GESTIÓ I ORGANITZACIÓ D'EMPRESES

9

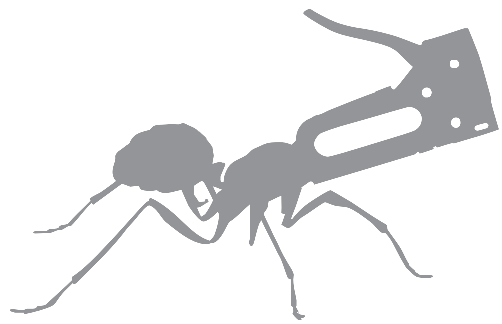
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

UPCPOSTGRAU

Programación lineal
MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES

Albert Suñé
Joan B. Fonollosa
Vicenç Fernández
Josep M. Sallán

9



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

iniciativa digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

UPCPOSTGRAU

Programación lineal
MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES

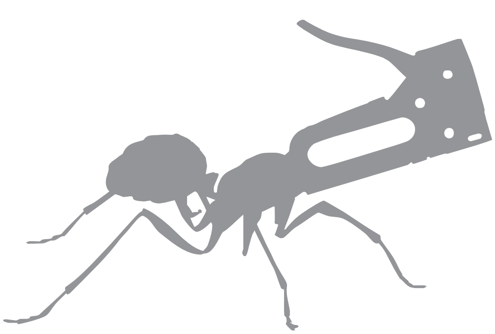
Albert Suñé
Joan B. Fonollosa
Vicenç Fernández
Josep M. Sallán

Primera edición: Julio de 2016

Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Depósito legal: B 16133-2016
ISBN: 978-84-9880-600-7

Índice



Presentación de la obra

Esta obra es el primer volumen de una colección en que se presentan las técnicas y las aplicaciones de los métodos cuantitativos para la toma de decisiones en el contexto de la organización industrial. Cada volumen presenta un método específico para resolver una tipología de problemas.

Esta obra es el resultado de la experiencia docente de los autores tras años de enseñanza en este ámbito.

Los contenidos recogidos en esta colección son especialmente indicados para estudiantes de grado o máster de ingeniería industrial y de organización, y han sido creados para los planes de estudios de la Universitat Politècnica de Catalunya–Barcelona Tech, adaptados al Espacio Europeo de Educación Superior.

Este volumen pretende introducir al lector en el uso de la programación lineal para resolver problemas de toma de decisiones en contextos de escasez de recursos. Se dedica especialmente a la resolución de problemas de gestión de recursos en empresas industriales y de servicios.

Introduce la técnica de la programación lineal en un sentido amplio y didáctico, con una orientación práctica para su aplicación profesional mediante herramientas informáticas. El lector puede complementar su desarrollo en la técnica de la programación lineal con el volumen sobre programación lineal avanzada de esta misma colección.

→ 1

Introducción a los métodos cuantitativos

En este capítulo se introducen la naturaleza y las especificidades de los métodos cuantitativos en una organización industrial. Esta introducción sigue una lógica de modelos, problemas y técnicas:

a) En muchas ocasiones, en el contexto organizativo –generalmente, en la gestión del sistema productivo, pero también en otros contextos–, nos encontramos con situaciones de una cierta complejidad, que plantean problemas susceptibles de ser resueltos elaborando un modelo cuantitativo. Conviene, pues, tener una noción clara de qué es un *modelo* y, en especial, un *modelo matemático o cuantitativo*.

b) También conviene que, al enfrentarnos a una situación determinada, no elaboremos un modelo cuantitativo cualquiera. Diferentes modelos pueden tener dificultades muy variables (y, en consecuencia, distintos costes de resolución). Por este motivo, es importante saber que existen diferentes *problemas* tipo, que representan situaciones que pueden darse en contextos muy diferentes. En ocasiones, puede ser bueno tener en mente un cierto abanico de problemas tipo a la hora de elaborar un modelo.

c) Finalmente, necesitamos un conjunto de *técnicas* que nos permitan resolver el modelo, eso es, obtener a un coste asequible y con una precisión aceptable la información que buscábamos al elaborar dicho modelo. Estas técnicas estarán relacionadas muchas veces con problemas tipo; de ahí la importancia de estos.

En definitiva, a lo largo de su formación en métodos cuantitativos para la toma de decisiones, el lector deberá ser capaz de formular modelos matemáticos a partir de situaciones poco estructuradas. Dichas situaciones pueden tener cierta relación con problemas tipo a los cuales pueda aplicarse un conjunto bien definido de técnicas para hallar la solución del modelo, eso es, la información cuya búsqueda nos impulsó a elaborarlo.

1.1. Concepto de modelo

Una definición clásica de modelo es:

Un objeto M es un modelo de una realidad R para un observador O, si O puede obtener, estudiando M, las respuestas a las preguntas que se hace sobre R.

Así, una misma realidad puede ser representada por diferentes modelos, en función de las preguntas que nos hagamos acerca de ella. Una red eléctrica, por ejemplo, puede ser representada por:

- Un grafo cuyos arcos tienen asociada la distancia entre diferentes puntos, si queremos determinar cuál es el conjunto de conexiones que minimiza la longitud de cable que habrá que emplear.
- Un mapa del terreno a escala, para llevar a cabo la obra civil del tendido eléctrico. El mapa ofrece más información que el grafo: además de estar a escala, incluye los accidentes orográficos (ríos, etc.), las curvas de nivel, etc.
- Una red de Kirchhoff, a fin de determinar las intensidades de la línea, las pérdidas de energía por transporte, etc.

En definitiva, el *modelo* viene determinado por el *problema* que hay que resolver y por los requerimientos de la *técnica* escogida para resolverlo.

El proceso de construcción y resolución de un modelo puede dividirse en tres partes:

a) Modelización. Construcción y elaboración del modelo. Generalmente, se trata de un proceso difícil de sistematizar, puesto que podemos tener situaciones muy diversas que admiten modelos muy similares (es el caso, por ejemplo, de la programación lineal).

b) Resolución. Diremos que hemos resuelto el modelo cuando hayamos podido responder a las preguntas que nos movieron a elaborarlo o, si no, cuando hayamos obtenido la información que necesitábamos.

c) Explotación. Una vez obtenidos los resultados, estos deben interpretarse y analizar sus implicaciones para la gestión del sistema afectado. Otra cuestión importante es el mantenimiento del modelo: ver cómo evoluciona la solución cuando los parámetros del sistema evolucionan.

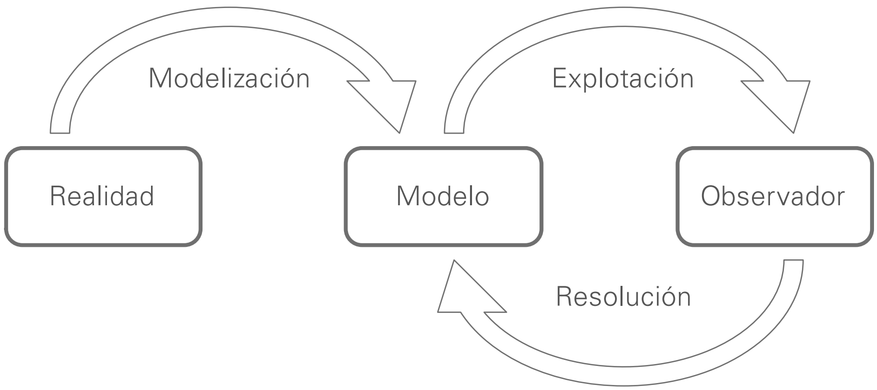


Figura 1.
Relaciones entre realidad, modelo y observador

1.2. Tipos de problemas

Los métodos cuantitativos para la toma de decisiones se centran en un conjunto de problemas concretos, asociados generalmente a la organización de las interrelaciones entre los elementos del sistema que permiten optimizar su comportamiento. En muchas ocasiones, dicha optimización supone la minimización de los recursos empleados o de su valor (coste). En otras, buscaremos maximizar la utilidad asociada al uso del sistema. Dicha utilidad suele ir asociada, en el contexto empresarial, a la maximización del beneficio derivado de la actividad. A continuación, mostraremos algunos problemas prototipo. Para cada uno de ellos, definiremos tres aspectos:

a) Las *características* del problema.

b) El *objetivo* del problema, eso es, la magnitud a optimizar.

c) Las posibles *variables de decisión*, es decir, las características del sistema que podemos controlar. En general, el valor de la magnitud a optimizar es función de dichas variables de decisión, además de unos *parámetros* sobre los cuales no tenemos control.

1.2.1. Problemas de inventarios (stocks)

Los problemas de inventarios aparecen cuando, por determinadas razones, los flujos de entrada de un determinado recurso en un sistema son diferentes de los flujos de salida. Este hecho exige que dispongamos de una determinada cantidad de recursos con la única finalidad de ajustar estos dos flujos. Dicha cantidad serán las existencias o *stocks* del sistema.

Un sistema de este tipo tiene un conjunto de costes asociados a la gestión del sistema:

- *Coste de adquisición*. Es posible que el recurso tenga diferentes costes a lo largo del tiempo y que sea interesante adquirir gran cantidad de un determinado recurso en un momento determinado para poderlo utilizar cuando su coste sea elevado. Esta adquisición aumentará el valor de las existencias. En ocasiones, existe un componente de coste independiente de la cantidad adquirida, que suele denominarse *coste de lanzamiento de un pedido*.
- *Coste de mantenimiento o posesión*. Mantener el recurso en *stock* supone unos costes de almacenamiento, financiación, etc., que tienden a limitar el valor del inventario.
- *Coste de rotura*. Puede darse el caso de que, con nuestra programación, no podamos servir el flujo de demanda y se genere una falta de suministro. Entonces, tendremos unos costes de rotura de *stocks*. Si estos costes son elevados, pueden hacer aumentar el valor del inventario.

El objetivo del problema es minimizar la suma total de los costes de adquisición, mantenimiento y rotura, asociados a un determinado flujo de salida. Las variables de decisión serán las cantidades que habrá que adquirir en cada instante de tiempo, así como el nivel de inventario entre cada entrada y salida.

La gestión de materiales en una empresa industrial es el ejemplo más evidente de un problema de *stocks*, aunque cabe encontrar formulaciones similares en otros ámbitos:

- *Gestión de tesorería,* donde el inventario es el saldo de la cuenta bancaria en cada momento.
- *Gestión de un recurso*, por ejemplo, un embalse. En este caso, el inventario es el nivel de agua entre la entrada y la salida del embalse.

1.2.2. Problemas de reparto

Las características generales de un problema de reparto son que disponemos de un conjunto de recursos con los cuales realizamos un determinado conjunto de actividades. Los parámetros del sistema son:

a) La cantidad disponible de cada recurso.

b) La cantidad de cada recurso necesaria para producir una unidad de cada una de las actividades.

c) El rendimiento o la utilidad que se derivan de producir una unidad de cada una de las actividades.

El objetivo es determinar cómo se asignan los recursos a las actividades, de manera que la utilidad o el rendimiento total sean máximos.

Una variante de este problema consiste en plantear una situación en que, además de una cantidad máxima de recursos, se deba realizar una cantidad mínima de cada una de las actividades. En este caso, podemos plantearnos determinar si es posible servir esta cantidad mínima o no, encontrar qué actividades deben realizarse primero, etc.

Las variables de decisión serán las cantidades de actividades que habrá que realizar, o bien los recursos consumidos en cada actividad. También podemos plantear como variable de decisión qué actividades pueden realizarse y cuáles no.

Algunos problemas asimilables a un problema de reparto son:

- Determinar desde qué almacén debe servirse cada punto de consumo y en qué cantidad, para minimizar los costes de transporte.
- Los problemas de horarios (por ejemplo, qué profesores deben asignarse a cada asignatura).

1.2.3. Problemas de secuencias

En un problema de secuencias, tenemos un conjunto de tareas para realizar, relacionadas entre ellas en función de unas ciertas restricciones. Por ejemplo, una tarea determinada no puede realizarse hasta que se hayan finalizado otras dos tareas previas. En ocasiones, dichas tareas consumen algunos recursos de que se dispone en una cantidad limitada.

El objetivo es determinar el momento en que debe iniciarse y acabarse cada tarea, así como el tiempo total de realización de las tareas. También puede desearse conocer qué actividades pueden retrasarse sin retrasar la fecha de entrega del conjunto y cuáles no, así como la asignación de los recursos limitados a las tareas.

Los problemas de secuencias suelen ir ligados a actividades no repetitivas, como el lanzamiento de un producto al mercado o la construcción de un edificio.

1.2.4. Problemas de colas

Un problema de colas puede formularse del modo siguiente: determinadas unidades llegan a un sistema de forma aleatoria, según una *ley de llegada* conocida. Dichas unidades reciben un servicio determinado en uno o varios servidores. El tiempo de servicio sigue también una determinada *ley de servicio*. Además, el sistema puede tener varios componentes de coste: por ejemplo, el *coste de servicio* (coste asociado a disponer de un servidor) y el *coste de espera* (coste asociado a esperar a ser servido). Los problemas de colas están condicionados por el carácter aleatorio de las llegadas y del tiempo de servicio.

Lo que se pretende obtener son parámetros asociados al sistema:

a) Tiempo medio de espera

b) Tiempo medio en el sistema (tiempo de espera, más tiempo de servicio)

c) Número medio de unidades en espera

d) Número medio de unidades en el sistema

También pueden plantearse cuestiones relativas al diseño del sistema, como el número de servidores que minimiza la suma de costes de servicio más los costes de espera.

Podemos encontrar problemas de colas en cualquier situación en que se produzcan esperas (colas en el supermercado o en el aeropuerto, proceso de matriculación en una universidad, etc.). De forma menos evidente, se pueden encontrar problemas de colas en el diseño de los sistemas de mantenimiento, en la asignación de máquinas a los operarios, etc.

1.2.5. Problemas de renovación

En un problema de renovación, existe un conjunto de elementos que envejecen. Esto puede aumentar sus costes de funcionamiento o reparación, así como las probabilidades de avería. Por otra parte, sustituir el elemento supone un coste, que puede ser superior al de seguir utilizando el elemento en un momento determinado.

El objetivo no es otro que conocer cuándo debe reemplazarse el equipo. En una situación a largo plazo, puede interesar conocer la política de decisión en cada momento.

Los problemas de renovación se presentan en cualquier sistema cuyos elementos envejezcan y en que el problema de la fiabilidad del conjunto del sistema sea relevante.

1.2.6. Problemas de caminos

Los problemas de caminos son propios de situaciones en que se puede ir de un estado inicial a otro final de varias maneras. Se trata de encontrar cuál de estas es la mejor para minimizar tiempo, costes o recursos.

El objetivo es encontrar la política más indicada para hallar el camino más corto entre el inicio o el final del recorrido. Las variables de decisión deben considerar las acciones a realizar, y formar parte del camino más corto.

Los problemas de caminos pueden darse en situaciones en que se busca el camino más corto entre dos puntos o la forma más económica de realizar una actividad con un inicio y un final definidos. Algunos problemas de secuencias pueden formularse en términos de problema de caminos.

1.2.7. Problemas de competencia

Los problemas de competencia estudian situaciones en que diversos actores toman decisiones, de manera que la decisión de un actor incide en los resultados obtenidos por los otros, además de por él mismo. Partiendo de una determinada hipótesis relativa al comportamiento de los actores (usualmente, que se comporten de manera racional), el sistema se modeliza para determinar los resultados alcanzados por cada actor.

El propósito de estos modelos es determinar la *estrategia* óptima para los jugadores, definida como las características de las acciones que cada jugador ha de llevar a cabo para optimizar su utilidad. Estas estrategias serán las variables de decisión del modelo.

Cualquier situación en que se dé la interdependencia descrita entre los actores es susceptible de ser analizada como un problema de competencia. Entre los ejemplos más conocidos, tenemos las decisiones de las empresas de un sector, una subasta o una situación con votaciones sucesivas.

1.2.8. Problemas de búsqueda

Los problemas de búsqueda consisten en situaciones en que, para acceder a una información determinada, se ha de incurrir en un cierto coste de búsqueda. Pueden darse, incluso, situaciones en que no haya la seguridad de que la información exista o esté disponible.

El objetivo de los problemas de búsqueda es determinar la forma de buscar esta información minimizando los costes de búsqueda, y cuándo hay que detener esta búsqueda considerando los costes en que se incurre y los beneficios obtenidos con el hallazgo. Una variante de este problema es determinar cómo hay que clasificar la información para facilitar su recuperación con una búsqueda posterior, incurriendo en el mínimo de costes de búsqueda.

La variable de decisión es la política de búsqueda y ha de incluir las reglas para detener la búsqueda. En la segunda versión del problema, las variables definirán la política de clasificación relacionada con la política de búsqueda.

Son ejemplos de situaciones en que se presentan problemas de búsqueda el control de calidad (búsqueda de defectos), la búsqueda de yacimientos de petróleo, la prospección arqueológica o la búsqueda de información en internet, así como la determinación de las reglas de clasificación y archivo.

1.3. Métodos cuantitativos de tratamiento de problemas

Los métodos cuantitativos disponibles para resolver los problemas descritos en el apartado anterior pueden clasificarse en dos grandes categorías:

a) *Métodos exactos*. Se caracterizan por que aseguran encontrar la solución óptima, si existe. En ocasiones, hallar esta solución óptima puede suponer elevados costes, en términos de tiempo de cálculo.

b) *Métodos no exactos*. Tienen en común que no aseguran la solución óptima, sino *una solución razonablemente buena en un tiempo razonable*. Existe alguna probabilidad de encontrar efectivamente el óptimo, pero no podremos asegurar si la solución obtenida es óptima: sólo sabremos que es una buena solución.

Optimización clásica (análisis matemático)

Engloba diversos procedimientos analíticos que tienen en común la idea de encontrar la función derivada e igualarla a cero para obtener los puntos extremos. Suele requerirse que la función que se desea optimizar sea continua y derivable. Algunos desarrollos matemáticos, como los multiplicadores de Lagrange, permiten resolver de esta manera problemas en que las variables de decisión están sometidas a determinadas restricciones.

Programación matemática

Los programas matemáticos son formulaciones del tipo:

$$[\mathrm{OPT}]\ z = f(x),$$
$$\text{donde } x \in E \subset R^n$$

en que *f(x)* es la *función objetivo* y E es la *región factible*, subconjunto de R^n de soluciones posibles del problema.

El programa matemático será más o menos difícil de resolver según las características de la función objetivo y de la región factible. En este sentido, existen algunos casos especialmente relevantes:

a) *Programación lineal*. La función *f(x)* es lineal y E está determinada por un conjunto de restricciones lineales.

b) *Programación lineal entera, binaria o mixta*. Se trata de programación lineal en que los componentes de *x* son variables enteras (programación lineal entera) o binarias (programación lineal binaria), o bien algunas variables son enteras o binarias y otras reales (programación lineal mixta).

c) *Programación no lineal*. Programa matemático que no cumple las condiciones de la programación lineal, tal como se acaba de definir. Los modelos de programación lineal pueden ser muy difíciles de resolver, aunque los dos casos que se indican a continuación son especialmente interesantes para la organización industrial:

– Programación cuadrática: f(x) es un polinomio de segundo grado y las restricciones, lineales o de segundo grado.

– Programación semilineal: f(x) es un polinomio de grado n y las restricciones son lineales.

La programación lineal es una de las técnicas más utilizadas para resolver los problemas propios de los métodos cuantitativos en el contexto de la organización industrial y se desarrolla en profundidad en este volumen de la colección. La programación lineal entera, binaria y mixta se abordará en el volumen de programación lineal avanzada.

Teoría de grafos

Esta teoría trata de unos objetos matemáticos denominados *grafos*, consistentes en un conjunto de elementos (vértices del grafo) y las relaciones entre ellos (que pueden ser aristas o arcos del grafo).

Programación dinámica

La programación dinámica es una metodología para encontrar políticas óptimas en procesos polietápicos de decisión. Se trata de sistemas que evolucionan en varias etapas, en cada una de las cuales hay que tomar una decisión que hará que el sistema evolucione a un estado determinado, de manera determinista o siguiendo una distribución de probabilidad.

El objetivo es determinar qué política debemos seguir (decisión a tomar si nos encontramos en un estado determinado, es decir, en una etapa determinada) para optimizar la función objetivo. Dicha función se caracteriza por ser recursiva (eso es, depende de la decisión actual y del estado al cual el sistema puede evolucionar en la etapa siguiente).

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un sistema que evoluciona a lo largo del tiempo dentro de un conjunto de estados. Se caracteriza por que la probabilidad de que el sistema evolucione a un determinado estado depende exclusivamente del estado en que se encuentra en el momento presente.

Teoría de colas

Se trata de modelos desarrollados específicamente para analizar problemas de colas. Consiste, fundamentalmente, en un conjunto de modelos descriptivos de diversas situaciones, relativas a las leyes de llegada y servicio, y a otras características propias de estos sistemas.

Son de especial interés, por su (relativa) sencillez conceptual, los modelos de cola en que las tasas de llegada y de servicio siguen una ley de Poisson.

Teoría de decisión

Se trata de procedimientos que permiten valorar las diferentes alternativas y los posibles modelos de experimentos que pueden realizarse para tomar decisiones en situaciones que pueden describirse mediante un modelo matemático.

Teoría de juegos

Se trata de modelos que estudian, de forma específica, problemas de competencia. Se diferencia de la teoría de la decisión por la existencia de varios actores y por la interdependencia entre las acciones de cada uno de ellos.

Procedimiento de separación y acotación

Es un procedimiento para obtener la resolución de problemas en que el conjunto de soluciones es finito. La táctica adoptada consiste, en primer lugar, en dividir el conjunto en dos partes, siguiendo una *regla de separación*. A continuación, se acota el valor de la función objetivo en cada una de las partes, mediante una *regla de acotamiento*. Así, exploramos un conjunto de soluciones cada vez menor hasta encontrar el óptimo.

1.3.1. Métodos no exactos

Métodos heurísticos

Un método heurístico genera soluciones de un determinado problema mediante un método del cual se sabe, bien por experiencia o por razonamiento teórico, que genera *buenas soluciones* con una alta probabilidad. Suele clasificarse en tres grupos:

a) *Algoritmos de un solo paso.* Son métodos que generan una única solución en cada etapa, tomando decisiones sucesivas que ya no son reconsideradas. Cada vez hay menos alternativas y estas están más condicionadas, de forma que las últimas decisiones pueden ser muy malas.

b) *Métodos iterativos.* Son métodos que generan una solución en cada etapa, de manera que las soluciones obtenidas puedan reconsiderarse en etapas anteriores.

c) *Métodos de mejora.* Son métodos que, partiendo de una solución determinada, van mejorándola en etapas sucesivas.

Simulación

Proceso en que se representa el estado del sistema mediante unas variables relacionadas por unas reglas determinadas. Una vez establecidas, se observa su evolución a lo largo del tiempo según unas hipótesis y unas reglas de gestión predeterminadas. Permite conocer la solución de problemas difícilmente resolubles mediante los métodos exactos.

Modelos descriptivos

Modelos que describen o que reproducen, de una manera más o menos simplificada, la realidad a estudiar, con lo cual permiten experimentar y analizar sus reacciones ante determinadas decisiones, incidencias o políticas.

Algoritmos genéticos

Se trata de procedimientos basados en la selección natural, en que una generación de individuos (conjunto de soluciones) da lugar, mediante el entrecruzamiento entre ellas, a una nueva generación de soluciones que, por término medio, es mejor desde el punto de vista de la calidad del resultado obtenido.

Redes neuronales

Sistemas basados en la simulación de las conexiones neuronales de los seres vivos, capaces de aprender de la experiencia y proporcionar soluciones cada vez mejores a problemas similares.

Existen varias relaciones entre las diversas técnicas. Por ejemplo, la programación lineal entera utiliza procedimientos de separación y acotación; determinados problemas de programación dinámica utilizan propiedades de las cadenas de Markov, y la teoría de decisión utiliza técnicas de programación lineal, de la teoría de grafos y de simulación, etc.

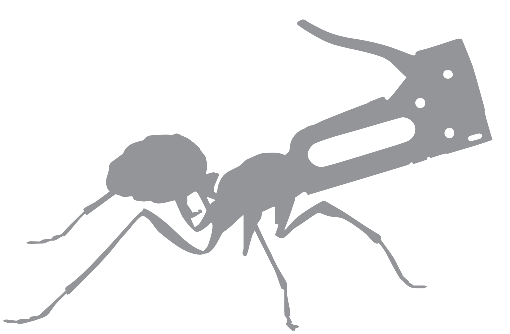
1.4. Relación entre problemas y técnicas

No existe una relación directa entre los tipos de problemas y las técnicas utilizadas para resolverlos. Además, la mayoría de los problemas no pueden clasificarse de manera unívoca y las técnicas se pueden combinar. La tabla 1 es una aproximación para hallar relaciones entre los problemas (columnas) y las técnicas (filas). Se ha utilizado la notación siguiente:

P: Técnica principal para resolver el problema
S: Técnicas empleadas de forma secundaria
A: Técnicas auxiliares o utilizadas en casos especiales

Tabla 1.
Problemas y técnicas
de los métodos
cuantitativos

	Inventarios	Reparto	Colas	Secuencias	Renovación	Caminos	Competencia	Búsqueda
Opt. clásica	P		A		P		S	S
Prog. lineal	S	P		A	A	S	P	A
Prog. no lineal.	S	S						
P. dinámica	P	S		S	S	S		P
T. grafos			A	P	S	P	A	A
T. colas			P	S				
P. separ. y acot.		A		P	P	P		A
T. decisión	S		A		S		P	P
T. juegos							P	
Cad. Markov	S	A	S					S
M. heurísticos	S	S		S	S	S	A	A
Simulación	A	S	P	S	P		S	S
M. descript.	A			S			P	P
Alg. genéticos		A		S		P		P
R. neuronales				S	S	P	P	S



→2

Modelización con programación lineal

2.1. Programación matemática y programación lineal

En las organizaciones, podemos encontrar numerosos problemas que se ajustan a un esquema común: hallar el valor de un conjunto de variables (*variables de decisión*) tal que otra variable, que a su vez es función de las variables de decisión (*función objetivo*), alcance su valor óptimo (máximo o mínimo).

En muchas ocasiones, los valores que pueden tomar las variables de decisión vendrán limitados por un *conjunto de restricciones*, las cuales deberán cumplirse de manera simultánea. A modo de ejemplo, una restricción muy frecuente es que las variables de decisión sean no negativas.

Este tipo de problemas son susceptibles de ser resueltos mediante un programa matemático. Se trata de un modelo, en el sentido definido anteriormente, que representa la situación a resolver mediante un conjunto de expresiones matemáticas de la forma:

$$[\text{OPT}]\, z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\begin{aligned}
&\text{sujeto a:}\\
&\quad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\\
&\quad g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\\
&\qquad\qquad \ldots\\
&\quad g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0
\end{aligned}$$

Mediante esta notación, se indica que hemos de determinar el valor óptimo de z (que puede ser tanto el máximo [MAX], como el mínimo [MIN]), que es función de las variables de decisión x_1, x_2, ..., x_n. Los valores de estas variables han de ser tales que cumplan el conjunto de ecuaciones g_i (o inecuaciones, pues cualquier inecuación puede transformarse en ecuación, como se verá más adelante) que constituyen las restricciones del programa matemático.

Definido de este modo, el número de tipos de programas matemáticos es muy variado, y también su dificultad de resolución. Pueden encontrarse desde programas resolubles mediante cálculo diferencial o algoritmos sencillos, hasta programas irresolubles por procedimientos exactos. La tabla 2 da idea de algunos tipos de programas matemáticos a partir de las propiedades de sus componentes: las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo.

El objetivo de este volumen es presentar la *programación lineal*, que incluye un conjunto de programas matemáticos que permiten modelizar un gran número de problemas reales y pueden resolverse de manera exacta de forma relativamente sencilla.

Tabla 2.
Clasificación de los programas matemáticos

Variables de decisión	Reales Enteras Binarias
Restricciones	Sin restricciones Restricciones lineales / no lineales Restricciones continuas / no continuas Restricciones convexas / cóncavas
Función objetivo	Lineal (afín) / no lineal Diferenciable / no diferenciable

2.2. El modelo de programación lineal

Un modelo de programación lineal es un caso particular, especialmente sencillo, de programación matemática, que tienen las características siguientes:

a) Las variables de decisión son no negativas.
b) Las restricciones g_i son una función afín de dichas variables.
c) La función objetivo es una función afín de las mismas variables.

Cuando las características del modelo exigen que todas las variables de decisión sean enteras, tenemos un modelo de *programación (lineal) entera*. Si sólo una parte de las variables han de ser enteras, se trata de un modelo de *programación (lineal) mixta*. Estos modelos y sus métodos de resolución se presentan en el volumen *Programación lineal avanzada* de esta misma colección.

2.2.1. Condiciones de los modelos lineales

En muchas ocasiones, los problemas no pueden modelizarse estrictamente mediante modelos lineales, aunque la simplicidad de resolución de los modelos lineales frente a otras situaciones aconseje proceder de esta manera, al coste de aceptar una serie de hipótesis implícitas a la linealidad. A continuación, se presentan estas hipótesis.

Determinismo

El valor de los parámetros del modelo lineal se supone cierto. Ello significa que no pueden utilizarse variables aleatorias (susceptibles de seguir una determinada ley de probabilidad). Por ello, la solución obtenida será de tipo determinista. Si existen variables aleatorias, pueden representarse mediante sus valores medios, o proponiendo diversos casos (conjunto de valores probables para las variables), en función de la distribución de probabilidad existente.

Continuidad

Las variables de decisión en la programación lineal pueden tomar, en principio, cualquier valor no negativo. Si, por las condiciones del modelo, se han de utilizar variables que tomen valores enteros, habrá que recurrir a técnicas de programación lineal entera o mixta.

Proporcionalidad

El hecho de que la función objetivo y las restricciones sean afines significa que, al incrementar o decrementar una variable de decisión cualquiera, la función objetivo y las restricciones han de experimentar incrementos o decrementos proporcionales. Si no puede admitirse la hipótesis de proporcionalidad, alguna de las funciones (función objetivo o restricciones) será no lineal. En este supuesto, se debe afrontar la resolución (mucho más compleja) de una situación de programación no lineal.

Aditividad

Un programa lineal admite el principio de superposición: la función suma de dos variables es igual a la suma de las dos variables por separado. Por ejemplo:

$$z(x_1 + x_2) = z(x_1) + z(x_2)$$

2.2.2. Componentes de un modelo de programación lineal

Un modelo de programación lineal está compuesto por tres elementos: variables, función objetivo y restricciones.

Las variables

Las *variables* pueden ser de dos tipos:

– *Variables de decisión*, que miden la magnitud que se desea optimizar o bien las magnitudes sobre las cuales se puede actuar o decidir.

– *Variables auxiliares,* que miden las magnitudes que tienen sentido en el problema y que dependen de las variables de decisión. Usualmente, se puede crear el modelo sin estas variables, pero su definición suele aportar información sobre el resultado final a costa de crear un modelo más complicado.

Para cada variable, hay que definir su significado (es decir, la magnitud que mide), su unidad de medida (por ejemplo, euros, metros o personas) y su naturaleza matemática (real, entera, binaria, no negativa, acotada, etc.).

La función objetivo

La función objetivo es la expresión lineal que relaciona las n variables definidas con el valor a optimizar z. A cada variable, se le asocia un coeficiente c, que es la proporción en que varía el valor a optimizar z por cada unidad de incremento de la variable correspondiente.

$$[\mathrm{OPT}]\; z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_ix_i + \ldots + c_nx_n$$

Podemos encontrarnos tanto con problemas en que se busque maximizar la función objetivo (problemas de máximo [MAX]) como con problemas en que se persiga minimizar dicha función (problemas de mínimo [MIN]).

Las restricciones

Las restricciones son expresiones lineales que definen las limitaciones de recursos, las condiciones del problema, o que relacionan las variables entre sí.

Las restricciones determinan el conjunto de valores posibles para las variables de decisión, también denominado *región factible*. La solución óptima del modelo deberá encontrarse necesariamente dentro de esa región factible. En programación matemática, esta región se representa por un conjunto de restricciones. Los elementos de la región factible han de cumplir, necesariamente, todas las restricciones.

Las restricciones pueden ser tanto ecuaciones como inecuaciones. Así, podemos encontrarnos con una restricción *i* de menor o igual:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$$

Una restricción *j* de mayor o igual:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \geq b_j$$

O una restricción *k* de igualdad:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$$

Del examen de las expresiones anteriores, se observa que un modelo lineal de *n* variables y *m* restricciones se caracteriza por tres conjuntos de parámetros:

a) Los *coeficientes tecnológicos* a_{ij}, asociados a la variable j en la restricción i. Dichos coeficientes dan lugar a la matriz A.

b) Los términos independientes b_i de las restricciones, que forman el vector columna b.

c) Los coeficientes c_j de las variables en la función objetivo, denominados *coeficientes de coste*. La función objetivo puede tener un término independiente, cuyo valor no afecta la solución del modelo. En ocasiones, los coeficientes se representan mediante el vector columna c.

A continuación, mostramos tres ejemplos prototipo, que permiten una primera aproximación a las situaciones susceptibles de ser representadas y resueltas mediante la programación lineal.

Ejemplo 1. El problema de la granja

Un granjero dispone de 110 hectáreas de terreno, que puede cultivar con cebada o lechugas. Cada hectárea cosechada de cebada le reporta un beneficio de 50 euros. Los beneficios de la venta de las lechugas de una hectárea son de 80 euros. La cosecha de una hectárea de cebada supone 4 horas de trabajo, y cultivar las lechugas de una hectárea de terreno requiere 8 horas de trabajo. El granjero sólo dispone de 720 horas de trabajo durante la temporada. Finalmente, únicamente 80 de las hectáreas de terreno son aptas para el cultivo de la cebada. ¿Cuántas hectáreas de cebada y de lechugas debe sembrar el granjero para maximizar su beneficio?

El primer elemento que hay que definir del modelo son las variables de decisión con que representaremos la función objetivo y las restricciones. Aquí parece claro que las variables de decisión más operativas son:

CEB: hectáreas cultivadas de cebada, variable real

LEC: hectáreas cultivadas de lechuga, variable real

Se escogen estas variables de decisión porque, si conocemos los valores óptimos de estas variables, conoceremos la solución óptima de forma directa. Además, podremos expresar la función objetivo y las restricciones en función de estas variables de decisión.

La función objetivo será la expresión del beneficio total. Los parámetros del sistema serán los beneficios (en euros) por hectárea cultivada de producto:

$$[MAX]\, z = 50CEB + 80LEC$$

En este modelo, el papel de las restricciones es representar las limitaciones de recursos de que disponemos (obsérvese que, de no existir estas limitaciones, el beneficio es infinito cuando las variables tienden a infinito). En este caso, tenemos tres recursos limitados: la superficie cultivable, las horas de trabajo y el terreno apto para cultivar cebada.

Podemos expresar que el granjero no tiene más de 110 hectáreas de terreno disponible como expresión lineal de las variables de decisión, del siguiente modo:

$$CEB + LEC \leq 110$$

La segunda limitación de recursos es que el granjero no dispone de más de 720 horas de trabajo para la temporada, de modo que la cantidad de horas empleadas en los dos cultivos habrá de ser necesariamente inferior o igual a este tiempo:

$$4CEB + 8LEC \leq 720$$

Finalmente, no podremos cultivar cebada en más de 80 hectáreas de terreno:

$$CEB \leq 80$$

El problema no tiene sentido para valores negativos de las variables de decisión, así que es necesario precisar:

$$CEB, LEC \geq 0$$

Como resultado, el modelo de programación lineal será:

$$[MAX]\, z = 50CEB + 80LEC$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} &CEB + LEC \leq 110 \\ &4CEB + 8LEC \leq 720 \\ &CEB \leq 80 \\ &CEB, LEC \geq 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que, en este caso, todas las restricciones han resultado ser de menor o igual, y así se han representado las limitaciones de los recursos.

Ejemplo 2. El problema de la dieta

Una deportista tiene unas necesidades nutricionales de 70 g de proteínas y de 3.000 Kcal diarias. Puede satisfacerlas con los alimentos que se indican en la tabla 3. Para cada alimento, se indican también los valores nutricionales y el coste por cada 100 g de alimento.

	Pan	Queso	Mantequilla	Galletas	Espinacas
Proteínas (g)	8,3	24,9	0,4	6,0	5,1
Kcal	246	423	793	93	26
Coste	35	130	100	75	30

Tabla 3.
Datos del problema de la dieta

¿Cuál será la composición de la dieta que cubra las necesidades del individuo a un coste mínimo?

Las variables de decisión serán, en este caso, las cantidades a consumir de los diferentes alimentos:

P: cantidad de pan (×100 g), variable real
Q: cantidad de queso (×100 g), variable real
M: cantidad de mantequilla (×100 g), variable real
G: cantidad de galletas (×100 g), variable real
E: cantidad de espinacas (×100 g), variable real

En función de estas variables, es fácil representar el coste de la dieta multiplicando la variable por el coeficiente de coste de la tabla 3. Esta es la función objetivo a minimizar:

$$[\text{MIN}]\, z = 35P + 130Q + 100M + 75G + 30E$$

Ahora bien, esta dieta debe cumplir unas necesidades nutricionales mínimas; de lo contrario, los valores de las variables de decisión serían cero. En este caso, ha de contener un mínimo de proteínas y Kcal. Estas condiciones se representan por dos restricciones de mayor o igual. La primera corresponde a las proteínas y la segunda, a las Kcal:

$$8{,}3P + 24{,}9Q + 0{,}4M + 6{,}0G + 5{,}1E \geq 70$$
$$246P + 423Q + 793M + 93G + 26E \geq 3000$$

Como en el ejemplo 1, sólo tienen sentido variables positivas para este modelo:

$$P, Q, M, G, E \geq 0$$

El modelo que representa la situación descrita es:

[MIN] z = 35P + 130Q + 100M + 75G + 30E

Sujeto a:

$$8{,}3P + 24{,}9Q + 0{,}4M + 6{,}0G + 5{,}1E \geq 70$$
$$246P + 423Q + 793M + 93G + 26E \geq 3000$$
$$P, Q, M, G, E \geq 0$$

Obsérvese que, en este caso, todas restricciones (excepto las de no negatividad de las variables) son de mayor o igual y representan requerimientos mínimos de recursos.

Ejemplo 3. El transporte barato

El sistema de distribución de una empresa para una región determinada está compuesto de tres fábricas (F1, F2 y F3) y cuatro almacenes (A1, A2, A3 y A4). En la tabla 4, se indican los costes de transporte de cada fábrica a cada almacén por unidad logística transportada. También se indican la capacidad productiva máxima de cada fábrica y la demanda de producto a distribuir desde cada almacén.

Tabla 4.
Datos del ejemplo del transporte barato

	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**Capacidad**
F1	8	13	9	8	60
F2	9	11	12	10	70
F3	7	8	10	9	80
Demanda	75	45	40	50	

Por ejemplo, en la tabla 4, podemos observar que el coste de transportar una unidad de material desde la fábrica F2 hasta el almacén A3 es de 12 euros, y que la demanda del almacén A3 es de 40 unidades.

¿Cuántas unidades de producto deben llevarse de cada fábrica a cada almacén, de modo que el coste total del transporte sea mínimo?

En este caso, deben escogerse las variables de decisión de modo que puedan representar todas las posibilidades de transporte entre fábricas y almacenes. Así, tenemos $3 \times 4 = 12$ variables de decisión. Resulta cómodo definirlas mediante la notación siguiente:

x_{ij}: cantidad transportada desde la fábrica F_i hasta el almacén A_j. Son 12 variables reales (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)

En el modelo, deberemos minimizar el coste total del transporte a partir de la expresión de la siguiente función objetivo:

$$[\text{MIN}]\, z = 8x_{11} + 13x_{12} + 9x_{13} + 8x_{14} + 9x_{21} + 11x_{22} + 12x_{23} + 10x_{24} + 7x_{31} + 8x_{32} + 10x_{33} + 9x_{34}$$

Para este caso particular, tenemos que la capacidad de las tres fábricas es igual a la demanda de los cuatro almacenes. Por tanto, las fábricas deberán producir a plena capacidad y los almacenes recibirán toda la cantidad producida. Las restricciones siguientes representan la necesidad de que las fábricas produzcan a plena capacidad:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 60 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 70 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 80 \end{aligned}$$

Las restricciones relativas a las demandas de los almacenes serán:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 75 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 45 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 40 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 50 \end{aligned}$$

Finalmente, todas las variables han de ser no negativas:

$$x_{ij} \geq 0$$

En este caso, la región factible viene determinada por un sistema compatible indeterminado, con 12 incógnitas (variables de decisión) y 7 ecuaciones (restricciones).

2.3. Formas estándar y canónica de un modelo lineal

En los tres ejemplos de la sección anterior, hemos visto que un modelo lineal puede adoptar varias formas: la función objetivo puede ser de máximo o de mínimo, y las restricciones pueden ser de mayor o igual, de menor o igual o de igualdad estricta. Algunos modelos pueden incluso tener restricciones de varios tipos.

La resolución y el análisis de un modelo de programación lineal deberán formularse siguiendo una forma determinada. Se trata de definir ciertas formulaciones prototipo del programa lineal y de contar con herramientas para poder expresar un programa lineal cualquiera en esta forma prototipo.

En particular, existen dos formulaciones del modelo de programación lineal que resultan particularmente útiles: la forma estándar y la forma canónica.

La *forma estándar* es aquella en que las restricciones están expresadas en forma de *igualdad* (v. tabla 5). Es la forma de partida para resolver el modelo de programación lineal mediante el algoritmo símplex. El hecho de que el conjunto de restricciones constituya, por lo general, un sistema de ecuaciones compatible indeterminado permite aplicar el álgebra matricial a la resolución del programa lineal.

Tabla 5.
Forma estándar del modelo lineal

$$
\begin{gathered}
[OPT]\, z = \Sigma c_j \cdot x_j \\
\text{Sujeto a}: \Sigma a_{ij} \cdot x_j = b_i \\
x_{ij} \geq 0 \\
i = 1, \ldots, n \text{ restricciones} \\
j = 1, \ldots, m \text{ variables}
\end{gathered}
$$

La *forma canónica* es aquella en que las restricciones están expresadas como inecuaciones de *menor o igual* si el modelo es de *máximo*, y de *mayor o igual* si es de *mínimo* (v. tabla 6). Es una forma particularmente útil para encontrar el modelo dual de un modelo lineal.

Tabla 6.
Forma canónica del modelo lineal

$[MIN]\, z = \Sigma c_j \cdot x_j$	$[MAX]\, z = \Sigma c_j \cdot x_j$
$\text{Sujeto a}: \Sigma a_{ij} \cdot x_j \geq b_i$	$\text{Sujeto a}: \Sigma a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$
$x_j \geq 0$	$x_j \geq 0$
$i = 1, \ldots, n$ restricciones	$i = 1, \ldots, n$ restricciones
$j = 1, \ldots, m$ variables	$j = 1, \ldots, m$ variables

Cualquier modelo lineal puede expresarse según las formas estándar y canónica, realizando las transformaciones oportunas.

2.3.1. Transformaciones de las restricciones

Podemos convertir una restricción de ≤ en una restricción de =, mediante una *variable de holgura* no negativa:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + \mathbf{h_i} = b_i$$

También podemos convertir una restricción de ≥ en una restricción de =, mediante una *variable de exceso* no negativa:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - \mathbf{e_i} = b_i$$

Finalmente, podemos convertir una restricción de mayor o igual en otra de menor o igual:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \Leftrightarrow -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \geq -b_i$$

2.3.2. Transformación de la función objetivo

Podemos convertir una función objetivo de [MIN] en otra de [MAX] cambiando el signo de los coeficientes de coste:

$$[\mathrm{MIN}]\, z = \Sigma c_j \cdot x_j \Leftrightarrow [\mathrm{MAX}]\, z = -\Sigma c_j \cdot x_j$$

2.3.3. Transformaciones de las variables

En su formulación original, las variables de decisión del modelo de programación lineal han de ser no negativas. Ahora bien, puede suceder que, por requerimientos de la situación que estemos estudiando, debamos incluir variables no positivas o no restringidas en signo.

Si una variable de decisión x_i es no positiva, basta con reemplazarla por la variable no negativa:

$$x'_i = -x_i$$

Deberemos sustituir x_i por $-x'_i$ en toda la formulación del modelo.

Si tenemos una variable x_i no restringida en signo, deberemos reemplazarla por dos variables no negativas x'_i y x''_i. Para ello, realizaremos la sustitución:

$$x_i = x'_i - x''_i$$

En los dos ejemplos siguientes, se muestra cómo transformar un modelo de programación lineal de la forma canónica a la forma estándar, así como el sentido de las variables de holgura y exceso incorporadas en el modelo.

Ejemplo 4. Obtención de la forma estándar del ejemplo 1 (problema de la granja), indicando el sentido de las variables de holgura

La naturaleza del problema hace que su formulación esté directamente en forma canónica: las variables de decisión son positivas y las restricciones son de mayor o igual, que es la forma canónica para un problema de máximo:

$$[\mathrm{MAX}]\, z = 50\mathrm{CEB} + 80\mathrm{LEC}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} &\mathrm{CEB} + \mathrm{LEC} \leq 110 \\ &4\mathrm{CEB} + 8\mathrm{LEC} \leq 720 \\ &\mathrm{CEB} \leq 80 \\ &\mathrm{CEB}, \mathrm{LEC} \geq 0 \end{aligned}$$

A partir de la forma canónica, el ajuste requerido para obtener la forma estándar es poner las inecuaciones en forma de ecuación mediante el uso de las variables de holgura H1, H2 y H3:

$$[MAX]\, z = 50CEB + 80LEC$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
&CEB + LEC + H1 = 110\\
&4CEB + 8LEC + H2 = 720\\
&CEB + H3 = 80\\
&CEB, LEC, H1, H2, H3 \geq 0
\end{aligned}$$

En el ejemplo 1, se ha señalado que el sentido de las restricciones es representar las limitaciones de recursos (de superficie disponible para la primera restricción, de trabajo para la segunda y de terreno apto para el cultivo de cebada de la tercera).

Si no se utiliza toda la cantidad disponible de un recurso, tendremos que:

- En la forma canónica, la cantidad de la izquierda de la inecuación (recurso utilizado) será inferior a la de la derecha (recurso disponible). La inecuación se cumplirá con el signo <.
- En la forma estándar, la única forma de que se cumpla la ecuación es que la variable de holgura H_i sea positiva. El valor de dicha variable será igual a la diferencia entre los recursos disponibles y los recursos utilizados.

Si, por el contrario, se utiliza toda la cantidad disponible de un recurso, la restricción se cumplirá con el signo igual y la variable de holgura será igual a cero.

Por todo lo antedicho, el sentido de las variables de holgura de la formulación estándar del modelo es:

a) La variable H1 representa la cantidad de superficie disponible que no se ha cultivado.

b) La variable H2 representa la cantidad de horas de trabajo no utilizadas.

c) La variable H3 representa el valor del terreno apto para el cultivo de cebada que no se ha utilizado para este fin (pueden haberse plantado lechugas o puede haber quedado el terreno sin sembrar).

Ejemplo 5. Obtención de la forma estándar del ejemplo 2 (problema de la dieta), indicando el sentido de las variables de exceso

El modelo del ejemplo 2 es un programa lineal de mínimo, escrito en forma canónica, puesto que las variables de decisión son positivas y las restricciones son de mayor o igual:

[MIN] z = 35P + 130Q + 100M + 75G + 30E

Sujeto a:

$$8,3P + 24,9Q + 0,4M + 6,0G + 5,1E \geq 70$$
$$246P + 423Q + 793M + 93G + 26E \geq 3000$$
$$P, Q, M, G, E \geq 0$$

Para obtener la forma estándar, deberemos transformar en igualdades las inecuaciones con el signo de mayor o igual, utilizando las variables de exceso E1 y E2:

[MIN] z = 35P + 130Q + 100M + 75G + 30E

Sujeto a:

$$8,3P + 24,9Q + 0,4M + 6,0G + 5,1E - E1 = 70$$
$$246P + 423Q + 793M + 93G + 26E - E2 = 3000$$
$$P, Q, M, G, E, E1, E2 \geq 0$$

En este caso, las variables de exceso serán iguales a la diferencia de nutrientes requerida (término independiente de la restricción) y a la obtenida con la dieta (lado izquierdo de la restricción en la forma canónica). En definitiva, representan la cantidad de nutrientes por encima de los requerimientos. Más concretamente:

a) La variable E1 representa el exceso de proteínas aportado por la dieta.

b) La variable E2 representa el exceso de calorías aportado por la dieta.

Ejemplo 6. Formas estándar y canónica

Obtención de la forma canónica y de la forma estándar del modelo:

$$[MAX]\, z = 2X + Y$$

Sujeto a:

$$X + Y \leq 10$$
$$X + 2Y \leq 12$$
$$X \leq 9$$
$$X \geq 0, \text{ Y no restringida en signo}$$

Se trata de un modelo de máximo, en que las restricciones son todas de menor o igual, y una de las variables de decisión no está restringida en signo.

Para escribirlo en forma canónica, basta sustituir la variable no restringida en signo Y por dos variables no negativas Y' e Y'', según la expresión:

$$Y = Y' - Y''$$

Una vez realizada la sustitución, tendremos el modelo en forma canónica:

$$[MAX]\, z = 2X + Y' - Y''$$

Sujeto a:

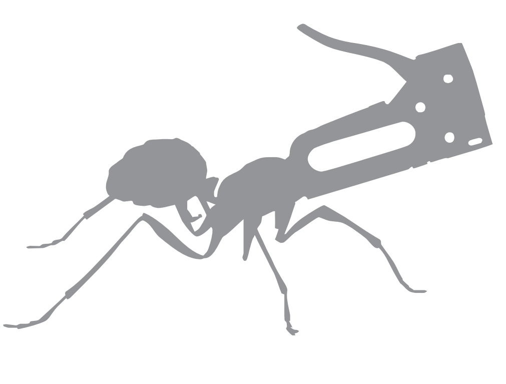
$$\begin{aligned} &X + Y' - Y'' \leq 10 \\ &X + 2Y' - 2Y'' \leq 12 \\ &X \leq 9 \\ &X \geq 0,\ Y' \geq 0,\ Y'' \geq 0 \end{aligned}$$

La forma estándar se obtendrá a partir de la forma canónica, transformando las inecuaciones en ecuaciones y añadiendo variables de holgura:

$$[MAX]\, z = 2X + Y' - Y''$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} &X + Y' - Y'' + H1 = 10 \\ &X + 2Y' - 2Y'' + H2 = 12 \\ &X + H3 = 9 \\ &X \geq 0,\ Y' \geq 0,\ Y'' \geq 0, H1 \geq 0, H2 \geq 0, H3 \geq 0 \end{aligned}$$



→ 3

Resolución de programas lineales

Una vez se ha representado una situación mediante un modelo lineal, es preciso encontrar y explotar la solución de este modelo. Existen varias formas de encontrar dicha solución:

a) En el caso (poco frecuente) de que se haya representado el modelo con dos variables de decisión, puede resolverse gráficamente. No obstante, la solución gráfica de un modelo lineal tiene un interés fundamentalmente pedagógico, dado que permite introducir diversos conceptos asociados a los modelos lineales de forma gráfica e intuitiva.

b) Para modelos pequeños o medianos (hasta decenas de miles de variables y restricciones), resulta adecuado el *algoritmo símplex*, que consiste en explorar, de forma inteligente, el conjunto de soluciones posibles, de modo que se alcance la solución óptima explorando un subconjunto pequeño de estas. Existen en el mercado programas informáticos que utilizan el método símplex para resolver modelos lineales. En la mayoría de las ocasiones, se puede acceder a una versión gratuita (*freeware*) de dichos programas. La única diferencia con los programas bajo licencia es que tienen limitado el número de variables y restricciones, de manera que la utilidad de muchos de ellos es meramente didáctica. La explotación comercial suele obligar a adquirir versiones de pago de estos programas, que tienen mayor capacidad de tratamiento de las variables y las restricciones.

c) Para modelos de gran tamaño, se suele seguir el *procedimiento del punto interior*, que es una técnica utilizada en la programación no lineal, que permite obtener una aproximación excelente a la solución, generalmente de forma más rápida que el algoritmo símplex.

El alcance del curso aconseja limitar el desarrollo de los métodos de resolución a los dos primeros, con una clara voluntad de poder utilizar e interpretar los resultados de los programas informáticos que implementen el algoritmo símplex.

3.1. Resolución gráfica de un programa lineal

Como se ha dicho anteriormente, cuando el modelo de programación lineal tiene dos variables de decisión, es posible analizarlo gráficamente. Para ello, podemos plantear una representación en dos dimensiones para las variables de decisión, y añadir una tercera para la función objetivo. Más formalmente:

- En los ejes X e Y, representaremos las variables de decisión.
- En el eje Z, perpendicular al papel, representaremos la función objetivo *z*, función de las variables X e Y.

Para la exposición, utilizaremos el modelo de la granja, descrito en el ejemplo 1, y expondremos el procedimiento de la solución gráfica conforme al siguiente guion:

a) Enunciaremos las propiedades de la *región factible*, esto es, de los puntos del plano (X, Y) que cumplen simultáneamente las condiciones de todas las restricciones. Los puntos de la región factible serán las *soluciones factibles* del modelo.

b) A continuación, introduciremos la función objetivo y mostraremos cómo se obtiene la solución. Una propiedad interesante es que sólo deberemos considerar *las soluciones factibles en los vértices* como posibles soluciones del modelo.

c) Utilizando la forma estándar del programa lineal, observaremos que las soluciones factibles en los vértices cumplen propiedades que permiten tratarlas como *soluciones básicas*. Este hecho es de gran importancia teórica, puesto que abre el camino a la resolución algebraica.

d) Finalmente, examinaremos la naturaleza de las posibles soluciones del problema lineal, introduciendo los conceptos de *óptimo impropio*, *óptimo múltiple* y *solución degenerada*.

3.1.1. Restricciones y región factible

Consideremos el modelo lineal del ejemplo 1, del cual numeraremos las restricciones:

[MAX] z = 50CEB + 80LEC

Sujeto a:

$$4\text{CEB} + 8\text{LEC} \leq 720 \ \ (\text{tiempo})$$
$$\text{CEB} + \text{LEC} \leq 110 \ \ (\text{área})$$
$$\text{CEB} \leq 80 \ \ (\text{calidad})$$
$$\text{CEB}, \text{LEC} \geq 0$$

Cada una de las inecuaciones divide el plano (CEB, LEC) en dos regiones:

a) Para la restricción (tiempo), los puntos que cumplen la inecuación son los que se encuentran dentro del triángulo formado por los ejes CEB y LEC, y la ecuación 4CEB + 8LEC = 720.

b) Para la restricción (área), los puntos que cumplen la inecuación son los que se encuentran dentro del triángulo formado por los ejes CEB y LEC, y la ecuación CEB + LEC = 110.

c) Los puntos que cumplen la inecuación de la restricción (calidad) se encuentran, a diferencia de los casos anteriores, en una región no acotada: la formada por los ejes CEB y LEC, y la recta CEB = 80.

La región factible estará formada por los puntos que pertenezcan a las tres regiones simultáneamente. El área rayada de la figura 2 representa la región factible.

Los puntos del plano (CEB, LEC) dentro de la región factible son *soluciones factibles* del programa lineal. Una propiedad de la región factible de un problema lineal es que se trata de una región convexa: considerados dos puntos cualesquiera de la región factible, los puntos del segmento que los une pertenecerán también a dicha región factible.

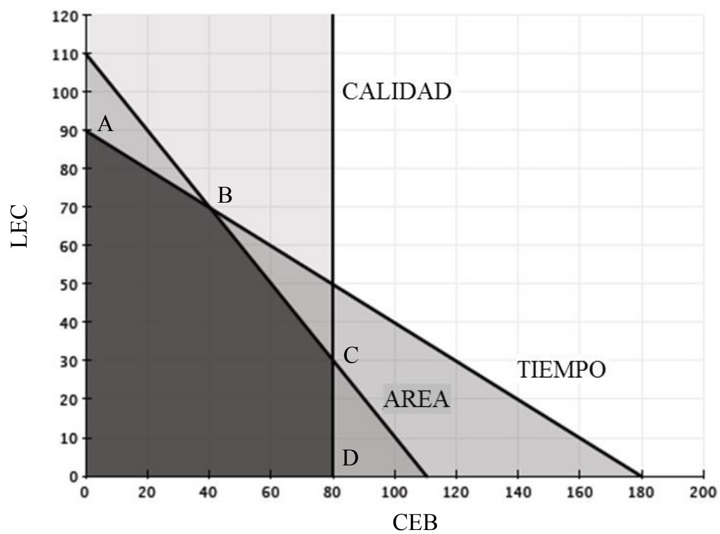


Figura 2.
Región factible del problema de la granja

Al determinar la región factible de un problema lineal, podemos encontrarnos con tres casos:

a) Región *acotada*, cuando existe una cota superior para los valores de las variables de decisión que pertenecen a la región factible.

b) Región *no acotada*, cuando no existe cota superior para alguna de las variables de decisión.

c) *Sin región factible*, cuando no existen valores de las variables de decisión que cumplan todas las restricciones simultáneamente, con lo cual el programa lineal no tiene solución. Nótese que la posibilidad de solución depende exclusivamente del conjunto de restricciones del programa lineal.

3.1.2. Determinación de la solución

Una vez determinada la región factible, podemos obtener la solución estudiando la evolución de la función objetivo. En el caso que nos ocupa, se trata de un problema de máximo, en función de las variables de decisión CEB y LEC:

$$[MAX]\ z = 50CEB + 80LEC$$

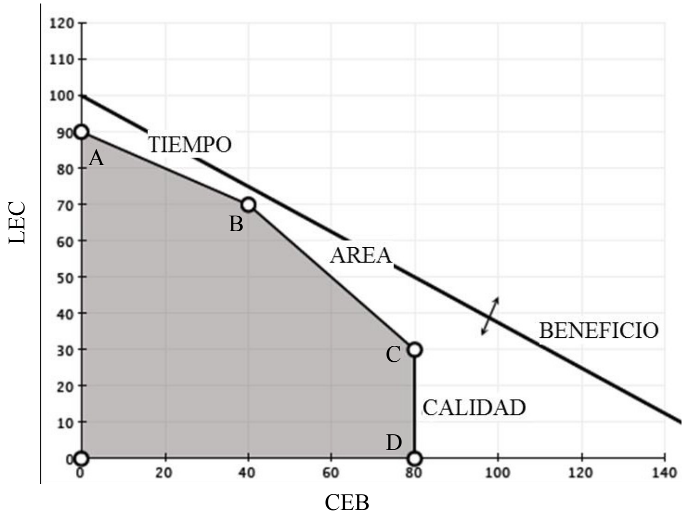
Para la resolución del problema, es interesante considerar aquellos puntos del plano (CEB, LEC) con el mismo valor de la función objetivo. Por ejemplo, los puntos en que z = 4.000.

Para z = 4.000, serán los que satisfagan la ecuación:

$$4.000 = 50CEB + 80LEC$$

A medida que aumentamos el valor de z, nos vamos alejando del origen de coordenadas. La proyección de la recta z = constante sobre el plano (CEB, LEC) es paralela a la recta *beneficio* de la figura 3.

Figura 3. Proyección de la recta beneficio sobre el plano CEB, LEC



Por tanto, a medida que nos alejamos del origen, obtenemos mayores valores de la función objetivo y mejores resultados, puesto que el problema es de máximo. ¿Dónde está la solución del problema? Forzosamente, pertenece a la región factible, pero no se encuentra en su interior, dado que la función objetivo no tiene extremos relativos en su interior puesto que es una función lineal. La solución del problema se encontrará *en el contorno* de la región factible.

De hecho, para obtener la solución del programa lineal, basta con ir representando rectas de z = constante de valor cada vez mayor. La solución será el valor de la función objetivo de la recta que, perteneciendo a la región factible, se encuentre más lejos del origen. Para el caso que nos ocupa, dicha recta es la de z = 7.600. El punto óptimo es el punto B de la región factible (v. figura 4), que es la intersección de las rectas representativas de las restricciones de *tiempo* y *área*.

Dicho punto B tiene los valores:

$$CEB^* = 40$$
$$LEC^* = 70$$
$$z^* = 7.600$$

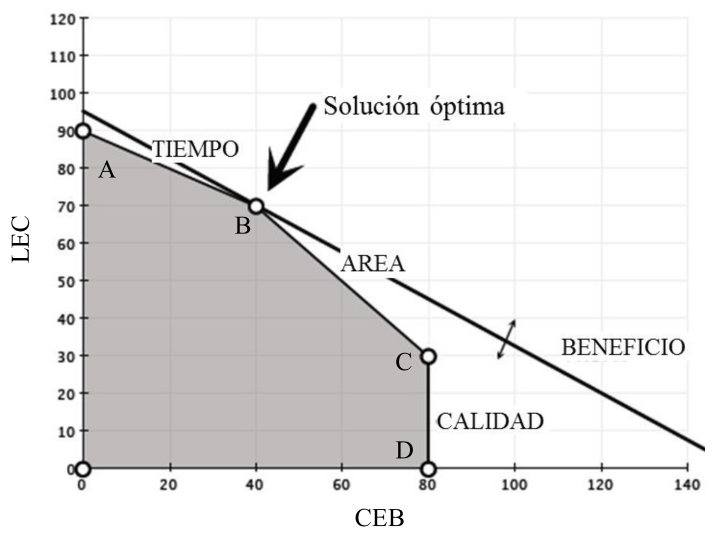


Figura 4.
Solución óptima en el vértice B de la región factible

El razonamiento, aunque difícilmente puede aplicarse a problemas de más de tres variables, ha dado un resultado importante: de los infinitos puntos de la región factible, únicamente hay que prestar atención a los vértices de esta región, que son las soluciones factibles en los vértices. La solución del modelo será uno de esos vértices, o bien una combinación convexa de dichos vértices (como se verá más adelante).

3.1.3. Soluciones básicas de un programa lineal

Si analizamos la naturaleza de las soluciones factibles en los vértices escribiendo el problema en la forma estándar, vemos que las soluciones factibles en los vértices pueden definirse como *soluciones básicas*.

Para ello, volvamos a estudiar la región factible, escribiendo ahora el problema en la forma estándar:

$$[MAX]\ z = 50CEB + 80LEC$$

Sujeto a:

$$4CEB + 8LEC + H1 = 720\,(\text{Tiempo})$$
$$CEB + LEC + H2 = 110\,(\text{Área})$$
$$CEB + H3 = 80\,(\text{Calidad})$$
$$CEB, LEC, H1, H2, H3 \geq 0$$

Consideremos, por ejemplo, la primera restricción (Tiempo):

$$4CEB + 8LEC + H1 = 720$$

Para los puntos de la recta Tiempo, tenemos:

$$4CEB + 8LEC = 720, \text{ siendo la variable de holgura } H1 = 0$$

Dicha recta divide el plano (CEB, LEC) en dos mitades (v. figura 2):

– El triángulo formado por la recta Tiempo y los semiejes positivos (CEB, LEC) serán los puntos que cumplan:

$$4CEB + 8LEC < 720, \text{ siendo la variable de holgura } H1 > 0$$

– El resto del cuadrante positivo por encima de la recta Tiempo son los puntos que no pertenecen a la región factible. Para esos puntos, la variable de holgura será negativa:

$$4CEB + 8LEC > 720, \text{ siendo la variable de holgura } H1 < 0$$

Así pues, los puntos de la región factible sobre alguna de las rectas que la delimitan se caracterizarán por el hecho de que la variable de holgura de la recta que representa la restricción es igual a cero. En las intersecciones de las restricciones de Tiempo y Área, se igualarán a cero las variables de holgura H1 y H2. Veamos cuáles son los valores de las variables del problema en forma estándar para los vértices de la región factible.

Tabla 7.
Valor de las variables del programa lineal en forma estándar para los vértices de la figura 2

	CEB	**LEC**	**H1**	**H2**	**H3**
0	0	0	720	110	80
A	0	90	0	20	80
B	40	70	0	0	40
C	80	30	160	0	0
D	80	0	400	30	0

De la observación de la tabla 7, se extraen dos propiedades interesantes:

1. El número de variables no nulas es igual al número de restricciones. En nuestro caso, en los cinco puntos se puede comprobar que sólo tres variables son distintas de cero. Estas variables no nulas se denominan *variables básicas*, y el conjunto de dichas variables será la *base* asociada a esa solución. El resto de variables, iguales a cero, serán variables no básicas. Para el punto A, las variables básicas son LEC, H2 y H3, y las variables no básicas, CEB y H1.

2. La base asociada a vértices contiguos se diferencia únicamente en una variable. Podemos identificar dos vértices contiguos, por ejemplo los puntos C y D, por esta propiedad. Las variables básicas del punto C son CEB, LEC y H1, mientras que las variables básicas del punto D son CEB, H1 y H2. Por tanto, para pasar del punto C al punto D, ha de salir de la base la variable LEC y entrar en la base la variable H2.

Estas propiedades son generalizables a un programa lineal cualquiera de *m* variables y *n* restricciones:

a) Las soluciones básicas (no degeneradas) del programa lineal tienen n variables positivas, que se denominan *variables básicas* de la solución. Las otras m–n variables son iguales a cero y son *variables no básicas*.

b) El conjunto de variables básicas de dos soluciones básicas contiguas se diferencia únicamente en un elemento. Para pasar de una solución básica a otra solución básica contigua, ha de salir una variable de la base y entrar otra variable.

La propiedad *b* de los programas lineales es el fundamento de los métodos de resolución algebraica de los programas lineales, como el método símplex.

3.1.4. Tipos de solución de un programa lineal

El problema de la granja (ejemplo 1), con el cual hemos expuesto la solución gráfica de la programación lineal, tiene una solución única y acotada. Sin embargo, no siempre la solución de un programa lineal tiene estas características. Seguidamente, se ilustran los otros tipos de solución que podemos encontrar en programación lineal.

Óptimo múltiple

Si el vector c de coeficientes de coste de la función objetivo puede escribirse como combinación lineal de alguna de las filas de la matriz A de coeficientes tecnológicos, podemos encontrarnos con un óptimo múltiple. Un ejemplo es la modificación del problema de la granja que se expone más abajo, en que se ha cambiado el coeficiente de coste de la variable CEB.

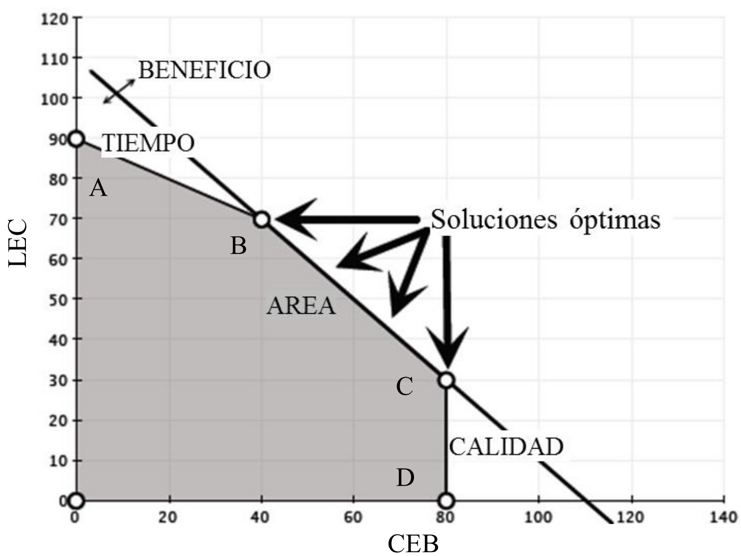
$$[MAX]\ z = 80CEB + 80LEC$$

Sujeto a:

$$4CEB + 8LEC \leq 720\ (\text{Tiempo})$$
$$CEB + LEC \leq 110\ (\text{Área})$$
$$CEB \leq 80\ (\text{Calidad})$$
$$CEB, LEC \geq 0$$

Si el lector representa la evolución de la función objetivo, puede observar que las rectas de z = constante son paralelas a la recta de la restricción Área (v. figura 5).

Figura 5.
Representación gráfica de una solución óptima múltiple



Por tanto, el problema tiene infinitas soluciones, que son las del segmento que se encuentra entre los puntos B y C. De hecho, podemos representar el conjunto de soluciones óptimas como:

$$x = \lambda B + (1-\lambda)C, \text{ con } 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$(CEB, LEC) = \lambda(40, 70) + (1-\lambda)(80, 30), \text{ con } 0 \leq \lambda \leq 1$$

Óptimo impropio

Si las restricciones determinan una región factible no acotada, entonces puede suceder que una o varias de las variables de decisión puedan crecer indefinidamente, haciendo que la función objetivo tienda a infinito (para un problema de máximo) o a menos infinito (para un problema de mínimo). En este caso, aunque formalmente el óptimo exista, no puede darse una solución acotada y se dice que se tiene un óptimo impropio.

Solución no factible

Recuérdese que los puntos de la región factible deben cumplir todas las restricciones establecidas en el programa lineal simultáneamente. Para un problema de n variables, si alguna de las restricciones determina un subconjunto de elementos de R^n que no tiene ningún elemento en común con el resto de restricciones, la región factible será un conjunto vacío y el programa lineal no tendrá solución (aunque en un sentido diferente al del óptimo impropio).

Solución degenerada

En general, una solución básica de un programa lineal tiene un número de variables diferentes de cero igual al número de restricciones. Sin embargo, pueden darse casos en que alguna variable básica de una solución básica sea igual a cero. Cuando esto ocurre, estamos ante una *solución degenerada* de un programa lineal. La existencia de soluciones degeneradas muestra que alguna de las restricciones es combinación lineal de las otras.

La figura 6 sintetiza los tipos de solución que pueden darse en programación lineal.

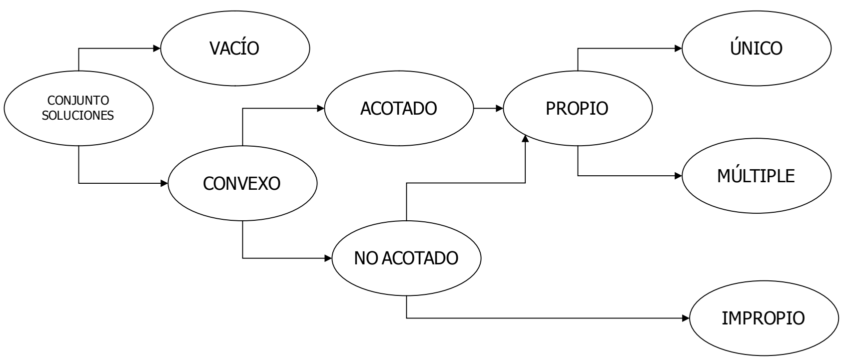


Figura 6.
Tipos de solución de los programas lineales

3.2. Resolución analítica: el método símplex

El método símplex es un procedimiento de resolución algebraica de programas lineales que aprovecha las propiedades de las soluciones básicas expuestas en la sección 3.1.3. La estrategia del método símplex consiste en explorar soluciones básicas adyacentes hasta llegar a la solución óptima, de modo que la exploración se dirija siempre en la dirección que asegure una mayor aproximación a dicho óptimo. Para encontrar esta dirección (y determinar si se ha alcanzado el óptimo), en cada una de las soluciones intermedias se expresa la función objetivo en función de las variables no básicas.

3.2.1. Preparación del método símplex

El método símplex parte de la formulación estándar de la programación lineal, en que todas las restricciones se expresan mediante ecuaciones.

Tabla 8.
Forma estándar del modelo lineal

$$[OPT]\, z = \Sigma c_j \cdot x_j$$
$$\text{Sujeto a} : \Sigma a_{ij} \cdot x_j = b_i$$
$$x_{ij} \geq 0$$
$$i = 1, \ldots, n \quad \text{restricciones}$$
$$j = 1, \ldots, m \quad \text{variables}$$

Para iniciar el procedimiento, necesitamos una solución básica inicial. Si todas las restricciones son de menor o igual, la base de esta solución inicial puede ser la formada por las variables de holgura de las restricciones. En caso contrario, hemos de introducir variables artificiales para obtener una solución inicial. Los métodos basados en variables artificiales permiten detectar si el programa lineal no tiene solución factible.

3.2.2. Obtención de la solución básica

Una vez obtenida esta solución inicial, podemos expresar el programa lineal de forma matricial:

$$[OPT]\, z = c' \cdot x$$

Sujeto a:

$$A \cdot x = b$$
$$x \geq 0$$

A partir de esta formulación, se trata de separar los elementos de los parámetros del sistema asociados a las variables básicas de los asociados a las variables no básicas. La matriz A de coeficientes tecnológicos se divide en la matriz básica B (formada por las columnas de las variables básicas) y la matriz básica N (que incluye las columnas de las variables no básicas):

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{array}\right]$$

El vector de coeficientes de coste se divide en los coeficientes de coste asociados a las variables básicas c_B y los asociados a las variables no básicas c_N. Una partición similar divide el vector de variables de decisión x en x_B y x_N:

$$\mathbf{c} = \begin{array}{|c|} \mathbf{c}_B \\ \hline \mathbf{c}_N \end{array} \qquad \mathbf{x} = \begin{array}{|c|} \mathbf{x}_B \\ \hline \mathbf{x}_N \end{array}$$

Hecha esta partición, podemos escribir el programa lineal de la forma siguiente:

$$[OPT]\, z = c_B'\cdot x_B + c_N'\cdot x_N$$

Sujeto a:

$$B\cdot x_B + N\cdot x_N = b$$
$$x \geq 0$$

De esta forma, podemos expresar x_B y z en función de las variables no básicas:

$$x_B = B^{-1}\cdot b - B^{-1}\cdot N\cdot x_N$$
$$z = c_B'\cdot B^{-1}\cdot b + \left(c_N' - c_B'\cdot B^{-1}\cdot N\right)\cdot x_N$$

Para la solución básica considerada, tendremos que $x_N = 0$, así que los valores de las variables básicas y de la función objetivo serán:

$$x_B = B^{-1}\cdot b$$
$$z = c_B'\cdot B^{-1}\cdot b$$

Por tanto, obtendremos el valor de la solución básica asociada a la base formada por las columnas de la matriz B obteniendo la matriz inversa B^{-1}. Una vez obtenida la solución, entonces podemos pasar al test de óptimo.

3.2.3. Test de óptimo

La expresión de z en función de x·N permite saber si la solución básica considerada es óptima o no. Consideremos de nuevo esta expresión:

$$z = c_B'\cdot B^{-1}\cdot b + \left(c_N' - c_B'\cdot B^{-1}\cdot N\right)\cdot x_N$$

Explorar otra posible solución del problema lineal supone que alguna de las variables no básicas pase de cero a tomar un valor positivo. ¿Qué le sucederá a la función objetivo? Dependerá del signo de las componentes de $c_N' - c_B'\cdot B^{-1}\cdot N$ (denominados *coeficientes de coste reducidos*).

Por ejemplo, si tenemos un problema de [MAX] y todos los coeficientes de coste reducidos son negativos, cualquier incremento de los valores de x_N nos dará un valor de z inferior a $c_B'\cdot B^{-1}\cdot b$, por lo cual podemos afirmar que la solución es óptima.

Matemáticamente, podemos decir:

Tabla 9.
Test de óptimo con solución única

$$\text{Solución óptima del problema de } [MAX] \Leftrightarrow c_N' - c_B'\cdot B^{-1}\cdot N < 0$$
$$\text{Solución óptima del problema de } [MIN] \Leftrightarrow c_N' - c_B'\cdot B^{-1}\cdot N > 0$$

Un caso interesante se produce si alguno de los coeficientes de coste reducidos es cero y el resto son negativos en el problema de [MAX] (o positivos en el problema de [MIN]). En esta situación, puede aumentarse el valor de la variable con coeficiente cero sin que varíe z. Ello indica que nos encontramos ante un óptimo múltiple.

Tabla 10.
Test de óptimo con solución múltiple

$$\text{Solución óptima del problema de } [MAX] \Leftrightarrow c_N' - c_B'\cdot B^{-1}\cdot N \leq 0$$
$$\text{Solución óptima del problema de } [MIN] \Leftrightarrow c_N' - c_B'\cdot B^{-1}\cdot N \geq 0$$

3.2.4. Selección de la variable entrante

En el supuesto de que no encontrarnos en la solución óptima, debemos explorar una nueva solución. Parece conveniente explorar una solución adyacente a la existente, cuya base se diferenciará únicamente en una variable con respecto a la base actual. ¿Cuál ha de ser la *variable entrante* que nos acerque más rápidamente a la solución óptima? La que asegure una mejor evolución de la función objetivo. La variable entrante será la que tenga un coeficiente de coste reducido mayor para el problema de [MAX] (o más negativo en un problema de [MIN]).

Tabla 11.
Determinación de la variable entrante

$$\text{Variable entrante } [MAX] \Rightarrow \text{la de mayor } c_N' - c_B'\cdot B^{-1}\cdot \mathbf{N}$$
$$\text{Variable entrante } [MIN] \Rightarrow \text{la de menor (más negativa) } c_N' - c_B'\cdot B^{-1}\cdot \mathbf{N}$$

3.2.5. Test de óptimo impropio

¿Qué sucederá cuando empecemos a aumentar el valor de la variable entrante? Consideremos ahora la expresión:

$$x_B = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot N \cdot x_N$$

Recordemos que ahora sólo una de las variables x_N es diferente de cero.

Por tanto, sólo la columna a_e correspondiente a la variable entrante en la matriz $B^{-1} \cdot N$ tendrá influencia en los cálculos. Así, podremos escribir la expresión de x_B en función de la variable entrante x_e:

$$x_B = B^{-1} \cdot b - a_e \cdot x_e$$

Si todos los elementos de a_e son negativos o nulos, tenemos que, a medida que aumentamos x_e, los valores de x_B se mantienen constantes o aumentan. Es decir, no hay límite para el crecimiento de la variable x_e. La solución óptima se encuentra para un valor infinito de x_e, lo cual significa que tenemos un óptimo impropio.

Así, podemos establecer un test de impropio:

Tabla 12. Condición de óptimo impropio

Si para una variable entrante x_e, todos los componentes de $B^{-1} \cdot N$ de la columna de x_e son no positivos, el programa lineal tendrá óptimo impropio.

3.2.6. Selección de la variable saliente

Si algún elemento de a_e es positivo, el crecimiento de x_e supone la disminución de la variable básica de la fila correspondiente a ese elemento. Así, podremos aumentar x_e hasta que alguna variable básica se haga cero. Dicha variable será la variable saliente.

¿Cuál debería ser la variable saliente? Haciendo $b = B^{-1} \cdot b$, podemos escribir:

$$x_B = b - a_e \cdot x_e$$

La variable saliente x_s será aquella que cumpla:

$$\min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ei}} \right\}$$

3.2.7. Tabla símplex

Una vez determinadas la variable entrante y la variable saliente, tenemos una nueva base y una nueva matriz B. Una forma práctica de realizar los cálculos, en la resolución manual del programa, es disponer los datos en la tabla símplex, formada por:

1. m+1 filas: las primeras corresponden a las restricciones y la última, a los coeficientes de coste.

2. n+1 columnas: la primera corresponde a los términos independientes y el resto, a las columnas de la matriz A.

Tabla 13.
Tabla símplex original

b	B	N
0	c_B'	c_N'

La nueva base se obtiene mediante el pivotaje de los elementos de las m primeras filas. Los coeficientes de coste se obtienen restando a los coeficientes de coste c_N el producto escalar de c_B por $B^{-1}\cdot N$. Procediendo de la misma manera para la primera columna, obtenemos el valor de la función objetivo para la solución básica $c_B'\cdot B^{-1}\cdot b$.

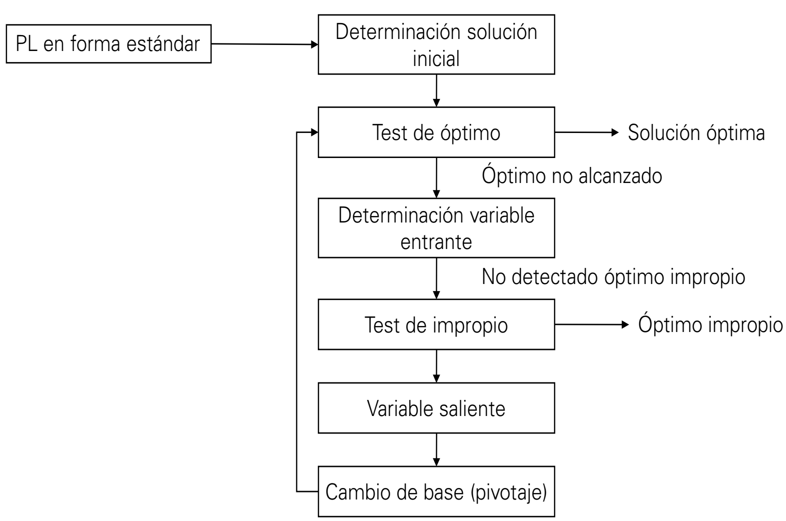
Tabla 14.
Tabla símplex correspondiente a la base B

$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$
$c_B'\cdot B^{-1}\cdot b$	0	$c'_N - c'_B\cdot B^{-1}\cdot N$

Al explorarse vértices contiguos, para calcular B^{-1} sólo tenemos que operar sobre la columna de la variable entrante x_e.

El procedimiento descrito aquí puede resumirse en la figura siguiente:

Figura 7.
Secuencia operativa del método símplex



En el apéndice, se encuentra el desarrollo formal del algoritmo símplex. A continuación, se ofrecen dos ejemplos que muestran el desarrollo del método símplex para un problema de máximo y para un problema de mínimo, respectivamente.

Ejemplo 7. Aplicación del método símplex

Resolución del programa lineal por el método símplex:

[MAX] $z = 2x + y$

Sujeto a:

$x + y \leq 10$
$x + 2y \leq 12$
$x \leq 9$
$x, y \geq 0$

Para resolver el programa lineal mediante el método símplex, hemos de escribirlo en la forma estándar:

[MAX] $z = 2x + y$

Sujeto a:

$x + y + h_1 = 10$
$x + 2y + h_2 = 12$
$x + h_3 = 9$
$x, y, h_1, h_2, h_3 \geq 0$

A partir de este momento, se trata de aplicar sistemáticamente el método símplex, que se encuentra en el apéndice A.

Primera iteración

Se obtiene una solución inicial igualando a 0 todas las variables de decisión, en que las variables básicas son las de holgura:

$x = 0$
$y = 0$
$h_1 = 10$
$h_2 = 12$
$h_3 = 9$

A continuación, se transcribe la forma estándar del problema en la tabla simplex:

			2	1	0	0	0
	c_B	**b**	**x**	**y**	h_1	h_2	h_3
h_1	0	10	1	1	1	0	0
h_2	0	12	1	2	0	1	0
h_3	0	9	1	0	0	0	1
		0	2	1	0	0	0

Test de óptimo: No todos los coeficientes reducidos son menores o iguales a cero. Por tanto, no hemos alcanzado el óptimo. De hecho, la expresión de la función objetivo en función de las variables no básicas es:

$$z = 2x + y$$

Elección de la variable entrante: Se escogerá aquella variable que asegure, con la base en que nos encontramos, el mayor crecimiento de z. Por tanto, la variable entrante será x.

Prueba del óptimo impropio: Dado que los coeficientes a_{ei} en la columna de la variable entrante son todos positivos, tenemos la seguridad de que, en este paso, no tenemos óptimo impropio.

Elección de la variable saliente: Es aquella variable básica que se hace 0 en primer lugar, a medida que aumentamos el valor de la variable entrante. Para cada variable básica, buscamos b_i/a_{ei} para los a_{ei} positivos:

h_1 10/1 = 10
h_2 12/1 = 12
h_3 9/1 = 9

La variable saliente es h_3, puesto que es la que tiene el mínimo valor b/a_e. Debe pivotarse sobre el elemento de la matriz a_{31}, y la nueva base estará formada por las variables h_1, h_2 y x, mientras que las variables no básicas serán h_3 e y.

De la iteración se acaba obteniendo la columna de la matriz identidad en la variable entrante, realizando las transformaciones en las filas:

(1′) = (1) – (3)
(2′) = (2) – (3)
(3′) = (3)

Los coeficientes de coste reducido para las variables no básicas se obtienen a partir de su expresión $c_N - c_B \cdot B^{-1} \cdot N$. Es decir, realizando el producto escalar de la c_B por las columnas obtenidas después de pivotar y restando el coeficiente original.

			2	1	0	0	0
	c_B	**b**	**x**	**y**	**h_1**	**h_2**	**h_3**
h_1	0	1	0	1	1	0	-1
h_2	0	3	0	2	0	1	-1
x	2	9	1	0	0	0	1
		18	0	1	0	0	– 2

Segunda iteración

Empezamos con la tabla que resulta de la primera iteración:

			2	1	0	0	0
	c_B	**b**	**x**	**y**	h_1	h_2	h_3
h_1	0	1	0	1	1	0	-1
h_2	0	3	0	2	0	1	-1
x	2	9	1	0	0	0	1
		18	0	1	0	0	-2

Test de óptimo: La presencia de coeficientes de coste reducidos positivos muestra que no hemos alcanzado aún el óptimo (puesto que estamos en un problema de [MAX]. Ahora podemos escribir la función objetivo como:

$$z = 19 - h_1 - h_3$$

Elección de la variable entrante: Al ser la única con coeficiente positivo en la tabla, la variable entrante debe ser y.

Prueba de óptimo impropio: En este caso, tenemos dos a_{ei} positivos, por lo cual también descartamos el óptimo impropio.

Elección de la variable saliente: En esta iteración, las únicas variables básicas afectadas por la entrada de y son h_1 y h_2. La otra, al tener su a_{ei} nulo, no se ve afectada por la entrada de la variable saliente.

Los valores de y para los que se anulan las variables son:

h_1: 1/1 = 1
h_2: 3/2 = 1,5
x: 9/0 = ∞

Por tanto, la variable saliente es h_1, que es la que tiene el menor valor b_i/a_{ei}, para los a_{ei} positivos. Así pues, se pivota en torno a a_{12}. La base estará formada por las variables h_2, x e y.

Las transformaciones a realizar ahora son:

(1′′) = (1′)
(2′′) = (2′) – 2·(1′)
(3′′) = (3′)

			2	1	0	0	0
	c_B	**b**	**x**	**y**	h_1	h_2	h_3
y	1	1	0	1	1	0	-1
h_2	0	1	0	0	-2	1	1
x	2	9	1	0	0	0	1
		19	0	0	-1	0	-1

Tercera iteración

Partimos de la tabla resultante de la segunda iteración:

			2	1	0	0	0
	c_B	b	x	y	h_1	h_2	h_3
y	1	1	0	1	1	0	-1
h_2	0	1	0	0	-2	1	1
x	2	9	1	0	0	0	1
		19	0	0	-1	0	-1

Test de óptimo: La ausencia de valores positivos en la última fila de la tabla símplex nos muestra que la solución encontrada es la óptima. La función objetivo se expresa como:

$$z = 18 + y - 2h_3$$

Cualquier incremento de una variable no básica daría un resultado inferior al encontrado, de modo que la solución óptima del problema es:

$x = 9$
$y = 1$
$h_1 = 0$
$h_2 = 1$
$h_3 = 0$

Y el valor de la función objetivo en el óptimo es z = 19.

Ejemplo 8. Aplicación del método símplex con variables artificiales

Resolución del modelo siguiente mediante el método símplex:

$$[\text{MIN}]\, z = X + 2Y$$

Sujeto a:

$$X + Y \leq 20$$
$$X + Y \geq 10$$
$$X, Y \geq 0$$

La primera restricción es de mayor o igual, y se trata de un problema de mínimo. La forma estándar del programa lineal tendrá una variable de holgura H_1 y una variable de exceso E_2.

$$[\text{MIN}]\, z = X + 2Y$$

Sujeto a:

$$X + Y + H_1 = 20$$
$$X + Y - E_2 = 10$$
$$X, Y, H_1, E_2 \geq 0$$

Si el lector escribe la tabla símplex para este problema, ocurre que no encuentra una solución inicial de manera directa. Para obtener esa solución, necesita de una variable artificial (A_2). Hemos de asegurarnos de que dicha variable no forma parte de la solución, así que le asignamos un coeficiente con valor muy grande (M denota un valor tan grande como sea necesario) y positivo.

$$[\text{MIN}]\, z = X + 2Y + MA_2$$

Sujeto a:

$$X + Y + H_1 = 20$$
$$X + Y - E_2 + A_2 = 10$$
$$X, Y, H_1, E_2, A_2 \geq 0$$

Con este ajuste, la tabla resultante es:

			1	2	0	0	0
	c_B	**b**	**X**	**Y**	**H_1**	**E_2**	**A_2**
H_1	0	20	1	1	1	0	0
A_2	M	10	1	1	0	- 1	1
		10M	1 – M	2 – M	0	M	0

El coeficiente más pequeño es el de X y la variable saliente será A_2, por lo cual, una vez pivotada la matriz, la tabla de la siguiente iteración es:

			1	2	0	0	0
	c_B	**b**	**X**	**Y**	**H_1**	**E_2**	**A_2**
H_1	0	10	0	0	1	1	-1
X	1	10	1	1	0	0	1
		10	0	1	0	M	M – 1

Como todos los elementos de la fila inferior de la tabla son positivos (para un problema de [MIN]), hemos alcanzado la solución óptima. El mínimo se produce para X = 10, Y = 0. El lector puede comprobar la solución, si lo desea, resolviendo el problema gráficamente.

3.3. Solución con programas informáticos

La resolución de programas lineales con un gran número de variables, aunque es posible, puede resultar realmente ardua aplicando manualmente el símplex. Aunque algunos problemas concretos (como el del transporte) tienen procedimientos de resolución más sencillos, parece claro que la utilización de programas informáticos puede ser de gran ayuda para resolver programas lineales, incluso de tamaño pequeño y mediano.

Existen en el mercado numerosos programas informáticos para resolver modelos lineales. Es frecuente que ofrezcan versiones gratuitas (*freeware*) con limitaciones en cuanto al número de variables y de restricciones que pueden tratar. Aunque no sean de utilidad para resolver problemas reales, para los cuales es conveniente acceder a las versiones de pago, más potentes, resultan de gran utilidad para el aprendizaje de la materia.

Se propone la utilización de la aplicación Solver, que es un complemento incluido en el programa Microsoft Excel©, por la amplia popularidad de este programa informático y su fácil acceso desde cualquier ordenador personal. La aplicación Solver se encuentra en el menú "Datos" de Microsoft Excel (v. figura 8).

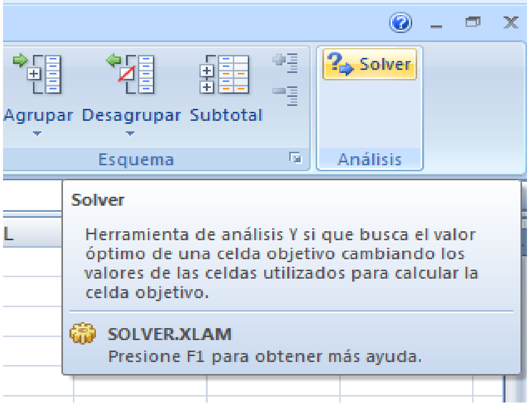


Figura 8. Herramienta Solver de Microsoft Excel ©.

La figura 9 ilustra la introducción de datos del programa lineal del problema de la granja (ejemplo 1) mediante la aplicación Solver, cuyo programa lineal es:

$$[\mathrm{MAX}]z = 50CEB + 80LEC$$

Sujeto a:

$$\text{Tiempo}: 4CEB + 8LEC < 720$$

$$\text{Área}: CEB + LEC < 110$$

$$\text{Calidad}: CEB < 80$$

En primer lugar, han de introducirse los coeficientes de la función objetivo para las variables CEB, LEC y la matriz de coeficientes de las restricciones en una hoja de cálculo. Como puede observarse en la figura 9, la expresión de cada restricción debe modelizarse como una función de los coeficientes de las variables en una celda junto a su término independiente. En la figura 9, se puede observar la expresión de la restricción Área en la celda C9. La función objetivo también debe modelizarse en otra celda (en este caso, la F4) en función de los coeficientes y de las celdas de las variables.

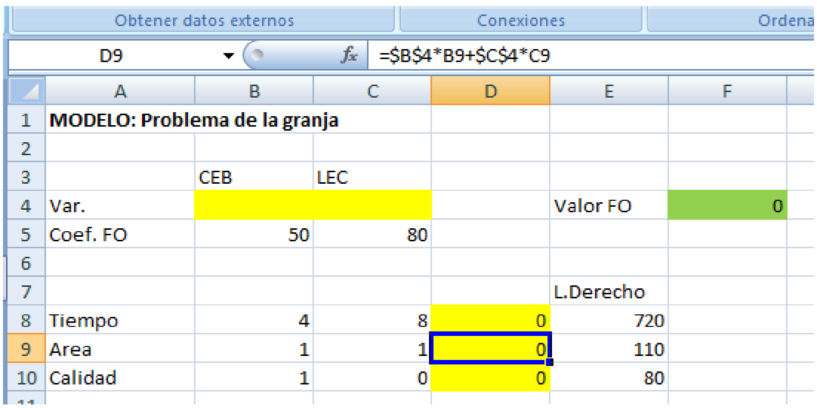


Figura 9.
Introducción de datos de los coeficientes

Cuando la función objetivo y las restricciones se han introducido en la hoja de cálculo, se clica sobre el botón "Solver" y aparece un cuadro de diálogo donde hay que indicar la ubicación de la celda objetivo, el sentido a optimizar (MIN o MAX), la ubicación de las celdas de las variables y la ubicación de las celdas de las restricciones (v. figura 10). El programa ofrece diversas opciones de optimización. Una vez introducidos los parámetros, se puede clicar sobre el botón "Resolver" para obtener el resultado.

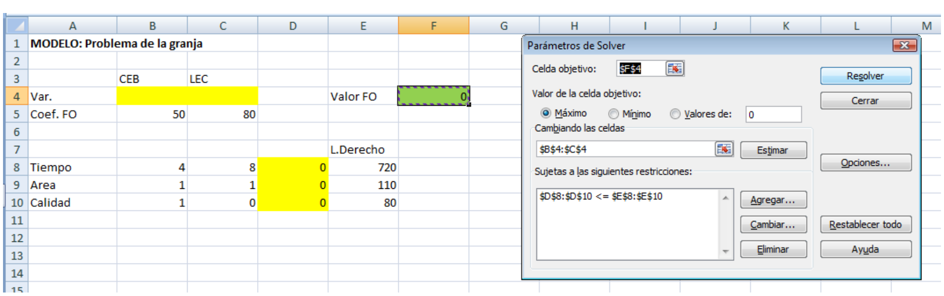


Figura 10.
Introducción de los parámetros del modelo

La solución que da el programa es el valor de cada variable y de la función objetivo en la solución óptima. El informe de respuestas aporta la información que se indica en la figura 11.

Figura 11.
Informe de respuestas de la aplicación Solver para el problema de la granja

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$F$4	Valor FO	0	7600

Celdas cambiantes

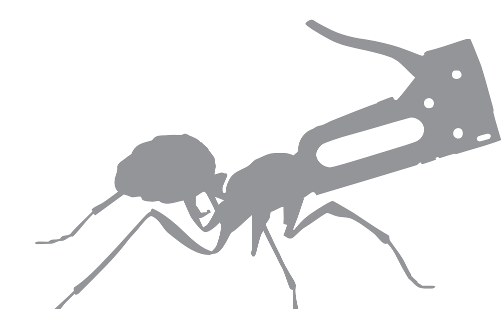
Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$4	Var. CEB	0	40
$C$4	Var. LEC	0	70

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
$D$8	Tiempo	720	$D$8<=$E$8	Obligatorio	0
$D$9	Area	110	$D$9<=$E$9	Obligatorio	0
$D$10	Calidad	40	$D$10<=$E$10	Opcional	40

En la figura 11, se indica que el valor de la función objetivo en el óptimo es 7.600. También se indica que los valores de las variables de decisión en el punto óptimo son CEB = 40 y LEC = 70.

En cuanto a las restricciones, la columna “Divergencia” muestra el valor de las variables de holgura o exceso de la restricción. El estado “obligatorio” de las restricciones de Tiempo y Área indica que estas restricciones se cumplen con igualdad estricta, y su holgura o “divergencia” es 0. En cambio, la restricción de Calidad se cumple en un estado “opcional”, que indica que su valor es inferior al límite, y se dispone de una holgura o “divergencia” de 40 unidades.



→4

La dualidad en la programación lineal

En el capítulo anterior, se han descrito diferentes opciones para encontrar la solución a un programa lineal: la resolución gráfica, la resolución analítica con el algoritmo símplex o el uso de programas informáticos. En este capítulo, se desarrolla la teoría asociada a la dualidad, cómo se obtiene el modelo dual de un programa lineal, la interpretación del concepto de precio sombra y una serie de teoremas y resultados útiles para la interpretación de un modelo lineal.

Dado un modelo lineal determinado, podemos definir otro modelo lineal que sea su dual y nos permita obtener propiedades interesantes del primero. La solución del modelo dual permite obtener resultados interesantes, relativos a posibles variaciones de los términos independientes. Más concretamente, para los rangos de valores de los términos independientes para los cuales se mantenga la base, la solución del programa dual nos permite conocer el precio sombra de cada restricción.

Primero, se explica cómo hallar el dual de un modelo lineal. Posteriormente, se define el concepto de precio sombra, cómo obtener la solución del dual a partir de la solución del primal, y su interés para la explotación del modelo. Finalmente, se enuncian algunas propiedades de los modelos duales, como el teorema de la holgura complementaria y las relaciones entre las soluciones del primal y las soluciones del dual.

4.1. Reglas de obtención del modelo dual

Si el modelo está escrito en la forma canónica, el dual resulta singularmente fácil de obtener. Por ejemplo, partiendo de la forma canónica del modelo de máximo con "i" variables y "j" restricciones:

Tabla 15. Relaciones entre el modelo primal y el modelo dual

Primal	Dual
$[MAX]\ z = c' \cdot x$	$[MIN]\ w = b' \cdot u$
$A \cdot x \leq b$	$A' \cdot u \geq c$
$x_i \geq 0$	$u_j \geq 0$

Si se trata de obtener el dual del dual, se obtendrá el primal: se trata de una correspondencia biunívoca.

De forma más general, las reglas para obtener el dual de cualquier modelo lineal se indican en la tabla 16.

Tabla 16. Reglas de obtención del modelo dual

Primal	Dual
Maximizar la función objetivo	Minimizar la función objetivo
Una variable no negativa	Una restricción mayor o igual
Una variable no positiva	Una restricción menor o igual
Una variable no restringida en signo	Una igualdad
Una restricción menor o igual	Una variable no negativa
Una restricción mayor o igual	Una variable no positiva
Una igualdad	Una variable no restringida en signo

En los ejemplos 9, 10 y 11, se muestra cómo obtener el modelo dual a partir del modelo primal.

4.2. Interpretación de las variables duales: los precios sombra

Cada variable del modelo dual está asociada a una restricción del modelo primal, y su valor óptimo representa el precio sombra, que es el incremento de la función objetivo del primal por cada unidad que aumente el término independiente de dicha restricción, siempre que el aumento del término independiente no suponga un cambio de base. Por tanto, es el precio adicional máximo que estamos dispuestos a pagar por el incremento del recurso.

De forma analítica, podemos escribir que la variable dual de la restricción *i* representa:

$$u_i^* = \frac{\Delta z}{\Delta b_i}$$

Los precios sombra obtenidos a partir del punto óptimo del dual serán válidos siempre que la base óptima no varíe. En consecuencia, los resultados obtenidos del dual están íntimamente relacionados con el análisis de sensibilidad de los términos independientes, tal como se muestra más adelante en el ejemplo 14.

Ejemplo 9. Modelo dual del problema de la granja

El problema de la granja puede modelizarse mediante un modelo lineal de máximo en forma canónica, por lo cual su dual también estará en forma canónica.

Recuérdese que CEB y LEC son la superficie que hay que cultivar de cebada y de lechugas, respectivamente, para maximizar los beneficios.

El dual del problema tiene tres variables, tantas como restricciones. Cada variable dual está asociada a una restricción (v. tabla 17):

- La primera restricción del primal tiene asociada la variable CUO. Dicha restricción indica la cuota máxima de cebada que podría cultivarse. El valor de dicha variable indica el incremento del beneficio del agricultor por incremento unitario de la cuota máxima de cebada.

- La segunda restricción indica que la máxima área cultivable es de 110 hectáreas. Su variable dual es ARE. Representa el beneficio adicional obtenido al aumentar el área cultivable en una hectárea. También representa el precio máximo que habrá que pagar por una hectárea adicional de área cultivable.

- Finalmente, la tercera restricción indica que sólo disponemos de 720 horas contratadas de trabajo. Su variable dual es TRA. Representa el incremento del beneficio al contratar una hora de trabajo adicional, así como el precio máximo a pagar por dichas horas.

En la tabla 17, también puede observarse lo siguiente:

a) Los coeficientes de la función objetivo son los términos independientes de las restricciones del modelo dual, y viceversa.

b) Los coeficientes tecnológicos de las restricciones en el primal son las columnas de los coeficientes tecnológicos asociados a cada variable del primal. Nótese, por ejemplo, cómo la primera restricción tiene los coeficientes asociados a la variable CEB.

Primal	**Dual**
$[\text{MAX}]\, z = 50\text{CEB} + 80\text{LEC}$	$[\text{MIN}]\, w = 80\text{CUO} + 110\text{ARE} + 720\text{TRA}$
Sujeto a,	Sujeto a,
$\text{CEB} \leq 80$	$\text{CUO} + \text{ARE} + 4\text{TRA} \geq 50$
$\text{CEB} + \text{LEC} \leq 110$	$\text{ARE} + 8\text{TRA} \geq 80$
$4\text{CEB} + 8\text{LEC} \leq 720$	
$\text{CEB}, \text{LEC} \geq 0$	$\text{CUO}, \text{ARE}, \text{TRA} \geq 0$

Tabla 17.
Modelo dual del problema de la granja

Ejemplo 10. Modelo dual del problema de la dieta

En este caso, nos encontramos con un primal que es un modelo de mínimo, escrito de forma canónica. Se trata, en este caso, de encontrar la dieta de coste mínimo a partir de un conjunto de alimentos (P, Q, M, G, E) que cubra unas necesidades mínimas de nutrientes (proteínas en la primera restricción y calorías en la segunda).

El dual tendrá dos variables (tantas como restricciones el primal) y cinco restricciones (tantas como variables el primal), y también estará en forma canónica (v. tabla 18).

Las variables del dual u_1 y u_2 representan, respectivamente, los incrementos en el coste de la dieta que supone la exigencia que contenga un gramo más de proteínas o una kilocaloría más.

Tabla 18.
Modelo dual del problema de la dieta

Primal	Dual
$[\text{MIN}]z = 35P + 130Q + 100M + 75G + 30E$ Sujeto a: $8{,}3P + 24{,}9Q + 0{,}4M + 6{,}0G + 5{,}1E \geq 70$ $246P + 423Q + 793M + 93G + 26E \geq 3.000$ $P, Q, M, G, E \geq 0$	$[\text{MAX}]w = 70\,u_1 + 3.000\,u_2$ Sujeto a: $8{,}3\,u_1 + 246\,u_2 \leq 35$ $24{,}9\,u_1 + 423\,u_2 \leq 130$ $0{,}4\,u_1 + 793\,u_2 \leq 100$ $6\,u_1 + 93\,u_2 \leq 75$ $5{,}1\,u_1 + 26\,u_2 \leq 30$ $u_1, u_2 \geq 0$

Ejemplo 11. Modelo dual del problema del transporte barato

En este caso, nos encontramos ante un modelo lineal que busca minimizar el coste del transporte desde tres orígenes (i = 1, 2, 3) a cuatro destinos (j = 1, 2, 3, 4). Se trata de un modelo de 4 × 3 = 12 variables y 4 + 3 = 7 restricciones.

El dual tendrá 7 variables, tantas como restricciones tiene el primal: 3 asociadas a las restricciones de capacidad en el origen (u_1, u_2, u_3) y 4 asociadas a las demandas en los destinos (v_1, v_2, v_3, v_4). Por ser las restricciones de igualdad, las variables duales no están restringidas en signo.

Las restricciones del dual serán 12, tantas como variables del primal. Puesto que el modelo primal es de [MIN], cada variable x_{ij} tendrá asociada una restricción de la forma:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

El signo de la desigualdad viene determinado por el hecho de que las variables x_{ij} son no negativas.

En definitiva, el primal y el dual se muestran en la tabla 19.

Las variables del dual u_i representan los incrementos de coste por cada unidad adicional ofertada en cada centro emisor i, mientras que las variables del dual v_j se corresponden con los incrementos de coste por cada unidad adicional solicitada por un centro receptor j.

Tabla 19. Modelo dual del problema del transporte barato

Primal	**Dual**
$[\mathrm{MIN}]\, z = 8x_{11} + 13x_{12} + 9x_{13} + 8x_{14} +$ $+9x_{21} + 11x_{22} + 12x_{23} + 10x_{24} +$ $+7x_{31} + 8x_{32} + 10x_{33} + 9x_{34}$	$[\mathrm{MAX}]\, w = 60u_1 + 70u_2 + 80u_3 +$ $+75v_1 + 45v_2 + 40v_3 + 50v_4$
Sujeto a:	Sujeto a:
$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60$ $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 70$ $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80$	$u_1 + v_1 \le 8 \quad u_2 + v_1 \le 9 \quad u_3 + v_1 \le 7$ $u_1 + v_2 \le 13 \quad u_2 + v_2 \le 11 \quad u_3 + v_2 \le 8$ $u_1 + v_3 \le 9 \quad u_2 + v_3 \le 12 \quad u_3 + v_3 \le 10$ $u_1 + v_4 \le 8 \quad u_2 + v_4 \le 10 \quad u_3 + v_4 \le 9$
$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75$ $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 45$ $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40$ $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50$	u_i, v_j no restringidas en signo
$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14},$ $x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24},$ $x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \ge 0$	

4.3. Obtención de la solución del modelo dual

El modelo dual de un modelo lineal es, asimismo, otro modelo lineal, que puede solucionarse del mismo modo que el primal, después de las oportunas transformaciones, si alguna de las variables resultantes es no negativa o no restringida en signo. Sin embargo, en general, es posible obtener la solución del modelo dual resolviendo el primal.

En los dos ejemplos siguientes, vemos dos modos de obtener la solución óptima del dual:

a) A partir de la tabla símplex óptima del primal, en el ejemplo 12. El resultado obtenido nos permite introducir una conclusión relevante: el teorema de la holgura complementaria.

b) Mediante el uso de un programa informático. Dado que, en general, los programas de resolución de modelos lineales realizan el análisis de sensibilidad, podemos llevar a cabo un análisis más exacto de la evolución de los precios sombra. Todo ello se muestra en el ejemplo 13, con un modelo lineal sencillo.

Ejemplo 12. Tablas primal y dual del problema de la granja

Las tablas 20 y 21 corresponden a las tablas óptimas obtenidas mediante el algoritmo símplex para los modelos primal y dual del problema de la granja, respectivamente. Ambos modelos están recogidos en la tabla 17.

Tabla 20.
Tabla símplex óptima del modelo primal

Base	Coefic.	Valor	50 CEB	80 LEC	0 H1	0 H2	0 H3
H1	0	40	0	0	1	-2	0,25
CEB	50	40	1	0	0	2	-0,25
LEC	80	70	0	1	0	-1	0,25
		7.600	0	0	0	-20	-7,5

Tabla 21.
Tabla símplex óptima del modelo dual

Base	Coefic.	Valor	80 CUO	110 ARE	720 TRA	0 D1	0 D2
TRA	720	7,5	-0,25	0	1	-0,25	0,25
ARE	110	20	1	1	0	1	-2
		7.600	40	0	0	70	40

Del examen de las dos tablas símplex óptimas, podemos deducir algunas propiedades interesantes:

1. El valor de la función objetivo del dual en el óptimo es igual al valor de la función objetivo del primal en el óptimo. Esta propiedad se cumple de manera general:

$$c' \cdot x^* = b' \cdot u^*$$

2. La primera restricción del primal se cumple con holgura (H1 = 40) y su variable dual asociada es igual a cero en la solución óptima del dual (CUO = 0).

3. Las otras dos restricciones del primal se cumplen sin holgura (H2 = H3 = 0) y sus variables asociadas en el dual ARE y TRA tienen un valor distinto de 0 en el óptimo. El valor de las variables del dual

ARE y TRA es el precio sombra asociado a las restricciones 2 y 3 del primal y tiene la interpretación siguiente:

- ARE = 20 indica que, si aumentamos la cantidad de superficie disponible en Δb_2, la función objetivo aumenta en 20 Δb_2. Es decir, por cada hectárea adicional de terreno, el granjero obtendrá un incremento de beneficio de 20 euros. Por tanto, este sería el máximo precio a pagar en caso de que hubiera que arrendar terreno adicional.

- TRA = 7,5 indica que, si aumentamos la cantidad de trabajo en Δb_3, la función objetivo aumenta en $7{,}5 \cdot \Delta b_3$. Es decir, por cada hora adicional contratada, el granjero obtendría un incremento de beneficio de 7,5 euros. Así pues, esta es la cantidad máxima a pagar por contratar una hora de trabajo adicional.

No necesitamos resolver el dual para obtener la solución óptima del vector u* si disponemos de la tabla símplex óptima del primal y el modelo no tiene restricciones de igualdad. La solución del dual se obtiene a partir de los coeficientes de coste reducidos de las variables de holgura y exceso de las restricciones, del siguiente modo:

a) La variable dual asociada a una restricción de $\leq$ es igual al coeficiente de coste reducido de su variable de holgura asociada en la tabla símplex óptima del primal, cambiada de signo.

b) La variable dual asociada a una restricción de $\geq$ es igual al coeficiente de coste reducido de su variable de exceso asociada en la tabla símplex óptima del primal.

En las tablas 20 y 21, pueden observarse las correspondencias descritas entre las soluciones óptimas del dual en el primal y del primal en el dual.

4.4. Teorema de la holgura complementaria

La propiedades 2 y 3 observadas en el ejemplo anterior son generalizables, dado el carácter de precio sombra de las variables duales.

En general, podemos decir que:

1. Si una restricción se cumple con holgura o exceso, su variable dual asociada toma un valor 0 en el óptimo. Al no ser activa la restricción, los incrementos del término independiente no afectan el valor de la función objetivo en el punto óptimo.

2. Si una restricción se cumple con el signo de igualdad, su variable dual asociada puede ser diferente de 0. Al ser la restricción activa, cabe esperar que el punto óptimo variará al modificar el valor de su término independiente y, en consecuencia, que el valor de la función objetivo también variará.

El resultado de estas propiedades es el teorema de la holgura complementaria, que puede expresarse como sigue:

$$\left(u^*\right)' \cdot \left(A \cdot x^* - b\right) = 0$$

El primer término representa la solución óptima del dual y el segundo, la holgura de las restricciones del primal en el óptimo. De esta manera, se pretende expresar que, para cada una de las restricciones, al menos uno de los dos términos ha de ser cero. El ejemplo siguiente muestra también cómo se cumple la holgura complementaria.

Ejemplo 13. Solución al problema de reparto mediante un programa informático

Un taller mecánico puede fabricar dos tipos de productos, P1 y P2. El beneficio unitario obtenido es de 20 €/ud y 60 €/ud, respectivamente. Para fabricar estos dos productos, dispone de dos recursos: las horas de personal (HH) y las horas de máquina (HM). En cuanto a las horas de personal, se han contratado 2.700. Producir P1 requiere 30 HH/ud, mientras que producir P2 requiere 20 HH/ud. En cuanto a las HM, disponemos de 850 y sabemos que procesar una unidad de P1 consume 5 HM/ud, mientras que procesar una unidad de P2 requiere 10 HM/ud. Además, las condiciones contractuales obligan a la empresa a producir un mínimo de 95 unidades, entre las unidades producidas de P1 y P2.

Para maximizar el beneficio, puede plantearse el modelo siguiente, en que P1 y P2 son las cantidades a producir de cada producto.

$$\left[\text{MAX}\right] z = 20P1 + 60P2$$

Sujeto a:

$$30P1 + 20P2 \leq 2.700 \text{ (horas de personal)}$$

$$5P1 + 10P2 \leq 850 \text{ (horas de máquina)}$$

$$P1 + P2 \geq 95 \text{ (producción mínima)}$$

$$P1, P2 \geq 0$$

En el modelo, se han plantado tres restricciones:

a) Una restricción *horas de personal*, que limita a 2.700 el número de HH.

b) Una restricción *horas de máquina*, que limita a 850 el número de HM.

c) Una última restricción *producción mínima*, que impone un número mínimo de 95 unidades, entre P1 y P2.

El dual de este modelo es:

$$[\mathrm{MIN}]\, w = 2.700\ HH + 850\ HM + 95\ PM$$

Sujeto a:

$$30\ HH + 5\ HM + PM \geq 20$$
$$20\ HH + 10\ HM + PM \geq 60$$
$$HH, HM \geq 0$$
$$PM \leq 0$$

Una vez ejecutada la aplicación Solver, se obtiene el siguiente informe de respuestas:

Celda objetivo (Máximo)

Nombre	Valor original	Valor final
Valor FO	0	4900

Celdas cambiantes

Nombre	Valor original	Valor final
Var. P1	0	20
Var. P2	0	75

Restricciones

Nombre	Valor de la celda	Estado	Divergencia
Horas personal	2100	Opcional	600
Horas máquina	850	Obligatorio	0
Producción mínima	95	Obligatorio	0

Figura 12. Informe de respuestas de la aplicación Solver para el problema del reparto

Del informe de respuestas, puede concluirse que el beneficio obtenido en el punto óptimo es de 4.900 euros.

Este beneficio se obtiene de producir (y vender) 20 unidades del producto P1 y 75 unidades del producto P2.

Aplicando esta solución, existe una holgura de 600 horas de personal (que en el informe de Solver aparece como divergencia), mientras que se han utilizado todas las horas de máquina (divergencia = 0) y se ha cumplido exactamente con la producción mínima (divergencia = 0). El estado "obligatorio" de estas dos últimas restricciones indica que ambas son activas.

En caso de solicitarlo, también puede obtenerse el siguiente informe de sensibilidad:

Figura 13.
Informe de sensibilidad de la aplicación Solver para el problema del reparto

Celdas cambiantes

Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Decremento permisible
Var. P1	20	0	20	10	1E+30
Var. P2	75	0	60	1E+30	20

Restricciones

Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Decremento permisible
Horas personal	2100	0	2700	1E+30	600
Horas máquina	850	8	850	100	300
Producción mínima	95	-20	95	15	10

El programa informático nos da el valor del precio sombra para cada restricción.

La interpretación que cabe hacer del resultado de las variables duales es:

1. Precio sombra de la restricción Horas personal = 0. Esto muestra que, si aumentamos el número de Horas de personal, no se obtiene beneficio adicional. Este resultado concuerda con el hecho de que tenemos un valor de 2.100 horas utilizadas de un máximo de 2.700, es decir, disponemos de una holgura de 600 horas de personal. El efecto de disponer de más horas de personal es que dicha holgura aumentará, sin que el beneficio se vea afectado.

2. Precio sombra de la restricción Horas máquina = 8. Aumentar las horas máquina supone aumentar el beneficio, a razón de 8 unidades por cada hora máquina adicional, mientras se mantenga la base óptima. Dado que estamos variando el término independiente, el óptimo y el valor de la función objetivo variarán si varía la cantidad disponible de horas máquina.

3. Precio sombra de la restricción Producción mínima = – 20. Dado que el primal es un programa de máximo y que la restricción de producción mínima es de mayor o igual, la dual debe ser no positiva. Esta variable dual muestra que la empresa puede obtener un beneficio mayor al reducir la cantidad mínima a producir. En los límites de la base óptima actual, reducir la cantidad mínima en una unidad supone aumentar en 20 euros el beneficio función objetivo. Ello se debe a que, al librarse de producir una cantidad mínima de 95 unidades, la empresa podría dejar de producir el producto P1 y dedicarse a producir exclusivamente el producto P2, que proporciona un beneficio mayor.

Estas interpretaciones son válidas para los intervalos de valores de los términos independientes para los que se mantiene la base óptima, que son suministrados por la misma aplicación.

Para este caso, observamos que los valores de las variables duales son válidos:

- Para un incremento ilimitado de las horas de personal.
- Para un incremento de hasta 100 horas de máquina
- Para un decremento de hasta 10 unidades en la producción mínima.

Una vez rebasados estos valores, la base óptima cambia y el análisis ha de rehacerse con los nuevos coeficientes.

4.5. Relaciones entre las soluciones del dual y del primal

Existen algunas propiedades de interés acerca de las soluciones del primal y del dual:

a) Si el primal tiene solución óptima acotada x*, el dual también tendrá solución óptima acotada u*. Ambas soluciones darán el mismo valor de la función objetivo:

$$c' \cdot x^* = b' \cdot u^*$$

b) Si uno de los dos problemas tiene solución óptima no acotada, el otro no tendrá solución, es decir, la región factible será un conjunto vacío.

c) Si uno de los dos problemas no tiene solución, el otro puede tener una solución óptima no acotada, o no tener solución tampoco.

Dichas relaciones se muestran en el esquema de la figura 14.

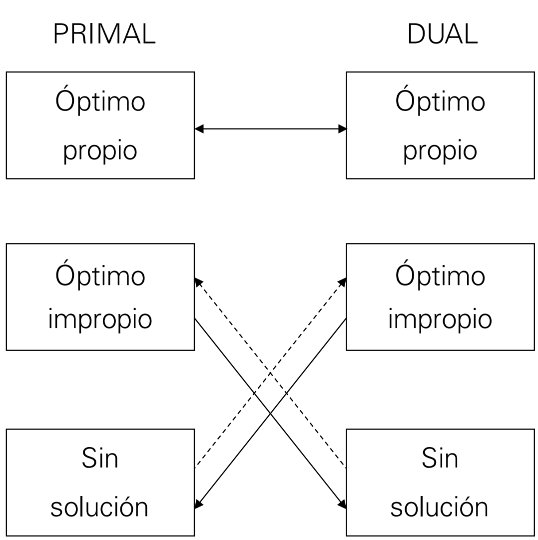


Figura 14.
Relación entre las soluciones del primal y del dual

→ 5

La sensibilidad en la programación lineal

Este capítulo muestra las posibilidades del análisis de sensibilidad en la programación lineal. Se trata de analizar cómo variaría la solución del modelo, tanto el valor de la función objetivo como el valor de las variables de decisión, en caso de que variaran los coeficientes de coste de la función objetivo o los términos independientes de las restricciones.

El análisis de sensibilidad es una herramienta especialmente útil cuando no existe una certeza absoluta sobre los valores que se han asignado a los términos independientes de las restricciones o a los coeficientes de la función objetivo. Para estos casos el análisis de sensibilidad consiste en estudiar cómo evolucionaría la solución óptima y el valor de la función objetivo ante variaciones de dichos términos independientes o coeficientes.

El análisis de sensibilidad propiamente dicho estudia los intervalos para los cuales la modificación de un parámetro del modelo lineal (coeficiente de la función objetivo o término independiente) no cambia las variables que componen la base de la solución del modelo. Para ello, se halla el intervalo de valores de cada parámetro en que la base se mantiene.

El análisis de sensibilidad puede ir más allá que un estudio sobre la evolución de los coeficientes de la función objetivo o de los términos independientes, por ejemplo, el estudio de los coeficientes tecnológicos de la matriz A. No obstante, la aplicación que esto representa es menos habitual, pues suele ser un dato bastante fiable. Posiblemente por este motivo, no es habitual encontrarlo implementado en los módulos de los programas informáticos.

Otros aspectos que se tienen en cuenta en la bibliografía más clásica sobre el análisis de sensibilidad son la introducción de nuevas variables o de nuevas restricciones, situación que resulta trivial cuando el programa lineal se resuelve informáticamente, pues sólo hay que insertar las nuevas variables o restricciones y volver a ejecutar la aplicación.

5.1. Análisis de sensibilidad: resolución gráfica

Para ilustrar de forma clara y sencilla en qué consiste el análisis de sensibilidad, utilizaremos nuevamente la metodología gráfica de resolución con el ejemplo de dos variables de la granja.

Ejemplo 14. La sensibilidad en el problema de la granja

Recordemos que el modelo inicial del problema de la granja era:

$$[\mathrm{MAX}]\, z = 50\ \mathrm{CEB} + 80\ \mathrm{LEC}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} &4\ \mathrm{CEB} + 8\ \mathrm{LEC} \leq 720 && (\text{tiempo}) \\ &\mathrm{CEB} + \mathrm{LEC} \leq 110 && (\text{área}) \\ &\mathrm{CEB} \leq 80 && (\text{calidad}) \\ &\mathrm{CEB}, \mathrm{LEC} \geq 0 && \end{aligned}$$

Las tres restricciones de este modelo nos definen una región factible (o dominio) en el plano CEB/LEC donde se encuentran las infinitas soluciones factibles. Gráficamente, lo representamos en la figura 15.

Por otro lado, sabemos identificar las soluciones factibles en los vértices (A, B, C, D y O), una de las cuales será la solución óptima.

Finalmente, existe un tercer eje, perpendicular al del papel, que representa el eje de la función objetivo (z). El punto óptimo será aquel de la región factible que tenga un mayor valor en el eje z de la función objetivo, puesto que la función es de maximización.

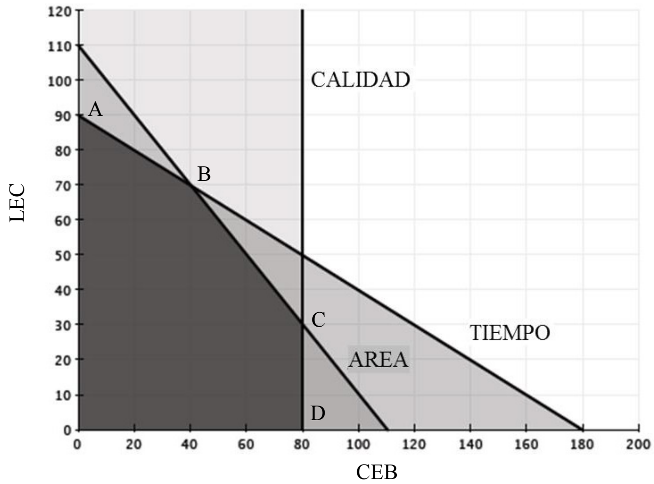


Figura 15.
Región factible para el problema de la granja

Dado que tenemos resuelto el programa lineal, veamos que la tabla símplex nos da la solución en el punto:

Base	Coef.	Valor (RHS)	50 CEB	80 LEC	0 H3	0 H2	0 H1
H3	0	40	0	0	1	-2	0,25
CEB	50	40	1	0	0	2	-0,25
LEC	80	70	0	1	0	-1	0,25
		7.600	0	0	0	-20	-7,5

Los valores de las variables en el punto óptimo son:

CEB* = 40
LEC* = 70
H3* = 40

para cuyo punto la función objetivo tiene un valor máximo, pues cumple todas las restricciones, y toma un valor de beneficio de 7.600 euros.

Gráficamente, esto significa que el punto óptimo se encuentra en la intersección de las restricciones (tiempo) y (área); concretamente, es la solución factible en el vértice que hemos denominado B. El punto óptimo presenta una holgura con respecto a la restricción (calidad) de H3 = 40.

El objeto de recuperar este ejemplo es ir más allá de lo estudiado hasta ahora y adentrarnos en el mundo de las hipótesis y la sensibilidad que presenta el punto óptimo frente a ellas.

Empezaremos con hipótesis referentes a los términos independientes de las restricciones.

5.1.1. Cambios en el término independiente de las restricciones

Lo primero que deberíamos observar es que dos de las restricciones son activas: las definidas por las rectas (tiempo) y (área), mientras que la restricción (calidad) es no activa, es decir, tiene holgura.

El hecho de que una restricción sea activa tiene algunas implicaciones, puesto que indica que el recurso asociado a dicha restricción es escaso y limita un incremento de la función objetivo. Como se ha visto en el capítulo anterior, dedicado a la dualidad, las restricciones activas tienen un precio sombra diferente de cero. Esto significa que estaríamos dispuestos a negociar un incremento unitario de ese recurso a un precio inferior al precio sombra. En este caso, los precios sombra son positivos (v. tabla 21 con los valores de las variables duales). Es decir, si se aumentan las horas de trabajo contratadas o la superficie disponible, el beneficio aumentará.

Por el contrario, una restricción NO activa está asociada a un recurso NO escaso, del cual tenemos exceso de disponibilidad para un nivel de producción óptimo. Por tanto, será fácil concluir que su precio sombra asociado será nulo (v. teorema de la holgura complementaria en el capítulo anterior). Al tener holgura en dicho recurso, no estamos dispuestos a pagar ningún coste adicional por un incremento unitario del recurso. Asimismo, un incremento o decremento "pequeño" de su disponibilidad no afecta el valor de la función objetivo en el óptimo.

Lo expuesto hasta ahora lo trasladamos a la exposición gráfica. Un cambio en el valor del término independiente de una restricción implica que la restricción se moverá paralelamente a su posición actual.

En el caso de la granja, un incremento en el valor del término independiente de la restricción (área) implica que dicha restricción se desplaza hacia el exterior de la región factible, con lo cual se amplía el área de la región factible. En consecuencia, el óptimo se verá desplazado, puesto que la restricción (área) es activa, como muestra la figura 16.

El caso de la figura (a) corresponde a la situación inicial, y la recta (área) cumple la ecuación CEB + LEC = 110. En la figura (b), la recta (área) cumple la ecuación CEB + LEC = 120. En la figura (c), la recta (área) cumple la ecuación CEB + LEC = 130 y, en la situación (c), las tres rectas frontera (área), (tiempo) y (calidad) se intersectan en el mismo vértice. Finalmente, en la figura (d), la recta (área) cumple la ecuación CEB + LEC = 150, sobrepasando el vértice de intersección entre las rectas (tiempo) y (calidad).

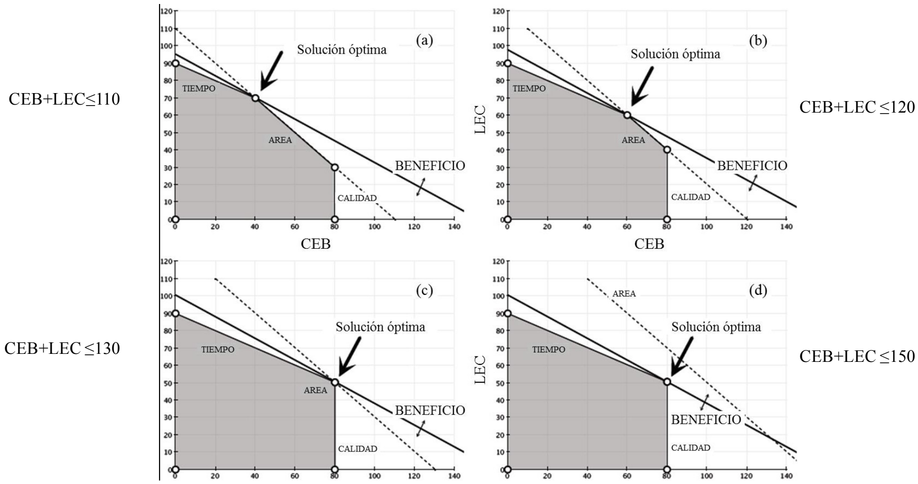


Figura 16.
Efecto de la variación del término independiente de la restricción (área) sobre la región factible

Un aumento o una reducción hipotéticos de los recursos disponibles, en este caso de las hectáreas de terreno para cultivar, deforman la región factible y desplazan el óptimo si la restricción estudiada es activa. El desplazamiento del óptimo implica, asimismo, una variación del valor de la función objetivo como resultado de multiplicar el precio sombra de la restricción por el incremento del término independiente.

En nuestro ejemplo, sabemos que el precio sombra de la restricción (área) asociada al área tiene un valor de 20 (v. tabla 21 con los valores de las variables duales para este ejemplo). Por tanto, si aumentáramos el área de cultivo de 110 a 120 hectáreas, la función objetivo aumentaría en 20·10 = 200 euros y el beneficio pasaría de 7.600 a 7.800 euros.

Si, por el contrario, nuestra área de cultivo fuera de 90 hectáreas, la variación sería en sentido opuesto 20·(-20) = -400 euros y el beneficio pasaría de 7.600 a 7.200 euros.

No obstante, este incremento del beneficio no se mantendrá indefinidamente. Es fácil comprender que, si tuviéramos un terreno ilimitado, nuestro beneficio no sería infinito, puesto que la limitación de otros recursos (mano de obra disponible o superficie apta para la cebada) nos limitarían la producción. Este último hecho está asociado a que las condiciones que configuran nuestra solución (la base) habrán cambiado.

El análisis de sensibilidad resulta interesante porque nos indica el rango de valores para cada término independiente, de modo que no se modifique la base de la solución óptima (es decir, que el óptimo se encuentre en la intersección de las mismas restricciones); además, para el citado rango de valores del término independiente se mantiene el valor del precio sombra de la restricción.

Es importante recordar que, como consecuencia de un desplazamiento de una restricción activa, se modificarán tanto el valor de las variables de decisión de la base como el valor de la función objetivo.

5.1.2. Cambios en los coeficientes de coste

Los cambios en los coeficientes de coste en la función objetivo provocan cambios en la inclinación del plano oblicuo descrito por la función objetivo.

Intentaremos representar la función objetivo sobre el plano CEB/LEC como la proyección sobre el plano CEB/LEC de la recta de intersección entre el plano definido por la función objetivo y un plano paralelo al plano CEB/LEC, situado a una altura Z* (valor de la función objetivo en el óptimo). Esta recta proyectada sobre el plano CEB/LEC pasará por el punto de la solución factible en el vértice óptima y definirá una dirección perpendicular a la dirección de máximo crecimiento de la función objetivo (o, lo que es lo mismo, dicha recta muestra una dirección de crecimiento nulo de la función objetivo).

La figura 17 muestra las proyecciones de las rectas de intersección entre planos paralelos al plano CEB/LEC y el plano de la función objetivo variando el coeficiente de la variable CEB. En la figura, se indica como recta beneficio.

Se puede observar (v. figura 17.a) que la recta de intersección (beneficio) pasa por el vértice de la región factible (40, 70), que es óptimo con los datos de partida del enunciado. Puesto que la expresión de la función objetivo es z = 50·CEB+80·LEC, el valor de la función objetivo en el óptimo es de 7.600.
Si modificamos el coeficiente de la variable CEB de la función objetivo, cambiará la dirección de máximo crecimiento en el plano de la función objetivo y, por tanto, también cambiará la pendiente de la recta proyectada. La figura 17.b muestra el efecto de un incremento en el coeficiente de la variable CEB cuando toma el valor de 70 euros. Puede observarse que la proyección de la recta de intersección (beneficio) sigue pasando por el mismo vértice (40,70),

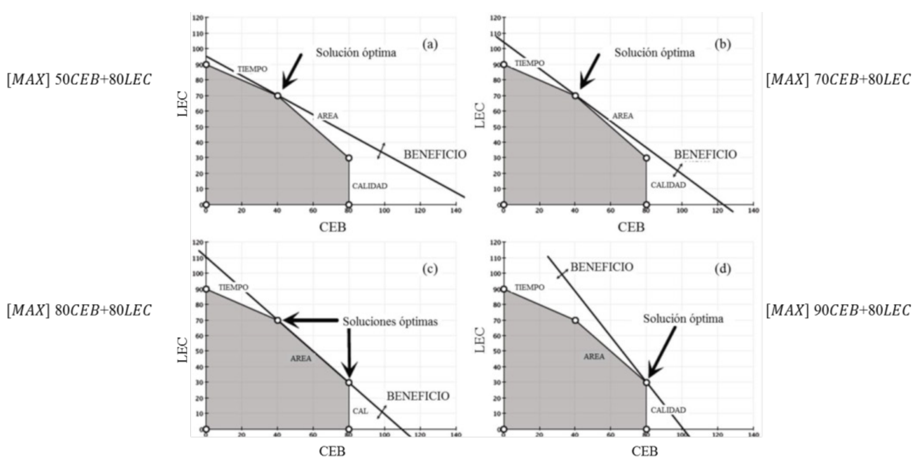


Figura 17.
Efecto de la variación de los coeficientes de coste de la función objetivo

pero su pendiente ha aumentado. En esta situación, la función objetivo es z = 70·CEB+80·LEC y su valor en el punto óptimo es 8.400.

En la figura 17.c, el coeficiente de la variable CEB en la función objetivo toma el valor de 80 euros. En esta situación, sucede un hecho destacable: la proyección de la recta intersección tiene una dirección paralela a la restricción área, lo que implica que el óptimo no se encontrará únicamente sobre el vértice (40, 70), sino que también se encontrará sobre este vértice (80, 30) y sobre los infinitos puntos que configuran la arista de unión, y se obtendrá un óptimo múltiple. La función objetivo en z = 80·CEB+80·LEC y su valor en todos los puntos de la arista del óptimo múltiple es 8.800. Si, llegados a este punto, aumentáramos un infinitésimo el coeficiente de CEB, nos encontraríamos con un cambio de base y el óptimo pasaría de ubicarse en el vértice (40, 70) a ubicarse en el vértice (80, 30). Este hecho se observa en la figura 17.d, donde la solución es (80, 30).

Queda claro, pues, que el hecho de aumentar el beneficio por hectárea de cebada conlleva un aumento del beneficio total, como era de esperar.

Lo que estudia el análisis de sensibilidad de los coeficientes de coste es precisamente dónde se encuentran los límites superior e inferior de cada coeficiente para que el óptimo se mantenga en el mismo vértice (solución) que en el programa original, sabiendo que en el límite (superior e inferior) el óptimo será múltiple.

Cabe recordar que, a pesar de que el valor de las variables de decisión de la solución óptima no cambia, puesto que no cambia la solución (ni se deforma la región factible), el valor de la función objetivo en la solución cambia al modificarse el valor de sus coeficientes.

5.1.3. Análisis paramétrico

El análisis paramétrico se aplica cuando la variación que experimenta el término independiente de una restricción traspasa los límites de los valores para los cuales se mantiene la base.

El análisis paramétrico tiene en cuenta una serie de intervalos sucesivos en la evolución del término independiente desde $-\infty$ a $+\infty$. En cada uno de estos intervalos, existirá una base (vértice) que indicará cuál es la solución óptima para el intervalo, cuáles son los precios sombra para las restricciones activas (que se mantendrán en el intervalo) y cuál es el valor de la función objetivo en los límites superior e inferior del intervalo. Su valor podrá calcularse para el resto de puntos intermedios multiplicando el incremento con respecto al límite por el valor del precio sombra.

El análisis paramétrico requiere unos conocimientos mucho más profundos del problema y de la modelización que el análisis de sensibilidad, y en cada análisis solamente podrá tenerse en cuenta una restricción y dejar invariables las demás condiciones.

5.2. Análisis de sensibilidad mediante programas informáticos

Los programas informáticos que resuelven modelos de programación lineal, como la aplicación Solver de MS Excel, suelen incorporar la posibilidad de realizar el análisis de sensibilidad de los coeficientes de coste c y de los términos independientes de las restricciones b. El resultado de este análisis es el intervalo de valores de estos parámetros para el cual se mantiene la base.

En el ejemplo siguiente, observamos cómo se muestran los resultados del análisis de sensibilidad en la aplicación Solver, aplicado sobre el problema del reparto que se ha mostrado en el ejemplo 13.

Ejemplo 15. Análisis de sensibilidad con programas informáticos

A continuación, recordamos el modelo lineal del problema del reparto que se ha presentado en el ejemplo 13.

$$[\text{MAX}]\, z = 20\ \text{P1} + 60\ \text{P2}$$

Sujeto a:

$$30\ \text{P1} + 20\ \text{P2} \leq 2.700\ \ (\text{horas de personal})$$
$$5\ \text{P1} + 10\ \text{P2} \leq 850\ \ (\text{horas de máquina})$$
$$\text{P1} + \text{P2} \geq 95\ \ (\text{producción mínima})$$
$$\text{P1}, \text{P2} \geq 0$$

Los resultados obtenidos con la aplicación Solver incluyen un primer informe de respuestas (v. figura 18) que aporta la solución óptima del modelo con los valores de las variables de la decisión y de la función objetivo en el óptimo y la holgura de las restricciones (v. divergencia en la figura 18).

Figura 18.
Informe de respuestas del problema del reparto obtenido con Solver

Celda objetivo (Máximo)

Nombre	Valor original	Valor final
Valor FO	0	4900

Celdas cambiantes

Nombre	Valor original	Valor final
Var. P1	0	20
Var. P2	0	75

Restricciones

Nombre	Valor de la celda	Estado	Divergencia
Horas personal	2100	Opcional	600
Horas máquina	850	Obligatorio	0
Producción mínima	95	Obligatorio	0

Para realizar el análisis de sensibilidad, hay que solicitar el informe de sensibilidad (v. figura 19).

Con el informe de sensibilidad, podemos interpretar totalmente los resultados. El informe de sensibilidad contiene dos tablas: “Celdas cambiantes” y “Restricciones”.

La tabla “Celdas cambiantes” corresponde a las variables de la función objetivo. Además del coeficiente actual, suministra los rangos para los cuales la base no varía (aumento permisible, decremento permisible). El rango de valores del coeficiente de coste de la variable P1 para el cual no cambia la base es [20–∞, 20+10]. Esto significa que, para cualquier valor del coeficiente de la variable P1 entre -∞ y 30, la solución óptima está en el punto (20, 75). De forma análoga, el rango de valores del coeficiente de la variable P2 para el cual no cambia la base es [60 –20, 60+∞], lo cual indica que, para cualquier valor del coeficiente de la variable P2 entre 40 y ∞, la solución óptima se mantiene en el punto (20, 75). Como hemos ya visto, ello no significa que el valor de la función objetivo sea el mismo. Recordemos que, en el caso de las variaciones de los coeficientes de coste, el valor de las variables no varía, pero sí la función objetivo.

El análisis de sensibilidad de los valores de los términos independientes se obtiene de la tabla “Restricciones” del informe de sensibilidad (v. figura 19). Esta tabla, además de aportar los valores de los precios sombra, que ya se han comentado en el capítulo sobre dualidad, informa sobre los límites en los términos independientes para que se mantenga la base.

Así, por ejemplo, los valores del término independiente de la restricción Horas personal para los cuales no cambia la base son [850–600, 850+∞]. Esto significa que la base se mantiene para un rango de horas de personal entre [250, ∞]. Su precio sombra de 0 indica que esta restricción no es activa en este intervalo, sino que se dispone de una holgura o excedente de este tipo de recurso. Para esta restricción, la variación del término independiente dentro de este rango no afectaría ni el valor de las variables ni el valor de la función objetivo con respecto al óptimo obtenido.

Sin embargo, para la restricción Horas máquina, la situación es diferente. Los valores del término independiente para los cuales no cambia la base son [850–300, 850+100]. Esto significa que la base se mantiene para un rango de horas máquina de [550, 950] horas. Para esta restricción, las variaciones del término independiente horas máquina, tanto el valor de las variables en el óptimo como el valor de la función objetivo, cambiarían. Recordemos que, cuando variamos los términos independientes de una restricción activa, cambian los valores de las variables de decisión (aunque las no básicas siguen valiendo cero), y el valor de la función objetivo crece a razón del precio sombra por cada incremento unitario del término independiente. Es decir, un incremento de las horas máquina de 50 horas no modificaría la base actual e incrementaría el beneficio en 50·8 = 400 euros, siendo el valor de la función objetivo en este supuesto de 4.900 + 400 = 5.300 euros.

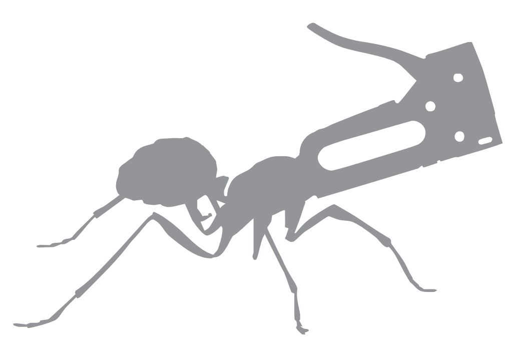
Figura 19.
Informe de sensibilidad del problema del reparto obtenido con Solver

Celdas cambiantes

Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Decremento permisible
Var. P1	20	0	20	10	1E+30
Var. P2	75	0	60	1E+30	20

Restricciones

Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Decremento permisible
Horas personal	2100	0	2700	1E+30	600
Horas máquina	850	8	850	100	300
Producción mínima	95	-20	95	15	10



→6

Ejercicios

En este capítulo, se incluye una colección de ejercicios resueltos y propuestos para que el lector ponga en práctica los contenidos presentados y para ilustrar el modo de resolver diferentes tipos de problemas mediante el uso de la programación lineal.

6.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. Modelo de 2 variables

Resuelve gráficamente el programa lineal:

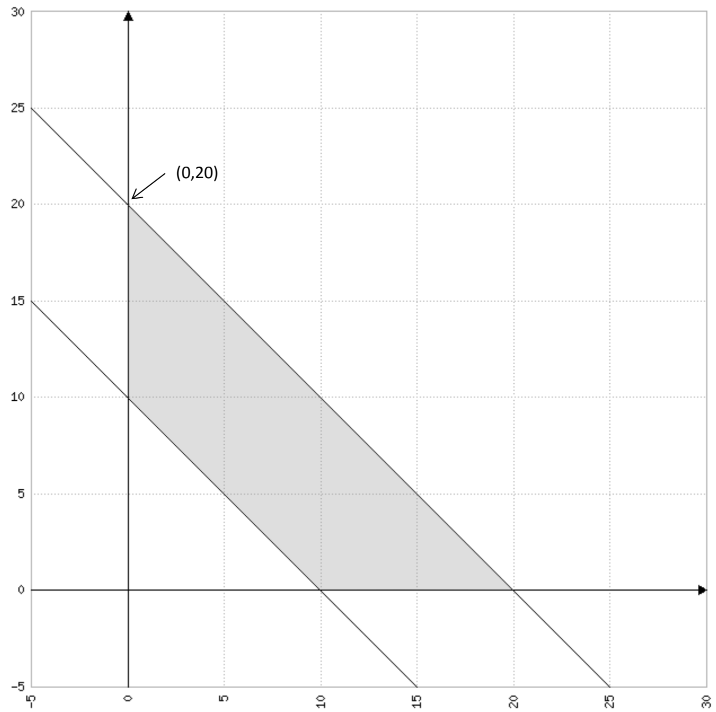
$$[\mathrm{MAX}]\ z = x + 2y$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x + y &\le 20 \\ x + y &\ge 10 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

Solución:

Figura 20. Representación gráfica de la región factible del ejercicio 1



Punto óptimo: $x^* = 0$, $y^* = 20$, $z^* = 40$.

Presta atención al signo de la variable artificial en la función objetivo.

Ejercicio 2. Modelo de 2 variables

Resuelve gráficamente el programa lineal:

$[\mathrm{MIN}]\, z = x + 2y$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x + y &\geq 20 \\
x + y &\leq 10 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

Solución:

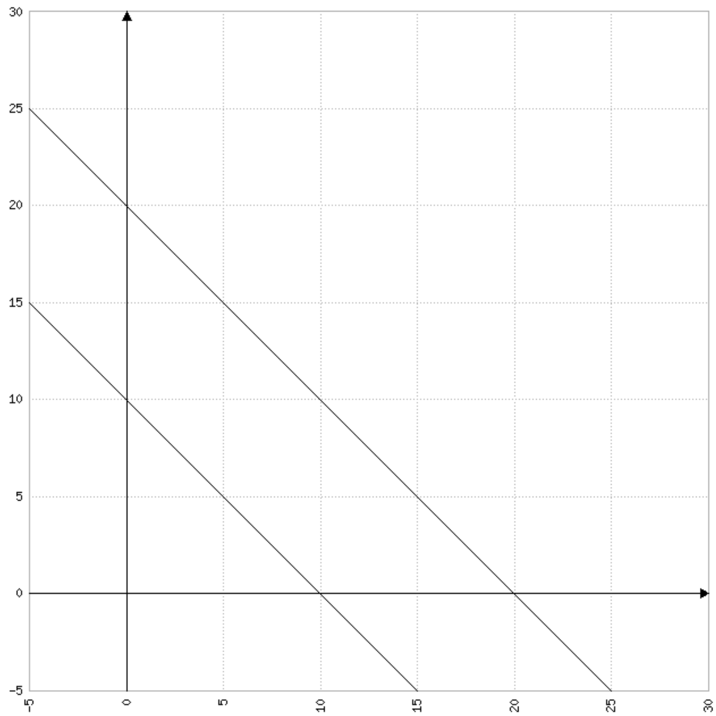


Figura 21. Representación gráfica de la región factible del ejercicio 2

No existe. La región factible no tiene ningún punto interior.

Ejercicio 3. Modelo de 2 variables

Resuelve gráficamente el problema lineal:

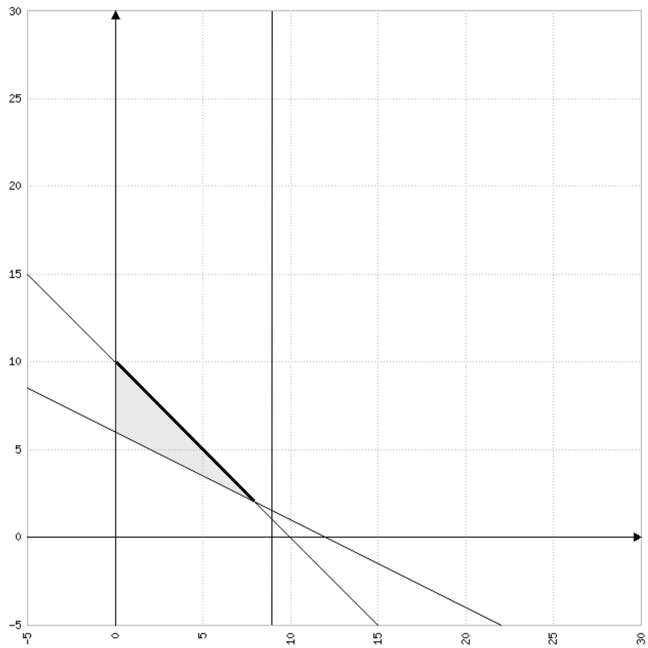
$[\text{MAX}]\, z = x + y$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} &x + y \leq 10 \\ &x + 2y \leq 12 \\ &x \leq 9 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

Figura 22. Representación gráfica de la región factible del ejercicio 3



Se trata de un óptimo múltiple. Una solución posible es $x^* = 8$, $y^* = 2$, $z^* = 10$, otra es $x^* = 0$, $y^* = 10$, $z^* = 10$, así como todos los puntos de la arista situados entre estos dos extremos.

En la tabla óptima del símplex, una de las variables no básicas tiene un coeficiente de coste reducido igual a cero.

Ejercicio 4. Modelo de 2 variables

Resuelve gráficamente el programa lineal:

$$[MAX]\, z = x + 2y$$

Sujeto a:

$$-x + y \leq 40$$
$$x + 8y \geq 160$$
$$x \geq 50$$
$$x, y \geq 0$$

Solución:

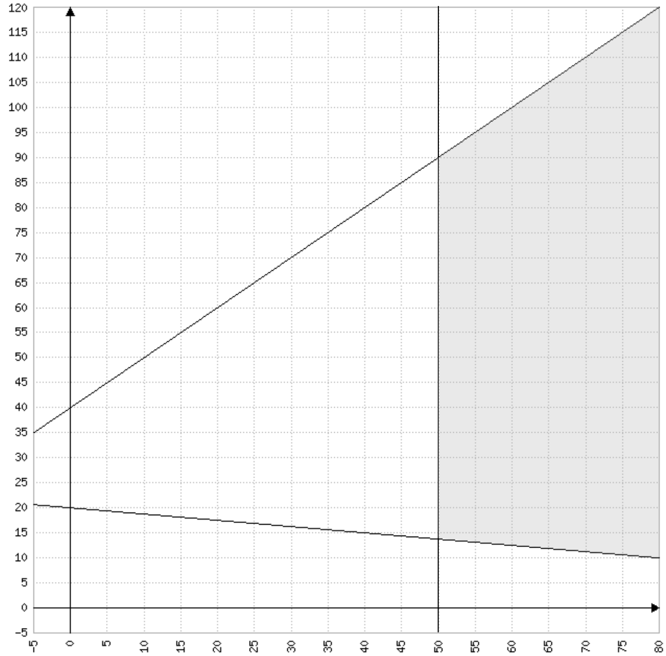


Figura 23. Representación gráfica de la región factible del ejercicio 4

La solución es un óptimo impropio. Al no estar acotadas *x* o *y* por la región factible del modelo, el máximo se encuentra para un valor infinito de estas variables.

Ejercicio 5. Modelo de 2 variables

Resuelve gráficamente el programa lineal:

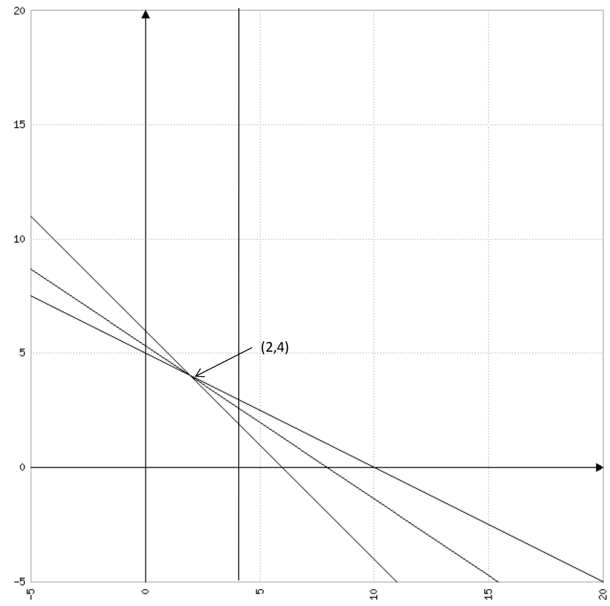
$$[\text{MAX}]\; z = 3x + 4y$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} &x + y \leq 6 \\ &x + 2y \leq 10 \\ &x \leq 4 \\ &2x + 3y \leq 16 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

Figura 24. Representación gráfica de la región factible del ejercicio 5



Punto óptimo: x*= 2, y*= 4, z*= 22.

Nótese que, en la forma estándar del programa lineal, sólo hay tres variables diferentes de cero: las dos variables de decisión y la variable de holgura de la tercera restricción. Por tanto, una de las cuatro variables básicas es cero. Ello indica que tenemos una solución degenerada, lo cual se debe a que una restricción es combinación lineal de otras: en este caso, la cuarta restricción es combinación lineal de las dos primeras.

Ejercicio 6. Taller mecánico

Ya se había utilizado este modelo para introducir la dualidad y el análisis de sensibilidad en programas informáticos. Ahora se muestra cómo responder a preguntas relacionadas con la naturaleza del modelo mediante la dualidad y el análisis de sensibilidad.

Un taller mecánico puede fabricar dos tipos de productos, P1 y P2. El beneficio unitario obtenido con cada producto es de 20 y 60, respectivamente. Para fabricar estos dos productos, dispone de dos recursos: las horas de personal (HH) y las horas máquina (HM). En lo que respecta a las HH, dispone de 2.700, y fabricar una unidad de P1 consume 30 HH y una de P2, 20 HH. Dispone de 850 HM, y sabemos que fabricar una unidad de P1 consume 5 HM y una de P2, 10 HM. Además, las condiciones contractuales le obligan a fabricar un mínimo de 95 unidades, ya sean de P1 o de P2.

Para maximizar el beneficio, el jefe del taller mecánico ha elaborado el modelo siguiente:

$$[MAX]z = 20\ P1 + 60\ P2$$

Sujeto a:

$$30\ P1 + 20\ P2 \leq 2.700\ \ (\text{horas de personal})$$
$$5\ P1 + 10\ P2 \leq 850\ \ (\text{horas de máquina})$$
$$P1 + P2 \geq 95\ \ (\text{producción mínima})$$
$$P1, P2 \geq 0$$

Una vez resuelto este modelo con la aplicación Solver, se han obtenido los resultados siguientes:

Celda objetivo (Máximo)

Nombre	Valor original	Valor final
Valor FO	0	4900

Celdas cambiantes

Nombre	Valor original	Valor final
Var. P1	0	20
Var. P2	0	75

Restricciones

Nombre	Valor de la celda	Estado	Divergencia
Horas personal	2100	Opcional	600
Horas máquina	850	Obligatorio	0
Producción mínima	95	Obligatorio	0

Celdas cambiantes

Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Decremento permisible
Var. P1	20	0	20	10	1E+30
Var. P2	75	0	60	1E+30	20

Restricciones

Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Decremento permisible
Horas personal	2100	0	2700	1E+30	600
Horas máquina	850	8	850	100	300
Producción mínima	95	-20	95	15	10

Figura 25.
Resultados del modelo obtenidos mediante la aplicación informática

Aunque hemos traducido los resultados del modelo, el encargado no entiende nada y te ha pedido que analices los resultados. En la práctica, desea que le respondas a las preguntas siguientes:

1. Escribe el dual del modelo original e indica el sentido de las variables duales en cada caso.

2. Escribe el modelo original en forma estándar, con las variables de holgura y exceso de las restricciones. ¿Qué variables forman la base en el óptimo?

3. ¿Qué beneficio adicional se obtiene al contratar una hora más de trabajo? Justifica brevemente tu respuesta a partir de los resultados indicados.

4. Si el beneficio obtenido con P2 pasa de 60 a 50, ¿el óptimo cambia? ¿Y el valor de la función objetivo? Razona brevemente tu respuesta.

5. El cliente está dispuesto a negociar la cantidad mínima a suministrar de producto. ¿Vale la pena? Si es así, ¿propondrías aumentar o disminuir la cantidad mínima? ¿Qué precio estarías dispuesto a pagar por aumentar (o disminuir) esta cantidad mínima? ¿Hasta qué valor estarías dispuesto a aumentar (o disminuir) esta cantidad?

Solución:

1. Escribe el dual del modelo original e indica el sentido de las variables duales en cada caso.

   $$[\text{MIN}]\, w = 2.700\ HP + 850\ HM + 95\ PM$$

   Sujeto a:

   $$\begin{aligned} &30\ HP + 5\ HM + PM \geq 20 \\ &20\ HP + 10\ HM + PM \geq 60 \\ &HP, HM \geq 0 \\ &PM \leq 0 \end{aligned}$$

   HP, HM y PM representan el incremento del beneficio por incremento de horas de personal, horas de máquina y producción mínima, respectivamente.

2. Escribe el modelo original en forma estándar, con las variables de holgura y exceso de las restricciones. ¿Qué variables forman la base en el óptimo?

Esta es la forma estándar del modelo. H_{XX} representan variables de holgura, y E_{XX} representan variables de exceso de la restricción xx.

$$[MAX] z = 20\ P1 + 60\ P2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
&HP)\ 30\ P1 + 20\ P2 + H_{HP} = 2.700\\
&HM)\ 5\ P1 + 10\ P2 + H_{HM} = 850\\
&PM)\ P1 + P2 - E_{PM} = 95\\
&P1, P2, H_{HP}, H_{HM}, E_{PM} \geq 0
\end{aligned}$$

Del examen de la solución óptima, encontramos que las variables básicas son P1, P2 y H_{HP}. El número de variables básicas es igual al de restricciones.

3. ¿Qué beneficio adicional se obtiene al contratar una hora más de personal? Justifica brevemente tu respuesta a partir de los resultados indicados.

   No se obtiene ningún beneficio adicional. Puede verse por el hecho que tenemos holgura de horas de personal: H_{HP} = 600, es decir, sobran 600 horas de personal. También se puede observar que la variable dual asociada a la restricción HP es igual a cero.

4. Si el beneficio obtenido con P2 pasa de 60 a 50, ¿el óptimo cambia? ¿Y el valor de la función objetivo? Razona brevemente tu respuesta.

   Si observamos el informe de sensibilidad (tabla "Celdas cambiantes") obtenido por el programa informático, obtendremos los rangos de valores para los cuales la base no cambia.

   En este caso, encontramos que el beneficio por unidad de P2 (coeficiente de coste de P2 en la función objetivo) puede bajar hasta 20 enteros (de 60 a 40 euros) sin que cambie la base.

   Sabemos que, en estas condiciones, no cambia el valor del óptimo, que continúa siendo P1 = 20 y P2 = 75.

   En cuanto al valor de la función objetivo, como ahora, para cada unidad de P2, tenemos un beneficio de 50, el valor de esta función será $z^* = 20 \cdot 20 + 75 \cdot 50 = 4.150$ euros.

5. El cliente está dispuesto a negociar la cantidad mínima a suministrar de producto. ¿Vale la pena? Si es así, ¿propondrías aumentar o disminuir la cantidad mínima? ¿Qué precio estarías dispuesto a pagar por aumentar (o disminuir) esta cantidad mínima? ¿Hasta qué valor estarías dispuesto a aumentar (o disminuir) esta cantidad?

La variable dual de la restricción PM tiene un valor de –20. Esto significa que, en lo posible, hemos de intentar disminuir esta cantidad mínima.

De hecho, podemos estar dispuestos a pagar hasta 20 euros por cada unidad que disminuya esta cantidad mínima.

El decremento permisible sin que cambie la base es 10, como puede verse en el análisis de sensibilidad de los términos independientes (tabla "Restricciones" del informe de sensibilidad).

Ello significa que, por debajo de 95–10 = 85, la restricción PM no es activa, y no vale la pena pagar por seguir disminuyéndola.

Ejercicio 7. Plan de producción

Una empresa industrial está planificando la producción del próximo trimestre. Puede producir en dos turnos diurnos y, si necesita ampliar su capacidad, puede abrir un turno nocturno. La capacidad de producción mensual, en horario diurno, es de 300 ud/mes, mientras que, en horario nocturno, la capacidad mensual de producción es de 100 ud/mes.

La demanda mensual es de 250 ud el primer mes, 350 ud el segundo mes y 450 ud el tercer mes.

Los costes de producir una unidad en el turno diurno son de 15 €/ud y en el turno nocturno, de 25 €/ud.

Si se desea, se puede poner en stock el producto de un mes para meses posteriores, a un coste de 8 €/ud·mes. No se dispone de stock inicial ni se desea crear un stock final.

Se desea establecer un modelo de programación lineal para responder a las preguntas siguientes de forma independiente:

1) ¿Cuál es el plan de producción óptimo?
2) ¿Cuál es el coste de este plan de producción?
3) ¿Cuál sería el coste del plan de producción si la capacidad de producción en horario diurno del mes 2 aumentara en 50 unidades?
4) ¿Cuál sería el coste del plan de producción si el coste de almacenaje fuera de 10 €/ud·mes?
5) ¿Cuánto aumentaría el coste del plan de producción si hubiera que guardar en stock 40 unidades para el mes 4?

Solución:

Se ha creado el modelo de programación lineal siguiente:

Variables

PDi: Unidades producidas en horario diurno el mes "i" (i = 1, 2, 3). Son variables reales.

PNi: Unidades producidas en horario nocturno el mes "i" (i = 1, 2, 3). Son variables reales.

Sti: Unidades almacenadas el mes "i" para ser vendidas el mes "i+1" (i = 1, 2). Son variables reales.

Función objetivo

$$[\text{MIN}]\, z = 15(PD1+PD2+PD3) + 25(PN1+PN2+PN3) + 8(St1+St2)$$

Restricciones

$$\text{CAP\_D\_MAXi)}\ PDi \leq 300 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\text{CAP\_N\_MAXi)}\ PNi \leq 100 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\text{DEM1)}\ PD1+PN1-St1 \geq 250$$

$$\text{DEM2)}\ PD2+PN2+St1-St2 \geq 350$$

$$\text{DEM3)}\ PD3+PN3+St2 \geq 450$$

Al resolver este modelo, se han obtenido los resultados siguientes:

Variables

Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
Var. PD1	300	0	15	2	1E+30
Var. PD2	300	0	15	10	1E+30
Var. PD3	300	0	15	18	1E+30
Var. PN1	0	8	25	1E+30	8
Var. PN2	50	0	25	8	2
Var. PN3	100	0	25	8	1E+30
Var. St1	50	0	8	2	8
Var. St2	50	0	8	1E+30	8

Figura 26.
Resultado del modelo del plan de producción

Figura 26.
Continuación

Restricciones

Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
CAP_D_MAX1)	300	-2	300	50	50
CAP_D_MAX2)	300	-10	300	50	50
CAP_D_MAX3)	300	-18	300	50	50
CAP_N_MAX1)	0	0	100	1E+30	100
CAP_N_MAX2)	50	0	100	1E+30	50
CAP_N_MAX3)	100	-8	100	50	50
DEM1)	250	17	250	50	50
DEM2)	350	25	350	50	50
DEM3)	450	33	450	50	50

1) ¿Cuál es el plan de producción óptimo?

A la vista de los resultados de la figura 26, se puede concluir que el plan de producción óptimo consiste en producir durante los tres meses a la máxima capacidad en el horario diurno (300 ud/mes), abrir el turno nocturno el segundo mes a media capacidad (50 ud/mes) y ampliar el turno nocturno hasta su máxima capacidad (100 ud/mes) el tercer mes.

Ello supone generar un inventario al final del primer mes de 50 ud, que se mantiene constante hasta el final del segundo mes, para satisfacer la demanda del tercer mes.

2) ¿Cuál es el coste de este plan de producción?

El coste del plan de producción óptimo es:

$z^* = 15 \cdot 900 + 25 \cdot 150 + 8 \cdot 100 = 18.050$ €

3) ¿Cuál sería el coste del plan de producción si la capacidad de producción en horario diurno del mes 2 aumentara en 50 unidades?

Por cada unidad adicional en horario diurno el mes 2, hasta un máximo de 50 unidades adicionales, el coste del plan disminuye 10 euros.

Por un incremento de 50 unidades, el ahorro sería de 500 euros.

El nuevo coste del plan sería 18.050 – 500 = 17.550 euros.

4) ¿Cuál sería el coste del plan de producción si el coste de almacenaje fuera de 10 €/ud·mes?

La solución no cambia si los coeficientes de coste de las variables de stock aumentan en 2 euros.

El coste adicional sería 2·(50 + 50) = 200 euros

El coste del nuevo plan de producción sería 18.050 + 200 = 18.250 euros

5) ¿Cuánto aumentaría el coste del plan de producción si hubiera que guardar en stock 40 unidades para el mes 4?

Cada unidad adicional requerida el mes 3, ya sea para la venta o para guardar en stock en meses posteriores, tiene un coste de 33 €/ud (este precio sombra se mantiene hasta un máximo de 50 ud).

Al coste de obtener cada unidad en el mes 3, hay que añadir el coste de almacenaje desde el mes 3 hasta el mes 4, que es de 8 €/ud.

El aumento del coste del plan de producción sería de
40·(33 + 8) €/ud = 1.640 euros

Ejercicio 8. La cartera de inversiones

Un cliente de una compañía de inversiones financieras ha solicitado que le administren una cartera de 100.000 dólares. Al cliente, le gustaría limitar su cartera a una combinación de acciones de las tres empresas que se muestran en la tabla 22. Además, el inversor ha informado que no desea tener más del doble de acciones de Gofer que de Canoil. El objetivo es determinar cuántos títulos de cada empresa debería incluir la cartera para maximizar el beneficio anual estimado.

Empresa	Precio ($) por acción	Beneficio ($) anual estimado por acción	Máxima inversión posible ($)
GoferCrude	60	7	60.000
Canoil	25	3	25.000
SlothPetrol	20	3	30.000

Tabla 22.
Empresas a considerar para la cartera de inversión

Se pide:

1. Crear un programa lineal que maximice los beneficios de la cartera, considerando las restricciones del inversor.

2. Resolver el programa lineal con la aplicación Solver.

3. Indicar las variables básicas de la solución propuesta. ¿Cuántas acciones hay que comprar de cada empresa? ¿Cuál es el beneficio esperado? ¿Qué tipo de solución tiene este problema?

4. Escribir el modelo dual del programa lineal.

5. Indicar el valor de cada variable dual y definir su significado.

6. Si el beneficio anual estimado de GoferCrude aumenta hasta los 8 dólares por acción, ¿cómo afectaría dicho cambio a la solución del problema? Es decir, ¿cuánto aumentaría o disminuiría el beneficio total en la solución óptima? Justifica la respuesta.

7. Si la máxima inversión posible de SlothPetrol disminuye hasta 20.000, ¿cómo afectaría dicho cambio a la solución del problema? Es decir, ¿cuánto aumentaría o disminuiría el beneficio total en la solución óptima? Justifica la respuesta.

Solución:

1. Crear un programa lineal que maximice los beneficios de la cartera, considerando las restricciones del inversor.

   El programa lineal propuesto es:

   $$[\text{MAX}]\, z = 7 \cdot GO + 3 \cdot CA + 3 \cdot SL$$

   Sujeto a:

   $$\begin{aligned} &\text{Pres)}\ 60 \cdot GO + 25 \cdot CA + 20 \cdot SL \leq 100.000 \\ &\text{M\_GO)}\ 60 \cdot GO \leq 60.000 \\ &\text{M\_CA)}\ 25 \cdot CA \leq 25.000 \\ &\text{M\_SA)}\ 20 \cdot SL \leq 30.000 \\ &\text{REL)}\ GO < 2\, CA \\ &GO, CA, SL \geq 0 \end{aligned}$$

2. Resolver el programa lineal con la aplicación Solver.

   La solución que proporciona la aplicación Solver en el informe de respuestas es la siguiente:

Figura 27.
Informe de resultados del modelo propuesto

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$G$4	Valor FO	0	12750

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$4	Var. GO	0	750
$C$4	Var. CA	0	1000
$D$4	Var. SL	0	1500

Figura 27.
Continuación

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
$E$8	Pres	100000	$E$8<=$F$8	Obligatorio	0
$E$9	M_GO	45000	$E$9<=$F$9	Opcional	15000
$E$10	M_CA	25000	$E$10<=$F$10	Obligatorio	0
$E$11	M_SL	30000	$E$11<=$F$11	Obligatorio	0
$E$12	REL	-1250	$E$12<=$F$12	Opcional	1250

El informe de sensibilidad de Solver aporta la información siguiente:

Figura 28.
Informe de sensibilidad del modelo propuesto

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Decremento permisible
$B$4	Var. GO	750	0	7	0,2	7
$C$4	Var. CA	1000	0	3	1E+30	0,083333333
$D$4	Var. SL	1500	0	3	1E+30	0,666666667

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Decremento permisible
$E$8	Pres	100000	0,116666667	100000	15000	45000
$E$9	M_GO	45000	0	60000	1E+30	15000
$E$10	M_CA	25000	0,003333333	25000	45000	12931,03448
$E$11	M_SL	30000	0,033333333	30000	45000	15000
$E$12	REL	-1250	0	0	1E+30	1250

3. Indicar las variables básicas de la solución propuesta. ¿Cuántas acciones hay que comprar de cada empresa? ¿Cuál es el beneficio esperado? ¿Qué tipo de solución tiene este problema?

   Las variables básicas son: GO, CA, SA, HM_GO, HREL

   A la vista del informe de respuestas de Solver, habría que comprar 750 acciones de la empresa GoferCrude, 1.000 acciones de la empresa Canoil y 1.500 acciones de la empresa SlothPetrol.

   Con esta decisión, el beneficio anual esperado sería de 12.750 dólares, según indica el valor final de la función objetivo del informe de respuestas.

   El tipo de solución es única, ya que tenemos cinco variables básicas con valores diferentes de cero, que es igual al número de restricciones.

4. Escribir el modelo dual del programa lineal.

$$[\text{MIN}]\ w = 100.000 \cdot PRES + 60.000 \cdot M\_GO + 25.000 \cdot M\_CA + 30.000 \cdot M\_SA + 0 \cdot REL$$

Sujeto a:

GO) $60 \cdot PRES + 60 \cdot M\_GO + REL \geq 7$

CA) $25 \cdot PRES + 25 \cdot M\_CA - 2 \cdot REL \geq 3$

SL) $20 \cdot PRES + 20 \cdot M\_SL \geq 3$

$PRES \geq 0, M\_GO \geq 0, M\_CA \geq 0, M\_SL \geq 0, REL \geq 0$

5. Indicar el valor de cada variable dual y definir su significado.

PRES = 0,1166: Es el beneficio de aumentar en una unidad el presupuesto inicial.

M_GO = 0: Es el beneficio de aumentar en una unidad la máxima inversión de GO.

M_CA = 0,0033: Es el beneficio de aumentar en una unidad la máxima inversión de CA.

M_SL = 0,0333: Es el beneficio de aumentar en una unidad la máxima inversión de SL.

REL = 0: Es el beneficio de aumentar en una unidad la diferencia entre las acciones que puedo comprar de GO en relación con CA.

6. Si el beneficio anual estimado de GoferCrude aumenta hasta los 8 dólares por acción, ¿cómo afectaría dicho cambio a la solución del problema? Es decir, ¿cuánto aumentaría o disminuiría el beneficio total en la solución óptima? Justifica la respuesta.

Hemos de recalcular la solución porque se ha producido un cambio de base. Observamos que el coeficiente sólo puede aumentar en 0,2 unidades sin cambiar de base.

Se incluye el ajuste del beneficio de 8 dólares en el modelo y se vuelve a ejecutar Solver. El resultado se indica en el segundo informe de resultados de la figura 29.

Del informe de respuestas, puede observarse que la base ha cambiado; ha salido la variable HREL y ha entrado la variable HM_CA.

Al cambiar la base, la solución ha cambiado: ahora la decisión sería comprar los títulos siguientes:

GO = 965,517; CA = 482,759; SL= 1.500

Con esta decisión, el beneficio anual esperado pasaría de los 12.750 dólares (v. respuesta a la pregunta 3) a los 13.672.41, es decir, se produce un incremento del beneficio esperado de 922,41 dólares.

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$G$4	Valor FO	13500	13672,41379

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$4	Var. GO	750	965,5172414
$C$4	Var. CA	1000	482,7586207
$D$4	Var. SL	1500	1500

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
$E$8	Pres	100000	$E$8<=$F$8	Obligatorio	0
$E$9	M_GO	57931,03448	$E$9<=$F$9	Opcional	2068,965517
$E$10	M_CA	12068,96552	$E$10<=$F$10	Opcional	12931,03448
$E$11	M_SL	30000	$E$11<=$F$11	Obligatorio	0
$E$12	REL	-3,66072E-10	$E$12<=$F$12	Obligatorio	0

Figura 29.
Segundo informe de resultados del modelo modificando el coeficiente de la función objetivo, variable GO

7. Si la máxima inversión posible de SlothPetrol disminuye hasta 20.000, ¿cómo afectaría dicho cambio a la solución del problema? Es decir, ¿cuánto aumentaría o disminuiría el beneficio total en la solución óptima? Justifica la respuesta.

   En primer lugar, observamos que, en esta situación, la base no cambia ya que se puede disminuir la máxima inversión en SlothPetrol en 15.000 unidades, y en la pregunta se plantea una reducción de 10.000.

   Segundo, el precio sombra es 0,03333. Para una reducción de 10.000 unidades, la reducción del beneficio equivale a 333,33 dólares.

   Finalmente, en este supuesto, el beneficio esperado disminuirá en 333,33 dólares, es decir, el beneficio anual será de 12.416,67 dólares.

Ejercicio 9. Wilco

Wilco vende cuatro tipos de productos. Los recursos para producir una unidad de cada producto y los precios de venta de cada producto se indican en la tabla 23.

Actualmente, hay en stock 4.600 unidades disponibles de materia prima y se han contratado 5.000 horas para este trimestre.

Tabla 23.
Recursos necesarios para producir una unidad de producto

	PROD. 1	PROD. 2	PROD. 3	PROD. 4
Materia prima	2	3	4	7
Horas de M.O.	3	4	5	6
Precio de venta	4 $	6 $	7 $	8 $

Para satisfacer la demanda del trimestre, han de producirse exactamente 950 unidades de producto acabado. Según una previsión de ventas del producto 4, se tendrá una demanda mínima de 400 unidades.

Se pide:

1. Crear un programa lineal que maximice los beneficios de la empresa y tenga en cuenta las limitaciones de recursos.

2. Resolver el programa lineal con la aplicación Solver

3. ¿Cuánto hay que producir de cada producto? ¿Cuál será el beneficio esperado?

4. Si el precio de venta del producto 4 disminuye en tres unidades, ¿cómo afectaría dicho cambio a la solución del problema? Es decir, ¿cuánto aumentaría o disminuiría el beneficio total en la solución óptima?

5. Si la demanda mínima del producto 4 aumenta en 50 unidades, ¿cómo afectaría dicho cambio a la solución del problema? Es decir, ¿cuánto aumentaría o disminuiría el beneficio total en la solución óptima?

Solución:

1. Crear un programa lineal que maximice los beneficios de la empresa y tenga en cuenta las limitaciones de recursos.

   El programa lineal propuesto es:

   $$[\mathrm{MAX}]z = 4 \cdot \mathrm{PROD1} + 6 \cdot \mathrm{PROD2} + 7 \cdot \mathrm{PROD3} + 8 \cdot \mathrm{PROD4}$$

   Sujeto a:

   $$\begin{array}{l} \mathrm{MAT\_PRI)}\ 2 \cdot \mathrm{PROD1} + 3 \cdot \mathrm{PROD2} + 4 \cdot \mathrm{PROD3} + 7 \cdot \mathrm{PROD4} \leq 4600 \\ \mathrm{HOR\_MO)}\ 3 \cdot \mathrm{PROD1} + 4 \cdot \mathrm{PROD2} + 5 \cdot \mathrm{PROD3} + 6 \cdot \mathrm{PROD4} \leq 5000 \\ \mathrm{DEMAN\_TOT)}\ \mathrm{PROD1} + \mathrm{PROD2} + \mathrm{PROD3} + \mathrm{PROD4} = 950 \\ \mathrm{DEMAN\_P4)}\ \mathrm{PROD4} \geq 400 \\ \mathrm{PROD1} \geq 0, \mathrm{PROD2} \geq 0, \mathrm{PROD3} \geq 0, \mathrm{PROD4} \geq 0 \end{array}$$

2. Resolver el programa lineal con la aplicación Solver.

   La forma de introducir el modelo en Solver se indica en la figura 30.

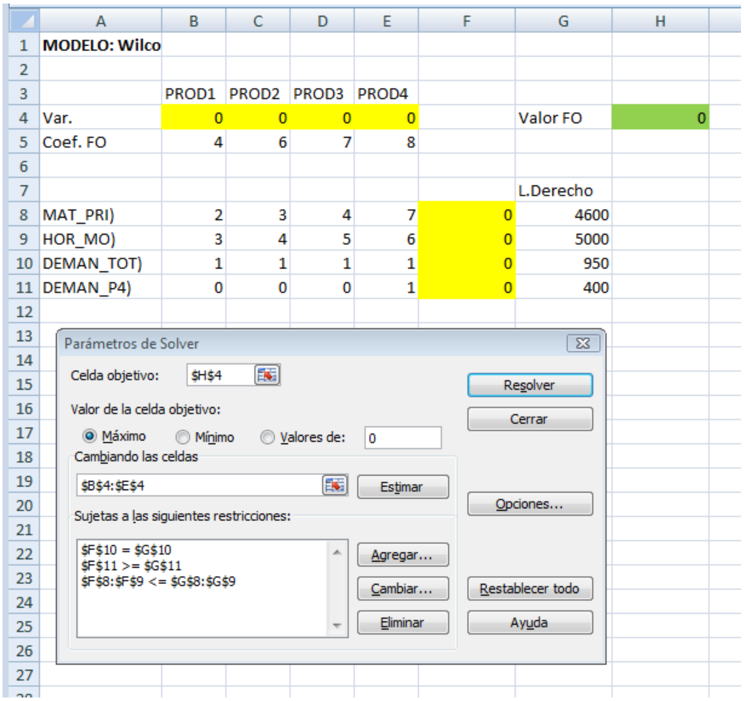


Figura 30.
Introducción del modelo en la aplicación Solver

El informe de resultados de este modelo se indica en la figura 31.

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$H$4	Valor FO	0	6650

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$4	Var. PROD1	0	0
$C$4	Var. PROD2	0	400
$D$4	Var. PROD3	0	150
$E$4	Var. PROD4	0	400

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
$F$8	MAT_PRI)	4600	$F$8<=$G$8	Obligatorio	0
$F$9	HOR_MO)	4750	$F$9<=$G$9	Opcional	250
$F$10	DEMAN_TOT)	950	$F$10=$G$10	Opcional	0
$F$11	DEMAN_P4)	400	$F$11>=$G$11	Obligatorio	0

Figura 31.
Informe de resultados del modelo propuesto.

Su informe de sensibilidad está expresado en la figura 32.

Figura 32.
Informe de sensibilidad del modelo propuesto

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Decremento permisible
\$B\$4	Var. PROD1	0	-1	4	1	1E+30
\$C\$4	Var. PROD2	400	0	6	0,666666667	0,5
\$D\$4	Var. PROD3	150	0	7	1	0,5
\$E\$4	Var. PROD4	400	0	8	2	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Decremento permisible
\$F\$8	MAT_PRI)	4600	1	4600	250	150
\$F\$9	HOR_MO)	4750	0	5000	1E+30	250
\$F\$10	DEMAN_TOT)	950	3	950	50	100
\$F\$11	DEMAN_P4)	400	-2	400	37,5	125

3. ¿Cuánto hay que producir de cada producto? ¿Cuál será el beneficio esperado?

   Observando el informe de respuestas de Solver (v. figura 31), el beneficio máximo se obtendría produciendo 400 unidades del producto 2, 150 unidades del producto 3 y 400 unidades del producto 4. No habría que producir nada del producto 1.

   Con esta decisión, el beneficio estimado será de 6.650 dólares.

4. Si el precio de venta del producto 4 disminuye en tres unidades, ¿cómo afectaría dicho cambio a la solución del problema? Es decir, ¿cuánto aumentaría o disminuiría el beneficio total en la solución óptima?

   Primero, se observa en el informe de sensibilidad (v. figura 32) de las celdas cambiantes que no haya cambiado la base. De este informe, se confirma que se puede disminuir en infinito el coeficiente de la variable PROD4 de la función objetivo sin que se produzca un cambio de base.

   Segundo, se calcula la reducción del beneficio multiplicando el valor de la variable PROD4 por la cantidad disminuida en su coeficiente.

   La solución disminuiría en: 400 · 3 = 1.200 \$; es decir, el nuevo valor de la función objetivo sería 6.650 – 1.200 = 5.450 \$.

5. Si la demanda mínima del producto 4 disminuye en 100 unidades, ¿cómo afectaría dicho cambio a la solución del problema? Es decir, ¿cuánto aumentaría o disminuiría el beneficio total en la solución óptima?

   Primero, se observa en el informe de sensibilidad de las restricciones que el decremento permitido en el término independiente de la restricción

DEMAN_P4 es de 125 unidades; por tanto, la reducción de 100 unidades estaría dentro de los límites permitidos sin producirse un cambio de base.

Segundo, se analiza el valor del precio sombra asociado a esta restricción DEMAN_P4 y se observa que el precio sombra tiene un valor -2. Esto significa que cada incremento unitario en el término independiente disminuye en 2 dólares el valor de la función objetivo y, en sentido opuesto, cada decremento unitario del término independiente aumenta en 2 dólares el valor de la función objetivo.

Finalmente, una reducción de 100 unidades en la demanda de P4 supondría un aumento del beneficio esperado equivalente a -100·(-2) = 200 $, de modo que el beneficio estimado sería de 6.650 + 200 = 6.850 $.

Ejercicio 10. Logística en Cremitas, S.L.

La empresa Cremitas, S.L., se dedica a la producción, el transporte y la comercialización de cremas para el cuidado de la piel. Actualmente, la empresa tiene dos fábricas y tres almacenes repartidos por la comarca del Vallès Oriental. Su estructura logística opera conforme a las reglas siguientes:

- El almacén A1 sólo recibe mercancías producidas en la fábrica F1.
- El almacén A2 sólo recibe mercancías producidas en la fábrica F2.
- El caso del almacén A3 es diferente. Debido a su situación estratégica y a su capacidad, recibe mercancías procedentes de cualquiera de las dos fábricas.

El coste por transportar un palé de mercancía desde la fábrica F1 a cualquier almacén es de 3 €/palé. En cambio, el transporte desde la fábrica F2 a cualquier almacén es de 2 €/palé.

Las capacidades diarias de recepción de material en los almacenes son de 100, 300 y 300 palés de mercancías, respectivamente.

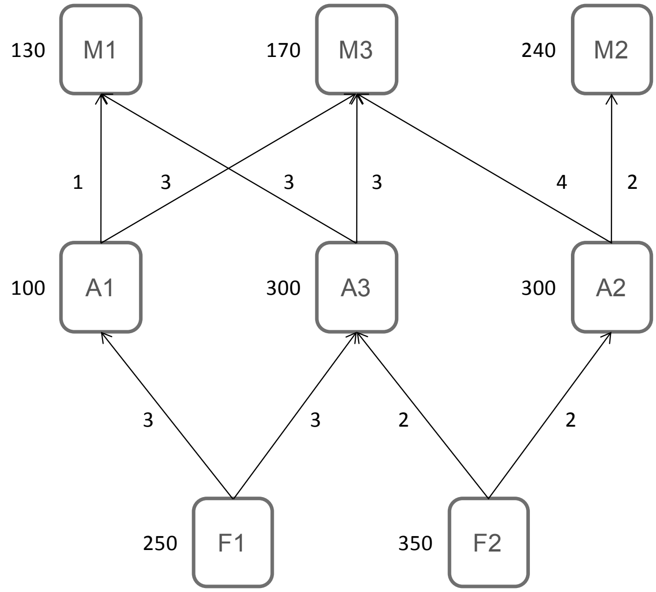
Asimismo, la capacidad de productiva de las fábricas es de 250 y 350 palés diarios, respectivamente.

Cremitas S.L. también entrega sus mercancías a los tres mayoristas con los que opera habitualmente. Después de estudiar la distribución y las distancias existentes entre los almacenes y los mayoristas, el jefe de logística ha decidido que los pedidos del mayorista M1 han de ser cubiertos por las mercancías de los almacenes A1 y A3, con un coste de 1 €/palé y 3 €/palé, respectivamente. Los pedidos del mayorista M2 han de ser cubiertos desde el almacén A2 con un coste de 2 €/palé. Por último, el mayorista M3 puede recibir mercancías desde cualquier almacén, con un coste de 3 €/palé, 4 €/palé y 3 €/palé, según si el material procede de los almacenes A1, A2 o A3, respectivamente.

La demanda de los mayoristas M1, M2 y M3 es de 130, 240 y 170 palés diarios, respectivamente.

En la figura 33, se ilustra la estructura de distribución de la empresa.

Figura 33.
Estructura de la red de distribución



Plantea un modelo que permita determinar la cantidad a producir, almacenar y transportar para minimizar los costes logísticos.

Con este objetivo:

1. Define las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones del problema.

2. Resuelve el modelo de programación lineal y determina los flujos óptimos de materiales entre fábricas y almacenes y entre almacenes y mayoristas. ¿Cuál es el coste diario total del sistema logístico?

3. ¿Hay alguna fábrica que disponga de capacidad excedente? ¿Hay algún almacén que disponga de capacidad excedente?

4. ¿Alguna de las conexiones es prescindible?

5. ¿Cuál sería el incremento de coste por enviar 10 unidades más al mayorista M1?

6. ¿En cuál de los almacenes puede ser más interesante ampliar capacidad?

Solución:

1. Define las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones del problema.

   Habrá tantas variables como trayectos entre la fábrica y los almacenes, más los trayectos entre los almacenes y los clientes:

   FxAy: Cantidad, en toneladas, entre la fábrica 'x' y el almacén 'y'.
   AxMy: Cantidad, en toneladas, entre el almacén 'x' y el mayorista 'y'.

   Ejemplos:

   F1A1: Cantidad, en toneladas, entre la fábrica 1 y el almacén 1.
   F1A3: Cantidad, en toneladas, entre la fábrica 1 y el almacén 3.
   Etc.

   A1M1: Cantidad, en toneladas, entre el almacén 1 y el mayorista 1.
   A1M3: Cantidad, en toneladas, entre el almacén 1 y el mayorista 3.
   Etc.

   Todas las variables han de ser positivas: $FxAy \geq 0$; $AxMy \geq 0$

   La función objetivo expresada en lenguaje matemático será:

   $$[MIN]\ z = 3F1A1 + 3F1A3 + 2F2A2 + 2F2A3 + 1A1M1 + 3A1M3 + 3A2M2 + 4A2M3 + 3A3M1 + 3A3M3$$

   El coste total dependerá de la cantidad de toneladas transportadas desde cada fábrica a cada almacén, y desde cada almacén a cada mayorista.

   Las restricciones del modelo han de incluir:

   Producción máxima de cada fábrica:

   R1) $F1A1 + F1A3 \leq 250$
   R2) $F2A3 + F2A2 \leq 350$

   Capacidad máxima de cada almacén:

   R3) $F1A1 \leq 100$

   R4) $F2A2 \leq 300$

   R5) $F1A3 + F2A3 \leq 300$

   Demanda de cada mayorista:

   R6) $A1M1 + A3M1 = 130$

   R7) $A2M2 = 240$

   R8) $A1M3 + A2M3 + A3M3 = 170$

Relación entre entradas y salidas de los almacenes:

R9) $F1A1 = A1M1 + A1M3$

R10) $F2A2 = A2M2 + A2M3$

R11) $F1A3 + F2A3 = A3M1 + A3M3$

2. Resuelve el modelo de programación lineal y determina los flujos de materiales entre las fábricas y los almacenes y entre los almacenes y los mayoristas. ¿Cuál es el coste diario total del sistema logístico?

   Con los resultados obtenidos en la figura 34, se pueden identificar los siguientes flujos de materiales entre las fábricas y los almacenes:

   F1A1=100, F1A3=90, F2A2=300, F2A3=110

   Los flujos de materiales entre los almacenes y los mayoristas son:

   A1M1=100, A2M2=240, A3M1=30, A3M3=170

   El coste diario de esta operación es de 2.450 euros.

Figura 34.
Informe de resultados del modelo propuesto

Celda objetivo (Mínimo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$N$4	Valor FO	0	2450

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$4	Var. F1A1	0	100
$C$4	Var. F1A3	0	90
$D$4	Var. F2A2	0	240
$E$4	Var. F2A3	0	110
$F$4	Var. A1M1	0	100
$G$4	Var. A1M3	0	0
$H$4	Var. A2M2	0	240
$I$4	Var. A2M3	0	0
$J$4	Var. A3M1	0	30
$K$4	Var. A3M3	0	170

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
$L$13	R6)	130	$L$13=$M$13	Opcional	0
$L$14	R7)	240	$L$14=$M$14	Opcional	0
$L$15	R8)	170	$L$15=$M$15	Opcional	0
$L$16	R9)	0	$L$16=$M$16	Opcional	0
$L$17	R10)	0	$L$17=$M$17	Opcional	0
$L$18	R11)	0	$L$18=$M$18	Opcional	0
$L$8	R1)	190	$L$8<=$M$8	Opcional	60
$L$9	R2)	350	$L$9<=$M$9	Obligatorio	0
$L$10	R3)	100	$L$10<=$M$10	Obligatorio	0
$L$11	R4)	240	$L$11<=$M$11	Opcional	60
$L$12	R5)	200	$L$12<=$M$12	Opcional	100

Figura 34.
Continuación

3. ¿Hay alguna fábrica que disponga de capacidad excedente? ¿Hay algún almacén que disponga de capacidad excedente?

   La holgura (divergencia) en la restricción R1 indica que la fábrica F1 dispone de una capacidad excedente de 60; en cambio, la capacidad de la fábrica F2 se utiliza completamente.

   De igual modo, las holguras (divergencias) en las restricciones R4 y R5 indican que se dispone capacidad excedente en los almacenes A2 y A3, en cantidades de 60 y 100, respectivamente.

4. ¿Alguna de las conexiones es prescindible?

   Un valor 0 en las variables A1M3 y A2M3 indica que ambas conexiones no se utilizan en la solución. Todo el material solicitado por el mayorista M3 se envía desde el almacén A3, de modo que ambas conexiones serían prescindibles en el nivel de demanda actual.

5. ¿Cuál sería el incremento de coste por enviar 10 unidades más al mayorista M1?

   Para evaluar el incremento de coste ante un eventual incremento de la demanda de los mayoristas, es necesario estudiar el precio sombra a partir del informe de sensibilidad de las restricciones.

Figura 35.
Informe de sensibilidad del modelo propuesto

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Decremento permisible
$L$13	R6)	130	6	130	60	30
$L$14	R7)	240	5	240	60	90
$L$15	R8)	170	6	170	60	90
$L$16	R9)	0	5	0	60	30
$L$17	R10)	0	3	0	60	90
$L$18	R11)	0	3	0	60	90
$L$8	R1)	190	0	250	1E+30	60
$L$9	R2)	350	-1	350	90	60
$L$10	R3)	100	-2	100	30	100
$L$11	R4)	240	0	300	1E+30	60
$L$12	R5)	200	0	300	1E+30	100

De la figura 35, pueden extraerse que incrementos del término independiente de las restricciones R6, R7 y R8 inferiores a 60 unidades no modifican la base actual.

Un incremento unitario en la demanda del mayorista M1 supondría un incremento del coste de 6 euros, puesto que este es el precio sombra de la restricción R6. Este precio sombra se origina al transportar una unidad desde F1 a M1 a través del almacén M2, dado que las otras rutas más económicas (pasando por A1 o saliendo de F2) han alcanzado el máximo de su capacidad.

El coste de transportar 10 unidades más hasta el mayorista M1 incrementará el coste total en 6 · 10 = 60 €, así que el nuevo coste diario será de 2.510 euros.

6. ¿De cuál de los almacenes puede ser más interesante ampliar la capacidad?

El almacén del cual resultaría más rentable ampliar la capacidad es el A1, cuyo precio sombra asociado es de -2 euros. Esto indica que cada incremento unitario de capacidad en este almacén supondría un ahorro de 2 euros en el transporte.

Los almacenes A2 y A3 tienen capacidad excedentaria y su holgura es de 60 y 100, respectivamente, por lo cual, de acuerdo con el teorema de la holgura complementaria, el precio sombra asociado a las restricciones R4 y R5 es 0.

Ejercicio 11. Aceite de oliva con denominación de origen

Una prestigiosa marca productora de aceite de oliva desea que diseñemos un plan de producción para la próxima temporada. La empresa ha facilitado los datos de los costes de producción y de cada tipo de producto que comercializa. A partir de estos datos, desea que obtengamos las cantidades que hemos de comercializar de cada producto, de modo que la ganancia total obtenida (suma de ganancias de cada producto) sea máxima.

El proceso productivo consiste en obtener aceite de oliva a partir de una variedad de aceitunas protegida por una denominación de origen. Como materia prima, las aceitunas llegan al molino y pasan por un proceso de trituración y prensado en frío del cual se extrae el aceite de oliva virgen extra. El residuo resultante puede volver a prensarse y se puede extraer aceite de oliva virgen en la segunda prensada. Al residuo resultante, todavía se le pueden añadir unos aditivos químicos, que ayudan a separar el aceite resultante de la pulpa, del cual se puede obtener un aceite de oliva refinado de menor calidad.

Las cantidades obtenidas por cada quilo de aceitunas son 0,1 litros de aceite de oliva virgen extra, 0,08 litros de aceite de oliva virgen en la segunda prensada y 0,06 litros de aceite refinado. Los costes de obtener un litro de estos productos son 4,5 €/litro, 1,5 €/litro y 1 €/litro, respectivamente. Hay que tener en cuenta que, para poder realizar la primera prensada, hay que comprar las aceitunas a los agricultores mientras que, en las otras prensadas, se aprovecha el residuo de los procesos anteriores.

Los productos que la empresa comercializa tienen una composición y un precio de venta al por mayor que se expresan en la tabla 24.

Tipo de aceite	Composición	Precio de venta
Virgen extra	100 % aceite virgen extra (1ª prensada)	6 €/l
Virgen	70 % virgen extra (1ª prens.) 30 % virgen (2ª prensada)	4,5 €/l
Refinado	50 % virgen (2ª prens.) 50 % refinado	2,5 €/l

Tabla 24. Composición de cada tipo de producto final y su precio de venta

Se considera importante de cara a potenciar la buena imagen de la marca que la cantidad comercializada de aceite virgen no sea inferior a la cantidad comercializada de aceite refinado.

Se pide buscar un modelo de programación lineal que permita encontrar la proporción que conviene comercializar de cada tipo de producto final.

Solución:

Se toman como variables de decisión:

Lve, Lv, Lr: litros de aceite comercializados de los tipos virgen extra, virgen y refinado, respectivamente. Son tres variables reales no negativas.

P1, P2, P3: litros de aceite procedentes de la primera prensada, de la segunda prensada y del refinado, respectivamente. Son tres variables reales no negativas.

KO: kilos de aceitunas. Esta variable determina la cantidad en peso de la materia prima y permitirá calcular las proporciones de las demás variables. Variable real no negativa.

Función objetivo:

Debe calcularse la ganancia (margen de contribución) por litro de cada producto:

Ganancia Lve = 6 – 4,5 = 1,5 €/litro
Ganancia Lv = 4,5 – (0,7 · 4,5 + 0,3 · 1,5) = 0,76 €/litro
Ganancia Lr = 2,5 – (0,5 · 1,5 + 0,5 · 1) = 1,25 €/litro

$$[MAX]z = 1{,}5 \cdot Lve + 0{,}76 \cdot Lv + 1{,}25Lr$$

Restricciones:

Por prensada:

$$R1)\ P1 \leq 0{,}1 \cdot KO$$
$$R2)\ P2 \leq 0{,}08 \cdot KO$$
$$R3)\ P3 \leq 0{,}06 \cdot KO$$

Necesidades de aceite por composición del producto:

$$R4)\ P1 = Lve + 0{,}7 \cdot Lv$$
$$R5)\ P2 = 0{,}3 \cdot Lv + 0{,}5 \cdot Lr$$
$$R6)\ P3 = 0{,}5 \cdot Lr$$

La cantidad de aceite virgen no ha de ser inferior a la cantidad de aceite refinado:

$$R7)\ Lv \geq Lr$$

Tomamos como referencia que disponemos de 100 kg de aceitunas (también podría tomarse 1 kg) para obtener una proporción de las variables en porcentaje (%) con respecto a la materia prima:

$$R8)\ KO \leq 100$$

Hay que tener en cuenta que el enunciado no nos pide Li ni Pi, sino una proporción, es decir, una cantidad relativa de cada producto (Lve, Lv y Lr) con respecto de los litros totales de aceite comercializados. Por tanto, una vez resuelto el modelo, hemos de calcular la proporción Li/ΣLi. De este modo, el resultado del problema es independiente del valor KO.

La solución al modelo planteado se indica en la figura 36.

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$K$4	Valor FO	0	24,6

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$4	Var. Lve	0	3
$C$4	Var. Lv	0	10
$D$4	Var. Lr	0	10
$E$4	Var. P1	0	10
$F$4	Var. P2	0	8
$G$4	Var. P3	0	5
$H$4	Var. KO	0	100

Figura 36.
Informe de resultados del modelo propuesto

A la vista de los resultados obtenidos, por cada 100 kg de aceitunas comercializaremos 3 litros de aceite virgen extra, 10 litros de aceite virgen y 10 litros de aceite refinado.

La proporción entre las cantidades comercializadas son:

Lve = 3/23 = 0,13
Lv = 10/23 = 0,435
Lr = 10/23 = 0,435

La ganancia resultante de esta política es de 24,6 euros por cada 100 kg de aceitunas procesados.

6.2. Ejercicios propuestos

En esta sección, se incluyen enunciados de ejercicios para que el lector desarrolle sus habilidades de modelización. Una vez definido el modelo lineal, se aconseja utilizar la aplicación Solver para obtener la solución del modelo y comprobar que no haya cometido errores en la modelización.

Ejercicio 12. Transporte aéreo

El responsable de carga de una empresa de transporte aéreo de mercancías tiene que decidir la cantidad a cargar de cuatro productos y su distribución en el interior de un Boeing modelo 717, con el objetivo de maximizar los beneficios.

La cantidad mínima a cargar de cada producto no puede ser inferior al 10 % del producto que se transporte más.

Los cuatro productos y sus características son:

Tabla 25.
Características de los productos a transportar

Producto	Cantidad disponible (Tm)	Volumen (m^3/Tm)	Beneficio (€/Tm)
C1	18	500	300
C2	20	600	450
C3	10	550	350
C4	16	400	275

El proceso de asignación de carga es el siguiente: el avión tiene tres compartimentos (delantero, central y trasero) con diferentes capacidades de peso y volumen en cada uno de los compartimentos. Dichas capacidades no se pueden sobrepasar y aparecen en la tabla 26.

Tabla 26.
Características de los compartimentos del avión

	Capacidad en peso (t)	Capacidad en volumen (m^3)
Delantero	12	6.000
Central	16	9.000
Trasero	10	5.000

Además, y para la estabilidad del avión, es necesario que el porcentaje de peso ocupado sobre el total sea el mismo en cada compartimento.

Con los datos suministrados, se pide:

1. Describir un modelo de programación lineal que represente la situación anterior indicando las variables de decisión, la función a optimizar y las restricciones.

2. Adaptar el modelo de programación lineal anterior si se acepta un desequilibrio de peso del 10 % entre los compartimentos.

Ejercicio 13. Caramelos de naranja

Una empresa se dedica a la producción de caramelos de naranja y está planificando su producción para los siguientes tres meses. A continuación, se indica la demanda total para estos meses, según sus previsiones de ventas.

- La demanda de enero es de 1.200 toneladas
- La demanda de febrero es de 1.500 toneladas
- La demanda de marzo es de 1.600 toneladas

El encargado de la planta nos ha informado de que la capacidad de producción mensual de la fábrica es de 1.450 toneladas y que dispone de un stock inicial de 400 toneladas ya producidas.

Asimismo, el encargado también nos ha explicado que la empresa puede almacenar caramelos en un almacén cercano a la fábrica a un coste de 6 €/t. La política de la empresa obliga a mantener un stock mínimo de seguridad de 200 toneladas.

Por último, el coste de producir una tonelada de producto difiere en función del mes en que se produzca. El coste es de 5 €/t en enero, 8 €/t en febrero y de 7 €/t en marzo.

Se debe plantear un modelo que permita determinar la cantidad de caramelos a producir cada mes para minimizar los costes de producción.

Con este objetivo, se pide responder a las preguntas siguientes:

1. Definir las variables de decisión.
2. Escribir la función objetivo a optimizar.
3. Escribir cada una de las restricciones del problema.
4. ¿Cuántas variables básicas tendrá el problema?
5. Escribir las restricciones del problema en forma estándar.
6. Hallar el plan de producción óptimo con la aplicación Solver.

Ejercicio 14. Bonos bucaneros

Un inversor dispone de 14.000 euros para invertir en un nuevo producto financiero, denominado *bonos bucaneros*, destinados a financiar nuevas empresas del sector punto com.

Las empresas en que se invierte pueden quebrar o pueden tener una cierta probabilidad de éxito, como se indica en la tabla 27. Si una empresa determinada tiene éxito, al cabo de un año el inversor recibe un alto rendimiento (porcentaje de rentabilidad indicado en la tabla) sobre la cantidad invertida. En cambio, si la empresa quiebra, el inversor pierde todo el capital invertido en ella.

Se puede invertir en cinco empresas distintas (A, B, C, D, E). La entidad gestora obliga a que, como mínimo, el 35 % de la inversión total vaya destinado a las empresas C y/o E. Asimismo, sobre la cantidad a invertir en las empresas A, B y D, es obligatorio que, como mínimo, la mitad vaya a la empresa A.

El inversor se plantea cómo llevar a cabo su inversión para maximizar su ganancia esperada, para lo cual desea emplear la PL.

Tabla 27.
Empresas que forman parte del proyecto de inversión

Empresa	Rendimiento anual	Probabilidad de quiebra
A	25 %	18 %
B	51 %	31 %
C	21 %	9 %
D	19 %	19 %
E	8 %	3 %

Aclaración: Entendemos por *ganancia esperada* la diferencia entre lo ganado, multiplicado por la probabilidad de éxito, y lo perdido, multiplicado por la probabilidad de fracaso.

Con estos datos, se pide:

1. Definir las variables de decisión.
2. Definir la función objetivo.
3. Definir las restricciones del programa lineal.
4. Hallar la solución del programa lineal utilizando la herramienta Solver.
5. ¿Qué cantidad debe invertirse en cada empresa?
6. ¿Cuál es la ganancia anual esperada?

Ejercicio 15. Empresa minera

Una empresa tiene dos minas que producen hierro y carbón. La primera mina produce 4 toneladas de hierro y 2 toneladas de carbón al día. La segunda produce 1 tonelada de hierro y 6 de carbón al día.

El coste diario de explotación en la primera mina es de 1.200 euros/día, mientras que el coste de la segunda mina es de 1.000 euros/día.

La demanda mensual de la empresa es de 25 toneladas de hierro y 19 toneladas de carbón, y el presupuesto operativo es de 15.000 euros.

El gerente de producción quiere saber cuántas toneladas de hierro y carbón se deben extraer de cada mina para minimizar el tiempo total de extracción.

Para ello, se pide crear un modelo de programación lineal que minimice el tiempo total de extracción, indicando las variables de decisión, la función a optimizar y las restricciones.

Ahora, el gerente quiere minimizar el coste operativo. Para ello, se pide actualizar el modelo de programación lineal anterior, con el objetivo de minimizar el coste mensual.

Ejercicio 16. Nappy, S.L.

La empresa Nappy, S.L., tiene tres fábricas en la Península Ibérica. Por otra parte, la empresa tiene tres clientes cuyas demandas mensuales son 100, 150 y 200 unidades logísticas mensuales (SKU/mes).

La tabla 28 muestra los costes de transporte de cada unidad logística desde las fábricas a cada cliente en (€/SKU).

	Cliente 1	**Cliente 2**	**Cliente 3**
Fábrica 1	8	3	6
Fábrica 2	2	Imposible	5
Fábrica 3	Imposible	4	7

Tabla 28.
Costes de transporte entre las fábricas y los clientes.

La capacidad de producción de las fábricas es 200, 150 y 200 unidades logísticas al mes, respectivamente.

Se pide:

1. Plantear un modelo de programación lineal que permita determinar la cantidad a producir y transportar desde cada fábrica a cada cliente para minimizar los costes logísticos.

2. Resolver el modelo de programación lineal y determinar los flujos de materiales entre las fábricas y los clientes. ¿Cuál es el coste mensual del transporte?

Ejercicio 17. Planificación de la capacidad de un taller mecánico

La empresa Mecanizados Ignacio Jesús suele tener problemas de capacidad en la sección de troquelado. Debido a una mala organización y a un uso inadecuado de sus recursos, ha dejado de servir puntualmente a sus clientes. El propietario de la empresa no tiene intención de hacer nuevas inversiones en dicha sección, pues tiene el convencimiento de que la capacidad es suficiente. Por este motivo, pide desarrollar un método que le permita cumplir con la demanda diaria y organizar los recursos de la forma más eficiente posible.

Se deben producir las cantidades diarias indicadas en la columna "demanda" de la tabla 28. Para producir estas referencias, dispone de cuatro troqueles, de los cuales se detalla la productividad según la referencia que fabrique cada uno de ellos, el tiempo medio entre averías (MTBF) en horas y el tiempo medio de reparación de la incidencia (MTTR) en minutos (v. tabla 29).

Tabla 29.
Demandas por producto, y productividad y fiabilidad de los troqueles

	Demanda	Troquel 1	Troquel 2	Troquel 3	Troquel 4
#A0013	120 ud.	15 ud/h	-	12 ud/h	8 ud/h
#A0121	140 ud.	-	20 ud/h	-	30 ud/h
#A0048	170 ud.	-	34 ud/h	47 ud/h	-
#A0079	90 ud.	15 ud/h	15 ud/h	-	15 uf/h
MTBF (h)		0,77	0,24	0,28	0,37
MTTR (min)		3,8	3,3	5,2	4,5

El símbolo "-" indica que no se puede fabricar la referencia en ese troquel.

Durante una jornada, el taller abre 8 horas y el coste unitario de fabricación (€/pieza) de cada referencia en un troquel determinado se expresa en la tabla 30.

Tabla 30.
Costes unitarios de producir cada referencia en un troquel determinado

	Troquel 1	Troquel 2	Troquel 3	Troquel 4
#A0013	1,2	-	1,1	1
#A0121	-	1,8	-	2
#A0048	-	2,2	1,4	-
#A0079	1,1	1,3	-	1

Con esta información, se debe crear un modelo de programación lineal que permita decidir las unidades a producir de cada referencia en cada troquel, de modo que el coste total sea mínimo.

Ejercicio 18. Hispafruit

La empresa Hispafruit, dedicada al *handling* y almacenaje de fruta fresca, está preparando la campaña de venta del mes de agosto y nos ha solicitado que organicemos su plan de aprovisionamiento para servir dos tipos de productos: melocotones y sandías.

Ambos productos pueden almacenarse durante 2 semanas (la semana en curso y otra adicional) en su centro logístico sin que ello afecte la calidad del producto. Opcionalmente, los melocotones pueden almacenarse un máximo de 3 semanas si están todo el tiempo en una cámara refrigerada en condiciones especiales. Los costes de almacenaje son:

Melocotones: Hasta 3 semanas, con refrigeración, coste 80 €/m^3·semana
Hasta 2 semanas, sin refrigeración, coste 30 €/m^3·semana
Sandías: Hasta 2 semanas, sin refrigeración, coste 30 €/m^3·semana

El precio de venta al minorista de los melocotones es de 2,3 €/kg, mientras que el de las sandías es de 1,75 €/kg. Estos precios fueron convenidos previamente y no se pueden modificar durante las 4 semanas de la campaña del mes de agosto.

El espacio máximo destinado a estos productos es de 5 m^3 de espacio refrigerado y 15 m^3 de espacio no refrigerado a la semana, independientemente del uso (melocotones o sandías) que se dé al espacio disponible.

Las previsiones de evolución de la demanda máxima y de los precios de compra para cada semana se detallan en la tabla 31.

	Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4
Precio de compra melocotones (€/kg)	1,2	1,5	1,8	1,6
Precio de compra sandías (€/kg)	1	1,4	1,3	1,2
Demanda melocotones (kg)	3.500	4.500	7.000	4.000
Demanda sandías (kg)	1.500	4.000	3.500	2.500

Tabla 31.
Evolución de los precios de compra y demanda de los productos en las próximas semanas.

Hay que tener en cuenta que la fruta se compra al inicio de la semana y se va vendiendo en el transcurso de la misma o en semanas posteriores. Por tanto, en los costes de almacenaje, hay que incluir los costes correspondientes a la semana en que se ha comprado la fruta.

Los melocotones (teniendo en cuenta el embalaje) tienen una relación de 800 kg/m^3 y las sandías, de 500 kg/m^3.

Se trata de plantear un modelo lineal que trate de conseguir el máximo beneficio durante las 4 próximas semanas, cumpliendo todas las condiciones establecidas.

Ejercicio 19. Alimentación animal

Una explotación agrícola ha solicitado la programación de la dieta de una granja de animales. Se dispone de cuatro alimentos (P1, P2, P3 y P4), a través de los cuales los animales adquieren tres elementos necesarios: energía (N1), proteínas (N2) e hidratos de carbono (N3). La cantidad de nutriente por cada 100 g de alimento, así como su coste en €/100 g, se muestran en la tabla 32.

	P1	P2	P3	P4
N1-energía (Kcal/100 g)	300	100	20	250
N2-proteínas (gr/100 g)	1	2	5	3
N3-hidratos de carbono (g/100 g)	40	20	12	25
Coste (€/100 g)	0,2	0,15	0,35	0,5

Tabla 32.
Propiedades de los alimentos que pueden configurar la dieta

Si cada animal tiene unos requerimientos semanales de 45.000 kcal, 300 g de proteínas y 3.000 g de hidratos de carbono, se pide:

1. Definir un modelo de programación lineal que prescriba la cantidad semanal de cada alimento por cabeza de ganado al mínimo coste.

2. Determinar la solución del problema y el coste semanal por cabeza.

3. ¿Cómo varían la composición de la dieta óptima y su coste si el precio de P1 pasa de 0,2 a 0,3 €/100 g?

4. ¿Cuál es el coste de la dieta óptima si los requerimientos de N2-proteínas pasa de 300 g a 400 g semanales?

5. Se plantea la posibilidad de introducir un nuevo alimento P5, cuyo coste por unidad es de 0,45 €/100 g. Cada 100 g de P5 aportan 200 kcal, 4 g de proteínas y 15 g de hidratos de carbono. Determina si vale la pena introducir este alimento en la dieta.

Ejercicio 20. Suministro de materiales

Una empresa industrial tiene tres proveedores (A, B y C), que pueden suministrar a sus cuatro fábricas. Desea planificar cómo aprovisionar las fábricas al menor coste.

Para ello, dispone de la información siguiente:

Los proveedores A, B y C cuentan con una capacidad de suministro de 100, 200 y 150 palés diarios, respectivamente.

Las fábricas 1, 2, 3 y 4 tienen unos requerimientos mínimos de materias primas de 100, 115, 80 y 105 palés, respectivamente.

Los costes de suministrar un palé de un proveedor a una fábrica (incluyendo los costes de compra y transporte) son los que se indican en la tabla 33.

Tabla 33.
Costes de suministro desde cada proveedor a cada fábrica en euros

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4
Proveedor A	400	600	500	900
Proveedor B	800	700	900	400
Proveedor C	700	800	700	600

Con estos datos, se pide:

1. Definir un modelo de programación lineal que indique la cantidad a suministrar a cada fábrica desde cada proveedor al coste mínimo.

2. Determinar la solución del problema y el coste total.

3. Si se produce un aumento de la demanda en la fábrica 2, al pasar de 115 a 135 unidades, ¿podemos saber cuál será la variación del coste total? Si es así, halla la variación de coste. ¿Qué sucedería si las necesidades aumentaran en 60 unidades?

4. ¿Cuántas unidades se enviarían del proveedor B a la fábrica 2 si el coste de suministro pasara de 700 € a 750 €? ¿Cuál sería la variación del coste total en esta situación?

5. ¿Para cuál de los tres proveedores es más ventajoso plantearse una ampliación de la capacidad que permita una reducción efectiva de los costes de suministro? ¿Hasta qué cantidad le interesa ampliar la capacidad al proveedor?

Ejercicio 21. Taller de mecanizado

Un taller de mecanizado cuenta con cinco máquinas (M1, M2, M3, M4 y M5).

El proceso de mecanizado a realizar sigue la secuencia de máquinas:

$$M1 \rightarrow M2 \rightarrow M3$$

También se puede utilizar la máquina M4, que realiza un proceso equivalente a M1+M2, o bien la máquina M5, que realiza un proceso equivalente a M2+M3 (v. figura 37).

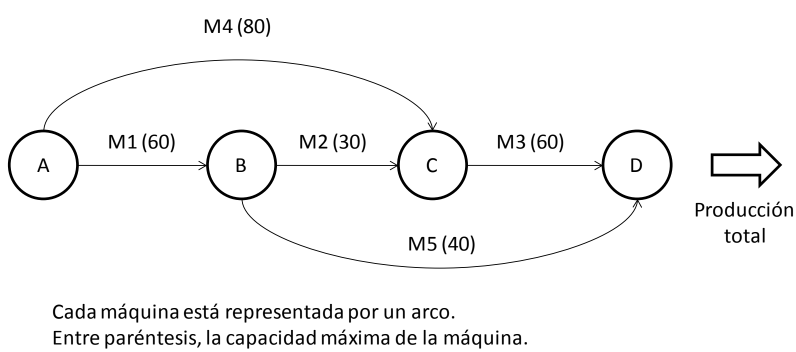


Figura 37. Secuencias de producción posibles y capacidades de cada máquina

Cada una de las máquinas tiene una capacidad productiva máxima (en piezas por hora) y un coste de fabricación (en euros por pieza fabricada). Los datos de cada máquina se indican en la tabla 34:

Máquina	Capacidad máxima	Coste de fabricación
M1	60	4
M2	30	3
M3	60	7
M4	80	6
M5	40	2

Tabla 34. Capacidad máxima y costes unitarios de fabricación de las máquinas

Se desea alcanzar una producción de 90 piezas por hora. En esta situación, se pide:

1. ¿Cuál es la configuración óptima del proceso?
2. ¿Cuántas máquinas están funcionando a su máxima capacidad?
3. ¿Para qué máquina resultaría interesante aumentar la capacidad máxima? ¿Cuál sería el ahorro máximo que se puede obtener aumentando la capacidad de esta máquina sin que varíe la base óptima?
4. ¿Cómo debemos reformular el modelo si ahora lo que queremos hallar es la producción máxima para este sistema?

Ejercicio 22. Sashimi Yamasaki y la cocina del atún rojo

Sashimi Yamasaki tiene un reconocido restaurante en la ciudad de Osaka (Japón). Su reputada fama le ha acompañado durante los últimos veinte años debido a la exclusividad de sus platos, elaborados a base de atún rojo. No obstante, el jefe de cocina considera que, a pesar de su gran prestigio, el desperdicio generado por el corte de las partes más selectas del pescado es excesivo y un estudio minucioso del problema les podría reportar costes inferiores a los actuales.

El problema principal es que Sashimi va al mercado y compra tres tipos de atún rojo sin criterio alguno. Estos tipos son, según su tamaño: MP1, con un peso medio de 20 kg/atún; MP2, con un peso medio de 70 kg/atún, y MP3, con un peso medio de 100 kg/atún. Cuando los atunes llegan a la cocina de su restaurante, se procede al despiece. Del despiece, llegan a obtenerse hasta 9 categorías de carne, que se enumeran más abajo (v. tabla 34). No obstante, de cada tamaño de atún se obtiene una cierta cantidad de cada categoría (expresada en % del peso del pescado original).

Por ejemplo, si cortamos una pieza MP1 (de 20 kg), obtendremos el 27 % de su peso (5,4 kg) en lomo, el 15 % del peso (3 kg) en trozos, el 28 % del peso (5,6 kg) en centros y el 25 % del peso (5 kg) en *flaps*. El resto hasta llegar al 100 % del peso original se consideran mermas (piel y espinas).

La pieza MP2 es la que ofrece mayor flexibilidad porque, al poder cortarse de dos formas distintas (tradicional y moderna), permite abastecer una gama más amplia de categorías. No obstante, para mantener la tradición, Sashimi no permite cortar más del 40 % del tipo MP2 de la forma moderna.

La honradez del Sr. Yamasaki (de buen japonés) le impide servir platos de categoría distinta a los descritos en su carta. No obstante, la demanda de los platos no obedece a la disponibilidad de la materia prima, sino a los deseos de los clientes. Considerando que las preferencias de los clientes son bastante estables, Sashimi prevé que las ventas del próximo mes serán las que se indican en la última columna de la tabla 35.

	MP1	MP2 tradicional	MP2 moderna	MP3	Demanda (kg/mes)
Lomo	27 %				350
Trozo	15 %				100
Centro	28 %	11 %			360
Flap	25 %	18 %	10 %	19 %	150
Suprema		39 %			170
Refrigerio			19 %	3 %	210
Penca		27 %	35 %	32 %	100
Ración			19 %	10 %	900
Superior			6 %	29 %	620

Tabla 35.
Porciones obtenidas del despiece y su demanda mensual.

A partir de la información suministrada, se pide modelizar un programa lineal que permita optimizar la compra de materias primas, con el objetivo de:

1. Minimizar el consumo de materia prima, de modo que satisfaga totalmente la demanda prevista.

2. Minimizar el coste de la materia prima, teniendo en cuenta que 1 kg de MP1 cuesta 500 yenes; de MP2, 700 yenes, y de MP3, 1.000 yenes.

3. Maximizar el beneficio total, teniendo en cuenta que el coste de la materia prima es el del apartado anterior y que los ingresos por kg de cada categoría son los que se indican en la tabla 36. En este caso, puede dejarse de servir parte de la demanda si no resulta económicamente rentable.

	Lomo	Trozo	Centro	*Flap*	Suprema	Refrig	Penca	Ración	Superior
Ingresos (¥/kg)	600	250	1600	350	800	700	450	2.100	3.000

Tabla 36.
Ingresos por categoría de producto despiezado

Bibliografía

Ackoff, R. L.; Sasieni, M. W. (1968). *Fundamentals of Operations Research.* John Wiley & Sons, EE.UU.

Arreola, J. S.; Arreola, A. (2003). *Programación lineal. Una introducción a la toma de decisiones cuantitativa.* Thomson, México.

Bierman, H.; Bonini, C. P.; Hausman, W. H. (1969). *Quantitative Analysis for Business Decisions.* 3ª ed. Richard Irwin Inc., Illinois, EE.UU.

Dantzig, G. B. (1998). *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, Princeton, EE.UU.

Dorfman, R.; Samuelson, P. A.; Solow, R. M. (1969). *Programación lineal y análisis económico.* Aguilar, España.

Garriga, F. (2015). *El apasionante mundo de la programación lineal.* OmniaScience, España.

Gass, S. I. (2003). *Linear Programming: Methods and Applications.* Dover Publications, Inc., NY, EE.UU.

Griva, I.; Nash, S. G.; Sofer, A. (2009). *Linear and Nonlinear Optimization.* 2ª ed. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Hamdy, A. T. (2004). *Investigación de operaciones.* 7ª ed. Prentice-Hall, México.

Hillier, F.; Lieberman, G. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones*. 9ª ed. McGraw Hill, México.

Jiménez, G. (2009). *Optimización*. Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Jiménez, G. (1999). *Investigación operativa I*. Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Pujolar, D. (2008). *Fundamentos de programación lineal y optimización en redes.* Universitat Autònoma de Barcelona, España.

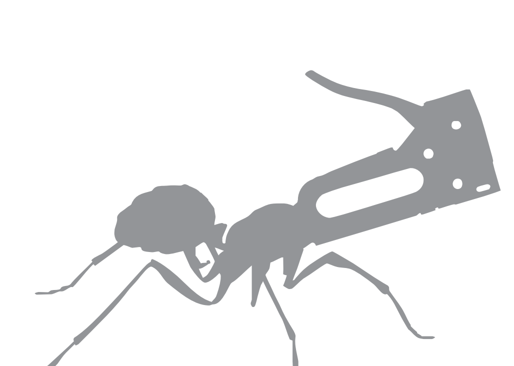
Quesada, V. M.; Vergarda, J. C. (2011). *Métodos de optimización. Modelos lineales.* Editorial Académica Española, España.

Sallán, J. M.; Lordán, O.; Fernández, V. (2015). *Modeling and Solving Linear Programming with R.* OmniaScience, España.

Tormos, P.; Lova, A. (2003). *Investigación operativa para ingenieros*. Universitat Politècnica de València, Servicio de Publicación. Valencia, España.

Vanderbei, R. J. (2008). *Linear Programming. Foundations and Extensions.* 3ª ed. Springer, NY, EE.UU.

Wagner, H. M. (1969). *Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions.* Prentice-Hall, NJ, EE.UU.



Glosario de términos

Algoritmo

Procedimiento que lleva a la solución de un problema determinado en un número finito de pasos. Por ejemplo, el algoritmo símplex, descrito en el apéndice.

Análisis de sensibilidad

Estudio de las variaciones que se producen en la solución de un modelo lineal cuando varían los parámetros de dicho modelo. El análisis de sensibilidad más usual se realiza para variaciones de los coeficientes de coste *c* y de los términos independientes *b*. También es posible analizar el impacto de las variaciones de los coeficientes tecnológicos de la matriz A, y el efecto de añadir nuevas variables y nuevas restricciones.

Base

Para un programa lineal de *n* variables y *m* restricciones, cualquier subconjunto de *m* variables. Cada base tiene asociada una solución básica.

Base, cambio de

Cuando alguno de los parámetros varía fuera de los intervalos obtenidos por el análisis de sensibilidad, tenemos un cambio de base. En resolución gráfica, esto supone que la solución se encuentra en un vértice distinto al de la solución original. En general, implica que las variables básicas son diferentes de dicha solución original.

Coeficiente de coste

Coeficiente de la variable de decisión en la función objetivo. El conjunto de los coeficientes de coste forma el vector columna c de *n* componentes. Son parámetros del programa lineal.

Coeficiente de coste reducido

Coeficiente de coste resultante de expresar la función objetivo a partir de las variables no básicas. Es diferente para cada una de las bases del programa lineal.

Coeficiente tecnológico

Coeficiente de la variable de decisión en una restricción. El coeficiente de la variable *j* en la restricción *i* se representa por a_{ij}. El conjunto de coeficientes tecnológicos forma la matriz A, de *m* filas y *n* columnas.

Convexa, región

Subconjunto de valores de R^n tal que, dados dos puntos cualesquiera del subconjunto, el segmento que los une también forma parte de dicho subconjunto.

Dual de un programa lineal

Es otro programa lineal, que puede obtenerse a partir de un conjunto de reglas cuya solución *u* es el valor de los precios sombra de las restricciones del programa original. La correspondencia es biunívoca: el dual del dual es el primal.

Forma canónica

Expresión de un programa lineal en que todas las restricciones son de mayor o igual en un problema de máximo, o de menor o igual en un problema de mínimo.

Forma estándar

La forma estándar de un programa lineal es la expresión de dicho programa en que todas las restricciones son de signo igual, tanto para el de máximo como para el de mínimo.

Función objetivo

Función lineal de las variables de decisión de cual se busca la minimización o maximización para los valores de la región factible de un programa lineal.

Holgura complementaria, teorema de la

Teorema que enuncia que el precio sombra es igual a cero cuando la restricción no se cumple con el signo igual en la solución óptima (esto es, cuya variable de holgura o exceso es diferente de cero en el óptimo).

Investigación operativa

Conjunto de técnicas, desarrolladas a partir de la segunda mitad del siglo XX como un cuerpo teórico integrado, para ayudar a la toma de decisiones mediante modelos cuantitativos en problemas de decisión, en contextos de escasez de recursos.

Matriz básica

Subconjunto de las columnas de la matriz A asociadas a las variables de una base. Es una matriz cuadrada B de orden *m*.

Matriz no básica

Subconjunto de las columnas de la matriz A asociadas a las variables no básicas, eso es, que no forman parte de una base. Es una matriz N de *m* filas y $n - m$ columnas.

Método heurístico

Procedimiento mediante el cual nos aseguramos de encontrar una buena solución (no necesariamente la mejor) para un modelo determinado. El ahorro de recursos (por ejemplo, el tiempo de cálculo) que puede suponer un método heurístico lo hace preferible, en ocasiones, a los métodos exactos.

Modelo

Un objeto M es un modelo de una realidad R para un observador O, si O puede obtener las respuestas a las preguntas que se hace sobre R, estudiando M. En esta obra, nos interesan aquellos modelos basados en relaciones cuantitativas entre los elementos de R susceptibles de ser resueltos mediante técnicas de programación lineal.

Optimización

La optimización de un modelo supone obtener aquel valor de las variables de decisión del modelo para las cuales obtenemos la mejor de las soluciones posibles. En muchas ocasiones, la optimización consiste en maximizar o minimizar una determinada función objetivo.

Óptimo impropio

Si el óptimo de un programa lineal se obtiene cuando una o varias de las variables de decisión crecen indefinidamente, se dice que el problema tiene óptimo impropio.

Óptimo múltiple

Situación en que el programa lineal no tiene una solución única. El conjunto de soluciones se encuentra entre varias soluciones básicas.

Parámetros (de la programación lineal)

Elementos de un programa lineal sobre los cuales no se tiene control y que se consideran fijos, a diferencia de las variables de decisión. Son los vectores de coeficientes de coste *c* y de términos independientes *b*, así como la matriz de coeficientes tecnológicos A.

Precio sombra

El precio sombra de una restricción es el incremento de la función objetivo por unidad de incremento del término independiente de la restricción, dentro del rango de valores del término independiente que suministra el análisis de sensibilidad. El precio sombra puede ser negativo (la función objetivo *disminuye* al aumentar el término independiente), positivo (la función objetivo *aumenta* al aumentar el término independiente) o nulo (para las restricciones que se cumplen con holgura o exceso).

Primal

Es el problema original del cual se obtiene el programa dual. A su vez, es el dual de dicho dual.

Programa matemático

Un modelo es un programa matemático cuando dicho modelo consiste en una función objetivo f(x), que es función de determinadas variables de decisión x = {x1,x2,...,xn}. Con frecuencia, estas variables de decisión han de cumplir determinadas restricciones, que hacen que sólo podamos considerar valores de un determinado subconjunto de R^n o región factible E.

Programación lineal

Un modelo de programación lineal es un caso particular de programación matemática en que *f(x)* es una función afín de *x*, y E es una región convexa, definida por restricciones afines.

Rangos de valores, sensibilidad

Intervalos de valores de los coeficientes de coste y términos independientes para los cuales no varía la base óptima en un modelo lineal. Es el resultado del análisis de sensibilidad obtenido por los programas informáticos.

Región factible

Subconjunto de R^n de los valores posibles de las variables de decisión de un programa lineal. Se expresa de forma analítica por un conjunto de restricciones.

Restricciones

Conjunto de ecuaciones e inecuaciones que deben cumplir todas las soluciones posibles de un programa lineal. Las inecuaciones serán siempre de mayor o igual, o de menor o igual.

Solución básica

Solución asociada a la base de un programa lineal. Las variables básicas son diferentes de cero y las no básicas, iguales a cero. El óptimo de un programa lineal (si existe) es una solución básica o se encuentra entre varias soluciones básicas (en el caso de óptimo múltiple).

Solución factible

Cualquiera de los valores de las variables de decisión incluidas en la región factible.

Solución factible en el vértice

En la solución gráfica de un programa lineal, las soluciones básicas son soluciones factibles en el vértice. Se trata de intersecciones entre las restricciones, o entre las restricciones y los semiejes positivos.

Solución óptima

Valor de la región factible para el cual se obtiene el valor óptimo de la función objetivo. Si el problema tiene solución única, la solución óptima es una solución básica.

Técnica cuantitativa

Técnica mediante la cual se puede hallar la solución de un modelo cuantitativo. Cuando la técnica permita obtener la mejor solución, se trata de una técnica de optimización. También se pueden tomar en consideración técnicas que permitan obtener una buena solución (no necesariamente la mejor): son técnicas heurísticas.

Término independiente

Denominado, a veces, *término del lado derecho*, es la constante de la restricción que se coloca al lado derecho de la ecuación o inecuación que define la restricción. El conjunto de términos independientes son parámetros del problema y constituyen el vector columna b de n componentes.

Variable artificial

Variable que se añade a un programa lineal para obtener una solución inicial. Dicha variable viene afectada por un coeficiente muy negativo (programa de MAX) o muy grande (programa de MIN). La variable artificial puede eliminarse cuando sale de la base. Si en la solución óptima forma parte de la base, el programa lineal no tiene solución.

Variable básica

Variable de decisión de un programa lineal que forma parte de una base. La base tiene un número *m* de variables básicas igual al de restricciones. Para la solución asociada a la base, las variables básicas son no nulas (si la solución no es degenerada). El conjunto de variables básicas forma el vector columna de *m* componentes x_B.

Variable de exceso

Variable no negativa que, restada a una restricción de mayor o igual, la transforma en una restricción de igualdad.

Variable de holgura

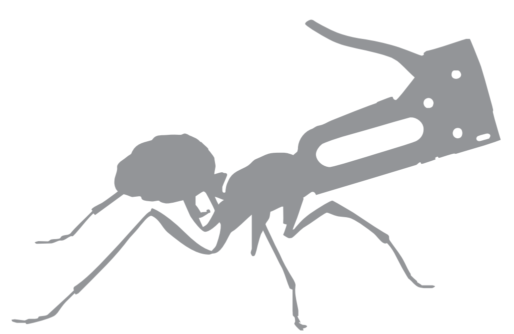
Variable no negativa que, sumada a una restricción de menor o igual, la transforma en una restricción de igualdad.

Variable no básica

Variable de decisión de un programa lineal que *no* forma parte de una base. En la solución asociada a una base, las variables no básicas son iguales a cero. El conjunto de variables no básicas forma el vector columna de *m–n* componentes x_N.

Variable de decisión

Conjunto de variables que representan las diferentes posibilidades de decisión en una situación representada por un problema. A diferencia de los parámetros, son variables sobre las cuales tenemos control. El conjunto de variables de decisión forma el vector columna de *n* componentes x.



Apéndice. Algoritmo símplex

El algoritmo símplex obtiene, de manera eficiente, la solución óptima de un problema lineal, si existe y es acotada.

Seguidamente, se indica el algoritmo símplex para un problema de máximo [MAX] y uno de mínimo [MIN].

Paso 0 **Iniciación:**

Transformar todas las restricciones de manera que

$b_i \geq 0$

Introducir variables de holgura y artificiales para obtener una base inicial, según las tablas 36 y 37:

Signo de la restricción	Variable de holgura en la restricción	Coeficiente de coste en la función objetivo
≤	sí (con coeficiente +1)	0
=	no	no
≥	sí (con coeficiente -1)	0

Tabla 37.
Variables de holgura para obtener la base inicial

Tabla 38.
Variables artificiales para obtener la base inicial.

Signo de la restricción	Variable artificial en la restricción	Coeficiente de coste en la función objetivo*
≤	no	no
=	sí (coeficiente +1)	{MAX} -M {MIN} +M
≥	sí (coeficiente +1)	{MAX} -M {MIN} +M

*M es un valor lo suficientemente grande para que la variable artificial no forme parte de la solución óptima, si existe.

Paso 1

Test de óptimo:

- Si hay alguna variable artificial en la base con valor $\neq 0$ y todos los coeficientes de coste reducidos son:

  ≥ 0 (problema de [MIN])

  ≤ 0 (problema de [MAX]),

entonces el problema no tiene solución: *Finalizar*.

- Si no hay ninguna variable artificial en la base y todos los coeficientes de coste reducidos son:

  ≥ 0 (problema de [MIN])

  ≤ 0 (problema de [MAX]),

entonces la solución básica es óptima: *Finalizar*.

- Si existe algún coeficiente de coste reducido de las variables no básicas:

  ≤ 0 (problema de [MIN])

  ≥ 0 (problema de [MAX])

entonces la solución básica no es óptima: *Continuar con el paso 2*.

Paso 2 **Elección de la variable que entra en la base:**

- [MIN] se elige la variable con menor coste reducido (la más negativa).
- [MAX] se elige la variable con mayor coste reducido cambiado de signo (la más positiva).

Sea x_e dicha variable. Se dice que x_e *entra* en la base. *Continuar con el paso 3*.

Paso 3 **Prueba del óptimo impropio:**

- Si, en todas las restricciones, los coeficientes de x_e en la presente tabla símplex son < 0, entonces el óptimo es impropio. *Finalizar*.
- En caso contrario, *continuar con el paso 4*.

Paso 4 **Elección de la variable que sale de la base:**

- Determinar la restricción r tal que b_r/a_{re} sea mínimo (a_{re} debe ser positivo).
- Se dice entonces que x_r (variable básica asociada a la restricción en la tabla símplex) sale de la base. *Continuar con el paso 5*.

Paso 5 **Pivotar con el coeficiente que multiplica x_e en la restricción *r*:**

- La nueva restricción r será: $r' = r / a_{re}$
- Se obtendrá el nuevo valor de las otras restricciones i según: $i' = i - a_{ie} \cdot r'$

Ir a paso 1.