forma amb la segona llei de Newton, en què el cabal representa la velocitat i l'energia per unitat de volum, de força. El producte del cabal per la pressió és una potència, de la mateixa manera que ho és el de la velocitat i la força, o la velocitat angular pel parell, o la intensitat elèctrica per la tensió. Quan l'energia específica es descriu a [Pa] i s'utilitza el cabal volumètric per al flux [m³/s], llavors la inèrcia del fluid contingut en un tub de secció A constant i longitud L és $\rho L/A$, o bien $\rho V/A^2$ [kg/m⁴].

⁴² Aquesta equació tampoc té en compte les pèrdues singulars a l'embocadura i a la sortida, tret que s'inclouguin en la longitud equivalent del conducte, i suposa que f és constant i independent de v .

⁴³ Compareu aquestes equacions amb les d'Euler en coordenades genèriques quan les línies de corrent són rectes.

⁴⁴ Conegudes com a solucions al moviment amb forces de viscositat dominants o corrents laminars. Els fluxos unidireccionals estacionaris que resulten ser solucions exactes de les equacions de Navier-Stokes són estables, en general, per a valors prou petits del número de Reynolds avaluat per al flux en qüestió. Per a fluxos amb Re superiors a un crític, el corrent és turbulent i inestable, i la pressió reduïda varia a través de la secció, encara que el contorn sigui unidireccional, a causa de l'aparició d'esforços turbulents. Si el contorn unidireccional no és bidimensional, com ho és un conducte circular, llavors apareixen, a més, fluxos secundaris amb velocitats mitjanes no nul·les en direcció transversal. Aquestes velocitats són, en general, petites i menyspreables enfront de v_x , de manera que les condicions [2.133] i [2.138] continuen sent vàlides.



-
- ⁴⁵ Observeu que la densitat no apareix en aquesta expressió, perquè l'acceleració total de la partícula és nul·la en aquesta classe de moviments.
- ⁴⁶ En pertorbacions isentròpiques de petita amplitud, els canvis de pressió s'associen als canvis de densitat mitjançant l'equació: $dp = c^2 dp$. Tenint present que la velocitat del so en condicions normals és de l'ordre de 340 i 1.400 metres per segon a l'aire i l'aigua, respectivament, s'entén que els fluxos estacionaris més comuns es puguin considerar incompressibles.
- ⁴⁷ Observeu, com era d'esperar, que aquestes condicions coincideixen amb aquelles que fan el flux isentròpic: [2.79], [2.80] i [2.82], pel fet que α de l'ordre de la inversa de la temperatura absoluta..
- ⁴⁸ La component en $\{z\}$ s'ha omès, però podria no ser nul·la si el vòrtex lliure fos, per exemple, un remolí d'aigua sota l'acció de la gravetat. El moviment consegüent seria el resultat de la combinació de tots dos segons el principi de superposició.
- ⁴⁹ La circulació [1.6] es defineix, indistintament, en qualsevol tipus de moviment. Si el fluid girés com un sòlid, llavors seria $\Gamma = 2\pi\omega r^2$, funció de r .
- ⁵⁰ L'equació [2.36] no inclou tots els termes que indueixen producció de vorticitat perquè s'havia trobat en el supòsit de fluids incompressibles i camps de forces conservatius. Una anàlisi més rigorosa mostra que hi ha termes associats a la compressibilitat, l'existència de forces màssiques no conservatives, com la de Coriolis, i a la no barotropia del fluid.
- ⁵¹ Això justifica que el desplaçament del fluid en una tempesta intensifiqui la vorticitat local en estirar i estrènyer els tubs de remolí, en què la circulació és constant. Aquest estirament produeix tornados en forma d'embut que han d'acabar en una superfície sòlida o lliure.
- ⁵² És com si s'observés només una secció recta d'un tornado.

Bombes hidràuliques

Una màquina de fluid és un sistema mecànic que intercanvia energia amb el fluid que hi està contingut o que hi circula a través. Són màquines de fluid les bombes, els ventiladors, els compressors, les turbines hidràuliques, les turbines de vapor i de gas, però també els caragols d'Arquimedes o les rodes hidràuliques. La gran complexitat del flux en aquestes màquines, fins i tot en un suposat ideal, fa que estudiar-les sigui motiu de recerca permanent i que el seu disseny es basi tant en l'experimentació com en el desenvolupament de teories i simulacions que analitzin el flux tridimensional.

En el sentit més ampli del terme, una bomba hidràulica és una màquina generadora que treballa amb un fluid incompressible en què hi ha una transformació d'energia mecànica en hidràulica. El capítol se centra bàsicament en les bombes rotodinàmiques i en les volumètriques, ja que són les més usuals.

3.1 Descripció general i camps d'aplicació

En general, les màquines de fluids es poden classificar segons el sentit de transmissió de l'energia entre el fluid i la màquina (bombes enfront de turbines, és a dir, generadores enfront de motors), la compressibilitat del fluid (bombes hidràuliques enfront de compressors) o el seu principi de funcionament (per exemple, una bomba centrífuga enfront d'una de volumètrica). Segons aquest últim criteri, les bombes hidràuliques poden ser rotodinàmiques o turbomàquines, en què l'intercanvi d'energia es produeix mitjançant la transferència de quantitat de moviment; de desplaçament positiu o volumètriques; gravimètriques, en què l'energia intercanviada és de tipus potencial, i d'altres tipus més singulars, com les capil·lars, d'ariet, etc.

La missió d'una bomba és transferir energia a un líquid per permetre'n el transport en una instal·lació. Això comporta normalment un augment de la pressió a la sortida de la bomba que es pot relacionar amb el cabal que s'estigui transportant en forma de corba característica. Aquesta corba característica és pròpia de cada bomba, i depèn de la seva forma i principi de funcionament, de la grandària, de la velocitat de l'accionament, etc., i també d'algunes propietats del fluid (però sobretot, de la seva viscositat).



Cal afegir, no obstant això, que el transport d'un fluid es pot donar sense que n'augmenti la pressió, i fins i tot sense que hi hagi cap mecanisme impulsor, com passa a les metxes capil·lars o en el vessament d'un líquid des d'un dipòsit a pressió. Entre les màquines destinades a transportar líquids a pressió constant, hi ha les sínies i els rosaris, en general poc comercialitzades i d'execució molt especial, i també els caragols d'Arquimedes, que actualment tenen algunes aplicacions industrials interessants.

Les bombes hidràuliques més usals són les bombes rotodinàmiques o turbomàquines i les de desplaçament positiu o volumètriques. Es pot afirmar, sense més pretensió que ser objectius, que són comptats els processos industrials en què està implicat un fluid que no faci servir alguna d'aquestes bombes. Una bomba rotodinàmica és una màquina generadora que comunica energia al fluid quan passa per un o diversos rodets, rotors o impulsors, i n'incrementa la quantitat de moviment,¹ però sense un canvi apreciable en la seva densitat. Segons la direcció del flux en el rodet, aquestes bombes es poden classificar en centrífugues o radials, axials i de flux mixt. Les bombes volumètriques són enginyers mecànics que transporten el fluid en forma de paquets discrets que no interaccionen entre si. Aquesta forma d'impulsió té una sèrie de conseqüències bastant evidents: d'una banda, interromp la vena fluida i, per tant, l'equació de l'energia només es pot aplicar si es fa una mitjana temporal dels seus termes; però, d'altra banda, afavoreix el transport de fluids viscosos a alta pressió i fa que el seu cabal sigui gairebé independent de la pressió a unes revolucions donades. Aquesta última circumstància les fa molt indicades en sistemes de transmissió d'energia i de dosatge, sectors industrials en què troben nombroses aplicacions pràctiques sense gairebé competència. La taula següent presenta les característiques principals d'aquestes bombes i la figura 3.1 mostra el seu interval d'aplicació actual. En els apartats següents, es fa una descripció més precisa d'aquests tipus de bombes i de les seves característiques funcionals.

També es presentaran altres models de bombes perquè el lector es faci una idea de les diferents alternatives tecnològiques que hi ha, i se'n deixaran sense explicar d'altres que tenen un desenvolupament industrial, en general, bastant menor, encara que puguin ser singulars en algun sector particular.

Bombes volumètriques		Bombes rotodinàmiques	
La transferència d'energia es deu al desplaçament del fluid quan passa per la màquina, acompanyat normalment d'un procés de compressió dins o fora.		La potència hidràulica transmesa resulta de la variació del moment cinètic que experimenta el fluid quan travessa el rodet de la màquina	
En les bombes de desplaçament positiu, el fluid circula a través de la bomba en forma de paquets discrets separats els uns dels altres.		Els orificis d'entrada i sortida estan comunicats hidràulicament per un canal obert, de manera	



Bombes volumètriques 	Bombes rotodinàmiques 
	<p>que el fluid pot recircular a l'interior de la bomba i fluir a contracorrent</p>
<p>No poden treballar contra vàlvula d'impulsió tancada. Necessiten una vàlvula de seguretat que limiti la pressió màxima.</p>	<p>Poden treballar contra vàlvula d'impulsió tancada perquè la pressió màxima està limitada pel seu principi de funcionament.</p>
<p>El cabal que impulsa la bomba és poc dependent de la pressió de treball, dins dels límits de potència de l'accionament conforme a les especificacions de seguretat.</p>	<p>El cabal que impulsa la bomba depèn de la pressió de treball. Quan es tanca la vàlvula d'impulsió, la pressió augmenta, el cabal efectiu es fa nul i el líquid recircula per l'interior de la màquina.</p>
<p>El cabal impulsat és proporcional a les revolucions de l'accionament dins de l'interval de velocitats facilitat pel fabricant.</p>	<p>El cabal impulsat és proporcional a les revolucions en sistemes hidràulics d'altura estàtica nul·la. En altres casos, hi ha una certa proporcionalitat, però no una relació lineal tan evident com en les volumètriques.</p>
<p>Tenen diversos elements mòbils per transportar el fluid de l'entrada a la sortida i impedir-ne la reculada. Aquests elements poden ser vàlvules, rodes dentades, paletes, pistons, etc., segons el seu principi de funcionament.</p>	<p>Les bombes rotodinàmiques fan servir un rodet o diversos per comunicar l'energia al fluid. Per norma general, el rodet o els rodets són els únics elements mòbils a l'interior de la bomba (i l'eix motor).</p>
<p>El cabal que s'impulsa és polsant, cosa que genera importants pics de pressió en el sistema. L'oscil·lació de la pressió provoca vibracions i sorolls, efectes que han de ser atenuats en la mesura del possible.</p>	<p>El cabal s'impulsa de manera contínua. L'aparició de polsos de pressió se sol deure a la freqüència de pas dels àleps del rodet (i són, en general, de petita magnitud) o a la generació de fenòmens transitoris en la instal·lació (oscil·lacions de massa o cops d'ariet) durant la posada en marxa o l'aturada del grup impulsor.</p>
<p>Les bombes de desplaçament positiu són autoaspirants. No obstant això, la seva capacitat d'aspiració, en termes de l'altura d'aspiració o de la pressió màxima a la seva entrada, depèn de la mena de bomba.</p>	<p>Per norma general, són de capacitat d'aspiració limitada, molt inferior a la de les bombes de desplaçament positiu. Han de ser encebades perquè puguin impulsar cabal. Tanmateix, hi ha tipologies de bombes rotodinàmiques autoencebants.</p>

Taula 3.1. Comparativa entre les bombes rotodinàmiques i volumètriques.

La bomba perifèrica (figura 3.2), també anomenada de canal lateral o regenerativa, és un tipus de bomba rotodinàmica preparada per subministrar petits cabals, però a una gran pressió (de fins a 300 bar). Aquestes bombes disposen en el seu interior un o dos rodets en sèrie, oberts i en forma de disc, amb paletes (p) inserides en una disposició d'estrella. El fluid no travessa tot el rodet a través del canal entre àleps, com passa en les altres bombes rotodinàmiques, sinó que es manté circulant en un canal lateral (c) mecanitzat en la mateixa carcassa interna de la bomba. L'efecte de la força centrífuga fa que el fluid es vegi atrapat a la perifèria del rotor i forçat a circular pel canal lateral, la secció del qual disminueix progressivament fins a ser nul·la prop de la llumenera d'impulsió (i). En aquest moment, augmenta la pressió del fluid, que



només pot retrocedir cap a radis menors a l'interior de la cel·la entre àleps i, a continuació, sortir de la bomba o entrar en l'etapa següent. Més endavant, el fluid no impulsat s'escapa altre cop cap al canal, on participa d'un intercanvi de quantitat de moviment amb el fluid que acaba de ser aspirat (a). El resultat d'aquesta regeneració és un augment considerable de la pressió al canal lateral de tota la bomba, cosa que, al seu torn, ocasiona múltiples corrents de circulació entre el canal i els àleps. Aquest principi de funcionament fa que aquestes bombes siguin autoaspirants per naturalesa, a diferència de la resta de rotodinàmiques, però, en canvi, el seu rendiment ha de ser baix, entorn del 50 %, per la gran quantitat de recirculacions i pèrdues per xoc que tenen lloc en el seu interior.

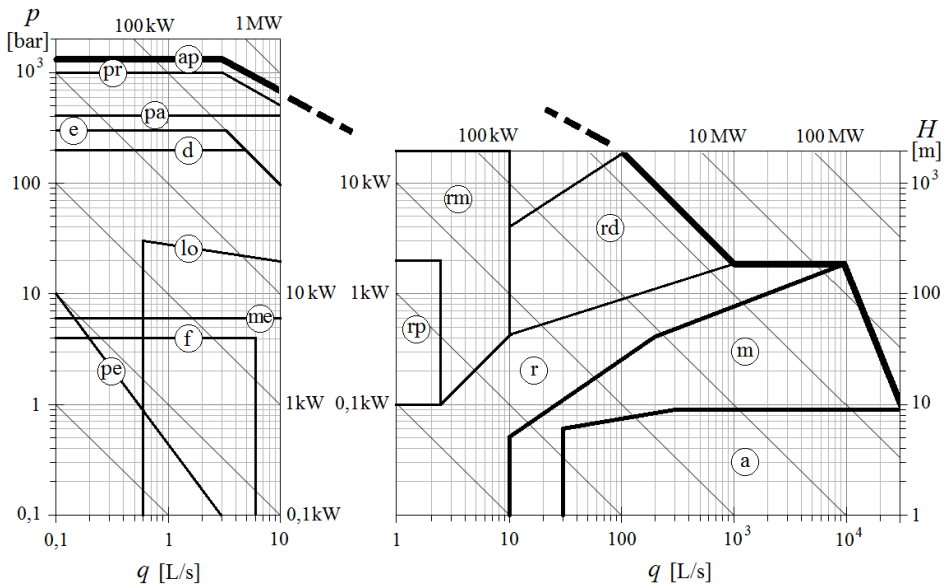


Figura 3.1. Interval·ls d'aplicació de les bombes volumètriques (esquerra) i rotodinàmiques (dreta). La potència indicada es refereix a l'aigua. A la figura: ap, alternatives d'alta pressió; pr, pistons radials; pa, pistons axials; e, engranatges; d, paletes lliscants; el, engranatges lobulars; em, membrana; f, paletes flexibles; pe, peristàltica; r, radial d'una etapa; a, axial; m, diagonals o mixtes; rp, petita radial multietapa i perifèriques; rm, radial multietapa; rd, radial multietapa de doble aspiració.

Una altra classificació de les bombes inclouria aquells dispositius capaços de facilitar el transport d'un fluid però sense necessitar parts mòbils, rodets o vàlvules. Dins d'aquesta categoria, s'inclouen els ejectors per efecte Venturi i les bombes Mammut o d'empenta ascendent (*air lift*) de la figura 3.2.

Els ejectors o trompes de buit aprofiten la depressió generada per un corrent en el coll d'un tub de Venturi per aspirar un líquid que és en un pla inferior. Aquestes bombes necessiten un fluid a pressió, aigua o aire per norma general, que alimenti



l'entrada del tub de Venturi i generi el buit necessari. El cabal aspirat (q) és una funció gairebé lineal de la pressió d'alimentació (p) i és bastant uniforme si es mantenen les condicions de treball. El seu rendiment global és força baix, de l'ordre del 30%, però el seu ús permet el transport per mescla de dos fluids, així com superar altures d'aspiració importants (per això es poden fer servir com a mitjà alternatiu per a l'encebament d'altres bombes).

Les bombes d'empenta ascendent tampoc tenen parts mòbils i també necessiten un corrent auxiliar, en aquest cas d'aire o gas. L'efecte de bombeig es produeix en aquests dispositius injectant aire a pressió a la part inferior i submergida d'un tub, pel qual fluïrà el líquid arrossegat pel corrent d'aire en el seu ascens. La pressió d'injecció (p) de l'aire depèn de la profunditat a què es troba el tub, tot i que generalment això no és un problema, ja que, per exemple, en el cas d'haver de bombar aigua, amb 2 bar de pressió n'hi ha prou per poder injectar aire a 20 metres de profunditat. El flux ascendent és mixt, perquè conté un corrent barrejat d'aire i líquid la densitat específica mitjana del qual és menor que la del líquid sol, i pot transcórrer en diferents modalitats (flux bombolla, tap o anular), segons la quantitat d'aire injectat i la profunditat del tub. El rendiment d'aquestes bombes també és baix, de l'ordre del 25%, però així i tot troben bastantes aplicacions en el bombeig de suspensions, aigües residuals, així com en l'extracció d'aigua i hidrocarburs de pous profunds.

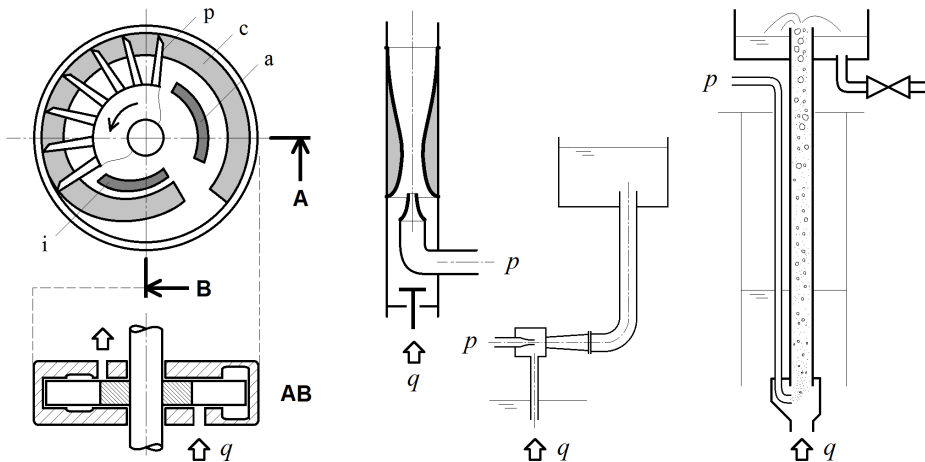


Figura 3.2. Bomba perifèrica (esquerra), ejectors (centre) i bomba d'embranchada ascendent (dreta).

La bomba d'ariet (figura 3.3) és un model de bomba que no necessita cap tipus de font primària d'energia, ja sigui rebuda d'un motor o d'un fluid auxiliar. Aquesta bomba aprofita l'empenta d'un corrent descendent d'aigua per induir un cop d'ariet controlat la sobrepressió del qual és retinguda en un calderí (c). La bomba incorpora,



a més, vàlvules de descàrrega o desguàs (vd) i de retenció (vr), la dinàmica d'obertura de la qual i tancament, regulació i taratge han d'estar en sintonia amb la pressió i amb el cabal desitjats. El principi de funcionament alternatiu d'aquesta bomba garanteix un petit cabal ecològic i una pressió suficients per a un habitatge de muntanya sense que requereixi un gran manteniment. És necessari, no obstant això, que la bomba pugui accedir a un corrent lliure d'aigua, amb un desnivell de l'ordre d'un metre, que pugui fer fluir pel seu interior. El cop d'ariet es provoca quan aquest corrent aconsegueix un valor preestablert (i regulable) per la vàlvula de desguàs tancant-la. La sobrepressió consegüent obre la vàlvula de retenció i dona pas al fluid a l'interior del calderí. Quan entra el cop en la fase de depressió, la vàlvula de retenció es tanca i aïlla el cabal derivat del circulant, i, una vegada en repòs, la vàlvula de desguàs s'obre pel seu pes o per l'acció d'una molla i dona lloc a l'inici d'un altre cicle. La repetició d'aquest procés fa que la pressió de sortida del calderí sigui polsant i s'utilitzin dipòsits d'aforament per acumular el cabal i evitar aquest inconvenient, si convé.

Aquest apartat conclou dedicant algunes línies al caragol d'Arquimedes pel seu interès industrial en el transport de fluids amb sòlids en suspensió. El principi de funcionament del caragol d'Arquimedes és la "rosca d'aigua", o quantitat d'aigua escopida per l'extrem superior del caragol per filets de rosca i revolució. El cabal d'aquesta bomba és proporcional a l'àrea anular del caragol, al pas entre filets i a les revolucions; és a dir, guarda certa analogia funcional amb les bombes volumètriques tot i que, a diferència d'aquestes, pot treballar a càrrega parcial (especialment, en els caragols oberts) amb un bon rendiment. Per norma general, la inclinació del caragol més favorable des d'una perspectiva volumètrica és d'uns 30° , de manera que la seva longitud és de l'ordre de dues vegades la seva altura. Aquesta circumstància no només condiciona l'altura màxima assolible, sinó també el diàmetre mínim de l'eix del caragol per evitar-ne la flexió. De totes maneres, com que els caragols grans són més robustos i asseguren la constància dels jocs diametral, el seu rendiment també és més gran i fins i tot pot arribar al 80%, en alguns casos. Un petit inconvenient d'aquesta mena de bomba és que necessita una caixa reductora en l'accionament (si és per motor elèctric), perquè les revolucions òptimes per a un bon rendiment són baixes comparades amb altres tipus de bomba: per a cabals petits, són habituals velocitats de 80 rpm, que disminueixen fins a les 20 rpm a mesura que el cabal augmenta. L'avantatge més gran és, sens dubte, el seu bon comportament en el transport de fluids bruts, com per exemple les aigües residuals, i amb cossos en suspensió, com el ciment, sempre que el canal inferior del caragol estigui dissenyat per rebutjar els cossos més grans que el poguessin bloquejar. Aquestes bombes també es fan servir per desplaçar cossos sòlids en forma granular, com per exemple, cereals.

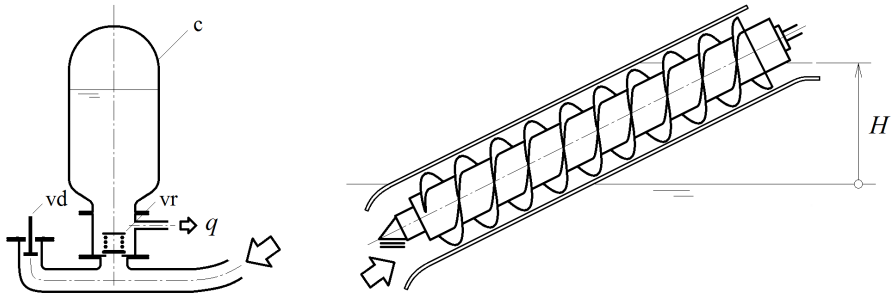


Figura 3.3. Bomba perifèrica (esquerra), ejectors (centre) i bomba d'embranchida ascendent (dreta).

3.2 Balanç energètic en una bomba

El plantejament de l'equació de l'energia entre l'entrada i la sortida d'una màquina per la qual s'ha establert un flux màssic de fluid, G , en règim estacionari, tal com es va veure en [2.27], s'expressa:

$$G \left[\left(h + \frac{1}{2}v^2 + gz \right)_s - \left(h + \frac{1}{2}v^2 + gz \right)_e \right] = -\dot{W} + \dot{Q} \quad [3.1]$$

és a dir: el producte del cabal màssic i la variació entre la sortida i l'entrada de la suma de l'entalpia, l'energia cinètica i l'energia potencial gravitatòria és igual a la suma del treball més la calor comunicats al fluid a l'interior de la turbomàquina i per unitat de temps.

Tenint present que l'entalpia, h , és la suma de l'energia interna, u , i del terme d'impulsió, p/ρ , l'expressió anterior es pot escriure de la forma:

$$u_s - u_e + \frac{p_s}{\rho_s} - \frac{p_e}{\rho_s} + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) = \frac{-\dot{W} + \dot{Q}}{G} = -w + q \quad [3.2]$$

Es recorda que totes dues expressions són vàlides sota les hipòtesis següents:²

- El procés és quasiestacionari (sense acumulació de massa o energia a l'interior de la màquina).
- El sistema és de manera que el flux només té una entrada i una sortida de la màquina (situació comuna en la pràctica) i no hi ha fuites externes de cabal o són menyspreables.
- Es verifica que el flux és uniforme en les seccions d'entrada i sortida, i que el nivell de turbulència és del mateix ordre en ambdues. Si aquest últim supòsit no fos vàlid, s'hauria d'afegir el terme de fluctuació turbulenta corresponent, que no afecta el cabal, però sí el terme quadràtic de la velocitat.



- La velocitat del fluid en les superfícies fixes no mòbils és nul·la, i en les mòbils, la del cos en moviment (condició de no lliscament).

3.2.1 Equació de l'energia mecànica

L'equació de l'energia mecànica a través d'una màquina de flux incompressible s'obté de l'equació de l'energia quan s'agrupen els termes tèrmics i s'identifiquen les pèrdues viscoses en el volum interior de la màquina, Φ_v , com a [2.43]. Admetent que el fluid és incompressible i que la situació és quasiestacionària, l'equació de l'energia interna descrita per al volum de control establert a la màquina és:

$$\int_{S_c} \rho u(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_c} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + q_a) dV + \int_{V_c} \Phi_v dV \quad [3.3]$$

que, agrupant les integrals de volum i en absència de fuites externes, és:

$$G(u_s - u_e) = \dot{Q} + \Phi_v \quad [3.4]$$

Aquesta equació combinada amb [3.2] condueix a:

$$\frac{p_s - p_e}{\rho} + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) + \frac{\Phi_v}{G} = -\frac{\dot{W}}{G} = -w \quad [3.5]$$

Si la màquina considerada és una bomba, el treball comunicat per unitat de massa, w , és negatiu en valor absolut i es dedica a augmentar l'energia mecànica específica, e_m , i a suportar les pèrdues que hi tenen lloc.³ Com que la pèrdua d'energia per unitat de massa per fricció viscosa es defineix com:

$$Y_v = \frac{\Phi_v}{G} > 0 \quad [3.6]$$

l'augment d'energia mecànica específica s'observa en l'augment combinat dels termes de pressió, energia cinètica i energia potencial, i és:

$$\frac{p_s - p_e}{\rho} + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) = -w - Y_v = -w_u \quad [3.7]$$

3.2.2 Altura manomètrica i formes d'energia específica

És habitual fer servir el terme *altura manomètrica*⁴ per anomenar l'increment d'energia mecànica útil per unitat de pes de fluid bombat. L'altura manomètrica comunicada per la bomba, H_B , és:

$$H_B = -\frac{w_u}{g} = \frac{p_s - p_e}{\rho g} + \frac{1}{2g}(v_s^2 - v_e^2) + (z_s - z_e) \quad [3.8]$$

Amb aquesta definició, i fent $Y_v = gH_v$, el treball per unitat de temps resulta ser:



$$-\dot{W} = gG(H_B + H_f) = -wG \quad [3.9]$$

i, evidentment:

$$-\dot{W}_u = gGH_B = \rho gQH_B = -w_u G \quad [3.10]$$

L'energia per unitat de massa, $Y = gH_B$, és, tal com es veurà, un invariant de la bomba rotodinàmica per a unes condicions de funcionament donades, ja que està relacionada directament amb la geometria, la grandària i les revolucions per mitjà dels triangles de velocitats en el rotor. L'equació [3.8] en funció de Y s'escriu:

$$Y = -w_u = \frac{p_s - p_e}{\rho} + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) \quad [3.11]$$

i el salt de pressió total o increment d'energia mecànica per unitat de volum:

$$p_T = -\rho w_u = (p_s - p_e) + \frac{1}{2}\rho(v_s^2 - v_e^2) + \rho g(z_s - z_e) \quad [3.12]$$

Qualsevol d'aquestes equacions mostra com s'observa l'increment d'energia proporcionat per la bomba des del sistema. En concret, si la cota a què són les brides d'aspiració i impulsió són iguals, i els conductes a l'entrada i a la sortida de la màquina són del mateix diàmetre, l'altura manomètrica de la bomba s'observa des de l'exterior com un increment de la pressió estàtica entre e i s , i llavors $H_B = (p_s - p_e)/(\rho g)$.

Tant Y com a H_B i p_T són formes específiques d'energia mecànica (o del seu increment) per unitat de massa, pes i volum, respectivament, i proporcionen l'increment de la potència del flux quan es multipliquen pel cabal en massa, pes o volum de fluid transportat. És fàcil deduir que $[J/kg] = [m^2/s^2]$, $[J/N] = [m]$ i $[J/m^3] = [Pa]$, encara que les dues segones formes d'energia específica estan més esteses en la pràctica per la seva fàcil interpretació. És important tenir present, tot i això, que, sent Y un invariant de la bomba rotodinàmica, l'altura H_B ho és si no canvia l'acceleració de la gravetat i la pressió total si no ho fa la densitat del fluid. Això és, per a una Y donada, l'altura d'elevació d'una bomba seria més gran a la Lluna que a la Terra, i el salt de pressió total comunicat, molt més gran en el cas d'impulsar líquids que gasos (més gran en bombes que en ventiladors). Aquesta última circumstància explica el defecte de capacitat de succió en les bombes rotodinàmiques, incapaces de generar una gran depressió a la seva entrada si no han estat encebades prèviament..⁵

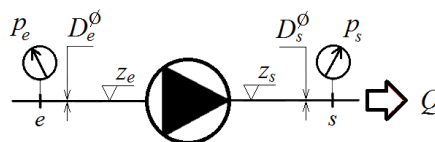


Figura 3.4. Condicions d'entrada i de sortida per al balanç d'energia específica en una bomba.



3.2.3 Pèrdues i rendiments característics

Les pèrdues que tenen lloc en una bomba responen a tres tipologies diferents, a saber:

- Pèrdues volumètriques o de cabal
- Pèrdues hidràuliques
- Pèrdues mecàniques

Les pèrdues de cabal, G_f , es poden agrupar en dues classes: les exteriors, $G_{f,e}$, degudes a l'esquitxada de fluid cap a l'exterior a través del joc entre la carcassa i l'eix de la bomba, o a través de les brides de connexió; i les interiors, $G_{f,i}$, degudes a l'augment de pressió a l'interior de la bomba, cosa qque origina tot tipus de recirculacions internes. Per norma general, les fuites internes són més quantioses que les externes i la seva reducció resulta més complicada. Les fuites de fluid en les bombes es descriuen normalment en termes del cabal en volum, és a dir, $Q_{f,e}$ i $Q_{f,i}$.

Les pèrdues hidràuliques són les que disminueixen l'energia útil que la bomba comunica al flux de fluid. Aquesta energia útil, que expressada en termes d'energia per unitat de pes és l'altura manomètrica de la bomba, H_B , s'obté aplicant Bernoulli entre les seccions d'entrada i sortida de la bomba, i està relacionada amb l'altura teòrica de la bomba i les pèrdues a l'interior de la manera següent:

$$H_t = H_B + H_f \quad [3.13]$$

A les bombes centrífugues, el terme H_f engloba les pèrdues de dos tipus bàsics (v. [4.38]): les pèrdues de superfície, $h_{f,C}$, degudes al flux a través del rotor i dels conductes interns de la bomba, com ara els difusors, i les pèrdues de forma, $h_{f,S}$, que es deuen al desprendiment de la capa límit a l'entrada i a la sortida del rodet, o al xoc del fluid amb el rodet, segons siguin la seva velocitat i la seva direcció respecte dels àleps, o a l'entrada de la cambra espiral. Aquestes pèrdues són de petita quantia en les màquines de desplaçament positiu, perquè van associades al flux continu de fluid, que és menyspreable o inexistent.

Les pèrdues de tipus mecànic són el resultat de l'existència de pèrdues per fricció, ja siguin pel fregament entre les parts sòlides de l'interior de la màquina que participen del moviment relatiu o absolut (coixinets, juntes, etc.), o de tipus hidràulic, anomenades en les bombes rotodinàmiques *pèrdues per fricció en el disc* (que formarien part de [3.6] i que existeixen fins i tot en absència de flux útil, sempre que giri el rotor mullat).

Cadascuna d'aquestes pèrdues és descrita per mitjà del rendiment corresponent, de manera que és possible calcular el rendiment total de la bomba com el producte de tres rendiments, que són:

- El rendiment volumètric, η_V , per l'existència de fuites en cabal.
- El rendiment hidràulic, η_H , que és el quocient entre l'altura útil comunicada al fluid, H_B , i la suma d'aquesta i les pèrdues, H_f .



- El rendiment mecànic, η_{mec} .

La potència (definida ara positiva) que s'inverteix en la màquina,⁶ N , és superior a la que rep el fluid que travessa el rotor de la bomba, N_i , i ve donada per:

$$N = \frac{N_i}{\eta_{mec}} = \frac{g(G + G_f)(H_B + H_f)}{\eta_{mec}} \quad [3.14]$$

en què G_f és el cabal màssic total de fuites, tant internes com externes. La diferència entre totes dues potències representa les pèrdues mecàniques i aquella potència consumida en l'accionament de qualsevol mena de dispositiu auxiliar, com per exemple, un compta-revolucions.

Analíticament, els tres rendiments anteriors es dedueixen de l'expressió següent:

$$\eta_B = -\frac{\dot{W}_u}{N} = \frac{G}{G + G_f} \frac{H_B}{H_B + H_f} \frac{g(G + G_f)(H_B + H_f)}{N} = \eta_V \eta_H \eta_{mec} \quad [3.15]$$

i, en conseqüència:

$$\dot{W}_u = -\eta_V \eta_H N_i \quad [3.16]$$

Totes aquestes relacions defineixen el sentit de la transformació d'energia en una màquina i poden ser utilitzades com a mitjà de comprovació de la seva eficiència, però no diuen res sobre la seva geometria o sobre la relació que té amb les seves prestacions. Aquestes qüestions i d'altres es tractaran en el capítol següent.

3.3 Bombes rotodinàmiques

Les bombes rotodinàmiques es poden agrupar per diversos conceptes: nombre i disposició d'etapes, posició de l'eix, tipus d'accionament, elements de l'estator, etc., però, sens dubte, la més característica i la que les defineix millor és la direcció del flux a la sortida del rodet. Segons aquest últim concepte, les bombes fluidodinàmiques es classifiquen en:

- Bombes centrífugues o radials.
- Bombes axials.
- Bombes de flux mixt.

Les bombes centrífugues són el tipus més corrent de bomba rotodinàmica. Es troben bombes centrífugues per a cabals des d'1 L/min fins a 10⁶ L/min, altures d'alguns metres fins a diverses centenes, fins i tot en configuracions d'una etapa, i potències de desenes de W fins a alguns MW. El rendiment de les bombes més grans pot arribar al 90% i la seva corba de potència augmenta amb el cabal.

En aquestes bombes, l'altura manomètrica H_B és atribuïble, en gran manera, a l'acció centrífuga que rep el fluid a l'interior del rodet. El rodet d'aquesta mena de bomba



conté un cert nombre d'àleps, corbats normalment en direcció contrària al sentit de gir, que determinen la direcció de les velocitats absoluta i relativa en el seu interior.

El fluid entra pel centre del rodet, atret per la depressió que genera en girar, i és arrossegat pels àleps en direcció radial, de manera que a la sortida el moviment del fluid té components radial i transversal, però no axial. Entre els àleps i les parets internes laterals del rotor en dissenys de rodet tancat, o entre una d'aquestes i la carcassa de la màquina si el rodet és obert, es forma un canal per on circula el corrent i on el fluid experimenta canvis en la seva velocitat i en la seva pressió seguint els principis de conservació.

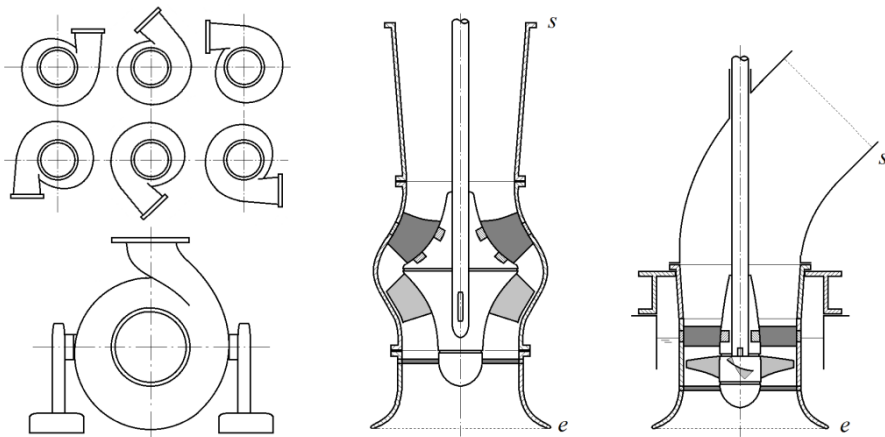


Figura 3.5. A l'esquerra, diferents posicions estàndard de muntatge de les canonades d'impulsió de bombes centrífugues amb sortida radial tangencial. En l'actualitat, es prefereix la sortida radial centrada de la figura inferior, perquè disposa les canonades d'aspiració i impulsó sobre un mateix pla i redueix tensions de gir sobre la carcassa. Al centre i a la dreta, la disposició comuna de les bombes semiaxial i axial d'una etapa. La bomba axial és d'eix passant i sortida colzada.

Com que l'energia que incrementa el fluid en la bomba és aportada enterament pel rodet, és clar que la seva grandària i la seva geometria determinen, en gran manera, les característiques funcionals de la màquina. No obstant això, només part de l'energia generada és estàtica, de manera que l'increment d'energia cinètica al rodet s'ha de transformar en energia de pressió mitjançant difusors. Per tot això, l'altura total de la bomba, observada entre la seva entrada i la seva sortida, és el resultat de combinar els dos efectes: la generació d'energia al rotor i la seva transformació als difusors posteriors.

Les bombes centrífugues estan disponibles en diversos materials i dissenys del mecanisme impulsor, fins i tot amb tracció magnètica i segells dinàmics, i es poden combinar en grups de bombeig formats per diverses bombes en sèrie o en paral·lel. A més, és freqüent trobar bombes multicel·lulars que combinen en el seu interior diversos



rodets, també en sèrie o en paral·lel, per augmentar l'energia o el cabal de la bomba sense penalitzar-ne la grandària.

A les bombes axials, els vectors velocitat absoluta del fluid a l'entrada i la sortida del rotor no presenten component radial (o és mínima). Aquest tipus de bombes són molt adequades quan cal elevar un gran cabal a petita altura, per exemple, en regadius o en la manipulació d'aigües residuals. La seva altura màxima de funcionament és d'uns 10 metres, tot i que poden aconseguir algunes desenes de metres mitjançant la combinació en sèrie de diversos escalonaments. El rendiment d'aquestes bombes és comparable al de les centrífugues, però la seva corba de potència disminueix amb el cabal.

El rodet d'aquesta mena de bombes és obert, i la seva forma, anàloga a la d'un ventilador de sobretaula o una hèlix naval. El fluid entra en la direcció de l'eix i adquireix component de gir quan passa pel rodet. De vegades, es disposa una cascada d'àleps fixos directors darrere del rodet (figura 3.5) per retornar el flux a la direcció axial i induir un efecte difusor. També és possible trobar àleps directrius a l'entrada per dirigir el flux en la direcció adequada.

La bomba de flux mixt ocupa una posició intermèdia entre la centrífuga i la de flux axial. La direcció del flux de fluid a la sortida del rotor no és ni radial ni axial, sinó que la seva trajectòria dins del rotor s'aproxima a una hèlix cònica. L'altura que s'aconsegueix amb aquesta mena de bombes pot ser de fins a 25 metres per rodet i la seva corba de potència és pràcticament horitzontal. La recuperació de la cota de pressió s'aconsegueix també mitjançant difusors.

3.3.1 Flux i velocitats

El principi de conservació de la massa en forma integral indica que el cabal en volum que travessa la secció de sortida de la màquina, considerant que el problema és quasiestacionari i incompressible i que, per tant, no hi ha acumulació de massa en el seu interior, és:

$$Q = \int_{S_s} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{s} dS = \int_{S_e} \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{e} dS - Q_{f,e} \approx \int_{S_e} \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{e} dS \quad [3.17]$$

en què $Q_{f,e}$ és el cabal en volum de fuites externes (en general, menyspreable). Els versors \mathbf{s} i \mathbf{e} s'havien definit a [2.9].

D'ara endavant, es denominarà amb la lletra c la velocitat absoluta del fluid a l'interior de la màquina (que no s'ha de confondre amb la velocitat del so, c , utilitzada anteriorment). A l'interior del rotor, aquesta velocitat resulta de la suma vectorial de les velocitats d'arrossegament, \mathbf{u} , i relativa, \mathbf{w} , en cada punt, i estarà supeditada al cabal i a la transferència d'energia experimentada. En general, cadascuna d'aquestes velocitats està formada per les tres components que resulten de la seva projecció sobre cadascun dels eixos de referència i la seva suma vectorial es pot representar mitjançant triangles de velocitats (figura 4.1)



En un sistema de coordenades cilíndric lligat a terra l'eix principal del qual coincideixi amb el de la màquina, la velocitat absoluta es descompon en els seus components radial, c_r ; axial, c_z , i azimuthal o perimetral, c_θ , que és perpendicular a les dues anteriors i es troba en el pla de rotació (pr). Les components radial i axial de la velocitat absoluta es troben sobre el pla meridià (pm), que és el pla que conté l'eix de gir de la màquina i és perpendicular al de rotació, i la seva suma vectorial rep el nom de velocitat meridiana, c_m , de manera que $c = c_m + c_\theta$.

Els triangles de velocitats formats per les velocitats absoluta, relativa i d'arrossegament, des de l'entrada a la sortida del rotor, tenen una forma definida per dos angles, que es designen α , per a l'angle que forma la velocitat d'arrossegament amb l'absoluta, i β , per al que forma la velocitat d'arrossegament amb la relativa. És evident que la velocitat d'arrossegament només té component perimetral, sent $u = \omega r \theta$, de manera que els angles anteriors defineixen la direcció de les velocitats absoluta i relativa respecte de la direcció perimetral. Les projeccions de les velocitats absoluta i relativa sobre u s'anomenen c_u i w_u , respectivament, sent $c_u = c_\theta$ a l'interior del rotor.

La forma bàsica de la màquina, incloent-hi el rotor i la resta de components que la formen, depèn de l'orientació de la velocitat meridiana, c_{2m} , respecte de l'eix. Si aquesta component és radial, la turbomàquina és centrífuga i, si és axial, s'anomena axial o d'hèlix. En una màquina radial pura, la component axial de la velocitat absoluta és nul·la tant a l'entrada com a la sortida del rodet i les components meridians coincideixen amb la radial, sent $c_r = c_m$. En canvi, en una màquina axial pura en què $c_r = 0$, és la component axial la que coincideix amb la meridiana i $c_z = c_m$. Vegeu les figures 3.6, 3.7, 3.8 i 4.1 per a una interpretació adequada de totes aquestes definicions.

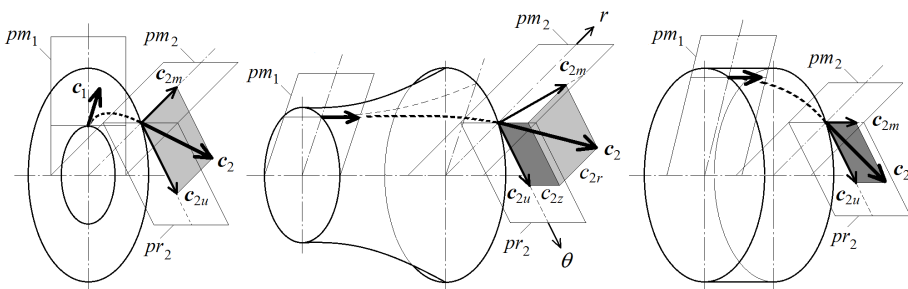


Figura 3.6. Superfícies de flux i velocitat absoluta, i les seves projeccions, en els diferents tipus de rotor d'una bomba rotodinàmica: radial (esquerra), semiaxial, mixta o diagonal (centre) i axial o d'hèlix (dreta). A traços, la línia de corrent absolut en el rotor.

El cabal en les seccions transversals d'entrada i sortida al rotor es pot escriure com:

$$Q_R = - \int_{S_1} c_1 \cdot n_1 dS = \int_{S_2} c_2 \cdot n_2 dS \quad [3.18]$$



en què s'han emprat els subíndexs (1) i (2) per designar l'entrada i la sortida del rotor, respectivament, o bé:

$$Q_R = \int_{S_1} c_{1m} dS = \int_{S_2} c_{2m} dS \quad [3.19]$$

ja que la component perimetral de la velocitat absoluta, c_u , no produeix flux si la secció transversal és de revolució centrada en l'eix.

En general, aquest cabal no coincideix amb el que presenta l'expressió [3.17], tret que les fuites siguin nul·les.⁷ De fet, quan el rotor és obert, tampoc es verifica la igualtat [3.19], però d'ara endavant se suposarà que es compleix i que les pèrdues de cabal previstes amb el rendiment volumètric suposen una minoració de Q respecte de Q_R . Totes aquestes expressions se simplifiquen si la velocitat s'admet uniforme en cadascuna de les seccions.

3.3.2 Energies dinàmica i estàtica

Una bomba rotodinàmica basa el seu funcionament en el principi de conservació de la quantitat de moviment. Per tant, l'increment total d'energia que experimenta el fluid en el rodet té, com es veurà en el tema següent i excepte excepcions, una part fonamental que resulta de l'increment de la seva velocitat en forma d'energia cinètica [4.24]. Aquesta energia s'ha de transformar adequadament a l'interior de la bomba perquè s'adapti a la mena d'energia que el sistema espera rebre i que ve descrita per l'equació [3.11] i la del sistema [5.1]. En cas de no fer-ho, l'acoblament entre la bomba i la instal·lació no seria eficient, i tant el rendiment de la bomba com el de la mateixa instal·lació disminuirien dràsticament.

Amb aquesta comesa, es disposen a l'interior de la bomba una sèrie de difusors que reconverteixen l'excés d'energia cinètica generada a l'interior del rotor en energia estàtica. Aquests difusors són elements estàtics en forma de conductes o àleps fixos, en què el fluid no incrementa la seva energia però la configuració dels quals, pensada per al treball entorn del punt de disseny, permet transformar l'energia cinètica sobrant i condicionar la velocitat del fluid al moviment del rodet o dels rodetes.

A les màquines de tipologia radial o mixta, s'utilitzen la cambra espiral (CE) i el con difusor (C) de sortida com a elements difusors principals (figura 3.7). A les màquines radials, també s'hi pot situar l'inici de la cambra espiral a un radi més gran respecte de l'eix de gir, de manera que es formi entre el rodet (R) i la voluta (V) un espai en forma de corona (CD) que produeixi un efecte difusor addicional.⁸ Aquesta corona conté, de vegades, àleps fixos que tenen com a missió millorar el rendiment global de la màquina, conduint el flux cap a la cambra espiral de manera òptima.

A les màquines axials, no hi ha cambra espiral. En aquestes màquines, l'efecte difusor buscat, quan és necessari, s'aconsegueix mitjançant àleps fixos, disposats perimetralment i orientats de manera axial, que, combinats amb els mòbils, donen lloc a una



configuració en forma de cascada d'àleps. Per mitjà d'aquesta cascada, el fluid experimenta canvis de direcció concordes amb els angles d'entrada i sortida dels àleps, siguin fixos o mòbils, i s'acomoda de manera gradual al flux principal axial. La cascada d'àleps pot estar formada per una combinació de fins a vint etapes d'àleps fixos i mòbils consecutius, muntats sobre un mateix eix (els fixos serien solidaris de la carcassa).

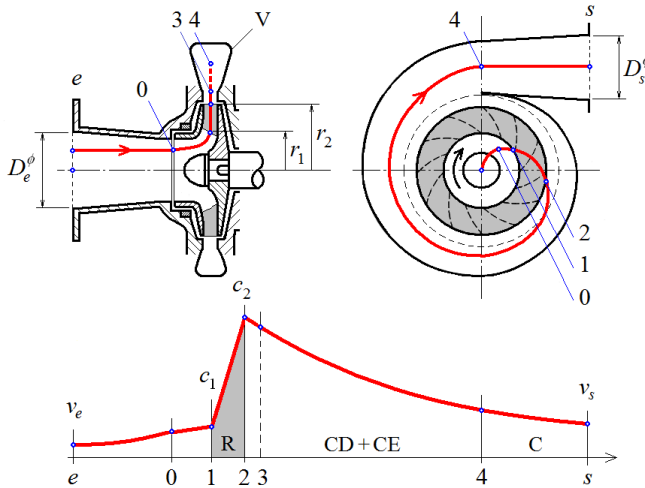


Figura 3.7. Evolució de la velocitat mitjana a l'interior d'una bomba centrífuga. En una bomba monocel·lular, el fluid entra per la brida d'aspiració (e), travessa el rodet descrivint una trajectòria absoluta corba, és recollit per la cambra espiral (CE) o voluta (V) al voltant de tot el perímetre del rodet (R, en gris) i és enviat al con difusor (C) cap a la brida d'impulsió (s). La secció de la voluta es tanca sobre si mateixa (4), una vegada ha fet una volta completa al voltant del rodet.

Els àleps fixos situats entre els rotors d'una cascada axial s'anomenen *àleps difusors*, però també *àleps guia*, *àleps distribuïdors* o simplement *estator* (E), perquè serveixen per guiar el fluid entre etapes i assegurar una transferència d'energia eficient i un bon rendiment. No sempre és necessari disposar àleps fixos a l'entrada o a la sortida d'una cascada d'àleps, però, si s'inclouen, ja sigui per raons econòmiques o funcionals, els primers es disposaran de manera que el seu angle d'entrada respecte de la direcció axial sigui nul o gairebé nul, mentre que en els últims ho serà l'angle de sortida. Això és així perquè s'espera que el flux principal sigui axial i uniforme en el veïnatge del punt de disseny, de manera que el primer àlep fix orienta el fluid perquè entri en el rotor amb la velocitat absoluta adequada,⁹ mentre que l'efecte difusor a la sortida es genera a mesura que el moviment es torna axial a l'estator (la velocitat absoluta perd magnitud a mesura que es torna axial per a un cabal determinat, és a dir, alhora que manté el seu component axial). A les màquines axials d'una etapa reversibles, això és, que poden treballar amb cabals en totes dues direccions canviant el sentit de rotació del motor d'accionament, el perfil dels àleps de rotor i estator ha de ser simètric per obtenir un funcionament equivalent en totes dues direccions.

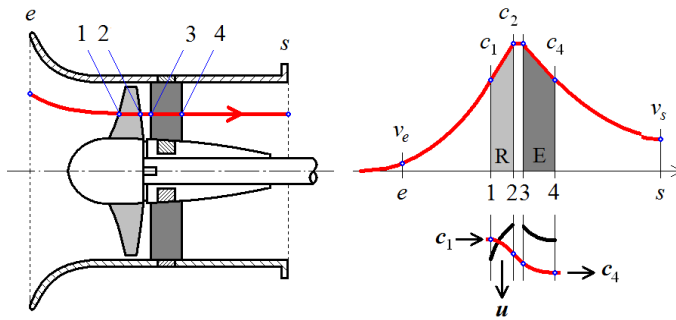


Figura 3.8. Evolució de la velocitat mitjana en una cascada axial d'àleps. S'admet que la velocitat absoluta mitjana no té component radial i que les velocitats a l'entrada del rotor (R) i a la sortida de l'estator (E) només tenen component axial. A baix, a la dreta, es mostra la configuració bàsica d'una cascada axial i l'aspecte de la línia de corrent absolut (que més endavant es concreta en la figura 4.11).

En tots dos casos, tant en les màquines radials com en les axials, el decrement d'energia cinètica entre la sortida del rotor i la de la bomba s'aprofita mitjançant difusors per augmentar l'energia estàtica comunicada: $(p_s - p_e)/\rho$. L'energia total aportada pel rotor, Y_R , no coincideix amb la que s'observa a través de la bomba, Y , ni en quantitat ni en qualitat, ja que, d'una banda, és inevitable que hi hagi pèrdues d'energia en els conductes fixos, siguin difusors o no, i, de l'altra, i fins i tot assumint que la transformació d'energia als difusors sigui ideal, el rotor només contribueix amb una part de l'increment d'energia estàtica de la bomba. La relació entre l'energia estàtica comunicada pel rotor i la total es quantifica mitjançant el grau de reacció (v. [4.57]), que és un dels paràmetres fonamentals en la descripció del funcionament de la màquina i el seu disseny.

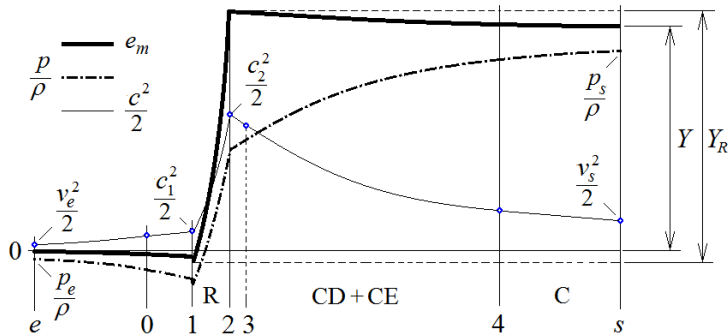


Figura 3.9. Evolució de les energies total, estàtica i cinètica en la bomba centrífuga de la figura 3.7. L'energia per unitat de massa comunicada per la bomba és $Y = gHB$ i pel rotor, Y_R . No es considera el terme de cota.

3.3.3 Variables de funcionament i dimensionals

Les dades de partida per determinar el funcionament d'una bomba rotodinàmica són:



- La forma geomètrica, que inclou la rugositat relativa de la màquina (ε/D) per la seva influència en el càlcul de les pèrdues.
- La grandària, en termes del seu diàmetre, D , que a les màquines radials s'assimila al diàmetre exterior de l'impulsor, i a les axials, al diàmetre a l'altura del cap dels àleps.
- La velocitat angular de gir en rpm, n , o en rad/s, ω .
- Les propietats físiques del fluid. En un problema mecànic, només intervenen la densitat, ρ , i la viscositat, μ .¹⁰ La tensió superficial no hi intervé, ja que, en condicions normals d'operació, no hi ha superfície lliure a l'interior de les bombes.
- Les propietats cinemàtiques del fluid a l'entrada. Si en una màquina estan definides totes les magnituds anteriors i, a més, es coneixen el camp de pressions i velocitats a la seva entrada, llavors la resta de les propietats fluides també seran conegudes a la resta de la màquina i, en particular, a la seva sortida.¹¹

Qualsevol altra variable de funcionament (l'altura d'elevació, H_B ; la potència, N ; el parell, M , o el rendiment, η , etc.) ve determinada en funció d'aquestes dades. Per exemple, per a una forma de bomba donada i sense canviar de fluid, les variables de sortida, H_B , i la potència al fre dependran, almenys, del cabal, Q ; del diàmetre del rotor, D , i de la velocitat de l'eix, ω .

Les relacions funcionals que apareixen en aquest cas són:

$$\begin{aligned} Y &= gH_B = Y(Q, D, \omega, \rho, \mu, \varepsilon) \\ N &= N(Q, D, \omega, \rho, \mu, \varepsilon) \\ M &= M(Q, D, \omega, \rho, \mu, \varepsilon) \end{aligned} \quad [3.20]$$

En cada funció de les relacions anteriors, Y , N i M , hi ha set variables i tres dimensions primàries (M, L i T). Per tant, segons el teorema de Vaschy-Buckingham, s'espera obtenir quatre paràmetres adimensionals en cadascuna d'elles, i aquest és el cas:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{\omega^2 D^2} &= \Psi \left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \\ \frac{N}{\rho \omega^3 D^5} &= N \left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \\ \frac{M}{\rho \omega^2 D^5} &= M \left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \end{aligned} \quad [3.21]$$

Aquestes són les condicions de semblança en les bombes rotodinàmiques. Per descomptat, la tria de les dades i les incògnites no és rígida, sinó que es poden intercanviar els uns amb els altres sempre que es mantingui fix el nombre de dades de partida.¹²



A més de les quantitats $\rho\omega D^2/\mu$, que és una forma del número de Reynolds, i de la rugositat relativa, ε/D , apareixen quatre nous paràmetres adimensionals. Les variables Ψ y Φ s'anomenen *xifra adimensional d'energia* i *de cabal*, respectivament, i es defineixen com:

$$\Psi = \frac{Y}{\omega^2 D^2} = \frac{gH}{\omega^2 D^2} = \frac{p_T}{\rho\omega^2 D^2} \quad [3.22]$$

$$\Phi = \frac{Q}{\omega D^3}$$

La tercera variable és la xifra de potència, N , que és funció del producte $\Psi\Phi$ i del rendiment de la bomba. La xifra de parell està relacionada directament amb la de potència perquè entre el parell i les revolucions de l'accionament es verifica la relació $N=M\omega$.

Una altra manera de descriure, de manera adimensional, l'energia i el cabal d'una turbomàquina, se serveix dels coeficients d'energia i velocitat definits com:

$$\psi = \frac{Y}{u_2^2} \quad [3.23]$$

$$\phi = \frac{c_{2m}}{u_2}$$

la relació dels quals amb els anteriors és:¹³

$$\Psi = \frac{1}{4} \psi \quad [3.24]$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \frac{b_2}{D_2} \phi$$

3.3.4 Lleis de semblança

Perquè dues bombes comparteixin punts de funcionament semblants entre si i hi hagi semblança física completa entre ambdues, cal que tots els grups adimensionals π siguin iguals en aquests punts i que hi hagi semblança geomètrica. La igualtat simultània de tots aquests grups no és possible per raons òbvies, de manera que es fa necessari retenir només els més representatius i admetre, a la pràctica, que la semblança és parcial. Així, per exemple, per arribar a [3.21], s'ha assumit que les forces de compressibilitat i de tensió superficial són menyspreables, de manera que s'ha limitat la influència dels números de Mach i de Weber en primera aproximació. En canvi, com que les forces viscoses no es poden menysprear en general, el número de Reynolds s'ha de retenir, fins i tot treballant amb fluids diferents, si es vol que les forces de fregament quedin ben representades en la transformació.



Una altra perspectiva del mateix problema suggereix que la semblança és completa quan hi ha semblança geomètrica, cinemàtica i dinàmica. La semblança geomètrica és fàcilment verificable entre bombes a escala (λ) i la cinemàtica es pot assumir si les velocitats a l'interior de la bomba, tant en mòdul com en direcció, guarden alguna relació de proporcionalitat.¹⁴ La semblança dinàmica és més restrictiva que les anteriors, perquè exigeix la proporcionalitat entre totes les forces existents i, entre si, no totes guarden relació amb el factor d'escala i la relació de velocitats. Per entendre les implicacions d'aquesta circumstància, pensem en dues situacions diferents. D'una banda, si en un laboratori es pretén analitzar el funcionament d'un prototip sobre la base dels resultats obtinguts d'un model i poder també extrapolar-ne els rendiments, es pot forçar la situació durant els assajos, combinant adequadament la relació de revolucions, la viscositat cinemàtica dels fluids i el factor d'escala, de manera que es conservi el número de Reynolds [2.85]. En canvi, la igualtat dels números de Reynolds entre dues bombes geomètricament semblants que girin a revolucions diferents i treballin amb el mateix fluid és difícil, ja que s'hauria de mantenir constant la relació ωD^2 . És a dir, si, per exemple, entre dues bombes es compleix que $D_b = 2D_a$, sent $n_a = 1.450$ rpm, perquè hi hagi igualtat entre els seus números de Reynolds, les revolucions de l'accionament de la segona bomba han de ser exactament $n_b = 362,5$ rpm. Com que aquest no serà, en general, el cas, amb les bombes funcionant en una instal·lació qualsevol, els números de Reynolds no seran iguals, no hi haurà semblança dinàmica perquè no són proporcionals les forces de fregament, i la semblança entre totes dues bombes serà només parcial i aproximada.

Afortunadament, la influència del número de Reynolds i de la rugositat relativa, ε/D , és menyspreable en les condicions habituals de treball (amb fluids poc viscosos i $Re > 10^5$), i amb els marges d'error admissibles en la pràctica. Com que, a més, a alts números de Reynolds, l'efecte de la rugositat és semblant en totes les bombes, és habitual suposar que les equacions [3.21] s'aproximen a:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{\omega^2 D^2} &\approx \Psi\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right) \\ \frac{N}{\rho \omega^3 D^5} &\approx N\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right) \end{aligned} \quad [3.25]$$

És a dir, per a bombes semblants,¹⁵ s'espera que les xifres adimensionals d'altura i potència siguin funcions úniques de la xifra adimensional o coeficient de cabal. La figura 3.10 mostra una possible forma d'aquestes relacions, i la 3.11, la seva validació experimental per a un ventilador centrfug. Observem en aquesta última figura que la diferència entre totes dues corbes adimensionals, en termes d'energia, és de menys del 5% per a tot l'interval de cabals.



En resum, entre dos punts homòlegs, afins o semblants, (a) i (b), hi ha una correspondència única que implica que:

$$\begin{aligned}\frac{Q_a}{Q_b} &\approx \frac{\omega_a D_a^3}{\omega_b D_b^3} = \lambda_r^{-1} \lambda^3 \\ \frac{Y_a}{Y_b} &\approx \frac{\omega_a^2 D_a^2}{\omega_b^2 D_b^2} = \lambda_r^{-2} \lambda^2 \\ \frac{N_a}{N_b} &\approx \frac{\rho_a \omega_a^3 D_a^5}{\rho_b \omega_b^3 D_b^5} = \lambda_m \lambda_r^{-3} \lambda^2\end{aligned}\quad [3.26]$$

relacions que s'espera que siguin més aproximades com més petita sigui la distorsió produïda pel número de Reynolds i l'efecte de l'escala.

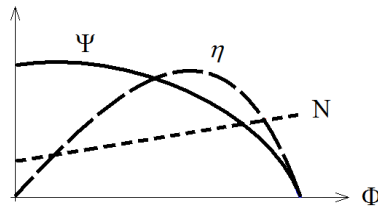


Figura 3.10. Exemple de corbes característiques adimensionals d'una bomba centrífuga.

Quan són coneguts els rendiments de dues bombes geomètricament semblants, les magnituds anteriors es relacionen, en condicions anàlogues de funcionament, de la manera següent:

$$\begin{aligned}\frac{Q_a}{Q_b} &= \frac{\eta_{V,a} \omega_a D_a^3}{\eta_{V,b} \omega_b D_b^3} \\ \frac{Y_a}{Y_b} &= \frac{\eta_{H,a} \omega_a^2 D_a^2}{\eta_{H,b} \omega_b^2 D_b^2} \\ \frac{N_a}{N_b} &= \frac{\eta_{B,b} \rho_a \omega_a^3 D_a^5}{\eta_{B,a} \rho_b \omega_b^3 D_b^5}\end{aligned}\quad [3.27]$$

Evidentment, si es tracta d'una única bomba, llavors $D_a \equiv D_b$ i, si els rendiments no són molt diferents (el que passa entre punts afins a alts números de Reynolds), llavors també és:¹⁶

$$\begin{aligned}\frac{Y_a}{Y_b} &\approx \left(\frac{Q_a}{Q_b}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega_a}{\omega_b}\right)^2 \\ \frac{N_a}{N_b} &\approx \left(\frac{Q_a}{Q_b}\right)^3 \approx \left(\frac{\omega_a}{\omega_b}\right)^3\end{aligned}\quad [3.28]$$



Aquestes equacions són summament pràctiques des del punt de vista de la regulació del funcionament de la bomba mitjançant accionaments a revolucions variables. Més endavant, reprendrem aquest tema, però de moment serveixen per posar de manifest que els punts homòlegs d'una mateixa bomba (els que comparteixen xifres adimensionals) estan situats sobre corbes parabòliques del tipus $Y = A_Y Q^2$ y $N = A_N Q^3$, en eixos (Q, Y) i (Q, N) , respectivament, que s'anomenen *corbes d'afinitat*.

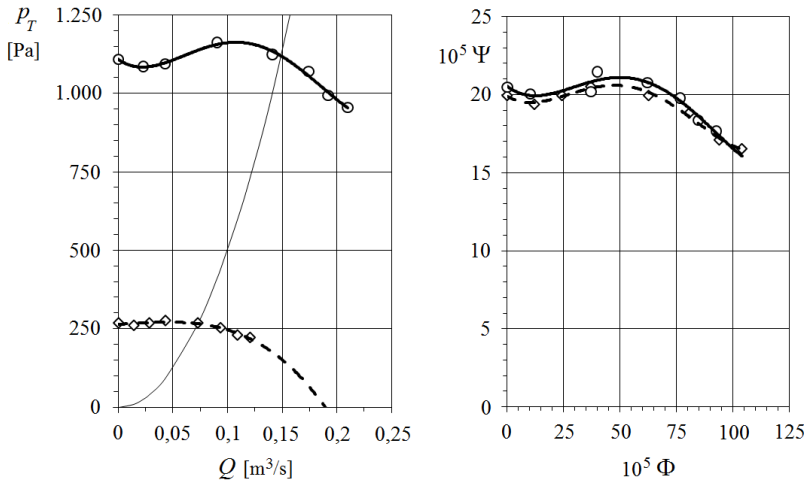


Figura 3.11. Verificació experimental de la llei de semblança en un ventilador centrífug. La corba parabòlica de l'esquerra és una corba d'afinitat, que indica quins punts del quadrant $\{Q, p\}$ comparteixen xifres adimensionals i, per tant, són semblants. Aquestes corbes són de manera que $Y = A_Y Q^2$ en una turbomàquina donada i mostren el sentit de la transformació dels eixos $\{Q, p\}$ a $\{\Phi, \Psi\}$. Les corbes adimensionals de la dreta s'han obtingut dividint la pressió i el cabal per n^2 i n , respectivament.

El número de Reynolds en una màquina donada canvia quan varia la velocitat de rotació o el fluid, cosa que desvia lleugerament la corba característica adimensional respecte de la condició d'autosemblança o automodelatge.¹⁷ En general, aquesta influència no altera substancialment la forma de les corbes i disminueix a mesura que augmenta Re , manifestant sempre la mateixa tendència: l'augment de la viscositat suposa un augment de les pèrdues hidràuliques i una disminució de l'energia comunicada. Per poder predir com es comportarà la màquina quan funcioni amb un altre fluid, es pot emprar un mètode senzill i prou aproximat que consisteix a introduir en les relacions [3.25] factors de correcció, f_H i f_η , de la forma:¹⁸

$$\begin{aligned} \Psi &= f_H(Re) \Psi_0 \left(\frac{Q}{\omega D^3} \right) \\ \eta &= f_\eta(Re) \eta_0 \left(\frac{Q}{\omega D^3} \right) \end{aligned} \quad [3.29]$$



Observem, a la figura 3.12, que tots dos factors tendeixen a la unitat quan augmenta Re i són pràcticament un a partir de $Re = 10^5$. En canvi, altes viscositats o baixos números de Re originen una caiguda important del rendiment, fet que suposa un augment considerable de la potència consumida. Aquest fet i la pèrdua de capacitat de la bomba per transportar cabal quan augmenta la viscositat fan que, per a relacions μ / μ_{aigua} per sobre de 300, es recomani utilitzar bombes de desplaçament positiu.

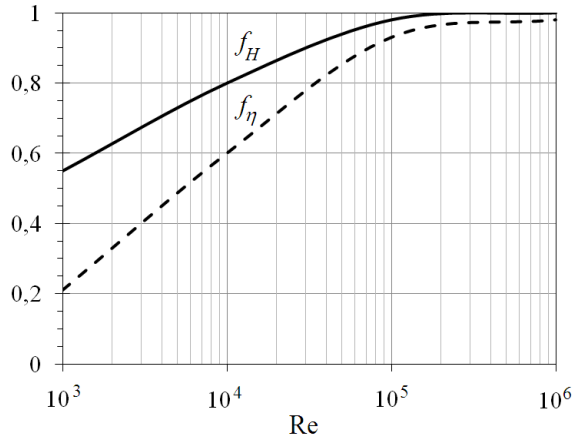


Figura 3.12. Factors correctors en funció del número de Reynolds.

L'experiència mostra que, entre màquines geomètricament semblants, les més grans tenen per norma més bon rendiment que les petites. Això és degut, bàsicament, a dos factors: d'una banda, l'efecte de la rugositat relativa es redueix quan la grandària de la màquina augmenta en disminuir el factor ε/D , sigui per augmentar D o perquè en les màquines més grans és més fàcil millorar l'acabat superficial, i, de l'altra, a la disminució relativa de les fuites, els jocs i intersticis interns, i a la millora dels alineaments mecànics, etc. En el cas de les bombes, el rendiment entre el model i el prototip d'identíc acabat superficial, ε , es pot relacionar, aproximadament, amb l'expressió:

$$\frac{1 - \eta_{B,m}}{1 - \eta_{B,p}} = \left(\frac{D_p}{D_m} \right)^{0,25} = \lambda^{0,25} \quad [3.30]$$

Els mètodes proposats per les expressions [3.29] i [3.30] o uns altres són només aproximacions vàlides quan es disposa d'informació parcial de les corbes característiques de la bomba a utilitzar. És sempre recomanable recaptar tantes dades de funcionament concretes i per a diferents condicions de treball i fluids com sigui possible, cosa que no sol ser fàcil a la pràctica, encara que no per això deixi de ser desitjable.



3.3.5 Condicions generals de disseny i selecció

Els anteriors no són els únics grups adimensionals que es poden formar amb les variables de treball. En concret, dos grups molt útils des del punt de vista del dissenyador són la *velocitat específica adimensional*, Ω , i la *xifra de mida*, Δ :

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{\Phi^{1/2}}{\Psi^{3/4}} = \omega \frac{Q^{1/2}}{Y^{3/4}} \\ \Delta &= \frac{\Psi^{1/4}}{\Phi^{1/2}} = D \frac{Y^{1/4}}{Q^{1/2}}\end{aligned}\tag{3.31}$$

La velocitat específica adimensional, Ω , és independent de la dimensió, D , de la turbomàquina i, per tant, només funció de la seva forma o geometria. De fet, la xifra Ω també s'anomena *factor de forma*, perquè està íntimament relacionada amb la mena de rodet més adequat per a unes condicions de treball determinades. És a dir, la màquina de forma, Ω , definida en termes dels ω , Q i Y d'una aplicació, serà la que tingui més rendiment fluidodinàmic en aquestes condicions. Això estableix una base comuna sobre la qual es poden comparar els diversos tipus de bombes o turbines, amb independència de les seves dimensions.

Un altre paràmetre usual i amb la mateixa funció que Ω es la *velocitat específica* d'una bomba, n_q , que es defineix com la velocitat en rpm d'una altra bomba geomètricament semblant a l'anterior i de tals dimensions que subministra un m^3/s vencent una cota d'un metre. També es fa servir la xifra n_s , definida com el número específic de revolucions en funció de la potència, N , que representa el nombre de revolucions a què hauria de girar una turbomàquina per subministrar a l'eix (en turbines) o al fluid (en bombes) una potència d'1 CV amb un salt d'un metre. Totes dues xifres es relacionen amb Ω de la manera següent:¹⁹

$$\begin{aligned}n_q &= n \frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} = 52,89\Omega \\ n_s &= n \frac{N^{1/2}}{H^{5/4}} = 193,1\Omega\end{aligned}\tag{3.32}$$

Tipus de bomba	Ω	n_q	n_s
Bombes centrífugues o radials	0,2÷2,0	10÷100	40÷400
Bombes de flux mixt	1,2÷4,0	60÷200	250÷750
Bombes axials	3,0÷6,0	150÷300	600÷1.200

Tabla 3.2. Valors aproximats de Ω , n_q i n_s per a diferents tipus de bombes. Aquesta classificació encara es pot obrir més per incloure les radials lentes ($n_s < 80$) i ràpides ($n_s > 150$), i les axials ràpides (n_s de fins a 1.800). La denominació de ràpida o lenta no guarda relació amb la velocitat real de l'accionament

En la literatura, es recullen diferents gràfics o relacions que mostren l'experiència acumulada en el disseny òptim de turbomàquines en funció de les xifres adimensionals característiques [3.31], o les [3.32], avaluades en el punt de rendiment màxim.



Potser el més representatiu d'aquests gràfics és el de Cordier de la figura 3.13, tot i que no és l'únic. Evidentment, el disseny es pot no fer seguint el criteri de millor rendiment, sinó els de menys soroll (menys velocitat de rotació i menys velocitat perifèrica en el rotor) o de menys cost (menys grandària), criteris tots dos molt interessants des de la perspectiva industrial. En qualsevol cas, i com es justifica més endavant, sempre és desitjable triar la major velocitat específica d'entre les possibles per a una aplicació $\{Q, Y\}$ donada, cosa que, vista la dependència inversa entre Ω i Δ en el diagrama de Cordier, sempre implica bombes de menys grandària.

Des d'un punt de vista exclusivament teòric, es podrien fer servir bombes d'igual velocitat específica per a qualsevol combinació $\{Q, Y\}$ d'una aplicació. Això, no obstant, no és adequat a la pràctica perquè, si Q és elevat, i Y , petit, fixada Ω , resultaria una velocitat d'accionament, n , petita, i, si Q i Y s'alternen, la velocitat podria ser massa elevada. A més, si es fixa Ω , el diagrama de Cordier recomana una xifra de mida, Δ , molt concreta, que implicaria un rodet excessivament gran en el primer cas i minúscul en el segon. És a dir, per a cada combinació $\{Q, Y\}$, hi ha només un camp de valors de la velocitat específica adequat, i aquest camp es restringeix encara més quan es limiten la velocitat màxima del fluid (per reduir el desgast, les pèrdues i el soroll) o la velocitat perifèrica del sòlid (per raons estructurals i de resistència mecànica).

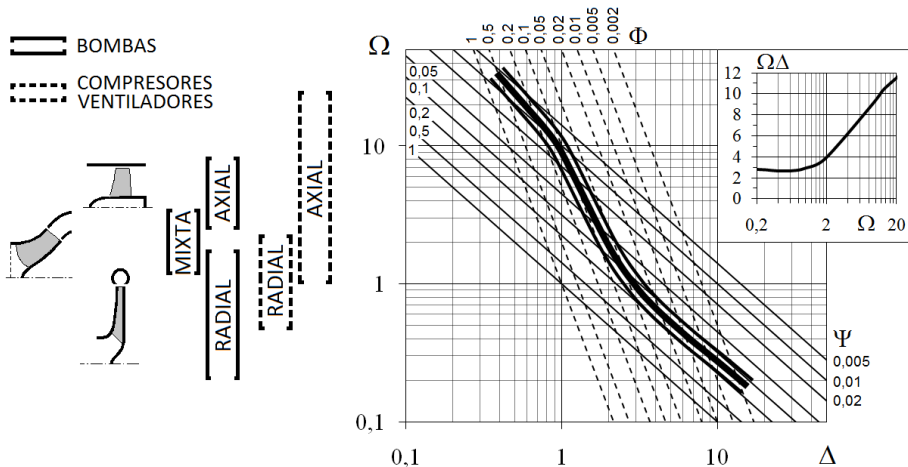


Figura 3.13. Diagrama de Cordier per a la relació entre la velocitat específica i el diàmetre específic corresponent al disseny a rendiment òptim. Aquest diagrama és especialment útil en el disseny de turbobombes hidràuliques, però també es fa servir en compressors i turbines. Observem que el rodet es torna axial a mesura que Ω augmenta, i que el producte $\Omega\Delta$ és sensiblement constant en l'interval $[0,2-2,0]$ (màquines radials). També és interessant observar la relació per trams entre el pendent del diagrama de Cordier i els valors constants de les xifres d'energia i cabal.

El projecte d'una bomba sol començar imposant una velocitat de rotació, n ,²⁰ cosa que, amb la parella $\{Q, Y\}$, condueix a una forma de rodet determinada per la velocitat



específica. Si Ω resulta inferior a 0,2, pot ser interessant replantejar l'ús de bombes de desplaçament positiu, però si, per a una aplicació específica, resulta més adequada una turbomàquina (per cost, tipus de fluid, capacitat de regulació, servei de manteniment, etc.), llavors s'ha de recórrer a dissenys de bombes amb diversos escalonaments, és a dir, amb diversos rotors muntats en sèrie a dins. D'aquesta manera, es pot fixar per endavant el tipus de rodet més idoni (per cost de fabricació, grandària, condicions d'aspiració, etc.) i disposar-ne la quantitat necessària fins a aconseguir la Ω requerida. Per exemple, sent Ω_R la velocitat específica del rodet tipus d'un escalonament format per k rodets en sèrie compartint cabal, la seva relació amb la Ω requerida per l'aplicació és:

$$\Omega_R = \omega \frac{Q^{1/2}}{(Y/k)^{3/4}} = k^{3/4} \Omega \quad [3.33]$$

de manera que s'obté $\Omega_R > \Omega$. Un cas interessant són les bombes destinades a l'extracció d'aigües profundes, en què el diàmetre del rotor ha de ser molt concret, limitat sovint per la grandària de la boca del pou o l'obra d'enginyeria. Imposada Δ_R pel diàmetre màxim assumible i la parella $\{Q, Y\}$ per l'aplicació, la xifra Ω_R resulta del diagrama de Cordier, i k , de l'equació [3.33].²¹

La disposició en paral·lel de diversos rodets també és possible, i llavors la relació entre Ω_R i Ω resulta ser:

$$\Omega_R = \omega \frac{(Q/k)^{1/2}}{Y^{3/4}} = \frac{1}{k^{1/2}} \Omega \quad [3.34]$$

Aquesta situació només és freqüent en bombes de doble aspiració, en què se serveix de la disposició simètrica dels rodets per eliminar l'empenta axial que actua sobre l'eix. Deixem el lector que trobi la relació entre Ω_R i Ω per a la configuració de tres etapes i doble aspiració de la figura 3.14.

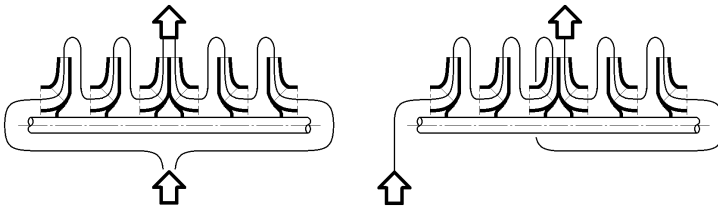


Figura 3.14. Diagrama funcional d'una bomba centrífuga de tres etapes i doble aspiració (esquerra) i una altra amb sis rodets en sèrie (dreta). Totes dues amb equilibrat de l'embranchida axial.

D'altra banda, i per raons òbvies de mercat, els fabricants de bombes no poden fabricar bombes hidràuliques per a la infinitat de punts de funcionament possibles. Per això, i amb la finalitat d'abaratir tant els costos de producció com els logístics, es recorre a la fabricació de bombes en sèries que cobreixin de la millor manera possible



el pla (Q, H_B) mitjançant un nombre reduït de tipus i mides de bombes, i de revolucions d'accionament.

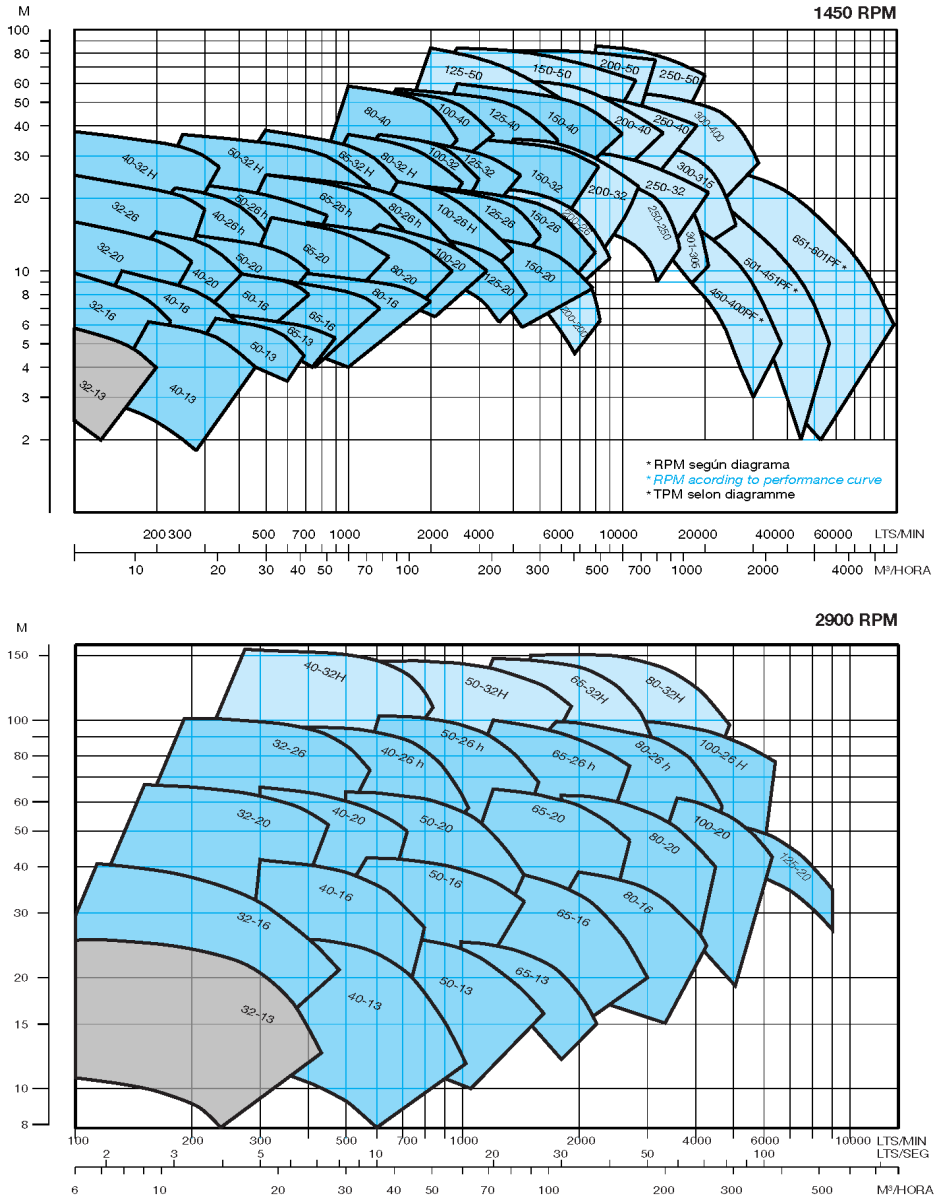


Figura 3.15. Diagrames de característiques o de ventall per a una sèrie de bombes centrífugues (cortesia de Bombs Ideal). Aquests gràfics també poden ser presentat de manera tabulada. Cadascuna de les àrees parcials del gràfic recull les característiques de funcionament d'una mena de bomba, les especificacions concretes de la qual es defineixen en les corbes característiques que es podran consultar en una altra part del catàleg.



Una pràctica comuna entre els fabricants consisteix a construir sèries de bombes amb diàmetres de rodet D_2 escalonats, però amb el mateix diàmetre d'entrada (o de la brida d'aspiració). Aquest escalonament segueix, en general, una recomanació normativa (per exemple, ISO),²² de manera que els diferents diàmetres de la sèrie defineixin un canvi proporcionat entre l'altura i el cabal nominals. Amb aquesta discretització, es pretén que el cost addicional que suposa la incorporació d'un nou model a la sèrie sigui compensat per la millora del rendiment mitjà.

Entre aquesta pràctica i la de poder construir bombes multicel·lulars a diverses revolucions, es generen gràfics de característiques generals que inclouen pràcticament tot el pla (Q, H_B) , a partir dels quals es poden comparar entre si models de diversos fabricants per efectuar la selecció de la bomba més adequada a cada aplicació.²³(veure figura 3.15)

3.3.6 Corbes característiques

Les corbes característiques principals d'una bomba són les corbes $H_B = H_B(Q)$, $N = N(Q)$ y $\eta_B = \eta_B(Q)$, i són subministrades pel fabricant. Aquestes corbes són particulars de cada bomba i acullen les característiques de tots els punts de funcionament possibles a unes revolucions donades.²⁴ Com que per a cadascun d'aquests punts, es verifica la relació:

$$\eta_B = \frac{\rho g Q H_B}{N} \quad [3.35]$$

les corbes ofereixen informació redundant, amb l'objectiu de facilitar a l'usuari la visualització de les característiques funcionals de la bomba. De fet, totes les corbes característiques a diferents revolucions poden obtenir de les relacions [3.25] i [3.28], un cop són conegudes mitjançant assaig les corbes $H_B(Q)$, $N(Q)$ i $\eta_B(Q)$ a unes revolucions determinades.

Les corbes $Y(Q)$, $N(Q)$ i $\eta_B(Q)$, en funció de la velocitat específica segueixen la tendència que es mostra en la figura 3.16. Les màquines radials tenen una altura manomètrica més gran que les axials, però impulsen menys cabal a igualtat de diàmetre i revolucions. En canvi, el rendiment màxim creix amb Ω , fins trobar un màxim en les bombes de tipologia mixta, per decaure després. Cal destacar també que la corba de potència, $N(Q)$, (línies discontinues del gràfic de la dreta de la figura 3.16) manifesta una tendència creixent en les bombes centrífugues, però que aquesta tendència s'inverteix segons la velocitat específica adimensional augmenta i resulta decreixent a les bombes axials.

L'altura d'elevació proporcionada per una bomba varia amb el cabal a unes revolucions donades segons una llei que sol tenir forma de paràbola invertida, del tipus [4.40], amb $b \approx 0$. La corba de rendiment corresponent té la forma general descrita a la figura



3.10, també de paràbola invertida, per a la qual el punt de rendiment màxim és en un cabal una mica inferior al de disseny. Aquesta diferència, inapreciable en la majoria dels casos, es justifica per l'aspecte creixent de les pèrdues hidràuliques que tenen lloc a la bomba (v. terme continu k_c de la figura 4.10). Referent a les corbes de potència i com a conseqüència del diferent signe de dN/dQ , cal dir que, mentre que les bombes centrífugues són autoregulades, ja que la potència en l'eix per a petits cabals és inferior a la nominal, a les axials la situació s'inverteix i és convenient no instal·lar vàlvules de tancament a la sortida de la bomba per evitar el perill de sobrecàrrega del motor. Aquesta precaució és summament important en la posada en marxa de la bomba: es diu que les bombes centrífugues s'han de posar en marxa contra vàlvula d'impulsió tancada per reduir la intensitat durant l'arrencada i així allargar la vida del motor (elèctric).

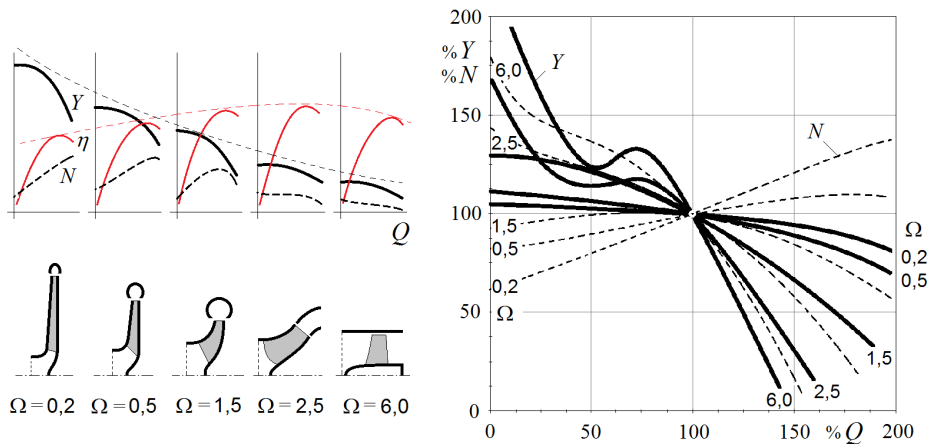


Figura 3.16. Tendència manifestada pels diferents tipus de bombes rotodinàmiques segons el sentit del flux. L'escala horitzontal de les figures de l'esquerra està falsejada. Observem que, en les màquines de flux axial, apareixen zones en què $dY/dQ > 0$. Els percentatges es refereixen a la condició nominal de funcionament (100%).

Encara que, des del punt de vista de la regulació per accionament variable, seria més interessant que la informació en forma de corbes característiques es facilités (etiquetats) en funció de les revolucions, tal com a la figura 3.17, per exemple, el més habitual és que es presentin en un mateix gràfic les corbes corresponents a diferents diàmetres de rotor, però per a una mateixa carcassa de bomba i motor d'accionament. Les raons són diverses, però potser la més important sigui que la regulació del punt de funcionament per accionament variable encara no és una pràctica gaire estesa en sistemes convencionals de proveïment d'aigües en què es disposa de dipòsits reguladors: és difícilment justificable un grup de bombeig que requereixi una inversió més gran si no és necessari ajustar el cabal o la pressió a la demanda o a un punt de funcionament variable i concret. D'altra banda, l'ús d'una mateixa carcassa per a diferents rodets té



innombrables avantatges, tant per al fabricant com per a l'usuari. Al fabricant li facilita l'intercanvi i la distribució de les sèries de bombes i, a més, redueix partides i existències, i a l'usuari li permet adaptar la bomba, el grup motor i tota la seva bancada al punt de funcionament a mesura que la instal·lació vagi perdent amb el temps capacitat de transport, sense més que augmentar la mida del rodet instal·lat.

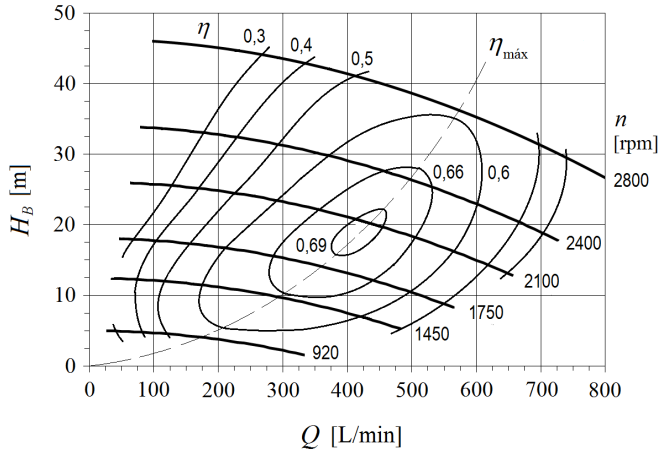


Figura 3.17. Corbes d'altura d'elevació i isorendiment típiques d'una bomba centrífuga a diferents revolucions. Les corbes de rendiment constant apareixen com a corbes tancades formant una elevació de rendiments al cim topològic dels quals hi ha el rendiment màxim de la bomba. Els punts de rendiment màxim per a cada velocitat d'accionament segueixen una paràbola (línia de traços). La velocitat específica de la bomba que en defineix la forma s'avalua en el punt de rendiment màxim ($\Omega=0,36$ en aquest cas).

En la figura 3.18, es mostren les corbes característiques d'un model de bomba a dues revolucions diferents, sent $n_a = 2n_b$. Observeu que les corbes de l'esquerra a 1.450 rpm cobreixen l'àrea ombrejada de la gràfica de la dreta (aproximadament, a la meitat del cabal i a la quarta part de l'energia) i que els seus punts de rendiment màxim compleixen les condicions:

$$\begin{aligned} \frac{Q_a}{Q_b} &= \frac{5,25}{2,65} \approx \frac{2.900}{1.450} = \frac{n_a}{n_b} \\ \frac{H_{B,a}}{H_{B,b}} &= \frac{20}{5} \approx \left(\frac{5,25}{2,65}\right)^2 = \left(\frac{Q_a}{Q_b}\right)^2 \\ \frac{N_a}{N_b} &= \frac{1,84}{0,265} \approx \frac{0,49}{0,56} \left(\frac{2.900}{1.450}\right)^3 = \frac{\eta_{B,b}}{\eta_{B,a}} \left(\frac{n_a}{n_b}\right)^3 \end{aligned} \quad [3.36]$$

com caldria esperar de [3.27].

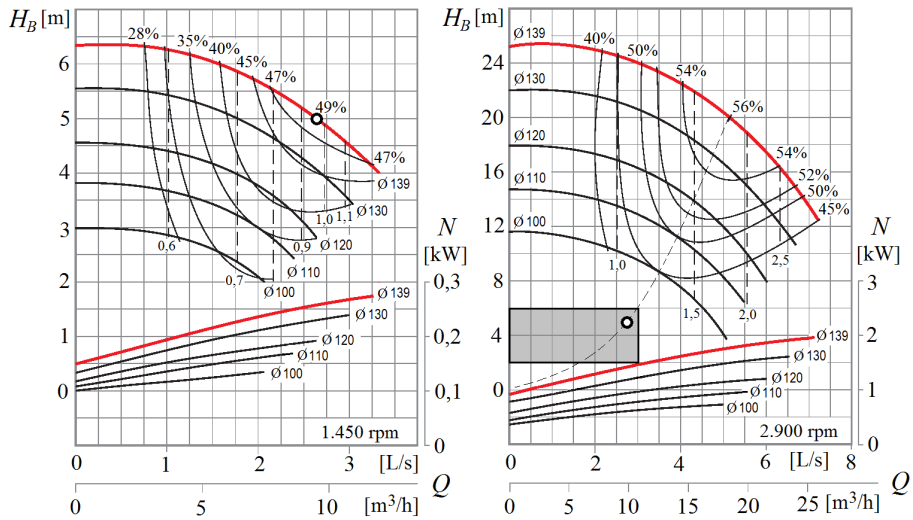


Figura 3.18. Corbes característiques típiques, en funció de la grandària del rodet. Models GNI / RNI 32-13 de la figura 3.15 (cortesia de Bombas Ideal). Es tracta, evidentment, de bombes centrífugues, ja que les seves corbes de potència creixen amb el cabal ($\Omega_{139} = 0,42$). Les línies a traç gairebé vertical són les corbes de NPSHR constant, el sentit i l'aplicació de la qual s'expliquen a l'apartat de cavitació (3.6.1).

Però el funcionament d'una bomba, entesa com a turbomàquina, no queda restringit al quadrant (Q, H_B) positiu emprat en les figures anteriors (per al qual també són positius el parell i la potència comunicada). Hi ha situacions de treball, originades normalment per la combinació de diverses bombes en una instal·lació o durant la seva aturada en sistemes hidràulics de gran grandària, en què la bomba pot treballar com a turbina o com a fre, i fins i tot a contraflux.

Les diferents situacions que es poden presentar es resumeixen a la taula 3.3, i en la seva interpretació és important tenir en compte que:

- la potència és positiva quan és aplicada pel motor a l'eix de l'accionament (i aprofitada en funcionament en mode bomba o dissipada en mode fre) i negativa quan és restituïda a l'eix (en funcionament en mode turbina);
- el parell aplicat pot ser també positiu o negatiu, depenent de la relació funcional $M = N/\omega$: és positiu, si tant la potència com les revolucions tenen el mateix signe, i negatiu, en cas contrari;
- el funcionament normal com a bomba s'obté amb $\omega > 0$, i el normal com a turbina per a $\omega < 0$ (tots dos per a $H > 0$). No obstant això, és possible que la bomba funcioni com a turbina amb $\omega < 0$ i $N > 0$ i, a l'inrevés, que la turbina funcioni com a bomba amb $\omega > 0$ i $N < 0$, i
- el signe del cabal no ve imposat pel de l'altura de càrrega, i és positiu en funcionament normal com a bomba, travessant la bomba de l'aspiració a la impulsió,



i negatiu quan entra per la brida d'impulsió a contraflux. Al seu torn, l'altura de càrrega és positiva quan l'energia és superior en la impulsió que en l'aspiració, independentment del signe del cabal.

Tram	Mode de funcionament	N	M	ω	H	Q
a-b	Bomba normal	+	+	+	+	+
b-c	Dissipació d'energia. Fre	+	+	+	+	-
c-d	Turbina normal	-	+	-	+	-
d-e	Dissipació d'energia. Fre	+	-	-	+	-
e-f	Bomba funcionant com turbina	+	-	-	+	+
f-g	Dissipació d'energia. Fre	+	-	-	-	+
g-h	Turbina funcionant como bomba	-	-	+	-	+
h-a	Dissipació d'energia. Fre	+	+	+	-	+

Taula 3.3. Maneres de funcionament d'una turbomàquina.

El funcionament d'una turbomàquina en un diagrama (Q, n) queda descrit en vuit regions, repartides pels quatre quadrants de la figura 3.20. Tal com es pot apreciar, el funcionament normal de la turbomàquina com a bomba (tram a-b) és al primer quadrant, compartint característica $(Q+, n+)$ amb sengles modes de funcionament fre i i turbina. En condicions normals, la màquina treballa en mode bomba, però deixarà de fer-ho si el punt de funcionament imposat per la instal·lació travessa les línies d'altura de càrrega i parell nuls.

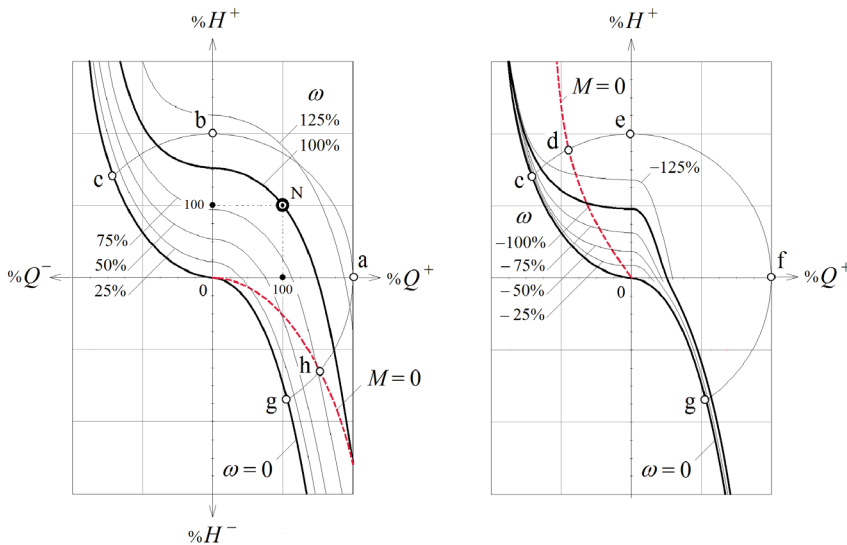


Figura 3.19. Corbes característiques típiques d'una bomba centrífuga en eixos (Q, H) . A l'esquerra, el cas $n > 0$ i, a la dreta, quan $n < 0$. El punt N representa la condició nominal de funcionament (100%).

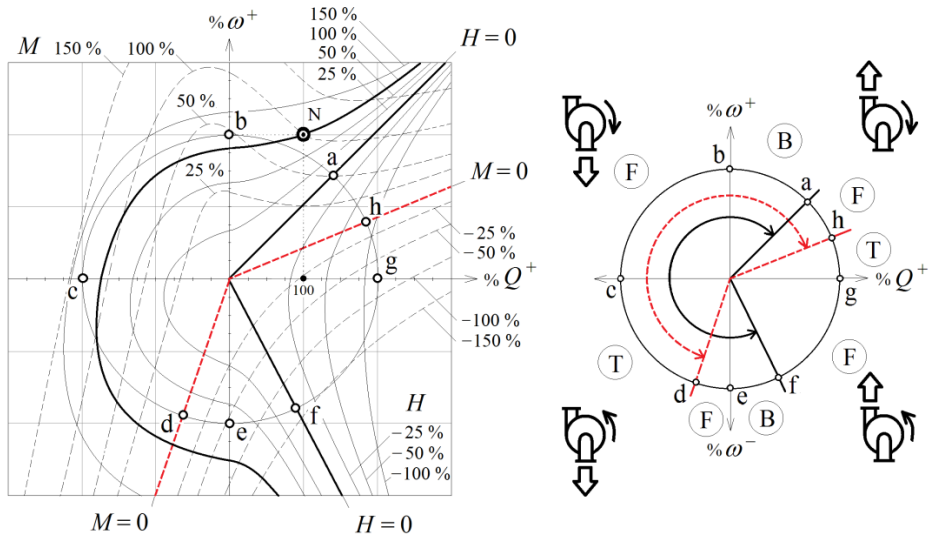


Figura 3.20. Exemple de corbes característiques completes d'una turbomàquina radial i diagrama explicatiu o de Sutter. Les fletxes arquejades de la dreta assenyalen les zones d'altura i parell positius. En una màquina axial, la línia d'altura nul·la s'acosta a la de parell nul, de manera que els punts (a) i (h) tenen tendència a trobar-se i el punt (f) se situa entre (d) i (e). Això dona com a resultat gràfics molt més estirats, gairebé diagonals.

Per exemple, si es desconnecta la bomba des de la situació nominal (punt N del gràfic) i s'accepta que continuarà girant a una velocitat cada vegada més lenta fins que s'aturi de manera definitiva, la trajectòria que es generarà en eixos (Q, n) durant l'aturada es pot mantenir a la zona de funcionament com a bomba normal ($Q+, H+$) o arribar a la zona resistiva del gràfic (tram a-h). Aquesta trajectòria depèn del transitori que resulti entre la desconnexió i el tancament de la vàlvula de retenció, cosa que depèn, al seu torn, de la inèrcia global de la instal·lació i, per tant, de la seva longitud. Així mateix, s'observa en la figura que, si en aquestes circumstàncies l'altura de càrrega durant la detenció es fes prou negativa, el cabal positiu podria arrossegar la bomba invertint el signe del parell i fer-la treballar com a turbina (tram h-g) abans que s'aturi.²⁵ El funcionament de la turbomàquina als altres quadrants es pot interpretar de manera similar seguint el diagrama explicatiu de la figura 3.20.

3.3.7 Grups de bombeig

Encara que una bomba pot subministrar qualsevol cabal de la seva corba característica amb un rendiment acceptable en la majoria dels casos, en aquelles instal·lacions en què es preveu una variació significativa del cabal de funcionament, és interessant repartir la demanda entre diverses bombes acoblades en paral·lel. Aquestes bombes, per norma general, descarreguen el cabal en un col·lector comú, que va augmentant de secció fins a quedar connectat a la canonada d'impulsió principal. El muntatge de



bombes en sèrie no és tan freqüent com en paral·lel, però pot ser adequat en instal·lacions d'alta pressió o en les que requereixin més pressió en alguna part, sense que es vulgui afectar la resta amb uns costos d'instal·lació i explotació fora de lloc.

En els grups de bombeig formats per més d'una bomba en paral·lel que han de subministrar cabal a una xarxa de distribució, és freqüent disposar una bomba més per fer front a possibles avaries, i també altres auxiliars, més petites, destinades a mantenir la xarxa en càrrega i cobrir petits cabals de funcionament. La situació més freqüent és que totes les bombes principals siguin iguals, de manera que la seva instal·lació sigui més senzilla i s'eviti l'aparició de recirculacions. En qualsevol cas i com es pot deduir a la figura 3.21 per al cas de muntatge dual, el cabal subministrat per k bombes iguals en paral·lel no és k vegades el cabal d'una bomba en aquesta mateixa instal·lació, sinó una mica inferior vista la curvatura de les característiques resistiva de la xarxa (creixent) i de cadascuna de les bombes per separat (decreixent).

La característica H_p de dues bombes muntades en paral·lel, (1) i (2), que comparteixin aspiració es traça simplement sumant el cabal de cadascuna recorrent l'eix d'ordenades de la seva corba característica en sentit ascendent.²⁶ Això dona lloc a una corba d'energia més plana que, si totes dues bombes són iguals, coincideix amb les particulars $H_{B,1}$ i $H_{B,2}$ en la seva ordenada en l'origen. Si les bombes no són iguals o són accionades a diferents revolucions, és molt probable que la seva altura màxima a cabal nul sigui diferent en ambdues. En aquest cas, el procediment d'obtenció de la corba H_p és el mateix, però condueix a una corba equivalent que s'interseca amb la de major energia en el punt (*) de la figura 3.21, l'altura del qual coincideix amb la màxima de la bomba més petita. A partir d'aquest moment, la corba equivalent s'ha d'obtenir utilitzant per a aquesta bomba la corba resistiva del tram b-c de la figura 3.19.

A la dreta de la figura 3.21 es mostra la corba $H_p(Q)$ completa en el cas en què les corbes característiques són diferents. Aquesta corba pot donar lloc a reflux en una de les bombes quan l'altura requerida per la instal·lació superi el valor límit H^* . Això és: la zona de funcionament "útil" del sistema en paral·lel queda restringida a cabals d'instal·lació superiors a Q^* . Per a altures superiors a H^* però inferiors a H_0 (punts "i" de la figura), el cabal instal·lat encara és positiu, ja que el cabal de la bomba (1) és més gran que el que recircula per la (2), però a partir d'altures de càrrega superiors a H_0 el cabal es fa negatiu (punts "j") i, si continua augmentant, totes dues bombes poden entrar en mode fre (punts "k").

En resum i com a conseqüència del paràgraf anterior, en el muntatge en paral·lel de dues bombes és recomanable que totes dues siguin iguals o que les seves corbes d'energia tinguin altures nominals aproximadament iguals (encara que els seus cabals nominals siguin diferents), per reduir la zona de reflux de la bomba menor (des d'un punt de vista energètic) i que el sistema equivalent faci servir al màxim les capacitats de bombament de totes dues bombes.

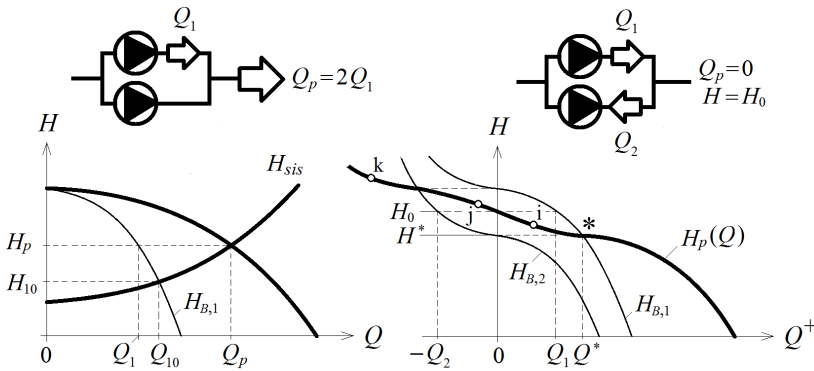


Figura 3.21. Muntatge en paral·lel de dues bombes. A l'esquerra, dues bombes iguals, de les corbes de les quals es dedueix que el cabal que impulsa cada bomba en el muntatge en paral·lel, Q_1 , és inferior al que impulsaria sola en la mateixa instal·lació, Q_{10} . Evidentment, es compleix que $Q_p = 2Q_1$. H_{sis} és l'equació del sistema [5.3]. L'esquema de la dreta mostra la situació $Q_p = 0$ i $Q_1 = -Q_2$ quan $H = H_0$ i totes dues bombes no són iguals. Les situacions "i", "j" i "k" han d'évitar en la pràctica mitjançant vàlvules de retenció.

El rendiment del grup en paral·lel s'obté de l'equivalència:

$$N_p = \frac{\rho g Q_p H_p}{\eta_p} = \frac{\rho g Q_1 H_p}{\eta_1} + \frac{\rho g Q_2 H_p}{\eta_2} + \dots = N_1 + N_2 + \dots \quad [3.37]$$

d'on resulta la relació per al cas de dues bombes ($Q_p = Q_1 + Q_2$):

$$\eta_p = \frac{Q_p}{\sum_i \frac{Q_i}{\eta_i}} = \frac{1 + \frac{Q_2}{Q_1}}{\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1} \frac{\eta_1}{\eta_2}\right)} \eta_1 \quad [3.38]$$

Si les dues bombes són iguals, també ho seran els seus rendiments i el repartiment de cabals per a cada Q_p , de manera que, llavors, $\eta_p = \eta_i$. Si les bombes no són iguals però per a cada cabal Q_p es verifica $Q_2 = aQ_1$ i $\eta_2 = b\eta_1$, sent a i b dos números positius més petits que la unitat (perquè, en principi, les bombes més grans han de tenir més bon rendiment), llavors una senzilla anàlisi matemàtica demostra que $\eta_2 < \eta_p < \eta_1$ sempre.²⁷

El muntatge en sèrie de dues bombes o més s'aconsegueix connectant la impulsió de la primera bomba a l'aspiració de la següent, i així successivament. De manera anàloga al muntatge en paral·lel, és preferible que totes les bombes siguin iguals o, en aquest cas, que els cabals nominals siguin semblants. Si el muntatge en sèrie es fa amb bombes diferents, és recomanable que la primera sigui, o bé la que té uns requisits d'aspiració menys exigents, o bé la major (en termes de cabal màxim), depenent de cada cas particular.



La característica equivalent H_s de dues bombes en sèrie s'obté sumant l'altura d'elevació de cada bomba recorrent l'eix d'abscisses de la seva corba característica des de l'origen de cabals cap a la dreta. A diferència del muntatge en paral·lel, no és possible el reflux per una sola de les bombes perquè totes dues comparteixen cabal, però continua sent possible que una entri en mode fre si són diferents. Aquest cas es presenta ara quan disminueix l'energia sol·licitada per la instal·lació fins al valor H^* de la figura 3.22, i la corba característica de la bomba menor ($_2$) passa al tram h-a de la figura 3.19 (punts "i" de la figura 3.22). Com que en mode fre la bomba consumeix energia i $H < 0$, la seva altura de càrrega en impulsió decreix i pot induir depressions en l'espai entre bombes; per això, és recomanable que la bomba més petita no estigui situada la primera del grup.

La corba de rendiment per a cada cabal del muntatge en sèrie s'obté ara amb l'expressió:

$$\eta_s = \frac{H_s}{\sum_i \frac{H_i}{\eta_i}} \quad [3.39]$$

que ofereix la mateixa discussió i el mateix resultat que en el cas paral·lel.

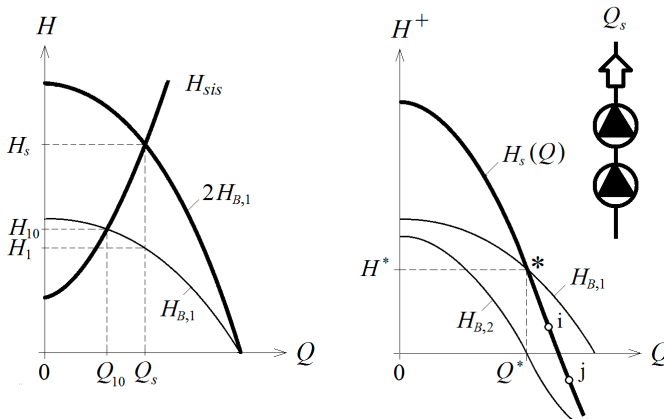


Figura 3.22. Muntatge en sèrie de dues bombes. A l'esquerra, s'observa que el muntatge en sèrie de dues bombes iguals també augmenta el cabal transvasat. A la dreta, es mostra el cas en què les corbes característiques de les bombes són diferents, cosa que redueix la zona de funcionament "útil" del sistema en sèrie a altures superiors a H^* , si es prefereix, a cabals d'instal·lació inferiors a Q^* .

3.4 Disseny i instal·lació d'una bomba centrífuga

És poc freqüent que l'usuari d'una instal·lació hidràulica s'involucri en el desenvolupament d'una bomba, tret que es tracti d'una aplicació molt específica que requereixi unes prestacions molt concretes. No obstant això, és essencial que conegui el principi de funcionament i les característiques constructives o morfològiques més elementals



dels components que té al seu càrrec, i, entre aquests darrers, segur que tindrà en la instal·lació alguna bomba centrífuga, perquè és un dels equips més emprats en la indústria, potser només al darrere del motor elèctric.

Sens dubte, el rodet és el component bàsic de tota bomba centrífuga perquè és el responsable de l'increment d'energia a través de la màquina. Com s'ha explicat, des del punt de vista energètic, els difusors o recuperadors d'energia estàtica són fonamentals pel seu efecte sobre el rendiment de la bomba i, des del punt de vista funcional, els elements d'estanquitat i de guiatge del motor són també importants per la seva influència sobre la funció, l'esperança de vida i el manteniment requerits per la bomba.

Aquest apartat no pretén cobrir tots els aspectes relacionats amb el disseny exhaustiu i últim d'una bomba centrífuga, que hauria d'incloure també la tria dels materials segons la seva resistència o la seva compatibilitat amb el mitjà (aspectes que es poden trobar desenvolupats en obres més especialitzades), sinó només servir d'introducció al lector perquè es pugui orientar i entreveure les qüestions fonamentals que interveuen en el predisseny de la bomba i la seva instal·lació. D'altra banda, cada fabricant té els seus àbacs i procediments de disseny formal àmpliament validats experimentalment, que, com és fàcil d'entendre, formen part del seu actiu tecnològic, al qual és difícil accedir si no és sota estrictes restriccions.

3.4.1 Límits funcionals i de rendiment

Una màquina és unicel·lular quan només disposa d'un rodet, i multicel·lular, en cas contrari. Els rodets d'una configuració multicel·lular poden estar connectats hidràulicament entre si en sèrie o en paral·lel, i normalment són tots solidaris del mateix eix. Com s'ha comentat abans, quan la velocitat específica associada a l'aplicació és inferior a 0,2 no és possible subministrar la parella $\{Q, H_B\}$ amb un sol rodet radial. Aquest límit funcional es descriu en termes de l'altura d'elevació i del cabal, de la manera següent:

$$H_B^{\max} = \frac{1}{g} \left(\frac{\omega}{\Omega^{\min}} \right)^{4/3} Q^{2/3} = 0,04306 n^{4/3} Q^{2/3} \quad [3.40]$$

$$Q^{\min} = g^{3/2} \left(\frac{\Omega^{\min}}{\omega} \right)^2 H_B^{3/2} = 111,9 \frac{H_B^{3/2}}{n^2}$$

amb $[Q] = \text{m}^3/\text{s}$, $[H_B] = \text{m}$ i $[n] = \text{rpm}$. L'ús d'una configuració multicel·lular amb rodets en sèrie augmenta el límit per a H_B en un factor k (si els k rodets són iguals).²⁸

Així mateix, se sap que la velocitat específica, Ω_R , de cada rodet aïllat en una configuració multicel·lular en sèrie augmenta en un factor $k^{3/4}$. Això, en principi, té un altre efecte avantatjós des del punt de vista energètic, ja que el rendiment del rodet



centrífug té tendència a augmentar a mesura que augmenta Ω . Aquesta última circumstància es justifica perquè tant les pèrdues mecàniques com les volumètriques disminueixen quan augmenta Ω , però només fins al punt en què aquest increment es compensa per altres fenòmens que predominen a altes velocitats, com els xocs d'entrada o la formació de corrents secundaris al rotor. Com que el rendiment total d'una bomba respon a les pèrdues mecàniques, volumètriques i d'energia per mitjà dels seus rendiments parcials, n'hi ha prou d'observar com evolucionen aquests segons creix Ω per obtenir la tendència general.

La part més important de les pèrdues mecàniques que experimenta una bomba són degudes al fregament viscos del fluid atrapat entre el rodet i la carcassa a banda i banda. Aquestes pèrdues es s'anomenen *pèrdues en el disc* i és fàcil deduir mitjançant tècniques de mecànica de fluids que són del tipus $f_\varepsilon \rho D^5 \omega^3$, on f_ε és un coeficient de fricció empíric, de valor aproximat 10^{-6} , determinat per la rugositat relativa de la superfície i Re . Com que el terme $(D\omega)^3$ es pot relacionar amb l'altura comunicada pel rotor a través de la xifra adimensional d'energia, resulta que aquestes pèrdues són proporcionals al terme $H^{3/2} D^2$ i augmenten amb el quadrat del diàmetre del rodet per a una altura donada. Aquesta circumstància recomana prendre, com a diàmetre admissible o de disseny, el més petit dels possibles, és a dir, la velocitat específica màxima possible i el rotor més ràpid. Combinant adequadament aquesta última relació amb les xifres adimensionals de velocitat i diàmetre, s'arriba a l'expressió següent per al rendiment mecànic:

$$\eta_{mec} = \frac{1}{1 + k_{mec} \Omega^{-2/3}} \quad [3.41]$$

la tendència del qual ha estat corroborada per l'experiència i que condueix a valors de rendiment mecànic de fins a 0,96 en bombes grans.

Passa una cosa similar amb el rendiment volumètric, ja que les fuites tenen lloc per esclatxes la grandària de les quals guarda relació amb el diàmetre de la bomba per la cadena de toleràncies. Es dedueix que la seva relació amb la velocitat específica és de l'ordre:

$$\eta_V = \frac{1}{1 + k_V \Omega^{-2/3}} \quad [3.42]$$

en què k_V és un coeficient que pren valors pròxims a 0,03 per a l'aigua.

Totes dues circumstàncies suggereixen que hi ha un valor de Ω (precisament, $\Omega = 0,2$) per sota del qual el rotor radial resulta antieconòmic i excessivament estret. Per a Ω creixents, el rendiment de la màquina radial augmenta i arriba a un màxim quan $\Omega \approx 1$ i decreix després per l'augment de les pèrdues hidràuliques. A la figura 3.23, es pot veure la tendència manifestada pel rendiment màxim esperat en funció de Ω , el cabal i la potència.

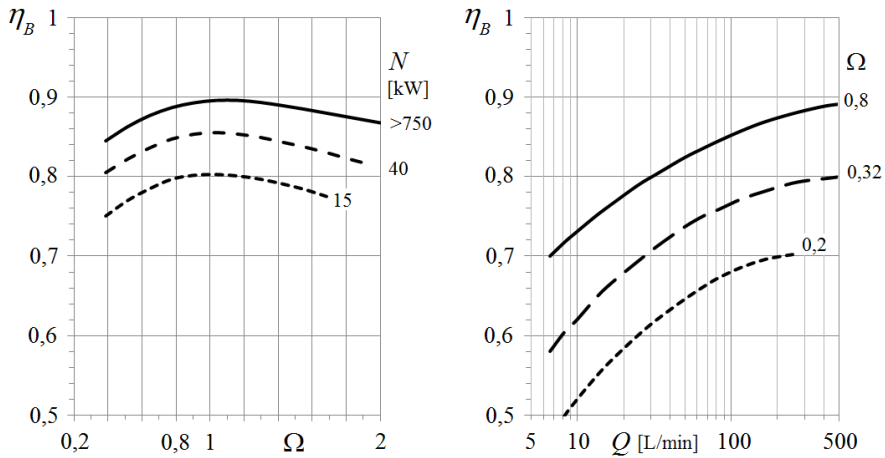


Figura 3.23. Influència observada de la velocitat específica adimensional, el cabal i la potència en el rendiment. El rendiment d'una bomba centrífuga és màxim per a la família $\Omega \approx 1$ i augmenta amb el cabal i la potència, és a dir, amb la seva grandària.

3.4.2 Dimensions bàsiques del rodet

Les característiques energètiques d'una bomba estan molt relacionades amb la velocitat perifèrica u_2 al rotor. El valor màxim d'aquesta velocitat està restringit per qüestions de tipus mecànic, que depenen de la resistència estructural del material emprat,²⁹ i de tipus fluidodinàmic, perquè està relacionada amb les del fluid mitjançant el triangle de velocitats corresponent. Totes dues restriccions es combinen en el disseny del rotor, de manera que la tria del material a utilitzar depèn, a part d'altres qüestions com la compatibilitat amb el fluid, del seu preu o disponibilitat, de la velocitat màxima que pot adquirir el fluid en el seu interior. Aquesta velocitat màxima depèn, al seu torn, de condicionants funcionals, com la capacitat d'aspiració de la bomba, el soroll transmès i el desgast assumible en el material, etc., cosa que implica que el disseny final ha de ser el resultat d'un procés iteratiu en què es combinin diferents opcions constructives.

L'experiència acumulada fa un paper molt important en el disseny d'una bomba; en aquest sentit, està plenament justificat l'ús de diagrames com el de Cordier de la figura 3.13 per definir les dimensions de partida del rotor. Per a unes revolucions n determinades i coneguda la parella $\{Q, Y\}$ o la $\{Q, H_B\}$ d'una aplicació donada, el diagrama de Cordier proporciona la xifra de mida de rendiment màxim a partir de la Ω calculada per a la terna $\{n, Q, Y\}$. Aquesta xifra permet tenir una estimació inicial del diàmetre D_2 del rodet amb què comprovar si la tria de n és correcta en termes d' u_2 . Si ho és, tenint en compte que les revolucions de l'accionament es mouen en un interval discret no gaire ampli, es poden passar a avaluar les altres dimensions del rodet (figura 3.24).

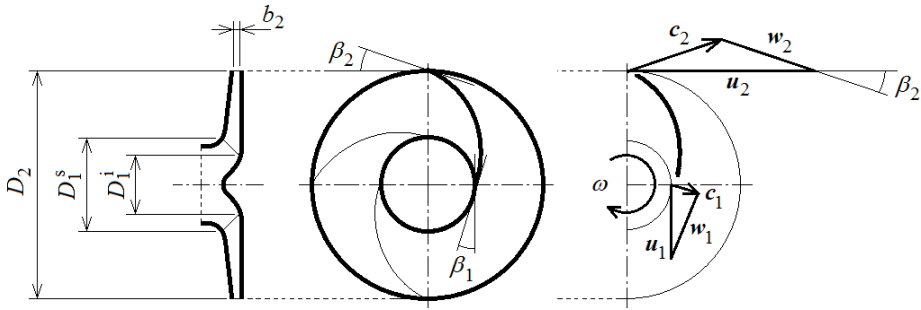


Figura 3.24. Dimensions bàsiques i angles d'un rodet centrífug. A la dreta, els triangles de velocitats a l'entrada i la sortida.

En aquest punt del procés es passa a fer servir gràfics més concrets i personalitzats per cada fabricant. La figura 3.25 mostra un exemple d'aquests gràfics: conegut D_2 , els valors de D_1 i b_2 resulten una funció creixent de Ω . S'observa també que la diferència entre els diàmetres superior i inferior a l'entrada augmenta amb Ω , doncs, de fet, el diàmetre D_1 superior tendeix a D_2 a mesura que el rotor es torna axial.

Faltaria encara per determinar l'ample del rodet a l'entrada, b_1 , i el número, el gruix i els angles dels àleps, però per a això cal fer intervenir altres consideracions relatives al cabal de la bomba i a les condicions del flux a l'entrada. Per norma general, i tal com es tractarà en el pròxim tema, la condició de disseny més usual suposa que el flux a l'entrada del rodet és radial, és a dir, la velocitat absoluta és perpendicular a la direcció perimetral i el triangle d'entrada normal. El mòdul d'aquesta velocitat es fa lleugerament superior a la velocitat que hi ha a la brida d'aspiració de la bomba (entorn d'un 5%), v_e , perquè el corrent d'entrada al canal d'aspiració s'acceleri fins al rotor. Com que el cabal a l'entrada de la bomba i del rotor està determinat per les equacions [3.17] i [3.19], amb aquesta hipòtesi resulta la condició:

$$Q = \frac{\pi D_e^2}{4} v_e = \mu_1 \pi D_1 b_1 c_1 \quad [3.43]$$

que suggereix, atès que $D_e \approx D_1$, que b_1 ha de ser de l'ordre de la quarta part de D_1 . Un altre criteri alternatiu per a la tria de l'ample a l'entrada suposa la conservació de la velocitat meridiana c_m al rotor, és a dir, que b_1 sigui de l'ordre de $b_2 D_2 / D_1$. Tots dos criteris condueixen a valors similars de b_1 , tal com pot deduir de la figura 3.25.

El coeficient μ_1 serveix per definir l'àrea efectiva del flux i per tenir en compte la seva no uniformitat i l'efecte dels àleps. Un valor freqüent d'aquest coeficient és 0,9 i es podria estimar, aproximadament, utilitzant la relació entre les àrees efectiva i geomètrica:³⁰

$$\mu_1 = \frac{\pi D_1 b_1 - z e b_1 / \sin \beta_1}{\pi D_1 b_1} = 1 - \frac{e}{t_1 \sin \beta_1} \quad [3.44]$$



on z és el nombre d'àleps, e el seu gruix i t_1 , el pas teòric entre ells.

El nombre d'àleps del rodet també augmenta amb la velocitat específica, i va de $z = 4$ per a velocitats molt baixes, fins a valors pròxims a $z = 12$ per a velocitats més altes. És impossible definir una regla precisa que permeti calcular el nombre d'àleps més adequat sobre la base d'un únic criteri: un nombre petit d'àleps simplifica la construcció del rodet i redueix les pèrdues per fregament però, alhora, augmenta la pressió de l'àlep, la diferència de velocitats en el canal i l'asimetria del flux radial (v. [4.137]), cosa que incrementa les pèrdues per despreniment i compromet la capacitat d'aspiració de la bomba. Mancant informació específica més concreta, es pot utilitzar una fórmula pseudoempírica que es deu a Pfeleiderer:

$$z \approx k \frac{m+1}{m-1} \sin\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) \quad [3.45]$$

en què m és la relació de diàmetres, D_2/D_1 , i k , un coeficient que pren valors pròxims a 6,5 (per a rodets de fosa) i és tant més petit com més gran sigui el gruix de l'àlep a l'entrada.

El gruix dels àleps depèn de les dimensions del rodet i del material, i per norma general són més gruixuts a les bombes que als ventiladors perquè la pressió mitjana interna i el parell a comunicar són més grans. En una bomba centrífuga, el traçat dels àleps s'emprèn de manera que la seva directriu sigui la més favorable possible per a aconseguir un canal relatiu d'acord amb els angles β_1 i β_2 de disseny (v. figura 4.7), que tendeixen a ser arrodonits a l'entrada i afilats a la sortida (de manera que $\mu_2 \approx 1$). Són freqüents les bombes dissenyades amb àleps en forma d'espiral o en arc de circumferència, però de vegades es fan servir àleps de gruix variable per aconseguir una evolució determinada de la secció relativa de pas, i fins i tot rectes (més en ventiladors).

En una bomba centrífuga gairebé mai es fan servir rodets amb àleps girats cap endavant, ja que les corbes característiques poden ser inestables quan $dY/dQ > 0$. Això passa en el tram de cabals petits per a angles β_2 més grans de 90° , de manera que és convenient evitar, en la mesura del possible, valors molt alts de β_2 . En els ventiladors radials, en canvi, és comú trobar dissenys d'àleps rectes o girats cap endavant, amb β_2 iguals a 90° o superiors, perquè les velocitats absoluta i relativa del fluid en gasos poden ser més grans i, moltes vegades, es projecten per comunicar només pressió dinàmica. Aquests dissenys redueixen la grandària del ventilador necessari i el seu cost, perquè s'aconsegueixen el mateix cabal i la mateixa energia amb una u_2 menor, però poden induir igualment el funcionament inestable del ventilador (com s'explica, per exemple, a 5.5.3).

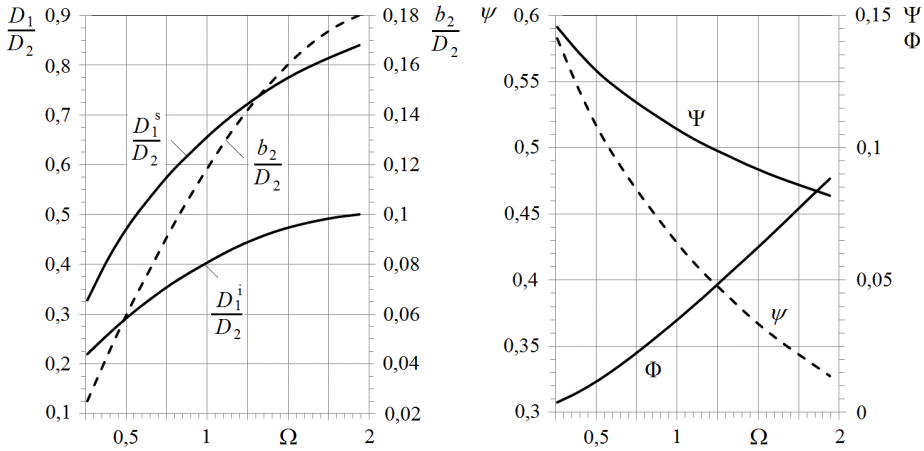


Figura 3.25. A l'esquerra, relació aproximada entre les diferents dimensions de rodet i la velocitat específica adimensional. A la dreta, es mostra l'evolució de les xifres d'energia i cabal amb Ω . Observem que, mentre que les xifres d'energia, Ψ i ψ , decreixen en augmentar Ω , la de cabal, Φ , augmenta.

Per concloure aquest apartat i malgrat que més endavant es reprendrà el tema atesa la importància que té, és convenient esmentar el valor dels angles d'entrada i sortida. Tal com s'ha dit, en les bombes centrífugues no és habitual que β_2 sigui molt gran per impedir que aparegui a la instal·lació el fenomen anomenat *bombeig* (apartat 5.5.2). Aquest angle està molt relacionat amb l'energia total comunicada pel rodet i el seu grau de reacció: es comprova que, si bé l'energia augmenta quan augmenta β_2 , és a costa de disminuir el grau de reacció i, per tant, la contribució del rotor a l'energia estàtica del flux. Aquesta circumstància força una solució de compromís per a β_2 i el converteix en un paràmetre fonamental del rotor i de la màquina (malgrat que, en realitat, els valors de β_2 òptims estan ben acotats per a cada tipus de bomba).

L'angle β_1 , en canvi, no guarda cap relació amb l'energia comunicada pel rodet en el cabal de disseny si s'admet que l'entrada és radial (β_{10} de [3.30]). La secció efectiva de pas i el coeficient μ_1 de [3.44] es redueixen molt per a angles d'entrada molt petits, però, en contrapartida, es demostra que un angle β_1 petit és convenient per evitar la cavitació. En conjunt, el normal és que es triï l'angle d'entrada en l'interval 15° - 25° , i tan baix com sigui possible. En resum i com a referència inicial, en un rodet radial els angles β_1 i β_2 prenen valors pròxims a 20° i 30° , respectivament, i és usual que $\beta_2 \approx \beta_1 + 10^\circ$.

3.4.3 Conductes fixos i difusors

L'equació de continuïtat per si sola permet obtenir la secció normal dels conductes fixos d'una bomba en funció de l'evolució prevista per a la velocitat mitjana en el



cabal de disseny. Aquests conductes fixos es poden trobar abans del rotor, a l'anomenat *canal d'aspiració* o darrera, i llavors tenen la missió addicional de difondre l'energia cinètica sobrant (v. figura 3.7). La distribució de velocitats en direcció radial en aquests difusors en què el flux es desenvolupa al voltant del rotor seguint línies de corrent en forma d'espiral no és en absolut uniforme en una secció recta normal (continguda en el pla meridiana), per això és difícil definir-ne la geometria en termes d'una velocitat mitjana característica. En aquests difusors, no obstant això, interessa que es conservi tant com sigui possible la simetria axial del flux i, com a la resta de conductes, que les pèrdues que s'ocasionin siguin mínimes.

La missió principal del canal d'aspiració és guiar el fluid fins a l'entrada del rodet facilitant l'acoblament suau de la bomba a la instal·lació i un $NPSH_R$ mínim. Tal com s'avançava en el tema anterior, al canal d'aspiració és convenient que el fluid s'acceleri des de l'entrada de la màquina fins al rodet, on les velocitats són v_e i c_1 , respectivament. Amb aquesta precaució, s'inhibeix la possibilitat que hi hagi desprendiments de la capa límit, alhora que s'uniformitza el flux d'entrada. A les màquines radials, per tant, no es produeix cap efecte difusor en aquest conducte, ja que el diàmetre de la brida d'aspiració, D_e , és una mica superior³¹ a D_1 . En la majoria de les bombes, a més, aquest diàmetre és també més gran que el de la brida d'impulsió, D_s , per afavorir-ne l'aspiració.

Els elements difusors que es poden trobar darrere del rodet són: la corona *difusora*, amb i sense àleps directrius divergents; la cambra *espiral*, i el *con difusor*. La corona difusora i la cambra espiral són, de fet, una prolongació radial del rotor, i el con difusor es fa servir per uniformitzar el flux de sortida i induir un efecte difusor addicional (quan és necessari). L'ús d'àleps a la corona difusora guia i uniformitza el flux a la sortida del rodet i suposa una lleu millora del rendiment en el cabal de disseny, però té l'inconvenient que incrementa les pèrdues fora de disseny i el perill que els àleps puguin retenir cossos estranys. Aquestes consideracions expliquen que s'utilitzin gairebé exclusivament en les bombes grans³² i en les multietapes, en què els àleps guia serveixen per dirigir el flux a l'entrada de la fase següent en la direcció correcta (que ja no haurà de ser radial), i donar solidesa a l'estructura fent de nervis de la carcassa.

En la corona difusora sense àleps el fluid conserva la seva circulació i, per això, la projecció de la velocitat absoluta sobre la direcció perimetral, c_θ , conserva la relació: $rc_\theta = r_2c_{2u} = \Gamma/(2\pi)$. Això vol dir que la velocitat, c_θ , és la mateixa en cercles concèntrics al voltant de l'eix pel fet de ser una funció inversa del radi, $c_\theta = c_\theta(1/r)$. L'ample d'aquesta corona sol ser constant i d'un valor, b_3 , una mica superior (1 o 2 mil·límetres) a l'ample b_2 que es té a la sortida del rodet, de manera que es pot admetre, en principi, que les pèrdues per xoc a la seva entrada són mínimes i que, en una primera aproximació, $b_2 \approx b_3$. Amb aquesta condició, la velocitat meridional del flux, c_m , s'avalua per conservació fent $c_m = Q/(2\pi rb) \approx c_{2m}r_2/r$; és a dir, també és $c_m = c_m(1/r)$ i decreix amb el radi per a un cabal per unitat d'ample, q , constant a partir del seu valor a la



sortida del rotor. Totes dues circumstàncies respecten les condicions del flux potencial bidimensional en forma de vòrtex lliure amb una font puntual descrit per l'equació [2.172] i, per tant, les línies de corrent seran línies espirals com les que es mostren en la figura 2.12.

L'efecte difusor d'un flux en espiral està implícit en la seva definició, ja que el mòdul de la velocitat absoluta decreix de manera inversa amb el radi. En una bomba, en general, el valor de c_{2m} és un ordre inferior al de c_{2u} , de manera que la difusió en termes de la velocitat meridiana amb prou feines té influència perquè la seva energia cinètica és dos ordres menor. En altres paraules, a la sortida del rotor s'ha de transformar bàsicament la projecció perimetral de la velocitat absoluta i, ja que aquesta és només funció de r , el coeficient de recuperació del difusor dependrà exclusivament de l'extensió radial, i no de la seva amplada, suposant que sigui uniforme en r . Per això, l'efecte difusor es veu compromès quan es limita la grandària màxima de la màquina, com es pot comprovar de la relació inversa entre r i c , i l'ús de les corones difusores només està indicat en algunes bombes i ventiladors d'alta pressió i en els compressors centrífugs.³³ En absència de corona difusora (figura 3.26), els radis r_2 i r_3 són molt semblants, i rars vegades la seva diferència és de més de 10 mm en les bombes centrífuges.

Pel que fa al desenvolupament angular de la voluta i a la seva forma, s'ha de tenir en compte que el cabal aportat pel rodets creix en desenvolupar el perímetre al voltant seu. Si s'accepta que tot el cabal de la bomba passa per la cambra espiral,³⁴ el cabal recollit en un angle θ , comprès θ entre 0 i 2π , és la part proporcional del cabal total, és a dir:

$$Q_\theta = \frac{\theta}{2\pi} Q \quad [3.46]$$

A la cambra espiral es continuen donant les condicions de vòrtex lliure i, si no hi ha corona difusora o és sense àleps, llavors la circulació encara es manté constant i continua sent $c_\theta = c_{2u} r_2 / r$. Això implica que la velocitat mitjana en cada secció de la cambra espiral serà més petita com més gran sigui aquesta secció i més separat estigui el seu centroid de l'eix de gir, sempre que c_{2u} sigui uniforme en r_2 , evidentment, o ho sigui la velocitat a la sortida de la corona difusora, en el seu cas. El cabal Q_θ en una secció recta de la voluta, A_θ , s'obté per integració de la distribució de velocitats imposada per c_θ , i resulta:

$$Q_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{A_\theta} \frac{1}{r} dA_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{r_3}^{r_\theta} \frac{b(r)}{r} dr \quad [3.47]$$

En aquesta equació, $b(r)$ marca l'evolució de l'amplada de la voluta en $A_\theta(r)$ amb el radi, r_3 és el radi d'inici de la voluta, i r_θ , el radi màxim en θ . Evidentment, l'àrea A_θ no ha de ser proporcional al cabal corresponent, Q_θ , com passaria si s'acceptés que la velocitat mitjana a la cambra espiral fos constant.



Combinant tots dos resultats, s'obté l'equació general de la voluta:

$$\int_{r_3}^{r_\theta} \frac{b(r)}{r} dr = \frac{Q}{\Gamma} \theta \quad [3.48]$$

que pot ser integrada numèricament en funció de la forma triada per a A_θ (sigui rectangular, circular, trapezoidal, etc.). Per exemple, en el cas més senzill en què és $b(r) = b$ constant, la cambra espiral desenvolupada des de $\theta = 0$, en què $r = r_3$, és precisament una espiral logarítmica³⁵ a la què correspon un radi màxim en $\theta = 2\pi$ de valor:

$$r_{2\pi} = r_3 e^{\frac{2\pi Q}{\Gamma b}} \quad [3.49]$$

Per a altres formes de voluta, la línia exterior de la cambra desenvolupada des de $\theta = 0$ no serà una espiral logarítmica, tot i que en general s'anomena *cambra espiral* qualsevol forma de voluta.

Per afegir un efecte difusor addicional a la cambra espiral i que la velocitat mitjana disminueixi amb θ sense penalitzar el diàmetre de la màquina, la seva secció ha de créixer a un ritme més gran que l'indicat per l'equació [3.49] per a una voluta d'ample constant. Una manera d'aconseguir-ho consisteix a difondre la velocitat meridiana fent que $b(r)$ sigui una funció creixent en r i que $b(r) > b_2$ (per això, les volutes solen tenir un ample mitjà superior a b_2). Amb aquesta condició, si es vol mantenir la simetria del flux en la cambra espiral, les seccions successives de la voluta s'han de generar a partir de les anteriors de manera que la seva secció anular es mantingui constant per a tot θ en cada r , és a dir, siguin superfícies de revolució. Això s'aconsegueix, per exemple, en les cambres espirals que tenen forma trapezoidal (o recta), tal com s'aprecia en la figura 3.26. S'augmenta la difusió de la velocitat meridiana si l'àrea de la voluta creix en θ engolint les seccions anteriors (voluta circular), de manera que el seu ample, a un radi determinat, augmenti en desenvolupar al voltant del rotor, $b(r, \theta)$. Això fa que es perdi la simetria i que la velocitat c es torni més plana en augmentar θ , perquè encara es compleix que $c_\theta = c_0(1/r)$.³⁶ Tots dos casos, en definitiva, impliquen un efecte més gran de difusió que el corresponent a l'expansió en espiral.

En aquestes circumstàncies, sent $b(r) > b_2$, però en major grau en el segon cas, la velocitat d'entrada del fluid en la voluta, c_3 , suposada uniforme, serà major en mòdul que la que hi circuli en qualsevol secció i , a més, tindrà una altra direcció (aquest efecte serà més marcat a mesura que θ augmenti), per això serà inevitable que hi hagi una pèrdua per xoc que pot malmetre l'efecte buscat. Com que aquesta pèrdua disminueix quan augmenta la velocitat del fluid en la cambra espiral (en aproximar totes dues velocitats entre si), però en fer-ho augmenten les pèrdues per fregament i disminueix la recuperació de pressió, és clar que hi ha un valor òptim per a la velocitat mitjana a la sortida de la cambra espiral. Un valor de compromís generalment



acceptat d'aquesta velocitat és $c_{2\pi} \approx 0,7c_3$, per al qual el coeficient de recuperació [2.110] de la cambra espiral és, aproximadament, $c_{R,t} \approx 0,5$. Això és: si el rendiment com a difusor de la cambra espiral és del 90%, és recuperable el 45% de l'energia cinètica a la sortida de la corona difusora.³⁷

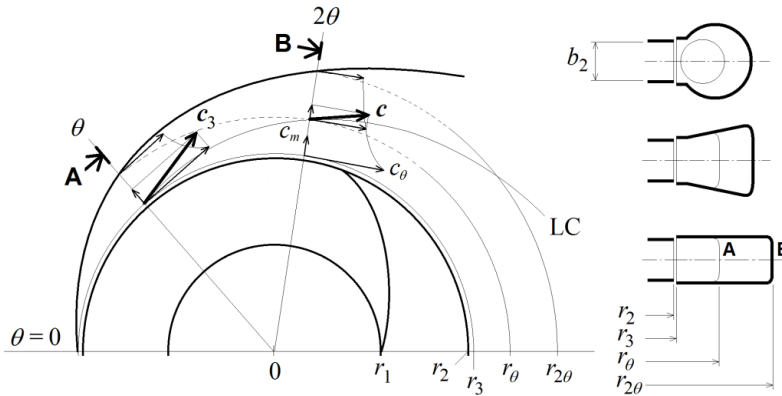


Figura 3.26. Flux potencial a la sortida del rodet i diferents formes de voluta: rectangular, trapezoidal i circular. La forma rectangular es fa servir sobretot en ventiladors de xapa per la seva simplicitat, mentre que les bombes centrífugues solen emprar volutes circulars o ovalades. Si la línia de corrent (LC) és una espiral logarítmica, es compleix que $r\theta = (r_3r_{2\theta})^{1/2}$ i la progressió del radi en θ és geomètrica.

Darrere de la cambra espiral el fluid entra en el con difusor amb una distribució de velocitats en absolut uniforme en qualsevol supòsit. L'angle de divergència d'un con difusor no ha de ser superior a 10° , aproximadament (v. figura 5.3), per això la recuperació d'energia cinètica que es pot aconseguir està condicionada per la seva longitud, el diàmetre de la brida d'impulsió, D_s , i la secció de sortida de la cambra espiral, $A_{2\pi}$, assimilable a un diàmetre $D_{2\pi}$. Per raons constructives, la longitud del con difusor és similar a la del diàmetre D_2 del rodet (v. figura 3.7), de manera que el seu coeficient de recuperació teòric és de l'ordre:

$$O(c_{R,t}) = 1 - \left(\frac{D_{2\pi}}{D_s}\right)^4 = 1 - \left(1 - 2\frac{D_2}{D_s} \tan 5^\circ\right)^4 \quad [3.50]$$

Un càlcul senzill posa de manifest la importància d'aquest element: si, per exemple, és $D_2 \approx 2D_s$, llavors resulta $c_{R,t} \approx 0,8$. No obstant això, com que el seu rendiment és limitat per la no uniformitat del flux a la sortida de la cambra espiral, de vegades es prescindeix del con difusor o bé se substitueix per un conducte recte que només suposarà llavors una prolongació longitudinal de la cambra espiral. En qualsevol cas, dels elements difusors explicats en aquest apartat, el que resulta imprescindible en una bomba centrífuga és la cambra espiral, mentre que l'ús dels altres és opcional.



3.4.4 Sistemes d'estanquitat

Les fugides de cabal, Q_f , són degudes al fet que a la sortida del rodet hi ha més pressió que a l'entrada, cosa que força la reculada del fluid pels espais que es formen entre el rodet i la carcassa de la bomba. Part d'aquest fluid torna a ser impulsat pel rodet, la qual cosa produeix una recirculació en forma de fuga interna, mentre que la resta surt cap a fora a través del recobriment de l'eix.

Les fuites internes són més importants que les pèrdues cap a l'exterior a través de l'eix, ja que la seva rectificació i disminució no és tan senzilla. Se sap que, si el cabal de fuga interna transcorre en règim laminar, és a dir, si la fuga està controlada, llavors és proporcional al cub de l'espai diametral i al gradient de pressió, i inversament proporcional a la viscositat del fluid. Sent la viscositat una dada i el joc limitat per condicionants constructius, la reducció de la fuga interna passa per minorar el gradient de pressió, el que és possible combinant dues estratègies: d'una banda, incorporant una junta en forma de laberint que allargui la distància a recórrer pel fluid i faci que el camí de retorn sigui més resistiu i sinuós, i, de l'altra, practicant als anells de la junta una sèrie de ranures diametral (merlets) en què el fluid experimenti successives expansions brusques i canvis de direcció que consumeixin l'excés de pressió de fuga.³⁸ Els materials de tots dos anells (en negre, a la part central de la figura 3.27) solen ser diferents per evitar que quedin garrotats, o bé del mateix material, però de duresa superficial diferent (amb uns 50 números Brinell de diferència). A la figura adjunta, es poden visualitzar els camins de pèrdues volumètriques interiors i exteriors d'una bomba i algunes disposicions de juntes laberíntiques d'anell.

En general, les pèrdues que es produeixen cap a l'exterior a través del cos de la bomba i la caixa de tancament, o a través de les brides d'impulsió o aspiració, són menyspreables perquè són controlables adequadament mitjançant juntes estàtiques. La funció d'aquestes juntes s'assegura quan es respecten les dimensions dels allotjaments i les seves toleràncies, les instruccions de muntatge i la seva compatibilitat amb el fluid. Per a les altres fuites externes, cal recórrer a sistemes d'estanquitat dinàmica, ja siguin juntes de llavi, estopades, segells mecànics, etc., la tria dels quals es fa bàsicament en funció de la pressió de treball i de la velocitat perimetral de l'eix, o bé a sistemes de tracció magnètica en què desapareix l'eix passant i la fuga s'anul·la per complet.

A la figura 3.27, es pot veure també la disposició habitual en caixa d'una estopada simple i la seva premsaestopa (la caixa és desmuntable en les bombes modernes). L'estopada és un material porós, compacte, format normalment per fibres vegetals premsades i grafit, que s'ha de mantenir lubricat i refrigerat perquè no es cremi i bloquegi l'eix.³⁹ Per a això, es tolera una petita fuga al seu través de diverses gotes per minut que serveix a més per controlar-ne l'estat (si el comptatge de gotes s'incrementa, s'haurà de compactar amb el premsaestopa, i viceversa). L'estopada no és un



sistema d'estanquitat estàtic i, per això, no pot impedir que la bomba en repòs es desencebi si no és combinat amb alguna mena de tancament mecànic que es desenganxi quan la bomba comenci a girar.

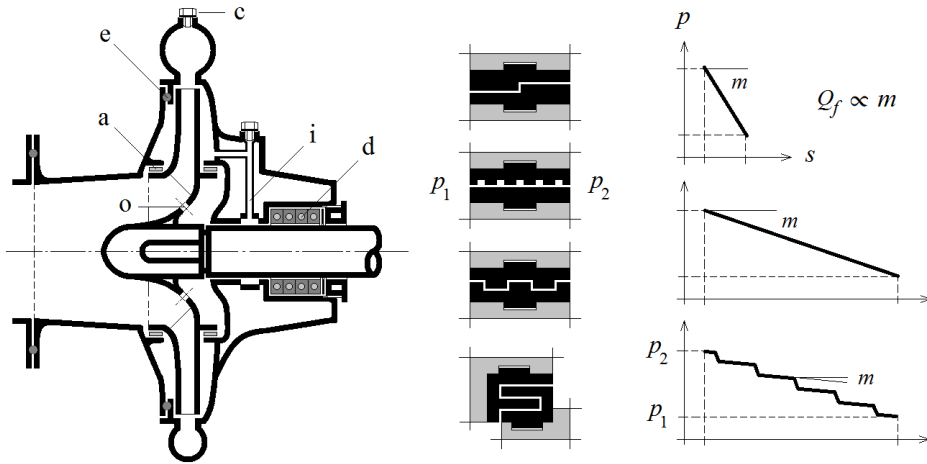


Figura 3.27. Representació dels sistemes d'estanquitat en una bomba centrífuga: estàtica (e), dinàmica per estopa (d) i d'anell (a). S'observen els orificis de compensació de l'empenta axial (o), la llanterna d'alimentació de fluid des de la impulsió (i) i la via d'encebament o purga (c). Al costat, alguns dissenys de juntes laberíntiques i emmerletades. A la dreta, es presenta la disminució del gradient de pressions, m , que s'aconsegueix allargant el recorregut de fugida i disposant ranures en la junta d'anell.

Cal tenir present que el sentit de la fuga és cap a l'exterior si la pressió interna a l'altre costat de l'estopada és positiva respecte de l'ambiental. Per això, entrarà aire a la bomba a través de l'estopada si, sota determinades condicions de funcionament, el gradient de la pressió actuant s'inverteix. Aquesta situació no és en realitat molt freqüent, però és possible si, per exemple, en el rodet s'han practicat orificis de compensació de l'empenta axial. Aquests orificis constitueixen una solució senzilla i alternativa a altres mecanismes d'equilibrat axial, ja que igualen la pressió radial a banda i banda del rodet, però, en contrapartida, fan que la pressió del costat de la junta pugui arribar a ser negativa (depenent de les condicions d'aspiració). Quan això passa, la bomba aspira aire a través de l'eix, aire que es barrejarà amb el corrent principal i el contaminarà, i que, amb el temps, farà inevitable que l'estopada s'assequi i cremi. La solució més convencional a aquest problema consisteix a injectar un petit cabal des de la impulsió, tal com s'observa a la figura 3.27 (llanterna, i), que mantingui l'estopada mullada i en bones condicions de funcionament a costa d'una petita pèrdua en rendiment volumètric.



3.4.5 Instal·lació i posada en marxa

Les bombes centrífugues són màquines senzilles que no necessiten unes condicions especials per a la seva posada en marxa, tot i que sí que és obligat prendre certes precaucions relatives tant al seu emplaçament com a la seva operació. Sempre és recomanable seguir les instruccions donades pel fabricant, ja que, tot i que els principis generals són els mateixos en totes les bombes, la forma i disseny varien entre les diferents versions constructives.

Les condicions bàsiques d'instal·lació de qualsevol bomba són:

- Ha de ser fàcilment accessible per a la seva inspecció durant l'operació i disposar d'un ampli espai per sobre per poder habilitar una grua o un polispast, si cal.
- S'ha de col·locar el més pròxim possible a l'aspiració per tenir el màxim NPSH disponible i reduir el risc de cavitació.
- Ha de mantenir una alineació exacta amb el seu acoblament, respectant les toleràncies de muntatge abans i després de la seva instal·lació.
- Ha de tenir una bancada sòlida que eviti desplaçaments que desalineïn la bomba o el motor.

Altres condicions vindran imposades pels sistemes de proveïment i drenatge, el tipus d'alimentació del motor, sanejament i condicionament del local on es troba la bomba, etc. La figura 3.29 mostra, d'una manera esquemàtica, els components de la instal·lació d'una bomba centrífuga.

L'experiència demostra que la majoria dels problemes de bombeig són deguts a un mal disseny de les canonades d'aspiració o a les seves males condicions d'operació. El principal problema és que no es compleixin les condicions necessàries de NPSH en el conducte d'aspiració, per la qual cosa és necessari verificar que el disponible sigui sempre superior al requerit per a evitar que la bomba entri en cavitació (v. [3.59]).

La instal·lació que assegura l'alimentació adequada de la bomba inclou tant el pou de presa o dipòsit, que no sempre té una funció d'emmagatzematge i en què s'han de respectar els anomenats *límits de sumergència*, com la canonada d'aspiració. En algunes ocasions no hi ha dipòsit d'aspiració abans de la bomba, com passa, per exemple, amb les bombes "en línia", molt utilitzades per la indústria química. D'igual manera, no totes les bombes necessiten canonades d'aspiració; en concret, a les submergibles, l'entrada del fluid es fa directament des del pou.

La canonada d'aspiració té com a missió principal conduir el fluid fins a l'entrada de la bomba, assegurant que la distribució de velocitats sigui el més uniforme i axial possible. Es distingeixen dos casos de canonada d'aspiració: a pressió o d'aspiració



positiva (preferible), i de succió, en les quals la pressió interna és inferior a l'atmosfèrica, perquè la bomba es troba, per exemple, a un nivell superior respecte a la superfície lliure del dipòsit d'aspiració, o bé aquest esta despressuritzat

Les canonades d'aspiració a pressió s'han de muntar en direcció descendent cap a la bomba per facilitar la sortida de l'aire retingut i, per aquesta mateixa raó, les de succió han de ser en direcció ascendent. El pendent mínim dels trams horitzontals ha de ser del 2% en tots dos sentits, ascendent o descendent. En aquest conducte s'ha d'evitar la col·locació de dos colzes consecutius en plans diferents i també els canvis bruscos de secció. Si abans de la bomba s'ha de col·locar un con difusor per adaptar el diàmetre al de la brida d'entrada, a les canonades de succió aquest ha de ser excèntric amb la seva generatriu superior horitzontal per evitar la retenció de bosses d'aire (v. figura 3.28). A les canonades a pressió, no és necessari que el con sigui excèntric amb un pla horitzontal, tot i que sí que és recomanable.

En l'extrem inferior de la canonada d'aspiració en succió, es munta una vàlvula de peu a una profunditat suficient (si és possible, entre 0,9 i 1,8 metres) que eviti la presa d'aire com a conseqüència de la formació de vòrtexs de tipus torxa o cucs d'aspiració, però tampoc gaire prop del fons per evitar que s'aspiri fang, sorra, sòlids o qualsevol cos estrany. Aquesta vàlvula no és necessària en les bombes anomenades aspirants o autoencebants, que no necessiten ser encebades. A les canonades d'aspiració a pressió, s'ha de muntar una vàlvula de tancament abans de la bomba que eviti el buidament del dipòsit d'aspiració amb la bomba apagada. Aquesta vàlvula ha d'estar completament oberta sempre que la bomba estigui en funcionament.

En general, just després de la bomba es munten una vàlvula de pas i una vàlvula de retenció. La vàlvula de pas, de comporta o d'un altre tipus (v. apartat 5.2), es fa servir per regular el cabal i evitar, en determinats casos, la sobrecàrrega del motor d'accionament. La vàlvula de retenció és unidireccional i recomanable en instal·lacions d'una altura geomètrica superior als 15 metres, o inferior si la longitud de la canonada és elevada. Aquesta vàlvula s'utilitza per contenir la columna d'aigua que gravita per sobre de la bomba en repòs, així com per impedir que el cop d'ariet que es pugui produir durant la seva detenció, prevista o no, danyi la bomba o la faci funcionar com a fre.

El diàmetre nominal de la canonada d'aspiració es tria de manera que la velocitat mitjana de circulació de l'aigua no sobrepassi els dos metres per segon, i ha de ser una mica superior en les de succió. Referent a la canonada d'impulsió, el seu diàmetre es tria d'acord amb els diàmetres de canonades recomanats en taules o fórmules en funció del cabal, de la pèrdua de càrrega admissible i del cost global de la instal·lació (v. figura 5.10 i apartat 5.1.5). Es recomana, així mateix, que les canonades d'aspiració i impulsió se sostinguin independentment de la bomba per evitar la transmissió d'esforços o tensions sobre la carcassa o les seves brides. Altres canonades presents en una instal·lació de bombeig són les de drenatge o purga, que es canalitzen a un embornal apropiat i que, per les seves dimensions, poden ser autosostingudes.



Un aspecte característic de les bombes i que mereix una especial atenció durant la seva posada en marxa és l'encebament.⁴⁰ La bomba ha d'estar perfectament encebada abans que es posi en servei, és a dir, s'ha d'haver extret tot l'aire, gas o vapor de la canonada d'aspiració i del cos de la bomba. El procediment d'encebament és diferent segons si la bomba té aspiració positiva o negativa. Si l'aspiració és positiva, és a dir, a pressió, llavors cal:

- Obrir totes les vàlvules d'aspiració perquè el líquid entri a la canonada i la bomba, i tancar, al seu torn, totes les vàlvules de descàrrega.
- Afluixar el tap de purga situat a la brida d'impulsió per donar sortida a l'aire.

La bomba està encebada i es pot posar en marxa quan el líquid flueix de manera contínua i sense bombolleig per la purga.

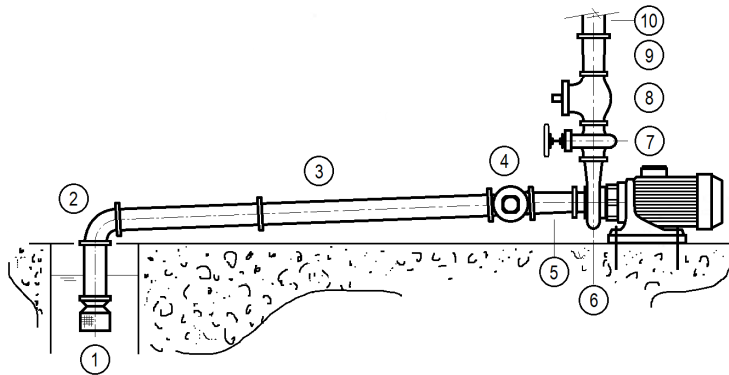


Figura 3.28. Instal·lació d'admissió d'una bomba per succió. La vàlvula de comporta (7) està normalment tancada i s'obre gradualment una vegada la bomba està en marxa. Si la temperatura del fluid és elevada, almenys superior a 100 °C, s'aconsella col·locar una junta d'expansió entre el con difusor concèntric (9) i la canonada d'impulsió (10).

Descripció	
1	Vàlvula de peu i colador d'àrea no inferior a tres vegades l'àrea del conducte
2	Corba de radi ampli
3	Canonada d'aspiració en posició ascendent cap a la bomba (no es mostren els suports)
4	Vàlvula de comporta en posició horitzontal (no sempre present)
5	Con difusor excèntric amb generatriu superior horitzontal
6	Bomba centrífuga
7	Vàlvula de regulació
8	Vàlvula de retenció
9	Con difusor concèntric
10	Canonada d'impulsió



L'encebament és més laboriós en cas d'aspiració negativa, perquè l'aire no surt per si sol sense ajuda mecànica. En aquest cas, és imprescindible crear un buit més gran del que existeix a la bomba, i per fer-ho s'utilitzen ejectors muntats en el conducte d'impulsió abans de la vàlvula de descàrrega, o bombes de buit del tipus anell líquid o similar. La bomba estarà encebada i es podrà posar quan la canonada de sortida de l'ejector (o de la bomba de buit) expulsi el líquid d'una manera contínua, però ara, abans de desconnectar l'ejector, cal assegurar que la bomba aconsegueix el règim de funcionament perquè no es perdi l'encebament.

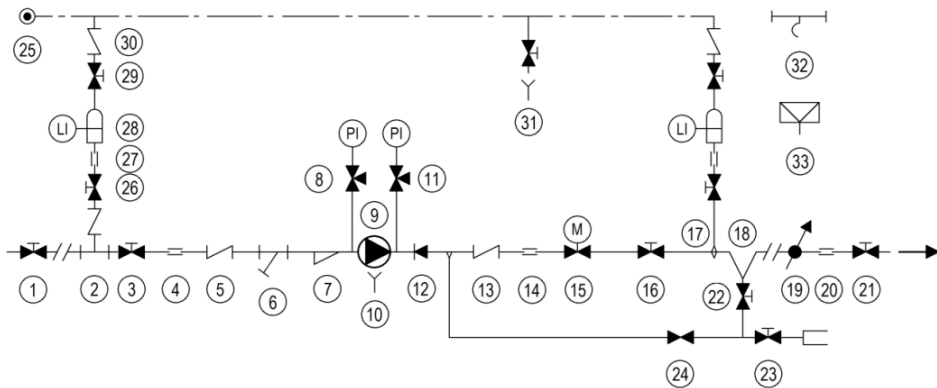


Figura 3.29. Esquema d'una instal·lació de bombament (símbols segons la norma DIN).

Descripció	
1	Vàlvula d'aïllament del col·lector d'aspiració
2	Te amb reducció per a la connexió del calderí d'aire en aspiració
3	Vàlvula d'aïllament de la bomba del costat d'aspiració
4	Rodet de desmuntatge
5	Vàlvula de retenció del costat d'aspiració
6	Filtre o colador
7	Con de reducció asimètric en l'aspiració de la bomba
8	Manòmetre en aspiració equipat amb una vàlvula de tres vies
9	Bomba
10	Desguassos de la bomba
11	Manòmetre en impulsió equipat amb una vàlvula de tres vies
12	Con de reducció simètric en impulsió de la bomba
13	Vàlvula de retenció del costat d'impulsió
14	Rodet de desmuntatge
15	Vàlvula de maniobra motoritzada en impulsió
16	Vàlvula d'aïllament de la bomba del costat d'impulsió
17	Te amb reducció per a la connexió del calderí d'aire en impulsió
18	Preses d'aigua per a serveis
19	Cabalímetre o comptador
20	Rodet de desmuntatge o substitució del comptador



21	Vàlvula d'aïllament del col·lector d'impulsió
22	Vàlvula d'aïllament
23	Altres serveis (neteja, condicions, refrigeració, etc.). Presa de mànegas
24	Servei d'encebament de la bomba
25	Presa d'aire a pressió
26	Vàlvula d'aïllament del calderí
27	Rodet de desmuntatge
28	Calderí d'aire amb indicador de nivell i pressòstat
29	Vàlvula d'aïllament
30	Vàlvula de retenció de l'alimentació del calderí
31	Purgador
32	Pont grua
33	Desguàs general de la instal·lació de bombeig

3.5 Bombes de desplaçament positiu

Una bomba hidràulica és volumètrica o de desplaçament positiu quan impulsa un volum fix de fluid per volta de l'element motor. El cabal mitjà total impulsat és el resultat del procés continu d'impulsió, i s'obté combinant aquest volum amb les revolucions de l'accionament de la bomba. Aquest cabal, excepte per l'efecte de les fuites de fluid, és independent de la pressió de treball en condicions normals d'operació (sempre que la bomba no incorpori algun dispositiu de regulació o limitació, o s'excedeixi la potència de l'accionament).

Aquestes bombes són idònies en aquelles aplicacions en què es requereixin altes pressions (fins i tot, de centenars de bars) i cabals baixos (velocitats específiques petites). Com que el cabal és desallotjat pràcticament de manera independent de la càrrega, aquestes bombes troben nombroses aplicacions industrials, tant en el dosatge de productes com en dispositius elevadors, de tracció, etc., o mòbils, en què treuen avantatge de la seva elevada relació potència-pes. A diferència de les bombes rotodinàmiques, són relativament insensibles a la viscositat del fluid; a més, alguns models poden treballar satisfactòriament amb baixes velocitats cobrint una àmplia gamma de condicions de treball diferents.

En una bomba de desplaçament positiu, el fluid entra atret per la depressió que es genera en la línia d'aspiració com a conseqüència del moviment del mecanisme intern. Aquest mecanisme, format segons la varietat de màquina pels engranatges, unes paletes o diversos pistons, és l'encarregat de transportar el fluid de la brida d'aspiració a la d'impulsió. La pressió a la sortida de la bomba es genera quan s'introdueix un fluid pràcticament incompressible en un sistema de capacitat finita, i després s'hi propaga amb la finalitat d'obtenir un treball útil.

Aquestes bombes poden ser bidireccionals o unidireccionals, és a dir, reversibles o no reversibles, i alguns models poden actuar com a motors sense gaire bé canvis. No



obstant això, i en contra de la creença popular motivada per la similitud morfològica entre les bombes i els motors de desplaçament positiu, no totes estan preparades de fàbrica per resistir pressions elevades en la seva llumenera d'aspiració (pel gruix dels materials necessaris i el disseny del sistema d'estanquitat) o per drenar les fuites internes directament a tanc, per això s'han de prendre certes precaucions quan es vol fer servir una bomba volumètrica com a motor.

3.5.1 Tipus de bombes volumètriques

Les bombes de desplaçament positiu poden ser, segons el seu principi de funcionament, oscil·lants i rotatives. Les bombes de tipologia oscil·lant estan formades per un o diversos pistons en moviment alternatiu i diverses vàlvules d'aspiració i impulsió, mentre que les rotatives contenen un mecanisme en rotació encarregat de transportar el fluid de l'aspiració a la impulsió. A continuació, i a la taula 3.4, es descriuen el funcionament i les característiques bàsiques de les bombes de desplaçament positiu més comuns.

Les bombes oscil·lants poden ser bombes d'èmbol o de membrana. En les primeres, un èmbol atreu fluid cap a un receptacle en la carrera d'aspiració i l'expulsa en la d'impulsió. El moviment alternatiu de l'èmbol s'aconsegueix mitjançant un mecanisme en biela-manovella (a motor o manual). En les segones, la membrana elàstica pot ser solidària d'un èmbol o es pot desplaçar per l'acció de la pressió hidràulica que li aporta un fluid auxiliar. Totes dues tipologies de bombes oscil·lants necessiten vàlvules d'aspiració i d'impulsió que aïllin la cambra del pistó del sistema d'aspiració o del d'impulsió. Aquestes vàlvules s'obren o es tanquen alternativament per acció de la pressió interna en la cambra, i solen incorporar una petita molla que n'asseguri la posició de repòs. Una manera d'augmentar el volum impulsat per revolució en aquesta classe de bombes consisteix a doblar el nombre de cambres i vàlvules per obtenir dues carreres útils en cada revolució. En aquestes bombes, anomenades *de doble efecte*, l'èmbol es desplaça per l'interior d'una camisa cilíndrica empès per una tija articulada a l'element motor (la presència de la tija disminueix el volum bombat en un dels sentits). També és possible muntar en sèrie diverses etapes per aconseguir més pressió.

Les bombes rotatives més comunes són les d'engranatges, les de paletes, les de pistons i les peristàltiques. Les bombes d'engranatges poden ser, al seu torn, d'engranatges externs, interns, de lòbuls, *gerotor* i helicoidals; les de paletes poden ser de paletes lliscants o flexibles (i d'altres) i estar equilibrades o no, i les de pistons poden tenir els pistons disposats de manera axial o radial. De totes aquestes bombes, les de paletes i les de pistons poden ser de capacitat volumètrica variable, cosa que les permet desallotjar un cabal variable a revolucions constants i augmentar així l'interval de cabals possibles (disminuint, sobretot, el cabal mínim disponible).



El nombre de variants disponibles d'aquesta mena de bombes al mercat és tan ampli que lamentablement se'n deixen per explicar algunes amb un interès pràctic evident. Entre aquestes hi ha les de caragols helicoidals, les mono o de capacitat progressiva, les *scroll* o les de lòbuls, però totes es poden entendre a partir de les altres atès que comparteixen principis de funcionament anàlegs.

Una bomba d'engranatges externs transporta el cabal entre les dents de perfil envoltant de dos pinyons acoblats. Un dels pinyons és el motor, accionat mitjançant un eix passant, mentre que l'altre és conduït pel primer i el seu eix es recolza en les plaques laterals internes de la bomba. La impulsió té lloc quan les dents de tots dos pinyons es troben del costat de la llumenera de sortida, pessigant el fluid. Aquestes bombes són de desplaçament fix i permeten el seu muntatge múltiple en un mateix eix.

Les bombes d'engranatges interns també disposen de dos pinyons, com les d'engranatges externs, però ara les dents engranen internament. En aquestes bombes, el pinyó intern és el motor i té una o dues dents menys que l'extern, per norma general, entre els quals se situa una peça en forma de mitja lluna que ajuda a mantenir l'engranament i a conduir el fluid.

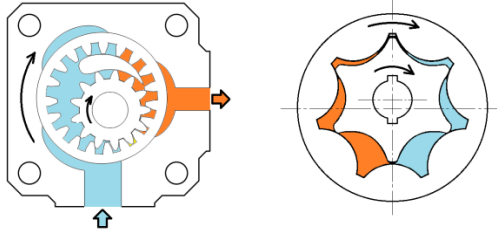
Les bombes gerotor són bombes d'engranatges interns amb dues rodes de perfil trocoidal que no necessiten la peça en mitja lluna. Tots dos rotors generen, quan giren, un volum que es desplaça i força l'oli a passar de la llumenera d'entrada a la de sortida a través de la placa de llumeneres. En aquestes bombes, el rotor intern és el motor i té una dent menys que l'extern. Entre els desavantatges, cal assenyalar que continua sent de desplaçament fix, com la resta de les bombes d'engranatges, i que és bastant sensible a la contaminació del fluid, per això sol presentar problemes d'estanquitat per desgast amb el temps.

Bombes de desplaçament positiu	Característiques
	<p>Bombes oscil·lants d'èmbol i de membrana (dreta). La membrana pot ser anul·lar (a la figura) o de disc, i les vàlvules poden ser de llençüeta (especialment, per a baixes pressions) o de pistó (a la figura).</p>
	<p>Bomba d'engranatges externs de perfil envoltant. A la dreta, una imatge de perfil en què s'observen les plaques laterals (en gris) i la ubicació de les juntes estàtiques (en negre). Aquestes bombes són compactes, lleugeres i de baix cost, amb un bon marge de velocitats i poc sensibles a la contaminació, però també són bastant sorolloses.</p>

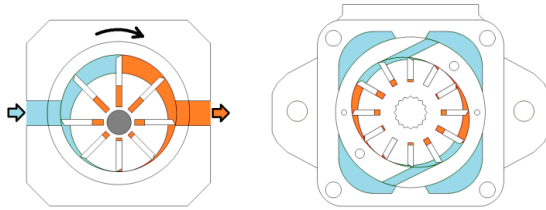


Bombes de desplaçament positiu

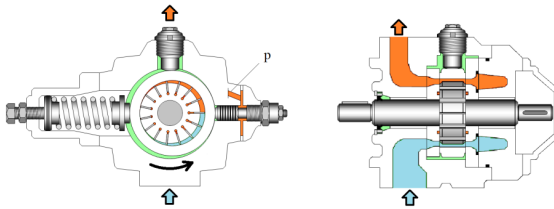
Característiques



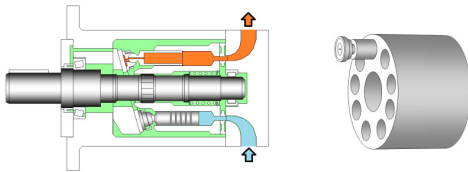
Bombes d'engranatges interns: de mitja lluna (esquerra) i gerotor (dreta). Aquestes bombes són de capacitat volumètrica fixa i també permeten el seu muntatge múltiple. Són bastant més silencioses que les d'engranatges externs, però, en canvi, també són més sensibles a la contaminació. Només necessiten un eix.



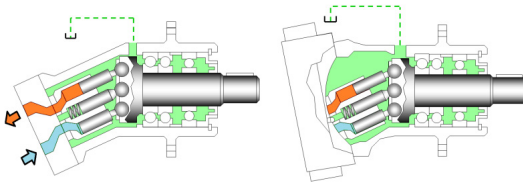
Bomba simple de paletes lliscants (esquerra) i bomba de doble aspiració (dreta). En aquestes últimes, les dues cambres de bombament estan separades 180°, cosa que anul·la els esforços que, d'una altra manera, es transmetrien lateralment a l'eix i als coixinets de la bomba.



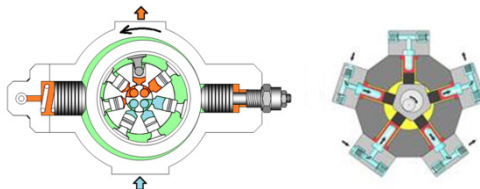
Bomba de paletes de capacitat volumètrica variable. El sistema de regulació de l'excentricitat pot ser mecànic o hidràulic. La bomba d'aquesta figura redueix el cabal quan la pressió d'impulsió, transmesa per la llanterna p, aconsegueix el taratge de la molla de l'esquerra.



Bomba de pistons axials en línia. A la dreta, un barrilet de nou pistons. El rendiment d'aquestes bombes és elevat. A més, poden ser reversibles i impulsar cabal en tots dos sentits.



Bombes de pistons axials d'eix inclinat, de capacitat constant (esquerra) i variable (dreta). Aquestes bombes no tenen eix passant, malgrat que són compactes i de rendiment elevat.



Bomba de pistons radials de capacitat variable (esquerra). L'ample d'aquestes bombes és més petit que el d'altres bombes del mateix cabal, cosa que pot suposar un avantatge de muntatge. També permeten el seu muntatge múltiple.



Bombes de desplaçament positiu	Característiques
	<p>Bombes peristàltiques d'un corró i de dos. A la bomba de la figura (esquerra), un braç amb dos corrons pressiona la mànega d'esquerra a dreta i empeny el fluid de l'aspiració a la impulsió.</p>

Taula 3.4. Bombes volumètriques de desplaçament positiu.

A les bombes de paletes, un rotor gira de manera excèntrica dins d'un estator circular o el·líptic. Al rotor de la bomba de paletes lliscants s'han mecanitzat unes ranures per les quals es mouen les paletes de manera radial per formar, amb la paret interna de l'estator i les laterals, la cambra de bombament. Les paletes es mantenen en contacte amb l'estator mitjançant l'efecte de la pròpia força centrífuga, però en alguns models s'utilitzen molles per ajudar a mantenir el contacte de les paletes a baixes revolucions, o bé oli a pressió provinent de la impulsió mitjançant una línia de pilotatge. Aquesta última opció exerceix una pressió de contacte proporcional a la pressió de treball, efecte que compensa les seves variacions i constitueix una bona alternativa si es busca un bon compromís entre estanquitat i rendiment mecànic. Les bombes de paletes proporcionen una arrencada suau i una bona capacitat d'aspiració amb fluids de baixa viscositat; són silencioses, de baix cost i poc manteniment, i també permeten el muntatge de més d'una bomba en un mateix eix.

Dues variants que distingeixen aquest tipus de bombes de les d'engrenatges són que poden ser de desplaçament variable, en funció de l'excentricitat entre el rotor i l'estator, i estar equilibrades en pressió. La simetria de pressions entorn del rotor s'aconsegueix duplicant els orificis d'impulsió i aspiració, tal com es mostra a la taula 3.4, però les bombes amb aquesta disposició només poden ser de desplaçament constant.

Les bombes de pistons axials en línia fan servir un nombre determinat de pistons en moviment alternatiu que giren arrossegats per un barrilet al voltant d'un eix motriu. Els pistons se recolzen sobre un plat inclinat mitjançant uns peus, i entren i surten del seu receptacle una vegada per volta de l'eix. El barrilet llisca sobre la placa de distribució connectant l'interior de la bomba amb els conductes d'aspiració i impulsió de manera que, a cada volta del barrilet, cadascun dels pistons aspira i impulsa un volum de fluid a través dels orificis disposats en aquesta placa. Aquest volum depèn de la seva àrea i del recorregut efectuat, que al seu torn és funció de la inclinació del plat. En les bombes de desplaçament variable, el plat inclinat es munta sobre un balancí amb un pivot l'angle del qual pot es regular mitjançant un mecanisme, de manera manual o hidràulica. Les bombes de pistons són molt compactes, tot i que sorolloses (sobretot les de desplaçament variable) i una mica sensibles a la contaminació i a les condicions d'entrada.



Les bombes de pistons axials d'eix inclinat fan servir un nombre determinat de pistons en moviment alternatiu, com les bombes de pistons en línia, però el barrilet gira al voltant d'un eix que té una direcció inclinada respecte del motriu. Els pistons s'uneixen a la brida de l'accionament mitjançant ròtules, i l'eix del barrilet amb el motor mitjançant una unió universal. L'acció de bombeig és la mateixa que en les bombes de pistons axials en línia.

Algunes bombes de pistons radials disposen un nombre de pistons de manera radial a l'interior d'un bloc cilíndric. Aquest bloc gira dins d'un anell i provoca el moviment oscil·lant i radial dels pistons seguint excèntricament el contorn. Una altra construcció alternativa d'aquesta mena de bombes aconsegueix el desplaçament radial dels pistons utilitzant una peça geomètrica que es trasllada de manera curvilínia a l'interior de la bomba (un pentàgon, a la figura de la taula 3.4). El rendiment d'aquestes bombes és molt elevat; el seu nivell de soroll és baix (comparat amb altres bombes), i tenen una vida útil bastant llarga. A més, i encara que el seu cost sigui elevat, ofereixen una gran varietat de velocitats, cabals i pressions de treball, i són adequades per al treball en anell obert i tancat.

En les bombes peristàltiques, s'utilitza un conducte flexible, que pot ser el mateix per on circula el fluid en la instal·lació, per generar la impulsió. Un factor decisiu del sistema peristàltic és, precisament, la seva perfecta estanquitat, raó per la qual són idònies en sistemes de dosatge i injecció de productes perillosos o químics en general.

Les característiques funcionals de totes aquestes bombes de desplaçament positiu, tant oscil·lants com rotatives, es poden descriure mitjançant un nombre reduït de gràfics i paràmetres, el més important dels quals és, sens dubte, la seva capacitat volumètrica.

3.5.2 Capacitat volumètrica i cabal instantani

La capacitat volumètrica, també anomenada *desplaçament* o *cilindrada* d'una bomba de desplaçament positiu, C_V , és el volum de fluid que la bomba subministraria per revolució en condicions ideals. El volum impulsat real és una mica inferior i gairebé independent de la pressió de treball, atès que la tècnica constructiva d'aquestes màquines ha reduït considerablement les fuites que hi ha.

El cabal que una bomba desplaça en buit, és a dir, quan treballa sense pressió i en absència de fuites (incloent-hi les de desplaçament associades al flux adherit de Couette), s'obté de l'expressió següent:

$$q_0 = C_V n S \quad [3.51]$$

on les unitats han de ser congruents entre si. Per exemple, si les unitats de C_V són cm^3/rev i les de n són rpm, el cabal q_0 resulta ser cm^3/min . La taula 3.5 recull les expressions amb què avaluar la capacitat volumètrica de les principals bombes volumètriques i els valors típics de diverses magnituds de treball (valors de referència que depenen del model i del fabricant).



El cabal desallotjat per una bomba de desplaçament positiu fluctua amb el temps degut a l'efecte de bombeig associat a la contribució de cadascun dels seus elements impulsors. Aquestes fluctuacions són filtrades d'alguna manera per la instal·lació, però cal mirar de minorar-les en la mesura que sigui possible, perquè generen, al seu torn, fluctuacions de pressió i vibracions contraproduents.

L'arriestat del cabal instantani obtingut es redueix, per exemple, augmentant el nombre de dents, paletes o pistons, però també afegint cambres en la impulsió, ja siguin internes a la bomba o mitjançant acumuladors externs, que afegeixin un efecte RC addicional i actuen de filtres hidràulics. La figura 3.30 mostra una forma típica (teòrica) de l'arriestat visible a la sortida de la bomba. És interessant observar que la freqüència de la forma obtinguda per superposició dels volums individuals impulsats és el doble que la freqüència d'engranament, $zn/60$. El factor d'arriestat d'una bomba es calcula com la diferència entre els cabals instantanis màxim i mínim, dividida pel cabal mitjà corresponent (en percentatge).

Tipus de bomba	C_v teòrica	C_v típics [cm ³ /rev]	p_s [bar]	n [rpm]
Engranatges externs	$4\pi Rmb$	0,15÷250	50÷300	350÷3.000
Engranatges interns	Sb	3÷200	50÷210	900÷3.500
Paletes lliscants	$(\pi(R^2-r^2)-(R-r)ez)b$	6÷200	50÷225	0÷2.500
Pistons axials en línia	Ahz	10÷750	100÷400	0÷3.500
Pistons radials	Ahz	0,4÷150	50÷700	0÷3.500

Taula 3.5. Capacitat volumètrica teòrica de diverses bombes de desplaçament positiu. En aquesta taula, són: b , ample de les dents d'un engranatge o d'una paleta; m , mòdul dels engranatges en bombes d'engranatges externs; S , secció lliure entre l'anell exterior i la roda interna; R , radi primitiu de l'engranatge, o radi major de la cambra d'una bomba de paletes; r , radi menor; e , gruix de la paleta; z , nombre d'èmbols, pistons o paletes; A , àrea de cada èmbol o pistó, i h , carrera de cada èmbol o pistó (que de vegades és regulable).

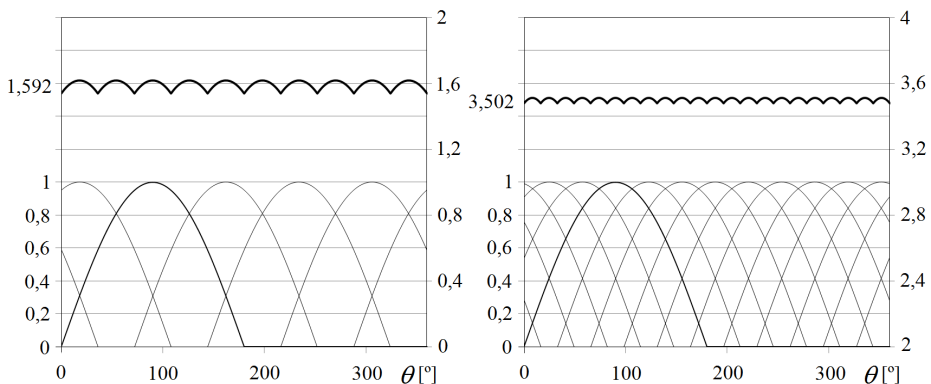


Figura 3.30. Arriestat del cabal instantani proporcionat per una bomba de pistons axials. A l'esquerra, amb cinc pistons i, a la dreta, amb onze. Els factors d'arriestat corresponents són del 5% i l'1%, respectivament. Observem també que l'arriestat induïx l'aparició d'una freqüència de valor $zn/30$



3.5.3 Corba característica i rendiments

El funcionament d'una bomba volumètrica es pot descriure mitjançant corbes característiques. La forma més comuna de representació és la que mostra la diferència de pressió entre les brides, e i s , i el cabal, q , impulsat en un punt d'operació (corba $p = p(q)$ de la figura 3.31). Aquesta característica es pot completar amb les corbes de rendiment volumètric i mecànic o, en defecte d'això, amb la potència de l'accionament o el parell consumit.

El rendiment total d'una bomba de desplaçament positiu s'avalua a partir de l'expressió següent: ⁴¹

$$\eta_T = \frac{(p_s - p_e)q}{M\omega} \quad [3.52]$$

en què p_s i p_e són la pressió en impulsió i aspiració, totes dues en [Pa]; q és el cabal volumètric impulsat, en [m³/s]; M és el parell de l'accionament, en [Nm], i ω és la velocitat de l'accionament mecànic, en [rad/s].

Els rendiments volumètric i mecànic s'obtenen de l'expressió anterior mitjançant una operació senzilla. Així, amb C_V en [m³/rad], en ser:

$$\eta_T = \frac{(p_s - p_e)C_V}{M} \frac{q}{\omega C_V} \quad [3.53]$$

els rendiments mecànic i volumètric són:

$$\eta_{mec} = C_V \frac{(p_s - p_e)}{M} \quad [3.54]$$

$$\eta_V = \frac{1}{C_V} \frac{q}{\omega}$$

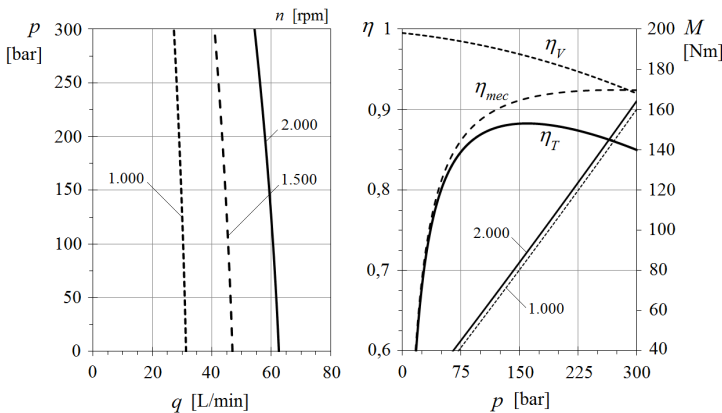


Figura 3.31. Corbes característiques d'una bomba de desplaçament positiu. La corba $p = p(q)$ es desplaça en sentit horitzontal si es modifica el valor de q_0 , sigui canviant el CV o bé les revolucions, n . Les corbes $\eta_i = \eta_i(p)$ de la dreta s'han representat per a $n = 1.500$ rpm. Les corbes de $M = M(p)$ són línies rectes.



És evident que es pot augmentar el cabal que impulsa una bomba a unes revolucions donades sense més que augmentar-ne la capacitat volumètrica (en dissenys de bombes que ho permetin). Passa que, com a contrapartida, en fer-ho també augmenta el parell necessari per a l'accionament a una pressió determinada (tal com es dedueix de la definició del rendiment mecànic). Aquesta última relació funcional observada entre el parell, la capacitat volumètrica i la pressió no és evident de les seves unitats respectives, però no s'ha de perdre de vista donada la seva importància.⁴²

En unitats més pràctiques, les expressions anteriors prenen la forma:

$$\begin{aligned}\eta_T &= \frac{50 (p_s - p_e) q}{\pi M n} \\ \eta_{mec} &= \frac{1}{20\pi} C_V \frac{(p_s - p_e)}{M} \\ \eta_V &= 10^3 \frac{1}{C_V} \frac{q}{n}\end{aligned}\quad [3.55]$$

on ara p_s i p_e són en [bar]; q , en [L/min]; M continua en [Nm]; n és la velocitat de l'accionament, en [rpm], i C_V és en [cm³/rev].

En aquestes bombes es podria definir, per analogia amb les rotodinàmiques, un rendiment hidràulic que donés compte de les pèrdues d'energia experimentades a dins seu. No obstant això, com que el seu disseny redueix el flux a la mínima expressió i les pèrdues són, en essència, singulars i molt interiors als altres termes, sobretot per a pressions d'impulsió elevades, se sol prescindir d'aquest rendiment i suposar que $\eta_H = 1$, tal com s'ha fet aquí. L'estat d'evolució d'aquesta mena de bombes fa que la resta de rendiments tinguin també valors bastant elevats, sent normals rendiments volumètrics i mecànics pròxims a la unitat. Referent a la seva dependència de les variables de funcionament de la bomba, per norma general s'accepten relacions funcionals del tipus $\eta_{mec} \approx \eta_{mec}(p_s, n)$ y $\eta_V \approx \eta_V(p_s, n)$, en què s'admet certa proporcionalitat entre les fuites de cabal i la pressió. Consulteu el tema 6.6, per a més detalls sobre la forma d'aquestes relacions i com afecten el disseny.

3.5.4 Selecció d'una bomba oleohidràulica

Els paràmetres principals que fonamenten la tria d'una bomba oleohidràulica de desplaçament positiu són:

- Pressió màxima de treball.
- Cabal màxim desplaçat, relacionat amb el seu CV a unes revolucions donades, i amb la possibilitat de regulació en bombes de desplaçament variable.
- Tipus de control i instal·lació. Les bombes es poden muntar en circuits oberts i tancats. En aquests últims, els actuadors són simètrics i el cabal impulsat és retornat íntegrament a l'aspiració de la bomba (excepte per les fuites, que s'han de



recuperar mitjançant un circuit auxiliar) i la grandària del dipòsit es redueix. L'avantatge resideix en l'ús de bombes de tipus reversible, capaces d'impulsar cabal en tots dos sentits.

- Velocitat d'accionament màxima i el marge d'operació: no totes les bombes són vàlides per a funcionar a baixes velocitats, per exemple.
- Tolerància a la contaminació ambiental i sensibilitat a la contaminació del fluid. A la norma ISO 4406, el nivell de neteja d'un oli oleohidràulic es determina fixant el nombre de partícules de grandària superior a 5 i 15 μm mitjançant un codi de dues xifres Y/Z (ampliat a 3 o 4 xifres, actualment). Com més petita és la xifra, menor és el comptatge de partícules. Observem a la figura 3.32 que l'augment de la pressió exigeix fluids cada vegada més nets i millor filtrats. Vegeu també l'apartat 6.5.2.
- Soroll. Per a un mateix tipus de bomba, el soroll augmenta alhora que la pressió de treball i les revolucions. Respecte al tipus, ordenades de més nivell sonor a menys, es troben les d'engrenatges externs, de pistons, de paletes i les d'engrenatges interns.
- Capacitat d'aspiració. Aquest factor s'ha de tenir present en la fase de disseny del circuit.
- Cost global. El cost de la bomba augmenta gairebé linealment amb la seva mida (CV), i es dispara en les de pistons variables a partir dels 150 cm^3/rev .

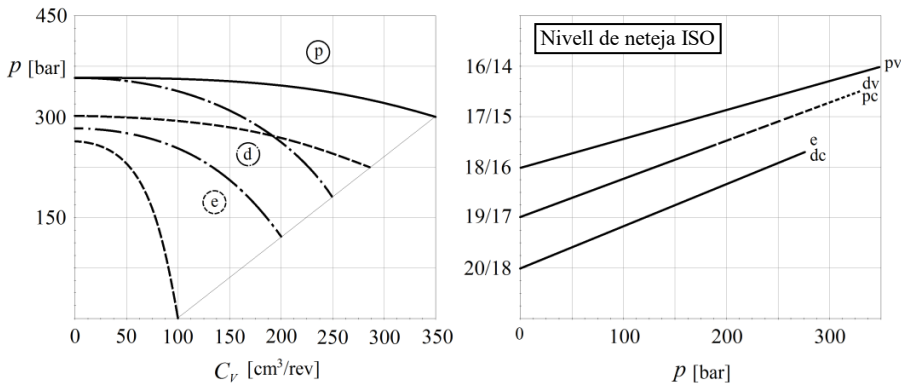


Figura 3.32. Selecció en funció de la pressió i el CV (esquerra) i nivell de neteja ISO recomanat en funció de la mena de bomba (dreta). Valors de referència. A la figura: (e) engranatges; (dc) paletes lliscants de CV constant; (dv) paletes lliscants de CV variable; (pc) pistons de CV constant; (pv) pistons de CV variable.

- La vida útil estimada. Si la vida útil de la màquina es fixa segons un criteri basat en el rendiment mínim admissible, llavors la bomba d'engrenatges és la que tindria una vida útil menor. Passa, no obstant això, que a causa de la mena d'aplicació en què s'instal·len aquestes bombes i al seu bon funcionament fins i tot



amb rendiments baixos, la seva vida real s'allarga bastant fins que és imprescindible substituir-les o recondicinar-les.

- Facilitat de muntatge, instal·lació i manteniment.
- Rendiment global. Aquest paràmetre s'ha de considerar tenint present totes les pèrdues que tenen lloc en la instal·lació i no només a la bomba. Una bomba de cabal variable, fins i tot de menys rendiment, pot suposar un estalvi energètic.

3.6 Cavitació en bombes

Es produeix cavitació quan la pressió estàtica en algun punt del si fluid líquid, en repòs o en moviment, cau fins a un nivell pròxim a la pressió de saturació a la temperatura de treball. Es pot produir cavitació en estructures hidràuliques estàtiques, com ara ranures, tubs de Venturi, vàlvules, etc., i en màquines hidràuliques, com ara bombes, hèlixs i turbines. Cal distingir entre l'aparició de la cavitació, és a dir, la formació de bombolles de vapor o de gas en una ubicació determinada, i els efectes que produeix, que també s'anomenen *cavitació*, i que poden aparèixer en zones on la pressió mitjana és elevada i, normalment, aigües avall de la regió on es van formar les bombolles.

Per norma general, la cavitació progressa en dues etapes que poden coexistir i interaccionar: la fase gasosa i la vaporosa. La cavitació gasosa és més lenta que la vaporosa, perquè condueix a la formació de cavitats en forma de bombolla (de gas) en punts de fractura del mitjà líquid, ja siguin microbombolles preexistents, impureses o petites fissures del material en contacte. En aquest mode de cavitació, les bombolles es formen per difusió i no és necessari que s'arribi la pressió de saturació ni que hi hagi canvi de fase. Si la pressió continua descendint i aconsegueix el límit de saturació, que fins i tot depassa una mica de vegades, té lloc una vaporització explosiva que dona lloc a la cavitació vaporosa.

La grandària inicial de les cavitats pot oscil·lar entre algunes dècimes de micra i uns pocs mil·límetres, i el seu creixement és més o menys ràpid en funció de nombroses variables. La disminució de la pressió a l'entorn de les bombolles en fa augmentar el radi fins a aconseguir un valor crític a partir del qual el seu creixement és gairebé explosiu. Això genera un camp de pressions polsant i inestable, que deforma i divideix les bombolles i les col·lapsa. Quan les bombolles vaporoses aconsegueixen una zona d'alta pressió, el seu col·lapse s'accelera i transcorre en nanosegons, però continua sent de molt poc abast (per fortuna) perquè té forma d'implosió. En canvi, les bombolles gasoses poden existir durant molt més temps, perquè el gas que contenen s'ha de dissoldre a través de la seva superfície fins a desaparèixer, cosa que pot fer-les rebotar contra les parets, tornar a col·lapsar i gestar-ne d'altres i, per descomptat, abandonar la màquina.



3.6.1 Cavitació en bombes rotodinàmiques

A pesar que la pressió de saturació de l'aigua a la temperatura ambient és molt baixa, de l'ordre dels 2.300 Pa, la cavitació en les bombes passa més sovint del que caldria pensar i, a més, no sempre a la seva entrada, on la pressió és menor, sinó també a la sortida de l'impulsor (especialment, si treballa fora de disseny), on la pressió mitjana ha augmentat.

Els efectes de la cavitació en una bomba rotodinàmica són diversos. D'una banda, la implosió d'una bombolla asimètrica en el veïnatge d'una paret causa un microrraig d'alta velocitat (fins a diversos centenars de metres per segon) que impacta sobre la seva superfície. La pressió d'impacte associada a la quantitat de moviment pot prendre valors extremament elevats (de l'ordre de milers de bar), com a conseqüència del petit diàmetre de les bombolles, cosa que produeix per repetició una abrasió mecànica d'efectes irreparables. No menys important que aquest fenomen acumulatiu tan destructiu són els efectes dinàmics que tenen lloc per la sola presència de les bombolles. El rotor d'una turbomàquina gira a molt alta velocitat, de manera que l'existència d'un corrent de vapor o de gas en el seu interior la desequilibra dinàmicament i produeix soroll i trepidacions que, a la llarga, n'afecten l'estructura. D'altra banda, tots aquests fenòmens disminueixen el rendiment de la màquina i en modifiquen les presencions, perquè s'observa un canvi molt significatiu en la seva corba característica com a resultat de la saturació en cabal que suposa la cavitació.⁴³

Els efectes anteriors permeten classificar la cavitació segons la manera com passa i el seu grau de desenvolupament. Segons aquest últim criteri, la cavitació és: incipient, en el seu estadi inicial; desenvolupada, quan produeix efectes que comporten modificacions rellevants del camp hidrodinàmic, i hiperdesenvolupada o supercavitació, quan la cavitació ocupa tot el contorn sòlid, fins al punt que la bomba pot arribar a desencebar-se per interrupció de la columna líquida. La cavitació incipient en una bomba no n'afecta l'altura d'elevació ni el seu cabal, i només és detectable al laboratori mitjançant la realització de bombes de parets transparents, per exemple, que permetin visualitzar la formació controlada de les primeres bombolles, o de manera industrial per mitjans acústics.⁴⁴

Un dels problemes més comuns amb què es troba un usuari és la incertesa associada a aquest fenomen. És possible que una bomba no cavi al matí, per exemple, quan es posi en marxa, però sí a la tarda, després d'haver estat treballant amb normalitat tota la jornada. Fins i tot pot passar que el mateix model de bomba en dues instal·lacions diferents cavi en una, però no en l'altra. Això és així perquè la presència de cavitació resulta de l'efecte combinat de les característiques de la màquina i de la instal·lació del costat d'aspiració.

Per a entendre això últim, observem, per exemple, la instal·lació de la figura 3.33. La pressió a la brida d'entrada (punt "e") de la bomba s'obté de l'aplicació de l'equació de Bernoulli entre el dipòsit d'aspiració i aquest punt, és a dir:



$$p_e = p_0 - \rho g \left(z_B + \frac{v_e^2}{2g} + h_{f,asp} \right) \quad [3.56]$$

en què P_0 és la pressió absoluta en el dipòsit d'aspiració; z_B és la cota de la bomba, mesura des de la superfície lliure en el dipòsit; v_e és la velocitat mitjana a l'aspiració de la bomba, i $h_{f,asp}$ són les pèrdues d'energia per unitat de pes que tenen lloc des de "0" fins a "e".

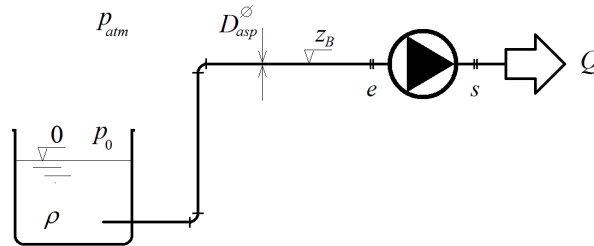


Figura 3.33. Instal·lació d'aspiració per a l'anàlisi de la cavitació. Es defineix $z_B > 0$ quan la bomba es troba per sobre del nivell del dipòsit. La pressió p_0 coincideix amb p_{atm} si el dipòsit és obert.

Entre aquest punt i el punt de l'interior de la bomba de pressió mínima on tindrà lloc la cavitació amb més probabilitat té lloc un descens de la pressió de valor $\rho g \Delta h$. El valor Δh és conegut pel fabricant de la màquina mitjançant assajos, i és funció de la geometria dels conductes interns de l'aspiració i de les característiques de funcionament de la màquina.⁴⁵ Per tant, perquè no hi hagi cavitació, cal que:

$$p_e - \rho g \Delta h > p_{sat} \quad [3.57]$$

que és, en definitiva:

$$p_0 - \rho g \left(z_B + \frac{v_e^2}{2g} + h_{f,asp} \right) - \rho g \Delta h > p_{sat} \quad [3.58]$$

La condició per evitar la cavitació se sol definir en termes de les *altures netes d'aspiració disponible i requerida*, definides, respectivament, com:

$$\begin{aligned} \text{NPSH}_D &= \frac{p_{0,e} - p_{sat}}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} - \left(z_B + h_{f,asp} + \frac{p_{sat}}{\rho g} \right) \\ \text{NPSH}_R &= \Delta h + \frac{v_e^2}{2g} \end{aligned} \quad [3.59]$$

en què $p_{0,e}$ és la pressió d'estancament a l'entrada. Els valors d'altura neta d'aspiració s'anomenen, a la pràctica, mitjançant les seves sigles angleses: NPSH (*Net Positive Suction Head*), i constitueixen una dada essencial per a la selecció i instal·lació de la bomba. Una bomba no cavitava (o, almenys, no de manera desenvolupada) si l' NPSH_D



és més gran que l' $NPSH_R$, que és una altra manera d'expressar la condició [3.58]. Es diu, llavors, que “el disponible és més gran que el requerit”, sent la diferència entre tots dos el marge de seguretat a la cavitació, MS. L'altura disponible iguala la requerida per al cabal de cavitació, Q_{cav} , que ha de ser més gran que el de funcionament, Q , amb un determinat marge de seguretat, que en termes de NPSH es xifra en MS no inferiors a 0,5 metres.

La figura 3.34 mostra la forma típica dels NPSH de la fórmula [3.59]. El terme de disponible conté una part estàtica, independent del cabal, que pot fluctuar durant el funcionament de la bomba. Per exemple, si la posició de la bomba s'eleva progressivament respecte al dipòsit (o baixa el nivell de fluid en el dipòsit, fet que passa més sovint, una vegada instal·lada la bomba en una bancada), el disponible es redueix i s'acosta a l'altura mínima requerida. S'anomena *altura màxima d'aspiració*, $z_{B,màx}$, el desnivell màxim lliure de cavitació per al qual es compleix la igualtat $NPSH_D = HPSH_R$. S'aïlla que:

$$z_{B,màx} = \frac{p_0}{\rho g} - \left(h_{f,asp} + \frac{p_{sat}}{\rho g} \right) - NPSH_R \quad [3.60]$$

Si el canvi de z_B no afecta el cabal, se segueix que $z_{B,màx}$ és el z_B actual més el marge de seguretat MS.

Es considera que la cavitació és desenvolupada (punt “d” de la figura 3.34) quan la disminució de l'altura H_B de la bomba és del 3% respecte de la formal o original. Aquest criteri serveix per definir l' $NPSH_R$ de manera senzilla mitjançant assajos normalitzats, de manera que el cabal corresponent, Q_{cav} , es pugui relacionar amb la pressió absoluta mesurada a l'entrada de la bomba.⁴⁶ Entre els punts de cavitació incipient (punt “i”) i desenvolupada, es produeix un soroll molt significatiu, semblant al que produiria l'impacte d'infinutud de granets de sorra caient per un baixant de pluja.⁴⁷ En general, a partir del punt “i”, i com més baix sigui el disponible, més greus són els efectes de la cavitació: més erosió, més vibracions i fluctuacions de la pressió, més desequilibri dinàmic, etc.; però només és a partir del punt “d” quan els seus efectes modifiquen prou la corba característica de la bomba per notar-ne l'existència.

Per evitar que hi hagi cavitació, l'usuari ha de maximitzar els termes positius del disponible i minorar els que siguin negatius. És a dir, per a un fluid i una temperatura donats, es pot, si és necessari: pressuritzar el dipòsit d'aspiració; submergir la bomba o emplaçar-la per sota de la superfície lliure perquè z_B sigui negatiu; disminuir, tant com sigui possible, les pèrdues en l'aspiració, per a això és imprescindible acostar la bomba al dipòsit i, en casos extrems, augmentar el diàmetre de la línia d'aspiració (tot i que es recomana fer servir el diàmetre de la brida d'entrada subministrat pel fabricant de la bomba).

Des de la perspectiva del requerit, l'usuari només pot ajustar el cabal de funcionament al voltant del punt de disseny i evitar, en la mesura del possible, la falta d'uniformitat



del flux a l'entrada de la bomba (reduint el nombre de colzes i altres elements singulars). És evident que és responsabilitat del fabricant subministrar bombes amb el mínim requerit possible.

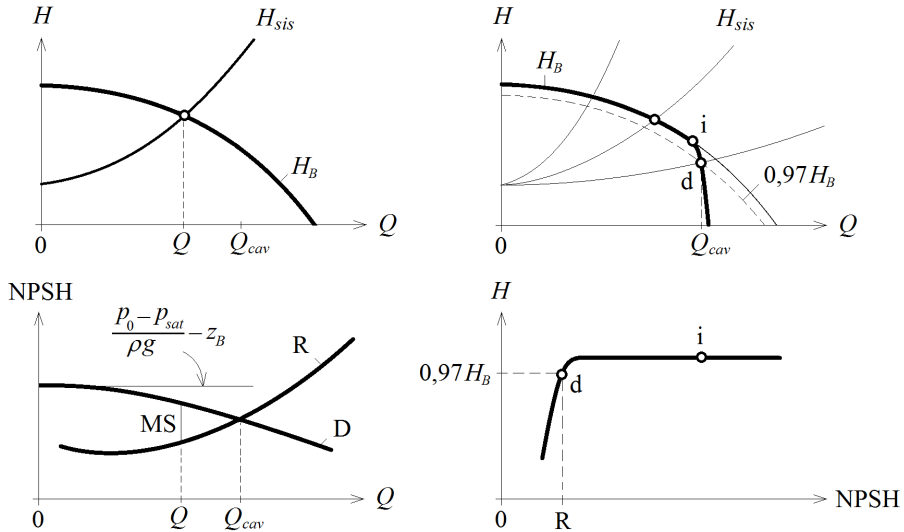


Figura 3.34. Evolució de les corbes de disponible i requerit amb el cabal (esquerra), i efectes de la cavitació sobre l'energia i la corba característica de la bomba en disminuir el disponible (dreta). La bomba de l'esquerra no cavit, ja que $Q < Q_{cav}$. La cavitació (i els seus efectes) s'inicia abans que s'observi algun canvi en la seva corba característica (el punt "i" pertany a la corba característica original, mentre que el "d" és sobre la corba H_B , minorada un 3%).

Com que la caiguda de pressió a l'interior de la bomba està directament relacionada amb la seva geometria, hi ha un valor adimensional que relaciona totes les bombes de diferents grandàries però amb idèntica velocitat específica (és a dir, geomètricament semblants). Es tracta del *coeficient de cavitació* o de *Thoma*, que es defineix de la manera següent:

$$\sigma = \frac{NPSH_R}{H_B} \quad [3.61]$$

Així doncs, σ suposa una relació entre les pèrdues en l'aspiració de la bomba a partir del pla de referència $z = 0$ i la seva altura en el punt d'inici de la cavitació. El paràmetre de Thoma, tal com s'ha definit, és una característica de la bomba perquè ho és l'altura requerida en el moment de cavitació incipient, cosa que no vol dir que sigui constant, perquè depèn de l'altura disponible. Si, per exemple, en una instal·lació es canvien les característiques de l'aspiració i la cavitació té lloc en un cabal inferior, l'altura requerida serà menor (suposant que sigui creixent en Q) però, com que l'altura H_B augmenta quan disminueix el cabal (si no canvien les revolucions de la bomba), el paràmetre de Thoma de [3.61] serà més petit ($\sigma_2 < \sigma_1$, a la figura 3.35).



Així mateix, també és possible definir la *velocitat específica adimensional en aspiració* com:

$$S = \omega \frac{Q^{1/2}}{(gNPSH_R)^{3/4}} \quad [3.62]$$

que indica com el disseny de l'aspiració de la màquina afavoreix o no l'aparició de cavitació en funció del cabal circulant i de la velocitat de gir del rotor. Observem que, a la definició [3.62], no apareix l'altura d'elevació de la bomba, ja que les dimensions del rodet són indistintes de la geometria d'entrada. Això es pot entendre també de la manera següent: l'altura $NPSH_R$ no està afectada per canvis en la bomba que afecten la seva velocitat específica, Ω , com per exemple el tornejat del rodet, que disminueix H_B però manté l' $NPSH_R$.

Com que el número de Thoma definit amb l'altura requerida és un paràmetre de la bomba, en el moment d'iniciar la cavitació és una funció exclusiva de qualsevol i cadascuna de les xifres adimensionals d'aquesta en aquest moment, per la qual cosa es compleix, per exemple, que $\sigma = \sigma(\Phi)$. En concret, el paràmetre de Thoma per al punt de màxim rendiment, σ^* , serà únic per a cada disseny i funció de la velocitat específica (avaluada per definició en aquest punt). Com es compleix que $\sigma = (\Omega/S)^{4/3}$, hi ha també un valor S^* únic en el punt de rendiment màxim i cavitació incipient, que a més resulta, en teoria, independent de la velocitat específica.⁴⁸

És interessant observar que el paràmetre de Thoma s'ha de mantenir sensiblement constant al llarg de les corbes d'afinitat de la bomba. La raó es pot fonamentar en el seu caràcter adimensional i la dependència de la resta de grups adimensionals, i també que l'altura requerida és, aproximadament, una funció quadràtica del cabal, com ho és H_B [3.28]. Aquesta circumstància permet l'escalat de l' $NPSH_R$ amb les revolucions, ja que com que és:

$$\sigma_0 = \frac{NPSH_R(n_0)}{H_B(n_0)} \approx \frac{NPSH_R(n)}{H_B(n)} \quad [3.63]$$

resulta que:

$$\frac{NPSH_R(n)}{NPSH_R(n_0)} \approx \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \quad [3.64]$$

o bé, després d'operar:

$$NPSH_R(n) \approx NPSH_R(n_0) - \sigma_0 H_B(n_0) \left(1 - \left(\frac{n}{n_0}\right)^2\right) \quad [3.65]$$

No obstant això, l'experiència ensenya que l'altura requerida és influïda per molts factors que desvien el valor real del que s'havia predit per aquesta equació. Si la formació de bombolles està dominada pel temps mecànic de residència de la bombolla



en la màquina i no per efectes termodinàmics, com podria ser el canvi de la pressió de saturació en el flux, és d'esperar que l'augment de les revolucions disminueixi l'altura requerida en dificultar el procés de formació, i viceversa. Això suposa un risc si es fa servir l'equació [3.65] per anticipar el valor de l'NPSH_R a baixes revolucions, ja que el valor real serà més gran. Per tenir en compte aquest efecte, alguns investigadors proposen adoptar un exponent diferent en la relació de revolucions anterior en funció del sentit de canvi en n . Si les revolucions futures són més grans, l'ús de l'exponent 2 a $(n/n_0)^2$ proporciona un cert marge de seguretat que resulta acceptable a la pràctica, però si les revolucions s'han de disminuir, és més convenient fer servir una relació lineal entre l'NPSH_R i n . En qualsevol cas, el valor de l'exponent és desconegut i totalment empíric.

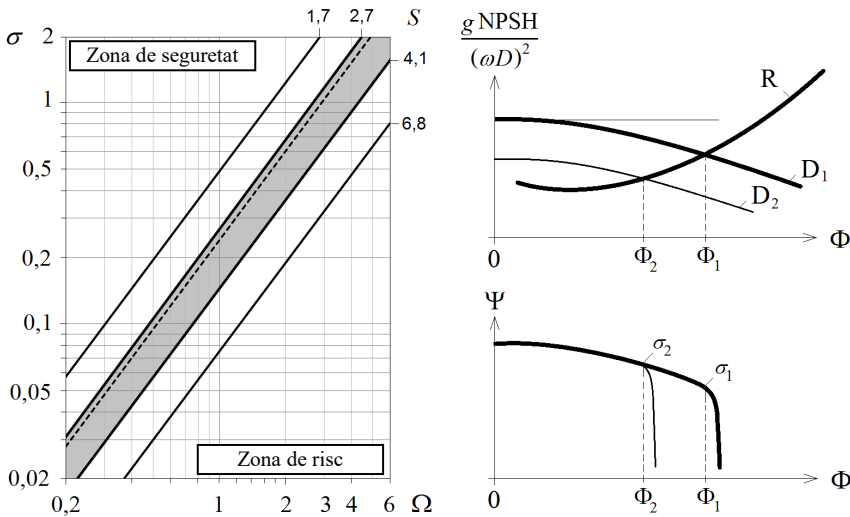


Figura 3.35. Coeficient de Thoma en funció de la velocitat específica per a diferents valors de S i corbes característiques adimensionals de cavitació. La zona de seguretat a la cavitació està situada per sobre de la corba $S = 2,8$ aproximadament, és a dir, per a valors de S inferiors (la disminució del cabal de cavitació comporta la disminució del coeficient de Thoma). La línia discontinua és l'estimació de Stepanoff $\sigma^* = 2,14 \cdot 10^{-4} n s^4/3$.

3.6.2 Cavitació en bombes volumètriques

Malgrat que les màquines de desplaçament positiu són, per definició, autoaspirants, es comprova experimentalment que l'augment de la seva capacitat volumètrica o de les revolucions de l'accionament compromet, de vegades, la seva capacitat d'aspiració. Per donar compte d'aquesta circumstància —tot i que només a efectes orientatius, perquè la situació és bastant complexa en aquesta mena de bombes—, es defineix la *velocitat específica modificada* de la forma:

$$\Omega^* = \frac{n}{n_0} \left(\frac{C_V}{C_{V0}} \right)^{1/3} \tag{3.66}$$



La condició de referència s'ha definit per a $n_0 = 1.500$ rpm i $C_{V0} = 100$ cm³/rev (és evident que Ω^* no té dimensions).

En general, s'admet que la bomba volumètrica serà autoaspirant quan Ω^* sigui inferior a la unitat, i el límit se situa, aproximadament, en $\Omega^* = 1,2$. Per sobre d'aquest valor, es recomana l'encebament de la màquina abans que es posi en marxa. Una vegada en funcionament i per a qualsevol valor de Ω^* , s'ha d'assegurar sempre una pressió mínima a l'entrada per evitar danys en la bomba per una aspiració inadequada. Aquesta pressió depèn de la velocitat de l'accionament i creix quan augmenta el seu C_V , com indica Ω^* .

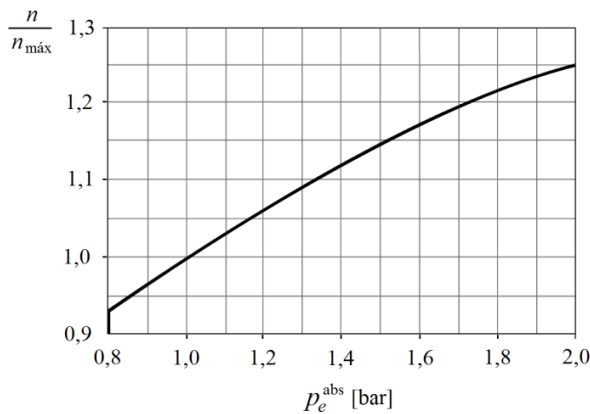


Figura 3.36. Límit de velocitat d'una bomba volumètrica de pistons axials de capacitat fixa, en funció de la pressió absoluta a la seva entrada. $n_{m\grave{a}x}$ és la velocitat d'accionament màxima recomanada a una pressió d'entrada d'1 bar.

3.7 Generalitats sobre ventiladors

Un ventilador és una turbomàquina que es caracteritza perquè el fluid impulsat és aire o un gas amb una densitat que amb prou feines canvia quan hi passa. A pesar que no hi ha cap conveni universalment adoptat, aquestes turbomàquines es poden subdividir en quatre grups, en funció de l'increment de pressió total: ventiladors de baixa pressió, fins a una pressió de l'ordre de 200 mmcda⁴⁹ (ventiladors pròpiament dits); ventiladors de mitja pressió o bufadors, d'entre 200 i 800 mmcda; ventiladors d'alta pressió o turbobufants, d'entre 800 i 2.500 mmcda, i ventiladors de molt alta pressió o turbocompressors, per a salts de més de 2.500 mmcda.

La similitud funcional entre una bomba rotodinàmica i un ventilador és evident. Excepte en les qüestions de naturalesa normalment constructiva que depenen del fluid i les seves propietats, aquesta analogia fa que es pugui fer servir la mateixa teoria base en tots dos. A més, considerant el fluid incompressible, en els ventiladors són aplica-



bles els grups adimensionals i les lleis de semblança desenvolupades per a les bombes, i també regeix l'equació de Bernoulli i la descripció de l'energia mecànica en termes de cota, pressió i velocitat, cosa que facilita, sens dubte, l'anàlisi dels sistemes i la resolució de molts casos pràctics. No obstant això, com que es treballa amb un fluid de molt baixa densitat i d'estat compressible, han de tenir en compte algunes consideracions que fan que un ventilador sigui una màquina peculiar.

En el capítol següent es veurà que dues turbomàquines geomètricament semblants (una bomba i un ventilador, en aquest cas) comuniquen, aproximadament, la mateixa energia per unitat de massa, Y , quan comparteixen triangles de velocitats en el rotor. Com a conseqüència immediata, se segueix que el nivell de pressió que poden aconseguir els ventiladors és entre dos i tres ordres de magnitud inferior al de les bombes.⁵⁰ Aquest increment és tan petit que sovint es xifra en desenes de mil·límetres de columna d'aigua, cosa que fa del ventilador una màquina molt sensible a les pertorbacions en pressió que hi pugui haver en el sistema o al seu voltant. Un drap rentingut en un conducte de ventilació, un ocell fent el niu en una xemeneia o l'acció del vent sobre la boca de sortida d'un sistema d'extracció, són exemples quotidians que posen de manifest aquesta sensibilitat.

D'altra banda, i encara que la densitat es pugui considerar pràcticament constant a través del ventilador, els canvis de densitat del fluid aspirat afecten proporcionalment la pressió comunicada. Aquest fet pot suposar la deriva del punt de funcionament del ventilador quan, per exemple, les condicions ambientals de l'entorn o a la seva entrada canvien. Afortunadament, les característiques resistives de la instal·lació en termes de pressió també creixen de manera proporcional a la densitat, de manera que l'increment de pressió obtingut del corresponent augment de densitat per mitjà de la relació $p_T = \rho Y$ es veu compensat per una quantia més gran de les pèrdues. Això és cert en la majoria de les instal·lacions on, per fer servir ventiladors per als quals tots els seus punts de funcionament són semblants i, per tant, són vàlides les equacions [3.26], el cabal volumètric i l'energia Y s'han de mantenir si no es canvien les revolucions del ventilador (no passa el mateix amb el cabal màssic, que, com que es manté Q , varia de manera proporcional a la densitat). No obstant això, quan el ventilador treballa en un sistema de terme estàtic no nul com el de la figura 3.41, el canvi en la densitat d'entrada implica una deriva del punt de funcionament, encara que la seva velocitat de gir no canviï.

3.7.1 Tipus de ventiladors

Els ventiladors es poden classificar atenent la trajectòria del fluid en radials, semiaxials i axials, i en funció del seu ús específic i la seva ubicació en extractors, tubulars i impulsors, entre d'altres.

En els ventiladors centrífugs, la trajectòria del fluid segueix la direcció de l'eix del rodet a l'entrada i li és perpendicular a la sortida. Els coeficients teòrics [3.23] de



pressió, ψ , i de cabal, ϕ , d'aquests ventiladors oscil·len entre 0,4 i 1, i entre 0,05 i 0,2, respectivament. El millor rendiment s'aconsegueix per a $\psi < 0,5$ i el menor nivell de soroll resulta si $\psi \approx 1$. Aquests ventiladors tenen tres tipus bàsics de rodets, tal com es pot apreciar en la figura 3.37: àleps corbats cap endavant; àleps rectes i àleps inclinats/corbats cap enrere; als quals corresponen diferents parelles (ψ, ϕ) en funció de l'angle β_2 i del grau de reacció desitjat, σ .

Els ventiladors centrífugs d'àleps corbats cap endavant tenen el rodet amb els àleps corbats en el mateix sentit que la direcció de gir. Els ventiladors de gàbia d'esquirol, Sirocco 51 o de tambor tenen entre 24 i 64 àleps, són de baixa velocitat perifèrica, molt silenciosos i de grandària reduïda, però el seu rendiment és baix fora del punt de projecte. A més, com que la seva característica de potència absorbida creix ràpidament amb el cabal fins al màxim que troba en descàrrega lliure, s'ha de tenir molta cura amb el càlcul de la pressió necessària en la instal·lació per no sobrecarregar el seu motor. Aquests ventiladors s'utilitzen quan la pressió estàtica necessària és baixa o mitjana, usual en els sistemes de calefacció, aire condicionat, renovació d'aire, extractors de cuina, etc. En general, no és recomanable fer servir aquest tipus de ventilador amb aire polsós, ja que les partícules s'adhereixen als petits àleps corbats i poden provocar el desequilibrat del rodet, ni tampoc en paral·lel amb uns altres, ja que són bastant inestables, cosa que els fa sorollosos i genera refluxos.

Els ventiladors centrífugs radials i radials modificats s'utilitzen, per exemple, en el transport pneumàtic de materials perquè la disposició dels àleps (entre 6 i 10) evita l'acumulació de partícules. També s'utilitzen en instal·lacions d'extracció localitzada en què l'aire contaminat pot contenir partícules de grandària mitjana que han de circular a través del ventilador. Hi ha una gran varietat de dissenys de rodet, que va des dels d'"alta eficàcia amb poc material" fins als d'"alta resistència a impacte" (fins i tot amb perfils afilats per trossejar el material arrossegat).

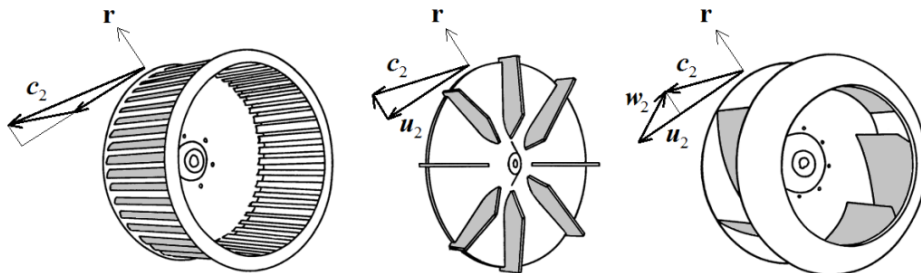


Figura 3.37. Ventiladors centrífugs d'àleps corbats cap endavant (forward curved), radials i cap enrere (backward curved), i triangles de velocitat a la sortida. El ventilador s'anomena de voluta si recull l'aire perimetralment mitjançant una cambra espiral.



Els ventiladors centrífugs d'àleps corbats cap enrere tenen un rodet amb els àleps (entre 9 i 16) inclinats en sentit contrari al de rotació. Aquest tipus de ventilador és el de més velocitat perifèrica i més rendiment, amb un nivell sonor relativament baix i una característica de consum d'energia no sobre-carregable. En aquests ventiladors, el consum màxim d'energia té lloc en un punt pròxim al de rendiment òptim, de manera que qualsevol augment de la resistència del sistema donarà com a resultat un consum d'energia menor. La forma dels àleps pot ser de gruix uniforme o en ala portant.

Hi ha tres tipus bàsics de ventiladors axials: helicoidals, tubulars i tubulars amb directrius. Els ventiladors helicoidals s'empren per moure aire amb poca pèrdua de càrrega en sistemes de ventilació general. Es construeixen amb dos tipus d'àleps: de disc, per a ventiladors sense cap conducte, i estrets, per a ventiladors que hagin de vèncer resistències baixes (menys de 25 mmcda). Les prestacions d'aquests ventiladors estan molt influenciades per la resistència al flux, ja que un petit increment de la pressió provoca una reducció important del seu cabal.

Els ventiladors tubulars disposen d'una hèlix d'entre 4 i 8 àleps estrets de secció constant, normalment de planxa o amb perfil aerodinàmic, muntada en una carcassa cilíndrica, de manera que l'espai entre el tub i el cap dels àleps sigui mínim. Aquests ventiladors poden moure aire vencent resistències moderades (menys de 50 mmcda). A la carcassa cilíndrica dels ventiladors tubulars amb directrius, es disposen aletes adreçadores del flux abans o després de l'hèlix (que gairebé sempre és de perfil aerodinàmic). Les directrius d'aquests ventiladors tenen la missió de fer desaparèixer la rotació preexistent a l'entrada del rodet o la que s'hi ha adquirit. Les directrius han de ser calculades adequadament perquè, tot i que milloren les característiques del flux de l'aire prop del cabal de disseny i fan que el ventilador treballi en més bones condicions, són contraproductius davant canvis importants del cabal perquè produeixen una pèrdua de pressió addicional que pot condicionar la resta de la instal·lació. Per norma general, aquests ventiladors tenen un rendiment més alt i també poden desenvolupar pressions superiors (de fins a 200 mmcda) als altres ventiladors axials, però el seu ús es limita als casos en què es treballa amb aire net.

A més, hi ha ventiladors que no entren en les categories anteriors: els ventiladors centrífugs de flux axial i els ventiladors de sostre. Els primers consten d'un rodet amb àleps inclinats cap enrere, muntat en una carcassa especial que permet instal·lar-los com si es tractés d'un tram recte de conducte. Les seves característiques són similars a les d'un ventilador centrífug normal amb la mateixa mena de rodet, però amb els requisits d'espai d'un ventilador axial de tipus tubular. Els extractors de sostre són equips compactes de tipus axial o centrífug sense voluta, en què la descàrrega de l'aire a l'atmosfera es produeix en tot el perímetre de la roda. Aquests equips es poden subministrat amb deflectors que condueixen l'aire de sortida cap amunt o cap avall, segons interressi.



3.7.2 Corbes característiques

Les circumstàncies explicades al principi d'aquest tema fan que les corbes característiques dels ventiladors es refereixin, a la pràctica, a un fluid de referència la densitat de la qual no coincidirà, en general, amb les del fluid de treball de la instal·lació.⁵² Quan aquesta diferència és important, sigui perquè es tracta d'un altre fluid o perquè la instal·lació té unes condicions de funcionament singulars (un forn, per exemple), s'obliga l'usuari a acomodar la informació subministrada pel fabricant a les del seu fluid particular desfent la transformació mitjançant l'equació d'estat i la [3.22].

Les corbes característiques completes dels ventiladors inclouen tres línies de pressió: la corba de pressió total, p_T ; la corba de pressió estàtica, p_e , i la corba de pressió dinàmica, p_d . La pressió total és l'energia per unitat de volum de l'equació [3.22], relacionada amb la potència comunicada pel ventilador i el seu rendiment, que resulta de l'increment de la pressió total⁵³ entre l'entrada (1) i la sortida (2) del ventilador. La pressió dinàmica és l'energia associada al flux de cabal i es defineix sempre positiva. La pressió estàtica resulta de la diferència entre totes dues i representa la part de la pressió total disponible per vèncer les pèrdues de pressió de la instal·lació una vegada s'ha descomptat l'energia invertida a mantenir el flux. En resum, per a cada cabal del gràfic de la figura 3.38 es verifica:

$$p_T = p_{T,2} - p_{T,1} = p_e + p_d$$

$$N = \frac{p_T Q}{\eta_T} = \frac{p_e Q}{\eta_e} \tag{3.67}$$

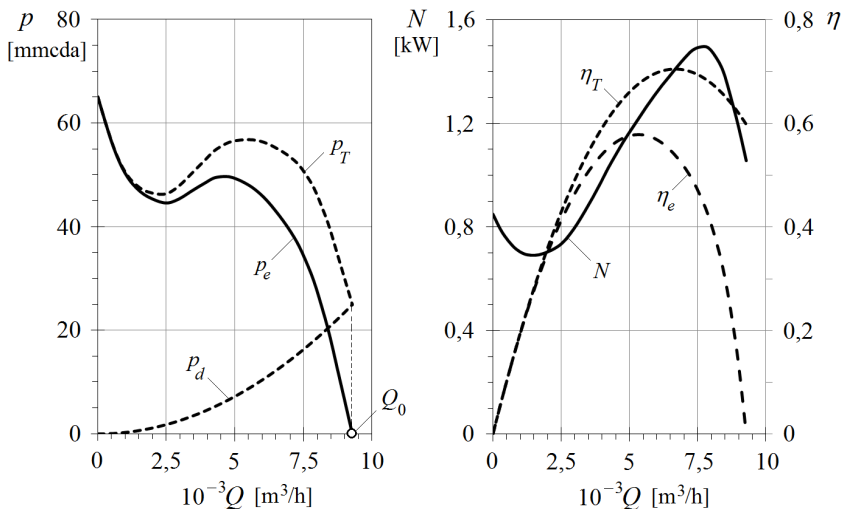


Figura 3.38. Corbes característiques d'un ventilador. La característica mostrada en forma de cadira és típica dels ventiladors centrífugs d'alta pressió i de la majoria dels axials (i se sol ometre als catàlegs perquè és inestable). El cabal Q_0 és el cabal que impulsaria el ventilador en condicions de descàrrega lliure (instal·lació tipus A de la figura 3.40), això és, quan $p_e = 0$.



Una diferència notòria entre les corbes característiques de les bombes i les dels ventiladors és que en aquests últims cal tenir en compte la pressió dinàmica i l'estàtica per separat. Observem, a la figura, que l'ordre de magnitud de la pressió dinàmica és comparable a l'estàtica en la zona de funcionament normal del ventilador. Per normal general, les instal·lacions amb ventiladors desemboquen en l'atmosfera on tota l'energia dinàmica del flux es dissipa en forma de pèrdua. En conseqüència, si des del ventilador fins al final de la instal·lació no hi ha difusors i la secció del conducte es manté constant, l'energia dissipada en l'exterior coincideix amb la dinàmica proporcionada pel ventilador, de manera que la pressió estàtica del ventilador es dedicarà per complet a vèncer les pèrdues internes de la instal·lació a un cabal donat, p_i .⁵⁴

Una altra circumstància singular associada a la definició [3.67] és que l'increment de la pressió total (o d'estancament) del ventilador es pot quantificar amb la mesura de la pressió estàtica en (1) i (2), si els termes dinàmics corresponents es compensen mútuament. Això, que de per si suposa un avantatge experimental evident, ja que la pressió estàtica es mesura de manera no intrusiva, té una lectura més interessant que pot resultar paradoxal: quan es compleix $p_{d,1} = p_{d,2}$, la diferència de les pressions estàtiques a través del ventilador no coincideix amb la pressió estàtica comunicada pel ventilador, ja que llavors:

$$p_T = (p_2 + p_{d,2}) - (p_1 + p_{d,1}) = p_2 - p_1 = p_e + p_d \quad [3.68]$$

Evidentment, la situació $p_{d,1} = p_{d,2}$ és un cas particular que no es donarà sempre, però aquesta equació posa de manifest que el cabal proporcionat pel ventilador dependrà de la seva ubicació i de les pèrdues de pressió associades a la seva connexió al sistema.⁵⁵ Aquestes pèrdues disminueixen la capacitat de produir pressió del ventilador en apartar les condicions de funcionament de les dels assajos amb què es van obtenir les corbes característiques (de catàleg).

Per minorar aquest efecte i assegurar el funcionament òptim del ventilador durant els assajos, els fabricants fan servir bancs de prova diferents en funció de la ubicació prevista del ventilador (segons les instal·lacions de tipus A, B, C i D, que s'expliquen a continuació), amb què obtenen condicions del flux uniforme en les zones de mesura i garanteixen la consistència i la reproductibilitat dels resultats. En qualsevol altra instal·lació en què el flux estigui pertorbat per la presència de colzes o canvis bruscos en la direcció del flux o en la seva secció, el funcionament del ventilador empitjorarà respecte de les que s'hagin assajat.

3.7.3 Acoblament a una instal·lació

Considerem, primer, el cas més general en què un ventilador s'instal·la a la zona intermèdia d'un sistema com el de la figura 3.39. L'aplicació de l'equació de Bernoulli en termes de pressió entre els punts (E) i (S) indica que:

$$p_T = p_{T,S} - p_{T,E} + p_i \quad [3.69]$$



o bé, amb [3.67], i després de separar termes:

$$p_e = \{(p_s + p_{d,s}) - (p_E + p_{d,E}) + \rho g(z_s - z_E) + p_i\}_T - p_d \quad [3.70]$$

Aquesta equació permet calcular la pressió estàtica que ha de comunicar el ventilador en un sistema en funció de les seves pèrdues de pressió internes, p_i , i de les pressions estàtica i dinàmica de l'aire a l'entrada i a la sortida.

En general, tal com es mostra a la figura, la pressió estàtica en (s) coincideix amb la de (3) i la pressió d'estancament es manté entre els punts (0) i (E) (i, en cas que hi hagi pèrdues d'entrada, es podrien incloure en p_i). Després d'aquestes consideracions, és fàcil comprovar que les pèrdues totals de pressió en la instal·lació resulten de la suma de p_i i $p_{d,s}$, i que l'equació anterior es pot reescriure de la forma:⁵⁶

$$p_e = \{[p_3 - (p_0 + p_{d,0}) + \rho g(z_s - z_E)]_e + (p_i + p_{d,s})_f\}_T - p_d \quad [3.71]$$

El punt de funcionament del ventilador verificarà qualsevol de les equacions anteriors, en què hi ha termes dependents i d'altres d'independents del cabal impulsat.

Evidentment, l'agrupació que s'ha fet a l'equació [3.71] no ha estat casual. El grup $\{ \}_T$ es correspon amb la pressió total del ventilador, mentre que els termes inclosos en el grup $[]_e$ són aquella part de la pressió total que es requereix per vèncer les condicions estàtiques observades entre l'entrada i la sortida del sistema. La pressió dinàmica $p_{d,0}$ del punt d'estancament (0) és atribuïble a l'acció de forces externes, com per exemple la del vent, i és menyspreable en condicions normals.⁵⁷ Els altres termes del grup $[]_e$ es compensen mútuament quan $z_E \approx z_S$ i les condicions estàtiques dels punts (0) i (3) coincideixen, cosa que és freqüent en els sistemes d'extracció localitzada, de ventilació industrial o de condicionament. En aquests escenaris, l'equació [3.71] es podria escriure com:

$$p_e = (p_i + p_{d,s})_f - p_d \quad [3.72]$$

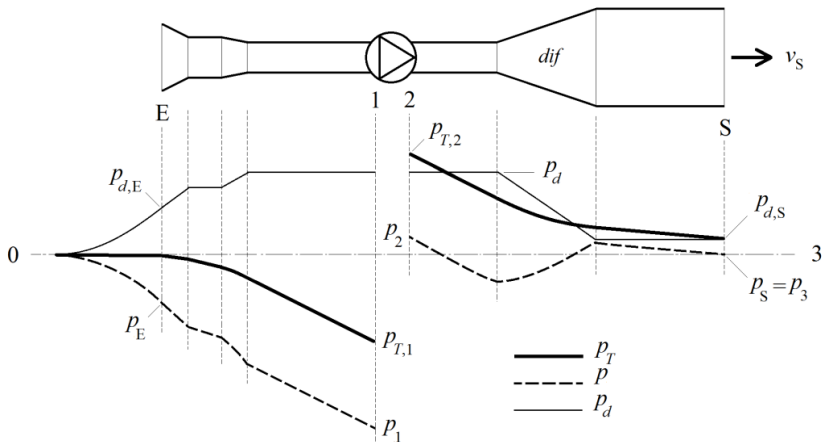


Figura 3.39. Instal·lació d'un ventilador en un sistema guiat amb resistències a entrada i sortida, i un difusor intermediari. Conduïte de secció rectangular i ample constant.



Una situació interessant es presenta quan el ventilador transporta aire per una xemeneia d'alçada $h_x = z_S - z_E$. En aquestes condicions, la condició hidrostàtica de pressió entre la base de la xemeneia, (b), on la pressió és p_b , i (3) permet escriure:⁵⁸

$$p_e = \{[(p_b - p_0) - (\rho_b - \rho)gh_x]_e + (p_i + p_{d,s})_f\}_T - p_d \quad [3.73]$$

Si $p_b = p_0$, és a dir, l'aspiració es fa en un recinte obert, llavors l'únic terme estàtic que queda és el corresponent a l'altura de la xemeneia: $(\rho_b - \rho)gh_x$, que pot ser positiu, zero o negatiu, i que s'anomena *tir natural* o *autotir*. És fàcil veure que, quan $\rho_b > \rho$ i el tir és positiu perquè l'aire ambient és més fred que el que surt per la xemeneia, el ventilador ha de subministrar menys pressió estàtica que en la condició de tir nul o sense xemeneia. Com que el tir positiu actua com una força impulsora més, la combinació en sèrie de tots dos augmenta el cabal impulsat pel ventilador (com passava en el muntatge en sèrie de bombes), cosa que, en general, és beneficiós, sempre que el cabal no sobrepassi el valor Q_0 de la figura 3.38 o se sobrecarregui el ventilador.

En qualsevol cas, el disseny de la xemeneia pot fer prescindible el ventilador quan el tir és positiu, i llavors el cabal serà el que compleixi la condició:

$$(\rho_b - \rho)gh_x = p_i + p_{d,s} \quad [3.74]$$

Tornant al cas [3.72] i prenent com a referència la figura 3.40, es poden distingir quatre tipus bàsics d'instal·lacions segons la ubicació del ventilador. La instal·lació de tipus "A" és de manera que l'aspiració i la descàrrega són lliures (de fet, no hi ha sistema). Aquesta situació es correspon amb la ubicació mural del ventilador helicoidal per a la qual el cabal és Q_0 , i la pressió estàtica, nul·la. A la instal·lació de tipus "B", l'aspiració és lliure, però la descàrrega és conduïda. En aquests casos, es compleix que $p_e = p_i$ quan el conducte és de secció constant. A la instal·lació d'entrada conduïda i de sortida lliure de tipus "C", sempre és $p_e = p_i$, perquè en la descàrrega lliure $p_{d,s} = p_d$.

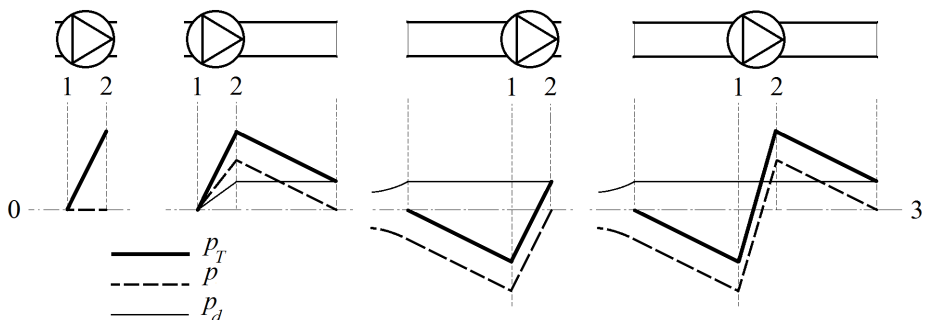


Figura 3.40. Formes bàsiques d'instal·lació d'un ventilador (A, B, C i D) i evolució aproximada de les energies total, estàtica i dinàmica.



La instal·lació de tipus “D” és el cas més general descrit per l’equació [3.72] i la figura 3.39. Quan, en aquests sistemes, la pressió dinàmica del ventilador és més gran que $p_{d,s}$, la p_e necessària del ventilador es pot reduir utilitzant difusors (que actuaran com a fonts de pressió estàtica). És a dir: no tota la pressió estàtica necessària a la instal·lació ha de ser proporcionada pel ventilador. Com que la pèrdua d’energia del difusor emprat, p_{dif} , forma part de p_i , [3.72] es pot escriure:

$$p_e = (p_{i,0} + p_{dif}) - (p_d - p_{d,s}) \quad [3.75]$$

Tenint en compte l’equació [2.111], es dedueix que:

$$\begin{aligned} p_e &= p_{i,0} + (1 - \eta_{dif})(p_d - p_{d,s}) - (p_d - p_{d,s}) = \\ &= p_{i,0} - \eta_{dif}(p_d - p_{d,s}) \end{aligned} \quad [3.76]$$

Per tant, la inclusió de difusors en aquests sistemes descarrega el ventilador i recupera part de la pressió dinàmica, que és emprada a superar les pèrdues estàtiques de la resta de la instal·lació, $p_{i,0}$. Sense difusor, és a dir, amb un canvi bruscat de secció entre p_d i $p_{d,s}$, el terme p_{dif} coincideix amb el decrement d’energia cinètica i la recuperació de pressió estàtica és nul·la, això és, $p_e = p_{i,0}$, amb $\eta_{dif} = 0$. S’ha de tenir en compte que, malgrat que l’ús de difusors augmenta el cabal impulsat, ja que la corba de pressió estàtica d’un ventilador és decreixent a la zona de treball, això és: $dp_e/dQ < 0$, no són una força impulsora, com ho podria ser una xemeneia, perquè el seu efecte desapareix en absència de cabal.⁵⁹

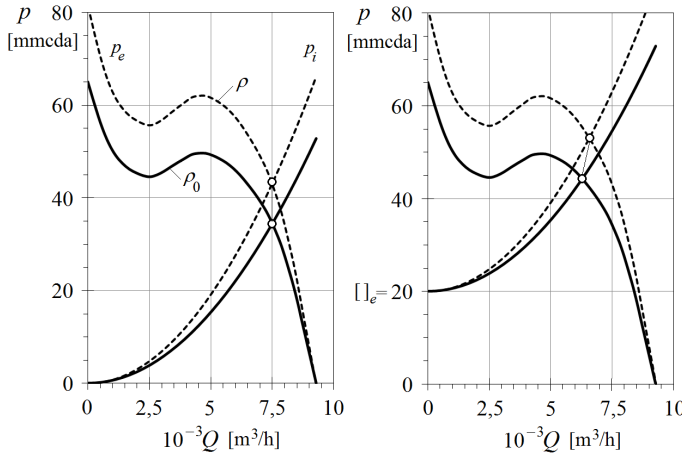


Figura 3.41. Efecte del canvi de densitat d’entrada en sistemes amb ventilador ($p_{d,S} = p_d$). El cabal volumètric de l’esquerre no canvia quan canvia la densitat. A la instal·lació de la dreta, es produeix deriva en cabal com a conseqüència de l’existència d’un terme estàtic no nul·l. Aquest terme s’admet independent del canvi de densitat, cosa que no seria cert en presència d’una xemeneia (a la figura de la dreta, el tir seria negatiu). Les línies discontinües s’han obtingut amb una densitat $\rho = 1,25\rho_0$.



3.7.4 Efectes de la compressibilitat

La diferència entre un ventilador, un bufador i un turbocompressor radica en l'ordre de magnitud de les variacions de pressió a l'interior de la turbomàquina. Tal com s'ha esmentat al principi d'aquest tema, les variacions de pressió en un ventilador són tan petites que el gas es pot considerar pràcticament incompressible. En aquest cas, el treball comunicat per unitat de massa es calcularia així:

$$Y_I = \frac{P_T}{\rho} \quad [3.77]$$

Per determinar la magnitud de l'error comès en menysprear els efectes de la compressibilitat en l'expressió anterior, es pot comparar amb la corresponent a un procés adiabàtic, reversible i ideal, pres com a referència. Per a un fluid compressible, quan a més s'admet un canvi nul net de les energies cinètica i potencial a través de la màquina, el treball útil aportat per unitat de massa s'avalua mitjançant la fórmula (v. [1.81], amb $Y_C = -w > 0$):

$$Y_C = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} dp = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad [3.78]$$

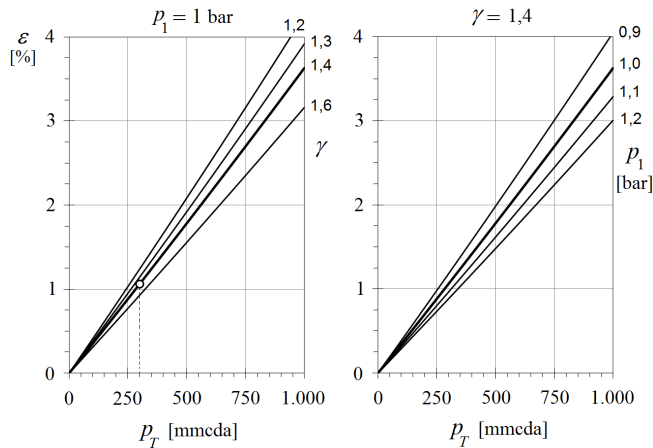


Figura 3.42. Error comès després de menysprear la compressibilitat de l'aire al seu pas per un ventilador. La línia divisòria entre un ventilador modern d'elevada potència i un turbocompressor s'estableix als 300 mmcda, valor de pressió a què correspon un error aproximat d'un 1% en l'estimació [3.77]. Als ventiladors convencionals de poca potència, aquesta línia s'estén fins als 800 mmcda i, per sobre, el millor és considerar la màquina com a tèrmica i no com a hidràulica.

Ara bé, com que el terme p_2/p_1 d'aquesta equació es pot definir en funció de l'increment de pressió total com:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{P_T}{P_1} \quad [3.79]$$



l'expansió binomial del claudàtor porta a:

$$Y_C = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{p_T}{p_1} - \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{p_T}{p_1} \right)^2 + \dots \right) \right] \approx \frac{p_T}{\rho_1} \left(1 - \frac{1}{2\gamma} \frac{p_T}{p_1} \right) \quad [3.80]$$

Referent a la hipòtesi utilitzada per obtenir la pressió atmosfèrica a la sortida d'una xemeneia, p_3 , és cert que es podria tenir en compte el canvi de densitat ocasionat per l'altura emprant les lleis de la fluidoestàtica aplicades a l'atmosfera estàndard, però, en general, aquesta correcció és innecessària i el resultat [3.73] s'admet prou aproximat a la pràctica, tal com es demostra a continuació.

La fluidoestàtica s'ocupa de l'estudi de l'equilibri de fluids en repòs, és a dir, de velocitat nul·la en algun sistema de referència en què es verifiqui l'equació:

$$\rho \mathbf{f}_m - \nabla p = 0 \quad [3.82]$$

Aquesta equació implica que, d'una banda, l'equilibri d'un fluid es representa pel balanç de forces màssiques i de pressió, i, de l'altra, que les forces màssiques han de derivar d'un potencial quan el fluid està en repòs, tal que:

$$\mathbf{f}_m = -\nabla U \quad [3.83]$$

en què U és el potencial de forces màssiques el signe del qual es tria per conveniència.

El caràcter vectorial d'aquestes equacions i el fet que la densitat sigui un escalar indiquen que la pressió és constant en les línies equipotencials d' U i que les isòbares són perpendiculars al camp de forces màssiques (horitzontals a l'atmosfera).

D'altra banda, perquè sigui possible l'equilibri sota forces màssiques irrotacionals, és necessari que la densitat sigui una funció exclusiva de la pressió i hi hagi, per tant, una relació de barotropia entre la pressió i la densitat. Això permet introduir el potencial de pressions, P , com:

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p,t)} \quad [3.84]$$

Amb tot, l'equació general de la fluidoestàtica s'escriu:

$$\nabla(U + P) = 0 \quad [3.85]$$

que significa que la suma $U + P$ es manté constant en equilibri.

Aquesta equació pot ser integrada suposada una relació de barotropia $\rho(p)$. El cas més senzill és quan la densitat del fluid és constant, i llavors es dedueix que:

$$U + P = gz + \frac{p}{\rho} = cnt \quad [3.86]$$

que és la relació hidrostàtica emprada abans.



La relació exacta entre la pressió i l'altura s'obté integrant [3.85] tenint en compte que, per a un gas ideal en equilibri, la relació entre la pressió i la cota és:

$$RT \frac{dp}{p} = -gdz \quad [3.87]$$

En l'atmosfera pròxima al terra, la part inferior de la troposfera, l'aire atmosfèric varia la seva temperatura amb l'altura de manera lineal:

$$T = T_b - Kz \quad [3.88]$$

amb $K = 6,5 \text{ }^\circ\text{C/km}$, de manera que la integració de [3.87] porta a l'expressió:

$$\frac{p}{p_b} = \left(\frac{T_b - Kz}{T_b} \right)^{\frac{g}{RK}} \quad [3.89]$$

en què $g/(RK) = 5,256$. El lector interessat pot comprovar que, per a una xemeneia amb $h_x = 50 \text{ m}$ i una temperatura en la seva base de $T_b = 293 \text{ K}$, la relació p_x/p_b és de 0,9942. Prenent $\rho_b = 1,205 \text{ kg/m}^3$ i $p_b = 1 \text{ atm}$, l'error comès amb la hipòtesi hidrostàtica és, aproximadament, del $-0,47\%$.

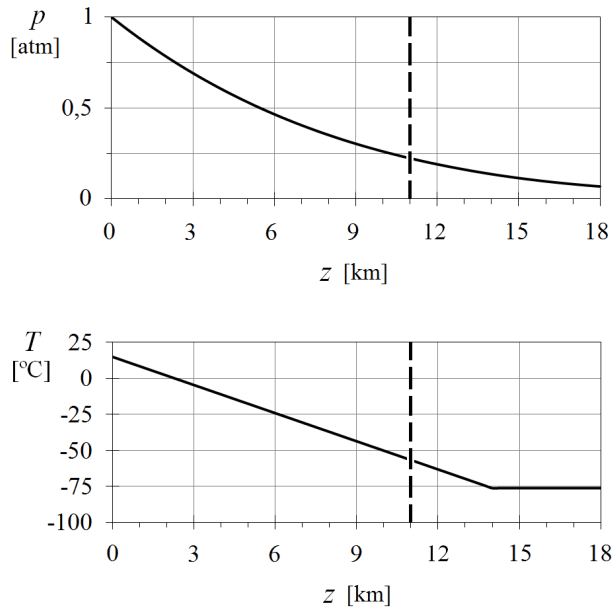


Figura 3.43. Evolució aproximada de la pressió atmosfèrica en funció de l'altura. Atmosfera de composició constant. L'atmosfera estàndard es defineix en els seus primers 11 km (troposfera) amb una temperatura que disminueix linealment des dels 15 fins als $-56,5^\circ\text{C}$. Per sobre dels 11 km (estratosfera) i fins als 22, aproximadament, la temperatura continua el seu descens, s'estabilitza i després torna a augmentar. La densitat es calcula a partir de l'equació d'estat en qualsevol cas.



L'equilibri ofert per l'equació [3.89] ha de ser estable per mantenir-se en el temps i no suposa que hi hagi equilibri termodinàmic. Una condició necessària perquè l'estratificació de la densitat en el fluid sotmès a l'acció del camp de forces massiques sigui estable és que la densitat augmenti amb la pressió. Per exemple, en el camp gravitatori, el líquid més pesat se situa per sota del més lleuger.

A l'atmosfera no saturada, es demostra que la configuració de l'equació [3.89] no és estable si $K > g/c_p \approx 9,7^\circ\text{C}/\text{km}$.⁶⁰ Sobrepasar aquesta condició comporta que qualsevol pertorbació que impliqui un desplaçament vertical d'una partícula fluida serà amplificada per l'estratificació circumdant en equilibri mitjançant una força de restitució negativa que l'allunyarà de la seva posició inicial. Aquest desequilibri passa, en definitiva, si el ritme de canvi de la temperatura de la partícula no és prou ràpid perquè es torni a adaptar a l'entorn. Per exemple, si la temperatura decreix amb l'altura més ràpidament que la temperatura de la partícula en un petit desplaçament ascendent, cosa que passa sota la condició d'instabilitat mencionada, la partícula se situarà en un entorn de més densitat i continuarà l'ascens. Aquestes condicions d'estabilitat afecten l'evolució del plomall de sortida però, com que són canviants, no es tenen en compte en el càlcul de la xemeneia.

3.7.5 Soroll generat per un ventilador

El so pot ser definit com una pertorbació en un mitjà elàstic capaç d'excitar el sentit de l'oïda. Quan el so és desagradable i el seu espectre és de naturalesa aleatòria sense exhibir components de freqüència ben definits, es diu que és soroll. Tant el so com el soroll es defineixen mitjançant magnituds acústiques com la pressió, la intensitat o la potència, descrites en una escala logarítmica basada en decibels (dB). Una mesura important del soroll és la seva distribució freqüencial, per a això se'n pot analitzar l'espectre continu, o bé la seva divisió en bandes de freqüència d'octava o terços d'octava.⁶¹

El soroll total emès per un ventilador, tot i que aleatori, presenta un espectre que cobreix una banda de freqüència molt àmplia de la qual interessa només la banda audible. Els fenòmens aerodinàmics d'interacció del rotor i dels distribuïdors amb l'aire solen ser la causa principal del soroll aleatori de banda ampla que es genera, però també de sons de banda estreta provinents de fenòmens d'autoexcitació de naturalesa semblant a la que fonamenta el funcionament dels instruments musicals de vent. D'altra banda, en els ventiladors, la presència d'un moviment periòdic als àleps fa preveure l'aparició de sons de manera periòdica i, per tant, d'espectres de freqüències discretes múltiples de la freqüència de gir del rotor.

Probablement, la font més important de soroll en els ventiladors és la que es deu a la interacció de les forces del fluid amb el contorn, i, d'entre les quals, destaquen la del sembrat de vòrtexs (*vortex-shedding*), a causa de la separació del corrent, i les interferències generades pel contacte dels deixants turbulents amb obstruccions i àleps. Són



també causa del soroll generat de banda ampla la interacció del rotor amb les turbulències de l'admissió i les turbulències a la capa límit. Les fonts de soroll no aerodinàmic es deuen, bàsicament, a la vibració dels elements mecànics, produïda pel desequilibri dinàmic del rotor i el seu eix, o d'uns coixinets en mal estat. Aquesta vibració es redueix aïllant el ventilador de la bancada mitjançant unions elàstiques i, per descomptat, amb un disseny i manteniment òptims. D'altra banda, sempre es poden fer servir aïlladors acústics que esmorteixin el soroll generat per l'acoblament entre els elements vibrants i l'aire.

Les característiques espectrals dels ventiladors axials i centrífugs són completament diferents: mentre que en els centrífugs predomina el soroll emès de baixa freqüència, l'espectre dels axials presenta un màxim en el rang de mitja freqüència (aquesta tendència es pot deduir observant els valors de la taula 3.6). L'experiència posa de manifest que el soroll aleatori de baixa freqüència dels ventiladors centrífugs prové de fonts internes i depèn poc del nivell de turbulència a l'admissió o de les turbulències generades a la seva sortida. Això es deu a la complicada geometria interna del rotor centrífug, que fa inevitable la separació del flux a les pales, i a la interacció del ventilador amb els conductes annexos, en què s'irradia el so de freqüències relativament baixes, la longitud d'ona de les quals és comparable a la longitud dels conductes. En el rotor axial, en canvi, les condicions de disseny són més favorables perquè es pot fer de manera més aerodinàmica i hi predominen altres efectes, com s'explica a continuació.

A la figura 3.44, es mostra la forma universal de l'espectre de soroll del rotor d'un ventilador axial. El tret predominant de l'espectre és la seva banda ampla intermèdia, centrada en una freqüència f_T . En rotors de baixa velocitat (per a números de Reynolds basats en la corda de l'àlep inferiors a 10^6), apareix un segon pic predominant a l'entorn de la freqüència f_L , situada aproximadament una dècada per sobre de f_T . Aquestes freqüències es corresponen amb les freqüències representatives del soroll generat per les capes límit laminar i turbulenta sobre els àleps de la cascada axial. En els rotors d'elevat número de Reynolds (superiors a 10^6), el soroll de la capa límit turbulenta sembla que es correspon a l'espectre de banda ampla del rotor per a corrents nets d'entrada, és a dir, sense pertorbacions, i s'estén típicament unes vuit vegades la freqüència central f_T a banda i banda.

En el cas laminar, s'admet que tota pertorbació a la capa límit produeix ones, que passen per convecció a la vora de sortida de l'àlep i hi indueixen una pertorbació en pressió. Aquesta pertorbació actua com un dipol local amb una radiació acústica que es propaga aigües amunt fins trobar-se amb la font original i retroalimentar-la.⁶² La freqüència ressonant natural del bucle de realimentació és f_L i es pot reduir convertint la capa límit en turbulenta mitjançant vores d'entrada adequades (de vegades, es fan tallats a la vora d'entrada per forçar-ne el trànsit). Referent a la capa turbulenta, els resultats experimentals mostren que la banda ampla centrada en f_T és previsible dins d'un marge de 3 dB en termes de la geometria del rotor (bàsicament, de la corda de



l'àlep i el seu gruix) i la velocitat de punta d'àlep. Aquesta freqüència es pot adimensionalitzar definint el número de Strouhal: $St = f_T l / u$, en què l és la corda de l'àlep, i u , la velocitat de punta d'àlep, o bé $St = 2\pi(f_T/\omega)s$, sent $s = l/2\pi r$ la solidesa real de la corda. Un valor típic d'aquest número és la unitat, de manera que f_T és de l'ordre d'1 kHz en la majoria de les màquines axials.

Altres contribucions espectrals que poden aparèixer a més de les esmentades, f_T i f_L , prenen la forma d'un sol pic discret o una sèrie d'espectres en línia. Aquests pics passen, habitualment, en múltiples de la freqüència de rotació, $f_\omega = \omega/2\pi$, o de la freqüència de pas d'àlep, $f_z = z\omega/2\pi$. Els pics situats en múltiples de f_ω són de baixa intensitat i conseqüència d'un repartiment desequilibrat de la càrrega entre els àleps (habitualment, són més pronunciats quan augmenta la velocitat de l'àlep). Per la seva part, si la freqüència de pas d'àlep és elevada, només cabran dos o tres dels seus harmònics en l'espectre perquè la resta seran atenuats. Aquesta és una de les diferències principals entre el soroll generat per un ventilador: si el nombre d'àleps z és reduït, l'espectre estarà format per un empaquetat discret de múltiples pics molt pròxims entre si, però, si z és elevat, llavors apareixerà probablement només un parell de pics a f_ω i f_z . Els conjunts restants de freqüències discretes, anomenats *soroll sobrant en el rotor*, són generats per diversos graus de càrrega impulsiva d'àlep. Les línies de traç representades a la figura 3.44 són típiques de la interacció rotor-estator i la formació de deixants en ventiladors entubats.

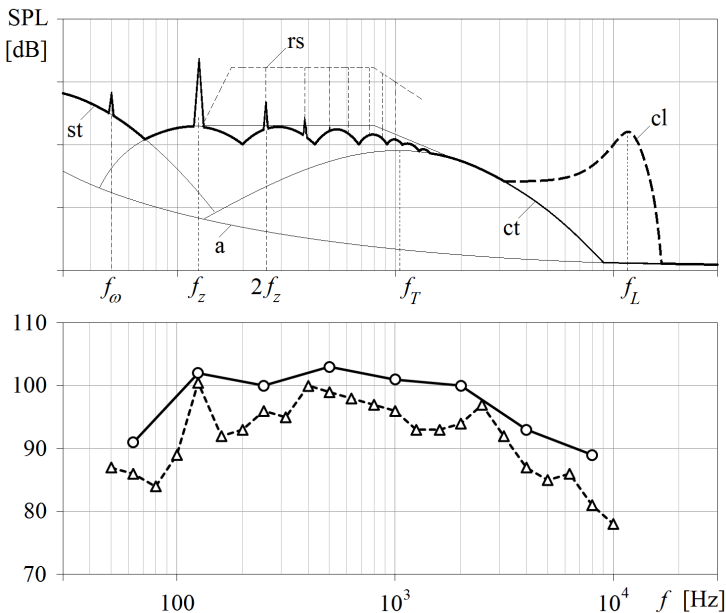


Figura 3.44. Característiques SPL (sound pressure level) de l'espectre de soroll d'un rotor i espectres a les bandes d'octava i de terç d'octava. A la figura: a, soroll ambiental; cl, soroll de capa laminar; ct, soroll de capa turbulenta; rs, soroll sobrant de rotor, i st, soroll de radiació estacionària. L'espectre de banda d'octava (o) és bastant uniforme, però no mostra la freqüència f_z .



El nivell de potència sonora específic és el nivell de potència sonora generat per un ventilador concret amb un cabal $Q_0 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ i comunicant una pressió $p_{T,0} = 1 \text{ kPa}$. L'ús d'un nivell de potència sonora de referència permet comparar directament els nivells de bandes d'octava de ventiladors diferents, reduint les dades a una base comuna. La taula 3.6 mostra les característiques de banda ampla corresponents a diversos ventiladors industrials, correctament dissenyats i instal·lats en sistemes amb una àmplia dispersió. Per obtenir les condicions de potència sonora del funcionament real a Q i p_T , conegudes les de referència (i en les mateixes unitats que Q_0 i $p_{T,0}$), s'ha d'aplicar la fórmula següent:⁶³

$$L_w = L_{w,0} + 10 \log_{10} \left(\frac{Q}{Q_0} \right) + 20 \log_{10} \left(\frac{p_T}{p_{T,0}} \right) \quad [3.90]$$

i afegir a la banda de freqüència de pas d'alep el valor BFI (*blade frequency increment*) de la taula.

D'altra banda i per concloure, les normes sobre ventiladors en prediuen amb exactitud el funcionament hidràulic i acústic mitjançant les lleis de semblança. L'anàlisi dimensional permet deduir que la potència acústica és una funció del grup $\rho c^3 r^2$, del número de Mach a la cinquena potència, $(u/c)^5$, del número de Reynolds i de les xifres adimensionals d'energia i cabal. Quan de l'espectre de soroll d'un ventilador se separen el soroll del motor, el dels coixinets i el d'altres components mecànics, com l'eix, la voluta, etc., la potència acústica del soroll restant està ben descrita pel grup $L_w/u^5 r^2$; és a dir, aquesta relació es manté sensiblement constant sempre que els intervals de variació dels termes del denominador no siguin gaire grans. En ventiladors homotètics, es compleix que:

$$\frac{L_w}{u^5 r^2} = \frac{L_w}{\omega^5 r^7} \approx \frac{\rho}{c^2} f(\text{Re}) g(\chi) \quad [3.91]$$

La variable χ , anomenada *obertura del ventilador*, és funció dels coeficients de cabal i pressió (es dedueix que és proporcional a $\Delta^{-1/2}$), de manera que $g(\chi)$ depèn de ω i de la mena de ventilador. Si el canvi de densitat no és important, els nivells de potència sonora entre dues condicions de funcionament, (1) i (2), es poden relacionar mitjançant l'equació:

$$L_{w,2} = L_{w,1} + 50 \log_{10} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) + 70 \log_{10} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad [3.92]$$

En general, i atès que les corbes de funcionament de ventiladors que són geomètricament semblants també són semblants, per a una mena de ventilador i un cabal i una pressió d'una aplicació, hi ha una mida particular de ventilador de tota la sèrie que és preferible als altres. Això té una lectura inversa: una vegada determinada la mida convenient del ventilador per a una aplicació concreta des del punt de vista acústic, no és possible reduir el nivell de soroll fent-ne servir un altre més gran o més petit.



		Freqüències centrals de bandes d'octava [Hz]								
Tipo		63	125	250	500	1000	2000	4000	8000	BFI
Centrifugos	A-G	85	85	84	79	75	68	64	62	3
	A-P	90	90	88	84	79	73	69	64	3
	BP-G	101	92	88	84	82	77	74	71	7
	BP-P	112	104	98	88	87	84	79	76	7
	MP-G	103	99	90	87	83	78	74	71	8
	MP-P	113	108	96	93	91	86	82	79	8
	AP-G	106	103	98	93	91	89	86	83	8
	AP-P	116	112	104	99	99	97	94	91	8
	S	98	98	88	81	81	76	71	66	2
	D	94	88	88	93	92	90	83	79	6
Axials	T-G	96	91	92	94	92	91	84	82	7
	T-P	93	92	94	98	97	96	88	85	7
	H	93	96	103	101	100	97	91	87	5

Tabla 3.6. Potència sonora relativa de referència, produïda per diversos ventiladors. Llegendra: A, aerodinàmics; BP, MP, AP, baixa, mitjana i alta pressió (10, 20 i 60 mmca); S, corbats cap endavant; D, amb àleps guia; T, tubulars, i H, helicoidals. G, gran ($D > 1$ m). P, petit ($D < 1$ m).

En general, i atès que les corbes de funcionament de ventiladors que són geomètricament semblants també són semblants, per a una mena de ventilador i un cabal i una pressió d'una aplicació, hi ha una mida particular de ventilador de tota la sèrie que és preferible als altres. Això té una lectura inversa: una vegada determinada la mida convenient del ventilador per a una aplicació concreta des del punt de vista acústic, no és possible reduir el nivell de soroll fent-ne servir un altre més gran o més petit.

- ¹ Per ser més precisos, i com es veurà en el tema següent, la potència hidràulica transmesa resulta de la variació del moment cinètic que experimenta el fluid quan travessa el rodet mentre aquest gira, per això és de preveure que el parell comunicat i, en conseqüència, la potència, sigui més gran en les radials que en les axials, per la contribució de l'efecte centrfug.
- ² L'anàlisi anterior és vàlida per a una màquina de desplaçament positiu, si es considera una mitjana temporal per a les condicions en l'entrada i la sortida de la màquina i sense acumulació de massa o energia en el seu interior. Si això no fos possible, s'haurien d'incloure els termes no estacionaris i el tractament actual no seria aplicable.
- ³ Φ_V preveu les pèrdues d'origen viscos, incloent-hi les pèrdues per fricció en el disc, que són considerades pèrdues mecàniques.
- ⁴ El terme *altura manomètrica* o *d'elevació* està més estès en l'ús de les bombes rotodinàmiques que en les de desplaçament positiu, tot i que és tècnicament correcte en ambdues, sempre que sigui aplicable [3.2].
- ⁵ També justifica les diferències constructives entre les bombes i els ventiladors: els sistemes d'estanqueïtat necessaris han de contenir fuites generades per gradients de pressió diferents, i els gruixos de paret, d'àleps,



- etc., són menors en els ventiladors, ja que, en general, la pressió absoluta interna és més petita i també el parell a comunicar.
- ⁶ Aquesta és la potència en l'accionament de la màquina, també anomenada *potència en l'eix* o *potència al fre*, i és el valor absolut del treball per unitat de temps necessari per accionar la bomba des de l'exterior.
 - ⁷ Ni existeixin altres cabals funcionals en la màquina. En les bombes centrífugues, per exemple, és habitual fer servir part del cabal impulsat pel rodets per refrigerar parts mòbils o compensar l'embranchada axial experimentada per l'eix.
 - ⁸ Com es veurà en el tema 3.4.3, aquesta corona difusora augmenta considerablement la grandària radial de la màquina, per això no sol ser l'únic element difusor, excepte en algunes bombes monocel·lulars.
 - ⁹ És possible que els àleps a l'entrada siguin graduables en orientació per poder regular el cabal i acomodar el funcionament de la màquina a punts de treball fora del disseny nominal. Per aquest motiu, s'anomenen també *àleps distribuïdors* (encara que siguin fixos).
 - ¹⁰ L'efecte de la viscositat resulta menyspreable si el moviment és a Re elevat. Si bé el rendiment d'una màquina està influït per la viscositat, el seu major efecte és dissipar l'energia dels remolins i altres moviments aleatoris generats per la forma dels components de la màquina, que depenen de qüestions de disseny i del grau d'allunyament del punt de funcionament respecte de les condicions nominals.
 - ¹¹ La despesa volumètrica, Q , descriu el camp de velocitats a unes revolucions n . Les forces màssiques que deriven d'un potencial es poden agrupar amb la pressió i així treballar amb pressions reduïdes: $p_r = p + \rho g z$. No es necessita el valor absolut de la pressió a l'entrada, tret que hi hagi cavitació o pressions tan elevades que el líquid es pugui comprimir substancialment. D'altra banda, al potencial de forces màssiques se li pot sumar una constant arbitrària. És a dir, si es vol, es pot suposar que z és zero a l'entrada de la màquina.
 - ¹² Per exemple, en turbines hidràuliques, és més apropiat suposar que la dada és Y , i la variable dependent, Q .
 - ¹³ La relació amb Φ és per a un rotor radial d'àleps de gruix nul, en què el cabal és: $Q = \pi D_2 b_2 c_{2m}$ y $D = D_2$.
 - ¹⁴ Des del punt de vista del disseny, n'hi ha prou que els triangles de velocitats que es formen al rotor siguin proporcionals entre si. Aquests triangles es presentaran a 4.1.1 i resulten de la composició vectorial de les velocitats absoluta, relativa i d'arrossegament a l'interior del rotor.
 - ¹⁵ És important observar, a la pràctica, si les bombes són en realitat geomètricament semblants, perquè els constructors solen col·locar rotors de diferent grandària en una mateixa carcassa. La semblança no resulta completa tampoc en bombes a escala perquè, a causa de la seva diferent grandària, la relació s/D és més petita en les bombes grans que en les de menys grandària (sempre que comparteixin material i procés de fabricació).
 - ¹⁶ Observem que, si bé la primera de les equacions [3.28] és invariant respecte del fluid (i la gravetat), la segona suposa $\rho_a = \rho_b$. A més, perquè es compleixi la condició $Y = A_v Q^2$, n'hi ha prou que els punts homòlegs comparteixin els rendiments hidràulic i volumètric, perquè el mecànic concerneix a la xifra de potència.
 - ¹⁷ Obtinguda per a un fluid de referència de baixa viscositat: aigua freda en bombes o aire fred i sec en ventiladors, i segons les condicions normals d'assaig definides per les normes tècniques.
 - ¹⁸ S'entén que, a falta de dades experimentals concretes. Un altre mètode molt emprat és el proposat per la norma ISO 9906:1999 *Rotodynamic pumps - Hydraulic performance acceptance tests - Grades 1 and 2*, basat en àbac que reflecteixen els resultats experimentals d'una família completa de bombes.
 - ¹⁹ Aquestes equivalències i les de la taula 3.2 són només vàlides en el camp gravitatori terrestre. A més, la de n_s només serveix per a l'aigua, i llavors $n_s = 3,651 n_q$. Ni n_q ni n_s són adimensionals.
 - ²⁰ Les velocitats de l'accionament més freqüents per a motors elèctrics asíncrons i una freqüència elèctrica de 50 Hz, tenint en compte el lliscament, són: 2.900, 1.450, 970, 730, 580 i 480 rpm, per a 1, 2, 3, 4, 5 i 6 parells de pols, respectivament. Qualsevol altra velocitat de rotació és possible fent servir variadors de freqüència o motors de contínua, sempre que es respectin les especificacions del fabricant.



- ²¹ Aquesta k indicaria el nombre de rotors equivalents, que, en un funcionament ideal, es repartirien a parts iguals l'energia total. En la realitat, el muntatge en sèrie de diversos rotors radials en una bomba disminueix la seva eficàcia individual i augmenta les pèrdues totals, cosa que fa que el nombre de rodetes necessaris sigui superior al k que resulta de [3.33]. Per fixar idees, una bomba submergida, preparada per subministrar $H_B=100\text{m}$, $Q=300\text{L/min}$, $n=2.900\text{rpm}$ ($\Omega=0,12<0,2$) i $D_2=110\text{mm}$, disposa d'uns 10 rodetes. El procés de càlcul descrit condueix a $\Delta_R=5,7$ y $\Omega_R=0,44$ para $k\approx 6$.
- ²² Per norma general, els diàmetres es distribueixen segons la sèrie normal R10, el factor de la qual és 1,25. Els diàmetres resulten, llavors: 20, 32, 40, 50, 65, 80, 100, 125, 160, 200, 250, 315, 400, etc.
- ²³ Aquest és un dels objectius de la normalització: garantir la intercanviabilitat entre bombes i les seves prestacions, amb independència del fabricant.
- ²⁴ S'admet, de moment, que tots els punts de funcionament possibles són, a més, estables. Els fabricants també inclouen en els seus catàlegs tècnics informació relativa a la capacitat d'aspiració de la bomba (corbes de NPSH_R), les seves dimensions, instruccions de muntatge i manteniment, desglossaments d'especejaments i recanvis, i altres qüestions relatives a la seva posada en marxa, funcionament i instal·lació. En les bombes de mida gran, també és freqüent trobar informació de la inèrcia del grup motobomba.
- ²⁵ Totes aquestes qüestions són summament interessants en l'estudi del cop d'ariet per detenció del grup impulsor i la seva simulació.
- ²⁶ En algunes disposicions, és necessari tenir en compte les diferents pèrdues parcials, h_i , que es poden donar en les línies d'aspiració de cadascuna de les bombes o entre aquestes i el col·lector principal. Això dona lloc a unes corbes de bombament equivalent diferents per a cada bomba, en què l'energia disponible és més petita en ser $H_{B,eq}=H_B-h_i$, i que trenquen la simetria energètica del grup, encara que les bombes siguin iguals.
- ²⁷ Si $b>1$ per a algun cabal, llavors es demostra de la mateixa manera que $\eta_1 < \eta_p < \eta_2$. Aquestes relacions permeten acotar el rendiment d'una instal·lació de bombament en paral·lel, es comprova que sempre serà superior al menor dels rendiments parcials, però també mai superior al major dels mateixos. Això suposa, en general, que el rendiment mitjà de la instal·lació augmenta amb el nombre de bombes (si han estat ben triades) i que sempre serà superior al que s'obtingria amb una única bomba preparada per cobrir tota la demanda.
- ²⁸ Continuant amb un exemple anterior, si $Q=300\text{L/min}$ i $n=2.900\text{rpm}$, l'altura d'elevació màxima assumible amb un sol rodet seria de l'ordre de 52 m, inferior als 100 requerits. En aquest cas, es podrien utilitzar només dos rodetes, però la restricció imposada pel diàmetre en fa augmentar el número en disminuir Δ_R i augmentar Ω_R .
- ²⁹ El camp de variació d'aquesta velocitat en funció del material és, al seu torn, molt ampli: des de 40 m/s per a la fundició fins a 300 m/s per als acers i altres aliatges. En els ventiladors centrífugs, rares vegades supera els 60 m/s.
- ³⁰ En aquestes fórmules, es fa servir el valor mitjà del diàmetre a l'entrada. També se suposa que els angles del rodet són els corresponents al corrent, fet que no és estrictament cert.
- ³¹ Aquesta apreciació també és certa en les axials, en què la presència del cub on es munta el motor fa que la secció normal en el rotor sigui anul·lar i inferior a la de connexió al sistema. En el canal d'aspiració tant de les bombes radials com de les axials, encara que en major mesura en aquestes últimes, es poden col·locar àleps directores guia.
- ³² En general, a les bombes petites, el preu té més efecte que el rendiment, mentre que les grans es dissenyen per a cabals molt concrets.
- ³³ A títol orientatiu, es pot dir que la corona difusora està indicada quan $c_2>20\text{m/s}$.
- ³⁴ S'entén que les pèrdues de cabal no arriben a la cambra espiral, atès que els camins de fuga són previs.
- ³⁵ Totes les línies de corrent són també espirals logarítmiques que formen un angle constant amb la circumferència corresponent.
- ³⁶ La condició $c_{\theta}=c_{2,\theta}r_2/r$ no es compleix estrictament en la pràctica per diversos factors, entre els quals, el fregament. La forma corba del conducte de la cambra espiral origina un corrent helicoidal degut a l'aparició de



fluxos secundaris (alguna cosa semblant passa quan un flux turbulent travessa un colze). Els corrents secundaris són recirculants i, a la secció central del conducte, es dirigeixen cap a l'exterior de la corba.

- ³⁷ En el cas de fer servir corones difusores d'ample constant, en què $r_3 = 1,5r_2$, condició de disseny freqüent, el seu coeficient de recuperació efectiu (per a un mateix rendiment que en la cambra espiral) seria de 0,5, com el lector podrà comprovar.
- ³⁸ En algunes bombes senzilles, no es munten aquestes juntes, sinó que es mecanitza sobre la pròpia paret interna de la carcassa una o dues ranures d'expansió. En qualsevol cas, aquestes juntes no són coixinets de rodadura.
- ³⁹ De vegades, sobretot si el fluid a bombar està a alta temperatura o conté partícules abrasives, la lubricació es fa mitjançant un altre fluid alimentat des de l'exterior o mitjançant una cambra de refrigeració. L'estopada pot ser substituïda per anells metàl·lics o per segments d'algun material elastòmer, que no cal lubricar però sí mantenir greixat.
- ⁴⁰ Les bombes no inundades tenen la tendència natural a descencebar-se. Una bomba es troba desencebada després de la seva instal·lació primera, o quan es posa en marxa després d'un llarg període d'inactivitat, o quan abans s'havia buidat expressament per precaució, com es fa quan ha d'estar inactiva a temperatures sota zero.
- ⁴¹ Una anàlisi més precisa revela que, en realitat, el rendiment total s'avalua millor de la forma:

$$\eta_T = \frac{P_s q_s - P_e q_e}{M \omega}$$

on q_s i q_e són els cabals volumètrics a la impulsió i a l'aspiració de la bomba. Essent $q_s \approx q_e$ sovint, s'accepta la definició emprada al text i es deixa l'ús de l'expressió anterior a treballs de recerca més específics que, a més, també haurien de contemplar termes de compressibilitat, transitoris i d'altres.

- ⁴² Aquesta circumstància marca la tendència de disseny actual: la miniatrització. Es pot aconseguir el mateix cabal amb una bomba més petita si s'augmenten les revolucions, cosa que implica, al seu torn, la disminució del parell d'arrossegament necessari i del motor d'accionament contra una mateixa pressió, i exigeix un ajust més fi i un mecanitzat més precís de tots els components.
- ⁴³ Aquesta saturació en cabal es pot observar a la figura 3.34 i és deguda a la combinació de dos efectes: la reducció efectiva de l'àrea de pas ocupada pel corrent de líquid i la reducció dràstica de la velocitat del so, deguda a la presència de flux mixt o bifàsic en els conductes interns de la bomba.
- ⁴⁴ El col·lapse de les bombolles genera un soroll amb un contingut freqüencial que pot arribar a 1 MHz. Aquest soroll es pot assimilar a un soroll blanc en què les bombolles més petites contribueixen amb les freqüències més altes, i les més grans, amb les més baixes.
- ⁴⁵ Bàsicament, de les energies cinètiques associades a les velocitats c_1 i w_1 . Totes les pressions d'aquest apartat són absolutes, si s'han de comparar amb la pressió de saturació, definida positiva i presa com a valor mínim de referència amb què establir el criteri sobre la possible ocurrència de cavitació.
- ⁴⁶ En les condicions d'assaig per a les quals s'observa una disminució del 3% en H_b i es defineix la condició $NPSH_R = NPSH_D$, resulta que $NPSH_R = (p_e - p_{sat}) / \rho g + v_e^2 / 2g$. Per tant, la mesura de la pressió p_e i del cabal (i la temperatura del fluid) és suficient per a representar la corba $NPSH_R(Q)$ subministrada pel fabricant.
- ⁴⁷ Un altre símil: el soroll també és semblant al de les crispetes saltant en una paella.
- ⁴⁸ Si bé Ω i S són independents entre si, el canvi de màquina centrífuga per axial modifica significativament la geometria de l'aspiració i el valor de S^* . Experimentalment, es troba que el valor de S^* varia entre 2,5 i 4 per a qualsevol mena de bomba, per a paràmetres de Thoma d'entre 0,02 i 2; no obstant això, en l'actualitat, es dubta que la limitació oferta per S sigui, per si mateixa, un criteri segur per evitar riscos per cavitació.
- ⁴⁹ Un mil·límetre de columna d'aigua (mmcda o mm H₂O) equival a 9,8 Pa.
- ⁵⁰ La relació de densitats entre l'aigua i l'aire, en condicions normals, és de l'ordre de 850. Els triangles de velocitats en una bomba i un ventilador geomètricament semblants no seran iguals perquè els ventiladors toleren



velocitats de flux més elevades, però així i tot, és d'esperar que el salt de pressió sigui molt més gran en les primeres. Per exemple, per a una velocitat màxima en totes dues de 20 m/s i un sol rotor radial, l'energia per unitat de massa comunicada seria de 200 J/kg, aproximadament. L'altura d'elevació de la bomba corresponent seria de 20 m per a una pressió total en aigua de 2 bar. Amb aquest límit de velocitat, un ventilador que mogués aire en condicions normals comunicaria un salt de pressió total de tan sols 240 Pa i, si la velocitat ascendeix a 40 m/s, de 1.000 Pa.

- 51 Aquests ventiladors també poden ser d'àleps rectes o inclinats cap enrere. Per a angles $\beta_2 \approx 25^\circ$, no hi ha un altre ventilador que tingui el mateix nivell de soroll per a la mateixa pressió. Els d'àleps corbats cap endavant presenten la característica de cadira de la figura 3.38 i els centrífugs són més petits per a una aplicació donada.
- 52 A la pràctica, és freqüent reduir les condicions assajades a les condicions de l'atmosfera normal o l'estàndard, o la de qualsevol altra normalitzada que el fabricant indiqui a les cartes. La pressió baromètrica normal i l'estàndard coincideixen en 760 mmHg (1 atm), però la temperatura normal es pren a 0 °C, i la temperatura estàndard, a 20 °C. Amb aquests valors, les densitats normal i estàndard són $\rho_N = 1,293 \text{ kg/m}^3$ i $\rho_S = 1,205 \text{ kg/m}^3$, respectivament.
- 53 Recordem que la pressió total d'un punt en un flux resulta de la suma dels tres termes energètics en unitats de pressió. Com que entre l'entrada i la sortida del ventilador, la diferència de cota és menyspreable, l'increment de pressió total a través del ventilador es correspon amb l'increment de pressió de recés, i pot ser valorat en funció de l'energia cinètica mitjana, tal com s'ha indicat a [2.106].
- 54 En molts catàlegs, només es consigna la corba de pressió estàtica, perquè és la més interessant per a l'usuari, ja que la pèrdua de sortida té lloc irremediament. Les pèrdues internes, p_i , s'avaluen sumant les pèrdues parcials de tots els components de la instal·lació, siguin colzes, difusors o trams rectes de conducte, que es quantifiquen com un percentatge de la pressió dinàmica existent, que al seu torn són funció de p_d , és a dir, de Q^2 .
- 55 Les anomenades *system effect losses*, contemplades amb el *system effect factor* (SEF), o pèrdues associades a les restriccions, les corbes o els amortidors instal·lats a l'entrada o la sortida del ventilador i que modifiquen la seva corba característica. En els sistemes amb ventiladors, s'anomena *longitud equivalent* la longitud de conducte recte que assegura un flux uniforme. La longitud equivalent és de l'ordre de 2,5 vegades el diàmetre del conducte per a velocitats inferiors a uns 12,5 m/s, i augmenta a raó d'un diàmetre per cada 5 m/s addicionals.
- 56 S'arriba a aquesta equació directament aplicant l'equació de Bernoulli entre els punts de recés (0) i (3), i considerant que $Z_E = Z_0$ i $Z_S = Z_3$.
- 57 Les pressions del vent generalment són positives respecte de la pressió estàtica en el corrent d'aire no pertorbada sobre el costat de sobrevent d'un edifici, i negatives sobre el costat de sotavent. Les pressions sobre els altres costats poden ser positives o negatives, depenent de l'angle d'incidència i de la forma de l'edifici. En general, s'afecta el terme $p_{d,0}$ d'un coeficient que de-penja de la grandària i de la superfície de l'edifici.
- 58 Se suposa que l'altura de la xemeneia és suficient per tenir en compte el terme de cota corresponent, però no tant per invalidar la hipòtesi hidroestàtica, que permet considerar que la densitat a la base de la xemeneia és la mateixa que a Z_S . Amb aquesta condició, es compleix que $p_3 = p_b - \rho_b g h_{cb}$. A continuació, s'analitza l'efecte de l'altura en el canvi de densitat.
- 59 Malgrat que es podria treballar amb una corba de pressió estàtica equivalent del ventilador amb difusor que resulta de la suma de p_e i $\eta_{dif} (p_d - p_{d,S})$ de [3.76]. El difusor s'ha de posar a una distància superior a la longitud equivalent de conducte.
- 60 En canvi, l'atmosfera és molt estable en la inversió tèrmica quan la temperatura augmenta amb l'altura i $K < 0$.
- 61 El sentit de l'oïda humà és sensible a sons de freqüències compreses entre els 20 i els 17.000 Hz, aproximadament, però no de manera igual en totes les bandes de freqüència. Això motiva l'ús de ponderacions A, B i C, que ajusten la sensibilitat dels aparells de mesura per adaptar-los al sentit de l'oïda humà. Una octava és un interval de freqüència entre dos sons la raó de freqüència dels quals és dos (i de freqüència central normalitzada). Consulteu una obra especialitzada per obtenir la definició de les variables acústiques i altres termes utilitzats en aquest tema.



-
- ⁶² Perquè es presenti aquesta autoexcitació, cal que almenys una de les capes límit que evolucionen sobre l'àlep sigui laminar en arribar a la vora de sortida. En un punt d'aquesta capa límit, anomenat *punt d'inestabilitat*, s'inicia el règim oscil·latori les ones superficials del qual s'anomenen *ones de Tollmien-Schlichting*.
- ⁶³ Altres investigadors afegeixen a aquesta expressió un terme més: $10 \log_{10}(u/c)m$, en què c és la velocitat del so i m és 2 per a ventiladors centrífugs i 2,5 per a axials.

4

Teoria general de turbomàquines hidràuliques

És evident que el component fonamental de tota turbomàquina és el rotor, ja que és l'element amb què s'incrementa l'energia hidràulica del fluid i que condiciona el disseny de la resta de la turbomàquina. Un rotor és una peça giratòria amb simetria axial i solidària de l'eix motriu, en què es disposen una sèrie d'àleps distribuïts de manera perimetral i equidistant. Com s'ha descrit en el tema anterior, el fluid a l'interior de la màquina flueix també a través de conductes, canals o intersticis de geometria fixa, disposats abans del rotor i després o entre rotors, en què l'energia no s'incrementa, sinó que es transforma o dissipa, en principi de manera controlada.

El disseny d'una turbomàquina ha d'englobar, en conseqüència, l'anàlisi del flux a l'interior del rotor i en els conductes fixos que li serveixen de guia, especialment dels difusors; per a això, es disposa de les equacions fonamentals de la mecànica de fluids i d'altres, a part de les que ja hem vist en apartats anteriors, que es desenvolupen en aquest tema. Qüestions no hidràuliques, però també molt interessants, com la tria de coixinets i rodaments, el dimensionament de l'eix motor o el seu acoblament, la selecció de materials, superfícies i elements d'estanquitat estàtica, etc., només es tracten en aquesta obra d'una manera descriptiva.

El desenvolupament que va portar a [2.27] és perfectament vàlid per valorar les prestacions generals o el rendiment de la turbomàquina des del punt de vista integral, sempre que s'efectuï la mitjana de les variables fluides en un temps prou gran, molt més que el temps de residència, però no serveix per descriure el flux en el seu interior ni per orientar sobre el seu disseny. Se sap, a més, que quan la fluctuació turbulenta de la velocitat a la sortida de la màquina és important, aquesta equació ha de ser corregida amb un terme que inclogui l'energia cinètica no prevista amb el flux mitjà. Aquest terme suposa una disminució de l'energia mecànica subministrada al fluid, que poques vegades s'ha de tenir en compte.

Com que el número de Reynolds és prou elevat a l'interior de la turbomàquina i no hi ha addició de calor apreciable, es pot suposar que el moviment és isentròpic en el seu interior fora de les capes límit que es generen a les parts mullades [2.82]. Si, a més, el fluid prové d'una regió aigües amunt on l'entropia era uniforme perquè estava



en calma, llavors també es pot suposar que el flux és homentròpic i es poden aplicar les equacions d'Euler-Bernoulli al corrent relatiu al rotor respecte del qual no es realitza treball. En canvi, fins i tot admetent que l'increment d'energia potencial és un terme menor, l'entalpia de rabeig no es manté al llarg d'una línia de corrent, perquè la presència dels àleps distorsiona el camp de pressions a l'interior del rotor i fa que sigui essencialment no estacionari [2.40]. Per tant, es conclou que és la no estacionarietat del moviment el que permet a la màquina desenvolupar el treball útil descrit a [2.27]. Aquest increment de l'entalpia de rabeig en el flux principal, juntament amb els gradients d'entropia que es generen a prop de les parets, comporten l'aparició de vorticitat. Tal com es veurà en aquest tema, el disseny de la màquina ve condicionat per aquesta vorticitat i la que pugui aportar el flux a l'entrada, perquè totes dues es poden deflectar en el seu interior i difondre a les regions del flux on no es puguin menysprear els efectes viscosos.

Encara que, a l'entrada d'una màquina, el flux absolut es pugui considerar irrotacional, perquè prové del repòs i és permanent i uniforme (en entropia i en entalpia de rabeig), la perspectiva del rotor és diferent perquè les forces màssiques no són potencials en el seu interior (en concret, apareix la força de Coriolis) i, segons el teorema de Kelvin, la circulació de la velocitat relativa ha de canviar entre línies tancades entorn de l'eix de gir. A la sortida del rotor radial, el flux segueix el supòsit ideal isentròpic en el corrent no pertorbat pels efectes viscosos, en què el moviment absolut continua sent irrotacional, i la circulació de la velocitat absoluta sobre qualsevol línia circular centrada en l'eix serà una constant no nul·la el valor de la qual dependrà de la circulació de sortida i, per tant, del seu increment dins del rodet. Aquest raonament també és vàlid en una màquina axial, tot i que en aquesta darrera la condició $\partial\Gamma/\partial r = 0$ a la sortida del rotor només s'aconsegueix si hi ha l'*equilibri radial* i la velocitat axial és uniforme. Aquest escenari del flux de sortida té alguns avantatges des del punt de vista energètic, però condiciona el disseny dels àleps i implica normalment una torsió concreta al llarg de la seva envergadura. Després del rodet, el moviment no pot ser irrotacional a l'interior dels deixants, cosa que, segons la teoria potencial, origina circulació al voltant dels àleps.

¹En qualsevol cas, no sempre es pot garantir la irrotacionalitat del flux d'entrada o la seva homentropia, per això els fluxos en forma de vòrtex lliure previstos a la sortida dels rotors per la teoria irrotacional no sempre s'observen a la realitat.

L'estudi teòric del flux real en una màquina radial s'ha d'abordar almenys de manera bidimensional en superfícies de corrent perpendiculars a l'eix per tenir en compte tots aquests fenòmens. Curiosament, si el fluid es pot considerar ideal perquè el moviment és isentròpic, l'equació [2.37] sembla indicar que no es pot generar vorticitat a l'interior del rotor i el moviment, suposat pla, hauria de continuar sent irrotacional. Aquesta aparent paradoxa no ho és, perquè aquesta equació es va obtenir en el cas que les forces màssiques fossin conservatives, és a dir, potencials, cosa que es pot aplicar al flux absolut que travessa el rotor però no al relatiu, com ja s'avançava al



paràgraf anterior. En altres paraules, com que el fluid real que entra en el rotor té certa “tendència inercial” a mantenir el seu caràcter irrotacional, el flux relatiu adquireix una rotació contrària a la velocitat de gir del motor, la distribució de velocitats de la qual, sumada al flux mitjà associat al cabal, distorsiona el perfil de la velocitat relativa. Com que el flux relatiu es pot admetre isentròpic i estacionari, l’equació de Bernoulli permet, per si sola, estimar la pressió sobre les superfícies frontal i dorsal dels àleps, que s’anomenaran *de pressió* i *de succió*, respectivament, i justifica que el rotor pugui comunicar parell.

En una cascada axial, la força de sustentació generada per la circulació entorn del perfil dels àleps explica el parell desenvolupat. Si se suposa que el flux transcorre en superfícies de corrent cilíndriques centrades en l’eix, llavors les equacions del moviment són les mateixes descrites per a la velocitat absoluta i per a la relativa, perquè les forces inercials que apareixen, la centrífuga i la de Coriolis, són perpendiculars a la velocitat i no treballen. L’efecte d’aquestes forces en el moviment relatiu ara només es pot contemplar en una perspectiva tridimensional en superfícies perpendiculars a l’eix, i causa l’aparició de corrents secundaris de diferent tipus en el volum entre àleps, que principalment van dirigits cap a la punta d’aquests últims. A més, tot i que en el cas ideal la vorticitat només pot ser transportada pel fluid i deflectada pel corrent [2.175], quan apareix fricció, la vorticitat es pot difondre en la direcció normal i originar multitud de fluxos secundaris que interaccionen entre si i amb els anteriors, cosa que complica l’anàlisi teòrica del flux.

En l’actualitat, la teoria i l’experimentació es complementen amb tècniques de simulació computacional CFD, que consideren el flux complet tridimensional en tots els seus components, amb l’objectiu compartit de determinar el funcionament real d’una màquina i les seves prestacions òptimes. Són moltes les raons que han incentivat l’ús de programari específic en les fases prèvies de qualsevol disseny industrial. D’una banda, el cost efectiu de les proves al laboratori pot arribar a ser prohibitiu si es prenen en consideració el temps i el material necessari per dur-les a terme. De l’altra, l’increment en velocitat dels ordinadors i la gran memòria disponible avui dia han fet possible el desenvolupament del CFD escurçant el temps de càlcul i augmentant la precisió dels resultats. En definitiva, el CFD ha passat a ser una branca més de la fluidodinàmica i un dels mitjans preferits pels fabricants en l’acarament de dissenys alternatius, arribant a l’experimentació només per verificar els resultats finals d’un nombre reduït de prototips. No és l’objectiu d’aquest llibre abordar aquest tema, de manera que s’anima el lector interessat a consultar una obra especialitzada en la matèria.

En qualsevol cas, la teoria clàssica unidimensional que es presenta a continuació permet explicar adequadament les relacions fonamentals entre les condicions globals d’operació de la màquina: el cabal, la velocitat de gir, l’energia comunicada, etc., en funció de les velocitats mitjanes del fluid, i a més proporciona una guia de disseny prou precisa per a la selecció dels angles i les dimensions principals del rotor i de la



màquina. Per a això, cal formular una sèrie d'hipòtesis simplificadores que, encara que no es compleixin exactament a la màquina real,² es podran desfer a posteriori mitjançant coeficients pseudoexperimentals que ajustin la teoria a la realitat. Les hipòtesis de partida en què es basa la teoria unidimensional són:

- Es treballa amb velocitats mitjanes, i la velocitat en qualsevol secció transversal al flux és uniforme, i el resultat de l'equació de continuïtat integral.
- S'admet que hi ha simetria polar en el rotor, de manera que la distribució de la velocitat, sigui absoluta o relativa, i de totes les seves projeccions és també uniforme en superfícies cilíndriques concèntriques amb l'eix.
- S'accepta que els àleps, siguin fixos o mòbils, guien perfectament el fluid i defineixen la direcció de la línia de corrent en cada secció. En un rotor, aquesta hipòtesi implica que la velocitat relativa del fluid segueix, en tot instant i lloc, la direcció de la tangent de l'àlep.

L'última hipòtesi es coneix com condició de *flux congruent* amb els àleps, i és més certa com més àleps té el rotor. La teoria unidimensional es coneix com *teoria per a un nombre infinit d'àleps*, en què el flux relatiu té lloc en una única direcció curvilínia amb simetria polar.

Tot i que la teoria que es presenta en aquest apartat es pot aplicar, en línies generals, a qualsevol turbomàquina, incloent-hi les turbines i les tèrmiques, el tractament se centra en les màquines generadores de fluid incompressible: bombes i ventiladors, tant radials com axials.

4.1 Transferència d'energia en una bomba

S'ha comentat repetides vegades que l'increment d'energia total que el fluid experimenta en el rotor d'una bomba rotodinàmica resulta de l'aplicació del principi de la quantitat de moviment. En una turbomàquina hidràulica generadora, l'energia es transfereix del motor al fluid i n'augmenta el moment cinètic sense un canvi apreciable de densitat, i es manifesta en un increment de les seves energies cinètica i estàtica o de pressió. En aquest apartat es dedueix la magnitud teòrica de cadascun d'aquests increments en el supòsit unidireccional i la seva relació amb la geometria bàsica i les revolucions del rodet.

4.1.1 Triangles de velocitats en un rotor

La composició vectorial de les velocitats absoluta, relativa i d'arrossegament en qualsevol punt de l'interior del rotor es pot visualitzar en forma de triangles la magnitud i la forma dels quals determinen el cabal i l'energia aportats pel rodet (v. figura 3.6). Aquesta representació també permet descriure alguns fenòmens i el seu efecte, de manera que, en definitiva, serveix d'ajuda en l'etapa de disseny de la màquina. Són



especialment importants els triangles que es mostren a la figura 4.1 i que corresponen a les velocitats a l'entrada i a la sortida del rotor.

Els triangles de velocitats són ens geomètrics que queden determinats, íntegrament, una vegada es coneixen tres de les seves característiques. A més, es comprova que els triangles d'entrada i de sortida estan relacionats entre si per les equacions de continuïtat i de conservació del moment. Així, l'equació [3.19] mostra que la seva altura ha de ser, en certa manera, proporcional al cabal circulant i, com es veurà a continuació, la seva base està relacionada amb l'energia comunicada.

En concret, és interessant observar que, si es coneix la base del triangle, u ; la seva altura, c_m , i un dels seus angles, per exemple, β , llavors es coneixen els mòduls de totes les velocitats implicades, les projeccions i la resta d'angles. Un cas interessant es presenta quan es pot admetre que la velocitat absoluta a l'entrada del rotor no té component perimetral, és a dir, c_{1u} és nul·la, de manera que el triangle a l'entrada és ortogonal i n'hi hauria prou de saber u_1 i β_1 per a determinar c_{1m} i la resta de magnituds.

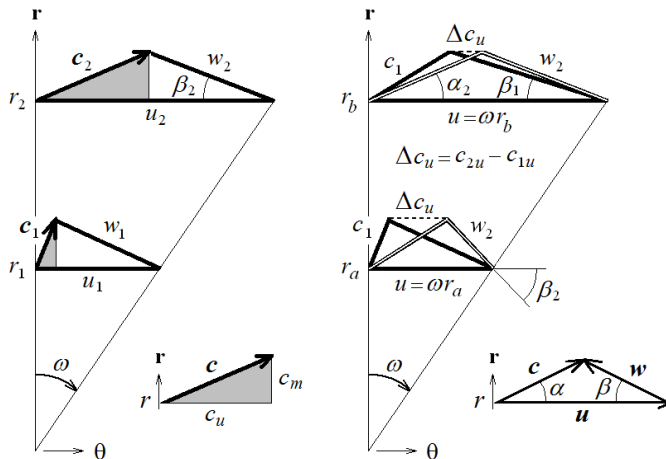


Figura 4.1. Magnitud qualitativa dels triangles de velocitats en un rodet radial (esquerra) i axial (dreta). En el cas axial, el moviment s'admet bidimensional al llarg de tubs de corrent de radi r coaxials amb l'eix de gir. Els triangles d'entrada i sortida del rotor axial es mostren en dos radis diferents, r_a i r_b , en què $u_1 = u_2$. Tots els triangles compleixen $c = u + w$.

4.1.2 Conservació del moment cinètic en el rotor

L'aplicació del principi de conservació del moment cinètic [2.19] al volum de control contingut a l'interior del rotor, en cas que el flux sigui estacionari, s'escriu de la manera següent:

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_m + \mathbf{M}_s = \int_{S_C} (\mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{c}) ((\mathbf{c} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n}) dS \quad [4.1]$$



El moment es dirigeix en la direcció de l'eix i el seu mòdul és la suma dels moments de les forces màssiques i de superfície respecte del mateix. No obstant això, en un rotor, les forces màssiques no produeixen moment per simetria i les que sí que podrien són nul·les, perquè l'equació anterior està referida a un sistema fix de referència.

Respecte de les forces superficials, de pressió i viscoses, cal distingir entre les que estan aplicades sobre les superfícies d'entrada i sortida al rodet, les que actuen sobre les parets mòbils del rotor i les que podrien actuar sobre les parets fixes de la carcassa interna de la màquina, en el cas de rotors oberts. De totes, les úniques que fan moment sobre l'eix són les que s'apliquen sobre la superfície dels àleps, ja que les altres, o s'anul·len per simetria perquè les superfícies d'entrada i de sortida són de revolució, o en general són menyspreables com a [2.13], o el rotor és tancat i el fluid en el seu interior no està en contacte amb parets fixes.

L'equació [4.1] amb les velocitats definides a l'apartat 3.3.1, i admetent el no lliscament del fluid a les parets de la superfície de control, siguin fixes o mòbils, és:

$$M_R = \int_{S_2} \rho_2 r_2 c_{2u} c_{2m} dS - \int_{S_1} \rho_1 r_1 c_{1u} c_{1m} dS \quad [4.2]$$

i, si les velocitats es distribueixen uniformement en cadascuna de les seccions i el fluid és incompressible, llavors:

$$M_R = \rho Q_R (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) \quad [4.3]$$

En vista d'aquest resultat, es conclou que el parell comunicat depèn del flux màssic circulant. $G_R = \rho Q_R$, i de la projecció de la velocitat absoluta en la direcció perimetral en cadascuna de les seccions. Aquestes projeccions són definides positives quan es dirigeixen en el mateix sentit que u , i negatives, en cas contrari.

Fent servir [1.6], és possible escriure aquesta equació de la forma:

$$M_R = \frac{\rho Q_R}{2\pi} (\Gamma_2 - \Gamma_1) \quad [4.4]$$

que mostra que l'increment del moment cinètic del fluid al llarg d'una línia de corrent que travessa el rotor porta a un canvi en la circulació de la velocitat absoluta entre l'entrada i la sortida.³ Perquè el parell comunicat sigui positiu, cal que $r_2 c_{2u}$ sigui més gran que $r_1 c_{1u}$, és a dir, que la circulació s'incrementi entre (1) i (2).

Cal tenir present que les expressions [4.3] i [4.4] són indistintes de la forma dels àleps o de la naturalesa del fluid, i que tampoc s'ha fet cap hipòtesi sobre l'efecte de la viscositat. És a dir, tant un flux viscós com un d'ideal reben el mateix parell si en totes dues seccions la distribució de velocitats és idèntica. Evidentment, la viscositat afecta el camp de velocitats i pressions, però si la distribució de velocitats que s'observa és la mateixa, aquestes equacions indiquen que el parell també ho serà. D'altra banda, les forces viscoses sobre les parets mòbils fan parell, perquè la curvatura i el gruix



dels àleps impedeixen que s'anul·lin per simetria.⁴ Respecte de la densitat, aquestes equacions es poden emprar amb tota generalitat en turbomàquines tèrmiques, en què el flux és compressible i la densitat canvia entre les seccions S_1 i S_2 ,⁵ utilitzant el cabal màssic, $G_R = \rho_i Q_i$.

Encara que es mantingui la hipòtesi de fluid ideal a través d'una bomba o d'un ventilador, cal considerar que la pressió no és uniforme en el sentit transversal del canal entre àleps perquè es pugui comunicar aquest parell. En un àlep d'un rotor radial, la pressió a la part convexa és més gran que a la còncava, i la integració del parell diferencial $br\Delta p dr$ al llarg del radi del rotor suposa un parell en sentit contrari a la rotació per poder impulsar el fluid (i que seria de signe contrari al M_R de [4.3]). En un rotor axial, la diferència de pressió en el perfil sorgeix a conseqüència de la generació de sustentació per la curvatura de l'àlep, tal com passa en un perfil alar aerodinàmic, i és més gran a la part còncava que a la convexa. La figura 4.2 mostra la forma típica d'aquestes distribucions de pressions.

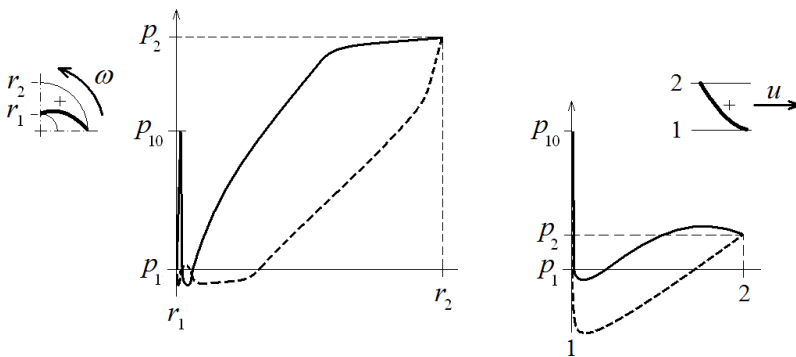


Figura 4.2. Distribució de pressió sobre un àlep d'una màquina generadora. A l'esquerra, el cas radial i, a la dreta, l'axial. La pressió mitjana és sempre superior en el sentit d'avanç dels àleps. p_{10} és la pressió d'estancament a la vora d'atac de l'àlep.

4.1.3 Generació d'empenta en una cascada lineal d'àleps

La generació de circulació al voltant d'un perfil alar dona lloc a l'aparició d'una força de sustentació, segons el teorema Kutta-Joukowski. Aquest teorema té innumbrables aplicacions pràctiques, especialment en l'aviació, en la propulsió d'embarcacions i en la generació de moment en una turbomàquina, i ha estat la base del desenvolupament de les formes geomètriques bàsiques dels àleps actuals i de les teories aerodinàmiques modernes. En aquest apartat, es discuteix la relació de les forces que apareixen en un perfil aïllat i en una cascada d'àleps axials amb la geometria del perfil i les velocitats principals del flux incident i a través del rotor. Abans, no obstant això, cal explicar com és possible que en un flux irrotacional hi pugui aparèixer una circulació no nul·la que doni lloc a la força esmentada.



Suposem el perfil alar aïllat de la figura 4.3 immers en un flux potencial bidimensional que partís del repòs. El teorema de Kelvin indica que el moviment resultant ha de tenir circulació nul·la al voltant del perfil (circuit ACDF de la figura), sempre que l'efecte de la viscositat sigui nul. Quan el perfil induïx al corrent potencial v_∞ un cert angle d'atac per la part inferior, apareix sobre la part superior del perfil un punt d'estancament abans del punt de fuga que forçaria el fluid a resseguir la vora afilada posterior. Com que aquesta situació de reflux a la vora de fuga no és sostenible en presència de viscositat, la capa límit que progressa sobre la part inferior del perfil se'n desprèn just a la vora de fuga, i produeix un vòrtex que interacciona amb el flux potencial superior i arrossega amb si el punt d'estancament cap endavant. El nou flux a la regió potencial ara té una circulació que coincideix amb la que ofereix la teoria potencial, amb la condició que s'aconsegueixi una situació en què el punt d'estancament superior coincideixi amb el punt de fuga (condició de Kutta-Joukowski). En conseqüència, el procés pel qual es genera circulació està relacionat amb la descàrrega de vorticitat en el fluid que s'allunya del perfil i, com que el disseny del perfil fa que sigui positiva, la circulació resident sobre el perfil ha de ser negativa perquè es compensin. Aquest és el fonament de la generació de sustentació.

En conseqüència, la circulació recollida en el quadrant ABEF de la figura 4.3 coincideix amb la que proporciona la teoria ideal quan es verifica la condició de Kutta-Joukowski. La magnitud d'aquesta circulació depèn de la forma del perfil; de l'angle d'atac, α , de la velocitat no pertorbada, v_∞ , i de la corda del perfil, l , segons una relació general del tipus: $\Gamma = f(v_\infty, \rho, l, \sin(\alpha), \text{geometria del perfil})$, (v. figura 4.4). Els àleps dels rotors axials es construeixen conforme a geometries estàndard proporcionades per diversos instituts normalitzadors⁶ i, que per norma general, inclouen la curvatura de l'àlep, y/l , i el gruix e/l , en funció de la corda adimensional, x/l .

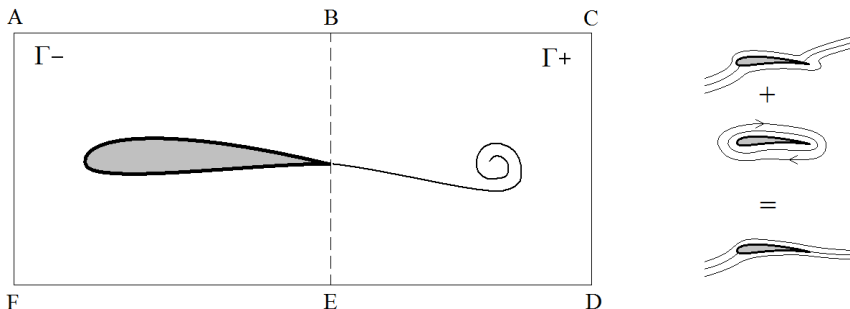


Figura 4.3. Generació de circulació al voltant d'un perfil alar bidimensional. D'acord amb el teorema de Kelvin, la circulació al voltant del circuit BCDE que envolta el deixant (positiva) es compensa exactament per la circulació al voltant del circuit ABEF que envolta l'ala (negativa). El moviment del fluid al voltant del perfil és la superposició de dos: un flux potencial amb un punt d'estancament sobre la superfície superior del perfil i anterior a la vora de fuga, i una circulació neta negativa al voltant d'aquesta.



La clau per aconseguir una sustentació adequada és dissenyar el perfil de manera que s'eviti la separació de la capa límit superior abans de la vora de fuga, per a això es redueix el gradient advers de pressió mitjançant perfils allargats, que acaben per generar un deixant molt prim. Això no és possible per a qualsevol angle d'atac, perquè el perfil entra en pèrdua per a angles més grans a un crític determinat, a partir del qual es produeix la separació de la capa límit. De fet, encara que la teoria ideal suposi una resistència nul·la a l'avanç i aquesta condició es verifiqui, aproximadament, quan les capes límits són estretes al voltant del perfil, la veritat és que sempre hi ha certa resistència en la direcció de v_∞ . La magnitud d'aquesta resistència pot ser del mateix ordre que la sustentació, i fins i tot més gran, quan la capa límit superior es desprèn del perfil abans de la vora de fuga.

En resum, la força de sustentació sobre el perfil s'obté de la teoria de Kutta-Joukowski i té per valor:

$$F_L = \rho v_\infty \Gamma \quad [4.5]$$

per unitat d'envergadura o ample de perfil. Es demostra que $F_L \cdot v_\infty = 0$, per això aquesta força és perpendicular a la direcció de la velocitat incident no pertorbada pel perfil, i el seu sentit ve determinat per la forma vectorial de l'equació [4.5]: $F_L = \rho v_\infty \wedge \Gamma$, en què s'ha de tenir en compte que la circulació és definida positiva en sentit levogir (la circulació negativa del perfil de la figura 4.3 implica, per tant, una força sustentadora ascendent quan v_∞ es dirigeix a la dreta).

La força total que actua sobre el perfil en presència de resistències a l'avanç es mostra a la figura 4.4 i resulta de la suma vectorial següent:

$$F = F_L + F_D = F_L \mathbf{j} + F_D \mathbf{i} \quad [4.6]$$

Totes dues components, F_L i F_D , es calculen, a la pràctica, mitjançant coeficients adimensionals, C_L i C_D , de sustentació (*lift*) i arrossegament (*drag*), respectivament, definits a partir de:

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2} C_L \rho l v_\infty^2 \\ F_D &= \frac{1}{2} C_D \rho l v_\infty^2 \end{aligned} \quad [4.7]$$

En general, aquests coeficients són una funció $C_i(\varepsilon/l, \rho l v_\infty / \mu, \alpha)$; però, com que en les condicions normals de treball el número de Reynolds és molt elevat i l'acabat superficial dels àleps és prou llis, sovint d'interpreten de la forma $C_i(\alpha)$ mitjançant funcions tipus com les de la figura 4.5. Quan tots dos coeficients es representen en un mateix gràfic, s'observa que hi ha un angle d'atac òptim que fa màxim el quocient C_L/C_D i s'aconsegueix la millor relació entre sustentació i empenta. No és casualitat que a aquest angle se l'anomeni *angle de planeig*,⁷ $\lambda^* = \text{tg}^{-1}(C_D/C_L)_{\min} \approx (C_D/C_L)_{\min}$, ja que en realitat és l'angle que formen F_L i F en condicions ideals de vol.

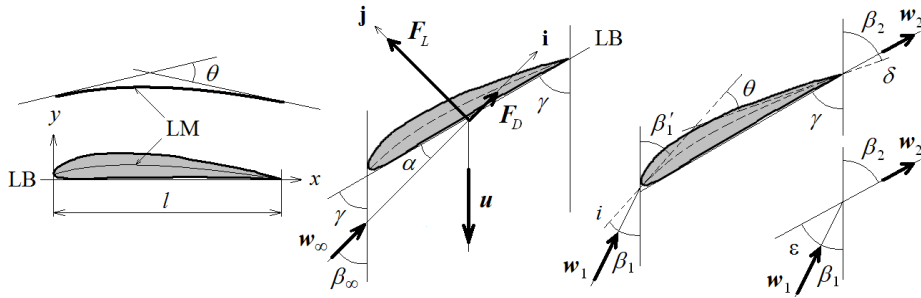


Figura 4.4. Geometria normalitzada estàndard, forces generades en un perfil alar i paràmetres característics. Es defineixen: l , corda; LB, línia base; LM, línia mitjana; θ , angle d'atac; γ , angle de calat o de calatge de l'alep; θ , angle de curvatura; ε , deflexió experimentada pel corrent; i , angle d'incidència; δ , angle de desviació, o diferència entre l'angle geomètric de l'alep a l'entrada (β_1') i l'angle d'entrada del flux relatiu (β_1); δ , angle de desviació, o diferència entre l'angle geomètric de l'alep a la sortida (β_2') i l'angle del corrent a la sortida (β_2). D'aquestes definicions, es dedueix que $\varepsilon = \beta_2 - \beta_1'$; $\theta = \beta_2' - \beta_1'$ y $\varepsilon = \theta - i + \delta$. En algunes referències dedicades a les màquines axials, els angles es defineixen respecte de la direcció axial.

El desenvolupament anterior ofereix valors de sustentació bastant aproximats a l'experiència si les ales són prou llargues i estan aïllades. No obstant això, quan es pren en consideració el moviment complet al voltant d'una cascada d'aleps, no es poden obviar ni la influència de la resta d'aleps ni la possible variació de la circulació generada en seccions longitudinals diferents de l'alep. Aquest últim efecte pot ser conseqüència del canvi gradual de la forma i la mida del perfil (i , per tant, dominant en la fase de disseny del rotor) o de les característiques del flux incident (especialment, per a condicions de treball variables o fora de disseny), i fa que la circulació evolucioni des del valor màxim fins al mínim, que és zero i es troba a l'extrem de l'alep, on la secció és nul·la. Resulta, llavors, que el gradient de la circulació al llarg de l'alep origina el despreniment local de remolins, de manera que la seva intensitat iguala la diferència de circulació entre seccions adjacents. La presència d'aquests remolins induïx l'aparició d'una velocitat relativa al perfil que modifica la direcció de la velocitat incident i canvia el valor de la circulació obtinguda mitjançant la teoria bidimensional.

L'energia d'aquests remolins es dissipa aigües avall del perfil i repercuteix en el funcionament de les turbomàquines fent disminuir el rendiment i variant el camp de pressions i velocitats. Per això el disseny nominal de moltes màquines s'aborda de manera que la circulació generada sobre el perfil sigui constant al llarg dels aleps, de manera que tota la vorticitat d'aquests remolins es concentri a l'extrem i no afecti el flux principal⁸ La circulació que hi ha al remolí de sortida és, doncs, la mateixa que la que hi ha a sobre de qualsevol secció del perfil i el seu nucli és una regió rotacional on la viscositat és important.

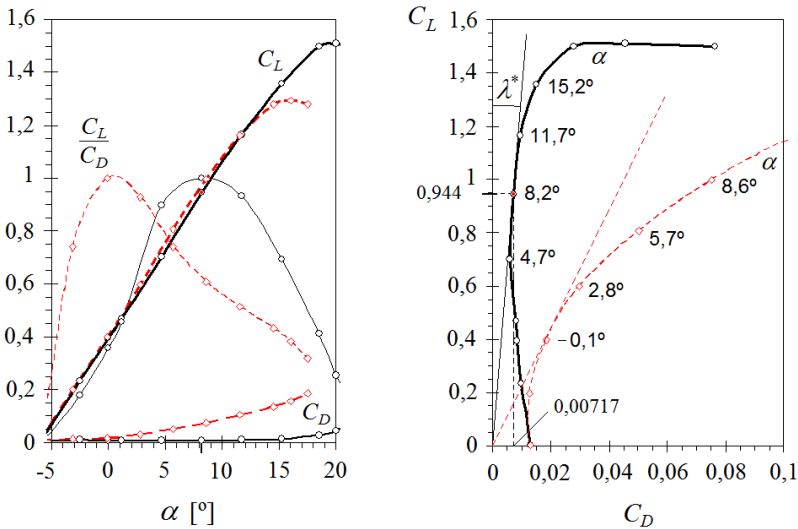


Figura 4.5. Corbes C_L , C_D i polar típiques d'un perfil alar aïllat ($l/t = 0$, corbes contínues) i en una cascada ($l/t = 1/5$, corbes a traços). La relació entre la corda i el pas entre perfils, $s = l/t$, s'anomena solidesa de la cascada. La relació C_L/C_D s'ha normalitzat amb el seu màxim (que és diferent en cada cas). La corba polar de la dreta mostra que λ augmenta a la cascada quan augmenta C_D . Valors de referència per al perfil Göttingen 682.

La majoria d'aquests efectes només es poden estudiar amb una perspectiva tridimensional. No obstant això, s'obté una interpretació prou precisa del funcionament d'una cascada axial d'àleps si se suposa que el flux queda circumscrit en superfícies de corrent cilíndriques. Llavors, es pot desenvolupar linealment la cascada d'àleps situada a un radi concret per a la qual la velocitat perimetral, u , és constant i en què se suposa que la velocitat axial, c_z , es manté per continuïtat (sent, a més, $c_z = w_z$). Les característiques geomètriques d'una cascada lineal i les velocitats corresponents són les que es mostren a la figura 4.6.

És possible relacionar l'efecte que una cascada lineal té sobre la variació de la quantitat de moviment del flux que la tra

vessa per mitjà dels coeficients equivalents, C_L i C_D , del perfil en la cascada i la seva capacitat de generar sustentació en els àleps.⁹ Per començar, és necessari convenir que la velocitat no pertorbada v_∞ de la teoria de Kutta-Joukowski és, en aquest cas, la velocitat mitjana vectorial entre les velocitats relatives del fluid a l'entrada i a la sortida de l'àlep, és a dir, $2w_\infty = w_1 + w_2$. És fàcil comprovar que aquesta velocitat també és:

$$w_\infty = w_z \mathbf{z} - w_{\infty,u} \boldsymbol{\theta} \quad (4.8)$$

$$w_{\infty,u} = \frac{1}{2}(w_{1u} + w_{2u})$$

la direcció de la qual està definida per un angle β_∞ que compleix la relació:¹⁰



$$\frac{1}{\operatorname{tg} \beta_\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) = \frac{w_{\infty,u}}{w_z} = \frac{w_{\infty,u}}{w_{\infty,z}} \quad [4.9]$$

Es dedueix de la figura 4.6 que el mòdul de la circulació de la velocitat entorn d'un àlep al llarg d'una línia tancada formada per dues línies de corrent mitjanes LC i la projecció de la velocitat en direcció perimetral a les seccions d'entrada i sortida és:¹¹

$$\Gamma = \frac{2\pi r}{z} (w_{1u} - w_{2u}) = t(w_{1u} - w_{2u}) = tw_z \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) \quad [4.10]$$

en què z és el nombre d'àleps i t és la seva separació, pas o llum, en el radi r .

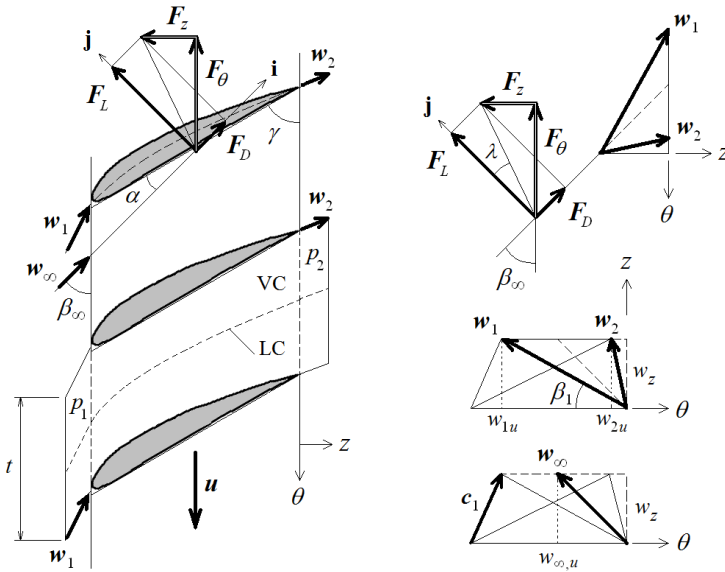


Figura 4.6. Cascada lineal d'àleps en eixos (θ, z) , triangles de velocitats i forces generades.

La força de sustentació generada pel flux potencial és perpendicular a la direcció de la velocitat incident i , com que no és axial en una cascada d'àleps en moviment, tal com s'observa a la figura 4.6, resulta que sobre el perfil apareix una component projectada en direcció perimetral, F_θ , encara que el fluid sigui ideal i F_D sigui nul·la. Observem, a la mateixa figura, el sentit de variació dels mòduls d'aquestes forces quan es té en compte l'efecte de la força resistiva, F_D . Queda clar que la fricció sobre l'àlep augmenta el parell necessari (augment de F_θ) i disminueix la diferència de pressió a través de la cascada (disminució de F_z), de manera que augmenta la resistència del perfil i es consumeix més potència.

Aplicant el principi de conservació de la quantitat de moviment en forma integral al volum de control VC d'ample t i profunditat unitària indicat a la figura 4.6, s'obté:



$$\begin{aligned} F_z &= t(p_2 - p_1) \\ F_\theta &= t\rho w_z(w_{1u} - w_{2u}) \end{aligned} \quad [4.11]$$

sent a més:

$$\begin{aligned} F_L &= F_\theta \sin \beta_\infty + F_z \cos \beta_\infty \\ F_D &= F_\theta \cos \beta_\infty - F_z \sin \beta_\infty \end{aligned} \quad [4.12]$$

D'altra banda, l'equació de Bernoulli [4.89] en coordenades relatives al rotor en el cas que $u_1 = u_2$, tenint en compte [4.8] i que:

$$\begin{aligned} w_1^2 &= w_{1z}^2 + w_{1u}^2 \\ w_2^2 &= w_{2z}^2 + w_{2u}^2 \end{aligned} \quad [4.13]$$

permet deduir que la caiguda de pressió a causa dels efectes viscosos és:

$$\Delta p_f = (p_1 - p_2) + \rho w_{\infty, u}(w_{1u} - w_{2u}) = \frac{1}{2} \rho w_\infty^2 \xi \quad [4.14]$$

en què s'ha introduït el coeficient de pèrdues, ξ . Combinant tots dos resultats i l'equació [4.9], s'obté:

$$\begin{aligned} F_L &= t\rho w_z^2 \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) \frac{1}{\sin \beta_\infty} - t\Delta p_f \cos \beta_\infty \\ F_D &= t\Delta p_f \sin \beta_\infty \end{aligned} \quad [4.15]$$

i

$$\begin{aligned} C_L &= 2 \frac{t}{l} \sin \beta_\infty \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) - \frac{C_D}{\operatorname{tg} \beta_\infty} \\ C_D &= \xi \frac{t}{l} \sin \beta_\infty \end{aligned} \quad [4.16]$$

Aquestes expressions relacionen les forces de sustentació i d'arrossegament equivalents amb els angles del corrent, el seu cabal (w_z) i les pèrdues de pressió en la cascada. Recuperant ara la circulació [4.10], es conclou per fi que:

$$F_L = \rho w_\infty \Gamma - \frac{F_D}{\operatorname{tg} \beta_\infty} \quad [4.17]$$

Aquesta equació es redueix, en una cascada sense pèrdues, al teorema de Kutta-Joukowski per al flux potencial, i d'aquí la definició de w_∞ . D'altra banda, quan no hi ha pèrdues, es dedueix amb [4.7] i [4.10] que:

$$C_L = \frac{\rho w_\infty \Gamma}{\frac{1}{2} \rho l w_\infty^2} = 2 \frac{t}{l} \frac{w_{1u} - w_{2u}}{w_\infty} \quad [4.18]$$

resultat que es relaciona a continuació amb l'energia per unitat de massa comunicada pel rotor axial en condicions ideals.



La força per unitat d'ample que fa parell, F_θ , és, amb [4.10] i [4.11]:

$$F_\theta = \frac{1}{2} C_L l \rho w_z w_\infty = \rho w_z \Gamma \quad [4.19]$$

de manera que el parell comunicat per tots els àleps entre el cub i la punta és:

$$M_R = z \int_{R_c}^{R_p} \rho w_z \Gamma r dr = \frac{z \rho}{2\pi} \int_0^{Q_R} \Gamma dQ_R \quad [4.20]$$

Si, a més, $\partial\Gamma/\partial r = 0$, llavors:

$$M_R = z \frac{\rho Q_R}{2\pi} \Gamma \quad [4.21]$$

equació que coincideix amb [4.4], perquè aquí la circulació és la d'un sol àlep.

Aquest desenvolupament ha permès establir la relació dels coeficients efectius de sustentació i arrossegament del perfil, C_i , amb el coeficient de pèrdues i la deflexió del corrent, és a dir, amb la variació de la velocitat perimetral, w_u , i es pot utilitzar per aproximar el flux real en una turbomàquina axial i estimar l'empenta desenvolupada pels àleps. L'energia comunicada pel rotor serà una conseqüència directa del parell induït per la cascada com a resultat de la sustentació (o de la circulació) generada en els àleps.

4.1.4 Equacions d'Euler per a turbomàquines

Si es multiplica l'equació [4.3] per les revolucions de l'eix i es divideix pel flux màssic circulant a través del rotor, s'obté:

$$Y_{i,\infty} = u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u} = \frac{\omega}{2\pi} (\Gamma_2 - \Gamma_1) = \frac{M_R \omega}{\rho Q_R} \quad [4.22]$$

Aquestes equacions són vàlides per a màquines radials, axials i mixtes, i permeten obtenir el treball específic de la màquina coneguts els triangles de velocitats o la circulació en les seccions d'entrada i sortida del rotor. La primera igualtat és la coneguda equació d'Euler per a les turbomàquines i defineix l'energia comunicada a la unitat de massa de fluid en el supòsit teòric unidimensional, segons el qual la velocitat és uniforme i presenta simetria polar, cosa que equival a considerar que el nombre d'àleps és infinit.¹² La segona igualtat posa de manifest que el fluid només pot intercanviar energia amb el rotor si hi ha un canvi en la seva circulació.

Aplicant el teorema del cosinus als triangles de velocitats de la figura 4.1, es dedueix que:

$$2u_i c_{iu} = c_i^2 + u_i^2 - w_i^2 \quad [4.23]$$

de manera que l'expressió [4.22] es pot escriure com:

$$Y_{i,\infty} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \quad [4.24]$$



que és una altra forma de l'equació fonamental d'Euler. Evidentment, el primer terme de la dreta és l'increment d'energia cinètica teòric que experimenta el fluid en el rotor, de manera que la suma dels altres dos termes, fins i tot avaluats en funció de dues velocitats, representa l'increment d'energia estàtica teòric, que en el cas incompressible permet escriure:

$$Y_{t,\infty} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} \quad [4.25]$$

Aquesta és l'equació de Bernoulli generalitzada per al cas d'una turbomàquina en un sistema de referència fixat a terra. Aquestes equacions justifiquen la presència de difusors a l'interior de la màquina, perquè l'increment d'energia cinètica a través del rotor no coincideix, en general, amb el que s'observa des del sistema entre les brides d'entrada i sortida de la màquina [3.11].

4.1.5 Discussió de les equacions d'Euler

Les equacions anteriors mereixen una discussió una mica més àmplia que expliqui com la forma dels triangles de velocitats condiciona el funcionament de la màquina, el cabal i l'energia transferida. Més endavant es tornarà sobre aquests temes i d'altres, però de moment s'indiquen algunes pautes que ajudaran a entreveure'n la importància.

Per començar, l'equació [4.24] ensenya que l'increment d'energia estàtica en una bomba rotodinàmica és conseqüència de dos efectes deguts al moviment respecte a un sistema de referència solidari del rotor: d'una banda, a la contribució derivada de la força centrífuga:

$$\left[\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right]_u = \int_1^2 \omega^2 r dr = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \quad [4.26]$$

que es podria interpretar com l'increment de pressió (en termes d'energia per unitat de massa) que s'observaria entre (1) i (2) si el rotor estigués tancat, ple de fluid (incompressible) i, alhora, girés sobre el seu eix, i, de l'altra, a la difusió de la velocitat relativa en el canal format entre dos àleps i les parets laterals del rotor, siguin fixes o mòbils (últim terme de [4.24]). El primer d'aquests efectes és fonamental en les màquines centrífugues perquè aporta la major part de l'energia estàtica generada en el rotor.

Perquè la difusió de la velocitat relativa indueixi un augment gradual de la pressió estàtica a través del rotor, ha de ser, evidentment, $w_1 > w_2$, de manera que el canal entre àleps ha d'augmentar de secció en la direcció meridiana. Aquest increment de pressió estàtica és fonamental a les màquines axials en què el flux transcorre bàsicament en superfícies cilíndriques, però no obstant això, està subjecte a altres condicionants relatius al desenvolupament òptim de les capes límits sobre els àleps, que en limiten el valor.



L'equació [4.22] en un rotor axial en què $u_1 = u_2 = u$ es pot escriure de la forma:

$$Y_{t,\infty} = u(c_{2u} - c_{1u}) = u(w_{1u} - w_{2u}) \quad [4.27]$$

que, juntament amb [4.18], permet escriure:

$$Y_{t,\infty} = \frac{1}{2} C_L \frac{l}{t} u w_\infty \quad [4.28]$$

i relacionar l'energia mecànica transmesa amb el coeficient de sustentació dels àleps i la seva envergadura. La capacitat d'aquestes màquines de comunicar energia i transmetre parell es basa en la generació de sustentació en el perfil, i queda compromesa si el flux relatiu es desprèn dels àleps, cosa que, en termes aerodinàmics, limita la seva curvatura. En conseqüència, els angles β_1 i β_2 no poden ser molt diferents, fet que, segons [4.16], limita al seu torn el coeficient de sustentació efectiu i, amb [4.28], l'energia màxima que es pot obtenir. A més, com que es verifica que:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \quad [4.29]$$

resulta que totes dues velocitats tampoc poden ser molt diferents en magnitud i la difusió relativa, en el seu cas, implica necessàriament que $\beta_1 < \beta_2$ (v. figures 4.1 o 4.11).

Respecte de l'equació [4.22], és evident que el terme a l'entrada resta energia quan és positiu ($c_{1u} > 0$), fet que és poc interessant a priori. Quan el fluid presenta prerotació positiva a l'entrada, el parell comunicat disminueix per a un mateix cabal i una mateixa c_2 de sortida, cosa que es tradueix en una disminució de la curvatura de la línia de corrent absolut. D'altra banda, la prerotació negativa ($c_{1u} < 0$) per a un mateix cabal i velocitat d'arrossegament, tot i que en principi contribueix a augmentar el parell teòric comunicat, disminueix l'angle d'entrada relatiu, això redueix la secció del canal d'entrada i augmenta considerablement la velocitat relativa i les pèrdues. Totes aquestes circumstàncies s'observen a l'esquerra de la figura 4.7.

El disseny de moltes bombes centrífugues s'aborda sota la hipòtesi d'entrada radial, és a dir, $c_{1u} = 0$ i $c_1 = c_{1m}$, condició de compromís que sol passar quan el conducte d'aspiració està ben dissenyat, i que imposa un angle β_{10} als àleps per a una u_1 i un cabal donats. En el cas unidimensional, aquest angle compleix la igualtat:

$$\operatorname{tg} \beta_{10} = \frac{c_{1m}}{u_1} \quad [4.30]$$

i és avaluat per al cabal de disseny.¹³ Quan s'admet que l'entrada és radial, l'energia teòrica només depèn de les variables a la sortida i l'equació [4.22] se simplifica a:

$$Y_{t,\infty} = u_2 c_{2u} = u_2 \left(u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) \quad [4.31]$$



d'on es pot aïllar β_2 en funció de l'energia específica i del cabal desitjats en una màquina de velocitat perifèrica u_2 . Es podria pensar ara que, amb angles β_2 grans (fins i tot per a tangents negatives), s'obtidria un increment d'energia útil més gran en augmentar c_{2u} , però de nou apareixen dificultats tècniques que inhibeixen aquesta possibilitat a la pràctica.

L'augment indiscriminat de β_2 en una bomba centrífuga implica l'augment de la velocitat absoluta a la sortida del rotor, c_2 , fet que també suposa un augment de les pèrdues i l'aparició d'altres efectes contraproductius (certa tendència a la inestabilitat del funcionament de la bomba, augment del soroll fluidodinàmic, més desgast dels conductes posteriors, pèrdues per xoc a la cambra espiral, etc.). A més, el canal relatiu dins del rotor es torna sinuós, de manera que el flux relatiu real es pot desprendre de les parets i disminuir la seva efectivitat fora del punt de disseny.¹⁴

Amb l'objectiu de reduir al mínim les pèrdues superficials i de forma en el rotor radial, el canal del corrent relatiu format per dos àleps consecutius no pot tenir qualsevol forma. Si l'angle β_2 per a un β_1 donat fos molt petit, amb $\beta_2 > \beta_1$, resultaria un conducte equivalent excessivament llarg, el radi hidràulic del qual per a un nombre concret d'àleps disminuiria (totes dues circumstàncies augmentarien les pèrdues superficials en el mateix). Si β_2 fos massa gran, en canvi, el conducte equivalent presentaria un angle de difusió excessiu, de manera que augmentarien les pèrdues de forma. Aquestes circumstàncies suggereixen que ha d'haver-hi un angle β_2 òptim, des d'aquest punt de vista.

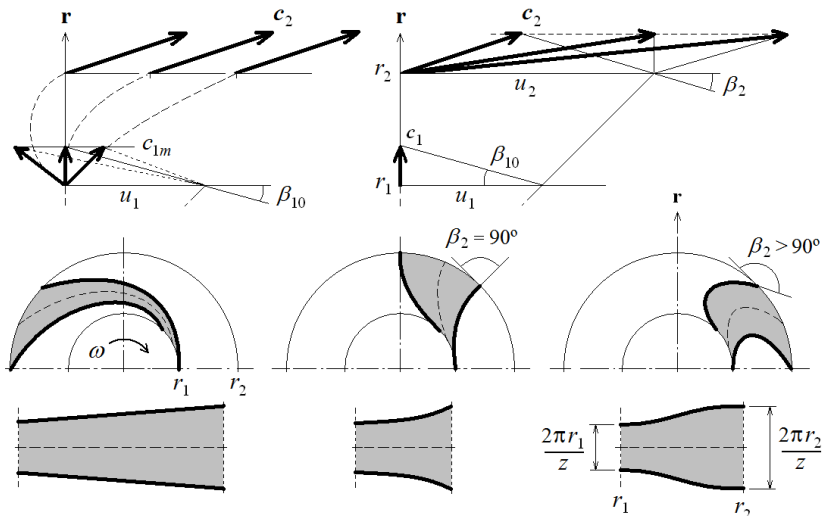


Figura 4.7. Efecte dels angles β_1 i β_2 en els triangles de velocitats i en la forma del canal entre àleps d'una bomba centrífuga. A dalt a l'esquerra, s'observa l'efecte de la prerotació sobre la curvatura de la línia de corrent absolut, per a un mateix cabal i velocitat c_2 . A dalt a la dreta es pot veure l'efecte que té l'augment de l'angle de sortida sobre la velocitat c_2 , en el cas d'entrada radial. A baix, es mostra la forma del conducte relatiu respecte a la seva generatriu per a diferents valors de β_2 .



Si, en el rotor d'una bomba axial en què es compleix que $c_{2m} = c_{1m} = c_m$ i $u_2 = u_1 = u$, se suposa, a més, que $Y_{t,\infty} = u(c_{2u} - c_{1u})$ és constant en totes les seccions cilíndriques a través del rotor, resulta que ha de ser-ho també $r(c_{2u} - c_{1u}) = C_0$ al llarg del radi. Això té una conseqüència important en el cas d'entrada radial o quan el flux a l'entrada és irrotacional, perquè en tots dos casos tenim $rc_{1u} = C_1$ i, llavors, rc_{2u} ha de ser igual a una altra constant C_2 , funció de les dues primeres. Aquestes consideracions permeten deduir l'evolució dels angles relatius a l'entrada i a la sortida dels àleps amb el radi, que, en general, ve donada per l'expressió:

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{c_m}{u - c_{iu}} = \frac{rc_m}{\omega r^2 - C_i} \propto \frac{1}{r} \quad [4.32]$$

la dependència radial del qual condiciona la seva orientació respecte al corrent i la seva envergadura.

Tal com s'ha indicat abans, els angles relatius en una màquina axial estan condicionats pel flux a través del perfil de l'àlep, la seva sustentació aerodinàmica i l'increment de pressió a causa de la difusió relativa. En el cas d'un conjunt rotor-estator dissenyat de manera que $\alpha_1 \equiv \alpha_4$, l'augment d'energia mecànica específica total es deu només a la diferència de pressions, ja que llavors l'energia cinètica a l'entrada del rotor coincideix amb la que surt de l'estator (la missió bàsica del qual serà difondre l'energia cinètica produïda en el rotor). Aquesta anàlisi s'ha de completar introduint el grau de reacció del rotor.

Per concloure aquest apartat, es comenta un resultat ja derivat de l'anàlisi dimensional i que és vàlid tant per a màquines axials com radials. És evident que la velocitat perifèrica a la sortida del rotor, u_2 , té un paper molt important en l'energia comunicada. Com que $u_2 = \omega r_2$, l'equació [4.31] indica que una màquina petita pot comunicar la mateixa energia per unitat de massa que una altra de més gran si és més ràpida, cosa que ja de per si marca una tendència de disseny industrial. A més, mentre que la dependència del cabal amb u_2 és lineal, s'observa d'aquesta equació que la de l'energia és quadràtica i, en conseqüència, la de la potència, cúbica.

El cabal és proporcional a l'altura del triangle de velocitats i aquesta és proporcional a u_2 en triangles semblants. No es pot afirmar, en canvi, que dues màquines a escala dimensional però amb idèntica u_2 tinguin triangles semblants perquè, en general, la seva altura serà diferent i també els angles del flux. En aquest cas, es diu que hi ha semblança geomètrica però no cinemàtica, per això la semblança no és completa entre les dues màquines i les relacions donades per al cabal, l'energia i la potència en funció de la velocitat de gir no seran vàlides.

4.2 Característiques teòriques i grau de reacció

L'equació [4.31], juntament amb la [3.19], suggereixen que hi ha una relació funcional entre l'energia teòrica comunicada pel rodet i el cabal que el travessa. Suposada



una superfície de corrent en què hi ha simetria polar en les velocitats i aquestes últimes són uniformes, el desenvolupament de cadascun dels termes de l'equació [4.22] porta a:

$$Y_{i,\infty} = u_2 \left(u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) - u_1 \left(u_1 - \frac{c_{1m}}{\operatorname{tg} \beta_1} \right) \quad [4.33]$$

Aquesta equació es pot utilitzar, evidentment, tant a les bombes radials com a les axials, però mentre que a les radials s'admet que totes les superfícies de corrent són iguals en absència d'efectes viscosos, ja que l'ample del canal, b , és reduït, a les màquines axials les superfícies de corrent varien amb el radi i el flux que hi hagi no es podrà suposar igual.

4.2.1 Rodet radial simple

Utilitzant l'equació [3.19] per al cas d'un rodet radial d'amples b_1 i b_2 a les seccions d'entrada i sortida, on la velocitat meridiana se suposa uniforme, i menyspreant el gruix dels àleps, s'arriba a:

$$Y_{i,\infty} = (r_2^2 - r_1^2) \omega^2 - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{b_2 \operatorname{tg} \beta_2} - \frac{1}{b_1 \operatorname{tg} \beta_1} \right) \omega Q_R \quad [4.34]$$

En aquesta fórmula, Y , Q i ω són variables de funcionament, mentre que la resta són paràmetres dimensionals constants. Es dedueix que la relació teòrica entre les variables de funcionament és del tipus: $Y = A\omega^2 - B\omega Q$, d'on se segueix que, a velocitat constant, la relació energia-cabal és una línia recta que creua l'eix de les abscisses en el cabal:

$$Q_R^0 = 2\pi \frac{r_2^2 - r_1^2}{\left(\frac{1}{b_2 \operatorname{tg} \beta_2} - \frac{1}{b_1 \operatorname{tg} \beta_1} \right)} \omega = \frac{A}{B} \omega \quad [4.35]$$

i es desplaçarà tant a la dreta com més gran sigui la velocitat de gir. De manera anàloga, l'equació [4.34] indica que l'ordenada a l'origen d'aquesta relació creix de manera quadràtica amb ω , de manera que el pendent de la recta característica es torna més vertical a mesura que la velocitat de l'accionament augmenta.¹⁵

Encara que la característica real d'una turbomàquina és ben diferent de la teòrica, totes dues estan relacionades i, en general, es comprova que la incidència sobre la característica real d'alguns paràmetres dimensionals del rotor passa en el mateix sentit que la que resulta de l'anàlisi teòrica. El lector pot reproduir fàcilment aquest exercici per a una bomba centrífuga i comprovar que aquesta incidència és la que presenta la figura 4.8.

Tenint en compte que el flux axial que es dona en un conducte d'aspiració ben dissenyat no genera vorticitat $\Omega_{c,z}$ per si mateix (v. equacions [4.76] i [4.77] en aquest mateix tema), el fluid arriba al rotor sense component giratòria, tret que la bomba



incorpori algun dispositiu en el conducte d'entrada que indueixi prerotació. Per tant, i com ja s'ha justificat, la condició d'entrada radial és la hipòtesi de disseny més satisfactòria possible, per a la qual, a més, la característica teòrica se simplifica en eliminar els paràmetres d'entrada (el dimensionament de la qual s'haurà de fer sobre la base d'altres criteris). Quan es fa servir la fórmula [4.31], i no la [4.22], per referir l'altura teòrica de la bomba, la relació entre l'energia teòrica de la teoria d'Euler i el cabal en funció dels coeficients d'energia, ψ , i velocitat, φ , d'un rotor radial s'escriu:

$$\psi = \frac{Y_{t,\infty}}{u_2^2} = \frac{c_{2u}}{u_2} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \frac{c_{2m}}{u_2} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \varphi \quad [4.36]$$

La influència de la possible prerotació d'entrada en forma de vòrtex lliure s'introdueix fàcilment fent:

$$Y_{t,\infty} = (r_2^2 \omega^2 - \omega C_1) - \frac{\omega}{2\pi b_2 \operatorname{tg} \beta_2} Q_R \quad [4.37]$$

que dona lloc a un conjunt de rectes d'identíc pendent, però diferent ordenada a el origen (suposada una prerotació constant). Per al cas més general en què C_1 sigui nul, aquesta equació suggereix que, per obtenir una determinada energia teòrica, Y_0 , i cabal, Q_0 , en diferents màquines centrífugues d'identíc diàmetre D_2 , calen diferents velocitats perimetrals en funció de l'angle β_2 ; els rotors amb àleps girats cap endavant ($\beta_2 > 90^\circ$) són els que necessiten la velocitat ω mínima. Aquesta característica pot ser interessant en el disseny d'alguns ventiladors, perquè redueix el soroll de l'accionament i el pes de l'equip.

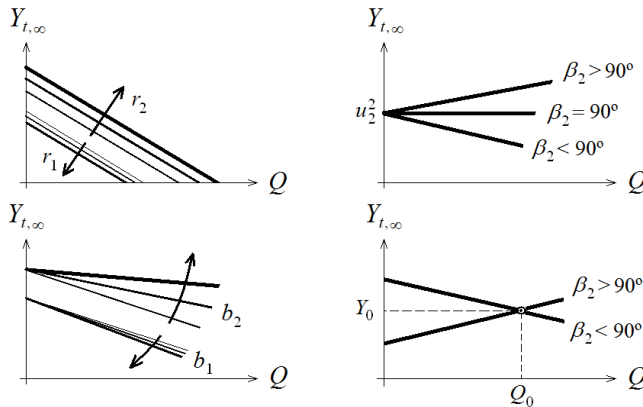


Figura 4.8. A l'esquerra es mostra la incidència qualitativa dels paràmetres dimensionals en la característica teòrica d'una bomba centrífuga. Si es mantenen constants tots els paràmetres i ω , excepte un dels diàmetres (a dalt), s'observa que el pendent de la recta es manté, però canvia l'ordenada a l'origen (que creix en augmentar r_2 i decreix quan ho fa r_1). Si, en canvi, es mantenen els diàmetres però es canvien l'ample del canal o algun dels angles (a baix), llavors el pendent canvia, però no l'origen de la recta. Notem que la influència dels paràmetres d'entrada és menor que la dels de sortida. A la dreta, l'efecte de l'angle β_2 en la característica teòrica, en el supòsit d'entrada sense gir.



La hipòtesi d'entrada sense gir porta a un angle β_{10} per als àleps, avaluat amb [4.30] per al cabal de disseny, Q_0 , i una velocitat absoluta d'entrada, c_{1m} . És interessant notar que és inevitable que hi hagi una pèrdua sistemàtica a l'entrada d'un rotor radial quan es manté aquesta condició per a altres cabals, Q . En efecte: una velocitat absoluta d'entrada, c^i , diferent de la c_{1m} de disseny, induïx una velocitat relativa d'incidència, w^i , que tindrà una direcció β^i diferent a la marcada per β_{10} . La diferència vectorial entre la velocitat relativa esperada per a aquest cabal en la direcció β_{10} , w_1 , i la relativa d'incidència, comporta l'aparició de dos vectors d'adaptació de la velocitat w^i , un de perpendicular a l'àlep i un altre en la seva mateixa direcció, que suposen, respectivament, una pèrdua per xoc i una altra que és deguda a la contracció o expansió del flux relatiu. Cal esperar que l'energia cinètica deguda a la component normal, w_n , es perdi totalment en el xoc, mentre que la contracció o expansió deguda a la component w_s suposa una pèrdua que dependrà de la forma del canal i de la seva capacitat de difusió.¹⁶ En qualsevol cas, aquesta pèrdua és singular i del tipus $k_s(Q_0 - Q)^2$, per això és mínima en el cabal de disseny.

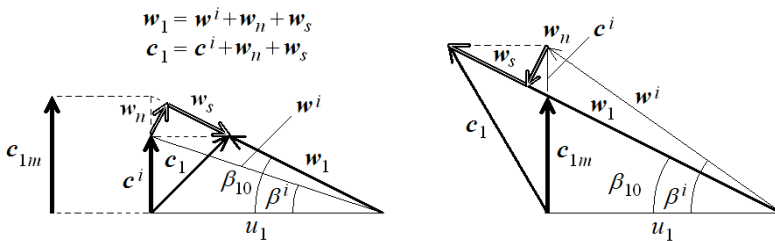


Figura 4.9. Aproximació teòrica a la pèrdua per xoc sistemàtic a l'entrada d'un rodet, encara que la velocitat absoluta d'incidència sigui radial. A l'esquerra, els triangles d'entrada en el cas en què $Q < Q_0$ i $c_1 < c_{1m}$ (expansió brusca) i, a la dreta, quan $Q > Q_0$ i $c_1 > c_{1m}$ (contracció brusca).

Aquests fenòmens a l'entrada del rotor i altres pèrdues (com la que és deguda al flux, $k_c Q^2$) justifiquen que la corba característica real d'una bomba centrífuga es distanciï de la teòrica en qualsevol supòsit, i que l'altura manomètrica d'una bomba resulti de restar a la teòrica les pèrdues per fricció i per xoc (per incidència fora del punt de disseny), en funció del cabal:

$$H_B = H_t - k_c Q^2 - k_s (Q - Q_0)^2 \quad [4.38]$$

tal com es representa a la figura 4.10. Els coeficients respectius de pèrdues, k_c i k_s , s'han de determinar experimentalment, tot i que s'han proposat diferents expressions d'estimació, entre les quals, les de Pfleiderer:

$$k_c = (1 - \eta_H) \frac{H_t}{Q_0^2} \quad [4.39]$$

$$k_s = k_H \frac{u_1^2 + (e_z u_2)^2}{Q_0^2}$$



en què k_H és un coeficient de valor aproximat 0,03 i e_2 és el coeficient de disminució del treball de l'apartat 4.2.3.

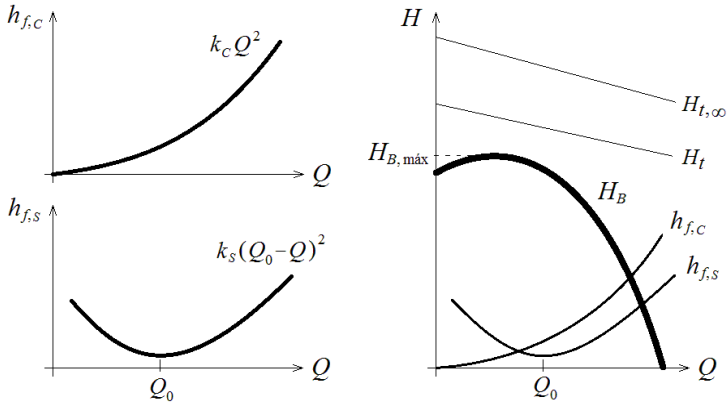


Figura 4.10. Tipologia de pèrdues hidràuliques d'una bomba. Les pèrdues associades al flux són proporcionals al quadrat del cabal i les de forma són mínimes en el punt de disseny. $H_{t,\infty}$ és l'altura teòrica en metres, corresponent a $Y_{t,\infty}$, sent $Y_{t,\infty} = gH_{t,\infty}$, $Y_t = e_2 Y_{t,\infty}$ i $Y_t = gH_t$, etc.

Com que l'energia teòrica és proporcional al cabal, l'expressió [4.38] accepta, en general, ajustos del tipus:

$$H_B = a + bQ - cQ^2 \quad [4.40]$$

Els coeficients a i c són sempre positius i el b pren valors pròxims a zero. Si b és positiu (normalment, en bombes de Ω baixa), la corba H_B té un màxim en el primer quadrant, per al qual es compleixen les condicions $Q(H_{B,m\acute{a}x}) = 0,5b/c$ i $H_{B,m\acute{a}x} = a + 0,25b^2/c$.

4.2.2 Cascada axial bàsica

L'equació [4.33] es pot fer servir sense cap ambigüitat en un rotor axial si s'introdueix el concepte de bomba parcial, que suposa un volum de control d'ample diferencial que envolti una superfície de corrent cilíndrica o troncocònica situada en un radi concret. Aquest procediment permet obtenir una corba teòrica anàloga a [4.34] per a un rotor axial, que, no obstant això, falla a l'hora de predir el comportament a cabal nul perquè condueix a estimacions del tipus $Y = B\omega Q$ quan $u_1 = u_2$, cosa que és completament irreal.¹⁷

S'obté una estimació encertada de l'altura que comunicarà un rotor axial si el plantejament anterior inclou també l'estator. L'aproximació és vàlida a un radi determinat qualsevol, però si es fa respecte del radi mitjà geomètric i se suposa que l'energia comunicada és constant en r , el resultat serà un bon indicador del funcionament de la cascada bàsica analitzada i servirà d'orientació en el disseny previ de la màquina.



En el desenvolupament que segueix, se suposa que el rotor està situat abans de l'estator, tal com apareix a la figura 4.11; que la velocitat absoluta a la sortida del rotor no experimenta variació en mòdul ni en direcció abans d'entrar a l'estator, i que la velocitat absoluta a la sortida de la cascada rotor-estator té la mateixa direcció que a l'entrada, és a dir: $\alpha_1 = \alpha_4$. Aquesta última hipòtesi implica que l'increment d'energia cinètica a través de la cascada és nul quan es manté c_m i $c_r = 0$, de manera que l'excés d'energia cinètica a la sortida del rotor es recupera a l'estator en forma de pressió. La quantitat d'energia estàtica a recuperar per l'estator depèn del grau de reacció del rotor, tal com s'explica a 4.2.4.

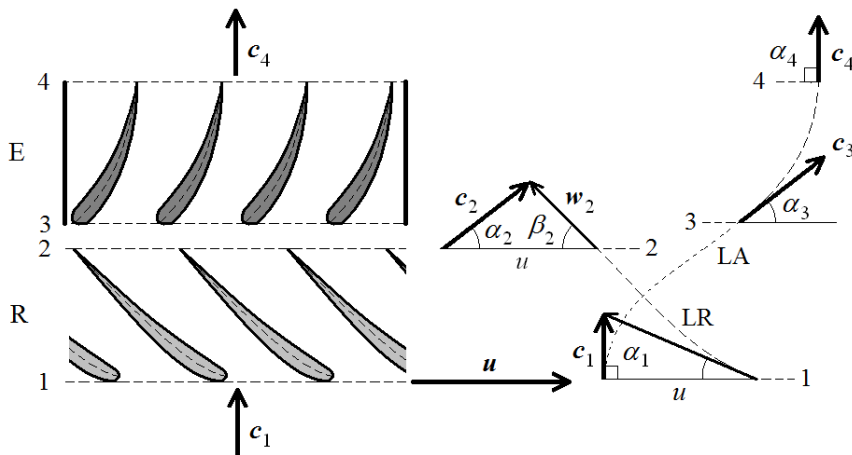


Figura 4.11. Cascada axial bàsica rotor-estator i triangles de velocitats corresponents. S'ha representat el cas $\alpha_1 = \alpha_4 = 90^\circ$, que ja s'havia fet servir a la figura 3.8, i $\alpha_2 = \alpha_3$. LA i LR són les línies de corrent absolut i relatiu.

L'increment de pressió total a través de la cascada de la figura 4.11 en el supòsit indicat s'obté aplicant les equacions de Bernoulli en coordenades absolutes a l'estator i relatives al rotor. Admetent que $u_1 = u_2$ i que la velocitat axial, c_m , es manté en r , resulta, en el cas ideal sense pèrdues:

$$\begin{aligned} p_4 - p_1 &= (p_4 - p_3) + (p_2 - p_1) = \\ &= \frac{1}{2} \rho ((c_{3u}^2 - c_{4u}^2) + (w_{1u}^2 - w_{2u}^2)) \end{aligned} \quad [4.41]$$

Com que, a més, es compleix que $c_{3u} - c_{4u} = c_{2u} - c_{1u} = w_{1u} - w_{2u}$ y $c_{3u} + c_{4u} = 2u - (w_{1u} + w_{2u})$, l'increment de pressió total és:

$$p_4 - p_1 = \rho u (c_{2u} - c_{1u}) \quad [4.42]$$

Definint ara els coeficients de pressió total, ψ , i velocitat, ϕ , de la cascada de la forma:



$$\psi = \frac{p_4 - p_1}{\rho u^2} = \frac{c_{2u} - c_{1u}}{u} \quad [4.43]$$

$$\varphi = \frac{c_m}{u}$$

i tenint en compte les identitats:

$$c_{2u} - c_{1u} = c_m \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right) \quad [4.44]$$

$$\frac{c_{2u} + w_{2u}}{c_m} = \frac{u}{c_m} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2}$$

s'arriba a la següent relació entre el coeficient de pressió i el de velocitat:¹⁸

$$\psi = 1 - \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right) \varphi = 1 - \zeta \varphi \quad [4.45]$$

Quan s'incorporen a l'anàlisi les pèrdues que es produeixen al rotor i a l'estator mitjançant els coeficients ξ_R i ξ_E de [4.14], l'increment de pressió total [4.42] queda de la manera següent:

$$p_4 - p_1 = \rho u (c_{2u} - c_{1u}) - \frac{1}{2} \rho c_m^2 \left(\frac{\xi_R}{\sin^2 \beta_{\infty,R}} + \frac{\xi_E}{\sin^2 \alpha_{\infty,E}} \right) \quad [4.46]$$

en què l'angle $\beta_{\infty,R}$ continua sent [4.9] i $\alpha_{\infty,E}$ ara és:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_{\infty,E}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_3} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_4} \right) \quad [4.47]$$

Com que se suposa que $\alpha_1 = \alpha_4$ i $\alpha_2 = \alpha_3$, l'angle mitjà del corrent absolut a l'estator s'obté, utilitzant [4.44], mitjançant l'expressió:¹⁹

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_{\infty,E}} = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c_m} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right) \quad [4.48]$$

La relació entre el coeficient de pressió i el de velocitat de la cascada amb pèrdues, quan $\xi = \xi_R = \xi_E$, resulta que és:

$$\psi = 1 - \zeta \varphi - \frac{1}{2} \xi \varphi^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \beta_{\infty,R}} + \frac{1}{\sin^2 \alpha_{\infty,E}} \right) \quad [4.49]$$

la representació gràfica esquemàtica de la qual és semblant a la que s'obté de [4.36] per a un rotor centrífug quan s'inclouen les pèrdues degudes al flux, però que depèn del radi i només és vàlida si es compleix que $\alpha_1 = \alpha_4$ i no hi ha pèrdues entre rotor i estator.

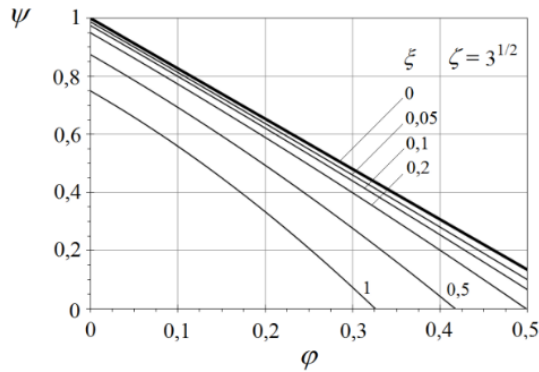


Figura 4.12. Relació [4.49] entre el coeficient de pressió i de velocitat en una cascada axial bàsica per a diferents valors de $\xi = \xi_R = \xi E$ (els valors comuns estan per sota de 0,1). S'ha suposat: $\alpha_1 = 90^\circ$ i $\beta_2 = 30^\circ$ (això implica que $\tan \beta_1 = \varphi$ i $\zeta = 3^{1/2}$).

4.2.3 Correcció clàssica de la teoria unidireccional

La corba característica real d'una bomba centrífuga s'obté de la teòrica una vegada es desfan les hipòtesis de la teoria unidimensional i s'inclouen les pèrdues hidràuliques. Definint el *coeficient de disminució del treball*, e_z , l'energia teòrica per unitat de massa s'escriu:

$$Y_t = e_z Y_{t,\infty} \quad [4.50]$$

i, amb el rendiment hidràulic, η_H , l'energia real resulta:

$$Y = \eta_H Y_t = \eta_H e_z Y_{t,\infty} \quad [4.51]$$

La seva forma característica és la de la figura 4.10.

La correcció deguda al coeficient e_z es deu al fet que el flux a l'interior del rodet no pot ser considerat unidimensional quan el nombre d'àleps no és infinit. L'equació d'Euler continua sent vàlida en absència d'esforços viscosos quan s'aplica a una línia de corrent, però com que la hipòtesi de flux congruent amb un nombre d'àleps finit no és sempre vàlida, no totes les línies de corrent comparteixen la mateixa $Y_{t,\infty}$ i l'energia comunicada no pot ser uniforme. La mitjana espacial sobre la secció on hi ha flux de cada $Y_{t,\infty}$ particular suposa una disminució de la capacitat de comunicar treball pel rotor, de manera que, en el fons, aquesta energia teòrica resultava una sobreestimació de la Y_t real. En aquest sentit, és important indicar que e_z no és un rendiment, ja que la diferència entre $Y_{t,\infty}$ i Y_t no és una energia que hagi existit mai i, per tant, no escalfarà el fluid, ni la màquina, ni suposarà una pèrdua irreversible d'energia que calgui comptabilitzar de cap manera, tret que sigui en el sentit de minoració descrit.

Per norma general, s'accepta que a les màquines axials i a les turbines hidràuliques no és necessari el factor e_z , de manera que $Y_t = Y_{t,\infty}$. Això és conseqüència que en



aquestes turbomàquines el flux segueix el contorn sense grans desviacions ni desprementiments i, sobretot, que l'estimació unidimensional concorda bastant bé amb la realitat.²⁰ No obstant això, en aquestes màquines s'ha de procurar referir les equacions d'Euler als angles del corrent i no als dels àleps, i per a això es defineixen els angles d'incidència a l'entrada i de desviació a la sortida del flux (figura 4.4). Aquests angles s'han emprat extensament per especificar les característiques de les cascades d'àleps i les seves pèrdues.

A les turbomàquines radials, el factor e_z pren valors pròxims a 0,8 i augmenta, com és natural, amb el nombre d'àleps (figura 4.13). És paradoxal adonar-nos que aquest factor és conseqüència de la falta de simetria en el flux i que és aquesta asimetria la que permet comunicar parell al rotor (v. figura 4.2).²¹ Més endavant, es detallen analíticament les característiques del flux a l'interior d'un rotor, però es pot entendre perfectament, de moment, que les seves característiques bidimensionals estan associades a l'existència d'un remolí relatiu que gira en sentit contrari a la rotació del rodets amb la intenció de preservar la irrotacionalitat del moviment. La superposició de les distribucions de velocitat associades al flux mitjà i a aquest remolí (que no aporta cabal) permet visualitzar l'asimetria i establir mètodes per quantificar-la.

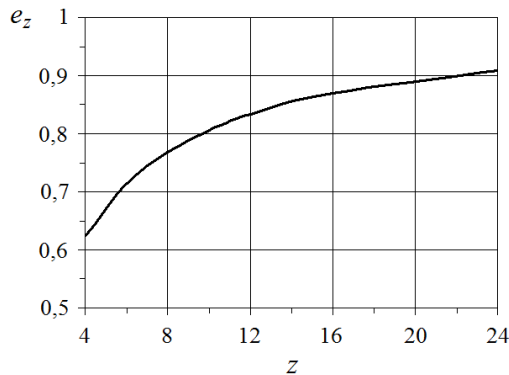


Figura 4.13. Coeficient de disminució del treball per a un rotor radial en funció del nombre d'àleps. Aquest coeficient és aproximadament constant en tots els punts de funcionament de la màquina.

S'ha de dir també que la magnitud de e_z en un rodets radial amb prou feines és afectada per la naturalesa del fluid, perquè ve determinada bàsicament per la desviació angular que experimenta el flux relatiu a causa de la rotació. És per això que, en moltes referències, el coeficient de disminució del treball s'anomena *slip factor*, perquè el fluid poc viscos sembla que llisqui en el canal entre àleps en sentit contrari a la rotació del rodets.

Entre els procediments clàssics per corregir la teoria unidimensional i obtenir un valor aproximat de e_z hi ha els de Stodola i Pfleiderer. A continuació, s'indiquen els resultats de cadascun, sense entrar en el detall de la seva deducció.



La correcció de Stodola es basa en l'estimació del decrement que experimenta la velocitat c_{2u} , en el sentit de disminuir l'angle β_2 i la circulació a la sortida, com a conseqüència del vòrtex relatiu. La velocitat perimetral estimada de la figura 4.14 resulta de:

$$c'_{2u} = c_{2u} - w_u^* \quad [4.52]$$

sent:

$$w_u^* = K_R \frac{\pi \sin \beta_2}{z} u_2 \quad [4.53]$$

i K_R un coeficient de correcció experimental que depèn del nombre d'àleps, z , i de l'angle β_2 (figura 4.15). Segons aquestes equacions, l'energia específica teòrica en el supòsit d'entrada radial és:

$$Y_t = u_2 c'_{2u} = \frac{c'_{2u}}{c_{2u}} Y_{t,\infty} \quad [4.54]$$

que, desenvolupada, condueix a:

$$Y_t = Y_{t,\infty} - K_R \frac{\pi \sin \beta_2}{z} u_2^2 \quad [4.55]$$

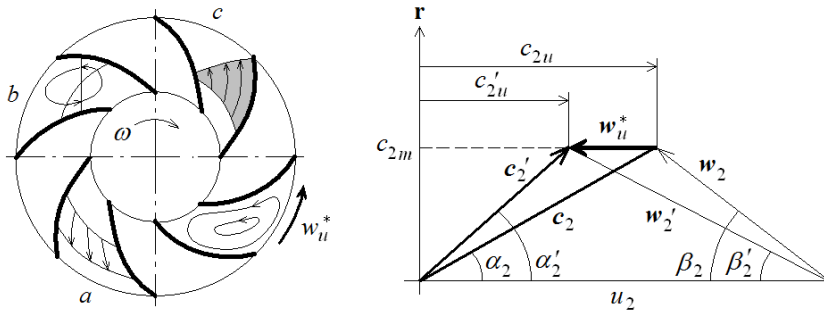


Figura 4.14. Visualització del flux relatiu no viscos a través d'un rotor radial ($a+b=c$) i sentit del decrement de la velocitat perimetral, c_{2u} , en el triangle de sortida.

El mètode de Pfleiderer estima la diferència de pressions causant del parell, en funció de les velocitats relatives a banda i banda dels àleps, per calcular després l'energia teòrica. El resultat per a un rotor radial de radis d'entrada i sortida, r_1 i r_2 , respectivament, és:

$$Y_t = \frac{1}{1 + \frac{2\psi}{z(1 - (r_1/r_2)^2)}} Y_{t,\infty} \quad [4.56]$$

en què ψ és un factor experimental de valor aproximat 1,2 que es pot estimar mitjançant la fórmula $\psi = 0,6(1 + \sin \beta_2)$.



Observem que, mentre que el mètode de Stodola prediu que la diferència entre $Y_{t,\infty}$ i Y_t és constant i independent del cabal, en el de Pfleiderer ambdues són proporcionals, així doncs $Y_{t,\infty}$ i Y_t són rectes de diferent pendent quan es representen en funció del cabal (figura 4.10).

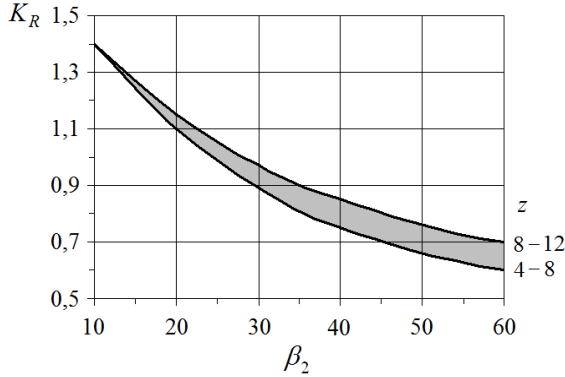


Figura 4.15. Coeficient K_R per a un rotor radial en funció de l'angle de sortida i el nombre d'àleps

4.2.4 Grau de reacció teòric d'una turbomàquina

El grau de reacció d'una turbomàquina és un paràmetre que permet destriar quina quantitat de l'energia generada per la bomba (o extreta del fluid, en el cas de les turbines) és estàtica. El grau de reacció de la teoria unidimensional per al rotor d'una turbobomba és:

$$\sigma_{t,\infty} = \frac{p_2 - p_1}{\rho Y_{t,\infty}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{Y_{t,\infty}} \quad [4.57]$$

Si l'entrada és radial i es compleix que $c_{2m} = c_{1m}$, cosa que és molt aproximat en les bombes radials i estrictament cert, de mitjana, a les axials, el flux de les quals transcorre en superfícies cilíndriques, llavors:

$$\sigma_{t,\infty} = 1 - \frac{1}{2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{u_2 c_{2u}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{c_{2u}}{u_2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \frac{c_m}{u_2} \right) \quad [4.58]$$

que, en funció dels coeficients de pressió i velocitat, és:

$$\sigma_{t,\infty} = 1 - \frac{1}{2} \psi = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \varphi \right) \quad [4.59]$$

Algunes de les conclusions que es poden extreure de les equacions [4.31] i [4.58] respecte de l'evolució de l'energia estàtica comunicada i la seva relació amb l'angle β_2 , en el cas d'entrada sense gir, ja s'han discutit en apartats anteriors. Les gràfiques de la figura 4.16 confirmen que l'energia teòrica comunicada augmenta quan ho fa β_2 ,



cosa que és un avantatge constructiu, perquè permet dissenyar màquines més petites per a unes prestacions donades, però, en contrapartida, el grau de reacció disminueix, de manera que l'energia dinàmica s'ha de recuperar mitjançant difusors estàtics les pèrdues dels quals disminueixen el rendiment hidràulic de la màquina.

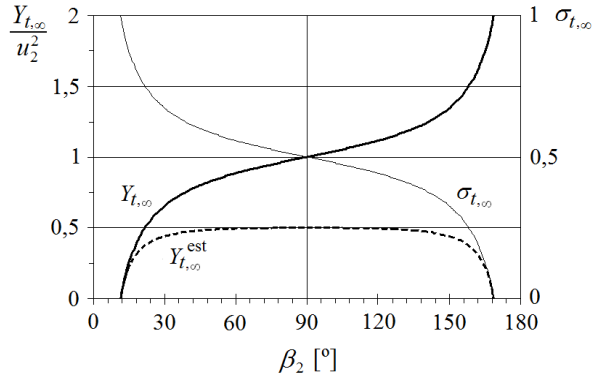


Figura 4.16. Relació de l'energia teòrica [4.31] i del grau de reacció [4.58] amb l'angle β_2 , segons la teoria unidimensional, per al cas d'entrada radial i $c_{2m} = c_{1m}$. $\varphi = 0,2$.

Com a resultat de l'anterior, el coeficient de pressió no pot ser molt elevat en les bombes centrífugues amb entrada radial, perquè llavors disminueix $\sigma_{t,\infty}$, cosa que, d'una banda, implica que s'ha de reduir c_{2u} respecte de u_2 perquè l'angle β_2 sigui l'adequat i, de l'altra, també condiciona el valor de φ segons [4.36]. Per exemple, si $\psi = 1$ i l'entrada és radial, resulta $c_{2u} = u$ i $\beta_2 = 90^\circ$, el que no és factible, tal com s'ha explicat, excepte en alguns casos particulars. Per a un angle $\beta_2 = 30^\circ$, la relació teòrica entre ψ i φ és $\psi = 1 - 3^{1/2}\varphi$, i tenim $\psi = 0,65$ i $\sigma_{t,\infty} = 0,67$ per a un valor usual de $\varphi = 0,2$. És a dir, les dues tercers parts de l'energia teòrica generada segons la teoria unidimensional serien energia estàtica.

Les equacions [4.31] i [4.58] també limiten el valor de l'angle a la sortida als valors suplementaris:

$$[\text{tg } \beta_2]_{\text{màx}}^{\text{mín}} = \pm \frac{c_{2m}}{u_2} \quad [4.60]$$

Tal com s'aprecia a la figura 4.16, l'angle mínim correspon a la condició $Y_{t,\infty} = 0$, per a la qual tots dos triangles de velocitats són normals i el rodet no influeix en el corrent, mentre que l'angle màxim implica un grau de reacció zero ($\psi = 2$ amb entrada radial) i que tota l'energia generada sigui dinàmica.²²

Es dedueix de [4.57] en el cas particular del rotor d'una màquina axial, per al qual $u_2 = u_1$ i $(c_{2u} - c_{1u}) = (w_{1u} - w_{2u})$, que:

$$\sigma_t = \frac{p_2 - p_1}{\rho Y_t} = \frac{1}{2} \frac{w_1^2 - w_2^2}{u(c_{2u} - c_{1u})} = \frac{1}{2} \frac{w_{1u} + w_{2u}}{u} \quad [4.61]$$



És a dir, el grau de reacció és nul si totes dues velocitats relatives tenen igual mòdul.²³ Emprant les definicions [4.8] i [4.9], se segueix:

$$\sigma_t = \frac{w_{\infty,u}}{u} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_{\infty}} \frac{c_m}{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) \frac{c_m}{u} \quad [4.62]$$

que relaciona el grau de reacció amb la projecció perimetral de la velocitat w_{∞} . Aquesta expressió també es pot escriure en funció dels coeficients de pressió i velocitat de la cascada bàsica. Recordant [4.44] i [4.45], es té:

$$\sigma_t = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c_m} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) \frac{c_m}{u} \quad [4.63]$$

i finalment:

$$\sigma_t = \frac{1}{2} (1 + \zeta \varphi) - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \varphi = 1 - \frac{1}{2} \psi - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \varphi \quad [4.64]$$

que coincideix amb [4.59] en el supòsit d'entrada radial ($\alpha_1 = 90^\circ$).

És evident que tant el grau de reacció com els coeficients de pressió i velocitat d'un rotor axial varien amb el radi, perquè els triangles de velocitats es modifiquen quan varia la velocitat perifèrica. No existeix un disseny pur amb un grau de reacció determinat, sinó només una referència aproximada que s'ha d'adaptar a les condicions de cada radi. Si, per exemple, el disseny és de manera que l'energia Y_t i la velocitat c_m són les mateixes en qualsevol radi, l'augment de u implica que ψ i φ disminueixin i que augmenti el grau de reacció, és a dir, el salt de pressió és més gran en radis més grans i $\partial p / \partial r > 0$.

D'altra banda, la velocitat perifèrica màxima en el rotor d'una bomba axial està condicionada per l'efecte de la cavitació i el límit de l'ultrasò i, com que l'angle β_2 és més petit a la punta de l'àlep que en el cub i l'energia comunicada està limitada per la deflexió màxima admissible que es pot donar al flux (equació [4.28]),²⁴ se segueix que el coeficient de pressió serà més petit en aquestes bombes que en les radials i que, amb [4.45], el de velocitat serà més gran. Aquesta última circumstància implica, en general, que el cabal volumètric que impulsa una màquina axial és més gran que el que corresponen a una màquina radial d'igual grandària i velocitat de gir perquè la seva secció de pas i c_m són més grans.

Totes aquestes qüestions es poden entendre millor si s'observa la influència que el grau de reacció i els coeficients ψ i φ tenen sobre la forma dels triangles de velocitats de la figura 4.17. Mantenint el supòsit $\alpha_1 = \alpha_4$ i $\alpha_2 = \alpha_3$ per a la cascada bàsica de la figura 4.11, en què, a més, $c_2 = c_3$ i c_m és constant, es copleix que $\alpha_1 - \alpha_2$ i $\beta_2 - \beta_1$ són la deflexió que experimenta el fluid a la corona de l'estator i del rotor, respectivament (ε_E i ε_R). De la mateixa manera, s'observa que el coeficient de pressió relaciona la base inferior del diagrama de velocitats amb la superior, mentre que el de velocitat ho fa



amb la seva altura, i que la forma del diagrama per a un grau de reacció $\sigma = 1/2$ és la d'un trapezi regular, la simetria del qual, respecte de la base del triangle, es desfà en un sentit o en l'altre quan el grau de reacció augmenta o disminueix. Això últim es pot apreciar millor en la figura 4.18. Es conclou que la forma general dels triangles de velocitats (la de tots dos) queda establerta sabent σ , ψ i φ , i que la seva mida vindrà determinada per una magnitud dimensional, per exemple, u o c_m , de manera que, com més gran sigui el diagrama, més grans seran l'energia específica comunicada i el cabal.

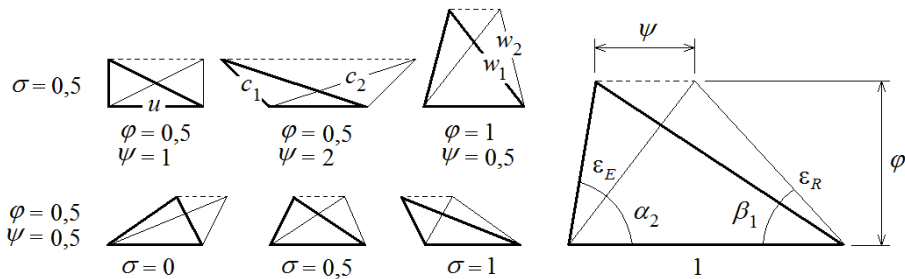


Figura 4.17. Influència de σ , ψ i φ en la forma dels triangles de velocitats i diagrama adimensional de velocitats (obtingut per a $u = 1$) en un rotor axial en què c_m sigui constant. ϵ_R i ϵ_E són les deflexions experimentades pel fluid en el rotor i en l'estator, respectivament.

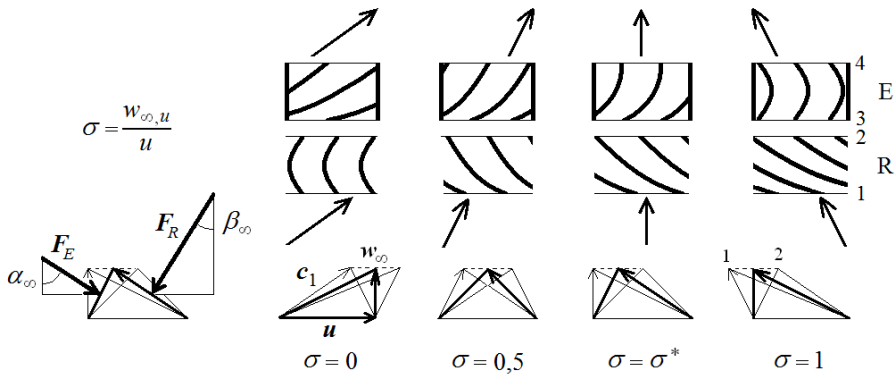


Figura 4.18. Relació entre el grau de reacció teòric; els triangles de velocitats d'una cascada bàsica com la de la figura 4.11, i les forces de sustentació realitzades pel corrent sobre rotor, FR, i l'estator, FE. Aquesta relació sempre s'ha de completar amb el coeficient de sustentació del perfil i la deflexió admissible del corrent. S'ha emprat $\psi = \varphi = 1/2$ per simplificar el traçat dels diagrames, tot i que en el tema anterior s'ha vist que aquests paràmetres no poden tenir qualsevol valor perquè estan relacionats amb la velocitat específica. Observem que, quan $\sigma = \sigma^*$, no calen directrius a l'entrada i el grau de reacció augmenta a mesura que apareix prerotació contrària a la rotació del rotor.



Com a casos singulars dels diagrames de la figura 4.18, convé destacar els següents:

- Quan el grau de reacció és nul o la unitat, el rotor o l'estator estan formats per àleps típics en forma de ganxo i tota l'energia estàtica és aportada per l'altre element (si és nul, és el rotor el que té àleps en ganxo, i l'estator, el que incrementa la pressió, i viceversa). La situació $\sigma = 0$ no té de rellevància en les bombes.
- Si el grau de reacció és $\sigma = 1/2$, el diagrama és simètric respecte de la línia mitjana en u i els triangles són iguals (un determina l'altre). Això implica que els àleps del rotor i de l'estator són congruents, és a dir, se simplifica la construcció de la màquina perquè els àleps tenen idèntica curvatura. D'altra banda, aquesta disposició implica, de mitjana, les velocitats més baixes a l'interior de la màquina, cosa que permet augmentar u fins al màxim possible (que es triarà en funció de criteris de cavitació, so, resistència mecànica dels àleps o d'altres) i aconseguir més energia específica. Com que les pèrdues depenen, bàsicament, de la deflexió i és la mateixa al rotor i a l'estator, el disseny i el càlcul de la cascada resulten més senzills quan $\sigma = 1/2$.
- Hi ha un grau de reacció comprès en l'interval $[1/2,1]$ per al qual l'entrada al rotor serà radial i no caldran directrius d'entrada. Com es pot deduir de la figura 4.18, aquest grau de reacció és $\sigma^* = 1 - 0,5\Delta cu/u$, això és, [4.64] per a entrada radial, i serà la tria més encertada per al primer rotor d'un escalonament múltiple o en màquines d'una sola fase o etapa.

Totes les definicions anteriors fan referència al grau de reacció teòric de la turbomàquina elemental formada per un rotor radial o una cascada bàsica rotor-estator. El grau de reacció definit és útil en el sentit que permet classificar les turbomàquines en funció de la seva capacitat de generar energia estàtica. No obstant això, per tenir una estimació més ajustada del grau de reacció real, s'han de tenir en compte les possibles pèrdues introduint els rendiments hidràulics de la màquina i del rotor (o de la cascada bàsica) a l'equació [4.57].

Suposant que l'ocurrència de pèrdues en el rotor no afecti el camp de velocitats mitjà, el grau de reacció real del rotor d'una turbomàquina generadora és:

$$\sigma = \frac{p_2 - p_1}{\rho Y} = \frac{p_2 - p_1}{\rho \eta_H Y_t} = \frac{1}{\eta_H} \frac{p_2 - p_1}{(p_2 - p_1)_t} = \frac{\eta_{H,R}}{\eta_H} \sigma_t \quad [4.65]$$

És a dir, els graus de reacció real i teòric només coincideixen si la turbomàquina té un únic rotor on tenen lloc totes les pèrdues hidràuliques i, per tant, els seus rendiments són iguals, $\eta_H = \eta_{H,R}$. Com que, en general, $\eta_H < \eta_{H,R}$, resulta que el grau de reacció efectiu del rotor és superior al teòric (precisament, per fer possible que hi pugui haver altres pèrdues hidràuliques).²⁵



4.3 Ampliació de la teoria fonamental

L'equació [4.22] s'aplica a una línia de corrent al seu pas entre els àleps, de tal manera que, en el cas unidimensional, s'admet que totes comparteixen el mateix salt energètic. Se sap, no obstant això, que com que el guiat perfecte del flux radial no és possible en un rodet centrfug en què el nombre d'àleps és finit, apareixen desviacions del flux en direcció perimetral que invaliden la simetria polar a les superfícies de corrent i el fan bidimensional.

S'ha vist també que el flux en una cascada axial d'àleps és, en essència, bidimensional, perquè no és uniforme entre superfícies de corrent. A més, quan es considera el flux real, s'observa l'aparició d'altres efectes i de fluxos secundaris que distorsionen el perfil de la velocitat, cosa que converteix el problema en tridimensional i summa-ment complex de resoldre analíticament.

En aquest apartat, s'amplia la teoria unidimensional introduint les bases de l'estudi bidimensional i alguns aspectes tridimensionals que permetran entendre millor les característiques reals del flux a través d'una turbomàquina.

4.3.1 Equacions generals del moviment en coordenades fixes

Les equacions de conservació de la massa i de la quantitat de moviment per a un flux incompressible, en aquest cas, són:

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla c^2 + \boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{c} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{c} \quad [4.66]$$

Quan es fa servir l'equivalència vectorial següent:

$$\nabla^2 \mathbf{c} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{c}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{c}) = -\nabla \wedge \boldsymbol{\Omega}_c \quad [4.67]$$

s'obté una forma alternativa d'aquesta equació, que és molt útil en l'estudi de fluxos reals amb vorticitat:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{c} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} c^2 \right) - \frac{\mu}{\rho} \nabla \wedge \boldsymbol{\Omega}_c \quad [4.68]$$

Donada la geometria del flux a través d'una màquina, és convenient descriure aquestes equacions en les coordenades cilíndriques $\{r, \theta, z\}$ per a les quals es defineix:²⁶

$$\mathbf{c} = c_r \mathbf{r} + c_\theta \boldsymbol{\theta} + c_z \mathbf{z}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_c = \Omega_{c,r} \mathbf{r} + \Omega_{c,\theta} \boldsymbol{\theta} + \Omega_{c,z} \mathbf{z} \quad [4.69]$$

Per al desenvolupament per components de les equacions [4.66] i [4.68], es pot emprar [1.14], tenint present que les derivades parcials dels versors respecte de r i z són nul·les i respecte de θ són: $\partial \mathbf{r} / \partial \theta = \boldsymbol{\theta}$; $\partial \boldsymbol{\theta} / \partial \theta = -\mathbf{r}$ i $\partial \mathbf{z} / \partial \theta = 0$. El resultat és:



$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial(rc_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0 \\
 & \frac{\partial c_r}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{c_\theta}{r} \frac{\partial c_r}{\partial \theta} + c_z \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{c_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 c_r - \frac{c_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} \right) \\
 & \frac{\partial c_\theta}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_\theta}{\partial r} + \frac{c_\theta}{r} \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} + c_z \frac{\partial c_\theta}{\partial z} + \frac{c_r c_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 c_\theta - \frac{c_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial c_r}{\partial \theta} \right) \\
 & \frac{\partial c_z}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_z}{\partial r} + \frac{c_\theta}{r} \frac{\partial c_z}{\partial \theta} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 c_z
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

i

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial c_r}{\partial t} + (c_z \Omega_{c,\theta} - c_\theta \Omega_{c,z}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \Omega_{c,\theta}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_{c,z}}{\partial \theta} \right) \\
 & \frac{\partial c_\theta}{\partial t} + (c_r \Omega_{c,z} - c_z \Omega_{c,r}) = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \Omega_{c,z}}{\partial r} - \frac{\partial \Omega_{c,r}}{\partial z} \right) \\
 & \frac{\partial c_z}{\partial t} + (c_\theta \Omega_{c,r} - c_r \Omega_{c,\theta}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_{c,r}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Omega_{c,\theta})}{\partial r} \right)
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

on s'han menyspreat les forces màssiques gravitacionals o bé s'han inclòs en el terme de pressió com a pressió reduïda.

En aquesta última equació, s'ha introduït la pressió de rabeig definida a les coordenades cilíndriques com:

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho (c_r^2 + c_\theta^2 + c_z^2) \tag{4.72}$$

Com que el número de Reynolds és elevat, es pot menysprear el terme viscos de les equacions [4.70] i [4.71] i considerar d'ara endavant que el flux és isentròpic. Es verifica, llavors, l'equació [2.81] i l'entropia de la partícula és constant sempre que, a més, $q_a = 0$. En canvi, com que el procés en coordenades absolutes no és estacionari,²⁷ no es pot suposar que l'entropia sigui la mateixa per a totes les partícules de la mateixa línia de corrent, tret que el procés sigui també homentròpic (v. [2.83]). Amb aquesta consideració, l'equació [4.68] s'escriu:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_t \wedge \mathbf{c} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} \right) = -\nabla \left(\frac{p_0}{\rho} \right) \tag{4.73}$$

Aquesta equació i la [4.71] per components defineixen les condicions perquè es conservi la pressió de rabeig en un flux incompressible isentròpic, i es conclou que en el rotor d'una turbomàquina no ho fa, encara que el moviment sigui irrotacional a l'entrada, a causa de la seva no estacionarietat.

La vorticitat absoluta en aquestes mateixes coordenades s'expressa com:²⁸



$$\boldsymbol{\Omega}_c = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial c_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (rc_\theta)}{\partial z} \right) \mathbf{r} + \left(\frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r} \right) \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rc_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{z} \quad [4.74]$$

Com que, en aquest moviment, es donen les condicions del teorema de Kelvin, totes les components de la vorticitat han de ser nul·les en el rotor si ho eren a l'entrada. En general, no obstant això, les característiques del flux principal en el conducte d'entrada i el caràcter axial de la rotació del rotor fan que la component més interessant de les tres sigui $\Omega_{c,z}$ i que, sovint, es compleixi que $\boldsymbol{\Omega}_c = \Omega_{c,z} \mathbf{z}$, quan el moviment no és irrotacional.

Admetent que l'única component de la vorticitat no nul·la és $\Omega_{c,z}$, es dedueix de [4.74] que el moviment no pot ser axisimètric i que, perquè ho sigui, cal que la velocitat perimetral depengui de manera inversa del radi, condició de vòrtex lliure irrotacional, és a dir, nul·la, i que la velocitat radial tingui simetria perimetral o sigui nul·la, condició de flux unidireccional.²⁹

En conseqüència, la combinació d'un flux unidireccional amb un vòrtex lliure suposa una vorticitat axial nul·la. Com a cas particular a l'entrada d'un rotor axial o radial, si el flux en el conducte d'entrada té vorticitat en direcció axial, l'equació [4.71] mostra que els gradients en direcció radial i perimetral de la pressió d'estancament no són nuls, encara que el moviment sigui permanent (tret que també sigui axial i unidireccional: $c = c_z \mathbf{z}$).

Aquestes equacions es poden simplificar atenent simetries o casos especials del flux. Per exemple, en el cas que el flux transcorri al llarg de superfícies cilíndriques ($c_r = 0$), les equacions [4.70] prenen la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial c_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{c_\theta^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial c_\theta}{\partial t} + \frac{c_\theta}{r} \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} + c_z \frac{\partial c_\theta}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial c_z}{\partial t} + \frac{c_\theta}{r} \frac{\partial c_z}{\partial \theta} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.75]$$

La vorticitat d'aquest supòsit ve donada per l'expressió:

$$\boldsymbol{\Omega}_c = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial c_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (rc_\theta)}{\partial z} \right) \mathbf{r} - \frac{\partial c_z}{\partial r} \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rc_\theta)}{\partial r} \mathbf{z} \quad [4.76]$$

de manera que la vorticitat axial en un conducte cilíndric és nul·la si el flux és unidireccional o en forma de vòrtex lliure.

Si, a més, es presenta simetria axial ($\partial/\partial\theta=0$) i el flux és estacionari ($\partial/\partial t=0$), llavors:



$$\begin{aligned} \frac{\partial c_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{c_\theta^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ c_z \frac{\partial c_\theta}{\partial z} &= 0 \\ c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.77]$$

El primer joc d'equacions [4.75] i [4.76] es pot fer servir per representar el flux cilíndric ideal en un rotor axial (substituint c_θ per c_u), mentre que el segon [4.77] és vàlid a les regions externes al rotor, tant aigües amunt com aigües avall, on el flux transcorre lliure d'àleps. En aquest últim cas, es dedueix que no pot haver-hi variació de les velocitats axial i perimetral en direcció axial a un radi determinat, és a dir: el fluid manté el seu moviment i el gradient axial de la pressió serà nul.³⁰

Per continuïtat integral entre les seccions diferencials d'entrada i sortida d'una bomba parcial axial de radi r , s'admet que $c_{1z} = c_{2z}$, de manera que la primera de les equacions [4.75] indicaria que c_u és uniforme en direcció perimetral. No obstant això, la uniformitat de la velocitat axial a l'interior del rotor només és possible per terme mitjà, ja que l'última equació de [4.75] i la [4.76] mostren que, en general, la velocitat axial no és uniforme en θ , i substituint la primera equació de [4.75] a l'última es veu que tampoc pot ser-ho c_u . Es conclou que, com a conseqüència de l'augment de la circulació Γ amb z , no pot haver-hi simetria axial en el rotor encara que el flux sigui homentròpic i irrotacional a l'entrada. D'altra banda, la combinació de les hipòtesis de flux en superfícies cilíndriques i irrotacionalitat implica la uniformitat de c_z en r i que $\partial\Gamma/\partial r = 0$. A aquesta mateixa conclusió s'arriba més endavant per criteris energètics.

És important observar que, en direcció radial, es compleix en tots dos casos:

$$\frac{c_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} > 0 \quad [4.78]$$

condició anomenada *equilibri radial simple* i que implica, entre altres coses que es veuran a continuació, l'absència de flux en direcció radial.³¹

La utilització de l'equilibri radial descrit per [4.78] en les fases de disseny d'una turbomàquina axial condueix a expressions que permeten deduir la variació radial de la resta de les components de la velocitat (i, per tant, de la forma dels àleps) de manera que el flux es mantingui bidimensional³² i siguin vàlides les conclusions obtingudes per a una cascada lineal.

La condició equivalent a [4.78] en una màquina radial seria la d'equilibri axial, segons la qual el flux en les diferents superfícies de corrent seria de manera que $c_z = 0$ i, per



tant, $\partial p / \partial z = 0$. En aquestes màquines, el flux entra en el rodet des d'un conducte corb que implica, segons [2.95], una variació a l'entrada tant de la velocitat radial com de la distribució de la pressió en direcció axial. Així i tot, aquesta condició es compleix bastant bé a la pràctica per diverses raons: d'una banda, l'ample del canal entre les parets anterior i posterior del rodet és inferior al radi d'entrada ($b_1 < r_1$) i, per tant, la variació axial de la pressió no pot ser gaire gran per a un gradient donat, i, de l'altra, el conducte d'entrada es dissenya de manera que el seu radi de curvatura sigui prou gran per reduir aquest efecte.

Aquestes circumstàncies fan que les superfícies de corrent en una màquina radial pura es puguin assimilar a discos anulars compresos entre les seccions d'entrada i sortida del rotor,³³ per a les quals el joc d'equacions [4.73] i [4.74] se simplifica fent $c_z = 0$, i en què la vorticitat absoluta només pot tenir component axial:³⁴

$$\Omega_{c,z} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r c_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{\partial \theta} \right) \quad [4.79]$$

És a dir, encara que el flux a l'entrada d'un rotor radial sigui irrotacional, supòsit que es verifica, com s'ha vist, quan el flux d'entrada té forma de vòrtex lliure, en el seu interior no hi pot haver simetria axial, ja que $r c_u$ s'incrementa amb el radi (la circulació augmenta amb r). Aquesta equació invalida la teoria unidimensional pura en un rotor centrífug i justifica l'ús dels coeficients de disminució del treball que s'han explicat abans.

4.3.2 Equacions generals del moviment en coordenades mòbils

En un sistema de coordenades lligat al rotor, les equacions vectorials de conservació de la massa i de la quantitat de moviment són:³⁵

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{w} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla w^2 + \boldsymbol{\Omega}_w \wedge \mathbf{w} &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{w} + \mathbf{f}_i \end{aligned} \quad [4.80]$$

en què el vector \mathbf{f}_i representa les forces inercials [1.112]. Suposant que el rotor gira a una velocitat constant i que l'origen del sistema relatiu és fix, aquestes forces són la centrífuga i la de Coriolis i, per tant:

$$\mathbf{f}_i = -\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{w} \quad [4.81]$$

Eliminant el terme viscos per les mateixes consideracions de l'apartat anterior i tenint present que:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) = -\omega^2 r \nabla r = -\nabla \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} \right) \quad [4.82]$$

l'equació de la quantitat de moviment pren la forma:



$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla w^2 + \mathbf{\Omega}_w \wedge \mathbf{w} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} \right) - 2\mathbf{\omega} \wedge \mathbf{w} \quad [4.83]$$

o bé:³⁶

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (2\mathbf{\omega} + \mathbf{\Omega}_w) \wedge \mathbf{w} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right) = -\nabla \left(\frac{p_{0R}}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) \quad [4.84]$$

expressió que és anàloga a la [4.73], però en coordenades relatives i en què s'ha introduït la pressió de rabeig relativa, p_{0R} .

Aquesta analogia és més evident quan es constata la relació entre la vorticitat absoluta i la relativa, ja que sent:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{u} + \mathbf{w} \\ \mathbf{\Omega}_c &= \nabla \wedge \mathbf{u} + \mathbf{\Omega}_w = 2\mathbf{\omega} + \mathbf{\Omega}_w \end{aligned} \quad [4.85]$$

[4.84] queda de la manera següent:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_c \wedge \mathbf{w} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right) \quad [4.86]$$

L'equació general [4.84] per components en les coordenades relatives $\{r, \varphi, z\}$ resulta ser:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_r}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_u}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{w_u^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega w_u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial w_u}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_u}{\partial r} + \frac{w_u}{r} \frac{\partial w_u}{\partial \varphi} + w_z \frac{\partial w_u}{\partial z} + \frac{w_r w_u}{r} + 2\omega w_r &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{w_u}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.87]$$

i la vorticitat relativa corresponent ve donada per l'expressió:

$$\mathbf{\Omega}_w = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rw_u)}{\partial z} \right) \mathbf{r} + \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) \mathbf{\phi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rw_u)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{z} \quad [4.88]$$

la interpretació del qual es posposa de moment.

Per definició, el moviment relatiu en el rotor pot ser considerat estacionari sempre que les propietats del fluid siguin constants en qualsevol punt del sistema de referència mòbil. Aquesta hipòtesi no és factible tret que l'efecte de les pertorbacions generades en altres punts de la màquina, especialment aigües amunt del rotor, pugui ser menyspreable. Per això, en una cascada d'àleps amb directrius a l'entrada del rotor, és necessari imposar certa distància de separació³⁷ entre tots dos i entre etapes, perquè els deixants generats pels perfils fixos i els vòrtexs que se'n poguessin desprendre



es dilueixin i es pugui admetre que el moviment és permanent en el rotor. El raonament anterior també s'aplica al rodet radial d'una bomba centrífuga.

Assumida l'estacionarietat del moviment relatiu en el rotor, l'equació [4.86] mostra que:

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad [4.89]$$

quan el flux és irrotacional a l'entrada. Si, a més, la velocitat perimetral no canvia en la direcció del gradient, aquesta equació assegura la constància de la pressió relativa de rabeig en aquesta direcció.

La igualtat $u_1 = u_2$ es verifica si el flux transcorre en superfícies cilíndriques ($w_r = 0$), i llavors les equacions [4.87] prenen la forma:

$$\begin{aligned} \frac{w_u^2}{r} + \omega^2 r + 2\omega w_u &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{w_u}{r} \frac{\partial w_u}{\partial \varphi} + w_z \frac{\partial w_u}{\partial z} + 2\omega w_r &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{w_u}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.90]$$

La condició necessària perquè hi hagi equilibri radial en el flux relatiu en aquest cas implica, com abans, que en el moviment es compleixi el primer terme d'aquesta equació, és a dir:

$$\frac{1}{r} (w_u^2 + u^2 + 2uw_u) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad [4.91]$$

Aquesta condició coincideix, evidentment, amb [4.78], encara que no ho sembli a simple vista. Cal apuntar que la no estacionarietat del flux absolut no afecta l'equilibri radial d'un rotor axial, perquè $c_r = w_r$ i s'està suposant que, en aquest cas, totes dues són nul·les. A més, com que el signe de les components de la velocitat de l'equació [4.90] i de les anteriors és positiu en el sentit dels eixos, i w_u es dirigeix en sentit oposat a u , segons els triangles de velocitats en el rotor, es confirma que [4.78] i [4.91] són la mateixa equació, sent:

$$u^2 + w_u^2 - 2u |w_u| = (u - |w_u|)^2 = c_u^2 \quad [4.92]$$

Es conclou que, on no es verifiqui la condició [4.91], no hi podrà haver equilibri radial i apareixeran fluxos en aquesta direcció.

Quan el flux estacionari és pla ($w_z = 0$), com en una bomba radial pura en què se suposa que hi ha equilibri axial i la velocitat relativa es manté perpendicular a l'eix de gir, la vorticitat està definida només en l'eix axial:



$$\Omega_{w,z} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rw_u)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right) \quad [4.93]$$

i és perpendicular a la velocitat relativa w . Es deixa per al lector que comprovi ³⁸ la relació entre [4.79], [4.85] i aquesta equació per al cas en què $\Omega_{c,z} = \Omega_{w,z} + 2\omega$.

4.3.3 Relacions energètiques fonamentals

Abans de començar a desenvolupar aquesta secció, cal recordar la definició termodinàmica (per a fluid incompressible) següent:

$$-\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) = T\nabla s - \nabla h \quad [4.94]$$

vàlida en qualsevol direcció del flux, i definir una nova variable de la forma:

$$i = h - \frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2} = h_0 - \frac{1}{2}(c^2 + u^2 - w^2) \quad [4.95]$$

que en la terminologia de les turbomàquines s'anomena *rotalpia*, i , la relació de la qual amb les equacions d'Euler és evident.³⁹

Combinant les equacions [4.94] i [4.95], es dedueix que:

$$\begin{aligned} -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} \right) &= T\nabla s - \nabla h_0 \\ -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right) &= T\nabla s - \nabla i \end{aligned} \quad [4.96]$$

que, juntament amb [4.73] i [4.86], condueixen al resultat següent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{c} &= T\nabla s - \nabla h_0 \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{w} &= T\nabla s - \nabla i \end{aligned} \quad [4.97]$$

És interessant observar aquestes equacions amb cert deteniment.⁴⁰

Per començar, és obvi que, en una cascada mòbil, la rotalpia i fa la funció de l'entalpia de rabeig h_0 en el flux absolut; en particular, a través de contorns rígids, i per això s'entén que el seu significat etimològic sigui el d'entalpia de rabeig rotacional. Aquest paral·lelisme indica que totes les condicions relatives al manteniment o a la variació de h_0 a través d'una cascada fixa d'àleps es puguin aplicar a i per a una cascada mòbil. Algunes d'aquestes condicions ja s'han introduït en l'apartat anterior per a la pressió de rabeig i ara s'estendran a la resta de variables.



Les equacions [4.97] permeten extreure conclusions importants relatives al flux a través d'una turbomàquina, si s'assumeix que el número de Reynolds és elevat i el flux isentròpic. D'una banda, per al fluid que entra als àleps guia amb vorticitat nul·la, en moviment permanent i amb una distribució uniforme de h_0 i s , com que l'entropia de la partícula no canvia, tampoc no canviarà l'entalpia de rabeig i el flux serà homentròpic fora de les capes límit. En aquest cas, la vorticitat del corrent absolut es mantindrà zero quan passi pels àleps, en virtut del teorema de Kelvin, i el flux absolut es podrà tractar amb la teoria potencial. Aquesta conclusió també s'aplica als conductes d'entrada lliures d'àleps.

Si, amb aquesta condició, els àleps directrius imparteixen una variació de la velocitat tangencial en el pla axial similar a la d'un vòrtex lliure, això és, inversament proporcional al radi (v. [2.167]), llavors la circulació, l'entropia i l'entalpia d'estancament es mantenen constants i el flux arriba al rotor amb una vorticitat axial absoluta nul·la. En aquest cas, si a més el rotor està situat a una distància tal de les directrius de l'estator que es redueixin els efectes no estacionaris produïts pels deixants generats als àleps, llavors el fluid entra al rotor amb rotalpia uniforme en direcció perimetral i radial, i el flux a través dels àleps mòbils es podrà continuar tractant amb la base de vorticitat absoluta nul·la. El flux relatiu no seria estacionari si els vòrtexs arribessin al rotor per la variació periòdica en la circulació que generarien, de manera que el flux absolut s'hauria d'analitzar com a rotacional en el seu interior.

Quan els àleps guia indueixen una variació radial de la velocitat tangencial del fluid en el pla axial aigües avall no inversament proporcional al radi, la circulació varia al llarg dels àleps desprenent vòrtexs que afecten la uniformitat de la rotalpia. La vorticitat absoluta encara no serà nul·la fora dels deixants, és a dir, el flux serà rotacional després dels àleps guia, i aquesta vorticitat arribarà al rotor malgrat que s'allunyi de l'estator, i en el seu interior el flux no serà potencial.

En resum, si la velocitat perimetral del fluid aigües amunt de la cascada d'àleps és zero o varia de manera inversa al radi en el pla del flux, és a dir, el flux és potencial i estacionari a l'entrada del rotor, llavors la rotalpia és constant al seu través si el flux es manté isentròpic. Estrictament, perquè es compleixi aquesta condició no cal que el flux absolut sigui irrotacional, sinó que n'hi ha prou que es verifiqui la condició $\Omega_c \wedge c = 0$, menys restrictiva que l'anterior.⁴¹ Aquesta condició també implica la uniformitat de l'entalpia de rabeig quan el flux d'entrada és homentròpic i permanent. Les turbomàquines axials se solen dissenyar de manera que l'increment d'energia comunicat al rotor sigui uniforme amb el radi, i així la constància de h_0 a l'entrada implicarà que h_0 també sigui uniforme en r a la sortida (excepte en les capes límit).

Arribats a aquest punt, és convenient analitzar el flux des del punt de vista del fluid, és a dir, material, i en les coordenades intrínseques, \mathbf{s} i \mathbf{n} , sent \mathbf{s} un versor tangent a



la línia de corrent, de manera que $c = cs$. En el desenvolupament que segueix, se suposa que el flux és isentròpic i incompressible, tot i que pot ser no homentròpic i no estacionari, i és vàlid tant per a rotors axials com radials.

Quan la derivada material es relaciona amb les variacions local i convectiva d'una propietat, s'ha de tenir especial cura en l'ús de l'operador gradient segons el sistema de referència que s'utilitzi. En principi, la regla és senzilla si es té en compte que la propietat de la partícula és indistinta del sistema de referència triat, sigui inercial o no.

Anomenant amb els subíndexs (c) i (w) les operacions referides al sistema absolut i relatiu, respectivament, es verifica que:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t_c} + \mathbf{c} \cdot \nabla_c \xi = \frac{\partial \xi}{\partial t_w} + \mathbf{w} \cdot \nabla_w \xi \quad [4.98]$$

en què ξ és una magnitud escalar. Aquesta equació suggereix que, per exemple, en el cas del moviment del fluid a través d'un rotor respecte del qual el flux relatiu és estacionari, els termes convectius no poden coincidir, excepte per raons de simetria.

Si es multipliquen escalament les equacions del moviment [4.73] i [4.83] pel vector velocitat corresponent i es recorda l'equació de l'entalpia [2.44], s'obté:⁴²

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \frac{D\mathbf{c}}{Dt} &= -\mathbf{c} \cdot \nabla_c \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial t_c} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial t_c} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{Dh}{Dt} \\ \mathbf{w} \cdot \frac{D\mathbf{w}}{Dt} &= -\mathbf{w} \cdot \nabla_w \left(\frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t_w} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \frac{Dh}{Dt} \end{aligned} \quad [4.99]$$

Tenint en compte que:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \frac{D\mathbf{c}}{Dt} &= \mathbf{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{c} \cdot \nabla c^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c^2}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla c^2 \right) \\ \mathbf{w} \cdot \frac{D\mathbf{w}}{Dt} &= \frac{1}{2} \frac{Dw^2}{Dt} \end{aligned} \quad [4.100]$$

i que:

$$\frac{Di}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{w^2}{2} \right) \quad [4.101]$$

les equacions [4.99] es poden escriure de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{Dh_0}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t_c} \left(\frac{p}{\rho} \right) \\ \frac{Di}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t_w} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) \end{aligned} \quad [4.102]$$



La primera d'aquestes equacions indica que la variació de l'entalpia de rabeig de la partícula en un flux isentròpic és igual a la variació temporal de la pressió del flux absolut. Evidentment, l'entalpia de rabeig es manté constant si el flux és permanent, i no pot ser-ho en el rotor perquè el fluid incrementa h_0 .⁴³ La segona equació postula la constància de la rotalpia de la partícula fluida en el rotor quan el règim és isentròpic i permanent en termes relatius. En altres paraules, quan el rotor no gira i $u = 0$, o quan ho fa a velocitat constant, totes dues condicions coincideixen.⁴⁴

El procediment d'anàlisi en coordenades intrínseques consisteix a projectar les equacions [4.97] respecte d'aquestes direccions, tenint en compte el seu caràcter vectorial. Algunes de les conclusions que s'extreuen d'aquesta anàlisi venen a confirmar les anteriors, però així i tot, és interessant presentar-les per separat perquè permeten visualitzar l'evolució de les variables fluides en altres direccions. El resultat després es podrà relacionar amb les equacions [4.70] i [4.87] fent servir la geometria del flux, en principi determinada pels angles α i β que defineixen la direcció dels corrents absolut i relatiu.⁴⁵

La projecció segons la direcció de la línia de corrent absolut $\{s_c\}$ de la primera de les equacions [4.97] és:

$$\frac{\partial c}{\partial t_c} = T \frac{\partial s}{\partial s_c} - \frac{\partial h_0}{\partial s_c} \quad [4.103]$$

Per tant, encara que el flux sigui homentròpic a l'interior del rotor i el primer terme de la dreta s'anul·li, l'entalpia de rabeig canvia en $\{s_c\}$ com a conseqüència de la no estacionarietat del flux. En canvi, el flux isentròpic i estacionari a través d'una cascada fixa d'àleps o d'un conducte sense àleps manté l'entalpia de rabeig al llarg de la línia de corrent.

Fent el mateix amb l'equació en coordenades relatives, s'obté:

$$\frac{\partial w}{\partial t_w} = T \frac{\partial s}{\partial s_w} - \frac{\partial i}{\partial s_w} \quad [4.104]$$

de manera que, perquè la rotalpia es mantingui constant en $\{s_w\}$, n'hi ha prou que el flux relatiu estacionari sigui isentròpic.⁴⁶

L'equació anterior s'escriu, en termes de la pressió en aquest supòsit, amb [4.96], de la forma:

$$\frac{\partial i}{\partial s_w} = \frac{\partial}{\partial s_w} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad [4.105]$$

i amb [4.95]:

$$\frac{\partial h_0}{\partial s_w} - \frac{\partial}{\partial s_w} \left(\frac{c^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{w^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial s_w} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad [4.106]$$



d'on:

$$\frac{\partial h_0}{\partial s_w} = \frac{\partial}{\partial s_w} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} \right) \quad [4.107]$$

Aquest resultat s'aplica a una línia de corrent relatiu i , en aquest sentit, coincideix amb la teoria unidimensional en el cas isentròpic.

La projecció segons la direcció normal a la línia de corrent de les equacions [4.97] condueix al resultat següent:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}_c &= T \frac{\partial s}{\partial n_c} - \frac{\partial h_0}{\partial n_c} \\ (\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_w &= T \frac{\partial s}{\partial n_w} - \frac{\partial i}{\partial n_w} \end{aligned} \quad [4.108]$$

i, com a conseqüència, a l'interior del rotor l'entalpia de rabeig és constant en direcció normal només quan el flux és homentròpic i irrotacional,⁴⁷ o bé $\boldsymbol{\Omega}_c = \boldsymbol{\Omega}_s \mathbf{s}_c$.

Reduint l'anàlisi al cas en què la vorticitat d'entrada només tingui component axial, $\Omega_{c,z}$, aquestes equacions mostren que la no uniformitat de h_0 i i en direcció normal ha de ser més accentuada als rotors radials que als axials, perquè en els primers el flux és pràcticament perpendicular a \mathbf{z} , mentre que en els segons transcorre de manera gairebé paral·lela.⁴⁸ Com a cas particular de moviment homentròpic a través d'una cascada axial d'àleps, h_0 i i es mantenen en direcció normal en el flux bidimensional amb equilibri radial quan la vorticitat absoluta només té component axial, $\Omega_{c,z}$, ja que llavors els vectors $\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{c}$ i $\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{w}$ són perpendiculars a \mathbf{n}_i i el seu producte escalar és nul.

Les equacions [4.108] en un rotor radial en què el flux sigui homentròpic i la component axial de la velocitat es pugui menysprear, s'escriuen en funció de la pressió com:

$$\begin{aligned} -c\Omega_{c,z} &= \frac{\partial h_0}{\partial n_c} = \frac{\partial}{\partial n_c} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} \right) \\ -w\Omega_{c,z} &= \frac{\partial i}{\partial n_w} = \frac{\partial}{\partial n_w} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right) \end{aligned} \quad [4.109]$$

La primera d'aquestes equacions ja s'havia introduït a l'equació [2.99], ja que, en aquest cas, $\Omega_b = \Omega_{c,z}$. La segona de [4.109], quan el flux d'entrada sigui irrotacional, es pot escriure com:⁴⁹

$$\frac{\partial}{\partial n_w} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad [4.110]$$

que és la mateixa equació [4.105] però en direcció normal.⁵⁰ Tenint en compte [4.85] i la definició de la vorticitat en termes relatius [2.98], la forma més general de la segona equació de [4.109] és:⁵¹



$$-w \left(2\omega + \frac{w}{R} - \frac{\partial w}{\partial n_w} \right) = \frac{\partial}{\partial n_w} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right) \quad [4.111]$$

en què R és el radi de curvatura de la línia de corrent relatiu. Aquesta equació, arreglada, condueix a:

$$\frac{\partial}{\partial n_w} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + 2\omega w + \frac{w^2}{R} = 0 \quad [4.112]$$

i és vàlida encara que la vorticitat absoluta d'entrada no sigui nul·la. Aquesta equació, juntament amb la [4.105], són les dues equacions en coordenades intrínseques per al moviment bidimensional relatiu en un rotor radial.

Les equacions [4.108] també mostren que la presència de vorticitat a l'entrada del rotor condiona la uniformitat del flux isentròpic en el seu interior (sobre qualsevol direcció que no sigui $\{s_w\}$) i fa que les línies de corrent relatives tinguin energies diferents. Això és, segons [4.105], es compleix:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} = C(n_w) \quad [4.113]$$

on $C(n_w)$ és una constant que només serà comuna a totes les línies de corrent quan el flux sigui irrotacional a l'entrada del rotor i al flux de Beltrami. Integrant [4.105] i [4.107] al llarg d'una línia de corrent relatiu, resulta:

$$h_{02} - h_{01} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \quad [4.114]$$

En resum, l'equació de Bernoulli generalitzada [4.25] és l'equació de l'energia mecànica en el cas ideal unidimensional o sobre una línia de corrent per a un sistema de referència lligat al terra, respecte del qual s'observa que el rotor fa un treball sobre el fluid de valor: $Y_{t,\infty} = h_{02} - h_{01}$. El treball comunicat pel rotor per unitat de massa, $-w$, de [3.5], coincideix amb Y_t quan es té en compte la no uniformitat del flux en direcció normal, i només ho farà amb $Y_{t,\infty}$ quan es pugui garantir aquesta uniformitat.⁵²

4.3.4 Equilibri radial en un rotor axial

En aquest apartat, s'analitzen les conseqüències d'assumir la hipòtesi d'equilibri radial sobre un rotor axial, segons la qual $c_r = w_r = 0$. El primer resultat evident d'aquesta hipòtesi és que les superfícies de corrent en el rotor passen a ser bidimensionals i perpendiculars a la direcció radial, \mathbf{r} .

La hipòtesi d'equilibri radial en un rotor axial s'escriu [4.78] o [4.91]. Per revelar com afecta aquesta condició a la resta de variables, es poden emprar sense problemes les equacions [4.97] projectades en direcció radial. Un procediment alternatiu parteix de la definició de l'entalpia de rabeig en aquest cas, que és:



$$h_0 = h + \frac{1}{2}(c_u^2 + c_z^2) \quad [4.115]$$

la variació de la qual amb el radi resulta ser:

$$\frac{\partial h_0}{\partial r} = T \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + c_u \frac{\partial c_u}{\partial r} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial r} \quad [4.116]$$

Utilitzant [4.78] i agrupant termes, s'arriba a:

$$\frac{\partial h_0}{\partial r} = T \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{c_u}{r} \frac{\partial (rc_u)}{\partial r} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial r} \quad [4.117]$$

relació que habitualment es coneix amb la sigla NISRE (*Non-Isentropic Simple Radial Equilibrium*) i que s'utilitza en la fase de disseny directe o invers d'un rotor.⁵³

Quan l'entropia no varia en direcció radial i l'entalpia de rabeig és uniforme a l'entrada (situacions analitzades abans), la condició d'entalpia uniforme a la sortida implica que l'energia comunicada és la mateixa en cada superfície de corrent. Per tant, perquè hi hagi equilibri radial en aquestes condicions, s'ha de verificar:

$$\frac{c_u}{r} \frac{\partial (rc_u)}{\partial r} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial r} = 0 \quad [4.118]$$

Aquesta equació mostra com es relacionen entre si totes dues distribucions a l'interior del rotor, en particular a les seccions d'entrada i sortida, i concedeix certa capacitat d'adaptació del disseny a les condicions de funcionament de la màquina. Si, a l'entrada de la cascada d'àleps, la velocitat axial és uniforme en direcció radial i es vol mantenir la hipòtesi de moviment bidimensional, llavors també ho serà per continuïtat a la sortida i, en conseqüència, la condició d'equilibri radial en un rotor axial amb una distribució uniforme d'energia amb el radi condueix a un flux en vòrtex lliure amb velocitat axial (o meridiana) uniforme a la sortida. En aquest cas, la rotalpia també és uniforme en r , ja que, sent $c_u = C/r$, tenim:

$$\frac{\partial i}{\partial r} = \frac{\partial h_0}{\partial r} - \frac{\partial (uc_u)}{\partial r} = -\frac{\partial (\omega C)}{\partial r} = 0 \quad [4.119]$$

Això mateix es dedueix de l'equació [4.97], projectada en direcció radial. Observem de [4.76] que l'equilibri radial amb energia i velocitat axial uniformes en r anul·la les components $\Omega_{c,\theta}$ i $\Omega_{c,z}$ de la vorticitat (excepte compensació mútua dels termes de [4.118], situació poc probable a la pràctica), de manera que els productes $(\Omega_{c,r} \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{r}$ i $(\Omega_{c,r} \wedge \boldsymbol{w}) \cdot \mathbf{r}$ són nuls. Per tant, la hipòtesi d'equilibri radial en el supòsit indicat no es compleix, en general, si el flux és rotacional en direcció axial a l'entrada.

La condició anterior de moment cinètic constant a la sortida del rotor evidentment suposa un disseny molt concret de la cascada d'àleps. L'equació [4.28] mostra que, perquè es compleixi que Y_l sigui uniforme en r , és necessari que el producte $rIC_l w_\infty$



també sigui constant. Com que, segons els triangles de velocitats disposats en forma radial, la velocitat w_∞ creix en r , és necessari actuar sobre el producte lC_L perquè el conjunt es mantingui. Aquesta és la raó per la qual la majoria dels àleps estan torsionats en el sentit de disminuir l'angle d'atac (i, amb això, disminuir la seva sustentació) i que normalment siguin més curts a la punta que a la seva arrel.

Les condicions $\partial\Gamma/\partial r=0$ i $\partial c_z/\partial r=0$ a la sortida del rotor no són l'única possibilitat de disseny que condueix a $c_r=0$, però, si s'imposa una i no l'altra, no s'obindrà una distribució uniforme d'energia mecànica específica i, si es pretén mantenir això últim, llavors no hi haurà equilibri radial i apareixeran fluxos en aquesta direcció en el corrent principal. Com a alternativa de disseny oposada a la condició de vòrtex lliure irrotacional, es troba la de vòrtex forçat, segons la qual el fluid travessa el rotor girant al voltant de l'eix com un sòlid rígid. En aquest cas, és possible l'equilibri radial amb una distribució uniforme d'energia, si la velocitat axial compleix la condició (amb $c_{2u}=u$ a [4.118]):

$$c_z \frac{\partial c_z}{\partial r} = -2\omega^2 r \quad [4.120]$$

Aquesta situació no és coherent amb la irrotacionalitat a l'entrada i el suposat flux isentròpic, però com es mostra a la figura 4.19, té avantatges pràctics perquè redueix la velocitat perimetral del fluid a prop del cub. En canvi, com que també augmenten la velocitat a la punta de l'àlep i les pèrdues, el disseny d'un rotor en vòrtex forçat no és habitual, tret que s'executi combinat amb alguna forma amb el vòrtex lliure. Totes les possibilitats són el disseny exponencial: $c_u = k_1 r + k_2/r$, i l'alternança de tots dos: forçat des del cub fins a un radi intermedi i lliure fins a la punta.

Les distribucions d'energia i velocitat que condueixen a la condició d'equilibri radial es poden deduir de l'equació de l'energia [3.2], aplicada entre les seccions d'entrada i sortida al rotor en el cas que no hi hagi aportació de calor. Quan el flux és bidimensional, $c_{1r} = c_{2r} = 0$, la velocitat axial mitjana es conserva a les superfícies de corrent i $c_{1z} = c_{2z}$, aquesta equació pren la forma:

$$h_{02} - h_{01} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{1}{2}(c_{2u}^2 - c_{1u}^2) \quad [4.121]$$

Partint de la condició d'equilibri radial a la sortida i que $Y_t = h_{02}$ $h_{01} = u c_{2o}$ en un rotor axial amb entrada sense prerotació, s'obté:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial r} + c_{2u} \frac{\partial c_{2u}}{\partial r} = \frac{Y_t^2}{\omega^2 r^3} + \left(\frac{Y_t}{\omega^2 r^2} \frac{\partial Y_t}{\partial r} - \frac{Y_t^2}{\omega^2 r^3} \right) \quad [4.122]$$

d'on resulta l'equació:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial r} \left(\frac{Y_t}{u^2} - 1 \right) = 0 \quad [4.123]$$



segons la qual, l'equilibri radial també es verifica quan $Y_t(r)=u^2$, és a dir, $c_{2u}=u$ i $w_{2u}=0$, condició que es correspon amb el vòrtex forçat que hem vist abans, però que no mantindria uniforme l'energia específica h_{02} a la sortida.⁵⁴ És important observar que, en aquest cas, la condició de vòrtex forçat també suposa una velocitat axial mitja constant amb el radi, ja que, substituint $c_{2u}=u=\omega r$ a [4.117], tenim:

$$\frac{\partial(\omega^2 r^2)}{\partial r} = \frac{\omega r}{r} \frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial r} \tag{4.124}$$

i la seva derivada radial ha de ser nul·la. L'equilibri radial amb vòrtex forçat i velocitat axial uniforme impliquen, a la pràctica, dissenys d'àleps en forma helicoidal.

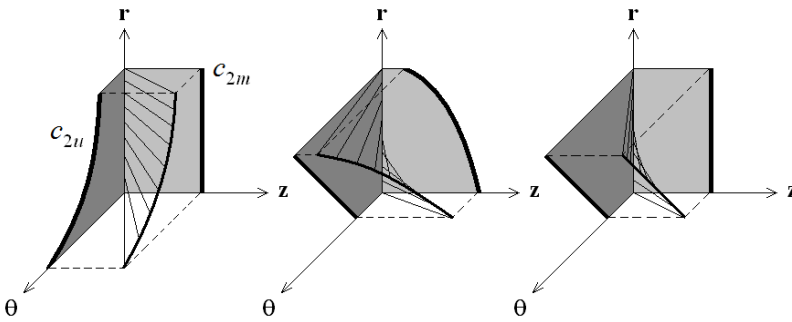


Figura 4.19. Distributions de velocitat absoluta en un rotor axial amb equilibri radial des del cub a la punta dels àleps. A l'esquerra i al centre, les característiques de vòrtex lliure i forçat a energia constant. A la dreta, el vòrtex forçat d'energia no constant.

En conclusió, la situació de disseny més favorable i, per tant, la més utilitzada és la que implica una distribució uniforme d'energia i velocitat axial, i un flux en forma de vòrtex lliure a través del rotor. Si, en el disseny d'una cascada axial d'àleps, s'imposa equilibri radial i que c_z sigui uniforme, però no $r_2 c_{2u}$, llavors l'energia intercanviada no serà uniforme amb el radi i es podran donar condicions de funcionament no estables. Si, en aquest cas, l'entrada fos en forma de vòrtex lliure amb $r_1 c_{1u} = C_1$ i $c_{1r} = 0$, és a dir, de vorticitat axial nul·la, l'energia mitjana comunicada seria el resultat de l'operació:

$$\pi(R_p^2 - R_C^2)\bar{Y}_t = 2\pi\omega \int_{R_C}^{R_p} r(rc_{2u}(r) - C_1)dr \tag{4.125}$$

El cabal que travessa el rotor quan la velocitat axial no és uniforme s'ha de calcular mitjançant integració, i és:

$$Q_R = 2\pi \int_{R_C}^{R_p} r c_z(r) dr \tag{4.126}$$



Tots dos casos impliquen, normalment, un procés de disseny iteratiu en què es fa servir l'equació general següent:

$$Q_R \bar{Y}_l = 2\pi\omega \int_{R_C}^{R_P} r(rc_{2u}(r) - C_1)c_z(r)dr \quad [4.127]$$

per a tancar el problema. En totes aquestes equacions, R_C i R_P són els radis del cub i de la punta d'àlep del rotor axial.

Ha de quedar clar que totes les situacions plantejades en aquest apartat suposen condicions de disseny i, per tant, només miren de condicionar la realitat perquè el flux principal tingui unes característiques particulars concordades al desig del dissenyador. El flux real mai serà més que una aproximació del flux de disseny, o a l'inrevés, i no sols perquè les condicions reals de treball inclouen efectes viscosos no previstos en aquesta anàlisi, sinó perquè la mateixa anàlisi exclou parts importants del problema per fer-lo més amable, com ara suposar una vorticitat d'entrada nul·la o un flux bidireccional. S'ha indicat ja en el text que el flux en un rotor axial (o radial) no pot ser axisimètric perquè la circulació s'incrementa amb z (o r); a continuació, s'explica que les superfícies de corrent tampoc són estrictament cilíndriques.

4.4 Introducció al flux real en un rotor

La teoria desenvolupada fins ara suposa que el flux és ideal a través de la màquina, ja que l'elevat número de Reynolds fa possible eliminar els termes viscosos de l'equació del moviment i els efectes de la conductivitat de l'equació de l'energia. És inqüestionable que la hipòtesi d'isèntropia només està justificada si el número de Reynolds és elevat i el disseny minimitza els efectes del despreniment de les capes límits que es generen sobre les superfícies mullades. En cas contrari, l'increment d'entropia s'estén a tot el camp fluid i l'entropia mitjana del fluid a la sortida és més gran que a l'entrada.

També s'ha suposat que el flux coincidia amb el de disseny i que l'orientació dels àleps era l'òptima per comunicar treball. Això, evidentment, no és possible en tots els punts de funcionament, ni fins i tot suposant fluid ideal, de manera que és de preveure que els efectes derivats del despreniment de les capes límit i de les pèrdues per xoc augmentin fora del punt de disseny i disminueixin el rendiment de la màquina.⁵⁵ Si la distància entre els àleps és gran, en comparació amb la seva longitud, i s'accepta que no hi haurà despreniment, llavors l'efecte de les capes límit sobre la velocitat mitjana del flux es pot incloure en el disseny sumant el seu gruix de desplaçament al gruix dels àleps. Aquesta aportació redueix el canal potencial exterior a la capa límit i, en general, afecta el camp de pressions, però continua sent un acostament incomplet al problema real, perquè no inclou l'aparició de molts fluxos secundaris deguts a la pèrdua de velocitat del fluid a l'interior de la capa límit.



El tractament analític clàssic accepta que el flux en un rotor radial és bàsicament unidimensional, és a dir, $c(r)$ i $w(r)$, i que en els axials és bidimensional: $c(r,z)$ i $w(r,z)$. En el primer cas, s'introdueix el coeficient de disminució del treball per posar de manifest la no uniformitat del flux en el canal entre àleps. En el segon, l'anàlisi se centra en superfícies de corrent cilíndriques en què r és constant i per a les quals fins i tot es planteja la possibilitat de dissenyar rotors capaços de comunicar la mateixa energia en totes. D'altra banda, s'ha vist que la presència de vorticitat a l'entrada de la màquina implica gradients de les variables del fluid no nuls en direcció normal a la línia de corrent, i que l'increment de circulació en els rotors fa impossible que pugui haver-hi simetria axial. Totes dues circumstàncies tenen lloc encara que el fluid sigui ideal i, juntament amb la presència dels efectes viscosos, compliquen el problema en fer-lo tridimensional.

És obvi que, com més efectes tridimensionals es puguin identificar en l'estudi de les turbomàquines, més fàcil serà trobar-ne l'origen i incorporar-los en la descripció del flux. Entre els efectes no viscosos més ocurrents, hi ha els que són conseqüència de la no uniformitat de la pressió en direcció normal, les fuites i recirculacions ocasionades pels gradients de la pressió a banda i banda dels àleps i la no estacionarietat del moviment en el rotor. Els efectes viscosos a les capes límits són els responsables de l'aparició de nombrosos fluxos secundaris, bé pel defecte de la velocitat en el seu interior o per la propagació i ampliació de la vorticitat generada aigües amunt.

Aquest apartat comença quantificant l'efecte de l'asimetria axial deguda a la generació de circulació en el rotor i continua explicant els efectes principals derivats de l'existència de capes límit i vorticitat a l'entrada de la màquina.

4.4.1 Asimetria axial del flux relatiu

La vorticitat absoluta a l'entrada d'un rotor pot ser no nul·la per diferents causes, algunes de les quals poden ser dominades i d'altres no. Es recorda que aquesta vorticitat ve definida per l'equació [4.74] i està relacionada amb la relativa mitjançant la [4.85]. La vorticitat relativa que sorgeix als rotors com a conseqüència de la rotació quan el flux absolut és irrotacional, $\Omega_w = -2\omega$, també s'anomena vorticitat *aparent*, ja que desapareix quan el fluid abandona el rotor.

Per norma general, els conductes d'entrada a les màquines són tubulars o de secció troncocònica en què predomina el moviment axial. La presència de capes límit en aquests conductes no genera vorticitat axial, $\Omega_{c,z}$, sinó perimetral, $\Omega_{c,\theta}$, que a més queda restringida al seu interior, on es compleix que $\partial c_z / \partial r$ és diferent de zero. Fora de les capes límit, el flux s'ha de mantenir irrotacional si es compleixen les condicions del teorema de Kelvin i s'eviten les causes que poden generar vorticitat de gran escala.⁵⁶ Com que l'equació [4.74] i la discussió posterior revelen que la combinació d'un flux unidireccional i un vòrtex lliure fan que $\Omega_{c,z} = 0$, i la vorticitat de tipus radial $\Omega_{c,r}$ només es presenta en algun tipus estrany de moviment vorticos, es pot assumir



que, en el flux principal fora de les capes límit, la vorticitat absoluta serà nul·la i es mantindrà així a l'interior del rotor.

Amb aquest supòsit, l'equació [4.85] i la [4.88] combinades permeten deduir importants relacions entre les components de la velocitat relativa dins del rotor. Com que s'ha de complir la identitat vectorial:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r w_u)}{\partial z} \right) \mathbf{r} + \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r w_u)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{z} = -2\omega \mathbf{z} \quad [4.128]$$

i, segons els triangles de velocitats, és $c_u = w_u + \omega r$, es dedueix:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} &= \frac{\partial (r w_u)}{\partial z} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial (u c_u)}{\partial z} \\ \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} &= 2\omega r + \frac{\partial (r w_u)}{\partial r} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial (u c_u)}{\partial r} \end{aligned} \quad [4.129]$$

Aquestes equacions es poden aplicar tant a un rotor axial com radial. En el primer cas, la circulació s'incrementa fonamentalment en direcció $\{z\}$, mentre que en el segon és en direcció $\{r\}$ i, per això, cadascuna d'aquestes equacions indica quina velocitat no és uniforme en la direcció perimetral $\{\varphi\}$ per a cada tipus de rotor. De manera recíproca, en un rotor axial, la segona equació és una identitat nul·la si hi ha equilibri radial i l'energia es distribueix uniformement entre les superfícies de corrent, però, si això últim no es compleix, llavors w_r no pot ser nul·la excepte en alguna línia mitjana del flux entre àleps, canviant de signe a banda i banda d'aquesta línia mitjana (observem l'evolució de la superfície S_1 de la figura 4.20). D'altra banda, la component $\Omega_{w,\varphi}$ de la vorticitat relativa ensenya que:

$$\frac{\partial w_r}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial r} \quad [4.130]$$

de manera que hi ha d'haver gradient de velocitat radial en direcció $\{z\}$, si la velocitat axial no és uniforme en $\{r\}$, cosa que també invalida la hipòtesi d'equilibri radial.⁵⁷

Encara que les components radial i axial de la velocitat relativa siguin constants en el rotor axial dissenyat amb equilibri radial, no ho pot ser la component perimetral i tampoc el mòdul de la velocitat relativa. La variació perimetral de la velocitat relativa en el canal de pas d'un rotor axial depèn de la curvatura dels àleps i de la seva solidesa, i va des d'un màxim en la cara de succió d'un àlep fins al mínim que es troba en la cara de pressió del següent. Aquesta relació no és estrictament lineal, però si s'accepta que w_u és constant en $\{\varphi\}$ i $w_r=0$, es veurà a continuació que la primera equació de [4.129] la relaciona amb el ritme de creixement de la circulació en els àleps. Quant a la variació radial del mòdul de la velocitat relativa, combinant adequadament les equacions [4.95], [4.116] i [4.119] en el supòsit d'equilibri radial amb vòrtex lliure, s'arriba a establir la relació:



$$\frac{1}{2} \frac{dw^2}{dr} = \frac{1}{r} (u^2 - c_u^2) = \omega^2 r - \frac{C^2}{r^3} \quad [4.131]$$

i, ja que en general $u > c_u$, el mòdul de la velocitat relativa i w_u creixen amb el radi. A més, com que u creix amb r però c_u decreix en equilibri radial en ser $c_u = C/r$, el ritme de creixement de la velocitat relativa augmenta en radis més grans.

S'obté una bona aproximació del gradient $\partial w_z / \partial \varphi$ teòric en un rotor axial si s'admet que $\partial(u c_u) / \partial z$ és constant al llarg del canal. Utilitzant la definició [4.28] de Y_t en la primera de [4.129], tenim:

$$\frac{\partial w_z}{\partial \varphi} = \frac{1}{\omega} \frac{Y_t}{l \sin \gamma} = \frac{1}{2} C_L \frac{r}{t} \frac{w_\infty}{\sin \gamma} \quad [4.132]$$

en què γ és l'angle de calat de l'àlep. Com que $t = 2\pi r / z$, $c_m = w_\infty \sin \beta_\infty$, i l'angle de calat no és gaire diferent de β_∞ (v. figura 4.4, de donde $\gamma = \beta_\infty + \alpha$), arribem a:

$$\frac{\partial w_z}{\partial \varphi} = \frac{z}{2\pi} \frac{1}{2 \sin \gamma \sin \beta_\infty} C_L c_m \approx \frac{z}{2\pi} \frac{1}{(1 - \cos 2\gamma)} C_L c_m \quad [4.133]$$

i, per tant, l'ordre de la variació aproximada de la velocitat axial relativa (entre dos àleps) respecte de la meridional ve donada per:

$$O\left(\frac{\Delta w_z}{c_m}\right) \approx O(C_L) = 1 \quad [4.134]$$

Aquesta equació posa de manifest que, en general, la variació de la velocitat relativa en direcció $\{z\}$ és del mateix ordre que la velocitat meridional i independent del nombre d'àleps.⁵⁸

Fent el mateix en el cas d'un rotor radial, tenim, amb [4.36] i la segona de [4.129]:

$$\frac{\partial w_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{\omega} \frac{Y_{t,\infty}}{r_2 - r_1} = \omega \frac{r_2^2}{r_2 - r_1} \psi \quad [4.135]$$

Suposant que $r_2 / r_1 \approx 2$ i que $\psi \approx 1/2$, aquesta expressió se simplifica a la forma:

$$\frac{\partial w_r}{\partial \varphi} = \omega \frac{r_2}{r_1} \frac{r_2}{r_2 - 1} \psi \approx \omega r_2 \quad [4.136]$$

i l'ordre de magnitud de la variació de la velocitat radial respecte de la perimetral és:⁵⁹

$$O\left(\frac{\Delta w_r}{u_2}\right) \approx \frac{2\pi}{z} \quad [4.137]$$

nul·la si el nombre d'àleps és infinit i aproximadament la unitat, en la pràctica.



Comparant les equacions [4.134] i [4.137] entre si, resulta:

$$O\left(\frac{\Delta w_z}{\Delta w_r}\right) \approx \frac{c_m}{u_2} \quad [4.138]$$

d'on es dedueix que la variació de la velocitat axial, en un rotor axial, respecte de la variació de la velocitat radial, en un rotor radial que tingui la mateixa velocitat perifèrica, és de l'ordre del coeficient de velocitat de la màquina axial, ϕ , avaluat en r_2 , on és mínim (i, en qualsevol cas, inferior a la unitat).

Les variacions de les velocitats axial i radial en direcció perimetral estimades en aquest apartat són les teòriques i serveixen per justificar que no s'utilitzi el paràmetre e_z a les bombes axials.⁶⁰ Com es veurà més endavant quan s'expliqui el flux real viscos en els rodets de les bombes radials, les capes límit que es desenvolupen a banda i banda dels àleps redueixen aquesta diferència, de manera que la variació de la pressió en el canal entre àleps és inferior a la teòrica i es disminueix la capacitat de comunicar parell per l'àlep.

4.4.2 Superfícies generalitzades de corrent

Per donar compte, de manera senzilla, del flux tridimensional estacionari a través d'un rotor, tant en el cas en què l'entrada és rotacional com irrotacional, es pot plantejar l'estudi del flux bidimensional en dues classes diferents de superfícies de corrent relatives. La tria d'aquestes superfícies es fa de manera que la seva intersecció amb el pla z formi un arc circular en un cas i una línia radial en l'altre. El flux tridimensional pot ser descrit amb tantes superfícies com calgui en funció de la precisió buscada, tenint en compte que les seves velocitats característiques estan relacionades entre si i han de ser compatibles amb l'equació de continuïtat $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$. Aquestes superfícies, anomenades S_1 i S_2 , respectivament, es mostren a la figura 4.20 per a un rotor axial.

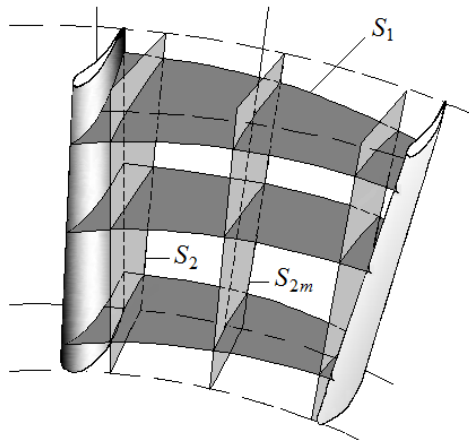


Figura 4.20. Superfícies generalitzades S_1 i S_2 en un rotor axial.



La superfície S_1 es pot considerar una superfície de revolució en un rotor axial si la vorticitat absoluta del flux a l'entrada és petita i els àleps han estat dissenyats per proporcionar triangles de velocitats en forma de vòrtex lliure (condicions de disseny en equilibri radial). Si l'experiència ensenya que això no és així i les velocitats experimenten canvis importants en la direcció radial, llavors és més satisfactori considerar que la línia mitjana d'aquestes superfícies és un arc de circumferència i que l'asimetria es presenta de manera equitativa a banda i banda d'aquesta línia, aigües amunt i aigües avall, torsionant la superfície tal com s'observa a la figura (amb la w_r positiva en la superfície de succió a partir de la línia mitjana). Respecte de les superfícies S_2 , és evident que la més important és la situada a mitjana distància entre dos àleps, S_{2m} , de manera que el cabal es distribueixi a parts iguals a banda i banda d'aquesta.

Les coordenades d'aquestes superfícies compleixen la relació $S_i(r, \varphi, z) = 0$ i les seves diferències venen descrites per:

$$\frac{\partial S_i}{\partial r} dr + \frac{\partial S_i}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial S_i}{\partial z} dz = 0 \quad [4.139]$$

Considerant un vector normal a la superfície de components: $\mathbf{n} = n_r \mathbf{r} + n_u \boldsymbol{\varphi} + n_z \mathbf{z}$, de manera que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0$, és fàcil comprovar que es compleix:

$$\begin{aligned} n_r w_r + n_u w_u + n_z w_z &= 0 \\ n_r dr + n_u r d\varphi + n_z dz &= 0 \end{aligned} \quad [4.140]$$

A la descripció del flux en les superfícies S_1 d'un rotor axial, és convenient descriure la coordenada r en funció de les altres dues, perquè aquestes superfícies no difereixen molt de superfícies de revolució. D'aquesta manera, qualsevol magnitud q del flux es pot suposar una funció del tipus $q(r(\varphi, z), \varphi, z)$.

Utilitzant la segona equació [4.140], la variació d'aquesta propietat en un pla z constant és:

$$dq_z = \left(\frac{\partial q}{\partial \varphi} - r \frac{n_u}{n_r} \frac{\partial q}{\partial r} \right) d\varphi_z \quad [4.141]$$

i, quan es manté l'angle φ constant:⁶¹

$$dq_\varphi = \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{n_r} \frac{\partial q}{\partial r} \right) dz_\varphi \quad [4.142]$$

Aquestes equacions, combinades amb la primera de [4.140], permeten escriure (en flux estacionari):

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{w_u}{r} \left[\frac{\partial q}{\partial \varphi} \right]_z + w_z \left[\frac{\partial q}{\partial z} \right]_\varphi \quad [4.143]$$

que es pot relacionar amb [4.102], o qualsevol altra derivada substancial del flux.



En el cas d'un rotor radial, la variació de la magnitud q en S_1 es descriu millor de la forma $q(r, \varphi, z(r, \varphi))$, i el desenvolupament anterior porta a:

$$\begin{aligned} dq_\varphi &= \left(\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{n_r}{n_z} \frac{\partial q}{\partial z} \right) dr_\varphi \\ dq_r &= \left(\frac{\partial q}{\partial \varphi} - r \frac{n_u}{n_z} \frac{\partial q}{\partial z} \right) d\varphi_r \\ \frac{Dq}{Dt} &= w_r \left[\frac{\partial q}{\partial r} \right]_\varphi + \frac{w_u}{r} \left[\frac{\partial q}{\partial \varphi} \right]_r \end{aligned} \quad [4.144]$$

Aquestes equacions mostren que, per a la determinació del flux en la secció S_1 , cal conèixer la variació radial de la magnitud q . Aquesta variació es pot calcular seguint el flux a les superfícies de corrent de segona classe, S_2 , per a les quals la magnitud q es descriu de la forma $q(r, \varphi(r, z), z)$, i les relacions anteriors s'escriuen:

$$\begin{aligned} dq_z &= \left(\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{n_r}{n_u} \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) dr_z \\ dq_r &= \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{n_z}{n_u} \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) dz_r \\ \frac{Dq}{Dt} &= w_r \left[\frac{\partial q}{\partial r} \right]_z + w_z \left[\frac{\partial q}{\partial z} \right]_r \end{aligned} \quad [4.145]$$

Totes aquestes equacions, combinades amb les d'apartats anteriors, permeten descriure el flux tridimensional de manera aproximada i poden ser complementades amb mètodes numèrics. En qualsevol cas, fins ara s'ha suposat que els efectes viscosos són menyspreables, cosa que se sap que no és cert en el veïnatge dels contorns, siguin fixos o mòbils, en què es genera vorticitat que és transportada (i ampliada en presència de viscositat) pel flux i forma multitud de fluxos secundaris.

4.4.3 Fluxos secundaris en un rotor axial

La introducció dels efectes viscosos associats a la presència de les capes límit sobre els contorns no sols imposa una disminució del rendiment de la màquina quan disminueix les prestacions aerodinàmiques dels perfils, sinó que també suposa un mecanisme de generació de vorticitat que desencadena l'aparició de diversos fluxos secundaris. Aquests fluxos secundaris apareixen majoritàriament en direcció perpendicular al flux principal i no es poden aïllar els uns dels altres perquè interaccionen entre si i amb el corrent principal. Aquesta circumstància complica l'anàlisi, perquè sovint dos efectes es poden contraposar i desaparèixer o amplificar-ne un tercer.

El flux real és de naturalesa tridimensional i no estacionària. En aquest apartat, s'expliquen la naturalesa i l'origen dels fluxos secundaris principals que apareixen en un



rotor axial, però no la seva interacció, per a això s'anima el lector que consulti articles tècnics especialitzats. La característica que defineix millor la tridimensionalitat del flux en el rotor axial és el fenomen d'enguerximent o torsió de les superfícies de corrent S_1 , conegut com *warping*. Els desprendiments i fluxos secundaris deguts a la rotació són els causants d'aquest enguerximent, cosa que invalida clarament la teoria bidimensional i també explica l'augment d'entropia total. A més, aquests fluxos evidentment s'agregen quan el rotor treballa fora de les condicions nominals o apareixen fenòmens no estacionaris, com el desprendiment rotatiu, que s'explica més endavant.

La teoria clàssica se centra en la naturalesa de los fluxos secundaris que apareixen per la convecció de la vorticitat d'entrada, Ω_1 , como a conseqüència de la deflexió del corrent quan passa per la corona d'àleps (figura 4.21). Atès que, en el flux ideal, potencial i isentròpic, la vorticitat només pot ser transportada, l'equació [2.36] per al flux incompressible mostra que, en el canal divergent d'una bomba o ventilador axial, la vorticitat ha de créixer, ja que la circulació es manté. En presència de viscositat, no obstant, no hi ha motiu perquè sigui així, perquè la vorticitat es pot difondre i realimentar-se combinant la deflexió de la corrent i la vorticitat generada a las capes límit. En general, el transport de la vorticitat més aquest efecte donen lloc a dos vòrtexs principals en la direcció del flux, Ω_s , en cub i punta, que giren en sentit contrari i divideixen el flux de sortida en dos. Tot i que aquest fenomen sol ser el més important de tots perquè es manifesta en tot el canal, s'ha de superposar als fluxos secundaris que apareixen per la presència de capes límit internes i d'altres que s'expliquen a continuació.

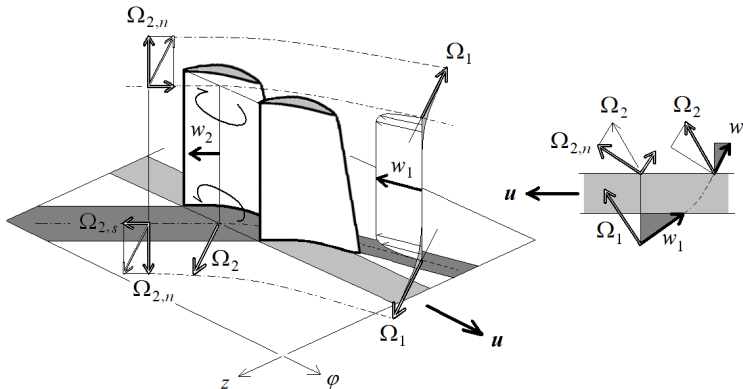


Figura 4.21. Visualització del flux secundari principal causat per la deflexió de la vorticitat. Es mostra també el perfil de velocitat a l'entrada (suposada uniforme, excepte per les capes límits, on hi ha vorticitat normal al flux, $\Omega_1 = \Omega_c \theta$). El vector vorticitat Ω_1 és transportat pel fluid en el supòsit ideal i disminueix en magnitud per l'expansió que experimenta el flux relatiu en el canal divergent format pels àleps. Sense aquesta expansió i en absència de viscositat, es tindria $\Omega_1 = \Omega_2$. En presència de viscositat, Ω_2 pot ser més gran que Ω_1 , però no seria perpendicular al flux de sortida en qualsevol cas. Aquesta deflexió fa aparèixer una component longitudinal, $\Omega_{2,s}$, de signe oposat en cub i punta, que divideixen el flux en dos vòrtexs principals (el del cub sempre gira en sentit contrari a la rotació). A la dreta, es mostra l'evolució de la vorticitat en el cub. Tots els vectors vorticitat de la figura es troben en plans (φz) .



En el supòsit d'equilibri radial s'ha de verificar l'equació [4.91], que també es pot escriure en funció dels mòduls de les velocitats de la manera següent (comptem que w_u té sentit contrari a u):

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \left(\rho \frac{w_u^2 + u^2}{r} - 2\rho \frac{uw_u}{r} \right) = 0 \quad [4.146]$$

Aquesta equació mostra que, en el moviment mitjà estacionari a través del canal, el gradient de pressió en direcció radial és equilibrat per les forces centrífugues (el primer sumand del parèntesi de [4.146]) i les centrípetes (el terme de Coriolis) per unitat de volum. És un resultat conegut de la mecànica de fluids que el gradient de la pressió en direcció normal a la capa límit és petit, de manera que el gradient de [4.146] s'observa també a l'interior de les capes límit que progressen sobre les cares laterals dels àleps. Ara bé, com que la velocitat w_u és inferior a l'interior de la capa límit però la velocitat d'arrossegament es manté i, en conjunt, les forces que depenen de w_u són menors,⁶² l'expressió anterior indica que a la capa límit ha de ser (amb velocitats referides a la capa límit):

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \rho \left(\frac{w_u^2 + u^2}{r} - 2 \frac{uw_u}{r} \right) > 0s \quad [4.147]$$

de manera que hi ha un excés de gradient de pressió radial que, evidentment, ha de ser compensat per algun altre efecte. Això, a la pràctica, condueix a l'aparició de velocitat w_r en el veïnatge de les parets dels àleps i en sentit ascendent, fet que augmenta la força centrípeta i el fregament, i restitueix l'equilibri de forces. La curvatura de les línies de corrent cap a la punta dels àleps deguda a aquest fenomen és coneguda amb el nom d'*escombratge*, perquè escombren literalment la superfície dels àleps en direcció radial.

A les superfícies del cub (i de la carcassa exterior, en els rotors tancats), també es desenvolupen capes límit en què, en general, u és constant (o nul·la). En direcció normal a les línies de corrent fora d'aquestes capes límit s'ha de complir [4.110], cosa que dona lloc a la diferència de pressió entre totes dues cares de l'àlep. Com que l'energia cinètica relativa és menor a la capa límit i el gradient extern de la pressió es percep en el seu interior com a propi, resulta que, en elles, la condició [4.110] s'escriu (tinguem present ara que la pressió disminueix en direcció normal):

$$\frac{\partial p}{\partial n_w} + \rho w \frac{\partial w}{\partial n_w} < 0 \quad [4.148]$$

En aquesta ocasió, l'efecte que compensa l'excés (per negatiu) de gradient de pressió no es pot deure a la velocitat radial, ja que el contorn n'inhibeix, en gran manera, l'aparició, ni tampoc a les forces centrífugues o de Coriolis, ja que són perpendiculars (o gairebé) a la direcció normal. Davant un gradient de pressió en direcció normal superior en mòdul al que correspon a la velocitat relativa en la capa límit, el fluid



respon corbant les línies de corrent per augmentar el terme w^2/R de l'equació [2.95]. A més, el nou equilibri ara s'ha d'aconseguir amb un mòdul de la velocitat relativa que és menor com més petita és la distància al contorn,⁶³ de manera que les línies de corrent es corben més com més petit és w i acaben per dirigir el fluid directament cap a l'àlep (escombratge perimetral). Aquesta torsió del perfil de la velocitat a la base dels àleps transcorre des de la cara de pressió fins a la cara de succió situada enfront, on per fi s'acumula el fluid i, per continuïtat, té lloc l'aixecament del corrent quan arriba a l'àlep. Com a resultat addicional, es generen altres fluxos secundaris deguts a l'aparició de vorticitat radial, $\Omega_{w,r}$, a l'interior de la capa límit, i longitudinal, $\Omega_{w,s}$, a les cantonades.⁶⁴

Finalment, hi ha un flux secundari associat l'espai de punta i a la diferència de pressió entre totes dues cares de l'àlep. Aquest flux suposa una fuga, que pot ser important i dominar altres fluxos secundaris, i genera un vòrtex longitudinal, semblant al que s'observa a l'extrem de les ales dels avions, que s'anomena *vòrtex de punta* (*tip vortex*). Així mateix, prop de la carcassa de la màquina apareix també una zona d'interferència que es deu a les altes velocitats perimetrals, que indueix una recirculació que es contraposa al flux secundari principal i té un caràcter intermitent.

A tots aquests fluxos secundaris, cal afegir-hi la vorticitat que apareix per l'obstrucció que suposen els àleps al flux principal i també la que transporta, sigui en forma de deixants generats en etapes anteriors o per efectes de prerotació. A l'entrada de la primera etapa, el flux arriba almenys amb vorticitat en direcció perimetral, $\Omega_{c,\theta}$, per l'existència de capes límits en els conductes. Aquesta vorticitat porta associades unes línies de vorticitat que es defleixen quan es troben amb els àleps i generen vòrtexs longitudinals de ferradura, coneguts com *horse-shoe vortices*, que s'estenen a banda i banda del perfil (però sobretot al cub, on els àleps són més gruixuts) i giren en sentit contrari a l'interior del canal, escombrant la base dels àleps cap a l'interior.

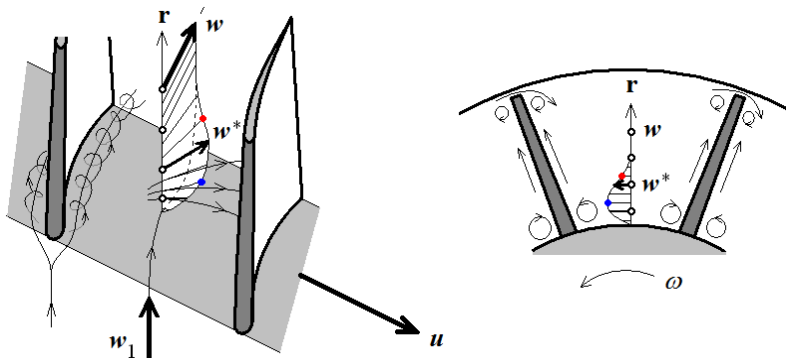


Figura 4.22. Fluxos secundaris en un rotor axial (el gruix de la capa límit s'ha engrandit per qüestions de perspectiva gràfica). A l'esquerra, s'observa la generació de vòrtexs de ferradura i l'enguixament de la capa límit del cub (escombratge perimetral). A la dreta, un detall des d'aigües avall del rotor.



4.4.4 Fluxos secundaris en un rotor radial

La teoria potencial (irrotacional) prediu l'existència d'una vorticitat relativa a l'interior del rotor radial de valor $\Omega_w = -2\omega$, la interpretació de la qual es pot deduir de la figura 4.14 i que dona lloc a l'ús del coeficient e_z . En teoria, el perfil de velocitats resultant és fruit de la superposició al flux mitjà d'un flux secundari que no aporta cabal i que justifica la diferència de pressió a banda i banda de l'àlep. No obstant això, aquest flux, que alguns autors anomenen *de desplaçament*, omet la influència dels efectes viscosos i l'efecte que el desenvolupament de les capes límit té sobre el flux relatiu.

S'ha observat experimentalment que el flux en un rotor radial normalment es desprèn de la cara de succió dels àleps en un punt pròxim a la vora de sortida, fins i tot quan el rotor funciona en condicions de disseny. Això és conseqüència de la incapacitat del fluid de seguir les altes velocitats perimetrals i origina deixants darrere de cadascun dels àleps. Com a conseqüència, el flux s'ha d'accelerar a la resta de la secció meridional, en concret a la cara de pressió dels àleps, i en resulta un flux de descàrrega típic format per una estructura de rajos-deixants (*jet-wake structure*) com el que es mostra a la figura 4.23. Aquest efecte s'agreuja en coeficients de velocitat baixos, quan augmenta el gruix dels deixants i avança el despreniment.⁶⁵ Observem que aquesta estructura contraresta l'efecte del flux de desplaçament de la teoria bidimensional i, per tant, disminueix la capacitat de transmetre parell.⁶⁶

Sobre la cara de pressió dels àleps també hi pot haver despreniment de la capa límit. Com que el gruix de la capa límit és inferior al radi de curvatura dels àleps, R , es pot acceptar que el flux en el seu interior segueix una evolució semblant a la corresponent a una placa plana. En aquest cas, s'ha de complir:

$$w^* \frac{\partial w^*}{\partial s_w^*} + w_n^* \frac{\partial w^*}{\partial n_w^*} = w \frac{\partial w}{\partial s_w} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_w^{*2}} \quad [4.149]$$

en què les magnituds asterisc estan referides a l'interior de la capa límit i al seu corrent. D'aquesta expressió se'n dedueix que hi ha risc de despreniment de la capa límit quan el moviment principal és divergent, i per això interessa, en general, que w creixi al llarg del canal entre àleps per a afavorir l'adherència del flux. Per tant, en cabals petits, el perill de despreniment és més gran perquè la quantitat de moviment del fluid és més petita, i es pot generar a l'entrada del rotor una zona de circulació tancada similar a la característica de cabal nul. Per a cabals elevats, la zona de despreniment s'endarrereix, alhora que augmenten les velocitats mitjanes a l'interior del canal (també es redueix l'estructura de rajos-deixants). Això implica que la diferència de pressió entre totes dues cares es redueixi i la capacitat del rodet de transmetre parell disminueixi.⁶⁷

El remei per evitar aquests despreniments passa per aconseguir que la velocitat relativa augmenti amb el radi i, per a això, segons els triangles de velocitats a l'entrada i



a la sortida, es pot: disminuir u_1 per a una velocitat de rotació determinada, cosa que no és apropiat perquè redueix la secció de pas en el conducte d'admissió i produeix altres pèrdues; disminuir c_{1m} per a un u_1 donat, fet que equival, per a un mateix cabal, a augmentar la secció d'entrada; disminuir c_{2u} per a un u_2 donat, cosa que redueix l'altura comunicada; augmentar c_{2m} , la qual cosa suposa reduir la secció de sortida, i augmentar β_2 , això al final resulta desfavorable perquè redueix la longitud dels àleps i, de fet, converteix el canal en divergent (v. figura 4.7). Aquestes circumstàncies condueixen a una conclusió que explica per què l'altura dels àleps d'un rotor radial és més gran a l'entrada que a la sortida, és a dir, $b_1 > b_2$, i que el flux no hi sigui estrictament radial.

Per concloure aquest apartat, s'explica el flux secundari que apareix sobre les parets laterals del rodet. En direcció normal a la línia de corrent relatiu, es compleix l'equació [4.112], que és vàlida tant a l'interior com a l'exterior de la capa límit. Si els àleps tenen una curvatura baixa o moderada, el terme w^2/R es pot menysprear respecte de la resta de termes, i a l'interior de la capa límit que evoluciona sobre les parets laterals és (amb $w > w^* > 0$):

$$\frac{\partial}{\partial n_w} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + 2\omega w^* < 0 \tag{4.150}$$

Això vol dir que les línies de corrent de la capa límit es desvien seguint el gradient imposat per la pressió externa i la força centrífuga en direcció normal. A diferència del que s'ha exposat al cub d'un rotor axial, aquí el flux no pot augmentar la curvatura original de les línies de corrent relatiu, perquè això el desviaria cap a la cara de pressió de l'àlep contra un gradient de pressió advers. Al contrari, el flux a les capes límit té tendència a invertir la seva curvatura fins a fer-se gairebé radial en el veïnatge de la paret, tal com s'aprecia a la figura 4.23, i anul·lar així el gradient combinat de la pressió externa i la força centrífuga en direcció normal a la seva línia de corrent. Aquest efecte s'agreuja a mesura que ens acostem a la paret lateral, on es compleix:

$$\frac{\partial}{\partial n_w^*} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + 2\omega w^* = \frac{\partial}{\partial n_w^*} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) = 0 \tag{4.151}$$

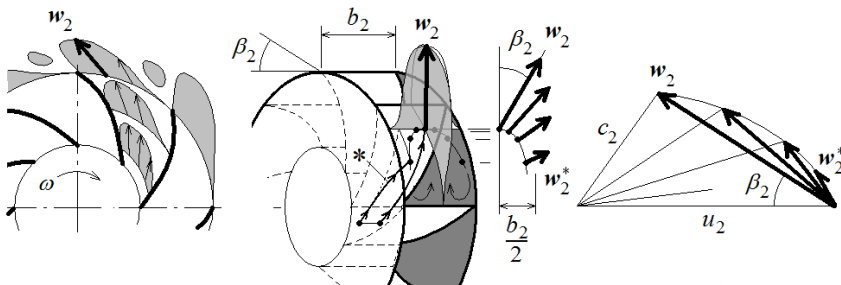


Figura 4.23. A l'esquerra, estructura de rajos-deixants observable en la descàrrega d'un rotor radial. Al centre i a la dreta, flux secundari a les parets laterals d'un rodet centrífug i evolució del triangle de velocitats a mesura que les línies de corrent s'acosten a la paret i el flux relatiu es converteix en radial.



4.4.5 Condicions de vorticitat a l'entrada

Les condicions a l'entrada d'un rotor són d'irrotacionalitat si la bomba aspira fluid d'un dipòsit en què el fluid està en calma i es compleixen els supòsits del teorema de Kelvin. No obstant això, és possible (i freqüent) que el flux potencial a l'entrada presenti una vorticitat no nul·la, sense que per això es violi aquest teorema. A més, encara que els efectes de la viscositat es restringeixin al desenvolupament de capes límit en els conductes d'entrada de la bomba i el flux potencial exterior sigui irrotacional, s'ha vist que la vorticitat perimetral que hi ha a les capes límit, $\Omega_{c,\theta}$, indueix l'aparició de diversos fluxos secundaris que afecten el funcionament global de la màquina i donen lloc a la gestació de vorticitat en sentit longitudinal.

Entre les circumstàncies més comunes de generació de vorticitat a l'entrada de les màquines, hi ha la prerotació, usualment associada a l'aparició de mànegues o cucs d'aire en l'aspiració (*air-filled inlet vortex*), i els fluxos de retorn (*backflows*). Els primers apareixen quan no es respecten les mínimes regles de submergència, mentre que els segons són causats pel mateix rotor en moviment quan no pot evitar les fuites internes que es deriven cap a l'entrada.

La prerotació té l'origen en les petites no uniformitats del moviment a gran escala que es generen al dipòsit durant l'aspiració. Encara que la vorticitat no es pugui difondre en absència de viscositat, l'acceleració del flux potencial pot amplificar qualsevol petita vorticitat preexistent al dipòsit i fer que la hipòtesi d'irrotacionalitat deixi de ser vàlida, ni tan sols com a aproximació. La vorticitat es manté pràcticament constant fins al rotor una vegada que el flux arriba el conducte d'aspiració (si és de secció recta constant). Si les condicions són tals que es genera una mànega d'aire com la de la figura 4.24, llavors les baixes pressions del nucli de la mànega arrosseguen aire cap a si i la màquina experimenta a l'interior alguna mena de flux mixt. Aquests fluxos suposen sempre una reducció dràstica de les prestacions de la màquina, alhora que la desequilibren dinàmicament i originen l'aparició de vibracions, soroll i cavitació.

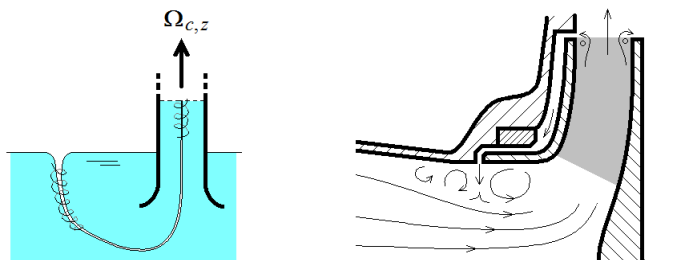


Figura 4.24. Visualització esquemàtica d'una mànega d'aire a l'aspiració (esquerra) i del flux de retorn a l'entrada d'un rodet centrífug per fuites internes (dreta).



Els fluxos de retorn es deuen a la diferència de pressió a banda i banda del rotor. El cabal de recirculació per fuites apareix a l'entrada en forma de raig anular, la distància de penetració del qual augmenta a mesura que disminueix el coeficient de velocitat (i augmenta el de pressió). Aquest efecte pot arribar a suposar la inversió del flux en un 30% de la secció d'entrada i estendre's per difusió aigües amunt fins que pràcticament tota presenti una vorticitat no nul·la. És evident que aquest reflux afecta la velocitat d'incidència al rotor en qualsevol radi, i només es pot evitar reduint al mínim la recirculació de les fuites internes o incorporant al conducte d'entrada de la bomba alguna mena de deflector que eviti la distorsió del camp fluid i recuperi, en la mesura que sigui possible, l'energia del flux de retorn.

4.4.6 Flux no estacionari i inestabilitat

Entre l'entrada i la sortida del flux adiabàtic estacionari a través d'una turbomàquina, les condicions són tals que el treball transferit amb l'eix pot ser calculat mitjançant l'increment de l'entalpia de rabeig mitjana. D'altra banda, encara que l'estat global mitjà del fluid a l'interior del volum de control no canviï en el curs del temps, l'equació [4.103] i d'altres que s'han vist en aquest tema posen de manifest que l'estat de les partícules individuals de fluid es veu alterat durant el seu trànsit. Si no fos així, s'arribaria a una inconsistència coneguda com a *paradoxa de Dean*, segons la qual la màquina seria incapaç de comunicar treball.⁶⁸

A l'interior de la màquina, per tant, el flux ha de ser no estacionari, que no vol dir inestable, perquè pugui canviar l'entalpia de rabeig. El camp de pressió associat amb els àleps és tal que la pressió augmenta des de la superfície de succió fins a la de pressió i es mou amb els àleps. Un observador situat en un punt fix de l'espai verifica que la pressió varia amb el temps, de manera que les partícules que passen a través del rotor mostrarien un $\partial p/\partial t$ positiu i, amb l'equació [4.102], un Dh_0/Dt també positiu. Si s'està interessat en el valor mitjà d'aquests canvis, una alternativa és fer servir un sistema de coordenades fix als àleps individuals, en què el flux és estacionari i es conserva la rotalpia al llarg de la línia de corrent relatiu.

A fi de considerar els paràmetres rellevants del flux no estacionari, s'associa a la seva variació temporal entorn d'un element de la màquina (sigui un perfil aerodinàmic, un estator, un difusor, etc.) una escala de temps de valor $1/\omega$; és a dir, els canvis significatius transcorren en un temps de l'ordre d' $1/\omega$. Una altra escala temporal a tenir en compte és l'associada al temps de residència, λ/v , en què λ és la longitud del domini del flux, i v , la velocitat de fluid. El canvi en les magnituds locals del flux durant el pas de la partícula depèn de la relació de tots dos temps, és a dir, d'una forma del número de Strouhal: $\omega\lambda/v$, anomenada en l'argot "freqüència reduïda". El valor d'aquest número adimensional constitueix una mesura de la importància relativa dels efectes no estacionaris enfront dels efectes quasiestacionaris. Així, si el número



és molt inferior a la unitat, els efectes no estacionaris són petits i el flux és quasiestacionari, i viceversa. A la taula 4.1, es mostren les escales típiques de longitud i temps associades a les diferents classes de no estacionarietat del flux en turbomàquines.

Causa de no-estacionarietat	Extensió	Temps [s]
Turbulència	$< l$	
Deixants	l	10–4
Interaccions amb àleps aigües amunt	l	10–4
Distorsió d'entrada	r	10–3
Despreniment rotatiu	r	10–2
Oscil·lació de massa	$> r$	10–1

Tabla 4.1. Escales típiques de longitud i temps associades a les diferents classes de no estacionarietat del flux en turbomàquines. l és la corda de l'àlep (figura 4.4), i r , el radi de la màquina.

L'experiència confirma que les pèrdues en una màquina són mínimes quan la distribució de la pressió i de la velocitat és uniforme i no hi ha xoc a l'entrada del rotor. Aquesta situació és ideal, en el sentit que només es troba en el punt de màxim rendiment quan el flux real s'aproxima a l'utilitzat per establir la geometria del rodet en la fase de disseny.

En un sentit ampli, s'engloba dins del terme *inestabilitat* un gran nombre de condicions desfavorables de funcionament en una turbomàquina. Aquestes condicions són especialment freqüents a càrrega parcial i es manifesten en una caiguda de la corba característica d'energia de la màquina i del seu rendiment. Les inestabilitats generen pulsacions del camp fluid i vibracions que, sota determinades condicions, poden ser considerables. La magnitud de la pulsació és funció dels mecanismes d'ampliació que les afectin i de la coincidència d'alguna de les freqüències intervinents entre si, sigui la de la mateixa inestabilitat, del fluid o de l'estructura.⁶⁹

Entre els fenòmens que es relacionen amb el funcionament inestable, hi ha la separació del flux en el canal entre àleps; el despreniment rotatiu; l'aparició de flux invers o recirculació, i l'existència de prerotació a l'entrada. Aquestes inestabilitats passen quan (i són conseqüència de) el pendent de la corba característica de la màquina és positiu, la qual cosa es deu, en certa manera, a la presència de despreniments en el corrent. Molts treballs experimentals han demostrat que tots aquests fenòmens apareixen de manera seqüencial i en l'ordre indicat, però encara no s'ha aconseguit predir, de manera precisa, l'inici del despreniment malgrat que les seves causes i efectes siguin ben coneguts.

Quan el cabal de la màquina es redueix per sota del punt de disseny, l'energia cinètica del fluid que s'acosta al rodet és menor i és més fàcil que el corrent es desvii cap a



zones de menys pressió. El fluid tendeix a triar el camí de menys resistència i es dirigeix a les superfícies de succió dels àleps (v. figura 4.2) tot adquirint, amb això, una component de velocitat addicional en la direcció de la rotació que canvia el seu angle d'incidència. Si la diferència amb les condicions de disseny és petita, aquesta redistribució del camp de velocitats amb prou feines té influència i es pot ignorar, però, a partir d'un cabal determinat, anomenat crític, augmenta l'extensió del remolí sobre les superfícies dels àleps fins que el corrent se separa de la seva superfície de succió. En aquest sentit, aquest fenomen és semblant al que es presenta en una ala d'avió o en un difusor, però el fet que en un rotor hi hagi diversos àleps girant provoca un flux de característiques més complexes i axisimètric. A més, el despreniment es pot estendre a altres zones de la màquina i desencadenar una sèrie de perturbacions importants que en disminueixen el rendiment i provoquen soroll i vibracions. Entre els fenòmens desencadenats per aquest fenomen hi ha el despreniment rotatiu (*rotating stall*), que s'explica a continuació, consistent en el desplaçament al voltant del rodet i en el sentit de gir d'una o més regions de flux retardat o invertit que ocupen part o tota l'altura de l'àlep.

Suposem la cascada axial de la figura 4.25 a què s'aproxima un corrent no uniforme que ha provocat el despreniment de la capa límit de la cara de succió de l'àlep B. Com a conseqüència de la disminució del flux pel canal A-B, el corrent d'aproximació a l'àlep A ho fa amb un angle d'incidència més gran, cosa que en provoca el despreniment. Alhora, el corrent que s'aproxima a l'àlep C disminueix el seu angle d'incidència i és més estable. D'aquesta manera, la cèl·lula inicial A-B, en què el flux es pot interpretar bloquejat, es propaga al llarg de la cascada en la direcció d'empenta dels àleps.

S'entén que el despreniment rotatiu apareix a causa de la incapacitat del corrent d'omplir tota l'àrea que se li ofereix, cosa que redueix el nombre d'àleps actius i justifica la pèrdua d'energia comunicada. El patró del lliscament és tan variable i depèn de tants factors, que sembla improbable que les prediccions teòriques desenvolupades per estimar la velocitat de propagació de les cèl·lules o el seu nombre i longitud, puguin ser prou precises per ser utilitzades pels projectistes (aquest problema és especialment delicat en els compressors axials multietapa). Se sap que la velocitat de rotació d'aquestes cèl·lules es troba entre el 20% i el 70% de la velocitat de gir del rotor, que no és dir gran cosa, i també que l'angle de calat és un paràmetre molt important. La caiguda en despreniment és possible a partir del coeficient de cabal per al qual la corba de pressió és horitzontal, i és més brusca i profunda com més gran és el calat. L'extensió de la zona d'inestabilitat en cabal afectada pel despreniment rotatiu també augmenta amb el calat i pot comportar l'aparició d'un bucle d'histeresi com el que es mostra a la figura adjunta (tot i que això és més freqüent en els compressors que en els ventiladors axials).

Quan, en una màquina axial, el cabal es redueix encara més per sota de la zona de despreniment, té lloc una nova distribució del flux d'entrada que origina recirculacions d'entrada i prerotació. La recirculació consisteix en la formació d'un volum toroidal de fluid en rotació a la zona del canal d'entrada contigu a la part superior de la



cascada. Si continua disminuint el cabal una vegada iniciada la recirculació, aquest volum s'intensifica i s'estén cap al cub fins a ocupar tota la secció de pas a cabal zero. En aquest moment, s'observen dos volums, un en l'aspiració i un altre en la descàrrega, la superfície de contacte dels quals divideix el ventilador en una zona d'alta pressió i una altra de baixa pressió. Aquesta diferència de pressió i el manteniment d'aquests refluxos són els causants de l'elevat consum de potència a cabal zero i durant l'arrencada de la màquina.

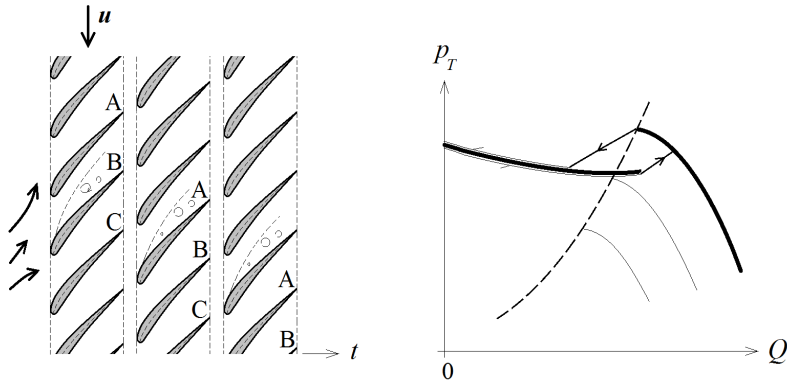


Figura 4.25. Despreniment rotatiu en una cascada axial d'àleps. Les cèl·lules despreses es desplacen en el sentit d'avançament de la cascada. La línia discontinua del gràfic de la dreta és la línia de despreniment. A l'esquerra d'aquesta línia, el funcionament deixa de ser estable. Si, en una instal·lació, es fa disminuir el cabal augmentant la resistència del sistema, l'inici del despreniment provoca una caiguda brusca de la pressió, que es recupera quan la resistència disminueix. Es produeix histèresi quan, a la sortida del despreniment rotatiu, no es recupera el punt d'entrada.

- ¹ En el cas bidimensional, es demostra que aquesta circulació es compensa exactament amb la circulació que es desprèn del perfil aïllat amb el deïxant.
- ² La teoria unidimensional no pot incloure en la seva anàlisi la vorticitat ni justificar l'existència dels fluxos secundaris que apareixen en els rotors i que suposen una pèrdua de rendiment. Queda clar que el problema global és tridimensional.
- ³ Aquest resultat suscita una certa controvèrsia en les persones no familiaritzades amb la mecànica de fluids: el fluid adquireix moment cinètic i incrementa la seva circulació al llarg d'una línia de corrent, però el moviment absolut a l'interior del rotor i després continuarà sent irrotacional si ho era a l'entrada i es verifiquen les condicions d'homentropia i del teorema de Kelvin. En aquest cas, la partícula de fluid no adquireix rotació, sinó que les línies de corrent es corben a mesura que el flux progressa dins del rotor i la circulació incrementa el seu valor entorn de línies tancades concèntriques amb l'eix. Si el moviment homentròpic era rotacional a l'entrada, la vorticitat només pot canviar per estirament o escurçament del vòrtex i el moviment també mantindrà la seva circulació en cada línia tancada, si es compleix el teorema de Kelvin. És una diferència substancial entre els fluids i els sòlids rígids que no s'ha de sobreentendre.
- ⁴ La pressió a l'entrada i a la sortida del rotor no realitza cap moment, però la seva distribució i magnitud també es veuen afectades per la viscositat i els seus efectes.
- ⁵ N'hi ha prou d'observar que la densitat sigui uniforme en cadascuna de les seccions.



- 6 Entre els quals destaquen la NASA (Estats Units), Göttingen (Alemanya) i RAF (Regne Unit).
- 7 Per la parella de coeficients C_D i C_L corresponents al perfil aïllat de la figura 4.5, l'angle de planeig resulta ser: $\lambda^* = \text{tg}^{-1}(7,17/944) = 0,00760$ radians, i l'error de suposar $\lambda^* \approx (7,17/944)$ és només del 0,002%.
- 8 Més endavant, a 4.3.4, s'analitzen les condicions que suposen que hi hagi equilibri radial en un rotor axial. És també el cas de les hèlixs propulsores d'embarcacions, en què el remolí que surt per la punta és fàcilment observable per la cavitació que produeix en el fluid.
- 9 El comportament d'un perfil en un flux és diferent en una cascada que quan està aïllat i hi ha poques solucions analítiques que relacionin tots dos efectes entre si (hi ha una aproximació teòrica de F. Weinig per a àleps plans). Per això, cal recórrer a l'experimentació per calcular els coeficients de sustentació i arrossegament equivalents en una cascada, en funció de paràmetres que dependran, no només del perfil, sinó també de la seva disposició i número. D'ara endavant, se suposarà que C_L i C_D són els coeficients corresponents a la cascada i no a l'àlep aïllat, malgrat que tots dos són pràcticament iguals quan la relació t/l és més gran que dos, aproximadament.
- 10 Tots els angles d'aquest desenvolupament són del fluid i no dels àleps, excepte indicació expressa en sentit contrari.
- 11 Aquestes velocitats i les següents a 4.2 es defineixen com positives en el sentit indicat a la figura 4.6. Més endavant, a 4.3, s'utilitzarà un sistema de coordenades cilíndric en què les velocitats seran definides positives segons el sentit de la base. Igualment, el sentit positiu de les forces [4.11] és el que es mostra a la figura.
- 12 No obstant això, no s'ha d'entendre que l'equació d'Euler no és vàlida quan el nombre d'àleps és finit. En realitat, com que s'ha obtingut aplicant un principi de conservació integral, també es podrà aplicar a qualsevol línia de corrent en funció dels angles reals del fluid. En principi, cada superfície de corrent implicarà una energia comunicada i la total s'obindrà de la mitjana espacial en la secció transversal.
- 13 Es considera que el coeficient d'obstrucció μ_{t1} de [3.44] és la unitat. La tria final d'aquest angle també depèn del gruix dels àleps i del gir relatiu que el fluid experimenta a l'interior del rotor.
- 14 Aquesta dissertació s'ha fet en termes hidràulics. La fabricació de rotors centrífugs amb angles β_1 massa petits o β_2 massa grans també resulta més complicada i només es fa en casos excepcionals.
- 15 Se suposa que $b_1 \text{tg} \beta_1 > b_2 \text{tg} \beta_2$. L'ordenada en l'origen de [4.34] representa l'energia que el rodet comunica al fluid a cabal zero, però no coincideix amb [4.26], perquè no tota és estàtica, sinó que és justament el doble perquè, en aquest cas, es compleix que $c_i = u_i$.
- 16 En realitat, el rotor indueix certa prerotació (positiva o negativa) a l'entrada, mirant de reduir aquestes pèrdues (augmentant o disminuint l'angle relatiu de la velocitat incident, respectivament). Vegeu la figura 4.9.
- 17 En general, per a cabals petits en què les superfícies de corrent no són cilíndriques ni en aproximació, i, en particular, a cabal nul, on apareixen fluxos paràsits recirculants a conseqüència de la combinació de la força centrífuga i l'efecte Coriolis aplicat al corrent radial generat. Aquests fluxos són la causa principal del consum de potència durant l'arrencada de la màquina axial.
- 18 Observem que, si l'entrada és radial i $\alpha_1 = 90^\circ$, aquesta equació coincideix amb [4.36].
- 19 Les pèrdues no només afecten l'increment de pressió efectiu a través de la cascada, sinó també els angles del corrent, de manera que no hi ha motiu perquè aquests angles coincideixin amb els de [4.45]. Les hipòtesis $\alpha_1 = \alpha_4$ i $\alpha_2 = \alpha_3$ es mantenen perquè la primera és una condició de disseny i encara se suposa que no hi ha pèrdues entre rotor i estator.
- 20 A les màquines axials, el disseny de la cascada es fa en termes de sustentació, per això és necessari que no hi hagi despreniment del corrent fins a la vora de fuga. A les turbines, el flux s'accelera en el rotor i s'inhibeix la separació de la capa límit. Tampoc se sol aplicar aquesta correcció a les turbomàquines tèrmiques.
- 21 En cas contrari, les pressions serien iguals a banda i banda de l'àlep per a un flux d'entrada homentròpic i irrotacional. Aquesta asimetria axial també és present, evidentment, en el rotor axial, però el seu efecte és



- menor, puix que en aquestes màquines l'energia Y_1 està limitada per la deflexió màxima que es pot donar al corrent quan circula entre els àleps.
- ²² En alguns casos específics, es troben graus de reacció negatius per als quals β_2 és més gran que el $\beta_{2,\max}$ de [4.60] i per als quals el rodet absorbeix pressió del corrent i la transforma en energia cinètica. Aquesta solució és útil quan es pretén que la comesa de la bomba sigui accelerar el flux, com passa a les bombes de reg, d'injecció, etc.
- ²³ Aquesta situació només és possible si totes dues velocitats es troben en quadrants diferents (figura 4.17).
- ²⁴ Que l'angle β_2 decreix amb r es dedueix de l'equació [4.32] i de la torsió que han de tenir els àleps segons la hipòtesi d'equilibri radial que s'explica a 4.3.4. D'altra banda, la deflexió que pot tenir el flux és més gran a les turbines que als compressors, perquè a les primeres el fluid s'accelera en el seu interior i el risc de despreniment es redueix. Això fa que els àleps de les turbines de gas puguin tenir més curvatura i que calguin menys escalonaments que en un compressor axial per a un mateix salt entàpic.
- ²⁵ Això no vol dir que la bomba sigui més eficient, sinó al contrari: atès que si el percentatge d'energia estàtica generada al rotor respecte de la total comunicada tendeix a la unitat per a un grau de reacció teòric determinat, no és que augmenti l'energia estàtica generada, és que està disminuint perquè no s'està difonent de manera adequada l'energia dinàmica a l'interior de la màquina.
- ²⁶ La coordenada $\{z\}$ es correspon amb la de l'eix de gir del rotor o de simetria del conducte circular i no té per què coincidir amb la direcció vertical. Per evitar la duplictat d'usos del versor \mathbf{k} , que es fa servir per a la força màssica gravitatòria: $\mathbf{f}_m = -g\mathbf{k}$, s'ha definit el versor \mathbf{z} . D'altra banda, en aquest apartat i el següent, les components de les velocitats absoluta i relativa són positives en el sentit de la base.
- ²⁷ Les línies de corrent, les traces i les trajectòries no coincideixen si el flux no és estacionari. Les equacions [4.66] i següents es podran utilitzar també en el cas estacionari eliminant la derivada local, però llavors no es podran aplicar al moviment a través d'un rotor.
- ²⁸ Aquesta definició és purament cinemàtica i independent de la presència d'esforços viscosos.
- ²⁹ Les condicions imposades a la velocitat radial impliquen el següent: si existeix velocitat radial, ha de ser uniforme en perímetres centrats en l'eix, situació que es produeix en les seccions troncòniques de perfil difusor o contractor en els conductes d'entrada al rotor; si no hi ha velocitat radial, el flux és clarament axial però pot no ser unidireccional, estrictament parlant, si es presenta un vòrtex lliure, ja que llavors és $\mathbf{c} = c_{\theta}(r)\boldsymbol{\theta} + c_z\mathbf{z}$.
- ³⁰ S'entén que en absència d'esforços viscosos. En qualsevol cas, en un flux com l'indicat no es genera vorticitat axial encara que sigui viscos, ja que, si $\partial c_z / \partial r$ no és nul·la, només pot aparèixer vorticitat en direcció perimetral.
- ³¹ La consideració de flux bidimensional en una màquina axial menysprea la component radial de la velocitat, cosa que només és aproximadament cert en cascades d'àleps esvelts per als quals la relació punta/cub sigui més gran que quatre i, sobretot, a la rodatja de la carcassa exterior, on el flux radial ja no pot migrar cap amunt i la influència de la cub és menor. En qualsevol cas, es comprova experimentalment que la component radial de la velocitat absoluta és de l'ordre del 5% de l'axial en la majoria dels casos, per això aquesta hipòtesi és comunament acceptada en bombes i ventiladors. Aquesta condició de flux es pot considerar raonable quan el canal de pas és estret en comparació amb la seva longitud, això és cert en la majoria de les bombes axials, però no en els compressors o en les turbines, per a les quals s'ha de recórrer a altres aproximacions del flux, com la teoria del disc actuator.
- ³² Tinguem en compte que els rotors axials de les bombes i els ventiladors solen estar muntats en estructures tubulars en què aquesta condició té avantatges evidents.
- ³³ Des d'una perspectiva ideal, que no tingui en compte el desenvolupament de capes límits sobre les parets laterals internes del rodet en què, no obstant això, es verifica que $\partial p / \partial z \approx 0$. Si la màquina no és estrictament radial pura i la velocitat a l'entrada té certa component axial, com que la relació entre les velocitats axial i meridiana mitjanen en el rodet és de l'ordre $(b_2 - b_1) / (r_2 - r_1)$, també es podrà suposar que el flux és bàsicament unidireccional i radial.



- 34 Com a conseqüència del teorema de Kelvin, si alguna de les altres components de la vorticitat absoluta a l'entrada del rotor no fos nul·la, no es podria admetre la hipòtesi d'equilibri axial en el rotor perquè apareixerien gradients de velocitat en aquesta direcció. Aquest equilibri axial no implica que les forces sobre el rotor estiguin equilibrades en la direcció de l'eix, sinó només que $c_z=0$.
- 35 Observem que l'equació de continuïtat té la mateixa forma que a [4.66]. La demostració no és immediata, però el lector pot entendre fàcilment aquest resultat tenint present la relació vectorial entre les velocitats absoluta i relativa, i que la velocitat d'arrossegament és, de fet, la velocitat del sòlid.
- 36 Com abans, s'omet el terme gravitacional sense pèrdua de generalitat.

37 Però aquesta distància de separació no pot ser molt gran per no augmentar les pèrdues per recirculació entre etapes. Aquests fluxos també generen vorticitat i són no estacionaris, per això hi ha d'haver un compromís entre totes dues condicions. A part de la interacció deixant-rotor explicada, es poden presentar altres causes de no estacionarietat del flux relatiu, com la interacció entre àleps, el despreniment de vòrtexs o el despreniment rotatiu observat a les màquines axials.

38 Per a això, tinguem present que $c_u = u + w_u$, $\partial c_r / \partial \theta = \partial w_r / \partial \varphi$ i el signe de w_u .

39 A més, també es compleix que $di = dh_0 - d(u c_u)$.

40 Cal notar que la primera d'aquestes equacions és la base del teorema de Crocco.

41 Per al flux bidimensional descrit per [4.75] i [4.76], és fàcil deduir que la condició $\Omega_c \wedge \mathbf{c} = 0$ porta a:

$$\Omega_c = \frac{1}{r} \frac{c}{c_z} \frac{\partial (rc_\theta)}{\partial r} \mathbf{s} = \Omega_s \mathbf{s}$$

que s'anul·la sempre que el flux en direcció perimetral en el conducte d'entrada tingui forma de vòrtex lliure (o quan sigui unidireccional). Aquesta equació implica que la vorticitat està inclosa en les línies de corrent i, per tant, en suposa la torsió en coordenades naturals i que Ω_b sigui nul·la, situació que es coneix com *flux de Beltrami*.

42 Observem que no es restringeix l'anàlisi al flux absolut irrotacional, ja que \mathbf{c} és perpendicular al vector $\Omega_c \wedge \mathbf{c}$.

43 A aquesta conclusió s'hi va arribar a [2.40] aplicant l'equació de l'energia. Les equacions de l'impuls i de l'energia estan desacoblades per al fluid incompressible, de viscositat i conductivitat constants.

44 De fet, han de coincidir, perquè en aquesta anàlisi la transitorietat de ω s'havia exclòs de [4.81].

45 La transformació de les coordenades naturals en coordenades ortogonals és condicional, és a dir, no sempre és possible. En el cas del flux descrit en coordenades naturals, es demostra que és necessari que la vorticitat Ω_s sigui nul·la. Amb aquesta condició, i com a exemple, en el cas del flux relatiu a través d'un rodet radial pur amb equilibri axial es compleix: $\partial r = \sin \beta \partial s_w - \cos \beta \partial n_w$ y $r \partial \varphi = \cos \beta \partial s_w + \sin \beta \partial n_w$.

46 Observem que no és necessari que el flux sigui homentròpic en aquest cas, ja que, si és isentròpic i estacionari, la derivada de l'entropia al llarg de la línia de corrent és nul·la [2.83].

47 Les condicions d'homotropia i irrotacionalitat solen estar relacionades, tot i que no és necessari que es presentin alhora. No obstant això, com que un flux incompressible i homentròpic que hagi estat irrotacional ho continuarà sent, la rotacionalitat del moviment homentròpic s'ha de fixar en les condicions inicials. D'altra banda, tampoc és necessari que l'entropia sigui uniforme perquè el moviment d'un fluid incompressible sigui irrotacional. Tinguem present que la rotacionalitat del moviment depèn del moviment de l'observador, com s'ha vist que passa a l'interior del rotor en moviment (per exemple, v. [4.85] amb $\Omega_c = 0$).

48 En un rotor axial, els vectors $\Omega_{c,z} \mathbf{z}$ i \mathbf{c} no són paral·lels, però el seu producte vectorial és pràcticament perpendicular a \mathbf{n} .

49 Aquesta equació també és vàlida en un rotor axial en el cas homentròpic irrotacional, perquè deriva de [4.108].



- ⁵⁰ Amb la diferència notable que l'equació [4.105] es compleix encara que la vorticitat absoluta a l'entrada no sigui nul·la.
- ⁵¹ L'equació [4.85] indicava que el gir com a sòlid rígid d'una partícula fluida en el moviment relatiu, que és la meitat de la seva vorticitat relativa, és igual i de sentit contrari a la velocitat de gir del rodet, ω , quan la vorticitat absoluta és nul·la. D'altra banda, l'equació [2.98] suggereix que la vorticitat al llarg d'una línia de corrent es manifesta en la seva curvatura i en una variació de la velocitat en direcció normal. Com que la curvatura és un efecte menor en un rotor radial (per als radis de curvatura típics dels àleps) i l'efecte de la rotació 2ω ha de dominar, se segueix que la distribució de la velocitat relativa no pot ser uniforme en direcció normal en cap cas.
- ⁵² En condicions isentròpiques, és a dir, adiabàtiques i reversibles. Aquesta coincidència es pot estendre a tota la màquina, perquè el rotor és l'únic element que incrementa l'energia del fluid, i a la resta es conserva l'entalpia de rabeig, com s'ha explicat.
- ⁵³ El mètode directe estudiaria el flux per a una geometria donada, i l'indirecte, el disseny del rotor segons la mena de vòrtex seleccionat.
- ⁵⁴ El lector ha de comprovar que, amb l'equació [4.119], encara es mantindria la rotalpia en direcció radial. El valor de la vorticitat axial absoluta de [4.76] és, en aquest cas, $\Omega_{\theta,z} = 2\omega$, de manera que la vorticitat axial relativa de [4.85] és nul·la i el fluid adquireix rotació absoluta en el rotor. Aquesta incoherència i l'aparent violació del teorema de Kelvin són, evidentment, conseqüència de l'assumpció de la hipòtesi d'entrada sense gir. A la realitat, els efectes viscosos no es poden menysprear completament i els rotors dissenyats per desenvolupar un vòrtex forçat en el fluid acaben per induir vorticitat abans i després d'aquests. Això pot ser interessant en alguna aplicació particular, però genera més pèrdues en la instal·lació i no és la solució habitual de disseny.
- ⁵⁵ L'estudi de les capes límit sobre les cares dels àleps i dels deixants que es formen aigües avall pot ser molt complex per a l'objectiu d'aquesta obra. Animem el lector que aprofundeixi en aquests temes consultant alguna obra especialitzada.
- ⁵⁶ Perquè el flux en els conductes d'entrada sigui el més uniforme possible, és important reduir el nombre de colzes al mínim indispensable i la generació de remolins d'aspiració.
- ⁵⁷ Aquests condicionants revelen que l'equilibri radial és una situació de treball molt sensible, compromesa no sols per la presència de vorticitat, sinó també per altres efectes, com per exemple, els fluxos que envolten el cub a l'entrada, la component radial de la qual no es pot menysprear.
- ⁵⁸ Excepte per la influència que tinguin en el valor del C_L de la cascada. Les variacions reals són encara més petites.
- ⁵⁹ S'obté un resultat similar si es fa servir la definició de la vorticitat en coordenades intrínseques relatives: $\Omega_r = w/r - \partial w / \partial n = -2\omega$, i es té en compte que $w_r = w \sin \beta$. Observem, també, l'analogia d'aquesta expressió amb la de Stodola [4.53].
- ⁶⁰ Un valor normal del coeficient de cabal a la punta de l'àlep axial de 0,25. En conseqüència, si en un rotor radial la disminució de $Y_{r,\infty}$ és de l'ordre del 20%, el paràmetre e_z d'un rotor axial serà 0,95 aproximadament. Aquesta circumstància i que e_z sigui poc dependent de z justifiquen que no s'utilitzi a la pràctica, excepte en casos molt específics.
- ⁶¹ Quan el flux transcorre en superfícies de revolució, llavors es compleix $-n_z/n_r = w_r/w_z = \text{tg} \lambda$, sent λ l'angle de la superfície cònica generalitzada.
- ⁶² El descens de la força centrífuga deguda a la velocitat w_r és més gran que el de la centrípeta de Coriolis.
- ⁶³ Si w^* i w són les velocitats relatives dins i fora de la capa límit, respectivament, sent $w^* < w$, i R és la curvatura mitjana dels àleps, llavors la igualtat del gradient de la pressió en direcció normal suposa que $(w^*/w)^2 = R^*/R$, i, per tant, les línies de corrent es reflecteixen en la capa límit més del que imposa la curvatura dels àleps.



-
- ⁶⁴ Substituint [2.95] i [2.98] a [4.148], es dedueix que $w\Omega_w > 0$. Aquest resultat també s'obté de [4.108], com pot comprovar el lector, relacionant llavors la vorticitat radial generada amb el gradient d'entropia i rotalpia en direcció normal. La vorticitat longitudinal apareix com a resultat del principi de continuïtat aplicat al corrent secundari que es dirigeix cap als àleps.
- ⁶⁵ S'entén que sigui així perquè, amb cabals petits, no hi ha prou fluid per omplir tot el canal entre àleps.
- ⁶⁶ En realitat, es dona un lleuger augment de e_z ja que el flux a la cara de pressió segueix millor el perfil dels àleps quan s'accelera. No obstant això, aquest efecte no produeix un augment efectiu de l'energia comunicada perquè les pèrdues viscoses globals, incloent-hi els deixants de la cara de succió, són més grans que el guany potencial que es pot obtenir de l'augment de e_z .
- ⁶⁷ Fet que no és negatiu si s'aconsegueix inhibir la presència de despreniments. En general, convé que el nombre d'àleps sigui suficient per reduir la diferència entre les velocitats de les cares de succió i pressió, existint un nombre òptim d'àleps del compromís entre les pèrdues per fregament (que augmenten quan ho fa z) i les degudes al despreniment (que ho fan quan disminueix z).
- ⁶⁸ Aquesta paradoxa és resultat d'aplicar l'equació d'Euler al flux estacionari isentròpic. Si $dp/\rho = -vdv$ i de l'equació de Gibbs se segueix que $dh = dp/\rho$, la variació d'entalpia de rabieg és $dh_0 = dp/\rho + vdv = 0$.
- ⁶⁹ Un exemple són les vibracions autoexcitades com el *flutter* o inestabilitat en què el fluid interacciona amb l'estructura elàstica de l'àlep i la fa vibrar.

Instal·lacions hidràuliques

La gran quantitat i diversitat d'instal·lacions hidràuliques i les seves aplicacions fa impossible que es puguin explicar totes amb detall. Afortunadament, totes comparteixen característiques comunes i es poden descriure mitjançant equacions que formalment segueixen els mateixos principis generals. Un cop coneguts aquests principis i els requisits funcionals de la instal·lació, la interconnexió de les diferents bombes, conductes, accessoris i vàlvules entre si assegurarà un servei específic d'acord amb un disseny prèviament convingut.

El transport d'un fluid per un conducte es pot fer a pressió o sense pressió. El primer cas tracta de conduccions per on es fa el transvasament d'un líquid entre dos punts, sigui per gravetat o per impulsió (conducció forçada), en què s'assumeix que tota la secció del conducte és ocupada pel líquid. El segon cas és comú en sistemes d'evacuació d'aigües residuals o en el transport d'aigua per canals, sistemes de regadiu, etc. Aquest apartat se centra en el primer cas, per al qual, en general, cal fer servir bombes per vèncer un determinat desnivell piezomètric.

Les característiques creuades de la instal·lació i del grup de bombeig han d'assegurar un únic punt de funcionament estable. Sovint, els requisits productius de la instal·lació aconsellen canviar el punt de funcionament de la bomba perquè canviïn, al seu torn, el cabal, la pressió, la temperatura o qualsevol altra magnitud fluida en algun punt de la instal·lació dins d'un determinat interval de regulació preestablert. Un dels procediments més estesos empra vàlvules de control, que permeten l'ajustament fi del cabal i atorguen cert grau de versatilitat al sistema. Com a alternativa a l'ús de vàlvules, avui dia també és possible canviar el punt de funcionament del sistema actuant sobre les revolucions de l'accionament de la bomba, cosa que encoratja l'ús d'estratègies combinades que assegurin el millor rendiment o condicions operatives del procés industrial.

L'apartat conclou amb la descripció dels problemes d'explotació més freqüents que es poden presentar en una instal·lació hidràulica. Es descriuen el cop d'ariet i algun dels mitjans disponibles per a la seva minoració, l'efecte bombeig en instal·lacions amb bombes de corba característica creixent i alguns casos de funcionament inestable que es presenten quan es treballa amb ventiladors.



5.1 Sistemes i equacions característiques

Les instal·lacions per conducció forçada es poden classificar en unidireccionals, ramificades o xarxes de distribució. Com més complex és el sistema hidràulic, més difícil resulta abstraure'n les característiques i descriure'l per mitjà d'equacions simples, tot i que, en general, i excepte excepcions, sempre és possible reduir el sistema inicial a una combinació d'altres d'equivalents, que es podran, al seu torn, agrupar seguint determinades regles bàsiques.

5.1.1 Equació del sistema i punt de funcionament

S'anomena *característica del sistema* la representació gràfica en eixos (Q,H) de:

$$H_{sis} = \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho g} + z_2 - z_1 \right] + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \sum_i h_{f,i} \quad [5.1]$$

Aquesta equació resulta de combinar els diferents termes de [2.107], de manera que quedin a un costat les característiques del grup de bombeig i, a l'altre, les de la instal·lació. Els punts (1) i (2) són els extrems físics del sistema en què està definida la seva energia específica, en termes de pressió, cota i velocitat. Aquesta equació es pot escriure com $H_{sis} = H_e + H_d + H_f$, suma de les altures estàtica, dinàmica i de pèrdues entre (1) i (2), definides així:

$$\begin{aligned} H_e &= \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + z_2 - z_1 \\ H_d &= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \\ H_f &= \sum_i h_{f,i} \end{aligned} \quad [5.2]$$

El primer dels termes és l'únic independent del cabal i representa l'ordenada en l'origen de l'equació del sistema. El terme H_e s'interpreta, moltes vegades, com l'altura útil de la instal·lació. L'altura dinàmica, H_d , és una funció quadràtica del cabal i és nul·la si els punts (1) i (2) es trien sobre les superfícies lliures de dos dipòsits. Aquesta situació és la més freqüent a la pràctica, tot i que no sempre és així. Entre els casos en què aquest terme no és nul, es troben les instal·lacions en què el punt final suposa una descàrrega lliure del cabal, en una mànega, per exemple, o quan s'aplica l'equació de l'energia entre un dipòsit i un nus intermedi, J, d'una xarxa de distribució.

¹ L'altura de pèrdues, H_f , sempre és positiva, com a resultat de les diferents pèrdues d'energia associades al flux de fluid. A continuació, es veurà que, en general, és admissible interpretar-la com a proporcional al quadrat del cabal, malgrat que això depèn, en cada cas, de la mena de règim que s'estableixi als conductes de la instal·lació.

Tenint en compte els comentaris del paràgraf anterior, l'equació [5.1] es pot escriure de la manera següent:



$$H_{sis} = H_e + A_s Q^2 \approx H_e + r_{eq} Q^2 \quad [5.3]$$

en què r_{eq} representa la resistència hidràulica equivalent de la instal·lació (que coincideix amb A_s quan $H_d = 0$). Aquesta resistència no és, en realitat, constant i independent del cabal, atès que depèn del número de Reynolds: sempre hi ha una regió pròxima a l'origen de cabals en què el règim és laminar i $H_f = H_f(Q)$, i no $H_f = H_f(Q^2)$, tal com s'ha suposat. En qualsevol cas, aquesta regió queda allunyada de la zona de funcionament formal de la majoria de les instal·lacions (en què Re sol ser bastant elevat, i el règim, turbulent) i no és tinguda en compte a [5.3].

La intersecció gràfica de l'equació del sistema i la corba de la bomba o del grup de bombes determina el *punt de funcionament*, PF, de la instal·lació. Per al cabal d'aquest punt, i no un altre, es verifica l'equació de l'energia ($H_B = H_{sis}$), i queden definides l'altura d'elevació de la bomba, la seva potència i el seu rendiment. Les característiques d'aquest punt proporcionen la informació mínima necessària per sol·licitar la bomba adequada a la instal·lació, per a la qual s'ha de triar aquella (o aquelles) que tingui un punt de funcionament nominal més pròxim al PF considerat. Si no es troba la bomba necessària, sempre es pot adaptar la bomba de sèrie al PF requerit, per exemple, tornejant el rodet original o canviant-ne les revolucions, i també acoblar diverses bombes en sèrie o en paral·lel, segons s'ha explicat. A la figura 5.1, es mostren alguns exemples de sistemes característics i els PF corresponents.

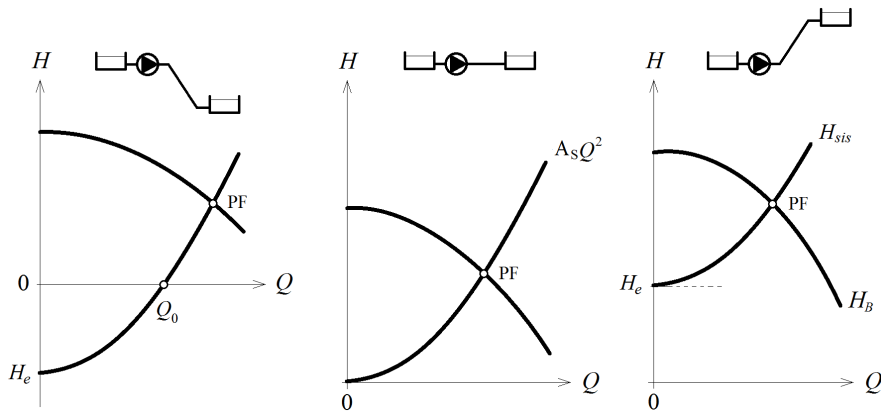


Figura 5.1. Diversos tipus d'instal·lacions i característiques associades. A l'esquerra, un sistema hidràulic d' $H_e < 0$ en què fluiria el cabal Q_0 per gravetat. En els sistemes de ventilació, sol ser $H_e = 0$ (centre). A la dreta, la situació més freqüent, en què $H_e > 0$ i cal bomba.

5.1.2 Càlcul de pèrdues

Les pèrdues d'energia en una instal·lació són una manifestació de la resistència associada al flux de fluid hidràulic. Les pèrdues s'han de ser reduir tant com es pugui, ja que, com més grans siguin, més petit serà el rendiment de la instal·lació i més significatives les seves despeses d'explotació. Se sap que la instal·lació de diàmetre més gran provoca menys pèrdues per a una mateixa longitud de conducte, però també és



més costosa en muntatge i manteniment, per això la tria del diàmetre resulta del compromís de diversos factors que s'analitzaran més endavant.

Hi ha, bàsicament, dues fenomenologies de pèrdues: les *lineals* i les *singulars*. Les pèrdues lineals, $\Delta h_{f,c}$, també anomenades primàries o contínues, corresponen a les pèrdues d'energia per unitat de pes que tenen lloc en els trams on el moviment és permanent i uniforme. Les pèrdues singulars o secundàries, $\Delta h_{f,s}$, també per unitat de pes, es localitzen en els elements puntuals de la instal·lació, com ara colzes, derivacions, vàlvules, eixamplaments, etc., i, en general, es poden menysprear enfront de les lineals quan es verifica la condició $L/D > 2.000$.

Les pèrdues de càrrega contínues es calculen multiplicant la pèrdua de càrrega per unitat de longitud, j , per la longitud del tram, L , és a dir:

$$\Delta h_{f,c} = jL \quad [5.4]$$

en què j resulta de la fórmula de Darcy-Weisbach per a un conducte de diàmetre D :

$$j = f \frac{1}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad [5.5]$$

El valor del coeficient de fricció, f , depèn del tipus de flux establert en el conducte. Per a règim laminar ($Re < 2.400$), és vàlida l'expressió [2.149] obtinguda per al flux de Hagen-Poiseuille i $f = 64/Re$ (a la pràctica, és millor agafar $f \approx 72/Re$). Si el flux és turbulent, llavors f pren els valors aproximats que es calculen de la fórmula de Colebrook:

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3,715} + \frac{2,51}{Re f^{1/2}} \right) \quad [5.6]$$

o del gràfic de Moody, sempre en funció de la rugositat relativa equivalent, ε/D , i del número de Reynolds, Re , avaluat per al diàmetre hidràulic del conducte.

La fórmula de Colebrook té caràcter general i inclou els casos de canonada hidràulicament llisa (TL) i règim rugós (TR) com a límit. Així, per a moviment turbulent rugós, n'hi ha prou d'anul·lar la influència del número de Reynolds de l'equació, i resulta:

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3,715} \right) = -2 \log_{10}(\varepsilon/D) + 1,14 \quad [5.7]$$

mentre que, per a moviment turbulent llis, és:

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2,51}{Re f^{1/2}} \right) = 2 \log_{10}(Re f^{1/2}) - 0,8 \quad [5.8]$$

La línia a traços que figura en el diagrama de Moody correspon a la condició:



$$f^{1/2} \frac{\varepsilon}{D} \text{Re} = 197,8 \quad [5.9]$$

i indica on es produeix la transició a règim turbulent rugós, zona del gràfic en què el coeficient de fricció de Darcy-Weisbach no depèn de la viscositat (del número de Reynolds) i les línies es tornen horitzontals. En aquesta regió, la relació entre la pèrdua j i la velocitat és estrictament quadràtica, ja que $f = f(\varepsilon/D)$, com s'observa a [5.7]. En canvi, en el règim turbulent de transició (TT), aquesta relació és del tipus general $j = j(v^a)$, amb $1,8 < a < 2$, i creixent amb Re , fins a fer-se dos en el flux turbulent rugós.²

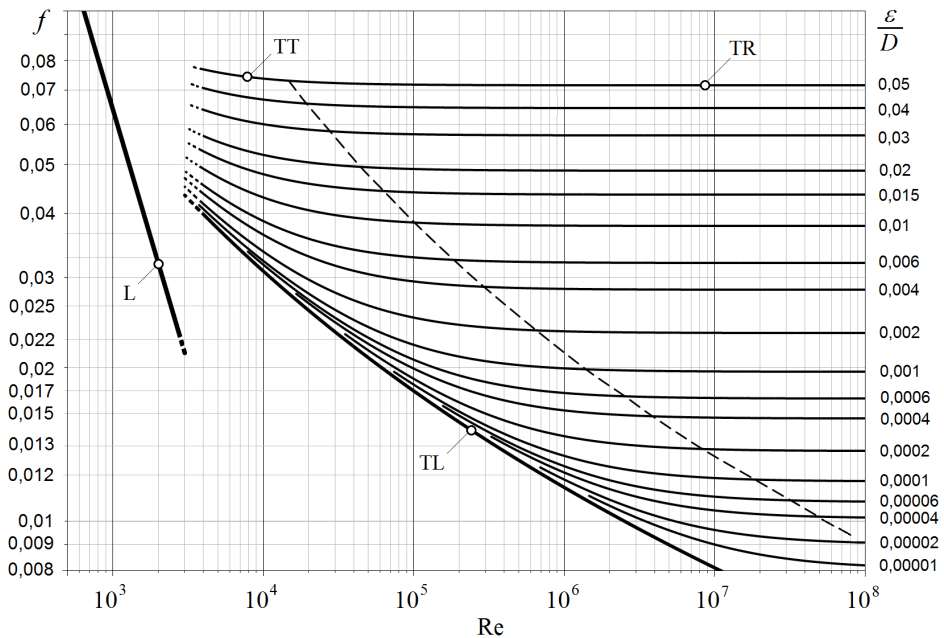


Figura 5.2. Diagrama de Moody per al càlcul de les pèrdues lineals obtingut de l'equació de Colebrook [5.6]. A la figura: L, règim laminar ($f = 64/\text{Re}$); TT, règim turbulent de transició; TR, règim turbulent completament desenvolupat o règim turbulent rugós [5.7], i TL, flux turbulent en canonades hidràulicament llises [5.8]. Els fluxos TT i TR se separen, aproximadament, en la línia de traços [5.9]. La zona $2.400 < \text{Re} < 4.000$ comprèn règims de transició molt inestables.

Amb els mitjans disponibles avui dia, no és un problema calcular el coeficient de fregament de la fórmula de Colebrook sense acudir al diagrama de Moody, però així i tot és freqüent trobar fórmules explícites de f per intervals de Re o ε/D i en funció del tipus de règim. En l'actualitat, no obstant això, es qüestiona la validesa universal de la fórmula de Colebrook, per això s'han desenvolupat multitud de fórmules específiques i àbacs per a diferents materials i tipus de fluid que aproximem millor la pèrdua corresponent. Algunes formes explícites de f s'han recollit a la taula 5.1.



És més pràctic descriure la pèrdua d'energia en termes del cabal, sobretot quan la secció del conducte no és constant. Per a un conducte circular és:

$$\Delta h_{f,c} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} = f \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L}{D^5} Q^2 \quad [5.10]$$

Règim	Equació	Validesa
TT	$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon / D}{3,715} + \frac{5,74}{\text{Re}^{0,9}} \right)$	$5.000 < \text{Re} < 10^8$ $10^{-6} < \varepsilon / D < 0,01$
TL	$f = 0,316 \text{Re}^{-1/4}$	$3.000 < \text{Re} < 10^5$
TL	$f = 0,184 \text{Re}^{-1/5}$	$10^5 < \text{Re} < 10^6$
TR	$f = 0,18(\varepsilon / D)^{0,33}$	$0,0005 < \varepsilon / D < 0,05$
TR	$f = 0,16(\varepsilon / D)^{0,31}$	$0,0005 < \varepsilon / D < 0,05$
TT	$j = \frac{C}{D^{7/6}} \bar{v}^{-1,85}$	$\bar{v} < 3 \text{ m/s}$ $D > 5 \text{ cm}$

Taula 5.1. Fórmules alternatives explícites per al càlcul del coeficient de fregament o la pèrdua de càrrega específica. L'última expressió és una forma adaptada de la de Hazen-Williams per a l'aigua en què la constant C (dimensional) depèn del material i pren valors pròxims a 10-3. Unitats del SI.

La fórmula de Darcy-Weisbach [5.5] no és exclusiva dels conductes circulars a pressió,³ sinó que es pot fer servir per a qualsevol altre conducte fent servir el *diàmetre hidràulic* corresponent: $D_H = 4r_H = 4S/p_m$, en què S i p_m són la secció de flux i el perímetre mullat del conducte, respectivament, i r_H , el seu radi hidràulic.

Els valors de la rugositat absoluta es poden prendre de la taula 5.2 per a diferents materials i canonades noves. El valor de la rugositat augmenta amb el temps a mesura que la canonada envelleix, de manera que els valors donats en aquesta taula només són una referència quan es treballi amb canonades ja utilitzades, i s'ha de corregir en funció de les circumstàncies de cada cas.

Material	Rugositat absoluta, ε [mm]
Material	0,0015
Acer asfaltat	0,15÷0,25
Acer laminat oxidat	0,04÷0,1
Acer laminat	0,0025
Asbest-ciment	0,3÷0,8
Ciment allisat	0,5÷3
Ciment brut o formigó	0,0015
Coure o llautó estirat	0,02÷0,05
Fibrociment	0,06÷0,15



Material	Rugositat absoluta, ε [mm]
Fosa asfaltada	0,0024
Fosa amb revestiment bituminós	0,025
Fosa dúctil	0,15÷0,2
Ferro galvanitzat	0,03÷0,09
Ferro forjat	0÷0,01
Policlorur de vinil (PVC)	0,01
Polièster reforçat amb fibra de vidre	0÷0,0015
Polietilè (PE)	0÷0,0015

Taula 5.2. Valors usuals de ε per a canonades comercials noves. En canonades envellides, el valor augmenta i pot arribar a superar l'indicat en un factor de 2 o 3, depenent del fluid transportat. Si el conducte porta un recobriments intern, la rugositat corresponent és la del material de revestiment

Les pèrdues de càrrega singulars són funció de la geometria de cada singularitat, del número de Reynolds i de l'energia cinètica mitjana del fluid. De l'anàlisi dimensional, se'n deriva:

$$\Delta h_{f,s} = K(\text{Re, geometria}) \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad [5.11]$$

en què, si no es diu el contrari, la velocitat ha de ser la velocitat a l'entrada de la singularitat.

El coeficient K es pot trobar documentat en moltes referències per a les singularitats més freqüents. Com a cas particular, es demostra que $K = 1$ en l'eixamplament bruscat que té lloc quan un flux desemboca en un dipòsit (ja que tota l'energia cinètica transportada es dissipa en el seu interior). En un eixamplament gradual tipus, com el con difusor de la figura 2.6, la pèrdua d'energia respon a l'equació:

$$\Delta h_{f,d} = k_d \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2} \right)^2 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} = K_d \frac{\bar{v}_1^2}{2g} \quad [5.12]$$

en què el coeficient k_d depèn de l'angle de conicitat i és la unitat per a $2\alpha = 180^\circ$ (tal com correspon a un eixamplament bruscat), segons es mostra a la figura 5.3.

Diàmetre nominal	1/2"	3/4"	1	1 1/2"	2	3	4	6	10
Codo estàndard de 90°	0,80	0,75	0,69	0,63	0,57	0,54	0,51	0,45	0,42
Codo estàndard de 45°	0,43	0,40	0,37	0,34	0,30	0,29	0,27	0,24	0,22
"T" en flujo directo	0,54	0,50	0,46	0,42	0,38	0,36	0,34	0,30	0,28
"T" en flujo cruzado	1,62	1,50	1,38	1,26	1,14	1,08	1,02	0,90	0,84

Taula 5.3. Valors del coeficient de singularitat per a colzes i "T" estàndard, en funció del seu diàmetre nominal. Hi ha taules per al càlcul de K en corbes de 45° i 90° en funció del paràmetre ε/D i de la relació r/D , en què r és el radi mitjà de la corba. La pèrdua singular de la corba és pràcticament menyspreable quan $r/D > 10$ i



$\varepsilon/D < 0,001$, i es pot substituir per la pèrdua contínua associada al seu desenvolupament lineal. Notem que el diàmetre nominal (en polzades) no correspon al diàmetre intern del conducte.

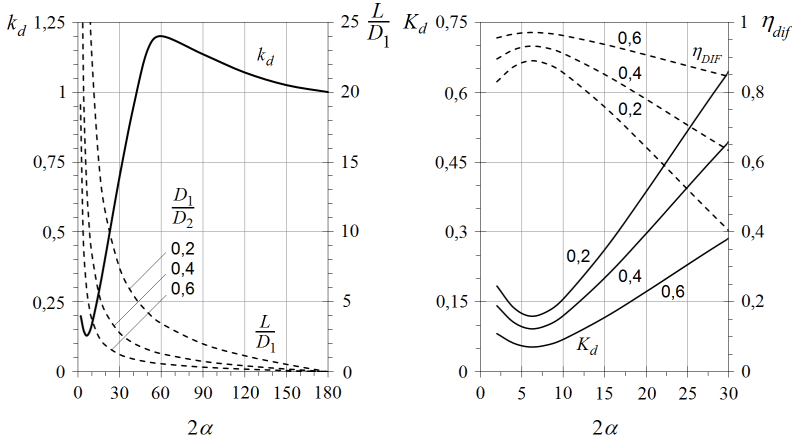


Figura 5.3. Coeficients de singularitat per a un eixamplament bruscat en funció de l'angle de conicitat i la relació de diàmetres d'entrada i de sortida. Es representen també la relació L/D_1 i el rendiment d'un difusor cònic (v. [2.111]). En general, aquestes corbes depenen de la rugositat superficial. Es prova que l'angle d'obertura òptim del difusor augmenta alhora que ε , que pot arribar a ser de 20° , encara que amb això disminueixi una mica el rendiment màxim del difusor quan augmenta també les pèrdues contínues.

Un mètode alternatiu de càlcul de l'efecte d'una singularitat consisteix a substituir l'accessori per una longitud equivalent de conducte que produeixi la mateixa pèrdua d'energia. La longitud corresponent a una singularitat K es dedueix de la identitat:

$$K \frac{\bar{v}^2}{2g} = f \frac{l_{eq}}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} \tag{5.13}$$

i condueix a l'expressió:

$$l_{eq} = \frac{K}{f} D \tag{5.14}$$

Evidentment, és possible estendre aquest principi a tota la instal·lació, de manera que les pèrdues totals es calculin en termes d'una longitud equivalent total, suma de la longitud real i la longitud virtual que resulta de sumar les diferents longituds equivalents de cada singularitat. Això és, per a un conducte circular:

$$\Delta h_f = \left(f \frac{L}{D} + \sum_i K_i \right) \frac{\bar{v}^2}{2g} = f \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_{eq}}{D^5} Q^2 = r_{eq} Q^2 \tag{5.15}$$

en què:

$$L_{eq} = L + \sum_i l_{eq,i} \tag{5.16}$$

i en què r_{eq} s'identifica amb la resistència hidràulica equivalent del conducte.⁴



Un dels avantatges d'aquest plantejament és que la longitud equivalent es pot referir a diàmetres no instal·lats, així doncs, és possible comparar energèticament instal·lacions de diferent diàmetre entre si, i també detectar la influència relativa dels diferents diàmetres d'una mateixa instal·lació, amb la intenció d'intensificar esforços sobre un determinat tram per reduir les pèrdues.

Als apartats següents d'aquest tema, s'expliquen els procediments que permeten calcular el cabal transportat en diferents instal·lacions tipus i la seva relació amb l'energia específica disponible i les pèrdues.

5.1.3 Sistemes simples unidireccionals

Un sistema és unidireccional quan el flux entre dos punts transcorre, preferentment, en un sentit predeterminat. Aquesta situació és la més freqüent en instal·lacions industrials o de bombeig en què la bomba o el grup de bombes impulsen el fluid en una única direcció. En aquest apartat, es presenten tres casos simples de sistemes unidireccionals: els sistemes formats per canonades de diferent diàmetre en sèrie o en paral·lel i el cas d'alimentació en línia, en què s'extreu cabal del conducte al llarg de la seva longitud.

En un conducte de diàmetre constant per al qual és coneguda la pèrdua específica, j , és possible obtenir el cabal circulant sense necessitat de calcular primer f del diagrama de Moody. En efecte, combinant les equacions [5.5] i [5.6], resulta:

$$\frac{v}{\sqrt{2gDj}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3,715} + \frac{2,51}{\text{Re}} \frac{v}{\sqrt{2gDj}} \right) \quad [5.17]$$

d'on, amb $\text{Re} = vD/\nu$:

$$v = -2\sqrt{2gDj} \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3,715} + \frac{2,51\nu}{D\sqrt{2gDj}} \right) \quad [5.18]$$

i el cabal seria $Q = v\pi D^2/4$. Aquesta circumstància pot simplificar el càlcul de les instal·lacions en què predomina una canonada sobre les altres i, a més, les pèrdues singulars són menyspreables; però, sobretot, serveix per posar de manifest la relació directa entre la velocitat (o el cabal, per a un diàmetre donat) i j , que no és més que el pendent de la línia de càrrega. Qualsevol canvi en aquest pendent implica el conseqüent canvi en la velocitat: si és nul·la, la velocitat també i, si s'inverteix, el cabal transportat canvia de sentit.

En una instal·lació en línia formada per n conductes de diversos diàmetres en sèrie, es compleix que $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$, i la pèrdua de càrrega total està formada per la suma de totes les pèrdues contínues, més les locals:⁵



$$\Delta h_f = \sum_{k=1}^n \Delta h_k = \frac{8}{\pi^2 g} \sum_{k=1}^n \frac{1}{D_k^4} \left(f_k \frac{L_k}{D_k} + \sum_i K_i \right) Q^2 = \sum_{k=1}^n r_k Q^2 \quad [5.19]$$

El pendent j és diferent en cadascun dels trams segons [5.6], però, com que ara el cabal és comú i les velocitats mitjanes estan relacionades entre si per l'equació de continuïtat, se segueix que j depèn inversament de la potència cinquena del diàmetre de cada tram per al cabal trasbalsat [5.10].

Es defineix com a *diàmetre equivalent* de la instal·lació en sèrie, D_{eq} , aquell per al qual el desnivell en j seria produït per un únic conducte d'aquest diàmetre (probablement, no comercial) i una longitud igual a la suma de les longituds individuals de cada tram, $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$. Amb aquesta definició, l'equació [5.19] s'escriu:

$$\Delta h_f = f_{eq} \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L}{D_{eq}^5} Q^2 = \frac{8}{\pi^2 g} \sum_{k=1}^n \frac{1}{D_k^4} \left(f_k \frac{L_k}{D_k} + \sum_i K_i \right) Q^2 = r_s Q^2 \quad [5.20]$$

Tret que les longituds siguin petites i l'efecte de les singularitats no es pugui menysprear, aquesta equació porta al resultat:

$$D_{eq}^5 = \frac{f_{eq} L}{\sum_{k=1}^n \frac{f_k L_k}{D_k^5}} \quad [5.21]$$

en què el coeficient de fricció equivalent s'ha de calcular per a D_{eq} (a la pràctica, se sol suposar, en primera aproximació, que $f_{eq} \approx f_k$ o un valor mitjà adequat).

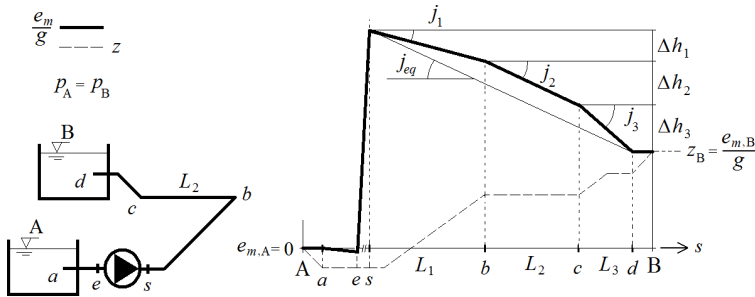


Figura 5.4. Sistema de canonades en sèrie. Els diàmetres de les canonades són tals que $D_a > D_1 > D_2 > D_3$ (amb $D_2 \approx D_{eq}$), és a dir, $j_a < j_1 < j_2 < j_3$. Es menyspreen els termes cinètics i les pèrdues singulars.

Una altra manera d'analitzar aquesta mena d'instal·lacions utilitza la longitud equivalent [5.16] avaluada en termes del diàmetre del tram predominant. Per exemple, si aquest diàmetre és D_j , és fàcil deduir que es compleix:

$$\Delta h_f = f_j \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_{eq,j}}{D_j^5} Q^2 = f_j \frac{8}{\pi^2 g} \frac{1}{D_j^5} \sum_{k=1}^n \left(L_{eq,jk} + \sum_i l_{eq,jk,i} \right) Q^2 = r_s Q^2 \quad [5.22]$$



sent:⁶

$$L_{eq,jk} = L_k \frac{f_k D_j^5}{f_j D_k^5} \quad [5.23]$$

$$l_{eq,jk,i} = \left(\frac{K_i}{f_j} D_j \right) \frac{D_j^4}{D_k^4}$$

Si s'admet que les pèrdues singulars són petites, llavors:

$$L_{eq,j} = \sum_{k=1}^n L_{eq,jk} = L_j + \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^n L_k \frac{f_k D_j^5}{f_j D_k^5} \quad [5.24]$$

Qualsevol de les expressions [5.19], [5.20] o [5.22] permet obtenir H_f de l'equació del sistema i el punt de funcionament amb facilitat, segons s'ha explicat.

Es diu que n conductes estan en paral·lel quan es bifurquen en un punt donat per trobar-se més endavant aigües avall. En aquest cas, es compleix: $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \dots = \Delta h_n = \Delta h_j$, si es pot menysprear la pèrdua local en cada bifurcació, i el cabal total serà la suma dels cabals parcials. Si es menysprea l'efecte de la resta de singularitats,⁷ llavors:

$$\Delta h_f = f_1 \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_1}{D_1^5} Q_1^2 = f_2 \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_2}{D_2^5} Q_2^2 = \dots = f_n \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_n}{D_n^5} Q_n^2 \quad [5.25]$$

El pendent j de cada tram és, en general, diferent, perquè pot ser-ho cadascuna de les longituds per a una mateixa Δh_j , però ara també depèn del quadrat del cabal del tram corresponent, i per això el repartiment de cabals s'efectua conforme a l'expressió:

$$\frac{Q_k}{Q} = \left(\frac{f_{eq} L D_k^5}{f_k L_k D_{eq}^5} \right)^{1/2} = \left(\frac{r_p}{r_k} \right)^{1/2} \quad [5.26]$$

En aquest cas, s'ha de triar primer la longitud L , que pot ser la longitud real o equivalent d'algun dels trams. Com que $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$, tenim:

$$\frac{Q}{\sum_{k=1}^n Q_k} = \frac{\left(\frac{D_{eq}^5}{f_{eq} L} \right)^{1/2}}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{D_k^5}{f_k L_k} \right)^{1/2}} = 1 \quad [5.27]$$

de què s'obté el diàmetre equivalent del sistema en paral·lel:

$$D_{eq}^5 = f_{eq} L \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{D_k^5}{f_k L_k} \right)^{1/2} \right)^2 \quad [5.28]$$



El càlcul del cabal de cada tram és immediat a partir de cadascuna de les expressions [5.25], conegut Δh_f , o de la [5.26] per al cabal total Q .

Les resistències hidràuliques equivalents associades als sistemes en sèrie, r_s , i en paral·lel, r_p , compleixen les relacions:

$$r_s = r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

$$\frac{1}{r_p^{1/2}} = \frac{1}{r_1^{1/2}} + \frac{1}{r_2^{1/2}} + \dots + \frac{1}{r_n^{1/2}} \quad [5.29]$$

i, en una instal·lació formada exclusivament per conductes en sèrie o en paral·lel, coincideixen amb la constant A_s de l'equació [5.3], si $H_d = 0$ i s'inclouen les pèrdues singulars o són menors. En altres casos, sempre és possible obtenir r_{eq} per combinació de les resistències en sèrie i en paral·lel corresponents; per exemple, podria ser $r_{eq} = r_{s,1} + r_{p,1} + r_{s,2} + \dots$, etc.

De les equacions [5.29], es conclou que els sistemes hidràulics guarden certa analogia amb els elèctrics, fins i tot no sent lineals. Per exemple, si en un sistema en sèrie un dels conductes és molt resistiu, ho és tot el sistema, i els conductes menys resistius contribueixen, en menys quantitat, a la resistència total, sent per a tots $r_k < r_s$. En un sistema en paral·lel, en canvi, la resistència equivalent és dominada pel tram de menys resistència, per on circularà la major part del cabal [5.26], i $r_k > r_p \forall k$.

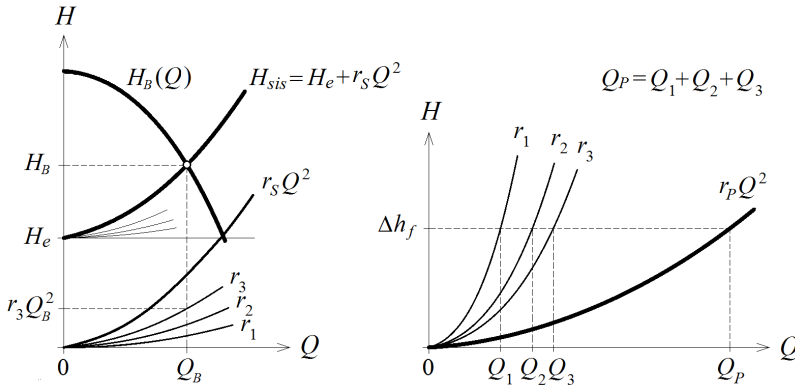


Figura 5.5. Obtenció gràfica del sistema equivalent de canonades en sèrie (esquerra) i en paral·lel (dreta).

El tractament és una mica més complicat en el cas que hi hagi alguna extracció de cabal al llarg del conducte. Aquesta situació és freqüent, per exemple, en el cas de l'alimentació en ruta de sistemes urbans de proveïment d'aigua o quan s'ha de derivar part del cabal impulsat a un altre circuit de la instal·lació. En el primer cas, la hipòtesi de càlcul suposa que el repartiment de cabal al llarg del recorregut és uniforme, mentre que en el segon l'extracció és localitzada i el sistema es pot interpretar des d'aquest punt com una ramificació de la xarxa de distribució.



Per al sistema de la figura 5.6, en què té lloc una extracció uniforme de cabal al llarg del conducte de longitud L i diàmetre D constant, el cabal que travessa la secció x del conducte ve donat per l'expressió:

$$Q_x = Q_S + q(L - x) \quad [5.30]$$

en què q és el cabal extret per unitat de longitud, $qL = Q_E - Q_S$, i Q_E i Q_S són els cabals d'entrada al conducte i de sortida, respectivament. El pendent de la línia de càrrega en aquesta ubicació és:

$$j_x = \frac{dh_f}{dx} = f_x \frac{8}{\pi^2 g} \frac{1}{D^5} (Q_S + q(L - x))^2 \quad [5.31]$$

que, integrada en L i suposant un coeficient de fregament mitjà, porta a l'expressió:

$$\Delta h_f = f \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L}{D^5} \left(\frac{Q_E^2}{3} + Q_E Q_S + Q_S^2 \right) \quad [5.32]$$

El cabal equivalent, Q_{eq} , que produiria la mateixa pèrdua d'energia a la canonada però sense extracció, és, evidentment:

$$Q_{eq} = \left(\frac{Q_E^2}{3} + Q_E Q_S + Q_S^2 \right)^{1/2} \quad [5.33]$$

Aquest cabal és $0,57Q_E$ si Q_S és zero, és a dir, la totalitat del cabal d'entrada es reparteix en el recorregut, condició per a la qual la pèrdua de càrrega en la instal·lació [5.32] seria la tercera part de la que produiria Q_E sense extracció. En qualsevol altre cas, l'expressió [5.33] es pot substituir per:

$$Q_{eq} = 0,54Q_E + 0,46Q_S \quad [5.34]$$

que ofereix valors bastant aproximats i és de càlcul més senzill. El càlcul del diàmetre equivalent és immediat conegut Q_{eq} .

Si l'extracció del cabal $Q = Q_1 - Q_2$ és localitzada i puntual, el diàmetre després de l'extracció, D_2 , disminueix respecte de l'original, D_1 ; en aquest sentit, és recomanable triar la relació de diàmetres més pròxima a les següents o que hi estigui compresa:

$$\left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^{1/2} < \frac{D_2}{D_1} < \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^{2/5} \quad [5.35]$$

El lector pot comprovar fàcilment que el límit superior correspon al cas en què el disseny s'aborda mantenint la pèrdua de càrrega específica, j , constant, mentre que l'inferior suposa que no hi ha canvi en la velocitat després de l'extracció. Els diàmetres definitius es triaran entre els comercials disponibles, que respectin els límits de velocitat recomanats en el procés, i siguin més rendibles des del punt de vista econòmic.⁸

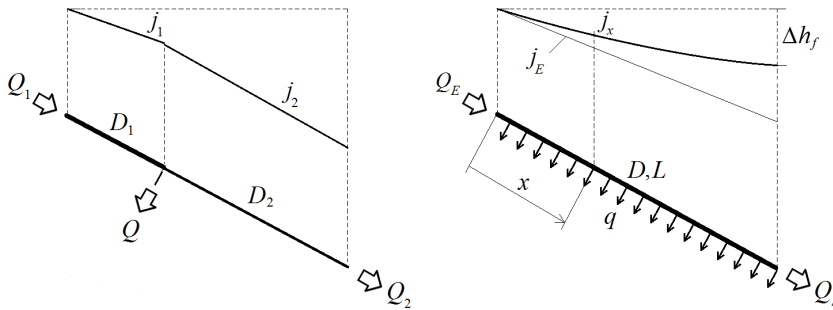


Figura 5.6. A l'esquerra, un sistema amb extracció localitzada per a v constant (es compleix que $j_2 D_2 / f_2 = j_1 D_1 / f_1$) i, a la dreta, un sistema de proveïment uniforme de cabal. En aquest últim cas, $jL = 0$ quan $Q_2 = 0$. Si Q_2 és negatiu, és a dir, s'alimenta el conducte per tots dos extrems, llavors el punt $j=0$ es troba en algun punt intermedï del conducte en què s'anul·la el cabal. El pendent j_E indica la línia d'altura piezomètrica corresponent al cabal Q_E en el conducte (D, L) sense servei.

5.1.4 Sistemes de proveïment i xarxes

Els sistemes de proveïment d'aigua en una ciutat estan formats per un entramat de canonades connectades entre si de manera molt diversa. La disposició final del sistema obeeix a multitud de qüestions, entre les quals prevalen la capacitat de garantir el subministrament adequat, en termes de cabal i pressió, i les econòmiques. En línies generals, les xarxes de distribució estan formades per branques, malles i estructures mixtes, que connecten els diferents nusos de la xarxa mitjançant conductes que, al seu torn, poden estar compostos per uns altres en sèrie o en paral·lel.

Les canonades d'una xarxa de distribució es poden classificar, segons la seva funció i diàmetre, com: principals o artèries, les de diàmetre més gran que alimenten la resta de conductes; secundàries, de diàmetre més petit que les anteriors, que condueixen el cabal fins a les canonades de distribució; aquestes, que donen servei als edificis, i les escomeses, o conjunt de canonades i vàlvules que connecten la xarxa amb les instal·lacions particulars interiors. Entre els components i accessoris que es poden trobar en una xarxa hi ha les vàlvules de control, els reductors de pressió, les ventoses o purgadors, els desguassos i diversos elements de mesura amb telecontrol o sense. Les normatives d'instal·lació i ús que han de complir tots els elements d'una xarxa són les que recomanen els fabricants, que s'hauran d'ajustar a la legislació vigent.

Les dades de partida necessàries per al càlcul d'una xarxa són, a part de les topogràfiques i l'altura piezomètrica d'almenys un nus:

- la distribució de consums i la seva quantificació en funció del nombre d'habitants, empreses, piscines, boques de reg, etc.
- la taxa de creixement anual de la població.
- el material dels conductes i el seu diàmetre de càlcul inicial (estimat en funció del cabal).



La pressió de subministrament en una zona urbana està compresa entre 2,5 i 4 bar de pressió. Pressions més baixes comprometen el funcionament d'alguns electrodomèstics o podrien deixar sense servei les plantes altes dels edificis o els que estan situats a les zones més elevades de la ciutat, mentre que pressions més altes podrien ocasionar el trencament de la instal·lació i l'augment de les fuites (de difícil localització). No és freqüent que se subministri més d'1 bar de pressió a partir de la quarta planta d'un edifici, i per a edificis més alts és recomanable instal·lar equips de pressió a les plantes baixes. Així mateix, s'han de muntar vàlvules reductores si la pressió en algun punt de la xarxa és de més de 4 bar.

Una vegada es disposa de tota aquesta informació, es pot començar el càlcul de la xarxa desenvolupant un model matemàtic de les artèries i la resta de canonades que la componen. Com més gran sigui el grau d'abstracció que es faci de la xarxa real, més petita serà la grandària del model i més fàcil serà el maneig de la informació i el seu tractament. Per simplificar la xarxa fins a obtenir un esquelet de què es puguin extreure conclusions aplicables a la xarxa real, es poden associar grups de canonades en sèrie o en paral·lel i treballar amb els corresponents diàmetres equivalents, i també agrupar nusos pròxims en un de sol per eliminar malles d'extensió reduïda.

En el cas d'una xarxa mallada simple, es compleixen les anomenades lleis de Kirchhoff. Segons aquestes lleis, en cada nus:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0 \quad [5.36]$$

en què són positius els cabals dirigits al nus i negatius els sortints (n és el nombre de conductes que parteixen del nus), i en cada malla:

$$\sum_{i=1}^m r_i Q_i^2 = 0 \quad [5.37]$$

és a dir, la suma de les pèrdues de càrrega és nul·la després de fer una volta completa a la malla en un circuit tancat (m és el nombre de conductes o línies que formen la malla).⁹ Aquesta condició passa per definir un sentit positiu de circulació en la malla (usualment, el dextrogir), de manera que la pèrdua de càrrega d'un conducte es consideri, a l'efecte de càlcul, positiva si el seu cabal segueix el sentit de circulació triat positiu i negativa, si és en sentit contrari.

És fàcil comprovar que, en una xarxa mallada de N nusos, amb M malles i C conductes, es poden plantejar $N-1$ equacions de continuïtat [5.36], M del tipus [5.37] i C equacions de pèrdues o de Bernoulli per a cadascun dels conductes. Es disposa, per tant, de $M+N-1$ equacions per donar compte de les $N-1$ cotes piezomètriques desconegudes i dels C cabals. D'altra banda, es demostra que, sigui com sigui el nombre de nusos i malles, es compleix que $M = C-N+1$ (número ciclomàtic), de manera que el sistema plantejat es pot reduir a un altre de més senzill, en què el nombre d'equacions quedi reduït a C , que és el nombre de cabals.¹⁰ Les C equacions fonamentals es



trien de les $N-1$ equacions de continuïtat i $C-N+1$ equacions de Bernoulli plantejades entre els circuits tancats que convinguin o siguin necessaris perquè les altures dels nusos no figurin (que poden ser les M malles de la xarxa). El sistema resultant es pot escriure de la forma:

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{n,i} Q_i = Q_k \right)_{N-1} \quad [5.38]$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_{m,i} r_i Q_i^2 = 0 \right)_M$$

en què $\alpha_{n,i}$ i $\alpha_{m,i}$ són els coeficients de pertinença de cada conducte i a un nus o a una malla (que poden ser 0, 1 o -1), i els Q_k són els cabals que entren al nus k des de l'exterior de la xarxa o en surten. Aquest sistema es pot escriure de manera matricial linealitzant entorn dels $Q_{i,0}$ que verifiquin les equacions de continuïtat (supòsit inicial) i procedint de manera iterativa.

Quan no es coneix la cota piezomètrica d'almenys un dels nusos, s'ha d'introduir una nova equació en el sistema. Aquesta situació es planteja, per exemple, quan els cabals externs són lliurats a la xarxa per dipòsits d'alimentació com els que es mostren a la figura 5.8. Si només hi hagués un dipòsit, n'hi hauria prou de plantejar l'equació de Bernoulli entre aquest i el nus de connexió, però, si n'hi ha dos o més, el problema s'ha de resoldre afegint malles virtuals que es tanquin sobre la superfície de cada dos dipòsits d'alimentació (són necessàries tantes malles virtuals com dipòsits alimentin la xarxa menys un). Per al cas de la figura 5.7, la nova equació a plantejar seria:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i r_i Q_i^2 + z_A - z_B = 0 \quad [5.39]$$

en què $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$ i $\alpha_3 = 1$, i se suposa conegut a priori el nivell de les superfícies lliures o les seves variacions al llarg del dia.

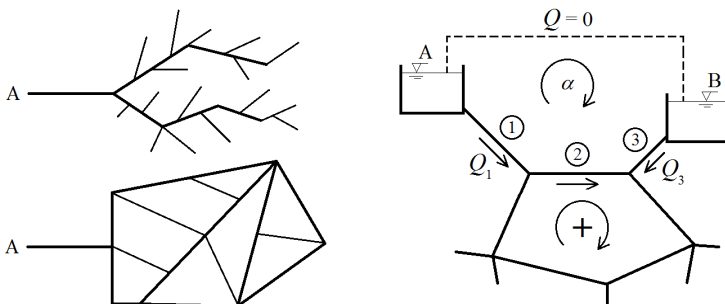


Figura 5.7. A l'esquerra, tipus de xarxes de distribució: ramificada i mallada. Es prefereix la xarxa mallada perquè indueix un repartiment millor de la pressió, no té aigua estancada en cap punt i ofereix millors garanties de subministrament en cas d'avaría en un conducte. La xarxa ramificada és més barata i fàcil de calcular. A la dreta, un exemple de xarxa amb malla virtual (α) i la definició del sentit positiu de circulació.



L'alimentació de la xarxa pels punts A o B de la figura 5.7 es pot efectuar mitjançant sistemes de proveïment per gravetat i per bombeig. La solució per gravetat no necessita consumir energia elèctrica per a l'accionament de les bombes, però requereix la captació d'aigua des d'un nivell superior, cosa que no sempre és possible. En aquesta mena d'instal·lació, convé instal·lar dipòsits de regulació o de compensació (figura 5.8) pròxims a la ciutat per ajustar les pressions de la xarxa durant les diferents hores del dia, sobretot si la captació és llunyana. Quan la captació es fa des d'un nivell insuficient i el bombeig és inevitable, l'ús d'aquests dipòsits és indispensable per poder bombar durant les hores vall, en què l'energia elèctrica és més barata, sense que el subministrament es vegi afectat (tots dos dipòsits es buiden durant les hores de més consum i es recarreguen en hores vall). Els dipòsits de compensació exigeixen més atenció a l'hora de seleccionar el grup de bombeig, perquè no regulen el consum, però són en general més petits, ja que no hi passa tot el cabal bombat. En ciutats de gran extensió, és convenient instal·lar també dipòsits de cua a l'altre extrem per igualar les pressions de la xarxa.

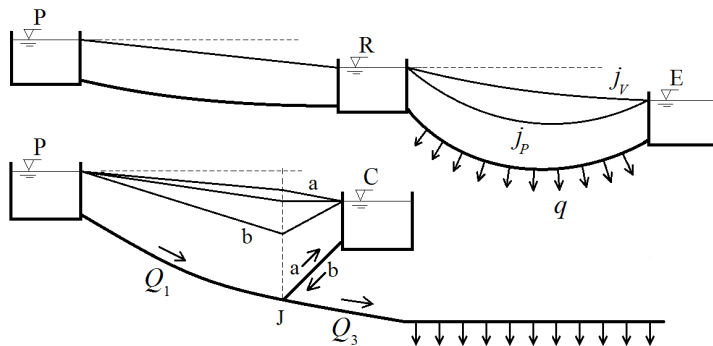


Figura 5.8. Instal·lació de dipòsits de regulació (R) i compensació (C) per a l'alimentació d'una xarxa de distribució per gravetat. El cabal Q_1 podria ser bombat. Els dipòsits de cua (E) són alimentats del principal (P) o del de regulació. Les línies piezomètriques j_p i j_v corresponen a la situació de treball en hores de consum (de cabal punta i vall, respectivament). Observem, en la figura inferior, que hi ha una altura piezomètrica en el nus "J" per a la qual $Q_1 = Q_3$, que és $H_J = H_C$.

Per a l'anàlisi de sistemes amb dipòsits de compensació, és interessant estudiar el cas d'un sistema ramificat format per tres dipòsits. Els tres dipòsits de la figura 5.9, per als quals $H_1 < H_3 < H_2$, estan connectats per tres canonades en un punt, J, en què l'altura total és única. Si se suposa que la pressió dinàmica del nus és petita en comparació amb la seva pressió reduïda, llavors:¹¹

$$H_J = z_J + \frac{p_J}{\rho g} \quad [5.40]$$

L'altura H_J condiona la relació de continuïtat en el nus i la forma de l'equació de l'energia per a cada conducte.¹² Quan $H_J = H_2$, llavors $Q_2 = 0$; si $H_J > H_2$, es complirà



que $Q_1 = Q_2 + Q_3$ i, en cas contrari, $Q_1 + Q_2 = Q_3$. Com que H_J és desconeguda a priori, es pot usar com a referència per esbrinar el sentit de Q_2 l'altura H^* , a què correspondria precisament un cabal $Q_2 = 0$. Incoent en els coeficients r_i les pèrdues localitzades, especialment les d'embocadura en cada dipòsit, aquesta altura (i el seu cabal Q^*) resulta de l'equació:

$$H^* = H_1 + H_B - r_1(Q^*)^2 = H_3 + r_3(Q^*)^2 \quad [5.41]$$

de manera que, si $H^* > H_2$, serà $Q_1 = Q_2 + Q_3$, però, si $H^* < H_2$, llavors $Q_1 + Q_2 = Q_3$.

Comprovada la relació de cabals en el nus, per exemple l'anterior, les equacions que defineixen el comportament del sistema són:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 + Q_3 \\ H_J^{(1)} &= H_1 - r_1 Q_1^2 + H_B \\ H_J^{(2)} &= H_2 + r_2 Q_2^2 \\ H_J^{(3)} &= H_3 + r_3 Q_3^2 \end{aligned} \quad [5.42]$$

en què H_B és una funció del cabal Q_1 del tipus [4.40]. Si es pren $H_1 = 0$ i se substitueix, s'arriba a:

$$\begin{aligned} H_B - r_1(Q_2 + Q_3)^2 &= H_2 + r_2 Q_2^2 \\ H_B - r_1(Q_2 + Q_3)^2 &= H_3 + r_3 Q_3^2 \end{aligned} \quad [5.43]$$

Aquestes equacions es poden resoldre analíticament o de manera gràfica, tenint present que el procés és iteratiu si no s'implementa la dependència dels coeficients r_i de Re_i .

Si l'altura en el nus J no fos suficient per alimentar el dipòsit (2), es podria instal·lar en el seu conducte una bomba en línia que subministrés l'energia necessària. El nou sistema d'equacions, llavors, seria:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 + Q_3 \\ H_J^{(1)} &= H_1 - r_1 Q_1^2 + H_B \\ H_J^{(2)} &= H_2 + r_2 Q_2^2 - H_{B,2} \\ H_J^{(3)} &= H_3 + r_3 Q_3^2 \end{aligned} \quad [5.44]$$

la resolució gràfica del qual es mostra a la figura 5.9 (a la dreta). Evidentment, ara $H_{B,2}$ és funció de Q_2 .

Tots els sistemes d'equacions no lineals d'aquest apartat es poden resoldre, en l'actualitat, amb l'ajuda d'un ordinador i una mica de paciència i bona disposició (si no es disposa de programari específic).

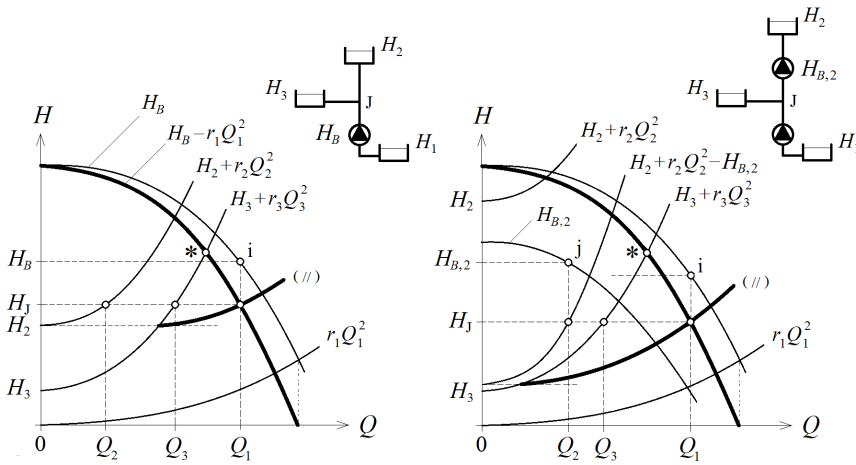


Figura 5.9. Resolució gràfica del problema dels tres dipòsits. A la dreta, el sistema amb una bomba auxiliar en línia per alimentar el dipòsit (2) quan l'altura H_2 és insuficient ($H_2 > H^*$). En tots dos casos, es compleix que $Q_1 = Q_2, Q_3$ i s'ha suposat que $H_1 = 0$. Els punts "i" i "j" són els punts de funcionament de les bombes H_B i $H_{B,2}$, respectivament

5.1.5 Velocitats límit i diàmetre econòmic

L'experiència aconsella que la velocitat mínima en les conduccions forçades, per al cabal mitjà repartit uniformement entre les 24 hores de funcionament d'una instal·lació, sigui de l'ordre de 0,6 m/s. Aquesta velocitat evita la decantació de partícules sòlides en suspensió en fluids no tractats prèviament i l'ús de diàmetres excessivament grans. La velocitat màxima no convé que superi els 3 m/s per no augmentar en excés les pèrdues d'energia, l'erosió i el soroll.

A les xarxes de distribució, és freqüent seguir el criteri conservatiu de Mougny, que estableix com a velocitats màximes les donades per l'equació:

$$v_{\max} = 1,5(D + 0,05)^{1/2} \tag{5.45}$$

en què D és el diàmetre de la conducció en metres. Per a altres instal·lacions i bombes, es poden fer servir els valors de la figura 5.10.

El diàmetre econòmic d'una instal·lació de bombeig es defineix com aquell que minora el cost global. Els costos dependents del diàmetre són tres: el cost de la canonada instal·lada, C_1 ; el cost de la bomba, incloent-hi el quadre elèctric i els impostos, C_2 ; i el cost actualitzat de l'explotació de la instal·lació durant els anys de vida útil previstos, C_3 . D'aquests costos, el segon sol ser menyspreable en instal·lacions de mida gran.

El cost C_1 es calcula estimant primer el cost per metre lineal, c_1 , de la canonada de diàmetre D i el cost equivalent en metres de tots els accessoris, L_a . En general, s'accepta que c_1 és proporcional a la potència $D^{3/2}$, el factor de proporcionalitat de la qual, c , és un paràmetre que resulta (si no es té informació actualitzada) d'efectuar un ajust



de mínims quadrats entre els diferents diàmetres i materials a utilitzar. Amb tot, és $C_1 \propto (L+L_a)cD^{3/2}$.

El terme C_2 és pràcticament proporcional a la potència de la bomba instal·lada, és a dir:

$$C_2 \propto bN_{abs} \propto b \frac{\rho g Q}{\eta_B} \left(f \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_{eq}}{D^5} Q^2 \right) \quad [5.46]$$

on b és la constant de proporcionalitat; f , el coeficient de fregament mitjà, i η_B , el rendiment unitari de la bomba.

Per al càlcul de l'últim dels costos, C_3 , és necessari extrapolar a l'instant inicial el cost d'exploració de cadascun dels anys de vida de la instal·lació. S'utilitza el factor d'amortització, a , que resulta de l'expressió:

$$a = \frac{(1+i)^t r}{(1+i)^t - 1} \quad [5.47]$$

on i és l'interès real aplicable (nominal menys inflació) i t és el nombre d'anys. El cost anual d'exploració s'obté multiplicant la potència de la bomba pel nombre d'hores de funcionament anual, h , i el preu del kWh, p . El resultat és:

$$A = N_{abs} h p \propto \frac{\rho g Q}{\eta_B} \left(f \frac{8}{\pi^2 g} \frac{L_{eq}}{D^5} Q^2 \right) h p \quad [5.48]$$

i, finalment, $C_3 = A/a$.

Derivant la suma dels termes anteriors,¹³ i després d'operar per a l'aigua, s'obté l'expressió general:

$$D_{eco} = 1,165 \left(\frac{f}{\eta_B} \frac{L_{eq}}{L + L_a} \right)^{0,154} \left(\frac{b}{c} + \frac{p}{c} \frac{h}{a} \right)^{0,154} Q^{0,462} \quad [5.49]$$

Es comprova que el diàmetre econòmic és pràcticament independent de la longitud de la instal·lació, perquè el quocient de les longituds és gairebé la unitat. Quant al valor dels diferents paràmetres de l'expressió anterior, molts dels quals econòmics, es constata que les relacions b/c i p/c són sensiblement constants a la pràctica i, en qualsevol cas, la seva influència és més petita perquè estan elevats a l'exponent 0,154. Per a un interès real del 3% i una vida útil de 25 anys, l'expressió anterior se simplifica a una altra de la forma:

$$D_{eco} = 1,165 \left(\frac{f}{\eta_B} \right)^{0,154} (0,5 + 2,5 \cdot 10^{-3} h)^{0,154} Q^{0,462} \quad [5.50]$$



vàlida només per a un preu per kW de la bomba i una tarifa elèctrica de referència.¹⁴ Com a exemple de càlcul senzill, suposant $f = 1/50$, un rendiment del 60% i 1.500 hores de funcionament anual, resulta:

$$D_{eco} = 0,862Q^{0,462} \quad [5.51]$$

d'on $v = 1,756D^{0,165}$ per a un tub circular.

Aquesta anàlisi es pot assimilar al diàmetre equivalent dels sistemes de canonades en sèrie o en paral·lel triant els diàmetres comercials per excés o per defecte que convinguin i respectin els requisits de pressió en els nusos i la velocitat en els conductes del sistema. En instal·lacions amb una única línia, la tria final del diàmetre de la instal·lació es fa per trams en funció del diàmetre comercial disponible i de la pressió interna. És freqüent que es triïn canonades de dos timbratges o tres (pressions nominals) diferents i que s'aprofiti el salt de timbratge per canviar, si convé, el diàmetre de la canonada.¹⁵ D'aquesta manera, es redueix el nombre de tipus de tub necessaris i se'n facilita la instal·lació i emmagatzematge.

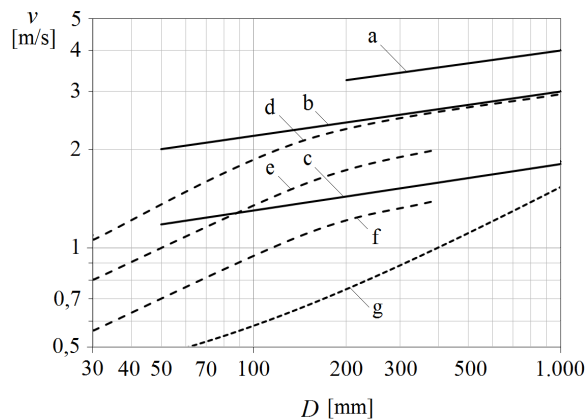


Figura 5.10. Velocitats normals i límit recomanades en les canonades. A la figura: a, aspiració i descàrrega de bombes axials; b, aspiració i descàrrega de bombes centrífugues; c, aspiració en bombes centrífugues que requereixin una gran altura d'aspiració; d, descàrrega en bombes alternatives d'accionament directe i baixa pressió; e, descàrrega en bombes alternatives d'accionament directe i alta pressió; f, aspiració en bombes alternatives d'accionament directe i baixa pressió; g, fórmula de Mougnie [5.45]

5.2 Vàlvules de regulació i d'altres

El bon govern de qualsevol instal·lació hidràulica requereix l'ús de vàlvules que poden funcionar de manera autònoma o seguint les ordres d'un operador. Les vàlvules poden obrir i tancar el pas de fluid, aïllar, connectar i desconnectar entre si diferents parts d'una instal·lació, regular el cabal transportat i complir amb determinats serveis de seguretat. Les seves grandàries van des d'una fracció de polzada fins a més d'un metre de diàmetre, i poden treballar amb pressions que van des del buit fins a més de



1.400 bar, i temperatures des de les criogèniques fins als 800°C. Les vàlvules actuals estan preparades per conduir líquids, vapors o gasos en qualsevol estat termodinàmic, des dels més simples fins als més corrosius, abrasius o tòxics.

Les vàlvules de regulació són elements que modulen l'energia que dissipen en funció del seu grau d'obertura. La característica entre el cabal i la pèrdua d'energia a través de la vàlvula és del tipus parabòlic, Q^2 , per a cada grau d'obertura, ja que, excepte comptades excepcions, es pot considerar la vàlvula com una singularitat en què el flux és turbulent. Aquestes pèrdues es quantifiquen de manera habitual en termes de pressió, i en nombroses circumstàncies són tan importants com les que tenen lloc per fregament dins de les canonades.

La diferència fonamental entre la resistència associada a la vàlvula i a la de la resta de la instal·lació és que, a les vàlvules, pot ser modulada en continu per mantenir o canviar a voluntat la variable de procés (v_p). Aquesta circumstància les permet ser l'element final dels llaços de control en línia com el de la figura 5.11, amb què es pot regular el cabal o qualsevol altra variable fluidodinàmica que sigui mesurada i realimentada (v_r). A cada valor del senyal de comandament (v_m) generat pel controlador del sistema li correspon un grau d'obertura (x) únic en la vàlvula en condicions normals d'operació,¹⁶ cosa que dona lloc a un cabal (q) determinat en funció de les pressions d'entrada i sortida (p_i) de la vàlvula.

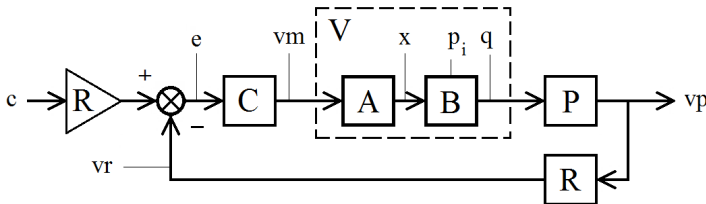


Figura 5.11. Diagrama de blocs típic d'un llaç de control convencional. A la figura: C, controlador; A, actuador de la vàlvula (V); B, cos de la vàlvula; i P, procés. El senyal de consigna és (c) en les mateixes unitats que la variable del procés (v_p). El bloc R és la xarxa de mesurament que permet calcular l'error observat (e). La variable manipulada (v_m) pot ser un senyal de pressió, hidràulica o elèctrica, segons la mena d'accionament que s'empri. Si el control és digital, s'haurien d'afegir al diagrama els blocs A/D i D/A necessaris.

L'accionament de les vàlvules de procés pot ser manual, pneumàtic, elèctric o hidràulic. En l'actualitat, també es disposa de vàlvules de control digital i comunicació per bus de camp. Hi ha una gran varietat morfològica de vàlvules en funció dels diferents fluids a transportar, del dispositiu de tancament o obturador i de la mena d'accionament, tot i que les més utilitzades en la indústria són les accionades per aire comprimit. Segons la mena d'obturador, es poden trobar vàlvules d'accionament lineal o rotatiu.¹⁷ El funcionament de les vàlvules rotatives és molt senzill i només requereix la rotació de l'obturador, cosa que suposa poc desgast de l'eix, poca fricció i, per tant, menys parell i un actuador més barat.



El tipus d'actuador utilitzat, sigui lineal o rotatiu, ha de ser capaç de fer l'esforç necessari en funció de la diferència de pressió a través de la vàlvula i el seu cabal, mantenint les condicions de seguretat i estabilitat requerides en el procés. La forma del cos de la vàlvula ve determinada pels elements interns (obturador, seient i guia de l'actuador) i la seva funció; hi ha una gran varietat d'opcions constructives segons la mena de tancament (estanc o no), el tipus d'actuació segura si hi ha avaria (obrir o tancar en absència de senyal de comandament), la força que ha de fer l'actuador durant l'accionament (amb obturadors equilibrats en pressió o no), la facilitat de desmuntatge de la vàlvula per netejar-la o substituir-la (en vàlvules de cos partit) o el nombre de seients. Les connexions externes de les vàlvules poden ser roscades, bridades o soldades a la canonada.

Entre les vàlvules més comunes, hi ha les de comporta (*gate valves*), de globus (*globe valves*), de bola (*ball valves*), de mascle o tap (*plug valves*), de diafragma (*diaphragm valves*), de papallona (*butterfly valves*), d'agulla (*needle valves*), anulars (*annular valves*), de con fix (*fixed-cone valves*), de pessic (*pinch valves*), etc. A la figura 5.12, es presenten algunes de les vàlvules de control més emprades en la indústria i els seus components típics, i a la taula 5.4 se'n resumeixen les característiques bàsiques. Les vàlvules automàtiques o de funcionament autònom, com les reductores, ventoses, de seguretat, etc., s'expliquen a l'apartat 5.2.6.

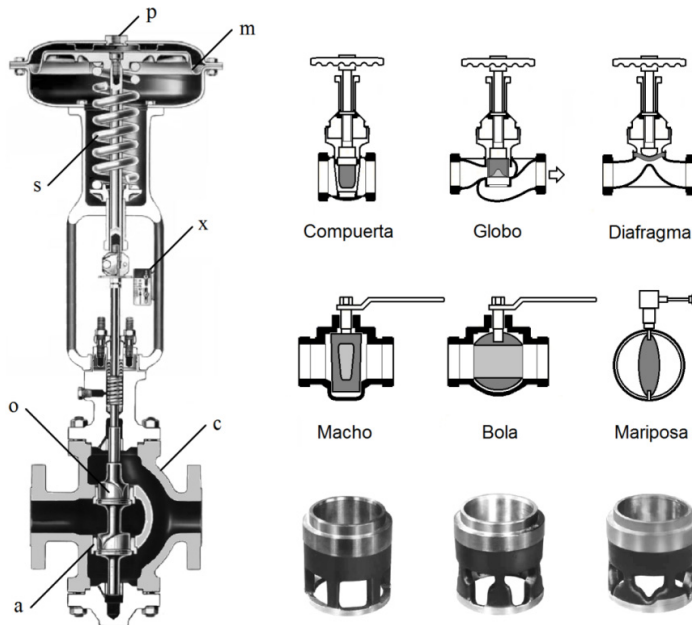


Figura 5.12. A l'esquerra, una vàlvula de control típica de globus amb doble seient, obturador amb osca i comandament pneumàtic d'acció directa. A la dreta, diferents obturadors i tipus de cossos de vàlvules de control. A la figura: p, presa d'aire a pressió; m, membrana; s, molla ajustable; x, indicador de posició; c, cos de la vàlvula; a, seient; i o, obturador. A la part inferior dreta, es mostren tres tipus d'obturadors per a una vàlvula de globus: d'obertura ràpida (esquerra), lineal i isopercentual (dreta).



La vàlvula de comporta es fa servir per al flux de fluids nets, però no és recomanable per a la regulació perquè té tendència a vibrar quan està parcialment oberta. En canvi, com que en obertura màxima la seva secció de pas coincideix amb el diàmetre nominal de la canonada i les pèrdues de càrrega són relativament petites, és indicada per a serveis generals amb fluids altament viscosos o espessos, pastes i líquids corrosius.

Les vàlvules de globus són d'ús freqüent gràcies a la seva poca fricció i l'elevada capacitat de regulació. El moviment lineal de l'eix és més curt que en les de comporta, però prou per garantir un bon interval de regulació. Aquesta circumstància estalvia temps i desgast, en facilita el guiatge i permet el disseny d'obturadors amb diferents tipus de perfil per ajustar la característica de cabal de la vàlvula.

Les vàlvules de diafragma (*Saunders*) s'utilitzen per al tall i l'estrangulació de líquids que poden portar una gran quantitat de sòlids en suspensió. En aquestes vàlvules, s'aïlla el fluid de les parts del mecanisme d'operació, cosa que les fa idònies en serveis corrosius o viscosos a l'hora d'evitar la contaminació tant de l'exterior com des de l'exterior. L'estanquitat s'aconsegueix mitjançant una membrana flexible, generalment d'elastòmer reforçat amb algun metall, que es desplaça linealment fins a fer contacte amb el cos de la vàlvula, que actua de seient.

Vàlvula	Avantatges	Inconvenients	Aplicacions
Comporta	Alta capacitat. Tanca-ment hermètic metall-metall. Cost baix. Disseny i funcionament senzills. Poca resistència a la circulació.	Control deficient de la circulació. Es requereix molta força d'accionament. Produeix cavitació amb baixa caiguda de pressió. En posicions intermèdies, pateix erosió del seient i del disc.	Servei ON/OFF sense estrangulació. Ús poc freqüent. Servei general, olis, gas, aire, pastes semilíquides, líquids espessos, vapors, gasos i líquids no condensables, i líquids corrosius.
Globus	Estrangulació eficient. Carrera curta i poc temps d'accionament. Disponible amb orificis múltiples antierosió.	Gran caiguda de pressió. Cost relativament elevat, sobretot en vàlvules grans, fet que en limita la grandària.	Accionament freqüent en regulació contínua. Servei general de líquids, vapors, gasos i pastes semilíquides.
Diafragma	Cost baix o mitjà. Sense empaquetaments. Sense fuites. Immune als problemes d'obstrucció, corrosió o formació de grumolls. De ràpida obertura i fàcil de netejar.	Diafragma susceptible de desgast. Elevada torsió quan es tanca amb la canonada plena. L'empenya per tancar hermèticament és gran, fet que limita la diferència de pressió màxima.	Serveis ON/OFF i de regulació per a baixes pressions. Pastes aigualides, fluids corrosius, materials enganxosos o viscosos, pastes semilíquides fibroses, llots, aliments i productes farmacèutics.



Vàlvula	Avantatges	Inconvenients	Aplicacions
Bola	Cost baix. Alta capacitat. Tall bidireccional i circulació en línia recta. Poques fuites. Autonetejable. Poc manteniment. No lubricada. Mida compacta. Tancament hermètic. Obertura ràpida i baix parell d'accionament.	Característiques deficients per a la regulació, especialment en obertures grans. Alt parell d'accionament. Susceptible al desgast de segells o empaquetaments. Propensa a la cavitació, especialment en obertures petites.	Servei ON/OFF sense estrangulació, especialment quan es necessita resistència mínima a la circulació. Servei general i altes temperatures, de líquids, vapors, gasos i pastes semilíquides.
Mascle	Cost baix. Alta capacitat i baixa caiguda de pressió a través de la vàlvula. Tancament hermètic i accionament ràpid.	Requereix alta torsió per accionar-la. Desgast del seient. Cavitació amb baixa caiguda de pressió.	Serveis ON/OFF i en derivació d'accionament freqüent. Servei general, pastes semilíquides i líquids corrosius.
Papallona	Lleugera de pes, compacta i de baix cost. Autonetejador. Poc manteniment i poques peces mòbils. Alta capacitat. Circulació en línia recta.	Alta torsió d'accionament. Propensa a la cavitació, especialment en obertures petites.	Serveis ON/OFF i de regulació amb baixa caiguda de pressió. Servei general de líquids, gasos, pastes semilíquides i líquids amb sòlids en suspensió.

Tabla 5.4. Característiques generals i aplicacions d'algunes vàlvules de control.

L'obturador d'una vàlvula de bola consisteix en un mascle esfèric foradat que deixa una secció lliure d'obstacles quan està totalment oberta. La bola contacta de manera circumferencial i uniforme amb el seient, generalment de materials tous, cosa que garanteix un segellament excel·lent. A les vàlvules de mascle o tap, l'obturador pot ser cilíndric o troncocònic. La bona estanquitat d'aquestes vàlvules fa que les seves aplicacions més freqüents siguin ON/OFF, amb un port o diversos per a serveis de derivació i per a qualsevol fluid (fins i tot, amb sòlids en suspensió). Les vàlvules de bola són, en certa manera, un tipus de vàlvula mascle, tot i que se les tracta com una família diferent.

Les vàlvules de papallona són unes vàlvules molt versàtils amb una gran capacitat d'adaptació a múltiples sectors industrials a un cost relativament baix i amb una pèrdua de pressió petita. Malgrat que el seu desenvolupament és relativament recent, hi ha una gran diversitat de grandàries, pressions, temperatures, connexions, etc. La geometria de la vàlvula de papallona és senzilla, compacta i de revolució, per això és barata de fabricar, tant per l'estalvi de material com pels costos de mecanització. El poc espai que ocupa i el seu pes reduït, en comparació amb les vàlvules de comporta i de globus, en faciliten el muntatge en la instal·lació i la fan especialment atractiva



en grans grandàries (de fins a 2.500 mm). A la vàlvula de papallona, el corrent circula al voltant del disc obturador amb una pèrdua de càrrega una mica superior a la vàlvula de bola o de comporta quan està completament oberta, però clarament inferior a la vàlvula de globus. Aquestes vàlvules poden, sota demanda, admetre qualsevol mena de fluid i, a diferència de les vàlvules de comporta, globus o bola, no hi ha cavitats on es puguin acumular sòlids que n'impedeixin la maniobra.

5.2.1 Establiment de la pèrdua de pressió

L'usuari d'una vàlvula de control observa que la relació pressió-cabal segueix una llei gairebé parabòlica, Q^2 , la constant de la qual depèn del grau d'obertura i és més gran com més tancada està la vàlvula. La relació entre el cabal i la pressió sovint s'escriu:

$$Q = f_i K_V \left(\frac{\Delta p_V}{\rho_R} \right)^{1/2} \quad [5.52]$$

en què Q és el cabal circulant en m^3/h ; $\Delta p_V = p_e - p_s$ és la caiguda de pressió en la vàlvula en bar; f_i és la funció inherent, definida monòtona creixent en funció del grau d'obertura unitari, $x/x_{\text{màx}}$, i tal que $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$; K_V és el coeficient de cabal¹⁸ en $\text{m}^3/\text{h}/(\text{bar}^{1/2})$, definit per a obertura màxima ($x/x_{\text{màx}} = 1$), i ρ_R és la densitat relativa del fluid obtinguda de la relació entre la densitat del fluid (aparent, si el fluid conté partícules en suspensió) i la de l'aigua a 15 °C i 1 atm. Aquesta expressió és vàlida per a flux incompressible.

El K_V defineix la grandària de la vàlvula i la seva capacitat de cabal. Aquest coeficient representa el cabal en m^3/h que passa per la vàlvula oberta al 100% quan la diferència de pressió al seu través és d'1 bar. No obstant això, no hi ha motiu per què el cabal màxim real que pot transportar la vàlvula en una instal·lació coincideixi amb el K_V , encara que les seves unitats pràctiques siguin el m^3/h (atès s'omet el factor $\text{bar}^{1/2}$ del seu denominador), perquè també depèn de l'energia disponible per a la vàlvula a obertura màxima. Més endavant, a l'apartat 5.2.3, es presenten i justifiquen les equacions que s'han de fer servir en cada cas.

La funció inherent, f_i , és una característica de la vàlvula que depèn de la mena d'obturador i de seient que empri i és subministrada pel fabricant en les seves cartes de manera gràfica o tabulada. En algunes referències, el producte $f_i K_V$ s'anomena K_V efectiu (K_e), que passa a ser funció del grau d'obertura de la vàlvula, $x/x_{\text{màx}}$. La relació anterior s'escriu, llavors:

$$Q = K_e \left(\frac{\Delta p_V}{\rho_R} \right)^{1/2} \quad [5.53]$$

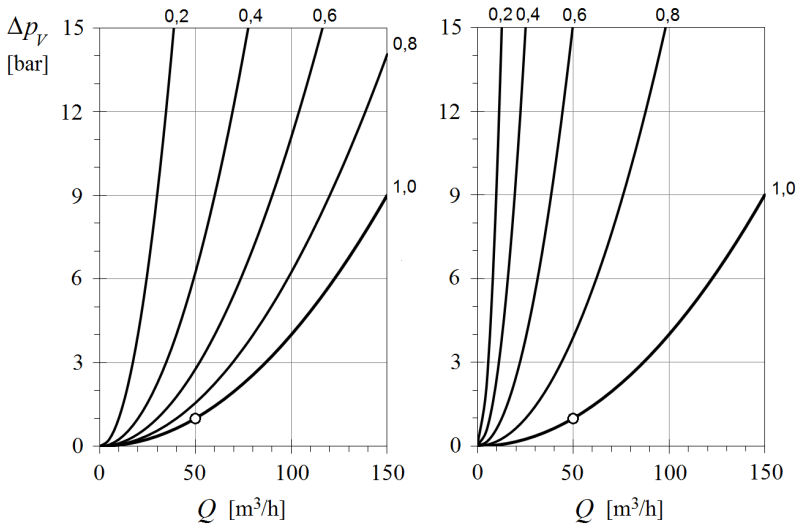


Figura 5.13. Corbes característiques teòriques de vàlvules de control en funció del grau d'obertura unitari. A l'esquerra, d'una vàlvula lineal i, a la dreta, d'una d'isopercentual. Totes dues obtingudes de [5.55] per al mateix $K_V = 50$ m^3/h . $R = 30$ m^3/h .

Els fabricants de vàlvules disposen de diferents procediments per produir la relació entre la pèrdua de pressió i el cabal. El més senzill d'aquests procediments consisteix simplement a provocar un escanyament del corrent per augmentar la velocitat local del fluid, fet que provoca una pèrdua singular altament dissipativa que fa caure, segons el que estableix l'equació de l'energia, la pressió estàtica en la vena contracta, en què la velocitat sobrevé màxima. Altres procediments impliquen la realització d'obturadors més eficients, de vegades en diverses etapes, que generen la pèrdua total quan sumen les pèrdues parcials que produeixen múltiples rajos als quals es força a canviar de direcció. Aquests rajos es distribueixen en un nombre variable de canals amb què es controla la caiguda de la pressió, alhora que mantenen la velocitat mitjana pràcticament constant. Totes dues estratègies permeten agrupar les vàlvules en dues tipologies diferents, segons siguin d'alta o de baixa recuperació de pressió (*high and low recovery valves*). La diferència entre tots dos tipus de vàlvules s'observa a la figura 5.14.

Les vàlvules d'alta recuperació cavitzen amb més facilitat, atès que la pressió de la vena contracta, p_{VC} , és més baixa. S'ha d'evitar l'aparició de cavitació en una vàlvula, ja que pot bloquejar-la i provocar els mateixos efectes nocius que a les bombes. La recuperació de la pressió des de la vena contracta pot tenir lloc a l'interior de la vàlvula o a la canonada corrent a baix, on també són visibles els efectes de la cavitació, si s'arriba a iniciar.

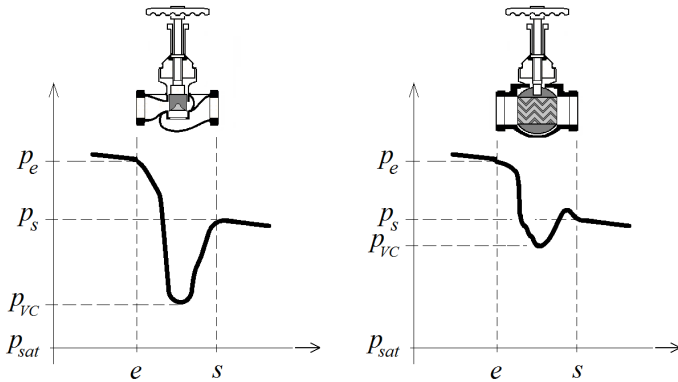


Figura 5.14. Tipologia de les vàlvules de control en funció de la recuperació interna de pressió. Observem com les vàlvules d'alta recuperació (esquerra) tenen una pressió a la vena contracta inferior a les de baixa recuperació (dreta). Les vàlvules de baixa recuperació s'anomenen habitualment *smart valves*.

En la literatura especialitzada, s'utilitzen diferents coeficients per definir el comportament de la vàlvula a la recuperació de pressió interna. El nom depèn de la font consultada o del fabricant que la fa servir, però sovint té la forma:

$$F_L = \left(\frac{p_e - p_s}{p_e - p_{VC}} \right)^{1/2} \quad [5.54]$$

Aquesta expressió mostra que la vàlvula que redueix la pressió augmentant la velocitat del flux té el F_L més petit (perquè el p_s absolut estarà més allunyat de la pressió de la vena contracta). El coeficient de recuperació (*recovery factor*) de [5.54] també depèn del grau d'obertura i sempre és inferior a la unitat, ja que $p_{VC} < p_s$ (v. figures 5.14 i 5.23). Les vàlvules de baixa recuperació de pressió tenen el F_L més gran que les d'alta recuperació i, en aquest sentit, són més eficients, perquè toleren diferències de pressió a través de la vàlvula (i, per tant, cabals) majors que les d'alta recuperació per a una mateixa pressió d'entrada.

5.2.2 Característiques inherent i instal·lada

La selecció de la característica de cabal més adequada d'una vàlvula és fonamental per garantir el bon funcionament de la instal·lació i l'aplicació correcta de la vàlvula de control.

A la característica de flux inherent, es representa la funció f_i , o el coeficient K_e en percentatge, en funció del grau d'obertura de la vàlvula per a una caiguda de pressió constant.¹⁹ A la figura 5.15, es mostren algunes de les característiques de cabal més comunes. Les característiques inherents de la majoria de vàlvules queden compreses



entre la lineal i la isopercentual teòriques, que es poden ajustar, respectivament, per les equacions:

$$\begin{aligned} f_i &= x / x_{\text{màx}} \\ f_i &= R^{x/x_{\text{màx}} - 1} \end{aligned} \quad [5.55]$$

en què R és un coeficient anomenat *marge d'aplicació* o *rangeability*, i representa el quocient entre els cabals màxim i mínim que defineixen l'interval de regulació o camp de control en què la vàlvula manté, de manera aproximada, la característica teòrica.²⁰ La *rangeability* depèn de la mena de vàlvula, però sol tenir valors compresos entre 30 i 100, i és una mica més reduïda en les isopercentuales. Com que $1/R$ és l'ordenada en l'origen de la característica inherent teòrica d'una vàlvula isopercentual, l'equació [5.55] suggereix que aquestes vàlvules, en teoria, no tanquen mai.²¹ El cabal mínim és $Q_{\text{mín}} = Q_{\text{màx}}/R$, que no s'ha d'interpretar com un cabal de fuites, sinó com el mínim cabal controlable per la vàlvula isopercentual real a un grau d'obertura $x_{\text{mín}}/x_{\text{màx}}$.

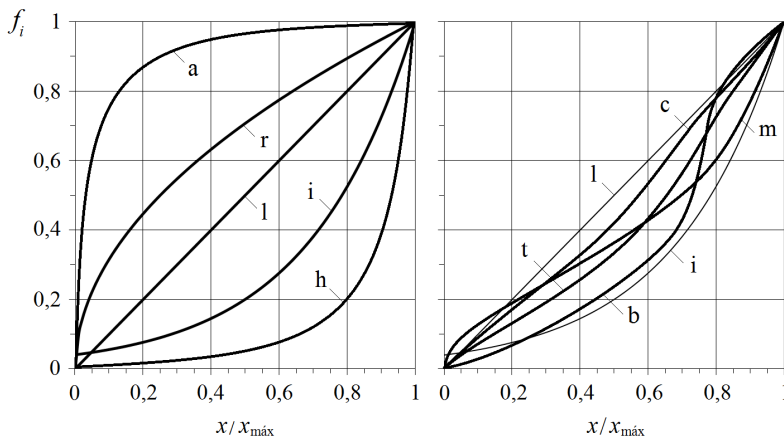


Figura 5.15. Característiques inherents teòriques (esquerra) i pràctiques aproximades (dreta) de diferents configuracions de vàlvules de control. A la figura: l, lineal; i, isopercentual; r, d'arrel quadrada; h, hiperbòlica; a, d'obertura ràpida; t, de tap o mascle; c, de comporta; m, de papallona; i, b, de bola. Per norma general, només són disponibles comercialment les característiques d'obertura ràpida, lineal i isopercentual.

Si bé la característica inherent de flux donada pel fabricant proporciona informació molt útil sobre l'habilitat de la vàlvula per regular el cabal, és la característica instal·lada la que interessa conèixer realment. Aquesta característica representa el canvi en cabal efectiu en funció del grau d'obertura, i no pot ser completament coneguda fins que no es relacionen entre si la instal·lació i la característica inherent. Com es veurà a continuació, el resultat d'aquest acoblament és que totes les vàlvules tenen característiques instal·lades que tendeixen, més o menys, a l'obertura ràpida des de la seva funció inherent.



Analitzant detalladament una instal·lació típica com la de la figura 5.16, en què l'energia que proporciona la bomba disminueix amb el cabal mentre que la corba del sistema augmenta, es conclou que la pressió a la disposició de la vàlvula disminueix a mesura que s'obre (i augmenta el cabal), de manera que no es manté constant i s'invalida la seva característica inherent com a referència. Per entendre millor aquesta circumstància, pensem que la característica inherent d'una vàlvula s'obté al laboratori mitjançant assajos en què es manté la caiguda de pressió a través de la vàlvula, p_V , constant. En aquestes circumstàncies, si es relaciona un grau d'obertura genèric amb el màxim en què $f_i(1) = 1$, resulta la relació $q_i = Q/Q_{\text{màx}}$ següent:

$$q_i = \frac{f_i K_V \Delta p_V^{1/2}}{K_V \Delta p_V^{1/2}} = f_i \quad [5.56]$$

És a dir, la relació de cabals obtinguda és, en si mateixa, la funció inherent buscada.

Repetint el procediment en una instal·lació com la que s'indica a la figura 5.16, en què la caiguda de pressió a través de la vàlvula és mínima quan està totalment oberta, tenim:

$$q_i = f_i \left(\frac{\Delta p_V}{\Delta p_V^{\text{min}}} \right)^{1/2} > f_i \quad [5.57]$$

i la relació de cabals instal·lats, q_i , és superior a la inherent, en una raó que depèn del quocient entre les pressions disponibles, que, al seu torn, és funció de la forma de l'àrea "abcd" tancada entre la corba de la bomba i la del sistema original sense vàlvula, $H_{\text{sis},0}$.

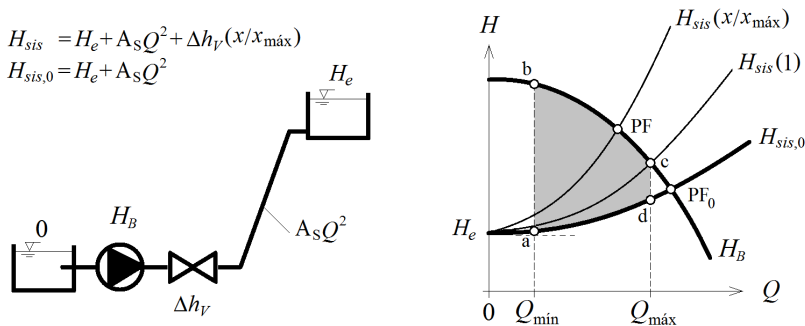


Figura 5.16. Diagrames d'altura vs. cabal d'una instal·lació típica. S'observa que la pressió mínima disponible correspon a una vàlvula completament oberta ($Q_{\text{màx}}$). $\Delta p_V[\text{bar}] = 10 - 5\rho g \Delta h_V[\text{m}]$. PF₀ és el PF del sistema format pel conjunt de conductes i dipòsits en què no s'inclou la pèrdua associada a la vàlvula (és el sistema abans de muntar la vàlvula de control, i d'aquí la definició de "original").

Per estimar si la deformació de la característica de cabal serà prou significativa una vegada instal·lada la vàlvula, s'ha introduït (entre d'altres) el següent factor de pressió reduïda:



$$p_R = \frac{\Delta p_V}{\Delta p_{sis}} = \frac{\Delta p_V}{\Delta p_V + \Delta p_{sis,0}} \leq 1 \quad [5.58]$$

En aquesta equació, el terme $\Delta p_{sis,0}$ representa les pèrdues del sistema original, $A_S Q^2$, en unitats de pressió perquè el p_R sigui adimensional.

La figura 5.17 ensenya que, quan aquest factor és pròxim a la unitat, la característica instal·lada i la inherent són molt similars o coincideixen. Es diu que la vàlvula és molt autoritària²² quan això passa, ja que llavors el terme $\Delta p_{sis,0}$ és molt inferior a Δp_V en les mateixes unitats. Dit d'una altra manera: la vàlvula es comporta com és inherentment, perquè per si sola suposa la majoria de les pèrdues de tot el sistema. Tal com s'observa en la mateixa figura, la deformació de la característica inherent augmenta a mesura que el p_R disminueix, de manera que una vàlvula isopercentual passa a ser aproximadament lineal, una vegada instal·lada, quan el p_R pren valors pròxims a 0,33. Arribats a aquest punt, cal posar de manifest que el factor de pressió reduïda no és constant en la instal·lació perquè depèn del grau d'obertura, cosa que implica, en definitiva, que el p_R ha de ser valorat sobre el rang d'actuació de cabals per tenir una idea del seu valor mitjà o per intervals.

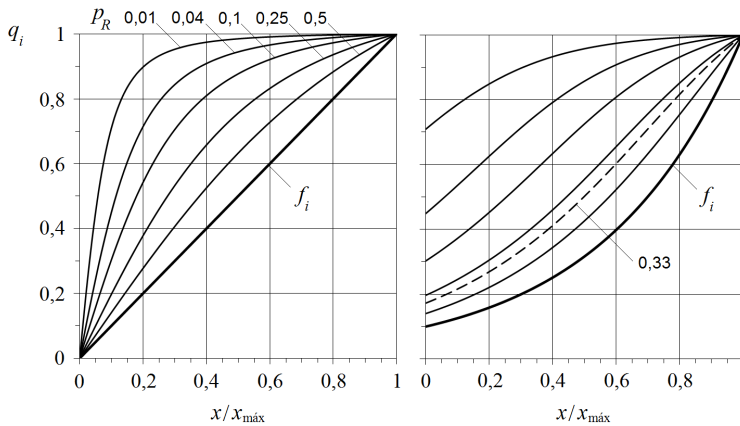


Figura 5.17. Característiques instal·lada i inherent de cabal per a una vàlvula lineal (esquerra) i isopercentual de $R = 10$ (dreta), obtingudes en una instal·lació en què un dipòsit descarrega a través de la vàlvula en sèrie mitjançant un conducte mantenint el seu nivell constant (això és: la suma $\Delta p_V + \Delta p_{sis,0}$ és constant). La característica instal·lada es desvia cap a l'obertura ràpida a mesura que p_R tendeix a zero.

La sensibilitat de la vàlvula es defineix com l'increment de cabal corresponent a un canvi donat del senyal de control (grau d'obertura) mentre és evident que el pendent de la característica de cabal instal·lada representa el guany de la vàlvula, dq_i/dx , en una posició $x/x_{m\grave{a}x}$ concreta. Tal com s'observa a la figura 5.15 i les següents, una característica instal·lada d'obertura ràpida proporciona canvis importants del cabal quan el recorregut de la vàlvula és petit, però, per a obertures mitjanes i altes, la seva sensibilitat és molt baixa i fa gairebé impossible regular el cabal. És a dir, per a obertures petites, aquestes vàlvules poden induir inestabilitats pel seu elevat guany, però,



en contrapartida, es mostren insensibles en altres regions. Tenint en compte que, com s'ha vist, totes les vàlvules modifiquen les seves característiques inherents cap a l'obertura ràpida una vegada s'acoblen amb el sistema hidràulic, les d'obertura ràpida inherent restringeixen l'ús a aplicacions de control ON/OFF en processos ràpids de control discret o semicontinuu. Com a conseqüència de tot això, la majoria de les aplicacions de control se serveixen de vàlvules de tipus lineal o d'igual percentatge d'obertura, depenent de la relació p_R corresponent.

És evident que, des de la perspectiva de la teoria de control, interessa que la relació instal·lada sigui tan lineal com sigui possible, perquè així s'aconsegueix que el guany mitjà del sistema sigui mínim i que els canvis al cabal siguin proporcionals (o gairebé) als canvis en l'obertura.²³ La característica lineal sembla, en principi, la més desitjable, ja que proporciona un guany constant en la seva característica inherent. No obstant això, la decisió no és immediata ni senzilla perquè, com s'ha vist, la relació instal·lada depèn del valor mitjà del p_R avaluat per intervals. A més, per forçar que una vàlvula lineal es comporti linealment calen p_R pròxims a la unitat, de manera que les isopercentuales són més recomanables des d'un punt de vista energètic. En efecte, suposant que una instal·lació té un $\Delta p_{sis,0} = 1$ bar, aleshores seria necessari que Δp_V fos de l'ordre de 10 bar per a que $p_R \approx 0,9$; això és, la vàlvula lineal hauria de provocar 10 vegades més pèrdua d'energia que la mateixa instal·lació que vol ser regulada linealment (cosa que és clarament un despropòsit). En canvi, una vàlvula isopercentual en la mateixa instal·lació, només requerriria un $\Delta p_V = 0,5$ bar per a forçar un $p_R \approx 0,33$.²⁴ En conclusió, i des d'aquest punt de vista, en la mesura del possible s'ha de triar una vàlvula isopercentual perquè és la més recomanable per a p_R reduïts.

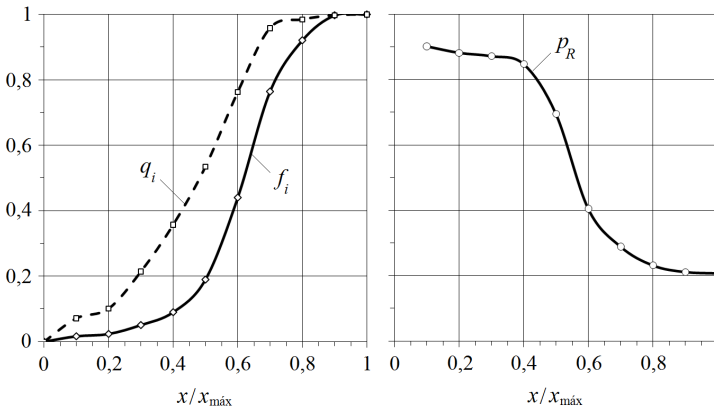


Figura 5.18. Característiques inherent i instal·lada d'una vàlvula motoritzada obtingudes al laboratori i p_R corresponent. S'observa la deformació cap a l'obertura ràpida de la característica de cabal ([5.57]).

Cal tenir en compte, també, que el p_R no depèn pròpiament de la vàlvula, sinó de la instal·lació i del marge d'energia que posi a la seva disposició (àrea “abcd” de la figura



5.16). Per a veure-ho millor, n'hi ha prou d'evidenciar que una altra manera d'escriure [5.58] per a la instal·lació de la figura 5.16 és:

$$p_R = \frac{H_B - H_{sis,0}}{H_B - H_e} \quad [5.59]$$

Per això, com a criteri orientatiu de selecció, es recomana la vàlvula isopercentual si $H_B - H_{sis,0}$ és decreixent amb el cabal i la diferència Δp_V a cabal màxim és inferior al 20% del Δp_V a cabal mínim. En altres casos, especialment quan $H_B - H_{sis,0}$ és sensiblement constant, es triarà la vàlvula lineal.²⁵

5.2.3 Selecció d'una vàlvula de control

La selecció d'una vàlvula de control exigeix considerar detalladament els requisits de capacitat i regulació, buscant sempre la millor combinació de cossos, obturadors i materials de cada servei específic. El primer pas per triar una vàlvula de control és determinar-ne les condicions operatives. Aquestes condicions estan descrites per la pressió nominal o de disseny de la vàlvula, avaluada en funció de la pressió a l'entrada, la diferència de pressió disponible i la seva p_R , i l'interval de cabals i el seu *rangeability*. El següent pas del procés de selecció implica la tria dels materials necessaris, tenint en compte el tipus de fluid i el nivell de pressió i temperatura.

Una vegada decidit el tipus de vàlvula (obturador) més adequat en funció del p_R de la instal·lació, l'elecció de la vàlvula final passa per triar-ne la grandària, en termes del K_V necessari o del seu diàmetre nominal, D_N . Tots dos paràmetres es relacionen entre si per a les diferents tipologies de vàlvules i fabricants mitjançant gràfics o taules com els de la figura 5.19.

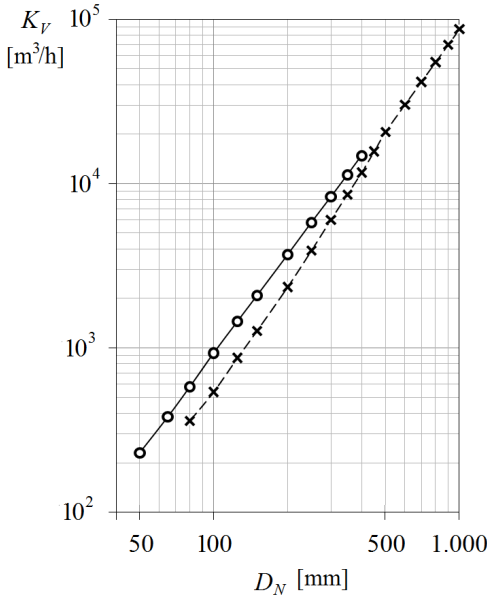
Sovint, se seleccionen les vàlvules perquè el cabal nominal del sistema sigui de l'ordre del 80%-90% del seu cabal màxim, de manera que sempre hi hagi una reserva de cabal en la instal·lació. Altres vegades, el cabal màxim ve fixat pel mateix procés a regular (temps d'ompliment mínim, volum màxim o de vessament, etc.) o per algun límit funcional dels seus components que s'ha d'evitar (cavitació de bomba, cabal màxim de filtració, etc.). Sigui com sigui, conegut el cabal en condicions d'obertura màxima, Q_{\max} , el K_V necessari resulta de l'expressió:²⁶

$$K_V = Q_{\max} \left(\frac{\rho_R}{\Delta p_V^{\min}} \right)^{1/2} \quad [5.60]$$

en què la diferència de pressió mínima correspon a la distància "cd" de la figura 5.16, i les unitats que cal fer servir són les que es descriuen a [5.52]. Més endavant (v. apartat 5.3), es concreten els criteris de treball amb què valorar aquesta diferència de pressió.



El coeficient de cabal que resulti d'aquesta operació pot no estar disponible comercialment, fet que implicaria l'elecció de l'inferior o superior més pròxim al que s'hagi calculat, segons convingui. És molt probable, a més, que el D_N associat al K_V resultant no coincideixi (per defecte) amb el diàmetre de la canonada en què s'ha de muntar la vàlvula i s'hagin d'adaptar els diàmetres de connexió. Quan això passa, que és de fet el més freqüent, el càlcul anterior s'ha de refer per tenir en compte l'efecte dels cons reductors que siguin necessaris.



D_N		K_V	
50	2"	230	
65	2½"	380	
80	3"	580	360
100	4"	930	540
125	5"	1.450	870
150	6"	2.080	1.270
200	8"	3.690	2.350
250	10"	5.800	3.920
300	12"	8.300	6.030
350	14"	11.300	8.590
400	16"	14.800	11.700
450	18"		15.700
500	20"		20.600
600	24"		30.200
700	28"		41.600
800	32"		54.900
900	36"		70.000
1.000	40"		87.000

Figura 5.19. Relació entre K_V i el diàmetre nominal d'una vàlvula de bola de pas complet (o) i una altra de papallona (x). Les dimensions de les vàlvules industrials es regulen per les normes UNE EN 558-1,2:2008. *Industrial Valves - Face-to-face and Centre-to-Face Dimensions of Metal Valves for Use in Flanged Pipe Systems - Pn and Class-designated Valves.*

Per norma general, les vàlvules rotatives inclouen, en les seves cartes, factors que permeten calcular el K_V aparent o equivalent, $K_{V,eq}$, incloent-hi un factor F_p que és funció del grau d'obertura i la relació D_N/D , en què D és el diàmetre intern de la canonada (figura 5.20). En altres vàlvules o quan els cons reductors no són idèntics a entrada i sortida, aquest factor es pot estimar mitjançant l'expressió:²⁷

$$F_p = \left(1 + 625 K_{12} \left(\frac{K_V}{D_N^2} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad [5.61]$$

El coeficient K_{12} resulta de considerar tots els efectes associats a l'adaptació que suposen un canvi en la diferència de pressió a través de la vàlvula. El K_V necessari és, llavors:



$$K_V = \frac{Q_{\max}}{F_p} \left(\frac{\rho_R}{\Delta p_V^{\min}} \right)^{1/2} \quad [5.62]$$

Com que $F_p < 1$, el producte $F_p K_V$ fa que la vàlvula sembli més petita del que realment és, ja que els cons reductors provoquen una pèrdua de pressió que s'ha de tenir en compte en el còmput de la diferència de pressió global (vàlvula, més reductors d'entrada i sortida).²⁸ Per ser més precisos, també cal preveure el possible efecte difusor de tots dos cons, de manera que el coeficient K_{12} de la fórmula [5.61] es calcula de la manera següent:

$$K_{12} = k_1 \left(1 - \frac{D_N^2}{D_1^2} \right)^2 + k_2 \left(1 - \frac{D_N^2}{D_2^2} \right)^2 + \left(1 - \frac{D_N^4}{D_1^4} \right) - \left(1 - \frac{D_N^4}{D_2^4} \right) \quad [5.63]$$

En aquesta expressió, D_1 i D_2 són els diàmetres interns de la canonada a l'entrada del con d'entrada i a la sortida del de sortida, respectivament, i els coeficients k_1 i k_2 es poden suposar 0,5 i 1 si no es disposa d'informació més precisa. Els dos primers termes de [5.63] permeten estimar les pèrdues singulars en els cons, mentre que els dos últims aproximen l'efecte difusor a través de la vàlvula (la seva diferència és nul·la si $D_1 = D_2$). Evidentment, se segueix que, si $D_1 = D_2 = D_N$, llavors $F_p = 1$. En qualsevol altre cas, com que el coeficient geomètric F_p depèn del diàmetre D_N , el procés de càlcul del K_V s'ha de resoldre seguint un procés iteratiu o per tanteig.

El procés iteratiu comença prenent un coeficient de cabal en la primera iteració, $K_V^{(1)}$, un 30% superior al donat per l'equació [5.60], $K_V^{(0)}$, i s'incrementa en cada iteració la mateixa proporció fins que es compleixi la condició $K_V^{(n)} F_p^{(n)} > K_V^{(0)}$. Una vegada finalitzat el procés, es tria la mida comercial de vàlvula compresa entre el $K_V^{(n)}$, que és el corresponent a l'última iteració realitzada i de valor $1,3^n K_V^{(0)}$, i la que resulti de l'equació [5.62] per a $F_p^{(n)}$, que és inferior a $K_V^{(n)}$. Per al K_V triat també quedaran definits el seu diàmetre nominal, D_N , i el coeficient K_{12} de [5.63].

El cabal que passaria per la vàlvula, en aquestes condicions, seria:

$$Q = f_i F_p K_V \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho_R} \right)^{1/2} \quad [5.64]$$

en què p_1 i p_2 són les pressions estàtiques a l'entrada i a la sortida dels cons que defineixen la diferència de pressió total a través del conjunt, distància "cd" de la figura 5.16, i que és més gran que la diferència de pressió a la disposició de la vàlvula, $p_e - p_s$.

Després de l'elecció de la grandària més adequada de la vàlvula en funció dels requisits de cabal i pressió disponible, s'han de tenir en compte altres consideracions relatives al funcionament i a la seguretat del procés, com ara la capacitat de tancament de la vàlvula, la possibilitat d'incorporar silenciadors o l'ús de materials especials anticorrosió o resistent a la cavitació, etc. La compatibilitat i la durada dels materials estan subjectes a complexes consideracions que han de considerar la presència de



sòlids abrasius en el flux, la corrosivitat del fluid que es transportarà, la possibilitat d'obturació a petites obertures, etc.

En l'actualitat, es dissenyen vàlvules de control per a qualsevol fluid i en qualsevol interval de pressions i temperatures. L'efecte de la temperatura sobre el funcionament de la vàlvula inclou la resistència i la ductilitat del material del seu cos, així com la dilatació tèrmica de les diferents parts que la componen. Els límits de servei també es poden fixar per la possibilitat de descomposició a temperatures elevades de les parts toves o per la pèrdua de tenacitat a baixa temperatura de les més resistents.

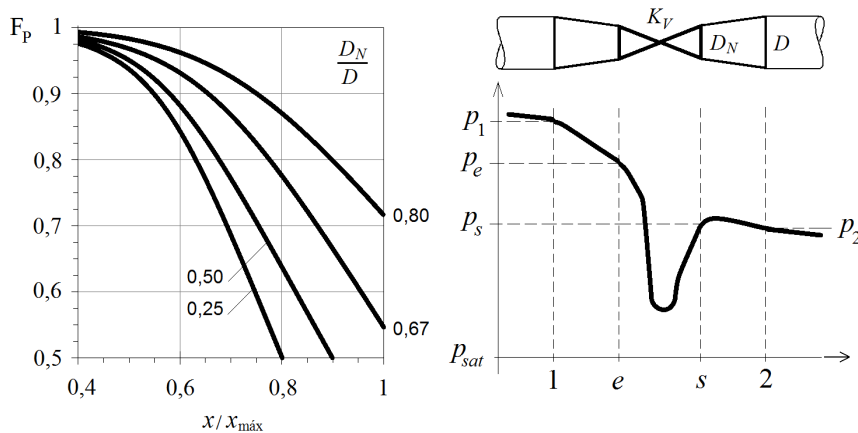


Figura 5.20. Factor geomètric, F_p , en funció del grau d'obertura i la relació de diàmetres D_N/D (forma típica).

Quan el fluid conté partícules abrasives, el cos de la vàlvula ha de tenir un perfil suau que minimitzi les turbulències i el fregament. La tria del material depèn, en aquest cas, de la duresa de les partícules transportades; en general, els metalls són menys resistents a l'abradió que les ceràmiques. Si hi ha presència d'agents corrosius en el flux, és més pràctic emprar cossos metàl·lics o plàstics revestits d'algun material resistent i alternar el funcionament normal amb accions periòdiques de rentatge. Si el fluid que s'ha de transportar és altament enganxós perquè transporta substàncies glutinoses, és convenient triar cossos de vàlvules que no tinguin buits en què es puguin formar dipòsits. En qualsevol cas, s'ha d'evitar tant com es pugui el bloqueig dels coixinets i de les guies internes perquè totes dues circumstàncies incrementen l'esforç necessari per a l'actuació de la vàlvula i en poden deteriorar el dispositiu de tancament. En totes aquestes circumstàncies, és interessant fer servir vàlvules de diafragma, sempre que el nivell de pressions ho permeti, o vàlvules amb una secció de pas que sigui pràcticament quadrada a qualsevol obertura (s'han d'evitar les de secció estreta o allargada en petites obertures). Si l'aplicació és tot o res, també són adequades les vàlvules de bola i les de papallona, perquè tenen una àmplia secció de pas amb vàlvula oberta.



És recomanable l'ús de vàlvules d'un sol seient quan el tancament de la vàlvula ha de ser estanc. Evidentment, el material de la junta d'estanquitat ha de ser compatible amb el fluid i la temperatura de treball. En cas que sigui necessari un seient de metall contra metall, per exemple, quan no es troba disponible un material de segellament compatible o amb un límit de resiliència adequat, la força de seient ha de ser elevada, i el guiatge de l'obturador, precís.

Amb l'excepció possiblement només de les vàlvules de corredora, gairebé tots els dissenys moderns de vàlvules garanteixen un nivell d'estanquitat adequat en la major part dels casos. Tot i que les vàlvules de bola i de globus són les més estanques i, en general, aquestes segones són les preferides en el tancament de metall contra metall, les vàlvules de papallona actuals també garanteixen un segellament perfecte a alta pressió, fins i tot en el tancament de metall contra metall, especialment en discos de forma el·líptica o amb perfils bidimensionals de tancament.

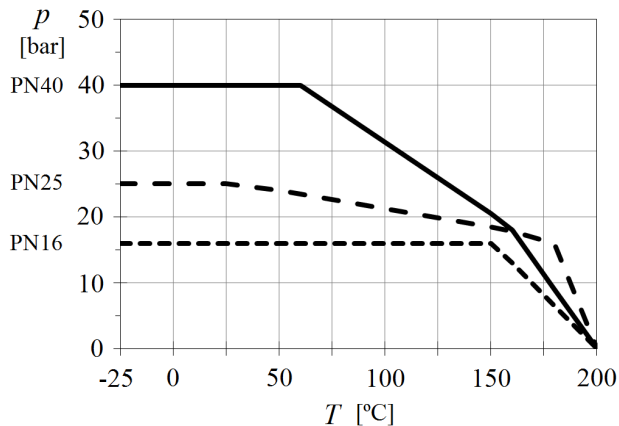


Figura 5.21. Marges típics de pressió i temperatura d'una vàlvula. Límits operatius en absència d'abrasió o corrosió.

Finalment, però no menys important, l'usuari d'una vàlvula ha d'estar familiaritzat amb certa terminologia de la teoria de control i les seves bases. Conceptes com els de linealitat, estabilitat, histèresi, zona morta, velocitat de resposta o resposta en freqüència, són comuns per descriure el comportament d'una vàlvula davant el canvi del senyal de comandament. Aquestes qüestions les solen resoldre els fabricants perquè les seves vàlvules presentin la dinàmica adequada al nivell de pressions i cabals a controlar, però, així i tot, sempre és una bona praxi verificar almenys que el conjunt actuator-posicionador és l'apropiat per al nivell d'esforços que cal fer i el temps de resposta requerit, i que el guany final de la vàlvula no causa la inestabilitat en el bucle de control de què forma part.



5.2.4 Bloqueig i cavitació d'una vàlvula

Quan la pressió estàtica en la vena contracta cau per sota de la pressió de saturació del líquid, apareix un flux mixt de líquid i bombolles de vapor que pot conduir al bloqueig de la vàlvula i a la saturació de la seva característica de cabal.

A diferència de les bombes, en què la pressió estàtica té tendència a augmentar després de la generació de les bombolles fins que s'arriba al col·lapse, a les vàlvules no sempre es recupera la pressió ni s'atura la creació de bombolles, en particular si el procés indueix una pressió a la sortida de la vàlvula inferior a la de saturació ($p_2 < p_{sat}$). Es produeix *flashing* quan la pressió de sortida es manté per sota de la de saturació, cosa que implica l'evaporació gairebé completa del flux líquid i una erosió molt acusada de les parets.²⁹

La gestació de bombolles es frena si es recupera la pressió després de la vena contracta i, en aquest sentit, són preferibles les vàlvules d'alta recuperació de pressió, ja que el seu disseny intern afavoreix la destrucció de les bombolles. No obstant això, una vegada iniciat el procés de gestació, sempre hi ha una finestra temporal durant la qual són patents els efectes de la cavitació (o del *flashing*, si s'arriba a donar), perquè el col·lapse de les bombolles es pot estendre aigües avall i generar soroll i degradació superficial. Atès que no hi ha material d'enginyeria capaç de resistir la repercussió contínua de les implosions que es produeixen, la millor solució per reduir els efectes de la cavitació és evitar que la pressió mínima decaigui fins la pressió de saturació.

Tant la cavitació com el *flashing* limiten el flux de líquid a través de la vàlvula i causen bloqueig. La formació continuada de bombolles en la vena contracta redueix la velocitat del so en el mitjà³⁰ i impedeix que el cabal pugui continuar augmentant encara que disminueixi la pressió aigües avall. Això és el que s'observa a la figura 5.22, en què es representa el cabal en funció de l'arrel de la diferència de pressions a través de la vàlvula per a una pressió aigües amunt constant. Per a Δp_V inferiors a un valor concret, la relació entre el cabal i l'arrel de la pressió és una recta de pendent el K_V efectiu equivalent, segons el que s'estableix a l'equació de flux general [5.64]. Quan augmenta la diferència de pressions (disminuint p_2), s'arriba a un punt (C) en què s'inicia la formació de bombolles i la cavitació és incipient. El bloqueig és imminent a partir de la diferència de pressió, $\Delta p_{V,a}$, anomenada *permissible* (*allowable*), que dona lloc a una característica típica de saturació. D'altra banda, si bé tots dos processos sostinguts condueixen al bloqueig de la vàlvula i representen la pèrdua de la seva capacitat reguladora, el *flashing* suposa, a més, la pèrdua de la vena líquida en la instal·lació, cosa que, en definitiva, fa que deixin de ser vàlides les equacions del flux líquid a través de la vàlvula.

El factor F_1 de [5.54] permet estimar quan es presentarà bloqueig només substituint la pressió en la vena contracta per la pressió de saturació del fluid. No obstant això, aquesta equació no es pot utilitzar directament per diverses raons. D'una banda, i com que en general el muntatge de la vàlvula requereix cons reductors, l'aparició de



cavitació depèn de la pèrdua de pressió a l'entrada de la vàlvula des de la pressió absoluta p_1 , no p_e , i la diferència de pressions de referència ha de ser $(p_1 - p_2)$, no $(p_e - p_s)$. D'altra banda, s'observa experimentalment que la pressió a la vena contracta que implica una producció de bombolles que condueix al bloqueig és una mica inferior a la de saturació. Per fer una aproximació d'aquesta pressió, es fa servir la relació crítica de pressions: $r_c = p_{VC}/p_{sat} < 1$, que s'ajusta a l'expressió:

$$r_c = 0,96 - 0,28 \left(\frac{p_{sat}}{p_{CR}} \right)^{1/2} \quad [5.65]$$

en què p_{CR} és la pressió crítica del fluid (figura 5.23).

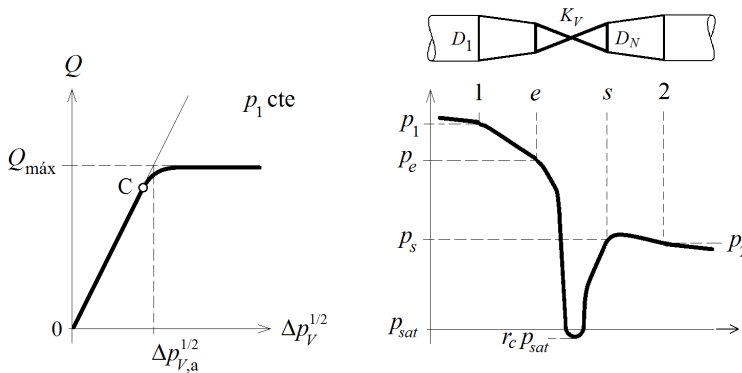


Figura 5.22. Característica de saturació d'una vàlvula i definició de la pèrdua de pressió admissible. Per a un Δp_V i un p_1 determinats, les vàlvules de baixa recuperació inhibeixen, de manera més significativa, l'aparició de cavitació però, una vegada iniciada, es prefereixen les d'alta recuperació per impedir el flashing.

Amb tot, perquè hi hagi bloqueig s'ha de donar la condició:³¹

$$p_1 - p_2 > \Delta p_{V,a} = \left(\frac{F_{LP}}{F_p} \right)^2 (p_1 - r_c p_{sat}) \quad [5.66]$$

El coeficient F_{LP} és el factor de recuperació de pressió en presència de cons reductors:

$$F_{LP} = \left(\frac{1}{F_L^2} + 625 K_1 \left(\frac{K_V}{D_N^2} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad [5.67]$$

on ara:

$$K_1 = 0,5 \left(1 - \frac{D_N^2}{D_1^2} \right)^2 + \left(1 - \frac{D_N^4}{D_1^4} \right) \quad [5.68]$$

Evidentment, $F_{LP} = F_L$, si $D_1 = D_N$.

La diferència $\Delta p_{V,a}$ és la màxima permissible perquè la vàlvula perd la seva capacitat de regulació per a diferències superiors. El cabal màxim en bloqueig s'avalua, llavors, com:



$$Q_{\max} = f_i F_p K_V \sqrt{\frac{\Delta p_{V,a}}{\rho_R}} = f_i F_{LP} K_V \sqrt{\frac{p_1 - r_c p_{sat}}{\rho_R}} \quad [5.69]$$

que és independent de la pressió a la sortida de la vàlvula (i de D_2).

Una vàlvula cavitatarà incipientment si es verifica que:

$$p_1 - p_2 > F_C \left(\frac{F_{LP}}{F_p} \right)^2 (p_1 - p_{sat}) \quad [5.70]$$

en què F_C és el coeficient de cavitació incipient. Aquest factor identifica el percentatge de pressió permissible a què s'inicia la cavitació (punt "C" de la figura 5.22). Hi ha vàlvules en què els seus obturadors han estat dissenyats especialment per al control de la cavitació i que aconsegueixen percentatges de gairebé el 100%, de manera que F_L i F_C són sensiblement iguals a la unitat.³² A l'altre extrem, i sobretot en vàlvules d'alta recuperació de pressió com les de papallona i de bola, el percentatge pot ser inferior al 50%.

De les relacions anteriors, es dedueix que, per evitar o limitar la cavitació per a una p_{sat} donada, es pot:

- Instal·lar vàlvules de baixa recuperació de pressió, això és, amb coeficinetes F_L o F_{LP} elevats.
- Incrementar la pressió a l'entrada de la vàlvula, p_1 , traslladant la vàlvula aigües amunt (és a dir, acostant-la a la bomba) i en una posició tan baixa com sigui possible.
- Instal·lar vàlvules en sèrie, perquè d'aquesta manera es reparteix la caiguda de pressió total a través de cada vàlvula i s'allunya el Δp_V individual de la condició permissible. També hi ha dissenys especials de vàlvules anticavitació amb diversos obturadors disposats en sèrie.
- Seleccionar una vàlvula de més grandària, fet que disminueix el grau d'obertura necessari i augmenta el coeficient de recuperació (figura 5.23). Aquesta opció no sempre és viable perquè afecta el marge d'operació de la vàlvula

Cal tenir en compte que totes aquestes opcions poden no ser compatibles amb altres condicionants de la instal·lació o del fluid. Per exemple, algunes vàlvules dissenyades per evitar la cavitació disposen d'obturadors en què la pèrdua de pressió es reparteix en nombrosos conductes o crugies amb què es mira de mantenir la velocitat pràcticament constant (figura 5.14, dreta), però, si el fluid transporta materials en suspensió, aquest disseny s'autoexclou perquè calen seccions de pas grans. En aquest cas, seria recomanable fer servir vàlvules en sèrie amb una forma d'orifici favorable i que a més respectessin el marge de regulació.

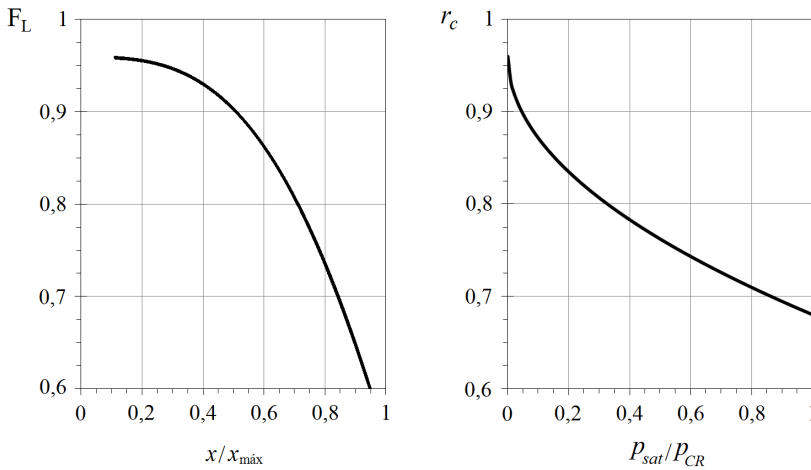


Figura 5.23. Valors típics del coeficient de recuperació de pressió o factor de flux crític, F_L , en funció del grau d'obertura per a una vàlvula de bola, i relació crítica de pressions, r_c . En general, s'accepta que $r_c \approx 1$ si la pressió de saturació del fluid a l'entrada de la vàlvula és inferior a la desena part de la seva pressió crítica. Per a l'aigua, $p_{CR} = 220,4$ bar. Consulteu les taules termodinàmiques en cada cas.

5.2.5 Soroll generat per una vàlvula

Les vàlvules de control són una font important de soroll en les instal·lacions hidràuliques. Les causes més importants del soroll que genera una vàlvula són la vibració mecànica o estructural i les d'origen aerodinàmic i hidrodinàmic. El soroll global és la superposició de totes aquestes causes.

El soroll per vibració mecànica passa per les fluctuacions de pressió entre el cos de la vàlvula i les seves parts mòbils en contacte amb el fluid. La font fonamental de soroll és la vibració mecànica que es deu al moviment lateral de l'obturador enfront de les superfícies de guiatge. Aquesta vibració acaba per desgastar la vàlvula i provoca un soroll que registra freqüències de menys de 1.500 Hz i es reconeix per l'agitació metàl·lica que s'intueix. També hi ha vibració mecànica quan alguns components de la vàlvula entren en ressonància. Aquest fenomen produeix tensions mecàniques molt elevades que poden causar fatiga tant als obturadors com a les parts flexibles i als elements d'estanquitat, i resulta en un únic to (o en una combinació de tons), amb freqüències de l'ordre dels 3.000 Hz als 7.000 Hz. En tots dos casos, la vibració mecànica que s'observa és un símptoma que la vàlvula està treballant en condicions crítiques que poden fer que falli.

El soroll aerodinàmic és generat per la turbulència associada a les altes velocitats de flux a les vàlvules de control, especialment de gasos. Aquest soroll és la font principal de tensions en el flux turbulent i sol ser un soroll aleatori no periòdic amb freqüències entre els 1.000 Hz i els 8.000 Hz. La turbulència es genera en regions on el flux canvia, com per exemple, en restriccions, expansions ràpides, desacceleracions i canvis de direcció, i també en els punts del flux on es genera calor per pèrdues irreversibles.



Per part seva, el soroll hidrodinàmic és inherent al flux de fluid i és inevitable, però una de les causes que més fan que augmenti és la cavitació, amb què poden aconseguir nivells de fins a 115 dB.

El control del soroll és actualment objecte d'estudi i de disseny. Per resoldre'l, se segueixen dues estratègies principals: la reducció de la generació i l'aïllament de la font. La primera de les formes és més interessant sempre que sigui tècnicament i econòmicament possible, perquè el soroll és, en si mateix, la manifestació que el funcionament de la vàlvula és "millorable" (els sistemes més eficients són menys sorollosos). Per contenir les fonts de soroll intern s'ha d'evitar l'aparició de vòrtexs en el flux, dissenyant l'obturador i la zona d'expansió posterior de manera que la velocitat sigui tan uniforme com sigui possible. Quant a l'atenuació del soroll transportat, el millor és instal·lar silenciadors dins del cos de la vàlvula o corrent a sota.

5.2.6 Altres vàlvules

A més de les vàlvules de regulació, en una instal·lació hi pot haver altres vàlvules amb una funció que el seu mateix nom ja descriu i que, moltes vegades, són imprescindibles. Així doncs, hi ha vàlvules reductores, ventoses, vàlvules de descàrrega i antiariet, vàlvules de retenció, d'ompliment de dipòsits, de diverses vies, etc. El principi de funcionament de cadascuna d'aquestes vàlvules s'interpreta fàcilment a partir dels esquemes de la figura 5.24.

Les vàlvules reductores fixen la pressió de sortida a un valor que l'usuari determina.³³ La vàlvula s'encarrega de mantenir aquesta pressió constant i independent de les variacions del cabal i de la pressió d'entrada dins del seu marge operatiu. La seva construcció típica, normalment de cos amb globus amb brides, permet que s'adapti a altres funcions complementàries amb facilitat incorporant línies de pilotatge o de drenatge addicionals (com ara, funcions de retenció, de seguretat davant trencament, amb antiretorn incorporat o amb limitació de cabal màxim, etc.). Aquesta mena de vàlvula està especialment indicada quan, en alguns trams de la instal·lació, no cal tanta pressió com a la resta. La reducció de la pressió de servei suposa un estalvi en cabal, redueix les fuites o pèrdues no forçades i alleugereix el timbratge dels conductes. A més, les vàlvules reductores es poden tancar quan el consum és nul per mantenir la pressió de sortida constant.

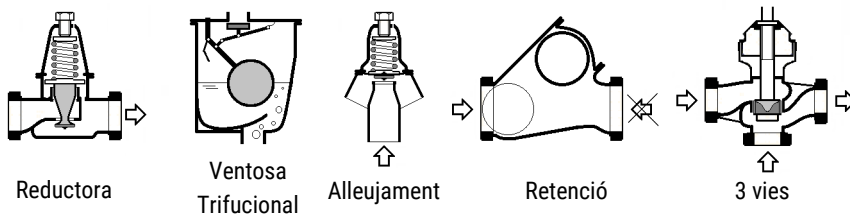


Figura 5.24. Esquemes típics d'una vàlvula reductora, una ventosa trifuncional de flotador i bieles, una d'alleujament, una de retenció per bola i una altra de tres vies, tipus mescladora. Hi ha altres variants per a la mateixa funció.



Les ventoses són vàlvules el mecanisme de les quals permet eliminar l'aire d'una xarxa de manera automàtica. Cal tenir en compte que és gairebé impossible eliminar per complet l'aire contingut en una instal·lació. D'una banda, l'aigua (com qualsevol fluid) sempre conté una petita quantitat d'aire dissolt o emulsionat que es pot dissociar en les zones de menys pressió (com, per exemple, a l'interior de les vàlvules de regulació); d'altra banda, durant les operacions d'ompliment (i buidatge) el corrent flueix per l'interior del conducte en un canal obert formant làmines de fluid la velocitat de les quals pot esdevenir molt elevada. Les bosses d'aire que quedin atrapades per aquest flux poden escanyar-lo i fins i tot arribar a interrompre'l formant taps d'aire en què la pressió creix de manera explosiva.

Es poden distingir tres tipus de ventoses segons la seva funció: monofunció o purgadora, bidireccional, i trifuncional o universal. Les purgadores es fan servir per eliminar l'aire contingut a pressió de la instal·lació en càrrega, mentre que les bifuncionals permeten l'admissió i expulsió de l'aire quan la instal·lació està sense pressió. Les vàlvules trifuncionals són la síntesi de les dues anteriors. El diàmetre adequat d'una ventosa es tria en funció del diàmetre del conducte, tot i que, si es vol afinar el càlcul, es poden tenir en compte el cabal d'aire a expulsar o admetre, el cabal d'ompliment de la instal·lació³⁴ i la pressió interna.

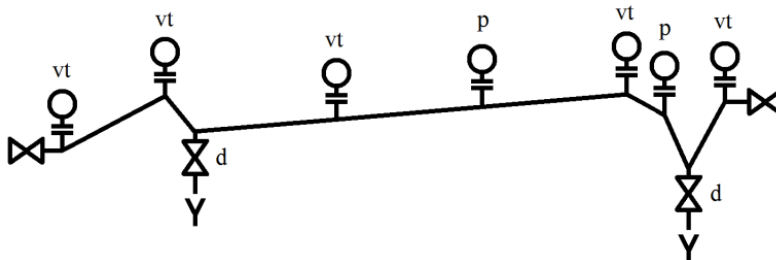


Figura 5.25. Exemple d'ubicació de ventoses en una instal·lació. A la figura: p, purgador; vt, ventosa trifuncional, i d, drenatge.

Per a l'expulsió correcta de l'aire (que transcorre sempre en sentit ascendent i potser contracorrent), les ventoses s'han d'instal·lar en la generatriu superior de la canonada i portar incorporada una clau de pas que cal mantenir oberta encara que la ventosa perdi aigua. Lamentablement, són moltes les ventoses instal·lades que no funcionen bé, sigui perquè es fan servir materials no adequats, boles de plàstic que s'han deformat per una excessiva pressió o un cop d'ariet massa gran, o simplement perquè han estat mal dimensionades o situades. La determinació de la ubicació de les ventoses es regirà pel sentit comú i l'experiència. En general, s'instal·laran ventoses en tots els punts alts amb canvi de rasant (sifons) de la conducció i en els canvis bruscos de pendent, però també són convenientes després de qualsevol vàlvula de retenció o tall, en els canvis de secció i cada 500 metres, aproximadament, en trams rectes, per evitar la indecisió de l'aire a l'hora de buscar la sortida.



Les vàlvules reductores, també anomenades vàlvules contra sobrepressions o de seguretat, protegeixen la instal·lació dels excessos de pressió que es puguin provocar expulsant aigua de la canonada. Aquestes vàlvules poden consistir en un dispositiu simple autopilotatge, de tipus molla-tap d'alta resposta dinàmica, o ser pilotades a distància per al seu accionament automàtic durant l'arrencada i la parada dels sistemes de bombeig.

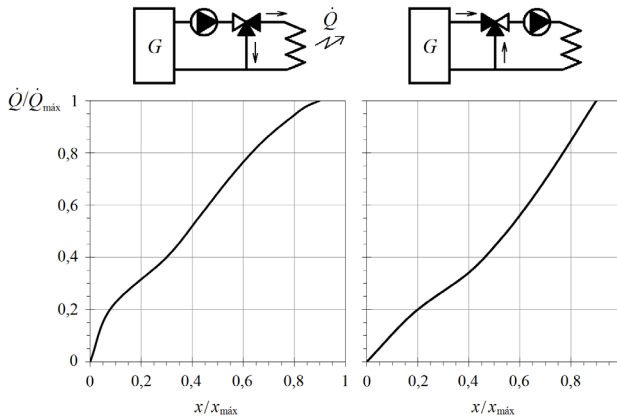


Figura 5.26. Diferents estratègies per a la regulació de l'energia emesa per un bescanviador. G és la caldera o generador de calor. A l'esquerra, amb vàlvula divisora (control del cabal) i, a la dreta, amb vàlvula mescladora (control de temperatura). Aquests esquemes es poden invertir i disposar la vàlvula en la unió de la línia de retorn (regulació inversa a menys temperatura). Les gràfiques inferiors representen les característiques instal·lades corresponents, i s'han obtingut per a una temperatura de sortida del generador i un cabal a la bomba constants, i una vàlvula isopercentual de R25 i autoritat 0,36.

Altres vàlvules que es fan servir en les instal·lacions hidràuliques són les vàlvules de flotador, d'altitud, de seguretat davant inundacions i de retenció (v. 5.4.5). Les vàlvules de flotador i d'altitud es tanquen quan el nivell o la pressió en un punt arriben a un nivell màxim determinat. La transmissió del nivell o la pressió es pot fer a distància per diferents mitjans (mecànics, hidràulics o electrònics) i l'obertura o tancament es pot fer de manera retardada. Una vàlvula de retenció impedeix el pas del fluid en un sentit i es manté oberta en l'altre, i una vàlvula contra inundacions talla el pas de l'aigua quan hi ha un trencament en la canonada aigües avall de la vàlvula. El trencament es pot detectar per un augment sobtat en la velocitat del fluid o per una disminució no prevista de la pressió.

Les vàlvules de tres vies poden ser divisores o mescladores i troben aplicació en instal·lacions fluidotèrmiques per a la regulació de la potència d'un bescanviador, sigui per variació del cabal o per variació de la temperatura d'entrada. Les vies d'aquestes vàlvules s'anomenen via comuna, via directa i de *bypass*, i estan connectades entre si a l'interior de la vàlvula, de manera que el cabal de la via comuna sempre és la suma del de les altres vies. El sentit d'aquest cabal pot ser entrant a la vàlvula o de sortida, depenent de si la vàlvula és divisora o mescladora. La via comuna es connecta amb



la via directa quan la vàlvula està completament oberta, i amb la de *bypass*, quan està tancada. En posicions intermèdies, aquestes vàlvules regulen el cabal de la via directa i, llavors, la seva selecció segueix els mateixos principis que qualsevol altra vàlvula de dues vies, això és: aquestes vàlvules poden ser lineals, isopercentuals, etc., s'hi pot definir la *rangeability* i l'autoritat, i també els coeficients K_V , F_L , etc.

5.3 Regulació de sistemes

Segons s'ha explicat al principi d'aquest tema, el punt de funcionament d'una instal·lació es troba en la intersecció de la característica de la bomba i l'equació del sistema (v. figura 5.1). Per canviar la ubicació d'aquest punt en el quadrant (Q, H) i adaptar-lo a les exigències productives de la instal·lació, es pot canviar la corba de la instal·lació, la de la bomba o totes dues.

El procediment més econòmic i senzill en instal·lacions de baixa potència instal·lada fa servir vàlvules de regulació muntades en sèrie o en *bypass*. Com es pot deduir, per exemple, de la figura 5.5 i de les equacions [5.29], la incorporació d'una vàlvula a la resistència original del circuit desplaça el punt de funcionament de la bomba cap a cabals més petits, si el muntatge de la vàlvula es fa en sèrie (figura 5.16), i cap a cabals més grans, si es fa en paral·lel. Això suggereix que, a les bombes centrífugues, en què la corba de potència és creixent amb el cabal, és més recomanable la regulació en sèrie, mentre que a les axials ho serà per derivació. En qualsevol cas, l'ús de vàlvules sempre empitjora el rendiment de la instal·lació i, en conseqüència, és millor recórrer a altres mètodes de regulació més eficients quan prevalguin les pèrdues d'explotació. Per exemple, el rendiment de la instal·lació en el muntatge en sèrie es calcula de la fórmula ($Q_{sis} = Q_B$):

$$\eta_{sis} = \eta_B \frac{Q_{sis} H_e}{Q_B H_B} = \eta_B \frac{H_e}{H_e + A_s Q_B^2 + \Delta h_V} < \eta_{sis,0} \quad [5.71]$$

que és menor que en el sistema no regulat, $\eta_{sis,0}$, ja que l'altura de la bomba augmenta quan s'escanya la vàlvula (independentment que el seu rendiment possiblement també empitjora). Si, en canvi, part del cabal de la bomba es deriva a través de la vàlvula en *bypass*, el cabal dirigit cap al sistema serà $Q_{sis} = Q_B - Q_V$, i el rendiment de la instal·lació:³⁵

$$\eta_{sis} = \eta_B \frac{Q_{sis} H_e}{Q_B H_B} = \eta_B \left(1 - \frac{Q_V}{Q_B}\right) \frac{H_e}{H_B} \approx \eta_B \left(1 - \frac{Q_V}{Q_B}\right) \frac{H_e}{H_e + A_s Q_{sis}^2} \quad [5.72]$$

que disminueix de manera proporcional al cabal derivat. En aquest últim cas, l'altura de la bomba és una mica més petit que l'original, cosa que pot arribar a compensar la pèrdua de la derivació.

A l'esquerra de la figura 5.27 es presenta una temptativa de selecció de bomba (1) que no preveu la possibilitat d'afegir una vàlvula de control. Aquesta bomba subministra, en el punt de funcionament "0", un cabal sensiblement superior al nominal "N"



i, per tant, el sistema estaria ben dissenyat (almenys a priori i a l'inici de la vida de la instal·lació). Evidentment, si el sistema ha de treballar en un interval de cabals entorn del nominal, cal algun element de control que permeti canviar el PF i, si la decisió passa per la selecció d'una vàlvula en sèrie com a element modulador, llavors la bomba que s'ha de triar és la (2). En aquest cas, a la dreta de la figura, al punt de funcionament original de la instal·lació (quan encara no s'ha muntat la vàlvula) li correspon un cabal Q_0 , que ha de ser superior al màxim que es requereix en un percentatge que depèn de l'autoritat que es vulgui a la vàlvula, és a dir, del valor de Δh_V disponible per al cabal màxim, $Q_{m\grave{a}x}$. Aquesta parella de valors i les seves variacions permeten determinar el coeficient K_V necessari i el tipus de vàlvula segons el procediment descrit a l'apartat corresponent de la secció anterior, i és recomanable triar grandàries de vàlvules que proporcionin cert marge de maniobra.

Una bona pràctica consisteix a seleccionar la bomba de manera que, a cabal màxim, la diferència de pressió disponible a la vàlvula estigui compresa entre el 25% i el 50% de la caiguda de pressió total. Malgrat que aquesta mesura porta a bombes sobredimensionades i a un consum més elevat, també redueix la grandària de la vàlvula necessària i en millora la característica de control implicant valors de p_R adequats. En qualsevol cas, no és convenient que la caiguda de pressió a través del cos de la vàlvula (a cabal màxim) sigui de menys del 15% o de 0,5 bar.

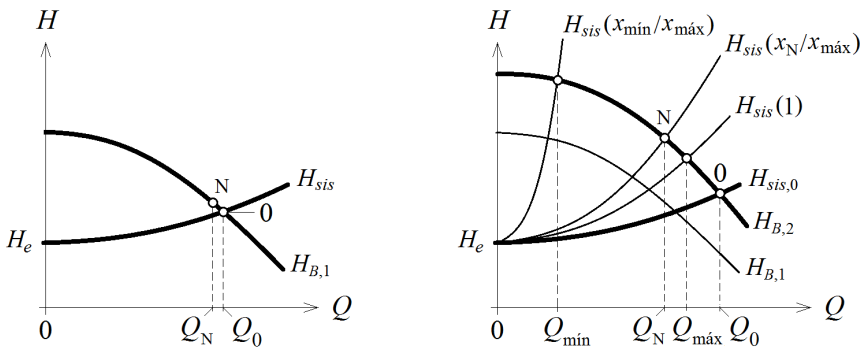


Figura 5.27. Regulació del punt de funcionament mitjançant una vàlvula muntada en sèrie. En el sistema regulat de la dreta, es compleix que $H_{sis} = H_{sis,0} + \Delta h_V$. El sistema de l'esquerra no és regulat. $H_{sis}(1)$ és la corba del sistema amb la vàlvula completament oberta ($x/x_{m\grave{a}x} = 1$). El cabal regulat, per tant, sempre serà inferior a Q_0 , ja que no pot ser superior a $Q_{m\grave{a}x}$.

A la mateixa figura, es mostra el canvi de la característica del sistema quan es modifica el grau d'obertura de la vàlvula. Aquesta figura es correspon amb la 5.16 i permet conèixer, gràficament o analíticament, l'evolució del Δh_V disponible amb el cabal. Amb aquesta informació, que es pot obtenir *off-line*, i la característica inherent subministrada pel fabricant de la vàlvula triada, és immediatament determinar el grau d'obertura per a cada cabal, avaluant primer el valor de f_i de qualsevol de les equacions [5.52] o [5.64], i les [5.55], segons el cas.³⁶



$$f_i = \frac{Q}{F_p K_v (10^{-5} \rho_{\text{agua}} g \Delta h_v)^{1/2}} \quad [5.73]$$

La característica instal·lada de la vàlvula és un resultat directe de l'anterior.

La característica de la bomba es pot modificar de maneres diferents. Si el grup de bombeig inclou diverses bombes en paral·lel, es poden connectar de manera combinada seguint una estratègia determinada. També és possible canviar el rotor de la bomba per tenir una corba característica diferent, però aquest procediment no és immediat i, igual com l'anterior, només permet obtenir canvis discrets del PF. La millor opció per modificar el punt de funcionament en continu (mantenint ara la característica H_{sis} inalterada) és variar la velocitat de l'accionament fent servir motors elèctrics de contínua, variadors de freqüència, turbines o motors de combustió interna. Qualsevol d'aquests procediments és més costós que l'anterior, però com que redueixen les despeses d'explotació al mínim quan s'ajusta l'altura de la bomba al consum de la instal·lació, són especialment interessants en instal·lacions de gran potència.

La regulació per accionament variable comença a ser interessant en instal·lacions petites, perquè els motors d'alterna amb variador de freqüència incorporat són cada dia més rendibles i assequibles. La combinació d'un accionament variable i una vàlvula de control permet situar el PF sobre qualsevol punt del pla (Q, H), i no només sobre les corbes de la instal·lació o de la bomba, i per això es pot imposar una trajectòria determinada a l'evolució del PF segons algun criteri funcional: rendiment òptim, menys soroll, mínim temps de resposta, etc.

A la figura 5.28, s'observa que la variació de la velocitat de la bomba pot fer augmentar o disminuir el punt de funcionament respecte del valor Q_0 . En qualsevol cas, el problema que es pretén resoldre és a quines revolucions ha d'accionar la bomba perquè el cabal en sigui un de prescrit, Q_1 , superior o inferior a l'original. Evidentment, el punt futur és conegut perquè ho són la corba H_{sis} i el seu cabal. Per això, si es disposa de les corbes característiques de la bomba a diferents revolucions, un procediment senzill i prou aproximat consisteix a interpol·lar el punt de funcionament futur (desitjat) entre les corbes entre les quals es trobi.³⁷

Aquest mètode es pot completar (i millorar) tenint en compte les relacions de semblança [3.28]. De fet, des d'un punt de vista analític, aquest procediment és l'únic camí possible quan només es disposa de la corba característica de la bomba a les revolucions nominals, n_0 . Cal tenir present, llavors, que aquestes equacions no es poden aplicar directament sobre els punts de funcionament actual i futur (punts "0" i "1" de la figura 5.28), perquè generalment no són semblants. Es recorda que són semblants els punts sobre corbes del tipus $Y = A_Y Q^2$, que s'anomenen *d'afinitat*. Com que la corba de la instal·lació no és, en general, una paràbola pura del tipus indicat, es dedueix que, sempre que el terme H_e sigui no nul, els punts de funcionament no seran semblants i no serà vàlid que:



$$n_1 = n_0 \frac{Q_1}{Q_0} \tag{5.74}$$

$$n_1 = n_0 \left(\frac{H_1}{H_0} \right)^{1/2}$$

Per determinar les revolucions n_1 de la bomba a què es tindrà el punt de funcionament futur, s'ha d'aplicar qualsevol de les equacions [3.28] entre els punts semblants "0₁" i "1", o bé els "0" i "1₀" de la figura. És evident que els punts auxiliars "0₁" i "1₀" no seran mai punts de funcionament de la instal·lació H_{sis} , i que, d'aquests, "1₀" no és ni tan sols conegut perquè tampoc ho és la corba de la bomba a les revolucions n_1 .

En resum, l'aplicació de les lleis de semblança en l'obtenció de les revolucions futures passa per la determinació del punt de la corba donada a n_0 , que és semblant al "1", i l'aplicació de qualsevol de les equacions:

$$n_1 = n_0 \frac{Q_1}{Q_{0_1}} \tag{5.75}$$

$$n_1 = n_0 \left(\frac{H_1}{H_{0_1}} \right)^{1/2}$$

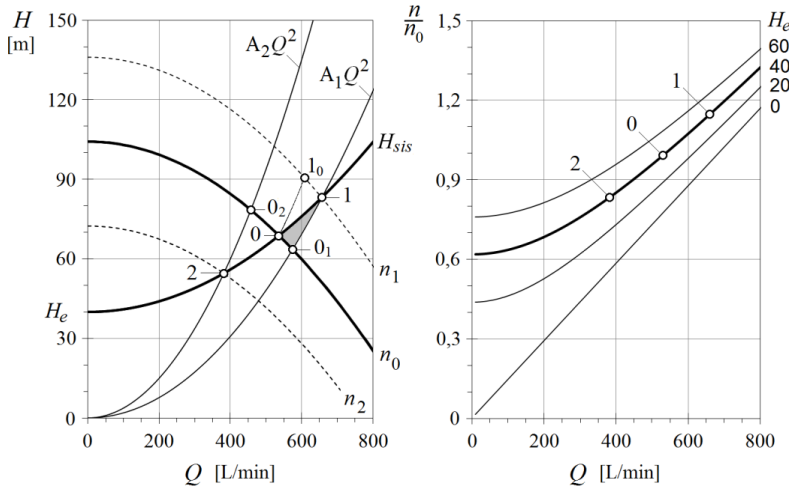


Figura 5.28. Regulació del punt de funcionament mitjançant accionament variable. Els punts auxiliars "0₁" i "0₂" són semblants al "1" i al "2", respectivament, i no seran mai PF en H_{sis} . Observem, a la figura de la dreta, que la relació de velocitats és una línia recta quan $H_e = 0$, perquè llavors tots els punts de funcionament possibles són, al seu torn, semblants.

Aquest procediment permet obtenir *off-line* la relació (n, Q) buscada, tant per a cabals superiors com inferiors al nominal. S'observa a la figura 5.28 que el punt auxiliar per



a instal·lacions en què $H_e > 0$ es troba per sota del “0”, si s’han d’augmentar les revolucions ($Q_1 > Q_0$), i per damunt, si s’han de disminuir ($Q_2 < Q_0$).

5.4 Cop d’ariet

Tot i que l’anàlisi del flux en canonades, i en sistemes hidràulics en general, es basa habitualment en condicions estacionàries, l’aparició de transitoris afecta el funcionament del sistema i en condiciona el dimensionament. Els fenòmens de posada en marxa, de detenció accidental o intencionada del grup impulsor, o d’obertura o tancament de vàlvules, són, evidentment, de flux no estacionari.

Entre els fenòmens de flux no estacionari en canonades, cal distingir entre el cop d’ariet i les oscil·lacions en massa. El *cop d’ariet* és el terme comú per descriure els transitoris de la pressió. Aquest fenomen deu el nom al soroll que genera la seva aparició (semblant al de l’impacte d’un martell sobre la canonada) com a conseqüència del pas d’una ona de pressió a la velocitat del so. El cop d’ariet està associat als transitoris de pressió de gran intensitat per als quals el fluid s’ha de considerar compressible, i la canonada, elàstica. Les *oscil·lacions en massa* són transitoris de pressió de baixa intensitat per als quals el fluid es pot suposar incompressible, i la canonada, rígida. La velocitat de propagació d’aquesta mena d’ona és de l’ordre d’un metre per segon, molt menys que en el cop d’ariet, fet que dona lloc a l’aparició d’una oscil·lació de cabal visible que es pot fer inestable.

5.4.1 Descripció del fenomen

Si l’aigua es mou per una canonada amb una velocitat determinada i, de sobte, se li talla el pas amb una vàlvula, és evident que, quan freni a la rodalia de la vàlvula, la resta del líquid en moviment comprimirà la frenada i augmentarà la pressió estàtica fins que s’anul·li la seva velocitat.

L’aigua és un xic compressible, de manera que l’augment de la pressió que s’inicia a les proximitats de la vàlvula accionada es trasllada aigües amunt a mesura que l’aigua frena la que precedeix.³⁸ Quan aquesta ona de compressió arriba a l’origen, tota l’energia cinètica de l’aigua a la canonada s’ha esgotat, la instal·lació està pressuritzada, i el conducte, dilatat. Si aquest fos l’origen temporal observat del fenomen, se seguiria que el sistema ha d’evolucionar buidant el conducte i iniciant-ne la descompressió a l’origen, traslladant-se aigües avall cap a la vàlvula. Per consegüent, el tancament d’una vàlvula provoca una ona de pressió que es desplaça des de la vàlvula accionada cap a l’origen a la velocitat del so en el mitjà, on es transforma en depressió que retrocedeix cap a la vàlvula per tornar-se a reflectir, etc.³⁹ Aquest procés es repeteix cíclicament fins que s’elimina tota l’energia mitjançant els efectes dissipatius actuant.

A la figura 5.29, es mostra l’estat de propagació de l’ona després del tancament instantani d’una vàlvula en una conducció simple. L’aigua que canvia abans el seu estat



de moviment és la que és més a prop de la vàlvula. Corrent amunt manté la velocitat fins que percep el tancament un temps x/c després, de manera que tot el fluid queda en repòs per primera vegada quan l'ona arriba al dipòsit en $t = L/c$. A partir de l'instants $4L/c$, es recupera la situació inicial i el fenomen es torna a repetir. El procés es pot descriure mitjançant diverses fases, segons l'estat del fluid i de la canonada (comprimit i dilatada, o a l'inrevés) i si el moviment és positiu (cap endavant) o negatiu (cap enrere). Aquestes variacions ondulatòries de pressió constitueixen el cop d'ariet.

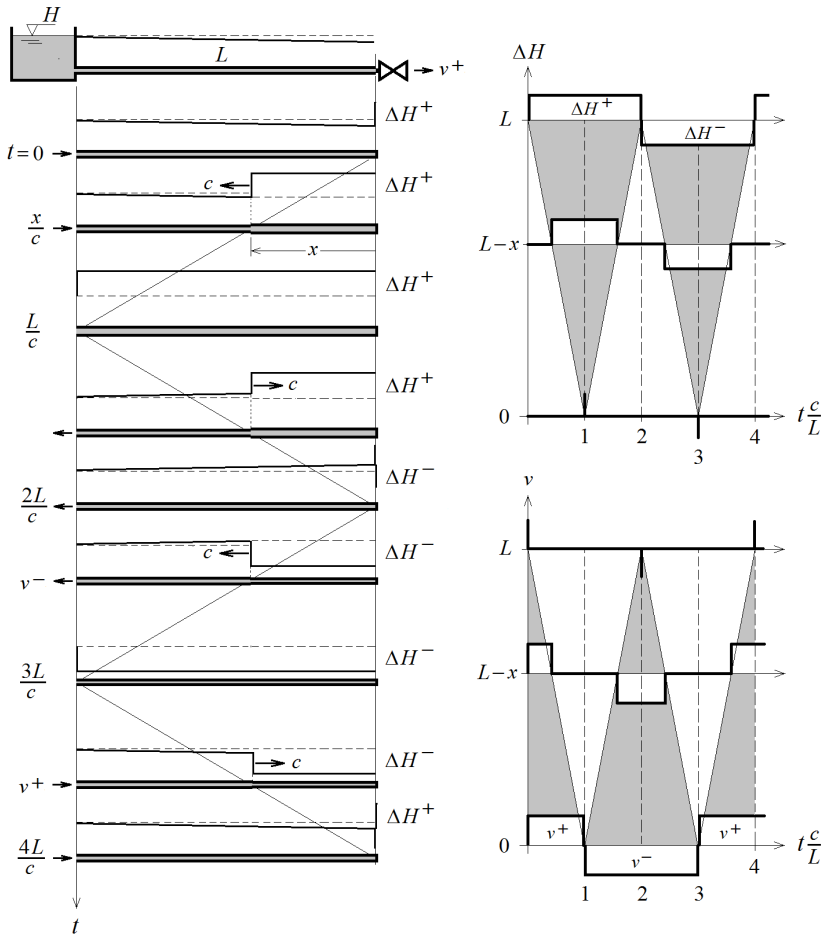


Figura 5.29. Representació espaciotemporal de l'ona de pressió produïda pel tancament instantani d'una vàlvula al final d'una instal·lació. Observem que la presència de la compressió o de l'expansió com a conseqüència de l'ona té temps de residència diferents segons la distància al seu origen. ΔH és la magnitud de la sobrepressió en metres que es dedueix de la fórmula d'Allievi [5.76]. Aquesta sobrepressió perd magnitud en presència de fregament o de pèrdues per histèresis en els conductes.

Si el tancament de la vàlvula de la figura 5.29 té lloc de manera gradual, l'anul·lació del cabal no és instantània i el cop d'ariet depèn del temps de tancament i de la longitud



de la canonada. En aquests casos, es comprova que l'accionament lent o per etapes de la vàlvula redueix la magnitud del cop sempre que el temps total dedicat a la maniobra sigui més gran que un temps determinat, que és, al seu torn, funció de la longitud de la instal·lació. Es parla, llavors, de tancaments lents o ràpids, o d'instal·lacions curtes o llargues, respectivament, i en totes sempre hi ha una regió en el veïnatge del dipòsit en què el cop d'ariet es manifesta de manera menys significativa.

Per entendre millor el procés anterior, cal seguir l'exemple que es mostra a la figura 5.30. A diferència del tancament instantani, en què la sobrepressió apareixia de cop i es mantenia en tota la secció al costat de la vàlvula durant el temps $2L/c$, quan el tancament és gradual, el valor final del cop donat per la teoria d'Allievi només apareix al final del tancament (si s'arriba a donar, com es veurà a continuació). En teoria, a cada canvi diferencial de la secció de pas a través de la vàlvula li correspon un canvi diferencial de pressió, que es trasllada en forma d'ona de petita amplitud cap a l'origen del sistema. A partir del temps $t = 0$ en què s'inicia el tancament, el conjunt d'ones que es produeixen consecutivament se superposen en el conducte i donen lloc a una distribució lineal de la línia de càrrega de parada (suposant que el tancament és lineal). A l'instant $t = L/c$, la primera d'aquestes ones arriba al dipòsit i es reflecteix en forma d'ona de descompressió. Aquesta ona i les successives que es produiran segons arribin les altres s'anomenen *estabilitzadores*, perquè compensen la sobrepressió de les que encara es dirigeixen cap al dipòsit. Com es pot observar al gràfic de l'esquerra de la figura 5.30, el resultat és que aquest efecte compensador s'estén una distància que és la meitat de cT , que és la longitud recorreguda per la primera de les ones durant el temps T , i que podria ser superior a la longitud real de la canonada.

Es diu que una instal·lació és llarga davant el tancament gradual d'una vàlvula (o la detenció d'un grup motor-bomba) si, en l'instant $t = T$ en què la vàlvula es tanca per complet i surt l'última de les ones diferencials de sobrepressió, encara no ha arribat a la vàlvula la primera de les ones estabilitzadores. Si la longitud de la instal·lació és més petita que $cT/2$, la primera d'aquestes ones arribarà a la vàlvula quan encara no s'hagi tancat del tot i l'augment de la sobrepressió s'aturarà.

En una impulsió, la parada brusca de motors causa el mateix fenomen que en el cas de tancament d'una vàlvula però al contrari, és a dir, s'inicia una depressió en la bomba, que es reflecteix a l'extrem final del sistema, sigui una vàlvula o un eixamplament brusc, i torna a retrocedir cap a la bomba, etc. Quan la desconexió del motor es dona en una impulsió, l'aigua continua el seu moviment mentre tingui energia cinètica i no s'hagi esgotat la inèrcia de la bomba. Això vol dir que la detenció del cabal no pot ser mai instantània i només comença a recular quan, per fi, el flux s'atura.

Convé afegir que les canonades estan generalment ben preparades per resistir depressions pròximes a 1 bar, molt superiors a les que a la pràctica poden produir. L'ona d'expansió creada per reflexió o per la parada del motor no pot reduir la pressió per sota de la pressió de vapor del líquid a la temperatura de treball. No obstant això, ben



poques vegades s'arriba a aquest límit, perquè abans hi ha l'expansió de l'aire dissolt o emulsionat en l'aigua (cosa que també porta a l'aparició de bombolles i a l'acumulació d'aire) i la caiguda de pressió es frena (v. figura 5.38). A més, la formació d'un buit tan extrem implica l'aportació (o el consum) de quantitats creixents d'energia, no disponibles durant el cop.

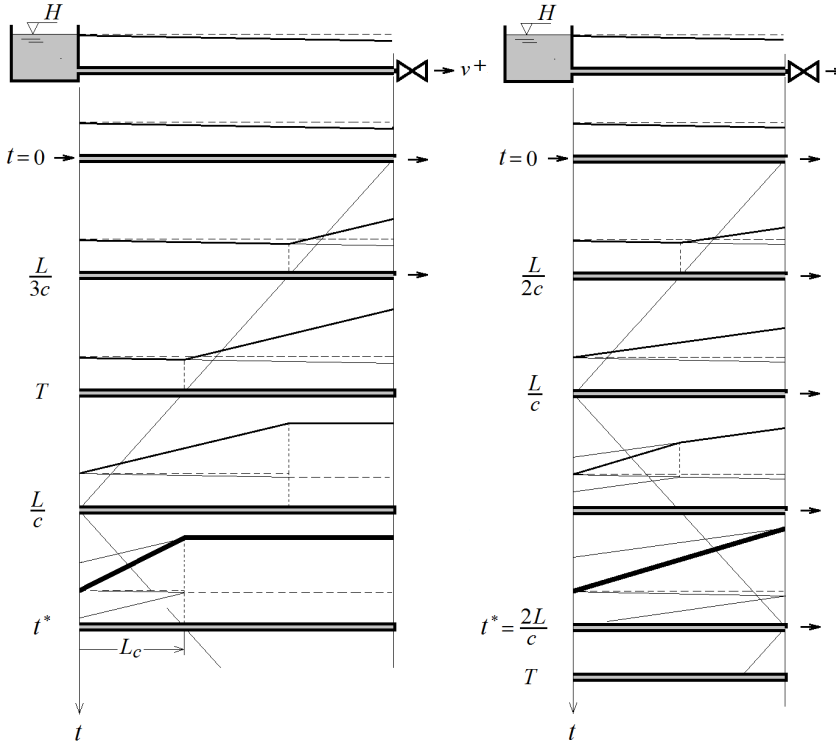


Figura 5.30. Representació espaciotemporal de l'ona de pressió produïda pel tancament gradual d'una vàlvula en un temps T . A l'esquerra, una instal·lació llarga. En el temps t^* de l'esquerra, la primera de les ones estabilitzadores es troba amb l'última de les ones generades durant el tancament de la vàlvula, i la sobrepressió és màxima. A la instal·lació curta de la dreta, el tancament té lloc en un temps superior a $2L/c$, de manera que la primera de les ones estabilitzadores arriba a la vàlvula encara oberta i compensa (o gairebé) els possibles increments de pressió durant el que queda de tancament.

5.4.2 Mètode analític i gràfic simplificat

En general, es fan servir dues fórmules en funció de si el temps de parada, T , és superior o inferior a un de crític. Quan el temps de parada, sigui de tancament a les vàlvules o de detenció a les impulsions, és inferior al crític, T_c , és aplicable la fórmula d'Allievi:

$$\Delta H_A = \frac{cv}{g} \quad [5.76]$$



i, quan $T > T_c$, la de Michaud:

$$\Delta H_M = \frac{2Lv}{gT} \quad [5.77]$$

En aquestes fórmules: c és la velocitat del so, v és la velocitat mitjana del fluid abans de l'inici del cop i L és la longitud real de la instal·lació. La condició crítica ve donada pel temps que triga l'ona a tornar al seu origen una vegada ha recorregut la instal·lació dues vegades, és a dir, el temps crític és:

$$T_c = \frac{2L}{c} \quad [5.78]$$

La fórmula d'Allievi indica que la sobrepressió que es genera en operacions brusques és independent de la longitud de la canonada i només es pot reduir disminuint la velocitat abans de la detenció. En canvi, la fórmula de Michaud és independent de la velocitat del so i inclou el temps d'actuació en el denominador.⁴⁰

Passa que, en el cas de les conduccions per gravetat, el tancament de la vàlvula es pot fer a diferent ritme i, per tant, el temps T a considerar en l'expressió de Michaud és una variable sobre la qual es pot actuar a voluntat. En les impulsions en què el cop d'ariet apareix per detenció del grup, el temps de parada ve imposat per la naturalesa (gravetat, inèrcia del fluid i del grup motor-bomba, etc.) i no s'hi pot actuar tret que s'afegeixi un volant d'inèrcia. Com que l'anul·lació de la velocitat no és instantània en una impulsió, sempre hi ha una zona de longitud inferior a $cT/2$ en què és aplicable la fórmula de Michaud i no la d'Allievi, de manera que sembla més indicat plan-tejar l'algorisme general en termes de longitud i no de temps.

Per consegüent, si la longitud de la instal·lació és inferior a una de crítica, L_c , el cop d'ariet en tota la instal·lació depèn de la posició i es calcula de l'expressió:

$$\Delta H_x = \frac{2v}{gT}(L-x) \quad [5.79]$$

en què x és la distància mesurada des de l'origen de la pertorbació. Si la longitud real de la instal·lació és tal que $L > L_c$, llavors s'aplica l'equació d'Allievi per a $x < L - L_c$, i la [5.79], per a $x > L - L_c$. En el primer cas, $L < L_c$, es diu que la instal·lació és curta, mentre que en el segon, que és llarga. La longitud crítica es mesura des de l'extrem oposat a l'origen del cop i resulta de la condició crítica [5.78]:

$$L_c = \frac{cT}{2} \quad [5.80]$$

Per a la representació gràfica de les línies de càrrega manomètrica i de càrrega en parada, cal valorar la longitud crítica, L_c , per tant, s'han d'estimar primer c i T . Una vegada fet, s'identifica el sistema com a impulsió curta o llarga per obtenir l'envolupant de pressions positives H^+ en tota la instal·lació. Juntament amb el cabal, són les úniques dades que realment necessita el projectista per dimensionar la canonada,



atès que no cal la línia de parada negativa per al timbratge dels conductes, ni tan sols a l'hora de predir depressions quan cau per sota de la línia de cota geomètrica.

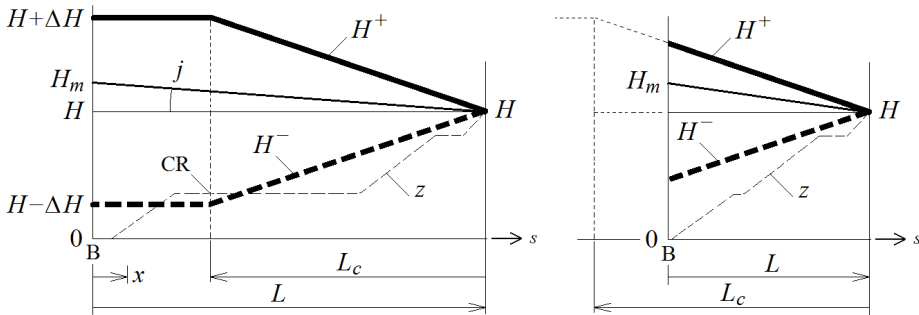


Figura 5.31. Representació de les envolupants del cop d'ariet en impulsions llargues (esquerra) i curtes (dreta), com a conseqüència de la detenció de la bomba B (i la mateixa L_c). Observem com, amb el càlcul del cop d'ariet en un sol punt, es pot efectuar la representació gràfica de les envolupants màxima i mínima, i conèixer immediatament les sobrepressions que cal preveure en tota la instal·lació.

Aquesta última afirmació està basada en les experiències personals del professor Mendiluce, segons el qual prop del 40% de les instal·lacions experimenten depressions durant el cop d'ariet i, tot i això, ho fan sense cap incidència. Encara que la línia de parada negativa H^- caigués deu metres per sota de la línia de cota i predigués pressions pròximes al buit absolut, no seria possible que en una impulsió s'aconseguís un nivell tan baix de pressions si disposa de prou ventoses i l'aigua allibera l'aire que conté.⁴¹

D'altra banda, el valor de la sobrepressió estimat per les fórmules de Michaud i Allievi s'ajusta als resultats experimentals, encara que es produeixi depressió en el primer període. Això és així, doncs, des del punt de vista energètic i si no hi ha atenuació, la sobrepressió en una impulsió amb depressió inicial és el reflex pendular del desequilibri que resulta de la suma de la pressió estàtica i la depressió.

5.4.3 Discussió i comentaris addicionals

Una conseqüència immediata d'aquesta orientació en el càlcul del cop d'ariet és l'ampliació del camp d'aplicació de la fórmula de Michaud: el creixement progressiu del cop d'ariet amb la longitud de la impulsió arriba a un valor màxim en el punt crític, L_c . Els treballs de Joukowski i Allievi van conduir a una fórmula senzilla que proporcionava aquest valor màxim i que no depenia ni de la longitud ni del temps de parada [5.76]. Ara se sap que aquest valor màxim només es presenta quan la longitud de la impulsió és més gran que la meitat del recorregut de l'ona en el temps de parada, és a dir, $L > L_c = cT/2$, ja que a la resta el valor màxim de la sobrepressió es calcula per la fórmula de Michaud, ΔH_x .



La fórmula de Michaud s'igual a la d'Allievi quan $T = 2L/c$, ja que llavors:

$$\Delta H = \frac{2Lv}{g \frac{2L}{c}} = \frac{cv}{g} \quad [5.81]$$

En conseqüència, a la distància L_c del final de la impulsió s'igualen els valors ΔH de Michaud i Allievi. Evidentment, aquesta regió pot comprendre la longitud total de la canonada i fins i tot situar el punt crític, CR, a fora (cosa que passa a les instal·lacions curtes).

Aprofundint en la teoria d'Allievi, el comte de Sparre va establir diferents fórmules per al cas en què $T > 2L/c$ (parada lenta), en funció d'una nova variable adimensional que era funció de l'altura geomètrica, H . Quan aquesta altura és elevada i es compleix que $cv < 2gH$, la sobrepressió en metres deguda al cop es calcula amb:

$$\Delta H = \frac{2Lv}{gT} \frac{1}{1 + \frac{cv}{2gH} \left(1 - \frac{2L}{cT}\right)} \quad [5.82]$$

però si $cv > 2gH$, llavors:

$$\Delta H = \frac{2Lv}{gT} \frac{1}{2 - \frac{Lv}{gHT}} \quad [5.83]$$

És important observar que el cop d'ariet màxim per a tots dos casos és igual al de Michaud, multiplicat per factors inferiors a la unitat. És a dir, seguint la teoria d'Allievi, s'arriba a la conclusió que el límit màxim dels valors del cop d'ariet, quan $T > 2L/c$, és la fórmula de Michaud. Es pot veure igualment que el límit mínim d'aquests valors és:

$$\Delta H = \frac{Lv}{gT} \quad [5.84]$$

quan L és molt inferior a cT , que és la fórmula de Jouguet.

Aquests resultats suggereixen que, en cas que la durada del tancament de la vàlvula sigui superior a $2L/c$, sempre hi haurà una maniobra que farà un cop d'ariet igual al donat per la fórmula de Michaud i serà el màxim que es pugui produir. Queda a criteri del calculista la procedència d'aplicar un coeficient reductor per al càlcul del cop d'ariet amb la fórmula de Michaud per a maniobres lentes o impulsions de petita longitud. De totes maneres, la fórmula de Michaud proporciona un marge de seguretat tranquil·litzador que és el que s'hauria d'aplicar rigorosament per al càlcul de la canonada en aquest cas.

En resum, tal com s'ha indicat, la fórmula de Michaud és aplicable en totes les conduccions, almenys en una zona compresa entre L_c i l'extrem final. La d'Allievi, en canvi, només s'ha de fer servir en els casos en què $T < 2L/c$.



5.4.4 Velocitat del so i temps de parada d'una impulsió

La velocitat del so en una instal·lació depèn de l'elasticitat combinada del fluid i de la canonada, factors que, al seu torn, depenen d'uns altres, com la quantitat d'aire dissolt, la pressió atmosfèrica o el tipus de subjeccions de la canonada. Si el fluid fos incompressible, i la canonada, indeformable, la velocitat del so seria infinita, cosa que és irreal: la velocitat del so disminueix a mesura que s'afegeixen efectes elàstics al mitjà de propagació.

Per norma general, la velocitat del so es calcula amb l'expressió:

$$c = \left[\rho \left(\frac{1}{B_s} + \frac{D}{Ee} \right) \right]^{-1/2} \quad [5.85]$$

en què ρ és densitat del fluid, i B_s , el seu mòdul volumètric [1.85]; E és el mòdul d'elasticitat del material de la canonada, i e , el seu gruix. Substituint els valors de ρ i B_s de l'aigua ⁴² i transformant convenientment l'anterior, s'obté:

$$c = 9.900 \left(48,3 + G \frac{D}{e} \right)^{-1/2} \quad [5.86]$$

en què $G=10^{10}/E$. Els valors de G estan tabulats per a diferents materials.

Es comprova que el valor donat per aquestes fórmules excedeix la velocitat del so observada en moltes instal·lacions quan hi ha presència d'un flux mixt aigua-aire. En aquest cas, es pot ajustar millor el valor de c de [5.85] si es fa servir el mòdul volumètric efectiu que resulti del mesurament in situ de la quantitat d'aire present a l'aigua. Per a això, calculem $B_{s,ef} = \rho c^2$, emprant la velocitat del so que s'obté de la figura 5.32, en funció de la fracció buida de gas de la mescla, x , i de la pressió. ⁴³

Material del conducte	G
PVC	33,3
Polièster	6,6
Fosa	1
Acer	0,5
PE (baixa densitat)	500
PE (alta densitat)	111,11

Taula 5.5. Valors de G per a diferents materials

El temps que triga a aturar-se el grup motor-bomba no coincideix exactament amb el valor T que s'ha de fer servir en la fórmula de Michaud [5.77] (o en el càlcul de la longitud crítica, [5.80]). L'experiència indica que el temps transcorregut des del tall d'energia fins a la parada completa del motor és, en general, una mica superior al temps T que proporciona el valor real del cop d'ariet o el càlcul del temps crític.

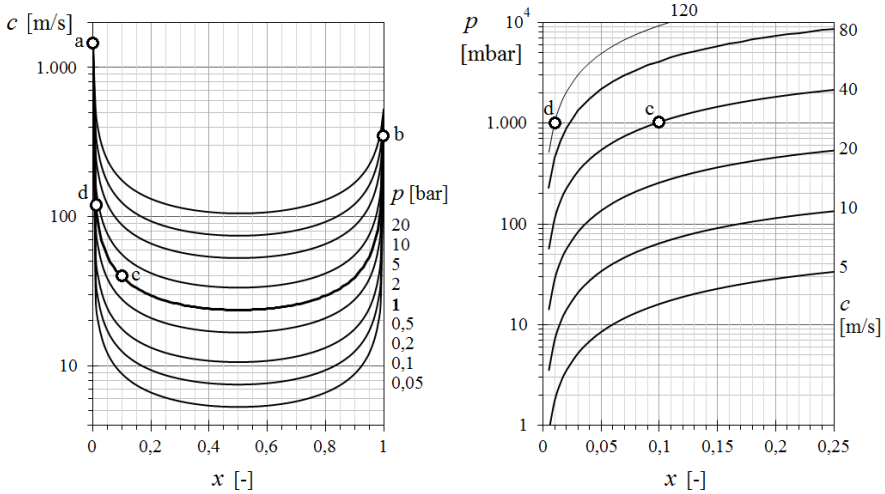


Figura 5.32. Velocitat del so en una mescla aigua-air en funció de la fracció de buit de gas i de la pressió. Observem com petites quantitats d'aire afecten la velocitat de propagació. Per a una pressió d'1 bar i $x = 0,01$ (equivalent a una fracció en massa d'aire de tan sols un 0,0012%), la velocitat del so descendeix fins a 118,5 m/s (punt "d", que suposa, aproximadament, la tercera part de la velocitat del so en l'aire en condicions normals). El punt "a" és la velocitat del so en aigua lliure d'aire ($c = 1.483,2$ m/s) i el "b" representa la velocitat del so en l'aire ($c = 343,14$ m/s). El punt "c" connecta tots dos gràfics per interpretar-los millor. Condicions de referència: $p_0 = 1$ bar. $T_0 = 293$ K.

Per exemple, citant experiències personals del professor Mendiluce, en una instal·lació per la qual es traspalsava un cabal a 0,6 m/s abans de la detenció del grup, amb una altura geomètrica de 50 m i una longitud de 1.050 m, es va registrar una pressió en impulsió equivalent a 95 m, és a dir, un cop d'ariet de 45 m. Aïllant el valor de T de la fórmula de Michaud, tenim $T \approx 2,8$ segons, quan el temps de detenció del grup va resultar ser de 12 segons, fet que suposa un error considerable. Aquesta diferència tan notòria entre tots dos temps es deu al fet que el valor de T que realment interessa en el càlcul del cop és el temps que triga a anul·lar la velocitat de l'aigua, i és el primer, no el segon. En la teoria general del cop d'ariet, el temps T és l'interval entre la iniciació i la terminació de la maniobra, sigui de tancament o d'obertura, total o parcial de vàlvules, temps durant el qual té lloc la modificació del règim de moviment del fluid. Aquest és el concepte que s'ha d'aplicar en el cas de les impulsions, ja que l'aigua deixa de ser elevada a l'altura d'impulsió abans que la bomba s'aturi del tot.

El mètode de Mendiluce prediu el valor de T per a la parada dels grups impulsors. En la seva obtenció, el tall d'energia en el bombeig s'assimila a la detenció natural d'una massa impulsada cap amunt per un pla inclinat. Després d'una sèrie de consideracions energètiques ben justificades, s'arriba a l'expressió teòrica senzilla següent:

$$T = \frac{Lv}{g \left(H + \frac{J}{2} \right)} \quad [5.87]$$



en què J representa les pèrdues en la instal·lació entre la bomba i el dipòsit final. Estudiant les discrepàncies entre els valors obtinguts experimentalment i els calculats mitjançant aquesta expressió, s'introdueixen dos factors de correcció per aconseguir la màxima aproximació possible entre tots dos. La fórmula corregida és:

$$T = C + K \frac{Lv}{g \left(H + \frac{J}{2} \right)} \approx K \frac{Lv}{gH_m} \quad [5.88]$$

i s'ha comprovat per a velocitats superiors a 0,5 m/s. El factor K representa, principalment, l'efecte de la inèrcia del grup motor-bomba, que no s'havia considerat en l'obtenció teòrica de T i que, evidentment, es pot menysprear per a L grans. A la figura 5.33, es mostra K en funció de la longitud de la instal·lació. El coeficient C és funció del pendent hidràulic, H_m/L , i pren un valor asimptòtic que tendeix a la unitat a mesura que aquesta unitat disminueix.⁴⁴ Per a pendents de més del 50%, cal adoptar una gran precaució en el càlcul del cop d'ariet, ja que llavors la parada és molt ràpida i és recomanable aplicar exclusivament la fórmula d'Allievi.

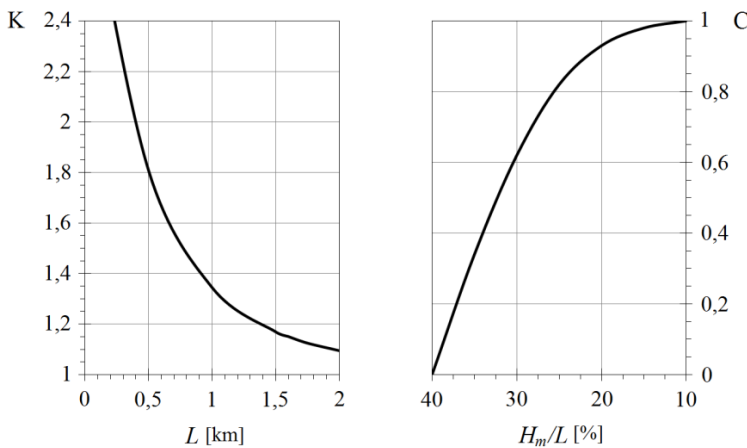


Figura 5.33. Coeficients K i C de la fórmula de Mendiluce per al càlcul del temps de parada. A la pràctica, el coeficient K es pren igual a 2 per a longituds de menys de 200 metres.

Del càlcul de T es dedueix que, per a impulsions de petit pendent (altura geomètrica, H , baixa), el temps de parada pot arribar a valors elevats i, per tant, també la longitud crítica. La realitat corrobora aquesta afirmació: els sistemes horitzontals amb abocament lliure en un extrem no presenten mai cop d'ariet i el temps de parada es prolonga fins al buidatge de la canonada.

El valor màxim a què pot arribar el cop d'ariet en qualsevol cas és, en teoria, el doble de la pressió estàtica. Això és així perquè prescindint de la inèrcia del grup i del fregament; tenim:



$$T = \frac{Lv}{gH} \quad [5.89]$$

que, igualat al valor de T aïllat de Michaud, porta a:

$$\frac{Lv}{gH} = \frac{2Lv}{g\Delta H} \quad [5.90]$$

d'on, evidentment, $\Delta H = 2H$.⁴⁵ Aquesta dada no ha d'evitar el càlcul afinat del cop d'ariet, perquè pot resultar antieconòmic prendre un coeficient de seguretat massa elevat.

De manera similar, l'aplicació indiscriminada de la fórmula d'Allievi ha induït el criteri generalitzat que el cop d'ariet és proporcional a la velocitat del fluid i , com a conseqüència, moltes vegades s'han adoptat velocitats petites i antieconòmiques per reduir-lo. Aquesta precaució, discutible en impulsions llargues (recordem que el criteri que defineix el tipus d'impulsió és la longitud crítica), ja que normalment és més econòmic protegir la instal·lació contra aquesta sobrepressió que augmentar el diàmetre per reduir la velocitat, resulta, a més, poc eficaç en impulsions curtes en què, com augmenta el temps de parada T amb la velocitat segons [5.87], el cop d'ariet de Michaud deixa de ser directament proporcional a la velocitat i , per consegüent, tal precaució no és rendible i ni tan sols útil.

5.4.5 Mètodes de supressió i minoració

Els elements supressors més comuns que es fan servir per reduir les sobrepressions que es generen durant un cop d'ariet són:

- els acumuladors pneumàtics i els calderins antiariet;
- les xemeneies d'equilibri i els tancs amortidors;
- les vàlvules d'admissió d'aire o ventoses;
- les vàlvules de retenció;
- les vàlvules de descàrrega;
- els volants d'inèrcia.

La intensitat del cop es pot reduir mitjançant l'accionament suau de les vàlvules i l'ús de volants d'inèrcia per augmentar el temps de parada de les bombes i les turbines. S'haurà d'instal·lar algun element supressor si, com a conseqüència de les característiques del sistema, no es pot evitar la generació d'una sobrepressió excessiva i sempre que no sigui més econòmic augmentar el gruix de les canonades.

Un calderí antiariet és un aparell simple i compacte format per un cos cilíndric d'acer d'alta resistència i amb la capacitat adequada. Tot calderí té, almenys, una vàlvula per a la càrrega de la bufeta i una altra d'oposada que el connecta amb el sistema hidràulic mitjançant una "T". El gas neutre o aire contingut a la bufeta està en repòs i en equilibri amb la pressió de la canonada a què està connectat el calderí.



Els calderins s'acoblen a la canonada d'impulsió en la seva part inicial, just després del grup motobomba, de manera que el gas contingut és a la pressió manomètrica de la instal·lació. Aquesta ubicació els confereix les característiques següents:

- Redueix la sobrepressió del cop d'ariet previst a un valor prescrit.
- Evita que la pressió mínima durant la parada pugui ser inferior a la pressió atmosfèrica.
- Absorbeix i limita les pertorbacions de la pressió produïdes per les pulsacions generades per les bombes.
- Compensa les variacions provocades per diferències de temperatura.

La qüestió més important en la selecció d'un calderí és resoldre quin volum és el més convenient per a una aplicació. Els quatre estats característics en què es pot trobar el gas i que intervenen en el desenvolupament següent són els que s'il·lustren a la figura 5.34, que d'esquerra a dreta corresponen a:

- Canonada despressuritzada o buida (a). El gas es troba a la pressió d'ompliment, p_0 . El volum del gas és el màxim possible i està relacionat amb la grandària del calderí.
- La impulsió està en parada després d'haver iniciat la detenció de la bomba i haver finalitzat la primera expansió (b). El gas és a la pressió estàtica mínima, p_1 . Aquesta pressió podria ser inferior a l'atmosfèrica sense calderí.
- Instal·lació en règim permanent (c). El gas es troba a la pressió manomètrica p_m , corresponent a H_m .
- La impulsió està en parada després d'haver acabat la primera compressió (d). El gas és a la pressió estàtica màxima prevista, p_2 . Aquesta pressió és la màxima desitjada durant el cop, no la que es donaria sense calderí.

Aquests estats estan relacionats entre si per processos que es poden suposar isotèrmics en primera aproximació. Per exemple, si s'aplica la llei de Boyle-Mariotte al procés d'expansió entre els estats p_m i p_1 , es conclou que el canvi de volum corresponent és:

$$V_1 - V_m = 0,8 p_0 V_0 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_m} \right) \quad [5.91]$$

De manera anàloga, el canvi de volum durant el procés de compressió subsegüent és:⁴⁶

$$V_1 - V_2 = 0,8 p_0 V_0 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) \quad [5.92]$$

Si el calderí està ben dissenyat, les energies involucrades en cadascun dels processos anteriors han d'estar en equilibri i compensar-se mútuament.



Així, l'energia cinètica del fluid i la d'expansió del gas de la bufeta contribueixen a l'ascens de l'aigua per la canonada una vegada aturat el grup, mentre que el descens del fluid a la fase posterior es compensa pel treball de compressió experimentat pel gas i l'efecte de la pèrdua de càrrega. Adoptant com a pressió d'ompliment $p_0 = 0,9p_m$ i menyspreant la pèrdua de càrrega respecte de la resta d'energies,⁴⁷ el professor Mendiluce obté una expressió senzilla que permet calcular el volum de l'amortidor necessari en funció de les pressions p_m i p_2 , i de les característiques de la instal·lació:

$$V_0 = \frac{90 p_2}{(p_2 - p_m)(7 p_m + 3 p_2)} \frac{L}{D^2} Q^2 \quad [5.93]$$

Les pressions p_m i p_2 estan relacionades entre si per la magnitud del cop que vol ser controlat, de manera que aquesta expressió es pot simplificar encara més per a l'ús quotidià introduint un coeficient α , tal que $p_2 = \alpha p_m$. L'expressió final proposada per al càlcul del volum és:

$$V_0 = \frac{W}{p_m} \frac{L}{D^2} Q^2 \quad [5.94]$$

en què els valors de W estan tabulats en funció de α . Aquesta expressió proporciona el volum en litres quan la pressió p_m està en atmosferes absolutes; el cabal, en metres cúbics per segon, i el diàmetre i la longitud, en metres.

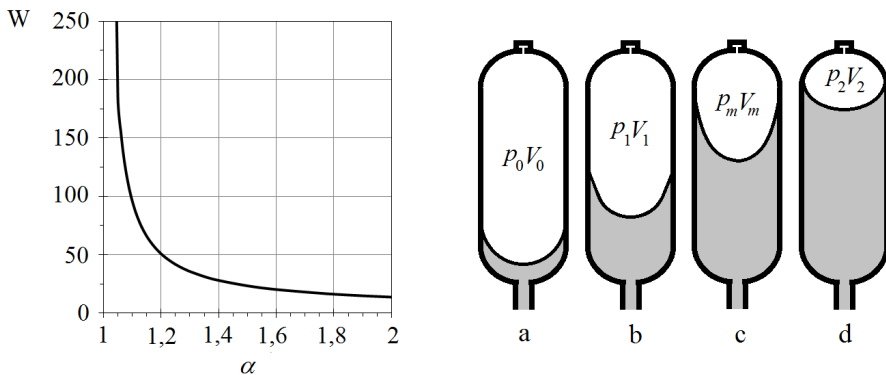


Figura 5.34. Coeficient W per al càlcul del volum d'un calderí antiariet. Observem com el valor de W augmenta asimptòticament amb l'ús de valors massa conservadors (petits) de α , cosa que imposa volums de calderí massa grans. És pràctica habitual que α sigui 1,2 aproximadament, perquè valors majors tampoc condueixen a volums molt més petits.

El cop d'ariet també es pot reduir mitjançant vàlvules d'alleujament, ventoses o vàlvules de retenció sense fre. Les vàlvules d'alleujament es fan servir per impedir les sobrepressions excessives, mentre que les ventoses permeten l'entrada d'aire durant el cop negatiu per evitar que la pressió a la canonada decaigui per sota de la pressió atmosfèrica i que la sobrepressió posterior superi el doble de la pressió estàtica. Encara que la instal·lació de ventoses sempre és beneficiosa, l'eficàcia com a instrument



atenuador del cop queda limitada als casos en què es generi buit com conseqüència de la parada. D'altra banda, l'aire que entra per una ventosa com a conseqüència de la parada brusca dels motors no suposa un perill per a la instal·lació, perquè s'expulsa sense problemes durant la fase de compressió i en condicions estàtiques, abans fins i tot que els motors es tornin a posar en marxa.

Pel que fa a les vàlvules de retenció, com que es tanquen quan cessa el moviment de l'aigua, impedeixen el pas de l'ona de sobrepressió que procedeix del final de la instal·lació, i llavors descarreguen el tram anterior de la pressió estàtica corresponent. La seva instal·lació s'ha de fer de manera que la sobrepressió retinguda quedi per sota del timbratge de la canonada i, per norma general, en la majoria de casos n'hi ha prou amb dues o tres vàlvules d'aquestes.

Quan la vàlvula de retenció es tanca, la instal·lació queda dividida en trams independents entre si. A la figura 5.35, s'observa l'efecte d'una vàlvula de retenció sense fre sobre la línia piezomètrica d'una instal·lació en condicions estàtiques i en parada. Després de la parada, quan la primera ona de descompressió arriba a la vàlvula i aquesta darrera es tanca en anul·lar el cabal, es genera una nova ona, que inicia la reculada cap a la bomba com si la vàlvula fos el final de la instal·lació.⁴⁸ D'altra banda, l'ona de descompressió original continua el seu avanç detenint el fluid que encara es mou aigües avall de la vàlvula. Aquesta ona iniciarà la reculada quan arribi a l'extrem final de la instal·lació i, en el camí aigües amunt, es trobarà la vàlvula tancada, cosa que la reflectirà de nou en forma de compressió i donarà lloc a una línia de parada positiva. En conseqüència, en el tram comprès entre la vàlvula i el final de la instal·lació, el cop d'ariet serà el mateix que sense vàlvula, però en el tram aigües amunt de la vàlvula s'obté un benefici notable, perquè la sobrepressió parteix de zero tantes vegades com vàlvules de retenció s'intercalin.

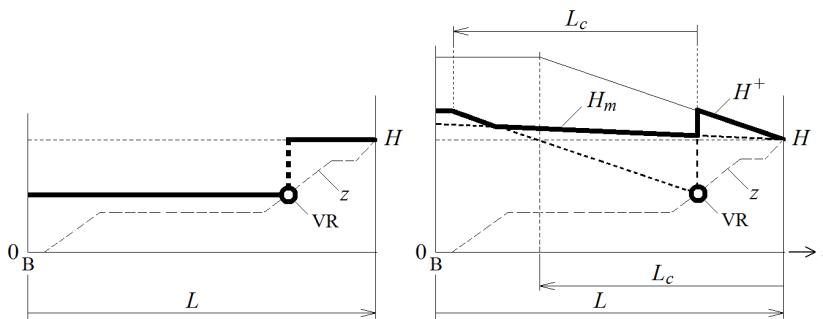


Figura 5.35. A l'esquerra, línia piezomètrica en repòs, en presència d'una vàlvula de retenció (VR). A la dreta, la línia mixta obtinguda per la superposició de les línies de càrrega en règim permanent (H_m) i la de parada positiva (H^+). L'ús d'aquestes vàlvules no afecta el càlcul del temps de parada.



5.5 Oscil·lacions de massa

Es diu que es presenta un transitori per oscil·lació de massa quan els canvis en la velocitat són tan petits que els seus efectes es propaguen al llarg de la instal·lació de manera gairebé instantània en comparació, això és: $O(v) < O(c)$. En aquests casos, es pot suposar que el fluid és incompressible [2.159], ja que tot el volum de control notarà els canvis de velocitat a l'uníson. Per exemple, si es tracta d'estudiar l'oscil·lació de massa en un conducte rígid d'àrea constant, l'aplicació de l'equació de continuïtat mostra que la velocitat és la mateixa en tots dos extrems del conducte, i els canvis de velocitat, instantanis, ja que no hi pot haver acumulació de massa en el seu interior. Aquesta mena de problemes es resolen fent servir la teoria pendular o teoria de columna rígida i condueix a sistemes d'equacions diferencials ordinàries en què el fluid se suposa incompressible.

5.5.1 Xemeneies d'equilibri

Les xemeneies d'equilibri (*surge tanks*) són capacitats piezomètriques connectades als conductes per transformar els transitoris d'alta pressió i freqüència en oscil·lacions de massa de baixa pressió i freqüència. En principi, aquest sistema és la forma més natural de protecció davant un cop d'ariet, perquè permet alliberar l'energia contra la gravetat, però el cost i les dificultats constructives en limiten l'ús a instal·lacions de poca altura d'elevació en què, com que la sobrepressió que s'ha de contenir també és petita, normalment acaba sent més aconsellable instal·lar canonades del timbratge adequat o recórrer a altres sistemes de contenció del cop menys costosos. Són més eficients les xemeneies que són més prop de l'origen del cop, perquè així no s'arriba a l'altura màxima d'Allievi i es redueix la magnitud del cop d'ariet. És interessant emprar xemeneies a les centrals hidroelèctriques i en instal·lacions de bombament amb molt de pendent inicial perquè la xemeneia no sigui gaire alta.

En una central hidroelèctrica, se sol disposar una xemeneia d'equilibri localitzada entre la canonada que alimenta la turbina i l'embassament, per protegir el tram AB de canonada (galeria) de les sobrepressions que es creen davant els talls bruscos de cabal en la turbina (per tancament dels seus àleps distribuïdors). Per norma general, la galeria és gairebé horitzontal, mentre que el tram CD és més vertical, de manera que la xemeneia és més curta i econòmica que si se situa en D. Per a la protecció del tram CD és més pràctic augmentar-ne el timbratge.

Un tall brusco del cabal de la turbina origina un cop d'ariet en D, que es propaga fins a C i es reflecteix de nou cap a D, etc. Aquestes ones es propaguen en tots dos sentits i s'acaben esmorteint per efecte de la fricció al cap d'unes vint oscil·lacions i uns pocs segons. Aquest temps és inferior als temps característics dels processos que tenen lloc en el tram AB i a la xemeneia (que són de l'ordre d'hores), de manera que l'oscil·lació en massa no es veu interferida per les ones de pressió del cop d'ariet en CD (v. figura 5.38). Si, per exemple, el cabal en D resulta zero instantàniament, a efectes pràctics



també ho serà en C, i el cabal en AB alimentarà o serà alimentat per la xemeneia, segons el principi de continuïtat.

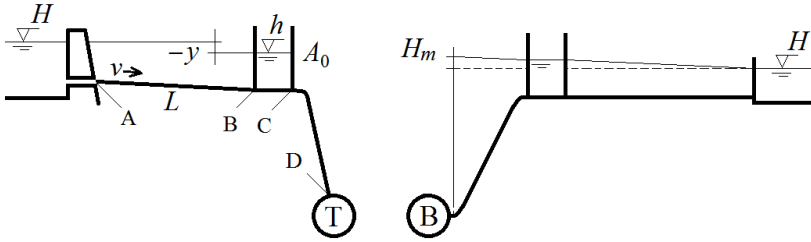


Figura 5.36. A l'esquerra, esquema d'una central hidroelèctrica amb xemeneia d'àrea recta constant, A_0 ; a la dreta, una instal·lació de bombament amb xemeneia d'equilibri.

Per estudiar el moviment transitori de l'aigua entre l'embassament i la xemeneia (tram AB), s'aplica l'equació d'Euler-Bernoulli [2.125] generalitzada:

$$L \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} f \frac{L}{D} v|v| = \frac{p_A}{\rho} - \frac{p_B}{\rho} + g(z_A - z_B) \quad [5.95]$$

en què s'ha suposat que el tram AB és de secció recta constant, A . Si l'aigua es mou de A a B i no hi ha pèrdues en A, llavors:⁴⁹

$$\begin{aligned} p_A &= p_{atm} + \rho g(H - z_A) - \frac{1}{2} \rho v^2 \\ p_B &= p_{atm} + \rho g(h - z_B) \end{aligned} \quad [5.96]$$

mentre que, si va de B a A:

$$\begin{aligned} p_A &= p_{atm} + \rho g(H - z_A) \\ p_B &= p_{atm} + \rho g(h - z_B) - \frac{1}{2} \rho v^2 \end{aligned} \quad [5.97]$$

de manera que, en general:

$$\frac{p_A - p_B}{\rho} = g(H - h - (z_A - z_B)) - \frac{1}{2} v|v| \quad [5.98]$$

i la velocitat és positiva quan el cabal va de A a B.

Combinant aquesta equació amb la de l'energia [5.95] i designant y la diferència de nivell entre l'embassament i la xemeneia ($-y = H - h$), resulta:

$$L \frac{dv}{dt} = -gy - \frac{1}{2} \left(1 + f \frac{L}{D} \right) v|v| \quad [5.99]$$

L'últim sumant representa les pèrdues per fregament i l'energia cinètica. Si es menysprea i es té en compte que, per continuïtat:



$$Q = Av = A_0 \frac{dy}{dt} + Q_C \quad [5.100]$$

l'equació del moviment es transforma, amb $Q_C = 0$ (turbina parada), en:

$$\frac{L}{g} \frac{A_0}{A} \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0 \quad [5.101]$$

que, amb les condicions inicials ($t = 0, v = v_0, y = y_0 = 0, H$ constant),⁵⁰ té com a solució $y = y_{\max} \sin \omega_N t$.

La freqüència rotativa de l'oscil·lació no esmorteïda és:

$$\omega_N = 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{L} \frac{A}{A_0}} \quad [5.102]$$

i l'amplada:

$$y_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A}{A_0}} \quad [5.103]$$

atès que la velocitat màxima verifica:

$$y_{\max} \omega = \dot{y}_{\max} = v_0 \frac{A}{A_0} \quad [5.104]$$

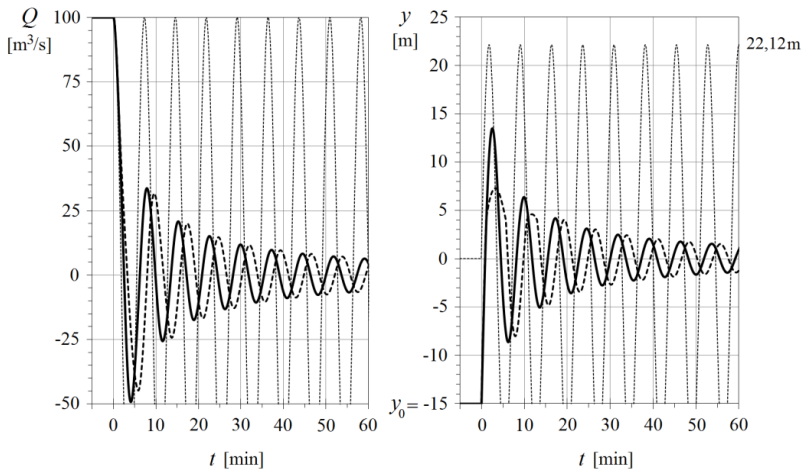


Figura 5.37. Simulació de l'oscil·lació de massa en una xemeneia d'equilibri com la de la figura 5.36 (esquerra). Paràmetres: $L = 5$ km; $D = 6,5$ m; $D_0 = 20$ m; $Q_C = 100$ m³/s, i $R = 0,0015$ m/(m³/s)². La línia a punts és la solució no esmorteïda per a la qual $y_{\max} = 22,12$ m [5.103] i $f_N = 8,25$ cicles/h [5.102]. La línia contínua representa la solució oscil·latòria amb fregament per a una xemeneia de secció constant, i la línia discontinua és la resposta per a una xemeneia tal que a $y = 4$ m es quadruplica la seva àrea.

Aquest resultat suggereix que, després de la detenció de la turbina i tenir $Q_C = 0$, s'inicia una oscil·lació de massa de caràcter oscil·latori l'amplitud i la freqüència de la



qual són menors com més petita és la relació entre les àrees del conducte en la galeria, A , i de la xemeneia, A_0 .

L'efecte del fregament amb la turbina parada es tradueix en una disminució dels valors de ω i de $y_{\text{màx}}$, tal com passa amb la resta de moviments oscil·latoris subesmorteïts, que condueix a una situació de repòs en què $y=0$ (v. figura 5.37). L'amplitud de les oscil·lacions es pot reduir, a la pràctica, augmentant l'àrea de la xemeneia o reduint la secció d'entrada en BC per produir una pèrdua més gran de càrrega. De vegades, es permet el vessament per la part superior de la xemeneia, que llavors actua com a vàlvula de descàrrega, però en cap cas l'altura i la condició estàtica han de permetre que entri aire durant la fase de depressió, en què el seu nivell és mínim, $y_{\text{mín}}$.

Amb la turbina en funcionament, la maniobra continuada de l'observador, que mira de mantenir la potència de la màquina constant, pot portar el moviment a una condició divergent de ressonància. Després d'algunes aproximacions de càlcul, i tenint en compte que la condició de potència constant a la turbina implica que:

$$Q_{c,0}h_0 = Q_c(H + y) = Q_c(h_0 - y_0 + y) \quad [5.105]$$

Thoma va arribar a deduir que la condició d'estabilitat implica que la xemeneia ha de tenir una àrea mínima de valor:

$$A_0^{\text{mín}} = A \frac{L}{(H - h_0)h_0} \frac{v_0^2}{2g} \quad [5.106]$$

en què h_0 és l'altura de la xemeneia en condicions estacionàries (no en repòs) i $(H - h_0)$ representa la pèrdua d'energia a la galeria ($|y_0|$).

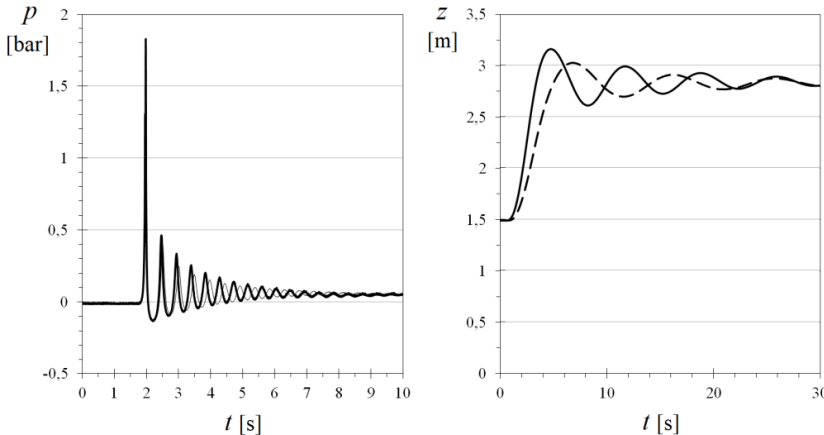


Figura 5.38. Cop d'ariet (esquerra) i oscil·lació de massa a la xemeneia (dreta) registrats experimentalment en una instal·lació de laboratori que reproduïx a escala la instal·lació de la figura 5.36 (esquerra). Es mostra el cop d'ariet obtingut en dos dies diferents. Observem que la freqüència de l'oscil·lació en pressió canvia entre dies, com a conseqüència del diferent valor de la velocitat del so (línies gruixuda i fina del gràfic de l'esquerra), i que l'oscil·lació a la xemeneia no es veu afectada per la presència del cop.



Dades: $L_{CD} = 13,15$ m; $L = 10,9$ m; $A_{01} = 5,93$ cm² (línia contínua) $A_{02} = 9,83$ cm² (a traços); $A = 4,91$ cm²; $H = 2,8$ m.

5.5.2 Efecte bombeig i inestabilitat

L'efecte bombament pot aparèixer en aquelles instal·lacions capacitives en què s'ha instal·lat una bomba de característica inestable. Aquest fenomen suposa una fluctuació brusca del cabal impulsat perquè la bomba no troba un punt de funcionament estable sota determinades condicions de treball. Una instal·lació és capacitiva quan l'altura a la sortida de la bomba varia de manera integral amb el cabal lliurat, i la corba de la bomba és potencialment inestable quan, en algun dels trams, l'altura d'elevació creix amb el cabal i és $dH_B/dQ > 0$. Per norma general, la inestabilitat associada a aquest fenomen es deu a la forma de la corba característica, ja que totes les instal·lacions són, en certa manera, capacitives, però no en totes hi ha bombeig.

La capacitat d'una instal·lació es manifesta com una relació integral entre l'altura i el cabal de la bomba. Si el sistema troba un punt de funcionament estable i permanent en què l'altura es manté constant, tots els termes temporals que podrien donar lloc a l'aparició de fenòmens elàstics desapareixen, de la mateixa manera que l'elongació d'una molla és constant si no canvia la força que l'estreny. Aquests efectes elàstics, combinats amb els inercials, donen lloc a l'aparició de moviments oscil·latoris, que poden ser divergents en el temps si les forces resistives no són suficients per esmorteir la fluctuació.

Quan la intersecció de la característica de la instal·lació i la de la bomba condueix a un únic PF estable, la dissipació d'energia durant el moviment assegura, normalment, l'estabilització del sistema en aquest PF, després d'un procés d'establiment que pot ser més llarg o menys. El problema es presenta quan no hi ha PF possible o quan són múltiples, perquè llavors el sistema no resol la indeterminació i es presenta un funcionament erràtic que pot fer funcionar la bomba de manera oscil·lant o fora del quadrant (Q^+, H^+).

Prenguem, com a exemple, la instal·lació de la figura 5.39, en què el dipòsit actua de capacitat. És evident que el nivell del dipòsit i els cabals estan relacionats per l'equació de continuïtat:

$$A_D \frac{dH_D}{dt} = Q - Q_{sis} \quad [5.107]$$

en què A_D és l'àrea recta del dipòsit i Q és el cabal que l'alimenta des de la bomba. D'altra banda, l'equació [2.131], generalitzada per incloure les pèrdues d'altura en el tram de conducte de secció A comprès entre la bomba i el dipòsit, indica:⁵¹

$$\frac{L}{gA} \frac{dQ}{dt} = H_B - (H_D + A_s Q |Q|) \quad [5.108]$$

Aquestes dues equacions manifesten el caràcter capitiu i inercial de la instal·lació i, substituïda una en l'altra, condueixen a un sistema de segon ordre amb una solució



que pot ser oscil·latòria. Designant i la diferència d'altura entre les corbes de la bomba i la instal·lació a un cabal donat, aquesta equació pot escriure:

$$\frac{L}{gA} \frac{dQ}{dt} = y \quad [5.109]$$

Els punts de funcionament són de manera que la derivada del cabal s'anul·la i $y = 0$, però només són estables aquells per als quals qualsevol pertorbació del cabal origina una y que tendeix a restituir el cabal original, és a dir, aquells per als quals $dy/dQ < 0$. En altres paraules: si la intersecció de la corba de la bomba i la de la instal·lació és de manera que, quan disminueix el cabal, y és positiu, el sistema respondrà tendint a l'equilibri inicial, però si la diferència $y = H_B - H_{sis}$ és negativa, el cabal continuarà disminuint i el sistema serà inestable. Gràficament, aquesta conclusió implica que són estables els punts de funcionament en què la intersecció de les corbes de la bomba i de la instal·lació es produeix de manera que, a cabals inferiors, la corba de la bomba està per sobre de la corba de la instal·lació i, a cabals superiors, per sota. Aquesta situació és la normal quan la bomba instal·lada té una corba característica monòtona decreixent per a la qual l'altura màxima es dona en l'origen, però, quan la bomba té un tram ascendent, és possible que algun dels punts de funcionament sigui inestable. Tal com s'aprecia a la figura 5.39, aquests punts inestables "j" no solen aparèixer sols, sinó acompanyats d'un altre d'estable "j" en què el sistema pot treballar amb normalitat si s'hi arriba.

Hi ha bombeig amb la bomba $H_{B,2}$ de la figura 5.39 (dreta) quan l'altura del dipòsit arriba el nivell crític H^* . A partir d'aquest moment, qualsevol disminució del cabal del sistema augmentarà el nivell H_D segons l'equació [5.107], cosa que portarà la corba de la instal·lació per sobre de la característica de la bomba per a qualsevol cabal. Segons s'aprecia a la mateixa figura, hi ha un PF possible (punt "h") en el quadrant $(Q-, H+)$ en què la bomba treballaria com a fre (v. figura 3.19) i, si $y < 0$, el sistema s'hi tendirà a desplaçar disminuint el cabal. Aquest procés no és instantani a causa del caràcter inercial de la instal·lació i, com que l'altura del dipòsit disminueix quan el cabal de la bomba es fa negatiu, el punt de funcionament pot tornar a passar al quadrant $(Q+, H+)$ un temps després i repetir el fenomen.

El bombeig no es dona quan la característica de la bomba és estable, perquè llavors hi ha un únic punt de funcionament en el quadrant positiu $(Q+, H+)$, en què serà $dy/dQ < 0$. Tampoc no hi ha bombament amb bombes de característica potencialment inestable en una instal·lació donada, si l'altura del dipòsit es manté sempre per sota del valor H^* i s'ha aconseguit un PF estable previ.

El problema és en la posada en marxa, ja que la bomba és incapaç de subministrar l'altura requerida a cabal nul si $H_D > H_0$ a l'instant inicial. Això és evident en la instal·lació $H_{sis,1}$ de la figura 5.39 (a la dreta), en què es pot arribar sense problemes al punt "k" perquè inicialment l'altura del dipòsit és $H_k < H_0$. Una vegada en funcionament, l'augment de l'altura estàtica fins a H_j , sent $H_j > H_0$, suposa el desplaçament del



punt de funcionament des de “k” fins a “j”, que serà un PF estable més. En definitiva, perquè no hi hagi bombeig després d’una posada en marxa estable, el cabal del sistema s’ha de mantenir per sobre de Q^* sempre que H_D sigui superior a H_0 .

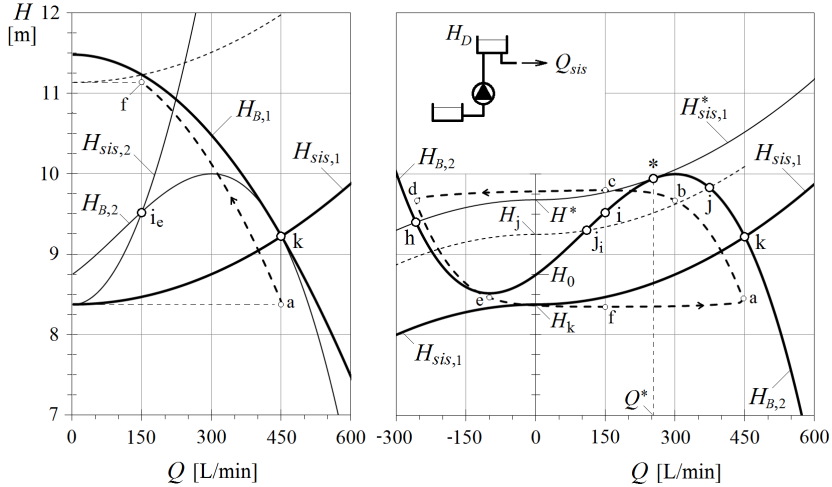


Figura 5.39. Condicions d’estabilitat i efecte bombeig en instal·lacions. Les línies de traç mostren l’evolució de H_D amb el cabal. Els punts a, b, c, d, e i f permeten visualitzar el progrés temporal del fenomen. Com s’observa a la figura 5.40, el trànsit entre els punts “b” i “d”, i “e” i “a” és pràcticament instantani (per a les hipòtesis i els paràmetres de la instal·lació utilitzats en la simulació).

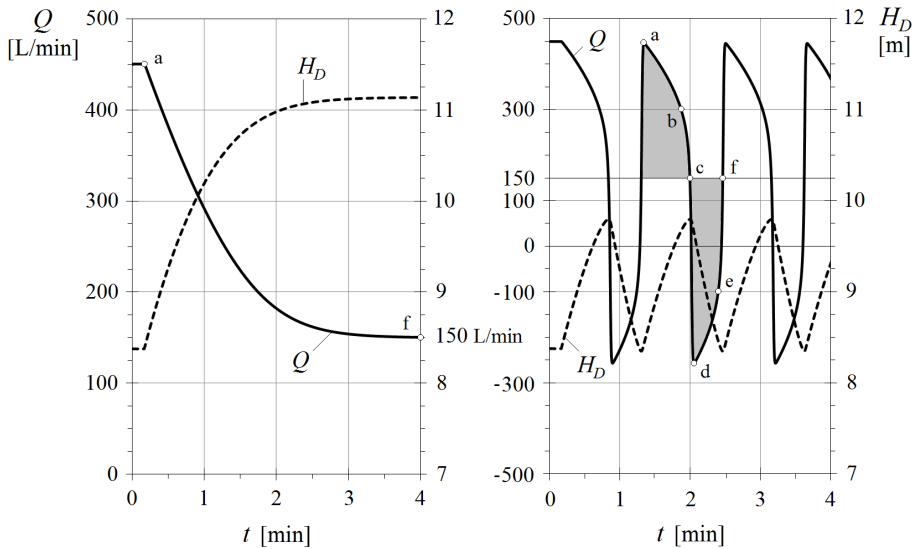


Figura 5.40. Simulació per ordinador del sistema $H_{sis,1}$ de la figura 5.39 davant un canvi brusca del cabal Q_{sis} en $t = 10$ segons. Àrea del dipòsit $A_D = 0,1$ m², conduïte de longitud $L = 10$ m i diàmetre intern $D = 6,5$ cm. $A_S = 15.000$ m²/(m³/s)². $H_{sis,1} = H_D + A_S Q|Q|$. A l’esquerra, el cas estable, amb $H_{B,1}$, i a la dreta, l’instable, amb $H_{B,2}$. No s’ha considerat la inèrcia del grup motor-bomba i s’ha suposat el nivell d’aspiració de la bomba constant.



A la figura 5.39, a l'esquerra, es mostren dues situacions estables, punts "k" i "i_e", obtinguts amb una bomba de característica monòtona decreixent, $H_{B,1}$, i amb una altra d'íestable, $H_{B,2}$. En el punt de funcionament "k" es verifica que el cabal de les bombes (totes dues per separat) i del sistema coincideixen: $Q_{sis} = 450$ L/min, en aquest cas. Quan Q_{sis} disminueix fins a 150 L/min, la bomba estable $H_{B,1}$ de l'esquerra disminueix sense problemes el cabal del seu PF fins que l'altura del dipòsit arriba al punt "f". En canvi, la bomba $H_{B,2}$ de la dreta no pot arribar al punt "i", corresponent al cabal de 150 L/min, sense que hi aparegui bombeig. Aquesta impossibilitat fa que el seu cabal i l'altura del dipòsit oscil·lin de manera sostinguda seguint la trajectòria mostrada a traços (en sentit contrari a les agulles del rellotge). A la figura 5.40, es mostra el resultat obtingut per simulació de tots dos comportaments.

No obstant això, és possible que la bomba $H_{B,2}$ arribi a un punt de funcionament estable de cabal $Q = 150$ L/min si s'afegeix una vàlvula en el conducte d'impulsió, de manera que el sistema pugui transitar de $H_{sis,1}$ a $H_{sis,2}$, tal com es mostra a l'esquerra de la figura 5.39. El punt de funcionament corresponent, "i_e", per al qual el cabal del sistema i de la bomba coincideixen, és estable ja que la característica $H_{sis,2}$ és més resistiva que la $H_{sis,1}$ i $dH_{sis}/dQ > dH_B/dQ$. En aquesta situació no hi ha bombeig perquè la bomba troba un PF que compleix l'equació [5.107] i que, a més, és estable encara que $dH_B/dQ > 0$.⁵²

5.5.3 Inestabilitat en paral·lel

La instal·lació en paral·lel de dues màquines de característica íestable s'ha d'evitar sempre que es pugui. En el cas de les bombes, aquesta situació no sol passar i s'evita simplement no connectant en un grup en paral·lel bombes amb corbes característiques en què es compleixi que $dH_B/dQ > 0$. En canvi, són molts els sistemes formats per ventiladors connectats en paral·lel, encara que l'usuari no se n'adoni: els sistemes de ventilació general i d'extracció localitzada d'una nau industrial constitueixen un grup de molts ventiladors en paral·lel entre si i, per exemple, també amb els de condicionament de les oficines només obrint una porta. Tots aquests ventiladors comparteixen els punts d'entrada i sortida i, com que és inevitable que alguns tinguin corbes característiques en forma de cadira com la de la figura 3.38, el problema està servit.

Com en el cas de les bombes (v. figura 3.21), el funcionament en paral·lel de dos ventiladors de corbes característiques diferents pot donar lloc a la recirculació de cabal pel ventilador que tingui menys capacitat de comunicar energia. El problema en ventilació és més difícil de resoldre perquè, d'una banda, la seva connexió en paral·lel es dona, moltes vegades, sense que hi hagi un conducte real que els uneixi i, de l'altra, les xemeneies o els gradients tèrmics poden actuar com a fonts actives de cabal i produir el reflux a través del ventilador.

És gairebé impossible acomodar el funcionament de tots els ventiladors connectats en paral·lel, sobretot si són diferents: quan un usuari s'adona que hi ha reflux en un ventilador, es pot veure temptat d'augmentar-ne les revolucions o substituir-lo per



un altre de més potent, i que cregui que el problema es deu per una falta de pressió comunicada. Aquesta manera d'actuar només trasllada el problema al ventilador següent més petit o, en el cas d'estar en paral·lel amb una llar, provocarà el rebuf de la xemeneia i l'entrada de fums. En aquests casos, la solució passa per separar hidràulicament les dues màquines, ja sigui tancant portes, col·locant mampares o obrint finestres, de manera que cadascun aspiri d'un *plenum* diferent.⁵³

El problema es complica encara més si es té en compte la forma que adquireix la corba característica de la connexió. Suposem, per simplificar l'explicació, que es munten dos ventiladors com el de la figura 3.38 en paral·lel. Per a pressions compreses entre la pressió del punt "j" i la del punt "k", cadascun dels ventiladors pot subministrar tres cabals diferents (per exemple, els punts "a₁", "b₁" i "c₁" de la figura 5.41 per a la pressió p₁), cosa que dona lloc a una característica del grup en paral·lel de forma nuada.

Mentre la corba del sistema sigui més plana que la que correspon al punt d'inici d'inestabilitat (punt "i"), el sistema funcionarà de manera correcta i el cabal es repartirà a parts iguals entre tots dos ventiladors. Per a corbes més resistives, la característica en paral·lel pot ser tallada fins per tres punts diferents, cosa que és, sens dubte, inestable i provoca el funcionament polsant del conjunt.

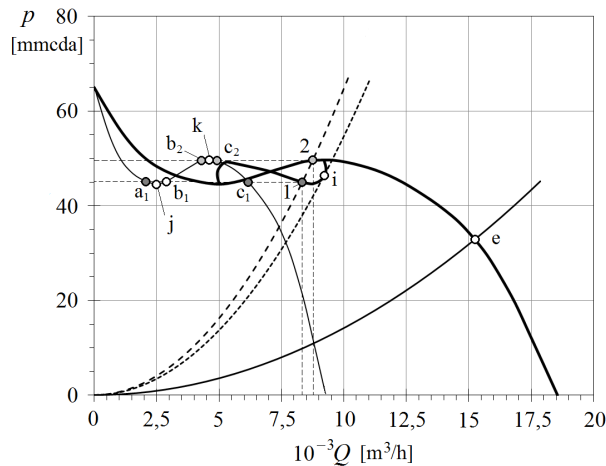


Figura 5.41. Corba característica típica de la connexió en paral·lel de dos ventiladors iguals. El punt de funcionament de la instal·lació s'ha de trobar a la dreta del punt "i" per evitar que aparegui aquesta inestabilitat, per exemple en el punt "e". Els punts "j" i "k" són els de pressió mínima i màxima que defineixen la zona en què $dp_e/dQ > 0$ de cada ventilador. Per al punt inestable "1", es verifica $Q_1 + Q_2 = Q_1$.

Aquesta variació del cabal entre "1" i "2" causa un rumor oscil·latori clarament audible en moltes naus industrials, que només es pot evitar situant la corba del sistema per sota de "i". De nou, l'augment de les revolucions de tots dos ventiladors no resol el problema, ja que la inestabilitat es desplaça al llarg de la corba d'afinitat, que és en si la corba del sistema.⁵⁴ Ara bé, si el cabal del conjunt oscil·la entre "1" i "2", el de



cada ventilador oscil·la encara més per fer-ho alternament entre els punts “ a_1 ” i “ c_1 ” (a la figura) i entre els seus homòlegs a p_2 , “ b_2 ” i “ c_2 ”, de manera que l’usuari que s’aproximi a un ventilador veurà que augmenta considerablement l’oscil·lació i observarà que sembla que funcioni “a salts” amb una gran vibració deguda a l’aparició de despreniment rotatiu.

5.6 Introducció a la ventilació

Es defineix la ventilació com la introducció, intencionada o no, d’aire extern en un recinte, amb el propòsit de diluir la concentració de contaminants de l’aire intern, assegurar les condicions de benestar higrotèrmic, evitar perills d’explosió i controlar la circulació de fums en cas d’incendi.

La quantitat d’aire extern necessària per assegurar una qualitat acceptable de l’aire interior és un tema de debat que ha portat a estàndards radicalment diferents. El criteri comunament adoptat prescriu un cabal mínim de subministrament d’aire exterior per persona basat en el control, sota límits prefixats, de la humitat, el nivell de CO_2 i les olors generades pels ocupants del recinte. En l’actualitat, es para esment també al manteniment de concentracions acceptables d’una varietat de contaminants addicionals que no són generats primàriament pels ocupants, sinó per altres fonts, algunes de les quals no estan relacionades amb el procés industrial (mobiliari, serveis, terreny, etc.).

L’intercanvi d’aire entre l’interior i l’exterior pot ser per ventilació controlada, ja sigui natural o forçada, i per infiltració. Malgrat que tots aquests mètodes difereixen significativament en la manera com afecten la qualitat de l’aire, el benestar tèrmic i l’aïllament energètic del recinte, el disseny del sistema de ventilació triat ha de portar a l’equilibri higrotèrmic o de concentració de contaminants prescrit inicialment. Aquest equilibri defineix la qualitat d’aire interior (CAI) i depèn de la intensitat de la font i de la taxa total d’extracció per ventilació, que serà, al seu torn, funció del mètode de ventilació emprat o de la seva combinació.

La ventilació forçada proporciona el màxim potencial de control de la taxa d’intercanvi i la seva distribució dins de l’edifici. Aquesta ventilació és obligatòria en grans edificis i, en general, on es requereixi una mínima quantitat d’aire exterior, o on sigui aconsellable o necessari un sistema mecànic d’evacuació. Com més estanc és l’edifici (optimitzat des del punt de vista energètic), més necessària és la ventilació forçada per assegurar-ne la mínima renovació i mantenir una qualitat acceptable de l’aire en el seu interior.

La ventilació natural a través d’obertures intencionades es deu a pressions de vent i a diferències de temperatura entre l’interior i l’exterior. Per proveir una ventilació adequada per a la dilució de contaminants i el control de la temperatura d’un recinte, es poden fer servir fluxos d’aire a través de finestres, portes, registres, trapes, claraboies, etc., i és fonamental entendre els mecanismes pels quals l’aire es reparteix quan passa pels dispositius, terminals o no, preparats per a la difusió i el repartiment de l’aire.



La infiltració és el flux d'aire no controlat a través d'obertures no intencionades i inevitables. Aquest mecanisme és el menys fiable de tots i s'escapa sovint del control humà, perquè depèn de les condicions climàtiques i de la localització de les obertures.

El disseny d'un sistema de ventilació és una operació delicada en què tenen un paper important nombrosos factors tècnics, econòmics, de consum d'energia i humans. Aquesta operació requereix que els projectistes tinguin un coneixement profund del lloc de treball que s'ha de tractar i de les teories i eines de què disposen. Sobre aquest tema, és essencial dur a terme un estudi preliminar prou detallat del lloc de treball i la zona que l'envolta, de manera que la solució estigui ben adaptada al problema en qüestió i, a més, sigui acceptable pels ocupants en termes dels requisits de producció i benestar personal. És important projectar des del principi un mitjà de captura de contaminants que no molesti el treballador en la seva activitat, ja sigui per la seva implantació, la grandària, els corrents induïts d'aire, etc., i, si la font contaminant ho demana, cal fer servir campanes extractores locals o cambres per a la neteja de l'aire.

En el cas de la instal·lació d'un sistema de ventilació en un lloc industrial, el procediment general de disseny pot seguir les fases següents:

- Obtenir dades de disseny de sistemes semblants i els concernents als requisits normatius aplicables.
- Estudiar les premisses dels llocs de treball: factors humans, condicions meteorològiques locals, obertures pròximes, etc.
- Determinar els objectius i les especificacions en termes dels nivells de contaminació exigits, l'eficàcia del sistema, etc., i desenvolupar un catàleg de les fonts de contaminació i la seva possible reducció o substitució per altres processos productius.
- Fer una avaluació tècnica i econòmica de les diferents alternatives disponibles, calculant els components del sistema com una funció de les restriccions imposades.
- Instal·lar el sistema de ventilació i registrar, després, les prestacions operatives per emprar-les de referència en el futur.

El ventall de mètodes i eines disponibles per a l'estudi dels sistemes de ventilació és molt ampli. A fi de donar una visió clara, tot i que simplificada, d'aquests mètodes, considerem tres maneres d'afrontar el problema que es poden combinar entre si: el mètode empíric, el mètode integral i el mètode local. El mètode empíric és el més estès i es basa, en gran part, en l'experiència pràctica adquirida en projectes reeixits completats *in situ*. El mètode integral es basa en l'aplicació de les equacions de conservació en un volum de control de grandària finita i condueix al desenvolupament de models simplificats, que permeten comparar i analitzar diferents tipus de sistemes de ventilació. El mètode local es basa en la resolució d'equacions en diferències per



determinar l'evolució de la velocitat, la pressió, la temperatura o la concentració del camp de flux en qüestió.

	Renovació de l'aire en locals habitats	Núm. r/h/o
Sector de serveis i altres locals	Esglésies	1 - 2
	Escoles, aules	2 - 3
	Hospitals	5 - 6
	Oficines generals	5 - 6
	Bars d'hotel	5 - 8
	Sales de juntes	5 - 8
	Restaurants	5 - 10
	Aparcaments	6 - 8
	Gimnasos	6 - 12
	Teatres i discoteques	10 - 12
	Perruqueries	10 - 15
	Lavabos	13 - 15
	Cinemes, cafeteries i locals de menjar ràpid	15 - 18
Locals industrials	Magatzems no perillosos	3 - 6
	Tallers de mecanitzat	5 - 10
	Fàbriques en general	5 - 10
	Laboratoris (amb campanes o cabines)	6 - 8
	Cuines industrials (indispensable amb campanes)	15 - 20
	Bugaderies i tintoreries	20 - 30
	Obradors de fleques	25 - 35
	Naus industrials amb forns i lavabos (sense campanes)	30 - 60
Tallers de pintura (preferiblement amb campanes)	40 - 60	

Taula 5.6. Nombre recomanat de renovacions d'aire per ocupant i hora, en funció del sector

Una tècnica àmpliament emprada de ventilació de recintes és la ventilació per dilució, amb recirculació de l'aire o sense. Segons quins siguin els mitjans de presa i expulsió d'aire, la ventilació per dilució pot consistir en:

- Ventilació natural exclusivament, possible quan l'aire es mou per diferències de pressió i temperatura a través de la carcassa de l'edifici.
- Ventilació mixta, amb presa natural d'aire i extracció mecànica, o bé amb injecció mecànica d'aire i evacuació natural, o amb una combinació de totes dues, i
- ventilació totalment mecànica.



La distribució de l'aire en locals i recintes presenta, en general, tres aspectes: la distribució de l'aire per impulsió, normal o forçada; la recollida de l'aire de retorn en sistemes amb recirculació, i la recollida de l'aire per extracció, normal o forçada. Per a cadascuna d'aquestes formes, cal situar les boques de distribució adequades, ja siguin reixetes o difusors, tenint en compte les seves característiques i propietats de difusió, dispersió, abast i propagació.

Tal com s'ha esmentat, el volum d'aire a renovar es pot calcular en funció del seu contingut màxim de CO₂, la temperatura màxima dels locals que cal ventilar, o l'ús del local i el nombre de persones que l'ocupen. Una vegada conegut el cabal necessari, el procés continua amb el projecte de la xarxa de distribució tenint en compte factors funcionals, com ara la difusió de l'aire, les seves possibles fuites i el nivell de soroll admissible, i d'altres com els requisits d'espai i el cost de la inversió inicial. Una mala distribució del cabal prescrit pot causar pèrdua de confort i, a més, augmenta els costos operatius.

Un cop conegut el cabal de renovació, el procediment general de càlcul dels sistemes de conducció i distribució d'aire segueix els passos generals següents:

- Estudiar la configuració de l'edifici (plànols en planta i alçat) i disposar les obertures de subministrament i retorn d'aire necessàries, de manera que quedi assegurada la distribució correcta en cada espai.
- Seleccionar la grandària de les reixetes i dels difusors a partir de les dades subministrades pels fabricants.
- Representar esquemàticament el sistema de conductes que connecten les sortides de subministrament i les preses de retorn amb els equips i les unitats de tractament i manipulació de l'aire. L'espai reservat per als conductes de subministrament i retorn dicta, sovint, la disposició en planta del sistema i la manera d'instal·lar-los.
- Dividir el sistema en seccions numerades. Un sistema de conducció s'ha de subdividir en tots els punts en què canvia el cabal, la grandària de conducte o bé la seva forma.
- Dimensionar els conductes pel mètode de càlcul seleccionat. En la transformació de la secció, es recomana que la relació d'àrees no superi el 20% i que es faci en una sola direcció quan el conducte no és circular.
- Calcular la pèrdua total de pressió del sistema per després seleccionar el ventilador.
- Tornar a dimensionar les seccions del conducte per compensar les pressions en cada enllaç i derivació.



- Analitzar el disseny amb la finalitat de detectar possibles nivells de soroll no aconsellables, i especificar-ne els atenuadors necessaris.

Un dels mètodes més estesos per al càlcul de xarxes és el d'ídèntica pèrdua de càrrega per metre de conducte. Aquesta pèrdua es xifra en intervals molt amplis: quan el cost de l'energia és elevat i el del muntatge del conducte és baix, el disseny més econòmic és el de menys pèrdua específica, i a l'inrevés en cas contrari. La pèrdua específica se situa entre 6 mmcda i 50 mmcda per cada 100 metres de conducte, sent normal un valor de 25. Una vegada triats la pèrdua òptima i el material, el càlcul de la secció inicial és immediat, i amb la longitud dels conductes es pot saber la pèrdua de pressió total per trams i la pressió estàtica a subministrar pel ventilador. Un altre mètode molt utilitzat aprofita els canvis de secció per reduir la velocitat i així recuperar la pressió estàtica que es perdrà en el tram següent. N'hi ha d'altres de més empírics que limiten la velocitat màxima en els conductes (entre 3 m/s en usos residencials i 10 m/s en locals industrials) i el nivell de soroll admissible, o uns altres de més sofisticats, basats en la minoració d'una funció de cost objectiu.

Evidentment, el soroll generat pel sistema de ventilació és un paràmetre important a tenir en compte en el seu disseny. Si una font es manté activa contínuament en un gran recinte, l'energia del so hi augmentarà fins que la taxa a què l'energia és absorbida pel mitjà i les superfícies de la sala sigui igual a la taxa de generació de la font. Això també implica que, si la font cessa l'emissió bruscament, ha de passar un determinat període de temps perquè el so sigui absorbit completament.⁵⁵ El poder reverberant d'una sala té un paper molt important sobre el nivell de pressió acústica, i d'això es dedueix que l'energia del so resultant a una distància donada de la font depèn, no només del nivell de potència que tingui i de la capacitat d'absorbir so de la sala, sinó també de la seva ubicació i de l'anomenat coeficient de directivitat.

En general, la ubicació dels ventiladors es tria per conveniència allà on el sistema de ventilació sigui més eficient des del punt de vista del repartiment de l'aire, de manera que, en conseqüència, per garantir la reducció del soroll de ventilació fins a nivells acceptables, s'ha d'aportar prou atenuació a les parets i al sistema de distribució. El fabricant del ventilador no controla el disseny del sistema ni les propietats acústiques del recinte, que són característiques que determinen el nivell sonor global, tal com s'ha explicat, i només és responsable de l'exactitud de les dades acústiques del ventilador que subministra, i de que siguin tan mínimes com li sigui possible per obtenir un avantatge comercial.⁵⁶

¹ Fins i tot, en aquest últim cas, l'energia cinètica del nus es pot menysprear en moltes ocasions [v. 5.40]. Entre els casos particulars en què v_2 no és nul·la, hi ha les fonts artístiques en què, precisament, l'energia útil és H_d . Si els punts es trien sobre dues superfícies lliures, es compleix que $O(v_1) \approx O(v_2) = 0$ i, en qualsevol cas, inferior a la velocitat en els conductes (l'energia cinètica dels quals ja és de per si petita).

² Donada la dependència, $f = f(Re, \varepsilon/D)$, per a $Re = vD/\nu$. És possible ajustar el factor f per intervals de Re per a una ε/D donada, de manera que, si s'accepta que $f = b/Re^c$ entre dos valors Re_1 i Re_2 , per als quals estan definits



f_1 i f_2 , respectivament, resulta $c = -\log(f_2/f_1)/\log(Re_2/Re_1) > 0$ i $b = f_1 Re_1^c$. D'aquesta expressió, se segueix que $j = j(v^{2-c})$ i $a = 2 - c < 2$ en aquest interval. Per a canonada llisa (equació de Blasius: $f = 0,316 Re^{-1/4}$), es compleix que $j = (0,316(v^{1/4}/D^{5/4})/2g)v^{7/4}$, d'on $a = 1,75$.

- 3 Com tampoc no ho és el diagrama de Moody, que es pot fer servir amb bons resultats per a règim turbulent amb altres seccions de conducte, i fins i tot en conduccions obertes. La pèrdua d'energia és conseqüència del fregament en el perímetre de la secció i, per això, és normal que en règim laminar, on el creixement de la velocitat és més gradual i l'efecte de la paret penetra més cap a l'interior, la forma de la secció tingui un paper més important en la distribució de la velocitat i en la pèrdua de càrrega que en règim turbulent.
- 4 De vegades, es fa servir l'equació $\Delta h_f = r_{eq} Q^a$, amb $1,8 < a < 2$ i $r_{eq} = r_{eq}(a)$, per posar de manifest el règim de transició. En aquests casos, $r_{eq} = fL2^{2a-1}/(\pi^2 g D^{2a+1})$. D'ara endavant, se suposa que els conductes són circulars i es designa v com la velocitat mitjana.
- 5 La pèrdua singular que hi ha en cada canvi de secció se suposa localitzada en un dels trams.
- 6 Observem que la resistència equivalent del sistema en sèrie es pot definir en termes del diàmetre equivalent o de la longitud equivalent, i en tots dos casos té, evidentment, el mateix valor.
- 7 Aquest plantejament es pot fer amb les longituds equivalents de cada tram. S'està suposant repetidament que les pèrdues singulars es poden menysprear, cosa que no és cert quan hi ha vàlvules en la instal·lació. Aquest tractament es refereix a les pèrdues singulars "passives" provocades per colzes i altres elements de geometria constant. La pèrdua en una vàlvula pot ser superior a la del tram de conducte on està instal·lada, i el seu efecte s'estudiarà més endavant en aquest tema.
- 8 Per a un diàmetre D_1 donat i qualsevol cabal d'entrada, la potència dissipada és menor com més semblants són els seus diàmetres i és mínima quan tots dos són iguals (ja que no es preveu que D_2 sigui més gran que D_1). Això pot induir velocitats molt grans o molt petites en els conductes, en funció del cabal derivat.
- 9 En el cas que es menyspreï les pèrdues de càrrega locals en els nusos, cosa que equival a dir que la pèrdua de càrrega entre dos nusos és independent, en valor absolut, del sentit de circulació. Aquesta hipòtesi és acceptable en aquesta mena de problemes.
- 10 Aquesta circumstància es justifica físicament perquè, de fet, les cotes piezomètriques dels nusos són funció dels cabals de la xarxa (i de la d'un dels cabals).
- 11 Es treballa amb pressions manomètriques, perquè s'entén que el sistema és a la mateixa p_{atm} . Aquest supòsit s'ha de comprovar quan els dipòsits estan molt allunyats els uns dels altres. Se suposa que són conegudes les H_i de cada dipòsit i les longituds, els diàmetres i els materials de cada canonada.
- 12 El terme de pèrdues se situa a un costat o altre de l'equació depenent del sentit de circulació. S'admet que Q_1 i Q_3 tenen sempre el sentit indicat a la figura: Q_1 cap a J i Q_3 de J al dipòsit (3).
- 13 En els costos calculats a les expressions anteriors no s'han inclòs els termes constants que desapareixen en el procés de cerca del mínim per derivació.
- 14 A l'estudi que s'ha fet servir com a referència en aquest apartat (Agüera Soriano, 1.987), s'han emprat $p = 0,074$ €/kWh, $c = 513,50$ €/m^{5/2} i $b = 137$ €/kW.
- 15 S'utilitza la fórmula [5.24], combinant els diàmetres D_k disponibles amb les longituds en què hi hagi d'haver un canvi de timbratge, per obtenir el valor $r_{D_{eq}}$ més pròxim a l'econòmic. El salt de timbratge depèn del material que s'hagi fet servir, però és freqüent que el repartiment es faci a intervals normals: 4, 6, 10, 16 bar, etc. Un timbratge baix no és convenient perquè dona lloc a canonades excessivament primes i fràgils.
- 16 L'ocurrència d'histèresi, poca repetitivitat o altres efectes no lineals de l'accionament pot suposar la pèrdua d'aquesta correspondència unívoca.
- 17 Encara que l'accionament manual de la vàlvula es faci externament mitjançant un volant multivolta, la vàlvula es considera lineal si ho és el desplaçament del seu obturador.



- 18 Altres coeficients de cabal emprats extensament són el C_V i l'àrea normal, A_N . La seva relació amb el K_V i entre si és: $C_V = 1,16K_V$ i $A_N = 2,40 \cdot 10^5 C_V$.
- 19 Això es fa així perquè els fabricants desconeixen, a priori, la diferència de pressions efectiva que la vàlvula tindrà a la seva disposició per operar una vegada instal·lada. La informació s'ha de presentar de manera que la pugui interpretar qualsevol usuari, tenint en compte que la característica de cabal real de la vàlvula depèn del seu acoblament amb la instal·lació, com es veurà en aquest apartat.
- 20 El coeficient R es pot definir per a totes dues tipologies, malgrat que no apareix de manera explícita en la característica teòrica lineal.
- 21 La característica inherent real es pot sol·licitar "de tancament", de manera que se subministri amb un obturador, modificat en obertures petites, perquè la vàlvula segelli i el cabal sigui nul en $x/x_{m\grave{a}x} = 0$.
- 22 L'autoritat de la vàlvula es defineix com el p_R per a grau d'obertura unitat, situació en què el p_R de [5.58] és mínim, ja que Δp_V també ho és, i $\Delta p_{sis,0}$ és màxim.
- 23 Un guany elevat és altament inestable, perquè la mateixa vibració estructural del cos de la vàlvula pot induir fluctuacions de cabal. Com a criteri de selecció, no són recomanables les vàlvules la relació de les quals entre el guany màxim i el mínim, una vegada instal·lada, sigui superior a dos.
- 24 A més, la mida de la vàlvula lineal també seria més petita que la isopercentual corresponent, el que comportaria tot un seguit de problemes d'instal·lació, manteniment i una esperança de vida menor en la vàlvula lineal. Una caiguda de pressió tan elevada a la vàlvula implica una gran pèrdua dissipativa que l'escalfa, dilata i pot tenir efecte sobre els materials emprats. Aquests efectes són més greus a les vàlvules de mida reduïda.
- 25 En el primer cas, es tindrien àrees "abcd" de manera trapezoidal, gairebé triangular, mentre que en el segon serien rectangulars. La tria de la bomba està subjecta a molts condicionants, entre els quals s'hauria de tenir en compte, quan es faci servir una vàlvula de regulació, la condició del p_R i la possibilitat de forçar-ne el valor mitjà a un de concret.
- 26 El cabal serà màxim, i la diferència de pressions, mínima en instal·lacions com la de la figura 5.16.
- 27 La constant és necessària per adaptar les unitats de l'expressió. El diàmetre nominal s'ha d'expressar en mil·límetres i es continua amb $[Q] = \text{m}^3/\text{h}$ i $[p] = \text{bar}$.
- 28 La resistència equivalent del conjunt, r_{eq} , s'obté de l'expressió [5.29] per a una connexió en sèrie en què s'assembla un coeficient de vàlvula equivalent, K_R , a cadascun dels reductors. Llavors, resulta:

$$r_{eq} = \frac{1}{(K_{V,eq})^2} = \frac{1}{(F_p K_V)^2} = \frac{1}{K_V^2} + \sum_i \frac{1}{K_{R,i}^2} = r_V + \sum_i r_{R,i}$$

d'on s'aïlla l' F_p donat per la fórmula [5.61], amb la [5.63].

- 29 La cavitació és observable per l'aspecte rugós, semblant a cendres, de les parets atacades. El flashing deixa polides, gairebé brillants, les superfícies erosionades.
- 30 La velocitat del so pot ser anòmalament baixa en els fluxos mixtos líquid-gas o amb ràtios de transferència de calor excessivament elevades. En el cas dels fluxos mixtos, cal distingir dues situacions: quan el flux és de dos components o més, un dels quals, líquid, i quan el flux és bifàsic, en què el flux és monocomponent i pot tenir lloc en condicions d'equilibri entre les fases o no. En el primer cas, la velocitat del so depèn de la quantitat de gas present, de la pressió i de la temperatura, de la freqüència de l'ona acústica i, per a bombolles de grandària inferior 10^{-4} cm, també de la tensió superficial. L'equilibri entre les fases del flux bifàsic és possible si la transferència de massa és ràpida, comparada amb el període de l'ona acústica, això és, el vapor té temps de condensar i les bombolles poden nuclear i produir un intercanvi actiu de massa i d'energia entre totes dues fases. Es comprova que la velocitat del so en un sistema líquid-vapor en equilibri és significativament més baixa a la corresponent a un sistema líquid-gas en les mateixes condicions termodinàmiques de pressió i temperatura. Si no hi ha equilibri, el flux es comporta, a efectes pràctics, com si es tractés d'un flux multicomponent, en què l'efecte de la tensió superficial és menyspreable si el sistema és sobre la corba de saturació



- líquid-vapor. El lector pot consultar la figura 5.32 de l'apartat 5.4.4 per observar la influència del flux mixt en el valor de la velocitat del so efectiva.
- ³¹ Aquesta condició és $F_P(p_1 - p_2)^{1/2} = F_{LP}(p_1 - r_c p_{sat})^{1/2}$, que manté la forma [5.54] en presència de cons.
- ³² Encara que tots dos són funció del grau d'obertura i disminueixen en obrir la vàlvula, el disseny afavoreix l'augment de F_L per a obertures grans.
- ³³ Com en oleohidràulica, també hi ha vàlvules de diferència de pressió constant, però el seu interès en aquest tema és molt menor que les de pressió de sortida constant.
- ³⁴ La quantitat d'aire a expulsar coincideix amb el volum d'ompliment i el seu cabal depèn de la rapidesa amb què s'ompli. Un ompliment ràpid requereix l'expulsió ràpida de l'aire atrapat. A títol orientatiu, el cabal d'aire a eliminar durant l'ompliment és un percentatge del cabal instal·lat que se situa entorn del 5%. En el buidatge, s'ha de permetre l'entrada d'aire per evitar que es formi un buit que pugui aixafar les canonades (encara que això, en general, és difícil que passi).
- ³⁵ L'aproximació que se segueix en aquesta fórmula és més certa com més prop de la bomba es produeixi la derivació (usual) i si les pèrdues a la seva aspiració són menyspreables respecte de les que es produeixen des de la derivació fins al dipòsit final.
- ³⁶ A [5.73], s'han tingut en compte les unitats i la definició de la densitat relativa. Vegeu l'equació [5.52] original.
- ³⁷ Es recomana fer una interpolació lineal en cabals i quadràtica en altures. L'extrapolació en punts futurs per damunt o per sota de l'última corba coneguda no és tan recomanable com la interpolació entre corbes.
- ³⁸ En el conducte situat aigües avall de la vàlvula, el fluid també es frena i provoca una succió o cop d'ariet negatiu. L'explicació que es dona per al viatge de l'ona aigües amunt també és aplicable a aquest cas.
- ³⁹ Les regles bàsiques que descriuen la interferència de les ones i la seva interacció amb el contorn parteixen de la superposició de les solucions i del principi de Huygens, segons el qual cada punt d'un front d'ona es pot considerar l'origen d'una de nova. Les funcions d'ona de les ones que es troben en un punt determinat se sumen momentàniament i donen lloc a interferències constructives o destructives. Així, quan es troben dues ones planes iguals de magnitud petita que viatgen en sentit contrari, la velocitat induïda en la intersecció és nul·la i la seva pressió es dobla. Si es troben dues ones diferents d'igual magnitud, llavors la velocitat es dobla i la pressió en la intersecció es cancel·la. De la mateixa manera, es pot afirmar que l'ona que topa contra un contorn sòlid dobla la seva pressió i anul·la la velocitat, i l'ona rebotada és del mateix tipus i magnitud. En canvi, si l'ona arriba a l'extrem obert d'un conducte, llavors la reflectida és de tipus contrari i la pressió a l'extrem s'igualava a l'exterior.
- ⁴⁰ En alguns tractats, també es fa servir la fórmula d'Allievi en termes de pressió. Llavors, $\Delta p = \rho c v$. En l'obtenció de la fórmula de Michaud, no es van tenir en compte la compressibilitat de l'aigua ni l'elasticitat del conducte, i a més es va suposar una variació lineal de la velocitat al llarg del temps de tancament. Cal admetre que la variació de la velocitat com a conseqüència de la maniobra d'una vàlvula pot no ser lineal (corba instal·lada no lineal). En canvi, la variació de la velocitat s'aproxima notablement a la condició lineal en parades del grup d'impulsió, perquè el principal fre al moviment és la gravetat.
- ⁴¹ L'aparició d'aire en el període de depressió en què l'aigua ja està aturada no produeix cap perturbació, perquè s'expulsa amb normalitat. No obstant això, com que en aquestes circumstàncies no pot transcórrer un transitori negatiu del mateix ordre que el positiu, perquè la presència de l'aire redueix la taxa temporal de disminució de la pressió, té lloc un retard abans que la diferència de pressió efectiva determini la inversió del corrent.
- ⁴² $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ i $B_s = 2,07 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^2$. La velocitat del so depèn, en gran manera, de la quantitat d'aire: un 1% en volum d'aire pot fer baixar la velocitat a menys de 400 m/s per a una canonada d'acer de 15 cm de diàmetre, amb una pressió relativa d'1 atmosfera. En la mateixa instal·lació, però a 10 atm, la velocitat es dobla. En conseqüència, la velocitat del so no pot ser constant en una instal·lació, i menys encara si està formada per trams de conducte de diferent diàmetre, gruix o tipus d'ancoratge. Seguim el procediment descrit en el paràgraf següent per tenir en consideració la quantitat d'aire continguda en el flux mixt aigua-aire.



- 43 El mètode consisteix a substituir el mòdul B_s de la fórmula [5.85] pel valor $B_{s,ef}$ que resulta del producte ρc^2 , en què la velocitat c s'obté de la figura 5.32 en funció de la fracció de buit, x , suposada coneguda. Aquesta fracció es relaciona amb la de massa, η , mitjançant l'expressió $\eta = (\rho_g/\rho_l)(x/(1+x))$. La densitat ρ s'aproxima a ρ_l per als valors típics de η . El resultat d'aquest procediment és una fórmula que permet estimar la velocitat del so conjuminant la contribució de dos efectes elàstics en paral·lel, a saber: la compressibilitat del mitjà fluid, incloent-hi l'efecte del gas contingut, i l'elasticitat associada al material del conducte. Tots dos efectes es troben en paral·lel, en compartir l'esforç (la pressió) i sumar els seus desplaçaments respectius (canvis en volum) en la deformació conjunta del mitjà i, per això, l'efecte més elàstic més "tou" predomina en el valor de c .
- 44 En l'estudi del cop d'ariet en les impulsions, H no sempre coincideix amb l'altura estàtica definida a [5.2], ni H_m amb l'altura d'elevació de la bomba. Per exemple, si la bomba està submergida en un pou, la seva profunditat respecte de la superfície lliure afecta el càlcul d' H i H_m , però en canvi, no apareix en H_e ni en H_b o H_{sis} .
- 45 Si el cop és d'Allievi per ser $L > L_c$, llavors el màxim és $\Delta H = 2HL_c/L$.
- 46 El coeficient 0,8 que apareix en totes dues equacions suposa una aproximació del càlcul i s'introdueix per tenir present que la temperatura mitjana del procés global serà una mica superior a la inicial.
- 47 La pressió d'ompliment d'un amortidor es tria de manera que sigui, aproximadament, el 90% de la pressió mínima prevista. Amb aquesta precaució, s'evita que la membrana separadora es pugui fer malbé a l'hora d'entrar en contacte amb els mecanismes d'obertura de l'acumulador. En aquest cas, s'admet que $p_1 \approx p_m$, ja que no són gaire dispars, vista la relació hiperbòlica donada per la llei de Boyle-Mariotte. L'energia de la pèrdua de càrrega només seria important si la velocitat fos desmesuradament elevada, o la instal·lació, molt llarga. Amb tot, l'aproximació d'aquesta fórmula és suficient a la pràctica, atès que després s'ha d'adaptar el càlcul als volums comercials.
- 48 El tancament de la vàlvula de comporta sense fre té lloc en el temps de detenció del cabal. És a dir, el tancament està sincronitzat amb el ΔH causant i la nova ona anul·la exactament l'anterior. Aquesta ona viatjarà cap a la bomba, on es trobarà amb la vàlvula de retenció d'impulsió i s'hi reflectirà, el procés es repetirà entre vàlvules.
- 49 Les pèrdues en l'embocadura de B coincideixen amb el seu terme cinètic, per això es compensen entre si.
- 50 Si no hi ha fregament, $y_0 = 0$. Amb fregament i flux dirigit a la ximeneia: $-y_0 = H - h_0 = Rv^2$. Recordem que $(g/L)^{1/2}$ és la pulsació natural d'un pèndol ideal de longitud L .
- 51 Com en [5.99], es menyspreen els termes cinètics i les pèrdues en les embocadures. El valor absolut del cabal és necessari per tenir en compte el sentit de circulació. Es considera $Q > 0$ quan va dirigit al dipòsit.
- 52 L'estabilitat augmenta al mateix temps que el valor absolut de dy/dQ , de manera que, en general, és millor (és desitjable) que $dH_b/dQ < 0$, ja que sempre és $dH_{sis}/dQ > 0$.
- 53 Una cambra *plenum* es pot definir com aquella en què la velocitat i la pressió dinàmica associades són sumament petites i, per tant, menyspreables. Per exemple, una relació de contracció de deu dona com a resultat una pressió dinàmica de l'1%, corrent avall. D'aquí que, a efectes pràctics, la pressió estàtica del *plenum* sigui igual a la total.
- 54 De fet, s'observa que el canvi de les revolucions només afecta el període de l'oscil·lació en massa.
- 55 El model d'absorció se simplifica utilitzant el temps de reverberació, T , o temps necessari perquè l'energia del so en el recinte decaigui 60 dB. A les sales de grandària normal o reduïda, la quantitat d'energia absorbida per l'aire és més petita que la que absorbeixen les parets.
- 56 El soroll mínim del rotor d'un ventilador es fa servir per descriure la generació de soroll a partir de fonts considerades inevitables amb els àleps convencionals. En absència de soroll sobrant en el rotor i del soroll de gruix d'àlep per a àleps prims, se suposa que les úniques formes de soroll són les que generen les forces estacionàries de l'àlep i el mateix soroll del rotor.

6

Instal·lacions oleohidràuliques

Quan parlem d'oleohidràulica, ens referim a la tecnologia que utilitza un fluid hidràulic, generalment oli com a base, com a mitjà transmissor d'energia. L'oleohidràulica engloba el conjunt de tècniques per a la transmissió de l'energia, el seu control i regulació, tant per al comandament de forces com de moviments, destinades al govern de mecanismes mitjançant un fluid hidràulic a pressió. En aquests sistemes, l'energia hidràulica generada per un grup hidràulic és transformada per vàlvules i transmesa a través d'una línia perquè es pugui fer servir localment per actuadors, motors i altres elements de treball, en la realització d'una determinada funció última o per facilitar l'acompliment d'aquesta funció a un altre enginy mecànic.

L'automatització dels processos productius és, en l'actualitat, una necessitat a les indústries modernes que pretenen ser competitives. L'oleohidràulica ajuda aquestes empreses a augmentar la seva flexibilitat i el ritme de producció gràcies a les característiques de l'oli com a mitjà transmissor i a l'adaptabilitat que permeten els seus components. Els actuadors oleohidràulics s'utilitzen eficientment tant en aplicacions industrials estàtiques, on cal el control continu d'una magnitud (posicionament de càrregues o obturadors de vàlvules, control de moviment o trajectòria, etc.), com en aplicacions mòbils per a l'aixecament de càrregues o la tracció (maquinària d'obres públiques, transmissions hidroestàtiques, etc.).

L'elecció de l'oleohidràulica com a tècnica d'accionament per a un procés industrial depèn de molts factors i, evidentment, el més fonamental de tots és la rendibilitat global. El cost dels components individuals determina, en gran manera, aquesta elecció però tampoc és l'únic criteri. Sempre s'han de considerar la facilitat de regulació del sistema, la seguretat dels components i els costos afegits de manteniment i de revisió periòdica. Aquestes raons han convertit l'oleohidràulica en una de les tècniques preferides de la majoria dels usuaris dels sistemes de transmissió d'energia, especialment quan el nivell d'esforços que cal fer és important.

En aquest tema, es descriuen els actuadors, les vàlvules i els dispositius auxiliars més comunament emprats en oleohidràulica. Entre els circuits tipus que es presenten, hi ha les transmissions hidroestàtiques, molt utilitzades, per exemple, en la tracció de vehicles d'obres públiques, diversos mètodes convencionals per al control de la velocitat dels actuadors i els circuits regeneratius. Aquests circuits són només un exemple



de les in comptables possibilitats que aquesta tècnica permet, sent conscient que és impossible explicar-los tots, entre altres raons, perquè la inventiva humana pensa cada dia noves aplicacions que resol fent servir els actuadors i les vàlvules de pressió o de cabal d'ús general

6.1 Sistemes de transmissió d'energia

Un sistema de transmissió d'energia (STE) fa el treball de manera més ràpida, precisa i durant més temps que l'ésser humà, perquè evita els períodes de fatiga propis del treball manual, i sovint actua de manera automàtica. Els STE es caracteritzen perquè tenen una entrada i una sortida (o diverses) de potència, i una entrada i una sortida (o diverses) de senyals de control o estat de procés (útils per al monitoratge i el govern a distància). La potència d'entrada és mecànica rotativa i ve definida pel producte d'un parell i una velocitat angular. La sortida mecànica pot ser lineal o rotativa, i és el resultat de la transformació de l'energia d'entrada per l'STE.

Els sistemes de transmissió d'energia poden ser, bàsicament: mecànics, hidràulics, pneumàtics i elèctrics. A la pràctica, la tria d'un d'aquests sistemes radica en diverses consideracions que concerneixen factors tècnics, com la precisió, la regularitat o la repetitivitat d'un moviment, per exemple; factors energètics, com el rendiment de la instal·lació; però també factors funcionals, com les necessitats de manteniment, reposició de recanvis o facilitat d'ús i interpretació. A més, el cost energètic del conjunt de la instal·lació s'ha de considerar en un entorn cada vegada més global, en què les empreses tenen com a objectiu la reducció de contaminants aprofitant millor els materials i els consumibles. L'ús de materials i fluids ecològics, reciclats, i l'estalvi d'energia han passat a ser tècniques habituals del màrqueting i del treball quotidià de les empreses.

En un sistema de transmissió d'energia oleohidràulic (STEO), l'energia hidràulica generada en un grup hidràulic és transmesa pel fluid i reconvertida en energia mecànica per mitjà d'actuadors lineals o rotatius. La transmissió de l'energia mitjançant conductes facilita l'ús de transmissions hidràuliques, ja que es resol mitjançant canonades i vàlvules el que, de manera mecànica, s'hauria de fer amb transmissions mecàniques, embragatges, frens, etc. A més, una mateixa font primària de potència hidràulica es pot utilitzar per resoldre els diferents moviments d'una mateixa màquina. Per exemple, en una pala excavadora, tant els cilindres lineals com els motors de la transmissió es poden moure simultàniament sense que s'observi a penes influència d'uns en els altres.

Els límits d'utilització d'un sistema de control oleohidràulic es poden xifrar en termes de certs paràmetres significatius, entre els quals hi ha, per exemple, el nivell d'esforços a realitzar, la precisió de la posició o el control fi de la velocitat i la regularitat del moviment. El control automàtic de l'acceleració, de la velocitat de desplaçament i de la frenada d'un cilindre oleohidràulic es pot fer avui dia mitjançant sistemes intel·ligents de control, implementats en PC o PLC de sèrie, i l'ús d'elements proporcionals.



	Avantatges	Inconvenients
Generació de potència	<p>És acumulable, encara que de manera limitada, mitjançant acumuladors hidropneumàtics.</p> <p>És transportable a distància, encara que localment i a velocitats limitades a 6 m/s.</p> <p>És limitable i regulable.</p>	<p>És de cost elevat.</p> <p>És bruta i tòxica, sempre que es trobin fluids de fluid hidràulic.</p> <p>No és antideflagrant.</p>
Generació de moviments lineals i rotatius	<p>És possible amb tecnologia simple i fàcilment interpretable mitjançant components de petites dimensions i elevada precisió.</p> <p>Desenvolupa forces i parells molt grans, amb una elevada relació potència desenvolupada/pes.</p> <p>Permet grans velocitats de moviment i de gran rang (des d'uns pocs mil·límetres fins a diversos metres per segon).</p> <p>És fàcilment regulable en velocitat, tant lineal com angular.</p> <p>Es disposa d'elements (vàlvules) per protegir el sistema enfront de sobrecàrregues.</p>	<p>Els actuadors lineals i els motors són elements molt simples, que poden induir relació en els usuaris i en els instal·ladors.</p> <p>Durant la fase de muntatge dels cilindres, cal tenir especial cura amb les subjeccions, guardant una estricta alineació amb la càrrega, i amb la presència d'esforços radials.</p> <p>En la selecció o el disseny d'un actuator lineal, s'ha d'estudiar la necessitat d'amortiment extern i cuidar la tija enfront de sol·licitacions a vinclament.</p> <p>La seguretat en l'ús d'un motor es pot veure compromesa si no es preveu la possibilitat d'emprar frens externs o vàlvules de frenada. Cal tenir una especial cura amb el motor que treballi en buit o amb capacitats petites en unitats de cilindrada variable.</p>

Taula 6.1. Avantatges i inconvenients d'un sistema de transmissió d'energia oleohidràulic.

Un STEO es pot dividir en tres seccions: d'entrada, de sortida i de control. La secció d'entrada rep l'energia del motor elèctric, de combustió interna o turbina, i la converteix en energia hidràulica. El component característic d'aquesta secció és la bomba hidràulica de desplaçament positiu (v. tema 3.5), tot i que hi ha algunes aplicacions singulars que fan servir bombes centrífugues pel seu menor cost. La secció de sortida rep l'energia transmesa i la transforma en energia mecànica, lineal o rotativa, mitjançant actuadors lineals, rotatius i motors. Aquests components són capaços de proporcionar potència, esforç i moviment, a sistemes automatitzats, màquines i processos, utilitzant l'energia d'un fluid a pressió. La secció de control modula l'energia hidràulica procedent de la secció d'entrada i la lliura eficientment a la secció de sortida fent servir vàlvules de pressió i cabal, i distribuïdores.

6.2 Fluids hidràulics i selecció

La selecció i la cura del fluid oleohidràulic són primordials per al bon funcionament i la durada dels components oleohidràulics. La utilització d'un fluid oleohidràulic té, fonamentalment, quatre finalitats:



- ser el mitjà transmissor d'energia;
- lubricar els components que constitueixen el sistema;
- dissipar la calor generada en el sistema;
- minimitzar les fuites (mitjançant greixos).

A més d'aquestes funcions, s'exigeix que el fluid oleohidràulic compleixi altres requeriments de qualitat, com ara:

- impedir la corrosió i oxidació;
- reduir la formació d'escuma;
- impedir la formació de llots;
- mantenir la pròpia estabilitat per allargar la vida útil i reduir la freqüència de renovació;
- mantenir un índex de viscositat estable;
- mantenir-se en estat fluid;
- ser compatible amb els elements d'estanquitat;
- ser resistent al foc i a l'autoinflamació;
- no ser tòxic.

6.2.1 Tipus de fluids hidràulics

Els fluids utilitzats en instal·lacions hidràuliques han evolucionat des de principis del segle passat; s'ha abandonat l'aigua, a causa dels seus inconvenients innats, i s'ha substituït per olis d'origen mineral i sintètics. L'ús d'additius i d'olis sintètics és motivat per l'augment de la pressió d'aquests sistemes i pel treball en ambients amb el risc d'incendi.

Els olis minerals són d'origen petrolífer. Aquests olis tenen excel·lents propietats lubricants, antidesgast, anticorrosió i d'aïllament elèctric. A més, es poden filtrar sense problemes, cosa que els fa idonis en aplicacions industrials de llarga vida o de treball en zones d'alta contaminació. Totes aquestes propietats depenen de tres factors bàsics: el tipus d'oli cru utilitzat (parafínic, naftalènic o aromàtic), el mètode de refinament i els additius emprats.

Els olis sintètics apareixen com a conseqüència de la coneguda escassetat dels derivats petrolífers i de la necessitat d'obtenir prestacions millorades. Entre els tipus d'olis sintètics, destaquen els èsters, les silicones, els èters i els hidrocarburs halogenats. En l'actualitat, s'estan investigant fluids hidràulics biodegradables i d'origen vegetal.

Els lubricants i els olis industrials es classifiquen en l'ISO 6743-99:2002 per famílies, algunes de les quals es mostren a la taula 6.2. La família H –sistemes hidràulics– se subdivideix, al seu torn, segons les bases i propietats particulars en l'ISO 6743-4:1999, de què s'extreu la relació dels fluids que més es fan servir en sistemes hidràulics de la taula 6.3.



Lletra	Aplicació
A	Greixat sense recuperació
C	Engranatges
D	Compressors i bombes de fluids
E	Motors de combustió interna
F	Coixinets i embragatges
H	Sistemes oleohidràulics
N	Aïllament elèctric
P	Eines pneumàtiques
T	Turbines

Taula 6.2. Classificació dels lubricants i olis industrials, segons ISO 6743-99:2002. Lubricants, Industrial Oils and Related Products (Class L) -- Classification -- Part 99: General.

ISO-L	Descripció	Aplicacions típiques
HH	Oli mineral amb additius antioxidants i anticorrosius	Ús general.
HL	Oli HL amb propietats antidesgast millorades	Ús general, fins i tot en alta pressió.
HM	Oli HL amb IV millorat	Ús general, fins i tot en alta pressió i amb canvi de temperatura.
HR	Oli HM amb IV millorat	Ús general, fins i tot en alta pressió i amb oscil·lacions importants de temperatura. Minería.
HV	Oli sintètic sense propietats de resistència al foc	Segons la propietat especial.
HS	Oli HM amb additius anti stick-slip.	Màquina eina.
HG	Emulsions d'oli i aigua, amb un contingut usual superior al 80% d'aigua (80-98% típic)	És una mena de taladrina. Excel·lents propietats d'apagat de flama i cost molt baix. La seva temperatura d'utilització és molt limitada, és poc estable i s'evapora.
HFA	Emulsions d'aigua i oli W/O, amb un contingut usual inferior al 50% d'aigua (35-45% típic)	Excel·lents propietats d'apagat de flama i baix cost. En contra, té un baix poder lubricant i s'evapora. No és un fluid newtonià.
HFB	Solucions de polímers en aigua; per exemple, glicol aquós	Són dissolucions en aigua al 30%, aproximadament, en un polímer (per exemple, l'etilè-propilè-glicol). Accepten additius antidesgast i corrosió.



ISO-L	Descripció	Aplicacions típiques
HFC	Fluids sintètics sense aigua, basats en èsters fosfòrics. Líquids anhídrids	
HFD	Fluids hidràulics biodegradables. Triglicèrids (olis vegetals), èsters sintètics i poliglicols	
HE	Oli mineral amb additius antioxidants i anticorrosius	Ús general.

Taula 6.3. Classificació dels olis industrials de la família H, segons ISO 6743-4:1999. Lubricants, Industrial Oils and Related Products (Class L) -- Classification -- Part 4: Family H (Hydraulic Systems).

6.2.2 Criteris de selecció

L'elecció del fluid hidràulic a utilitzar en una instal·lació és crucial per al bon funcionament i la durada del sistema. Entre les característiques fonamentals que cal considerar hi ha la viscositat, els additius emprats i la temperatura de treball. Altres factors que cal tenir en compte en la tria del fluid són l'índex de viscositat, la compatibilitat amb els elements d'estanquitat i la miscibilitat del fluid amb d'altres.

La viscositat és una manera de mesurar la capacitat que té un fluid de fluir. Una viscositat massa elevada augmenta les pèrdues per fricció i dificulta l'aspiració de les bombes oleohidràuliques, però si és massa baixa pot no garantir-se la lubricació de les parts mòbils dels elements de treball i les vàlvules de regulació i distribució. Per això, els fabricants recomanen un interval de viscositats per als seus components, ja siguin vàlvules, actuadors o bombes.

Tipus de bomba	Grau ISO-VG			Viscositat màxima	Interval de viscositat recomanat
	32	46	68		
				[cSt]	[cSt]
Engranatges	60°C	70°C	80°C	6.000	10-70
Paletes	60°C	70°C	80°C	860	13-54
Pistons axials	60°C	70°C	80°C	220-1.000	12-65
Pistons radials	40°C	50°C	60°C	860	14-68

Taula 6.4. Viscositats i temperatures màximes de treball recomanades per als diferents tipus de bombes volumètriques. En general, l'interval útil de viscositats s'escurça amb els fluids en base aigua. S'ha de prendre només com a referència. Consulteu la informació tècnica de cada fabricant.



Els additius o dopants es fan servir per millorar alguna o diverses de les propietats dels olis hidràulics. Hi ha additius per a tot, malgrat que se solen seleccionar per augmentar l'estabilitat, reduir el desgast, evitar la corrosió o la formació de llots. La quantitat màxima d'additius que es pot afegir depèn de la mena d'oli, però no és convenient que superi el 20% del volum total. Cal tenir en compte que els additius són molt àvids d'humitat¹ perden les seves propietats amb l'ús i, quan envelleixen, també es poden separar de l'oli i precipitar. L'oli, amb additius o sense, s'ha de mantenir estable durant tot el temps previst de funcionament útil i mantenir les característiques antifricció, antidesgast, de viscositat, etc., especificades inicialment.

La temperatura afecta la majoria de les propietats fisicoquímiques dels fluids. Aquest conflicte és especialment delicat amb la viscositat, perquè hi ha una temperatura de treball òptima per a cada fluid. Un sistema hidràulic no hauria de funcionar mai a temperatures superiors als 65°C, perquè la velocitat de degradació de les propietats de l'oli augmenta ràpidament a partir d'aquesta temperatura. Una altra qüestió interessant que cal tenir en compte és la variació de la temperatura durant el funcionament del sistema. Quan augmenta la temperatura, la viscositat disminueix, això fa que un fluid massa calent tingui tendència a fluir amb massa fluïdesa i augmentin les fuites. En el sentit oposat, les pèrdues de pressió augmenten i sorgeixen problemes de lubricació, cosa que pot ser un problema quan s'arrenca un sistema en fred i justifica l'ús d'escalfadors. Com a norma general, un oli mineral no s'ha de fer servir mai a temperatures inferiors a 10°C per sobre del seu punt de congelació, perquè la temperatura mínima d'arrencada està relacionada amb el límit de fluència del fluid.

L'índex de viscositat (IV) serveix per a relatar com canvia la viscositat d'un fluid amb la temperatura. Aquest índex és més alt com més petita és aquesta variació, de manera que IV elevats impliquen la constància de la viscositat en l'interval de temperatura utilitzat. Tot i que, a l'origen, l'IV estava restringit a valors entre 0 i 100, avui dia són possibles olis d'IV superior a 100 gràcies als additius.

La incompatibilitat de l'oli o d'algun dels seus additius amb els elements destinats a garantir l'estanquitat dels components és crítica. Respecte de la miscibilitat, és evident que barrejar dos olis immiscibles entre si provocaria un desastre de dimensions catastròfiques. En general, és fonamental no barrejar dos olis encara que siguin del mateix origen, com tampoc és convenient emplenar amb el mateix oli, encara que sigui nou, el dipòsit quan s'ha perdut el nivell inicial.

Material	Propietats i aplicacions	T [°C]
Buna-N (Nitril/NBR)	Bona resistència a fuels, hidrocarburs i alcohols. Compatible amb aigua i greixos. Sistemes de transmissió amb olis naturals. Gran varietat de composicions per a aplicacions específiques.	-40, 120



Material	Propietats i aplicacions	T [°C]
Viton® (Fluorocarboni)	Excel·lents resistència tèrmica i química, i propietats mecàniques. Baixa permeabilitat a gasos. Equips de buit. Suporta àcids, fuels i dissolvents.	-25, 200
Silicona	Sense olor i no tòxica. Resistent al sol i a l'ozó. Escassa resistència als olis. Calor seca. Sistemes elèctrics, mèdics i sanitaris.	-60, 90
EPDM/EPR (Etilè propilè)	Resistència a la llum del sol i a l'ozó. Escassa resistència als fuels i als derivats del petroli. Bona resistència a la calor i a la compressió. Vapor i aigua calenta. Sistemes hidràulics de fre. Suporta alcohols i greixos.	-50, 120
Neoprè	Bona resistència als olis minerals. Bona resistència a les inclemències ambientals i l'exposició a la llum solar i a l'ozó. Juntes de refrigeració. Compatible amb freó en sistemes de condicionament.	-40, 105
Fluorosilicona	Mescla de vitó i silicones. Sistemes de fuel d'aviació. Gasolines. Olis minerals i sintètics.	-60, 175
PTFE (Tefló)	Excel·lent rang de temperatura. Sota coeficient de fricció. Baixa elasticitat.	-150, 225
Poliuretà (Uretà)	Elevada resistència a l'ozó, l'oxidació i l'abrasió. Sistemes d'estanquitat amb oli mineral. Juntes tòriques.	-50, 90
HSN/HNBR (Highly saturated nitrile)	Excel·lent resistència a l'abrasió. Resistència a les inclemències ambientals i l'exposició a la llum solar i a l'ozó. Juntes tòriques i d'altres per a olis minerals, aigua, silicones, etilè i amines.	-40, 150

Taula 6.5. Propietats generals i aplicacions comunes de diversos materials de junta.

6.3 Actuadors hidràulics

El terme *actuadors hidràulics* es fa servir en aquells components mecànics destinats a transformar l'energia hidràulica de pressió i cabal en treball mecànic, en l'etapa de sortida d'un STEO. Segons la forma com es lliura el treball, els actuadors poder ser:

- Actuadors lineals o cilindres, la potència mecànica dels quals es defineix pel producte de la força i la velocitat lineals.
- Actuadors rotatius i motors, la potència mecànica dels quals es defineix pel producte del parell i la velocitat angular.



6.3.1 Actuadors lineals

El cilindre hidràulic és l'element final dels sistemes de transmissió d'energia oleohidràulica en aquelles aplicacions en què és necessari reconvertir l'energia hidràulica en mecànica lineal. La seva concepció tecnològica bàsica és la CET (camisa-èmbol-tija) i el recorregut útil total possible del cilindre s'anomena *carrera*. En la figura adjunta, es pot veure un tall longitudinal d'un actuator lineal de doble efecte i la seva simbologia.

L'èmbol o pistó es desplaça per l'interior de la camisa per l'acció de l'oli a pressió, per una molla o pel pes propi o el de la càrrega. Es diu que el moviment d'un cilindre és en règim permanent quan la velocitat es manté constant, sent, llavors:

$$\dot{x} = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_2}{A_2} \quad [6.1]$$

El règim permanent és una situació de funcionament que no es dona durant tota la carrera del cilindre a causa de les etapes d'acceleració en l'arrencada i en el frenat del moviment. Els esforços que es poden generar durant el frenat són tan elevats que gairebé sempre es fan servir mitjans per a l'amortiment, ja siguin interns o externs al cilindre. En general, l'amortiment és convenient per a velocitats de translació més grans que 0,1 m/s, i fins i tot més petites, si la massa arrossegada és considerable.²

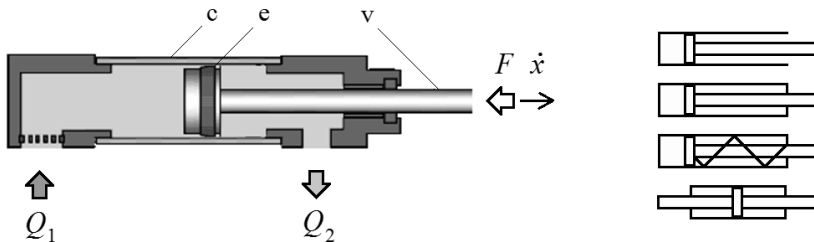


Figura 6.1. Tall longitudinal (esquemàtic) d'un cilindre hidràulic de doble efecte i principi de funcionament. A1 i A2 són les àrees rectes de l'èmbol i de la secció anular formada entre l'èmbol i la tija, és a dir, les àrees de treball de l'avantcambra i de la postcambra de l'actuator, respectivament. El cabal d'entrada a l'actuator és Q1 i el que en surt és Q2. A la dreta, diversos símbols d'actuadors lineals. De dalt a baix: de simple efecte i retorn sense molla, de doble efecte no esmorteït, de simple efecte amb molla i de doble tija.

Sobre el cilindre hidràulic de doble efecte de la figura 6.1 en moviment d'avançament, l'equació d'equilibri dinàmic s'expressa:

$$p_1 A_1 = p_2 A_2 + F + ma + F_f \quad [6.2]$$

En absència de fregaments, l'èmbol avançarà si la força de pressió, $p_1 A_1 - p_2 A_2$, és superior a la força exterior aplicada a la tija, F , fent retrocedir el seu punt d'aplicació.



Observem que la presència de la tija fa que el cilindre sigui asimètric sempre que la relació d'àrees $\varphi = A_2/A_1$ sigui diferent de la unitat. Això és, les pressions que es necessiten per obtenir el mateix esforç durant les carreres de sortida i d'entrada són diferents. Aquesta asimetria també fa diferents els cabals que entren al cilindre i en surten, segons [6.1], de manera que la diferència entre tots dos és el volum de tija que entra a la camisa o en surt per unitat de temps.3

La varietat d'aplicacions que utilitzen un mateix principi de funcionament fa que es creïn múltiples dissenys d'actuadors lineals: monotija, èmbol amb tija en cada extrem, sense tija, èmbol fix i cilindre mòbil, telescòpics, diferencials, etc. Predomina l'ús de l'èmbol de secció circular amb camisa tubular circular, per raons econòmiques i de manteniment.

En general, els actuadors hidràulics toleren condicions molt adverses de treball, com ara altes temperatures o ambients polsosos, i són de fàcil neteja i manteniment. De qualsevol manera, per portar a bon terme tècnicament i econòmicament el disseny d'un cilindre hidràulic, convé atènyer-se a les normes i recomanacions existents, perquè aporten l'experiència i l'economia necessàries en la fabricació i el manteniment dels equips industrials.

6.3.2 Motors oleohidràulics

Els motors oleohidràulics reconverteixen l'energia hidràulica en mecànica rotativa de gir continu. En un motor hidràulic, l'oli a pressió força el moviment del seu mecanisme intern fent girar l'eix de sortida. Els motors poden ser bidireccionals o unidireccionals, és a dir, reversibles o no reversibles, i els seus principals dissenys coincideixen amb els de les bombes oleohidràuliques de desplaçament positiu. Per tant, hi ha motors d'engranatges, de paletes, de pistons, etc.

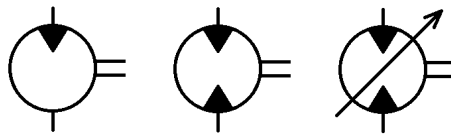


Figura 6.2. Símbols de motors hidràulics. D'esquerra a dreta: no reversible, reversible i reversible de cilindrada variable.

Es pot dir que els motors són bombes que treballen en sentit invers. De fet, són moltes les bombes hidràuliques de desplaçament positiu que poden treballar com a motors sense tot just canvis. No obstant això, com s'explica en el tema 3.5, s'han de prendre algunes precaucions a l'hora de fer servir una bomba com a motor.

La relació funcional que s'observa entre el cabal i les revolucions de sortida és, en cas que no presenti fuites d'oli (unitats del SI):



$$\omega = \frac{Q}{C_v} \quad [6.3]$$

El parell lliurat a l'eix de sortida es correspon amb l'expressió:

$$M = C_v(p_e - p_s) \quad [6.4]$$

en què tampoc s'han considerat les pèrdues de parell que tenen lloc. Aquestes pèrdues es descriuen en funció del rendiment corresponent de manera anàloga en el cas de les bombes volumètriques, però tenint en compte que aquí la potència lliurada és mecànica, mentre que la d'entrada és hidràulica. Més endavant (a l'apartat 6.6.2), es descriuen aquests rendiments.

Els motors hidràulics són actuadors molt robustos i d'una relació potència/pes molt elevada. El nivell d'esforços (parell motor) que poden fer és molt elevat i la seva velocitat de gir és gairebé insensible a la càrrega. Els motors oleohidràulics són molt usats en la maquinària industrial, en els sistemes d'injecció de plàstic i en la tracció de vehicles d'obres públiques. Aquests motors no tenen rival en les aplicacions en què es requereixin parells espectaculars a baixes velocitats, com per exemple les perforadores de túnels.

Motor	Cilindrada	Pressions màximes	Parell màxim	Interval de revolucions
	[cm ³ /rev]	[bar]	[Nm]	[rpm]
Engranatges	2÷150	250	400	300÷6.000
Gerotor	8÷900	225	8.000	10÷5.000
Paletes	50÷2.500	200	70.000	50÷4.000
Pistons	10÷9.500	450	150.000	1÷12.000

Taula 6.6. Valors típics de les característiques principals dels motors hidràulics (valors de referència que inclouen les prestacions de motors lents i ràpids).

6.4 Vàlvules de control i regulació

En una instal·lació oleohidràulica, l'oli impulsat per la bomba arriba als actuadors a través d'una sèrie de conductes i de diferents vàlvules. Les vàlvules són els elements que permeten regular la pressió, el cabal o la direcció del flux.

El govern de la velocitat o de l'esforç que es pretén exercir mitjançant un actuator depèn del control de dos factors: la pressió i el cabal. El control de la pressió afecta el nivell d'energia potencial del fluid a l'interior del sistema i el del cabal s'aconsegueix regulant la quantitat de fluid que passa per un punt per unitat de temps. Totes dues regulacions es poden fer de manera indistinta i independent entre si a causa de l'alta



incompressibilitat del fluid. El producte de la pressió⁴ i el cabal és la potència hidràulica transferida pel fluid en un STEO. El producte de la força o del parell per la velocitat, lineal o rotativa, és la potència mecànica lliurada per l'accionament.

Les vàlvules de control direccional de diverses vies es fan servir en hidràulica per dirigir el fluid cap a diferents direccions, sense obligar-lo a recórrer llargues distàncies de retorn. Aquestes vàlvules permeten l'obertura o el tancament de diferents vies de pas i s'accionen mitjançant un comandament que pot ser manual, pneumàtic, hidràulic, electromagnètic, etc.

6.4.1 Vàlvules de pressió

Les vàlvules reguladores de pressió duen a terme dues missions fonamentals en els sistemes de transmissió d'energia oleohidràulica:

1. Limitar la pressió de treball en un punt del circuit, impedit que se sobrepassi un valor prescrit de pressió o causant un efecte determinat quan s'aconsegueix, sigui per raons de seguretat, sincronisme o control. Aquestes vàlvules estan normalment tancades en repòs.
2. Reduir la pressió en certs trams del sistema per complir amb algun requisit de càrrega. Aquestes vàlvules estan normalment obertes en repòs i poden ser de pressió constant a la sortida o de diferència de pressió constant. En aquestes últimes, la pressió a la sortida segueix proporcionalment la pressió d'entrada.

L'ús extens de les vàlvules de pressió, tant de les limitadores com de les reductores, ha originat l'aparició d'altres denominacions amb el pas del temps que descriuen la funció que fan de manera més específica, però que queden englobades en les anteriors. Així, són vàlvules limitadores les de seguretat, descàrrega, seqüència i contra-pressió. La taula 6.7 resumeix i classifica les diferents vàlvules de pressió.

Les vàlvules reguladores de pressió són vàlvules de dues vies principals el principi de funcionament de les quals és bastant semblant en totes. Per norma general, utilitzen un pistó intern sensible a la pressió o a les pressions que actuen sobre els seus ports, de manera que la seva funció depèn de com es connecti la vàlvula al circuit o de com es facin servir les vies auxiliars de pilotatge i drenatge de la vàlvula.

La línia auxiliar de pilotatge és un conducte pel qual es transfereix la pressió del circuit a la vàlvula i que en causa l'obertura o tancament segons el principi de funcionament corresponent. El pilotatge es pot prendre de l'interior de la vàlvula o d'un punt llunyà (pe). La línia auxiliar de drenatge s'utilitza per evacuar el petit volum d'oli desplaçat pel pistó intern de la vàlvula. El drenatge es pot fer internament o externament (de), és a dir, fent servir la pròpia via de sortida de la vàlvula (especialment, si va connectada al tanc) o un conducte extern col·locat *ex profeso*. La seva



importància pot semblar, a priori, menor o de menys rellevància que la línia de pilotatge, però pensem que el pistó intern no es mouria si l'oli retingut no es drenés.

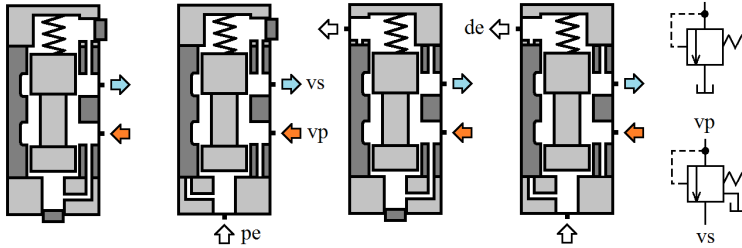


Figura 6.3. Principi de funcionament de les vàlvules reguladores de pressió de simple efecte per corredora i símbols d'una vàlvula de seguretat (a dalt) i una altra de seqüència (a baix). Són visibles les vies de pilotatge i drenatge, internes i externes, i d'entrada i sortida de la vàlvula (vies principal, vp, i secundària, vs, respectivament). D'esquerra a dreta: de seguretat o simplement limitadora, de descàrrega, de seqüència, i vàlvula amb pilotatge i drenatge externs. Les quatre funcions s'obtenen girant les tapes 180° en l'eix vertical i canviant la posició dels taps.

	Vàlvula equilibrada	Connexió		Pilotatge		Drenatge		Repòs	
		Seèrie	Paral·lel	Intern	Extern	Intern	Extern		NC
Seguretat	SÍ			E			P		
Descàrrega	NO						P		
Seqüència	SÍ			E	P				
Contrapressió	SÍ			E			P		
Reductora (p cte.)	SÍ			S					

Taula 6.7. Classificació de les vàlvules de pressió segons la mena de connexió, les línies de pilotatge i drenatge, i la seva posició en repòs. La vàlvula de descàrrega és una vàlvula de seguretat amb pilotatge extern. NC significa normalment tancada. E i S indiquen si el pilotatge es pren de la línia d'entrada o sortida de la vàlvula. P indica que l'opció és possible, de vegades, sense modificar el principi de funcionament.

6.4.2 Vàlvules de cabal

Les vàlvules reguladores de cabal poden ser compensades i no compensades en pressió, i ajustables i no ajustables des de l'exterior. Les vàlvules compensades poden ser de dues vies i de tres, i són capaces de mantenir el cabal de la línia aproximadament constant davant els canvis en la pressió de treball.

En els sistemes oleohidràulics de control de velocitat dels actuadors, es requereix mantenir un cabal constant a través de la vàlvula de control. Les vàlvules no compensades en pressió o estranguladores són, bàsicament, restriccions al pas del fluid en què el cabal només es manté constant si ho és la pèrdua de pressió a través seu i



sempre que no canviï substancialment la viscositat del fluid. Qualsevol variació de la càrrega aplicada sobre l'actuador indueix un canvi en la diferència de pressió a través de la vàlvula que afectaria el cabal i que s'ha de compensar de manera manual actuant sobre el comandament de regulació.

S'han d'emprar vàlvules compensades quan cal que les variacions en la pressió de treball no afectin el cabal regulat. El principi bàsic que justifica la compensació és semblant per a les vàlvules de dues vies i de tres, i consisteix a associar a un escanyament ajustable (o fix) un de segon, anomenat *hidròstat*, capaç de variar la secció de pas del flux en funció de les variacions de la pressió de càrrega. Aquesta estratègia garanteix que el cabal no variï significativament perquè aconsegueix mantenir gairebé constant la pèrdua de pressió a través de l'estrangulador ajustat. Aquesta habilitat en la compensació permet un control del cabal que oscil·la prop del 5% en condicions de pressió variable. En resum, un regulador de cabal compensat és un dispositiu compost per:

- un orifici, regulable o no, que controla el cabal
- un hidròstat, normalment format per un pistó compensador, adaptable segons les variacions de pressió entre l'entrada i la sortida de la vàlvula.

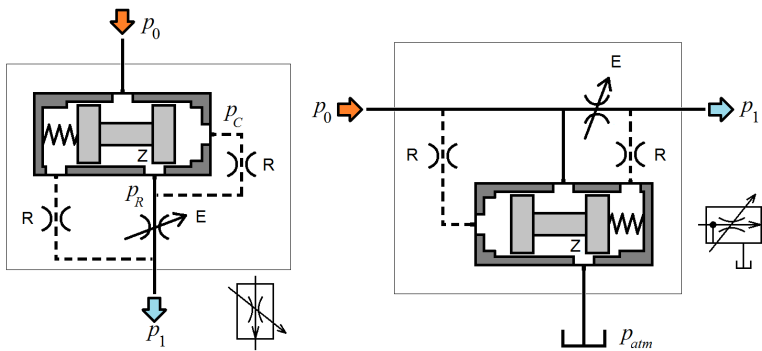


Figura 6.4. Esquema típic de vàlvules reguladores de cabal, de dues vies i de tres, i símbol corresponent. La regulació de velocitat es fa en un sol sentit si s'incorpora una vàlvula antiretorn en paral·lel. La tria dels estranguladors R d'aquestes vàlvules és una qüestió crítica per garantir la seqüència correcta, i l'ordre i la magnitud adequats dels processos (pressuritzacions RC, moviments I/R i IC) que garanteixen el funcionament estable del hidròstat.

El regulador de cabal de dues vies es pot emprar en derivació o en sèrie. Si es fa servir en sèrie, el cabal sobrant s'haurà d'eliminar a través d'algun altre element, com una vàlvula reguladora de pressió, a una pressió superior a la màxima a la que pugui arribar p_1 . També estan disponibles vàlvules de dues vies amb una vàlvula de seguretat integrada en el mateix cos (cosa que no les converteix en vàlvules de tres vies). El principi de funcionament d'aquesta mena de vàlvula es dedueix sense problemes de l'esquema de la figura 6.4. Per al regulador de dues vies, si per qualsevol causa la



pressió p_0 augmenta, també augmentarà p_R i, en conseqüència, p_C . Després d'això, la corredora es desplaçarà a l'esquerra i escanyarà més el pas Z, i compensarà l'augment de p_0 amb una caiguda de pressió més gran. De manera anàloga, si p_0 disminueix, la corredora es desplaçarà en el sentit de disminuir la pèrdua de pressió en Z. Aquesta anàlisi també és vàlida per a canvis en p_1 .

El funcionament d'una vàlvula compensada de tres vies és equivalent a la de dues vies, però amb la diferència que el cabal sobrant és desviat al dipòsit a través del regulador Z, no a través d'una vàlvula limitadora. Això fa que el seu ús estigui indicat en sistemes en què s'estima un consum de potència excessiu i també quan l'interval de regulació és molt ampli. La descàrrega del cabal sobrant és a p_0 , pressió pròxima a la de treball real, ja que la caiguda de pressió pel regulador E és de l'ordre de 3 bar. La corredora està equilibrada per la pressió p_0 , d'una banda, i la combinació de la molla i la pressió p_1 , de l'altra. S'entén que aquestes vàlvules no es poden fer servir en paral·lel per la seva pròpia concepció.

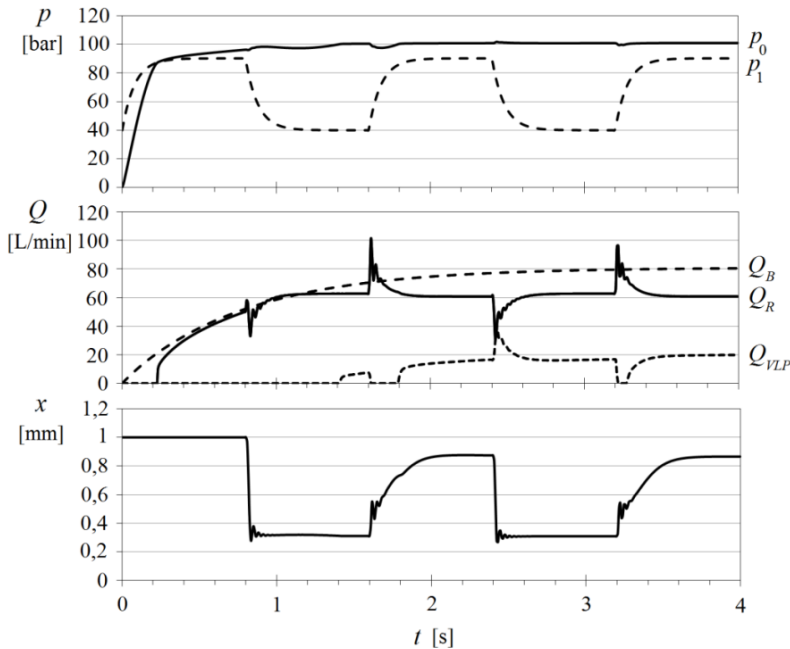


Figura 6.5. Representació temporal de la regulació de cabal obtinguda per una vàlvula compensada de dues vies. Q_R és el cabal regulat, i Q_B , el de la bomba (que es posa en marxa en $t = 0$). La pressió en impulsió de la bomba, p_0 , augmenta fins a obrir la limitadora a 100 bar i evacuar l'excés de cabal, Q_{VLP} . La posició de l'hidròstat, x , varia amb la pressió p_1 , a fi de mantenir el cabal regulat pràcticament constant.

Una modificació interessant de les vàlvules de tres vies són les vàlvules de prioritat, que utilitzen la tercera via per a l'alimentació d'un circuit secundari. El cabal no necessari en el circuit primari (l'usual de la vàlvula de tres vies) és derivat al secundari a través d'un *bypass*. Les vàlvules de prioritat s'utilitzen quan una sola bomba ha de



subministrar cabal a dos circuits o més, un dels quals és prioritari (per exemple, en l'alimentació de motors per a bombes de refrigeració, sistemes de fre o de direcció assistida, etc.), i quan les altres funcions es poden esperar, per raons d'urgència o seguretat.

6.4.3 Vàlvules de control direccional

Les vàlvules direccionals permeten controlar el sentit de moviment dels actuadors oleohidràulics. Aquestes vàlvules estan formades per una sèrie de vies que es connecten amb cadascun dels seus ports segons la posició de treball, i s'identifiquen pel nombre de vies i posicions possibles, com a vàlvula 2/2, 3/2, 4/2, 4/3, etc.

Una vàlvula antiretorn és una vàlvula direccional de dues vies i dues posicions, pilotada per les pressions a entrada i sortida. Aquesta vàlvula permet el pas lliure de fluid en un sentit i l'impedeix en l'invers. La configuració clàssica d'una vàlvula antiretorn és la de vàlvula de seient amb una molla de collament, de manera que la pressió a l'entrada de la vàlvula aixeca el seient contra la molla. La contrapressió generada per la molla és de l'ordre de 0,4 a 0,7 bar si la vàlvula només ha de bloquejar el pas de fluid en flux invers, però pot ser més gran si la vàlvula ha de generar una contrapressió determinada.

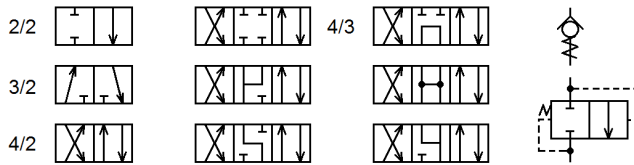


Figura 6.6. Diferents símbols de vàlvules de control direccional o distribuïdors. Observem les diferents posicions centrals de les vàlvules 4/3. A la dreta, dues representacions de vàlvula antiretorn.

Un distribuïdor és un selector direccional que confereix al sistema hidràulic la flexibilitat requerida pels actuadors. El canvi en direcció del fluid en una vàlvula es pot aconseguir de diferents maneres, per exemple, mitjançant el tancament o l'obertura d'un seient o el lliscament d'una corredora mecanitzada entre una camisa cilíndrica. Els ports de la vàlvula es designen mitjançant lletres, que, per norma general, són: P, el port d'entrada de pressió, connectat a la línia d'impulsió de la bomba; A i B, els ports de treball, que comuniquen la vàlvula amb l'actuador, i T, el port de retorn del fluid a tanc. Es diu que les vies actives són P-A, P-B, P-T, etc., segons la posició de treball triada.

La major part de les vàlvules direccionals es basen en el disseny en corredora. A la figura 6.7, es mostra el disseny base d'una vàlvula de control direccional 4/3 de centres tancats. A la figura superior, de repòs, la vàlvula està tancada i impedeix el pas de fluid cap a qualsevol de les vies. A la del mig, la corredora s'ha desplaçat cap a



l'esquerra, de manera que queda lliure el pas de fluid de la via P a la A, i de la B a la T. A la inferior, el desplaçament ha estat cap a la dreta i la via oberta és la P-B.

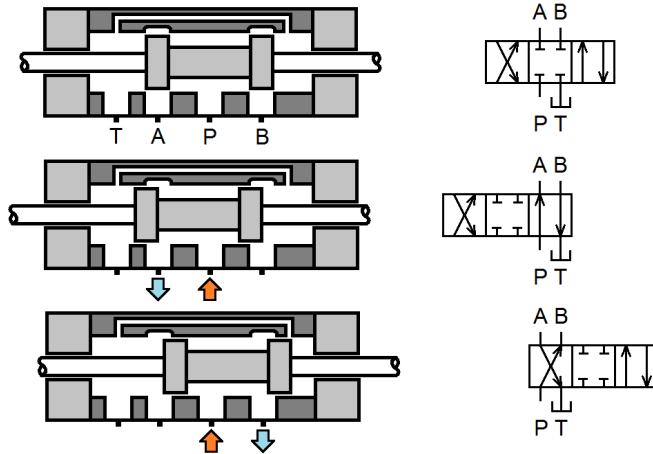


Figura 6.7. Vistes de les diferents posicions de la corredora en una vàlvula VCD 4/3 de centres tancats. La vista superior és la representació de la posició de repòs (símbol estàndard), per a la qual també són possibles altres posicions centrals (figura 6.6)

Aquestes vàlvules poden ser discretes (de tipus convencional) o contínues (de tipus proporcional), segons si el nombre d'estats possibles de treball és finit o infinit. El símbol corresponent d'una vàlvula proporcional o d'una servovàlvula es distingeix del d'un distribuïdor discret perquè té dues línies contínues que cobreixen el rectangle que defineix les posicions possibles de treball (v. figura 6.9). D'altra banda, la simbologia oleohidràulica és prou explícita i no necessita més comentaris.

La característica pressió vs. cabal no és comú per a totes les vies, com a conseqüència de les diferències constructives i de disseny existents. Per norma general, es pot ajustar una expressió del tipus $Q = f(x)C_q\Delta p^m$, per a cadascuna, en què Q és el cabal que travessa la via; Δp , la caiguda de pressió corresponent; $f(x)$, una funció inherent que depèn del grau d'obertura, x , de la vàlvula; C_q és el coeficient de cabal, que s'ha d'avaluar experimentalment, i m , un exponent que varia entre 0,5 (usual) i 1. A les vàlvules de control direccional convencionals, la funció $f(x)$ pren els valors 0 i 1 per a les posicions totalment tancada o oberta, respectivament. Els valors intermedis de la funció es fan servir en el modelatge de la dinàmica d'obertura i tancament, o quan es treballa amb vàlvules proporcionals o servovàlvules, en què aquesta funció es pot reemplaçar per una altra $g(i)$, o $g(u)$, que depèn de la intensitat o la tensió de comandament i de les osques mecanitzades sobre la corredora.

La configuració més estesa de VCD és la 4/3 monoestable, ja que permet l'accionament d'actuadors de doble efecte i garanteix una única posició de repòs. Aquesta posició central es tria sobre la base de cinc criteris principals:



- Tenir la bomba en descàrrega directa a tanc a través de la vàlvula quan no es requereix cap treball de l'actuador (estalvi d'energia).
- Mantenir pressuritzada la via de pressió de la bomba per reduir el temps de posada en marxa després de l'ordre de comandament (estalvi de temps).
- Bloquejar l'actuador (excepte per l'efecte de la petita fuga interna) o, al revés, mantenir-lo desbloquejat, de manera que es pugui moure exercint una força externa.⁵
- Garantir una única posició de repòs de l'actuador (actuador asimètric estès) quan la vàlvula estigui en la posició central.
- Alliberar la pressió de les vies A i B per permetre el funcionament d'antiretorns pilotats.

6.4.4 Tècnica proporcional enfront de convencional

En la tecnologia convencional, les vàlvules són elements que permeten controlar la pressió o el cabal actuant sobre un regulador manual. Les vàlvules de control direccional permeten controlar el sentit del moviment d'un actuador desplaçant l'element de control manualment o mitjançant electroimants. Com que el moviment de l'element de control —per exemple, una corredora— és tot o res, obert o tancat, les vàlvules VCD convencionals no permeten posicionar l'actuador o controlar-ne la velocitat de desplaçament (almenys no de manera fàcil i pràctica). Les aplicacions de l'oleohidràulica proporcional inclouen el control continu de la pressió o de la força, i el control del cabal o del volum o la posició.

En les vàlvules de pressió o cabal i en les VCD proporcionals, el comandament manual d'ajust o l'accionament de la corredora se substitueixen per un solenoide de tipus proporcional.⁶ En una servovàlvula, el control proporcional s'exerceix mitjançant un motor de parell i, a més, la posició de la corredora es realimenta de manera que l'acció de comandament s'anul·la quan s'aconsegueix la posició desitjada (aquest és el principi "servo"). Tant en les vàlvules VCD proporcionals com en les servovàlvules, la secció de pas es pot regular a voluntat i, per tant, el cabal i la pèrdua de pressió efectiva que hi ha es podran controlar en funció de la posició de l'element de control. En aplicacions de potència elevada i, sobretot, en sistemes de comandament de motors hidràulics i en transmissions hidràuliques, el rendiment es pot millorar fent servir servobombes. En funció de la mena de disseny, una servobomba permet controlar la potència lliurada, el parell o les revolucions del motor, és a dir, la pressió o el cabal lliurat, actuant sobre la seva capacitat volumètrica o les revolucions.

Les vàlvules proporcionals són components electrohidràulics de control continu que es caracteritzen per la seva alta precisió i per la rapidesa de resposta, que transformen un senyal elèctric de baixa o mitjana potència en un senyal hidràulic de sortida d'alta



potència. Les vàlvules proporcionals poden ser d'accionament directe, amb realimentació en posició o sense, i d'accionament indirecte o per etapes. L'etapa pilot tipus pot ser una altra vàlvula proporcional, una limitadora de pressió, una reductora o un amplificador fluidic (en aquest cas, es tractaria d'una servovàlvula). La configuració bàsica d'un sistema proporcional oleohidràulic és del tipus que es mostra en la figura 6.8.

Des del moment en què el senyal de sortida del component respon seguint un senyal d'entrada electrònica, s'obren infinites possibilitats per a la millora del control i de la robustesa dels sistemes electrohidràulics. La regulació dels sistemes es pot efectuar mitjançant tècniques en llaç obert o en llaç tancat que actuen elèctricament sobre l'element de control hidràulic. Els sistemes de regulació en llaç tancat modifiquen el senyal de comandament en funció de l'estat del sistema, de manera que se n'augmenta la precisió i flexibilitat. Avui dia, és usual que el control de les màquines es faci per reguladors digitals, que simplifiquen encara més la interfície entre el sistema hidràulic i el regulador electrònic digital (tipus PC, per exemple). D'altra banda, la tècnica proporcional redueix la circuiteria hidràulica necessària, tal com s'observa als esquemes de la figura 6.9.

Amb la vàlvula VCD convencional de l'esquema de l'esquerra de la figura 6.9, es pot accionar un actuador hidràulic en tots dos sentits, però per regular la velocitat del desplaçament cal utilitzar una vàlvula reguladora de cabal compensada per a cadascun, o bé una bateria de vàlvules no compensades en paral·lel. Si, a més, es pretén facilitar la regulació a l'operari des d'una posició assequible i segura, les vàlvules de regulació s'han d'instal·lar en un armari de control, que pot estar certament distant de l'aplicació hidràulica. Fent servir la tècnica proporcional, n'hi hauria prou amb una sola vàlvula de cabal per sentit o una vàlvula VCD proporcional, que conjuminaria les funcions de control del sentit del moviment i de la velocitat (a més, la regulació no estaria restringida a una quantia discreta de cabals). En aquest últim cas, i atès que el senyal elèctric de comandament es gestiona electrònicament, el ritme de canvi de la velocitat i els transitoris del moviment es poden governar mitjançant l'ús de rampes per limitar l'acceleració o la desacceleració de l'actuador. El control de tot el procés es continua fent a l'armari de maniobra, però com que ara els senyals són elèctrics, no cal conduir canonades de pressió fins a l'aplicació.

El cabal nominal d'una vàlvula proporcional es defineix com el cabal que la travessa en condicions d'assaig normalitzades, en què l'alimentació es realitza amb el senyal de comandament nominal, i_N o u_N , a una pressió Δp_N de 70 bar, i les vies A i B de la vàlvula es comuniquen mitjançant una connexió en "U". El cabal per la vàlvula en altres condicions de treball es relaciona amb la condició nominal mitjançant l'expressió:7

$$Q = Q_N \left(\frac{i}{i_N} \right)^k \left(\frac{2\Delta p_{ij}}{\Delta p_N} \right)^{1/2} \quad [6.5]$$



en què l'exponent "k" depèn de la mena d'osca de la vàlvula, i és "1" per a l'osca rectangular i "2" per a la triangular.

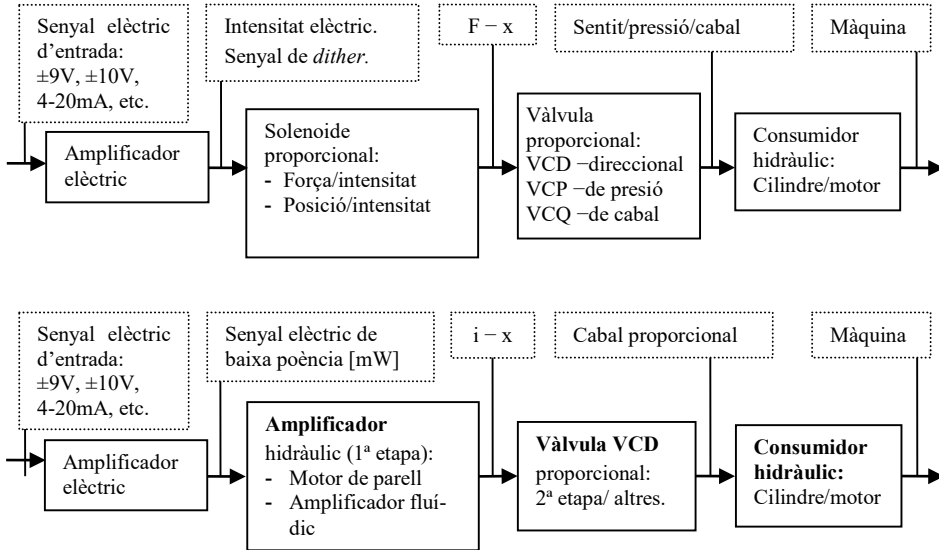


Figura 6.8. Esquema de blocs de la connexió d'una vàlvula proporcional (a dalt) i d'una servovàlvula (a baix). El mode d'operació de les vàlvules de pressió i cabal proporcionals és similar al de les convencionals, només substituint el regulador manual per un electroimant proporcional. Les vàlvules de pressió proporcionals es poden utilitzar com a etapa pilot o com a hidròstat en vàlvules de cabal.

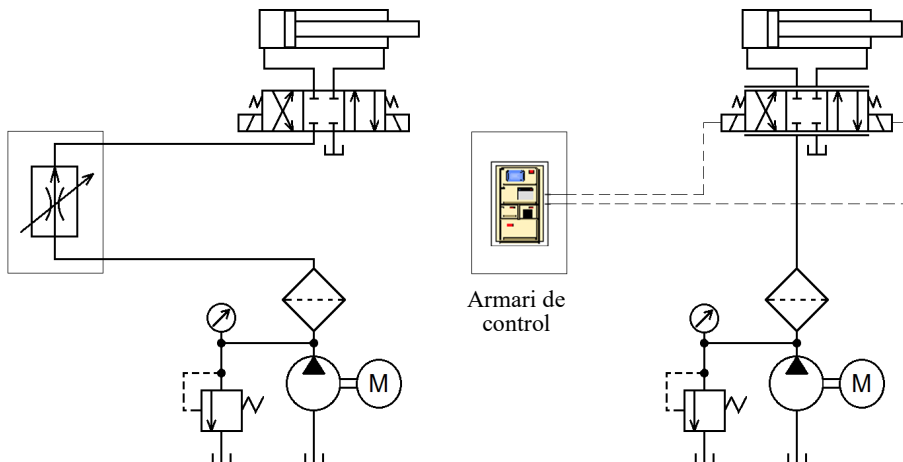


Figura 6.9. A l'esquerra, l'esquema hidràulic que utilitza una vàlvula VCD convencional i una VRQ per controlar el sentit i la velocitat de l'actuador (hi faltaria un antiretorn, v. figura 6.18). A la dreta, l'esquema hidràulic que utilitza una vàlvula VCD proporcional per controlar tant el sentit com la velocitat de l'actuador. El senyal elèctric que es transmet entre l'armari i la VCD proporcional és de baixa potència (aquest cablejat també existeix en la tècnica convencional, encara que no es mostri en la figura).



6.5 Dispositius auxiliars

Si bé la missió principal d'un sistema hidràulic es pot assegurar mitjançant bombes, vàlvules i actuadors, l'oli hidràulic s'ha d'emmagatzemar i condicionar perquè el sistema funcioni de manera adequada. Aquestes funcions les duen a terme, principalment, els dipòsits, els filtres, els bescanviadors i els acumuladors d'aquest apartat. En una instal·lació oleohidràulica, també es fan servir altres elements auxiliars, com els manòmetres, els pressòstats, els cabalímetres, els termòmetres i les vàlvules de ventilació, entre d'altres.

6.5.1 Dipòsits

Els dipòsits són imprescindibles en totes les instal·lacions hidràuliques, perquè emmagatzemen l'oli del sistema. L'elecció del dipòsit no s'ha de considerar de menys importància ja que, a més d'aquesta funció d'emmagatzematge, el seu disseny i la seva grandària influeixen bastant en el funcionament de l'equip hidràulic.

Els dipòsits compleixen diverses funcions, entre d'altres:

- Emmagatzemar el fluid requerit pel sistema i proveir l'oli necessari durant l'ompliment inicial.
- Compensar les fluctuacions de nivell que resulten del moviment dels actuadors asimètrics i de les fuites externes.
- Dissipar la calor generada.
- Oferir a l'oli prou temps de residència perquè s'airegi i perquè els contaminants es dilueixin i dipositin en el fons.

No és difícil trobar en el mercat dipòsits dissenyats de manera estàndard conforme a la normativa. Aquests dipòsits contenen, segons demanda, els accessoris i dispositius de subjecció indispensables, i es deixa a criteri de l'usuari l'elecció del tipus (si és pressuritzat o no), la seva grandària i volum, i també la forma i ubicació en el sistema. Si s'ha de construir un dipòsit a mida, s'ha de tenir en compte que cal:

- Incorporar-hi a dins una barrera física, mitjançant una mampara, amb una xapa perforada, etc., que impedeixi que l'oli de retorn sigui succionat immediatament per la bomba. La barrera també redueix el nivell de turbulència.
- Incorporar-hi un punt d'ompliment i buidatge del sistema. El fons dels dipòsits ha d'estar inclinat cap al tap de drenatge per facilitar-ne el buidatge.
- Allotjar-hi altres accessoris, com ara un termòmetre; un tap filtrorespirador; un filtre colador d'aspiració; l'escalfador per resistència elèctrica, en el seu cas; indicadors visuals o elèctrics de nivell de fluid, i d'altres.



- De vegades, servir d'estructura de suport per a la construcció de la unitat hidràulica, el motor elèctric, la bomba, els filtres de pressió i de retorn, etc., i, en cap cas, ingerir contaminació addicional de l'entorn.

El tipus de dipòsit més freqüent és el no pressuritzat. Aquest dipòsit està a pressió atmosfèrica (però no descobert) i incorpora un filtre d'aire o un diafragma de separació per evitar l'entrada de pols o altres contaminants (com ara mosques, per exemple). Els dipòsits pressuritzats per aire (a una pressió d'entre 0,3 bar i 1,4 bar) tenen dos avantatges fonamentals: d'una banda, faciliten l'aspiració de la bomba perquè augmenta la seva altura neta disponible; de l'altra, eviten l'entrada de la contaminació atmosfèrica. Per contra, aquests dipòsits són més costosos, perquè necessiten el subministrament de l'aire a pressió, ja sigui mitjançant una línia d'aire comprimit o incloent-hi un compressor propi. En aquests dipòsits s'ha de tenir en compte que l'aire comprimit transporta força aigua, de manera que, si fos el cas, s'hauria de preveure la col·locació d'un filtre d'aigua o emprar aire sec.

La grandària del dipòsit es tria seguint unes regles de tipus empíric. Es recomana el volum més gran que resulti de:

- Un número comprès entre dos i quatre vegades el cabal de la bomba, expressat en volum per minut. Aquest criteri mínim garanteix (si el disseny del dipòsit és l'adequat) un temps de residència de l'oli al dipòsit de diversos (2, 3 o 4) minuts, cosa que també assegura la decantació de les partícules sòlides (la decantació de les partícules metàl·liques es facilita amb taps imantats) i la ventilació de les bombolles d'aire en suspensió.
- Un número comprès entre dos i quinze litres de capacitat per cada CV de potència instal·lada. Aquest criteri intenta compensar la generació de calor del sistema amb la capacitat evacuadora del dipòsit, però sol sobredimensionar-lo quan es treballa a altes pressions.

Si el criteri utilitzat és el del cabal de la bomba, llavors hi ha dos casos particulars: en equips i maquinària mòbil, el volum depèn de l'espai disponible, però no és recomanable que sigui inferior a dues vegades el cabal de la bomba en minuts; en instal·lacions estàtiques, on l'espai no és tan crític, la regla recomana multiplicar per tres (o quatre) el volum d'oli per minut. Per exemple, si la bomba subministra 100 litres per minut, el recipient ha de ser, com a mínim, de 300 litres de capacitat. El volum final es triarà en funció de les grandàries estàndard disponibles o de la temperatura ambiental (una temperatura extrema pot recomanar augmentar la superfície del dipòsit i la seva grandària per millorar l'evacuació de la calor). Altres requisits són més aviat funcionals: s'hauria d'incrementar l'àrea disponible per una raó d'espai si, per exemple, el nombre de canonades de retorn fos elevat.



En relació amb la seva forma i disposició, és preferible un dipòsit ample i baix que no pas estret i alt del mateix volum. Aquesta regla simple serveix per augmentar la superfície lliure i facilita l'intercanvi tèrmic i la ventilació, alhora que redueix la distància de deposició i disminueix les fluctuacions del nivell de la seva superfície. Sovint, els requisits de la maquinària exigeixen formes i volums especials, en “L”, “T”, “Z”, etc. En qualsevol cas i per a qualsevol dipòsit, sempre s'han de respectar les normes bàsiques de construcció (volum mínim, separador intern, tap respirador, filtre, indicadors, etc.), per no comprometre'n el funcionament. És recomanable instal·lar la bomba per sota del nivell d'oli en el tanc, a fi de facilitar l'aspiració i que la bomba estigui sempre greixada, cosa que es pot aconseguir elevat el tanc sobre una estructura o bancada.

6.5.2 Sistemes de filtració

Els sistemes hidràulics s'han de mantenir nets i sanejats perquè el seu funcionament sigui més eficient i se n'allargui la vida útil (aquesta recomanació no es refereix només a l'oli hidràulic, sinó també a l'aspecte general de la instal·lació). Està demostrat per organitzacions i empreses de prestigi internacional⁸ que l'oli contaminat causa més del 70 % de les avaries i parades dels sistemes hidràulics i de lubricació. L'excés de zel per substituir l'oli massa sovint no és la solució òptima, perquè té un cost prohibitiu que també s'ha de valorar des d'una perspectiva sostenible i, a més, no evita que el sistema pugui contaminar. És per això que els filtres són imprescindibles en un sistema hidràulic de potència per prevenir la contaminació i aconseguir el nivell de neteja requerit, i estan en estreta relació amb els requisits de manteniment del sistema i la seva longevitat.

La màxima en filtració és que “la contaminació genera contaminació”. La contaminació d'un fluid hidràulic és un terme difícil de definir, ja que tots els fluids contenen sempre algun grau d'impureses. El concepte en si és, per tant, subjectiu, i es diu que un fluid està contaminat quan el grau d'impureses pot afectar, de manera significativa, el funcionament del sistema o d'alguna de les seves parts en un temps limitat.

La contaminació més freqüent es produeix per partícules sòlides, aigua, resines i aire, i té l'origen en cinc fonts principals:

- La contaminació afegida durant la fabricació i el muntatge del sistema, els cilindres, latiguillos, les bombes i els motors, els blocs de vàlvules, etc.
- La contaminació ingerida de l'ambient a través de respiradors ineficaços o pel mal funcionament dels filtres d'aire, per les obertures dels dipòsits, per fuites en les connexions o per unes tiges dels cilindres ratllats o desprotegits, etc.
- La contaminació inherent en l'oli nou. Fins i tot l'oli nou contingut en un barril s'ha de filtrar abans que s'introdueixi als circuits.



- La contaminació generada internament per deterioració o per desgast dels elements del sistema.
- La contaminació indeguda com a conseqüència de la degradació del fluid hidràulic.

Els efectes de la contaminació són diversos. Les partícules contaminants, fins i tot les de mida petita, causen desgast per abrasió, fatiga i erosió quan circulen a gran velocitat i pressió. S'estima que cada partícula que surt del dipòsit torna després d'un cicle de treball amb d'altres deu que ha produït i així comença una reacció en cadena. D'altra banda, l'oli s'oxida per la presència combinada de partícules de metall, que actuen com a catalitzadors, i d'aigua, que és assimilada de l'ambient pels canvis de temperatura i les fuites dels sistemes de refrigeració. L'oxidació polimeritza l'oli i produeix resines de mida microscòpica, que no són eliminades pels sistemes tradicionals de filtració i afecten l'eficàcia i la seguretat del sistema hidràulic.

La filtració del fluid dels sistemes hidràulics de potència s'ha de tractar des de dues perspectives diferents:

- S'ha de seleccionar el rang de filtració apropiat, segons les necessitats del sistema.
- Cal quantificar quins filtres seran necessaris, quin serà el seu propòsit i on se situaran.

La selecció dels filtres és de summa importància, tant perquè han de garantir el nivell mínim de neteja, com també perquè la funció primària de qualsevol sistema hidràulic no s'ha de veure pertorbada per la seva presència. Els filtres que es connecten al flux principal presenten un compromís entre l'eficiència en la filtració i la pèrdua de pressió que produeixen. Una filtració deficient suposa un cost evident pels temps morts a causa de les fallades i la substitució dels components afectats, però un filtratge agressiu o un filtre en mal estat causen unes pèrdues d'energia que també s'han de valorar. En general, els filtres han de:

- Tenir prou capacitat de retenció per allargar els períodes de substitució (tot i que això depèn de la mena de treball, és recomanable un període mínim de 800 hores d'operació en condicions normals).
- Evitar malmetre el funcionament del sistema i ser accessibles per facilitar-ne el manteniment.
- Estar equipats amb algun dispositiu visible que indiqui quan requereixen servei, és a dir, a quina pressió diferencial s'ha de substituir el material filtrant.
- Incorporar una vàlvula antiretorn en derivació (preferible) per evitar el col·lapse del material filtrant quan la pressió diferencial a través del filtre augmenti (cosa que és inevitable, a mesura que es va embrutant). La pressió d'obertura de la



vàlvula antiretorn ha de ser, almenys, un 20 % més elevada que la pressió diferencial indicada pel dispositiu anterior (sol ser de l'ordre dels 3 bar o 4 bar, excepte en els filtres d'aspiració, en què és menys).

- No afegir contaminació addicional. És important que les connexions del filtre no deixin escapar-se ni airegin l'oli.
- Ser compatibles amb el nivell de pressió, tant absoluta com diferencial, de la ubicació on s'ha d'instal·lar i amb la mena de fluid que es faci servir.

La mida del filtre es tria un cop determinat el grau de filtració necessari segons la pressió diferencial màxima admissible del seu material filtrant net (subministrada pel fabricant) i del cabal. La caiguda de pressió depèn del cabal de funcionament (i de la viscositat) i augmenta amb el temps d'ús, per això els filtres es dimensionen fent servir el cabal de funcionament augmentat per un factor de multiplicació que oscil·la entre 1 i 4, en funció del grau de treball i ús que se'n preveu (ubicació, nombre de cilindres exposats a la brutícia ambiental, etc.), el nivell de fluctuació del cabal i la freqüència desitjada de substitució.

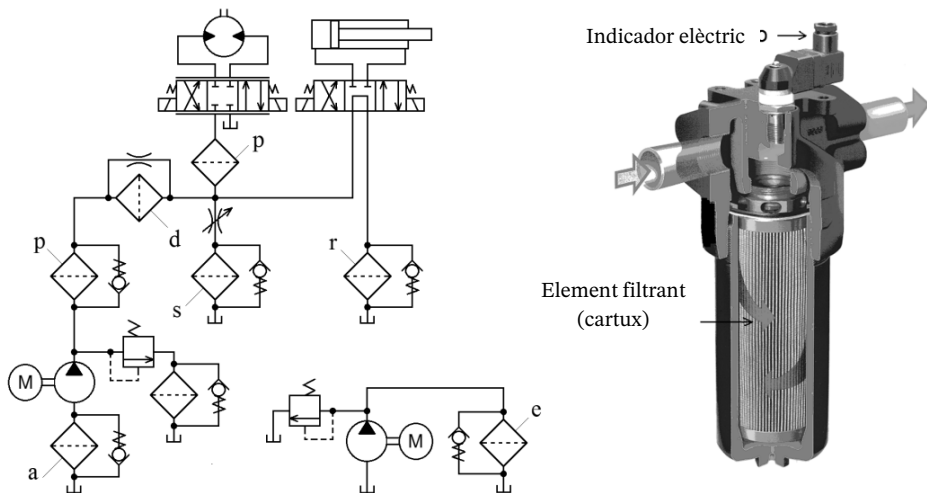


Figura 6.10. Ubicacions possibles dels filtres hidràulics (no cal que coexisteixin tots en una mateixa instal·lació) i vista interior d'un filtre de pressió. A la figura: a, aspiració; d, derivació (bypass); e, extern; p, pressió; r, retorn; i s, sagnat (bleed-off). Els filtres es poden situar en qualsevol part del circuit hidràulic, però per regla general, només en calen dos o tres en les posicions crítiques.

La denominació dels filtres es fa tenint en compte la seva capacitat de filtració i ubicació. La capacitat de filtració dels filtres està relacionada amb la grandària de les partícules que poden retenir i depèn de l'estructura del material filtrant. Com que un filtre no reté de la mateixa manera totes les partícules, la seva capacitat es



descriu en funció de rangs de grandària normalitzats, que permeten comparar filtres de diversos fabricadors quant a l'acompliment i el nivell de neteja que aconseguen. Respecte de la ubicació, l'única manera segura de garantir una protecció fiable d'un component és col·locar el filtre adequat immediatament corrent amunt. La contaminació es pot generar en qualsevol punt de la instal·lació, per tant, per exemple, no serveix de res filtrar l'oli de la línia de retorn del sistema si el dipòsit és brut, o col·locar un filtre de pressió si l'element que es vol protegir és la bomba. Per aquest motiu, és possible trobar components molt susceptibles de patir danys per contaminació que incorporin el seu propi filtre (com algunes servovàlvules i bombes).

En l'actualitat, predominen el sistema beta de filtració, β_x , per descriure la capacitat de retenció i compliment d'un filtre, i la norma ISO 4406 per definir el grau de neteja que cal en un sistema determinat.⁹ El sistema ISO 4406 és un estàndard reconegut internacionalment, l'acceptació del qual ha fet que es converteixi en un llenguatge estable, interpretable i manejable per fabricants i usuaris. No obstant això, cal tenir en compte que estem en una època de transició en què encara coexisteixen mètodes obsolets i que la mateixa normativa s'està adaptant als canvis continus dels sistemes oleohidràulics i les tècniques de filtratge.

El mètode de mesurament de filtració beta es basa en la comparació del nombre de partícules d'una grandària superior a una de determinada en el fluid abans i després de passar pel filtre. La comparació es fa mitjançant l'operació següent:

$$\beta_x = \frac{N_u}{N_d} \quad [6.6]$$

en què N_u és el nombre de partícules de més de x micres abans de passar pel filtre, i N_d és el nombre de partícules de més de x micres després de passar pel filtre. La mida β_x crítica que es fa servir en la comparació és imposada per la instal·lació i els seus components. Per exemple, si el fluid d'un sistema oleohidràulic s'ha de filtrar en $10 \mu\text{m}$, i abans del filtre el nombre de partícules de més de $10 \mu\text{m}$ és de 4.734 i, després, només de 58, el rang β_{10} de filtració és igual a $\beta_{10} = 4.734/58 = 81,6$.

L'eficiència del filtre, E_x , és un percentatge que expressa l'habilitat de l'element filtrant de remoure les partícules de més de x micres. La relació de filtració β_x es pot convertir en un rang d'eficiència E_x , mitjançant l'operació següent:

$$E_x = 100 \frac{\beta_x - 1}{\beta_x} \quad [6.7]$$

Per a les dades de l'exemple anterior, l'eficiència del filtre resulta $E_{10} = 98,8\%$, cosa que vol dir que el filtre que s'ha fet servir té una capacitat del 98,8% de retenir partícules de $10 \mu\text{m}$ o superiors.



Nombre de partícules per mL		Número de rang ISO 4406
Més de	Fins a	
80.000	160.000	24
40.000	80.000	23
20.000	40.000	22
10.000	20.000	21
5.000	10.000	20
2.500	5.000	19
1.300	2.500	18
640	1.300	17
320	640	16
160	320	15
80	160	14
40	80	13
20	40	12
10	20	11
5	10	10
2,5	5	9
1,3	2,5	8
0,64	1,3	7
0,32	0,64	6
0,16	0,32	5
0,08	0,16	4
0,04	0,08	3
0,02	0,04	2
0,01	0,02	1

Taula 6.8. Rang de números ISO 4406 de comptatge de partícules.

La norma ISO 4406 determina la neteja fixant el nombre de partícules de grandària superior a $5 \mu\text{m}$ i $15 \mu\text{m}$ mitjançant un codi de dues xifres Y/Z, malgrat que actualment es tenen en compte també el nombre de partícules superiors a $2 \mu\text{m}$ i d'altres.¹⁰ Els codis de l'ISO es determinen segons la taula 6.8. Per exemple, si en una mostra d' 1 cm^3 de fluid es compten 110 partícules de grandària superior a $5 \mu\text{m}$ i 33 partícules de $15 \mu\text{m}$, el codi de neteja ISO 4406 seria de 14/12. Si s'incloués en el codi el comptatge de partícules de grandària superior a $2 \mu\text{m}$ i el resultat fos de 660, per exemple, el codi ISO 4406 de tres xifres seria 17/14/12, i així successivament.



Els requisits de neteja canvien entre components, depenent de les seves toleràncies o de les condicions de treball. El nivell de neteja de l'oli també s'ha d'incrementar (disminució del codi ISO) a mesura que la pressió augmenta, ja que, com més pressió, l'efecte nociu de les partícules és més gran. A més, les diverses grandàries de partícules contingudes en l'oli afecten, de manera diferent, els components hidràulics. Com més s'aproxima la grandària de la partícula al joc mecànic, més possibilitats hi ha que es doni interferència física, abrasió i la consegüent fallada. Per part seva, les partícules de mida gran erosionen les superfícies i en generen i desplacen d'altres de més petites, etc., l'acumulació de les quals també pot bloquejar les corredores de les vàlvules o les bobines, quan són atretes pel seu camp magnètic.

Component	Tolerància/Joc típic [μm]
Actuadors	50÷250
Bomba d'engranatges	0,5÷5
Bomba de paletes	0,5÷15
Bomba de pistons	0,5÷40
Bombes de baixa pressió	15÷40
Coixinets hidroestàtics	1÷25
Servovàlvules	0,5÷4
Vàlvula de corredora	1÷15
Vàlvula de seient	10÷40

Taula 6.9. Toleràncies típiques dels components hidràulics (valors de referència). Les toleràncies d'un component poden ser diverses, segons la part mòbil que es tracti.

Tipus de sistema	Sensibilitat	Classe Y/Z
Sistema de control molt sensible a la contaminació, amb una fiabilitat molt elevada (laboratori aeroespacial).	Supercrítica	13/9
Sistemes de servovàlvules d'alt rendiment, pressió elevada i llarga durada (aviació, màquines eina).	Crítica	15/11
Sistemes fiables d'alta qualitat. Requeriments generals de maquinària.	Molt important	16/13
Maquinària general i sistemes mòbils de pressió i capacitat mitjanes.	Important	18/14
Sistemes industrials pesants de baixa pressió. Aplicacions en què no es requereixi llarga longevitat.	Mitjana	19/15
Sistemes convencionals de baixa pressió amb grans folgances.	Protecció principal	21/17

Taula 6.10. Classe Y/Z de contaminació suggerida per l'ISO segons la mena de sistema per a $\beta_x > 75$ i partícules de 5 i 15 μm . Tinguem present que nom ués és una referència, que no té en compte l'efecte de la pressió.



6.5.3 Intercanviadors

La missió fonamental dels intercanviadors és mantenir la temperatura normal d'operació del sistema hidràulic.¹¹ S'anomenen *refrigeradors* els intercanviadors que han de refredar el fluid, mentre que són *escalfadors* els intercanviadors que l'escalfen. Aquests últims no són tan freqüents com els primers, perquè els sistemes hidràulics normalment són objecte de sobreescalfament, ja que són sistemes en què hi ha pèrdues hidràuliques que dissipen potència útil i generen calor. Els refrigeradors (o, simplement, intercanviadors) poden ser d'oli-aire o d'oli-aigua i, igual com amb els filtres, és recomanable situar-los en paral·lel amb una vàlvula antiretorn que absorbeixi els pics de pressió i les fluctuacions de cabal.

En la selecció de la grandària de l'intercanviador cal tenir en compte el balanç entre tota la potència dissipada en forma de calor per la instal·lació i la capacitat refrigeradora del dipòsit. Entre les fonts de calor del sistema, hi ha tots els fenòmens dissipatius que tenen lloc irreversiblement, com ara la fricció mecànica, les fuites internes i les pèrdues de pressió en les vàlvules.

Els intercanviadors oli-aire són constructivament semblants als radiadors de cotxe. L'aire impulsat mitjançant un ventilador és forçat a passar a través de tubs aletejats per on circula l'oli. Les aletes solen ser d'alumini o de qualsevol altre metall conductor per augmentar la ràtio de transferència. Aquests intercanviadors són bastant sorollosos, però són preferibles en instal·lacions petites, atès el baix cost que tenen i que, de vegades, no es disposa d'aigua per a la refrigeració. Un intercanviador d'aigua consisteix en un feix de tubs, per l'interior dels quals circula l'aigua de refrigeració, tancat en un cilindre per on passa l'oli del sistema. És convenient que la pressió de l'oli a dins sigui més alta que la del circuit de l'aigua perquè, si hi ha fuites, no contaminin l'oli (un altre problema serà el del reciclatge de l'oli que s'hagi escapat, segons la política mediambiental de l'empresa). El cabal d'aigua dissipa la calor de l'oli, de manera que el salt tèrmic resultant es pot regular mitjançant termòstats per mantenir la temperatura desitjada.

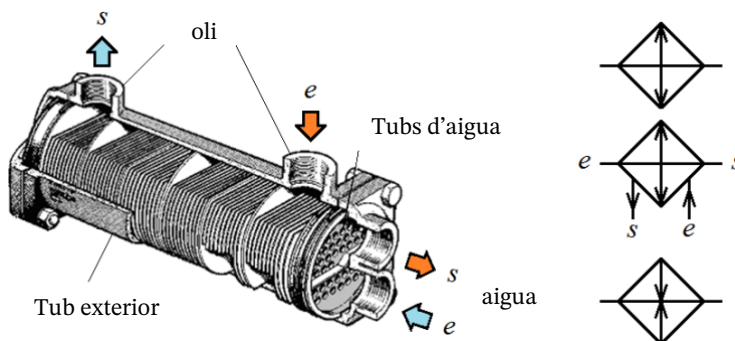


Figura 6.11. Intercanviador d'aigua i símbols d'un intercanviador d'aire, aigua i un escalfador.



Els escalfadors es fan servir en instal·lacions que han de treballar a fora a temperatures molt fredes, o quan el sistema necessita una temperatura molt constant (alguns servosistemes). Els intercanviadors d'aigua es poden utilitzar com a escalfadors si es fa servir aigua calenta, encara que el normal és que siguin elèctrics o que s'utilitzi un sistema hidràulic secundari pel qual es descarregui una vàlvula limitadora de pressió. Els escalfadors elèctrics es poden submergir en el dipòsit, sempre que la seva ràtio de transferència sigui de l'ordre de 6 W/m^2 o inferior, i mai s'han de fer servir escalfadors domèstics perquè poden fer bullir l'oli localment.

6.5.4 Acumuladors

Un acumulador és un instrument dedicat a emmagatzemar energia. En els circuits oleohidràulics, l'energia s'emmagatzema en forma de fluid a pressió i es pot restituir seguint un pla preestablert.

Com que la capacitat de l'oli a ser comprimit és limitada, els acumuladors hidràulics se solen servir d'un mitjà auxiliar, que pot ser: la gravetat, o acumuladors de càrrega constant; una molla, o un gas, normalment gas nitrogen, tot i que també n'hi ha d'aire.¹² Els acumuladors de gas, a més, se subdivideixen en: de lliure contacte, quan la càrrega de gas i l'oli comparteixen una superfície lliure; de pistó, en què un èmbol separa tots dos mitjans, i de bufeta, quan una membrana elàstica embolica un dels mitjans i els separa.

La capacitat acumulativa dels acumuladors hidràulics es pot utilitzar en nombroses aplicacions.¹³ Entre les funcions principals, destaquen:

- Subministrar un cabal addicional al de la bomba per aconseguir pics de velocitat elevats.
- Esmorteir les pulsacions de pressió en qualsevol punt del sistema, especialment a la impulsió de la bomba.
- Compensar les fuites d'oli o les seves dilatacions tèrmiques en sistemes tancats.
- Aportar una font d'energia alternativa en casos d'emergència.

L'acompliment d'una funció o l'altra depèn de la grandària de l'acumulador, la seva ubicació i, en el cas dels acumuladors de gas, del nivell de precàrrega inicial. El volum de l'acumulador necessari es calcula mitjançant la fórmula [5.92] o similars, en funció dels increments de volum i pressió previstos en el diagrama de temps del sistema.

L'efecte amortidor d'un acumulador està associat a l'acoblament entre la seva capacitat, C , i la resistència del sistema format per les vàlvules i canonades que el connecten a la resta del circuit, R . El sistema acumulador-resistència es comporta com un sistema RC convencional, amb una característica típica de passabaix. La capacitat d'un acumulador de gas depèn del seu volum i de l'estat termodinàmic del fluid, i es pot aproximar mitjançant l'expressió (menyspreant la compressibilitat de l'oli):



$$C = \frac{V}{np} \quad [6.8]$$

en què V és el volum de gas que s'avalua restant el volum acumulat d'oli del volum total de l'acumulador; n és l'índex politròpic del procés de càrrega o descàrrega de gas, que s'assimila a $n = 1$ si el procés és lent i a $n = 1,4$ si el procés és ràpid, i p és la pressió absoluta del gas. Les unitats de V i p han de ser del SI per evitar incongruències numèriques en el càlcul. És evident, d'aquesta relació, que la capacitat d'un acumulador hidropneumàtic augmenta amb el seu volum i disminueix a mesura que es pressuritza: es diu que l'acumulador es rigiditza amb la pressió perquè es mostra menys capaç d'acumular fluid hidràulic.

Els processos s'entenen lents si tenen lloc en un temps superior al temps tèrmic característic, i ràpids, en cas contrari.¹⁴ Per exemple, l'amortiment dels polsos de pressió que es produeixen en la impulsió de la bomba exigeix la càrrega i la descàrrega de l'acumulador a una freqüència bastant elevada, definida per la rotació de la bomba i pel nombre de dents de l'engrenatge o de pistons, etc. En canvi, la compensació de les fuites del sistema es realitza segons es presenten i desplaça volums petits. En aquest cas, s'utilitzaria $n = 1$, mentre que en el primer, $n = 1,4$.

S'ha de tenir especial cura quan es treballa amb acumuladors, ja que són recipients a pressió molt perillosos en potència. La instal·lació segura d'un acumulador recomana fer servir vàlvules de seguretat, manòmetres de pressió, vàlvules de descàrrega automàtica, etc., segons la reglamentació tècnica aplicable. A més, quan s'instal·la un acumulador i es carrega per primera vegada, s'han de seguir fidelment les recomanacions del fabricant. Normalment, la pressió de precàrrega dels acumuladors de gas es tria entorn del 90% de la pressió mínima de servei exigida (es poden comprar acumuladors precarregats a una pressió determinada o utilitzar una ampolla de nitrogen). Amb aquesta precaució s'evita que la membrana separadora es pugui fer malbé quan entri en contacte amb els mecanismes d'obertura de l'acumulador.

Finalment, mai s'han de fer operacions de manteniment, substitució o redisseny d'un circuit hidràulic que contingui un acumulador sense haver-lo descarregat abans o sense tenir la certesa que la vàlvula de connexió està tancada perfectament.

6.6 Transmissions hidrostàtiques

En els circuits hidràulics amb motors i en les transmissions hidrostàtiques, s'estableix una relació de potència entre dos elements (com a mínim) de característiques anàlogues: una bomba i un motor, tots dos de desplaçament positiu. L'ús de les transmissions s'ha estès a nombroses aplicacions, perquè l'acoblament hidràulic d'una bomba i un motor és senzill i ofereix una gran versatilitat de funcions. Entre altres aplicacions, s'utilitzen en:



- transmissions de màquines eina i de velocitat variable en vehicles
- mecanismes de direcció
- cabrestants, torns, polispastos i grues
- formigoneres
- accionament d'hèlixs de vaixells
- altres servomecanismes amb servobombes, etc.

Les transmissions hidrostàtiques poden ser circuits oberts o tancats. En una transmissió de circuit obert (v. figura 6.12), tot l'oli provinent dels motors torna al dipòsit abans de ser aspirat de nou per la bomba o les bombes. En un circuit tancat (figura 6.14), l'oli és retornat a l'aspiració de la bomba perquè es pugui tornar a fer servir. El dipòsit no desapareix en un circuit tancat perquè, normalment, és necessari per als circuits secundaris de condicionament, filtratge i refrigeració, de sobrepressió (per facilitar l'aspiració de la bomba principal de la transmissió) i també per a la reposició de les fuites de fluid.

6.6.1 Acoblament ideal de bomba i motor

L'acoblament ideal d'una bomba i un motor com els de la figura 6.12 és tal que no hi ha pèrdues de pressió o de cabal en la bomba, en el motor, ni entre tots dos. En aquest cas, es compleix:

$$M_B \omega_B = pQ = M_M \omega_M \quad [6.9]$$

$$C_B n_B = Q = C_M n_M \quad [6.10]$$

En aquesta formulació, la velocitat de rotació, n , està en revolucions per segon, de manera que $\omega = 2\pi n$, i la cilindrada, C_i , és el volum desplaçat per revolució.¹⁵ Amb aquestes unitats, el parell ideal resulta (v. [6.4]):

$$M_i = \frac{1}{2\pi} C_i p \quad [6.11]$$

El parell motor lliurat, M_M , és proporcional a la pressió, p (avaluada com a increment de les pressions a l'entrada i a la sortida) i a la cilindrada del motor, C_M . Com que el cabal Q i la pressió p són compartits en l'acoblament ideal, les revolucions del motor són funció de les de la bomba i el parell de la bomba és funció del parell motor:

$$n_M = \frac{Q}{C_M} = \frac{C_B}{C_M} n_B \quad [6.12]$$

$$M_B = \frac{n_M}{n_B} M_M = \frac{C_B}{C_M} M_M$$

La relació C_B/C_M s'anomena *relació de transmissió*: si la bomba i el motor són de la mateixa cilindrada, llavors $n_M = n_B$ y $M_B = M_M$.



L'acoblament ideal entre bomba i motor es pot complementar amb una vàlvula limitadora de pressió i una vàlvula reguladora de cabal, com es mostra a la figura 6.12. Amb aquesta configuració, la velocitat del motor és controlada mitjançant la vàlvula de cabal i l'excés s'evacua a tanc a través de la limitadora, a una pressió determinada. El control del parell de sortida és possible actuant sobre el taratge de la vàlvula limitadora, cosa que es pot fer independentment del control de les revolucions si la característica de la limitadora és prou horitzontal (és a dir, si la pressió regulada és independent del cabal evacuat).

És possible regular d'una manera més eficient les revolucions o el parell de sortida del motor d'una transmissió hidrostàtica utilitzant elements de cilindrada variable, sense altres d'addicionals. Es presenten tres alternatives:

- bomba de cilindrada variable i motor de cilindrada constant
- bomba de cilindrada fixa i motor variable
- bomba i motor de cilindrada variable.

A continuació, s'introdueixen les característiques de les dues primeres. La tercera no s'explica aquí, ja que resulta de la combinació de les anteriors.

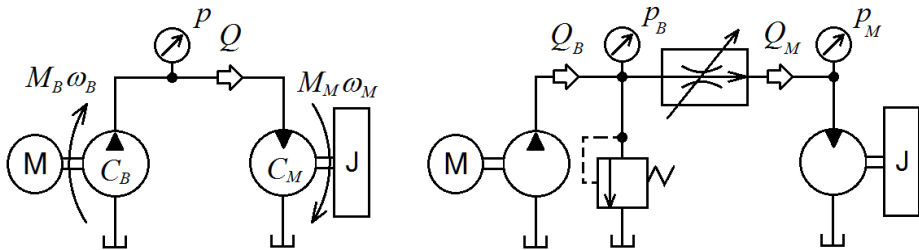


Figura 6.12. A l'esquerra, acoblament ideal d'una bomba i un motor sense pèrdues de pressió o cabal entre tots dos. A la dreta, transmissió hidrostàtica simple per al control de les revolucions i el parell del motor. La bomba i el motor són elements ideals de cilindrada constant. La diferència $p_B - p_M$ i el fet que la limitadora estigui sempre oberta ($Q_B > Q_M$) són factors a tenir en compte a l'hora d'avaluar-ne el rendiment.

El sistema del primer cas permet el control lineal de les revolucions del motor actuant sobre la cilindrada de la bomba. Les revolucions màximes del motor es calculen mitjançant l'expressió [6.12], sent:

$$n_M^{\max} = \frac{C_B^{\max}}{C_M} n_B \quad [6.13]$$

El control de les revolucions en el segon cas no és lineal, tal com es mostra a la figura 6.13. En aquest cas, les revolucions mínimes possibles del motor es calculen de:

$$n_M^{\min} = \frac{C_B}{C_M^{\max}} n_B \quad [6.14]$$

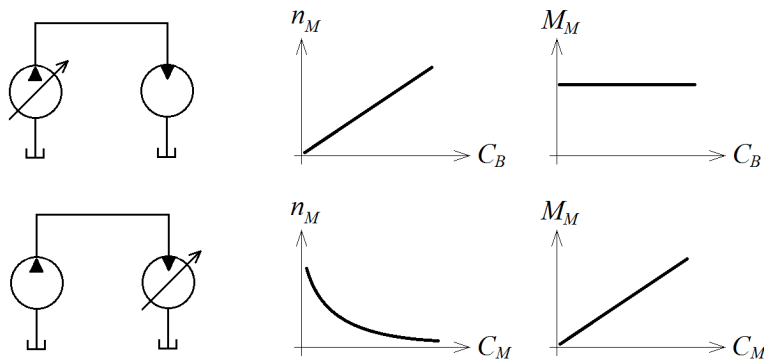


Figura 6.13. Transmissions amb bomba o motor de cilindrada variable i corbes (ideals) de revolucions de sortida per a n_B constant, i de parell de sortida per a p_M constant, en funció de C_B i C_M . L'avantatge de la transmissió de bomba variable és que les revolucions del motor són proporcionals a C_B . En la de motor variable, és el parell lliurat, M_M , el que canvia linealment amb C_M .

La velocitat màxima del motor està limitada pel C_M mínim i el cabal de la bomba, però moltes vegades, el C_M mínim no es pot aconseguir sense sobrepassar les revolucions màximes recomanades per al motor.

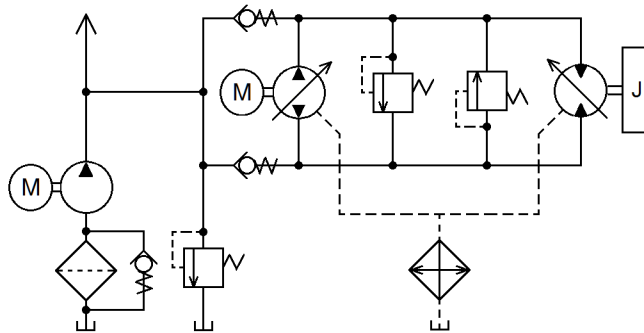


Figura 6.14. Transmissió hidrostàtica típica de circuit tancat. La bomba i el motor són reversibles i de capacitat variable. La pressió màxima en tots dos sentits (parell màxim) s'assegura mitjançant dues vàlvules limitadores de pressió, una per costat del motor o sentit de gir. Les fuites es drenen a un dipòsit auxiliar i es repositen mitjançant la bomba auxiliar i el circuit de sobrealimentació format per una limitadora i dues vàlvules antiretorn. Aquesta bomba sol ser més petita, tret que també es faci servir per a altres funcions. No s'han inclòs vàlvules de frenat ni filtres de pressió.

6.6.2 Desviacions del funcionament ideal

El funcionament en règim permanent de les bombes i dels motors es produeix amb pèrdues que s'inclouen en el càlcul mitjançant els rendiments corresponents.¹⁶ En aquest apartat, es descriu l'efecte d'aquestes pèrdues i el seu origen, i es dedueixen les expressions amb què podem avaluar els rendiments.



El cabal lliurat per una bomba es pot expressar en funció del seu desplaçament i del cabal de fuites, $q_{F,B}$, de la forma:

$$Q = C_B n_B - q_{F,B} \quad [6.15]$$

L'expressió corresponent a un motor és:

$$Q = C_M n_M + q_{F,M} \quad [6.16]$$

Les fuites de cabal poden ser d'origen laminar o turbulent, o de tots dos (perquè són la suma d'efectes d'origen diversos). En general, una bona aproximació consisteix a suposar que són proporcionals a la pressió diferencial i a la cilindrada de l'element, i inversament proporcionals a la viscositat del fluid.¹⁷ Si k_F és la constant de proporcionalitat, la relació anterior s'expressa:

$$q_{F,i} = k_{F,i} \frac{C_i \Delta p_i}{2\pi \mu} \quad [6.17]$$

El cabal d'una bomba es calcula, llavors, mitjançant l'expressió:

$$Q = C_B n_B - k_F \frac{C_B \Delta p_B}{2\pi \mu} = C_B (n_B - n_0) \quad [6.18]$$

i el seu rendiment seria:

$$\eta_{V,B} = 1 - \frac{k_F \Delta p_B}{2\pi \mu n_B} \quad [6.19]$$

De la mateixa manera, es dedueix que el rendiment volumètric d'un motor és:¹⁸

$$\eta_{V,M} = \frac{1}{1 + \frac{k_F \Delta p_M}{2\pi \mu n_M}} \quad [6.20]$$

Les fuites en una transmissió hidroestàtica redueixen les revolucions de sortida del motor. És a dir, en una transmissió hidroestàtica formada per només una bomba i un motor, sense pèrdues en els conductes, de manera que tot el cabal lliurat per la bomba arribi al motor, la combinació de les equacions [6.15] i [6.16] condueix a:

$$n_M = \frac{C_B}{C_M} n_B - \frac{q_{F,B} + q_{F,M}}{C_M} \quad [6.21]$$

Si, a més, la transmissió és tal que $\Delta p_B = \Delta p_M = \Delta p$, es dedueix que el rendiment volumètric màxim total és, per a k_F , comú:

$$\eta_{V,T} = \eta_{V,B} \eta_{V,M} = \frac{1 - \frac{k_F \Delta p}{2\pi \mu n_B}}{1 + \frac{k_F \Delta p}{2\pi \mu n_M}} \quad [6.22]$$



Referent a les relacions de parell aplicat i consumit, i la seva relació amb els rendiments mecànics i les pèrdues, convé recordar que el parell ideal d'una bomba o d'un motor s'avalua mitjançant l'expressió [6.11], i que el rendiment mecànic d'un motor és:

$$\eta_{m,M} = 2\pi \frac{M_M}{C_M \Delta p_M} \quad [6.23]$$

El parell d'entrada necessari per a l'accionament d'una bomba augmenta com a conseqüència de les pèrdues de parell. En un motor, en canvi, segons l'equació [6.23], les pèrdues redueixen el parell lliurat. Aquestes pèrdues de parell sempre s'incrementen amb la grandària de l'element i es deuen a tres motius fonamentals:

- El fregament viscos.
- El fregament entre superfícies sòlides en moviment quan la lubricació actua en el rang inferior d'una pel·lícula fina d'oli.
- El fregament sec entre superfícies en contacte, on la força normal és independent de la pressió i gairebé una constant.

Les forces de caràcter viscos a les bombes i els motors tenen lloc al cap de les paletes i de les dents d'un pinyó; a les cares laterals d'aquests darrers i dels cilindres; als coixinets i les juntes; i als elements d'altres components hidràulics, com ara compensadors, vàlvules de *load-sensing*, etc. El parell resistent ocasionat per aquestes forces és proporcional a la velocitat relativa entre les superfícies i a la viscositat del fluid, i es pot aproximar mitjançant l'expressió:

$$M_{V,i} = k_{V,i} C_i \mu n_i \quad [6.24]$$

El segon tipus de forces apareix a les mateixes ubicacions que el fregament viscos, però només quan, per efecte de la càrrega dinàmica, hi ha desplaçaments de les superfícies de l'ordre del joc mecànic. Aquesta força és gairebé independent de la velocitat relativa entre superfícies i proporcional a la força de contacte, que és, al seu torn, proporcional a la pressió que origina el desplaçament. És a dir:

$$M_{R,i} = k_{R,i} \frac{C_i}{2\pi} \Delta p_i \quad [6.25]$$

El fregament sec es dona a les juntes dels eixos i altres sistemes d'estanquitat. La pèrdua de parell ocasionada per aquests elements és pràcticament constant, de valor aproximat M_S , i és relativament petita en la majoria de casos, per això es pot, en general, menysprear.

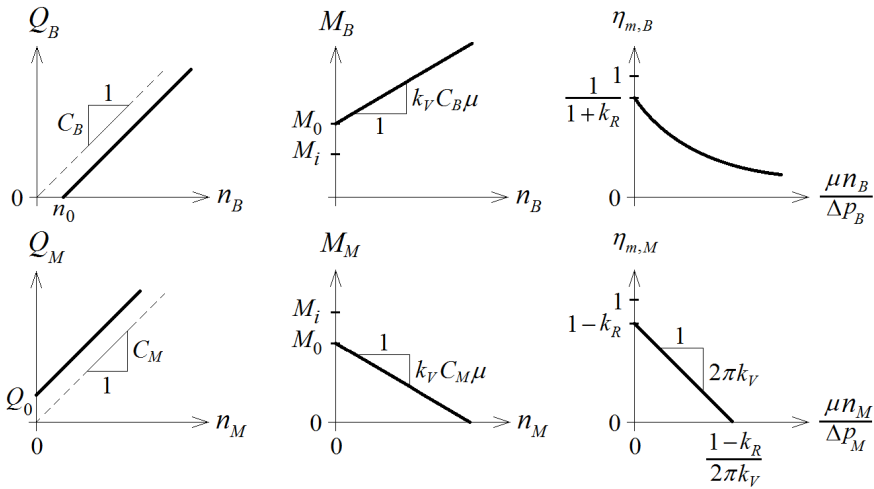


Figura 6.15. A l'esquerra, efecte de les fuites de cabal a les bombes i els motors. Gràfics a pressió i viscositat constants. Una bomba ha de girar a unes revolucions mínimes per impulsar cabal [6.18]. Un motor necessita un cabal mínim per començar a girar [6.16]. Aquest cabal mínim porta associada una diferència de pressió mínima d'arrencada [6.17]. Al centre, parell d'entrada a una bomba i parell lliurat per un motor. Observem que, en la bomba, el parell d'arrencada, M_0 , és superior al parell ideal [6.11], mentre que en el motor és inferior. A la dreta, els rendiments mecànics corresponents.

Amb tot, el parell d'entrada a una bomba és:

$$\begin{aligned} M_B &= \frac{1}{2\pi} C_B \Delta p_B + k_V C_B \mu n_B + k_R \frac{C_B}{2\pi} \Delta p_B + M_{S,B} = \\ &= \left(M_i + k_R \frac{C_B}{2\pi} \Delta p_B + M_{S,B} \right) + k_V C_B \mu n_B = M_0 + k_V C_B \mu n_B \end{aligned} \quad [6.26]$$

i el seu rendiment mecànic:

$$\eta_{m,B} = \frac{1}{1 + \left(2\pi k_V \frac{\mu n_B}{\Delta p_B} + k_R + 2\pi \frac{M_{S,B}}{C_B \Delta p_B} \right)} \quad [6.27]$$

El parell lliurat per un motor és:

$$M_M = \left(\frac{1}{2\pi} C_M \Delta p_M - k_R \frac{C_M}{2\pi} \Delta p_M - M_{S,M} \right) - k_V C_M \mu n_M \quad [6.28]$$

i el seu rendiment:

$$\eta_{m,M} = 1 - \left(2\pi k_V \frac{\mu n_M}{\Delta p_M} + k_R + 2\pi \frac{M_{S,M}}{C_M \Delta p_M} \right) \quad [6.29]$$

Totes aquestes relacions es mostren a la figura 6.15, per al cas en què $M_S = 0$.



6.6.3 Relacions de potència i rendiment total

Les relacions bàsiques de la potència hidràulica i mecànica en una bomba o motor són:

$$\begin{aligned} N^H &= Q\Delta p \\ N^m &= 2\pi Mn \end{aligned} \quad [6.30]$$

Les potències d'entrada i de sortida d'una bomba són, respectivament, mecànica i hidràulica. És a dir:

$$\begin{aligned} N_B^{m,E} &= (C_B\Delta p_B + 2\pi k_V C_B \mu n_B + k_R C_B \Delta p_B + M_{S,B})n_B \\ N_B^{H,S} &= \left(C_B n_B - k_F \frac{C_B}{2\pi} \frac{\Delta p_B}{\mu} \right) \Delta p_B \end{aligned} \quad [6.31]$$

Les potències d'entrada i de sortida d'un motor són, en canvi, hidràulica i mecànica:

$$\begin{aligned} N_M^{H,E} &= \left(C_M n_M + k_F \frac{C_M}{2\pi} \frac{\Delta p_M}{\mu} \right) \Delta p_M \\ N_M^{m,S} &= (C_M \Delta p_M - 2\pi k_V C_M \mu n_M - k_R C_M \Delta p_M - M_{S,M})n_M \end{aligned} \quad [6.32]$$

El rendiment total d'una bomba o d'un motor s'avalua com el quocient entre la potència de sortida i la potència d'entrada. Utilitzant les equacions anteriors, es té que, per a uns coeficients k_F , k_V i k_R comuns i menyspreant els termes MS , aquests rendiments són:

$$\begin{aligned} \eta_{T,B} &= \frac{1 - \frac{k_F}{2\pi} \frac{\Delta p_B}{\mu n_B}}{1 + \left(2\pi k_V \frac{\mu n_B}{\Delta p_B} + k_R \right)} \\ \eta_{T,M} &= \frac{1 - \left(2\pi k_V \frac{\mu n_M}{\Delta p_M} + k_R \right)}{1 + \frac{k_F}{2\pi} \frac{\Delta p_M}{\mu n_M}} \end{aligned} \quad [6.33]$$

Es dedueix ràpidament que:

$$\eta_{T,i} = \eta_{V,i} \eta_{m,i} \quad [6.34]$$

De l'expressió [6.33] s'observa que el rendiment total d'una màquina volumètrica és una funció només dels coeficients k_F , k_V i k_R i del paràmetre adimensional $\mu n/\Delta p$. Això revela dues característiques importants d'aquestes unitats: el valor del paràmetre $\mu n/\Delta p$ defineix la condició de rendiment màxim, que es pot obtenir de manera analítica, i que aquest rendiment és funció només dels coeficients k_i . L'operació corresponent la pot fer el lector derivant les expressions [6.33]. El resultat és:



$$\left[\frac{\Delta p_B}{\mu n_B} \right]_{\eta_{T,B}^{\max}} = k_F \left(\left(1 + \frac{1+k_R}{k_F k_V} \right)^{1/2} + 1 \right)$$

$$\left[\frac{\Delta p_M}{\mu n_M} \right]_{\eta_{T,M}^{\max}} = k_F \left(\left(1 + \frac{1-k_R}{k_F k_V} \right)^{1/2} - 1 \right)$$
[6.35]

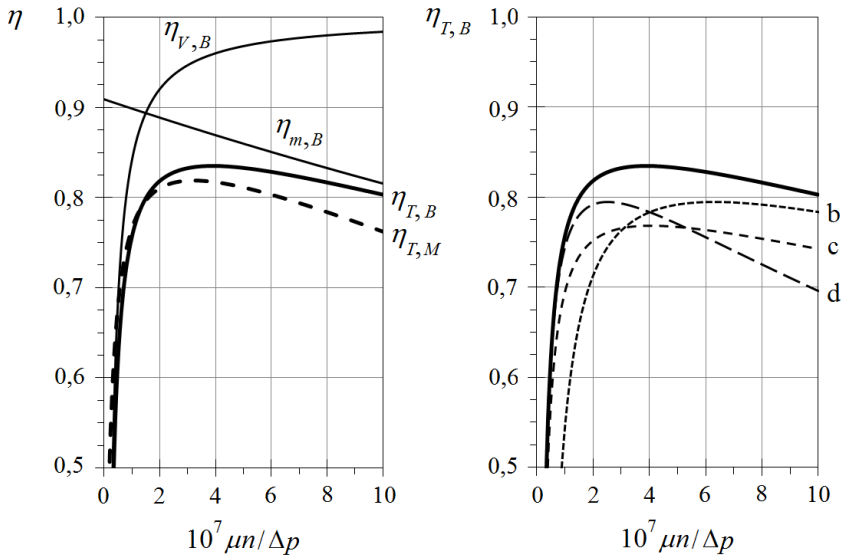


Figura 6.16.A l'esquerra, es mostren els rendiments volumètric, mecànic i total d'una bomba de desplaçament positiu, i el rendiment total d'un motor, en funció del paràmetre $\mu n/\Delta p$, per a una referència de $k_F = 10^{-7}$, $k_V = 2 \cdot 10^4$ i $k_R = 0,1$. A la dreta, s'observa la influència dels paràmetres k_F , k_V i k_R en el rendiment total d'una bomba. Llegendat: b, $k_F = 2,5 \cdot 10^{-7}$, $k_V = 2 \cdot 10^4$, $k_R = 0,1$; c, $k_F = 10^{-7}$, $k_V = 2 \cdot 10^4$ i $k_R = 0,2$; d, $k_F = 10^{-7}$, $k_V = 5 \cdot 10^4$ i $k_R = 0,1$.

El rendiment màxim corresponent s'obté substituint les equacions anteriors en l'expressió del rendiment total:

$$\eta_{T,B}^{\max} = \frac{1}{1 + k_R + 2k_F k_V \left(1 + \left(1 + \frac{1+k_R}{k_F k_V} \right)^{1/2} \right)}$$

$$\eta_{T,M}^{\max} = 1 - k_R + 2k_F k_V \left(1 - \left(1 + \frac{1-k_R}{k_F k_V} \right)^{1/2} \right)$$
[6.36]

En conclusió, en una transmissió hidroestàtica sense pèrdues en els conductes i on només hi hagi una bomba i un motor tal que $\Delta p_B = \Delta p_M = \Delta p$, es dedueix que el rendiment total és:



$$\eta_{T,T} = \eta_{T,B} \eta_{T,M} = \left[\frac{1 - \frac{k_F}{2\pi} \frac{\Delta p}{\mu n_B}}{1 + \frac{k_F}{2\pi} \frac{\Delta p}{\mu n_M}} \right] \left[\frac{1 - \left(2\pi k_V \frac{\mu n_M}{\Delta p} + k_R \right)}{1 + \left(2\pi k_V \frac{\mu n_B}{\Delta p} + k_R \right)} \right] \quad [6.37]$$

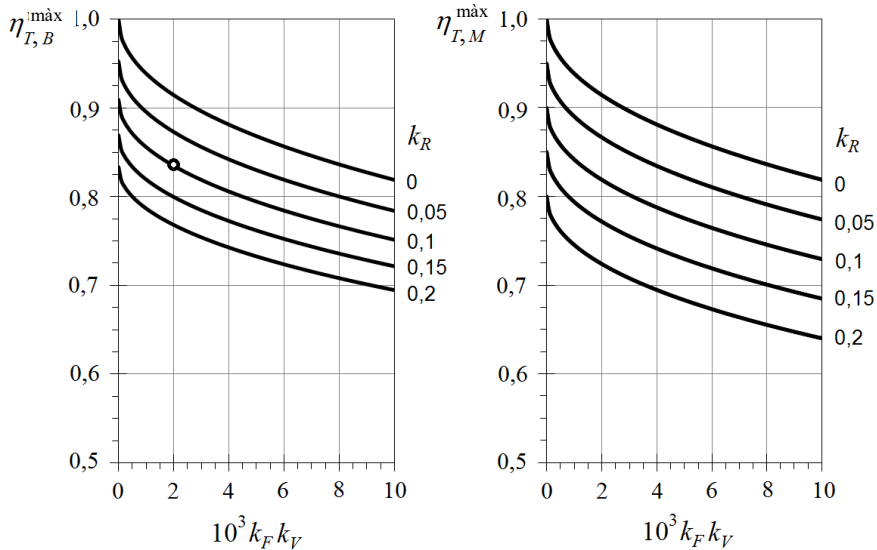


Figura 6.17. Rendiment total màxim d'un motor i d'una bomba de desplaçament positiu. El punt que s'indica a la figura de l'esquerra, es correspon a la referència de la figura 6.16.

6.7 Circuits per a la regulació de la velocitat

La regulació de la velocitat d'un actuator es pot fer per diversos procediments, utilitzant tècnica convencional o proporcional.¹⁹ En aquest apartat, s'expliquen els avantatges i els inconvenients dels sistemes que fan servir vàlvules reguladores de cabal en funció de la seva ubicació en el circuit, i els divisors de cabal.

6.7.1 Regulació per estrangulació

Els sistemes de regulació de la velocitat per estrangulació poden ser: de regulació a la sortida o *meter-out*; de regulació a l'entrada o *meter-in*, i de regulació per derivació o *bleed-off*.

La regulació a la sortida es fa col·locant la vàlvula de cabal en el conducte de sortida de l'actuator segons el seu sentit de moviment. Aquesta regulació es pot utilitzar amb qualsevol mena de càrrega, perquè l'efecte de la regulació no s'interromp encara que la càrrega canviï de sentit, sent especialment adequada en màquines eina en què l'es-



forç és discontinu, com en les perforadores, les mandrinadores o les roscadores d'interiors. El seu inconvenient principal és que les pressions de treball de l'actuador són elevades a causa d'aquest efecte multiplicador de la contrapressió generada per la regulació.²⁰ A més, si la vàlvula de cabal utilitzada no és compensada o ho és de dues vies, l'excés de cabal s'evacua a través de la limitadora, amb els problemes d'escalfament que això implica.

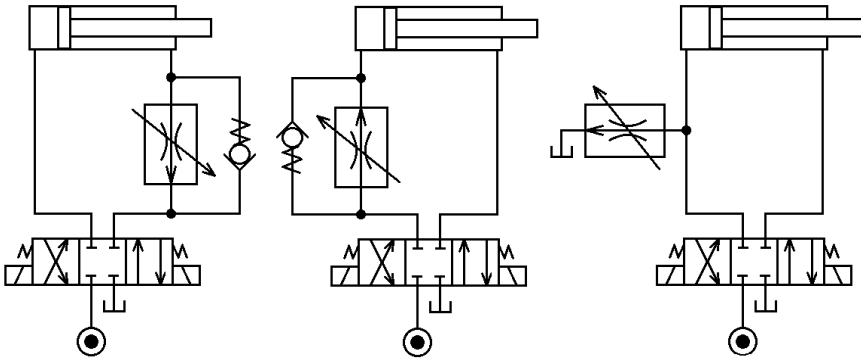


Figura 6.18. Sistemes de regulació a la sortida (meter-out), a l'entrada (meter-in) i per sostracció (bleed-off). En els sistemes meter-out i meter-in, és possible regular en tots dos sentits amb una sola vàlvula de cabal si es col·loca en la línia de retorn "T", o en la "P", respectivament, però llavors la regulació és única.

El sistema de control de la velocitat amb regulació a l'entrada s'usa quan la càrrega s'oposa al moviment i no se'n preveu el canvi de sentit, com per exemple en l'aixecament de pesos, en les màquines de soldar o en l'avanç de les taules rectificadores. En aquestes aplicacions, es diu que la càrrega és resistiva. L'avantatge fonamental d'aquesta regulació és que el nivell de pressions a les dues cares de l'actuador és menor que quan es fa servir regulació a la sortida i s'adapta a la pressió equivalent de la càrrega resistiva. Entre els desavantatges hi ha que no impedeix l'embalament eventual de la càrrega, de manera que aquest sistema de regulació "perd el control" quan la càrrega tira en el mateix sentit que avança l'actuador, i que l'oli arriba a l'actuador a més temperatura per l'efecte de l'estrangulació, cosa que pot afectar la precisió de la regulació. L'excés de cabal també s'evacua a tanc a través de la limitadora, si no s'utilitza una vàlvula compensada de tres vies.

La regulació en derivació o per sostracció regula el cabal sobrant, per això no és un tipus de regulació recomanable quan la càrrega pot experimentar canvis de sentit o magnitud, perquè la velocitat només és regulada quan es mantenen les condicions de pressió. La precisió d'aquesta regulació és més petita que en altres sistemes, perquè el cabal regulat no és l'útil, però, malgrat aquest inconvenient, el sistema en derivació té indubtables avantatges pràctics (quan la càrrega ho permet), com, per exemple:



- La pressió de treball s'adapta a la càrrega existent, per tant, no es multiplica la pressió de l'actuador ni la de la bomba.
- El cabal s'evacua a tanc al costat de l'actuador, per això es fa a la pressió de treball i no a la pressió d'obertura de la limitadora.
- Si es dimensiona adequadament el sistema bomba-actuador en funció de la velocitat requerida, aquest sistema pot fer servir vàlvules reguladores de cabal més petites, cosa que suposa un avantatge si s'utilitzen vàlvules compensades en pressió.

6.7.2 Divisors de cabal

Els divisors de cabal són circuits hidràulics que divideixen el cabal d'entrada en uns altres de sortida, iguals o no, que es poden utilitzar per al sincronisme de diversos actuadors, o el control del moviment d'un actuador a diverses velocitats. Els divisors de cabal poden ser de dues menes: de vàlvula i divisors mitjançant motors hidràulics.

La vàlvula divisora de cabal consisteix en un parell d'orificis calibrats que divideixen el cabal d'entrada en dues parts iguals. La corredora de la vàlvula es desplaça obrint o tancant els orificis per compensar les diferències de cabal que poden sorgir per canvis en la càrrega (fins al punt que, si una sortida es bloqueja, la corredora tanca l'altra automàticament). Lamentablement, aquestes vàlvules estan limitades en cabal i només treballen bé prop del seu cabal de disseny. A més, com que és impossible que les seves vies siguin exactament iguals, no és convenient delegar-hi el moviment sincronitzat de dos actuadors durant diversos cicles de treball perquè els errors per acumulació poden ser grans. Per aconseguir un sincronisme de cicle perfecte, s'han de preveure vàlvules de sincronisme, que són vàlvules VCD 4/2 accionades mitjançant lleva, que redirigeixen el cabal al cilindre que encara no ha arribat al final de carrera i així garanteixen la repetició del cicle.

Diversos motors hidràulics connectats a un mateix eix permeten dividir el cabal en diferents parts, en funció de la relació de les seves capacitats volumètriques. Normalment, es fan servir motors d'engranatges, pel seu baix preu, les bones característiques dinàmiques i una acceptable estanquitat. En qualsevol cas, la divisió del cabal mitjançant motors tampoc és perfecta, pel fet que les fuites internes particulars depenen de la pressió de treball de cada motor. Una solució que millora les prestacions d'aquesta mena de divisors és utilitzar motors de més precisió, com els de pistons (tot i que rares vegades es fan servir, per l'elevat cost i inèrcia més gran), o motors de capacitat variable.

Un divisor de cabal de motors també es pot utilitzar com a circuit intensificador de pressió, fet que s'ha de prendre amb la precaució que cal: de vegades, l'usuari dels divisors de cabal d'aquesta mena desconeix, per inexperiència, que els motors poden amplificar la pressió si les seves condicions de treball no són semblants.²¹

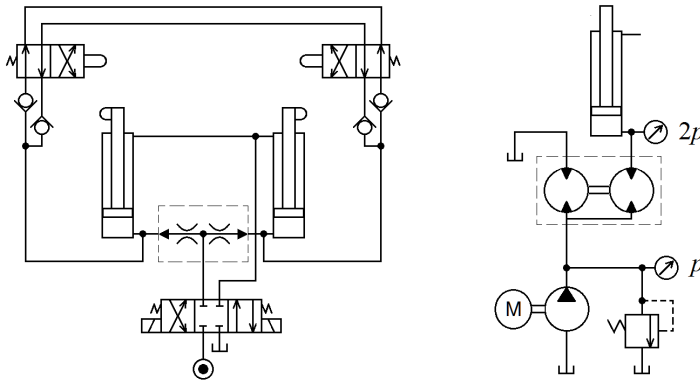


Figura 6.19. Circuit divisor de cabal amb una vàlvula divisora i dues vàlvules de sincronisme (esquerra) i intensificador de pressió (dreta). El motor de l'esquerra descàrrega a tanc i comunica tot el parell a l'eix del motor de la dreta (que treballa com una bomba). El resultat és que la pressió de sortida d'aquest últim és, en teoria, el doble de la pressió marcada per la vàlvula de seguretat.

6.8 Circuits regeneratius

Es parla de cicle regeneratiu d'un cilindre hidràulic quan el fluid de la cambra de la tija es reuneix amb el que prové del circuit i és enviat a la cambra del costat de l'èmbol de més secció. Aquesta regeneració del cabal es pot utilitzar per aconseguir velocitats de sortida més grans de l'actuador o, per exemple, també per compensar la diferència d'àrees d'un cilindre asimètric (diferencial) i aconseguir una mateixa velocitat d'entrada i de sortida amb una vàlvula convencional 1:1. A la figura 6.20 es reproduïx un esquema genèric d'un circuit d'aquest tipus.

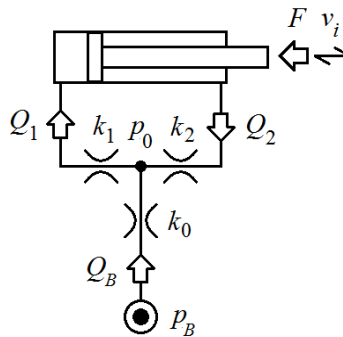


Figura 6.20. Esquema bàsic d'un circuit regeneratiu. Llegenda: k_i és el coeficient de cabal que es defineix de $\Delta p_i = k_i Q_i$, per a cada vàlvula o estrangulador; p_B és la pressió d'impulsió de la bomba; p_0 és la pressió en el nus comú; p_1 i p_2 són les pressions a les cambres anterior i posterior de l'actuador; d és el diàmetre de la tija; D és el diàmetre de l'èmbol; Q_B és el cabal d'impulsió efectiu de la bomba; Q_1 i Q_2 són els cabals d'entrada i sortida en els punts indicats; v_i és la velocitat d'entrada o de sortida de l'actuador, i F és la força exterior aplicada.

Per al sistema anterior amb el cilindre sortint, es verifica continuïtat en el nus:

$$Q_1 = Q_2 + Q_B \quad [6.38]$$



En règim permanent, l'equilibri de forces sobre l'actuador és:

$$p_1 A_1 = p_2 A_2 + F + F_f \quad [6.39]$$

Aplicant l'equació de l'energia, es dedueix:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 - k_1 Q_1^2 \\ p_2 &= p_0 + k_2 Q_2^2 \\ p_0 &= p_B - k_0 Q_B^2 \end{aligned} \quad [6.40]$$

Les seccions de l'actuador són:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi}{4} D^2 \\ A_2 &= \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \end{aligned} \quad [6.41]$$

de manera que la relació de seccions es calcula fent:

$$\varphi = \frac{A_2}{A_1} = 1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \quad [6.42]$$

El sistema d'equacions anteriors permet extreure conclusions importants per a aquesta mena de circuits. Per començar, en un cicle regeneratiu “tot el que es guanya en velocitat, es perd en força”. Si no es presentessin pèrdues de càrrega i $F_f = 0$, llavors:

$$p_0 = p_1 = p_2 = p_B^{\min} \quad [6.43]$$

que seria la mínima pressió d'impulsió de la bomba per a la força, F , realitzable per l'actuador durant el moviment de sortida:

$$F = p_B^{\min} (A_1 - A_2) \quad [6.44]$$

El rendiment del cicle (de sortida) es calcularia fent:

$$\eta = \frac{p_B^{\min}}{p_B} = \frac{F}{(A_1 - A_2) p_B} \quad [6.45]$$

Es pot arribar a aquesta expressió del rendiment del sistema regeneratiu pel procediment tradicional. En general, es defineix:

$$\eta = \frac{Fv}{p_B Q_B} \quad [6.46]$$

com:

$$v = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_2}{A_2} \quad [6.47]$$

i per continuïtat es verifica [6.38], resulta:



$$v = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_B + Q_2}{A_1} = \frac{Q_2}{A_2} \quad [6.48]$$

o bé:

$$v = \frac{Q_B}{(A_1 - A_2)} = \frac{1}{1 - \varphi} \frac{Q_B}{A_1} \quad [6.49]$$

d'on, en definitiva:

$$\eta = \frac{FQ_B}{p_B(A_1 - A_2)Q_B} \quad [6.50]$$

que coincideix amb [6.45].

És ben sabut que, quan s'utilitza un cilindre diferencial²² en un cycle regeneratiu, es compleix que les velocitats d'entrada i de sortida coincideixen. En principi, es pot obtenir qualsevol raó de velocitats, perquè es dedueix que:

$$\frac{v_e}{v_s} = \frac{1 - \varphi}{\varphi} \quad [6.51]$$

L'enginy humà ha desenvolupat nombrosos esquemes de circuits regeneratius de diversa utilitat. En línies generals, els circuits regeneratius es classifiquen segons la seva capacitat d'excloure el cycle regeneratiu i de bloquejar l'actuator en una posició intermèdia. Per tant, són possibles quatre combinacions de circuits regeneratius, segons siguin excloents o bloquejadors (v. figura 6.21).

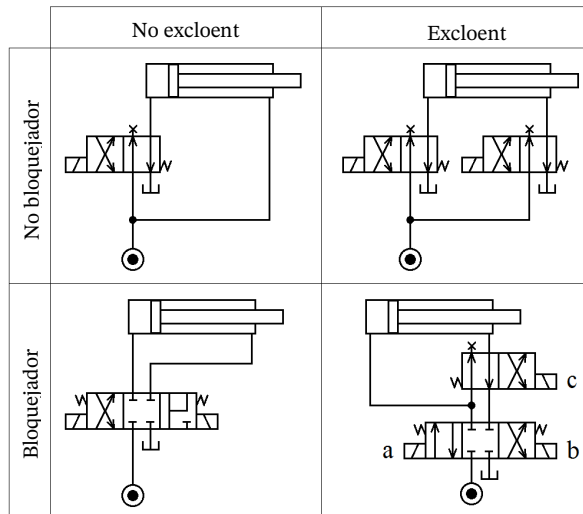


Figura 6.21. Alguns tipus de circuits regeneratius segons la seva capacitat d'exclusió i bloqueig. Configuracions d'una i dues VCD. No són les úniques configuracions possibles.

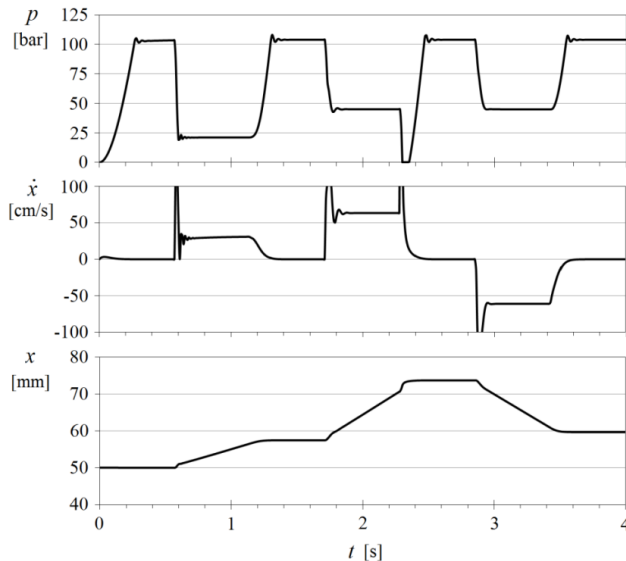


Figura 6.22. Resultat de la simulació per al circuit excloent i bloquejador de la figura 6.21. En l'instant $t = 0,6$ s s'excita l'electroimant "a" i el cilindre surt seguint el circuit no regeneratiu fins a l'instant $t = 1,2$. En l'instant $t = 1,7$ s s'exciten "a" i "c" i el cilindre surt de nou, però a més velocitat: s'ha activat el cycle regeneratiu. De l'instant $t = 2,8$ al $t = 3,4$ s s'excita "b" (i es desconnecten "a" i "c") i hi ha el retorn del cilindre diferencial a la mateixa velocitat (però en sentit contrari).

6.9 Servoactuadors hidràulics

Un servoactuator hidràulic és un sistema híbrid format per una servovàlvula i un cilindre de baix fregament, acoblats en un únic cos. La construcció compacta i sòlida d'un servoactuator redueix la longitud dels conductes de connexió, cosa que disminueix les pèrdues de línia, $\Delta p_{L,A}$ y $\Delta p_{L,B}$, i minimitza el volum d'oli entre la servovàlvula i el cilindre. Les prestacions dinàmiques del sistema milloren perquè el fregament és mínim i augmenta la rigidesa hidràulica del conjunt. El resultat és un element molt apropiat allà on calgui alta potència i precisió, amb gran velocitat de resposta i una freqüència pròpia molt elevada.

D'una manera senzilla, un servomecanisme (o un "servo") és un sistema de control que mesura el seu propi senyal de sortida, sigui una posició, una velocitat, una força o qualsevol altra magnitud física, i el corregeix de manera ràpida, precisa i estable per fer-lo coincidir amb el senyal d'entrada. Hi ha diferents alternatives tecnològiques que compleixen amb aquesta funció l'elecció de les quals depèn del nivell de potència necessària i de l'amplada de banda assolible: des dels servomecanismes electropneumàtics fins als electrohidràulics, passant pels mecànics. En general, s'admet que els servos hidràulics són la millor opció en aplicacions de gran potència que requereixin una resposta dinàmica elevada. El cost del sistema depèn, evidentment, del nivell de potència necessari, però això s'ha de considerar des d'una perspectiva relativa, perquè no és l'únic criteri de selecció. Un servo electrohidràulic és més car perquè



l'equip d'alimentació ha de ser d'alta pressió i no és senzill reduir el nivell de contaminació del sistema o mantenir condicionat el fluid. Aquests servos exigeixen un manteniment continuat, però la seva elevada rigidesa garanteix més precisió, menys sensibilitat a les pertorbacions externes i una millor resposta freqüencial que altres alternatives d'avui dia.

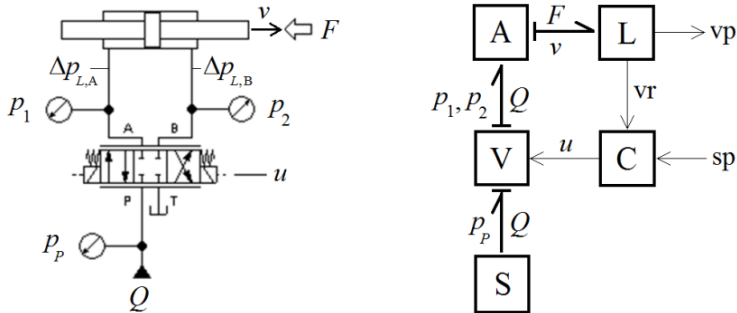


Figura 6.23. Servoactuador hidràulic simètric (en esquema) movent-se a velocitat v contra una força F . S, sistema hidràulic d'alimentació; V, servovàlvula; A, actuador; L, càrrega, i C, control i amplificador. vp és la variable del procés controlat, vr la variable mesura i sp la consigna (set point).

Aquest apartat se centra en la descripció dels servoactuadors hidràulics que es fan servir en servosistemes en què un actuador lineal és controlat per una vàlvula. Els elements bàsics dels servos electrohidràulics es mostren a la figura 6.24, tot i que es reconeix que no és l'única arquitectura possible.²³ Les prestacions d'un servoactuador són d'un ordre de magnitud superior a la d'altres sistemes proporcionals que fan servir vàlvules com a element de regulació, però el seu cost és també més alt, de manera que el seu ús no sempre és indicat, sobretot en aplicacions d'àmbit general o no gaire exigents. En qualsevol cas, les equacions que es dedueixen aquí també es poden utilitzar en el disseny d'un sistema format per l'acoblament d'una vàlvula proporcional i un actuador, ja sigui lineal o rotatiu.²⁴

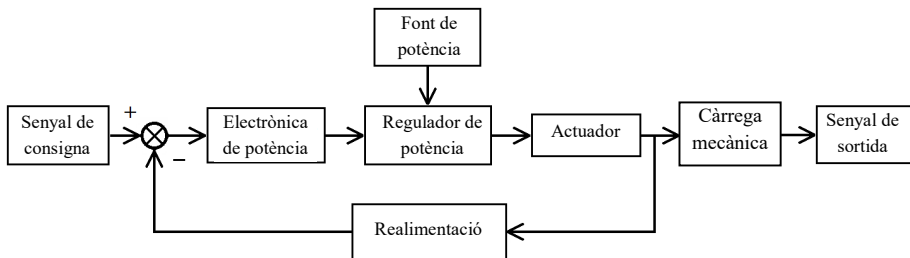


Figura 6.24. Arquitectura bàsica d'un servosistema electrohidràulic format per un conjunt de vàlvula (regulador de potència) i actuador.



6.9.1 Condició de potència màxima

El conjunt format per una vàlvula proporcional o una servovàlvula i un actuator, connectats com a la figura 6.23, verifica una condició de potència màxima comunicada a la càrrega que és funció de la grandària de la vàlvula i de la pressió d'alimentació per a una pressió de càrrega concreta. Aquesta condició permet determinar el conjunt òptim de les variables i dels paràmetres del sistema, que condueix al millor aprofitament de la potència disponible. En altres paraules, el disseny del sistema que es faci en la condició de màxim serà el de menys grandària i cost per a una potència determinada.

La potència transmesa a la càrrega per un actuator simètric (d'àrea, A , i $\varphi = 1$) en el supòsit ideal, sense pèrdues en els conductes ni en l'actuator, és:

$$N = Fv = (p_1 - p_2)Q \quad [6.52]$$

Per al cas d'una vàlvula de superposició nul·la (de solapament crític) i una característica de cabal del tipus:

$$Q = C_d S(x_c) \left(\frac{2\Delta p_{ij}}{\rho} \right)^{1/2} \quad [6.53]$$

on x_c és el desplaçament de la seva corredora, resulta:

$$N = (p_1 - p_2) C_d S(x_c) \left(\frac{2\Delta p_{ij}}{\rho} \right)^{1/2} \quad [6.54]$$

Si la vàlvula és simètrica, aquesta equació es pot escriure en funció de la pressió de càrrega, definida com a $p_L = p_1 - p_2 = F/A$, amb $p_T = 0$, com:

$$N = p_L C_d S(x_c) \left(\frac{p_P - p_L}{\rho} \right)^{1/2} \quad [6.55]$$

El màxim es troba derivant l'expressió anterior en funció de p_L i igualant a zero el resultat:

$$\frac{\rho^{1/2}}{C_d S(x_c)} \left[\frac{dN}{dp_L} \right]_{N_{\max}} = (p_P - p_L)^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{p_L}{(p_P - p_L)^{1/2}} = 0 \quad [6.56]$$

d'on es dedueix que la pressió de càrrega de potència màxima és:

$$p_L^{N_{\max}} = \frac{2}{3} p_P \quad [6.57]$$

i

$$N_{\max} = \frac{2}{3} p_P C_d S(x) \left(\frac{1}{3} \frac{p_P}{\rho} \right)^{1/2} \quad [6.58]$$



Aquesta última expressió es pot escriure, en funció de la condició nominal de la fórmula [6.5] per a $i = i_N$, de la forma:

$$N_{\text{màx}} = \left(\frac{4}{27}\right)^{1/2} \left(\frac{p_P}{\Delta p_N}\right)^{1/2} p_P Q_N \quad [6.59]$$

Les pressions p_1 i p_2 corresponents són:

$$\begin{aligned} p_1^{N_{\text{màx}}} &= \frac{1}{2}(p_P + p_L^{N_{\text{màx}}}) = \frac{5}{6}p_P \\ p_2^{N_{\text{màx}}} &= \frac{1}{2}(p_P - p_L^{N_{\text{màx}}}) = \frac{1}{6}p_P \end{aligned} \quad [6.60]$$

El rendiment es defineix com:

$$\eta = \frac{F_V}{p_P Q_B} = \frac{(p_1 - p_2)Q}{p_P Q_B} = \frac{p_L}{p_P} \frac{Q}{Q_B} \quad [6.61]$$

d'on es dedueix que el rendiment per a la potència màxima és del 66,7 % si la vàlvula limitadora es manté tancada. En cas contrari, el rendiment es calcularia fent:

$$\eta = \frac{(p_1 - p_2)(Q_B - Q_{VLP})}{p_P Q_B} = \frac{p_L}{p_P} \left(1 - \frac{Q_{VLP}}{Q_B}\right) \quad [6.62]$$

Si l'actuador és asimètric, amb $\varphi = A_2/A_1$, es demostra també que la pressió de càrrega de potència màxima continua sent $F/A_i = 2/3 p_P$, independentment del sentit del moviment, en què A_i és la superfície d'empenta: A_1 per al moviment de sortida, i A_2 , per al d'entrada. Les pressions p_1 i p_2 compleixen llavors les relacions següents, per al moviment de sortida:

$$\begin{aligned} p_L^{N_{\text{màx}}} &= \frac{F}{A_1} = \frac{2}{3} p_P \\ p_1^{N_{\text{màx}}} &= \frac{2}{3} \frac{1 + \frac{3}{2}\varphi^3}{1 + \varphi^3} p_P \\ p_2^{N_{\text{màx}}} &= \frac{1}{3} \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^3} p_P \end{aligned} \quad [6.63]$$

i, per al moviment entrada:

$$\begin{aligned} p_L^{N_{\text{màx}}} &= \frac{F}{A_2} = \frac{2}{3} p_P \\ p_1^{N_{\text{màx}}} &= \frac{1}{3} \frac{\varphi}{1 + \varphi^3} p_P \\ p_2^{N_{\text{màx}}} &= \frac{1}{3} \frac{3 + 2\varphi^3}{1 + \varphi^3} p_P \end{aligned} \quad [6.64]$$



Observem que les expressions [6.60], [6.63] i [6.64] són indistintes de la mida de la vàlvula utilitzada.²⁵

La pressió p_L no és constant durant el treball del sistema. És més, és possible que prengui el valor donat per [6.57] només en un breu interval de temps (tret que la càrrega sigui sensiblement constant durant tot el cicle, i l'efecte de l'acceleració, reduït).²⁶ No obstant això, aquesta relació és un bon indicatiu del valor mínim que s'ha de donar a la pressió d'alimentació per mantenir la pressió p_L per sota del valor de potència màxima, en la part creixent de la corba de potència de la figura 6.26. Aquest criteri evita que p_L tendeixi a p_P davant eventuais augments de la càrrega, circumstància no desitjable perquè redueix la caiguda de pressió a través de les vies de la vàlvula i en disminueix no només el cabal, sinó també el guany i la seva capacitat de control.

6.9.2 Disseny del servoactuator òptim

Els servoactuadors es dissenyen segons si interessa que el resultat tingui un cilindre d'àrea mínima, la servovàlvula més petita, o que el conjunt tingui el mínim cost, el mínim pes, el màxim rendiment, etc. El dimensionament segueix uns criteris funcionals de mínima força, mínima velocitat sense càrrega o vàlvula més petita.

Les especificacions òptimes del servoactuator només es poden concretar una vegada estudiada l'aplicació en què s'ha d'instal·lar i es coneixen les característiques de tots els punts de treball. En general, és suficient representar, en un gràfic de força-velocitat, els punts de funcionament del sistema més compromesos (que, amb experiència, se sabrà trobar fàcilment) i localitzar quin punt del diagrama (F, v) exigeix més potència hidràulica, anomenat *punt crític* (CR). Un servoactuator amb un disseny que tingui en compte el punt crític no ha de tenir problemes de funcionament en altres punts en què la situació de treball no sigui tan adversa.

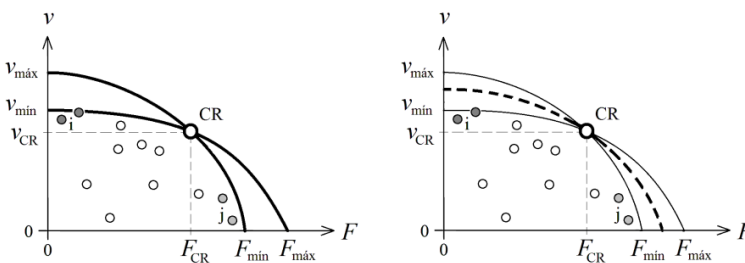


Figura 6.25. Exemple de punts de funcionament (\circ) d'un servoactuator i de les diferents envolupants utilitzades en el seu disseny. El punt crític és aquell per al qual la potència és màxima (producte Fv màxim).

El funcionament límit F vs. v d'un servoactuator es pot aproximar mitjançant una paràbola invertida. La figura 6.25 mostra dos possibles dissenys de servoactuator que passen pel punt crític. La paràbola més plana envolta tots els punts de funcionament



de velocitat màxima i força mínima (punts “i” a l’esquerra i a dalt del gràfic). La paràbola més vertical s’ajusta tancant tots els punts de força màxima i velocitat mínima (punts “j” a la dreta i a baix del gràfic). El primer servoactuator està sobredimensionat en força (F_{\max}), mentre que el segon ho està en velocitat (v_{\max}).

El disseny de força mínima implica l’àrea més petita possible del servoactuator per a una determinada pressió d’alimentació, p_P . Com que la condició de força mínima també s’ha de complir quan $v = 0$, és a dir, quan no hi ha flux ni pèrdues, s’ha de complir que:

$$A_{\min} = \frac{F_{\min}}{p_P} \quad [6.65]$$

El balanç energètic sobre la condició crítica de treball indica que

$$p_P = \Delta p_V + kQ_{CR}^2 + p_L \quad [6.66]$$

on s’han agrupat les pèrdues en línia mitjançant el terme:

$$kQ_{CR}^2 = \Delta p_{L,A} + \Delta p_{L,B} \quad [6.67]$$

Com que la pressió de càrrega en el punt crític és:

$$p_L = \frac{F_{CR}}{A_{\min}} \quad [6.68]$$

i la suma de les caigudes de pressió a través de la vàlvula per totes dues vies és, segons [6.5], per a $i = i_N$ i un actuator simètric:

$$\Delta p_V = \Delta p_N \left(\frac{Q_{CR}}{Q_N} \right)^2 \quad [6.69]$$

resulta que, en funció de la velocitat crítica, el balanç [6.66] s’escriu:

$$p_P = \left(k + \frac{\Delta p_N}{Q_N^2} \right) (v_{CR} A_{\min})^2 + \frac{F_{CR}}{A_{\min}} \quad [6.70]$$

Es dedueix que la mida de vàlvula corresponent al disseny d’àrea mínima és:

$$Q_N^2 = \frac{(v_{CR} A_{\min})^2}{\left(p_P - \frac{F_{CR}}{A_{\min}} \right) - k(v_{CR} A_{\min})^2} \Delta p_N \quad [6.71]$$

En un servoactuator, es pot suposar que l’efecte de la constant k és més petita i, llavors, amb [6.65]:

$$Q_N = \frac{1}{\left(1 - \frac{F_{CR}}{F_{\min}} \right)^{1/2}} \left(\frac{\Delta p_N}{p_P} \right)^{1/2} \frac{F_{\min}}{p_P} v_{CR} \quad [6.72]$$



El disseny de velocitat mínima condueix al servoactuator d'àrea màxima. La determinació de l'àrea i de la grandària de vàlvula corresponents a aquest disseny passa, en aquest cas, per plantejar el balanç per a $F = 0$:

$$p_P = \left(k + \frac{\Delta p_N}{Q_N^2} \right) (v_{\min} A_{\max})^2 \quad [6.73]$$

Com que, sobre el punt crític, és:

$$p_P = \left(k + \frac{\Delta p_N}{Q_N^2} \right) (v_{\text{CR}} A_{\max})^2 + \frac{F_{\text{CR}}}{A_{\max}} \quad [6.74]$$

s'aïlla, de totes dues equacions, que:

$$A_{\max} = \frac{1}{1 - \left(\frac{v_{\text{CR}}}{v_{\min}} \right)^2} \frac{F_{\text{CR}}}{p_P} \quad [6.75]$$

i

$$Q_N^2 = \frac{(v_{\text{CR}} A_{\max})^2}{\left(p_P - \frac{F_{\text{CR}}}{A_{\max}} \right) - k (v_{\text{CR}} A_{\max})^2} \Delta p_N \quad [6.76]$$

o bé, per a $k \approx 0$:

$$Q_N = \left(\frac{\Delta p_N}{p_P} \right)^{1/2} v_{\min} A_{\max} \quad [6.77]$$

Aquesta última expressió també es pot escriure com:

$$Q_N = \frac{1}{1 - \left(\frac{v_{\text{CR}}}{v_{\min}} \right)^2} \left(\frac{\Delta p_N}{p_P} \right)^{1/2} \frac{F_{\text{CR}}}{p_P} v_{\min} \quad [6.78]$$

És possible obtenir qualsevol disseny de servoactuator simplement variant l'àrea A entre els casos d'àrea mínima i àrea màxima analitzats fins ara. El disseny resultant cobreix tots els punts de treball esperats del servoactuator (per exemple, línia a traços de la figura 6.25) i, entre tots els possibles dissenys intermedis, en mereix especial atenció un: aquell que condueix al disseny del servoactuator que empra la vàlvula més petita per a una pressió d'alimentació, p_P , constant. Aquesta condició es troba fent:

$$\frac{dQ_N}{dA} = 0 \quad [6.79]$$

en el balanç plantejat per al punt crític [6.66], amb $k = 0$, i condueix al resultat:

$$A^* = \frac{3}{2} \frac{F_{\text{CR}}}{p_P} \quad [6.80]$$



En aquest disseny, doncs, es compleix que:

$$p_L = \frac{F_{CR}}{A^*} = \frac{2}{3} p_P \quad [6.81]$$

Aquest resultat implica que la pèrdua de pressió total a través de la vàlvula, suma de les pèrdues per cadascuna de les seves vies, és un terç de la pressió d'alimentació, condició que coincideix amb [6.57] i [6.60].

El Q_N mínim resulta de substituir l'àrea A^* en la condició crítica i és:

$$Q_N^* = \left(\frac{27}{4}\right)^{1/2} \left(\frac{\Delta p_N}{p_P}\right)^{1/2} \frac{F_{CR}}{p_P} v_{CR} = 3^{1/2} \left(\frac{\Delta p_N}{p_P}\right)^{1/2} Q_{CR} \quad [6.82]$$

Observem que aquest valor de Q_N es correspon amb el de potència màxima de [6.59] per a $N_{m\grave{a}x} = F_{CR} v_{CR}$.

La relació entre qualsevol altra mida i el mínim anterior en funció de la relació d'àrees corresponent és:

$$\left(\frac{Q_N}{Q_N^*}\right)^2 = \frac{\Delta p_N (v_{CR} A)^2 \left(p_P - \frac{F_{CR}}{A}\right)^{-1}}{\Delta p_N (v_{CR} A^*)^2 \left(p_P - \frac{F_{CR}}{A^*}\right)^{-1}} = \left(\frac{A}{A^*}\right)^2 \frac{p_P - \frac{F_{CR}}{A^*}}{p_P - \frac{F_{CR}}{A}} \quad [6.83]$$

d'on, amb [6.80], es dedueix:

$$\left(\frac{Q_N}{Q_N^*}\right)^2 = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{A}{A^*}\right)^2}{1 - \frac{2}{3} \frac{A^*}{A}} \quad [6.84]$$

Aquesta equació s'ha representat a la figura 6.26 i se'n dedueixen importants relacions entre els valors característics del servoactuator. Per exemple, l'àrea més petita possible és A_0 , per a la qual s'anul·la el denominador de [6.84]:

$$\frac{A_0}{A^*} = \frac{2}{3} \quad [6.85]$$

D'altra banda, és fàcil comprovar que es compleixen les relacions següents:

$$\frac{A_{\min}}{A^*} = \frac{2}{3} \frac{F_{\min}}{F_{CR}} > \frac{2}{3}$$

$$\frac{A_{\max}}{A^*} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \left(\frac{v_{CR}}{v_{\min}}\right)^2} > \frac{2}{3} \quad [6.86]$$

i, a més, com que $A_{\min} < A_{\max}$:



$$1 < \frac{F_{\min}}{F_{CR}} < \frac{1}{1 - \left(\frac{v_{CR}}{v_{\min}}\right)^2} \quad [6.87]$$

Aquesta última expressió suggereix que la tria de les paràboles de la figura 6.25 no pot ser arbitrària i imposa restriccions a l'hora de fer el disseny del servoactuador amb les condicions d'àrea mínima i d'àrea màxima en funció de la condició crítica.

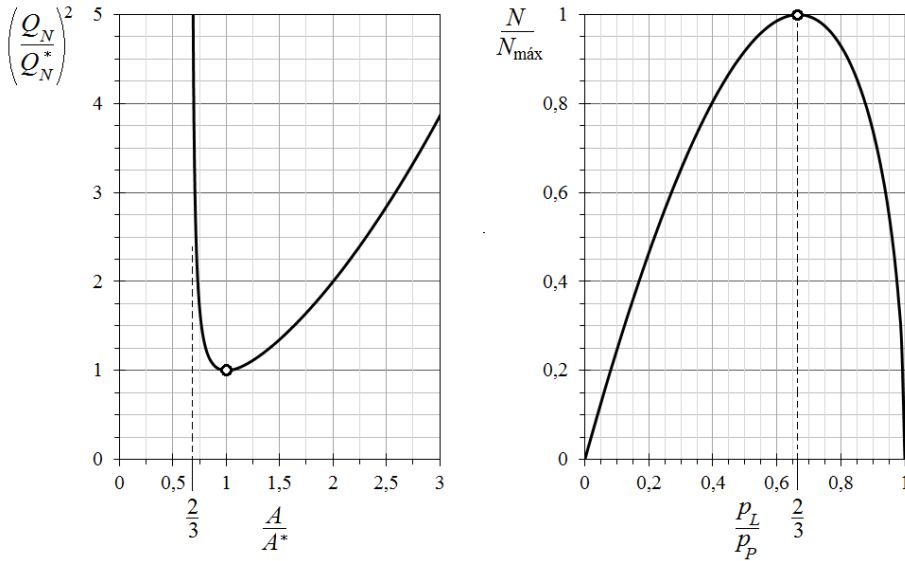


Figura 6.26. Relació de cabals nominals en funció de l'àrea del servoactuador (esquerra) i corba de potència hidràulica normalitzada (dreta).

6.9.3 Diagrama de funcionament

Les característiques de funcionament d'un servoactuador es poden estimar en diferents intervals de freqüència, en cadascun dels quals es manifesta una limitació funcional típica dels sistemes hidràulics. Se sap que aquests límits són:

- Dimensional, a freqüències baixes, definida per la carrera màxima, L .
- De cabal, a freqüències intermèdies, que limita la velocitat màxima assumible pel servoactuador.
- De pressió, a freqüències altes, que condiciona l'acceleració màxima del moviment.

La correspondència de cadascuna d'aquestes limitacions amb el moviment resultant d'un servoactuador s'entén millor amb un exemple. Suposem que volem que el servoactuador faci moviments sinusoidals d'una amplitud x_0 a una determinada freqüència. La carrera, la velocitat i l'acceleració del moviment segueixen les equacions:



$$\begin{aligned}
 x &= x_0 \sin \omega t = x_0 \sin 2\pi f t \\
 v &= x_0 \omega \cos \omega t = 2\pi x_0 f \cos 2\pi f t \\
 a &= -x_0 \omega^2 \sin \omega t = -4\pi^2 x_0 f^2 \sin 2\pi f t
 \end{aligned}
 \tag{6.88}$$

La velocitat i l'acceleració màximes d'aquests moviments són:

$$\begin{aligned}
 v_{\text{màx}} &= x_0 \omega = 2\pi x_0 f \\
 a_{\text{màx}} &= v_{\text{màx}} \omega = x_0 \omega^2 = 4\pi^2 x_0 f^2
 \end{aligned}
 \tag{6.89}$$

S'entén que l'amplitud màxima possible dels moviments, x_0 , és la meitat de la carrera total de l'actuador, $L/2$.

El servoactuador pot fer sense dificultat moviments sinusoidals d'una amplitud $L/2$ a baixes freqüències mentre es verifiqui que la velocitat màxima del moviment, $v_{\text{màx}}$, sigui:

$$v_{\text{màx}} < \frac{Q_B}{A} = v_1 \tag{6.90}$$

El límit és a la freqüència rotativa amb què la velocitat màxima que el moviment sinusoidal necessita per a l'amplitud $L/2$ no pot ser subministrada pel cabal de la bomba, v_1 . Aquesta freqüència és:

$$\omega_1 = \frac{2Q_B}{AL} \tag{6.91}$$

o bé:

$$f_1 = \frac{Q_B}{\pi AL} \tag{6.92}$$

Aquesta condició fa que la carrera del moviment límit resultant s'escurci per a freqüències més grans que f_1 , segons la relació:

$$x_{\text{màx}} = \frac{Q_B}{2\pi f A} = \frac{f_1 L}{f} < \frac{L}{2} \tag{6.93}$$

L'equilibri dinàmic sobre l'actuador revela que una cosa semblant passa amb l'acceleració i la pressió, a mesura que augmenta la freqüència: amb una pressió d'alimentació, p_P , constant, el servoactuador no pot generar l'acceleració que li exigeix el moviment d'una freqüència més gran a una de donada, encara que tingui prou cabal. Per a un servoactuador simètric dissenyat de manera que $p_V = 1/3 p_P$, l'acceleració màxima admissible és:²⁷

$$a_2 = v_1 \omega_2 = 2\pi^2 f_1 f_2 L = \frac{(\frac{2}{3} p_P - p_L) A}{m} \tag{6.94}$$

que es presenta a la freqüència:

$$f_2 = \frac{(\frac{2}{3} p_P - p_L) A^2}{2\pi Q_B m} \tag{6.95}$$



La carrera i la velocitat màximes es redueixen quan augmenta la freqüència a partir d'aquest valor, segons les relacions:

$$x_{\text{màx}} = \frac{a_2}{\omega^2} = \left(\frac{f_2}{f}\right)^2 x_2 = \frac{f_1 f_2}{f^2} \frac{L}{2} \quad [6.96]$$

$$v_{\text{màx}} = \frac{a_2}{\omega} = \frac{f_2}{f} v_1$$

La freqüència rotativa pròpia mínima d'un actuator lineal (de parets rígides i amb un volum d'oli negligible en els conductes de connexió) amb un fluid de mòdul volumètric isentròpic, B_S , de [1.85], és:

$$\omega_N = \left(\frac{\alpha_{\text{mín}}}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{AB_S(1 + \varphi^{1/2})^2}{Lm}\right)^{1/2} \quad [6.97]$$

de manera que, per a un actuator simètric com el que s'ha tractat ($\varphi = 1$), tenim:

$$f_N = \frac{1}{\pi} \left(\frac{AB_S}{Lm}\right)^{1/2} \quad [6.98]$$

El sistema no respon –o ho fa de manera imperceptible– quan és excitat a freqüències superiors a aquest valor.

El diagrama de funcionament emmarca tots els possibles punts de treball del servoactuator en funció de la freqüència. És a dir, el servoactuator pot treballar en qual-sevol punt del diagrama per sota de la corba envolupant. Normalment, aquest diagrama representa la relació entre la velocitat i la freqüència en un gràfic logarítmic, de manera que les línies de posició i d'acceleració constants tenen un pendent de 45° ($\text{tg}(45^\circ) = +1$) i -45° ($\text{tg}(-45^\circ) = -1$), respectivament.²⁸ Els punts característics d'aquest diagrama són els que s'indiquen a la taula 6.11, i la seva forma típica és la d'un trapezi, tal com s'indica a la figura 6.27.

	Punt "1"	Punt "2"	Punt "3"
x	$\frac{L}{2}$	$\frac{f_1}{f_2} \frac{L}{2} = \frac{mQ_B^2}{(\frac{2}{3}p_P - p_L)A^3}$	$\frac{f_1 f_2}{f_3^2} \frac{L}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}p_P - p_L\right) \frac{L}{B_S}$
v	$\pi f_1 L = \frac{Q_B}{A}$	$\pi f_1 L = \frac{Q_B}{A}$	$\frac{f_2}{f_3} \frac{Q_B}{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}p_P - p_L\right) \left(\frac{LA}{mB_S}\right)^{1/2}$
a	$2\pi^2 f_1^2 L = \frac{2}{L} \left(\frac{Q_B}{A}\right)^2$	$2\pi^2 f_1 f_2 L = \frac{(\frac{2}{3}p_P - p_L)A}{m}$	$2\pi^2 f_1 f_2 L = \frac{(\frac{2}{3}p_P - p_L)A}{m}$
f	$\frac{Q_B}{\pi AL}$	$\frac{(\frac{2}{3}p_P - p_L)A^2}{2\pi Q_B m}$	$\frac{1}{\pi} \left(\frac{AB_S}{Lm}\right)^{1/2}$

Taula 6.11. Aquestes relacions, en funció de la freqüència i els seus intervals, permeten intuir el comportament dinàmic asimptòtic límit del sistema servoactuator-càrrega, però són només una referència útil quan no es disposa de més informació, ja que cada aplicació particular exigeix estudiar detalladament quins són els seus límits funcionals presents (per si n'hi ha d'altres).



El tractament seguit fins a l'obtenció dels punts característics del diagrama ha suposat que els límits funcionals es presenten per ordre, és a dir, primer el de velocitat i, després, el d'acceleració. Aquesta és la hipòtesi de treball convencional, atesa la dependència [6.89] de la velocitat i de l'acceleració màximes respecte de la freqüència del moviment, lineal i quadràtica, respectivament. No obstant això, i encara que aquesta sigui la situació més normal a la pràctica, és possible que els límits en velocitat i en acceleració s'alternin si, per exemple, la pressió d'alimentació és anormalment petita o el cabal de la bomba és massa gran. Aquesta condició condueix a diagrames característics en forma de vèrtex, no de trapezi, la freqüència de pic del qual és:

$$f_{\wedge} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(\frac{2}{3} P_P - P_L) A}{2Lm} \right)^{1/2} \quad [6.99]$$

com pot comprovar el lector fàcilment

D'altra banda, el gràfic obtingut no té en consideració dues qüestions molt importants que concerneixen aquests tipus de sistemes: la influència de la dinàmica intrínseca del sistema actuator-carrega, associada a una freqüència natural donada per [6.98], amb $f_N = f_3$, i la freqüència pròpia de la vàlvula utilitzada, f_V .

En principi, cal pensar que, si es pretenen aprofitar al màxim les característiques dinàmiques del sistema físic, convé triar una vàlvula amb una freqüència pròpia que sigui almenys tres vegades superior a f_N . Aquest sobredimensionat permet treballar la vàlvula sempre en la part seguidora del seu diagrama de Bode, regió on no hi ha un desfasament apreciable entre el senyal de comandament i el moviment de la corredora, i el cabal segueix fidelment l'equació [6.5].

No obstant això, el comportament del sistema està molt influït per la dinàmica de l'actuator, de manera que sovint és recomanable reduir el valor de f_V per sota de f_N . Els sistemes hidràulics tenen coeficients d'amortiment, ξ , baixos, de l'ordre de 0,2 i inferiors, cosa que fa de la seva resposta temporal present un sobrepassament d'amplitud en les freqüències pròximes a f_N . Així, encara que el coeficient d'amortiment de la vàlvula comercial sigui pròxim al crític, $\xi_c = 1/2^{1/2} = 0,707$, cosa que redueix la zona de ressonància en els sistemes de segon ordre, el conjunt del sistema té tendència a oscil·lar en el veïnatge de la freqüència pròpia f_N , amplificant el senyal d'entrada. Aquesta circumstància desvirtua el diagrama característic obtingut analíticament si la freqüència del punt "3" està pròxima a la del punt "2", fins i tot sent una mica superior. El resultat pràctic és que apareix una zona en què la velocitat real pot ser més gran que la possible hidràulicament, v_1 , en què l'usuari perdria el control del sistema.²⁹

Admetent que el nostre objectiu és assegurar la resposta del sistema amb una amplada de banda que inclogui el punt "2", com a mínim, la freqüència f_N s'ha de situar, en conseqüència, per sobre de f_2 en una raó aproximada de quatre per assegurar que



no hi hagi un sobrepassament d'amplitud com a resultat del subamortiment (figura 6.27). Aquesta condició, segons [6.98], defineix l'àrea mínima necessària de l'actuator, atès que la seva carrera ve imposada pel moviment, i la càrrega i el mòdul volumètric no són variables lliures.

L'efecte de la vàlvula a freqüències superiors a f_V s'observa en el diagrama característic mitjançant línies rectes, el pendent negatiu de les quals depèn de la mena d'osca que presenti la corredora i de l'ordre de la seva dinàmica, n . L'àrea $S(x_c)$ de [6.53] és proporcional a x_c en cas d'osca rectangular, i al seu quadrat si l'osca és triangular (circumstància que va motivar l'ús de l'exponent k a [6.5]). Com que s'admet que el fabricant assegura que la dinàmica de la vàlvula és estable, la pèrdua de cabal associada a la reducció de l'amplitud del desplaçament de la seva corredora a partir de f_V és:

$$Q = \left(\frac{f}{f_V}\right)^{-kn} Q_N \left(\frac{i}{i_N}\right)^k \left(\frac{2\Delta p_{ij}}{\Delta p_N}\right)^{1/2} \tag{6.100}$$

Aquest plantejament no té en compte el desfasament entre x_c i el senyal de comandament, i , a mesura que augmenta f , però sí que proporciona l'atenuació en cabal que presenta la vàlvula durant el cicle en obert. La dinàmica completa de la corredora s'ha de tenir en compte quan es pretén resoldre el sistema de control, tal com es fa en l'apartat següent.

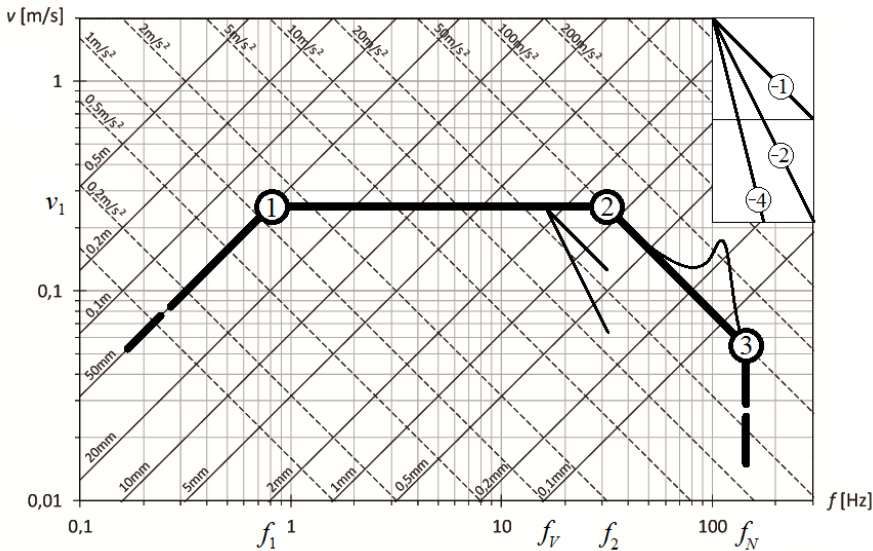


Figura 6.27. Diagrama típic d'un servoactuator. El mètode de treball pot ser directe, com s'ha fet en el text, o invers. Per exemple, imposades les prestacions desitjades del servoactuator en freqüència i amplitud, el diagrama de funcionament permet triar el cabal de la bomba, l'àrea de l'actuator i la pressió d'alimentació necessària. El caràcter logarítmic del diagrama converteix l'expressió [6.100] en rectes de pendent $-kn$ (a la figura, línies més primes per a $k = 1$, amb $n = 1$ i $n = 2$, respectivament). El marc de la cantonada superior dreta mostra els pendents típics (negatius) del diagrama



6.9.4 Servo de posició amb actuator simètric

Suposem un servosistema de posició com el de la figura 6.28, amb una vàlvula simètrica i críticament solapada, del qual es vol estudiar la influència de la càrrega, F_L , i dels altres paràmetres mostrats, en la dinàmica i l'estabilitat del sistema controlat.

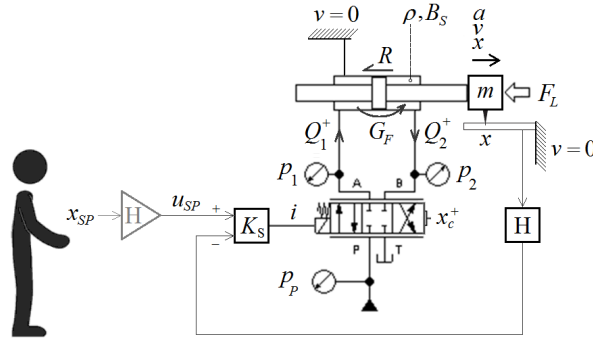


Figura 6.28. Servosistema de posició simètric. S'admet que el sistema hidràulic d'alimentació (no mostrat a la figura) és adequat, tant en la disposició dels seus components com en la potència instal·lada i el cabal de bomba. Fase positiva. GF és la conductància del cabal de fuites internes de l'actuator, i R és la resistència de fricció mecànica

Les equacions que regeixen el comportament general del servosistema són: l'equació del moviment, les equacions de flux a través de les vies de la vàlvula i les equacions de continuïtat aplicades a totes dues càmeres de l'actuator. A continuació, es veurà que la simetria del problema permet simplificar aquestes equacions i reduir-ne el nombre. El sistema d'equacions reduït es pot linealitzar i reescriure utilitzant la transformada de Laplace incloent-hi el llaç de control i la dinàmica de la vàlvula, per deduir les característiques freqüencials del sistema físic i analitzar-ne millor l'estabilitat i controlabilitat. A continuació, se suposarà que la pressió d'alimentació, p_P , es manté constant durant el funcionament del servo i que la de tanc, p_T , és pràcticament nul·la.

El balanç de forces sobre l'actuator en moviment s'escriu:

$$(p_1 - p_2)A = ma + Rv + F_L \quad [6.101]$$

Els cabals que travessen cadascuna de les vies de la vàlvula són, per al moviment de fase positiva, amb $x_c > 0$:

$$Q_1^+ = C_d S(x_c) \left(\frac{2(p_P - p_1)}{\rho} \right)^{1/2}$$

$$Q_2^+ = C_d S(x_c) \left(\frac{2p_2}{\rho} \right)^{1/2} \quad [6.102]$$

i, per al de negativa, amb $x_c < 0$:



$$\begin{aligned} Q_1^- &= C_d S(x_c) \left(\frac{2p_1}{\rho} \right)^{1/2} \\ Q_2^- &= C_d S(x_c) \left(\frac{2(p_p - p_2)}{\rho} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad [6.103]$$

Les pressions p_1 i p_2 , durant el moviment de sortida, segueixen l'evolució marcada per les equacions de continuïtat següents:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{B_s} \frac{dp_1}{dt} &= Q_1^+ - Av - G_F(p_1 - p_2) \\ \frac{V_2}{B_s} \frac{dp_2}{dt} &= -Q_2^+ + Av + G_F(p_1 - p_2) \end{aligned} \quad [6.104]$$

La primera simplificació consisteix a admetre que els cabals Q_1 y Q_2 en cada fase del moviment no poden ser molt diferents entre si, cosa que suposa que les caigudes de pressió en les vies de la vàlvula tampoc ho són i, per tant, s'ha de complir que $p_p = p_1 + p_2$. Això és estrictament cert en règim permanent ja que, sumant les equacions de [6.104], se segueix:

$$\frac{V_1}{B_s} \frac{dp_1}{dt} + \frac{V_2}{B_s} \frac{dp_2}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad [6.105]$$

A més, si es fa:

$$Q_L = \left(\frac{Q_1^2 + Q_2^2}{2} \right)^{1/2} = C_d S(x_c) \frac{1}{\rho^{1/2}} (p_p - \text{sgn}(x_c) p_L)^{1/2} \quad [6.106]$$

es pot definir la pressió de càrrega com $p_L = p_1 - p_2$ en qualsevol cas, tant per a $x_c > 0$ com per a $x_c < 0$, amb $-p_p < p_L < p_p$.³⁰

Les equacions de cabal [6.102], [6.103] i [6.106] poden ser linealitzades en funció dels guanys de cabal i dels coeficients de pressió de la vàlvula. Si la pressió d'alimentació es manté constant, el resultat és, per a les primeres:

$$\begin{aligned} \delta Q_1^+ &= k_{x_{c,1}}^+ \delta x_c - k_{p_1}^+ \delta p_1 \\ \delta Q_2^+ &= k_{x_{c,2}}^+ \delta x_c + k_{p_2}^+ \delta p_2 \\ \delta Q_1^- &= k_{x_{c,1}}^- \delta x_c + k_{p_1}^- \delta p_1 \\ \delta Q_2^- &= k_{x_{c,2}}^- \delta x_c - k_{p_2}^- \delta p_2 \end{aligned} \quad [6.107]$$

i, per a l'última:

$$\delta Q_L = k_{x_c} \delta x_c - k_{p_L} \delta p_L \quad [6.108]$$

La simplificació efectuada permet relacionar aquests coeficients entre si. Per exemple, per a la fase positiva, es compleix:



$$\begin{aligned}
 k_{x_{c,1}}^+ &= k_{x_{c,2}}^+ = k_{x_c}^+ = \\
 &= C_d \left[\frac{dS(x_c)}{dx_x} \right]_{x_{c,0}} \left(\frac{2(p_p - p_{10})}{\rho} \right)^{1/2} = C_d \left[\frac{dS(x_c)}{dx_x} \right]_{x_{c,0}} \left(\frac{p_p - p_{L,0}}{\rho} \right)^{1/2} \quad [6.109] \\
 k_{p_1}^+ &= k_{p_2}^+ = 2k_{p_L}^+ = \\
 &= C_d S(x_{c,0}) (2\rho(p_p - p_{10}))^{-1/2} = C_d S(x_{c,0}) (\rho(p_p - p_{L,0}))^{-1/2}
 \end{aligned}$$

Aquesta simplificació és possible encara que el moviment no sigui permanent, sempre que les diferències en cabal siguin d'un ordre inferior a Q_L . Si, iniciat el règim permanent a velocitat v amb alimentació i constant, hi ha un canvi singular en F_L , aquest canvi modificarà p_1 i p_2 segons [6.101], però afectarà els termes derivatius de [6.104] abans d'observar un canvi significatiu en la velocitat de l'actuador. En el cas que els volums de totes dues cambres no siguin molt diferents en aquest instant, l'equació [6.105] suggereix que la diferència dels cabals es mantindrà pròxima a zero, ja que cal esperar que els increments de pressió en totes dues cambres siguin del mateix ordre, però de signe canviat.³¹

Mentre que la primera simplificació se servia de la simetria per forçar la igualtat d'algun dels guanyos del sistema i poder definir la pressió i el cabal de càrrega (per al qual se suposa que $Q_L = Q_1 = Q_2$), la segona força la simetria per poder agrupar els termes de compressibilitat i escriure [6.104] en una única expressió. Aquesta simplificació es fonamenta en el fet que la funció:

$$f(V_1) = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V - V_1} \quad [6.110]$$

té un mínim quan $2V_1 = V$, cosa que situa la carrera de freqüència mínima de l'actuador simètric en $L/2$ (que, a més, sol ser la seva zona de treball usual). Amb aquesta condició de mínim i [6.106], la diferència entre les equacions [6.104] s'escriu:

$$Q_L = \frac{V}{4B_S} \frac{dp_L}{dt} + Av + G_F p_L \quad [6.111]$$

El conjunt d'equacions [6.101], [6.108] i [6.111] es pot reescriure en el camp freqüencial fent servir la transformada de Laplace. El resultat és:³²

$$\begin{aligned}
 AP_L(s) &= (ms^2 + Rs)X(s) + F_L(s) \\
 Q_L(s) &= k_{x_c} X_c(s) - k_{p_L} P_L(s) \\
 Q_L(s) &= \left(G_F + \frac{V}{4B_S} s \right) P_L(s) + AsX(s)
 \end{aligned} \quad [6.112]$$

Combinant les dues últimes i definint el coeficient total de pressió, k_p , com:

$$k_p = k_{p_L} + G_F \quad [6.113]$$

tenim:



$$k_{x_c} X_c(s) = AsX(s) + \left(k_p + \frac{V}{4B_s} s \right) P_L(s) \quad [6.114]$$

La dinàmica de la vàlvula es pot introduir, per exemple, en la forma:

$$G_V(s) = \frac{X_c(s)}{I(s)} = \frac{g_{xi}}{1 + \frac{s}{2\pi f_V}} \quad [6.115]$$

El servoamplificador genera el senyal d'entrada a la vàlvula en funció de l'error observat en la posició. Per a un guany de l'amplificador, K_S , el laç de control realimentat és:

$$X_c(s) = (HX_{sp}(s) - H(s)X(s))K_S G_V(s) \quad [6.116]$$

El diagrama de blocs de la figura 6.29 representa, de manera completa, el sistema en laç tancat, però encara es pot reduir a un equivalent més adequat. Com:

$$\left(\frac{k_{x_c}}{A} G_V(s) I(s) - AV(s) \right) \frac{A}{\frac{V}{4B_s} s + k_p} - F_L(s) = (ms + R)V(s) \quad [6.117]$$

resulta, després d'agrupar-ne i reordenar-ne els termes:

$$\frac{k_{x_c}}{A} G_V(s) I(s) - \frac{k_p}{A^2} \left(1 + \frac{V}{4B_s k_p} s \right) F_L(s) = \left(1 + R \frac{k_p}{A^2} \right) D(s) V(s) \quad [6.118]$$

amb:

$$D(s) = 1 + \frac{mk_p}{A^2} + \frac{VR}{4B_s A^2} s + \frac{mV}{4B_s A^2} s^2 \quad [6.119]$$

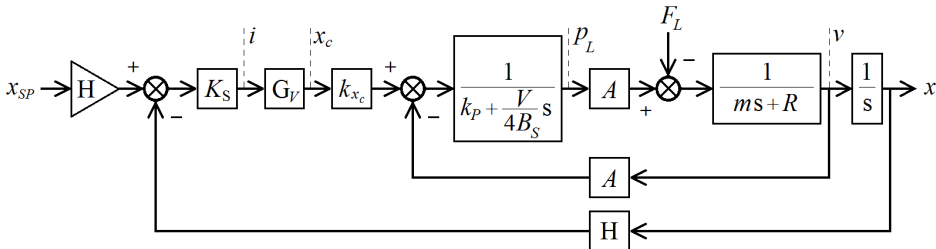


Figura 6.29. Diagrama de blocs del sistema d'equacions [6.114], [6.115] i [6.116]. La dinàmica del sensor sol ser bastant més elevada que la del sistema. El bloc H(s) es pot substituir pel seu guany H.

Observem que, si es compleix la condició:



$$O\left(R \frac{k_p}{A^2}\right) \ll 1 \quad [6.120]$$

el sistema admet la representació de la figura 6.30, i la seva freqüència natural i el seu coeficient d'amortiment són, respectivament:³³

$$f_N = \frac{1}{\pi} \left(\frac{B_s A^2}{mV} \right)^{1/2} \quad [6.121]$$

$$\xi_h = \frac{k_p}{A} \left(\frac{B_s m}{V} \right)^{1/2} + \frac{R}{4A} \left(\frac{V}{B_s m} \right)^{1/2}$$

Si, en canvi, el terme Rk_p/A^2 no pot ser menyspreat, llavors:

$$f'_N = f_N \left(1 + R \frac{k_p}{A^2} \right)^{1/2} \quad [6.122]$$

$$\xi'_h = \xi_h \left(1 + R \frac{k_p}{A^2} \right)^{-1/2}$$

La modificació del diagrama de blocs reduït és immediata.

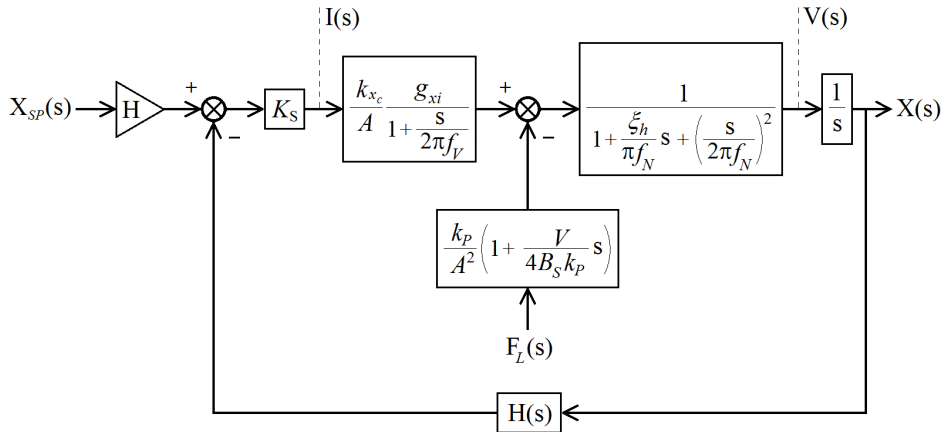


Figura 6.30. Diagrama de blocs adaptat. La dinàmica de la corredora de la vàlvula [6.115] es pot reemplaçar per una altra de segon ordre sense problemes i sense canviar les definicions de [6.121].

Per estudiar l'estabilitat del servosistema, cal analitzar el guany en llaç obert. La resposta en freqüència en llaç obert és:

$$A(s) = \frac{K_S k_{x_c} g_{x_i} H}{A} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{2\pi f_v} \right) \left(1 + \frac{\xi_h}{\pi f_N} s + \frac{1}{(2\pi f_N)^2} s^2 \right)} \frac{1}{s} \quad [6.123]$$



El sistema és condicionalment estable en funció del valor que prengui el guany estacionari del llaç:

$$K_A = \frac{K_S k_{x_c} g_{xi} H}{A} \quad [6.124]$$

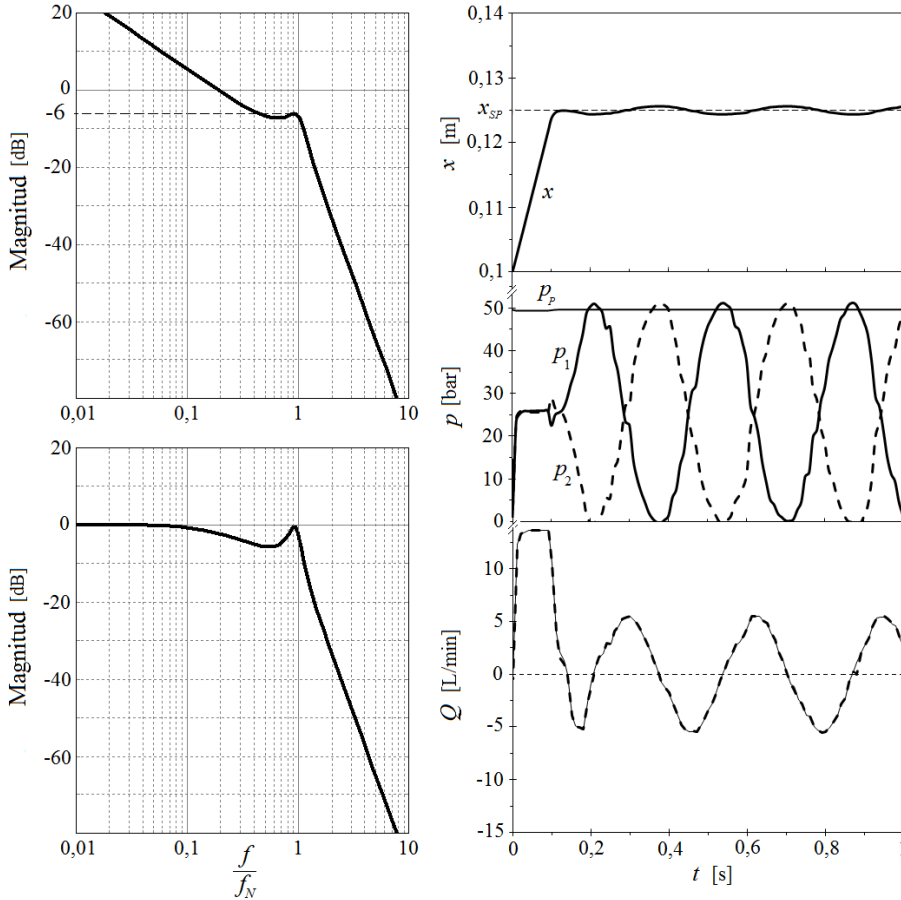


Figura 6.31. A l'esquerra, els diagrames de Bode en amplitud del sistema de la figura 6.30 (a dalt, la resposta en llaç obert [6.123] i, a baix, en llaç tancat). A la dreta, la resposta temporal simulada de diferents variables del sistema a una entrada en esglaió, x_{SP} . Observem la similitud entre tots dos cabals, Q_1 i Q_2 , del gràfic inferior. Dades: $p_P = 50$ bar; $FL = 0$ N; $m = 20,75$ kg; $A = 9,46$ cm²; $L = 0,25$ m; $V = 0,44$ L; $BS = 109$ Pa; $\rho = 900$ kg/m³; $H = 10$ V/m; $f_N = 100$ Hz; $\xi_h = 0,185$; $K_S = 0,694$ A/V; $RkP/A^2 = 0,0027 \ll 1$

El criteri més acceptat per garantir l'estabilitat d'aquests sistemes consisteix a triar un marge de guany, M_A , prou positiu.³⁴ Com:

$$M_A = -20 \log_{10} \left| \frac{K_A}{4\pi^2 \xi_h f_N} \right| \quad [6.125]$$



el criteri d'estabilitat és que:

$$K_A < 4\pi(\xi_h f_N)_{\min} \quad [6.126]$$

i, per a un marge de guany mínim positiu:

$$K_A = 10^{\frac{M_{A,\min}}{20}} 4\pi(\xi_h f_N)_{\min} \quad [6.127]$$

És pràctica habitual triar un marge mínim de 6 dB, amb què $10^{-6/10} \approx 0,5$. D'aquesta manera, per a $\xi_h \approx 0,2$, resulta:

$$K_A = 0,4\pi f_N \quad [6.128]$$

cosa que permet calcular el guany màxim del servoamplificador, K_S , que garanteix l'estabilitat de sistema, i que és:

$$K_S = 0,4\pi \frac{A}{k_{xc} g_{xi} H} f_N \quad [6.129]$$

6.10 Guia de disseny, instal·lació i posada en marxa

El disseny i la selecció dels components d'un sistema oleohidràulic no són una tasca fàcil. La solució final ha de ser el resultat d'un treball metòdic que valori en compromís els diversos factors que afecten el funcionament del circuit, des del principi fins al final de la seva vida útil, sabent per endavant que la solució adoptada no serà l'única i que, probablement, tampoc serà la millor possible. D'altra banda, el bon funcionament en exercici d'una instal·lació oleohidràulica passa per respectar unes normes senzilles durant les fases de projecte, instal·lació i posada en marxa.

6.10.1 Plantejament i croquis inicial

Cal assenyalar que no hi ha norma o protocol estàndard que permeti elaborar esquemes hidràulics nous o modificar els existents de manera genèrica. La responsabilitat sempre recau en el dissenyador o en el responsable tècnic, que ha de ser conscient de les seves virtuts i limitacions per dissenyar un circuit simple, fiable, eficient, de baix cost i fàcil de mantenir.

Entre les consideracions principals que el dissenyador ha de tenir en compte a l'hora de dissenyar una instal·lació, destaquen:

- La seguretat del personal, de l'equip i de les instal·lacions, descrites mitjançant el corresponent nivell de seguretat SIL.
- El compliment de la normativa legal aplicable: perill d'incendi o explosions, normativa ATEX, EEx, grau necessari d'estanquitat, protecció mediambiental, etc.
- L'economia de la instal·lació, que inclou els costos de disseny, instal·lació, manteniment i reposició.



- Algunes qüestions funcionals, com el grau de precisió requerida, l'espai disponible, el pes de l'equip, etc.
- El sistema de control i comandament a utilitzar: elèctric, manual, pneumàtic, etc.
- Les condicions ambientals de temperatura, humitat, brutícia de l'entorn, etc.

Tot disseny passa per diferents fases de desenvolupament, que formen part del mètode de treball de cada dissenyador. Malgrat que s'insisteix que no hi ha un procediment únic, el seguiment dels punts que s'enumeren a continuació serveix d'ajuda “per dissenyar”. No hi ha cap garantia que el resultat final funcioni com s'espera, excepte la que dona l'experiència pròpia, però els passos següents són un bon punt de partida i es poden prendre com una “guia ràpida” en qualsevol projecte:

- Comprensió de la funció del sistema hidràulic.
- Definició dels actuadors necessaris, tipus i nombre.
- Esbós d'un croquis del circuit, que inclogui els actuadors i les bombes necessàries.
- Elaboració de la taula de temps i del cicle de treball, en què constin els esforços i les velocitats a subministrar en cada fase.
- Estimació de les dimensions i de les pressions dels actuadors en cadascuna de les fases de la taula de temps, segons els esforços que calgui fer.
- Càlcul dels cabals en cadascuna de les fases, segons les velocitats requerides i la grandària dels actuadors triats, incloent-hi els cabals de retorn.
- Tria del grup de bombeig i càlcul de la potència necessària.
- Replantejament del punt 4 i successius fins a completar la taula de treball.
- Definició dels elements direccionals: grandària, accionament, posició de repòs, muntatge, etc.
- Definició dels elements de seguretat, bloqueig, amortiment extern, etc.
- Definició dels conductes necessaris.
- Anàlisi dels requisits de condicionament: nombre, grandària i ubicació dels filtres, condicions de l'entorn, conveniència de fer servir intercanviadors, etc.
- Realització del croquis definitiu del circuit.
- Estudi de possibles alternatives no previstes. Si és necessari, es torna al punt 5 i successius. Introspecció.
- Definició final dels components, selecció del subministrador, etc., i anàlisi de costos.



Suposem que es tracta d'accionar un motor mitjançant una única bomba. Se'n pretén controlar les velocitats de sortida i d'entrada, i també limitar l'esforç màxim que es faci i poder bloquejar l'actuador. Els esquemes de la figura 6.12, i els "a", "b" i "c" de la figura 6.32, il·lustren la seqüència que condueix pas a pas a un sistema possible, encara que no definitiu, que compleix amb aquests requisits.

És clar que la connexió directa entre la bomba i l'actuador no és convenient (v. figura 6.12). En aquest cas, la velocitat de l'actuador queda definida per la relació entre el cabal de la bomba i la cilindrada del motor, i no és possible regular-la. L'esquema de la dreta de la figura 6.12 resol part d'aquests problemes, però només permet el moviment unidireccional de l'actuador. Per superar aquests obstacles, es decideix incorporar una vàlvula de control direccional 4/2 (el motor pot ser reversible ara) i una vàlvula de control del cabal compensada (esquema "a" de la figura 6.32). Aquesta solució ja és operativa, però no permet bloquejar l'actuador.

A l'esquema "b", la vàlvula de control direccional 4/2 se substitueix per una de proporcional. Aquestes vàlvules conjunquen la regulació del cabal (velocitat) i el canvi de sentit del moviment, amb la possibilitat de governar la frenada de l'actuador segons la rampa que s'hagi fet servir en consigna. El croquis proposat inclou el sistema de condicionament format per un filtre de pressió abans de la vàlvula proporcional i un intercanviador en la línia de retorn. Aquest circuit té, no obstant això, un rendiment energètic baix, perquè l'excés de cabal de la bomba durant el moviment és evacuat a tanc a pressió a través de la limitadora. Per a augmentar el rendiment de la instal·lació, es decideix utilitzar una bomba de cabal variable i disposar d'una vàlvula de control direccional convencional amb centres PT (esquema "c"). El cost inicial d'aquest circuit és més gran, encara que la vàlvula proporcional i el filtre de pressió s'hagin reemplaçat per una vàlvula convencional i un filtre de retorn, però és més eficient energèticament i requereix menys manteniment. El pas següent conduiria, per exemple, a l'esquema de la figura 6.14, amb bomba i motor de cilindrada variable.

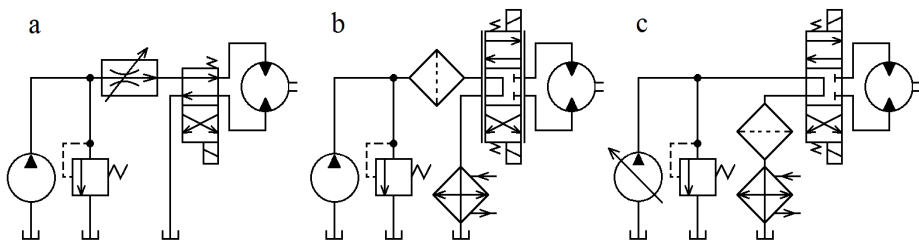


Figura 6.32. Obtenció d'un esquema hidràulic bàsic.

Un cop fet l'esquema bàsic de la instal·lació, es passa a la fase de projecte, en què se seleccionaran els components necessaris. Per norma general, la tria de la grandària



dels actuadors i de les bombes no és un problema si es coneixen les prestacions buscades en termes de força i velocitat, o pressió i cabal. Cal tenir present, evidentment, que la potència generada s'ha d'ajustar tant com es pugui a la consumida per no malmetre el rendiment energètic de la instal·lació i provocar-ne el sobreescalfament. Per al dimensionament de la resta de components, s'han de seguir les recomanacions donades per diferents fabricadors i subministradors industrials. Una vàlvula VCD petita o mal dimensionada suposarà un cost energètic que no en compensarà el baix preu inicial, i l'eliminació d'algun filtre mai és una bona alternativa, ni des del punt de vista econòmic ni funcional. És molt important, a més, que els filtres se situïn convenientment segons els requisits exigits per la instal·lació i els elements que cal protegir.

6.10.2 Selecció dels conductes

Els tubs, les mànegues, els ràcords i les brides són els elements que es fan servir per connectar els components d'un circuit entre si. Els conductes poden ser rígids (tubs) o flexibles (mànegues), i de pressió o no, en funció de si han d'anar instal·lats en una línia de pressió o en les d'aspiració, retorn o drenatge del sistema. Les mànegues són conductes flexibles, constituïts per diferents capes de material elastòmer (SRT) o termoplàstic (TPT), reforçades amb capes de malla d'acer i acabades amb una capa exterior protectora de goma o de plàstic.

El diàmetre dels conductes, sigui rígids o flexibles, es tria en funció de la seva capacitat de transportar cabal. La velocitat màxima del fluid per l'interior d'un conducte depèn de la part del circuit en què s'instal·li. Com a pauta, s'admet una velocitat superior en la línia de pressió que en la d'aspiració de la bomba, tot i que sempre s'han de respectar les recomanacions que dictin els fabricants de cada component. S'han de prendre totes les mesures que ajudin a reduir la pèrdua de pressió en l'aspiració, sigui reduint la longitud dels trams de conductes o eliminant corbes innecessàries. Si la canonada d'aspiració ha de ser llarga per raons funcionals, convé augmentar-ne el diàmetre i reduir el nombre de colzes i ràcords al mínim nombre viable. De la mateixa manera, és preferible no fer servir ràcords de pressió en l'aspiració, perquè són de menys secció efectiva i si, així i tot, es corre el risc de fer cavitatar la bomba, s'ha de triar un dipòsit alçat o pressuritzat.

La grandària i la resistència del material utilitzat en el conducte han de ser els adequats per a l'aplicació particular. La norma DIN ISO 10763 i les equivalents DIN 2391 i BS 3600 recomanen el gruix idoni dels tubs en funció del rang nominal de la pressió de treball.³⁵ A la taula 6.12 adjunta, s'indica la grandària de tub (diàmetre exterior de fins a 42 mm x diàmetre interior) recomanat en funció del cabal de pas per cada línia, sigui d'aspiració (ASP), impulsió (IMP) o retorn (RET), i la secció equivalent del tub, per si es requereix qualsevol altra velocitat que no sigui la indicada. La zona ombrejada mostra l'interval d'actuació en grandària del ràcord de connexió, segons una rosca BSP.



La pressió de treball màxima d'una mànega depèn de la grandària del seu connector i del nombre d'espires o voltes de malla que empli (R-N, sent N el nombre de voltes). Per regla general, la pressió màxima que aguanta la mànega disminueix a mesura que el seu diàmetre augmenta. Com a exemple, mentre que una mànega d'1 ½" R2 (SRT) suporta de l'ordre de 100 bar de pressió, la mànega R2 de ½" resisteix, aproximadament, el doble.

La connexió de la mànega al component es pot fer mitjançant un gran nombre d'accessoris i ràcords que es poden trobar al mercat. L'assemblatge és més còmode si es lubrifiquen les parts i se segueixen unes regles senzilles de muntatge que eviten que la mànega treballi torçada. Aquest punt és molt delicat perquè la vida útil de les mànegues es redueix sensiblement si experimenten les vibracions del sistema o entren en contacte amb materials metàl·lics (que poden arribar a seccionar-les). Les figures següents ensenyen la manera correcta d'instal·lar una mànega en diferents configuracions i els errors més comuns que cal evitar.

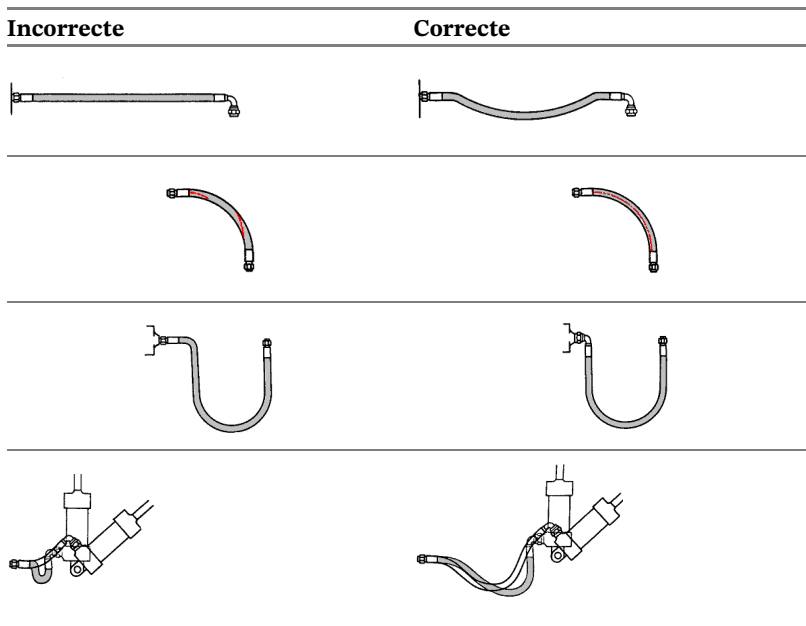


Figura 6.33. Muntatge correcte i incorrecte de mànegues. Cal evitar torçar les mànegues durant el muntatge i també que es puguin torçar durant el funcionament. S'han de muntar amb folgança per a la maniobra i de manera que es puguin descarregar amb la pressió (alleujament de tensions en els ràcords). S'ha d'impedir que freuguin amb altres materials i no subjectar-les mai amb cordes o filferros.



Mesures tub d _e x d _i [mm]x[m m]	Rosca BSP								Secció efectiva [cm ²]	Cabal [L/min]		
	1/8"	1/4"	3/8"	1/2"	3/4"	1"	1 1/4"	1 1/2"		ASP	IMP	RET
										1,5 m/s	6 m/s	4 m/s
6x3									0,071	0,64	2,54	1,70
6x4									0,126	1,13	4,52	3,02
8x4									0,126	1,13	4,52	3,02
8x5									0,196	1,77	7,07	4,71
8x6									0,283	2,54	10,18	6,79
10x5									0,196	1,77	7,07	4,71
10x6									0,283	2,54	10,18	6,79
10x7									0,385	3,46	13,85	9,24
10x8									0,503	4,52	18,10	12,06
12x6									0,283	2,54	10,18	6,79
12x7									0,385	3,46	13,85	9,24
12x8									0,503	4,52	18,10	12,06
12x9									0,636	5,73	22,90	15,27
12x10									0,785	7,07	28,27	18,85
14x7									0,385	3,46	13,85	9,24
14x9									0,636	5,73	22,90	15,27
14x10									0,785	7,07	28,27	18,85
15x9									0,636	5,73	22,90	15,27
15x10									0,785	7,07	28,27	18,85
15x11									0,950	8,55	34,21	22,81
15x12									1,131	10,18	40,72	27,14
16x8									0,503	4,52	18,10	12,06
16x10									0,785	7,07	28,27	18,85
16x11									0,950	8,55	34,21	22,81
16x12									1,131	10,18	40,72	27,14
18x11									0,950	8,55	34,21	22,81
18x12									1,131	10,18	40,72	27,14
18x13									1,327	11,95	47,78	31,86
18x15									1,767	15,90	63,62	42,41
20x13									1,327	11,95	47,78	31,86
20x14									1,539	13,85	55,42	36,95
20x15									1,767	15,90	63,62	42,41
22x17									2,270	20,43	81,71	54,48
22x18									2,545	22,90	91,61	61,07
22x19									2,835	25,52	102,07	68,05
25x16									2,011	18,10	72,38	48,25
25x17									2,270	20,43	81,71	54,48
25x19									2,835	25,52	102,07	68,05
28x21									3,464	31,17	124,69	83,13
28x23									4,155	37,39	149,57	99,71
28x24									4,524	40,72	162,86	108,57



Mesures tub d _e x d _i [mm]x[mm]	Rosca BSP								Secció efectiva [cm ²]	Cabal [L/min]		
	1/8"	1/4"	3/8"	1/2"	3/4"	1"	1 1/4"	1 1/2"		ASP	IMP	RET
										1,5 m/s	6 m/s	4 m/s
30x20									3,142	28,27	113,10	75,40
30x22									3,801	34,21	136,85	91,23
35x27									5,726	51,53	206,12	137,41
35x29									6,605	59,45	237,79	158,52
35x31									7,548	67,93	271,72	181,14
38x26									5,309	47,78	191,13	127,42
38x28									6,158	55,42	221,67	147,78
42x32									8,042	72,38	289,53	193,02
42x34									9,079	81,71	326,85	217,90
42x36									10,179	91,61	366,44	244,29

Taula 6.12. Diàmetres recomanats de canonada en funció del cabal de pas per cada conducte. La columna de l'esquerra mostra els diàmetres exterior ei interior en mil·límetres.

6.10.3 Recomanacions finals

En aquest apartat, es resumeixen algunes de les recomanacions més importants relatives a la instal·lació, la posada en marxa i l'exploració d'una instal·lació oleohidràulica.

Durant la fase de muntatge, convé:

- Fer el muntatge en un ambient net i sense pols. Recordem que cap sistema oleohidràulic ha fallat mai perquè estigués massa net.
- Retirar immediatament la brutícia que es forma durant les operacions de tall o roscatge.
- Assegurar-se que totes les canonades són tapades fins just abans de muntar-les.
- Fer el doblegat de les canonades abans del muntatge final per evitar que es corbin o es vegin forçades durant la instal·lació.
- Instal·lar les brides de connexió de manera adequada sobre la superfície adjacent.
- Inspeccionar els ràncors i remoure qualsevol rebava o estella metàl·lica per evitar que penetrin en les canonades.
- Netejar l'interior de les canonades just abans del muntatge. Les canonades petites es poden netejar amb aire comprimit net. Les més grosses es poden netejar amb un drap lliure de fils.
- Instal·lar els suports antivibració necessaris per a les canonades, si és possible com més lluny millor dels ràncors.



- Omplir les cambres dels cilindres amb oli net (no del bidó) i tapar-ne les vies perquè no entri brutícia fins al muntatge definitiu. Aquesta operació facilitarà l'encebament total del sistema.
- No obrir les boques de les bombes i altres components fins al moment de la connexió (normalment, venen de fàbrica amb taps de plàstic).
- Verificar que el sentit de rotació de la bomba respecta la indicació del fabricant i coincideix amb la del motor d'accionament. La major part de les bombes tenen una fletxa marcada a la carcassa externa.
- Fer servir, en la mesura del possible, acoblaments elàstics tancats en campanes protectores per a l'accionament de les bombes. Comprovar les toleràncies de muntatge i respectar l'alineació mínima exigida (d'uns 0,5 mm).
- Estrènyer bé els ràcords per evitar les fuites de fluid. És especialment delicada l'acció d'estrènyer els ràcords de l'aspiració per evitar l'entrada d'aire.
- Connectar totes les línies de retorn i drenatge necessàries. Dos tubs de retorn connectats mitjançant una "T" poden no veure el mateix dipòsit (un dels fluxos pot prevaler i bloquejar el de menys empenta hidràulica). És una bona mesura fer un volta als tubs de drenatge en forma de "U" per evitar el sifonat de la bomba.
- Omplir els elements del circuit amb l'oli hidràulic final abans de la posada en marxa (recomanable). És convenient fer funcionar el circuit amb filtres de prova abans de la posada en marxa definitiva.
- Comprovar que les canonades d'aspiració i de retorn queden submergides en el tanc després de l'encebament de la instal·lació.

Per a la posada en marxa amb el circuit encebat, cal:

- Revisar el nivell d'oli en el dipòsit.
- No posar mai en marxa la instal·lació amb buit a l'entrada o sense tenir la certesa que la bomba està encepada.
- Si hi ha vàlvules de tancament en l'aspiració de la bomba, cal obrir-les.
- Purgar l'aire de la línia de pressió perquè no borbollegi en el dipòsit. Per a això, es poden fer servir vàlvules de purga i moure els cilindres lentament de manera manual. Repetir aquesta operació tantes vegades com calgui fins a tenir la certesa que l'operació ha donat resultats.
- Verificar que el personal està protegit enfront de circumstàncies imprevistes durant l'arrencada inicial.
- Accionar el motor elèctric per verificar-ne el sentit de rotació.



- Si la bomba és de desplaçament variable, posar-la en marxa a la meitat del desplaçament, com a mínim.
- En general, és preferible fer una posada en marxa sense càrrega. El sistema ha de treballar durant un temps a baixa pressió (a uns 10 bar) per dur a terme una primera neteja del circuit.
- Tornar a comprovar el nivell de fluid en el tanc.
- Tarar les vàlvules de pressió al seu valor final i reiniciar la posada en marxa. Les vàlvules dels manòmetres poden quedar obertes.
- Observar el funcionament en règim i parar esment als sorolls i les vibracions anormals.
- Resoldre com més aviat millor les fuites externes evitables. Verificar l'estanquitat del sistema quan arribi a la temperatura de règim. Estrènyer, si és necessari, els ràcords pels quals s'apreciïn fuites.
- Comprovar que els filtres continuen en bon estat. La seva funció s'intensifica durant l'arrencada, de manera que és possible que se n'hagi de canviar algun.

Una vegada la instal·lació està en marxa i ha començat la seva fase d'exercici, s'ha de respectar la periodicitat del manteniment i substituir sovint els filtres o els cartutxos. Si es detecten fuites de fluid, s'han de prendre totes les mesures per eliminar-les. Un increment en les fuites externes és fruit del desgast dels components i indica la presència d'un problema que exigirà una actuació immediata.

Diferir la reparació o la substitució del component suposa un cost econòmic que moltes vegades és inassumible. Per exemple, en un sistema amb una potència instal·lada de 200 kW, un increment de fuites del 10% obliga el sistema a treballar a més pressió per fer el mateix treball i impulsar més cabal per compensar-les. Si això suposa que la potència absorbida sigui un 15% més i el sistema treballa 8 hores al dia i 25 dies al mes, el consum energètic augmenta 6.000 kWh en un mes. Aquest cost addicional es podria dedicar a la substitució preventiva.

¹ Només 10 cm³ d'aigua en 10 litres d'oli provoquen la precipitació dels dopants, cosa que s'observa amb l'aparició d'una pasta blanquinosa sobre l'oli.

² L'amortiment intern és de capacitat més limitada que l'externa, per això no és recomanable en solitari. L'anàlisi dinàmica de l'amortiment permet estimar la capacitat màxima de dissipació d'energia dels amortidors durant una frenada i per hora. La frenada per amortiment intern és més o menys progressiva segons la manera de fer l'estrangulació. En general, no és convenient reduir de manera brusca la secció escanyada per no provocar salts de pressió de quantia imprevista. Si el moviment de desacceleració es pretén que sigui uniforme, s'ha de tenir present la regla següent: el trajecte de frenada varia amb el quadrat de la velocitat per a una mateixa



desacceleració. Això és, quan la velocitat de translació es duplica, es necessita un tram de frenada quatre vegades més gran.

- 3 Mereix especial atenció una circumstància que es dona en moltes instal·lacions que fan servir actuadors asimètrics: el cabal de sortida de la cambra de l'èmbol durant la carrera de retorn de l'actuador asimètric pot ser superior al cabal de la bomba en una relació $1/\varphi$. La conseqüència evident d'aquest fet és que, en aquests sistemes, el cabal més gran que circula per la línia de retorn al tanc no és el cabal de la bomba. Aquesta circumstància afecta el dimensionament dels components d'aquesta línia, on se solen situar filtres, vàlvules antiretorn, etc., i també el dimensionament dels conductes.
- 4 Pressió total, encara que els elevats nivells de pressió estàtica d'aquesta classe de sistemes permeten prescindir dels termes dinàmics.
- 5 En condicions normals, i encara que es triï la posició central adequada, el moviment "a mà" dels actuadors no és possible per l'efecte combinat del fregament, de les columnes d'oli per desplaçar i de les pèrdues de pressió que hi ha a la vàlvula. Una petita pressió equivalent de 3 bar, aplicada sobre un actuador de 50 mm de diàmetre, suposa una força resistent de 60 kg.
- 6 Aquests solenoides són capaços de mantenir una força gairebé constant en la zona de desplaçament de la corredora que només és proporcional a la intensitat de comandament. Si, a la seva acció sobre la corredora, s'hi contraposa una molla, l'equilibri de forces suposa una relació proporcional entre la intensitat rebuda per l'electroimant i la posició aconseguida en equilibri. Aquesta proporcionalitat es perd quan les forces de flux són importants. Les vàlvules proporcionals amb sensor intern de la posició de la corredora resolen aquest problema i ofereixen més capacitat de potència per a una mateixa grandària nominal.
- 7 En les condicions normalitzades d'assaig, es compleix que $\Delta p_{PA} = \Delta p_{BT} = \Delta p_{N/2}$ per a vàlvules simètriques, sent Δp_N igual a la pressió d'alimentació, p_P , si la pressió p_T és zero. La grandària nominal més adequada per a la vàlvula que s'ha d'instal·lar en un circuit hidràulic depèn de la pressió d'alimentació, de la càrrega aplicada sobre l'actuador i de la seva geometria, i s'ha de triar el màxim d'aquestes expressions:

$$Q_N = \max < Q_1 \left(\frac{2}{1 + \varphi^3} \frac{p_P - F}{\Delta p_N} \right)^{-1/2}, \varphi Q_2 \left(\frac{2}{1 + \varphi^3} \frac{\varphi p_P - F}{\Delta p_N} \right)^{-1/2} >$$

en què φ és la relació d'àrees de l'actuador ($\varphi = 1$ en motors) i la força F se suposa resistiva (en cas contrari, seria negativa en la fórmula). En els motors, la pressió de càrrega F/A s'ha de substituir pel seu equivalent M/CV . La fórmula de l'esquerra es correspon amb el moviment d'anada i, la de la dreta, amb el de retorn. Q_1 i Q_2 són els cabals d'entrada a l'actuador en cada moviment i es corresponen amb els cabals QPA i QPB, respectivament. En un altre ordre de coses, segons la normativa, la pressió normal d'assaig és de 70 bar quan es tracta d'una servovàlvula i de 10 bar amb una de proporcional (tot i que hi ha fabricants que donen la informació tècnica de les seves vàlvules proporcionals amb $\Delta p_N = 70$ bar).

- 8 Segons un estudi del MIT, les causes de fallada en una instal·lació oleohidràulica es deuen, en un 50%, al desgast mecànic; en un 20%, a la corrosió; en un 15%, als accidents, i només en un 15%, a l'obsolescència. Les fallades per desgast mecànic es reparteixen entre abrasió, fatiga, adhesió per soldadura freda i erosió.
- 9 ISO 4406:1999. Method for Coding the Level of Contamination by Solid Particles. L'assaig més important per avaluar l'eficàcia de la filtració és el multi-pass test, descrit a la ISO 4572:1981 (ISO 16889), que consisteix en el recompte de partícules aigües amunt i avall del filtre en què s'ha instal·lat el material filtrant de prova. La informació de la pèrdua de pressió a través del filtre recollida durant tot l'assaig s'utilitza per dibuixar-ne la corba característica i serveix per poder comparar filtres d'altres materials i fabricants.
- 10 Els fabricants i els usuaris han treballat, sovint, amb la norma ISO estesa a tres valors X/Y/Z, perquè l'ús de dues xifres resultava insuficient. La nova norma ISO 4406-2000 augmenta encara més el nombre de xifres per concretar millor la capacitat de retenció del filtre en altres rangs de grandària. La nova norma també informa dels valors \bar{x} de 2, 10, 75, 100, 200 i 1000, ja que un valor \bar{x} individual no era representatiu (amb tots els \bar{x} anteriors, es pot representar la seva evolució amb x i interpretar millor l'eficàcia del filtre).



- ¹¹ Com s'ha esmentat en l'apartat 6.2.2, la temperatura de l'oli s'ha de mantenir per sota dels 65°C. Només algunes aplicacions especials permeten treballar amb temperatures més elevades. Es recomana que l'oli del dipòsit estigui a una temperatura compresa entre els 48°C i els 65°C i, per als fluids en base aigua, d'entre 37°C i 50°C.
- ¹² Els acumuladors oleohidràulics es carreguen, normalment, amb gas nitrogen. La càrrega amb aire està limitada a les aplicacions hidràuliques, en què no es fa servir oli mineral, o quan se sap amb seguretat que es treballarà a molt baixa pressió. Mai s'ha de fer servir oxigen, perquè això augmenta el risc d'explosió per efecte dièsel i, evidentment, s'han de mantenir allunyats de qualsevol font de calor important.
- ¹³ Una aplicació especial dels acumuladors hidràulics és que formen part de nombrosos sistemes de suspensió de vehicles. Les suspensions hidropneumàtiques tenen molts avantatges enfront dels sistemes tradicionals i alguns es deuen als acumuladors. Per exemple, un sistema de suspensió hidropneumàtica permet controlar el nivell del vehicle, independentment de la massa suspesa, gràcies al control de la pressió de precàrrega. Estudis recents han demostrat que aquests sistemes permeten governar la rigidesa del sistema de suspensió hidropneumàtica, cosa que en facilita el control adaptatiu triant la millor parella de paràmetres, amortidor i rigidesa, en funció de les circumstàncies (tipus de conducció, carretera, etc.).
- ¹⁴ L'experiència ajuda a poder interpretar la magnitud dels temps característics d'un sistema. Només com a referència i en condicions normals, els temps típics de la transferència de calor són de l'ordre de segons.
- ¹⁵ La resta de variables estan en SI.
- ¹⁶ ISO 4409:2007 Hydraulic Fluid Power -- Positive-displacement pumps, motors and integral transmissions -- Methods of testing and presenting basic steady state performance.
- ¹⁷ En aquest desenvolupament, s'obvien les fuites externes que hi podria haver, que serien funció de les pressions relatives a l'entrada i a la sortida del component, i no de la seva diferència. Aquestes fuites són més significatives en els motors que a les bombes i es podrien incloure sense problemes mitjançant expressions del tipus $k_p p$ i $k_{ps} p_s$, o bé $k(p+p_s)$. D'altra banda, l'expressió [6.17] suposa que les fuites són de forma laminar. Totes dues hipòtesis són prou aproximades per al propòsit d'aquesta secció.
- ¹⁸ Observem que, en els motors, la relació $Q/(CMnM)$ és més gran que la unitat, a causa de les pèrdues en volum.
- ¹⁹ La regulació mitjançant tècnica proporcional es pot fer amb vàlvules reguladores de cabal proporcionals, amb vàlvules VCD proporcionals i amb servovàlvules, i amb sistemes de regulació en llaç obert o tancat.
- ²⁰ L'efecte multiplicador de la pressió s'ha de tenir en compte quan es regula a la sortida. Per exemple, si l'actuator té una relació d'àrees $\varphi = 0,5$ i la limitadora està tarada a 200 bar, la pressió mínima a la contracambra de la tija és de 400 bar (condició de càrrega nul·la, en règim permanent i sense pèrdues de pressió en altres vàlvules). La pressió augmenta encara més si la càrrega és d'embalament.
- ²¹ L'amplificador de pressió tipus utilitza un pistó d'àrees diferents (a, A), de manera que $p_a = F = p_A$.
- ²² Els cilindres diferencials són cilindres de doble acció en què la secció de la tija és la meitat de la superfície de l'èmbol ($\varphi = 0,5$). Són cilindres molt robustos que responen molt bé a sol·licitacions de vinclament, cosa que els fa ideals per a carreres llargues.
- ²³ Entre d'altres, sistemes amb bombes hidràuliques controlades per motors accionats a velocitat variable i amb bombes de desplaçament variable a velocitat constant.
- ²⁴ En el cas que es facin servir en actuadors rotatius, la pressió de càrrega es defineix com M/CV .
- ²⁵ En el cas més general, amb vàlvula simètrica, les pressions són, per al moviment de sortida:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \varphi^3} \left(\varphi^3 p_p + \frac{F}{A_1} \right)$$

$$p_2 = \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^3} \left(p_p - \frac{F}{A_1} \right)$$



i, per al d'entrada:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \varphi^3} \left(\varphi p_p - \frac{F}{A_1} \right)$$

$$p_2 = \frac{1}{1 + \varphi^3} \left(p_p + \varphi^2 \frac{F}{A_1} \right)$$

també indistintes de la grandària de la vàlvula. Si l'actuador és simètric, resulta que és $r_{pP} = p_1 + p_2$ sempre, i la de càrrega $p_L = p_1 - p_2$ a la sortida, i $p_L = p_2 - p_1$ a l'entrada.

- ²⁶ Això implica que la potència disponible no serà transferida a la càrrega de manera òptima i el rendiment del sistema serà inferior al màxim.
- ²⁷ Aquí, m és la massa reduïda aplicada a la tija i p_L ha de ser la pressió de la càrrega estacionària no inercial.
- ²⁸ Les línies de posició constant són de manera que $\log(v) = \log(xcte) + \log(2\pi f)$, rectes de pendent "1", mentre que les d'acceleració constant són: $\log(v) = \log(acte) - \log(2\pi f)$, rectes de pendent "-1".
- ²⁹ L'extensió de la influència d'aquest efecte depèn del diagrama de Bode del sistema hidràulic combinat actuator-càrrega i de l'amplitud de la seva zona de ressonància, i apareix sempre que no es redueixi afegint amortiment al sistema hidràulic o implementant adequadament l'algorisme de control.
- ³⁰ Observem que la definició general que es fa de p_L és indistinta del sentit del moviment. Les equacions [6.105] i [6.106] són vàlides en totes dues fases.
- ³¹ Els canvis en les pressions p_i indueixen canvis en els cabals corresponents de la vàlvula de l'ordre $k_p \delta p_i$. Per exemple, la tendència a disminuir el cabal Q_2 a la vàlvula després de la disminució observada en p_2 , per haver augmentat FL mentre l'actuador està sortint, és compensada, aproximadament, per l'augment consegüent de Q_2 a causa de l'efecte de la descompressió (augment del volum de fluid) a la contracambra de l'actuador. Una anàlisi més rigorosa ensenya que els canvis del cabal de compressibilitat, associats a una disminució δp_i de la pressió, són de l'ordre de $k_p \delta p_i / (\pi \xi h)$ que, per als valors usuals del coeficient d'amortiment del sistema, ξh , són, precisament, de l'ordre $k_p \delta p_i$.
- ³² Valors inicials nuls.
- ³³ Per a $V_1 = V_2$. Si no és així, la freqüència pròpia i el coeficient d'amortiment són:

$$f_N = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{B_s A^2}{m} \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) \right)^{1/2}$$

$$\xi_h = \frac{k_p}{A} \left(B_s m \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) \right)^{1/2} + \frac{R}{2A} \left(\frac{1}{B_s m} \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2} \right)^{1/2}$$

i d'aquí la segona simplificació i la definició [6.110].

- ³⁴ Un sistema de fase mínima és estable si el marge de guany és positiu, i el seu valor indica quant es pot incrementar el guany del sistema abans que es torni inestable.
- ³⁵ DIN ISO 10763:2004-03. Hydraulic Fluid Power - Plain-end, seamless and welded precision steel tubes - Dimensions and nominal working pressures. Com a referència, per a un tub de diàmetre exterior de 60 mm, el gruix recomanat a 16 bar és de 3,6 mm; de 4,5 mm a 150 bar; de 7,1 mm a 250 bar, i de 10 mm a 400 bar. Resistència mínima de tracció del material: 410 N/mm². Factor 4 de seguretat.

Annex.

Manteniment i detecció d'avaries

Un circuit hidràulic ben dissenyat, ben muntat i instal·lat, i amb una posada en marxa adequada té assegurada una llarga vida sense problemes i sense necessitat de cures especials ni d'un manteniment molt exigent. Segons la norma DIN 31051:2003-06 *Fundamentals of Maintenance*, s'entén per manteniment el conjunt de mesures tècniques, organitzatives i econòmiques destinades a retardar el desgast o a restablir la capacitat de treball dels mitjans de producció tecnològics tenint en compte la seva seguretat.

A.1 Visió global de les classes de manteniment

El manteniment pot ser preventiu, correctiu o predictiu. El manteniment preventiu consisteix en la conservació i inspecció de l'equip i està orientat a preservar les condicions inicials i a retardar el moment en què es puguin alterar. El manteniment correctiu consisteix en el restabliment de les condicions inicials quan s'han perdut. Finalment, el manteniment predictiu determina el temps de vida útil de la màquina per poder estimar quan convé procedir a renovar-la sense haver de patir els problemes d'un mal funcionament o d'una fallada greu.

La taula següent resumeix les actuacions corresponents a cada tipus de manteniment i la manera d'actuar més adequada. Una bona gestió de l'equip redueix les tasques de manteniment. El manteniment predictiu està molt en voga últimament gràcies al desenvolupament de noves tècniques d'inspecció no intrusives, com l'anàlisi de vibracions. Aquest manteniment es basa en el diagnòstic de l'estat actual de la màquina per caracteritzar la funció de danys i la seva evolució temporal. La situació de desgast es manifesta mitjançant la modificació del cabal de fuita externa total, del nivell de fluctuació de la pressió i de l'evolució de la temperatura en temps d'observació llargs. Si es coneix el valor límit admissible dels danys, es pot valorar durant quant de temps addicional es pot fer servir l'equip abans que sigui recomanable qualsevol mena d'actuació.



	Preventiu		Correctiu	Predictiu
	Conservació	Inspecció		
Actuació	Netejar i repassar. Impermeabilitzar. Tornar a greixar. Ajustar i emplenar.	Mesurar. Provar. Registrar. Controlar.	Renovar. Ajustar. Reparar.	Mesurar i registrar. Provar. Calcular. Estimar.
Procediment	Se segueix una planificació periòdica establerta prèviament i registrada en butlletes d'estat o en llibres de manteniment.		Se segueixen les normes de reparació i manteniment.	S'apliquen algorismes de càlcul que depenen del nivell de danys i de l'anàlisi temporal i freqüencial de diversos senyals.

Una màquina en bon estat no produeix vibracions o estan delimitades en un interval de freqüència a uns decibels determinats. Es diu que les màquines en bon estat tenen un patró de vibració determinat, i està comprovat que el desgast origina canvis dinàmics que desequilibren els elements i modifiquen el patró de vibració inicial. És a dir, l'espectre en freqüència del senyal es modifica amb el temps, a mesura que es va deteriorant la instal·lació, cosa que en permet monitorar la tendència i preveure quan s'aconseguiran els nivells de vibració inacceptables.

Els instruments que permeten l'anàlisi de les vibracions són diversos i inclouen:

- Sensors, com ara acceleròmetres, captadors de velocitat, transductors de pressió, etc.
- Sistemes de monitoratge i adquisició dels senyals procedents dels sensors.
- Sistemes de tractament dels senyals, com la conversió A/D (si l'anàlitzador és digital), l'aplicació d'algorismes FFT, etc.
- Altres sistemes per a l'emmagatzematge de dades, la seva transmissió, etc.

Sobretot, és vital seguir les recomanacions dels fabricants dels components.

A.2 Bombes centrífugues

El manteniment i la freqüència de les revisions depenen de les hores de funcionament de la bomba, de la severitat de les condicions de servei i dels materials que s'hagin fet servir per construir-la. En general, es redueixen bastant, sempre que se segueixin, entre d'altres, les recomanacions següents:

- Cal observar la petita fuga de líquid a través de l'estopada (si va amb premsaestopa). Aquesta fuga és necessària perquè es verifiqui el tancament hidràulic que impedeix la presa d'aire, alhora que actua com a líquid refrigerant de l'estopada i l'eix. Una fuga excessiva indica desgast, per això la premsaestopa s'haurà de reparar o substituir.



- El motor i la bomba han de girar sense trepidacions, salts ni sorolls estranys. És necessari que els rodaments estiguin, en tot moment, convenientment lubricats amb oli o greix.
- Comprovar habitualment que el consum de corrent del motor a la pressió de treball de la bomba no excedeix dels valors assenyalats en la placa.
- El tancament mecànic o reforç automàtic no necessita cap atenció, però mai ha de treballar en sec ni amb aigües brutes, arenoses o sòlids en suspensió, perquè es ratllaria i patiria un desgast prematur i la consegüent fuga de líquid.
- Si una bomba està fent un servei de reserva o si no es fa servir durant llargs períodes de temps, les parts mòbils s'han de girar diverses vegades a la setmana perquè no s'engarrotin.

La taula següent recull les anomalies més freqüents i les seves causes més probables.

Anomalia	Possible causa
Falta de cabal	<p>La bomba no està encebada. La velocitat és insuficient. L'altura de descàrrega és massa elevada (més que aquella per a la qual va ser seleccionada la bomba). L'altura d'aspiració és massa elevada (NPSH insuficient). Els conductes de l'impulsor estan parcialment obstruïts. El sentit de rotació no és el correcte.</p>
El cabal és insuficient	<p>Entra aire a la canonada d'aspiració. La velocitat és massa baixa. L'altura total és més que aquella per a la qual va ser seleccionada. L'altura d'aspiració és massa elevada (NPSH insuficient). Els conductes de l'impulsor estan parcialment obstruïts. Hi ha defectes mecànics, com l'impulsor danyat o els cèrcols desgastats. La vàlvula de peu o la canonada d'aspiració no estan prou submergides.</p>
La pressió de descàrrega és insuficient	<p>La velocitat és massa baixa. Hi ha aire en el líquid. Hi ha defectes mecànics, com l'impulsor danyat o els cèrcols desgastats. El sentit de rotació és l'incorrecte. La viscositat del líquid és superior a la que inicialment estava prevista.</p>
La bomba sobrecarrega el motor	<p>La velocitat és massa alta. El líquid bombat té un pes específic o una viscositat diferents de la d'aquells per als quals va ser seleccionada la bomba. Hi ha defectes mecànics, com ara rodaments avariats, un eix deformat, mala alineació, etc.</p>



Anomalia	Possible causa
	La premsaestopa és molt plena i causa una pèrdua excessiva per fricció a la caixa d'estopada. El sentit de rotació és l'incorrecte.
La bomba es desgreda després de la posada en marxa	Hi ha fuites o bosses d'aire en la línia d'aspiració (hi entra aire). L'altura d'aspiració és massa elevada. Hi ha aire o gasos en el líquid. El segellament no funciona bé (per obstrucció o entrada d'aire). Entra aire per la junta del cos de la bomba. La vàlvula de peu o la canonada d'aspiració no estan prou submergides.
La bomba vibra	No està ben alineada. La cimentació no és prou rígida. L'impulsor està parcialment obstruït, cosa que causa un desequilibri. Hi ha defectes mecànics, com un eix corbat, els elements giratoris s'engarroten o hi ha rodaments desgastats. Hi ha aire o vapor en el líquid. L'NPSH és insuficient.
La bomba no puja el cabal sol·licitat a determinada altura	L'altura estàtica total és excessiva. La direcció de gir ha canviat. Els òrgans interiors de la bomba estan obstruïts. Hi ha desgast en les peces interiors de la bomba. La vàlvula de comporta està poc oberta o altres accessoris estan obstruïts. El nombre de revolucions és massa baix. La bomba agafa aire de la canonada d'aspiració o té fuites d'aigua en la d'impulsió.
La bomba perd líquid per l'eix	El tancament mecànic està deteriorat o ratllat. L'estopada està gastada.
El grup electrobomba no gira o gira amb molta dificultat	No arriba força elèctrica al motor. El motor elèctric està cremat. Hi ha frec o adherència als òrgans interiors de la bomba.
La bomba no aspira o aspira amb dificultat	L'altura manomètrica d'aspiració és excessiva. Es formen bosses d'aire a la canonada. La presa d'aspiració i les vàlvules estan obstruïdes o tancades. Es desgreda la bomba. Es bomba aigua calenta.
La bomba dona una pressió excessiva	El nombre de revolucions és massa elevat.
Els rodaments s'escalfen excessivament	El grup està mal alineat. L'acoblament està mal instal·lat o a una separació indeguda. La canonada produeix tensions. Hi ha poc oli de lubricació o està en males condicions.



A.3 Instal·lacions oleohidràuliques

El manteniment mínim necessari passa per fer determinades operacions periòdiques. Aquestes operacions les ha de dur a terme personal especialitzat i de manera regular perquè siguin efectives. Cada operació de manteniment s'ha de registrar amb número d'ordre, la data, el nom de l'operari i qualsevol altra informació important a les butlletes d'estat de manteniment o els llibres de registre certificats pels procediments de qualitat. Els llibres de registre han de contenir tota la informació pertinent al funcionament de la màquina: cicles de treball, temperatura de treball per zones, lectures dels manòmetres, si hi ha sorolls anòmals, etc. Entre altres operacions periòdiques, destaquen:

- Mantenir la netedat externa del sistema i una bona aparença. Això ajuda a reconèixer les fuites que hi hagi i la seva ubicació.
- Revisar els filtres i els indicadors de pressió i rebliment.
- Controlar el nivell d'oli en el dipòsit i evitar que baixi més enllà del mínim. S'aconsella l'ús d'indicadors elèctrics per facilitar-ne el manteniment.
- Controlar la temperatura de treball. La degradació de l'oli amb la temperatura afecta tot el circuit hidràulic. La velocitat d'oxidació de l'oli és constant fins als 60°C i, a partir d'aquí, aquesta velocitat es dobla cada 10°C.
- Canviar el fluid cada 2.000 o 3.000 hores de funcionament (depenent de les especificacions de l'oli). La periodicitat del canvi d'oli depèn del seu estat. Com a referència, pensem que, en un cotxe, el canvi es fa cada 20.000 km i que, si la velocitat de circulació mitjana és de 40 km/h, això només suposa 500 hores de funcionament.
- La substitució de l'oli s'ha d'acompanyar de la neteja del dipòsit. Aquesta operació és més senzilla si:
 - El disseny de l'equip ha previst aquesta operació.
 - El fons del tanc és còncau i el tap de drenatge se situa a ras.
 - Les plaques d'accés faciliten l'operació en els dipòsits grans.
 - Es pot extreure el filtre de retorn fàcilment.
 - S'han previst elements captadors d'aigua en els dipòsits pressuritzats.
 - Les canonades de retorn han estat bisellades.
- Controlar la pressió de precàrrega dels acumuladors.
- Revisar les vàlvules, els actuadors, l'intercanviador de calor i altres components.
- Revisar el sistema de refrigeració, si n'hi ha, per reconèixer la presència de fuites internes.



- Prendre mostres del fluid per comprovar-ne les propietats químiques i d'altres.

La taula següent especifica la periodicitat mínima recomanada per a un manteniment preventiu adequat.

Periodicitat	Tasca de manteniment preventiu
Cada dia	Verificar el nivell d'oli en el dipòsit i afegir-hi oli net, si cal. Verificar l'aspecte de l'oli. Anotar tot principi de fuga, tant en aparells com en canonades. Verificar l'estat dels filtres i anotar el nivell de caiguda de pressió. Anotar la temperatura de l'oli en règim. Verificar l'alimentació de les electrovàlvules. Ajustar les pressions de funcionament. Anotar la temperatura del drenatge de les bombes i dels motors per verificar si hi ha sobreescalfaments.
Cada setmana	Netejar els filtres d'aspiració. Reparar les fuites anotades en la butlleta d'estat segons les revisions diàries. Assegurar com de collats estan els elements de fixació dels grups, les vàlvules, els actuadors, etc. Verificar l'estat dels acoblaments elàstics motor-bomba. Verificar l'estat dels acumuladors, la pressió de precàrrega, la clau de purga, etc. Comprovar l'estat d'altres elements no visibles.
Una vegada al mes	Treure mostres de l'oli del dipòsit i analitzar-les, i anotar-ne el nombre d'hores de servei.
Una vegada per semestre	Verificar l'estat de les transmissions per cadena, la seva alineació, l'estat del greix, les juntes, etc.
Cada any	Verificar el bon estat de funcionament de tots els components de l'equip i conducta al seu recanvi, si cal. Això inclou els elements de fixació externs i les parts mòbils internes. Verificar els manòmetres i altres dispositius de senyalització i alarma. Buidar i netejar el dipòsit.

Si, al cap d'uns anys de funcionament, les operacions rutinàries de manteniment indiquessin que hi ha hagut una degradació gradual de l'equip, es podria aprofitar l'ocasió per fer una revisió completa, que podria fins i tot incloure el redisseny de la instal·lació a partir de l'experiència acumulada.

Per a la detecció de les avaries i la identificació del component o dels components defectuosos en un sistema electrohidràulic, cal:

- Col·laborar entre els tècnics hidràulics i elèctrics en la cerca del problema. És fonamental aconseguir un bon ambient de treball en l'equip.



- Tenir un coneixement precís o tan exacte com es pugui de tots i cadascun dels components implicats.
- Reconèixer els components en l'esquema electrohidràulic operatiu del sistema.
- Identificar els components en el sistema real.
- No fiar-se de l'esquema original, ja que pot haver estat modificat. Sempre s'ha de verificar el funcionament del conjunt per parts.

La majoria dels problemes es resolen mitjançant un manteniment preventiu periòdic; tot i això, a vegades, s'ha de substituir in situ el component que no funciona correctament sense que calgui desmuntar tot el circuit. La taula següent ofereix una ajuda a l'hora d'identificar les avaries més freqüents dels sistemes oleohidràulics i les seves possibles causes.

Problema	Possible causa	Hipòtesi d'intervenció
Pressió insuficient (o per sota del valor que està previst)	Vàlvula de pressió parcialment oberta	Pressió de taratge baixa. Vàlvula contaminada. Molla trencada o inadecuadament substituïda.
	Pèrdua excessiva de càrrega	Viscositat massa elevada. Diàmetre de tub petit. Canonades parcialment obstruïdes.
	Fuites internes d'oli elevades	Juntes emprades en cilindres o motors. Juntes emprades en vàlvules o distribuïdors. Viscositat del fluid massa baixa.
	Cabal de bomba insuficient	V. apartat següent.
Cabal de bomba insuficient	Aspiració escanyada	Filtre d'aspiració petit o mal tarat. Tub d'aspiració obstruït. Tub d'aspiració de petit diàmetre o tortuós.
	Entrada d'aire	Per la presa d'oli a l'aspiració. Pels ràcords de l'aspiració. Aspiració d'oli amb escuma.
	Dipòsit segellat hermèticament	Obrir-lo a l'atmosfera. Introduir-hi aire fins a pressuritzar.
	Accionament defectuós	Verificar l'acoblament. Velocitat molt alta o molt baixa.
	Viscositat massa alta	Llegir instruccions de la bomba.



Problema	Possible causa	Hipòtesi d'intervenció
	Bomba gastada	Substituir-la. Juntes internes trencades. Peces internes trencades o desplaçades.
Bomba sorollosa	Cavitació	Aspiració insuficient. Viscositat elevada.
	Entrada d'aire	V. punt anterior.
	Deterioració interna	Bomba gastada.
Sobreescalfament	Pressió màxima massa alta	Vàlvula tarada massa alta.
	Potència dissipada inútilment	Desconnexió per fi de cycle. Modificar el circuit.
	Fuites internes d'oli elevades	V. punt anterior.
	Pèrdua excessiva de càrrega	V. punt anterior.
	Capacitat del dipòsit insuficient	Augmentar la grandària del dipòsit.
	Refrigeració insuficient	Augmentar la refrigeració artificial. Incorporar l'intercanviador o augmentar la potència nominal del que hi ha instal·lat.
	Fregament excessiu	Muntatge intern de la bomba defectuós. Lubricació defectuosa. Fluid poc lubricant.
Vida reduïda (almenys inferior del que s'espera)	Fluid amb components abrasius	Oli vell. Filtres poc efectius.
	Lubricació insuficient	Oli de poca qualitat. Fluid poc viscos a la temperatura de treball.
	Pressió d'exercici elevada en funció de la màxima admissible per la bomba i/o les vàlvules	Redissenyar el circuit.
	Acoblament defectuós	Càrregues anormals en mòdul o direcció.
Moviment erràtic	Aire en el circuit	Potser retingut a la part més alta del circuit. Purgar. Evitar l'entrada aire.



Problema	Possible causa	Hipòtesi d'intervenció
	Vàlvula bloquejada	A causa del moviment d'alguna junta o per material contaminant.
	Cilindre bloquejat	Muntatge intern defectuós. Càrrega perpendicular o mal alineada. Tija gripada.
	Pèrdua de càrrega excessiva	V. punt anterior.
	Pressió variable en l'acumulador	Acumulador de capacitat insuficient. Pèrdues superiors del que s'esperava d'oli en el circuit.

En els sistemes electrohidràulics, poden aparèixer problemes de tipus elèctric que afectin el funcionament global. Sovint, aquests problemes es detecten per un mal funcionament mecànic o hidràulic, o per tots dos. La taula següent ofereix una ajuda a l'hora d'identificar-ne les avaries més freqüents i és vàlida tant per a sistemes controlats en llaç obert com tancat. Els circuits en llaç tancat presenten altres problemes, a causa de l'ús de tecnologia de control avançada, sigui per la sintonització incorrecta del controlador, pel filtratge dels senyals o per la seva mala interpretació, i en els sistemes de control digital, per una conversió A/D o D/A defectuosa, etc.

Problema	Causa mecànica/hidràulica	Causa elèctrica/electrònica
Moviment inestable (amb fluctuacions de pressió i/o cabal)	Bomba defectuosa. Aire en el cilindre. Fluid contaminat. Pressió de pilotatge insuficient en vàlvules de doble etapa. Moviment a salts, com a conseqüència de l'excessiu fregament a les juntes del cilindre. Velocitat inferior a la mínima de funcionament del motor.	Alimentació de potència insuficient. Soroll elèctric o mala connexió a terra. Connexió deficient del solenoide d'alguna vàlvula.
Carrera massa llarga del cilindre (quan havia estat calibrada o reglada per endavant)	Elasticitat associada a conductes i a càmeres massa elevada. La vàlvula de bloqueig no tanca immediatament o ho fa de manera parcial. Actuador mal purgat (augment d'elasticitat). Mecanitzat del cilindre deficient (cònic, etc.).	Corrent elevat. Temps de rampa massa llarg. Commutació lenta.
Moviment a salts, no controlable	Bomba defectuosa. Vàlvula de control bloquejada.	Error de cablejat.



Problema	Causa mecànica/hidràulica	Causa elèctrica/electrònica
		Cablejat no segur. Contacte no ferm, que no garanteix continuïtat en l'alimentació. Dispositiu de senyalització trencat o defectuós. Sensor de posició separat mecànicament o no connectat.
Força o parell insuficients	Resistència excessiva en la línia de retorn o en la d'alimentació. Pressió de funcionament de la vàlvula de control massa baixa. Pèrdua de pressió excessiva en la vàlvula de control. Grandària nominal insuficient. Pèrdues internes en la bomba d'alimentació o en la vàlvula pel seu ús continuat.	Senyal d'alimentació inadequada. Regulació d'escala incorrecta.
Cop d'ariet durant el funcionament	Temps de commutació de la vàlvula de control massa petit (commutació massa ràpida). Orificis i/o conductes embossats. Acumulador antiariet bloquejat, mal regulat o mal situat. Càrrega excessiva sobre el cilindre.	Senyal d'alimentació inadequada. Regulació d'escala incorrecta.
Temperatura de funcionament excessiva	Secció de tub insuficient. Alimentació contínua excessiva. Funcionament del grup de pressió durant els temps morts de treball. Pressió de regulació massa elevada. Sistema de refrigeració no operatiu. Sistema de venting no operatiu.	
Soroll excessiu	Filtre bloquejat. Formació d'escuma en l'oli. Envelliment de la bomba. Resistència excessiva en la línia d'alimentació de la bomba: la bomba cavita. Aire retingut en el solenoide de la vàlvula.	Regulació no correcta del dither.

Bibliografia

Agüera, J. *Mecánica de fluidos incompresibles y turbomáquinas hidráulicas*. Editorial Ciencia 3, 2002. ISBN: 84-95.391-01-05.

AMCA. *Fan Application Manual*. Publicaciones 200, 201, 202, 203.

Balje. *Turbomachines. A guide to design, selection and theory*. MIT Press, 1984.

Batchelor, G. *Introducción a la dinámica de fluidos*. Centre de Publicacions de la Secretaria General Tècnica del Ministeri de Medi Ambient, 1997. ISBN: 84-8320-015-5.

Bosser, J. *Vademecum de mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*. Centre de Publicacions d'Abast. ETSEIB, 1997. ISBN: 84-89.349-91-6.

Bosser, J. *Màquines hidràuliques i de fluids*. Centre de Publicacions d'Abast. ETSEIB, 1998. Dipòsit legal: B-41.793-98.

Brennen, C. *Hydrodynamics of Pumps*. Oxford University Press, 1994. ISBN: 0-19-856442-2.

Cherhassky, V. *Pumps, Fans, Compressors*. Mir Publishers, 1980. ISBN: 5-03-001748-8.

Costa, E., et al. *Ingeniería química. Fenómenos de transporte*. Editorial Alhambra, 1984. ISBN: 84-205-1021-1.

Crespo, A. *Mecánica de fluidos*. Servei de Publicacions de l'ETSIIM, 1989. ISBN: 84-7484-061-9.

de las Heras, S. *Màquines i sistemes hidràulics*. Apunts de l'ETSEIAT, 2011.

de las Heras, S., et al. *Modelización de sistemas fluidos mediante bondgraph*. Cardellach Còpies, SA. 1999. ISBN: 84-605-7035-5.

de las Heras, S. *Instalaciones neumáticas*. Editorial UOC, 2003. ISBN: 84-9788-002-1.

Egusquiza, E. *Cavitació a les màquines hidràuliques*. Centre de Publicacions d'Abast. ETSEIB, 1998. Depósito legal: B-34.533-92.

Egusquiza, E. *Comportament dinàmic de màquines hidràuliques*. Edicions UPC, 2003. ISBN: 84-8301-682-6.



Egusquiza, E. *Cop d'ariet*. Centre de Publicacions d'Abast. ETSEIB, 1995. Dipòsit legal: B-40.376-94.

Emerson. *Control Valve Handbook*. 4a ed. Fisher Controls International, LLC, 2005.

García, L. *Válvulas de control*. AENOR, 1999. ISBN. 84-8143-151-6.

Harris, C. *Manual de medidas acústicas y control del ruido*. 3a ed. McGraw-Hill, 1998. ISBN: 84-481-1619-4.

Hutchinson. *ISA Handbook of Control Valves*. ISA, 1976.

Japikse, D., et al. *Introduction to Turbomachinery*. Concepts ETI & Oxford, 1994.

Kirillin, V., et al. *Termodinámica técnica*. Editorial Eulipe.

Koelle, E., et al. *Fluid Transients in Pipe Networks*. Elsevier Applied Science, 1992. ISBN: 185166760-1.

Lamit, G. *Piping Systems, Drafting and Design*. Prentice Hall.

Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. *Mecánica de fluidos*. Editorial Reverté, 1991. ISBN: 84-291-4080-8.

Liñán, A. *Mecánica de fluidos*. Servei de Publicacions de l'ETSIAM, 1967.

Mataix, C. *Turbomáquinas hidráulicas*. Editorial ICAI. 1975. ISBN: 84-600-6662-2.

Mateos, M. *Válvulas de retención*. Llibreria Editorial Bellisco, 1995. ISBN: 84-85.198.69-7.

Mateos, M. *Válvulas para abastecimientos de aguas*. Llibreria Editorial Bellisco, 1990. ISBN: 84-85.198.37-9.

Mendiluce, E. *El golpe de ariete en impulsiones*. Llibreria Editorial Bellisco, 1987. ISBN: 84-85.198.18-2.

Muñoz, M., et al. *Turbomáquinas térmicas*. Servei de Publicacions de l'ETSIIM, 1978. ISBN: 84-7484-002-3.

Ogata, K. *Ingeniería de control moderna*. Prentice-Hall Hispanoamericana. ISBN: 970-17-0048-1.

Osborne. *Fans*. Pergamon Press, 1997. ISBN: 0 08 021725 7.

Osuna, A. *Hidráulica técnica y mecánica de fluidos*. 5a ed. Servei de Publicacions del Col·legi d'Enginyers de Camins, Canals i Ports. Octubre de 1995. ISBN: 84-7493-000-6.

Pashkov, N., et al. *Hidráulica y máquinas hidráulicas*. Mir Publishers, 1985.

Pfleiderer, C. *Bombas centrífugas y turbocompresores*. Labor, 1960.



- Soler & Palau. *Prontuario de ventilación*. S&P, 1972. Dipòsit legal: B-28.466-72.
- Roca, F. *Oleohidráulica básica. Diseño de circuitos*. Edicions UPC, 1997. ISBN: 84-8301-198-0.
- Roses, M. *Características de la regulación de las instalaciones fluidotérmicas*. Publicacions de l'EUETIT, 2003.
- Soler, M. *Manual de bombas para fluidos*. Gráfica Minerva. 3a ed., desembre 2005. ISBN: 84-609-8588-1.
- Stepanoff, A. J. *Centrifugal and Axial Flow Pumps*. John Wiley & Sons, 1957.
- Sulzer, P. *Centrifugal Pump Handbook*. Elsevier Applied Science, 1989. ISBN: 1 85166 442 4.
- Tubos Saenger. *Manual técnico* 1997. Dipòsit legal: B-46.642-97.
- Turton, R. K. *Rotodynamic Pump Design*. Cambridge University Press, 1994.
- Velarde, S. *Comportamiento aeroacústico de ventiladores inestables*. Tesi doctoral, 1997. Departament d'Energia, Universidad de Oviedo.
- Viedma, A., et al. *Teoría y problemas de máquinas hidráulicas*. Editores Horacio Escarabajal, 2000. ISBN: 84-931650-4-2.
- Virto, L. *Apunts del curs d'especializació: Projecte fluidodinàmic i mecànic de ventiladors axials unicel·lulars i de raig*. 1996.
- Virto, L. *Apunts del curs d'especializació: Ventilació*. 1995.
- Virto, L. *Mecànica de fluids. Fonaments I*. Edicions UPC, 1993. ISBN: 84-7653-372-1.
- Virto, L. *Mecànica de fluids. Fonaments II*. Edicions UPC, 1996. ISBN: 84-8301-144-1.
- Wallis. *Axial Flow Fans and Ducts*. John Wiley and Sons, 1983.
- Wark, K. *Termodinámica*. 5a ed. McGraw-Hill, 1991. ISBN: 968-422-780-9.
- White, F. *Mecánica de fluidos*. McGraw-Hill, 2008. ISBN: 978-84-481-6603-8.
- Whitfield, B. *Design of Radial Turbomachines*. Longman Scientific and Technical, 1990.
- Wilson, W. *Positive-displacement pumps and fluid motors*. Nova York: Pitman Pub. Corp., 1950.
- Wu, C. *A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial- Radial- and Mixed-Flow Types*. NACA, 1952. Technical Note 2604.

