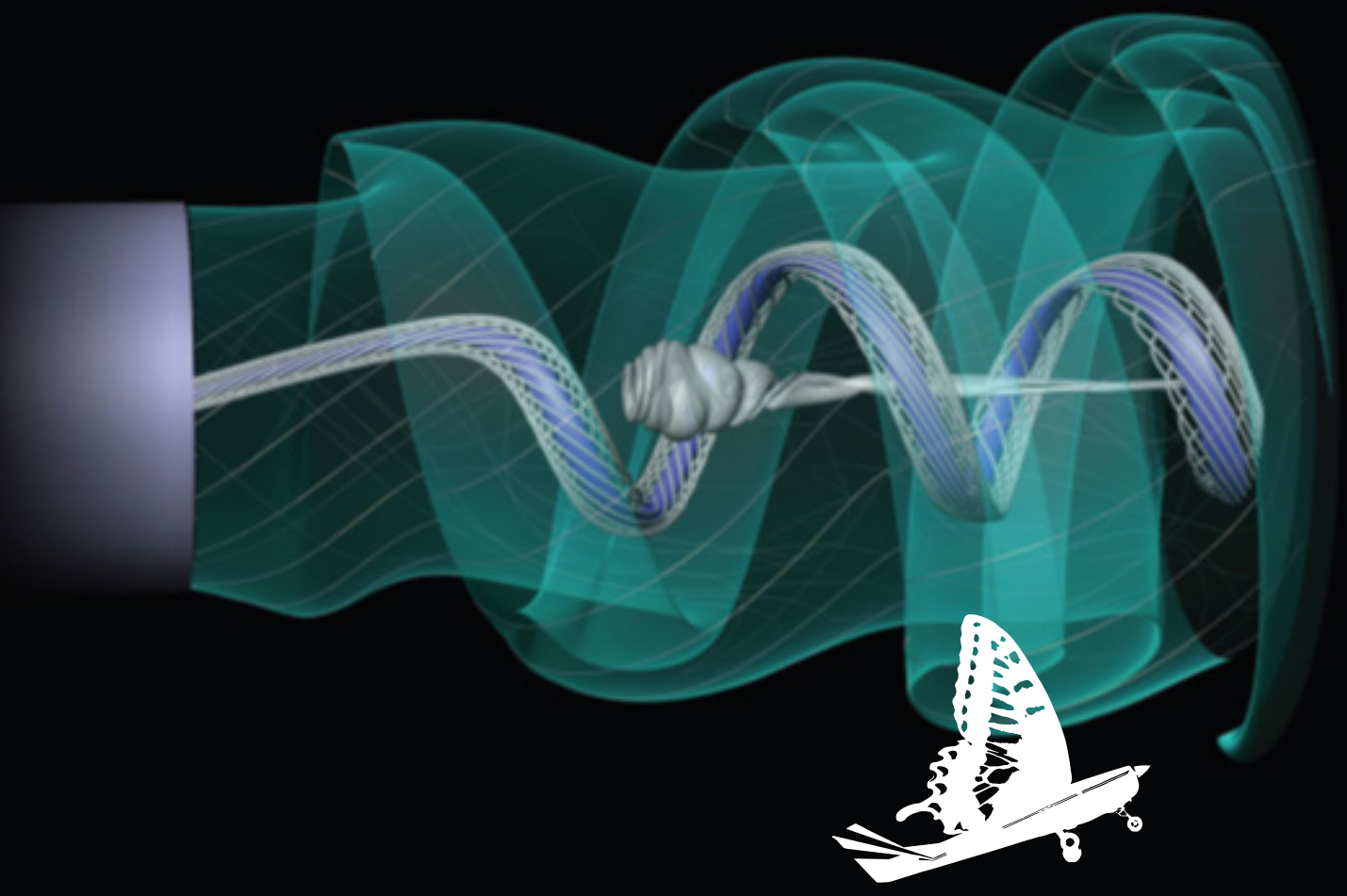
17

ENGINYERIA AEROESPACIAL



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH

UPCGRAU

Mecánica de fluidos.
Breve introducción teórica con problemas resueltos

3ª Edición

Josep M. Bergadà Granyó

17

ENGINYERIA
AEROESPACIAL

UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

UPCGRAU

Mecánica de fluidos.
Breve introducción teórica con problemas resueltos

3ª Edición

Josep M. Bergadà Granyó

Primera edición: noviembre de 2012
Segunda edición: mayo de 2015
Tercera edición: diciembre de 2017

Imagen de la cubierta extraida del artículo **Global modes in a swirling jet undergoing vortex breakdown**. C. Petz, H.-C. Hege, K. Oberleithner, M. Sieber, C. N. Nayeri, C. O. Paschereit, I. Wygnanski, and B. R. Noack. PHYSICS OF FLUIDS 23, 091102 (2011). Reproducida con permiso de los autores.

© Josep M. Bergadà Granyó, 2012

© Iniciativa Digital Politècnica, 2012
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Depósito legal: B 29183-2017
ISBN: 978-84-9880-689-2

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley.

Prólogo

La mecánica de fluidos tiene sus orígenes en la hidráulica, tanto en Mesopotamia como en Egipto alrededor del año 4000 antes de nuestra era proliferaron las obras hidráulicas que aseguraban el regadío de vastas zonas. Posteriormente, los imperios griego, chino y especialmente, el romano se caracterizan por una gran profusión de las construcciones hidráulicas.

A lo largo de la historia, aparecen inventos e investigadores que aportan mejoras sustanciales en el campo que hoy se denomina mecánica de fluidos, algunas de las cuales son las realizadas por:

Arquímedes (287-212 a.c.), crea el tornillo helicoidal y enuncia el principio de flotación. Leonardo da Vinci (1452-1519), muestra la aparición de vórtices en la zona de separación de flujo; describe los principios de funcionamiento de máquinas voladoras.

Pascal (1623-1662), en el estudio de la estática de fluidos define el principio que lleva su nombre. Newton (1642-1727), realiza el análisis espectral de la luz; define la teoría de gravitación universal; establece los principios de cálculo integral y diferencial, y promulga la ley de viscosidad que lleva su nombre. Henry de Pitot (1695-1771), crea, con el fin de medir la velocidad de un fluido, el tubo que lleva su nombre. Bernoulli (1700-1782), populariza la ley que define la energía asociada al fluido a lo largo de una línea de corriente, estudia problemas sobre estática y dinámica de fluidos. Euler (1707-1783), establece la base matemática para el estudio del flujo ideal, sin viscosidad. Venturi (1746-1822), clarifica los principios básicos del flujo a lo largo de un conducto convergente divergente (el tubo de Venturi), define los principios del resalto hidráulico.

Henri Navier (1785-1836), basándose en los estudios de Euler, deriva las ecuaciones de Navier, que posteriormente Stokes modifica hasta obtener las ecuaciones que se conocen actualmente. Ludwig Hagen (1797-1884), estudiando el flujo en conductos cerrados, encuentra la zona de traspaso entre flujo laminar y turbulento, y observa

que depende de la velocidad y la temperatura del fluido, así como del diámetro y la rugosidad del conducto. Poiseulle (1799-1869), estudia el movimiento de la sangre en venas y capilares, y determina experimentalmente la relación entre presión y caudal en capilares.

William Froude (1810-1879), se dedicó durante parte de su vida a construir barcos; sus investigaciones fueron continuadas por su hijo R.E. Froude (1846-1924), el cual definió el número adimensional que lleva su nombre y que relaciona las fuerzas de inercia con las fuerzas gravitacionales. G. Stokes (1819-1903), logró derivar la ecuación de Navier-Stokes. Kirchhoff (1824-1887), define el coeficiente de contracción, hallándolo para el caso de orificios bidimensionales. Ernst Mach (1838-1916), que en uno de sus más conocidos estudios sobre los flujos a alta velocidad, deduce el número de Mach. Reynolds (1842-1912), clarifica el fenómeno de cavitación; define los regímenes laminar y turbulento, y el número adimensional que los identifica. Su teoría sobre la lubricación hidrodinámica es asimismo muy relevante. Ludwig Prandtl (1875-1953), que observa la aparición y define la teoría de la capa límite, se considera como uno de los creadores de la mecánica de fluidos moderna. Theodor Von Karman (1881-1963) estudia los vórtices detrás de un cilindro, define las fuerzas de arrastre y sustentación de cuerpos en el seno de un fluido en régimen turbulento.

Durante el siglo XX, los avances en la mecánica de fluidos han sido continuos, siendo la dinámica de gases, la aerodinámica y la aeronáutica los campos que han experimentado y seguirán experimentado en el futuro una especial proliferación. Asimismo, las técnicas no intrusivas para la medición del movimiento del fluido, han despegado, aplicándose en la actualidad en cualquier campo.

En el presente libro, se introducen de una manera muy elemental diversos conceptos básicos de la mecánica de fluidos, el libro está pensado para que el lector adquiera rápidamente la información básica de cada capítulo y pueda seguidamente fijar sus conocimientos mediante los problemas resueltos que se presentan en cada uno de los capítulos. En esta tercera edición, he querido especialmente incrementar el número de problemas resueltos con el fin de clarificar los diversos conceptos, además he ampliado considerablemente el capítulo de flujo compresible.

Quisiera agradecer a los profesores C.N. Nayeri y C.O. Paschereit de TU Berlín, el apoyo y cortesía que, durante los periodos que he estado en su instituto, han tenido conmigo.

Es mi deseo que este libro sea de utilidad, tanto para los futuros estudiantes como para los profesionales que necesiten repasar conceptos básicos sobre la mecánica de fluidos.

Josep M Bergadà

Índice

Cap. 1 Introducción a la Mecánica de Fluidos. Propiedades de los fluidos

1.1 Introducción. Fluido desde el punto de vista molecular 19
1.2 Fluido desde el punto de vista termodinámico 20
1.3 Fluido desde el punto de vista mecánico 22
1.4 Aproximación del continuo 22
1.5 Equilibrio termodinámico local 23
1.6 Propiedades de los fluidos 23
1.6.1 Módulo de elasticidad 24
1.6.2 Coeficiente de expansión térmica 25
1.6.3 Colofón sobre módulo de elasticidad y coeficiente de expansión térmica 25
1.6.4 Tensión superficial 26
1.6.5 Definición de viscosidad 28

Problemas
1. Balance de fuerzas en un conducto 32
2. Viscosímetro cilíndrico 33
3. Viscosímetro esférico 35
4. Viscosímetro cónico 36

Cap. 2 Cinemática de fluidos

2.1 Concepto de derivada sustancial, material o total 41
2.2 Concepto de flujo convectivo a través de una superficie 42
2.3 Concepto de Circulación 43
2.4 Líneas de corriente, trayectoria y traza 43
2.4.1 Líneas de Senda o Trayectoria 44
2.4.2 Líneas de Traza 45
2.4.3 Líneas de Corriente 45
2.4.4 Concepto de línea fluida 47

2.5 Concepto de vorticidad e irrotacionalidad 47
2.6 Estudio cinemático del movimiento de una partícula 50

Problemas
5. Variación del volumen de fluido al variar parámetros termodinámicos 54
6. Cálculo de parámetros cinemáticos, aceleración, vorticidad 55
7. Cálculo de parámetros cinemáticos, líneas de corriente, traza y trayectoria 58
8. Cálculo global de parámetros cinemáticos 62

Cap. 3 Estática de fluidos

3.1 Ecuación diferencial de la estática de fluidos 69
3.2 Ecuación diferencial del movimiento del fluido como sólido rígido 70
3.3 Ecuación diferencial del movimiento del fluido como sólido rígido, coordenadas cilíndricas 73
3.4 Fuerzas sobre superficies planas 74
3.5 Fuerzas sobre superficies curvas 77
3.6 Fuerzas sobre volúmenes sumergidos 79

Problemas
9. Fuerzas sobre cuerpos sumergidos, esfera 82
10. Cuerpos sumergidos entre dos fluidos 85
11. Principio de Arquímedes extendido a multifluidos. 89
12. Fuerzas sobre superficies 95
13. Fluido como sólido rígido 100
14. Depósito parcialmente sumergido 104

Cap. 4 Ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Fluidos. Ecuación de continuidad.

4.1 Introducción. Ecuación de transporte de Reynolds 113
4.2 Ecuación de continuidad de la masa en forma integral 118
4.2.1 Ecuación de continuidad, en modo diferencial 118

Problemas
15. Vaciado de un depósito troncocónico convergente 120
16. Vaciado de un depósito troncocónico divergente 122
17. Flujo que fluye por un conducto divergente 124
18. Vaciado de un depósito con múltiples agujeros 126
19. Vaciado de un depósito cónico con 3 agujeros 129
20. Evolución de un fluido de densidad variable por un conducto 135
21. Conducto circular de sección variable 137
22. Ecuación de continuidad aplicada a cilindros cerrados 142
23. Variación temporal de la presión en un cilindro 145

24. Evolución del fluido compresible en una suspensión hidráulica 147
25. Estudio de un amortiguador simple 153

Cap. 5 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

5.1 Forma integral 171
5.2 Forma diferencial de la ecuación de cantidad de movimiento 172
5.3 Ecuación de cantidad de movimiento en forma integral y para sistemas no inerciales de coordenadas 177
5.4 Ecuación de cantidad de movimiento en forma diferencial para sistemas no inerciales 179

Problemas
26. Fuerza de un chorro sobre una superficie semiesférica 181
27. Cantidad de movimiento sobre una superficie cónica 182
28. Fuerza del fluido sobre un azud 185
29. Fuerza de un chorro sobre un álabe 186
30. Fuerza sobre álabes móviles 193
31. Fuerza de reacción sobre un depósito móvil 206
32. Flujo sobre un vehículo móvil 210
33. Principio de funcionamiento de un helicóptero 217
34. Fuerza de reacción de un motor de avión 219
35. Aceleración de un cohete 220
36. Movimiento de un avión de pasajeros 223
37. Sistemas no inerciales de coordenadas I 228
38. Sistemas no inerciales de coordenadas II 231
39. Fuerzas actuantes en el interior de una servoválvula 238

Cap. 6 Ecuación del momento de la cantidad de movimiento, momento cinético

6.1 Ecuación del momento cinético para sistemas inerciales de coordenadas 247
6.2 Aplicación de la ecuación del momento cinético a turbomáquinas 248
6.3 Ecuación de momento cinético para sistemas no inerciales de coordenadas 250

Problemas
40. Momento cinético aplicado a un sistema estático 252
41. Aplicación a un aspersor giratorio 255
42. Aspersor en forma de Y 259
43. Aspersor con tres brazos 273
44. Turbina Pelton 291
45. Aspersor con álabes 296
46. Helicóptero 300

47. Aspersor inclinado 304
48. Aspersor en forma de doble L 305
49. Aspersor sometido a flujo transitorio 311
50. Aspersor con 8 tramos 322

Cap. 7 Ecuación de conservación de la energía

7.1 Introducción 337
7.2 Composición del término trabajo 338
7.3 Ecuación de la energía para turbomáquinas, caso máquinas térmicas e hidráulicas ... 340
7.4 Forma diferencial de la ecuación de la energía 343

Problemas
51. Compresor 346
52. Aplicación de la ecuación energía en régimen transitorio 348
53. Ecuación de la energía en régimen transitorio y conducto esférico 351
54. Ecuación de la energía en régimen transitorio y conducto divergente 360
55. Bombeo de combustible 370
56. Hovercraft 373
57. Turbina axial 378

Cap. 8 Flujo con viscosidad dominante

8.1 Flujo entre dos placas paralelas 385
8.2 Flujos independientes del tiempo 388
8.2.1 Flujo de Couette - Poiseulle plano 388
8.2.2 Flujo de Couette 389
8.2.3 Flujo de Hagen-Poiseulle o Poiseulle plano 390
8.3 Flujo dependiente del tiempo 390
8.3.1 Flujo de Rayleich 390
8.4 Flujo estacionario en conductos circulares 394
8.4.1 Flujo de Hagen-Poiseulle 394
8.5 Concepto de pendiente motriz 398
8.6 Flujo en un conducto anular 399
8.6.1 Considérese ahora el caso en que ambos cilindros son estacionarios pero existe una diferencia de presión entre los extremos de los cilindros 403
8.6.2 Caso genérico de flujo entre dos cilindros concéntricos, en donde existe desplazamiento en dirección axial de ambos cilindros y gradiente de presiones entre extremos de los cilindros 406
8.7 Flujo entre cilindros concéntricos giratorios 408
8.8 Flujos con aceleración despreciable 420
8.8.1 Introducción 420
8.8.2 Teoría de la lubricación de Reynolds. Flujo unidireccional. 422

8.8.2.1 Cojinetes hidrostáticos planos, patín de Michel. 422
8.8.2.2 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo bidimensional ..... unidireccional. Coordenadas cartesianas..... 428
8.8.2.3 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo bidireccional, tridimensional. Coordenadas cartesianas..... .428
8.8.2.4 La ecuación de lubricación de Reynolds en régimen transitorio, flujo bidimensional tridimensional. Coordenadas cartesianas 429
8.8.2.5 Ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas 431
8.8.3 Flujos con aceleración despreciable. Cojinetes cilíndricos cargados estáticamente..... 436

Problemas
58. Flujo entre dos cilindros concéntricos giratorios..... 444
59. Flujo radial entre dos cilindros concéntricos..... 448
60. Cojinete esférico..... 451
61. Flujo radial entre dos placas planas..... 457
62. Patín deslizante con ranura..... 461
63. Patín deslizante inclinado..... 468
64. Flujo entre pistón y camisa..... 479
65. Flujo transitorio en un conducto..... 486
66. Cojinete hidrodinámico cilíndrico I..... 491
67. Cojinete hidrodinámico cilíndrico II 495
68. Flujo entre cilindros concéntricos con variación de temperatura 520
69. Caudal de fugas en una mini turbina 545
70. Patín de Michel..... 559
71. Flujo de pérdidas en la placa de cierre de una bomba de pistones..... 561
72. Patín deslizante mixto..... 579
73. Flujo en una válvula de asiento cónico..... 586

Cap. 9 Análisis adimensional

9.1 Introducción..... 601
9.2 Fundamentos del análisis adimensional..... 602
9.3 Teorema de π ó Buckingham..... 603
9.3.1 Caso del cálculo de las pérdidas de energía en una tubería 603
9.4 Extensión del ejemplo utilizando el método matricial..... 605
9.5 Método de normalización de las ecuaciones o método del análisis inspeccional . 606
9.6 Algunos de los grupos adimensionales más comunes en Mecánica de Fluidos son: 609
9.7 Pruebas con modelos, extrapolación de resultados..... 611

Problemas
74. Grupos adimensionales que caracterizan el flujo incompresible en conductos …614

75. Grupos adimensionales que caracterizan el flujo compresible en conductos.....617
76. Grupos adimensionales para una turbomáquina que opera con fluido compresible ..619
77. Grupos adimensionales para un vertedero triangular.....621
78. Grupos adimensionales aplicables a barcos.....624

Cap. 10 Flujo interno

10.1 Introducción.....629
10.2 Tipos de flujo.....629
10.3 Establecimiento de flujo en un conducto.....630
10.4 Primera ley de la termodinámica aplicada al flujo en tuberías.....631
10.5 El término de pérdidas.....633
10.6 Pérdidas menores o singulares.....636
10.7 Casos posibles de problemas en sistemas de tuberías.....638
10.8 Conductos en serie y en paralelo, y conductos ramificados.....641
10.8.1 Características de los sistemas en serie.....641
10.8.2 Características de los sistemas en paralelo.....642
10.9 Concepto de longitud equivalente.....643
10.10 Conductos no circulares. Concepto de diámetro hidráulico.....643
10.11 Sistemas de conductos ramificados.....644

Problemas
79. Flujo en conductos ramificados.....646
80. Flujo entre dos depósitos.....650
81. Central térmica.....654
82. Sistema de tres depósitos.....660
83. Sistema con múltiples depósitos. Resolución numérica.....676
84. Sistema con múltiples depósitos.....686
85. Pérdidas de energía en un túnel de viento.....706

Cap. 11 Capa límite, flujo externo, flujo potencial

11.1 Capa límite.....723
11.1.1 Introducción.....723
11.1.2 Efectos de la capa límite sobre el flujo, concepto de espesor de desplazamiento de la capa límite.....724
11.1.3 Concepto de espesor de cantidad de movimiento para la capa límite.....725
11.1.4 Ecuación diferencial de Prandtl para el análisis de la capa límite.....726
11.1.5 Efecto del gradiente de presión en la capa límite.....730
11.1.6 Ecuación integral de cantidad de movimiento para la capa límite. Ecuación de Von Karman.....734
11.1.7 Evaluación de los parámetros de la capa límite para el flujo sobre una placa plana.....737

11.1.7.1 Características para la capa límite en la región laminar 738
11.1.7.2 Capa límite turbulenta 743
11.2 Flujo externo 751
11.2.1 Introducción 751
11.2.2 Fuerza sobre cuerpos, resistencia y sustentación 751
11.2.3 Conceptos de vórtice libre y vórtice forzado 754
11.2.4 El teorema de Kutta-Joukowsky (válido para flujo subsónico) 755
11.2.5 Sustentación sobre cilindros y esferas giratorias, efecto Magnus 758
11.3 Introducción al Flujo Potencial 759
11.3.1 Ecuaciones de Euler y Bernoulli 759
11.3.2Concepto de potencial de velocidades y función de corriente 761

Problemas
86. Capa límite en una embarcación 765
87. Capa límite en una aeronave 767
88. Capa límite en conductos sumergidos 770
89. Efecto Magnus I 774
90. Distribución de presión en un tornado 778
91. Efecto Magnus II 781
92. Vórtices bajo las alas de aeronaves 786

Cap. 12 Golpe de ariete

12.1 Fenómeno físico 807
12.2 Expresiones para obtener el valor de la presión máxima o sobrepresión en el conducto 810
12.3 Estudio temporal de las perturbaciones de presión en un punto genérico del conducto 813
12.4 Ecuaciones diferenciales que caracterizan el fenómeno del golpe de ariete 815
12.4.1 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento 816
12.4.2 Ecuación de continuidad 818
12.4.3 Modificación de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para que puedan ser aplicadas a transitorios y conductos deformables 819
12.4.4 Simplificación de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en régimen transitorio 821

Problemas
93. Golpe de ariete I ..... …..823
94. Golpe de ariete II ..... ……829

Cap. 13 Flujo compresible

13.1 Relaciones termodinámicas 835

13.2 Concepto de propiedades de estancamiento 837
13.3 Estudio de la propagación de una onda débil en un fluido compresible. Concepto de velocidad del sonido y el número de Mach. Límite de incompresibilidad 838
13.4 Relación entre el número de Mach y las propiedades de estancamiento del fluido 842
13.5 El cono de Mach 843
13.6 Características de las ondas de choque planas 844
13.7 Estudio del flujo isentrópico y estacionario para un gas ideal 849
13.8 Condiciones críticas 851
13.9 Flujo unidimensional de un fluido comprensible evolucionando a lo largo de un conducto de sección variable 852
13.9.1 Concepto de caudal de bloqueo 856
13.9.2 Evolución del flujo en una tobera convergente 857
13.9.3 Evolución del flujo en una tobera convergente divergente 858
13.10 Flujo compresible unidimensional estacionario en conductos de sección constante 862
13.10.1 Flujo adiabático sin transferencia de calor y con fricción, flujo de Fanno 863
13.10.2 Flujo compresible isotérmico con fricción en una conducción larga de sección constante 870
13.10.2.1 Concepto de condición límite en flujo isotérmico con fricción 873
13.10.3 Flujo compresible estacionario con transferencia de calor y sin fricción. Flujo de Rayleigh 874
13.10.3.1 Ecuaciones gobernantes 875
13.10.3.2 Características del fluido para condiciones de máxima entalpía y máxima entropía 878
13.10.3.3 Intersección entre las líneas de Fanno y Rayleigh 879
13.10.3.4 Propiedades termodinámicas de flujo estacionario unidimensional con adición de calor 880
13.11 Introducción a las ondas de choque oblicuas 883
13.11.1 Ondas de choque oblicuas para gases ideales 886
13.11.2 Curva polar para las ondas de choque oblicuas 892
13.11.3 Flujo supersónico sobre superficies en forma de cuña plana y superficies cónicas 896
13.11.3.1 Características del flujo sobre una cuña 897
13.11.3.2 Características del flujo sobre una superficie cónica 898
13.11.3.2.1 Formulación matemática de las ondas de choque sobre superficies cónicas, de acuerdo con Taylor y Maccoll. 899
13.11.4 Reflexión de ondas de choque oblicuas bidimensionales sobre una superfície sólida 907

13.12 Ondas de expansión simples o bien ondas de expansión de Prandtl-Meyer ... 923
13.12.1 Ejemplos de aplicación 929

Problemas
95. Conducto con diferentes longitudes 934
96. Determinación del diámetro optimo 949
97. Descarga de un depósito 945
98. Flujo de vapor entre dos depósitos 953
Tablas de Flujo isentrópico 960
Tablas de Flujo de Fanno 970
99. Aplicación del método de Bergh-Tijdemann 975
100. Flujo de aire saliendo por conjunto conducto-tobera 982
101. Flujo compresible en conductos de sección constante I 988
102. Flujo compresible en conductos de sección constante II 993
103. Evaluación de diversos conductos que unen dos depósitos 999
104. Flujo a lo largo de conductos unidos mediante una tobera convergente 1011
105. Flujo a lo largo de conductos unidos mediante una tobera divergente 1020
106. Tobera supersónica convergente divergente 1036
107. Descarga de un depósito a través de una válvula 1043
108. Tobera supersónica y conducto con onda de choque 1052
109. Ondas de choque oblicuas 1057
110. Tobera supersónica aplicada a cohetes 1061
111. Aplicación de ondas de choque oblicuas y Prandtl-Meyer 1069

Nomenclatura 1081

Bibliografía 1087

→1

Introducción a la mecánica de fluidos. Propiedades de los fluidos

1.1 Introducción. Fluido desde el punto de vista molecular

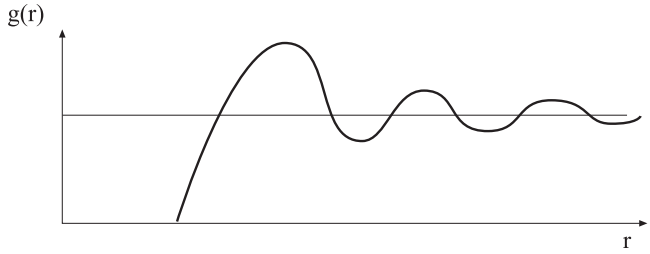
La Mecánica de Fluidos se puede definir como la parte de la física que se ocupa del estudio del equilibrio estático y dinámico de la materia en estado fluido. Desde el punto de vista molecular, se puede establecer que, en fase gaseosa, el fluido se caracteriza por tener unas fuerzas intermoleculares débiles. El entorno de una molécula es de rango largo para un sólido, de rango corto para un líquido, alrededor de 30 Å (3 nm), y no tiene rango para un gas.

Para la fase líquida, con el fin de estudiar el comportamiento del fluido a nivel molecular, se utiliza el concepto de función de distribución radial g (r), la cual se define como un cociente de densidades: densidad media del número de moléculas que hay en el interior de un volumen esférico de líquido de radio "r" a partir del centro de una de ellas $\rho(r)$, dividido por la densidad media del número de moléculas que hay en una masa de líquido donde se encuentran millones de moléculas $\rho(0)$. Obsérvese que la función de distribución radial puede ser superior, inferior o igual a la unidad.

$$g(r) = \frac{\rho(r)}{\rho(0)} \begin{cases} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{cases}$$

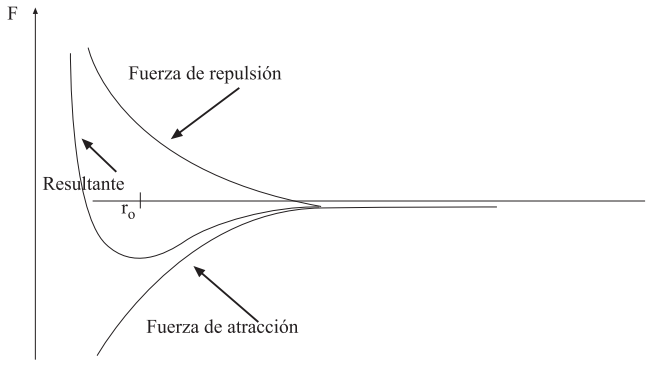
La representación de la función de distribución radial en función del radio de la esfera se esquematiza en la figura T 1.1. Véase que, para radios de la esfera pequeños, es decir, cuando hay pocas moléculas en el interior de la esfera, la función de distribución radial tiende a cero; a medida que el número de moléculas en el interior de la esfera de radio genérico aumenta, el valor de la función de distribución radial oscila alrededor del valor unidad.

Fig. T 1.1
Función de distribución radial



El comportamiento de estas variaciones de densidad a nivel molecular se explica gracias a las fuerzas de atracción y repulsión molecular. La figura T 1.2 representa dichas fuerzas en función de la distancia de alejamiento respecto el centro de una molécula. Véase que, a distancias muy pequeñas, las fuerzas de repulsión son mayores que las de atracción molecular y que, a partir de una distancia "r_0" aparece un cierto equilibrio de fuerzas, a partir de dicho punto, las fuerzas de atracción son ligeramente mayores que las de repulsión.

Fig. T 1.2
Fuerzas de atracción y repulsión a nivel molecular



La energía necesaria para desplazar un átomo a una distancia dr contra una fuerza F(r) se da como: $du = - F(r)\, dr$, el signo (-) es debido a que la fuerza aumenta al disminuir el radio. La energía requerida para traer un átomo desde el infinito a una distancia "r" se define como:

$$u = -\int_{\infty}^{r} F(r)dr$$

Esta ecuación se conoce como el potencial de Lennard-Jones.

1.2 Fluido desde el punto de vista termodinámico

Desde el punto de vista termodinámico, la materia se define en tres estados posibles: líquido, sólido y gaseoso. Así, cuando se habla de fluido, es necesario considerar el estado termodinámico del mismo. A priori, en un primer curso de Mecánica de Fluidos, se considera que el fluido objeto de estudio, no experimenta ningún cambio de fase.

A modo de recordatorio, se presenta en la figura T 1.3 el diagrama P-T para el agua, donde se observan los tres estados de la materia, así como los puntos triple y crítico.

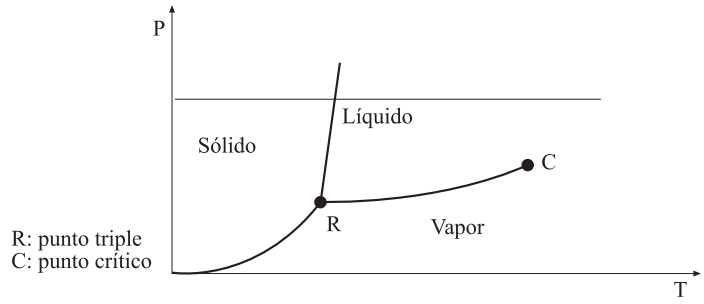


Fig. T 1.3. Diagrama presión temperatura para el agua

En el punto crítico, se definen los parámetros críticos Pc, Tc, Vc, hc, etc. En dicho punto, en un instante todo el líquido puede transformarse en vapor y viceversa, sin aportación ni cesión de calor alguna, (el calor de vaporización es igual a cero).

De manara homóloga, en el punto triple el calor de sublimación es también cero.

Las dos figuras siguientes T 1.4, T 1.5, muestran el diagrama P-V (presión-volumen) y T-S (temperatura-entropía) para el agua, donde de nuevo se observan claramente los tres estados de la materia, así como los puntos crítico y triple.

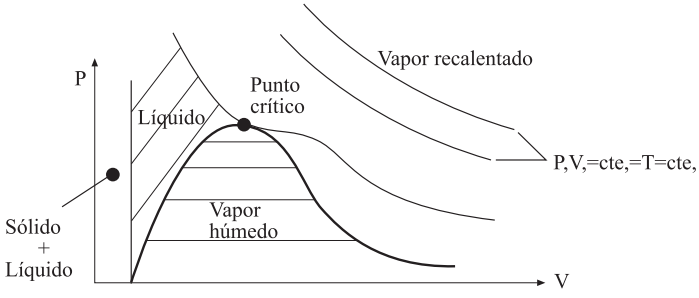


Fig. T 1.4 Diagrama presión volumen para el agua

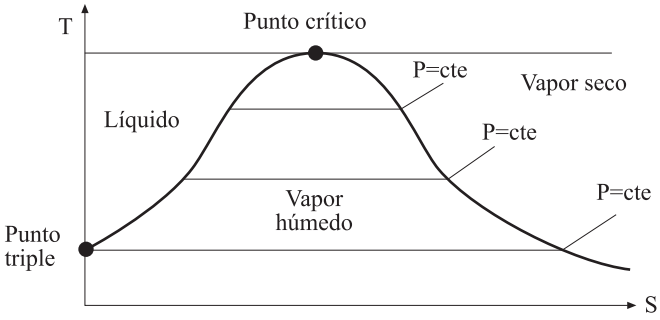


Fig. T 1.5 Diagrama temperatura entropía para el agua

Desde el punto de vista termodinámico, se concluye que no se puede hablar de un fluido, sino de un fluido bajo un estado termodinámico concreto, siendo las propiedades del fluido altamente dependientes del estado termodinámico en el que se encuentra.

1.3 Fluido desde el punto de vista mecánico

Una sustancia se encuentra en estado fluido si experimenta una deformación continua durante el tiempo en que está sometida a una tensión tangencial. Los líquidos y los gases no pueden soportar tensiones tangenciales sin que en su interior aparezca un gradiente de velocidad. Un sólido requiere la aplicación de una tensión finita antes de que se produzca alguna deformación.

Existe un número adimensional, denominado número de Deborah (De) que, desde el punto de vista mecánico y basado en mediciones experimentales, permite determinar si el cuerpo objeto de estudio es un fluido o bien un sólido. Su definición es:

$$D_e = \frac{\tau}{t_0}; \frac{\text{Tiempo de relajación}}{\text{Tiempo de observación}}; \frac{\text{Tiempo durante el que se aplica una tensión}}{\text{Tiempo que se toma para evaluar la velocidad de deformación}}$$

El número de Deborah es el cociente entre el tiempo transcurrido τ, durante el cual se aplica una tensión tangencial a un fluido, y el tiempo necesario para evaluar la velocidad de deformación de la sustancia sometida a tensión.

Si observamos un material dado durante un tiempo más largo que τ, puede parecer que fluye como un líquido viscoso, mientras que su comportamiento puede considerarse como el de un sólido rígido en escalas de tiempo menores.

Para:

De << la sustancia es un fluido
De >> la sustancia es un sólido

1.4 Aproximación del continuo

En teoría, sería posible describir el comportamiento de una sustancia en cualquier estado en términos de la dinámica de las moléculas que la componen. En la práctica, esto es imposible, debido al número elevadísimo de moléculas. Prácticamente siempre es posible ignorar la naturaleza molecular de la materia y suponer que es continua. Es decir, los fenómenos físicos y químicos que se estudiarán están a una escala (macroscópica), la estructura molecular de cualquier sustancia tiene una escala (microscópica) que puede ser ignorada, el fluido se considerará como un medio isótropo.

En consecuencia, las propiedades que definen una sustancia son las que representan las características medias de la estructura molecular. Estas propiedades se describen para funciones continuas de la posición y el tiempo.

En la mecánica de medios continuos, basta estudiar la densidad, la velocidad y la energía interna como funciones de la posición y el tiempo.

1.5 Equilibrio termodinámico local

A la hora de estudiar un fluido, se va a considerar que cada elemento diferencial de materia está en equilibrio mecánico y térmico con los elementos que le rodean.

La termodinámica muestra que puede especificarse el estado macroscópico de los fluidos en equilibrio mediante los valores de algunas variables de estado: presión, densidad, temperatura, energía interna, entropía, etc. Enseña también que, si el fluido es homogéneo en composición, basta con conocer los valores de dos variables cualesquiera para poder determinar, en función de ellas, todas las demás. Las ecuaciones de estado son las funciones que ligan dichas variables.

La mecánica de fluidos se caracteriza por la existencia de no uniformidades en las propiedades mecánicas y térmicas del fluido. Sin embargo (al menos para los gases), la teoría cinética muestra que, siempre que el camino libre medio sea pequeño frente a la longitud característica de las no uniformidades macroscópicas (y que el tiempo entre colisiones moleculares sea pequeño con respecto al tiempo necesario para que las variables macroscópicas experimenten cambios locales apreciables), existe equilibrio termodinámico local.

Esta hipótesis se justifica por el hecho de que un átomo o molécula sufre un gran número de colisiones con sus vecinos antes de alcanzar regiones donde las magnitudes macroscópicas cambien; de modo que gradualmente adapta su movimiento y energía a los que existen localmente, y va perdiendo memoria de su situación primitiva en las sucesivas colisiones.

El número de Knudsen mide la relación entre el camino libre medio λ molecular y la longitud característica macroscópica L de variación de las propiedades fluidas. $\mathrm{Kn} = \lambda / \mathrm{L}$. Siempre que $\mathrm{Kn} << 1$, se considera que existe equilibrio termodinámico local. Aunque, en realidad, es necesario que se cumpla, además, que el tiempo entre colisiones sea pequeño frente al tiempo necesario para que las variables microscópicas experimenten cambios locales apreciables.

1.6 Propiedades de los fluidos

Las propiedades características de los fluidos se desglosan en mecánicas y térmicas. Como propiedades mecánicas, cabe citar la densidad, la presión, el módulo de elasticidad volumétrica, la tensión superficial y la viscosidad del fluido.

Algunas de las propiedades térmicas son la temperatura, la energía interna, la entalpía, la entropía, los calores específicos a presión y volumen constante y el coeficiente de expansión térmica.

A continuación, se presentaran brevemente algunas de estas propiedades.

1.6.1 Módulo de elasticidad

El módulo de elasticidad β es la propiedad de los fluidos que indica su grado de compresibilidad al ser sometidos a una variación de presión. Se define como:

$$\beta = -\forall \frac{dP}{d\forall} = -\upsilon \frac{dP}{d\upsilon} = \rho \frac{dP}{d\rho}$$

El módulo de elasticidad es equivalente al módulo de Young en la mecánica de los sólidos.

Para un gas, se cumple que $P = P(\rho, T)$

Con lo que se puede definir: $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T d\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho dT$

Si el proceso es a temperatura constante, el módulo isotérmico de elasticidad será:

$$\beta_{v,t} = \rho\left(\frac{dP}{d\rho}\right) = \rho \frac{\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_T d\rho}{d\rho} = \rho\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T$$

Si el gas fuese ideal, se ha de cumplir que $P = \rho RT$

$\beta_{v,t} = \rho\left(\frac{\partial(\rho RT)}{\partial \rho}\right)_T = \rho RT = P$ El módulo isotérmico de un gas es igual a la presión de dicho gas.

En general, para cualquier fluido, de la ecuación genérica del módulo de elasticidad se tiene $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{\beta}$. Esta ecuación puede ser utilizada para definir matemáticamente el concepto de fluido incompresible. Así, si se acepta un cambio de densidad del 1 % como insignificante, se puede definir un fluido como incompresible si cumple:

$$\frac{dP}{\beta} < 0,01\ ;$$

Relacionando la variación de presión con la energía cinética asociada al fluido se establece:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho v^2$$

con lo que la consideración de un fluido como incompresible se puede dar como: $\frac{\rho v^2}{\beta} < 0,02$. Para aire en condiciones estándar, esta condición equivale a una velocidad de 40 m/s.

1.6.2 Coeficiente de expansión térmica

Una propiedad equivalente al módulo de elasticidad β, pero desde el punto de vista térmico, es el coeficiente de expansión térmica α_T. Dicho coeficiente mide el efecto de expansión del fluido al variar la temperatura del mismo. Se define como:

$$\alpha_T = \frac{1}{\forall}\frac{d\forall}{dT} = \frac{1}{\upsilon}\frac{d\upsilon}{dT} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$$

Para todo fluido, existe una relación entre su densidad, su presión y su temperatura $\rho = (P,T)$, con lo que la variación de densidad en función de estos dos parámetros se define:

$$d\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T dP$$

Para un proceso de expansión térmica a presión constante:

$$d\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P dT \qquad \text{de donde} \quad \frac{d\rho}{dT} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P$$

Sustituyendo en la expresión del coeficiente de expansión térmica, se tiene:

$\alpha_{T,P} = -\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P$, ecuación que caracteriza el coeficiente de expansión térmica para un proceso a presión constante.

Si se considera el caso de un gas ideal, se tiene:

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

con lo que, para un proceso a presión constante se tiene:

$$\alpha_{T,P} = -\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{P}{RT}\right)\right)_P = -\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{RT}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_P + P\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{RT}\right)\right)_P\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{P}{R}\left(-\frac{1}{T^2}\right) = \frac{1}{T}$$

Se concluye que, el coeficiente de expansión térmica de un gas ideal es igual a la inversa de la temperatura del mismo.

1.6.3 Colofón sobre módulo de elasticidad y coeficiente de expansión térmica

Considérese un volumen determinado de fluido ∀. Si se quiere estudiar la variación de dicho volumen, en función de las variaciones de presión y de temperatura, se puede establecer:

$$d\forall = \left(\frac{\partial \forall}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial \forall}{\partial P}\right)_T dP$$

$$\frac{d\forall}{\forall} = \frac{1}{\forall}\left(\frac{\partial \forall}{\partial T}\right)_p dT + \frac{1}{\forall}\left(\frac{\partial \forall}{\partial P}\right)_T dP$$

$$\frac{d\forall}{\forall} = \alpha_{T,P} dT - \frac{1}{\beta_{V,T}} dP$$

ecuación que caracteriza la variación del volumen de un fluido en función de la variación de presión y temperatura al que esta sometido, donde:

$\alpha_{T,P} = \frac{1}{\forall}\left(\frac{\partial \forall}{\partial T}\right)_p$ es el coeficiente de expansión térmica

$\beta_{V,T} = -\forall\left(\frac{\partial P}{\partial \forall}\right)_T$ es el módulo de elasticidad volumétrica

La variación del volumen con respecto al volumen inicial se puede expresar como:

$$\frac{d\forall}{\forall} = \frac{\forall - \forall_0}{\forall} = \frac{\frac{\forall}{m} - \frac{\forall_0}{m}}{\frac{\forall}{m}} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{\upsilon} = \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}}{\frac{1}{\rho}} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = -\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$$

Así, la ecuación que relaciona la variación de densidad del fluido, en función de la variación de presión y temperatura, se puede dar como:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{\beta_{V,T}}(P - P_0) - \alpha_{T,P}(T - T_0)$$

A modo de ejemplo, para el agua a unas condiciones termodinámicas de P = 10^5 Pa y T = 277 K, se tiene que $\beta_{V,T} = 1,96.10^9 \frac{N}{m^2}$; $\alpha_{T,P} = 1,53.10^{-4} K^{-1}$, siendo las condiciones iniciales $\rho_0 = 10^3 \frac{Kg}{m^3}$ y $T_0 = 0$ K.

1.6.4 Tensión superficial

La tensión superficial σ, $\sigma = \left[\frac{N}{m}\right]$, describe las fuerzas en la interfaz entre un gas y un líquido, o entre dos líquidos, o entre un gas y un sólido.

La tensión superficial juega un papel importante en problemas que implican la formación de burbujas en líquidos, la ruptura de chorros de líquidos en gotas y la determinación de las formas de masas de líquidos en condiciones ingrávidas.

Con el fin de mostrar el carácter débil de las fuerzas debidas a la tensión superficial, se va a realizar el experimento que se muestra en la figura T 1.6, consistente en un alambre en forma de U y otro alambre que se desliza a lo largo de las dos ramas del alambre anteriormente mencionado. La superficie formada por los dos alambres se cubre con una película de jabón cuyo espesor es de pocas moléculas.

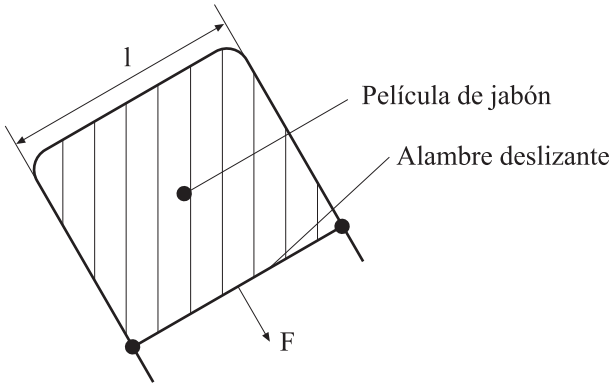


Fig. T 1.6
Experimento para estudiar la tensión superficial

Dicha película de jabón crea una fuerza sobre el alambre deslizante, la cual tiende a disminuir la sección de película existente. La fuerza necesaria para mantener el alambre deslizante en una posición estable ha de ser igual y de sentido contrario a la creada por la película de jabón y vale $F = 2\,\sigma\,l$. El 2 tiene en cuenta las dos superficies de jabón en contacto con el aire. Si el alambre se desplaza una distancia Δx, el trabajo requerido será: $W = F(\Delta x) = 2\,\sigma\,l\,(\Delta x) = 2\,\sigma\,\Delta S$, donde ΔS es el elemento diferencial de superficie barrido.

Sea una gota infinitesimal de fluido con una forma casi esférica y situada en el seno de otro fluido, sea el punto 0 de la superficie tangente al plano xy. Para esta superficie infinitesimal, se puede demostrar que la fuerza vertical dFz resultante de la tensión superficial a lo largo del borde de la superficie viene dada por:

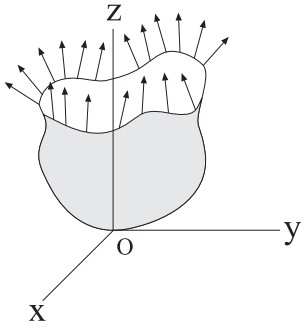


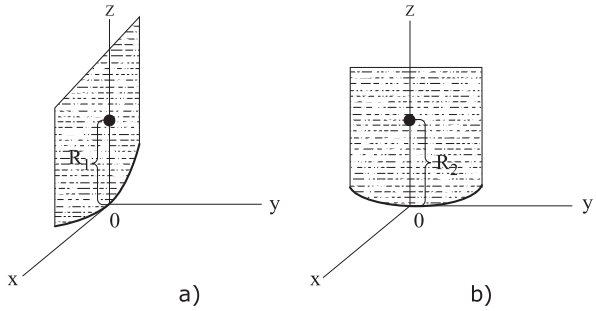
Fig. T 1.7
Esquema de una gota casi esférica

$$dF_z = \sigma\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_0\right] dA$$

donde W es la curvatura de la superficie con respecto a los ejes coordenados.

Las derivadas pueden remplazarse por $\frac{1}{R_1}$ y $\frac{1}{R_2}$, siendo estos los radios de curvatura en el centro de coordenadas y con respecto a los dos planos zx y zy que cortan a la gota casi esférica esquematizada, (ver figuras T 1.7 y T 1.8).

Fig. T 1.8 Radios de curvatura respecto a los dos planos coordenados



Dividiendo por dA, se obtiene el aumento de presión entre la parte interior y exterior de la gota de fluido.

$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Laplace-Young.

Para el caso de que la gota sea perfectamente esférica $R_1 = R_2$, la ecuación que caracteriza la diferencia de presión entre la parte interior y exterior de la misma, toma la forma $\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$.

1.6.5 Definición de viscosidad

Tal vez la propiedad más conocida y utilizada de los fluidos sea la viscosidad, entre otras cosas porque la ecuación reológica de los fluidos es función de la misma. La viscosidad fue definida inicialmente por Isaac Newton al relacionar los esfuerzos cortantes aplicados a una capa de fluido con la velocidad de deformación de dicho fluido.

Sea un elemento diferencial bidimensional de un sólido inicialmente en reposo y al cual se le aplican sendos esfuerzos cortantes en las caras superior e inferior del mismo. El sólido, al ser sometido a tensión, se deformará un ángulo $\delta\theta$, el cual no dependerá del tiempo durante el cual se aplique el esfuerzo cortante. Al dejar de aplicarse el esfuerzo (siempre y cuando no se haya sobrepasado el límite elástico), el elemento diferencial

volverá a su estado inicial. Si se realiza el mismo experimento sobre un elemento diferencial de fluido, se observa que, mientras le sea aplicada la tensión τ, el fluido seguirá deformándose, es decir, el ángulo δθ es para un fluido dependiente del tiempo.

Para un sólido:

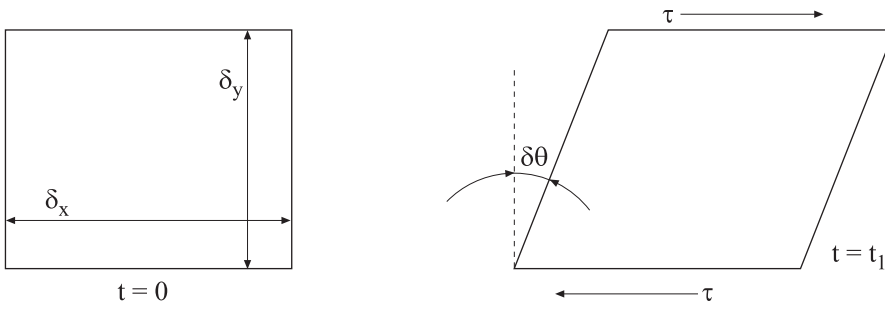
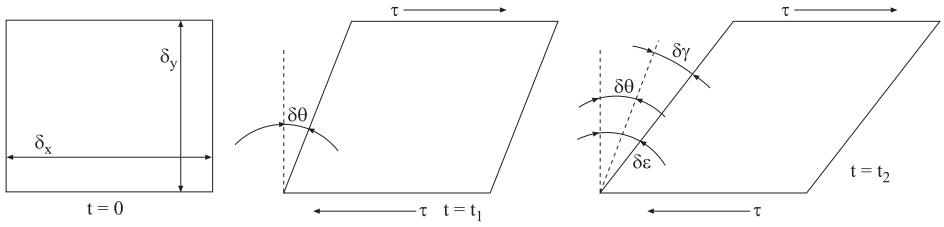
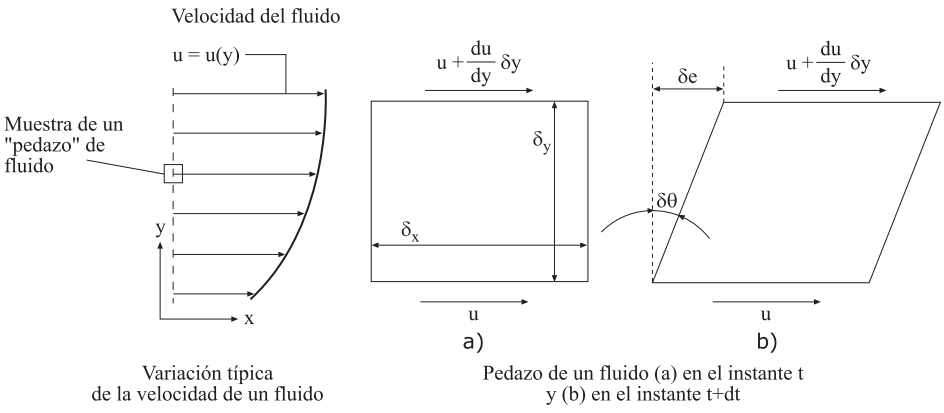


Fig. T 1.9
Deformación de elementos diferenciales de sólido y fluido

Para un líquido:



Supóngase ahora que, en el seno de un fluido en movimiento, se extrae una muestra diferencial, sobre la cual actúan, en lados paralelos, velocidades distintas, figura T 1.10.



Variación típica de la velocidad de un fluido

Pedazo de un fluido (a) en el instante t y (b) en el instante t+dt

Fig. T 1.10
Elemento diferencial de un fluido en movimiento

La diferencia de la velocidad entre la parte superior y la inferior del elemento diferencial es $\frac{du}{dy}\delta y$.

La distancia δe es la distancia de desplazamiento de la parte superior con respecto a la inferior, debido a la diferencia de velocidades entre estas dos caras.

$$\delta e = \frac{du}{dy}\delta y \delta t$$

Para un diferencial de tiempo pequeño, el ángulo girado $\delta\theta$ será también pequeño, de donde:

$$\delta\theta \approx \tan(\delta\theta) = \frac{\delta e}{\delta y} = \frac{du}{dy}\delta t$$

La velocidad de deformación angular debida al esfuerzo cortante, es la velocidad de cambio de $\delta\theta$; así:

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{du}{dy}$$

En realidad, si existe un gradiente de velocidades entre la parte superior y la inferior del elemento diferencial, es equivalente a decir que existe un esfuerzo cortante entre estas dos capas de fluido. Considerando que el esfuerzo cortante τ es proporcional a la velocidad de deformación angular, se obtiene $\tau \alpha \frac{\delta\theta}{\delta t}$, donde el parámetro α es la constante de proporcionalidad.

Dicha constante de proporcionalidad, es en realidad, un parámetro característico del fluido, que se denomina viscosidad absoluta o dinámica del fluido, obteniendo la relación:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Esta ecuación es la ley de Newton de la viscosidad, denominada también ecuación reológica de un fluido newtoniano, la cual puede expresarse como:

$$\tau = \mu.\dot{\gamma}^n \text{ ; siendo } \dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

El exponente n puede tomar los valores siguientes:

Para $n = 1$ fluido newtoniano

Para $n < 1$ o bien > 1 el fluido es no newtoniano

Se denominan fluidos newtonianos, los que tienen una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. La grafica siguiente muestra diferentes tipos de fluidos convencionales.

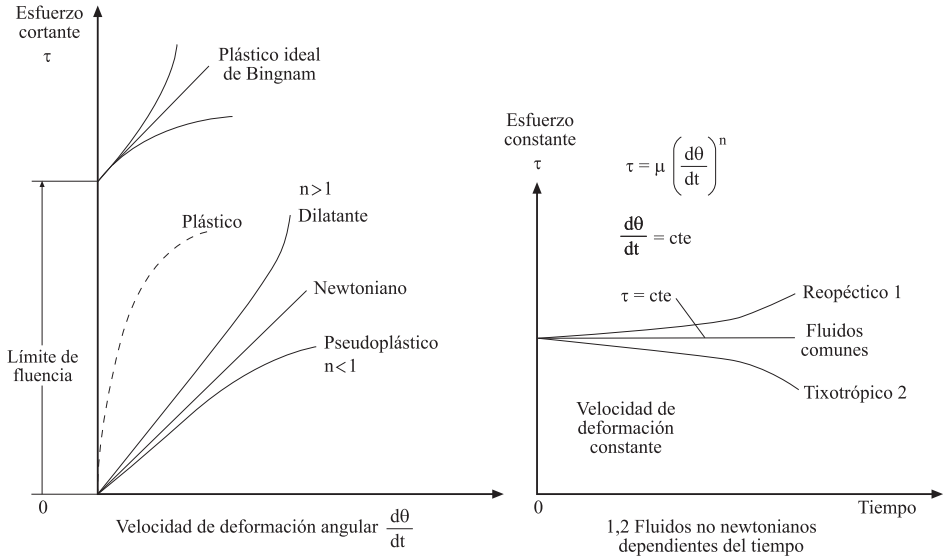


Fig. T 1.11
Ecuaciones reológicas de fluidos convencionales

Un fluido dilatante aumenta la resistencia a la deformación al aumentar el esfuerzo cortante.

Un fluido pseudoplástico disminuye su resistencia al aumentar el esfuerzo. Si este efecto es muy importante (línea a trazos), el fluido se denomina plástico.

Todo fluido que necesite un esfuerzo cortante mínimo para empezar a fluir se denomina plástico de Bingham y puede ser lineal o no; su ecuación genérica sería:

$$\tau = \tau_0 + \mu.\dot{\gamma}^n \qquad 1 \leq n \geq 1$$

Los fluidos que necesitan un aumento gradual en el esfuerzo cortante para mantener constante la velocidad de deformación se denominan reopécticos. Los que necesitan esfuerzos decrecientes para mantener constante la velocidad de deformación reciben el nombre de tixotrópicos.

Problema 1

Enunciado

Entre los extremos de un tubo de 0,006 m de diámetro y 1 m de longitud, se aplica una diferencia de presión relativa de 50.000 Pa. Si el caudal que fluye es de $Q = 3,5\times10^{-6}\ m^3/s$, halle la viscosidad del fluido circulante (considerando régimen laminar). Compruebe la veracidad de esta hipótesis.

Resolución

La velocidad media de paso del fluido por el conducto será:

$$\vec{U} = \frac{Q}{S} = \frac{3,5\times10^{-6}}{\frac{\pi\ 0,006^2}{4}} = 0,1237\frac{m}{s}$$

Dado que no se puede determinar el número de Reynolds, se considerará que el régimen de flujo es laminar; al final de proceso se comprobará esta hipótesis.

- Considerando que el fluido fluye según la ley de Poiseulle, y sabiendo que la distribución de velocidades en dirección radial según Poiseulle es:

$$\vec{U} = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{\mu}\frac{1}{4}\left(r^2 - R^2\right) = Umáx\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

donde $$Umáx = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}R^2$$

La relación velocidad máxima-velocidad media $\vec{U} = \frac{Umax}{2}$

donde $$\vec{U} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{R^2}{8\mu}$$

La diferencia de presión entre extremos del conducto ha de ser contrarrestada por los esfuerzos cortantes en la pared del mismo, así:

$$Fp = \frac{\pi D^2}{4}\Delta P^*_{total} = \frac{\pi\times0,006^2}{4}50.000 = 1,4137\ N$$

El esfuerzo cortante se define como:

$$\tau = \mu\frac{\partial U}{\partial r} = \mu\frac{\partial}{\partial r}U_{máx}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$\tau = -\mu\, U_{máx}\, \frac{2\,r}{R^2}$$

El esfuerzo cortante de la pared valdrá:

$$r = R$$

$$\tau = -\mu\, U_{máx}\, \frac{2}{R}$$

como $\vec{U} = \frac{U_{máx}}{2}$

$$\tau = -\mu\, 4\, \frac{\vec{U}}{R}$$

El esfuerzo debido a los esfuerzos cortantes a lo largo de todo el tubo será:

$$F_T = \tau\, S = \tau\, 2\,\pi\, R\, L = -\mu\, 4\, \frac{\vec{U}}{R}\, 2\,\pi\, R\, L$$

como $-F_T = Fp$

$$1,4137 = 8\,\pi\,\vec{U}\,\mu\, L = 8\,\pi\, 0,1237\,\mu$$

$$\mu = 0,4547\, \frac{N \times S}{m^2}$$

Para que el flujo sea laminar se debe cumplir:

$$Re = \frac{\vec{U}D}{\nu} = \frac{0,1237 \times 0,006}{\frac{0,4547}{\rho}} < 2.400$$

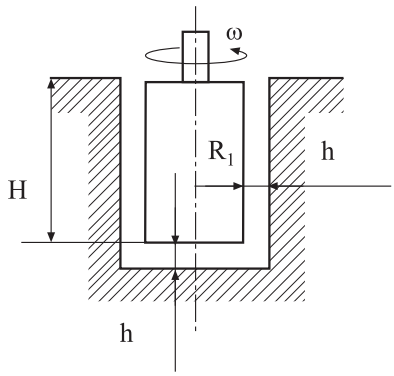
Para cumplir la igualdad, se tiene que ρ debería valer $\rho = 1.470.331 Kg/m^3$; como esto es imposible, se concluye que la hipótesis es acertada. En concreto, para una densidad de $800 Kg/m^3$, se obtiene Re = 1,3.

Problema 2

Enunciado

Halle la potencia necesaria para mantener una velocidad angular constante de 10 rad/s en el viscosímetro cilíndrico de la figura. (Considérense los esfuerzos cortantes, en la superficie lateral y en la base.)

Fig. 2.1



Datos:

H = 10 cm

R_1 = 3 cm

h = 0,1 cm

$\mu = 7 \cdot 10^{-3}$ N·s/m^2

Resolución

En la cara lateral se tiene:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_1 - 0}{h} = \frac{R_1 \omega}{h}$$

Los valores de la fuerza y el par laterales, F_L y M_L, se obtienen:

$$F_L = \tau \cdot dS = \mu \cdot \frac{R_1 \omega}{h} \cdot 2\pi \cdot R_1 \cdot H = \mu \frac{\omega}{h} 2\pi H \cdot R_1^2$$

$$M_L = F \cdot R_1 = \mu \frac{R_1 \omega}{h} \cdot 2\pi \cdot R_1 \cdot H R_1 = \mu \frac{\omega}{h} 2\pi H \cdot R_1^3$$

El valor de la potencia necesaria para vencer los esfuerzos cortantes laterales será:

$$N_L = M \cdot \omega = \mu \frac{\omega^2}{h} \cdot 2\pi H \cdot R_1^3$$

En la base del cilindro, se tiene:

$$\frac{du}{dy} = \frac{V_i}{h} = \frac{r_i \omega}{h}$$

Los valores de la fuerza y el par en la base, F_B y M_B, serán:

$$F_B = \int_S \tau dS = \int_0^R \mu \frac{r_i \omega}{h} 2\pi r_i \, dr_i = \mu \frac{2\pi}{h} \omega \left[\frac{r_i^3}{3} \right]_0^R$$

$$F_B = \mu 2\pi \frac{\omega}{h} \frac{R^3}{3}$$

$$M_B = \int dF_B \cdot R_i = \mu \frac{\omega\, 2\,\pi}{h} r_i^3 \cdot dr_i = \mu \cdot \frac{\omega\, 2\pi}{h} \cdot \left[\frac{R_i^4}{4} \right]_0^R$$

$$M_B = \mu \frac{\omega\, 2\pi}{h} \frac{R^4}{4}$$

La potencia debida a los esfuerzos cortantes en la base, N_B, será:

$$N_B = M \cdot \omega = \mu \frac{\omega^2 2\pi}{h} \frac{R^4}{4}$$

con lo que la potencia total necesaria para hacer girar el cilindro será:

$$N_T = N_L + N_B = \mu \frac{\omega^2 2\pi}{h} \left[H\, R_1^3 + \frac{R_1^4}{4} \right] = 7 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^2}{0,001} \cdot 2\pi \left(0,1 \cdot 0,03^3 + \frac{0,03^4}{4} \right)$$

$$N_T = 0,0127 \text{ [W]}$$

Problema 3

Enunciado

Halle la expresión del par necesario para mover la esfera de la figura adjunta.

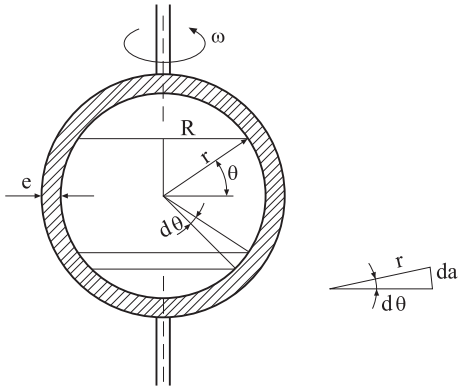


Fig. 3.1

Resolución

Las tensiones cortantes existentes se pueden definir como:

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n} = \mu \frac{\omega R}{e} = \frac{\mu \omega r \cos\theta}{e} \ ;$$

Estudiando la esfera, se observa que la fuerza que se opone al movimiento se da como:

$$dF = \tau \, dS = \frac{\mu \omega r \cos\theta}{e} \ 2\pi R \, da = \frac{\mu \omega r \cos\theta}{e} \quad 2\pi r \cos\theta \ \ r \, d\theta =$$

$$= \frac{\mu \omega r^3}{e} 2\pi \cos^2\theta \, d\theta$$

Así mismo, el momento resistente resultante valdrá:

$$dM = dF \, R_i = dF \, r \cos\theta$$

$$dM = \frac{\mu \omega r^3}{e} 2\pi \cos^2\theta \, d\theta \, r \cos\theta$$

$$M = \int_{-90^o}^{90^o} \frac{\mu \omega r^4}{e} 2\pi \cos^3\theta \, d\theta$$

con lo cual, la potencia necesaria para hacer girar la esfera sería:

$$N = M \, \omega = \mu \, \omega^2 \frac{r^4}{e} 2\pi \int_{-90^o}^{90^o} \cos^3\theta \, d\theta$$

y quedaría:

$$N = M \, \omega = \mu \, \omega^2 \frac{r^4}{e} 2\pi \left[\left[\frac{1}{3} \cos^2 \theta \sin\theta \right]_{-90}^{90} + \left[\frac{2}{3} \int_{-90^o}^{90^o} \cos\theta \, d\theta \right] \right]$$

$$N = \mu \, \omega^2 \frac{r^4}{e} 2\pi \left[\left[\frac{1}{3} \cos^2 \theta \sin\theta \right]_{-90}^{90} + \left[\frac{2}{3} \sin\theta \right]_{-90}^{90} \right]$$

$$N = \mu \, \omega^2 \frac{r^4}{e} \frac{8}{3} \pi$$

Problema 4

Enunciado

Se hace rotar un cuerpo cónico con una velocidad constante de 10 rad/s; la base del cono tiene un diámetro de 5 cm, y el espesor de la película de aceite es de 0,1 mm. Si la

viscosidad del aceite es de $7 \cdot 10^{-3}$ [N·S/m^2], halle el par necesario para mantener el movimiento.

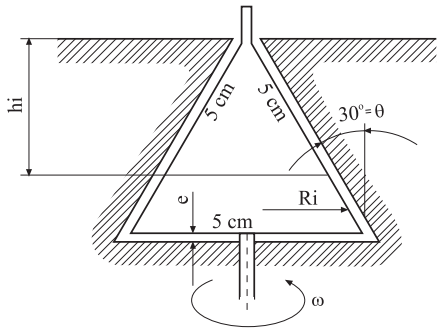


Fig. 4.1
Esquema del cuerpo cónico

Resolución

Se divide la superficie del cono en dos partes: por un lado, la superficie lateral y, por otro lado, la base.

En la superficie lateral, el esfuerzo cortante en un punto genérico vale:

$$\tau_i = \mu \frac{dv_i}{dn} = \mu \frac{R_i \omega}{e} = \mu \frac{h_i \, tg\theta \omega}{e};$$

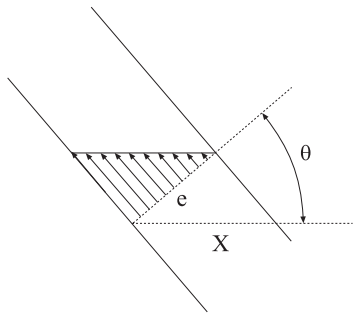


Fig. 4.2

En la base:

$$\tau_i = \mu \frac{dv_i}{dn} = \mu \frac{R_i \omega}{e};$$

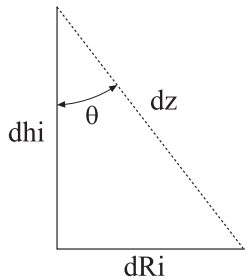


Fig. 4.3

La fuerza que se opone al movimiento en la superficie lateral:

$$dF = \tau\, dS = \tau\, 2\,\pi R_i dZ \qquad \cos\theta = \frac{dh}{dz};$$

$$dF = \tau 2\pi R_i \frac{dh}{\cos\theta} = \tau\, 2\pi\, h_i\ tg\theta \frac{dh}{\cos\theta}$$

$$dF = \mu\, h_i^2 tg^2\theta \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{dh}{\cos\theta}$$

$$F = \int_0^h \mu \frac{\omega}{e} \frac{tg^2\theta}{\cos\theta} 2\pi h_i^2\ dh = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{tg^2\theta}{\cos\theta} \frac{h_i^3}{3}$$

La fuerza en la base será:

$$dF = \tau dS = \tau 2\pi R_i dR$$

$$dF = \mu \frac{\omega}{e} R_i^2\ 2\pi dR$$

$$F = \int_0^R \mu \frac{\omega}{e} 2\pi\ R_i^2\ dR = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{R^3}{3}$$

El par necesario en la superficie lateral:

$$M = F \times R_i$$
$$dM = dF \times R_i$$

$$dM = \mu \frac{tg^2\theta}{\cos\theta} \frac{\omega}{e} 2\pi h_i^2\ dh R_i \qquad R_i = h_i tg\theta$$

$$M_L = \int_0^h \mu \frac{tg^3\theta}{\cos\theta} \frac{\omega}{e} 2\pi\ h_i^3 dh = \mu \frac{tg^3\theta}{\cos\theta} \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{h^4}{4}$$

El par en la base:

$$dM = dF\ R_i = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi\ R_i^2 dR\ R_i$$

$$M_b = \int_0^R \mu \frac{\omega}{e}\ 2\pi\ R_i^3 dR = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{R^4}{4}$$

El par total necesario para mantener el movimiento será:

$$M_T = M_L + M_b$$

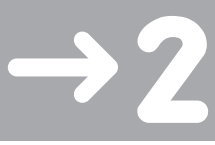
$$M_T = \mu \frac{tg^3\theta}{\cos\theta} \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{h^4}{4} + \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{R^4}{4} = \mu \frac{\omega}{e} \frac{2\pi}{4} \left[\frac{tg^3\theta}{\cos\theta} h^4 + R^4 \right]$$

Sustituyendo el radio por su equivalente:

$$M_T = \mu \frac{\omega}{e} \frac{\pi}{2} h^4 tg^3\theta \left[\frac{1}{\cos\theta} + tg\theta \right]$$

La potencia necesaria para mantener el sistema en movimiento será:

$$N = M_T \ \omega = \mu \frac{\omega^2}{e} \frac{\pi}{2} h^4 tg^3\theta \left[\frac{1}{\cos\theta} + tg\theta \right]$$



Cinemática de fluidos

2.1 Concepto de derivada sustancial, material o total

Sea ϕ una propiedad intensiva cualquiera (densidad, temperatura, etc.). Si se sigue a una partícula de fluido en su movimiento, la magnitud ϕ asociada a la partícula fluida varia no solo porque el tiempo t cambia, sino también porque la posición $\vec{x}$ de la partícula es asimismo modificada. Si se calcula su variación con el tiempo respecto a un observador que se mueva con el fluido, se obtiene la denominada *derivada sustancial*. Desarrollando en serie la variación de la propiedad genérica, se tiene:

$$\delta\phi = \phi(\vec{x} + \delta\vec{x};\, t + \delta t) - \phi(\vec{x};\, t) \approx \delta\vec{x}\,\nabla\phi. + \frac{\partial\phi}{\partial t}\delta t + ...$$

Dividiendo por el diferencial de tiempo y despreciando los términos asociados a las derivadas de orden superior, se tiene:

$$\frac{\delta\phi}{\delta t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\delta\vec{x}}{\delta t}\nabla\phi$$

en el límite, se establece:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{v}\,\nabla\phi$$

siendo $\frac{D\phi}{Dt}$ la derivada sustancial de la propiedad ϕ asociada a la partícula de fluido.

El término $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ recibe el nombre de *derivada local*, y el término $\vec{v}\,\nabla\phi$ es la *derivada convectiva*.

En Mecánica de Fluidos, la aceleración que experimenta una partícula se define como la derivada material de la velocidad de la partícula, y se define:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\nabla\right)\vec{v}$$

Que es la suma de una aceleración local y una convectiva.

En coordenadas cartesianas y notación de subíndices, se puede representar como.

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Para extender su validez a otros sistemas coordenados rectangulares, se ha de sustituir el término $(\vec{v}.\nabla)\vec{v}$ por su equivalente $\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v})$.

Si el sistema de referencia no es inicial, para obtener la aceleración absoluta se ha de añadir, a la aceleración relativa, la aceleración debida al movimiento del sistema de referencia:

$$-\vec{a}_r = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

1. Aceleración de arrastre
2. Aceleración tangencial
3. Aceleración centrípeta
4. Aceleración de Coriolis

$\vec{a}_0 =$ Aceleración lineal con que se mueve el origen del sistema de coordenadas móvil con respecto al fijo.

$\Omega =$ Velocidad angular con que gira el sistema de coordenadas móvil.

2.2 Concepto de flujo convectivo a través de una superficie

Considérese una superficie fija a un sistema de referencia y un pequeño elemento de superficie sobre ella de área ds. Las partículas fluidas capaces de alcanzar la superficie ds en un tiempo dt son aquellas que se encuentran a una distancia igual o inferior a $\vec{v}\ dt$. De entre todas ellas, solo alcanzan ds las que tengan la orientación apropiada $\vec{v}\,d\vec{s}\ dt$. La cantidad de "magnitud" ϕ que atraviesa con el fluido dicha superficie en la unidad de tiempo será $\phi\vec{v}\,\vec{n}\,ds$.

El flujo total a través de toda la superficie fija será $\int_{sup} \phi\vec{v}\,\vec{n}\,ds$, de donde $\phi\vec{v}\,\vec{n}$ es el flujo que atraviesa la unidad de superficie de orientación $\vec{n}$.

- Si ϕ es un escalar, $\phi\vec{v}$ es un vector denominado vector flujo de la propiedad ϕ (si ϕ es, por ejemplo, la densidad ρ, la cantidad $\rho\vec{v}$ es el vector flujo másico).
- Si ϕ es un vector, $\phi\vec{v}$ es un tensor denominado tensor flujo de la magnitud ϕ (si ϕ es la cantidad de movimiento $\rho\vec{v}$, la cantidad $\rho\vec{v}\vec{v}$ será el flujo de cantidad de movimiento).

Si la superficie es cerrada y el término $\phi\vec{v}$ es una función continua tanto en el interior como en la superficie (no existen fuentes, ni sumideros), el teorema de Gauss-Ostrogradsky permite escribir el flujo como una integral de volumen.

$\oint_S \phi\vec{v}\vec{n}\,ds = \int_\forall \nabla.(\phi\vec{v})\,d\forall$, donde $\nabla(\phi\vec{v})$ es el flujo de la magnitud ϕ por unidad de volumen.

El concepto de flujo volumétrico sería $Q = \oint_S \vec{v}\,d\vec{s} = \int_\forall \nabla\vec{v}\,d\forall = \int_\forall div\,\vec{v}\,d\forall$

Siendo el flujo másico, $\dot{m} = \oint_S \rho\vec{v}\,d\vec{s} = \int_\forall \nabla(\rho\vec{v})\,d\forall$

2.3 Concepto de Circulación

La circulación a lo largo de una línea de corriente L se define como el valor de la integral $\Gamma = \oint_L \vec{v}\,dl$, que equivale al trabajo desarrollado por el vector velocidad $\vec{v}$ a lo largo de la línea L. Si la línea L es cerrada, el teorema de Stokes afirma que la circulación es igual al flujo del vector vorticidad $\nabla\wedge\vec{v}$ a través de la superficie delimitada por la línea L.

$$\Gamma = \oint_L \vec{v}\,d\vec{l} = \int_S (\nabla\wedge\vec{v})\,d\vec{s} = \int_S rot\,\vec{v}\,d\vec{s}$$

Si la circulación a lo largo de cualquier línea cerrada es nula, el vector vorticidad $\nabla\wedge\vec{v}$ es cero en todo el campo fluido, $\Gamma = 0 \Rightarrow \nabla\wedge\vec{v} = 0$; estos movimientos se denominan *irrotacionales o potenciales*, puesto que $\nabla\wedge\vec{v} = 0$, lo cual implica que la velocidad deriva de un potencial $\vec{v} = \nabla\vartheta$.

El recíproco, en general, no es cierto, aunque $\nabla\wedge\vec{v} = 0$ en todo el campo fluido, puede que existan líneas cerradas en las que $\Gamma \neq 0$. Este sería el caso correspondiente a un campo fluido que no fuese simplemente conexo.

2.4 Líneas de corriente, trayectoria y traza

Dado un campo vectorial de velocidades que caracteriza un fluido en movimiento, se puede definir la evolución espacial de las partículas de fluido sabiendo que en el instante inicial se encuentran en una posición dada. Para ello, se utilizaran los conceptos de líneas de corriente, trayectorias o sendas, y líneas de traza.

La *línea de senda* o *trayectoria* se define como el camino seguido realmente por una partícula fluida, conocida la posición de la partícula para un tiempo inicial.

La *línea de traza* seria el lugar geométrico de las partículas que en instantes sucesivos pasaron por un punto dado. Sería la obtenida si se inyectase colorante en un punto dado del fluido.

La *línea de corriente*, es aquella que en un instante dado es tangente a los vectores velocidad en todo punto. La línea de corriente tiene un profundo sustrato matemático, mientras que las otras dos son más esencialmente experimentales. No obstante, estas tres líneas están caracterizadas por sendas ecuaciones diferenciales y, como se verá seguidamente, cada una de las ecuaciones diferenciales puede ser definida para los diferentes sistemas de coordenadas existentes.

Se define como línea fluida, al conjunto de partículas fluidas que en un instante dado forman una línea. La línea fluida no dispone de ecuación diferencial característica.

La línea de corriente y la fluida están definidas para un instante dado, mientras que la senda y la línea de traza se forman con el transcurso del tiempo.

Si el campo vectorial de velocidades, que define el fluido en movimiento, caracteriza un fluido en régimen permanente, entonces las líneas de corriente trayectoria y traza, coinciden.

Las ecuaciones diferenciales que caracterizan cada una de estas tres líneas principales son:

2.4.1 Líneas de Senda o Trayectoria

Las Sendas o trayectorias, vienen dadas en función del campo de velocidades mediante el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$$

Donde se cumple que, para $t = 0$; $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, es decir, para el tiempo inicial se conoce la posición de la partícula.

Desglosando la ecuación anterior para los diversos sistemas coordenados, se obtiene la ecuación diferencial de la trayectoria, donde para un sistema de referencia cartesiano.

$$\vec{x} = (x, y, z); \quad \vec{v} = (v_X, v_Y, v_Z)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_X(\vec{x}, t); \quad \frac{dy}{dt} = v_Y(\vec{x}, t); \quad \frac{dz}{dt} = v_Z(\vec{x}, t)$$

En coordenadas cilíndricas se obtiene:

$$\vec{x} = (r, \theta, z); \quad \vec{v} = (v_r, v_\theta, v_Z)$$

$$\frac{dr}{dt} = v_r(\vec{x}, t); \quad r\frac{d\theta}{dt} = v_\theta(\vec{x}, t); \quad \frac{dz}{dt} = v_Z(\vec{x}, t)$$

En coordenadas esféricas:

$$\vec{x} = (r, \theta, \phi); \quad \vec{v} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$$

$$\frac{dr}{dt} = v_r(\vec{x}, t); \quad r\,\mathrm{sen}\phi\,\frac{d\theta}{dt} = v_\theta(\vec{x}, t); \quad r\frac{d\phi}{dt} = v_\phi(\vec{x}, t)$$

Las condiciones de contorno para la resolución de las ecuaciones diferenciales se resumen en que en el estado inicial la posición de la partícula es conocida:

Coordenadas cartesianas: $t = 0; x = x_0; y = y_0; z = z_0$

Coordenadas cilíndricas: $t = 0; r = r_0; \theta = \theta_0; z = z_0$

Coordenadas esféricas: $t = 0; r = r_0; \theta = \theta_0; \phi = \phi_0$

Estas expresiones representan en forma paramétrica, la senda o curva descrita por una partícula en su movimiento alrededor de su posición inicial.

2.4.2 Líneas de Traza

Mediante las líneas de traza, se estudia el colectivo de partículas que pasan por un punto dado en tiempos sucesivos, $\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t_0, t)$. Las ecuaciones diferenciales definitorias de las líneas de traza son las mismas que las que caracterizan las sendas o trayectorias; la diferencia reside en las condiciones de contorno, que ahora, para los diferentes sistemas coordenados, tomaran la forma:

Coordenadas cartesianas: $t = \varepsilon; x = x_0; y = y_0; z = z_0$

Coordenadas cilíndricas: $t = \varepsilon; r = r_0; \theta = \theta_0; z = z_0$

Coordenadas esféricas: $t = \varepsilon; r = r_0; \theta = \theta_0; \phi = \phi_0$

Obsérvese que las condiciones de contorno utilizadas para el cálculo de las líneas de traza indican que es necesario calcular la ecuación de todas las trayectorias que pasan por el punto de referencia (x_0, y_0, z_0) en diferentes instantes $t_0=\varepsilon$ y eliminar t_0 de las ecuaciones resultantes.

2.4.3 Líneas de Corriente

Para la determinación de las líneas de corriente, se estudia el colectivo de partículas que en un instante dado son tangentes en cada punto al vector velocidad. Para determinar la ecuación diferencial de las líneas de corriente en coordenadas cartesianas, se utiliza la siguiente relación geométrica, ver figura T 2.1.

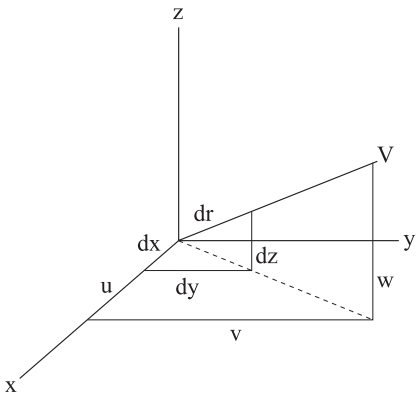


Fig. T 2.1 Relación geométrica utilizada para la determinación de la ecuación diferencial de las líneas de corriente

El sistema de ecuaciones que las definen se obtienen estableciendo la proporcionalidad entre el vector tangente y el vector velocidad. Para los diversos sistemas coordenados, se tiene:

Coordenadas cartesianas:

$$\vec{x} = (x, y, z); \quad \vec{v} = (v_X, v_Y, v_Z)$$

$$\frac{dx}{v_X(\vec{x}, t)} = \frac{dy}{v_Y(\vec{x}, t)} = \frac{dz}{v_Z(\vec{x}, t)}$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{x} = (r, \theta, z); \quad \vec{v} = (v_r, v_\theta, v_Z)$$

$$\frac{dr}{v_r(\vec{x}, t)} = \frac{r\, d\theta}{v_\theta(\vec{x}, t)} = \frac{dz}{v_Z(\vec{x}, t)}$$

Coordenadas esféricas:

$$\vec{x} = (r, \theta, \phi); \quad \vec{v} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$$

$$\frac{dr}{v_r(\vec{x}, t)} = \frac{r \operatorname{sen}\phi\, d\theta}{v_\theta(\vec{x}, t)} = \frac{r\, d\phi}{v_\phi(\vec{x}, t)}$$

Las condiciones de contorno necesarias para la resolución de las ecuaciones diferenciales son las mismas que las utilizadas para determinar las trayectorias, es decir:

Coordenadas cartesianas: $t = 0;\ x = x_0;\ y = y_0;\ z = z_0$

Coordenadas cilíndricas: $t = 0;\ r = r_0;\ \theta = \theta_0;\ z = z_0$

Coordenadas esféricas: $t = 0;\ r = r_0;\ \theta = \theta_0;\ \phi = \phi_0$

Con el fin de facilitar la integración en algunos casos complejos, es conveniente utilizar las ecuaciones diferenciales de las líneas de corriente en forma paramétrica. Sea S el parámetro elegido. Recuérdese que la ecuación resultante no puede depender del parámetro S, con lo que ha de ser extraído.

En coordenadas cartesianas, la ecuación de las líneas de corriente en forma paramétrica se establece:

$$\frac{dx}{dS} = v_X(\vec{x}, t);\ \frac{dy}{dS} = v_Y(\vec{x}, t);\ \frac{dz}{dS} = v_Z(\vec{x}, t)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\frac{dr}{dS} = v_r(\vec{x}, t);\ \frac{r\,d\theta}{dS} = v_\theta(\vec{x}, t);\ \frac{dz}{dS} = v_Z(\vec{x}, t)$$

En coordenadas esféricas:

$$\frac{dr}{dS} = v_r(\vec{x}, t);\ \frac{r\,\mathrm{sen}\phi\,d\theta}{dS} = v_\theta(\vec{x}, t);\ \frac{r\,d\phi}{dS} = v_\phi(\vec{x}, t)$$

Las condiciones de contorno para la resolución de este segundo grupo de ecuaciones diferenciales para las líneas de corriente son:

$$t = 0;\ x = x_0;\ y = y_0;\ z = z_0;\ S = 0$$

$$t = 0;\ r = r_0;\ \theta = \theta_0;\ z = z_0;\ S = 0$$

$$t = 0;\ r = r_0;\ \theta = \theta_0;\ \phi = \phi_0;\ S = 0$$

En movimientos estacionarios, las líneas de corriente coinciden con las sendas y las trazas.

Si se toma una línea en el espacio, las líneas de corriente que se apoyan en ella forman una *superficie de corriente*; si la línea de partículas es cerrada la superficie de corriente se denomina *tubo de corriente*.

2.4.4 Concepto de línea fluida

Si una serie de partículas forman inicialmente una línea, este conjunto de partículas seguirá formando, por continuidad, una línea que se denomina *línea fluida*. Si la línea primitiva es cerrada, se mantiene posteriormente cerrada.

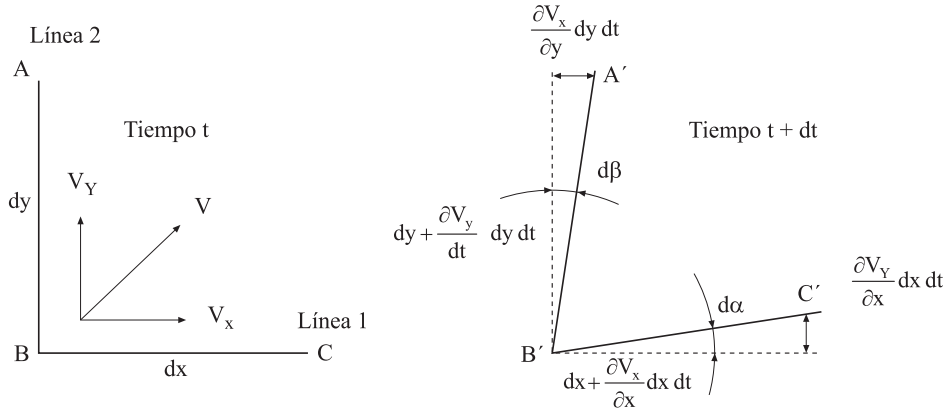
Si se denomina $\vec{x}_0 = \vec{x}_0(\lambda)$ a la ecuación paramétrica de una línea fluida en el instante inicial, la ecuación de dicha línea en el instante t será $\vec{x} = \vec{x}_T(\vec{x}_0(\lambda), t)$.

2.5 Concepto de vorticidad e irrotacionalidad

Un flujo se denomina *irrotacional,* cuando la velocidad angular con respecto a todo eje coordenado es nula. La figura siguiente muestra dos líneas fluidas de longitudes infinitesimales, las cuales, para un tiempo dado t, forman un ángulo de 90 grados; al cabo de un diferencial de tiempo, se observa que las dos líneas fluidas, han girado un

diferencial de ángulo con respecto a su posición inicial, con lo que se pueden obtener las relaciones diferenciales que se muestran en la figura T 2.2 para la deformación de un elemento de fluido.

Fig. T 2.2 Evolución de dos líneas fluidas a lo largo del tiempo



Partiendo de las relaciones establecidas en la figura, se quiere estudiar la velocidad angular y la velocidad de deformación de dos líneas fluidas que se deforman en el plano XY. Se observa que las dos líneas fluidas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ perpendiculares en el instante t se mueven y deforman de modo que, en el instante $t + dt$, tienen diferentes longitudes $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ y el ángulo que forman difiere de 90º en los ángulos $d\alpha$ y $d\beta$; esta deformación aparece de un modo cinemático, puesto que los puntos A, B, C tienen velocidades diferentes cuando el campo de velocidades $\vec{V}$ no es espacialmente uniforme.

Se define la velocidad angular ω_z alrededor del eje z perpendicular al plano del papel como el valor medio del giro, en la unidad de tiempo, de las dos líneas fluidas; el sentido contrario a las agujas del reloj se tomará como positivo.

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\right)$$

Como $d\alpha$ y $d\beta$ están directamente relacionados (para "dt" pequeños) con las derivadas de la velocidad, se puede establecer:

$$d\alpha = \lim_{dt\to 0}\left(\operatorname{arctg}\frac{\frac{\partial v}{\partial x}dxdt}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dxdt}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}dt$$

$$d\beta = \lim_{dt\to 0}\left(\operatorname{arctg}\frac{\frac{\partial u}{\partial y}dydt}{dy + \frac{\partial v}{\partial y}dydt}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}dt$$

Combinando las tres ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Operando de forma análoga, para los planos YZ y XZ, se obtendrá la velocidad angular promedio con respecto a los ejes X e Y, siendo su valor:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad ; \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

El vector $\omega = i\omega_x + j\omega_y + k\omega_z$ se define como la mitad del rotacional de la velocidad, de donde:

$$\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

Con el fin de obviar el $\frac{1}{2}$; se trabaja a menudo con el vector doble, denominado *vorticidad.* $\xi = 2\,\omega = \mathrm{rot}\,\vec{v} = \nabla \wedge \vec{v}$

Se denominan *flujos irrotacionales* los que tienen vorticidad nula: $\mathrm{rot}\,v \equiv 0 \quad ; \quad \xi = 0$

La velocidad de deformación del elemento formado por las dos líneas fluidas se define como el ritmo al cual se separan las líneas del ángulo inicialmente recto, y se expresa como:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

La velocidad de deformación angular promedio se define como $\phi_{xy} = \frac{1}{2}\varepsilon_{xy}$, con lo que

$$\phi_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\beta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Para el caso genérico de flujo tridimensional, aparecerán nueve velocidades de deformación promedio, que son:

$$\phi_{XX} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \phi_{XY} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \qquad \phi_{XZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

$$\phi_{YX} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right); \qquad \phi_{YY} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \phi_{YZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right);$$

$$\phi_{ZX} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right); \qquad \phi_{ZY} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right); \qquad \phi_{ZZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial w}{\partial z};$$

Los esfuerzos viscosos en una dirección genérica ij se obtendrán al multiplicar por la viscosidad las velocidades de deformación en la dirección ij $\tau_{ij} = \mu\, \varepsilon_{ij} = 2\,\mu\, \phi_{ij}$

2.6 Estudio cinemático del movimiento de una partícula

Para realizar el estudio cinemático del movimiento de una partícula de fluido, se ha de considerar la superposición de cuatro movimientos independientes.

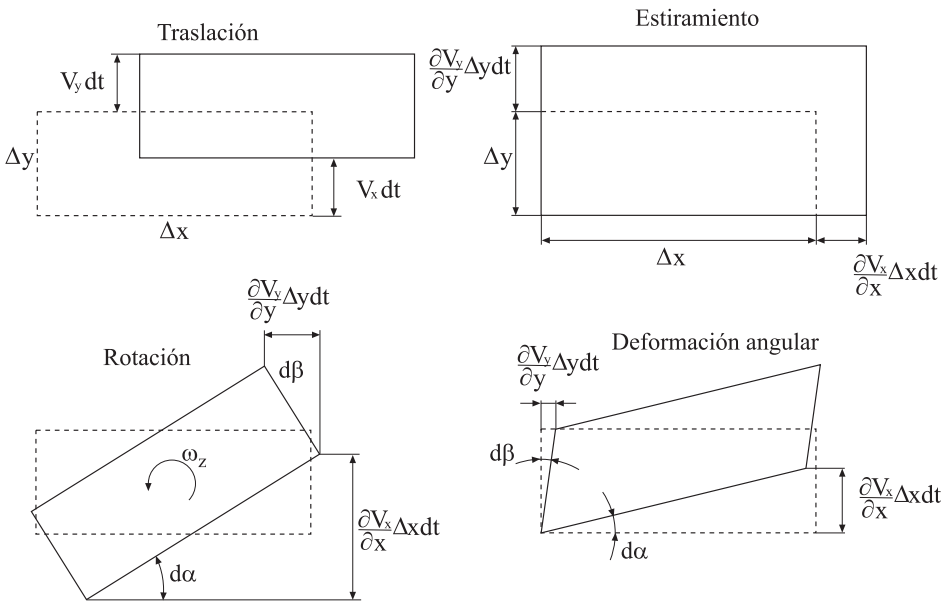


Fig. T 2.3
Los cuatro movimientos independientes para el estudio cinemático de una partícula de fluido

Los cuatro movimientos independientes están definidos por los siguientes parámetros:

-Traslación. Dado por el vector velocidad o aceleración. $\vec{V}$; $\vec{a}$; $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$

-Rotación. Definido por la velocidad angular $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v} = \frac{1}{2}(\nabla \wedge \vec{v})$

-Estiramiento (deformación lineal). Definido por $\frac{1}{\delta\forall}\frac{d(\delta\forall)}{dt} = \nabla\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

-Deformación angular. Definido por la velocidad de deformación angular promedio. ϕ_{ij} ;

$$\phi_{XY} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Puesto que los conceptos de aceleración, velocidad angular y velocidad de deformación angular han sido ya definidos, a continuación se aclarara el concepto de deformación lineal.

Sea un volumen de fluido genérico $\forall$, sea ds un elemento diferencial de superficie sobre este volumen, el elemento diferencial de superficie es atravesado por un fluido a una velocidad V. Al cabo de un diferencial de tiempo dt el cambio de volumen del volumen de control debido al flujo que atraviesa el diferencial de superficie será:

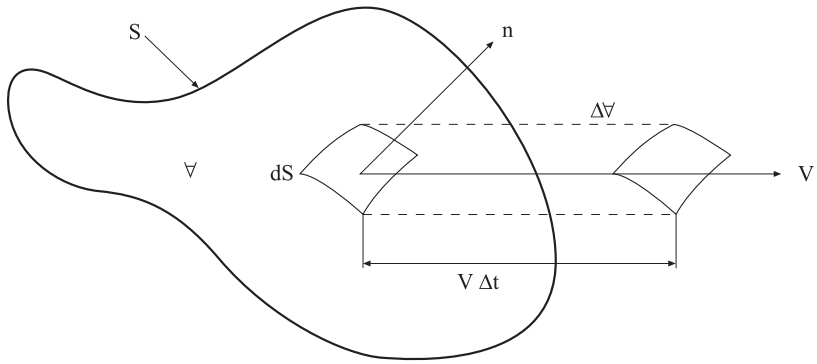


Fig. T 2.4
Volumen de fluido elemental

$(\Delta\forall) = \left(\vec{V}\,dt\right)d\vec{s}$, por otro lado, el cambio de volumen en todo el volumen elemental, será la suma de todos los volúmenes elementales asociados a cada diferencial de superficie. Dividiendo por el diferencial de tiempo se obtendrá la variación temporal del cambio de volumen:

$$\frac{d\forall}{dt} = \oint_S \vec{V}\; d\vec{s}$$

Suponiendo que el volumen elemental se reduce a un punto, es decir, es un diferencial de volumen, y aplicando el teorema de la divergencia, se obtiene:

$$\frac{d(\delta\forall)}{dt} = \oint_S \vec{V}\; d\vec{s} = \int_\forall \nabla\vec{V}\; d(\delta\forall) = \int_\forall \operatorname{div}\vec{V}\; d(\delta\forall)$$

Asumiendo un volumen de fluido infinitesimal $\delta\forall$ en el que la divergencia de la velocidad se mantiene constante a lo largo de todo el volumen elemental, se tiene:

$$\frac{d(\delta\forall)}{dt} = \int_\forall \operatorname{div}\vec{V}\; d(\delta\forall) = \operatorname{div}\vec{V}\;\delta\forall$$

de donde se obtiene:

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{\delta\forall}\frac{d(\delta\forall)}{dt}$$

Como conclusión, se observa que el estiramiento producido en una partícula o volumen elemental se define como la divergencia de la velocidad.

Con el fin de esclarecer más si cabe el concepto de divergencia, se realiza la demostración siguiente. Sea una partícula de fluido sometida a un campo de velocidades bidimensional V_x, V_y En el estado inicial, la partícula tiene unas dimensiones δ_x, δ_y, al cabo de un diferencial de tiempo, las dimensiones de la partícula, por efecto del campo de velocidades, han pasado a ser $\delta_x + \frac{\partial V_x}{\partial x}\delta_x\delta_t$; $\delta_y + \frac{\partial V_y}{\partial y}\delta_y\delta_t$ (v. figura T 2.5)

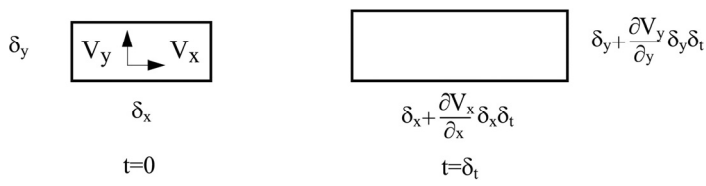


Fig. T 2.5 Estiramiento de una partícula de fluido, debido al campo de velocidades a que está sometida

El concepto de divergencia se define asimismo como la variación del volumen elemental de fluido, en porcentaje, respecto al tiempo, es decir:

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{d\forall_2 - d\forall_1}{d\forall_1\, dt}$$

Dado que se trata de un flujo bidimensional, los volúmenes inicial y final se definen como:

$$d\forall_1 = \delta_x\ \delta_y$$

$$d\forall_2 = \left(\delta_x + \frac{\partial V_x}{\partial x}\delta_x\delta_t\right)\left(\delta_y + \frac{\partial V_y}{\partial y}\delta_y\delta_t\right)$$

Reagrupando, se tiene:

$$d\forall_2 = \delta_x\ \delta_y + \delta_x\ \frac{\partial V_y}{\partial y}\delta_y\delta_t + \delta_y\ \frac{\partial V_x}{\partial x}\delta_x\delta_t + \frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{\partial V_y}{\partial y}\delta_x\delta_y\delta_t^2$$

Despreciando los diferenciales temporales de segundo orden, se concluye:

$$d\forall_2 - d\forall_1 = \delta_x\ \frac{\partial V_y}{\partial y}\delta_y\delta_t + \delta_y\ \frac{\partial V_x}{\partial x}\delta_x\delta_t$$

En consecuencia se obtiene.

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{d\forall_2 - d\forall_1}{d\forall_1\, dt} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}$$

Esta es la definición matemática del concepto de divergencia para un campo bidimensional.

El estudio cinemático del movimiento de una partícula está definido por el tensor gradiente de velocidad $\overline{\overline{G}}_V$, que se descompone en un tensor simétrico denominado *tensor de deformación*, y un tensor antisimétrico o *tensor de vorticidad*.

$$\bar{\bar{G}}_v = \phi_{ij} + \Omega_{ij}$$

ϕ_{ij} = Tensor de deformación. Tensor de velocidades de deformación.

Ω_{ij} =Tensor de vorticidad.

$$\bar{\bar{G}}_v = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = \phi_{ij} + \Omega_{ij}$$

$$\bar{\bar{G}}_v = \frac{\partial v_i}{\partial r_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} - \frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right) = \phi_{ij} + \Omega_{ij}$$

De forma explícita, el tensor gradiente de velocidad y los tensores de deformación y vorticidad para coordenadas cartesianas se establecen.

$$\bar{\bar{G}}_v = \left\|\frac{\partial V_i}{\partial r_j}\right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{vmatrix} = \phi_{ij} + \Omega_{ij}$$

Obsérvese que la diagonal principal del tensor de deformación define el estiramiento de la partícula dado por la divergencia del vector velocidad.

Así, por ejemplo, $\frac{\partial u}{\partial x}$ representa la velocidad con que se dilata proporcionalmente a su longitud un elemento de línea fluida (en este caso en la dirección x).

Los elementos fuera de la diagonal principal del tensor de deformación representan la mitad de la velocidad con que disminuye el ángulo recto que inicialmente forman las dos líneas fluidas.

Problema 5

Enunciado

Sea un volumen de agua de 1 m^3, sometido inicialmente a una presión de 10^5 Pa y a una temperatura de 280 K. Si el proceso evoluciona de forma que al cabo de un tiempo T la temperatura y la presión del fluido son de 300 K y 3 10^5 Pa, determine el volumen que ocupará el líquido en estas condiciones.

Datos:

$\alpha_T = 1,53\,10^{-4}\ K^{-1}$ (coeficiente de expansión térmica)

$\beta = 1,96\,10^{9}\ \frac{N}{m^2}$ (módulo de compresibilidad volumétrica)

Resolución

La definición del módulo de compresibilidad y del coeficiente de expansión térmica es:

$$\beta = -\forall \frac{dp}{d\forall}$$

$$\alpha_T = \frac{1}{\forall}\frac{d\forall}{dT}$$

La variación de volumen con la presión y la temperatura se define:

$$d\forall = \frac{\partial \forall}{\partial p}dp + \frac{\partial \forall}{\partial T}dT$$

de donde:

$$d\forall = -\frac{\forall}{\beta}dp + \alpha \forall\, dT$$

Integrando:

$$\int_{\forall_{inicial}}^{\forall_{final}} \frac{d\forall}{\forall} = \int_{P_{inicial}}^{P_{final}} -\frac{dp}{\beta} + \int_{T_{inicial}}^{T_{final}} \alpha\, dT$$

$$\ln\left(\frac{\forall_{final}}{\forall_{inicial}}\right) = -\frac{1}{\beta}\left(p_{final} - p_{inicial}\right) + \alpha\left(T_{final} - T_{inicial}\right)$$

$$\ln \forall_{final} = \ln \forall_{inicial} - \frac{1}{\beta}\left(p_{final} - p_{inicial}\right) + \alpha\left(T_{final} - T_{inicial}\right)$$

$$\forall_{final} = \forall_{inicial}\, e^{-\frac{1}{\beta}(p_{final}-p_{inicial})}\, e^{\alpha(T_{final}-T_{inicial})}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\forall_{final} = \forall_{inicial}\, 1,002961$$

El volumen del fluido al final será ligeramente mayor que el inicial.

Problema 6

Enunciado

Dados un fluido de densidad constante que fluye en un canal convergente con una altura media de $Y = \frac{Y_0}{\left(1+\left(\frac{x}{L}\right)\right)}$ y una velocidad en dirección *x* de $u = u_0\left(1+\frac{x}{L}\right)\left[1-\left(\frac{y}{Y}\right)^2\right]$, siendo u_0=1 m/s

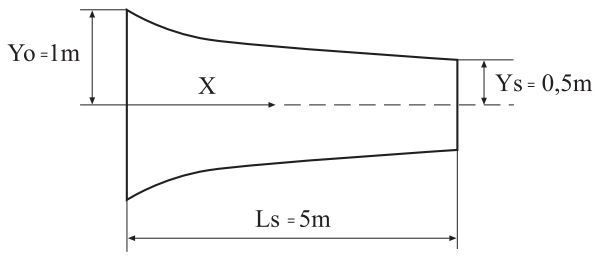


Fig. 6.1

Calcule:

La velocidad transversal, v(*x*, *y*).

La aceleración lineal, la velocidad angular, la vorticidad, la velocidad de deformación volumétrica y la velocidad de deformación angular para dicho fluido.

Resolución

Para un fluido incompresible y flujo bidimensional, la ecuación de continuidad puede expresarse:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x};$$

En función de los datos del enunciado, la velocidad en dirección *x* se puede dar:

$$u = u_0\left(1+\frac{x}{L}\right)\left(1-\frac{y^2}{Y_0^2}\left(1+\frac{x}{L}\right)^2\right) = u_0\left[\left(1+\frac{x}{L}\right)-\frac{y^2}{Y_0^2}\left(1+\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

derivando respecto a *x* se obtiene:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{L}\left[1-\frac{3y^2}{Y_0^2}\left(1+\frac{x}{L}\right)^2\right];$$

con lo cual la velocidad en dirección *y* será:

$$v = -\int \frac{u_0}{L}\left[1-\frac{3y^2}{Y_0^2}\left(1+\frac{x}{L}\right)^2\right]dy = \int -\frac{u_0}{L}dy + \int \frac{u_0 3y^2}{LY_0^2}\left(1+\frac{x}{L}\right)^2 dy$$

$$v = -\frac{u_0 y}{L} + \frac{u_0 y^3}{LY_0^{\,2}}\left(1+\frac{x}{L}\right)^2 + C(x)\ ;$$

Condiciones de contorno: $v = 0$; cuando $y = Y$; y para cualquier x;

$$0 = -\frac{u_0 Y_0}{L\left(1+\frac{x}{L}\right)} + \frac{u_0 Y_0^{\,3}}{LY_0^{\,2}}\frac{\left(1+\frac{x}{L}\right)^2}{\left(1+\frac{x}{L}\right)^3} + C(x)$$

Para cualquier valor de "x" comprendido entre $0 < x < L$ se cumple que $C(x) = 0$;

Por lo tanto:

$$v = -\frac{u_0 y}{L}\left[1-\left(\frac{y}{Y_0}\right)^2\left(1+\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

Eligiendo el sistema cartesiano de coordenadas, la aceleración en dirección *x* e *y* será:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

Puesto que se está en régimen permanente: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$

Derivando las velocidades *u* y *v* respecto las direcciones *x* e *y* se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_0\left[\frac{1}{L}-\frac{3y^2}{Y_0^{\,2}}\left(1+\frac{x}{L}\right)^2\frac{1}{L}\right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_0\left[-\frac{2y}{Y_0^{\,2}}\left(1+\frac{x}{L}\right)^3\right];$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u_0\left[\frac{y^3}{LY_0^{\,2}}2\left(1+\frac{x}{L}\right)\frac{1}{L}\right];$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = u_0\left[\frac{3y^2}{LY_0^{\,2}}\left(1+\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{L}\right];$$

Sustituyendo en las ecuaciones para la aceleración, se obtiene:

$$a_x = \frac{u_0^{\,2}}{L}\left[\left(1+\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{y}{Y_0}\right)^2\left(1+\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{y}{Y_0}\right)^4\left(1+\frac{x}{L}\right)^5\right]$$

$$a_y = \frac{u_0^{\,2}}{L^2}\left[y - 2\frac{y^3}{Y_0^{\,2}}\left(1+\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{y^{\,5}}{Y_0^{\,4}}\left(1+\frac{x}{L}\right)^4\right]$$

La velocidad angular se define como:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Obsérvese que:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$$

Sustituyendo, queda:

$$\omega_z = \frac{yu_0}{Y_0^{\,2}}\left(1+\frac{x}{L}\right)\left[\frac{y^2}{L^2} + \left(1+\frac{x}{L}\right)^2\right];$$

Puesto que la vorticidad se define como el doble de la velocidad angular, $\xi_z = 2\omega_z$;

$$\xi_z = 2\frac{yu_0}{Y_0^{\,2}}\left(1+\frac{x}{L}\right)\left[\frac{y^2}{L^2} + \left(1+\frac{x}{L}\right)^2\right];$$

la velocidad de deformación volumétrica está dada en este caso por:

$$\frac{1}{\delta\forall}\frac{d(\delta\forall)}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Al sustituir $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$, se llega a:

$$\frac{1}{\delta\forall}\frac{d(\delta\forall)}{dt} = 0;$$

la velocidad de deformación angular viene dada por:

$$\phi_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

puesto que:

$$\phi_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0; \qquad \phi_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0;$$

Sustituyendo, se llega a:

$$\phi_{xy} = \frac{y u_0}{Y_0^2}\left(1 + \frac{x}{L}\right)\left[-\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 + \frac{y^2}{L^2}\right];$$

Cabe recordar que, aunque matemáticamente se puedan separar, la rotación, la dilatación y la deformación angular, ocurren en el fluido de forma simultánea, y no se pueden separar desde el punto de vista físico.

Problema 7

Enunciado

Sea un flujo definido por una distribución de velocidades tal como:

$$u = \frac{x}{1+t}; \; v = \frac{y}{1+2t}; \; w = 0$$

Halle la línea de corriente, senda o trayectoria y la línea de traza que en el instante $t = 0$ pasa por el punto (x_0, y_0, z_0).

Resolución

Puesto que $w = 0$, el flujo es bidimensional y, todas la líneas de corriente serán paralelas al plano XY

La determinación de las líneas de corriente se basa en la ecuación:

$$\frac{dx}{ds} = u = \frac{x}{1+t} \qquad \frac{dy}{ds} = v = \frac{y}{1+2t}$$

Integrando para t = cte, queda:

$$\frac{dx}{x} = \frac{ds}{1+t}; \quad \ln x = \frac{s}{1+t} + cte \xrightarrow{\text{variables}(x,y)} x = c_1 e^{\frac{s}{1+t}}$$

$$y = c_2 e^{\frac{s}{1+2t}}$$

Para calcular las constantes, se impondrá la condición: s = 0; x = X_0; y = Y_0, y se obtendrá $C_1 = x_0$; $C_2 = y_0$; Eliminando s, queda:

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right).(1+t) = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right).(1+2t)$$

Reagrupando en *x* e *y*, se obtendrá:

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right).\frac{1+t}{1+2t} = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) ; \qquad e^{\left[\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\frac{1+t}{1+2t}\right]} = e^{\ln\left(\frac{y}{y_0}\right)} ; \qquad \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1+t}{1+2t}} = \frac{y}{y_0} ;$$

Se obtiene así la ecuación de las líneas de corriente que pasan por (x_0, y_0) en cualquier instante *t*:

$$y = y_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1+t}{1+2t}}$$

$$\text{Para } t = 0 \longrightarrow \frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}$$

La línea de corriente será una línea inclinada 45º que pasa por el punto (X_0, Y_0), ver figura 7.1:

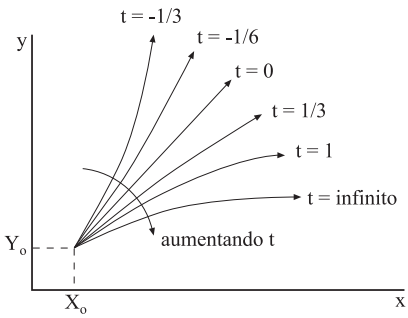


Fig. 7.1
Líneas de corriente que pasan por el punto X_0 Y_0 para diferentes estados temporales

Las líneas de corriente se pueden determinar también utilizando la ecuación:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

Sustituyendo los valores de *u* y *v* se obtiene:

$$\frac{dx}{\frac{x}{1+t}} = \frac{dy}{\frac{y}{1+2t}}$$

de donde:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}\,\frac{1+2t}{1+t}$$

Integrando entre límites, se obtiene:

$$\frac{1+t}{1+2t}\int_{X_0}^{X}\frac{dx}{x}=\int_{Y_0}^{Y}\frac{dy}{y}$$

de donde: $\frac{1+t}{1+2t}\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)=\ln\left(\frac{y}{y_0}\right)$

o bien: $\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1+t}{1+2t}}=\left(\frac{y}{y_0}\right)$

Véase que se obtiene la misma ecuación que en el apartado anterior.

Las sendas o trayectorias se determinan integrando las ecuaciones A y B

$$\text{(A)}\qquad \frac{dx}{dt}=\frac{x}{1+t}\qquad\qquad \text{(B)}\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{y}{1+2t}$$

Integrando,

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dt}{1+t};\ \ln x=\ln(1+t)+k_1\,;\ e^{\ln x}=e^{\ln(1+t)+k1}\longrightarrow x=(1+t).k'_1 \qquad \text{(C)}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dt}{1+2t};\ln y=\frac{1}{2}\ln(1+2t)+k_2\,;\ e^{\ln y}=e^{\frac{1}{2}\ln(1+2t)+k2}\longrightarrow y=(1+2t)^{\frac{1}{2}}.k'_2 \qquad \text{(D)}$$

Aparecen dos nuevas constantes, k'_1 y k'_2, que corresponden a e^{k1} y e^{k2}

Aplicando las condiciones de contorno $t = 0$, $x = X_0$, $y = Y_0$, queda:

$$X_0=k'_1\,;\qquad x=(1+t)\cdot X_0$$

$$Y_0=k'_2\ ;\qquad y=(1+2t)^{\frac{1}{2}}\cdot Y_0$$

Eliminando el tiempo se obtiene la ecuación de la senda o trayectoria.

$$y=\left[1+2\left(\frac{x}{X_0}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot Y_0$$

Ésta se muestra en la figura 7.2. Véase que no coincide con la ecuación de la línea de corriente en t=0.

Para hallar la línea de traza, se parte de las ecuaciones integradas de las sendas, ecuaciones C y D, y se calcula la familia de partículas que pasaron por (X_0, Y_0) en instantes $\varepsilon < t$.

Así pues, para $t = \varepsilon$, $x = X_0$, $y = Y_0$, se obtiene:

$$x=(1+t).k'_1\ ;\ k'_1=\frac{X_0}{1+\varepsilon}\longrightarrow x=\frac{(1+t)}{1+\varepsilon}X_0 \qquad \text{(C)}$$

$$y = (1+2t)^{\frac{1}{2}} \cdot k'_2 \; ; \quad k'_2 = \frac{Y_0}{(1+2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow y = \frac{(1+2t)^{\frac{1}{2}}}{(1+2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} Y_0 \qquad (D)$$

Estas expresiones corresponden a las líneas de traza que pasan por (X_0, Y_0) en cualquier instante t.

Para t = cte, se igualan los valores de ε de las dos ecuaciones.

$$\varepsilon = \frac{(1+t)}{x} \cdot X_0 - 1 = \left[(1+2t) \cdot \left(\frac{Y_0}{y} \right)^2 - 1 \right] \frac{1}{2} \longrightarrow (1+t) \frac{X_0}{x} - \frac{1}{2} = \frac{(1+2t)}{2} \left(\frac{Y_0}{y} \right)^2$$

Despejando $\left(\frac{y}{Y_0} \right)$, se obtiene:

$$\left(\frac{y}{Y_0} \right) = \left[\frac{(1+2t)}{2(1+t)\frac{X_0}{x} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \text{Para } t = 0 \longrightarrow \left(\frac{y}{Y_0} \right) = \left[\frac{1}{2\frac{X_0}{x} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[2\frac{X_0}{x} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Línea también representada en la figura 7.2.

Físicamente, la línea de traza refleja el comportamiento de las líneas de corriente antes del instante t = 0, mientras que la senda refleja lo que ocurre después.

Una línea de traza se genera experimentalmente por medio de la inyección continua de partículas marcadas (tinta, humo o burbujas) desde un punto fijo.

Como última observación, cabe decir que en caso de flujo estacionario, las líneas de traza, senda y corriente coinciden.

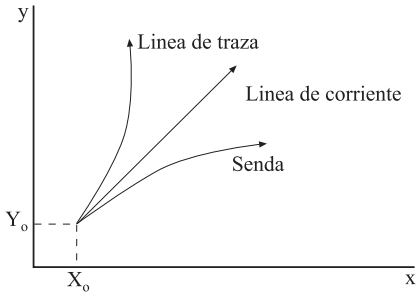


Fig. 7.2
Línea de corriente, senda y línea de traza que pasan por X_0 e Y_0 en T = 0

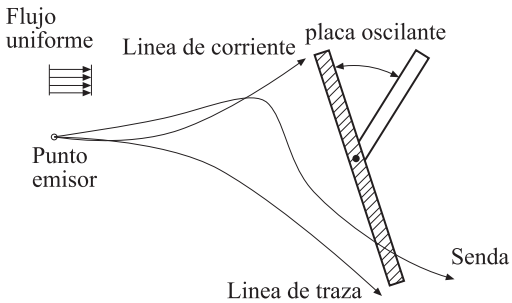


Fig. 7.3
Flujo no estacionario alrededor de una placa oscilante, visualizado con burbujas desprendidas de un punto fijo

Adaptado del problema 1-14 del libro *Mecánica de Fluidos* del autor Frank M White edición 1988, publicado por McGraw-Hill

Problema 8

Enunciado

Sea el movimiento en régimen permanente definido en coordenadas eulerianas y dado por el campo de velocidades: $\vec{v} = (2x - 3y)\hat{i} + (3x - 2y)\hat{j}$

Se pide:

1. Demuestre que el fluido es incompresible.
2. Determine el campo de aceleración $\vec{a}$ y el campo de vorticidad ($\vec{\Omega}$).
3. Determine las líneas de corriente e identifique aquella que pasa por el punto x = 1; y = 1; z = 0.
4. Determine la ecuación de las líneas de torbellino (vector remolino $\vec{\omega}$)
5. Calcule la circulación del vector velocidad a lo largo de la línea de corriente que pasa por el punto x = 1; y = 1; z = 0. Calcule también el flujo de vorticidad $\vec{\Omega}$ a través de la superficie que tiene por línea frontera aquella línea de corriente.
6. Calcule la velocidad de deformación lineal específica en la dirección del vector unitario $\vec{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$

Resolución

1. La ecuación de conservación de la masa en forma diferencial se enuncia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho.\vec{v}) = 0 ;$$

Si el fluido es incompresible, se ha de cumplir: $\nabla\vec{V} = 0$

Sustituyendo:

$$\nabla\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2 - 2 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{fluido incompresible}$$

2. $$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

Por ser el movimiento estacionario, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = (2x - 3y)(3x - 2y).\begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} = (2x - 3y)(3x - 2y).\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[(2x - 3y)\,2 + (3x - 2y)(-3)\right]\hat{i} + \left[(2x - 3y)\,3 + (3x - 2y)(-2)\right]\hat{j} =$$

$$= \left[4x - 6y - 9x + 6y\right]\hat{i} + \left[6x - 9y - 6x + 4y\right]\hat{j} = -5x\hat{i} - 5y\hat{j}$$

El campo de vorticidad está definido por $\vec{\Omega} = \nabla \wedge \vec{V} = \text{rot}\,\vec{V}$

$$\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (2x - 3y) & (3x - 2y) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(3x - 2y)\hat{k} - \frac{\partial}{\partial y}(2x - 3y)\hat{k} = 6\hat{k}$$

El fluido está girando respecto al eje z.

3. Las líneas de corriente se definen por la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \;\; ; \;\; \frac{dx}{2x - 3y} = \frac{dy}{3x - 2y} \;\; ; \;\; dx\,(3x - 2y) - dy\,(2x - 3y) = 0$$

Se llega a una ecuación diferencial del tipo: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Se debe comprobar si se trata de una diferencial exacta:

Para ello, se ha de cumplir $\longrightarrow \dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x} \longrightarrow$ Recordando que

$$N(x,y) = -(2x - 3y)$$

Se observa que la ecuación diferencial es exacta, dado que las dos derivadas tienen el mismo valor.

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -2$$

Puesto que se trata de una diferencial exacta, la solución de la ecuación será del tipo:

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx = \int (3x - 2y)\,dx = 3\frac{x^2}{2} - 2xy + C(y)$$

y debe cumplirse que $N(x, y) = \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$,

con lo cual: $-(2x - 3y) = -2x + C'(y) \longrightarrow C'(y) = 3y \longrightarrow C(y) = \dfrac{3y^2}{2} + C_0$

Por tanto la función queda:

$$F(x, y) = \frac{3x^2}{2} - 2xy + \frac{3y^2}{2} + C_0 = 0$$

(Si en lugar de igualarla a 0 se iguala a cualquier otro número, se obtendrá el mismo resultado).

Sustituyendo para el punto x =1; y =1; z =0, queda:

$$F(x, y) = \frac{3}{2} - 2 + \frac{3}{2} + C_0 = 0 \longrightarrow C_0 = -1$$

En este punto, la función será:

$$\frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} - 2xy - 1 = 0$$

Ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto (1,1,0) y representa la ecuación de una elipse centrada en el origen pero inclinada un ángulo θ.

Con el fin de hallar la ecuación de la elipse referida a sus ejes centrales, se debe determinar el ángulo de rotación de la misma.

La expresión de una elipse plana en cualquier punto del eje de coordenadas y girada un ángulo θ viene dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El término *x y* es el que da la rotación.

Los términos en *x* e *y* dan el desplazamiento (en este caso, no existe desplazamiento)

El ángulo de giro viene dado por: $\operatorname{cotg}(2\theta) = \frac{A - C}{B}$

La ecuación hallada es: $\frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} - 2xy - 1 = 0$. Y se puede expresar como:

$$3x^2 + 3y^2 - 4xy - 2 = 0 \qquad (1)$$

Se deduce que A = 3; B =-4; C = 3.

$$\operatorname{cotg}(2\theta) = \frac{3 - 3}{-4} = 0 \longrightarrow 2\theta = 90^\circ \longrightarrow \theta = 45^\circ$$

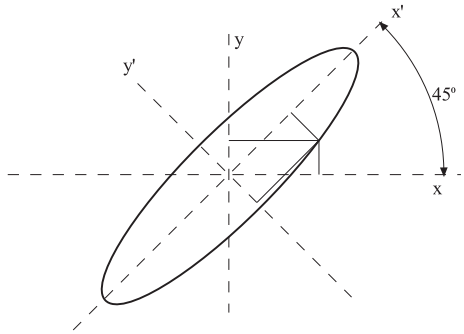


Fig. 8.1
Inclinación de la elipse respecto a los ejes coordenados

Para transformar la ecuación de la elipse referida a los ejes *x y* respecto a los ejes *x'y'* se debe realizar el cambio:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x'\cos 45 - y'\sin 45 \\ y &= x'\sin 45 + y'\cos 45 \end{aligned}$$

Es importante remarcar que las distancias x' e y' llevan asociado su propio signo.

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$3\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 = 0$$

Desarrollando se llega a $x'^2 + 5y'^2 - 2 = 0$

La ecuación de la elipse respecto a los ejes *x'* e *y'* será:

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2 - 1 = 0$$

La ecuación genérica de una elipse centrada es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,;$$

siendo *a* y *b* los semiejes principales, que en este caso valdrán:

$$a = \sqrt{2}$$
$$b = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

4. El vector remolino se define como $\vec{\omega}$.

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \longrightarrow (\vec{\Omega} = 6\hat{k}) \text{ apartado 2} \longrightarrow \vec{\omega} = 3\hat{k}$$

5. La circulación del vector velocidad se define como:

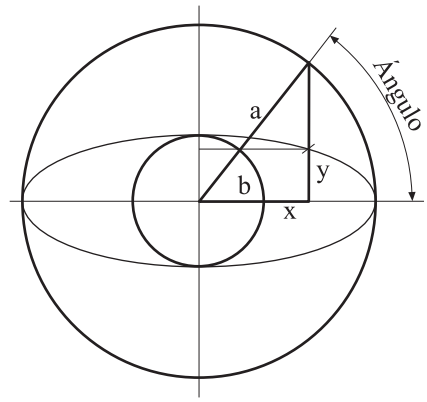
$$\Gamma = \oint \vec{v}.d\vec{l} = \oint \{i(2x - 3y) + j(3x - 2y)\}\{i.dx + j.dy\}$$

Esta integral hay que realizarla a lo largo de la línea de corriente (que es la elipse); para integrar se deben transformar todos estos parámetros en uno solo e integrar respecto a dicho parámetro.

Consecuentemente, se han de dar los valores de x, y, dx, dy en función de los semiejes principales de la elipse y el ángulo de giro.

Fig. 8.2 Relaciones de transformación para una elipse

Las relaciones de transformación son:



$$\sin\theta = \frac{y}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{a}$$

$$x = a\cos\theta = \sqrt{2}\cos\theta$$

$$y = b\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta$$

$$dx = -a\sin\theta d\theta = -\sqrt{2}\sin\theta d\theta$$

$$dy = b\cos\theta d\theta = \sqrt{\frac{2}{5}}\cos\theta d\theta$$

Sustituyendo estos valores en la integral se obtiene como única variable el ángulo θ, que se integrará entre 0 y 2π;

$$\Gamma = \oint (2x - 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy = \int_0^{2\pi} \left(2\sqrt{2}\cos\theta - 3\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta\right).\left(-\sqrt{2}\sin\theta\right)d\theta +$$

$$+\int_0^{2\pi} \left(3\sqrt{2}\cos\theta - 2\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta\right).\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\cos\theta\right)d\theta$$

De realizar la integración se obtiene que $\Gamma = \left(\frac{12\pi}{\sqrt{5}}\right)$

Se observa que este camino elegido es largo. Un método alternativo sería la aplicación del teorema de Stokes:

$$\oint_l \vec{v}\,d\vec{l} = \int_s (\nabla \wedge \vec{v})d\vec{s} = \int_s \vec{\Omega}.d\vec{s} = \int_s 6\hat{k}.\hat{n}ds = 6\int_s ds = 6\pi ab \rightarrow \text{área de la elipse} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6\pi ab = 6\pi\sqrt{2}.\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{12\pi}{\sqrt{5}} = \Gamma$$

Obsérvese que el flujo de vorticidad, que se define como $\int_s (\nabla \wedge \vec{v})\,d\vec{s}$ es igual a la circulación del vector velocidad.

6. La velocidad de deformación lineal específica en la dirección del vector unitario $r = i\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$ se calcula mediante la expresión:

$$\frac{1}{|d\vec{r}|}.\frac{d}{dt}|d\vec{r}| = e_{ij}\,\beta_i\,\beta_j \longrightarrow \begin{matrix}\beta_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \beta_j = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}$$

de donde e_{ij} valdrá:

$$e_{ij} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{\left|d\vec{r}\right|}\cdot\frac{d}{dt}\left|d\vec{r}\right| = \begin{vmatrix} 2 & \dfrac{1}{2}(-3+3) & 0 \\ \dfrac{1}{2}(-3+3) & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La velocidad de deformación lineal vendrá dada por $\sqrt{2}\,\hat{i} + \sqrt{2}\,\hat{j}$.

→3

Estática de fluidos

3.1 Ecuación diferencial de la estática de fluidos

Sea un cubo elemental de fluido como el que se muestra en la figura T 3.1, sea P la presión en el centro del elemento diferencial. A priori, se va a suponer que el fluido no está sometido a ninguna aceleración. La presión en cada una de las caras se define en forma de series de Taylor, siendo TOS, los términos de orden superior. (Por simplicidad, no se ha definido la dirección y).

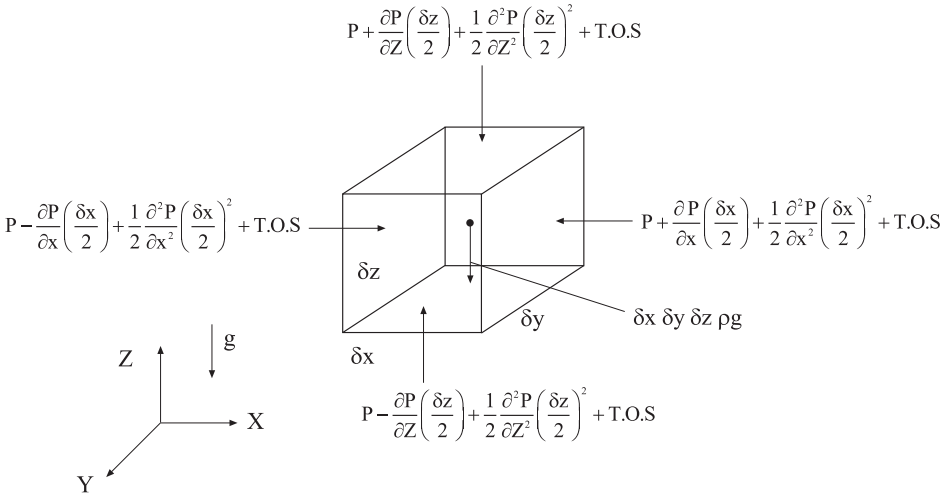


Fig. T 3.1
Elemento diferencial de fluido

El sumatorio de fuerzas en dirección X y Z en el cubo elemental dará lugar a:

$$\sum F_x = P_{x(-)}(\delta_z)(\delta_y) - P_{x(+)}(\delta_z)(\delta_y) = 0$$
$$\sum F_z = P_{z(-)}(\delta_x)(\delta_y) - P_{z(+)}(\delta_x)(\delta_y) - \rho g(\delta_x)(\delta_y)(\delta_z) = 0$$

Sustituyendo los valores de las presiones en las ecuaciones de las fuerzas, se obtiene:

En dirección x:

$$\left[P-\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)^2-P-\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)^2+T.O.S\right](\delta_z\delta_y)=0$$

Aunque con posterioridad se van a anular, a priori se debe considerar que los TOS de las dos presiones no tienen porqué anularse.

En dirección z:

$$\left[P-\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\delta_z}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\left(\frac{\delta_z}{2}\right)^2-P-\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\delta_z}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\left(\frac{\delta_z}{2}\right)^2+T.O.S-\rho g\delta_z\right](\delta_x\delta_y)=0$$

de donde las ecuaciones en dirección x y z quedarán:

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\delta_x+T.O.S\right)\delta_y\delta_z=0$$

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial z}+T.O.S-\rho g\delta_z\right)\delta_x\delta_y=0$$

Dado que los TOS se pueden considerar muy pequeños, comparados con el resto de los sumandos, las ecuaciones resultantes serán:

$$-\frac{\partial P}{\partial x}\delta_x\delta_y\delta_z=0;\qquad \frac{\partial P}{\partial x}=0$$

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial z}-\rho g\right)\delta_x\delta_y\delta_z=0;\qquad \frac{\partial P}{\partial z}+\rho g=0;\qquad \frac{dP}{dz}=-\rho g$$

Operando de forma análoga en la dirección Y, se obtendría $\frac{\partial P}{\partial y}=0$.

Ello implica que, cuando un fluido esta en reposo, la presión en un plano paralelo a la superficie del líquido dependerá únicamente de la profundidad a la que se encuentre el mismo. Dicha presión viene dada por la ecuación diferencial de la estática $dP = -\rho\, g\, dz$

3.2 Ecuación diferencial del movimiento del fluido como sólido rígido

Un apartado que usualmente se incluye dentro del capítulo de estática es el de movimiento de un fluido como un sólido rígido. Bajo este considerando, se definen los fluidos sometidos a aceleraciones constantes. Así, en coordenadas cartesianas, asumiendo que existe aceleración constante en la dirección de los tres ejes coordenados, las fuerzas actuantes sobre un elemento diferencial de fluido se definen:

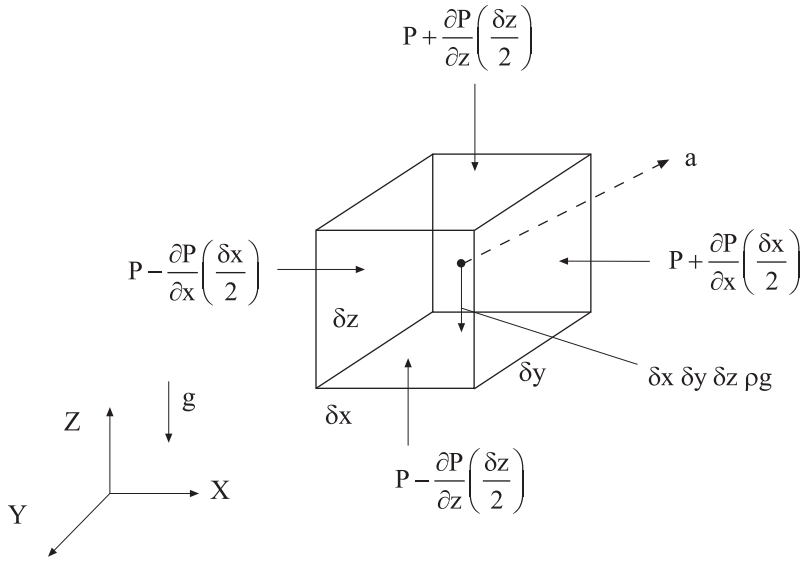


Fig. T 3.2
Elemento diferencial de fluido sometido a una aceleración constante

Véase que los términos de segundo orden y de orden elevado han sido ya obviados.

La masa diferencial asociada al cubo elemental es:

$$\delta_m = \rho(\delta\forall) = \rho(\delta_x)(\delta_y)(\delta_z)$$

La aceleración aplicada al elemento diferencial de fluido se definirá como:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en dirección x, $\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x$

$$\left(P - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta_y\delta_z - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta_y\delta_z = \rho(\delta_x)(\delta_y)(\delta_z)\vec{a}_x$$

y, operando, se llega a $\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho\vec{a}_x$

En dirección z, se establece:

$$\left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\delta z}{2}\right)\right)\delta_x\delta_y - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta_x\delta_y - \rho g(\delta_x\delta_y\delta_z) = \rho(\delta_x\delta_y\delta_z)\vec{a}_z$$

y, operando, se llega a $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g\left(1 + \frac{\vec{a}_z}{g}\right)$

En dirección y (considerando que también hay aceleración respecto a este eje), se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \vec{a}_y$$

La diferencial total de presión se define como:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}\delta x + \frac{\partial P}{\partial y}\delta y + \frac{\partial P}{\partial z}\delta z$$

Sustituyendo las tres variaciones de presión con respecto a los tres ejes coordenados en la ecuación del diferencial total de presión, se obtiene:

$$dP = -\rho \vec{a}_x dx - \rho \vec{a}_y dy - \rho g\left(1 + \frac{\vec{a}_z}{g}\right)dz$$

Ecuación diferencial que determina la presión en cualquier punto de la masa de un fluido que está sometido a una aceleración constante y positiva con respecto a los tres ejes coordenados.

Sea el caso de una aceleración lineal uniforme en dirección a_x y a_z; $a_y = 0$. La ecuación diferencial para este caso será:

$$\int_{P_0}^{P} dP = \int_0^x -\rho \vec{a}_x dx - \int_0^z \rho g\left(1 + \frac{\vec{a}_z}{g}\right)dz$$

Si $a_x = a_z = cte$ y después de integrar se llega a:

$$P = -\rho \cdot \vec{a}_x \cdot x - \rho g\left(1 + \frac{\vec{a}_z}{g}\right)z + P_0$$

P_0 = es la presión en el punto x = 0; z = 0

Ecuación que da la presión en un punto genérico del fluido que está sometido a las dos aceleraciones objeto de estudio.

Las superficies de presión constante tendrán por ecuación:

$$P - P_0 = cte = 0 = -\rho \cdot \vec{a}_x \cdot dx - \rho g\left(1 + \frac{\vec{a}_z}{g}\right)dz$$

de donde:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-\vec{a}_x}{(\vec{a}_z + g)}$$

ecuación que representa la pendiente del plano inclinado que formaría la superficie libre del líquido.

3.3 Ecuación diferencial del movimiento del fluido como sólido rígido, coordenadas cilíndricas

La ecuación diferencial que caracteriza la distribución de presiones actuantes sobre una partícula elemental de fluido sometida a aceleraciones en todas las direcciones posibles y en coordenadas cilíndricas, se obtiene partiendo del elemento diferencial de fluido definido en la figura T 3.3.

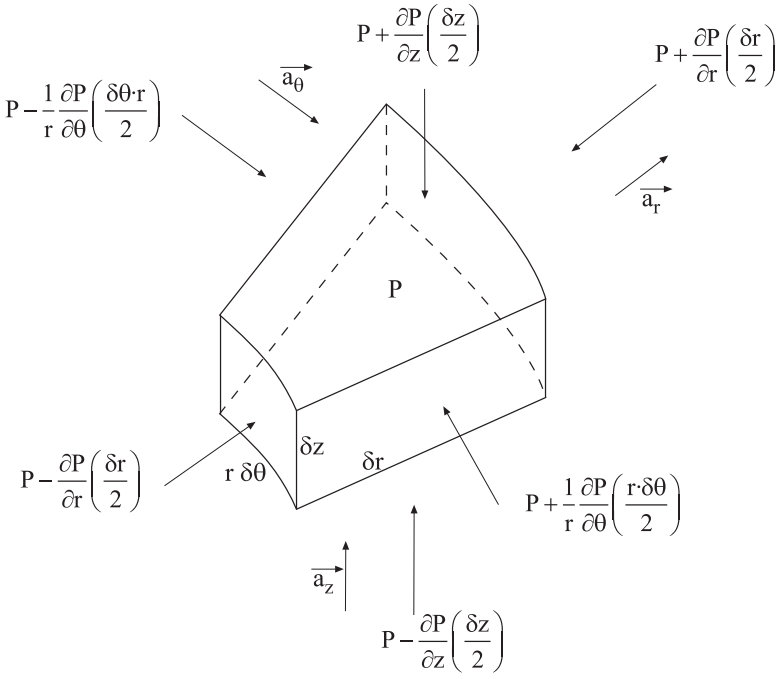


Fig. T 3.3 Elemento diferencial de fluido sometido a una aceleración constante, caso de coordenadas cilíndricas

El sumatorio de fuerzas actuantes sobre cada cara del elemento diferencial en coordenadas cilíndricas da lugar a:

Dirección radial:

$$-\frac{\partial p}{\partial r}\delta r\, r\delta\theta\,\delta z = \delta r\, r\delta\theta\,\delta z\,\rho\,\vec{a}_r$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\,\vec{a}_r$$

$\vec{a}_r = -r\,\omega^2$, aceleración centrípeta.

En dirección angular:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\, r\delta\theta\,\delta r\,\delta z = \delta r\, r\delta\theta\,\delta z\,\rho\,\vec{a}_\theta$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}=\rho \vec{a}_{\theta}$$

$\vec{a}_{\theta}=r\frac{d\vec{\omega}}{dt}$, aceleración tangencial.

En dirección del eje Z:

$$-\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\, r\delta\theta\,\delta r-\delta z\, r\delta\theta\,\delta r\,\rho\, g=\delta r\, r\delta\theta\,\delta z\,\rho\,\vec{a}_{Z}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g=\rho\vec{a}_{Z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho\left(g+\vec{a}_{Z}\right)$$

El diferencial de presión en coordenadas cilíndricas, se establece:

$$dP=\frac{\partial P}{\partial r}\delta r+\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}r\delta\theta+\frac{\partial P}{\partial z}\delta z$$

de donde, sustituyendo las derivadas parciales por sus equivalentes, se obtiene:

$$dP=-\rho\,\vec{a}_{r}dr-\rho\,\vec{a}_{\theta}\,rd\theta-\rho\left(g+\vec{a}_{z}\right)dz$$

Esta es la ecuación diferencial que caracteriza la distribución de presiones a la que es sometido un elemento diferencial de fluido en coordenadas cilíndricas.

Con las ecuaciones diferenciales presentadas hasta el momento, es posible resolver la gran mayoría de problemas de estática y de fluido como sólido rígido. No obstante, hay una serie de ecuaciones que permiten facilitar la resolución de problemas. Estas ecuaciones identifican las fuerzas y su punto de aplicación sobre superficies sumergidas en un fluido sin movimiento. A continuación se presentan dichas ecuaciones.

3.4 Fuerzas sobre superficies planas

Sea la superficie plana genérica que se muestra en la figura T 3.4. La fuerza sobre un elemento diferencial de superficie inmersa en un fluido se da como: $d\vec{F}=P\,d\vec{s}$, y es normal a la superficie.

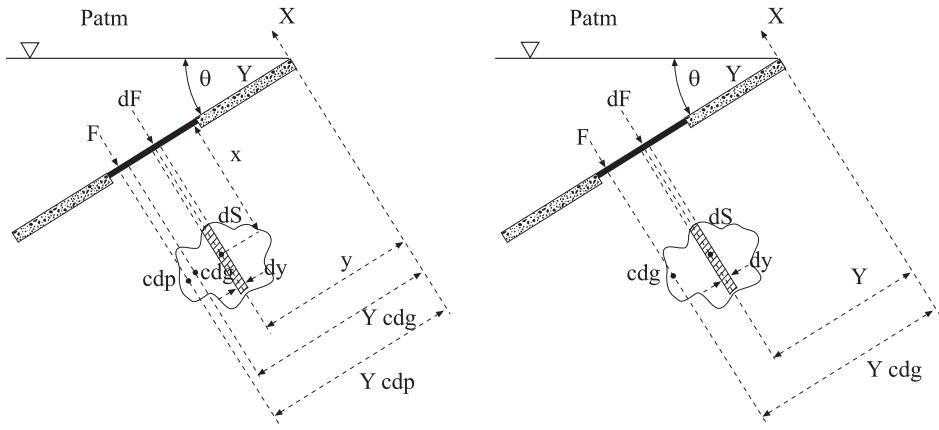


Fig. T 3.4
Fuerzas sobre superficies planas

De la figura anterior, se observa que:

$$h = y\,\mathrm{sen}\theta \quad ; \quad P = \rho g h + P_{atm}$$

Trabajando en presiones relativas:

$$dF = \rho g y\,\mathrm{sen}\theta ds$$
$$F = \rho g\,\mathrm{sen}\theta \int y ds$$

El centroide, o centro de gravedad de una superficie, se define como:

$$y_{cdg} = \frac{\int y ds}{S}$$

y_{cdg} = distancia desde el origen de coordenadas hasta el centro de gravedad de la superficie de área S.

Así, la fuerza sobre la placa se puede dar en función de la distancia al centro de gravedad de la superficie sumergida:

$$F = \rho g\,\mathrm{sen}\theta\, y_{cdg} S \text{, puesto que } h_{cdg} = y_{cdg}\mathrm{sen}\theta$$

$$F = \rho g h_{cdg} S$$

$$F = P_{cdg} S$$

Se concluye que la fuerza sobre una superficie plana sumergida es el producto de la presión sobre el centro de gravedad (cdg) de la superficie por la superficie.

Determinación del centro de presiones. Se define el centro de presiones (cdp) como la línea de acción sobre la cual está aplicada la fuerza resultante sobre la superficie en estudio.

Aplicando momentos de cada elemento diferencial de fuerza sobre los ejes coordenados, se tiene:

$$F \cdot y_{cdp} = M_{xp} = \int y \cdot P ds$$
$$F \cdot x_{cdp} = M_{yp} = \int x \cdot P ds$$

La fuerza que el fluido ejerce sobre la superficie es $F = \int P ds$.

De las ecuaciones del balance de momentos, se obtiene:

$$y_{cdp} = \frac{\int y \cdot P \cdot ds}{F} = \frac{\int y \cdot P \cdot ds}{\int P \cdot ds}$$
$$x_{cdp} = \frac{\int x \cdot P \cdot ds}{\int P \cdot ds}$$

La presión en un punto cualquiera de la superficie vale:

$$P = \rho g y \operatorname{sen}\theta$$

con lo cual:

$$y_{cdp} = \frac{\int \rho g \operatorname{sen}\theta y^2 \cdot ds}{\int \rho g \operatorname{sen}\theta y \cdot ds} = \frac{\int y^2 \cdot ds}{\int y \cdot ds} = \frac{I_x}{y_{cdg} S} \quad (1)$$

Obsérvese que el concepto de momento de inercia de una superficie con respecto a un eje X externo es:

$$I_x = \int y^2 \cdot ds$$

Según el teorema de Steiner o de los ejes paralelos:

$$I_x = I_{x\,cdg} + y_{cdg}^2 \cdot S$$

I_{xcdg} = momento de inercia del área con respecto a un eje X que pasa por el centro de gravedad de la superficie.

Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene:

$$y_{cdp} = \frac{I_{x\,cdg} + y_{cdg}^2 \cdot S}{y_{cdg} \cdot S} = \frac{I_{xcdg}}{y_{cdg} \cdot S} + y_{cdg}$$
$$y_{cdp} - y_{cdg} = \frac{I_{xcdg}}{y_{cdg} \cdot S}$$

$I_{x\,cdg}$ es el momento de inercia de la superficie objeto de estudio respecto al eje X que pasa por su centro de gravedad.

Se concluye que el centro de presión se encuentra debajo del centro de gravedad a una distancia que vale $\frac{I_{xcdg}}{y_{cdg} \cdot S}$.

Para localizar el centro de presiones respecto al eje X se procede del mismo modo y se obtiene:

$$x_{cdp} = \frac{\int xP \cdot ds}{\int P \cdot ds} = \frac{\int x \rho g y \sin\theta \cdot ds}{\int \rho g y \sin\theta \cdot ds} = \frac{\int x \rho g y \sin\theta \cdot ds}{\rho g \sin\theta \int y \cdot ds} = \frac{\int x\ y \cdot ds}{\rho g \sin\theta\, y_{cdg} S} = \frac{\int x\ y \cdot ds}{y_{cdg} S}$$

$$x_{cdp} = \frac{\int xy \cdot ds}{y_{cdg} S} = \frac{I_{xy}}{y_{cdg} S}$$

I_{xy} es el momento de inercia (cruzado) de la superficie objeto de estudio respecto a los ejes de coordenadas de referencia.

Según Steiner:

$$I_{xy} = I_{xycdg} + x_{cdg} y_{cdg} \cdot S$$

con lo cual:

$$x_{cdp} = \frac{I_{xycdg} + x_{cdg} y_{cdg} \cdot S}{y_{cdg} \cdot S} = \frac{I_{xycdg}}{y_{cdg} \cdot S} + x_{cdg}$$

$$x_{cdp} - x_{cdg} = \frac{I_{xycdg}}{y_{cdg} \cdot S}$$

I_{xycdg} representa el momento de inercia cruzado de la superficie objeto de estudio con respecto a los ejes de coordenadas que pasan por su centro de gravedad.

3.5 Fuerzas sobre superficies curvas

Sea la superficie curva de la figura T 3.5. Sea dF la fuerza elemental que actúa sobre un diferencial de superficie.

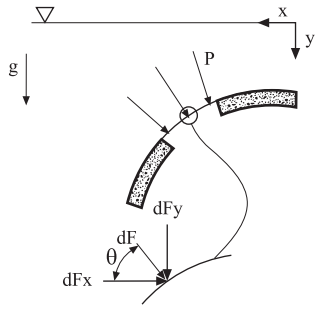


Fig. T 3.5 Fuerzas actuantes sobre superficies curvas

La componente horizontal de la fuerza elemental que actúa sobre la superficie diferencial valdrá:

$$dF_x = dF\cos\theta = Pds\cos\theta$$

La proyección del elemento diferencial de superficie en la dirección perpendicular a la componente de fuerza en dirección x es:

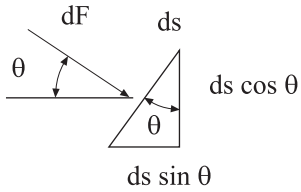


Fig. T 3.6 Diferencial de fuerza actuando sobre un diferencial de superficie

$$ds\cos\theta = ds_x$$

$$ds\,\sin\theta = ds_y$$

Con lo cual:

$$F_x = \int Pds_x = \int \rho ghds_x$$

Recordando que $h_{cdg} = \dfrac{\int h\,ds_X}{s_X}$, se obtiene:

$$F_x = \int \rho ghds_x = \rho g h_{cdg\,X}\, s_x = P_{cdg\,X}\, s_x$$

S_x es la proyección de la superficie curva con respecto al eje Y.

$h_{cdg\,X}$ sería la distancia desde el origen de coordenadas situado en la superficie del depósito al centro de gravedad de la proyección de la superficie curva.

Se concluye que la componente horizontal de la fuerza resultante sobre la superficie curva será la presión sobre el centro de gravedad de la proyección, multiplicado por la superficie proyectada.

Para determinar la línea de acción de la fuerza horizontal, centro de presiones, se trabajará con la proyección de la superficie, aplicando las mismas expresiones que para una placa plana.

La componente vertical de una fuerza de presión sobre una superficie curva se obtiene:

$$dF_y = Pds\sin\theta$$
$$dF_y = \rho ghds\sin\theta = \rho ghds_y$$
$$F_y = \rho g\int hds_y = \rho g\forall$$

$h\,ds_y$ = volumen elemental de fluido situado encima de la superficie.

La línea de acción de la componente vertical de la fuerza pasará a través del centro de gravedad del volumen de líquido situado encima de dicha superficie.

Para superficies tridimensionales, existirán dos componentes horizontales y una vertical.

3.6 Fuerzas sobre volúmenes sumergidos

Según Arquímedes, todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido experimenta una fuerza ascendente igual al peso del fluido que desaloja. Con el fin de comprobar este principio, se realiza la siguiente demostración matemática.

Sean el cuerpo sumergido de la figura T 3.7, y una columna de fluido elemental que atraviesa dicho cuerpo.

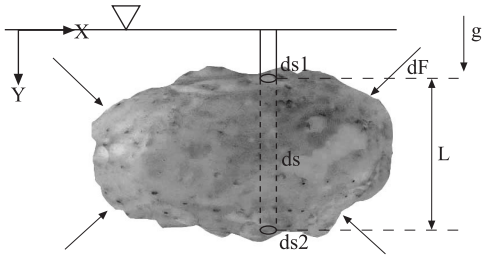


Fig. T 3.7 Fuerzas actuantes sobre un volumen sumergido

La fuerza de presión resultante sobre las dos superficies elementales es:

$$dF = P_1 ds_{1y} - P_2 ds_{2y}$$

Puesto que las proyecciones con respecto a un plano horizontal de las dos áreas elementales son iguales $ds_{1y} = ds_{2y} = ds_y$, se concluye:

$$dF = (P_1 - P_2)ds_y = (\rho g h_1 - \rho g h_2)ds_y = \rho g L ds_y$$
$$F = \int \rho g \, L ds_y = \rho g \int L ds_y = \rho g \forall$$

donde $\int L ds_y$ es el volumen del cuerpo sumergido.

Se concluye que la fuerza en sentido ascendente que actúa sobre un cuerpo total o parcialmente sumergido es igual al peso de fluido desalojado por dicho cuerpo.

La línea de acción de la fuerza de flotación pasa a través del centroide del volumen desplazado. Este centroide se denomina *centro de flotación* (es el centro de gravedad del volumen desplazado)

Extensión del principio de Arquímedes para el caso de tener un cuerpo sumergido entre dos fluidos.

Sea un cuerpo de volumen $\forall$ sumergido entre dos líquidos de densidad diferente tal y como muestra la figura T 3.8.

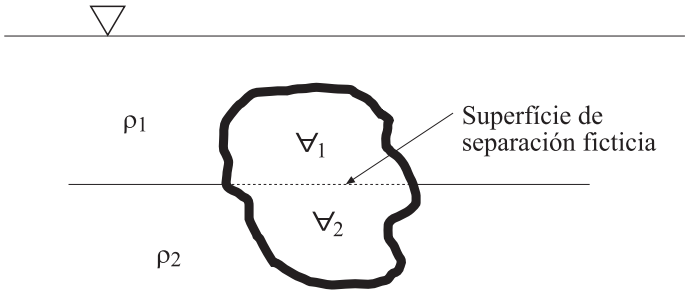


Fig. T 3.8 Cuerpo tridimensional sumergido entre dos fluidos de diferentes densidades

La segunda ley de Newton, aplicada en dirección vertical al cuerpo sumergido, establece que el peso del cuerpo ha de ser igual a la suma de las fuerzas elementales de presión que actúan sobre cada uno de los elementos diferenciales de superficie del cuerpo. En forma de ecuación se establece:

$$\oint_{SC} -P\vec{ds}\Big|_j = mg$$

De hecho la superficie del cuerpo puede descomponerse en dos superficies, las que están en contacto con cada uno de los dos fluidos diferentes. Así la ecuación anterior se puede dar como:

$$\int_{SC_{fluido\ 1}} -P\vec{ds}\Big|_j + \int_{SC_{fluido\ 2}} -P\vec{ds}\Big|_j = mg$$

Recuérdese que la superficie total del cuerpo es igual a: $SC_{fluido\ 1} + SC_{fluido\ 2} = SC$.

Añadiendo a estas superficies la superficie de separación entre el volumen superior e inferior, superficie ficticia en donde actuarían de manera ficticia las fuerzas debidas a la presión del fluido superior e inferior, se puede establecer matemáticamente que:

$$\int_{SC_{fluido\ 1}} -P\vec{ds}\Big|_j + \int_{SC_{fluido\ 2}} -P\vec{ds}\Big|_j + \int_{SC_{ficitia}} -P\vec{ds}\Big|_j + \int_{SC_{ficitia}} -P\vec{ds}\Big|_j = mg$$

En este punto hay que puntualizar que sobre dicha superficie ficticia de separación no actúa ninguna presión puesto que no está en contacto con el fluido, lo cual implica que cada una de las dos integrales añadidas tiene en realidad un valor nulo. Es necesario

además tener presente que la superficie en contacto con el fluido 1 más la superficie ficticia, da lugar a una superficie cerrada que engloba el volumen $\forall_1$, lo equivalente sucede con la superficie en contacto con el fluido 2 y la superficie ficticia, las cuales engloban el volumen $\forall_2$. Matemáticamente estos conceptos se pueden expresar:

$$\oint_{SC\ fluido1+sup\ ficticia} -P\,\overrightarrow{ds}\Big|_j + \oint_{SC\ fluido1+sup\ ficticia} -P\,\overrightarrow{ds}\Big|_j = mg$$

Puesto que las dos integrales de superficie son ahora cerradas, se puede aplicar a cada una de ellas el teorema de Gauss-Ostrogradsky, o teorema de la divergencia, obteniendo:

$$\int_{\forall_1} -\nabla P\ d\forall + \int_{\forall_2} -\nabla P\ d\forall = mg$$

En estática de fluidos el gradiente de presiones en dirección vertical, se define como: $\nabla P = \frac{dP}{dy} = -\rho\ g$, con lo que la ecuación precedente se puede dar como:

$$\int_{\forall_1} \rho_1\ g\, d\forall + \int_{\forall_2} \rho_2\, g\ d\forall = mg$$

O bien:

$$\rho_1\ g \forall_1 + \rho_2\ g \forall_2 = mg = \forall \rho_C g$$

Cabe recordar que la suma de los dos volúmenes da lugar al volumen total del cuerpo.

$$\forall_1 + \forall_2 = \forall$$

Queda demostrado que si un cuerpo está totalmente o parcialmente sumergido entre dos o más fluidos de densidades diferentes, el empuje vertical y hacia arriba que los fluidos ejercen sobre el cuerpo es equivalente a cada uno de los volúmenes por la densidad del fluido en el que está sumergido dicho volumen y por la gravedad. Es decir, el empuje es igual al peso del fluido de cada uno de los volúmenes sumergidos si estos estuviesen llenos del fluido en el que están sumergidos.

Problema 9

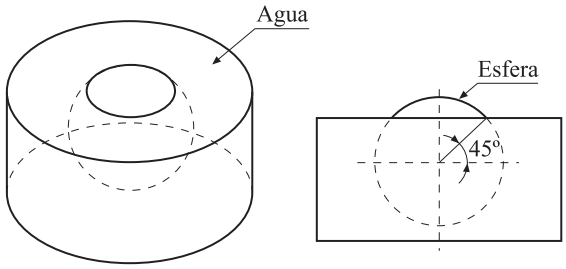
Enunciado

Sea una esfera de radio la unidad, sumergida parcialmente en agua. Se conoce que, en la posición de equilibrio, el punto de tangencia del casquete esférico que sobresale del líquido con el eje de abscisas que pasa por el centro de la esfera forman un ángulo de 45 grados. Determine:

1. La densidad del material de que está compuesta la esfera.

2. Si la esfera se sumerge en mercurio, determine el nivel de mercurio respecto al eje central de la esfera.

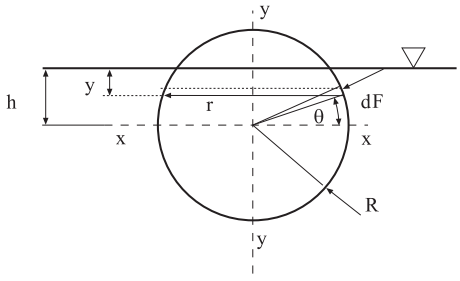
Fig. 9.1 Esquema de la esfera parcialmente sumergida



Resolución

1. El elemento diferencial de superficie empleado para determinar el empuje queda esquematizado en la figura 9.2.

Fig. 9.2 Esquema del elemento diferencial empleado



$$E = -\int_s dF_y = -\int_s dF\sin\theta = -\int_s \rho g y \cdot 2\pi r \cdot R d\theta \cdot \sin\theta;$$

puesto que: $\begin{cases} r = R\cos\theta \\ y = h - R\sin\theta \end{cases}$

$$E = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho g(h - R\sin\theta)\cdot 2\pi R\cos\theta\cdot R\cdot\sin\theta d\theta;$$

$$E = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho gh\cdot 2\pi R^2\cos\theta\sin\theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho g 2\pi R^3\sin^2\theta\cos\theta d\theta; \qquad (1)$$

$$E = -\rho gh 2\pi R^2\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} + \rho g 2\pi R^3\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

Para $\theta=\frac{\pi}{4}$; $\quad h=R\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=R\sin(45^o)$

$$E = -\rho gh 2\pi R^2\frac{1}{2}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\rho g 2\pi R^3\frac{1}{3}\left[\sin^3\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

$$E = -\rho gh 2\pi R^2\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-1\right]+\rho g 2\pi R^3\frac{1}{3}\left[0,353553-(-1)\right];$$

$$E = \rho gh 2\pi R^2\left(\frac{1}{4}\right)+\rho g 2\pi R^3\frac{1}{3}(1,353553);$$

$$E = \rho g 2\pi\left[\frac{R^2}{4}h+\frac{R^3}{3}(1,353553)\right];$$

$$E = \rho g 2\pi\left[\frac{R^3\sin 45^o}{4}+\frac{R^3}{3}(1,353553)\right];$$

$$E = \rho g 2\pi R^3\left[\frac{\sin 45^o}{4}+\frac{1,353553}{3}\right]=\rho g 2\pi R^3\cdot 0,62796=\rho g\pi R^3\cdot 1,2559$$

El peso de la esfera ha de ser igual a su empuje, con lo cual se ha de cumplir:

$$w=\rho_E g\frac{4}{3}\pi R^3 = E=\rho_{H_2O} g\pi R^3\cdot 1,2559$$

$$\rho_E=\frac{\rho_{H_2O}\cdot 1,2559}{\frac{4}{3}}=941,94\ \frac{Kg}{m^3}$$

Véase que, tal como cabía esperar, la densidad es menor que la densidad del agua.

2. Si la esfera se sumerge en el mercurio, y dado que la densidad del mercurio es 13,6 veces la densidad del agua, se puede realizar una estimación inicial calculando si la mitad de la esfera quedará o no cubierta por el mercurio. Para ello, se ha de evaluar si se cumple:

$$\text{Peso}_{\text{esfera}} = W_{\text{esfera}} = \rho_{\text{esfera}} g \frac{4}{3}\pi R^3 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \rho_{Hg} g \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3$$

y se cumple que : $\rho_E < \rho_{Hg}\frac{1}{2}$

con lo cual, seguro que únicamente un pequeño casquete esférico quedará sumergido en el mercurio.

Dado que el elemento diferencial de empuje es el mismo que en el apartado inicial, se llega a la misma expresión (1) que en dicho apartado, aunque ahora la densidad de fluido es la del mercurio.

$$E = -\rho_{Hg}\, gh2\pi R^2 \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} + \rho_{Hg}\, g2\pi R^3 \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

de donde:

$$E = \rho_{Hg}\, g2\pi R^2 \left\{\left[\frac{R}{3}\left(\sin^3\theta - \sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] - \left[\frac{h}{2}\left(\sin^2\theta - \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]\right\}; \qquad (2)$$

Con el fin de comprobar la bondad de la ecuación hallada, se comprueba que para $\theta = 0$ se cumple que $h = 0$, con lo cual el empuje debería ser el equivalente al de media esfera.

$$E = \rho_{Hg}\, g2\pi R^2 \left[\frac{R}{3}(0+1) - \frac{h}{2}(0-1)\right]$$

$$E = \rho_{Hg}\, g2\pi R^2 \left[\frac{R}{3} + \frac{h}{2}\right]$$

$$E = \rho_{Hg}\, g2\pi \frac{R^3}{3} = \rho_{Hg}\, g\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{2}$$

Véase que se cumple.

La determinación del ángulo θ se obtendrá de igualar el peso de la esfera a la ecuación del empuje en función de dicho ángulo.

El peso de la esfera viene dado por:

$$W_{\text{esfera}} = \rho_{\text{esfera}} g\frac{4}{3}\pi R^3 = 941{,}94 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = 38666{,}77 \text{ N} \qquad (3)$$

La figura 9.3 es la representación gráfica de la ecuación (2), obsérvese que $h = R \sin\theta$, entrando para el peso de la esfera se obtiene el ángulo θ que forma la superficie libre del mercurio con el eje de abcisas central de la esfera. Cuyo valor es de $\theta = -42{,}7^{\circ}$.

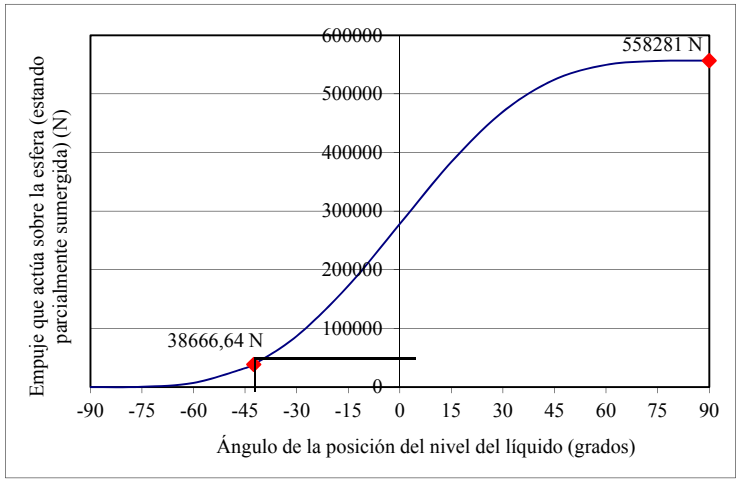


Fig. 9.3 Representación gráfica de la ecuación 2

Problema 10

Enunciado

Sea una esfera de radio R sumergida entre dos fluidos de densidades diferentes. Determinar la relación entre la densidad de la esfera y la de ambos fluidos si se considera que la mitad de la esfera está sumergida en el fluido inferior y la otra mitad, en el fluido superior. Extender la relación para un caso genérico.

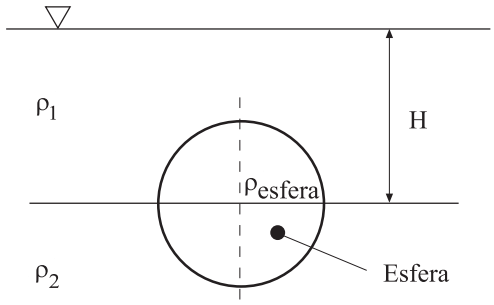


Fig. 10.1 Conjunto de la esfera sumergida entre dos fluidos de densidades diferentes

Resolución

1. Para determinar la relación que se pide en el problema, se ha de realizar un balance de fuerzas entre el peso de la esfera y la fuerza ascensorial ejercida por los dos fluidos.

La fuerza diferencial ejercida sobre el elemento diferencial de superficie establecido en la parte inferior de la esfera se define como (v. figura 10.2):

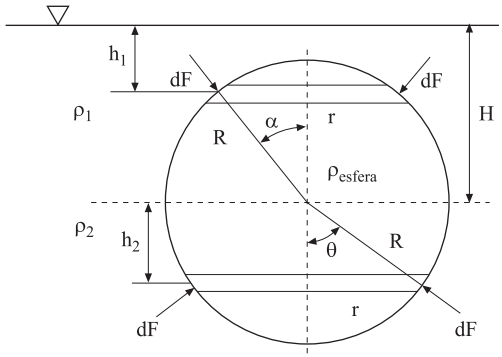


Fig.10.2. Esfera con los correspondientes elementos diferenciales de fuerza en la parte superior e inferior de la misma

$$dF_{inf} = \left(P_{atm} + \rho_1 g H + \rho_2 g h_2\right) 2\pi R \sin\theta R\, d\theta$$

Puesto que lo que se requiere es la componente vertical de dicha fuerza,

$$dF_{Y\,inf} = dF_{inf} \cos\theta$$

$$dF_{Y\,inf} = \left(P_{atm} + \rho_1 g H + \rho_2 g h_2\right) 2\pi R \sin\theta \cos\theta R\, d\theta$$

Integrando entre el valor mínimo y el máximo del ángulo θ, una vez se ha considerado el valor variable de h_2, se tiene:

$$\int_0^{F_{Y\,inf}} dF_{Y\,inf} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(P_{atm} + \rho_1 g H + \rho_2 g R\cos\theta\right) 2\pi R^2 \sin\theta \cos\theta\, d\theta$$

$$F_{Y\,inf} = \left(P_{atm} + \rho_1 g H\right) 2\pi R^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \rho_2 g 2\pi R^3 \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$F_{Y\,inf} = \left(P_{atm} + \rho_1 g H\right) \pi R^2 + \rho_2 g 2\pi R^3 \frac{1}{3}$$

Para la parte superior de la esfera, se puede establecer:

$$dF_{sup} = \left(P_{atm} + \rho_1 g h_1\right) 2\pi R \sin\alpha R\, d\alpha$$

La componente vertical de esta fuerza se definirá como (obsérvese que se ha tenido en cuenta el signo de la fuerza):

$$dF_{Y\,sup} = -dF \cos\alpha = -\left(P_{atm} + \rho_1 g h_1\right) 2\pi R \sin\alpha \cos\alpha R\, d\alpha$$

Sustituyendo el valor de h_1 por su equivalente, se obtiene:

$$dF_{Y\,sup} = -dF \cos\alpha = -\left(P_{atm} + \rho_1 g\left(H - R\cos\alpha\right)\right) 2\pi R \sin\alpha \cos\alpha R\, d\alpha$$

E integrando entre límites se obtiene:

$$\int_0^{F_{Y\,sup}} dF_{Y\,sup} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\left(P_{atm} + \rho_1\, g\left(H - R\,\cos\alpha\right)\right) 2\pi\, R\, \sin\alpha\, \cos\alpha\, R\, d\alpha$$

El resultado de la integración es:

$$F_{Y\,sup} = -\left(P_{atm} + \rho_1\, g\, H\right) 2\pi\, R^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \rho_1\, g\, 2\pi\, R^3 \left[-\frac{1}{3}\cos^3\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

de donde:

$$F_{Y\,sup} = -\left(P_{atm} + \rho_1\, g\, H\right) 2\pi\, R^2 \left[\frac{1}{2}\right] + \rho_1\, g\, 2\pi\, R^3 \left[\frac{1}{3}\right]$$

La fuerza total debida a los dos fluidos que actúan sobre la esfera será:

$$F_{Y\,Total} = F_{Y\,inf} + F_{Y\,sup}$$

$$F_{Y\,Total} = \left(P_{atm} + \rho_1\, g\, H\right) \pi\, R^2 + \rho_2 g 2\pi\, R^3 \frac{1}{3} - \left(P_{atm} + \rho_1\, g\, H\right) 2\pi\, R^2 \left[\frac{1}{2}\right] + \rho_1\, g\, 2\pi\, R^3 \left[\frac{1}{3}\right]$$

y se obtiene:

$$F_{Y\,Total} = \rho_2 g\pi\, R^3 \frac{2}{3} + \rho_1 g\pi\, R^3 \frac{2}{3}$$

Esta es la fuerza de empuje que los dos fluidos crean sobre la esfera. Puesto que la esfera está en equilibrio, dicha fuerza ha de ser igual al peso de la esfera, de donde:

$$\pi\, R^3 \frac{4}{3} \rho_{esfera}\; g = \rho_2 g\pi\, R^3 \frac{2}{3} + \rho_1 g\pi\, R^3 \frac{2}{3}$$

y resulta:

$$\rho_{esfera} = \rho_2 \frac{1}{2} + \rho_1 \frac{1}{2}$$

siendo esta la relación entre las densidades de los fluidos y la densidad de la esfera.

Es necesario remarcar que este mismo resultado se habría podido obtener con mayor facilidad si se hubiese aplicado el principio de Arquímedes.

Así, recordando que el empuje sobre el cuerpo sumergido es igual al peso del fluido desalojado, se establece:

$$F_{\text{empuje de Arquímedes}} = \rho_2 g\pi R^3 \frac{2}{3} + \rho_1 g\pi R^3 \frac{2}{3}$$

E igualando esta ecuación al peso de la esfera, se obtiene el resultado del problema:

$$\rho_{\text{esfera}} g\pi R^3 \frac{4}{3} = \rho_2 g\pi R^3 \frac{2}{3} + \rho_1 g\pi R^3 \frac{2}{3}$$

$$\rho_{\text{esfera}} = \rho_2 \frac{1}{2} + \rho_1 \frac{1}{2}$$

2. En la segunda parte del problema, se pide extender el resultado obtenido para que sea aplicable a un caso genérico, es decir, cuando el plano que divide los dos fluidos divida la esfera en dos volúmenes no simétricos. Este caso se define en la figura 10.3.

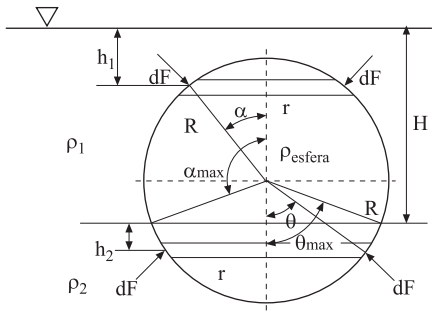


Fig. 10.3 Esfera con los correspondientes elementos diferenciales de fuerza en la parte superior y en la inferior de la misma. Caso de aplicación genérico

Para este caso genérico, las ecuaciones utilizadas en el apartado anterior son igualmente válidas. Únicamente será necesario modificar los límites de integración de las mismas, y quedará:

Fuerza ascensorial sobre la parte inferior de la esfera:

$$F_{Y\,\text{inf}} = \left(P_{\text{atm}} + \rho_1 g H\right) 2\pi R^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\theta_{\max}} + \rho_2 g 2\pi R^3 \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\theta_{\max}}$$

Fuerza ascensorial para la parte superior de la esfera:

$$F_{Y\,\text{sup}} = -\left(P_{\text{atm}} + \rho_1 g H\right) 2\pi R^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right]_0^{\alpha_{\max}} + \rho_1 g\, 2\pi R^3 \left[-\frac{1}{3}\cos^3\alpha\right]_0^{\alpha_{\max}}$$

La fuerza neta se obtendrá de realizar la suma algebraica de las dos ecuaciones anteriores, dado que los signos correspondientes ya están incluidos en dichas ecuaciones. Dicha fuerza resultante se igualará al peso de la esfera con el fin de obtener la densidad de la misma.

Problema 11

Enunciado

El esquema de la figura 11.1 presenta un cuerpo tridimensional sumergido parcialmente entre capas de diferentes fluidos. Las dimensiones del cuerpo, la densidad de cada uno de los fluidos así como el espesor de cada una de las capas son conocidos. Se pide.

1. Determinar la densidad del cuerpo, si se conoce la posición del mismo, altura h_0.

2. Hallar la posición que dicho cuerpo adoptará si se sumerge en un fluido de densidad conocida ρ=1010 Kg/m^3.

Datos: $\rho_1 = 780\,\frac{Kg}{m^3}$; $\rho_2 = 875\,\frac{Kg}{m^3}$; $\rho_3 = 1010\,\frac{Kg}{m^3}$;

$h_0 = 0,2$ m; $h_1 = 0,5$ m; $h_2 = 0,5$ m; $L_1 = 1$ m; $L_2 = 1$ m; $R_1 = 0,5$ m; $R_2 = 1$ m;

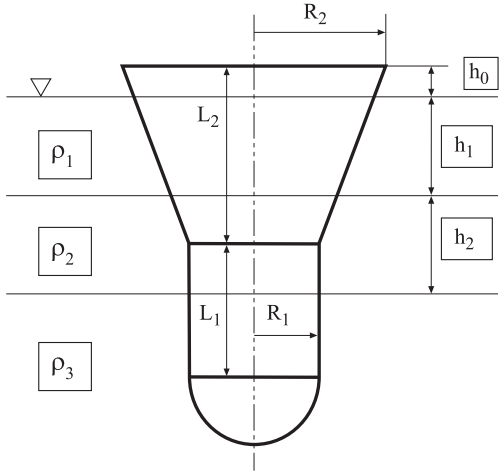


Fig. 11.1
Esquema del cuerpo tridimensional sumergido entre diversos fluidos

Resolución

1. Para la resolución del primer apartado se determinan las fuerzas en dirección vertical que actúan sobre las superficies: cónica y sumergida en el fluido de densidad ρ_1, cónica y sumergida en el fluido de densidad ρ_2 y semiesférica, la cual está en contacto con el fluido de densidad ρ_3.

1a. Fuerza vertical sobre la superficie cónica sumergida en el fluido de densidad ρ_1.

El elemento diferencial de fuerza actuante sobre un diferencial de superficie lateral del cono toma la forma, ver figura 11.2:

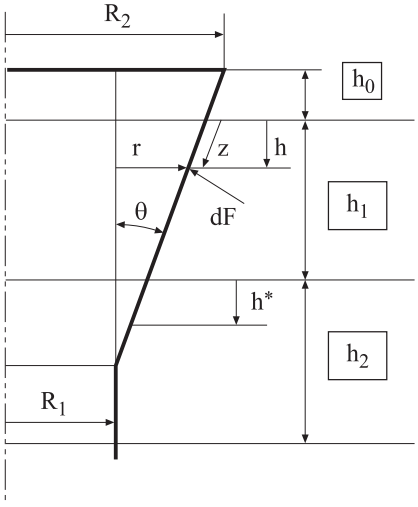


Fig. 11.2
Definición del elemento diferencial de fuerza sobre una superficie cónica

$$dF_{Y1} = \rho_1 g\, h\, ds\, \sin\theta$$

El diferencial de superficie se define como:

$$ds = 2\,\pi\, r\, dz; \quad dz = \frac{dh}{\cos\theta}; \quad r = R_2 - (h_0 + h)\,\tan\theta$$

De donde el diferencial de fuerza será:

$$dF_{Y1} = \rho_1 g 2\,\pi\, h\left(R_2 - (h_0 + h)\tan\theta\right)\frac{dh}{\cos\theta}\sin\theta$$

Integrando a lo largo de todo el dominio, zona donde existe fluido de densidad ρ_1, se tiene:

$$\int_0^{F_{Y1}} dF_{Y1} = \rho_1\, g 2\,\pi \tan\theta \int_0^{h_1} h\left(R_2 - (h_0 + h)\,\tan\theta\right)\, dh$$

Teniendo en cuenta que: $\tan\theta = \dfrac{R_2 - R_1}{L_2}$; la fuerza vertical valdrá:

$$F_{Y1} = \rho_1\, g 2\,\pi \frac{R_2 - R_1}{L_2}\left[\frac{h_1^2}{2}R_2 - \frac{h_0\, h_1^2}{2}\left(\frac{R_2 - R_1}{L_2}\right) - \frac{h_1^3}{3}\left(\frac{R_2 - R_1}{L_2}\right)\right]$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de las variables dadas en el enunciado del problema, se obtiene:

$$F_{Y1} = 2203{,}568\ \text{N}$$

1b. Fuerza vertical sobre la superficie cónica sumergida en el fluido de densidad ρ_2.

El proceso a seguir es el mismo que el utilizado en el sub-apartado anterior, el diferencial de fuerza en dirección vertical ahora se define como:

$$dF_{Y2} = \left(\rho_1\ h_1 + \rho_2\ h^*\right)\ g\ \ ds\ \sin\theta$$

Obsérvese que el valor de la distancia h^* se mide a partir del nivel superior del fluido de densidad ρ_2 y hacia abajo.

El diferencial de superficie lateral se definirá en este caso como:

$$ds = 2\ \pi\ r\ dz; \quad dz = \frac{dh^*}{\cos\theta}; \quad r = R_2 - \left(h_0 + h_1 + h^*\right)\ \tan\theta$$

$$ds = 2\ \pi\left(R_2 - \left(h_0 + h_1 + h^*\right)\ \tan\theta\right)\frac{dh^*}{\cos\theta};$$

Sustituyendo en la ecuación de la fuerza vertical se obtiene:

$$dF_{Y2} = \left(\rho_1\ h_1 + \rho_2\ h^*\right)\ g\ 2\ \pi\left(R_2 - \left(h_0 + h_1 + h^*\right)\ \tan\theta\right)\frac{dh^*}{\cos\theta}\ \sin\theta$$

Integrando a lo largo de la zona donde la superficie lateral cónica está en contacto con el fluido de densidad ρ_2 se tiene:

$$F_{Y2} = g2\ \pi\ \tan\theta\int_0^{L_2 - h_0 - h_1}\left(\rho_1\ h_1 + \rho_2\ h^*\right)\left(R_2 - \left(h_0 + h_1 + h^*\right)\ \tan\theta\right)dh^*$$

$$F_{Y2} = g2\ \pi\ \tan\theta\left[\begin{array}{l} K\ \rho_1\ h_1\left(R_2 - \left(h_0 + h_1\right)\ \tan\theta\right) - \rho_1\ h_1\ \tan\theta\ \dfrac{K^2}{2} \\ +\rho_2\left(R_2 - \left(h_0 + h_1\right)\ \tan\theta\right)\dfrac{K^2}{2} - \dfrac{K^3}{3}\rho_2\tan\theta \end{array}\right]$$

$$\text{De donde: } K = L_2 - h_0 - h_1; \quad \tan\theta = \frac{R_2 - R_1}{L_2};$$

Sustituyendo los valores definidos en el enunciado en la ecuación que caracteriza la fuerza sobre esta segunda superficie lateral cónica, se tiene:

$$F_{Y2} = 2740,774\ \text{N}$$

1c. Fuerza vertical sobre la superficie semiesférica, la cual está en contacto con el fluido de densidad ρ_3.

La figura 11.3 muestra el elemento diferencial de fuerza para este caso.

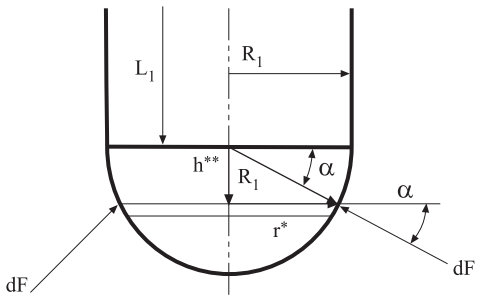


Fig. 11.3 Elemento diferencial de fuerza actuando sobre la diferencial de superficie lateral de la semiesfera

El diferencial de fuerza en dirección vertical se define como:

$$dF_{Y3} = \left(\rho_1\ h_1 + \rho_2\ h_2 + \rho_3 \left(L_2 + L_1 - h_0 - h_1 - h_2\right) + \rho_3 h^{**}\right)\ g\ \ ds\ \sin\alpha$$

El diferencial de superficie lateral será ahora:

$$ds = 2\ \pi\ r^*\ R_1\ d\alpha; \quad h^{**} = R_1 \sin\alpha; \quad r^* = R_1 \cos\alpha$$

de donde el diferencial de fuerza vertical se puede dar:

$$dF_{Y3} = \left(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 \left(L_2 + L_1 - h_0 - h_1 - h_2\right) + \rho_3 R_1 \sin\alpha\right) g 2\pi R_1^2 \sin\alpha\ \cos\alpha\ d\alpha$$

Integrando se obtiene:

$$F_{Y3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(C + \rho_3\ R_1\ \sin\alpha\right)\ g 2\ \pi\ R_1^2\ \sin\alpha\ \cos\alpha\ d\alpha$$

$$F_{Y3} = g 2\ \pi\ R_1^2 \left[C\ \frac{\sin^2\alpha}{2} + \rho_3\ R_1\ \frac{\sin^3\alpha}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Véase que la constante C toma el valor:

$$C = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 \left(L_2 + L_1 - h_0 - h_1 - h_2\right)$$

Sustituyendo las variables por los valores dados en el enunciado se obtiene:

$$F_{Y3} = 15195{,}01\ \text{N}$$

El empuje que los diversos fluidos ejercen sobre el cuerpo toma el valor:

$$E = F_{Y1} + F_{Y2} + F_{Y3} = 20139{,}34\ \text{N}$$

El volumen total del cuerpo bajo estudio será:

$$\forall_{total} = \forall_{cono} + \forall_{cilindro} + \forall_{semiesfera}$$

$$\forall_{total} = \frac{L_2\,\pi}{3}\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1\ R_2\right) + \pi\, R_1^2\ L_1 + \frac{2}{3}\ \pi\ R_1^3$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\forall_{total} = 2,87968\ m^3$$

De donde la densidad del cuerpo será:

$$\rho_{cuerpo} = \frac{E}{g\ \forall_{total}} = \frac{20139,34}{9,81*2,87968} = 712,90\ \frac{Kg}{m^3}$$

1.2.- Un segundo método, mucho más directo, para resolver el problema sería aplicando el principio de Arquímedes. Seguidamente se va a resolver este problema utilizando dicho principio.

Lo primero a realizar va a ser determinar los diversos volúmenes del cuerpo sumergidos en cada uno de los diferentes fluidos. Así, el volumen sumergido en el fluido de densidad ρ_1, volumen de un tronco de cono, será.

$$\forall_1 = \frac{h_1\,\pi}{3}\left[\left(R_2\text{-}h_0\ \tan\theta\right)^2 + \left(R_2\text{-}\left(h_0\text{+}h_1\right)\ \tan\theta\right)^2 + \left(R_2\text{-}h_0\ \tan\theta\right)\left(R_2\text{-}\left(h_0\text{+}h_1\right)\ \tan\theta\right)\right]$$

Sustituyendo valores se obtiene: $\forall_1 = 0,9516407\ m^3$

El volumen de solido sumergido en el fluido de densidad ρ_2 consiste en una parte cónica y otra cilíndrica, dicho volumen será:

$$\forall_2 = \frac{\left(L_2 - h_1 - h_0\right)\,\pi}{3}\left[\begin{matrix}\left(R_1\right)^2 + \left(R_2 - \left(h_0 + h_1\right)\tan\theta\right)^2 \\ +\left(R_1\right)\left(R_2 - \left(h_0 + h_1\right)\tan\theta\right)\end{matrix}\right] + \pi R_1^2\left(h_0 + h_1 + h_2 - L_2\right)$$

El resultado de sustituir los valores de las variables da lugar a:

$$\forall_2 = 0,470443\ m^3$$

El tercer volumen de sólido, volumen que está sumergido en un fluido de densidad ρ_3, consiste en una parte cilíndrica y otra semiesférica, así, se tiene:

$$\forall_3 = \pi\, R_1^2\left(L_1 + L_2 - h_0 - h_1 - h_2\right) + \frac{2}{3}\ \pi\, R_1^3$$

Su valor será: $\forall_3 = 0,8901455\ \text{m}^3$

Según el principio de Arquímedes, la fuerza vertical y hacia arriba, empuje, que ejerce cada uno de los fluidos sobre el cuerpo será:

$$E = g\left(\rho_1 \forall_1 + \rho_2 \forall_2 + \rho_3 \forall_3\right)$$

$$E = 9,81\left(780*0,9516407 + 875*0,470443 + 1010*0,8901455\right)$$

$$E = 20.139,58\,\text{N}$$

Véase que la fuerza de empuje es exactamente la misma que la obtenida en el primer apartado del problema.

2. El segundo apartado del problema consiste en determinar la posición del cuerpo en estudio, respecto el nivel de la superficie del líquido, cuando dicho cuerpo se sumerge en un único fluido de densidad 1010Kg/m^3.

Del primer apartado del problema se conoce tanto el volumen total del cuerpo como su densidad, con lo que su peso será de:

$$\text{Peso} = \rho_{\text{cuerpo}}\ g\ \forall_{\text{total}} = 712,9*9,81*2,87968 = 20139,18\ \text{N}$$

El empuje que ejerce el fluido sobre el volumen de cuerpo sumergido, ha de ser igual a dicho peso, así el volumen sumergido tendrá un valor de:

$$\forall_{\text{sumergido}} = \frac{\text{Peso}}{\rho_{\text{fluido}} * g} = \frac{20139,18}{1010*9,81} = 2,0325976\ \text{m}^3$$

Véase que este volumen se acerca al volumen total del cuerpo que era de: $\forall_{\text{total}} = 2,87968\ \text{m}^3$, con lo que es lógico suponer que el cuerpo estará sumergido hasta llegar a cierto punto de la parte cónica, así el volumen de cuerpo sumergido se podrá dar como:

$$\forall_{\text{sumergido}} = \frac{2}{3}\,\pi\,R_1^3 + \pi\,R_1^2\,L_2 + \frac{h\,\pi}{3}\left[R_1^2 + \left(R_1 + h\tan\theta\right)^2 + R_1\left(R_1 + h\tan\theta\right)\right]$$

De sustituir valores se tiene que:

$$\frac{2}{3}\,\pi\,R_1^3 = 0,2617994\ \text{m}^3\ ; \quad \text{y} \quad \pi\,R_1^2\,L_2 = 0,7853982\ \text{m}^3$$

Con lo que la ecuación a resolver queda:

$$3\,h\,R_1^2 + 3\,R_1\,h^2\,\tan\theta + h^3\tan^2\theta = 0,940990$$

Es interesante remarcar que, la altura h está definida en esta ecuación como la distancia entre la base inferior de la superficie cónica y la superficie libre del líquido.

Sustituyendo los valores de las variables restantes se obtiene:

$$h + h^2 + \frac{h^3}{3} = 1,254653$$

De la resolución de esta ecuación se obtienen tres resultados, dos son imaginarios y uno real, siendo este h = 0,68263 m.

Es decir la distancia entre superficie superior del cuerpo y el nivel del líquido será:

$$h_{sup} = L_2 - h = 1 - 0.68263 = 0,31737 \text{ m}$$

Problema 12

Enunciado

Determine la localización del centro de presión y de los momentos causados por las fuerzas hidrostáticas sobre el eje que pasa por la base de una placa semicircular de radio la unidad, sumergida completamente e inclinada un ángulo de θ=45º respecto a la superficie libre del líquido.

Considérese que la parte superior de la placa está situada a una distancia respecto al nivel del líquido de h_a (10 m; 100 m; 500 m), por debajo de la superficie del mar.

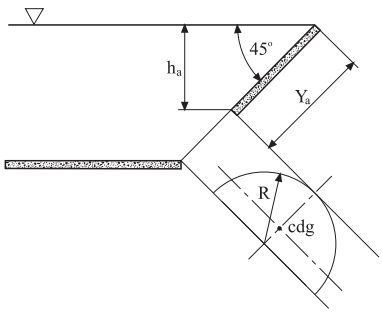


Fig. 12.1
Esquema de la posición de la placa

Resolución

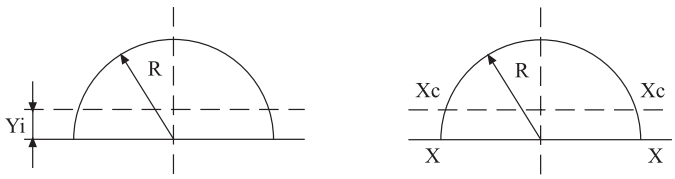


Fig. 12.2
Ejes de referencia

1. Los momentos de inercia respecto al eje central y el que pasa por la base de la placa se establecen:

$$I_{xc} = \frac{\pi R^4}{8}\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right); \qquad I_x = \frac{1}{8}\pi R^4; \qquad Y_i = \frac{4R}{3\pi}$$

Sustituyendo para el momento de inercia que pasa por el eje central, se tiene:

$$I_{xc} = 0,1097 \times R^4$$

La distancia (inclinada) desde la superficie del líquido hasta el centro de gravedad del cuerpo se define:

$$Y_{cdg} = \frac{h_a}{\sin 45} + \left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)$$

$$Y_{cdg10} = Y_{cdg10m} = \frac{10}{\sin 45} + \left(1 - \frac{4\times 1}{3\pi}\right) = 14,717 \text{ m}$$

$$Y_{cdg100} = Y_{cdg100m} = \frac{100}{\sin 45} + \left(1 - \frac{4\times 1}{3\pi}\right) = 141,996 \text{ m}$$

$$Y_{cdg500} = Y_{cdg500m} = \frac{500}{\sin 45} + \left(1 - \frac{4\times 1}{3\pi}\right) = 707,682 \text{ m}$$

El centro de presión en los tres casos está situado:

$$Y_{cdp} - Y_{cdg} = \frac{I_{x_{cdg}}}{Y_{cdg} \times A}$$

$h_a = 10$ m. $\qquad Y_{cdp_{10}} = Y_{cdg_{10}} + \dfrac{I_{x_{cdg}}}{Y_{cdg10} \times A} = 14,717 + \dfrac{0,1097 \times 1^4}{14,717 \times \dfrac{\pi \times 1^2}{2}} = 14,721 \text{ m}$

$$Y_{cdp_{10}} - Y_{cdg_{10}} = 0,00474 \text{ m}$$

$h_a = 100$ m. $\qquad Y_{cdp_{100}} = 141,996 + \dfrac{0,1097 \times 1^4}{141,996 \dfrac{\pi \times 1^2}{2}} = 141,99649 \text{ m}$

$$Y_{cdp_{100}} - Y_{cdg_{100}} = 0,000491 \text{ m}$$

$h_a = 500$ m $\qquad Y_{cdp_{500}} = 707,682 + \dfrac{0,1097 \times 1^4}{707,682 \dfrac{\pi \times 1^2}{2}} = 707,6820987 \text{ m}$

$$Y_{cdp_{500}} - Y_{cdg_{500}} = 0,00009870\,\text{m}$$

Obsérvese que la distancia entre el centro de presiones y el centro de gravedad disminuye a medida que la profundidad aumenta.

La fuerza ejercida sobre la superficie semicircular para las tres profundidades se establece del modo siguiente:

$$F_{10} = \rho\, g\, Y_{cdg_{10}}\, \sin 45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 14,717 \cdot \sin 45 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 160.195,4\,\text{N}$$

$$F_{100} = \rho\, g\, Y_{cdg_{100}}\, \sin 45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 141,996 \cdot \sin 45 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 154.5635,43\text{N}$$

$$F_{500} = \rho\, g\, Y_{cdg_{500}}\, \sin 45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 707,682 \cdot \sin 45 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 770.3163,29\,\text{N}$$

El momento respecto a la base del área semicircular será:

$$M = F \cdot d_{(cdp\text{-}base)} = F \cdot \left\{ \frac{4R}{3\pi} - \left(Y_{cdp} - Y_{cdg} \right) \right\}$$

$$M_{10m} = 160.195,4 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,00474 \right\} = 67.229,71\ \text{Nm}$$

$$M_{100m} = 1.545.635,43 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,000491 \right\} = 655.229,14\ \text{Nm}$$

$$M_{500m} = 7.703.163,29 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,00009870 \right\} = 3.268.563,73\ \text{Nm}$$

2. Segundo método de resolución, por integración directa:

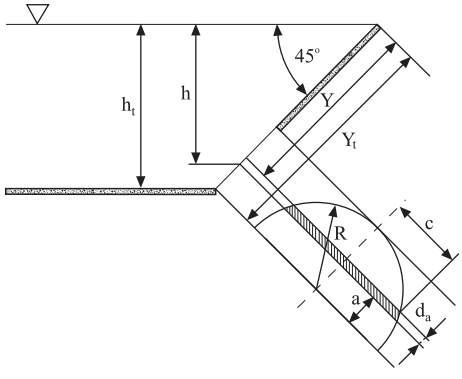


Fig. 12.3 Esquema de la posición de la placa con el elemento diferencial de superficie elegido

Sea el elemento diferencial de superficie definido en la figura 12.3.

$$ds = 2c \cdot da$$

$$a^2 + c^2 = R^2$$

$$ds = 2\sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$dF = P \quad ds$$

$$dF = \rho\, g\, h\, ds = \rho\, g\left(h_t - a\,\sin\theta\right) ds = \rho\, g\left(Y\,\sin\theta\right) ds = \rho\, g\left(Y_t - a\right)\sin\theta\, ds$$

$$dF = \rho\, g\left(Y_t - a\right)\sin\theta\, ds = \rho\, g\left(Y_t - a\right)\sin\theta \cdot 2\sqrt{R^2 - a^2}\; da$$

$$F = \int_0^R \rho\, g\, \left(Y_t - a\right)\cdot\sin\theta\, 2\sqrt{R^2 - a^2}\cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \sin\theta \cdot 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - a^2}\cdot da - \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot 2 \int_0^R a\, \sqrt{R^2 - a^2}\cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \sin\theta \cdot 2 \left[\frac{a}{2}\sqrt{R^2 - a^2} + \frac{R^2}{2}\cdot \arcsin\frac{a}{R}\right]_0^R - \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot 2 \int_0^R a \cdot \sqrt{R^2 - a^2}\cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \sin\theta \cdot 2 \left[\frac{R^2}{2}\sqrt{R^2 - R^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{R}{R}\right] - \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot 2 \int_0^R a \cdot \sqrt{R^2 - a^2}\cdot da$$

$$F = \rho\, g\, Y_t\, \sin\theta \cdot 2\left[0 + \frac{R^2}{2}\arcsin 1\right] - \rho\, g \cdot \sin\theta\; 2\left[-\frac{1}{3}\left(R^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R$$

$$F = \rho\, g\, Y_t \cdot \sin\theta\; 2 \cdot \left(\frac{R^2}{2}\arcsin 1\right) - \rho\, g\, \sin\theta\; 2\left[-\frac{1}{3}.\left(R^2 - R^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(-\frac{1}{3}\left(R^2 - 0^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$F = \rho\, g\, Y_t \cdot \sin\theta\;\; 2 \times \frac{R^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \rho\, g \cdot \sin\theta \quad 2\frac{1}{3}\left(R^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$F = \rho\, g\, Y_t \cdot \sin\theta \cdot \frac{R^2 \cdot \pi}{2} - \rho\, g \cdot \sin\theta\; 2\frac{1}{3}R^3;$$

$$F = \rho\, g \cdot \sin\theta\; R^2\left[Y_t \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{R \cdot 2}{3}\right];$$

El valor de Y_t será:

$$h_t = h_a + R \cdot \sin\theta$$

La h_a ha de entenderse ahora como la distancia vertical entre el extremo superior de la placa y la superficie libre del líquido.

$$Y_t = \frac{h_a + R\cdot\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{h_a}{\sin\theta} + R$$

Sustituyendo en la ecuación de la fuerza:

$$F = \rho\, g\cdot\sin\theta\, R^2 \left[\left(\frac{h_a}{\sin\theta} + R\right)\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{R\cdot 2}{3}\right]$$

La fuerza sobre la superficie para las tres profundidades será:

h_a=10 m $\quad F_{10} = 1.000\cdot 9,8.\text{sen}45.1^2 \cdot \left[\left(\frac{10}{\sin 45}+1\right)\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 2}{3}\right] = 160.203,3$ N

h_a=100 m $\quad F_{100} = 1.000\cdot 9,8.\text{sen}45.1^2 \cdot \left[\left(\frac{100}{\sin 45}+1\right)\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 2}{3}\right] = 1.545.645,69$ N

h_a=500 m $\quad F_{10000} = 1.000\cdot 9,8.\text{sen}45.1^2 \cdot \left[\left(\frac{500}{\sin 45}+1\right)\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 2}{3}\right] = 7.703.167,29$ N

El momento respecto a la base del área semicircular es:

$$dM = dF\cdot a$$

$$dM = a\cdot\rho\cdot g\left(Y_t - a\right)\cdot\sin\theta\cdot 2\sqrt{R^2 - a^2}\,da$$

$$M = \int_0^R \rho\cdot g\cdot\sin\theta\cdot 2\cdot Y_t\cdot a\cdot\sqrt{R^2 - a^2}\,da - \int_0^R \rho\cdot g\cdot\sin\theta\cdot 2\cdot a^2\cdot\sqrt{R^2 - a^2}\,da$$

$$M = \rho\times g\times\sin\theta\times 2\left[Y_t\left[-\frac{1}{3}\left(R^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R - \left[\frac{a\left(2a^2 - R^2\right)}{8}\sqrt{R^2 - a^2} + \frac{R^4}{8}\arcsin\left(\frac{a}{R}\right)\right]\right]_0^R$$

$$M = \rho\times g\times\sin\theta\times 2\left[Y_t\left[\frac{1}{3}R^3\right] - \left[\frac{R^4}{8}\arcsin 1\right]\right]$$

Recordando que

$$Y_t = \frac{h_a}{\sin 45} + R\ ,$$

el momento para los diferentes valores de h_a será:

$$h_a = 10\,\text{m}$$

$$M_{10} = 1.000 \times 9,8 \times \sin 45 \times 2\left[\left[\frac{10}{\sin 45}+1\right]\left[\frac{1}{3}1^3\right]-\left[\frac{1}{8}\frac{\pi}{2}\right]\right] = 67.231,83\ \text{Nm}$$

$h_a = 100\,\text{m}$

$$M_{100} = 1.000 \times 9,8 \times \sin 45 \times 2\left[\left[\frac{100}{\sin 45}+1\right]\left[\frac{1}{3}1^3\right]-\left[\frac{1}{8}\frac{\pi}{2}\right]\right] = 655.231,83\,\text{Nm}$$

$h_a = 500\,\text{m}$

$$M_{500} = 1.000 \times 9,8 \times \sin 45 \times 2\left[\left[\frac{500}{\sin 45}+1\right]\left[\frac{1}{3}1^3\right]-\left[\frac{1}{8}\frac{\pi}{2}\right]\right] = 3.268.565,16\ \text{Nm}$$

Véase que los valores de la fuerza y los momentos coinciden con los obtenidos en la resolución anterior.

Problema 13

Enunciado

Sea un recipiente cilíndrico parcialmente lleno de agua y abierto a la atmósfera. Dicho recipiente gira a una velocidad angular de 10 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y está montado en un ascensor.

En condiciones de reposo, la altura del nivel del líquido es de 30 cm. Quedando un espacio libre entre el nivel del líquido y la superficie del vaso de 10 cm, el radio del cilindro es de 6 cm.

Sabiendo que cuando el ascensor se pone en marcha, tanto en sentido ascendente como descendente, la aceleración del mismo es de $1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y su deceleración para cualquier sentido de la marcha es de 0,7 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ determine:

1. La ecuación que rige la posición del nivel del líquido en función del radio.

2. La presión a la que está sometida una partícula de fluido situada en el fondo del depósito y a un radio de 0,02 m, para cualquier sentido de la marcha del ascensor.

3. La velocidad de giro del cilindro para que, en el borde exterior, el líquido se sitúe en el extremo del vaso. Considere el ascensor parado.

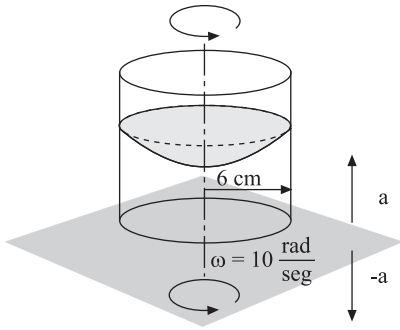


Fig. 13.1
Esquema del recipiente cilíndrico que gira

Resolución

1. La ecuación diferencial que rige el movimiento de un fluido sometido a las aceleraciones: centrípeta, angular, y en dirección vertical se define como:

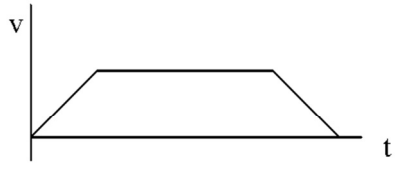
$$dP = \rho\, r\, \omega^2\, dr - \rho\, a_\theta\, r\, d\theta - \rho\, g\left(1 + \frac{\vec{a}_z}{g}\right) dz$$

Puesto que la aceleración angular no existe para el caso que nos ocupa, queda:

$$dP = \rho\, r\, \omega^2\, dr - \rho\, g\left(1 + \frac{\vec{a}_z}{g}\right) dz$$

Los valores de la aceleración a_z dependerán de si el ascensor está subiendo o bajando y de si está en fase de aceleración o deceleración, con lo cual:

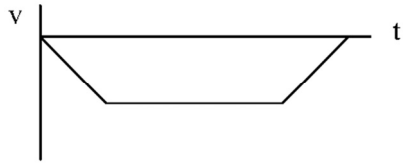
Ascensor en sentido ascendente:



- Aceleración $a_z = 1\ \frac{m}{s^2}$
- Deceleración $a_z = -0{,}7\ \frac{m}{s^2}$

Fig. 13.2

Ascensor en sentido descendente:



- Deceleración $a_z = +0{,}7\ \frac{m}{s^2}$
- Aceleración $a_z = -\ 1\ \frac{m}{s^2}$

Fig. 13.3

Las superficies de presión constante tendrán por ecuación diferencial:

$$0 = \rho\, r\, \omega^2\, dr - \rho\, g\left(1 + \frac{\vec{a}_z}{g}\right) dz$$

de donde:

$$\rho\, r\, \omega^2\, dr = \rho\, g \left(1 + \frac{\vec{a}_z}{g}\right) dz$$

$$\int_{r=0}^{r} r\, \omega^2\, dr = \int_{z_0}^{z} (g + \vec{a}_z)\, dz$$

z_0 será la altura del líquido para r = 0;

$$\omega^2 \frac{r^2}{2} = (g + \vec{a}_z)\ [z - z_0]$$

con lo cual:

$$z = \omega^2 \frac{r^2}{2} \frac{1}{(g + \vec{a}_z)} + z_0$$

Se observa que la posición del nivel del líquido depende no sólo de la velocidad de giro, sino también de la aceleración del ascensor.

Esta ecuación quedará completamente definida una vez se determine z_0.

Para determinar z_0 deberán igualarse los volúmenes del líquido en reposo y en movimiento.

$$\pi R^2\, z_{inicial} = \int_0^R 2\pi r z\, dr$$

Del enunciado se conoce que $z_{inicial}$ = 30 cm.

$$\pi R^2 z_{inicial} = \int_0^R 2\pi r \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} \frac{1}{(g + \vec{a}_z)} + z_0\right) dr$$

$$\pi R^2 z_{inicial} = 2\pi \left[\frac{\omega^2}{2 \times (g + \vec{a}_z)} \times \frac{r^4}{4} + z_0 \times \frac{r^2}{2}\right]_0^R$$

$$\pi R^2 z_{inicial} = 2\pi \left[\frac{\omega^2}{2\,(g + \vec{a}_z)} \frac{R^4}{4} + z_0 \frac{R^2}{2}\right]$$

$$Z_{inicial} = \frac{\omega^2}{4\ (g + \vec{a}_z)} R^2 + Z_0$$

$$Z_o = Z_{inicial} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + \vec{a}_z)}$$

Véase que el nivel del líquido cuando el cilindro gira; se desplaza, para radio igual a cero, y depende de las aceleraciones que se tengan en cada caso particular.

La ecuación que da la posición del nivel del líquido teniendo en cuenta todos los parámetros estipulados es:

$$Z = Z_{inicial} - \frac{\omega^2 R^2}{4\,(g + \vec{a}_z)} + \frac{\omega^2 r^2}{2}\frac{1}{(g + \vec{a}_z)}$$

2. La presión en el punto considerado saldrá de la ecuación:

$$\int_{P_{atm}}^{P_{punto}} dp = \int_0^r \rho\, r\, \omega^2\, dr - \int_{Z_0}^0 \rho\,(g + \vec{a}_z)\, dz$$

$$P_{punto} - P_{atm} = \frac{\rho\, r^2\, \omega^2}{2} + \rho\,(g + \vec{a}_z)\, Z_0$$

$$P_{punto} - P_{atm} = \frac{\rho\, r^2\, \omega^2}{2} + \rho(g + \vec{a}_z)\left[Z_{inicial} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + \vec{a}_z)} \right]$$

Trabajando en presiones relativas, esta ecuación se puede dar como:

$$P_{punto} = \rho(g + \vec{a}_z)\left[Z_{inicial} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + \vec{a}_z)} + \frac{r^2\, \omega^2}{2(g + \vec{a}_z)} \right]$$

Los valores de las constantes conocidas son:

$$\rho = 1.000\,\frac{Kg}{m^3}; \qquad g = 9{,}8\,\frac{m}{s^2};$$

$$Z_{inicial} = 0{,}3\ m; \qquad R = 0{,}06\ m;$$

$$r = 0{,}02\ m; \qquad \omega = 10\ \frac{rad}{s}$$

a_z = (posee cuatro valores, definidos en el primer apartado):

Así, la presión en el punto deseado para los cuatro casos en estudio será:

Ascensor subiendo, período de aceleración: $a_z = 1\,\frac{m}{s^2}$

$$P = 1.000 \times (9{,}8 + 1)\left[0{,}3 - \frac{10^2 \times 0{,}06^2}{4(9{,}8 + 1)} + \frac{10^2 \times 0{,}02^2}{2} \times \frac{1}{(9{,}8 + 1)} \right]$$

$$P = 3170\ Pa$$

Ascensor subiendo, período de deceleración: $a_z = -0{,}7\,\frac{m}{s^2}$;

$$P = 1.000 \times (9,8 - 0,7)\left[0,3 - \frac{10^2 \times 0,06^2}{4(9,8 - 0,7)} + \frac{10^2 \times 0,02^2}{2} \times \frac{1}{(9,8 - 0,7)}\right]$$

$$P = 2.660 \text{ Pa}$$

Ascensor bajando, período de aceleración: $a_z = -1\frac{m}{s^2}$

$$P = 2.570 \text{ Pa}$$

Ascensor bajando, período de deceleración: $a_z = +0,7\frac{m}{s^2}$

$$P = 3.083,9 \text{ Pa}$$

Para el fluido en reposo: $P = 1.000 \times 9,8 \times 0,3 = 2.940 \text{ Pa}$

3. Puesto que el nivel del líquido viene dado por la ecuación:

$$Z = Z_{inicial} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + \vec{a}_z)} + \frac{\omega^2 r^2}{2}\frac{1}{g + \vec{a}_z}$$

para:

$$Z = 0,40 \text{ m} \qquad Z_{inicial} = 0,3 \text{ m}$$

$$a_z = 0 \qquad R = 0,06 \text{ m}$$

$$r = R$$

se tiene:

$$0,4 = 0,3 - \frac{\omega^2 0,06^2}{4 \times 9,8} + \frac{\omega^2 0,06^2}{2}\frac{1}{9,8}$$

$$\omega = 32,99\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

Problema 14

Enunciado

El esquema de la figura 14.1 muestra un depósito cilíndrico sumergido parcialmente en agua. En la parte superior del depósito, ha quedado retenida una bolsa de aire cuyas

dimensiones quedan esquematizadas en la figura 14.1. Inicialmente, se conocen las dimensiones del depósito, Di, De, H, y la posición del mismo, a, h, b, así como la presión atmosférica P_{atm}.

El peso del depósito es también conocido.

Se pide:

1. Si el proceso de compresión del aire dentro del depósito se considera adiabático y la presión atmosférica aumenta K veces, P_{atm} (fin) = K P_{atm} determinar la nueva posición del nivel inferior del aire dentro del depósito, h_2, así como los nuevos valores de a_{fin} y b_{fin}. En este primer apartado se puede despreciar el empuje de Arquímedes.

2. Realizar de nuevo el primer apartado, pero considerando las fuerzas de Arquímedes ejercidas sobre el depósito, e indicar, una vez halladas las ecuaciones necesarias, el proceso de resolución que se debe seguir.

3. Dado un depósito de acero de dimensiones D_e = 1,4 m, D_i = 1,38 m, H = 1,5 m, y espesor de la base = 0,01 m, que está inicialmente lleno de aire a la presión atmosférica, si el depósito se invierte tal como indica la figura 14.1 y queda parcialmente sumergido en agua, determinar la posición inicial, alturas a, h, b.

Si, estando en esta posición de reposo, la presión atmosférica aumenta un 15%, indicar la nueva posición del depósito con respecto al nivel del líquido exterior, alturas a_{fin}, h_{fin} y b_{fin}.

Datos conocidos: presión atmosférica = 100.000 Pa; densidad del agua = 1.000 kg/m^3; densidad del acero = 7.800 kg/m^3.

Realícense las hipótesis que se consideren oportunas.

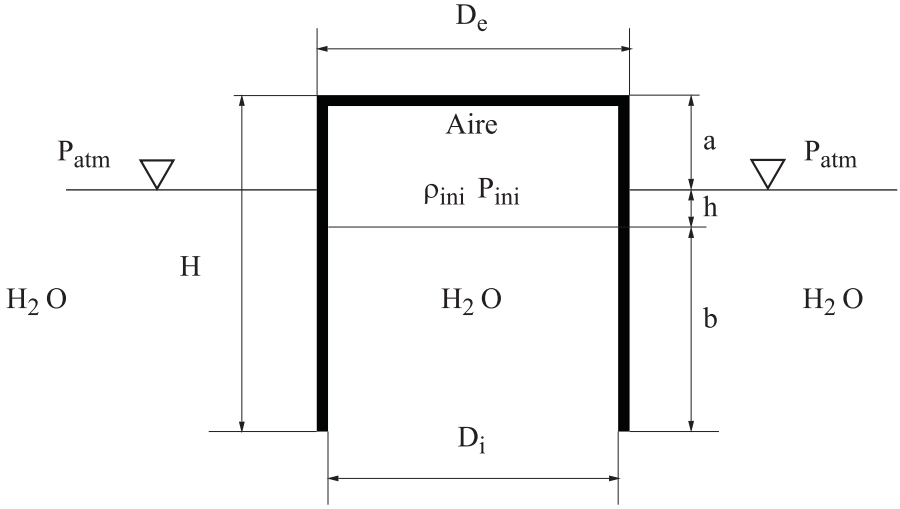


Fig. 14.1
Esquema del depósito en el estado inicial

Resolución

1. Véase que el balance de fuerzas que actúan sobre el sólido, tanto para el estado inicial como para el estado final, ha de cumplir la relación.

$$F_{P\,aire\,int} + F_{Arquímedes} - F_{P\,aire\,atm} - F_{peso} = 0$$

No obstante, en este primer apartado, con el fin de facilitar el proceso de cálculo, no se va a considerar el empuje de Arquímedes. Así, la ecuación precedente tomará la forma:

$$F_{P\,aire\,int} - F_{P\,aire\,atm} - F_{peso} = 0$$

Para el estado final, cuando la presión atmosférica ha aumentado K veces, la fuerza debida a la presión del aire en el interior del depósito toma la forma:

$$F_{P\,aire\,int} = P_{aire\,int\,(fin)} \left(\pi \frac{D_i^2}{4} \right)$$

Su equivalente en el exterior es:

$$F_{P\,aire\,atm} = P_{aire\,atm\,(fin)} \left(\pi \frac{D_e^2}{4} \right) = K P_{aire\,atm} \left(\pi \frac{D_e^2}{4} \right)$$

con lo cual el balance de fuerzas para el estado final es:

$$P_{aire\,int\,(fin)} \left(\pi \frac{D_i^2}{4} \right) - K P_{aire\,atm} \left(\pi \frac{D_e^2}{4} \right) - m\,g = 0$$

La presión del aire en el interior del depósito para el estado final toma la forma:

$$P_{aire\,int\,(fin)} = K P_{aire\,atm} + \rho\,g\,h_{fin}$$

Obsérvese que la densidad en la ecuación acabada de determinar corresponde a la densidad del agua.

Sustituyendo en la ecuación precedente, se tiene:

$$\left(K P_{aire\,atm} + \rho\,g\,h_{fin} \right) \left(\pi \frac{D_i^2}{4} \right) - K P_{aire\,atm} \left(\pi \frac{D_e^2}{4} \right) - m\,g = 0$$

Véase que esta ecuación tiene una sola incógnita, h_{fin} con lo cual su valor será:

$$h_{fin} = \frac{1}{\rho g}\left(KP_{aire\ atm}\left(\frac{D_e^2}{D_i^2}\right) + m g\left(\frac{4}{\pi D_i^2}\right) - KP_{aire\ atm}\right)$$

Por otro lado, considerando la compresión del aire en el interior del depósito como adiabática, entre el estado inicial y final se establece:

$$P_{aire\ int}\ \forall_{aire\ int}^{\gamma} = P_{aire\ int\,(fin)}\ \forall_{aire\ int\,(fin)}^{\gamma}$$

ecuación que se puede expresar:

$$\left(P_{aire\ atm} + \rho g h\right)\left[\pi\frac{D_i^2}{4}(a+h)\right]^{\gamma} = \left(KP_{aire\ atm} + \rho g h_{fin}\right)\left[\pi\frac{D_i^2}{4}(a_{fin} + h_{fin})\right]^{\gamma}$$

Obsérvese que ahora la única incógnita es a_{fin}, con lo cual despejando se obtiene:

$$a_{fin} = \left[\frac{\left(P_{aire\ atm} + \rho g h\right)}{\left(KP_{aire\ atm} + \rho g h_{fin}\right)}\right]^{\frac{1}{\gamma}}(a+h) - h_{fin}$$

ecuación que se puede expresar:

$$a_{fin} = \left[\frac{\left(P_{aire\ atm} + \rho g h\right)}{\left(KP_{aire\ atm}\left(\frac{D_e^2}{D_i^2}\right) + m g\left(\frac{4}{\pi D_i^2}\right)\right)}\right]^{\frac{1}{\gamma}}(a+h)$$
$$-\frac{1}{\rho g}\left(KP_{aire\ atm}\left(\frac{D_e^2}{D_i^2}\right) + m g\left(\frac{4}{\pi D_i^2}\right) - KP_{aire\ atm}\right)$$

La última de las variables se determina directamente; únicamente cabe recordar la relación:

$$H = a + b + h = a_{fin} + b_{fin} + h_{fin}$$

En consecuencia:

$$b_{fin} = H - a_{fin} - h_{fin}$$

$$b_{fin} = H - \left[\frac{\left(P_{aire\ atm} + \rho g h\right)}{\left(KP_{aire\ atm}\left(\frac{D_e^2}{D_i^2}\right) + m g\left(\frac{4}{\pi D_i^2}\right)\right)}\right]^{\frac{1}{\gamma}}(a+h)$$

2. En este segundo apartado, se va a realizar de nuevo el problema, pero teniendo en cuenta la fuerza de Arquímedes.

La ecuación del balance de fuerzas es:

$$F_{P\ aire\ int} + F_{Arquímedes} - F_{P\ aire\ atm} - F_{peso} = 0$$

Realizando las mismas operaciones que en el caso anterior, se tiene:

$$\left(KP_{aire\ atm} + \rho g h_{fin}\right)\left(\pi\frac{D_i^2}{4}\right) - KP_{aire\ atm}\left(\pi\frac{D_e^2}{4}\right) - m g + \forall_{sumergido}\,\rho g = 0$$

ecuación que se puede expresar:

$$\left(KP_{aire\ atm} + \rho g h_{fin}\right)\left(\pi\frac{D_i^2}{4}\right) - KP_{aire\ atm}\left(\pi\frac{D_e^2}{4}\right) - m g + \frac{\pi\left(D_e^2 - D_i^2\right)}{4}\left(h_{fin} + b_{fin}\right)\rho g = 0$$

Esta ecuación contiene dos incógnitas, h_{fin} y b_{fin}, con lo cual es necesaria otra ecuación para resolver el sistema.

Considerando, como en el caso anterior, una compresión/expansión adiabática del aire en el interior del depósito, se tiene:

$$\left(P_{aire\ atm} + \rho g h\right)\left[\pi\frac{D_i^2}{4}\left(a + h\right)\right]^{\gamma} = \left(KP_{aire\ atm} + \rho g h_{fin}\right)\left[\pi\frac{D_i^2}{4}\left(a_{fin} + h_{fin}\right)\right]^{\gamma}$$

De nuevo, esta ecuación contiene dos incógnitas, a_{fin} y h_{fin}. Puesto que una de las incógnitas es diferente de las dos anteriores, es necesaria una nueva ecuación, que será:

$$H = a_{fin} + b_{fin} + h_{fin}$$

De la combinación de las tres ecuaciones precedentes, se obtiene:

$$H = \left[\frac{\left(P_{aire\ atm} + \rho g h\right)}{\left(KP_{aire\ atm} + \rho g h_{fin}\right)}\right]^{\frac{1}{\gamma}}\left(a + h\right) - \frac{\left(KP_{aire\ atm} + \rho g h_{fin}\right)\left(\pi\frac{D_i^2}{4}\right) - KP_{aire\ atm}\left(\pi\frac{D_e^2}{4}\right) - m g}{\frac{\pi\left(D_e^2 - D_i^2\right)}{4}\rho g} - h_{fin}$$

Véase que esta ecuación contiene una sola incógnita, h_{fin}, con lo cual el segundo apartado de este problema queda resuelto.

3. El tercer y último apartado de este problema consiste en una aplicación práctica. Si el depósito definido en el apartado tercero de este problema se invierte y se sumerge parcialmente en agua, la posición de reposo inicial se determina del modo siguiente:

El peso del depósito será:

$$\text{Peso} = P_{base} + P_{lateral} = \left(\frac{\pi}{4} D_e^2 * 0.01 + \frac{\pi}{4}(D_e^2 - D_i^2) * (1.5 - 0.01)\right) * 7.800 * 9,81 = 6.156,58 \text{ N}$$

El volumen del depósito, inicialmente lleno de aire, es:

$$\forall_{\text{inicial aire depósito}} = \frac{\pi}{4} D_i^2 * (H - 0,01) = 2,228611 \text{ m}^3$$

Considerando que, al invertir el depósito y sumergirlo parcialmente en agua, el aire de su interior experimenta una compresión adiabática, se establece:

$$\left(P_{\text{aire atm}}\right)\left[\forall_{\text{inicial aire depósito}}\right]^{\gamma} = \left(P_{\text{aire atm}} + \rho g h\right)\left[\pi \frac{D_i^2}{4}(a + h)\right]^{\gamma}$$

La variable a se define como:

$$a = \frac{\left(P_{\text{aire atm}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[\forall_{\text{inicial aire depósito}}\right]}{\left(P_{\text{aire atm}} + \rho g h\right)^{\frac{1}{\gamma}} \pi \frac{D_i^2}{4}} - h$$

Cuando el depósito esté en posición de equilibrio, el balance de fuerzas será:

$$\left(P_{\text{aire atm}} + \rho g h\right)\left(\pi \frac{D_i^2}{4}\right) - P_{\text{aire atm}}\left(\pi \frac{D_e^2}{4}\right) - \text{peso} + \frac{\pi\left(D_e^2 - D_i^2\right)}{4}(h + b)\rho g = 0$$

Sustituyendo las dos ecuaciones precedentes en $H = a + b + h$, se obtiene:

$$H = \frac{\left(P_{\text{aire atm}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[\forall_{\text{inicial aire depósito}}\right]}{\left(P_{\text{aire atm}} + \rho g h\right)^{\frac{1}{\gamma}} \pi \frac{D_i^2}{4}} - \frac{\left(P_{\text{aire atm}} + \rho g h\right)\left(\pi \frac{D_i^2}{4}\right) - P_{\text{aire atm}}\left(\pi \frac{D_e^2}{4}\right) - \text{peso}}{\frac{\pi\left(D_e^2 - D_i^2\right)}{4}\rho g} - h$$

La única incógnita de esta ecuación es la h; sustituyendo valores y resolviendo, se llega a: h = 0,6946 m.

Los valores de a y b serán: a = 0,72684 m; b = 0,07853 m.

Estas dimensiones son las iniciales, en condiciones de reposo, una vez se sitúe el depósito inmerso parcialmente en el fluido agua.

El último subapartado de este problema consiste en aumentar la presión atmosférica un 15%. Partiendo de las condiciones de reposo acabadas de obtener y utilizando la ecuación hallada en el apartado segundo de este problema, las nuevas condiciones de reposo serán:

$$H = \left[\frac{\left(P_{aire\,atm} + \rho g h\right)}{\left(KP_{aire\,atm} + \rho g h_{fin}\right)}\right]^{\frac{1}{\gamma}} (a + h) - \frac{\left(KP_{aire\,atm} + \rho g h_{fin}\right)\left(\pi\frac{D_i^2}{4}\right) - KP_{aire\,atm}\left(\pi\frac{D_e^2}{4}\right) - m g}{\frac{\pi\left(D_e^2 - D_i^2\right)}{4}\rho g} - h_{fin}$$

Sustituyendo valores, recordando que el valor de K = 1,15 y resolviendo, se obtiene: $h_{fin} = 0{,}7343$ m.

Sustituyendo ahora este valor en la ecuación siguiente, hallada en el apartado 2 de este problema, y resolviendo, se llega a:

$$\left(P_{aire\,atm} + \rho g h\right)\left[\pi\frac{D_i^2}{4}(a + h)\right]^{\gamma} = \left(KP_{aire\,atm} + \rho g h_{fin}\right)\left[\pi\frac{D_i^2}{4}(a_{fin} + h_{fin})\right]^{\gamma}$$

$$a_{fin} = 0{,}5568\text{m}.$$

Y, por último, el valor de b_{fin} será: $b_{fin} = H - a_{fin} - h_{fin}$; $b_{fin} = 0{,}2088\,\text{m}$.

Es interesante observar que un pequeño aumento de la presión atmosférica da lugar a que el depósito tienda a hundirse, al llenarse de agua una mayor parte del volumen interior.

Ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos. Ecuación de continuidad

4.1 Introducción. Ecuación de transporte de Reynolds

El estado y el movimiento de un fluido se pueden determinar a partir de los principios, las leyes o las hipótesis siguientes:

Principio de conservación de la masa. En un volumen finito, esta es invariable, aunque cambie su posición y su forma.

Variación de la cantidad de movimiento. La variación en la unidad de tiempo de la cantidad de movimiento de un volumen fluido es igual a la resultante de las fuerzas de superficie (presión y viscosidad) y las fuerzas volumétricas y másicas.

Principio de conservación de la energía. La variación de la energía de un volumen de fluido es igual al trabajo de las fuerzas exteriores sobre este, más el calor recibido del exterior por conducción y radiación.

Hipótesis de equilibrio termodinámico local. Existe equilibrio termodinámico local si el estado macroscópico del fluido en cada punto e instante puede ser caracterizado mediante su velocidad $\vec{V}$ en este punto y las variables termodinámicas de estado $\rho, T, P, u, s, \text{etc}$. que mediría un observador que se desplazase con la partícula de fluido.

En Mecánica de Fluidos, se puede dar a estas ecuaciones el enfoque del volumen de control finito o el diferencial. Algunas de las principales ventajas y desventajas de utilización de uno y otro enfoque son:

	Ventajas	Desventajas
Formulación diferencial	1. Revela todos los detalles del flujo con gran precisión. 2. El fluido, es obligado a obedecer las leyes fundamentales en todos los puntos. 3. Para resolver el problema, son necesarias únicamente las condiciones frontera 4. Proporciona una gran información sobre el fluido.	1. Las ecuaciones diferenciales obtenidas son a menudo difíciles o imposibles de resolver de forma analítica. 2. Es común que las ecuaciones se resuelvan mediante programas de ordenador.
Formulación integral.	1. Las ecuaciones matemáticas utilizadas, son relativamente simples. 2. La información obtenida es aproximada, aunque muy útil. Las hipótesis de trabajo son simples. 3. El tiempo necesario para obtener una información suficientemente válida es corto.	1. No obliga al fluido a obedecer las leyes fundamentales en cada punto del mismo. 2. Es común que se obtengan solamente respuestas aproximadas. 3. Requiere más información de entrada, como una distribución de velocidades en las fronteras de control. 4. Con frecuencia, la información obtenida es menor que la que sería deseable.

La determinación de las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos en forma integral se realizará partiendo del teorema de transporte de Reynolds.

Dicho teorema proporciona una manera de identificar un sistema finito y evaluar la velocidad de cambio de cualquier propiedad o característica de dicho sistema, examinando el flujo a través de un volumen de control.

Se define como sistema de control a una masa específica de identidad fija, identificada por su posición en el espacio. La masa puede ser elemental o finita.

El volumen de control es una región finita con fronteras abiertas por las cuales se pueden definir flujos de masa, cantidad de movimiento y energía. Entre estas fronteras, se hace un balance de flujos entrantes, salientes y remanentes.

Con el fin de calcular la velocidad de cambio de una propiedad genérica asociada al fluido dentro del sistema de control, se concibe la manera de identificar un sistema específico en un fluido que se mueve y se deforma, sistema en el que se podrán aplicar,

las leyes fundamentales, la segunda ley de Newton, que estudia la velocidad de cambio de la cantidad de movimiento en el sistema, y la primera ley de la termodinámica, que se centra en la velocidad de cambio de energía del sistema.

Para calcular la velocidad de cambio de una propiedad genérica asociada al fluido, se define un sistema de control que se desplaza con el fluido. Inicialmente, el sistema de control ocupa el mismo volumen que el volumen de control.

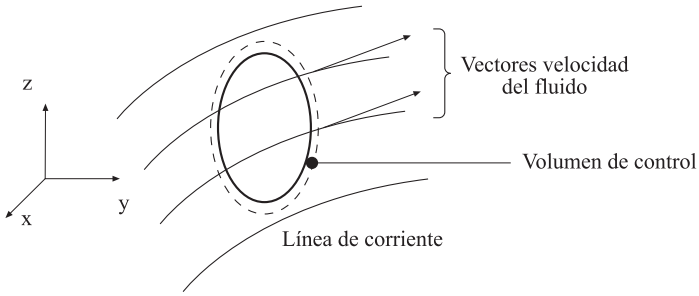


Fig. T 4.1 Volumen y sistema de control donde se realiza el balance

Las posiciones espaciales de los sistemas y volúmenes de control para diferentes espacios temporales son:

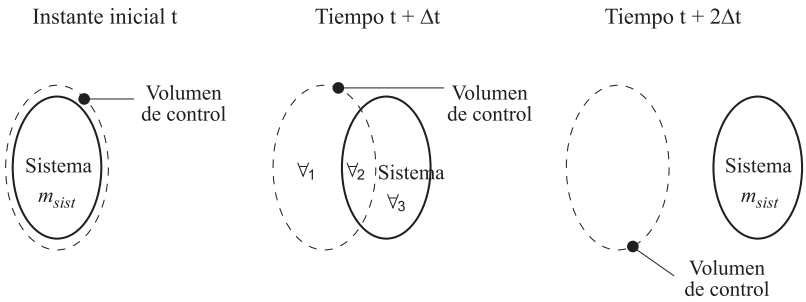


Fig. T 4.2 Evolución del volumen y sistema de control con el tiempo

Se denomina m_{sist} a la masa del sistema dentro del volumen de control en el instante inicial.

Se quiere calcular la velocidad de cambio de una propiedad arbitraria B del sistema.

Sea b = la propiedad específica por unidad de masa, $b = \frac{B}{m}$

$$B_{sist} = \int_{msist} b\,dm = \int_{\forall sist} b\,\rho\,d\forall$$

$\forall$ = volumen del sistema

La rapidez de cambio de la propiedad B será:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{B_{sist}\big|_{t+\delta t} - B_{sist}\big|_{t}}{\delta t}$$

Al sustituir en la ecuación anterior el valor de B, se tiene:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\int_{\forall sist} \rho\, b\, d\forall \Big|_{t+\delta t} - \int_{\forall sist} \rho\, b\, d\forall \Big|_{t}}{\delta t}$$

En el instante t el volumen ocupado por el sistema y el volumen de control son idénticos.

$$\forall_{sist}\big|_{t} = \forall_{volumen\ de\ control}$$

En el instante $t+\delta t$, se cumple:

$$\forall_{sist}\big|_{t+\delta t} = \forall_{II} + \forall_{III} = \forall_{VC} - \forall_{I} + \forall_{III}$$

de donde:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\int_{\forall_{VC}} \rho\, b\, d\forall \Big|_{t+\delta t} - \int_{\forall_{I}} \rho\, b\, d\forall \Big|_{t+\delta t} + \int_{\forall_{III}} \rho\, b\, d\forall \Big|_{t+\delta t} - \int_{\forall_{VC}} \rho\, b\, d\forall \Big|_{t}}{\delta t}$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\int_{\forall_{VC}} \rho\, b\, d\forall \Big|_{t+\delta t} - \int_{\forall_{VC}} \rho\, b\, d\forall \Big|_{t}}{\delta t} + \lim_{\delta t \to 0} \frac{\int_{\forall_{III}} \rho\, b\, d\forall \Big|_{t+\delta t}}{\delta t} - \lim_{\delta t \to 0} \frac{\int_{\forall_{I}} \rho\, b\, d\forall \Big|_{t+\delta t}}{\delta t}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\text{Término I} \qquad\qquad \text{Término II} \qquad\qquad \text{Término III}$$

I. Indica la variación temporal de la propiedad B contenida en el volumen de control (velocidad de acumulación) y se puede expresar:

$$I = \frac{d}{dt}\int_{\forall_{VC}} \rho\, b\, d\forall = \frac{d}{dt}(B_{VC})$$

II. Es la cantidad de propiedad "B" que fluye hacia fuera del volumen de control entre los instantes t y $t+dt$.

El término II se puede expresar como $II = \dot{B}_{sal}$ (flujo másico saliente de la propiedad genérica).

III. Es la cantidad de propiedad B que fluye hacia el volumen de control entre el instante t y $t+dt$. Sería el flujo másico de propiedad B entrante al volumen de control en un diferencial de tiempo. $III = \dot{B}_{ent}$.

Así pues, la ecuación de variación de propiedad B queda:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, b\, d\forall + \dot{B}_{sal} - \dot{B}_{ent}$$

El signo negativo (-) indica que el flujo va hacia dentro del sistema.

Esta ecuación dice que la velocidad de cambio de cualquier propiedad del sistema que ocupe un volumen de control en cualquier instante específico es igual a la velocidad instantánea de acumulación de la propiedad dentro del volumen de control, más la diferencia entre los flujos instantáneos de salida y entrada de dicha propiedad.

Los flujos másicos a la salida y a la entrada se pueden escribir como:

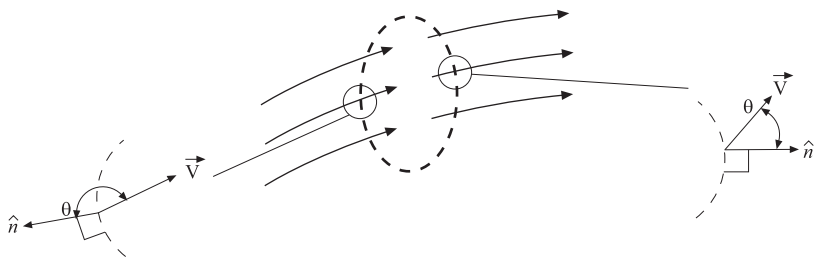


Fig.T 4 3 Vectores velocidad y diferencial de superficie en las regiones de entrada y salida del sistema de control

a) El concepto de flujo másico saliente se define como:

$$\dot{m}_s = \int_{ss} \rho \vec{V} \vec{ds} = \int_{ss} \rho V \cos\theta \, ds = \int_{ss} \rho \vec{V} \hat{n} \, ds$$

Recuérdese que, B es una propiedad asociada a la masa del fluido. Cada unidad de masa que sale del volumen de control lleva b unidades de B en ella. Como b puede no ser uniforme, se puede escribir:

$$d\dot{B}_{sal} = b.(d\dot{m})_{sal}$$

$$\dot{B}_{sal} = \int d\dot{B}_{sal} = \int b.(d\dot{m})_{sal} = \int_{ss} b\rho \vec{V} \hat{n} \, ds = \int_{ss} b\rho V \cos\theta \, ds = \int_{ss} b\rho \vec{V} d\vec{s}$$

Véase que, para todo flujo saliente, el valor del $\cos\theta$ será siempre positivo, puesto que el ángulo θ estará siempre comprendido entre 0 y 90 grados.

b) Flujo entrante.

Haciendo lo mismo que para el flujo entrante, se obtiene:

$$\dot{B}_{ent} = \int_{se} b\rho \vec{V} \hat{n} ds = \int_{se} b\rho V \cos\theta \, ds = \int_{se} b\rho \vec{V} d\vec{s}$$

Obsérvese que, para todo flujo entrante, el valor del $\cos\theta$ será siempre negativo, puesto que el ángulo θ estará siempre comprendido entre 90 y 180 grados.

Sustituyendo en la ecuación de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b \, d\forall + \int_{ss} \rho b \vec{V} \hat{n} ds + \int_{se} \rho b \vec{V} \hat{n} \, ds =$$

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b \, d\forall + \int_{ss} \rho b V \cos\theta \, ds - \int_{se} \rho b V \cos\theta \, ds$$

de donde la ecuación de transporte de Reynolds de manera compacta se puede dar:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, b\, d\forall + \oint_{SC} \rho\, b\, \vec{v}\, d\vec{s}$$

el término $\oint_{SC} \rho\, b\, \vec{v}\, d\vec{s}$ representa el flujo neto de propiedad B a través de las fronteras del volumen de control.

4.2 Ecuación de continuidad de la masa en forma integral

La determinación de la ecuación de continuidad de la masa se realizará partiendo de la ecuación de transporte de Reynolds. Sea un campo de flujo no estacionario, tridimensional y tridireccional.

La propiedad que se quiere estudiar es la "masa" B = masa. Puesto que se ha definido el sistema de control como un sistema de identidad fija, la masa en el sistema no varía, se establece:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dm_{sis}}{dt} = 0$$

La propiedad específica es $b = \frac{B_{sist}}{m_{sist}} = \frac{m_{sis}}{m_{sis}} = 1$

Sustituyendo en la ecuación de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall_{VC}} \rho\, d\forall + \oint_{SC} \rho\, \vec{v}\, d\vec{s}$$

Siendo esta la ecuación de continuidad en modo integral.

El primer sumando del segundo término representa la velocidad de acumulación o pérdida de masa dentro del volumen de control, mientras que el segundo sumando indica el flujo másico neto a través de las superficies de control.

4.2.1 Ecuación de continuidad, en modo diferencial

La ecuación de continuidad en forma diferencial, se puede obtener partiendo de la ecuación en modo integral y aplicando el teorema de la divergencia. Así, la integral de superficie que caracteriza el flujo de masa a través de las superficies de control se puede transformar en una integral de volumen, y se obtiene:

$$\oint_{SC} \rho\, \vec{V}\, d\vec{s} = \int_{VC} \nabla\left(\rho\, \vec{V}\right) d\forall$$

con lo que la ecuación de continuidad en modo integral queda:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall + \int_{VC}\nabla\left(\rho\,\vec{V}\right)d\forall = 0$$

Puesto que ahora las dos integrales son de volumen, los dos sumandos se pueden escribir dentro de una única integral y, dado que esta integral resultante está igualada a cero, el integrando ha de ser cero, puesto que le diferencial de volumen nunca puede valer cero, de donde se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho\,\vec{V}\right) = 0$$

siendo esta la ecuación de continuidad de la masa en modo diferencial.

Esta ecuación se puede asimismo representar como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla\vec{V} + \vec{V}\nabla\rho = 0$$

Y, utilizando el concepto de derivada sustancial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Cualquiera de las tres versiones precedentes se define como ecuación diferencial de continuidad.

Esta ecuación es válida para cualquier sistema coordenado, siempre y cuando el operador diferencial ∇ sea el apropiado para el sistema coordenado en estudio.

En concreto, en coordenadas cilíndricas y esféricas, la ecuación de continuidad toma la forma:

Coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\, r\, v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\, v_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\, v_x) = 0$$

Coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\, r^2\, v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\, v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\rho\, v_\phi) = 0$$

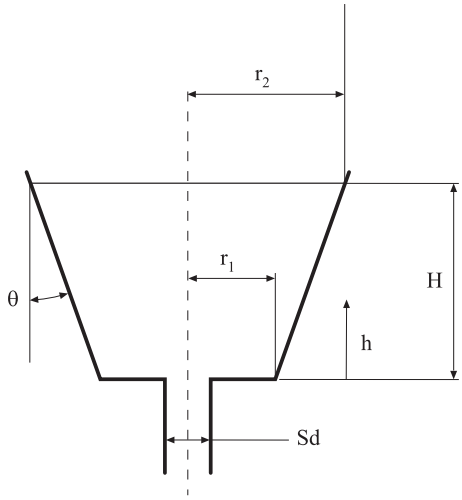
Problema 15

Enunciado

Halle la expresión que caracteriza el tiempo de vaciado del depósito troncocónico de la figura 15.1.

Sd = Superficie del agujero de salida

Fig. 15.1



Resolución

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{v}\, \vec{ds}$$

$$0 = \rho \frac{d(\forall)}{dt} + \dot{m}_s$$

El término $\frac{d(\forall)}{dt}$ ha de ser entendido como la variación temporal del volumen del fluido en el depósito cónico. Seguidamente se demostrará que se puede establecer que $\frac{d(\forall)}{dt} = \frac{d\forall}{dt}$, es decir, que la variación temporal del volumen de fluido es igual a la diferencial de volumen respecto al tiempo.

El volumen de fluido que hay en un depósito troncocónico se define como:

$$\forall = \frac{1}{3}\pi h\left(r_2^2 + r_1^2 + r_2\ r_1\right)$$

Obsérvese que para un volumen de fluido genérico: $r_2 = r_i = f(t)$; $h = h_i = f(t)$; de donde: $r_i = r_1 + h_i\, tg\theta$.

Así, un volumen de fluido genérico queda dado por:

$$\forall = \frac{1}{3}\pi h_i \left(r_i^2 + r_1^2 + r_i\, r_1\right) = \frac{1}{3}\pi h_i \left(\left(r_1 + h\, tg\theta\right)^2 + r_1^2 + \left(r_1 + h\, tg\theta\right) r_1\right)$$

$$\forall = \frac{1}{3}\pi h_i \left(\left(r_1^2 + 2h_i\, tg\theta\, r_1 + h_i^2\, tg^2\theta\right) + r_1^2 + \left(r_1 + h_i\, tg\theta\right) r_1\right)$$

$$\forall = \frac{1}{3}\pi h_i \left(3r_1^2 + 3h_i\, tg\theta\, r_1 + h_i^2\, tg^2\theta\right)$$

Véase que la única variable dependiente del tiempo es h_i, con lo que diferenciando este volumen respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{d(\forall)}{dt} = \pi r_1^2 \frac{dh_i}{dt} + \pi\, r_1\, tg\theta\, 2h_i \frac{dh_i}{dt} + \pi\, tg^2\theta\, h_i^2 \frac{dh_i}{dt}$$

$$\frac{d(\forall)}{dt} = \pi \frac{dh_i}{dt}\left(r_1^2 + r_1\, tg\theta\, 2h_i + tg^2\theta\, h_i^2\right) = \pi \frac{dh_i}{dt}\left(r_1 + h_i\, tg\theta\right)^2 = \pi r_i^2 \frac{dh_i}{dt}$$

Y recordando que el diferencial de volumen para un tronco de cono es: $d\forall = \pi r_i^2 dh_i$, se concluye que

$$\frac{d(\forall)}{dt} = \frac{d\forall}{dt}$$

Reanudando ahora el problema, se establece:

$$d\forall = \pi(r_1 + h_i tg(\theta))^2 dh_i$$

$$tg\theta = \frac{r_2 - r_1}{H}$$

$$d\forall = \pi(r_1 + h_i \frac{r_2 - r_1}{H})^2 dh_i$$

$$\rho\pi\left(r_1 + h_i \frac{r_2 - r_1}{H}\right)^2 dh_i = -\dot{m}_s dt$$

$$\dot{m}_s = \rho S_d v = \rho S_d \sqrt{2gh_i}$$

$$\frac{\rho\pi}{\rho S_d\sqrt{2g}}\int_H^{hf}\left(r_1+h_i\frac{r_2-r_1}{H}\right)^2\frac{1}{\sqrt{h_i}}dh_i=\int_0^t -dt$$

$$\frac{\pi}{S_d\sqrt{2g}}\int_H^{h_f}(r_1^2+2r_1h_i\frac{r_2-r_1}{H}+h_i^2\frac{(r_2-r_1)^2}{H^2})\frac{1}{\sqrt{h_i}}dh_i=-t$$

$$\frac{\pi}{S_d\sqrt{2g}}\left[r_1^2\frac{\sqrt{h_i}}{1/2}+2r_1\frac{r_2-r_1}{H}\frac{h_i^{3/2}}{3/2}+\frac{(r_2-r_1)^2}{H^2}\frac{h_i^{5/2}}{5/2}\right]_H^{hf}=-t$$

El tiempo de vaciado del depósito será:

$$t=\frac{\pi}{S_d\sqrt{2g}}\left[r_1^2\frac{\sqrt{H}}{1/2}+2r_1\frac{r_2-r_1}{H}\frac{H^{3/2}}{3/2}+\frac{(r_2-r_1)^2}{H^2}\frac{H^{5/2}}{5/2}\right]$$

$$t=\frac{\pi\sqrt{H}\,2}{S_d\sqrt{2g}}\left[r_1^2+2r_1\frac{r_2-r_1}{3}+\frac{(r_2-r_1)^2}{5}\right]$$

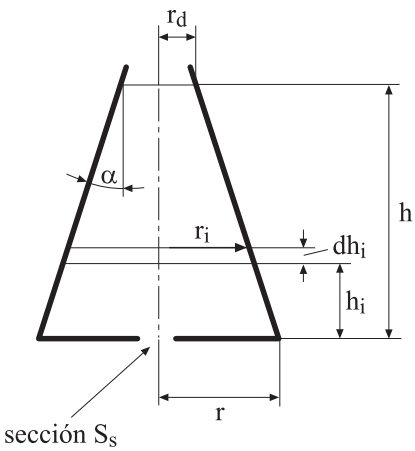
Problema 16

Enunciado

Halle el tiempo que tardará en vaciarse el depósito troncocónico de la figura 16.1, tomando como fluido de trabajo el agua.

$$R_d = 0{,}1\text{ m};\ h = 1\text{ m};\ \alpha = 15^o;\ S_s = 0{,}1\text{ m}^2$$

Fig. 16.1



Resolución

El vaciado del depósito se rige por la ecuación de continuidad:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho \, d\forall + \int_{Sc} \rho \, \bar{V} \, \hat{n} \, dS$$

de donde, considerando el fluido como incompresible, se tiene:

$$0 = \rho \, \frac{d\forall}{dt} + \rho \, V \, S_s \qquad (A)$$

De la figura 16.1 se desprende la relación entre el diferencial de volumen y el diferencial de altura:

$$d\forall = \pi \, r_i^2 \, dh_i$$

Por otro lado, la ecuación que rige la velocidad de salida del fluido por la sección S_S vendrá dada por:

$$V = \sqrt{2 \, g \, h_i}$$

Sustituyendo en (A):

$$0 = \frac{\rho \, \pi \, r_i^2 \, dh_i}{dt} + \rho \sqrt{2 \, g \, h_i} \;\; S_s$$

de la figura 16.1 se desprende la relación entre el radio r_i y la altura h_i

$$r_i = r_d + tg\,\alpha \, (h - h_i) \, ,$$

con lo cual se obtiene:

$$\frac{\pi \left(r_d + tg\,\alpha (h - h_i) \right)^2}{dt} \, dh_i = -\sqrt{2 \, g \, h_i} \;\; S_s$$

cuyas variables son h_i y t.

Agrupando variables e integrando h_i entre los límites 0 y h, y el tiempo entre 0 y t, se obtiene:

$$\pi \left(r_d + tg\,\alpha \, (h - h_i) \right)^2 \, dh_i = -\sqrt{2 \, g \, h_i} \;\; S_s \, dt$$

$$\left[r_d^{\,2} + tg^2\alpha \, (h - h_i)^2 + 2 \, r_d \; tg\,\alpha \, (h - h_i) \right] dh_i = -\sqrt{2 \, g} \;\; \frac{S_s}{\pi} \;\; h_i^{\frac{1}{2}} \, dt$$

$$\left[r_d^{\,2} + tg^2\alpha \, \left(h^2 - 2 \, h \, h_i + h_i^{\,2} \right) + 2 \, r_d \; tg\,\alpha \, h - 2 \, r_d \; tg\,\alpha \, h_i \right] \, dh_i = -\sqrt{2 \, g} \;\; \frac{S_s}{\pi} \;\; h_i^{\frac{1}{2}} \, dt$$

$$\int_h^0 \left[\frac{r_d^{\,2}}{h_i^{\frac{1}{2}}} + tg^2\alpha \; \frac{\left(h^2 - 2\,h\,h_i + h_i^{\,2}\right)}{h_i^{\frac{1}{2}}} + 2\,r_d\;tg\,\alpha\;\frac{h}{h_i^{\frac{1}{2}}} - 2\,r_d\;tg\,\alpha\;\frac{h_i}{h_i^{\frac{1}{2}}} \right] dh_i = \int_0^t -\sqrt{2\,g}\;\frac{S_s}{\pi}\;dt$$

$$\left[r_d^{\,2}\;\frac{h_i^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + tg^2\alpha \left(h^2\;\frac{h_i^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\,h\,\frac{h_i^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{h_i^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + 2\,r_d\;tg\,\alpha\,h\,\frac{h_i^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\,r_d\;tg\,\alpha\,\frac{h_i^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_h^0 = \left[-\sqrt{2\,g}\;\frac{S_s}{\pi}\;t \right]_0^t$$

$$-\left(r_d^{\,2}\;\frac{h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + tg^2\alpha \left(\frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\,\frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + 2\,r_d\;tg\,\alpha\,\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\,r_d\;tg\,\alpha\,\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = -\sqrt{2\,g}\;\frac{S_s}{\pi}\;t$$

Podemos aislar el valor de *t* en función de todas las demás variables que son conocidas.

$$t = \left(r_d^{\,2}\;\frac{h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + tg^2\alpha \left(\frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\,\frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + 2\,r_d\;tg\,\alpha\,\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\,r_d\;tg\,\alpha\,\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\,g}\;\frac{S_s}{\pi}}$$

Y, sustituyendo los valores, se obtiene:

$$t = \left(\begin{array}{l} 0{,}1^2\,m^2\;\dfrac{1^{\frac{1}{2}}\,m^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 0{,}268^2 \left(\dfrac{1^{\frac{5}{2}}\,m^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\,\dfrac{1^{\frac{5}{2}}\,m^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}} + \dfrac{1^{\frac{5}{2}}\,m^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + \\ +2\;\;0{,}1m\;\;0{,}268\;\dfrac{1^{\frac{3}{2}}\,m^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\;\;0{,}1m\;\;0{,}268\;\dfrac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \end{array} \right) \times \frac{1}{\sqrt{2 \times 9{,}81\,m/s^2}\;\dfrac{0{,}1\,m^2}{\pi}}$$

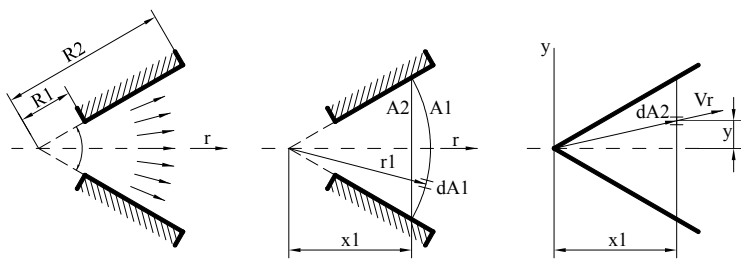
$$t = 1{,}19\,s$$

Problema 17

Enunciado

Sea un fluido no viscoso de densidad constante que fluye a través de un difusor bidimensional cuya profundidad es *b*, se sabe que la velocidad tiene únicamente componente radial V = N/r; y que N = cte. Halle el caudal volumétrico para una de las superficies siguientes: $r = r_1 = cte.$; $x = x_1 = cte.$

Fig. 17.1



Resolución

El caudal volumétrico viene dado por:

$$Q = \int_S V_n \, dA$$

Para la superficie $r = r_1 = cte$.

V es perpendicular al elemento diferencial de área d_A;

$$d_A = b \; r_1 \, d\theta$$

Sustituyendo:

$$Q = \int_{-\theta_{mín}}^{\theta_{máx}} \frac{N}{r_1} b \, r_1 d\theta = \left[N \, b \, \theta \right]_{-\theta_{mín}}^{\theta_{máx}}$$

$Q = N \, b \, (\theta_{máx} + \theta_{mín}) = 2 \, N \, b \, \theta_{máx}$, puesto que el difusor es simétrico respecto al eje X.

El caudal másico será $\dot{m} = Q\rho = \rho 2 \, N \, b \, \theta_{máx}$

Para hallar el caudal en la superficie $x = x_1$, se deberán utilizar las relaciones: (v. figura 17.1):

$$V_n = V\cos\theta \; ; \; dA = b dy; \quad r = \sqrt{x_1^2 + y^2}$$

Integrando únicamente en la mitad superior:

$$Q = 2 \int_0^{y_{máx}} V\cos\theta \, (b \, dy)$$

$$Q = 2b \int_0^{y_{máx}} \frac{N \cdot \cos\theta}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} dy$$

$$\cos\theta = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}}$$

$$Q = 2 \, b \int_0^{y_{max}} \frac{N \cdot x_1}{x_1^2 + y^2} dy = 2b \; N \, x_1 \left(\frac{1}{x_1} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x_1} \right) \right)_0^{y_{máx}}$$

$$Q = 2b \, N \; \operatorname{arctg} \left(\frac{y_{máx}}{x_1} \right) \; ; \qquad tg \; \theta_{máx} = \frac{y_{máx}}{x_1}$$

$$Q = 2b \; N \; \operatorname{arctg}(tg(\theta_{máx}))$$

$Q = 2b\ N\ \theta_{máx}$ que es la misma respuesta que en el caso anterior, lo cual es lógico, pues para una sección de paso que abarque todo el campo de fluido y siempre que la densidad sea constante el caudal volumétrico será constante.

Problema 18

Enunciado

Halle la ecuación diferencial que determina el tiempo de vaciado del depósito de la figura, donde se han realizado varios agujeros para la salida del fluido:

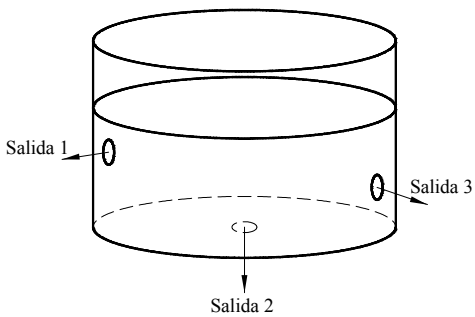
Punto 1. Diámetro D_1; altura del centro del agujero respecto a la base del depósito H_1.

Punto 2. Diámetro D_2; agujero en la base.

Punto 3. Diámetro D_3; altura del centro del agujero respecto a la base del depósito H_3.

H=Nivel del líquido en el depósito para t=0.

Fig. 18.1



Resolución

Para hallar la ecuación diferencial que determina el tiempo de vaciado del depósito de la figura, se aplicará la ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, d\forall + \int_{sc} \rho\, \vec{v}\, d\vec{s} = 0 \quad ; \qquad d\forall = s_D\, dh$$

S_D = Superficie del depósito cilíndrico

Aplicando la ecuación de continuidad al depósito de la figura 18.1, se tiene:

$$\rho\, s_D \frac{\partial h}{\partial t} + \int_{s_1} \left(\rho\sqrt{2g\,(h - H_1)}\right) ds_1 + \int_{s_2} \left(\rho\sqrt{2\,g\,h}\right) ds_2 + \int_{s_3} \left(\rho\sqrt{2g\,(h - H_3)}\right) ds_3 = 0$$

Resolviendo las integrales, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\rho\, s_D \frac{dh}{dt} + \left(\rho \sqrt{2\, g\, (h - H_1)}\right) s_1 + \left(\rho \sqrt{2\, g\, h}\right) s_2 + \left(\rho \sqrt{2\, g\, (h - H_3)}\right) s_3 = 0$$

con lo cual, la ecuación diferencial requerida tendrá la forma:

$$-\frac{dt}{s_D} = \frac{dh}{\left(\sqrt{2\, g\, (h - H_1)}\right) s_1 + \left(\sqrt{2\, g\, h}\right) s_2 + \left(\sqrt{2\, g\, (h - H_3)}\right) s_3}$$

Véase que para la resolución de esta ecuación diferencial se dan tres casos posibles. El primer caso se define para un nivel de líquido en el depósito comprendido entre una altura H genérica y una altura H_1. El nivel del líquido en el depósito para el segundo caso estará comprendido entre las alturas H_1 y H_3. Cuando el nivel del líquido esté comprendido entre las alturas H_3 y 0, se definirá el tercer caso.

Así, para el primer caso, la ecuación diferencial anterior se integrará entre los límites:

$$\int_0^t -\frac{dt}{s_D} = \int_H^{H_1} \frac{dh}{\left(\sqrt{2\, g\, (h - H_1)}\right) s_1 + \left(\sqrt{2\, g\, h}\right) s_2 + \left(\sqrt{2\, g\, (h - H_3)}\right) s_3}$$

Dicha ecuación debe resolverse numéricamente y de ella se obtendrá la variación temporal t_1 del nivel del líquido en el depósito entre una altura genérica H y la altura H_1.

Esta ecuación se resolvió utilizando el método Runge-Kutta de cuarto orden y para los siguientes valores:

$$H=20\ m;\quad H_1=10m;\quad H_3=5\ m;\quad S_1 = S_2 = S_3 = 0{,}0001\ m^2;\quad S_0 = 0{,}5\ m^2.$$

La variación temporal de la altura del nivel del líquido en el depósito entre los valores inicial H = 20 m y el valor final H_1 = 10 m se detalla en la gráfica siguiente.

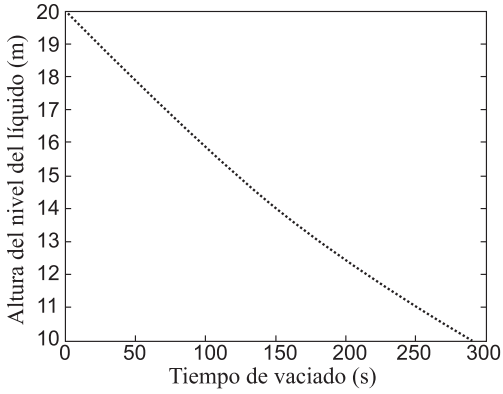


Fig. 18.2

Cuando el nivel del líquido llegue a la salida 1, la ecuación diferencial quedará: (Caso 2).

$$\int_0^t -\frac{dt}{s_D} = \int_{H_1}^{H_3} \frac{dh}{\left(\sqrt{2\,g\,h}\right)s_2 + \left(\sqrt{2\,g\,(h-H_3)}\right)s_3}$$

Obsérvese que se ha situado el origen de tiempos cuando el nivel del líquido en el depósito es H_1.

La ecuación diferencial anterior se puede dar como

$$\int_0^t -\frac{dt}{s_D} = \int_{H_1}^{H_3} \frac{dh}{\left(a\sqrt{h}\right) + \left(b\sqrt{(h-c)}\right)}$$

donde: $a = S_2\sqrt{2g}$; $b = S_3\sqrt{2g}$; $c = H_3$,

Integrando, se obtiene:

$$-\frac{t_2}{S_D} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{2a\sqrt{h}}{-b^2+a^2} + \dfrac{2\,b\,a\,c\ \ \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\left(-b^2+a^2\right)\sqrt{h-c}}{a\sqrt{c\left(-b^2+a^2\right)}}\right)}{(a-b)(a+b)\sqrt{c\left(-b^2+a^2\right)}} \\ -\dfrac{2b\sqrt{h-c}}{-b^2+a^2} - \dfrac{2\,b\,a\,c\ \ \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\left(-b^2+a^2\right)\sqrt{h}}{b\sqrt{c\left(-b^2+a^2\right)}}\right)}{(a-b)(a+b)\sqrt{c\left(-b^2+a^2\right)}} \end{array} \right]_{H_1}^{H_3}$$

ecuación que caracteriza el tiempo de vaciado del depósito cuando el nivel del líquido esté comprendido entre los valores H_1 y H_3.

Por otro lado, cuando la altura del nivel del líquido llegue a la salida 3, la ecuación diferencial aplicable será

$$\int_0^t -\frac{dt}{s_D} = \int_{H_3}^{0} \frac{dh}{\left(\sqrt{2\,g\,h}\right)s_2}$$

$$t_3 = S_D \frac{2\sqrt{H_3}}{S_2\sqrt{2g}}$$

Véase que el tiempo t_1 es relevante cuando la altura del líquido en el depósito oscila entre una altura genérica y H_1; el tiempo t_2 caracteriza la variación temporal del nivel del fluido en el depósito para alturas comprendidas entre H_1 y H_3, mientras que el tiempo t_3 caracterizará el nivel del líquido para alturas comprendidas entre H_3 y cero.

Problema 19

Enunciado

El esquema de la figura 19.1, representa un depósito troncocónico que está en el estado inicial parcialmente lleno de agua. El depósito dispone de tres agujeros situados como indica la figura 19.1, las dimensiones de los agujeros así como del depósito son conocidas, por otro lado tanto el nivel superior del líquido como el flujo saliente por cada uno de los agujeros está en contacto con la atmósfera. Se pide determinar la variación de la altura del nivel del líquido en función del tiempo, considerar conocidos los coeficientes de descarga de cada uno de los agujeros. Comentar las hipótesis realizadas.

Considerar el caso práctico con los siguientes valores conocidos: R= 1m; H_0 = 3m; H_1 = 2m; H_2 = 1m; D_1 =0,04 m; D_2 =0,03 m; D_3 =0,02 m; α = 20º. $C_{d1} = C_{d2} = C_{d3} = 0,6$.

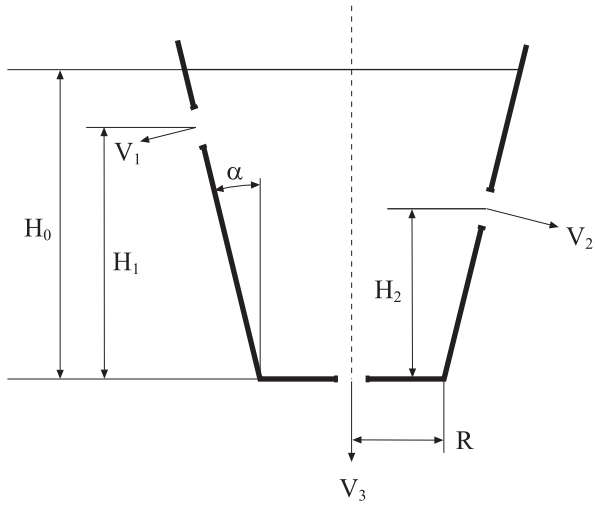


Fig. 19.1
Esquema del depósito troncocónico con los agujeros de salida del fluido

Resolución

La resolución del problema, se hará en tres partes, inicialmente se considerará que el nivel del líquido del fluido desciende desde un valor inicial H_0 hasta un valor final H_1, durante este período el fluido se considerará que sale por los tres agujeros, en el segundo apartado se considerará que el fluido está entre los niveles H_1 inicialmente y H_2 como altura del liquido final, en este caso se va a considerar que el fluido sale por los agujeros dos y tres, por último, cuando el nivel del liquido está entre las alturas H_2 y la base del depósito el fluido saldrá únicamente a través del agujero localizado en la base. Para cada uno de estos casos, va a ser necesario determinar la ecuación diferencial característica y resolverla con el fin de obtener la variación temporal del nivel del líquido con el tiempo.

La obtención de la ecuación diferencial característica de cada tramo, se realiza mediante la aplicación de la ecuación de continuidad en forma integral, al volumen de control formado por el líquido existente en el depósito.

La ecuación de continuidad en forma integral, se expresa:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c} \rho \, d\forall + \oint_{SC} \rho \, \vec{V} \, \overrightarrow{dS}$$

Para el primero de los casos, en donde existen tres superficies por donde el fluido fluye hacia el exterior y considerando que el fluido de trabajo es agua y por tanto se puede tratar como incompresible, se tiene:

$$0 = \rho \frac{d\forall}{dt} + \int_{S1} \rho \, \vec{V} \, \overrightarrow{dS} + \int_{S2} \rho \, \vec{V} \, \overrightarrow{dS} + \int_{S3} \rho \, \vec{V} \, \overrightarrow{dS}$$

Véase que cada una de las integrales caracteriza el caudal másico saliente por cada uno de los tres agujeros, a priori parece lógico suponer que la velocidad del fluido es independiente del diferencial de superficie elegido pero en cambio es evidente que la velocidad del fluido es totalmente dependiente de la altura del nivel del liquido *versus* el agujero en cuestión. Así, la ecuación precedente se puede dar como:

$$0 = \rho \frac{d\forall}{dt} + \rho \, V_1 S_1 + \rho \, V_2 S_2 + \rho \, V_3 S_3$$

Para determinar cada una de las velocidades del fluido en función de la altura entre el nivel del líquido y el centro de cada una de las secciones, se aplicará la ecuación de la energía entre el nivel genérico del líquido y cada una de las secciones de salida, así por ejemplo para la sección 1 se obtiene:

$$g \, H_0 = \frac{V_1^2}{2} + g \, H_1$$

Es importante remarcar que para llegar a esta ecuación, partiendo de la ecuación de la energía se han realizado las siguientes hipótesis, no existe transferencia de calor ni trabajo en el volumen de control elegido, no se considera el efecto de los esfuerzos cortantes, las variaciones temporales de la energía interna, cinética y potencial son nulas puesto que se considera se está aplicando la ecuación de la energía en un instante dado donde la altura del nivel del líquido es fija, por otro lado se trabaja con presiones relativas y al igual que se ha hecho con la ecuación de continuidad la velocidad del fluido no se considera dependiente del diferencial de sección.

La ecuación anterior se puede representar como:

$$V_{1T} = \sqrt{2 \, g(H_0 - H_1)} = \sqrt{2 \, g(h - H_1)}$$

Véase que la altura inicial del líquido H_0 se ha sustituido por una altura genérica h que depende del tiempo.

Haciendo lo propio para la sección del fluido S_2 se obtendría.

$$V_{2T} = \sqrt{2\ g(H_0 - H_2)} = \sqrt{2\ g(h - H_2)}$$

Y para la sección S_3 quedaría:

$$V_{3T} = \sqrt{2\ g(H_0)} = \sqrt{2\ g\ h}$$

Estas tres ecuaciones caracterizan sendas velocidades de paso del fluido por cada una de las secciones respectivas, es necesario remarcar que estas velocidades son teóricas puesto que en el proceso de evaluación de la ecuación de la energía no se han considerado las pérdidas por fricción debidas a los esfuerzos cortantes. Para el presente caso, la relación entre la velocidad teórica y la velocidad real está dada por el coeficiente de descarga C_d, y según el enunciado, son conocidos dichos coeficientes para cada uno de los agujeros, consecuentemente se puede establecer:

$$V_1 = C_{d1}\ V_{1T} = C_{d1}\sqrt{2\ g(h - H_1)}$$

$$V_2 = C_{d2}\ V_{2T} = C_{d2}\sqrt{2\ g(h - H_2)}$$

$$V_3 = C_{d3}\ V_{3T} = C_{d3}\sqrt{2\ g\ h}$$

Sustituyendo las tres ecuaciones acabadas de hallar en la ecuación de continuidad se obtiene:

$$0 = \frac{d\forall}{dt} + C_{d1}\sqrt{2\ g(h - H_1)}\ \ S_1 + C_{d2}\sqrt{2\ g(h - H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{2\ g\ h}\ \ S_3$$

En este punto, es necesario definir el diferencial de volumen del fluido en función de la altura genérica del nivel del líquido, dicho diferencial tomará la forma:

$$d\forall = \pi\, r^2\ dh = \pi\left(R + h\ \tan\alpha\right)^2\ dh$$

De donde:

$$0 = \frac{\pi\left(R + h\ \tan\alpha\right)^2\ dh}{dt} + C_{d1}\sqrt{2\ g(h - H_1)}\ \ S_1$$
$$+ C_{d2}\sqrt{2\ g(h - H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{2\ g\ h}\ \ S_3$$

Esta es la ecuación diferencial que caracteriza la variación temporal de la altura del nivel del líquido entre la altura inicial H_0 y la altura final H_1.

Una vez llegados a este punto es relativamente sencillo el observar que la ecuación diferencial que caracterizaría la variación temporal de la altura del líquido entre las alturas inicial H_1 y final H_2 tomaría la forma:

$$0 = \frac{\pi \left(R + h\ \tan\alpha\right)^2\ dh}{dt} + C_{d2}\sqrt{2\ g(h - H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{2\ g\ h}\ \ S_3$$

De manera homóloga, la ecuación diferencial que caracteriza el tercero de los casos será:

$$0 = \frac{\pi \left(R + h\ \tan\alpha\right)^2\ dh}{dt} + C_{d3}\sqrt{2\ g\ h}\ \ S_3$$

El paso siguiente ha de ser la integración de estas ecuaciones con el fin de obtener la variación de la altura del fluido en función del tiempo. Se empezará integrando el tercero de los casos, dado que la integral es directa. Para dicho tercer caso se obtiene:

$$\int_0^t dt = \int_{H_2}^0 -\frac{\pi \left(R + h\ \tan\alpha\right)^2}{C_{d3}\sqrt{2\ g\ h}\ \ S_3}\ dh$$

Integral que se puede representar:

$$\int_0^t dt = \frac{-\pi}{S_3\ C_{d3}\ \sqrt{2\ g}} \int_{H_2}^0 \frac{R^2 + 2\ R\ \ h \tan\alpha + \ h^2\ \tan^2\alpha}{\sqrt{h}}\ dh$$

Resolviendo cada una de las tres integrales se obtiene:

$$t = \frac{-\pi}{S_3\ C_{d3}\ \sqrt{2\ g}} \left[\frac{R^2\ h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{2\ R \tan\alpha\ h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\tan^2\alpha\ \ h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_{H_2}^0$$

$$t = \frac{\pi}{S_3\ C_{d3}\ \sqrt{2\ g}} \left[\frac{R^2\ H_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{2\ R \tan\alpha\ H_2^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\tan^2\alpha\ H_2^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]$$

Ecuación que caracteriza el tiempo de vaciado del depósito cuando el nivel del líquido es menor que la altura H_2, con lo que el fluido únicamente saldrá por el agujero situado en la base del depósito.

Sustituyendo los valores definidos en el enunciado, se tiene que el tiempo necesario para que el nivel del líquido en el depósito pase de H_2 a cero, será:

$$t = \frac{\pi}{\frac{\pi 0,02^2}{4}\,0,6\,\sqrt{2*9,81}}\left[\frac{1^2*1^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{2*1*\tan(20)*1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\tan^2(20)*1^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]$$

$$t_3 = 9.550,79\ S = 2,652\ \text{horas.}$$

La ecuación diferencial que caracterizaba el tiempo de vaciado del depósito cuando el nivel del líquido estaba entre las alturas H_1 y H_2, era:

$$\frac{-\pi\left(R + h\ \tan\alpha\right)^2\ dh}{dt} = C_{d2}\sqrt{2\ g(h - H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{2\ g\ h}\ \ S_3$$

Su integración toma la forma:

$$\int_0^t dt = \int_{H_1}^{H_2} \frac{-\pi\left(R + h\ \tan\alpha\right)^2\ dh}{C_{d2}\sqrt{2\ g(h - H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{2\ g\ h}\ \ S_3}$$

$$\int_0^t dt = \frac{-\pi}{\sqrt{2\ g}}\int_{H_1}^{H_2} \frac{\left(R^2 + 2\ R\ \ h\tan\alpha + h^2\ \tan^2\alpha\right)}{C_{d2}\sqrt{(h - H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{h}\ \ S_3}\ dh$$

Denominando: $C_{d2}\ \ S_2 = A$; $\quad C_{d3}\ \ S_3 = B$; se tiene:

$$\int_0^t dt = \frac{-\pi}{\sqrt{2\ g}}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{H_1}^{H_2} \frac{R^2\ dh}{A\sqrt{(h - H_2)}\ + B\ \sqrt{h}} + \int_{H_1}^{H_2} \frac{2\ R\ \ h\tan\alpha\ \ dh}{A\sqrt{(h - H_2)}\ + B\ \sqrt{h}} \\ \displaystyle + \int_{H_1}^{H_2} \frac{h^2\ \ \tan^2\alpha\ dh}{A\sqrt{(h - H_2)}\ + B\ \sqrt{h}}\end{array}\right]$$

Resolviendo ahora cada una de las tres integrales por separado, y considerando los valores definidos en el enunciado, se tiene:

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{R^2\ dh}{A\sqrt{(h - H_2)}\ + B\ \sqrt{h}} = \int_2^1 \frac{dh}{0,6*\frac{\pi*0,03^2}{4}\sqrt{(h-1)}\ + 0,6*\frac{\pi*0,02^2}{4}\ \sqrt{h}}$$

$$= -2.097,6673$$

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{2\ R\ \ h\tan\alpha\ \ dh}{A\sqrt{(h - H_2)}\ + B\ \sqrt{h}} = \int_2^1 \frac{2*1*\tan(20)*h*dh}{0,6*\frac{\pi*0,03^2}{4}\sqrt{(h-1)}\ + 0,6*\frac{\pi*0,02^2}{4}\ \sqrt{h}}$$

$$= -2.170,015$$

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{h^2 \ \tan^2\alpha \ dh}{A\sqrt{(h-H_2)} + B\sqrt{h}} = \int_2^1 \frac{\tan^2(20) * h^2 * dh}{0,6 * \frac{\pi * 0,03^2}{4}\sqrt{(h-1)} + 0,6 * \frac{\pi * 0,02^2}{4}\sqrt{h}}$$

$$= -585,062$$

Con lo que el tiempo necesario para que el nivel del líquido descienda de un valor inicial H_1 a un valor final H_2 será:

$$t = \frac{-\pi}{\sqrt{2\,g}}\left[-2.097,667 - 2.170,015 - 585,062\right] = 3.441,816 \text{ S} = 0,956 \text{ horas}$$

$$t_2 = 3.441,816 \text{ S} = 0,956 \text{ horas}$$

Por último, la resolución de la ecuación diferencial que caracteriza el vaciado del depósito entre las alturas H_0 y H_1 era:

$$\frac{-\pi(R + h\ \tan\alpha)^2 \ dh}{dt} = C_{d1}\sqrt{2\,g(h-H_1)}\ \ S_1 + C_{d2}\sqrt{2\,g(h-H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{2\,g\,h}\ \ S_3$$

Su forma integral será:

$$\int_0^t dt = \int_{H_0}^{H_1} \frac{-\pi(R + h\ \tan\alpha)^2}{C_{d1}\sqrt{2\,g(h-H_1)}\ \ S_1 + C_{d2}\sqrt{2\,g(h-H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{2\,g\,h}\ \ S_3}\ dh$$

$$\int_0^t dt = \frac{-\pi}{\sqrt{2\,g}} \int_{H_0}^{H_1} \frac{R^2 + 2\,R\ h\tan\alpha + h^2\ \tan^2\alpha}{C_{d1}\sqrt{(h-H_1)}\ \ S_1 + C_{d2}\sqrt{(h-H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{h}\ \ S_3}\ dh$$

Las tres integrales que se forman para este caso son:

$$\int_{H_0}^{H_1} \frac{R^2}{C_{d1}\sqrt{(h-H_1)}\ \ S_1 + C_{d2}\sqrt{(h-H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{h}\ \ S_3}\ dh$$

$$\int_{H_0}^{H_1} \frac{2\,R\ h\ \tan\alpha}{C_{d1}\sqrt{(h-H_1)}\ \ S_1 + C_{d2}\sqrt{(h-H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{h}\ \ S_3}\ dh$$

$$\int_{H_0}^{H_1} \frac{h^2\ \tan^2\alpha}{C_{d1}\sqrt{(h-H_1)}\ \ S_1 + C_{d2}\sqrt{(h-H_2)}\ \ S_2 + C_{d3}\sqrt{h}\ \ S_3}\ dh$$

Realizando la integración y considerando los valores dados en el enunciado, se obtiene:

$$\int_3^2 \frac{dh}{0,6 * \frac{\pi * 0,04^2}{4}\sqrt{(h-2)} + 0,6 * \frac{\pi * 0,03^2}{4}\sqrt{(h-1)} + 0,6 * \frac{\pi * 0,02^2}{4}\sqrt{h}} = -790,181$$

$$\int_3^2 \frac{2*1*\ h\ *\tan(20)*\ dh}{0,6*\frac{\pi*0,04^2}{4}\sqrt{(h-2)}+0,6*\frac{\pi*0,03^2}{4}\sqrt{(h-1)}\ +0,6*\frac{\pi*0,02^2}{4}\ \sqrt{h}} = -1.404,587$$

$$\int_3^2 \frac{h^2\ *\tan^2(20)*\ dh}{0,6*\frac{\pi*0,04^2}{4}\sqrt{(h-2)}+0,6*\frac{\pi*0,03^2}{4}\sqrt{(h-1)}\ +0,6*\frac{\pi*0,02^2}{4}\ \sqrt{h}} = -633,084$$

Es importante remarcar que la resolución de estas integrales se ha realizado numéricamente.

Sustituyendo en la ecuación principal, se tiene:

$$t = \frac{-\pi}{\sqrt{2\ g}}\left[-790,181-1.404,587-633,084\right]$$

$$t_1 = 2.005,65\ S = 0,557\ horas.$$

Consecuentemente, el tiempo de vaciado del depósito será la suma de los tres tiempos hallados, es decir:

$t_{vaciado} = t_1 + t_2 + t_3 = 2.005,65 + 3.441,816 + 9.550,79 = 14.998,25\ S = 4,166$ horas.

Problema 20

Enunciado

La densidad del gas que fluye a través de un conducto de sección constante S y longitud X varía de acuerdo con la ley:

$$\rho = \rho_1\left(1-\frac{x}{2X}\right)\sin\frac{v_1 t}{X} \qquad \frac{X}{v_1}\frac{\pi}{2} > t \geq 0$$

$$0 \leq x \leq X$$

Donde V_1 y ρ_1 son la velocidad y la densidad de referencia; por ejemplo, la velocidad y la densidad del fluido a la entrada del conducto.

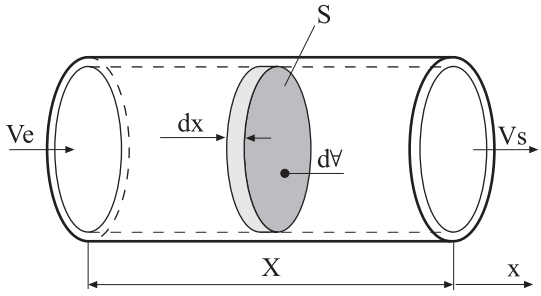


Fig. 20.1

Halle la diferencia de flujo másico que entra y sale del conducto en función del tiempo.

Resolución

La ecuación de continuidad se expresa:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \rho d\forall + \int_{ss} \rho \vec{v} d\vec{s} + \int_{se} \rho \vec{v} d\vec{s} \; ;$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \rho d\forall = -\int_{ss} \rho \vec{v} d\vec{s} - \int_{se} \rho \vec{v} d\vec{s} = \int_{se} \rho v \cos\theta \cdot ds - \int_{ss} \rho v \cos\theta \cdot ds \; ;$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \rho d\forall = \dot{m}_e - \dot{m}_s \; ;$$

La variación de flujo másico se obtendrá de resolver esta ecuación, de donde:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \rho d\forall = \frac{d}{dt}\int_0^X \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) \sin\frac{v_1 t}{X} \cdot S \, dx = \frac{d}{dt}\rho_1 \sin\frac{v_1 t}{X} S \int_0^X \left(1 - \frac{x}{2X}\right) dx =$$

$$= \frac{d}{dt}\rho_1 \sin\frac{v_1 t}{X} S \left[x - \frac{x^2}{4X}\right]_0^X = \frac{d}{dt}\rho_1 \sin\frac{v_1 t}{X} \cdot S \frac{3}{4} X =$$

$$= S \, X \, \rho_1 \frac{3}{4} \cos\frac{v_1 t}{X} \quad \frac{v_1}{X} \; ; \quad \text{simplificando}$$

$$\dot{m}_e - \dot{m}_s = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \rho d\forall = S \rho_1 \frac{3}{4} v_1 \cos\frac{v_1 t}{X}$$

Por otro lado, si en lugar de realizar el proceso de integración inicialmente y luego el de derivación se realiza a la inversa, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \rho d\forall = \frac{d}{dt}\int_0^X \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) \sin\frac{v_1 t}{X} \cdot S \, dx = \int_0^X S \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) dx \left[\frac{d}{dt}\sin\frac{v_1 t}{X}\right] =$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \rho d\forall = \int_0^X S \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) dx \left[\cos\frac{v_1 t}{X} \quad \frac{v_1}{X}\right] =$$

Integrando:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_c}\rho d\forall = S\rho_1\left(1-\frac{x}{4X}\right)_0^X\left[\cos\frac{v_1 t}{X}\ \frac{v_1}{X}\right] = S\rho_1\frac{3}{4}V_1\cos\frac{v_1 t}{X}$$

Obsérvese que, en ambos casos, se obtiene el mismo resultado.

Problema 21

Enunciado

El dibujo de la figura 21.1 esquematiza un conducto de sección circular, cuyos extremos están sumergidos en un fluido y cuyo interior está lleno con el mismo fluido. Inicialmente, el radio del conducto es r_0, pero dicho radio varía con el tiempo según la función: $r = r_0 - A\ \sin(t)$, donde r_0 y A son constantes conocidas. Obsérvese que, si el radio disminuye con el tiempo, la sección de todo el conducto variará temporalmente; véase asimismo que dicha sección tiende a disminuir a partir del estado inicial.

Se considera que la presión en ambos extremos del conducto es conocida.

Considérese el fluido como incompresible.

Se pide:

1. Determinar la velocidad media del fluido en función de la posición X y del tiempo.

2. Hallar la ecuación que caracteriza la variación de presión en el interior del conducto en función de la posición y el tiempo. Los efectos de rozamiento entre fluido y conducto son despreciables.

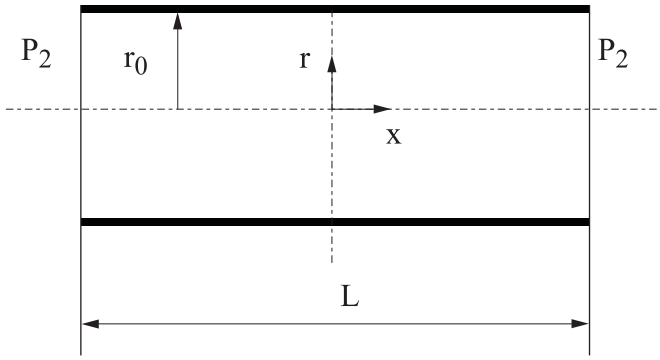


Fig. 21.1
Conducto objeto de estudio

Realícense las hipótesis que se consideren oportunas.

Resolución

1. Para la resolución de este problema, se elige el volumen de control definido en la figura 21.2. Véase que el volumen de control abarca el diámetro del conducto pero solo parte de su longitud.

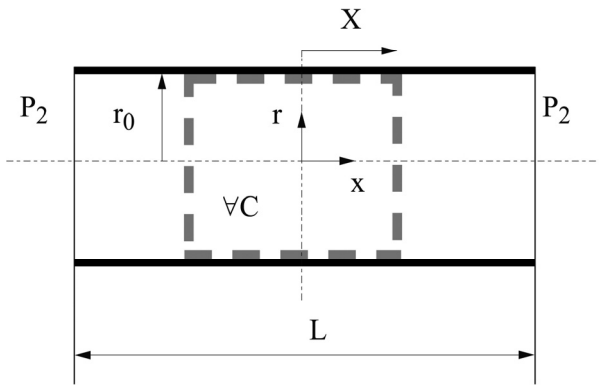


Fig. 21.2
Volumen de control elegido

Aplicando la ecuación de continuidad de la masa al volumen de control definido en la figura 21.2, se establece:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, d\forall + \oint_{SC} \rho \, \vec{V} \, \vec{ds}$$

Dado que el fluido se considera incompresible, se tiene:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} d\forall + \oint_{SC} \vec{V} \, \vec{ds}$$

Puesto que existen dos superficies por las cuales existe flujo, la ecuación precedente queda:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} d\forall + \int_{SS1} \vec{V} \, \vec{ds} + \int_{SS2} \vec{V} \, \vec{ds}$$

Considerando la velocidad uniforme y el flujo simétrico, se puede decir que:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} d\forall + 2VS$$

El diferencial de volumen se puede expresar como $d\forall = S\,dx$, de donde:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} S\,dx + 2VS = \frac{d}{dt}\left(S\int_{-x}^{x} dx \right) + 2VS = \frac{d}{dt}(S\,2x) + 2VS = \frac{d}{dt}\left(\pi\, r^2\; 2x\right) + 2V\,\pi\, r^2$$

Y, dado que el radio del conducto varía temporalmente, se tiene:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\pi\left(r_0 - A\sin t\right)^2\ 2x\right) + 2V\,\pi\left(r_0 - A\sin t\right)^2$$
$$= 4\,\pi\,x\left(r_0 - A\sin t\right)\left(-A\cos t\right) + 2V\,\pi\left(r_0 - A\sin t\right)^2$$

Despejando de esta ecuación el valor de la velocidad del fluido, se llega a:

$$V = \frac{2\,x\left(A\cos t\right)}{\left(r_0 - A\sin t\right)}$$

Obsérvese que la velocidad del fluido depende de la posición y del tiempo.

2. Para hallar la presión que tendrá el fluido en función de la posición y del tiempo, se utiliza el volumen de control definido en la figura 21.3.

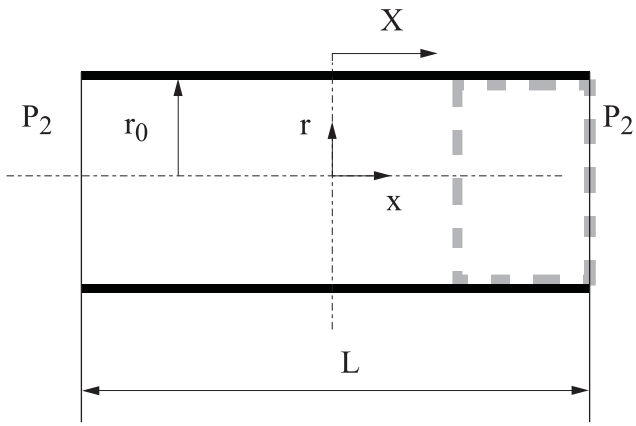


Fig. 21.3 Volumen de control utilizado en este segundo apartado

El paso siguiente consiste en aplicar, al volumen de control definido en la figura 21.3, la ecuación de la energía en forma integral, de donde:

$$\dot{Q} + \dot{W}_{eje} + \dot{W}_{\tau} - \oint_{SC} P\,\overrightarrow{V_C}\,\overrightarrow{ds} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(u + \frac{V^2}{2} + g\,z\right)d\forall + \oint_{SC}\rho\left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g\,z\right)\overrightarrow{V}\,\overrightarrow{ds}$$

Las hipótesis de trabajo para este segundo apartado son:

No se considera que exista transferencia de calor, $\dot{Q} = 0$.

No existe trabajo transmitido o absorbido mediante un eje mecánico, $\dot{W}_{eje} = 0$.

No se consideran los esfuerzos cortantes entre el fluido y el conducto, $\dot{W}_{\tau} = 0$.

No existe potencia alguna transmitida o cedida al fluido debido a la deformación del volumen de control, ni causada por los efectos de la presión que actúa sobre el volumen de control. Véase que la deformación del volumen de control es por acciones externas, no definidas en el problema; en consecuencia, el término $\oint_{SC} P\,\vec{V_C}\,\vec{ds} = 0$.

Dado que no se considera la transferencia de calor, no habrá variaciones de la energía interna asociada al fluido, $\Delta u = 0$.

No existen variaciones de energía potencial asociadas al volumen de control, $\Delta z = 0$.

La ecuación resultante toma la forma:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall + \oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds}$$

El primer sumando del segundo término se resuelve:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall = \frac{d}{dt}\int_x^{\frac{L}{2}}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)S\,dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho S}{2}\int_x^{\frac{L}{2}}\left(\frac{2\,x\,(A\cos t)}{(r_0 - A\sin t)}\right)^2 dx\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{2\rho S\,(A\cos t)^2}{(r_0 - A\sin t)^2}\int_x^{\frac{L}{2}} x^2\,dx\right)$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\rho\pi\,(r_0 - A\sin t)^2\,(A\cos t)^2}{3\,(r_0 - A\sin t)^2}\left(\frac{L^3}{8} - x^3\right)\right)$$

$$= \frac{4}{3}\rho\pi A^2\cos t\,(-\sin t)\left(\frac{L^3}{8} - x^3\right)$$

El segundo sumando del segundo término tomará la forma:

$$\oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds} = \oint_{SE}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds} + \oint_{SS}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds}$$

Obsérvese que ninguna de las variables, ni la velocidad ni la presión, depende del diferencial de superficie; en consecuencia, se obtiene:

$$\oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds} = -\rho\left(\frac{P_E}{\rho}+\frac{V_E^2}{2}\right)V_E\,S_E + \rho\left(\frac{P_S}{\rho}+\frac{V_S^2}{2}\right)V_S\,S_S$$

La presión y la velocidad en la sección de entrada (v. figura 21.3) son genéricas, con posición x genérica, mientras que, en la sección de salida, la presión es P_2 y la velocidad es la caracterizada por x=L/2. En consecuencia, la ecuación anterior toma la forma:

$$\oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds}=-\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}\frac{4\,x^2\,(A\cos t)^2}{(r_0-A\sin t)^2}\right)\frac{2\,x\,(A\cos t)}{(r_0-A\sin t)}\pi\,(r_0-A\sin t)^2$$
$$+\rho\left(\frac{P_2}{\rho}+\frac{1}{2}\frac{4\left(\frac{L}{2}\right)^2(A\cos t)^2}{(r_0-A\sin t)^2}\right)\frac{2\left(\frac{L}{2}\right)(A\cos t)}{(r_0-A\sin t)}\pi\,(r_0-A\sin t)^2$$

Reordenando, se obtiene:

$$\oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds}=-P\,2\,x\,(A\cos t)\pi\,(r_0-A\sin t)-\rho\left(\frac{4\,\pi x^3\,(A\cos t)^3}{(r_0-A\sin t)}\right)$$
$$+P_2\,L\,(A\cos t)\pi\,(r_0-A\sin t)+\rho\left(\frac{1}{2}\frac{\pi L^3\,(A\cos t)^3}{(r_0-A\sin t)}\right)$$

Sustituyendo ahora los dos sumandos en la ecuación de partida, se llega a:

$$0=\frac{4}{3}\rho\,\pi A^2\cos t\,(-\sin t)\left(\frac{L^3}{8}-x^3\right)-P\,2\,x\,(A\cos t)\pi\,(r_0-A\sin t)$$
$$-\rho\left(\frac{4\,\pi x^3\,(A\cos t)^3}{(r_0-A\sin t)}\right)$$
$$+P_2\,L\,(A\cos t)\pi\,(r_0-A\sin t)+\rho\left(\frac{1}{2}\frac{\pi L^3\,(A\cos t)^3}{(r_0-A\sin t)}\right)$$

Y, despejando la presión genérica P de la ecuación precedente, se concluye:

$$P=P_2\frac{L}{2x}+\frac{1}{x\,(r_0-A\sin t)}\left(\begin{array}{l}\frac{2}{3}\rho\;A\,(-\sin t)\left(\frac{L^3}{8}-x^3\right)\\+\left(\frac{2\,\rho\,(A\cos t)^2}{(r_0-A\sin t)}\right)\left(\frac{L^3}{8}-x^3\right)\end{array}\right)$$

Véase que esta ecuación caracteriza la presión en función del tiempo y en cualquier punto del conducto, punto definido por la posición x. Es interesante destacar que, para el punto x = L/2, la presión es siempre P_2, independientemente del tiempo elegido, lo cual corrobora la validez de la ecuación.

Problema 22

Enunciado

Sea el conjunto cilindro-émbolo de la figura adjunta donde se tiene, un cilindro lleno de aceite y en la parte superior un émbolo en contacto con un volumen de nitrógeno. Se conoce que el cilindro, se desplaza con una velocidad $V = K \sin(t)$. Conocidas las condiciones iniciales, tanto de la presión de los fluidos, como sus volúmenes y la posición inicial del cilindro y émbolo, así como la constante K de la velocidad, determinar:

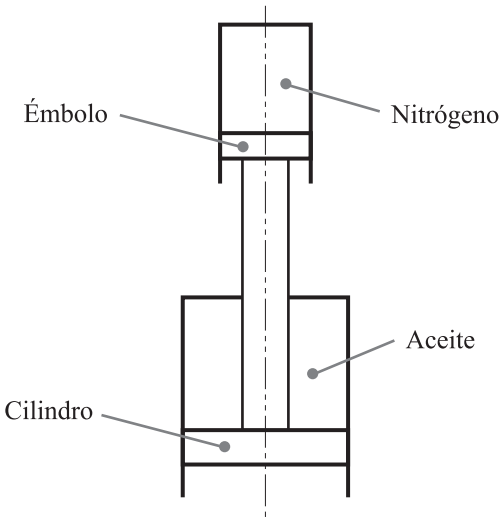
1.- La presión temporal del fluido (aceite) situado en la cámara del cilindro. Considerar el fluido como compresible.

2.- La posición temporal del émbolo.

3.- La presión temporal del nitrógeno. Considerar un proceso de compresión-expansión adiabático.

Obsérvese que las dos cámaras están separadas y no se contempla ningún caudal de fugas. Considerar todas las dimensiones conocidas.

Fig. 22.1



Resolución

1.- Se aplica la ecuación de continuidad a la cámara de aceite.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, d\forall + \oint_{SC} \rho \, \vec{V} \, \overrightarrow{ds}$$

Puesto que no existe flujo entrante o saliente y el fluido se considera compresible, se tiene:

$$0 = \rho \frac{\partial \forall}{\partial t} + \forall \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Recordando la relación entre las variaciones de presión y densidad con el módulo de compresibilidad volumétrica de un fluido.

$$\beta = \rho \frac{dP}{d\rho}$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación de continuidad se obtiene:

$$0 = \rho \frac{\partial \forall}{\partial t} + \forall \frac{\rho}{\beta} \frac{\partial P}{\partial t}$$

La variación temporal del volumen de aceite se puede dar.

$$\frac{d\forall}{dt} = S_C \frac{dY}{dt} = S_C \; V_P = S_C \; K \sin(t)$$

$$\int_{\forall_i}^{\forall} d\forall = \int_0^t S_C \; K \sin(t) dt$$

$$\forall = \forall_i + S_C \; K(\cos(t) - 1)$$

Considerando las relaciones establecidas, la ecuación de continuidad toma la forma.

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{S_C \; V_P \; \beta}{\forall} = -\frac{\beta \; S_C \; K \sin(t)}{\forall_i + S_C \; K(\cos(t) - 1)}$$

$$\int_{P_i}^{P} dP = \int_0^t \frac{-\beta \; S_C \; K \sin(t)}{\forall_i + S_C \; K(\cos(t) - 1)} \; dt$$

$$P - P_i = \beta \ln\left(\forall_i + S_C \; K(\cos(t) - 1)\right)_0^t = \beta \ln\left(\frac{\forall_i + S_C \; K(\cos(t) - 1)}{\forall_i}\right)$$

$$P = P_i + \beta \ln\left(\frac{\forall_i + S_C \; K(\cos(t) - 1)}{\forall_i}\right)$$

2.- La determinación de la posición temporal del émbolo es directa cuando se observa que:

$$V_{pistón} = V_{embolo} = K \sin(t) = \frac{dY}{dt}$$

$$\int_{Y_i}^{Y} dY = \int_0^t K \sin(t)\ dt$$

$$Y - Y_i = -K\left(\cos(t) - 1\right)$$

3.- El último apartado requiere hallar la presión temporal del nitrógeno. Se indica que el proceso de compresión-expansión, se puede considerar como adiabático.

Para un proceso adiabático se cumple:

$$P_i\ \forall_i^{\gamma} = P\ \forall^{\gamma}$$

Ecuación que se puede dar:

$$\forall = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\ \forall_i$$

Diferenciando esta ecuación respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{d\forall}{dt} = -\forall_i\ \frac{1}{\gamma}\ \frac{P_i^{\frac{1}{\gamma}}}{P^{\frac{1}{\gamma}+1}}\ \frac{dP}{dt}$$

Para el nitrógeno, se puede establecer que:

$$\frac{d\forall}{dt} = S_E\ \frac{dY}{dt} = S_E\ V_P = S_E\ K\ \sin(t)$$

La integración dará lugar a:

$$\int_0^t S_E\ K \sin(t)\, dt = -\forall_i\ \frac{1}{\gamma}\ P_i^{\frac{1}{\gamma}} \int_{P_i}^{P} \frac{dP}{P^{\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)}}$$

$$S_E\ K\left(-\cos(t)\right)_0^t = -\forall_i\ \frac{1}{\gamma}\ P_i^{\frac{1}{\gamma}} \left[\frac{P^{-\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)+1}}{-\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)+1}\right]_{P_i}^{P} = -\forall_i\ \frac{1}{\gamma}\ P_i^{\frac{1}{\gamma}} \left[\frac{P^{-\frac{1}{\gamma}}}{-\frac{1}{\gamma}}\right]_{P_i}^{P}$$

$$S_E\ K\left(\cos(t) - 1\right) = -\forall_i\ P_i^{\frac{1}{\gamma}} \left[P^{-\frac{1}{\gamma}} - P_i^{-\frac{1}{\gamma}}\right]$$

$$P^{-\frac{1}{\gamma}} = P_i^{-\frac{1}{\gamma}} - \frac{S_E\ K}{\forall_i\ P_i^{\frac{1}{\gamma}}}\left(\cos(t)-1\right) = P_i^{-\frac{1}{\gamma}}\left[1-\frac{S_E\ K}{\forall_i}\left(\cos(t)-1\right)\right]$$

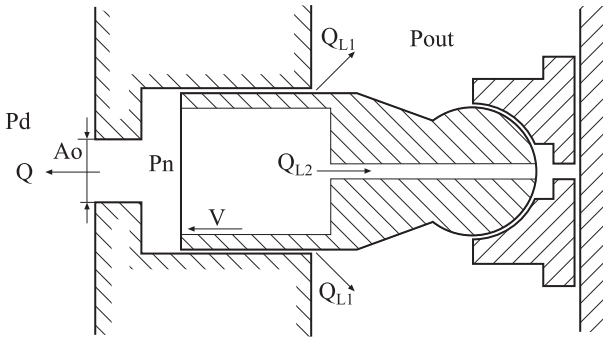
Ecuación que caracterizará la variación temporal de presión del nitrógeno.

Problema 23

Enunciado

En el esquema de la figura 23.1, halle la ecuación diferencial que determina la variación temporal de presión en la cámara del cilindro, conocidas las ecuaciones de los caudales de fuga, Q_{L1}; Q_{L2}.

Fig. 23.1



Resolución

La ecuación de continuidad en modo integral y régimen transitorio se enuncia:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall + \oint_{sc}\rho\,\vec{V}\,d\vec{s} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall + \int_{s_0}\rho\,\vec{V}\,d\vec{s} + \int_{s_1}\rho\,\vec{V}\,d\vec{s} + \int_{s_2}\rho\,\vec{V}\,d\vec{s} = 0$$

puesto que la densidad y el volumen de control dependen del tiempo.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\int_{vc} d\forall + \rho\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} d\forall + \int_{s_0}\rho\,\vec{V}\,d\vec{s} + \int_{s_1}\rho\,\vec{V}\,d\vec{s} + \int_{s_2}\rho\,\vec{V}\,d\vec{s} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\forall + \rho\,\frac{\partial\forall}{\partial t} + \dot{m}_{salida\,0} + \dot{m}_{salida\,1} + \dot{m}_{salida\,2} = 0$$

$$\beta = -\forall\frac{dp}{d\forall} = -\frac{\forall}{m}\ \frac{dp}{d\left(\frac{\forall}{m}\right)} = -v\frac{dp}{dv} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \rho\frac{dp}{d\rho};$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\beta}; \qquad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\beta}\frac{dp}{dt};$$

$$\frac{\rho}{\beta}\forall\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial \forall}{\partial t} + \rho\, Q_{salida\,0} + \rho\, Q_{L1} + \rho\, Q_{L2} = 0$$

Despejando la densidad:

$$\frac{\forall}{\beta}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \forall}{\partial t} + Q_{outlet0} + Q_{L1} + Q_{L2} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\beta}{\forall}\left(-Q_{salida\,0} - Q_{L1} - Q_{L2} - \frac{\partial \forall}{\partial t}\right) \text{ (A)}$$

$$\frac{d\forall}{dt} = S\ \frac{dx}{dt} = S\, V_{velocidad};$$

La variación temporal de presión en la cámara cilíndrica puede ser determinada si se conocen las ecuaciones de los caudales de fuga en función de la presión P_n necesitándose también el valor temporal del volumen de la cámara del cilindro.

A modo de ejemplo, y para el pistón de la figura 23.2, estas ecuaciones se podrían dar de la siguiente manera:

Suponiendo que en t = 0 el pistón se halla en el PMI (punto muerto inferior), el volumen temporal de la cámara del cilindro se puede dar como:

$$\forall = \forall_0 + S_{pistón}\, R_P \tan(\alpha)(\cos(\omega t) - 1)$$

Y por tanto:

$$\frac{d\forall}{dt} = -S_{pistón} R_P \tan(\alpha)\sin(\omega t)\,\omega$$

Donde:

$\forall_0$ es el volumen del cilindro en el punto muerto inferior.

ω = velocidad de giro de la bomba.

R_P = radio del plato inclinado.

α = ángulo de inclinación del plato inclinado.

El caudal de salida del fluido hacia el exterior de la bomba se da por:

$$Q_{salida\,0} = \text{signo de}\left(P_{in} - P_d\right) Cd\, A_0 \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(P_{in} - P_d\right)};$$

Cd = coeficiente de descarga

A_0= Área de salida.

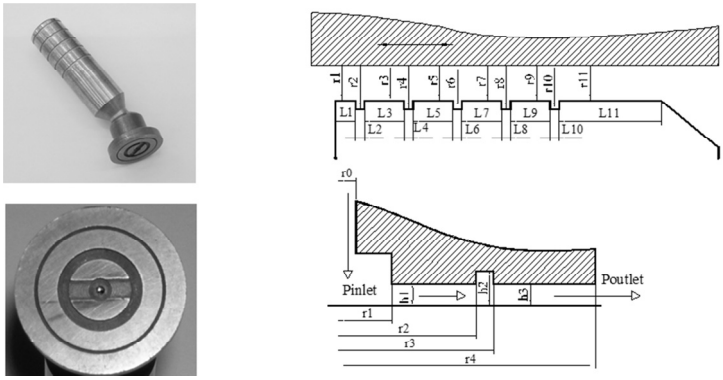


Fig. 23.2
Conjunto pistón y patín deslizante

Para el pistón de la figura 23.2, el caudal de fugas temporal viene dado por la ecuación:

$$Q_{L1} = \pi D\left[\frac{h_1\ R_p\ \tan\alpha\left(-\sin\left(\omega t\right)\right)\omega}{2}\right] +$$

$$-\frac{\pi D}{12}\left[\frac{P_{Tank} - P_{in} - 6R_p\ \tan\alpha\left(-\sin\left(\omega t\right)\right)\omega\mu\left[\frac{h_{10}-h_1}{h_{10}^3}\right]\left(l_2+l_4+l_6+l_8+l_{10}\right)}{\frac{\mu}{h_{11}^3}\left(l_1+l_2+l_3+.....+l_{11}-\frac{0,0195}{2}-R_p\tan\alpha\cos\left(\omega t\right)\right)+\mu\left[\left(\frac{1}{h_2^3}-\frac{1}{h_1^3}\right)\left(l_2+l_4+l_6+l_8+l_{10}\right)\right]}\right]$$

Obsérvese que el caudal depende de la velocidad temporal del pistón y de la longitud del pistón en el interior del cilindro.

Para el patín deslizante de la figura 23.2, y considerando que el patín se desliza paralelo al plato inclinado, el caudal de fugas vendrá dado por:

$$Q_{L2} = \frac{\pi}{6\mu}\ \frac{p_{in} - p_{Tank}}{\frac{1}{h_1^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)+\frac{1}{h_2^3}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)+\frac{1}{h_3^3}\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}$$

La integración de la ecuación diferencial (A) con las correspondientes ecuaciones asociadas da lugar a la variación de presión en la cámara del pistón, en función del tiempo.

Problema 24

Enunciado

El esquema que se muestra a continuación representa un pistón que impulsa fluido hacia un acumulador. Para el estado inicial, se conocen tanto la posición del pistón como la del émbolo del acumulador, sus secciones $S_{pistón}$; $S_{émbolo}$, así como las condiciones iniciales de los dos fluidos:

$$P_0; T_0; \rho_0; h_0; \qquad P_{N_2\,0}; T_{N_2\,0}; \rho_{N_2\,0}; \forall_{N_2\,0}$$

La velocidad de desplazamiento temporal del pistón se puede dar como $V = K\ \text{seno}(t)$, donde K es una constante a determinar. La variación temporal del volumen del cilindro inferior se representa: $\forall = \frac{S_{\text{pistón}}\ h_0}{2}(1+\cos(t))$, donde h_0 es la longitud inicial de la cámara del pistón.

Se pide:

1. Hallar la ecuación diferencial que caracteriza la variación temporal de la presión en la cámara del pistón, sabiendo que la válvula (A) situada en el acumulador está abierta y permite que pequeñas cantidades de fluido fluyan hacia la atmósfera. Considerar que este caudal de fugas es pequeño, comparado con el flujo proveniente del pistón. Considerar asimismo que el émbolo que separa el nitrógeno del aceite esta bloqueado y no se puede mover. Determinar la constante K.

2. Si la válvula (A) está cerrada, y Para el caso en que el émbolo que separa el aceite y el nitrógeno esté inmóvil, determinar la ecuación que caracteriza la variación temporal de presión en el sistema.

3. Si el émbolo del acumulador tiene en la parte superior nitrógeno a presión, la válvula (A) está cerrada, y dicho émbolo se puede mover libremente, determinar el conjunto de ecuaciones diferenciales que caracteriza el desplazamiento temporal del émbolo. Razonar las hipótesis realizadas.

4. Determinar cómo varían la posición del émbolo y la presión del nitrógeno con el tiempo, si se tiene en cuenta que el aceite se puede considerar incompresible. La válvula A está cerrada.

Recordar que el fluido (N_2), es un gas ideal.

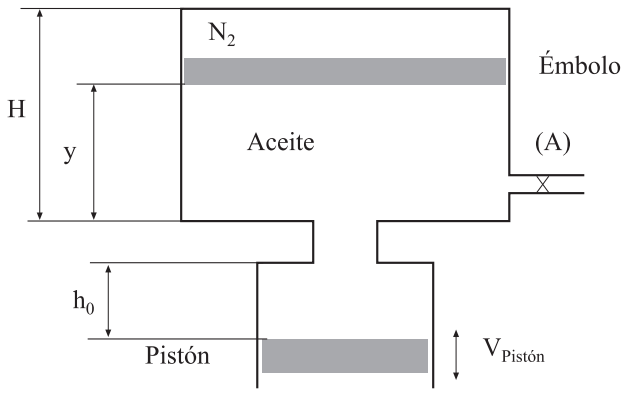


Fig. 24.1 Conjunto de pistón y acumulador

Resolución

1. La ecuación de continuidad en modo integral establece

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c}\rho\cdot d\forall+\oint_{sc}\rho\cdot\vec{v}\cdot d\vec{S}=0$$

Según el enunciado, el volumen de la parte superior se considerará constante:

$$\forall\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\cdot S_{piston}\cdot\frac{\partial h_{piston}}{\partial t}+\rho\cdot V_S\cdot S_S=0$$

$$(\forall_{embolo}+\forall_{piston})\cdot\frac{d\rho}{dt}+\rho\cdot S_{Piston}\cdot V_{piston}+\rho\cdot V_S\cdot S_S=0$$

Considerando que el fluido que atraviesa la válvula mantiene su densidad constante, la velocidad del fluido por la válvula se puede dar en función del gradiente de presiones entre extremos de la misma.

$$\frac{d\rho}{dt}=\left[-\rho\cdot S_{pistón}\cdot V_{pistón}-\rho\cdot S_{salida}\sqrt{\frac{2\cdot(P_{aceite}-P_{ext})}{\rho}}\right]\cdot\frac{1}{(\forall_{émbolo}+\forall_{pistón})}$$

La relación entre la variación de densidad y la variación de presión, viene dada en función del módulo de compresibilidad volumétrico, de donde

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\rho}{\beta}\cdot\frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dP_{aceite}}{dt}=\left[-S_{pistón}\cdot K\cdot sen(t)-S_{salida}\sqrt{\frac{2\cdot(P_{aceite}-P_{ext})}{\rho}}\right]\cdot\frac{\beta}{(\forall_{émbolo}+\forall_{pistón})}$$

Esta es la ecuación diferencial que da la presión del aceite en función del tiempo. Se ha considerado que, a través de la válvula, el flujo es siempre saliente.

A priori, en esta ecuación, la densidad del aceite se considerará la inicial y constante, aunque la mejor manera de afrontar el tema es conocer la ecuación que determina la variación de densidad con la presión.

Véase asimismo que, según el enunciado $\forall_{piston}=\frac{S_{piston}\cdot h_o}{2}\cdot(1+\cos(t))$

El valor de la constante K se puede determinar:

$$\frac{\partial\forall_{pistón}}{\partial t}=\frac{S_{pistón}\partial h}{\partial t}=S_{pistón}V_{pistón};$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial \forall_{\text{pistón}}}{\partial t} = \frac{S_{\text{pistón}} h_0}{2}\left(-\sin(t)\right);$$

$$\frac{S_{\text{pistón}} h_0}{2}\left(-\sin(t)\right) = S_{\text{pistón}}\ K \sin(t); \qquad K = -\frac{h_0}{2}$$

2. Cuando la válvula (A) está cerrada y el émbolo se mantiene estático, la presión temporal del aceite será

$$\forall \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot (\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}}) = 0$$

$$\forall \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$(\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}}) \cdot \frac{dP}{dt} \cdot \frac{\rho}{\beta} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \sin(t) \cdot \beta}{\forall_{\text{émbolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2} \cdot (1 + \cos(t))}$$

Ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{C \cdot \sin(t)}{A + B \cdot \cos(t)} \qquad \text{donde:} \qquad C = S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \beta$$

$$A = \forall_{\text{embolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2}$$

$$B = \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2}$$

$$\int_{Pin}^{P} P = \int_{t=0}^{t} -\frac{C \cdot \sin(t)}{A + B \cdot \cos(t)} \longrightarrow P - P_{\text{inicial}} = \frac{C}{B} \cdot \ln\left(A + B \cdot \cos(t)\right)_0^t =$$

$$= \frac{C}{B} \cdot \ln\left(\frac{A + B \cdot \cos(t)}{A + B}\right)$$

Variación temporal de la presión:

$$P = P_{\text{inicial}} + \frac{C}{B} \cdot \ln\left(\frac{A + B \cdot \cos(t)}{A + B}\right)$$

3. Puesto que ahora el émbolo superior se desplaza, de la ecuación de continuidad se obtiene

$$\forall_{(e+p)} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot (\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}}) = 0$$

$$(\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}}) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot + \rho \cdot \frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial \forall_{\text{pistón}}}{\partial t} = 0$$

$$(\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}}) \cdot \frac{dP}{dt} \cdot \frac{\rho}{\beta} + \rho \cdot S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy}{dt} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = \left[-S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} - S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy_{\text{émbolo}}}{dt} \right] \frac{\beta}{\left(S_{\text{émbolo}} \cdot y_{\text{émbolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2} \cdot (1 + \cos(t)) \right)}$$

donde: $$S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy_{\text{émbolo}}}{dt} = \frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t}$$

Las variables para este caso son: presión aceite; presión N_2; y $_{\text{émbolo}}$; t.

Para un proceso adiabático, la relación presión-volumen del nitrógeno será

$$P_{N_2} = P_{N_2\,\text{inicial}} \cdot \left(\frac{\forall_{N_2\,\text{inicial}}}{\forall_{N_2}} \right)^{\gamma}$$

$$\forall_{N_2} = \forall_{N_2\,\text{inicial}} \cdot \left(\frac{P_{N_2\,\text{inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

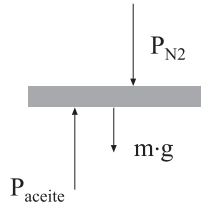
$$S_{\text{émbolo}} (H - y) = \forall_{N_2\,\text{inicial}} \cdot \left(\frac{P_{N_2\,\text{inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Diferenciando esta ecuación respecto al tiempo, se tiene

$$\frac{d\forall_{N_2}}{dt} = -S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} = -\forall_{N_2\,\text{inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{P_{N_2\,\text{inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \cdot \frac{P_{N_2\,\text{inicial}}}{{P_{N_2}}^2} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt}$$

$$\frac{d\forall_{N_2}}{dt} = S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} = \forall_{N_2\,\text{inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\left(P_{N_2\,\text{inicial}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\left(P_{N_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}+1}} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt}$$

El balance de fuerzas en el émbolo se enuncia del modo siguiente: considérese que el émbolo tiene una masa "m".



$$-P_{N_2} \cdot S_{\text{émbolo}} - m \cdot g + P_{\text{aceite}} \cdot S_{\text{émbolo}} = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Fig. 24.2 Diagrama de fuerzas del émbolo

Sistema de ecuaciones que ha de resolverse conjuntamente y numéricamente.

4. Si el fluido se considerase incompresible:

$$\rho \cdot \frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial \forall_{\text{pistón}}}{\partial t} = 0$$

$$\rho \cdot \frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$

$$\rho S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} + \rho S_{\text{pistón}} K \sin t = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-S_{\text{pistón}} K \sin t}{S_{\text{émbolo}}}$$

$$\int_{Y_{\text{inicial}}}^{Y_{\text{final}}} dy = \int_{t=0}^{t} \frac{-S_{\text{pistón}} K \sin t}{S_{\text{émbolo}}} dt$$

$$Y_{\text{final}} - Y_{\text{inicial}} = \frac{S_{\text{pistón}} K}{S_{\text{émbolo}}} [\cos t - 1]$$

Puesto que el Nitrógeno es un gas ideal se tiene:

$$\left(\frac{\forall_{N_2}}{\forall_{N_2 \text{inicial}}} \right)^{\gamma} = \frac{P_{N_2 \text{inicial}}}{P_{N_2}}$$

$$\forall_{N_2} = \left(\frac{P_{N_2 \text{inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \forall_{N_2 \text{inicial}}$$

Teniendo presente que $\frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t} = -\frac{\partial \forall_{N_2}}{\partial t}$

$$\frac{d\forall_{N_2}}{dt} = -\frac{d\forall_{\text{émbolo}}}{dt} = -S_{\text{émbolo}} \frac{dy_{\text{émbolo}}}{dt} = S_{\text{pistón}} \frac{dh_{\text{pistón}}}{dt} = S_{\text{pistón}} V_{\text{pistón}} =$$

$$= -\forall_{N_2 \text{inici}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{P_{N_2 \text{inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \cdot \frac{P_{N_2 \text{inicial}}}{{P_{N_2}}^2} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt}$$

$$- \forall_{N_2 \text{inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left(P_{N_2 \text{inicial}} \right)^{\left(\frac{1}{\gamma}\right)} \cdot \frac{1}{P_{N_2}^{\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)}} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt} = S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \sin(t)$$

$$- \forall_{N_2 \text{inicial}} \frac{1}{\gamma} \cdot \left(P_{N_2 \text{inicial}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \int_{P_{N_2 \text{inicial}}}^{P_{N_2}} \frac{dP_{N_2}}{P_{N_2}^{\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)}} = S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \int_{t=0}^{t} \sin(t) \cdot dt$$

$$-\forall_{N_2\ inicial}\frac{1}{\gamma}\left(P_{N_2\ inicial}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[\frac{P_{N_2}^{-\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)+1}}{-\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)+1}\right]_{P_{N_2\ inicial}}^{P_{N_2}} = S_{pistón}K\left[-\cos t\right]_0^t$$

$$-\forall_{N_2\ inicial}\frac{1}{\gamma}\left(P_{N_2\ inicial}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\ \frac{P_{N_2}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}-P_{N_2\ inicial}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}}{-\frac{1}{\gamma}} = -S_{pistón}K\left[\cos t-1\right]$$

$$P_{N_2}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{-S_{pistón}\ K\left[\text{Cos}\,t-1\right]}{\forall_{N_2\ inicial}\left(P_{N_2\ inicial}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} + P_{N_2\ inicial}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}$$

Reordenando, se obtiene

$$P_{N_2}^{\left(\frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{P_{N_2\ inicial}^{\left(\frac{1}{\gamma}\right)}}{1-\frac{S_{pistón}\ K\left[\text{Cos}\,t-1\right]}{\forall_{N_2\ inicial}}}$$

ecuación que relaciona la variación de la presión del nitrógeno con el tiempo.

Problema 25

Enunciado

El esquema de la figura 25.1, muestra uno de los amortiguadores de suspensión de un vehículo. El cilindro inferior esta rígidamente conectado a una de las ruedas, entre el émbolo inferior y superior existe una cámara de aceite y por encima del émbolo superior existe una cámara de nitrógeno, N_2.

Las dimensiones del actuador se detallan en la figura, además se conocen los siguientes datos:

- Masa del aceite; M_{aceite}=0,5Kg
- Masa del nitrógeno; $M_{nitrogeno}$=0,025Kg
- Diámetro del cilindro; $D_{cilindro}$=0,075m
- Constante del nitrógeno; $R_{nitrogeno}$=297 J(KgK)
- Densidad del aceite; ρ_{aceite}=875Kg/m^3
- Módulo de compresibilidad del aceite; βaceite=1,5*10^{9}Pa
- La temperatura inicial de todo el conjunto amortiguador se supondrá es de: $T_{de\ todo\ el\ conjunto}$=313,14K

- Considerar que el peso que actúa encima del cilindro, incluyendo el peso propio del cilindro, es de F=5000N. Como hipótesis inicial se puede despreciar el peso de los émbolos.

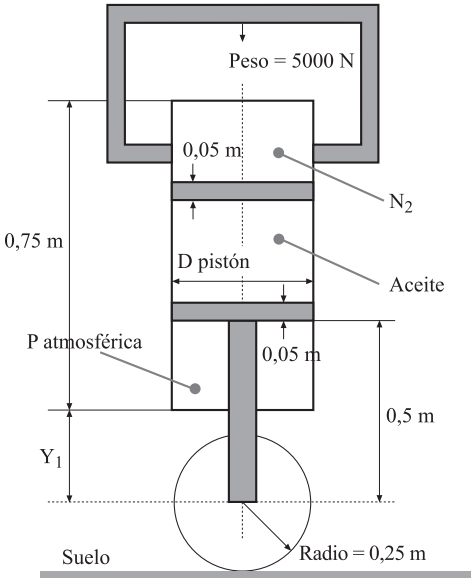
Se pide:

1. Considerando el sistema como estático y el aceite como fluido incompresible, determinar: la distancia entre la parte inferior del cilindro y el eje de la rueda (Y_1).

2. Partiendo de los datos hallados en el primer apartado, y conociendo que ahora la rueda se desplaza en dirección vertical obedeciendo a la función: $Y_S = 0{,}3+0{,}025*\sin((3/2)*\pi+t)$, determinar la ecuación diferencial que caracteriza la variación temporal de la presión del nitrógeno. Para este apartado, considerar que el vehículo se mantiene en una posición constante e invariable respecto al suelo, la rueda es la que está sometida al desplazamiento definido por la función anterior. Tanto el aceite como el nitrógeno se considerarán como fluidos compresibles. Considerar la evolución, compresión/expansión del nitrógeno como adiabática. Se pide finalmente integrar la ecuación diferencial hallada con el fin de obtener la variación temporal de presión del nitrógeno.

3. Partiendo de nuevo de los datos hallados en el primer apartado, y considerando que la rueda se desplaza en dirección vertical según la función establecida en el apartado segundo, se desea determinar el conjunto de ecuaciones diferenciales que caracterizarán la variación temporal de la posición del vehículo respecto al suelo, considerar en este apartado que el aceite se evalúa como fluido incompresible. La evolución del nitrógeno se puede considerar como isotérmica. La integración del sistema de ecuaciones diferenciales permitirá determinar la posición temporal del vehículo respecto al suelo, realizar dicha operación.

Fig. 25.1 Conjunto amortiguador



Resolución

1.- La distancia Y_1 a la que se encuentra el eje de la rueda respecto el cilindro, saldrá de la siguiente relación:

$$Y_1 + 0,75 = 0,5 + 2 \cdot 0,05 + h_{aceite} + h_{N_2}$$

La relación entre la masa y el volumen de aceite se define como:

$$m_{aceite} = \rho_{aceite} \forall_{aceite} = \rho_{aceite} S_e h_{aceite}$$

De donde:

$$h_{aceite} = \frac{m_{aceite}}{\rho_{aceite} S_e} = \frac{m_{aceite}}{\rho_{aceite} \frac{\pi \left(D_{cilindro} \right)^2}{4}} = \frac{0,5}{875 \cdot \pi \cdot \frac{0,075^2}{4}} = 0,129 \text{m}$$

En la superficie superior del cilindro se puede establecer: $\sum F_y = 0$; ecuación que da lugar a:

$$P_{N_2} S_e - F = 0$$

$$P_{N_2} = \frac{F}{S_e}$$

$$P_{N_2} = \rho_{N_2} RT = \frac{m_{N_2}}{\forall_{N_2}} RT \rightarrow m_{N_2} = \frac{P_{N_2}}{RT} \forall_{N_2} = \frac{P_{N_2}}{RT} S_e h_{N_2} = \frac{\frac{F}{S_e}}{RT} S_e h_{N_2}$$

Despejando la altura del nitrógeno, se obtiene:

$$h_{N_2} = \frac{m_{N_2} RT}{F} = \frac{0,025 \cdot 313,14 \cdot 297}{5000} = 0,465 \text{m}$$

Consecuentemente la altura deseada valdrá:

$$Y_1 = \left(h_{aceite} + h_{N_2} + 2 \cdot 0,05 + 0,5 \right) - 0,65 = 0,129 + 0,465 + 2 \cdot 0,05 + 0,5 - 0,75 = 0,444 \text{ m}$$

2.- Para este segundo apartado, la posición del vehículo respecto al suelo, se quiere que sea la misma que la del apartado anterior, no obstante, la rueda sufre un desplazamiento vertical temporal, definido por la ecuación Y_S = 0,3+0,025*sin((3/2)*π+t). Se pide determinar la variación temporal de la presión del nitrógeno.

La figura 25.2 presenta un esquema de la nueva configuración de trabajo del actuador.

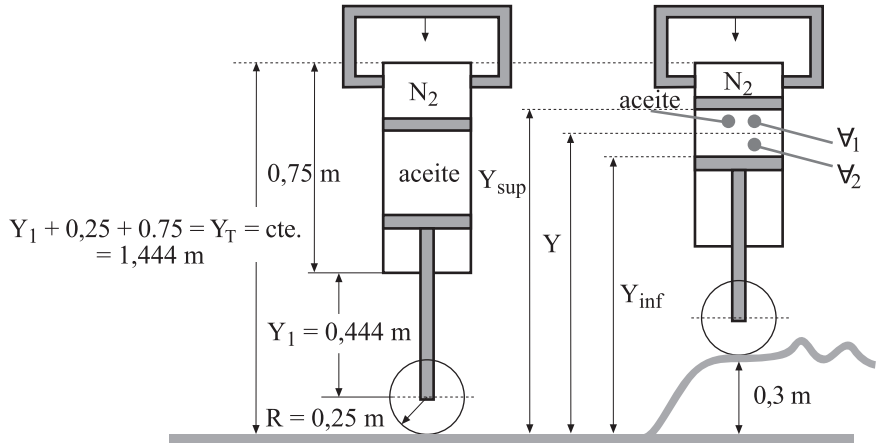


Fig. 25.2 Representa el estado inicial del cilindro según el apartado 1 y el estado de reposo del mismo en el apartado 2

Obsérvese en la figura 25.2, que el volumen de aceite se ha dividido en dos sub-volúmenes, véase que esto no es más que un truco matemático con el fin de aplicar con mayor precisión la ecuación de continuidad al volumen de fluido.

Dado que no se considera ninguna fuga de aceite, la ecuación de continuidad aplicada al volumen total de aceite toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \, d\forall = 0 \, ;$$

Puesto que el volumen de aceite se ha dividido en dos sub-volúmenes, $\forall_1;\forall_2$, y considerando que la densidad del aceite no depende del diferencial de volumen, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall_1} \rho_{aceite} d\forall + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall_2} \rho_{aceite} d\forall = 0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{aceite}\forall_1\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{aceite}\forall_2\right) = 0$$

En este punto, es necesario tener presente que tanto el volumen de aceite como la densidad del mismo dependen del tiempo, aplicando la regla de la cadena se llega a:

$$\forall_1 \frac{\partial \rho_{aceite}}{\partial t} + \rho_{aceite}\frac{\partial \forall_1}{\partial t} + \rho_{aceite}\frac{\partial \forall_2}{\partial t} + \forall_2 \frac{\partial \rho_{aceite}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_{aceite}}{\partial t}\left(\forall_1 + \forall_2\right) + \rho_{aceite}\left(\frac{\partial \forall_1}{\partial t} + \frac{\partial \forall_2}{\partial t}\right) = 0$$

Observando la figura 25.2, se deduce que:

$$\forall_{aceite} = \forall_1 + \forall_2$$

$$\forall_1 = S_c(Y_{sup} - Y)$$

$$\forall_2 = S_c(Y - Y_{inf})$$

Es necesario tener presente que tanto la altura Y como la sección del cilindro S_c, son parámetros constantes. Consecuentemente la diferenciación respecto al tiempo de las dos ecuaciones precedentes, da lugar a:

$$\frac{d\forall_1}{dt} = S_e \frac{dY_{sup}}{dt}$$

$$\frac{d\forall_2}{dt} = -S_c \frac{dY_{inf}}{dt}$$

Así, la ecuación de continuidad tomará la forma:

$$\frac{\partial \rho_{aceite}}{\partial t} \forall_{aceite} + \rho_{aceite} S_c \left(\frac{\partial Y_{sup}}{\partial t} - \frac{\partial Y_{inf}}{\partial t} \right) = 0$$

La relación entre la variación temporal de densidad del aceite y la variación de presión en el mismo fluido, viene dada en función del módulo de compresibilidad volumétrica, de donde:

$$\frac{d}{dt}\rho_{aceite} = \frac{\rho_{aceite}}{\beta} \frac{dP_{aceite}}{dt}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación precedente se obtiene:

$$\frac{\rho_{aceite}}{\beta} \frac{dP_{aceite}}{dt} \forall_{aceite} + \rho_{aceite} S_c \left(\frac{dY_{sup}}{dt} - \frac{dY_{inf}}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{dP_{aceite}}{dt} \forall_{aceite} + S_c \left(\frac{dY_{sup}}{dt} - \frac{dY_{inf}}{dt} \right) = 0$$

En este punto es importante observar que la variación temporal de la posición del émbolo inferior está directamente relacionada con la variación sufrida por el suelo, de donde:

$$\frac{dY_{inf}}{dt} = 0,025 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t \right)$$

Por otro lado, si se desprecia el peso del émbolo superior y no se considera el efecto de la fricción entre las paredes laterales del émbolo superior y el cilindro, se puede concluir.

$$P_{aceite} = P_{N2}$$

Puesto que según el enunciado, la compresión/expansión del nitrógeno se puede considerar como adiabática, se cumple:

$$\forall_{N2} = \left(\frac{P_{N2_{inicial}}}{P_{N2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \forall_{N2_{inicial}}$$

Diferenciando esta ecuación respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{\partial \forall_{N2}}{\partial t} = -\forall_{N2_{inicial}} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_{N2_{inicial}}}{P_{N2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \frac{P_{N2_{inicial}}}{{P_{N2}}^2} \frac{\partial P_{N2}}{\partial t}$$

Relacionando la variación temporal del volumen del nitrógeno y del volumen $\forall_1$ del aceite se concluye:

$$\frac{\partial \forall_{N2}}{\partial t} = -\frac{\partial \forall_1}{\partial t} = -S_c \frac{\partial Y_{sup}}{\partial t}$$

Sustituyendo en la ecuación precedente se obtiene:

$$S_c \frac{\partial Y_{sup}}{\partial t} = \forall_{N2_{inicial}} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_{N2_{inicial}}}{P_{N2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \frac{P_{N2_{inicial}}}{{P_{N2}}^2} \frac{\partial P_{N2}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial Y_{sup}}{\partial t} = \frac{1}{S_c} \left(\forall_{N2_{inicial}} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_{N2_{inicial}}}{P_{N2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \frac{P_{N2_{inicial}}}{{P_{N2}}^2} \frac{\partial P_{N2}}{\partial t} \right)$$

Sustituyendo ahora esta ecuación en la ecuación diferencial que relacionaba la variación temporal de la presión del aceite en función de la posición temporal de los émbolos inferior y superior, se llega a:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial P_{aceite}}{\partial t} \forall_{aceite} + \forall_{N2_{inicial}} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_{N2_{inicial}}}{P_{N2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \frac{P_{N2_{inicial}}}{{P_{N2}}^2} \frac{\partial P_{N2}}{\partial t} - S_c \frac{\partial Y_{inf}}{\partial t} = 0$$

Según las hipótesis establecidas previamente, cabe recordar que:

$$\frac{dP_{N2}}{dt} = \frac{dP_{aceite}}{dt}$$

Consecuentemente:

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial P_{N2}}{\partial t}\forall_{aceite}+\forall_{N2_{inicial}}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{P_{N2_{inicial}}}{P_{N2}}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}\frac{P_{N2_{inicial}}}{{P_{N2}}^2}\frac{\partial P_{N2}}{\partial t}-S_c\frac{\partial Y_{inf}}{\partial t}=0$$

Sustituyendo ahora la ecuación que caracteriza la variación temporal de la posición del émbolo inferior, se obtiene:

$$\frac{\partial P_{N2}}{\partial t}\left(\frac{1}{\beta}\forall_{aceite}+\forall_{N2_{inicial}}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{P_{N2_{inicial}}}{P_{N2}}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}\frac{P_{N2_{inicial}}}{{P_{N2}}^2}\right)=S_c\frac{dY_{inf}}{dt}$$

$$=\left(\frac{\pi 0,075^2}{4}\right)0,025\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)$$

Ecuación que se puede agrupar como:

$$\frac{dP_{N2}}{dt}\left(\frac{1}{\beta}\forall_{aceite}+\forall_{N2_{inicial}}\frac{1}{\gamma}\left(P_{N2_{inicial}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{P_{N2}}\right)^{\frac{1}{\gamma}+1}\right)=\left(\frac{\pi 0,075^2}{4}\right)0,025\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)$$

Véase que esta ecuación diferencial caracteriza la variación temporal de la presión del nitrógeno, en función de las fluctuaciones de posición que sufre el suelo. Obsérvese además que para resolver dicha ecuación diferencial será necesario conocer una condición de contorno, que sería la presión del nitrógeno cuando todo el conjunto está desplazado una distancia de 0.3m, (v. figura 25.2).

La resolución de esta ecuación diferencial da lugar a:

$$\int_{P_{N2\ inicial}}^{P_{N2}}\left(\frac{1}{\beta}\forall_{aceite_{inicial}}+\forall_{N2_{inicial}}\frac{1}{\gamma}\left(P_{N2_{inicial}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{P_{N2}}\right)^{\frac{1}{\gamma}+1}\right)dP_{N2}$$

$$=\left(\frac{\pi 0,075^2}{4}\right)\int_0^t 0,025\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)dt$$

$$\frac{1}{\beta}\forall_{aceite_{inicial}}\left(P_{N2}-P_{N2_{inicial}}\right)+\forall_{N2_{inicial}}\frac{1}{\gamma}\left(P_{N2_{inicial}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}\right)\left(P_{N2}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}-P_{N2_{inicial}}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{\pi 0,075^2}{4}\right)0,025\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

Con el fin de poder graficar la presión del nitrógeno en función del tiempo, se definirán seguidamente, las condiciones iniciales de los diversos parámetros, estos son: $P_{N2_{inicial}}$; $\forall_{aceite_{inicial}}$; $\forall_{N2_{inicial}}$. Es interesante observar que para este apartado segundo del problema, las condiciones iniciales son las existentes cuando la rueda del amortiguador se ha desplazado 0.3 m en dirección vertical ascendente. Bajo estas condiciones no se conoce ninguno de estos tres parámetros, sí se conoce no obstante que la posición superior del cilindro, el automóvil, es la misma que la que tenía en el apartado primero del problema, (v. figura 25.2). Para determinar estos tres parámetros se realizará el siguiente proceso iterativo:

Para este segundo caso, se ha de cumplir:

$$1,444 - 0,3 = 0,25 + 0,5 + 2*0,05 + h_{aceite} + h_{N2}$$

Inicialmente se supondrá que si la rueda se desplaza 0,3 m hacia arriba, lo que mayormente se comprimirá será al nitrógeno, considerando que la altura de aceite se mantiene constante e igual a la obtenida en el apartado anterior, $h_{aceite} = 0,129\,m$, la altura de nitrógeno en este segundo apartado será: $h_{N2} = 0,165\,m$

Si el proceso de compresión del nitrógeno, entre el estado inicial, apartado 1 del problema, y el estado definido en el apartado segundo, se considera adiabático, se establece la relación:

$$P_{N2(ini)}\ \forall_{N2(ini)}^{\gamma} = P_{N2(fin)}\ \forall_{N2(fin)}^{\gamma}$$

De donde:

$$\forall_{N2(ini)} = \frac{\pi*0,075^2}{4}*0,465 = 0,002054\ m^3$$

$$\forall_{N2(fin)} = \frac{\pi*0,075^2}{4}*0,165 = 0,00072895\ m^3$$

$$P_{N2(ini)} = \frac{5000}{\frac{\pi 0,075^2}{4}} = 1.131.768,4\ Pa$$

Sustituyendo estos tres valores en la ecuación precedente se obtiene:

$$P_{N2(fin)} = 4.826.378,108\ Pa$$

Esta, es la presión que tendría el nitrógeno en la posición de reposo del segundo apartado, siempre que se considere que el volumen de aceite se mantiene invariable.

Utilizando el módulo de compresibilidad del aceite, se puede evaluar cual es la reducción de volumen del mismo cuando se comprime desde la presión inicial, caso 1, hasta la final, caso 2, presiones acabadas de determinar para el nitrógeno, y que se consideran las mismas para el aceite.

$$\int_{\forall_{ini}}^{\forall_{fin}} \frac{d\forall}{\forall} = -\frac{1}{\beta}\int_{P_{ini}}^{P_{fin}} dP$$

$$\ln\left(\frac{\forall_{fin}}{\forall_{ini}}\right) = -\frac{1}{\beta}\left(P_{fin} - P_{ini}\right)$$

$$\forall_{fin} = \forall_{ini} * e^{-\frac{1}{\beta}(P_{fin}-P_{ini})} = \left(\frac{\pi * 0,075^2}{4} * 0,129\right) * e^{-\frac{1}{1,5*10^9}(4826378,108-1131768,4)}$$

$$\forall_{fin} = 0,0005685019 \text{ m}^3$$

La altura de la cámara de aceite será:

$$0,0005685019 = \frac{\pi * 0,075^2}{4} * h_{aceite(2)}$$

$$h_{aceite(2)} = 0,1286825 \text{ m}$$

Consecuentemente la altura, corregida, del volumen de nitrógeno, será:

$$1,444 - 0,3 = 0,25 + 0,5 + 2 * 0,05 + 0,1286825 + h_{N2(2)}$$

$$h_{N2(2)} = 0,165317 \text{ m}$$

Comparando el estado de reposo del nitrógeno en el apartado 1 y en el apartado 2 y utilizando la altura acabada de hallar, se puede determinar la nueva presión del nitrógeno en este segundo apartado.

$$1131768,4 * 0,002054^{1,4} = P_{N2(2)} * \left(\frac{\pi 0,075^2}{4} * 0,1653174\right)^{1,4}$$

$$P_{N2(2)} = 4.813.432,0373 \text{ Pa}$$

Con el fin de comparar si estos resultados obtenidos se pueden considerar como definitivos, se determinará cual es la variación del volumen de aceite si la presión del mismo pasa de $P_{aceite(1)} = 4.826.378,108$ Pa , a $P_{aceite(2)} = 4.813.432,0373$ Pa , es decir:

$$\forall_{fin} = \forall_{ini} * e^{-\frac{1}{\beta}(P_{fin} - P_{ini})} = \left(\frac{\pi * 0,075^2}{4} * 0,1286825 \right) * e^{-\frac{1}{1,5*10^9}(4813432,0373 - 4826378,108)}$$

$$\forall_{fin} = \frac{\pi * 0,075^2}{4} * h_{aceite(3)}$$

Obteniendo: $h_{aceite(3)} = 0,12868389$ m

Véase que la variación de la altura de la cámara de aceite es de alrededor de una micra, con lo que se puede concluir que los valores iniciales de los tres parámetros $P_{N2_{inicial}}$; $\forall_{aceite_{inicial}}$; $\forall_{N2_{inicial}}$ en este apartado segundo del problema serán:

$$; \; P_{N2_{inicial}} = 4.813.432,0373 \, Pa$$

$$\forall_{aceite_{inicial}} = \frac{\pi * 0,075^2}{4} * 0,12868389 = 0,00056851 \, m^3$$

$$\forall_{N2_{inicial}} = \frac{\pi * 0,075^2}{4} * 0,165317 = 0,00073030 \, m^3$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación algebraica que caracterizaba la variación temporal de la presión del nitrógeno y graficando dicha ecuación, se obtiene la figura 25.3. Véase que la presión oscilará entre los aproximadamente 4,8 MPa y los 8 MPa

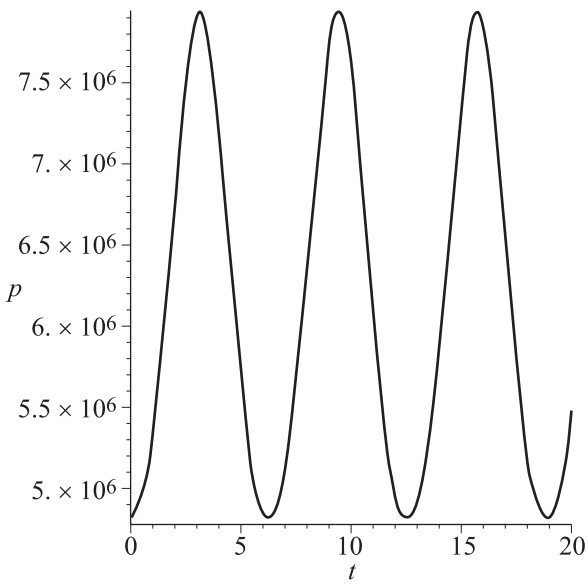


Fig. 25.3 Representación gráfica de la variación temporal de la presión del nitrógeno para este segundo apartado del problema. t=[S]; P=[Pa]

3.- En este apartado tercero del problema, la posición del vehículo varía en función de las características del terreno, no obstante y con el fin de simplificar el problema, se considerará que el aceite es incompresible, véase que esta hipótesis, afectará poco al resultado final, dado que la cámara de aceite es relativamente pequeña.

La figura 25.4 muestra un esquema de la configuración del amortiguador para este apartado. Es importante observar que dicha posición será inicialmente idéntica a la determinada en el apartado primero del problema, bien es cierto que ahora la rueda esta desplazada 0,3 m en dirección vertical, no obstante las alturas del volumen de nitrógeno, aceite y la total del amortiguador serán las mismas que las determinadas en el apartado 1 de este problema.

Es importante destacar en la figura 25.4, que tanto la cámara de aceite como de nitrógeno se han dividido, cada una de ellas en dos partes, la línea de división entre estos dos volúmenes imaginarios está dada por sendas alturas, Y para el aceite e Y^* para el nitrógeno. Estas dos alturas son genéricas y constantes, de hecho no van a aparecer en el resultado final del problema. Cabe recordar que en este apartado lo que se desea averiguar es la variación temporal de la altura del vehículo respecto al suelo.

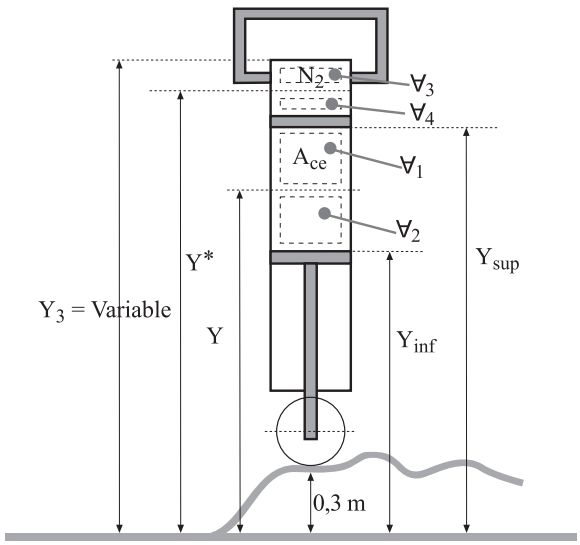


Fig. 25.4
Representa el estado de reposo del amortiguador en el apartado tercero del problema

Para este apartado se cumple:

$$\frac{\partial \rho_{aceite}}{\partial t} = 0$$

Aplicando la ecuación de continuidad al volumen del nitrógeno

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho d\forall + \oint \rho \vec{v}\,\overrightarrow{dS} = 0$$

Al no considerar fugas se tiene; $\oint \rho \vec{v} \overrightarrow{dS} = 0$; de donde:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall_{N2}} \rho_{N2} d\forall = 0$$

Desglosando esta ecuación para los dos volúmenes de nitrógeno considerados, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall_3} \rho_{N2} d\forall + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall_4} \rho_{N2} d\forall = 0$$

Puesto que tanto la densidad como los volúmenes de control dependen del tiempo, y considerando además que la densidad no depende del diferencial de volumen se concluye que:

$$\forall_3 \frac{\partial \rho_{N2}}{\partial t} + \rho_{N2} \frac{\partial \forall_3}{\partial t} + \rho_{N2} \frac{\partial \forall_4}{\partial t} + \forall_4 \frac{\partial \rho_{N2}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_{N2}}{\partial t}\left(\forall_3 + \forall_4\right) + \rho_{N2}\left(\frac{\partial \forall_3}{\partial t} + \frac{\partial \forall_4}{\partial t}\right) = 0 \;\rightarrow\rightarrow (a)$$

Donde:

$$\forall_3 = S_c\left(Y_3 - Y^*\right)$$

$$\forall_4 = S_c(Y^* - Y_{sup} + 0{,}05)$$

$$\frac{\partial \forall_3}{\partial t} = S_c \frac{dY_3}{dt} \;\rightarrow\rightarrow (b)$$

$$\frac{\partial \forall_4}{\partial t} = -S_c \frac{dY_{sup}}{dt} \;\rightarrow\rightarrow (c)$$

Véase que además se cumple que:

$$-\frac{\partial \forall_4}{\partial t} = \frac{\partial \forall_1}{\partial t} \;\rightarrow\rightarrow (d)$$

Puesto que en este apartado el aceite se considera como incompresible, la ecuación de continuidad aplicada al volumen de aceite, dividido en dos sub-volúmenes, da lugar a:

$$\rho_{aceite}\left(\frac{\partial \forall_1}{\partial t} + \frac{\partial \forall_2}{\partial t}\right) = 0$$

Donde:

$$\forall_1 = S_c(Y_{sup} - Y)$$

$$\forall_2 = S_c(Y - Y_{inf})$$

$$\frac{\partial \forall_1}{\partial t} = S_c \frac{dY_{sup}}{dt}$$

$$\frac{\partial \forall_2}{\partial t} = -S_c \frac{dY_{inf}}{dt}$$

Con lo que la ecuación de continuidad queda:

$$S_c \frac{dY_{sup}}{dt} - S_c \frac{dY_{inf}}{dt} = 0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{dY_{sup}}{dt} = \frac{dY_{inf}}{dt} \rightarrow\rightarrow (e)$$

Sustituyendo las ecuaciones (b) y (c) en (a) se obtiene:

$$\frac{\partial \rho_{N2}}{\partial t}(\forall_3 + \forall_4) + \rho_{N2} S_c \left(\frac{dY_3}{dt} - \frac{dY_{sup}}{dt} \right) = 0$$

En este tercer apartado, el enunciado establece que la compresión del nitrógeno se puede considerar como isotérmica, de donde se ha de cumplir:

$$\frac{P_{N2(ini)}}{\rho_{N2(ini)}} = \frac{P_{N2}}{\rho_{N2}}$$

Diferenciando esta ecuación respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{\partial \rho_{N2}}{\partial t} = \frac{\rho_{N2(ini)}}{P_{N2(ini)}} \frac{dP_{N2}}{dt}$$

Substituyendo en la ecuación de continuidad:

$$\frac{\rho_{N2(ini)}}{P_{N2(ini)}} \frac{dP_{N2}}{dt}(\forall_3 + \forall_4) + \rho_{N2} S_c \left(\frac{dY_3}{dt} - \frac{dY_{sup}}{dt} \right) = 0$$

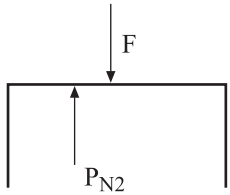
Recordando para un proceso isotérmico la relación entre la presión y densidad iniciales con sus homólogas genéricas, se establece:

$$\frac{1}{P_{N2}} \frac{dP_{N2}}{dt}(\forall_3 + \forall_4) + S_c \left(\frac{dY_3}{dt} - \frac{dY_{sup}}{dt} \right) = 0$$

Asimismo, para un proceso isotérmico se cumple:

$$P_{N_2} \forall_{N2} = P_{N_2(ini)} \forall_{N_2(ini)} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \forall_{N2} = \frac{P_{N_2(ini)} \forall_{N_2(ini)}}{P_{N_2}} = \forall_3 + \forall_4 \rightarrow\rightarrow\rightarrow (e)$$

Por otro lado, el balance de fuerzas en la parte superior del cilindro tomará la forma:



$$P_{N_2} S_c - F = m\frac{d^2Y_3}{dt^2} \rightarrow P_{N_2} = \frac{m\frac{d^2Y_3}{dt^2} + F}{S_c} \rightarrow\rightarrow\rightarrow (f)$$

$$\frac{dP_{N_2}}{dt} = \frac{m}{S_c}\frac{d^3Y_3}{dt^3};\ \text{Como}\ m = \frac{F}{g}\ \text{, la ecuación quedara:}$$

$$\frac{dP_{N_2}}{dt} = \frac{F}{S_c\ g}\frac{d^3Y_3}{dt^3} \rightarrow\rightarrow\rightarrow (g)$$

Sustituyendo (e), (f) y (g) en la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$\frac{1}{\left(\frac{\frac{F}{g}\frac{d^2Y_3}{dt^2}+F}{S_c}\right)^2}\frac{F}{S_c g}\frac{d^3Y_3}{dt^3}P_{N_{2(ini)}}\forall_{N_{2(ini)}} + S_c\left(\frac{dY_3}{dt} - \frac{dY_{sup}}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{g}\frac{d^2Y_3}{dt^2}+1\right)^2}\frac{S_c}{F\ g}\frac{d^3Y_3}{dt^3}P_{N_{2(ini)}}\forall_{N_{2(ini)}} + S_c\left(\frac{dY_3}{dt} - \frac{dY_{sup}}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{g}\frac{d^2Y_3}{dt^2}+1\right)^2}\frac{1}{Fg}\frac{d^3Y_3}{dt^3}P_{N_{2(ini)}}\forall_{N_{2(ini)}} + \left(\frac{dY_3}{dt} - \frac{dY_{sup}}{dt}\right) = 0$$

Cabe recordar que para este apartado

$$\frac{dY_{sup}}{dt} = \frac{dY_{inf}}{dt} = 0,025\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$$

Se concluye que:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{g}\frac{d^2Y_3}{dt^2}+1\right)^2}\frac{1}{F\ g}\frac{d^3Y_3}{dt^3}P_{N_{2(ini)}}\forall_{N_{2(ini)}} + \frac{dY_3}{dt} - 0,025\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = 0$$

Ecuación que caracteriza la variación temporal de la posición del vehículo.

Antes de resolver numéricamente esta ecuación diferencial, se va a proceder a definir los valores de los parámetros iniciales así como las condiciones de contorno. Véase que

según la figura 25.4, la altura Y_3 se evalúa respecto al suelo, definido en el primer apartado del problema.

$$P_{N_{2(ini)}} = \frac{F}{S_c} = \frac{5000}{\frac{\pi 0,075^2}{4}} = 1131768,48 \text{ Pa}$$

$$h_{aceite(ini)} = 0,129 \text{ m}$$

$$h_{N2(ini)} = 0,465 \text{ m}$$

$$\forall_{N_{2(ini)}} = \frac{\pi 0,075^2}{4} 0,465 = 0,00205431 \text{ m}^3$$

Para t=0, la altura inicial Y_3 será, ver figuras 25.1 y 25.4.

$$Y_{3(0)} = h_{aceite(ini)} + h_{N2(ini)} + 2*0,05 + 0,5 + 0,25 + 0,3 = 1,744 \text{ m}$$

La primera y segunda derivadas de Y_3 para el estado inicial t = 0, valdrán: $Y_3^{'} = 0; Y_3^{''} = 0;$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene:

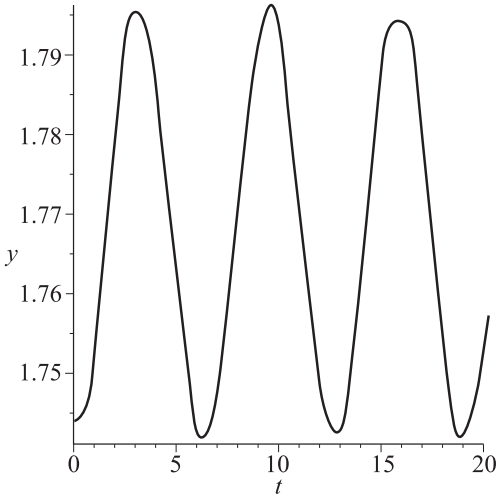


Fig. 25.5 Posición de la parte superior del cilindro, vehículo, en función del tiempo

Es interesante denotar que la ecuación diferencial que caracteriza la posición del vehículo en función del tiempo, se puede fácilmente transformar para obtener la velocidad con la que dicho vehículo asciende o desciende. Dicha ecuación tomaría la forma:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{g}\frac{dV3}{dt}+1\right)^2}\ \frac{1}{F\,g}\ \frac{d^2V3}{dt^2}P_{N_{2(ini)}}\forall_{N_{2(ini)}}+V3-0,025\cos\left(\frac{3\,\pi}{2}+t\right)=0$$

Donde V3 es ahora la velocidad de desplazamiento vertical del vehículo.

La resolución numérica de esta ecuación, utilizando las condiciones iniciales, t=0; V3=0; V3'=0, $P_{N_{2(ini)}}=1.131.768,4\,Pa$; $\forall_{N_{2(ini)}}=0,002054\ m^3$; da lugar a la siguiente representación gráfica.

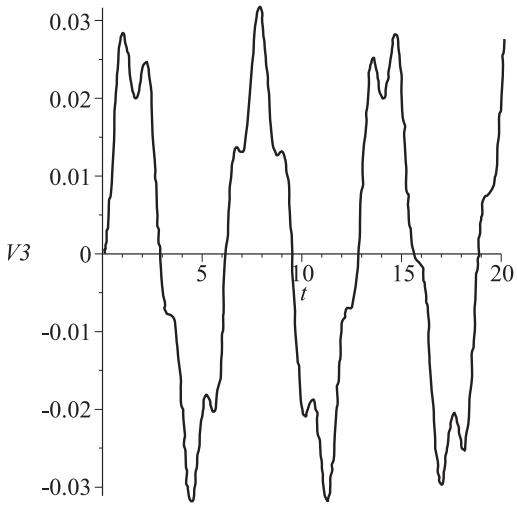


Fig. 25.6 Velocidad de desplazamiento vertical de la parte superior del cilindro, vehículo, en función del tiempo

→5

Ecuaciones fundamentales. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

5.1 Forma integral

Esta ecuación fundamental, se obtiene combinando el teorema de transporte de Reynolds con la segunda ley del movimiento de Newton para un fluido que fluye a través de un volumen de control finito.

La propiedad genérica B que se definía en la ecuación de transporte de Reynolds es, en este caso, la cantidad de movimiento: $B = \vec{M} = m\vec{v}$.

Así, la variación temporal de la propiedad genérica B en el sistema de control será:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d\vec{M}_{sist}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum F_{sis}$$

Obsérvese que la variación temporal de la cantidad de movimiento en el sistema de control, mediante la segunda ley de Newton, da lugar a la suma de fuerzas que actúan sobre dicho sistema.

$\vec{M}_{sist}$ es la cantidad de movimiento del sistema.

$\sum F_{sis}$ es la suma de las fuerzas que actúan sobre el sistema de control, que para un tiempo t dado se confunde con el volumen de control.

Si la propiedad B se ha definido como la cantidad de movimiento $\vec{M}$, la propiedad por unidad de masa b será la velocidad del fluido $\vec{V}$.

Sustituyendo en la ecuación de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$\sum \vec{F}_{vc} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \vec{V}_i d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{V}_i \vec{V} d\vec{s}$$

siendo esta es la ecuación de cantidad de movimiento lineal, que se expresa del modo siguiente:

La suma de fuerzas que actúan sobre el volumen de control ha de ser igual a la velocidad de acumulación de cantidad de movimiento en el volumen de control más el flujo neto de cantidad de movimiento a través de las fronteras del volumen de control.

$\sum \vec{F}$ representa la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la masa dentro del volumen de control; en general, son las fuerzas másicas y superficiales.

Para un sistema inercial de coordenadas, las fuerzas másicas se reducen a las gravitatorias.

$$\sum \vec{F} = \overbrace{\sum \vec{F}_{gravedad}}^{F_{masicas}} + \overbrace{\sum \vec{F}_{presión} + \sum \vec{F}_{cortante}}^{F_{superficiales}}$$

de donde cada uno de los términos de fuerza se puede definir como:

$\sum \vec{F}_{gravedad} = \int_{vc} \rho \vec{g}\, d\forall$ = fuerza por unidad de masa.

$\sum \vec{F}_{presión} + \sum \vec{F}_{cortante}$ se denominan fuerzas de superficie o fuerzas intrínsecas, puesto que actúan sobre la superficie del volumen de control.

$$\sum \vec{F}_{presión} = -\oint_{SC} P\, d\vec{s}$$

La dirección de la fuerza debida a la presión en un elemento diferencial de superficie es la opuesta al vector normal a la superficie.

Las fuerzas cortantes actuantes sobre el volumen de control, se calculan como:

$$\sum \vec{F}_{cortante} = \oint_{SC} \bar{\bar{\tau}}_{ij}\, d\vec{s}$$

El signo de la fuerza lo da la dirección iésima asociada a los esfuerzos cortantes. Recuérdese que la ecuación de cantidad de movimiento tiene carácter vectorial.

Así, la ecuación integral de cantidad de movimiento, teniendo en cuenta su carácter vectorial, tomará la forma:

$$\int_{vc} \rho \vec{g}\, d\forall - \oint_{SC} P\, d\vec{s} + \oint_{SC} \bar{\bar{\tau}}_{ij}\, d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{V}_i d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{V}_i \vec{V} d\vec{s}$$

5.2 Forma diferencial de la ecuación de cantidad de movimiento

Un método rápido para determinar la ecuación de cantidad de movimiento en modo diferencial, es partir de la ecuación en modo integral y transformar las integrales de superficie en integrales de volumen.

La ecuación integral de cantidad de movimiento se expresa:

$$\int_{VC} \rho \vec{g}\, d\forall - \oint_{SC} p\, d\vec{s} + \oint_{SC} \bar{\bar{\tau}}_{ij}\, d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \vec{V}_i d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{V}_i \left(\vec{V}\, d\vec{s}\right)$$

Al transformar todas las integrales de superficie de la ecuación integral de cantidad de movimiento en integrales de volumen, utilizando el teorema de la divergencia se obtiene:

$$-\oint_{SC} P\, d\vec{s} = -\int_{VC} \nabla P d\forall$$

$$\oint_{SC} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s} = \int_{VC} \nabla \bar{\bar{\tau}}\, d\forall$$

$$\oint_{SC} \rho \vec{V}_i\, \vec{V} d\vec{s} = \int_{VC} \nabla(\rho \vec{V}_i\, \vec{V}) d\forall$$

de donde, sustituyendo en la ecuación integral de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \vec{V}_i d\forall + \int_{VC} \nabla(\rho \vec{V}_i\, \vec{V}) d\forall = -\int_{VC} \nabla P d\forall + \int_{VC} \rho \vec{g}\, d\forall + \int_{VC} \nabla \bar{\bar{\tau}}\, d\forall$$

Diferenciando los dos términos con respecto al volumen, se obtiene:

$$\frac{\partial\left(\rho \vec{V}_i\right)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}_i \vec{V}) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \nabla \bar{\bar{\tau}}$$

El término izquierdo de esta ecuación se puede dar:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + \vec{V}_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}_i \nabla(\rho \vec{V}) + \rho(\vec{V}\nabla)\vec{V}_i = \rho\left[\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}_i\right] + \vec{V}_i\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}_i)\right]$$

Según la ecuación de continuidad: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}_i) = 0$

con lo que el término restante representa la derivada material del vector velocidad:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + \rho(\vec{V}\nabla)\vec{V}_i = \rho\left[\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}_i\right] = \rho \frac{D\vec{V}_i}{Dt}$$

Así, la ecuación de cantidad de movimiento en modo diferencial tomará la forma:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \nabla \bar{\bar{\tau}}$$

Esta es la ecuación de cantidad de movimiento en modo diferencial, ecuación aplicable a cualquier tipo de fluido. Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación de Cauchy*.

Para el caso de que el fluido sea ideal, es decir, sin viscosidad, se establece:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de Euler*, y es válida tanto para fluido incompresible como para compresible.

La ecuación de Cauchy, es, tal y como se ha representado en este apartado, irresoluble, puesto que los esfuerzos cortantes son desconocidos. Con el fin de solucionar este problema, es necesario relacionar los esfuerzos viscosos con la velocidad de deformación, siendo la constante de proporcionalidad, la viscosidad del fluido.

En flujos multidimensionales y multidireccionales el esfuerzo cortante es proporcional a la velocidad de deformación angular, y el esfuerzo viscoso normal es proporcional a la velocidad de deformación normal (volumétrica).

Así, las relaciones esfuerzo-velocidad de deformación se pueden dar, (véase el tensor de deformación en el capítulo de cinemática):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu\phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \phi = \text{deformación angular}; \qquad \phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 2\mu\phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right); \phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 2\mu\phi = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right); \phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma_y = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \sigma_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z};$$

De hecho, los esfuerzos normales comprenden dos términos, el primero caracteriza la deformación lineal del elemento diferencial, mientras que el segundo evalúa la deformación volumétrica definida como la suma de los gradientes de velocidad a lo largo de los tres ejes coordenados, así:

$$\sigma_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_y = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

λ recibe el nombre de segundo coeficiente de viscosidad, su valor es pequeño, siendo una buena aproximación, según Stokes, $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$.

Sustituyendo los esfuerzos normales y cortantes en el lado derecho de la ecuación de Cauchy se obtiene, caso de coordenadas cartesianas y para la dirección x:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

Operando se llega:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\mu\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

sustituyendo en las ecuaciones de Cauchy y extendiéndolo a los demás ejes coordenados se obtendrá:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho g_x+$$
$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\mu\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho g_y+$$
$$\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\mu\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g_z+$$
$$\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\mu\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de Navier-Stokes, y son válidas para fluido compresible.

En forma vectorial, estas ecuaciones se expresan:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\nabla p+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{V}+\frac{1}{3}\mu\nabla\left(\nabla\vec{V}\right)$$

Recuérdese que cada término tiene unidades de fuerza por unidad de volumen.

Obsérvese por otro lado, que el término:

$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]$ Representa la divergencia de la velocidad.

Con lo que para fluido incompresible, las ecuaciones de Navier-Stokes tomarán la forma.

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Estas tres ecuaciones junto con la de continuidad forman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (u,v,w,p).

Las ecuaciones de Navier-Stokes para fluido incompresible y en forma vectorial se dan como:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\nabla p+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{V}$$

Es necesario tener presente que estas ecuaciones pueden darse en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas.

Con el fin de completar este apartado, se presenta a continuación las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho V_\theta)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x)=0$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+V_x\frac{\partial V_r}{\partial x}-\frac{V_\theta^2}{r}\right)$$
$$=\rho\vec{g}_r-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial V_\theta}+V_x\frac{\partial V_\theta}{\partial x}+\frac{V_r V_\theta}{r}\right)$$
$$=\rho\vec{g}_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial x^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_x}{\partial r}+V_\theta\frac{\partial V_x}{r\partial\theta}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=\rho\vec{g}_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_x}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_x}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\right]$$

Ecuación de continuidad en coordenadas esféricas.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\rho v_\phi)=0$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas esféricas.

$$\rho\left(\frac{\partial V_R}{\partial t}+V_R\frac{\partial V_R}{\partial R}+\frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_R}{\partial \theta}+\frac{V_\phi}{R\sin\theta}\frac{\partial V_R}{\partial \phi}-\frac{V_\theta^2+V_\phi^2}{R}\right)$$
$$=\rho g_R-\frac{\partial p}{\partial R}+\mu\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V_R}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V_R}{\partial \theta}\right)\right]+$$
$$\mu\left[\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial V_R}{\partial \phi^2}-\frac{2V_R}{R^2}-\frac{2}{R^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}-\frac{2V_\theta\cot\theta}{R^2}-\frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_R\frac{\partial V_\theta}{\partial R}+\frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{V_\phi}{R\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial \phi}-\frac{V_R V_\theta}{R}-\frac{V_{\phi^2}\cot\theta}{R}\right)$$
$$=\rho g_\theta-\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V_\theta}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\right]+$$
$$\mu\left[\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \phi^2}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial V_R}{\partial \theta}-\frac{V_\theta}{R^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_\phi}{\partial t}+V_R\frac{\partial V_\phi}{\partial R}+\frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_\phi}{\partial \theta}+\frac{V_\phi}{R\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}+\frac{V_\phi V_R}{R}+\frac{V_\theta V_\phi\cot\theta}{R}\right)$$
$$=\rho g_\phi-\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}+\mu\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V_\phi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V_\phi}{\partial \theta}\right)\right]+$$
$$\mu\left[\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial \phi^2}-\frac{V_\phi}{R^2\sin^2\theta}+\frac{2}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial V_R}{\partial \phi}+\frac{2\cos\theta}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}\right]$$

5.3 Ecuación de cantidad de movimiento en forma integral y para sistemas no inerciales de coordenadas

Al analizar los flujos atmosféricos para la predicción del clima, los meteorólogos han de tener en cuenta que un volumen de control fijo a la superficie de la Tierra, tiene una aceleración pequeña con respecto a las estrellas alejadas que se pueden considerar fijas, debido a la rotación de la Tierra.

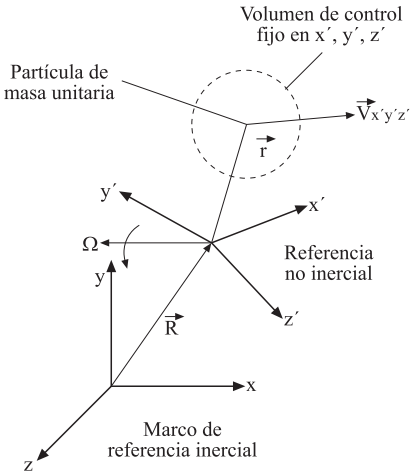
El análisis de la cantidad de movimiento del movimiento de un fluido a través de un volumen de control que se acelera, ha de tener presente que un sistema de coordenadas fijo con respecto al volumen de control no es inercial.

La figura siguiente muestra un volumen de control fijo con respecto a un marco de referencia no inercial, x', y', z'. El marco no inercial se mueve con respecto a un marco de referencia inercial x, y, z.

Cabe recordar que la segunda ley de Newton, solo se puede aplicar a un marco inercial x, y, z.

Para el sistema que instantáneamente ocupa el volumen de control, se tiene: $\frac{d}{dt}\left(\vec{M}_{SIST}\right)_{xyz} = \sum \vec{F}$.

Fig. T 5.1 Marcos de referencia inercial y no inercial



Con el fin de desarrollar una expresión para la velocidad de cambio de la cantidad de movimiento del sistema, se considerará primero una partícula de masa individual dentro del volumen de control.

La cantidad de movimiento $\vec{M}_{XYZ}$ de esta partícula se define como el producto de su masa elemental por su velocidad:

$$\delta\vec{M}_{xyz} = (\delta_m)\cdot\vec{V}_{xyz}$$

Del primer término de la ecuación de transporte de Reynolds, se tiene:

$$\sum \vec{F}_{XYZ} = \frac{dB_{sc\,XYZ}}{dt} = m\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} = \int_{VC}\rho\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}d\forall$$

La variación temporal de la velocidad para un sistema inercial de coordenadas, en función de la velocidad de la partícula en un sistema no inercial, se define:

$$\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{x'y'z'}}{dt} + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{r} + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{x'y'z'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}$$

siendo Ω la velocidad angular del sistema de coordenadas no inercial.

La suma de fuerzas para el sistema no inercial adopta la forma:

$$\sum \vec{F}_{XYZ} = \int_{VC}\rho\left\{\frac{d\,\vec{V}_{x'y'z'}}{dt} + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{r} + \vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r} + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{x'y'z'}\right\}d\forall$$

$$\sum \vec{F}_{XYZ} = \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d\,\vec{V}_{x'y'z'}}{dt} \right\} d\forall + \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\} d\forall$$

Obsérvese que el primer sumando del segundo término caracteriza la fuerza que el fluido realiza sobre el sistema de referencia móvil, y se puede decir:

$$\sum \vec{F}_{XYZ} = \sum \vec{F}_{x'y'z'} + \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\} d\forall$$

ecuación que, según lo establecido previamente para sistemas no inerciales de coordenadas, se puede representar:

$$\sum \vec{F}_{XYZ} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho\, \vec{V}_{(i)\,x'y'z'}\, d\forall + \oint_{SC} \rho\, \vec{V}_{(i)\,x'y'z'}\, \vec{V}_{x'y'z'}\, d\vec{s} +$$
$$\int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\} d\forall$$

de donde la segunda ley de Newton para un volumen de control que está fijo con respecto a un marco de referencia no inercial se convierte en:

$$-\oint_{SC} P\, d\vec{s} + \oint_{SC} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s} + \int_{VC} \rho\, \vec{g}\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho\, \vec{V}_{(i)\,x'y'z'}\, d\forall + \oint_{SC} \rho\, \vec{V}_{(i)\ x'y'z'}\, \vec{V}_{x'y'z'}\, d\vec{s}$$
$$+ \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\} d\forall$$

siendo:

$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$ aceleración de un sistema de coordenadas con respecto a otro.

$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r}$ aceleración debida a la velocidad de giro variable, aceleración tangencial.

$\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ aceleración centrípeta.

$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'}$ aceleración de Coriolis.

5.4 Ecuación de cantidad de movimiento en forma diferencial para sistemas no inerciales

De forma análoga a la utilizada en el caso de coordenadas inerciales, para la determinación de la ecuación de cantidad de movimiento en forma diferencial y coordenadas no inerciales, se parte de la ecuación de cantidad de movimiento en modo integral y coordenadas no inerciales.

En coordenadas no inerciales, la ecuación de cantidad de movimiento se ha definido como:

$$-\oint_{SC} P\,d\vec{s} + \oint_{SC} \vec{\vec{\tau}}\,d\vec{s} + \int_{VC} \rho\,\vec{g}\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\,\vec{V}_{(i)\,x'y'z'}\,d\forall + \oint_{SC} \rho\,\vec{V}_{(i)\ x'y'z'}\,\vec{V}_{x'y'z'}\,d\vec{s}$$
$$+\int_{VC} \rho\left\{\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{r} + \vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r} + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{x'y'z'}\right\}d\forall$$

Aplicando el teorema de la divergencia o de Gauss/Ostrogradsky y diferenciando la ecuación resultante con respecto al volumen se obtiene:

$$-\nabla P + \nabla\vec{\vec{\tau}} + \rho\,\vec{g} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\vec{V}_i\right) + \nabla\left(\rho\,\vec{V}_i\ \vec{V}\right) + \rho\left\{\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{r} + \vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r} + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{x'y'z'}\right\}$$

Los dos términos, después de la igualdad, se pueden dar como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\vec{V}_i\right) + \nabla\left(\rho\,\vec{V}_i\ \vec{V}\right) = \rho\frac{\partial\vec{V}_i}{\partial t} + \vec{V}_i\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V}_i\ \nabla\left(\rho\,\vec{V}\right) + \rho\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\vec{V}_i\right) + \nabla\left(\rho\,\vec{V}_i\ \vec{V}\right) = \rho\left[\frac{\partial\vec{V}_i}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}_i\right] + \vec{V}_i\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho\,\vec{V}\right)\right]$$

Recordando la ecuación diferencial de continuidad y el concepto de derivada material, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\vec{V}_i\right) + \nabla\left(\rho\,\vec{V}_i\ \vec{V}\right) = \rho\left[\frac{D\vec{V}_i}{Dt}\right]$$

Desde el punto de vista genérico, para el caso tridimensional, se puede establecer que:

$$\rho\left[\frac{D\vec{V}_i}{Dt}\right] = \rho\left[\frac{D\vec{V}}{Dt}\right]$$

con lo que la ecuación de cantidad de movimiento genérica, en modo diferencial y para un sistema de referencia no inercial, queda:

$$-\nabla P + \nabla\vec{\vec{\tau}} + \rho\,\vec{g} = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt} + \rho\left\{\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{r} + \vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r} + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{x'y'z'}\right\}$$

Cabe recordar que cada uno de esos términos representa fuerzas por unidad de volumen.

Problema 26

Enunciado

El chorro de agua que sale por una tobera es de 10 mm de diámetro y choca contra una superficie semiesférica. Halle la fuerza que hay que realizar para que la superficie semiesférica no sufra desplazamiento alguno. Aplíquelo para el caso de que el caudal volumétrico entrante sea de 0,001 m^3/s. Comente las hipótesis realizadas.

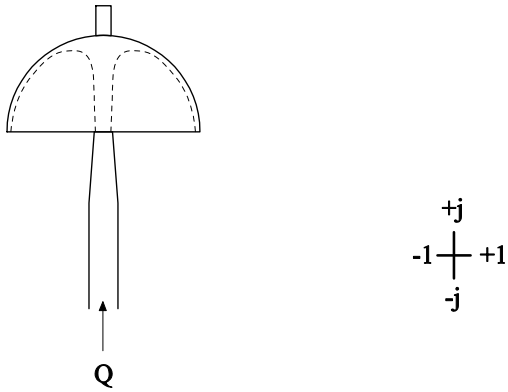


Fig. 26.1

Resolución

El empuje que el chorro de fluido ejerce sobre la superficie semiesférica tiene la misma magnitud y sentido contrario a la fuerza que hay que ejercer para que la semiesfera no se desplace. La figura 26.2 muestra un esquema de las fuerzas actuantes sobre la semiesfera.

La ecuación de cantidad de movimiento establece:

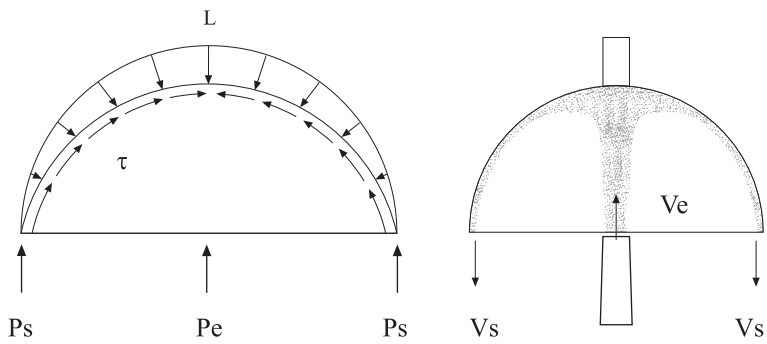


Fig. 26.2
Fuerzas que actúan sobre la semiesfera

$$F_y = -\int_{Se} P\, d\vec{S}\hat{j} - \int_{Ss} P\, d\vec{S}\hat{j} + \underbrace{\int_{Sl} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{S}\hat{j} - \int_{Sl} P\, d\vec{S}\hat{j}}_{F_{LY}} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\vec{v}dV + \int_{Sc} \rho\vec{v}_i\vec{v}\hat{n}dS$$

trabajando en presiones relativas y régimen permanente.

$$F_{Ly} = \int_{Se} \rho \vec{v}(\vec{v}\hat{n})\,dS + \int_{Ss} \rho \vec{v}(\vec{v}\hat{n})\,dS = -\dot{m}(v_e + v_s)$$

Suponiendo que la velocidad de entrada y salida del agua en el volumen de control es la misma.

$$F_{Ly} = -2\,\dot{m}\,v_e = -2\,\rho\,Q\,v_e$$

Siendo esta la expresión de la fuerza de reacción en función del caudal de entrada.

Para agua y un caudal entrante de 0,001 m^3/s, la fuerza tendrá un valor de:

$$F_{LY} = -\,25{,}46\ N$$

Problema 27

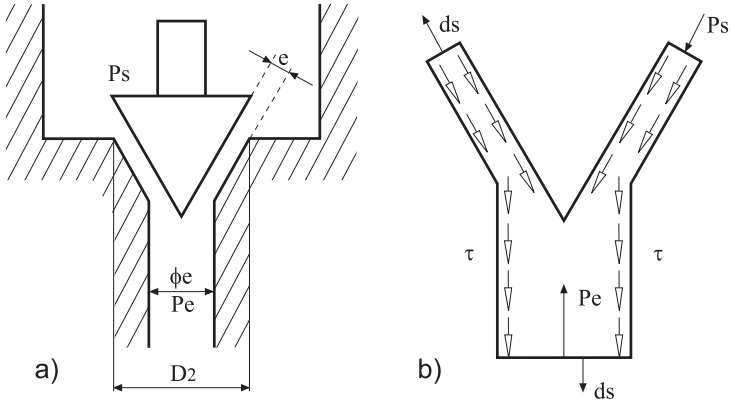
Enunciado

Dado el esquema de la figura, que representa el flujo de un fluido, que se puede considerar incompresible, a través de una válvula de asiento cónico, y sabiendo que la relación de presiones entrada-salida es P_e-P_s; determine la fuerza debida a la cantidad de movimiento que se ejerce sobre la corredera cónica.

Denomínese el flujo volumétrico circulante Q; la densidad del fluido ρ; el diámetro del conducto del flujo entrante, D_e, y la distancia perpendicular entre la superficie lateral del cono y el asiento cónico e. Supóngase que el ángulo del cono es α.

Fig. 27.1 a)

Fig. 27.2 b)



Resolución

Son conocidos los siguientes datos: Q, ρ, P_e, P_s, D_e y D_2

La ecuación de cantidad de movimiento en dirección *y* será:

$$\sum \text{Fext}_y = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \cdot \vec{v}_y \cdot d\forall + \oint_{sc} \rho \cdot \vec{v}_y \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Desarrollando la expresión anterior, se obtiene:

$$\sum \text{Fext}_y = \int_{se} \rho \cdot \vec{v}_y \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{ss} \rho \cdot \vec{v}_y \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\rho \cdot v_{y_e} \cdot v_e \cdot s_e + \rho \cdot v_{y_s} \cdot v_s \cdot s_s$$

Resolviendo para el caso en estudio (v. figura 27.3):

$$\sum \text{Fext}_y = -\rho \cdot v_e^2 \cdot s_e + \rho \cdot v_s^2 \cdot s_s \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

A continuación, se determinan las variables necesarias para resolver la expresión anterior:

$$v_e = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D_e^2}{4}}; \qquad v_s = \frac{Q}{s_s}; \qquad r_1 = r_2 - e \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

La superficie saliente tendrá un valor (v. figuras 27.4, 27.5 y 27.6) de:

$$ds = \int 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dl \; ; \qquad ds = \int_{r_1}^{r_2} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{dr}{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)} \; ;$$

$$s_s = \frac{2 \cdot \pi}{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{2} \qquad s_s = \frac{\pi \cdot \left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

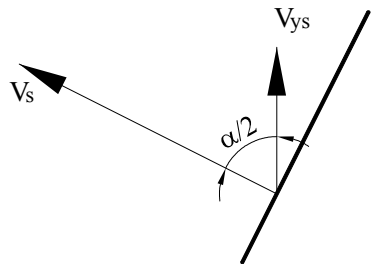


Fig. 27.3

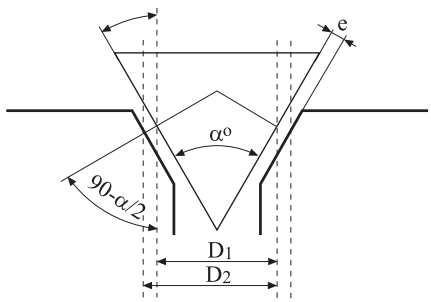


Fig. 27.4

Fig. 27.5

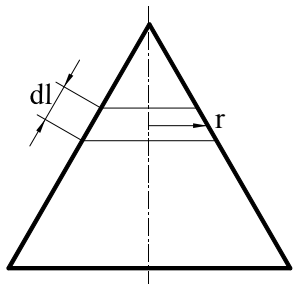
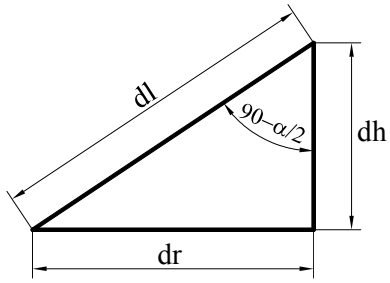


Fig. 27.6



Por otro lado, las fuerzas superficiales que actúan sobre el volumen de control se enuncian:

$$\sum \mathrm{Fext_y} = -\int_{se} P_e \cdot \vec{n} \cdot ds - \int_{ss} P_s \cdot \vec{n} \cdot ds + \underbrace{\int_{sl} P_l \cdot \vec{n} \cdot ds + \int_{sl} \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{n} \cdot ds}_{\sum Fl_y} \quad (2)$$

con lo cual, igualando las expresiones (1) y (2), se obtiene la ecuación siguiente:

$$\sum F_{ly} = \rho \cdot s_s \cdot v_s^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - \rho \cdot s_e \cdot v_e^2 + \int_{ss} P_s \cdot ds - \int_{se} P_e \cdot ds$$

Resolviendo las integrales, se llega a:

$$\sum F_{ly} = \rho \cdot v_s^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)} \left(r_2^2 - r_1^2\right) - \rho \cdot s_e \cdot v_e^2 - P_e \cdot s_e +$$

$$+ P_s \frac{\pi}{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)} \left(r_2^2 - r_1^2\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Agrupando términos, se obtiene:

$$F_{ly} = \frac{\pi}{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \left(r_2^2 - r_1^2\right) \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \left(P_s + \rho \cdot v_s^2\right) - \rho \cdot s_e \cdot v_e^2 - P_e \cdot s_e$$

Problema 28

Enunciado

En la figura 28.1 se ha representado la sección recta de un azud con algunas dimensiones principales. Suponiendo que en las secciones de corriente señaladas por líneas de trazos las distribuciones de velocidad son uniformes y conocidas, se pide determinar la fuerza que la corriente realiza sobre el azud. Considérese que el azud tiene una profundidad L y que la altura del nivel del líquido es de 10 m.

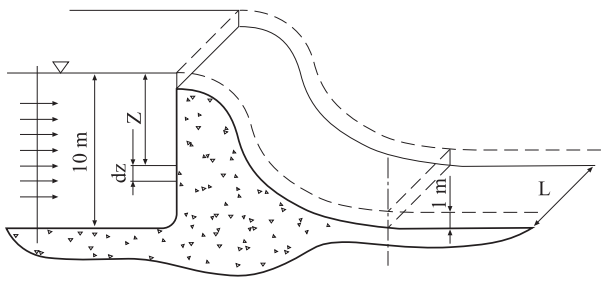


Fig. 28.1
Sección transversal de un azud

Resolución

Dado que el enunciado indica que las distribuciones de velocidad son uniformes, el flujo másico circulante será:

$$\dot{m} = \rho Q = \rho s v = \rho 1 L v = \rho L v$$

La fuerza que la corriente ejerce sobre el azud se podrá determinar aplicando el principio de conservación de cantidad de movimiento al volumen de control englobado entre las dos superficies marcadas en líneas a trazo discontinuo.

La ecuación de cantidad de movimiento en régimen permanente se establece:

$$\int_{\forall} \rho g \, d\forall + \int_{SL} \bar{\bar{\tau}} \, d\vec{s} - \int_{SL} p \, d\vec{s} - \int_{SE} p \, d\vec{s} - \int_{SS} p \, d\vec{s} = \oint_{SC} \rho \vec{v}_x \vec{v} \, d\vec{s}$$

Las fuerzas másicas no tendrán componente respecto al eje de abcisas, con lo cual:

$$F_x = \int_{SE} p \, d\vec{s} + \int_{SS} p \, d\vec{s} + \oint_{SC} \rho \vec{v}_x \vec{v} \, d\vec{s}$$

Los términos que definen la fuerza debida a la distribución de presiones en la entrada y la salida son:

$$F_{SE} = -\int_{SE} p \, d\vec{s} = -\int_0^{10} \rho \, g \, z \, L \, dz = -\rho g L \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{10} = -\rho g L 50$$

$$F_{SS} = -\int_{SS} p \, d\vec{s} = \int_0^1 \rho \, g \, z \, L \, dz = \rho g L \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \rho g \frac{L}{2}$$

El flujo de cantidad de movimiento entre las secciones de entrada y salida del volumen de control es:

$$\int_{SE} \rho \, \vec{v}_x \, \vec{v} \, d\vec{s} = -\rho \, v_E \, Q$$

$$\int_{SS} \rho \, \vec{v}_x \, \vec{v} \, d\vec{s} = \rho \, v_S \, Q$$

Sustituyendo los cuatro términos en la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene:

$$F_x = -\rho \, g \, L \, 50 + \rho \, g \frac{L}{2} - \rho \, v_E \, Q + \rho \, v_S \, Q$$

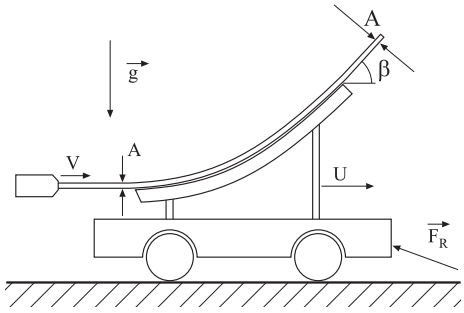
Obsérvese que la fuerza que se obtiene es la fuerza de reacción, la que ejerce el contorno sobre el fluido.

Problema 29

Enunciado

El álabe curvo de la figura se mueve a una velocidad constante absoluta U. Un chorro de agua fluye de la boquilla estática con una velocidad constante V, e incide sobre el álabe. Hallar el valor de la fuerza antagonista F_R que el álabe ejerce sobre el fluido. Considerar despreciables las fuerzas gravitatorias.

Fig. 29.1 Esquema del chorro de fluido que impacta sobre un alabe móvil



Chorro que golpea un alabe

Resolución

Para resolver este problema, se debe utilizar la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, la cual se expresa del modo siguiente:

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \vec{v}_i (\rho \cdot d\forall) + \int_{S.C} \vec{v}_i (\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s})$$

Descomponiendo esta ecuación en sus términos direccionales X e Y,

$$\sum \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot d\forall) + \int_{S.C} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s})\,;$$

$$\sum \vec{F}_Y = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{v}_{iY}(\rho \cdot d\forall) + \int_{S.C} \vec{v}_{iY}(\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s})$$

Véase que, para este problema, la densidad del fluido se mantendrá constante.

La fuerza buscada será . $\vec{F}_R = \vec{F}_X + \vec{F}_Y$

Recuérdese que

v_i = componente iésima de la velocidad del fluido respecto del sistema de referencia.

v_r = velocidad de entrada o salida de la superficie, velocidad del fluido respecto a la superficie de estudio.

Los sistemas de referencia pueden ser móviles o fijos.

Los volúmenes de control pueden ser deformables o indeformables.

Según lo expuesto, se tienen cuatro posibilidades para resolver este problema:

-.Sistema de referencia fijo, volumen de control indeformable.
- Sistema de referencia móvil, volumen de control indeformable.
- Sistema de referencia fijo, volumen de control deformable.
- Sistema de referencia móvil, volumen de control deformable.

A continuación, se expone la resolución del problema mediante los cuatro casos propuestos.

1. Sistema de referencia fijo, volumen de control indeformable.

Para este caso, el volumen de control se considera indeformable y se desplaza a la misma velocidad del álabe, U, conforme a la figura siguiente.

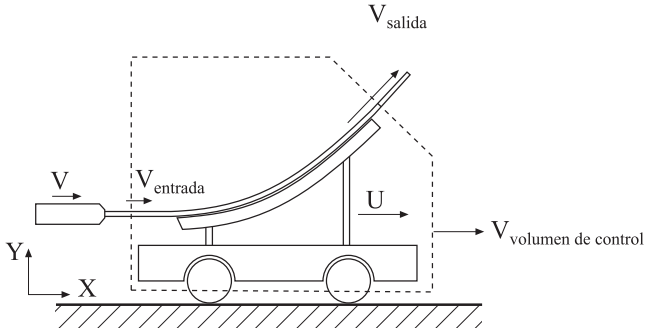


Fig. 29.2
Esquema para el caso 1

En el dibujo anterior se observa:

La velocidad a la que se desplaza el volumen de control es $V_{v.c} = U$.

La velocidad a la que el fluido atraviesa la superficie de entrada del volumen de control es, $V_e = (V-U)$, velocidad medida respecto a la superficie de control elegida.

Para hallar la velocidad a la que el fluido sale del volumen de control, respecto a la velocidad a la que entra, se utilizará la ecuación de continuidad de la masa entre la entrada y la salida del volumen de control.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \cdot d\forall + \int_{SC} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

puesto que, para el volumen de control elegido, no existen variaciones temporales de masa, la ecuación de continuidad tomará la forma

$$\int_{S.S} \rho \cdot \vec{v}_s \cdot d\vec{s} = \int_{S.E} \rho \cdot \vec{v}_e \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot v_s \cdot S_s = \rho \cdot v_e \cdot S_e$$

Dado que las secciones de paso del fluido y las densidades del mismo a la entrada y salida son iguales, queda:

$$v_s = v_e = V\text{-}U$$

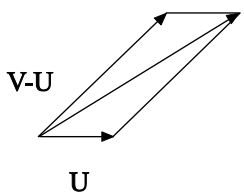
De la ecuación de cantidad de movimiento en dirección X, para un volumen de control indeformable, a velocidad y densidad constantes, se tiene

$$\sum \vec{F}_X = \int_{S.C} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}) \quad \rightarrow \quad F_X = \rho \cdot v_{isx} \cdot v_s \cdot S_s - \rho \cdot v_{iex} \cdot v_e \cdot S$$

donde: $V_{iex} = V;$

$V_{isx} = U + (V\text{-}U)\cos(\beta)$ véase la figura adjunta

Fig. 29.3



$$Fx = \rho \cdot (U + (V\text{-}U)\cos(\beta)) \cdot (V\text{-}U) \cdot S_s - \rho \cdot V\ (V\text{-}U) \cdot S_e = \rho \cdot (V\text{-}U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta)\text{-}1)$$

Operando, se obtiene

$$Fx = \rho \cdot (V\text{-}U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta)\text{-}1)$$

Esta es la fuerza que el álabe ejerce sobre el fluido, fuerza de reacción. Para que el carrito se desplace a velocidad constante, las fuerzas sobre el mismo han de estar equilibradas y puesto que las fuerzas de rozamiento F_r son las que impiden el movimiento, la componente horizontal de dichas fuerzas tendrá un valor

$$F_r = \rho \cdot (V\text{-}U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta)\text{-}1)$$

La componente vertical de la fuerza actuante sobre el carrito se determina: (Véase que no existirán variaciones temporales de cantidad de movimiento en el volumen de control elegido).

$$\sum \vec{F}_Y = \int_{S.C} \vec{v}_{iY} (\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s})$$

Dado que la componente en dirección Y de la velocidad del fluido en la sección de entrada del volumen de control es nula, la ecuación se reducirá a

$$\sum \vec{F}_Y = \int_{SS} \vec{v}_{iY} (\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}) = V_{iSY} (\rho V S_s) = \rho (V - U) \sin\beta (V - U) S_s$$

Puesto que se han despreciado las fuerzas másicas, esta es la ecuación que caracteriza la fuerza vertical que el carrito ejerce sobre el fluido.

2. Sistema de referencia móvil y con velocidad U, fijado al carrito.

Volumen de control indeformable, que se desplaza a velocidad U, según la figura adjunta.

Las velocidades de entrada y salida del volumen de control serán las mismas que en el apartado anterior, puesto que el volumen de control es idéntico y se mueve a la misma velocidad.

$$V_s = V_e = V\text{-}U$$

En este caso, no obstante, $V_{iex} = V\text{-}U$ ya que es la velocidad que tiene el fluido al entrar a la superficie respecto al sistema de referencia escogido.

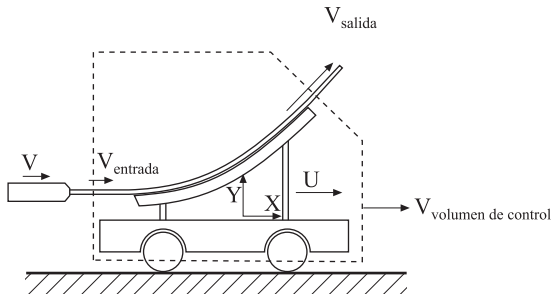


Fig. 29.4
Esquema para el caso 2

Para el presente caso, $V_{isx} = (V\text{-}U)\cdot\cos(\beta)$, que es la velocidad de salida descompuesta en dirección x. La velocidad de salida es la velocidad relativa a la superficie de salida, que en este caso se mueve a la misma velocidad que el sistema de referencia.

Volviendo a la ecuación simplificada de cantidad de movimiento en dirección x,

$$\sum \vec{F}_X = \int_{S.C} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}) \quad \rightarrow \quad F_X = \rho \cdot v_{isx} \cdot v_s \cdot S_s - \rho \cdot v_{iex} \cdot v_e \cdot S$$

$$Fx = \rho\cdot(V\text{-}U)\cos(\beta))\cdot(V\text{-}U)\cdot S_s - \rho\cdot(V\text{-}U)\cdot(V\text{-}U)\cdot S_e = \rho\cdot(V\text{-}U)^2\cdot S\cdot(\cos(\beta)\text{-}1)$$

$$Fx = \rho\cdot(V\text{-}U)^2\cdot S\cdot(\cos(\beta)\text{-}1)$$

Se obtiene la misma solución que en el apartado anterior.

La componente de la fuerza en dirección Y se determina del mismo modo que en el apartado anterior, con lo que se obtiene

$$\sum F_Y = \rho\, V_{isy}\, V_s\, S_s = \rho S_s (V - U) \sin\beta (V - U)$$

resultado idéntico al hallado anteriormente.

3. Sistema de referencia fijo, volumen de control deformable.

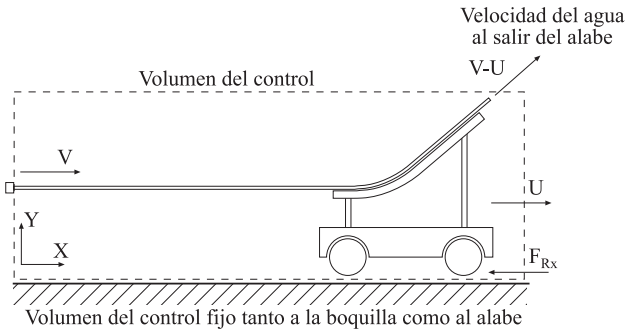
La superficie de entrada se mantiene fija V = 0 y la superficie de salida es móvil y se desplaza a la velocidad del carrito U.

Para este caso, se observa que existe variación temporal del volumen de control. Las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad toman, respectivamente, las formas:

$$\sum \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot d\forall) + \int_{S.C} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s})$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} (\rho \cdot d\forall) + \int_{S.C} (\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s})$$

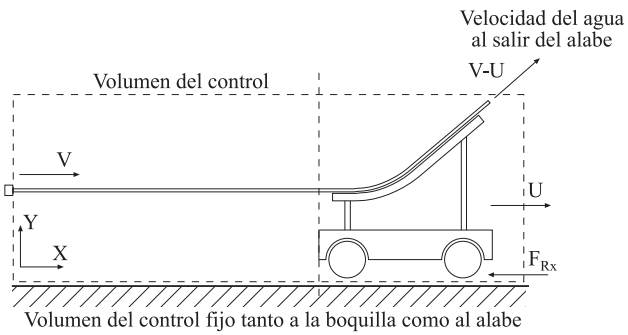
Fig.29.5
Esquema para el caso 3



Para obtener la velocidad de salida del fluido del volumen de control, se utilizará la ecuación de conservación de la masa.

Con el fin de que se entienda mejor la resolución, se procede a dividir el volumen de control en dos volúmenes: las dimensiones del primero variarán temporalmente, mientras que las del segundo, el cual engloba el álabe, se mantendrán constantes a lo largo del tiempo, (véase la figura siguiente).

Fig. 29.6
Esquema para el caso 3, donde se especifican los dos volúmenes de control



El volumen de control total se denomina $\forall_T$, el de la izquierda $\forall_1$ y el de la derecha $\forall_2$. La superficie que comparten $\forall_1$ y $\forall_2$ se mueve a una velocidad U.

La ecuación de conservación de la masa se expresa:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall 1} (\rho \cdot d\forall) + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall 2} (\rho \cdot d\forall) + \int_{ST} (\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s})$$

La variación temporal de la masa en el volumen de control 2 es nula, con lo que

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall 2}(\rho \cdot d\forall)$$

Los términos restantes de la ecuación de continuidad dan lugar a

$$0 = \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\forall_1) - \rho \cdot v_e \cdot S_e + \rho \cdot v_s \cdot S_s \quad \Rightarrow \quad 0 = \rho \cdot S \cdot \frac{\partial}{\partial t}(x) - \rho \cdot v_e \cdot S_e + \rho \cdot v_s \cdot S_s$$

Se observa que $\frac{\partial}{\partial t}(x) = U$

Y se obtiene

$$0 = \rho \cdot S \cdot U - \rho \cdot v_e \cdot S_e + \rho \cdot v_s \cdot S_s$$

Puesto que las secciones y densidades a la entrada y salida son iguales, se obtiene que la velocidad a la salida será

$$V_s = V_e - U \quad \Rightarrow \quad V_s = V - U$$

Véase que la velocidad a la salida del volumen de control es la misma que la obtenida en los apartados anteriores.

Aplicando ahora la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control, y para un sistema de referencia fijo

$$\sum \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot d\forall) + \int_{SC} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s})$$

Al igual que sucedía con la ecuación de continuidad, la variación temporal de cantidad de movimiento para el volumen de control 2 es nula, de donde

$$\sum \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall 1} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot d\forall) + \int_{ST} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s})$$

V_{ix} en el término temporal corresponde a la velocidad del fluido en el volumen de control referido al sistema de referencia correspondiente, para este apartado $V_{ix} = V$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall 1} \vec{V}(\rho \cdot d\forall) = V\ \rho\ \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall 1} d\forall = V\ \rho\ S \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall 1} dx = V\ \rho\ S\ U\ .$$

El término de flujo de cantidad de movimiento a través de las superficies del volumen de control quedará

$$\int_{ST} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}) = \rho\ V_{iSX} V_S\ S_S - \rho\ V_{ieX} V_e\ S_e$$

donde

$$V_{iex} = V; \quad V_{isx} = U + (V\text{-}U)\cos(\beta); \quad V_e = V; \quad V_s = (V\text{-}U).$$

Sustituyendo los diversos términos en la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene

$$\sum F_X = \rho \cdot V\,U\,S + \rho \cdot V_{isx} \cdot V_s \cdot S - \rho \cdot V_{iex} \cdot V_e \cdot S$$

$$\sum F_X = \rho \cdot V\,U\,S + (U + (V\text{-}U)\cos(\beta)) \cdot (V - U) \cdot S - \rho \cdot V \cdot V \cdot S$$

de donde, operando, se obtiene

$$Fx = \rho \cdot (V\text{-}U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta)\text{-}1)$$

Obsérvese que la solución es la misma que en los casos anteriores.

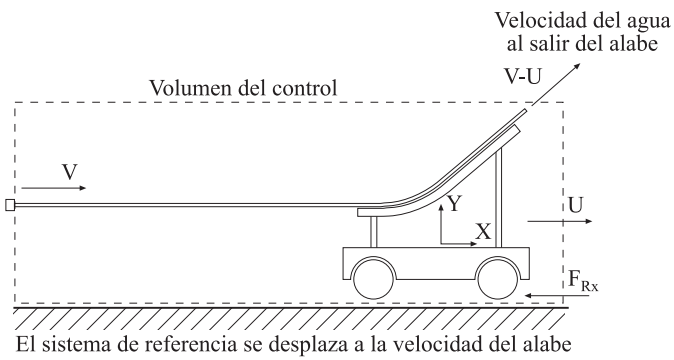
La componente de fuerza en dirección Y se obtiene de la misma forma que en los casos anteriores, dado que el volumen de control no se desplaza en dirección vertical; así:

$$\sum F_Y = \rho\, V_{isy}\, V_s\, S_s = \rho S_s \left(V - U\right) \sin\beta \left(V - U\right)$$

4. Sistema de referencia móvil, volumen de control deformable, que se desplaza a velocidad U.

La superficie de entrada del volumen de control se mantiene fija, mientras que la superficie de salida se desplaza a la misma velocidad que el álabe.

Fig. 29.7
Esquema para el caso 4



El análisis de la ecuación de continuidad de la masa es el mismo que en el apartado anterior, ya que esta no depende del sistema de referencia.

$$V_s = V_e - U \quad \Rightarrow \quad V_s = V - U$$

Se observa que la velocidad de salida es la misma que en los apartados anteriores.

De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control, y para un sistema de referencia móvil, se tiene

$$\sum \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot d\forall) + \int_{S.C} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s})$$

Descomponiendo el volumen de control en uno indeformable y otro deformable, se tiene

$$\sum \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall 1} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot d\forall) + \int_{ST} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s})$$

V_{ix} en el término temporal corresponde a la velocidad del fluido en el volumen de control, referido al sistema de referencia correspondiente. Puesto que ahora el sistema de referencia es móvil, la velocidad del fluido en la zona deformable del volumen de control, medida respecto a un eje de coordenadas que se desplaza a velocidad U, es

$$V_{ix} = V\text{-}U$$

$$\sum \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall 1} (V-U)(\rho \cdot d\forall) = \rho\,(V-U)\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall 1} d\forall = \rho\,(V-U)\,S\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall 1} dx = \rho\,(V-U)\,S\,U$$

Al igual que en los apartados anteriores, el término de flujo de cantidad de movimiento a través de las superficies del volumen de control se expresa del modo siguiente:

$$\int_{ST} \vec{v}_{iX}(\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}) = \rho\, V_{iSX} V_S\, S_S - \rho\, V_{ieX} V_e\, S_e$$

Las velocidades entrantes y salientes del fluido respecto a las superficies del volumen de control y referidas al sistema de referencia móvil serán

$$V_{ex} = (V\text{-}U);\ \ V_e = V;\ \ V_{isx} = (V\text{-}U)\cos(\beta);\ V_s = (V\text{-}U).$$

Agrupando todos los términos de la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene

$$\sum F_X = \rho\cdot(V-U)\,U\,S + (V-U)\cos(\beta)\cdot(V-U)\cdot S - \rho\cdot(V-U)\cdot V\cdot S\,.$$

Reordenando, se obtiene

$$Fx = \rho\cdot(V\text{-}U)^2\cdot S\cdot(\cos(\beta)\text{-}1).$$

Que es de nuevo, la misma solución que en los apartados anteriores.

La componente de fuerza en dirección Y tendrá el mismo valor que para los casos precedentes.

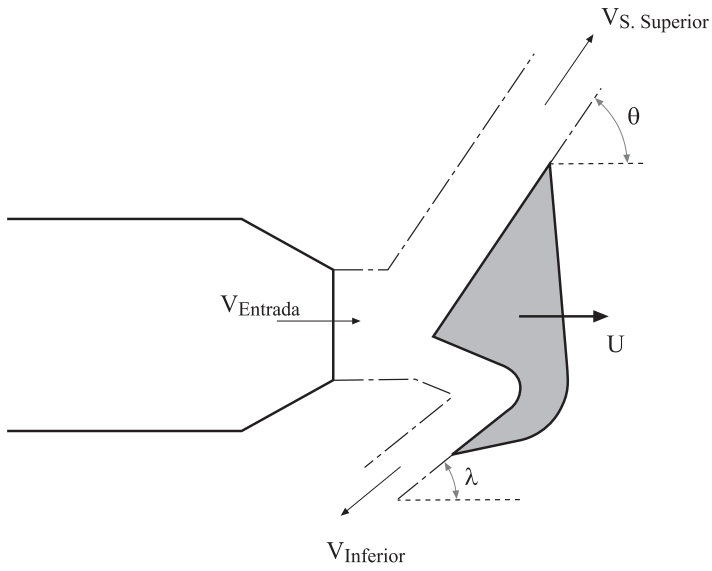
Problema 30

Enunciado

El esquema de la figura 30.1 muestra fluido, que se considerará como incompresible, el cual sale de una tobera convergente e incide sobre un álabe. Se conoce la sección de la tobera y el caudal másico saliente por la misma, se sabe que el caudal másico en la sección superior del álabe es el 70% del caudal saliente por la tobera, asimismo, se entenderá que la sección de salida del fluido por la parte superior del álabe es también el 70% de la sección de salida de la tobera, la sección de salida del fluido por la parte inferior del álabe es el 30% de la sección de la tobera.

Se pide determinar la fuerza en dirección X e Y que ejerce el fluido sobre el álabe de la figura, considerando este estático, considerar despreciables las fuerzas másicas. Realizar el mismo problema cuando el álabe se desplaza a una velocidad "U" en el sentido indicado. Realizar el problema de las cuatro maneras posibles.

Fig. 30.1
Esquema de flujo propuesto



Resolución

Hipótesis de partida:

-Fluido incompresible.
-Régimen Permanente.

Para resolver este problema se aplicarán las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento, dichas ecuaciones se expresan respectivamente de la siguiente forma:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C} \rho \cdot d\forall + \oint_{SC} \rho \cdot \vec{v} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$\int_{\forall C} \rho \vec{g} d\forall - \oint_{SC} P \cdot \overrightarrow{ds} + \oint_{SC} \bar{\bar{\tau}} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, \vec{v}_i \cdot d\forall + \oint_{SC} \rho \cdot \vec{v}_i \, \vec{v} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Resolución para el caso de álabe estático.

Se elegirá el volumen de control definido en la figura 30.2, de la aplicación de la ecuación de continuidad de la masa a dicho volumen de control, se obtiene:

$$0 = \frac{d}{dt}\underbrace{\int_{\forall C} \rho \cdot d\forall}_{0} + \oint_{SC} \rho \; \vec{v} \cdot \overrightarrow{ds} = -\rho \cdot V_{Ent} \cdot S_{Ent} + \rho \cdot V_{S.Sup.} \cdot \underbrace{S_{S.Sup}}_{0.7 \cdot S_{Ent}} + \rho \cdot V_{S.Inf} \cdot \underbrace{S_{S.Inf}}_{0.3 \cdot S_{Ent}}$$

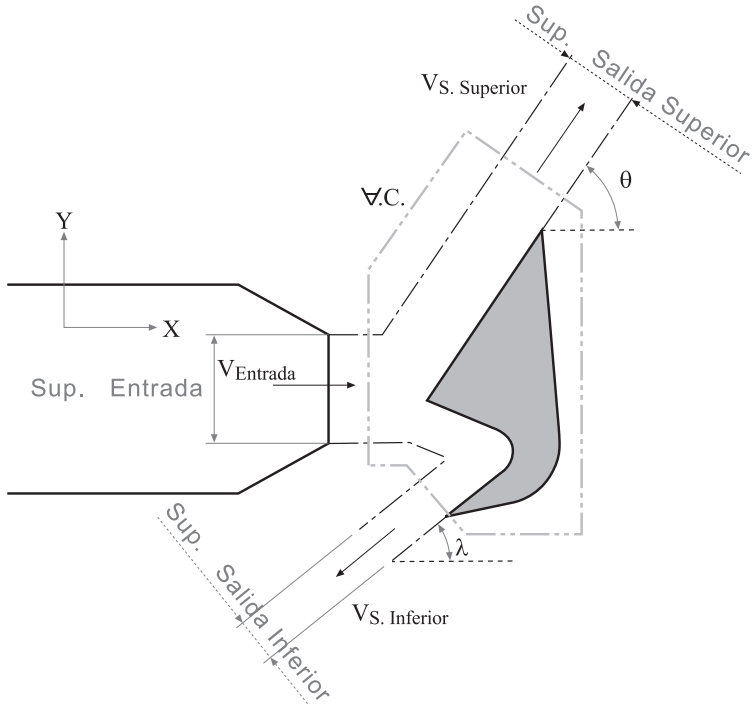


Fig. 30.2
Volumen de control utilizado para la resolución del problema cuando el álabe es estático

Según el enunciado se conoce que el caudal másico saliente por las salidas superior e inferior es respectivamente el 70 y 30% del que sale por la tobera, en conclusión:

$$0.7\cdot\dot{Q}_{Ent} = 0.7\cdot S_{Ent}\cdot V_{Ent} = \dot{Q}_{S.Sup} = \underbrace{S_{S.Sup}}_{0.7\cdot S_{Ent}}\cdot V_{S.Sup}$$

$$0.7\cdot S_{Ent}\cdot V_{Ent} = 0.7\cdot S_{Ent}\cdot V_{S.Sup}\ ; \qquad V_{S.Sup} = V_{Ent}\ ;$$

$$0.3\cdot\dot{Q}_{Ent} = 0.3\cdot S_{Ent}\cdot V_{Ent} = \dot{Q}_{S.Inf} = \underbrace{S_{S.Inf}}_{0.3\cdot S_{Ent}}\cdot V_{S.Inf}$$

$$0.3\cdot S_{Ent}\cdot V_{Ent} = 0.3\cdot S_{Ent}\cdot V_{S.Sup}\ ; \qquad V_{S.Inf} = V_{Ent}$$

La conclusión es:

$$V_{Ent} = V_{S.Inf} = V_{S.Sup}$$

Aplicando ahora la ecuación de cantidad de movimiento al mismo volumen de control, se obtiene:

$$\int_{\forall C}\rho\vec{g}d\forall - \oint_{SC} P\cdot\overrightarrow{ds} + \oint_{SC}\overline{\overline{\tau}}\cdot\overrightarrow{ds} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\ \vec{v}_i\cdot d\forall + \oint_{SC}\rho\cdot\vec{v}_i\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}$$

$$\begin{cases} \int_{\forall C} \rho \vec{g} d\forall = \text{Peso del fluido (despreciable)} \\ \oint_{SC} P\cdot\overrightarrow{ds} = \underbrace{\int_{SC\,Entrada} P\cdot\overrightarrow{ds}}_{0} + \underbrace{\int_{SC\,Salida} P\cdot\overrightarrow{ds}}_{0} + \int_{SC\,Lateral} P\cdot\overrightarrow{ds} \\ \oint_{SC} \overline{\overline{\tau}}\cdot\overrightarrow{ds} = \underbrace{\int_{SC\,Entrada} \overline{\overline{\tau}}\cdot\overrightarrow{ds}}_{0} + \underbrace{\int_{SC\,Salida} \overline{\overline{\tau}}\cdot\overrightarrow{ds}}_{0} + \int_{SC\,Lateral} \overline{\overline{\tau}}\cdot\overrightarrow{ds} \end{cases}$$

La fuerza de reacción resultante se define:

$$\overrightarrow{F_R} = -\oint_{SL} P\cdot\overrightarrow{ds} + \oint_{SL} \overline{\overline{\tau}}\cdot\overrightarrow{ds} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\, \vec{v}_i \cdot d\forall + \oint_{SC} \rho\cdot\vec{v}_i\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}$$

Véase que el término de los esfuerzos cortantes y la fuerza de presión lateral son las fuerzas de superficie que actúan sobre el fluido, o sea, la fuerza del álabe sobre el fluido, fuerza de reacción.

La velocidad V_i corresponde a la componente de la velocidad del fluido en la dirección en la que se evalúa la fuerza y respecto al sistema de coordenadas de referencia.

La velocidad V corresponde a la velocidad del fluido respecto a la superficie por donde fluye el mismo.

Para el caso bajo estudio, donde hay una entrada y dos salidas, se tiene:

$$\sum F_i = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\, \vec{v}_i \cdot d\forall + \oint_{SC} \rho\cdot\vec{v}_i\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{ds} = \int_{SC\,Ent} \rho\cdot\vec{v}_i\ \vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SC\,Sup} \rho\cdot\vec{v}_i\ \vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SC\,Inf} \rho\cdot\vec{v}_i\ \vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

Teniendo en consideración la ecuación anterior, para las direcciones X e Y se obtiene:

En dirección X.

$$\sum F_X = \begin{cases} \int_{SC\,Ent} \rho\cdot \underbrace{\vec{v}_x}_{+} \underbrace{\vec{V}\cdot\overrightarrow{dS}}_{-} = -\rho\cdot V\cdot V\cdot S_{Entrada} \\ \int_{SC\,Sup} \rho\cdot \underbrace{\vec{v}_x}_{+} \underbrace{\vec{V}\cdot\overrightarrow{dS}}_{+} = \rho\cdot V\cdot V\cdot\cos\theta\cdot 0.7\cdot S_{Entrada} \\ \int_{SC\,Inf} \rho\cdot \underbrace{\vec{v}_x}_{-} \underbrace{\vec{V}\cdot\overrightarrow{dS}}_{+} = -\rho\cdot V\cdot V\cdot\cos\lambda\cdot 0.3\cdot S_{Entrada} \end{cases}$$

$$\sum F_X = \rho\cdot V\cdot V\cdot\cos\theta\cdot 0.7\cdot S_{Entrada} - \rho\cdot V\cdot V\cdot S_{Entrada} - \rho\cdot V\cdot V\cdot\cos\lambda\cdot 0.3\cdot S_{Entrada}$$

$$\sum F_X = \rho\cdot V^2\cdot S_{Entrada}\cdot\left(\cos\theta\cdot 0.7 - 1 - \cos\lambda\cdot 0.3\right)$$

En dirección Y.

Véase que la componente de la velocidad en dirección Y en la superficie entrante, es nula.

$$\sum F_Y = \begin{cases} \int_{SC\ Ent} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_y}_{0} \cdot \underbrace{\vec{V} \cdot \vec{dS}}_{-} = 0 \\ \int_{SC\ Sup} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_y}_{+} \cdot \underbrace{\vec{V} \cdot \vec{dS}}_{+} = \rho \cdot V \cdot V \cdot \sin\theta \cdot 0.7 \cdot S_{Entrada} \\ \int_{SC\ Inf} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_y}_{-} \cdot \underbrace{\vec{V} \cdot \vec{dS}}_{+} = -\rho \cdot V \cdot V \cdot \sin\lambda \cdot 0.3 \cdot S_{Entrada} \end{cases}$$

$$\sum F_Y = \rho \cdot V \cdot V \cdot \sin\theta \cdot 0.7 \cdot S_{Ent} - \rho \cdot V \cdot V \cdot \sin\lambda \cdot 0.3 \cdot S_{Ent}$$
$$= \rho \cdot V^2 \cdot (0.7 \cdot \sin\theta - 0.3 \cdot \sin\lambda)$$

La fuerza que hace el fluido sobre el álabe corresponde a las fuerzas acabadas de determinar, pero en sentido contrario.

$$\vec{F} = \left[\rho \cdot V^2 \cdot S_{Entrada} \cdot (1 + \cos\lambda \cdot 0.3 - \cos\theta \cdot 0.7)\right] \vec{i}$$
$$+ \left[\rho \cdot V^2 \cdot (0.3 \cdot \sin\lambda - 0.7 \cdot \sin\theta)\right] \vec{j}$$

Caso álabe moviéndose con una velocidad U.

Este caso se puede resolver de 4 maneras diferentes:

- Sistema de referencia fijo y volumen de control indeformable
- Sistema de referencia móvil y volumen de control indeformable
- Sistema de referencia fijo y volumen de control deformable
- Sistema de referencia móvil y volumen de control deformable

A continuación se resolverá este apartado mediante las 4 maneras posibles.

1. Resolución mediante un sistema de referencia fijo y un volumen de control indeformable. Ver figura 30.3.

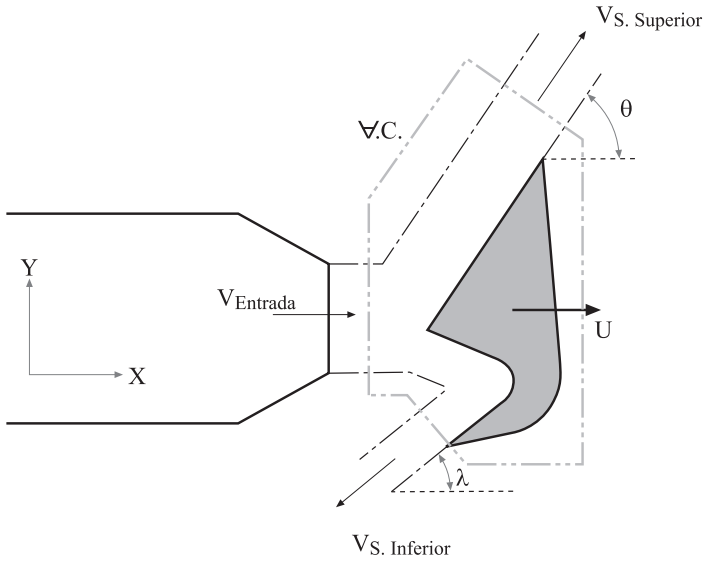


Fig. 30.3
Sistema de referencia fijo y volumen de control móvil e indeformable

La relación entre el módulo de las velocidades a la entrada y salidas del volumen de control, se obtendrá de aplicar la ecuación de continuidad en el mismo.

$$0 = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\cdot d\forall}_{0} + \oint_{SC}\rho\cdot\vec{V}\,\vec{dS} = -\rho\cdot V_{Ent}\cdot S_{Ent} + \rho\cdot V_{S\,Sup}\cdot\underbrace{S_{S\,Sup}}_{0.7\cdot S_{Ent}} + \rho\cdot V_{S\,Inf}\cdot\underbrace{S_{S\,Inf}}_{0.3\cdot S_{Ent}}$$

Recordando que el caudal másico saliente por la parte superior e inferior es respectivamente el 70 y 30% del que sale por la tobera:

$$0.7\cdot\dot{Q}_{Ent} = 0.7\cdot S_{Ent}\cdot V_{Ent} = \dot{Q}_{S\,Sup} = \underbrace{S_{S\,Sup}}_{0.7\cdot S_{Ent}}\cdot V_{S\,Sup}$$

$$0.7\cdot S_{Ent}\cdot V_{Ent} = 0.7\cdot S_{Ent}\cdot V_{S.Sup}\,; \qquad V_{S.Sup} = V_{Ent}$$

$$0.3\cdot\dot{Q}_{Ent} = 0.3\cdot S_{Ent}\cdot V_{Ent} = \dot{Q}_{S.Inf} = \rho\cdot\underbrace{S_{S.Inf}}_{0.3\cdot S_{Ent}}\cdot V_{S.Inf}$$

$$0.3\cdot S_{Ent}\cdot V_{Ent} = 0.3\cdot S_{Ent}\cdot V_{S.Sup}\,; \qquad V_{S.Inf} = V_{Ent}$$

Véase que para el presente caso se cumple que:

$$V_{Ent} = V_{S.Inf} = V_{S.Sup} = (V - U)$$

Realizando las mismas simplificaciones que para el caso estático, se obtiene para el presente caso, la misma ecuación de cantidad de movimiento que la ya previamente obtenida.

$$\sum F_i = -\oint_{SL} P\cdot\vec{ds} + \oint_{SL}\vec{\tau}\cdot\vec{ds} = \int_{SC\,Ent}\rho\cdot\vec{v}_i\;\vec{v}\,\vec{ds}$$
$$+\int_{SC\,Sup}\rho\cdot\vec{v}_i\;\vec{v}\,\vec{ds} + \int_{SC\,Inf}\rho\cdot\vec{v}_i\;\vec{v}\,\vec{ds}$$

En dirección X se obtiene:

$$\sum F_X = \begin{cases} \int_{SC\ Ent} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_x}_{+} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{-} = -\rho \cdot V \cdot (V\text{-}U) \cdot S_{Entrada} \\ \int_{SC\ Sup} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_x}_{+} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{+} = \rho \cdot ((V\text{-}U) \cdot \cos\theta + U) \cdot (V\text{-}U) \cdot 0.7 \cdot S_{Entrada} \\ \int_{SC\ Inf} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_x}_{-} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{+} = \rho \cdot (-(V\text{-}U) \cdot \cos\lambda + U) \cdot (V\text{-}U) \cdot 0.3 \cdot S_{Entrada} \end{cases}$$

$$\sum F_X = -\rho \cdot V \cdot (V-U) \cdot S_{Entrada} + \rho \cdot \left((V-U) \cdot \cos\theta + U\right) \cdot (V-U) \cdot 0.7 \cdot S_{Entrada}$$
$$+\rho \cdot \left(-(V-U) \cdot \cos\lambda + U\right) \cdot (V-U) \cdot 0.3 \cdot S_{Entrada}$$

$$\sum F_X = -\rho \cdot V \cdot (V-U) \cdot S_{Ent} + \rho \cdot \left((V-U)^2 \cdot \cos\theta + U \cdot (V-U)\right) \cdot 0.7 \cdot S_{Ent}$$
$$+\rho \cdot \left(-(V-U)^2 \cdot \cos\lambda + U \cdot (V-U)\right) \cdot 0.3 \cdot S_{Ent}$$

$$\sum F_X = \rho S_{Ent} \begin{bmatrix} -V^2 + VU + \left((V-U)^2 \cdot \cos\theta + UV - U^2\right) \cdot 0.7 \\ -\left((V-U)^2 \cdot \cos\lambda + UV - U^2\right) \cdot 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\sum F_X = \rho \cdot S_{Ent} \begin{bmatrix} \underbrace{-V^2 + VU + VU - U^2}_{-(V-U)^2} + (V-U)^2 \cdot \cos\theta \cdot 0.7 \\ -(V-U)^2 \cdot \cos\lambda \cdot 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\sum F_X = \rho \cdot S_{Ent} \cdot (V-U)^2 \cdot (-1 + 0.7\cos\theta - 0.3\cos\lambda)$$

La fuerza de reacción en dirección Y se determinará:

$$\sum F_Y = \begin{cases} \int_{SC\ Ent} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_y}_{+} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{-} = 0 \\ \int_{SC\ Sup} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_y}_{+} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{+} = \rho \cdot ((V\text{-}U) \cdot \sin\theta) \cdot (V\text{-}U) \cdot 0.7 \cdot S_{Ent} \\ \int_{SC\ Inf} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_y}_{-} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{+} = \rho \cdot (-(V\text{-}U) \cdot \sin\lambda) \cdot (V\text{-}U) \cdot 0.3 \cdot S_{Ent} \end{cases}$$

Sumando los tres términos y simplificando se obtiene:

$$\sum F_Y = \rho \cdot (V-U)^2 \cdot S_{Ent} \cdot [0.7 \cdot \sin\theta - 0.3 \cdot \sin\lambda]$$

2. Resolución mediante un sistema de referencia móvil y volumen de control móvil e indeformable, (v. figura 30.4).

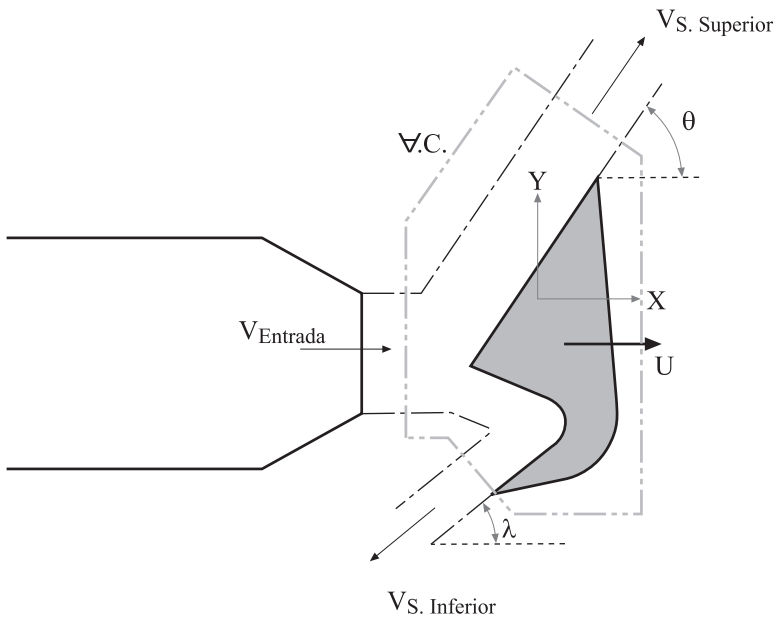


Fig. 30.4
Volumen de control móvil y sistema de referencia móvil

La relación de velocidades para el flujo entrante y saliente, que se ha obtenido en el apartado anterior mediante la ecuación de continuidad, sigue siendo válida. Asimismo, la ecuación genérica de cantidad de movimiento tendrá la misma forma que en los apartados precedentes.

Para este segundo caso, las componentes del flujo de cantidad de movimiento a la entrada y salida del volumen de control tomarán la forma:

$$\sum F_X = \begin{cases} \int_{SC\ Ent} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_x}_{+} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{-} = -\rho \cdot (V\text{-}U) \cdot (V\text{-}U) \cdot S_{Ent} \\ \int_{SC\ Sup} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_x}_{+} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{+} = \rho \cdot ((V\text{-}U) \cdot \cos\theta) \cdot (V\text{-}U) \cdot 0.7 \cdot S_{Ent} \\ \int_{SC\ Inf} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_x}_{-} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{+} = \rho \cdot (-(V\text{-}U) \cdot \cos\lambda) \cdot (V\text{-}U) \cdot 0.3 \cdot S_{Ent} \end{cases}$$

Sumando estos tres términos y simplificando, se llega a obtener el mismo resultado que en el apartado precedente.

$$\sum F_X = \rho \cdot (V-U)^2 \cdot S_{Ent} \cdot [-1 + 0.7 \cdot \cos\theta - 0.3 \cdot \cos\lambda]$$

Asimismo, en dirección Y se obtiene:

$$\sum F_Y = \begin{cases} \int_{SC\ Ent} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_y}_{+} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{-} = 0 \\ \int_{SC\ Sup} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_y}_{+} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{+} = \rho \cdot ((V\text{-}U) \cdot \sin\theta) \cdot (V\text{-}U) \cdot 0.7 \cdot S_{Ent} \\ \int_{SC\ Inf} \rho \cdot \underbrace{\vec{v}_y}_{-} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}_{+} = \rho \cdot (-(V\text{-}U) \cdot \sin\lambda) \cdot (V\text{-}U) \cdot 0.3 \cdot S_{Ent} \end{cases}$$

El resultado final es:

$$\sum F_Y = \rho \cdot (V-U)^2 \cdot S_{Ent} \cdot [0.7 \cdot \sin\theta - 0.3 \cdot \sin\lambda]$$

Obsérvese que las componentes de la fuerza debida al flujo de cantidad de movimiento en las secciones de entrada y salida del volumen de control, no quedan afectadas por la elección del sistema de coordenadas, consecuentemente la ecuación resultante será idéntica en todos los casos.

3. Se elige un sistema de referencia fijo y un volumen de control deformable, (v. figura 30.5).

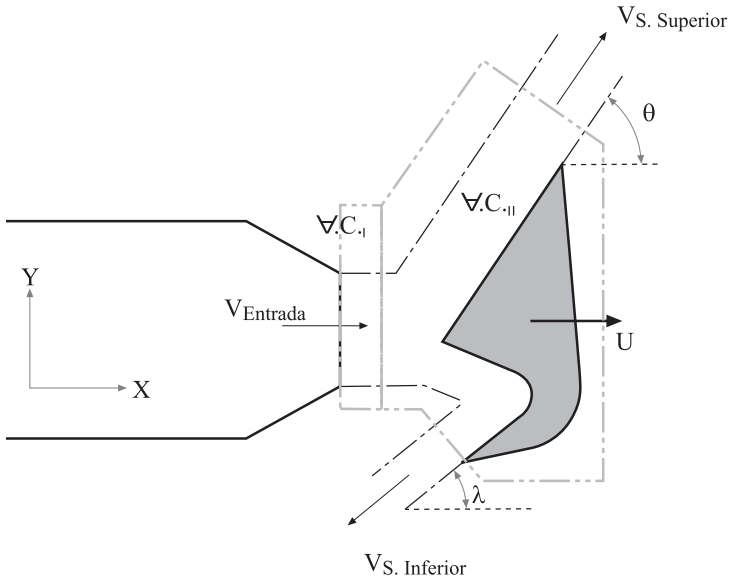


Fig. 30.5
Sistema de referencia fijo y volumen de control deformable

Véase que para este caso, la sección de entrada del fluido al volumen de control, coincide con la sección de salida de la tobera, las dos secciones de salida son las mismas que en los casos precedentes.

El volumen de control elegido, se va a dividir en dos sub-volúmenes, el primero es deformable y tiene una forma tubular. El fluido entra en dirección horizontal por la sección de la izquierda, que se mantiene inmóvil y coincide con la sección de salida de la tobera, el fluido sale de dicho sub-volumen deformable también en dirección horizontal y por la sección de la derecha, sección que se desplaza a la misma velocidad que el álabe.

El segundo sub-volumen de control, que no es deformable, es el mismo que el utilizado en los dos apartados anteriores.

La ecuación de continuidad de la masa aplicada al volumen de control total, que engloba los volúmenes $\forall_1$ y $\forall_2$, da lugar a:

Obsérvese que ahora el término de la variación temporal de la acumulación de masa dentro del volumen de control no será nulo.

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C} \rho \cdot d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$= \rho \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\forall}_{\forall = \forall_I + \forall_{II}} \right) - \rho \cdot V_{Ent} \cdot S_{Ent} + \rho \cdot V_{S\,Sup} \cdot \underbrace{S_{S\,Sup}}_{0.7 \cdot S_{Ent}} + \rho \cdot V_{S\,Inf} \cdot \underbrace{S_{S\,Inf}}_{0.3 \cdot S_{Ent}}$$

$$= \rho \left(\underbrace{\frac{d}{dt}(\forall_I)}_{S_{Ent}\ U} + \underbrace{\frac{d}{dt}(\forall_{II})}_{0} \right) - \rho V_{Ent} \cdot S_{Ent} + \rho\ V_{S\,Sup} \cdot 0.7 \cdot S_{Ent} + \rho\ V_{S.Inf} \cdot 0.3 \cdot S_{Ent}$$

Recordando la relación de secciones y flujos entrantes y salientes se puede definir, para el volumen de control $\forall_2$.

$$0.7 \cdot \dot{Q}_{Ent} = 0.7 \cdot S_{Ent} \cdot V_{Ent} = \dot{Q}_{S.Sup} = \underbrace{S_{S.Sup}}_{0.7 \cdot S_{Ent}} \cdot V_{S.Sup}$$

$$0.7 \cdot S_{Ent} \cdot V_{Ent} = 0.7 \cdot S_{Ent} \cdot V_{S.Sup}\ ; \qquad V_{S.Sup} = V_{Ent}\ ;$$

$$0.3 \cdot \dot{Q}_{Ent} = 0.3 \cdot S_{Ent} \cdot V_{Ent} = \dot{Q}_{S.Inf} = \underbrace{S_{S.Inf}}_{0.3 \cdot S_{Ent}} \cdot V_{S.Inf}$$

$$0.3 \cdot S_{Ent} \cdot V_{Ent} = 0.3 \cdot S_{Ent} \cdot V_{S\,Inf}\ ; \qquad V_{S.Inf} = V_{Ent}\ ;$$

$$V_{Ent} = V_{S.Inf} = V_{S.Sup}$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$V_{Ent} = V_{S.Inf} = V_{S.Sup} = (V\text{-}U)$$

Las hipótesis realizadas en los casos precedentes en lo que hace referencia a la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento, deberán ser ahora modificadas, puesto que en el presente caso existirá variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control elegido. Recuérdese que la ecuación genérica de cantidad de movimiento, tomaba la forma:

$$\int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall - \oint_{SC} P \cdot \overrightarrow{ds} + \oint_{SC} \overline{\overline{\tau}} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\ \vec{v}_i\ d\forall + \oint_{SC} \rho\ \vec{v}_i\ \vec{v}\ \overrightarrow{ds}$$

El tratamiento de las fuerzas másicas, las fuerzas de presión y las debidas a los esfuerzos cortantes, es idéntico al utilizado previamente, con lo que la parte izquierda de la ecuación de cantidad de movimiento tendrá la misma forma que en los casos

precedentes. La parte derecha de la ecuación, no obstante, incluye ahora el término de variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control, con lo que la ecuación resultante será:

$$\sum F_i = -\oint_{SL} P\cdot\overrightarrow{ds} + \oint_{SL} \overline{\overline{\tau}}\cdot\overrightarrow{ds} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\ \vec{v}_i\cdot d\forall + \int_{SC\ Ent} \rho\cdot\vec{v}_i\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}$$
$$+\oint_{SC\ Sup} \rho\cdot\vec{v}_i\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{ds} + \oint_{SC\ Inf} \rho\cdot\vec{v}_i\ \vec{v}\ \overrightarrow{ds}$$

En dirección X, los cuatro términos de la derecha de la ecuación de cantidad de movimiento, toman la forma.

$$\sum F_X = \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\int_{\forall C} \rho\ \vec{v}_x\cdot d\forall = \rho\cdot V\cdot\dfrac{d}{dt}(\forall) = \rho\cdot V\cdot\dfrac{d}{dt}(\forall_I + \forall_{II}) = \rho\cdot V\cdot U\cdot S_{Ent} \\ \int_{S.C.Ent} \rho\cdot\underbrace{\vec{v}_x}_{+}\cdot\underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{-} = -\rho\cdot V\cdot V\cdot S_{Ent} \\ \int_{S.C.Sup} \rho\cdot\underbrace{\vec{v}_x}_{+}\cdot\underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{+} = \rho\cdot((V-U)\cdot\cos\theta + U)\cdot(V-U)\cdot 0.7\cdot S_{Ent} \\ \int_{S.C.Inf} \rho\cdot\underbrace{\vec{v}_x}_{-}\cdot\underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{+} = \rho\cdot(-(V-U)\cdot\cos\lambda + U)\cdot(V-U)\cdot 0.3\cdot S_{Ent} \end{cases}$$

Agrupando los 4 términos se obtiene:

$$\sum F_X = \rho\cdot V\cdot U\cdot S_{Ent} - \rho\cdot V\cdot V\cdot S_{Ent} + \rho\cdot\left((V-U)\cdot\cos\theta + U\right)\cdot(V-U)\cdot 0.7\cdot S_{Ent}$$
$$+\rho\cdot\left(-(V-U)\cdot\cos\lambda + U\right)\cdot(V-U)\cdot 0.3\cdot S_{Ent}$$
$$= \rho S_{Ent}\begin{bmatrix} UV - V^2 + \left((V-U)\cdot\cos\theta + U\right)\cdot(V-U)\cdot 0.7 \\ +\left(-(V-U)\cdot\cos\lambda + U\right)\cdot(V-U)\cdot 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\sum F_X = \rho S_{Ent}\begin{bmatrix} UV - V^2 + \left((V-U)^2\cdot\cos\theta + UV - U^2\right)\cdot 0.7 \\ +\left(-(V-U)^2\cdot\cos\lambda + UV - U^2\right)\cdot 0.3 \end{bmatrix}$$
$$= \rho S_{Ent}\begin{bmatrix} \underbrace{UV + UV - V^2 - U^2}_{-(V-U)^2} + \left((V-U)^2\cdot\cos\theta\right)\cdot 0.7 \\ +\left(-(V-U)^2\cdot\cos\lambda\right)\cdot 0.3 \end{bmatrix}$$
$$= \rho S_{Ent}\left[-(V-U)^2 + \left((V-U)^2\cdot\cos\theta\right)\cdot 0.7 + \left(-(V-U)^2\cdot\cos\lambda\right)\cdot 0.3\right]$$

$$\sum F_X = \rho\cdot S_{Ent}\cdot(V-U)^2\cdot(-1 + \cos\theta\cdot 0.7 - \cos\lambda\cdot 0.3)$$

Véase que el resultado es el mismo que el obtenido en los dos casos precedentes.

La fuerza resultante en dirección Y será:

$$\sum F_Y = \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\cdot\int_{\forall C}\rho\underbrace{\vec{v}_y}_{0}\cdot d\forall = 0 \\ \int_{SC\ Ent}\rho\cdot\underbrace{\vec{v}_y}_{0}\cdot\underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{-} = 0 \\ \int_{S.C.Sup}\rho\cdot\underbrace{\vec{v}_y}_{+}\cdot\underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{+} = \rho\cdot((V\text{-}U)\cdot\sin\theta)\cdot(V\text{-}U))\cdot 0.7\cdot S_{Ent} \\ \int_{S.C.Inf}\rho\cdot\underbrace{\vec{v}_y}_{-}\cdot\underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{+} = \rho\cdot(-(V\text{-}U)\cdot\sin\lambda)\cdot(V\text{-}U))\cdot 0.3\cdot S_{Ent} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sum F_Y &= \rho\cdot((V\text{-}U)\cdot\sin\theta)\cdot(V\text{-}U))\cdot 0.7\cdot S_{Ent} \\ &+\rho\cdot(-(V\text{-}U)\cdot\sin\lambda)\cdot(V\text{-}U))\cdot 0.3\cdot S_{Ent} = \\ &+\rho\cdot(V\text{-}U)^2\cdot S_{Ent}\cdot[+0.7\cdot\sin\theta - 0.3\cdot\sin\lambda]\end{aligned}$$

$$\sum F_Y = \rho\cdot(V\text{-}U)^2\cdot S_{Ent}\cdot[+0.7\cdot\sin\theta - 0.3\cdot\sin\lambda]$$

4. Para este último caso, se va a elegir un volumen de control deformable y un sistema de referencia móvil, (v. figura 30.6).

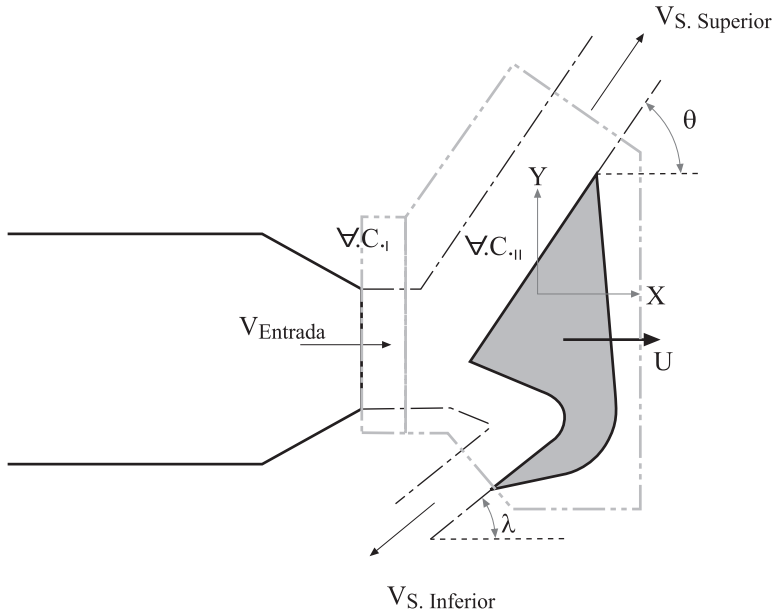


Fig. 30.6 Volumen de control deformable y sistema de referencia móvil

Puesto que el volumen de control es el mismo que el utilizado en el apartado anterior, de la aplicación de la ecuación de continuidad se obtendrá el mismo resultado que en dicho apartado, es decir:

$$V_{Ent} = V_{S.Inf} = V_{S.Sup} = (V\text{-}U)$$

La ecuación genérica de cantidad de movimiento es también la misma que la hallada en el apartado anterior, los tres términos de flujo de cantidad de movimiento y el término de variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control, en las direcciones X e Y respectivamente, tomarán la forma:

Dirección X.

$$\sum F_Y = \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\cdot\int_{\forall C}\rho\underbrace{\vec{v}_x}_{(V-U)}\cdot d\forall = \rho(V-U)\cdot\dfrac{d}{dt}(\forall) = \rho(V-U)\cdot\dfrac{d}{dt}(\forall_I+\forall_{II}) \\ = \rho\cdot S_{Ent}\cdot(V-U)\ U \\ \int_{SC\ Ent}\rho\cdot\underbrace{\vec{v}_x}_{+}\ \underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{-} = -\rho\cdot(V-U)\cdot V\cdot S_{Ent} \\ \int_{S.C.Sup}\rho\cdot\underbrace{\vec{v}_x}_{+}\ \underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{+} = \rho\cdot(V-U)\cdot\cos\theta)\cdot(V-U)\cdot 0.7\cdot S_{Ent} \\ \int_{S.C.Inf}\rho\cdot\underbrace{\vec{v}_x}_{-}\cdot\underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{+} = \rho\cdot(-(V-U)\cdot\cos\lambda)\cdot(V-U)\cdot 0.3\cdot S_{Ent} \end{cases}$$

Sumando los términos y agrupando se obtiene:

$$\sum F_X = \rho\cdot S_{Ent}\cdot(V\text{-}U)^2\cdot(-1+\cos\theta\cdot 0.7-\cos\lambda\cdot 0.3)$$

En dirección Y la suma de fuerzas da lugar a:

$$\sum F_Y = \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\cdot\int_{\forall.C.}\rho\underbrace{\vec{v}_y}_{0}\cdot d\forall = 0 \\ \int_{S.C.Ent}\rho\cdot\underbrace{\vec{v}_y}_{0}\cdot\underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{-} = 0 \\ \int_{S.C.Sup}\rho\cdot\underbrace{\vec{v}_y}_{+}\cdot\underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{+} = \rho\cdot((V\text{-}U)\cdot\sin\theta)\cdot(V\text{-}U))\cdot 0.7\cdot S_{Ent} \\ \int_{S.C.Inf}\rho\cdot\underbrace{\vec{v}_y}_{-}\cdot\underbrace{\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}_{+} = \rho\cdot(-(V\text{-}U)\cdot\sin\lambda)\cdot(V\text{-}U))\cdot 0.3\cdot S_{Ent} \end{cases}$$

$$\sum F_Y = \rho\cdot(V\text{-}U)^2\cdot S_{Ent}\cdot[0.7\cdot\sin\theta-0.3\cdot\sin\lambda]$$

Se comprueba que independientemente del método de resolución utilizado se obtiene el mismo resultado final.

La fuerza que el fluido ejerce sobre el álabe, cuando éste se encuentra en movimiento, se define:

$$\vec{F} = \left[\rho (V\text{-}U)^2 S_{Ent} (1 - 0.7\cos\theta + 0.3\cos\lambda)\right]\vec{i}$$
$$+\left[-\rho (V\text{-}U)^2 S_{Ent} (0.7\sin\theta - 0.3\sin\lambda)\right]\vec{j}$$

Problema 31

Enunciado

Sea el depósito móvil de la figura, el cual a t = 0 tiene una altura de líquido H y parte del reposo. Sabiendo que las fuerzas antagonistas que se oponen al movimiento son las siguientes:

Fricción de la rueda con el suelo $F_f = K*P$, donde K es una constante conocida y P es el peso del conjunto del depósito y el fluido, se considera conocido este peso para t = 0.

La fricción del depósito con el aire, se define por la ecuación. $D = C_D \rho_{aire} S_{proyectada} \frac{V_{movil}^2}{2}$

donde D representa la fuerza que el aire opone al movimiento del móvil. C_D, ρ_{aire} y $S_{proyectada}$ son conocidos.

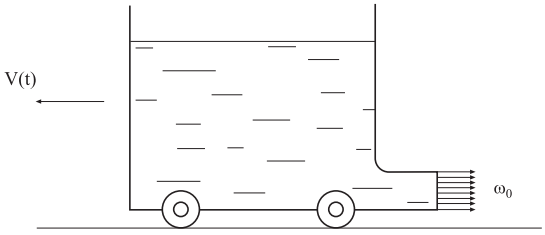
Considérense conocidas las dimensiones del depósito.

Determine:

1. La variación temporal del nivel del líquido en el depósito.

2. La ecuación diferencial que determina la velocidad del móvil en función del tiempo.

Fig. 31.1



Resolución

Se elige el volumen de control que muestra la figura siguiente, en el cual la superficie que delimita el nivel del depósito se considera móvil, es decir, en todo momento el volumen de control abarca todo el volumen de líquido en el interior del depósito.

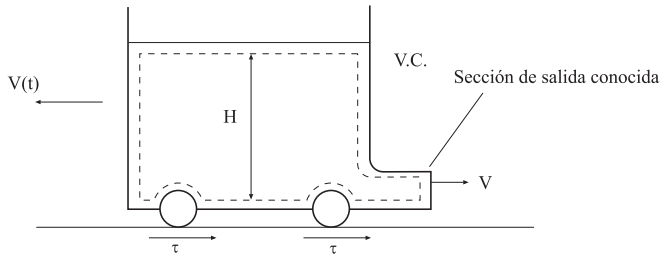


Fig. 31.2

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \oint_{SC} \rho \, \vec{v} \, d\vec{S}$$

Puesto que únicamente existe flujo saliente y la densidad del líquido se puede considerar constante:

$$0 = \rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} S \, dh + \int_{SS} \rho \, v \, dS$$

$$0 = \rho S_d \frac{dh}{dt} + \rho v_s S_s$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{v_s S_s}{S_d}$$

En este punto, hay que recalcar que la velocidad de salida del líquido V_s depende de la altura de fluido en el depósito. Aplicando la ecuación de la energía entre el nivel del líquido y la sección de salida del fluido, y puesto que no existe transferencia de calor o trabajo al volumen de control, si además se supone que las pérdidas por rozamiento son despreciables y que el término de energía cinética en la superficie del depósito es mucho menor que el existente en la sección de salida del mismo se obtiene que la velocidad del fluido a la salida se puede dar:

$$V_s = \sqrt{2gh}$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad, se tiene:

$$\int_{h=H}^{h=h} \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int_{t=0}^{t} -\frac{S_s}{S_d} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\left[\frac{h^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_H^h = \frac{1}{\sqrt{2g}} * 2\left[h^{\frac{1}{2}} - H^{\frac{1}{2}}\right] = -\frac{S_s}{S_d} t$$

con lo que:

$$h^{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t$$

Ecuación que caracteriza la altura del nivel del líquido en función del tiempo.

La ecuación de cantidad de movimiento aplicada al volumen de control de la figura, y para un sistema inercial de coordenadas, se expresa:

$$-\int_{se} P\,d\vec{s} - \int_{ss} P\,d\vec{s} \underbrace{-\int_{sl} P\,d\vec{s} + \int_{sl} \bar{\bar{\tau}}\,d\vec{s}}_{F_i} + \int_{vc} \rho\,\vec{g}\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\,\vec{v}_i\,d\forall + \oint_{sc} \rho\,\vec{v}_i\,\vec{v}\,d\vec{s}$$

Trabajando en presiones relativas, la fuerza en dirección X se puede dar como:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\,\vec{v}_x\,d\forall + \int_{ss} \rho\,\vec{v}_x\,\vec{v}\,d\vec{S}$$

A priori, si el volumen de líquido en el depósito se considera muy grande con respecto al caudal másico saliente, cabe considerar que la variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control es despreciable.

El flujo de cantidad de movimiento será:

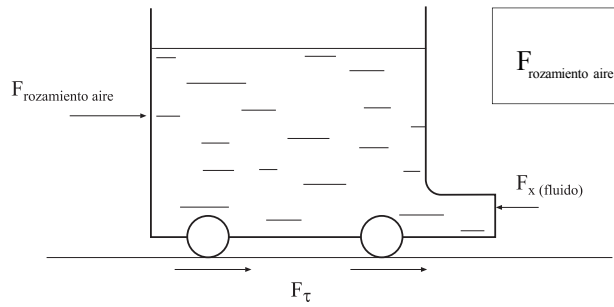
$$\int_{ss} \rho\,\vec{v}_x\,\vec{v}\,d\vec{s} = \int \rho\sqrt{2gh}\sqrt{2gh}\;ds = \rho(2gh)S_s = \rho\,2\,g\,S_s\left(H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}t\right)^2$$

De donde la fuerza neta de cantidad de movimiento en dirección x será:

$$F_x = \rho\,2\,g\,S_s\left(H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}t\right)^2$$

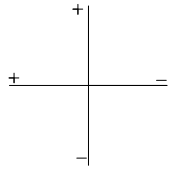
La segunda ecuación de Newton, aplicada al depósito en movimiento, establece:

Fig. 31.3



$$F_{\text{rozamiento aire}} - F_{\text{fluido}} + F_{\text{fricción}} = -m\frac{\partial v}{\partial x}$$

Eligiendo el sistema de coordenadas que se muestra a continuación, la segunda ecuación de Newton queda:



$$F_{\text{fluido}} - F_{\text{rozamiento aire}} - F_{\text{fricción}} = m\frac{\partial v}{\partial x}$$

Sustituyendo las diferentes ecuaciones en la segunda ecuación de Newton, se obtiene:

$$2\rho g S_s\left(H^{\frac{1}{2}}-\frac{S_s}{S_d}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}t\right)^2-K\cdot M_{(carro+liquido)}g-C_D\rho_{aire}S\frac{v_{móvil}^2}{2}=M_{(carro+líquido)}\frac{dv_{móvil}}{dt}$$

donde,

$$M_{carro+liquido}=M_{inicial(c+l)}-\dot{m}_{salida}\,t=M_{inicial(c+l)}-(S_s\,\rho\sqrt{2gh})t=$$
$$=M_{inicial(c+l)}-\rho\sqrt{2g}\,S_s\left[H^{\frac{1}{2}}-\frac{S_s}{S_d}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}t\right]t$$

y se obtiene:

$$2\,\rho\,g\,S_s\left(H^{\frac{1}{2}}-\frac{S_s}{S_d}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}t\right)^2-K\,g\left(M_{inicial(c+l)}-\rho S_s\,t\sqrt{2g}\left[H^{\frac{1}{2}}-\frac{S_s}{S_d}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}t\right]\right)$$
$$-C_D\rho_{aire}S_{proyectada}\frac{v_{móvil}^2}{2}=\left\{M_{inicial(c+l)}-\rho\,S_s t\sqrt{2g}\left[H^{\frac{1}{2}}-\frac{S_s}{S_d}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}t\right]\right\}\frac{dv_{movil}}{dt}$$

$$\frac{dv_{móvil}}{dt}=\left[\frac{2\,\rho\,g\,S_s\left(H^{\frac{1}{2}}-\frac{S_s}{S_d}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}t\right)^2-K\,g\left(M_{inicial(c+l)}-\rho\,S_s\,t\sqrt{2g}\left[H^{\frac{1}{2}}-\frac{S_s}{S_d}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}t\right]\right)-C_D\rho_{aire}S_{proyectada}\frac{v_{móvil}^2}{2}}{\left\{M_{inicial(c+l)}-\rho\,S_s t\sqrt{2g}\left[H^{\frac{1}{2}}-\frac{S_s}{S_d}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}t\right]\right\}}\right]$$

Ésta es la ecuación diferencial que caracteriza la velocidad del móvil en función del tiempo. Cabe recordar que, en general, la fuerza debida al rozamiento entre el aire y el móvil, caracterizada por el coeficiente de arrastre, es pequeña comparada con el resto de fuerzas.

Esta ecuación se ha resuelto por el método Runge-Kutta de cuarto orden, partiendo de las siguientes condiciones iniciales: $\rho = 1000\ Kg/m^3$, $\rho_{aire} = 1.2\,Kg/m^3$, H = 1 m, S_s = 0.002 m^2, $S_d = 0.5\ m^2$, $S_{proyectada} = 0.7\,m^2$,

$$K = 0.0001,\ C_D = 0.005,\ M_{inicial(c+l)} = S_d\,H\,\rho + 100\ Kg\ .$$

De donde se ha obtenido la velocidad del móvil (carrito) en función del tiempo, grafica que se muestra a continuación.

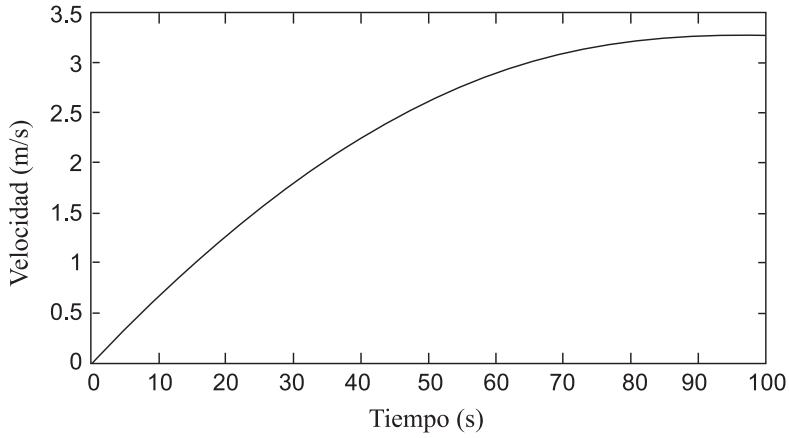


Fig. 31.4 Variación de velocidad del móvil en función del tiempo

Problema 32

Enunciado

El esquema de la figura 32.1 muestra un chorro de fluido que impacta sobre un álabe con forma de arco de círculo. El fluido que sale por la zona inferior del álabe cae sobre un vehículo cuya masa en el estado inicial es conocida m_{ini}, y la velocidad del vehículo U es función del tiempo y desconocida. La fuerza de rozamiento entre las ruedas del vehículo y el suelo se define como $Fr = \mu * F_{vertical}$, donde la constante μ es conocida, y $F_{vertical}$ es el conjunto de fuerzas que actúan en dirección vertical sobre las ruedas.

Considérense conocidos la sección del chorro S, la velocidad de salida del mismo V y el radio medio de curvatura del álabe R. El fluido de trabajo es agua.

Se pide:

1. Determinar las fuerzas en dirección X e Y que actúan sobre el álabe. Considérese $\theta = -60º$.

2. Si, en el estado inicial, la velocidad del móvil se considera conocida U_{ini}, hallar la ecuación que caracteriza la velocidad de dicho móvil en función del tiempo. En este apartado, las fuerzas de rozamiento antagonistas al movimiento son despreciables. Considérese asimismo, y únicamente para este apartado, que el caudal másico de fluido que cae dentro del depósito es constante.

3. Repetir el apartado segundo pero considerando tanto las fuerzas de rozamiento como el caudal real de fluido que cae dentro del depósito.

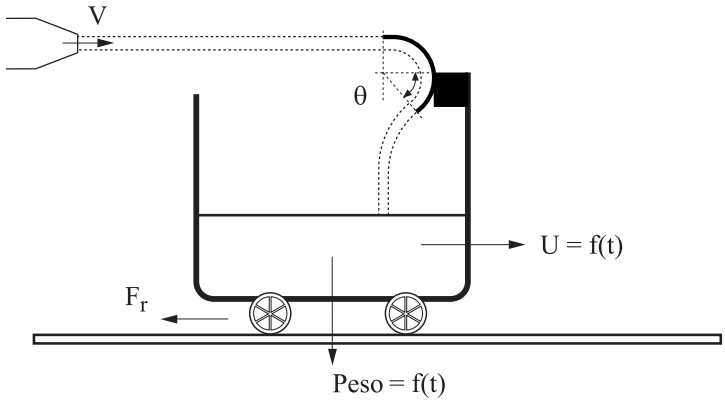


Fig. 32.1
Esquema de la instalación objeto de estudio
.

Resolución.

1. Para determinar las fuerzas en dirección X e Y que actúan sobre el álabe, se aplica la ecuación de cantidad de movimiento de forma integral al volumen de control definido en la figura 32.2. Dicha ecuación se expresa:

$$-\oint_{SC} P\,\vec{ds} + \oint_{SC} \bar{\bar{\tau}}\,\vec{ds} + \int_{\forall C} \rho\,\vec{g}\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\,\vec{V_i}\,d\forall + \oint_{SC} \rho\,\vec{V_i}\,\vec{V}\,\vec{ds}$$

Dado que esta ecuación tiene carácter vectorial, se aplicará en las direcciones X e Y, respectivamente. En la dirección X, se establece:

El peso del volumen de control no tiene componente en la dirección X. La presión en las secciones de entrada y salida del volumen de control es la atmosférica; si se realiza el problema a presiones relativas, estas dos presiones serán nulas. Asimismo, los esfuerzos cortantes en las secciones de entrada y salida del volumen de control se considerarán nulos, dado que se estima que las distribuciones de velocidades en dichas secciones son uniformes.

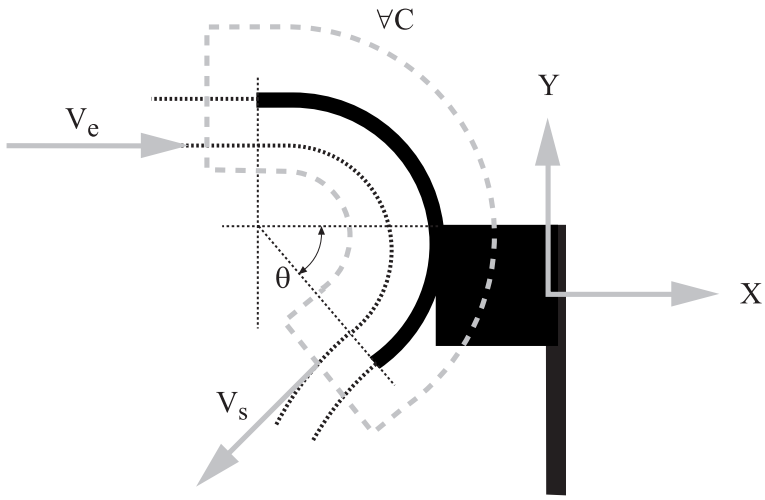


Fig. 32.2
Volumen de control y ejes de referencia utilizados

Bajo estos considerandos, la ecuación de cantidad de movimiento tomará la forma:

$$\sum \overrightarrow{F_X} = -\int_{S\,lateral} P\,\overrightarrow{ds} + \int_{S\,lateral} \overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\,\overrightarrow{V_X}\,d\forall + \oint_{SC} \rho\,\overrightarrow{V_X}\,\vec{V}\,\overrightarrow{ds}$$

Considerando el fluido incompresible y extendiendo la integral que evalúa el flujo de cantidad de movimiento a la entrada y a la salida del volumen de control, se obtiene:

$$\sum \overrightarrow{F_X} = \rho\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \overrightarrow{V_X}\,d\forall + \rho\int_{SE} \overrightarrow{V_{ex}}\,\overrightarrow{V_e}\,\overrightarrow{ds} + \rho\int_{SS} \overrightarrow{V_{sx}}\,\overrightarrow{V_s}\,\overrightarrow{ds}$$

Véase que, para el volumen de control y los ejes de referencia elegidos, las velocidades del fluido en las secciones de entrada y salida tomarán la forma:

$$\overrightarrow{V_{ex}} = V - U\ ;\ \overrightarrow{V_e} = V - U\ ;\ \overrightarrow{V_{sx}} = (V-U)\sin\theta\ ;\ \overrightarrow{V_s} = V - U$$

Las velocidades V y U son, respectivamente, la velocidad del fluido a la salida de la tobera y la velocidad de desplazamiento del carro. Véase, por otro lado, que el término $\overrightarrow{V_{sx}} = (V-U)\sin\theta$, lleva asociado un signo negativo; este signo se obtiene al considerar que el ángulo θ es de -60º, tal como indica el enunciado.

Sustituyendo en la ecuación de cantidad de movimiento y realizando la integración, se tiene:

$$\sum \overrightarrow{F_X} = \rho\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \overrightarrow{V_X}\,d\forall - \rho(V-U)^2\,S_e + \rho(V-U)^2\,\sin\theta\,S_s$$
$$= \rho\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \overrightarrow{V_X}\,d\forall - \rho(V-U)^2\,S(1-\sin\theta)$$

Analizando ahora el término de la variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control, se observa que la velocidad $\overrightarrow{V_x}$ representa la componente en dirección X de la velocidad del fluido asociada a un elemento diferencial de volumen genérico (v. figura 32.3).

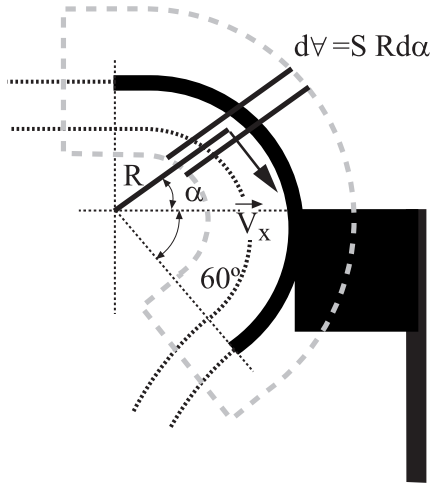


Fig. 32.3 Diferencial de volumen genérico

Definiendo el diferencial de volumen en función de un ángulo genérico α, se establece:

$$\sum \overrightarrow{F_X} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \overrightarrow{V_X}\, d\forall - \rho (V-U)^2\, S(1-\sin\theta)$$
$$= \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\theta=-60}^{90} (V-U)\sin\alpha\, S R\, d\alpha - \rho (V-U)^2\, S(1-\sin\theta)$$

$$\sum \overrightarrow{F_X} = \rho S R \frac{\partial}{\partial t}\left((V-U)(-\cos\alpha)_{\theta}^{90}\right) - \rho (V-U)^2\, S(1-\sin\theta)$$
$$= -\rho S R(\cos\theta)\frac{dU}{dt} - \rho S (V-U)^2\,(1-\sin\theta)$$

Obsérvese que la fuerza en la dirección X viene dada en forma de ecuación diferencial, puesto que depende de la aceleración/deceleración que experimente el carro.

Realizando el mismo proceso en dirección Y, se obtiene:

El peso del fluido que hay en el volumen de control se puede dar como:

$$\int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall = -S L \rho g = -S \rho g \frac{90-\theta}{360} 2\pi R$$

Recuérdese que el valor del ángulo θ es negativo en este problema.

El resto de hipótesis son las mismas que en el apartado anterior, con lo cual se obtiene:

$$\sum \overrightarrow{F_Y} = -\int_{S\,lateral} P\,\vec{ds} + \int_{S\,lateral} \bar{\bar{\tau}}\,\vec{ds} = -\int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \overrightarrow{V_Y}\, d\forall + \oint_{SC} \rho \overrightarrow{V_Y}\,\vec{V}\,\vec{ds}$$
$$= -\int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall + \rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \overrightarrow{V_Y}\, d\forall + \rho \int_{SE} \overrightarrow{V_{ey}}\,\overrightarrow{V_e}\,\vec{ds} + \rho \int_{SS} \overrightarrow{V_{sy}}\,\overrightarrow{V_s}\,\vec{ds}$$

Las velocidades asociadas a las superficies entrante y saliente adoptan ahora la forma:

$$\overrightarrow{V_{ey}} = 0\ ;\ \overrightarrow{V_e} = V-U\ ;\ \overrightarrow{V_{sy}} = -(V-U)\cos\theta\ ;\ \overrightarrow{V_s} = V-U$$

Véase que ahora el término $\overrightarrow{V_{sy}} = -(V-U)\cos\theta$ lleva asociado el signo negativo, con el fin de indicar la dirección real de la componente de la velocidad a la salida del volumen de control.

La velocidad, $\overrightarrow{V_Y}$ asociada al diferencial de volumen de control se define ahora como: $\overrightarrow{V_Y} = -(V-U)\cos\alpha$

Sustituyendo todos los datos en la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección Y, se obtiene:

$$\sum \overrightarrow{F_Y} = -\int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall + \rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \overrightarrow{V_Y}\, d\forall + \rho \int_{SE} \overrightarrow{V_{ey}}\, \overrightarrow{V_e}\, \vec{ds} + \rho \int_{SS} \overrightarrow{V_{sy}}\, \overrightarrow{V_s}\, \vec{ds}$$
$$= S\rho g \frac{90-\theta}{360} 2\pi R + \rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{\theta=-60}^{90} -SR(V-U)\cos\alpha \; d\alpha - \rho S(V-U)^2 \cos\theta$$
$$= S\rho g \frac{90-\theta}{360} 2\pi R + \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(SR(V-U)(\sin\alpha)_{\theta=-60}^{90}\right) - \rho S(V-U)^2 \cos\theta$$
$$= S\rho g \frac{90-\theta}{360} 2\pi R + \rho SR(1-\sin\theta)\left(-\frac{\partial U}{\partial t}\right) - \rho S(V-U)^2 \cos\theta$$

Véase que, como ya sucedía en la dirección X, la fuerza en la dirección Y viene dada en forma de ecuación diferencial, puesto que depende de la aceleración/deceleración que experimente el carro. Asimismo, es importante destacar que las fuerzas halladas son fuerzas de reacción, eso es, las que realizaría el contorno sobre el fluido.

2. Para determinar la ecuación que caracteriza la velocidad del móvil en función del tiempo, basta con aplicar la segunda ecuación de Newton a dicho móvil y en la dirección del movimiento del mismo. Recuérdese que, en este segundo apartado y según el enunciado del problema, se pueden despreciar las fuerzas de rozamiento; en consecuencia, la segunda ecuación de Newton en la dirección X tomará la forma:

$$\sum \overrightarrow{F_X} = \rho SR(\cos\theta)\frac{dU}{dt} + \rho S(V-U)^2 (1-\sin\theta) = m\frac{dU}{dt}$$

Obsérvese que la masa del móvil se incrementa con el tiempo, con lo cual se establece:

$$\rho SR(\cos\theta)\frac{dU}{dt} + \rho S(V-U)^2 (1-\sin\theta) = (m_{inicial} + \dot{m} * t)\frac{dU}{dt}$$

Reordenando, se obtiene:

$$\int_{U_{inicial}}^{U} \frac{dU}{(V-U)^2} = \int_0^t \frac{\rho S(1-\sin\theta)\, dt}{-\rho S R \cos\theta + (m_{inicial} + \dot{m} t)}$$

Resolviendo las integrales y recordando que el caudal másico que fluye hacia el depósito se considera constante para este apartado, se concluye:

$$\left(\frac{1}{V-U}\right) - \left(\frac{1}{V-U_{inicial}}\right) = \frac{\rho S(1-\sin\theta)}{\dot{m}} \ln\left(\frac{-\rho S R \cos\theta + (m_{inicial} + \dot{m} t)}{-\rho S R \cos\theta + m_{inicial}}\right)$$

de donde:

$$U = V - \frac{1}{\left(\frac{1}{V-U_{inicial}}\right) + \frac{\rho S(1-\sin\theta)}{\dot{m}} \ln\left(\frac{-\rho S R \cos\theta + (m_{inicial} + \dot{m} t)}{-\rho S R \cos\theta + m_{inicial}}\right)}$$

Esta ecuación caracteriza la velocidad del móvil cuando el caudal másico que entra en el mismo se considera constante y cuando no se considera la fuerza de rozamiento entre el móvil y el suelo. Dado que estas hipótesis son restrictivas e inciertas, en el apartado siguiente se va a realizar el mismo cálculo, pero sin considerarlas.

3. El balance de fuerzas cuando se consideran todas las fuerzas actuantes sobre el volumen de control toma la forma:

$$\sum F_X - F_{rozamiento} = \rho S R(\cos\theta)\frac{dU}{dt} + \rho S(V-U)^2(1-\sin\theta) - F_{rozamiento} = (m_{inicial} + \dot{m}\, t)\frac{dU}{dt}$$

El caudal másico de fluido que entra en el depósito se establece: $\dot{m} = \rho S(V-U)$

La fuerza de rozamiento se define como:

$$F_{rozamiento} = \mu F_{vertical} = \mu\left(\overrightarrow{F_Y} + (m_{inicial} + \dot{m}\, t)g\right) = \mu\left(\overrightarrow{F_Y} + (m_{inicial} + \rho S(V-U)\, t)g\right)$$

Recuérdese que la fuerza $\overrightarrow{F_Y}$ es la fuerza en dirección vertical que ejerce el fluido sobre el álabe, fuerza que ha sido determinada en el primer apartado de este problema. En consecuencia, la fuerza de rozamiento tomará la forma:

$$F_{rozamiento} = \mu\begin{pmatrix} -S\rho g\frac{90-\theta}{360}2\pi R + \rho S R(1-\sin\theta)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \rho S(V-U)^2\cos\theta \\ +(m_{inicial} + \rho S(V-U)\, t)g \end{pmatrix}$$

de donde la ecuación diferencial del movimiento quedará definida como:

$$\rho S R(\cos\theta)\frac{dU}{dt} + \rho S(V-U)^2(1-\sin\theta) - \mu\begin{pmatrix} -S\rho g\frac{90-\theta}{360}2\pi R + \rho S R(1-\sin\theta)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \rho S(V-U)^2\cos\theta \\ +(m_{inicial} + \rho S(V-U)\, t)g \end{pmatrix} = (m_{inicial} + \rho S(V-U)\, t)\frac{dU}{dt}$$

Reagrupando términos, se tiene:

$$\frac{dU}{dt}\left[\rho S R(\cos\theta) - \mu\rho S R(1-\sin\theta) - (m_{inicial} + \rho S(V-U)\, t)\right] + \rho S(V-U)^2(1-\sin\theta)$$
$$-\mu\rho S(V-U)^2\cos\theta - \mu(m_{inicial} + \rho S(V-U)\, t)g + \mu S\rho g\frac{90-\theta}{360}2\pi R = 0$$

Esta es la ecuación diferencial que caracteriza la velocidad del móvil en función del tiempo, ecuación que debe ser resuelta numéricamente. Para ello, se realiza el ejemplo práctico siguiente:

Datos del ejemplo de aplicación:

$S = 0{,}0008\ m^2$; $m_{inicial} = 5kg$; $\rho = 1.000\ kg/m^3$; $\mu = 0{,}2$; $R = 0{,}35m$; $U_{inicial} = 0\ m/s$; $\theta = -60º$; $g = 9{,}81\ m/s^2$; $\pi = 3{,}141592$; $V = 20\ m/s$.

Resolviendo la ecuación diferencial con los datos especificados, se obtiene el gráfico de la figura 32.4. Con el fin de comparar el resultado obtenido mediante la ecuación diferencial, en la figura 32.5 se representa la velocidad temporal del móvil utilizando la ecuación hallada en el apartado segundo de este problema y considerando que $\dot{m} = cte = \rho\ s\ V$. Es interesante observar que la velocidad del móvil obtenida mediante la ecuación algebraica sigue aumentando con el tiempo, dado que no considera la fuerza antagonista de fricción; por otro lado, la gráfica obtenida mediante la ecuación diferencial indica que la velocidad del móvil disminuirá al cabo de pocos segundos, dado que la fuerza de rozamiento aumenta a medida que aumenta el peso del vehículo. Estos detalles se observan más claramente en las figuras 32.6 y 32.7, donde se clarifica que, en realidad, la velocidad del móvil sería nula al cabo de 18 segundos; por otro lado, según la ecuación algebraica, la velocidad del móvil seguiría aumentando, lo cual es erróneo.

Fig. 32.4 Ecuación diferencial

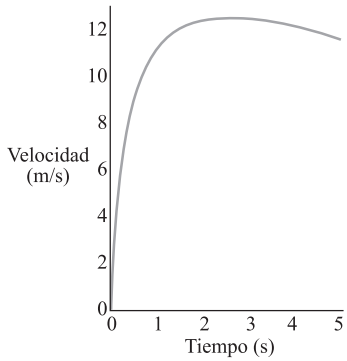


Fig. 32.5. Ecuación algebraica.

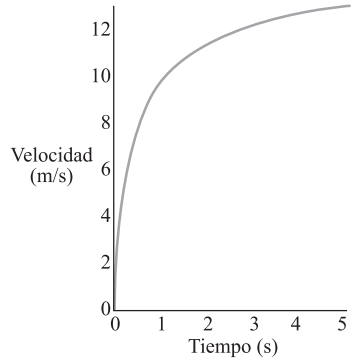


Fig. 32.6 Ecuación diferencial

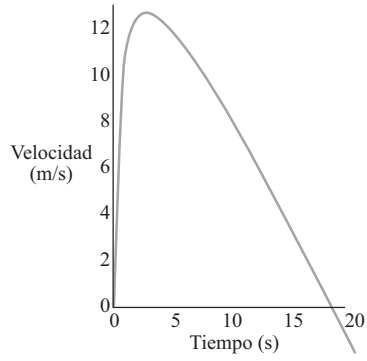
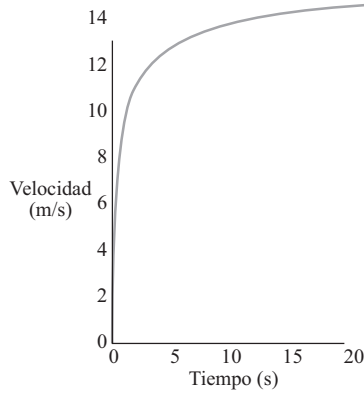


Fig. 32.7 Ecuación algebraica.



Problema 33

Enunciado

Se desea evaluar la viabilidad de creación de helicópteros personales, con fines lúdicos. Para ello, se pretende estudiar la potencia necesaria para mantener inmóvil en el aire dicho equipo en función del diámetro "D" del rotor. Se estima que el peso máximo de equipo y pasajero podría ser de unos "P" Kg. En la figura 33.1, se esquematiza el rotor con el volumen de control alrededor del mismo y se supone que en la parte inferior del rotor todo el chorro del fluido se desplaza en sentido vertical.

Determine:

1. La potencia necesaria en función del diámetro del rotor y del peso de equipo y pasajero.

2. Para una velocidad de giro de 400 rpm, un diámetro de rotor de 2 m y un peso del conjunto de 200 kgf, determine la potencia y el par necesarios del motor.

Resolución

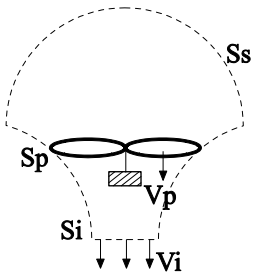


Fig. 33.1
Esquema de las hélices del rotor y el volumen de control considerado

1. Estableciendo el volumen de control definido en la figura 33.1, para el cual se supondrá que la parte superior del mismo está suficientemente alejada del rotor como para considerar que la velocidad de las partículas es nula, mientras que en su sección inferior el fluido fluye a una velocidad genérica, V_i. De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento se tiene:

$$F_y = \int_{sc} \rho \vec{V}_y \vec{V} \, d\vec{s} = \rho S_i . V_i . V_i = \rho \; S_i \; V_i^2$$

dónde S_i es la sección del chorro cilíndrico.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las superficies superior e inferior del volumen de control elegido, se tiene:

$$\frac{P_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + g\, z_s + Y = \frac{P_i}{\rho} + \frac{V_i^2}{2} + g\, z_i$$

Asumiendo que la presión en cualquier punto de la entrada o salida se mantiene constante, $P_i = P_S$, y suponiendo despreciables los términos de energía potencial, se establece:

$$Y = \frac{V_i^2}{2} = \frac{\Delta P}{\rho}$$

La ΔP se entiende entre caras del rotor.

La fuerza de sustentación producida por el rotor debería ser asimismo igual a la diferencia de presión entre ambos extremos de las palas, multiplicada por la superficie barrida, obteniendo:

$$F_y = \Delta P\, S_P = \rho \frac{V_i^2}{2} S_P$$

Igualando a la ecuación de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$F_y = \Delta P\, S_P = \rho \frac{V_i^2}{2} S_P = \rho\, S_i\, V_i^2$$

de donde: $S_P = 2\, S_i$

Suponiendo un rendimiento unitario, la potencia transmitida al fluido será la que ha de comunicar el motor.

La potencia comunicada al fluido será el producto del gradiente de presiones por el caudal circulante, o bien la energía cinética comunicada al fluido al pasar por el rotor, por el mismo caudal circulante, de donde:

$$N_a = \Delta P\, S_P V_P = \rho \frac{V_i^2}{2} S_i V_i = \rho \frac{V_i^2}{4} S_P V_i$$

Despejando la velocidad de la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene:

$$V_i = \sqrt{\frac{F_y}{\rho S_i}} = \sqrt{\frac{2F_y}{\rho S_P}}$$

$$N_a = \rho \frac{V_i^2}{4} S_P V_i = \rho\, S_P \frac{1}{4}\left[\frac{2F_y}{\rho S_P}\right]^{\frac{3}{2}} = F_y^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2\rho S_P)^{0,5}}$$

o bien:

$$N_a^2 = F_y^3 \frac{1}{2\rho S_P} = F_y^3 \frac{2}{\rho \pi D^2}$$

Expresión que relaciona la potencia de accionamiento con la fuerza de sustentación y el diámetro del rotor.

2. Para un peso de 200 Kgf, un diámetro de rotor de 2 m, y suponiendo la temperatura y la presión del aire atmosférico de 20 C y 10^5 Pa, se obtiene una potencia de:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{100.000}{287 \cdot 293} = 1{,}189 \frac{Kg}{m^3}$$

$$N_a^2 = F_y^3 \frac{2}{\rho \pi D^2} = (200 \cdot 9{,}8)^3 \frac{2}{1{,}189\, \pi\, 2^2}$$

$$N_a = 31.747{,}04\ W$$

Dado que el rotor se quiere que gire a 400 rpm, el par necesario deberá ser de:

$$N_a = M\ \omega = M\ 400\ \frac{2\pi}{60} = 31.747,04\ W$$

$$M = 303,16\ Nm$$

Problema 34

Enunciado

Sea el turborreactor de un avión de pasajeros, el cual se desplaza a una velocidad V, (el aire atmosférico se considera sin movimiento), el flujo másico entrante al reactor es $\dot{m}_E$, siendo el caudal másico del combustible que entra lateralmente $\dot{m}_{FUEL}$. Se conoce, además, que los gases de combustión salen de la tobera a una velocidad relativa al motor Vr.

Calcule la fuerza realizada por el soporte del motor.

(Se puede considerar despreciable la cantidad de movimiento asociada al caudal másico de combustible, $\dot{m}_{FUEL}$.)

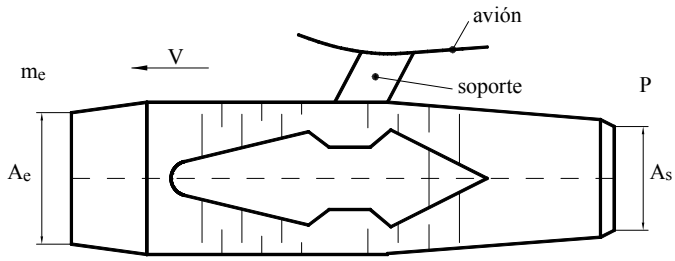


Fig. 34.1
Esquema del motor de avión

Resolución

La ecuación de cantidad de movimiento en régimen permanente, aplicada a la superficie que envuelve el volumen de control formado por el motor, y en dirección x, será:

$$\int_{se} \rho \vec{V}_x\ \vec{v}\, d\vec{s} + \int_{ss} \rho \vec{V}_x\ \vec{v}\, d\vec{s} = \sum \vec{F}_{ext_x}$$

Teniendo en cuenta que el término de fuerzas másicas no tiene componente en dirección X, y puesto que las fuerzas exteriores están formadas por las fuerzas de presión y los esfuerzos cortantes, que se pueden considerar concentradas en el soporte del motor, considerando que actúan en dirección positiva del eje de abcisas, se establece:

$$F_{soporte_x} = -\int_{se} \rho\, v_x\ v\, ds + \int_{ss} \rho\, v_{r_x}\ v_r\, ds$$

La velocidad en la entrada será $\frac{\dot{m}_E}{\rho_e A_e} = V$ (velocidad de vuelo del avión).

Para el caso en estudio, se establece: $V_x = V$; $V_{r_x} = V_r$. Sólo existe componente de velocidad en dirección x, Obteniéndose:

$$F_{soporte_x} = -\dot{m}_E V + (\dot{m}_E + \dot{m}_F)V_r$$

puesto que el caudal másico saliente es $\dot{m}_E + \dot{m}_{FUEL}$.

La fuerza que el soporte ejercerá sobre el motor se establece:

$$F_{soporte_x} = \dot{m}_E (V_r - V) + \dot{m}_F V_r$$

La fuerza, o empuje del motor, vendrá dada por:

$$F_{motor_x} = \dot{m}_E (V - V_r) - \dot{m}_F V_r$$

Problema 35

Enunciado

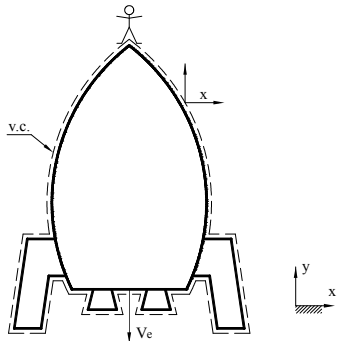
Sea un cohete que se desplaza verticalmente acelerándose desde el reposo. El consumo de combustible del mismo es de $\dot{m}$, siendo la velocidad de escape del fluido constante e igual a v_e (velocidad relativa a la superficie de salida del cohete). Si se puede considerar constante la densidad del fluido y despreciar la cantidad de movimiento del cohete, determine:

1. La ecuación que determina la aceleración en función del tiempo del cohete.

2. La ecuación que determina la velocidad en función del tiempo.

3. Si la fuerza antagonista que se opone al movimiento del cohete se puede dar (para flujo subsónico) como: $D = \frac{1}{2} C_D \rho S_p V_{cohete}^2$, asumiendo que C_D es una constante conocida y que la densidad del aire se puede considerar constante, halle la ecuación diferencial que determina el movimiento del cohete, e intégrela para hallar la velocidad del cohete en función del tiempo.

Fig. 35.1



Resolución

1. La ecuación de cantidad de movimiento para coordenadas no inerciales, cuando se desprecian los esfuerzos por rozamiento, se puede expresar como:

$$F_{\text{másicas}} - \int_{vc} a \cdot \rho \cdot d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \vec{v}_y \cdot \rho \cdot d\forall + \oint_{sc} \vec{v}_y \cdot \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

$$F_{\text{másicas}} = -M_{vc} \cdot g \qquad ; \qquad M_{vc} = \text{es función del tiempo.}$$

Aplicando la ecuación de continuidad al volumen de control del cohete, se obtiene la expresión siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \cdot d\forall + \int_{sc} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \cdot d\forall = -\int_{s_{salida}} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\dot{m}_{salida}$$

$$\frac{dM_{vc}}{dt} = -\dot{m}_{salida} \qquad ; \qquad \int_{M\ inicial}^{masa\ cohete} dM_{vc} = \int_0^t -\dot{m}_{salida} \cdot dt$$

$$M_{cohete} - M_{inicial} = -\dot{m}_{salida} \cdot t \qquad ; \qquad M_{cohete} = M_{inicial} - \dot{m}_{salida} \cdot t$$

de donde:

$$F_{\text{másicas}} = -g \cdot \left(M_{inicial} - \dot{m}_{salida} \cdot t\right)$$

$$-\int a \cdot \rho \cdot d\forall = -\int a \cdot dM_{vc} = -a \cdot M_{vc} = -a \cdot \left(M_{inicial} - \dot{m}_{salida} \cdot t\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \vec{v}_y \cdot \rho \cdot d\forall = 0\text{, según el enunciado.}$$

$$\int_{ss} \vec{v}_y \cdot \underbrace{\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}}_{\dot{m}_{salida}} = -v_y \cdot \dot{m}_{salida}$$

Sustituyendo en la ecuación general, se llega a:

$$-g \cdot \left(M_{inicial} - \dot{m}_{salida} \cdot t\right) - a \cdot \left(M_{inicial} - \dot{m}_{salida} \cdot t\right) = -v_e \cdot \dot{m}_{salida}$$

$$a = \frac{v_e \cdot \dot{m}_{salida}}{M_{inicial} - \dot{m}_{salida} \cdot t} - g$$

2. $$a = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad v = \int_0^t a \cdot dt = \left[-\frac{v_e \cdot \dot{m}_{salida}}{\dot{m}_{salida}} \cdot \ln\left(M_{inicial} - \dot{m}_{salida} \cdot t\right) - g \cdot t \right]_0^t ;$$

$$V = -V_e \ln\left(\frac{M_{inicial} - \dot{m}_{saliente}\ t}{M_{inicial}}\right) - g\ t.$$

o bien:

$$V = V_e \ln\left(\frac{M_{inicial}}{M_{inicial} - \dot{m}_{saliente}\ t}\right) - g\ t.$$

Obsérvese que la velocidad del cohete tiende a aumentar con el tiempo.

3. Si las fuerzas de superficie antagonistas al movimiento del cohete para flujo subsónico se pueden dar como:

$D = \frac{1}{2} C_D \rho S_{proyectada} V_{cohete}^2$, y recordando que la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas no inerciales se enunciaba:

$$-\int_{sc} P\, d\vec{s} + \int_{sc} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s} + \int_{vc} \rho\, \vec{g}\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, \vec{V}_i\, d\forall + \oint_{sc} \rho\, \vec{V}_i\, \vec{V}\, d\vec{s} +$$

$$+\int_{vc} \rho \left(\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} \right) d\forall$$

Las fuerzas de presión y de esfuerzos cortantes que actúan sobre la superficie del cohete son las fuerzas antagonistas de superficie, y se evalúan por "D". Por otro lado, y puesto que no hay giro alguno del sistema de referencia no inercial con respecto al inercial, la ecuación de cantidad de movimiento queda:

$$-D - M_{cohete}\, g = -\dot{m}\, V_{fluido\ saliente} + M_{cohete}\, a_{cohete}$$

Obsérvese que el término $\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, \vec{V}_i\, d\forall$ representa la variación temporal de la cantidad de movimiento en el volumen de control formado por el cohete, que sería la masa de cada elemento diferencial del cohete, por la variación temporal de la velocidad que este elemento diferencial posee respecto a un sistema de coordenadas inercial que se mueve con el cohete. Para dicho sistema de referencia, la variación temporal de cantidad de movimiento es nula.

La ecuación resultante se expresa como:

$$-C_D \frac{1}{2} \rho\, V_{cohete}^2\, S_{proyectada} - \left(M_{inicial\ cohete} - \dot{m}t \right) g = -\dot{m}\, V_{fluido\ saliente} + \left(M_{inicial\ cohete} - \dot{m}t \right) \frac{dV_{cohete}}{dt}$$

Ésta es la ecuación diferencial que caracteriza la velocidad temporal del cohete en régimen subsónico.

La resolución de esta ecuación diferencial mediante el método de Runge-Kutta 4 con las condiciones iniciales que se detallan a continuación, ha dado lugar a la grafica que se muestra seguidamente.

Condiciones iniciales: $S_{proyectada} = 0.5\,m^2$; $C_D = 0.05$; $\rho = 1.2\ Kg/m^3$; $M_{inicial\ cohete} = 2000\ Kg$; $\dot{m} = 50\ Kg/s$; $V_{fluido\ saliente} = 900\ m/s$.

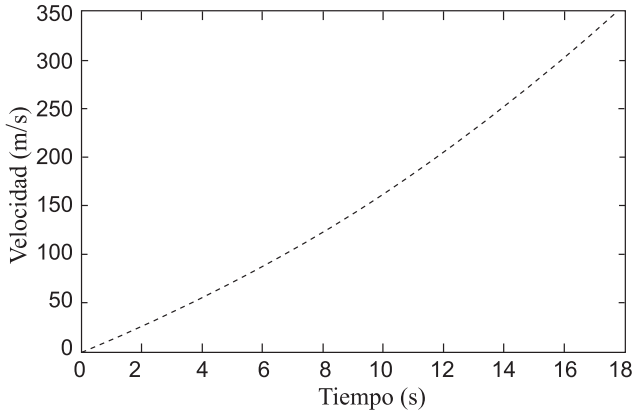


Fig. 35.2 Velocidad del cohete en función del tiempo

Obsérvese que el cohete tardara unos 18 segundos en alcanzar la velocidad sónica, M=1, $c = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1.4 \ 287 \ 293} = 343.1 \, m/s$. A partir de este punto, las fuerzas antagonistas sobre el cohete cambian drásticamente, puesto que deben tenerse en cuenta las fuerzas debidas a la aparición de la onda de choque en el extremo superior del cohete. Con lo que a partir de este punto la ecuación diferencial del movimiento del cohete debe ser modificada.

Problema 36

Enunciado

Sea un avión en vuelo ascendente con una inclinación respecto a la horizontal, $\alpha = 22º$.

Sea V la velocidad de escape de los gases de combustión, velocidad relativa a la velocidad del avión, considérese V = constante.

Sea D la fuerza de arrastre debida a las fuerzas superficiales, que se opone al movimiento del avión,. $D = C_D \cdot \rho \cdot s \cdot \frac{V_{avión}^{\ 2}}{2}$

ρ = densidad del aire. Considere como primera aproximación la densidad media entre las alturas de vuelo.

S = superficie del avión proyectada en un plano perpendicular a la dirección del movimiento. (Es un dato del problema.)

C_D = coeficiente de arrastre. (Se supone constante y conocido).

En un instante considerado, el avión vuela a una velocidad $V_{inicial}$ y se halla a una altura $H_{inicial}$. Dicho avión está acelerando con el fin de obtener una velocidad V_{final} y una altura H_{final} en un tiempo t, en todo momento se mantiene la inclinación.

Determine:

1. El flujo másico que sale por los motores del avión en función del tiempo durante el periodo de aceleración considerado. Considere que la masa del avión se mantiene constante.

2. El flujo másico que sale por los motores del avión en función del tiempo durante el período de aceleración considerado. Considérese variable la masa del avión y téngase en cuenta que el caudal másico de combustible es el 5% del caudal entrante a los motores.

3. La altura final a la que se encontrará el avión después del período de aceleración t considerado. Determine la densidad media del aire atmosférico entre las alturas de vuelo consideradas, sabiendo que la temperatura en la atmósfera en función de la altura h varia según la relación: $T= T_0 – B \cdot h$; T_0 y B son constantes conocidas.

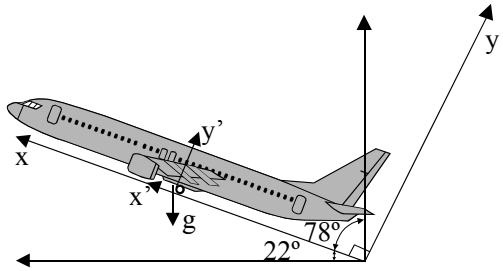
Datos:

$V_{inicial}$; V_{final}; $H_{inicial}$; α; V; C_D; S; t; T_0; B; $m_{inicial\ avión}$; ρ. (Considérese ρ conocida para los apartados 1 y 2.)

Resolución

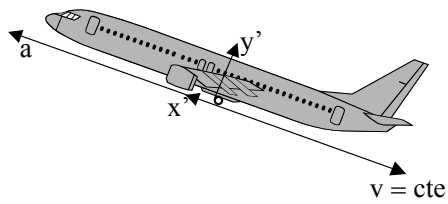
1. Se eligen los sistemas de coordenadas XY; X'Y'.

Fig. 36.1



Para el sistema de coordenadas no inercial situado en el avión, se tiene:

Fig. 36.2



La ecuación de cantidad de movimiento aplicada a un sistema no inercial se enuncia:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c}\rho\vec{V}_{x'y'}\,d\forall+\oint_{sc}\rho\vec{V}_{x'y'}\cdot\vec{V}_{x'y'}\,d\vec{s}+$$
$$\int_{sc}\rho\left[\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}+(\frac{d\Omega}{dt}\wedge\vec{r})+(2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{x'y'})+(\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r})\right]d\forall=$$
$$=\sum\vec{F}ext=-\int_{sc}P\,\hat{n}\,ds+\int_{sc}\vec{\bar{\tau}}\,d\vec{s}+\int_{\forall c}\vec{g}\rho\,d\forall$$

Puesto que las aceleraciones de Coriolis, centrípeta y la debida a la velocidad de giro variable no son relevantes para el caso de estudio, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c}\rho\,\vec{V}_{x'y'}d\forall+\oint_{sc}\rho\,\vec{V}_{x'y'}\vec{V}_{x'y'}\,d\vec{s}+\int_{sc}\rho\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}d\forall=-\int_{sc}P\,\hat{n}\,ds+\int_{sc}\vec{\bar{\tau}}\,d\vec{s}+\int_{\forall c}\vec{g}\rho\,d\forall$$

Las fuerzas superficiales han sido dadas en función del coeficiente de arrastre:

$$D=C_D\cdot\rho\cdot s\cdot\frac{V^2_{avión}}{2}$$

Estas fuerzas tienen la dirección del eje X y se dirigen hacia la parte negativa de dicho eje.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c}\rho\,\vec{V}_{x'y'}\,d\forall+\oint_{sc}\rho\,\vec{V}_{x'y'}\,\vec{V}_{x'y'}\,d\vec{s}=-\vec{D}+\int_{\forall c}\vec{g}\rho\,d\forall-\int_{\forall c}\rho\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}d\forall$$

Eligiendo como volumen de control el avión, se tiene que únicamente existe flujo de cantidad de movimiento entrante y saliente en los motores.

$$\int_{sc}\rho\cdot\vec{V}_{x'y'}\cdot\vec{V}_{x'y'}\,d\vec{s}=\int_{se}\rho\cdot\vec{V}_{avión}\cdot\vec{V}_{avión}\,d\vec{s}+\int_{ss}\rho\cdot\vec{V}_{gases\ escape}\cdot\vec{V}_{gases\ escape}\,d\vec{s}=$$
$$\rho\,V^2_{avión}\,s_{entrada}-\rho\,V^2_{gases\ escape}\,s_{salida}=\dot{m}_{entrante}\cdot V_{avión}-\dot{m}_{saliente}\cdot V_{gases\ escape}$$

En este primer apartado, se va a despreciar la aportación del combustible al caudal másico saliente, con lo cual se tendrá:

$$\dot{m}_{entrante}=\dot{m}_{saliente}$$

En lo que a la variación temporal de cantidad de movimiento se refiere, se va a suponer que la densidad del flujo en el interior del volumen de control es constante; por otro lado, la velocidad de salida del flujo por los motores del avión se ha supuesto también constante, según el enunciado, con lo cual:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c}\rho\,\vec{V}_{x'y'}\,d\forall=0;$$

y se obtiene:

$$-\dot{m}_{saliente}\cdot\left(V_{gases\ escape}-V_{avión}\right)=-\vec{D}+\int_{\forall c}\vec{g}\rho\,d\forall-\int_{\forall c}\rho\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}d\forall$$

Proyectando la gravedad en la dirección del movimiento del avión

$$\int_{\forall c} \vec{g}\rho \, d\forall = -\rho \cdot \forall \cdot g \cdot \cos(90^o - \alpha) = -m_{avión} g \cos(90^o - \alpha)$$

Puesto que $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{a}$,aceleración del avión

$$-\dot{m}_{saliente} \cdot \left(V_{gases\ escape} - V_{avión} \right) = -C_D \cdot \rho_{aire} \cdot s \cdot \frac{V_{avión}^2}{2} - m_{avión}\ g \cos(90^o - \alpha) - \int_{\forall c} \rho \vec{a} \, d\forall$$

$$-\dot{m}_{saliente} \cdot \left(V_{gases\ escape} - V_{avión} \right) = -C_D \cdot \rho_{aire} \cdot s \cdot \frac{V_{avión}^2}{2} - m_{avión} g \cos(90^o - \alpha) - m_{avión} a$$

$$V_{avión} = V_{inicial} + at$$

$$\dot{m}_{saliente} \cdot = \frac{C_D \cdot \rho_{aire} \cdot s \cdot \frac{\left(V_{inicial} + at \right)^2}{2} + m_{avión} g \cos(90^o - \alpha) + m_{avión} a}{\left(V_{gases\ escape} - (V_{inicial} + at) \right)}$$

2. Si se considera que la masa del avión varía con el tiempo, se tiene, conociendo que la masa de combustible es el 5% de la masa total:

$$m_{avión,} = m_{av.inicial} - \dot{m}_{entrante} t \cdot 0,05$$

Según la ecuación de continuidad:

$$\dot{m}_{entrante} + \dot{m}_{fuel} = \dot{m}_{saliente.}$$

$$\dot{m}_{entrante} + 0,005\, \dot{m}_{entrante} = \dot{m}_{saliente.}$$

$$1,05\ \dot{m}_{entrante} = \dot{m}_{saliente.}$$

con lo cual:

$$m_{avión,} = m_{av.inicial} - m_{saliente}\ t \cdot \frac{0,05}{1,05}$$

El flujo de cantidad de movimiento a través de los motores del avión, al considerar que el flujo másico de combustible es el 5% del flujo entrante, se establece:

$$\int_{sc} \rho \cdot \vec{V}_{x'y'} \cdot \vec{V}_{x'y'} \, d\vec{s} = \dot{m}_{entrante} \cdot V_{avión} - \dot{m}_{saliente} \cdot V_{gases\ escape} =$$

$$= \frac{\dot{m}_{saliente}}{1,05} \cdot V_{avión} - \dot{m}_{saliente} \cdot V_{gases\ escape} = \dot{m}_{saliente} \left(\frac{V_{avión}}{1,05} - V_{gases\ escape} \right) =$$

$$= \dot{m}_{saliente} \left(\frac{V_{inicial} + at}{1,05} - V_{gases\ escape} \right)$$

La ecuación de cantidad de movimiento quedará:

$$\dot{m}_{saliente}\left(V_{gases\ escape}-\frac{V_{inicial}+at}{1,05}\right)=C_D\cdot\rho_{aire}\cdot s\cdot\frac{\left(V_{inicial}+at\right)^2}{2}+$$

$$\left(m_{av.inicial}-\dot{m}_{saliente}t\cdot\frac{0,05}{1,05}\right)g\cos(90^o-\alpha)+\left(m_{av.inicial}-\dot{m}_{saliente}t\cdot\frac{0,05}{1,05}\right)\vec{a}$$

$$\dot{m}_{saliente}\left(V_{gases\ escape}-\frac{V_{inicial}+at}{1,05}\right)+\dot{m}_{saliente}\left(g\cdot t\cdot\cos(90^o-\alpha)+t\cdot\vec{a}\right)\frac{0,05}{1,05}=$$

$$C_D\cdot\rho_{aire}\cdot s\cdot\frac{\left(V_{inicial}+at\right)^2}{2}+m_{av.inicial}\cdot\left(g\cos(90^o-\alpha)+\vec{a}\right)$$

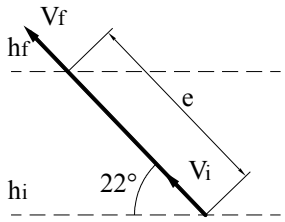
$$\dot{m}_{saliente}=\frac{C_D\cdot\rho_{aire}\cdot s\cdot\frac{\left(V_{inicial}+at\right)^2}{2}+m_{av.inicial}\cdot\left(g\cos(90^o-\alpha)+\vec{a}\right)}{\left(V_{gases\ escape}-\frac{V_{inicial}+at}{1,05}\right)+\left(g\cdot t\cdot\cos(90^o-\alpha)+t\cdot\vec{a}\right)\frac{0,05}{1,05}};$$

La aceleración que experimenta el avión se halla:

$$\vec{a}=\frac{d^2R}{dt^2}=\frac{V_{final}-V_{inicial}}{t};$$

3. Si a la velocidad inicial le corresponde una altura inicial, *hi*, al final del período de aceleración considerado, t, la altura del avión será:

Fig. 36.3



$$e=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2+v_i\,t;$$

$$\operatorname{sen}22^o=\frac{h_f-h_i}{e};$$

$$h_f=e\cdot\operatorname{sen}22^o+h_i=\left(\frac{1}{2}a\cdot t^2+\cdot v_i\,t\right)\operatorname{sen}22^o+h_i;$$

La densidad media del aire atmosférico entre las dos alturas de vuelo consideradas se determinará hallando la densidad del aire a cada una de estas alturas, y posteriormente obteniendo la media de dichas densidades:

$$\overline{\rho}_{aire}=\frac{\rho_{hf}+\rho_{hi}}{2};$$

$$\rho_{hf}=\frac{P_{hf}}{R\cdot T_{hf}};$$

$$\rho_{hi}=\frac{P_{hi}}{R\cdot T_{hi}};$$

Puesto que la temperatura del aire en la atmósfera terrestre viene dada por:

$$T = T_o - B \cdot h;$$

$$T_o = 15^{\circ}C \quad i \quad B = 0,0065 \frac{K}{m};$$

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh = -\frac{P}{R \cdot T} g \cdot dh = -\frac{P \cdot g}{R(T_o - B \cdot h)} dh;$$

$$\int_{P=Patm}^{P=P_{hf}} \frac{dP}{P} = \int_{h=0}^{h=hf} -\frac{g \cdot dh}{R \cdot (T_0 - Bh)};$$

$$\ln\left[\frac{P_{hf}}{P_{atm}}\right] = \frac{g}{R \cdot B} \cdot \ln\left[\frac{T_0 - B \cdot h_f}{T_0}\right];$$

$$P_{hf} = \left(\frac{T_0 - B \cdot h_f}{T_0}\right)^{\frac{g}{R \cdot B}};$$

Expresión que da la presión del aire a una altura *h* genérica; sustituyendo *h* por h_f y *hi* se obtienen las presiones a las dos alturas consideradas. Dado que la temperatura también es conocida, se puede determinar la densidad del aire para estas dos alturas y, consecuentemente, la densidad media.

Problema 37

Enunciado

Se desea realizar un experimento en la estación espacial internacional. El experimento consiste en determinar la fuerza de reacción del contorno sobre el fluido, cuando este fluye a lo largo de un tramo de tubería recta de 1 m de longitud y 1 cm de diámetro.

El satélite donde irá montada la instalación tiene, en el momento de realizar el experimento, una aceleración respecto a un sistema de referencia inercial de:

$\vec{a}$=10j +10k (m/s^2) , siendo su velocidad angular $\vec{\omega}$ = 0,2i + 0,2j - 0,01k (rad/s) .

El tramo de tubería respecto al centro de gravedad del satélite está situado en un plano XZ, y el conducto está alineado con el eje Z. El centro de gravedad del conducto está situado en X = 0,5 m; Y = 0,5 m; Z = 1 m. Se conoce, además, que el flujo es en sentido positivo del eje de las Z, y la presión a la entrada del tramo recto es de 2 10^5 Pa (presión absoluta).

Debido a que el flujo es laminar, para determinar la presión en el extremo opuesto del conducto se utilizará la ecuación: $\Delta P = \frac{\rho \cdot 8 \cdot \nu \cdot L \cdot v}{r_c^{\,2}}$; $\frac{\Delta P}{\rho} = \Delta Y$

L = longitud del conducto
v = velocidad del fluido en el conducto, (considérese 1 m/s.)
ρ = densidad del fluido = 850 Kg/m^3
ν = viscosidad cinemática del fluido = 30 10^{-6} m^2/s

Considérese despreciable el efecto de la gravedad terrestre sobre el satélite.

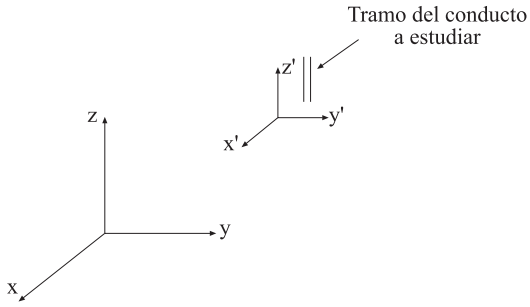


Fig. 37.1
Esquema de la instalación, con los dos ejes coordenados utilizados

Resolución

La ecuación de cantidad de movimiento para un sistema no inercial de coordenadas se establece (v. figura 37.2):

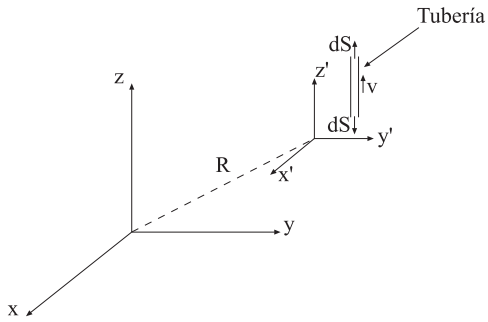


Fig. 37.2
Esquema de los dos ejes coordenados con el vector R que los une

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c}\rho\vec{V}d\forall+\int_{se}\rho\vec{V}\vec{V}d\vec{S}+\int_{ss}\rho\vec{V}\vec{V}d\vec{S}+\int_{\forall c}\rho\left[\frac{d^2R}{dt^2}+\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{V}\right)+\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)\right]d\forall$$

$$=-\int_{se}p d\vec{S}-\int_{ss}p d\vec{S}+F_{(ijk)}+\int_{\forall c}\rho g d\forall$$

$$-\dot{m}V_e\hat{k}+\dot{m}V_s\hat{k}+\int_{\forall c}\rho\left[\frac{d^2R}{dt^2}+\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{V}\right)+\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)\right]d\forall+\int_{se}p d\vec{S}+\int_{ss}p d\vec{S}=F_{(i,j,k)}$$

El radio $\vec{r}$ en un elemento diferencial de tubo será de la forma:

$$r=0,5\hat{i}+0,5\hat{j}+Z\hat{k}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2}=10j+10k$$

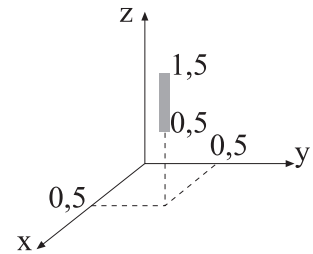


Fig. 37.3

$$\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{V}\right)=2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0,2 & 0,2 & -0,01 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\left[0,2i-0,2j\right]=0,4i-0,4j$$

$$\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)=\omega\wedge\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0,2 & 0,2 & -0,01 \\ 0,5 & 0,5 & Z \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{\omega}\wedge\left[0,2Z\vec{i}-0,5\cdot0,01\vec{j}+0,2\cdot0,5\vec{k}-\left(0,2\cdot0,5\vec{k}-0,5\cdot0,01\vec{i}+0,2Z\vec{j}\right)\right]=$$

$$=\vec{\omega}\wedge\left[\left(0,005+0,2Z\right)i-\left(0,005+0,2Z\right)j\right];$$

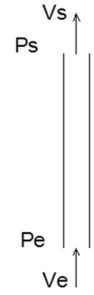
$$\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0,2 & 0,2 & -0,01 \\ \left(0,005+0,2Z\right) & -\left(0,005+0,2Z\right) & 0 \end{vmatrix}=$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}=-0,01\left(0,005+0,2Z\right)\hat{j}+0,2\left[-\left(0,005+0,2Z\right)\right]\hat{k}$$
$$-\left[0,2\left(0,005+0,2Z\right)\hat{k}-0,01\left(-\left(0,005\right)\right)\hat{i}\right]$$
$$\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}=-\left(5\cdot10^{-5}+2\cdot10^{-3}Z\right)\hat{i}-\left(5\cdot10^{-5}+2\cdot10^{-3}Z\right)\hat{j}-\left(10^{-3}+4\cdot10^{-2}Z\right)2\hat{k}$$

La presión a la salida del conducto respecto a la entrada del mismo será:

Fig. 37.4

$$\frac{P_e}{\rho_e}+\frac{V_e^2}{2}+gZ_e=\frac{P_s}{\rho_s}+\frac{V_s^2}{2}+gZ_s+\frac{8\nu LV}{r_c^2}$$



Las fuerzas másicas se consideran despreciables.

$$P_s=P_e-\frac{\rho 8\nu LV}{r_c^2}$$

$$P_s=2\cdot10^5-8160=1,9184\cdot10^5\,Pa$$

$$\int_{0,5}^{1,5}\rho S_{tubo}\left[\begin{matrix}10\hat{j}+10\hat{k}+0,4\hat{i}-0,4\hat{j}-\left(5\cdot10^{-5}+2\cdot10^{-3}Z\right)\hat{i}-\left(5\cdot10^{-5}+2\cdot10^{-3}Z\right)\hat{j}\\ -\left(2\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-2}Z\right)\hat{k}\end{matrix}\right]\cdot dZ$$

$$-8.160\cdot S_{tubo}\cdot\hat{k}=F_{(i,j,k)}$$

$$\rho S_{tubo}\left[\begin{array}{l} 10\,\hat{j}+10\,\hat{k}+0,4\,\hat{i}-0,4\,\hat{j}-5\cdot10^{-5}\,\hat{i}-5\cdot10^{-5}\,\hat{j}-2\cdot10^{-3}\,\hat{k} \\ -2\cdot10^{-3}\left[\frac{Z^2}{2}\right]_{0,5}^{1,5}\hat{i}-2\cdot10^{-3}\left[\frac{Z^2}{2}\right]_{0,5}^{1,5}\hat{j}-8\cdot10^{-2}\left[\frac{Z^2}{2}\right]_{0,5}^{1,5}\hat{k} \end{array}\right]+$$

$$-8.160\cdot S_{tubo}\cdot\hat{k}=F_{(i,j,k)}$$

$$850\cdot\frac{\pi\cdot0,01^2}{4}\left[0,39995\,\hat{i}+9,5995\,\hat{j}+9,998\,\hat{k}-2\cdot10^{-3}\,\hat{i}-2\cdot10^{-3}\,\hat{j}-8\cdot10^{-3}\,\hat{k}\right]$$

$$-8.160\cdot\frac{\pi\cdot0,01^2}{4}\cdot\hat{k}=F_{(i,j,k)}$$

$$F_{(i,j,k)}=2,65667\cdot10^{-2}\,\hat{i}+6,40748\cdot10^{-1}\,\hat{j}+2,12293\cdot10^{-2}\,\hat{k}$$

Problema 38

Enunciado

Sea un fluido de viscosidad dinámica μ y densidad ρ que circula por una tubería de diámetro D. Sabiendo que el caudal circulante es Q y que la presión en la entrada del conducto es P, determine la expresión que caracteriza la fuerza de reacción del contorno sobre el fluido, cuando el sistema está inmóvil y cuando el sistema gira respecto a su eje central vertical a una velocidad angular ω. Considere que la tubería es lisa.

Las dimensiones principales del conducto se esquematizan en la figura 38.1.

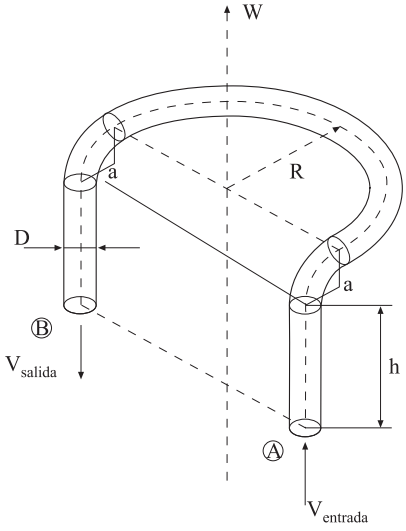


Fig. 38.1
Esquema de la instalación

Nota. A los efectos de pérdida de carga, los codos y los tramos curvados de la tubería se considerarán como pérdidas lineales, con una longitud igual a la de su desarrollo.

Resolución

1. La fuerza de reacción que el conducto realiza sobre el fluido será debida al balance de cantidad de movimiento entre la entrada y la salida del sistema. En este primer apartado, y dado que no existe giro alguno, la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas inerciales se enuncia:

$$-\int_{SA} p\, d\vec{s} - \int_{SB} p\, d\vec{s} - \int_{SL} p\, d\vec{s} + \int_{SL} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s} + \int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{v}_i\, d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{v}_i\, \vec{v}\, d\vec{s}$$

de donde las fuerzas de reacción (contorno sobre el fluido) y para régimen permanente se definen:

$$\vec{F}_{CF} = \int_{SC} \rho \vec{v}_i\, \vec{v}\, d\vec{s} - \int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall + \int_{SA} p\, d\vec{s} + \int_{SB} p\, d\vec{s} = \int_{SA} \rho \vec{v}_i\, \vec{v}\, d\vec{s} +$$
$$+\int_{SB} \rho \vec{v}_i\, \vec{v}\, d\vec{s} - \int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall + \int_{SA} p\, d\vec{s} + \int_{SB} p\, d\vec{s}$$

Una vez realizada la integración, se obtiene:

$$\vec{F}_{CF} = -2\dot{m} v \hat{k} - s(p_A + p_B)\hat{k} + \rho g L s \hat{k}$$

de donde:

v = velocidad de circulación del fluido, que se calcula mediante la ecuación de continuidad

$\dot{m}$ = caudal másico

P_A = presión en la entrada del conducto, punto A. (dato del problema)

P_B = presión en la salida del conducto, punto B (se determina mediante la ecuación de Bernoulli)

L_{total} = longitud desarrollada del conducto. Según la figura 38.1, valdrá:

$$L_{total} = 2h + \pi a + \pi R$$

La presión a la salida del conducto, punto B, se hallará:

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{V^2}{2} + f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2}$$

Así:

$$P_B = \left(\frac{P_A}{\rho} - f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2}\right)\rho$$

El factor de fricción se determinará a partir del diagrama de Moody, mediante la determinación previa del número de Reynolds y asumiendo, según el enunciado que la tubería es lisa.

2. En el segundo apartado, cuando todo el sistema gira a una velocidad Ω respecto al eje Z, se deberá utilizar la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas no inerciales, que se enuncia:

$$-\int_{SA} p\, d\vec{s} - \int_{SB} p\, d\vec{s} - \int_{SL} p\, d\vec{s} + \int_{SL} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s} + \int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{v}_i\, d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{v}_i\, \vec{v}\, d\vec{s}$$
$$+\int_{\forall C} \rho\left[\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}\right] d\forall$$

Puesto que para el caso en estudio únicamente aparecen las aceleraciones centrípeta y de Coriolis, y dado que se tiene régimen permanente, la ecuación anterior queda:

$$-\int_{SA} p\, d\vec{s} - \int_{SB} p\, d\vec{s} + F_{CF} + \int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall = \int_{SA} \rho \vec{v}_i\, \vec{v}\, d\vec{s} + \int_{SB} \rho \vec{v}_i\, \vec{v}\, d\vec{s} +$$
$$+\int_{\forall C} \rho\left[2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}\right] d\forall$$

de donde:

$$F_{CF} = -\dot{m}\left[2\, V_Y\right] \hat{k} + \int_{SA} p\, d\vec{s} + \int_{SB} p\, d\vec{s} - \int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall + \int_{\forall C} \rho\left[2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}\right] d\forall$$

$$F_{CF} = -\dot{m}\left[2\, V_Y\right] \hat{k} - P_A\, S\, \hat{k} - P_B\, S\, \hat{k} + \rho g\, L_{total}\, S \hat{k} + \int_{\forall C} \rho\left[2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}\right] d\forall$$

Las aceleraciones centrípeta y de Coriolis se calculan (v. figura 38.2):

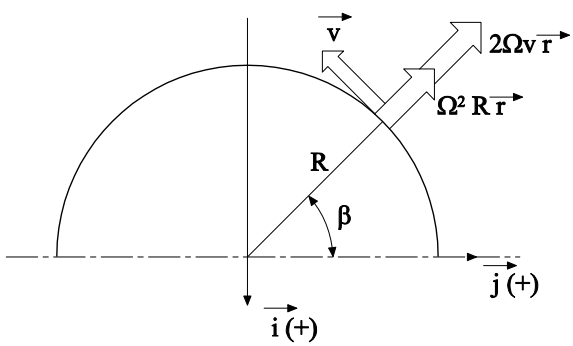


Fig. 38.2
Representación direccional de las aceleraciones

a) En la curva principal

Coriolis:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ -v\cos\beta & -v\sin\beta & 0 \end{vmatrix} = \left(-\Omega V \cos\beta\, \hat{j} + \Omega V \sin\beta \hat{i}\right) 2$$

Centrípeta:

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{R}=\Omega\wedge\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ -R\sin\beta & R\cos\beta & 0 \end{vmatrix}=\Omega\wedge\left[-\Omega\, R\sin\beta\ \hat{j}-\Omega\, R\cos\beta\,\hat{i}\right]=$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ -\Omega R\cos\beta & -\Omega R\sin\beta & 0 \end{vmatrix}=-\Omega^2 R\cos\beta\ \hat{j}+\Omega^2 R\sin\beta\,\hat{i}$$

La fuerza sobre la curva principal debida a las aceleraciones de Coriolis y centrípeta será:

$$F_{CF(a)}=\int_0^{\pi}\rho\left[2\Omega V\sin\beta\hat{i}-2\Omega V\cos\beta\hat{j}+\ \Omega^2 R\sin\beta\hat{i}-\Omega^2 R\cos\beta\hat{j}\right]d\forall$$

puesto que

$$d\forall=S\,R\,d\beta$$

después de la integración se tiene:

$$F_{CF(a)}=+2\rho SR\,\Omega V\hat{i}+2\rho SR^2\,\Omega^2\ \hat{i}=2\rho SR\,\Omega(R\,\Omega+V)\hat{i}$$

b) Las aceleraciones centrípeta y de Coriolis en los dos codos se obtienen (v. figura 38.3):

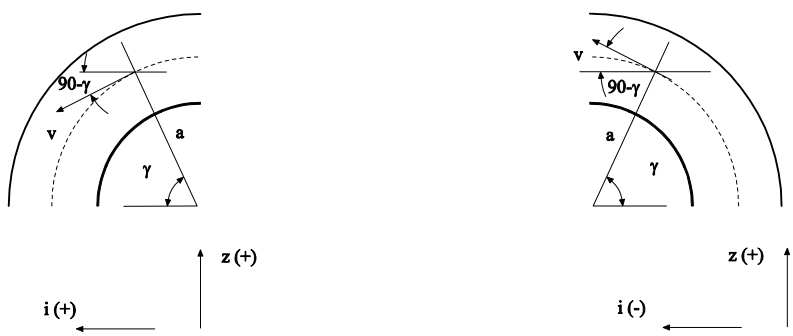


Fig. 38.3 Esquema de los dos codos con el vector velocidad de fluido asociado

Coriolis, codo 1:

$$2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}=2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ -v\cos(90-\gamma) & 0 & v\,sen(90-\gamma) \end{vmatrix}=2\left(-v\cos(90-\gamma)\,\Omega\,\hat{j}\right)$$

Coriolis, codo 2:

$$2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}=2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ v\cos(90-\gamma) & 0 & -v\,sen(90-\gamma) \end{vmatrix}=2\left(v\cos(90-\gamma)\,\Omega\,\hat{j}\right)$$

Obsérvese que la fuerza resultante de Coriolis que actúa sobre los codos 1 y 2 es nula.

Los radios desde el centro de coordenadas hasta un elemento diferencial genérico en los codos 1 y 2 se definen en la figura 38.4:

$$\vec{R}_1' = a\cos\gamma\ \hat{i} + R\ \hat{j} - (a - a\sin\gamma)\ \hat{k}$$

$$\vec{R}_2' = a\cos\gamma\ \hat{i} - R\ \hat{j} - (a - a\sin\gamma)\ \hat{k}$$

con lo cual la aceleración centrípeta para el codo 1 será:

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{R} = \Omega\wedge\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ a\cos\gamma & R & -a(1-\sin\gamma) \end{vmatrix} = \Omega\wedge\left[\Omega\ a\ \cos\gamma\ \hat{j} - \Omega R\ \hat{i}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ -\Omega R & \Omega a\cos\gamma & 0 \end{vmatrix} = -\Omega^2 R\ \hat{j} - \Omega^2 a\ \cos\gamma\ \hat{i}$$

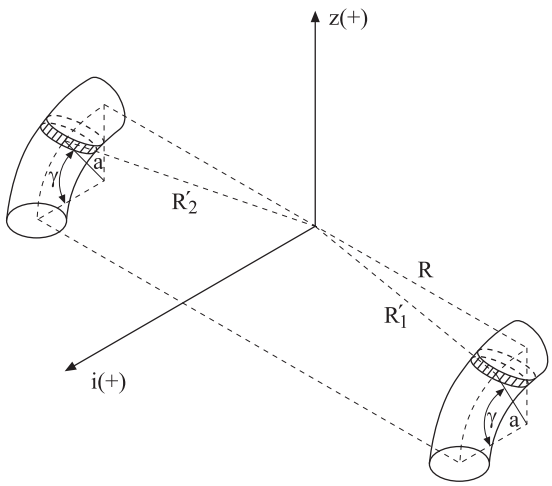


Fig. 38.4
Esquema de los elementos diferenciales de radio

y para el codo 2 se tendrá:

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{R} = \Omega\wedge\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ a\cos\gamma & -R & -a(1-\sin\gamma) \end{vmatrix} = \Omega\wedge\left[\Omega\ a\ \cos\gamma\ \hat{j} + \Omega R\ \hat{i}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ \Omega R & \Omega a\cos\gamma & 0 \end{vmatrix} = \Omega^2 R\ \hat{j} - \Omega^2 a\ \cos\gamma\ \hat{i}$$

La fuerza debida a la aceleración centrípeta para los codos 1 y 2 será:

$$F_{CF(b1,2)} = \int_{\forall C(codos1,2)} \rho\left[2\vec{\Omega}\wedge\vec{V} + \vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right]d\forall$$

El diferencial de volumen vendrá dado por:

$$d\forall = S\ a\ d\gamma\text{, de donde:}$$

$$F_{CB(b1,2)} = \int_0^{\pi/2} \rho\left[-\Omega^2 a\cos\gamma\,\hat{i} - \Omega^2 R\,\hat{j} + \Omega^2 R\,\hat{j} - \Omega^2 a\cos\gamma\,\hat{i}\right] S\ a\ d\gamma$$

$$F_{CB(b1,2)} = -2\rho\ S\ a^2\ \Omega^2\ \hat{i}$$

c) Fuerzas debidas a las aceleraciones de Coriolis y centrípeta en los tramos rectos.

El radio genérico de un elemento diferencial de tubería al eje de coordenadas se define en la figura 38.5, de donde:

$$R'' = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

por lo que sus componentes para los tramos rectos conectados a los codos 1 y 2 serán:

Tramo unido al codo 1	Tramo unido al codo 2
$R_x = a$	$R_x = a$
$R_y = R$	$R_y = -R$
$R_z = -(a+z)$	$R_z = -(a+z)$

La aceleración de Coriolis en los tramos rectos será:

Tramo recto unido al codo 1:

$$2\vec{\Omega}\wedge\vec{V} = 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & V_z \end{vmatrix} = 0$$

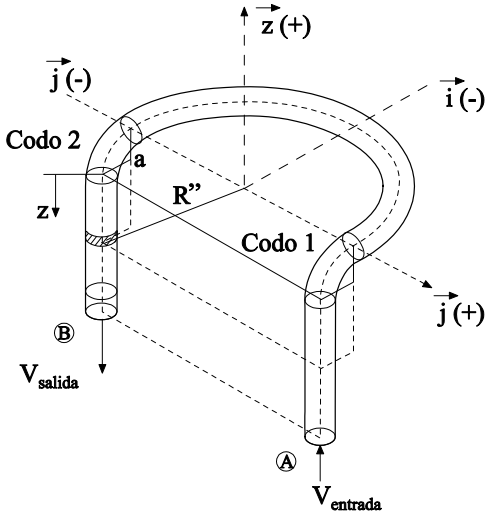


Fig. 38.5 Esquema de un elemento diferencial de conducto

Tramo recto unido al codo 2:

$$2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}=2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & -V_z \end{vmatrix}=0$$

La aceleración centrípeta será:

Tramo recto unido al codo 1:

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{R}=\Omega\wedge\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ a & R & -(a+z) \end{vmatrix}=\Omega\wedge\left[\Omega\, a\ \hat{j}-\Omega\, R\ \hat{i}\right]=$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ -\Omega R & \Omega a & 0 \end{vmatrix}=-\Omega^2 R\ \hat{j}-\Omega^2 a\ \hat{i}$$

Tramo recto unido al codo 2:

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{R}=\Omega\wedge\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ a & -R & -(a+z) \end{vmatrix}=\Omega\wedge\left[\Omega\, a\ \hat{j}+\Omega\, R\ \hat{i}\right]=$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ \Omega R & \Omega a & 0 \end{vmatrix}=\Omega^2 R\ \hat{j}-\Omega^2 a\ \hat{i}$$

Al sumar las fuerzas debidas a las aceleraciones de Coriolis y centrípeta en los tramos rectos del conducto, únicamente aparece:

$$F_{tubo-recto\,1}=\int_{-(a+z)}^{-a}\rho(-\Omega^2 R\,\hat{j}-\Omega^2 a\,\hat{i})\,S\,dz=\rho\ S\ z\left(-\Omega^2 R\,\hat{j}-\Omega^2 a\,\hat{i}\right)$$

$$F_{tubo-recto\,2}=\int_{-a}^{-(a+z)}\rho(\Omega^2 R\,\hat{j}-\Omega^2 a\,\hat{i})\,S\,dz=\rho\ S\left(\Omega^2 R\,\hat{j}-\Omega^2 a\,\hat{i}\right)(-z)$$

Si se denomina L a la longitud del tramo recto, la fuerza actuante sobre los dos tramos rectos será:

$$F_{tubo-recto}=-\rho\ S\ \Omega^2\ R\ L\ \hat{j}$$

La fuerza resultante sobre todos los diversos tramos del conducto se expresará:

$$F_{CF}=-\dot{m}\left[2\,V_Y\right]\hat{k}-P_A\ S\ \hat{k}-P_B\ S\ \hat{k}+\rho g\,L_{total}\ S\ \hat{k}+$$
$$+\left[2\ \rho\ S\ R\,\Omega\left(V+\Omega R\right)\hat{i}\right]-\ 2\rho S a^2\,\Omega^2\ \hat{i}-\rho S R\,\Omega^2\ L\ \hat{j}$$

Obsérvese que la fuerza resultante tiene componentes en las tres direcciones.

Problema 39

Enunciado

En la figura siguiente, se muestran dos configuraciones de una válvula para dirigir aceite hidráulico, denominada "servoválvula". Obsérvese que el fluido se dirige a través de unas toberas hacia unas placas planas, denominadas *paletas*.

Se presentan dos configuraciones de conexión diferentes. Ambas constan de cuatro toberas y dos paletas y, en ambos casos, las dos paletas están unidas mediante una armadura y se mueven solidariamente.

Obsérvese que, en ambas configuraciones, dos de las toberas tienen flujo saliente, mientras que en las otras dos el flujo es entrante.

Sabiendo que la distancia entre cada tobera y paleta cuando las paletas están centradas es X_0, que el diámetro de las toberas es D y que se cumple que $X_0 << D$, determine:

1. La fuerza neta actuante sobre las dos paletas, para una posición genérica de las mismas y en función de los parámetros X_0; D; P_P; P_A; P_B; P_R; X; se cumple que $P_P > P_A$ & $P_B > P_T$.

X es el desplazamiento de la paleta respecto a su posición central X_0. $-X_0 \le X \le X_0$

Determine dicha fuerza neta actuante para las dos configuraciones de flujo, detalladas en los esquemas de las figuras siguientes, y comente las diferencias entre los resultados obtenidos.

Recuerde que la relación entre el caudal real que fluye por una obstrucción y el caudal teórico se da por el coeficiente de descarga C_d: $C_d = \frac{Q_{real}}{Q_{teórico}}$. Considere C_d conocido.

Fig. 39.1
Configuración A

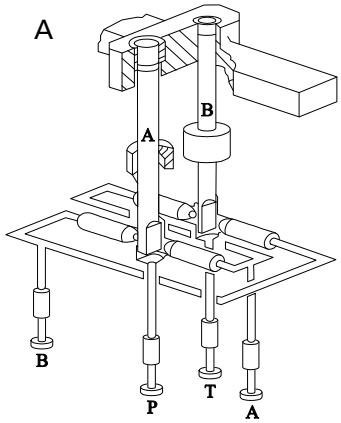
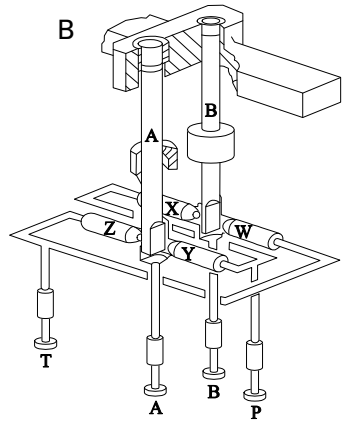


Fig. 39.2
Configuración B



Resolución

Las dos configuraciones se pueden representar del modo siguiente

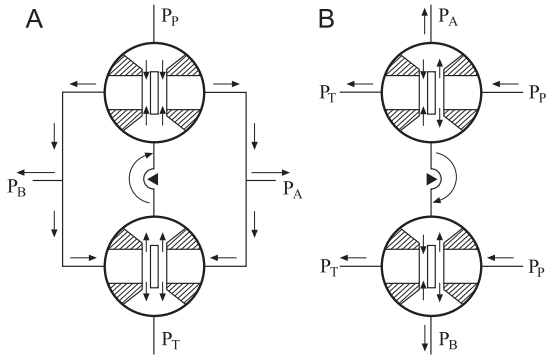


Fig. 39.3
Configuración A

Fig. 39.4
Configuración B

Para determinar la fuerza que el fluido ejerce sobre las paletas, se aplica la ecuación de cantidad de movimiento.

$$-\int_{SE} P\cdot d\vec{S}-\int_{SS} P\cdot d\vec{S}-\int_{SL} P\cdot d\vec{S}+\int_{SL}\bar{\bar{\tau}}\cdot d\vec{s}+\int_{\forall c}\rho\cdot\vec{g}\cdot d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c}\rho\cdot\vec{V}_i\cdot d\forall+\oint_{sc}\rho\cdot\vec{V}_i\ \vec{V}\cdot d\vec{s}$$

De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento a cada una de las diversas toberas, se obtiene lo siguiente.

Configuración A. (Obsérvese que el análisis se realiza en régimen permanente y se desprecian las fuerzas másicas).

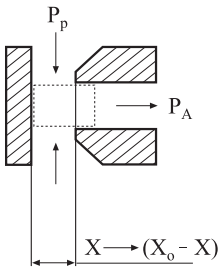


Fig. 39.5
Tobera 1,
configuración A

$$F_x=\rho\cdot Q\cdot v_{A_1}+P_A\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}$$

$$Q=C_{d_{PT}}\cdot\pi\cdot D\cdot\left(x_o-x\right)\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\left(P_P-P_A\right)}{\rho}}$$

Recuérdese que la magnitud X se entiende como el desplazamiento de la paleta respecto a su posición inicial.

$$v_{A_1}=\frac{Q}{\frac{\pi\cdot D^2}{4}}=\frac{4\cdot C_{d_{PT}}\cdot\left(x_o-x\right)}{D}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\left(P_P-P_A\right)}{\rho}}$$

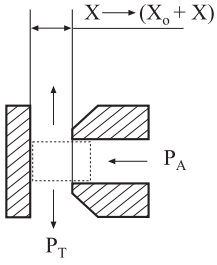
$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_P - P_A)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

siendo esta la fuerza de reacción, fuerza que la paleta ejerce en dirección X, sobre el fluido.

Configuración A, tobera 2, flujo de la tobera hacia la paleta.

De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control de la figura 39.6 se obtiene:

Fig. 39.6
Tobera 2, configuración A



$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_{A_2} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{d_{TP}} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

$$v_{A_2} = \frac{4 \cdot C_{d_{TP}} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

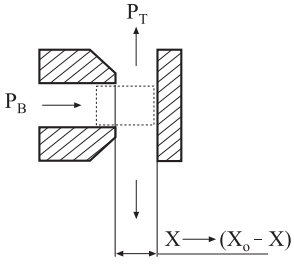
$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{d_{TP}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

siendo esta la fuerza de reacción que la paleta ejerce sobre el fluido.

Configuración A, tobera 3, flujo de la tobera hacia la paleta.

Realizando los mismos pasos que en los apartados anteriores, ahora sobre el volumen de control de la figura 39.7, se obtiene:

Fig. 39.7
Tobera 3, configuración A



$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_{B_1} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{d_{TP}} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o - x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

$$v_{B_1} = \frac{4 \cdot C_{d_{TP}} \cdot (x_o - x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{d_{TP}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Fuerza de reacción que la paleta ejerce sobre el fluido para este caso.

Configuración A, tobera 4, flujo de la paleta hacia la tobera.

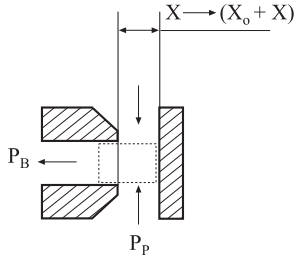


Fig. 39.8
Tobera 4,
configuración A

$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_{B_2} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{d_{PT}} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho}}$$

$$v_{B_2} = \frac{4 \cdot C_{d_{PT}} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho}}$$

$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

La fuerza neta que las dos paletas de la configuración A ejercen sobre el fluido, fuerza de reacción, será

$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_P - P_A)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} + \rho \cdot 4 \cdot C_{d_{TP}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot$$
$$\cdot \frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \rho \cdot 4 \cdot C_{d_{TP}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$-\rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Obsérvese que, si la $P_A \neq P_B$, el sistema tiende a desequilibrarse, debido a que las presiones estáticas actuantes sobre las paletas crean una fuerza resultante que tiende a

desplazar las paletas de su posición original, incluso en el caso en que X = 0 (paleta centrada).

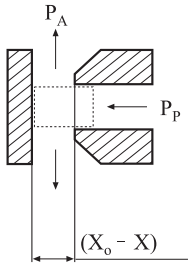
El par sobre la armadura sería esta fuerza por la distancia del eje de las toberas al eje de la armadura.

Para la segunda de las configuraciones, configuración B, se establece lo siguiente:

Configuración B, tobera 1, flujo de la tobera hacia la paleta.

Al igual que en los casos precedentes, se aplica la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control del caso bajo consideración. Para el presente caso, el volumen de control queda definido en la figura 39.9.

Fig. 39.9
Tobera 1,
configuración B



$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_P + P_P \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{d_{TP}} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o - x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_P - P_A)}{\rho}}$$

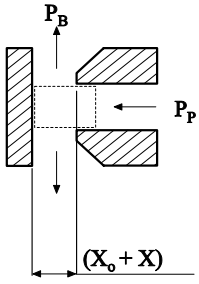
$$v_P = \frac{4 \cdot C_{d_{TP}} \cdot (x_o - x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_P - P_A)}{\rho}}$$

$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{d_{TP}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_P - P_A)}{\rho} + P_P \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

ecuación que establece la fuerza de reacción de la paleta sobre el contorno para el caso objeto de estudio.

Configuración B, tobera 2, flujo paleta-tobera.

Fig. 39.10
Tobera 2,
configuración B



$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_T + P_P \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{d_{TP}} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho}}$$

$$v_T = \frac{4 \cdot C_{d_{TP}} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho}}$$

$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{d_{TP}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_P - P_B)}{\rho} + P_P \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Configuración B, tobera 3, flujo tobera-paleta.

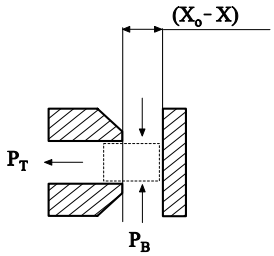


Fig. 39.11
Tobera 3, configuración B

$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_P - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{d_{PT}} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o - x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

$$v_P = \frac{4 \cdot C_{d_{PT}} \cdot (x_o - x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho} - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Al igual que en los casos anteriores, esta es la fuerza de reacción.

Configuración B, tobera 4, flujo de la paleta hacia la tobera.

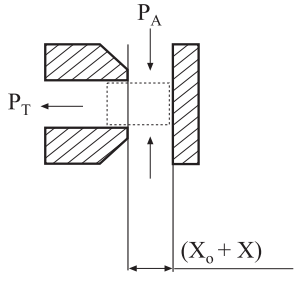


Fig. 39.12
Tobera 4, configuración B

$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_T - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{d_{PT}} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

$$v_T = \frac{4 \cdot C_{d_{PT}} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}{}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho} - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

La suma de fuerzas de reacción que las paletas ejercen sobre el fluido, para esta segunda configuración es:

$$F_x = \rho\, 4\, C_{d_{TP}}{}^2\, \pi\, (x_o - x)^2\, \frac{2\,(P_P - P_A)}{\rho} + P_P\, \frac{\pi\, D^2}{4} + \rho\, 4\, C_{d_{TP}}{}^2\, \pi\, (x_o + x)^2$$
$$\frac{2\,(P_P - P_B)}{\rho} + P_P\, \frac{\pi\, D^2}{4} - \rho\, 4\, C_{d_{PT}}{}^2\, \pi\, (x_o - x)^2\, \frac{2\,(P_B - P_T)}{\rho} - P_T\, \frac{\pi\, D^2}{4}$$
$$-\rho\, 4\, C_{d_{PT}}{}^2\, \pi\, (x_o + x)^2\, \frac{2\,(P_A - P_T)}{\rho} - P_T\, \frac{\pi\, D^2}{4}$$

Véase que, en esta segunda configuración, la presión que multiplica a la sección de la tobera, es la de alimentación, que es constante, con lo que a priori, independientemente de que las presiones P_A y P_B sean o no iguales, la fuerza debida a las presiones estáticas siempre estará en equilibrio. Así, para esta segunda configuración, si existe una fuerza resultante que tiende a desequilibrar la posición de las paletas, esta será debida al flujo de cantidad de movimiento, no a las presiones estáticas; en consecuencia, se puede considerar esta segunda configuración más estable que la primera.

Ecuaciones fundamentales
Ecuación del momento de la cantidad de movimiento, momento cinético

6.1 Ecuación del momento cinético para sistemas inerciales de coordenadas

La ecuación de transporte de Reynolds se estableció como:

$$\frac{dB_{SC}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, b\, d\forall + \oint_{SC} \rho\, b\, \vec{V}\, d\vec{s}$$

La propiedad genérica por unidad de masa "b" para el presente caso se define como:

$$b = \vec{r} \wedge \vec{v}; \quad \text{con lo que} \quad B = \int_{VC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}\right) d\forall$$

Así, el primer término de la ecuación de transporte de Reynolds queda:

$$\frac{dB_{SC}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}\right) d\forall = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \wedge m\,\vec{v}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\,\vec{v} + \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\left(\vec{v} \wedge \vec{v}\right) +$$

$$\vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \wedge m\,\vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_0$$

Un modo conceptual de ver el momento creado por una partícula de fluido que se desplaza con una velocidad $\vec{V}$ con respecto a un sistema coordenado fijo sería mediante la aplicación de la segunda ecuación de Newton.

El concepto de fuerza se puede definir según la segunda ley de Newton como:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\,\vec{v})$$

Sea una partícula de masa m, que se mueve a una velocidad $\vec{V}_1$, siendo $\vec{F}$ la fuerza neta que actúa sobre ella.

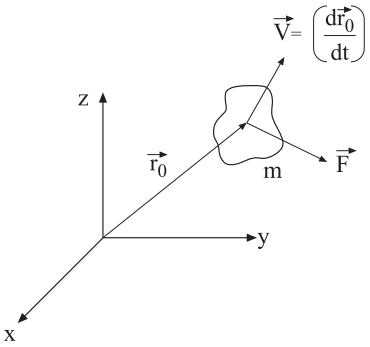


Fig. T 6.1
Desplazamiento de una partícula respecto a un sistema inercial

El momento que crea esta partícula con respecto a un sistema de coordenadas fijo se define como:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \wedge \vec{F} = \vec{r}_0 \wedge \frac{d}{dt}\left(m_p \cdot \vec{V}\right)$$

Obsérvese que el resultado coincide con el obtenido anteriormente.

Sustituyendo los términos acabados de hallar en la ecuación de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) d\forall + \oint_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right)\vec{v}\, d\vec{s}$$

siendo esta expresión la ecuación de momento de la cantidad de movimiento. El primer término después de la igualdad indica la variación temporal del momento cinético en el interior del volumen de control, mientras que el segundo término estudia el flujo de momento cinético a través de las superficies de control. Esta ecuación es de carácter vectorial, en realidad, son tres ecuaciones con las que se puede obtener el momento sobre cada uno de los tres ejes coordenados.

Recordando lo establecido en la ecuación de cantidad de movimiento, donde se detallaba que las fuerzas que actúan sobre una partícula de fluido se descomponen en fuerzas másicas y superficiales, para el presente caso se deberán considerar los momentos generados por dichas fuerzas; así, la ecuación resultante tomará la forma.

$$\vec{r} \wedge \int_{VC} \rho \vec{g}\, d\forall + \vec{r} \wedge -\oint_{SC} p\, d\vec{s} + \vec{r} \wedge \oint_{SC} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) d\forall + \oint_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right)\vec{v}\, d\vec{s}$$

ecuación que puede considerarse como la forma explícita de la ecuación del momento cinético para sistemas inerciales de coordenadas.

6.2 Aplicación de la ecuación del momento cinético a turbomáquinas

Sea el volumen de control siguiente (líneas a trazos), que representa el rodete de una turbomáquina. Se va a proceder al cálculo del momento con respecto al eje z.

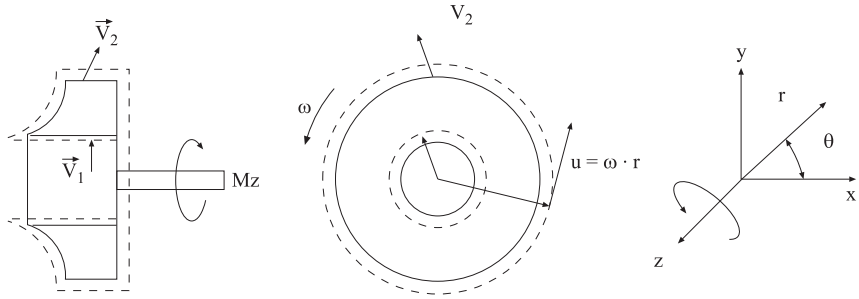


Fig. T 6.2
Esquema del rodete de una turbomáquina

La ecuación del momento cinético con respecto a dicho eje z se expresa:

$$\sum M_Z = \left[\frac{d}{dt}\int_{\forall_{VC}} \rho(\vec{r} \wedge \vec{V}_i)\, d\forall\right] \cdot \vec{k} + \left[\oint_{SC} \rho(\vec{r} \wedge \vec{V}_i)(\vec{V} \cdot \hat{n})\, ds\right]\vec{k}$$

Hipótesis simplificatorias:

- Se considera que solo hay momento, respecto al eje z.
- No hay acumulación de momento angular en el volumen de control.
- El flujo de fluido a la entrada y a la salida del volumen de control es uniforme.

Considerando un sistema de referencia Euleriano, fijo, tanto a la entrada como a la salida del volumen de control, se pueden definir los siguientes triángulos de velocidades:

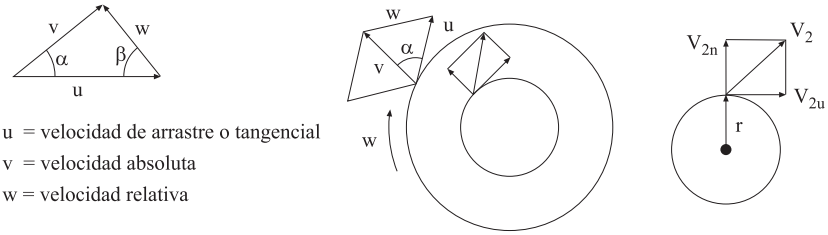


Fig. T 6.3

u = velocidad de arrastre o tangencial
v = velocidad absoluta
w = velocidad relativa

Obsérvese que la velocidad absoluta se puede descomponer en sus componentes normal y tangencial.

Según estos considerandos, la ecuación queda:

$$\sum M_z = \oint_{SC} \rho(\vec{r}_0 \wedge \vec{V}_i)(\vec{V} \cdot \hat{n})ds$$

Extendida a la superficie entrante y saliente del volumen de control, se obtiene:

$$\sum M_z = \oint_{SS} \rho(\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_2)(\vec{V} \cdot \hat{n})ds\,\hat{k} + \int_{SE} \rho(\vec{r}_1 \wedge \vec{V}_1)(\vec{V} \cdot \hat{n})ds\,\hat{k}$$

El producto vectorial de los dos vectores definidos en el problema se puede dar como:

$$\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_2 = \vec{r}_2 \wedge \vec{V}_{2n} + \vec{r}_2 \wedge \vec{V}_{2u} = r_2\, V_{2n} \sin(r_2 V_{2n}) + r_2\, V_{2u} \sin(r_2 V_{2u}) = r_2\, V_{2u} \sin(r_2 V_{2u})$$

de donde:

$$\sum M_z = \oint_{SS} \rho\,(r_2\ V_{2u})(\vec{V}\cdot\hat{n})ds + \int_{SE} \rho\,(r_1\ V_{1u})\,(\vec{V}\cdot\hat{n})ds$$

El producto escalar restante se define como:

$$\vec{V}\cdot\hat{n} = V_u \cdot n\,\cos\left(\vec{V}_u\hat{n}\right) + V_{rn}\cdot n\,\cos\left(\vec{V}_n\hat{n}\right) = V_n\cdot n\,\cos\left(\vec{V}_n\hat{n}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación del momento cinético, queda:

$$\sum M_z = \oint_{SS} \rho\,(r_2\ V_{2u})(V_{n2})ds + \int_{SE} \rho(r_1\ V_{1u})(V_{n1})ds$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\sum M_z = \left|r_2\ V_{2u}\ \dot{m}\right|_{SS} - \left|r_1\ V_{1u}\ \dot{m}\right|_{SE} = \dot{m}\ (r_2\ V_{2u} - r_1\ V_{1u})$$

El momento con respecto al eje z es el que el motor eléctrico transmite a la bomba. Recordando que la potencia transmitida es el producto del par por la velocidad de giro $\dot{W} = M_z\cdot\omega$, se obtiene:

$$-\dot{W}_{eje} = M_z\cdot\omega = \dot{m}\cdot\omega\,(r_2V_{2u} - r_1V_{1u})$$

$$-\dot{W}_{eje} = \dot{m}\,(u_2V_{2u} - u_1V_{1u})$$

$$-\frac{\dot{W}_{eje}}{\dot{m}} = -Y = (u_2V_{2u} - u_1V_{1u})$$

El signo (-) indica que la potencia es comunicada hacia el volumen de control (transferida al fluido), según el convenio de signos establecido en termodinámica.

Para turbinas: $u_2V_{2u} < u_1V_{1u} \rightarrow \dot{W}_{eje} > 0$

Para bombas: $u_2V_{2u} > u_1V_{1u} \rightarrow \dot{W}_{eje} < 0$

6.3 Ecuación de momento cinético para sistemas no inerciales de coordenadas

El momento de la cantidad de movimiento para un sistema inercial de coordenadas se ha establecido:

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{d\vec{B}_{SC}}{dt} = \vec{r}\wedge m\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} = \vec{r}\wedge\int_{VC}\rho\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}d\forall$$

La aceleración de una partícula referida a un sistema inercial se puede dar como:

$$\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{x'y'z'}}{dt} + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'}$$

Sustituyendo en la ecuación del momento cinético, se obtiene:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d\vec{V}_{x'y'z'}}{dt} + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\} d\forall$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{V}_{x'y'z'}}{dt} + \vec{r} \wedge \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\} d\forall$$

Obsérvese que el primer término después de la igualdad caracteriza el momento cinético de la partícula de fluido con respecto a un sistema de referencia móvil.

$$\vec{M}_{0\,x'y'z'} = \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{V}_{x'y'z'}}{dt}$$

con lo que se obtiene:

$$\vec{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right) d\forall + \oint_{SC} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right) \vec{V}_{x'y'z'} \, d\vec{s}$$
$$+ \vec{r} \wedge \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\} d\forall$$

ecuación que representa el momento cinético para sistemas no inerciales de coordenadas.

Problema 40

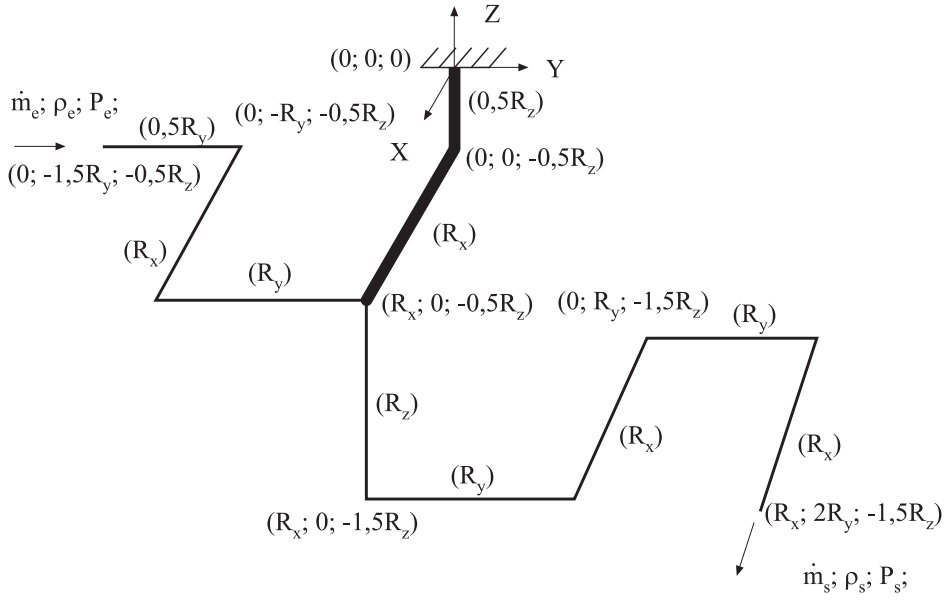
Enunciado

El esquema de la figura 40.1 muestra un conducto, el cual está anclado a la pared mediante la viga detallada en el dibujo. La presión, densidad, sección y caudal másico, se conocen tanto a la entrada como a la salida del conducto. Las dimensiones de los diferentes tramos del conducto, así como la posición espacial de la sección de entrada y salida del fluido, se han detallado en la figura adjunta. Ha de entenderse que el fluido entra y sale del esquema representado, mediante conductos flexibles, y que consecuentemente no absorben momentos.

Se pide determinar los diferentes pares que el fluido crea sobre el anclaje, punto (0;0;0) del eje de coordenadas.

Considerar que el centro de gravedad del conjunto, (fluido en el interior del conducto, peso del conducto y peso de la viga que une el conducto con la pared, está situado en el punto (r_x; r_y; $-r_z$). Considerar asimismo que el peso de dicho conjunto es P. La sección de cada uno de los tramos del conducto es conocida.

Fig. 40.1
Sistema bajo estudio



Resolución:

Inicialmente se va a elegir el volumen de control definido en la figura 40.2, sobre el cual se aplicará la ecuación de momento de la cantidad de movimiento, obsérvese que el volumen de control elegido pasa por el punto de anclaje del conjunto de conductos.

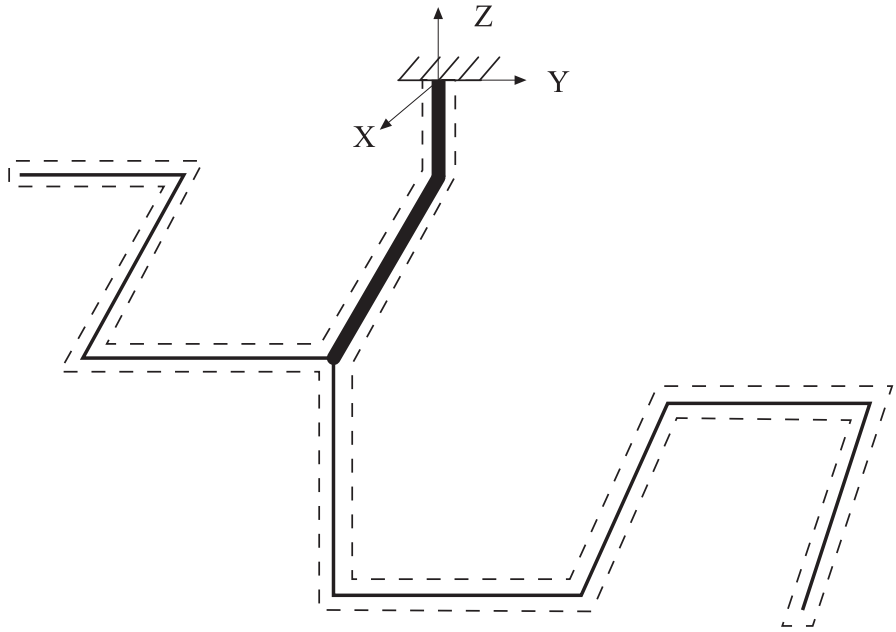


Fig. 40.2
Volumen de control utilizado

La ecuación del momento de la cantidad de movimiento aplicada al volumen de control establecido y para un sistema inercial de coordenadas, se expresa:

$$\vec{r} \wedge \oint_{SC} p\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \oint_{SC} \overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right) d\forall + \oint_{SC} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

Entendiendo que el régimen de trabajo es permanente, y que existe una única sección entrante y una sola sección saliente al volumen de control, se obtiene:

$$\vec{r} \wedge -\int_{SE} P\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge -\int_{SS} P\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge -\int_{Slat} P\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge -\int_{Slat} \overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \int_{\forall C} \rho\, \vec{g}\, d\forall =$$
$$\int_{SE} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

Los pares creados por las fuerzas de presión y esfuerzos cortantes en la superficie lateral del conducto, dan lugar a las fuerzas de reacción del contorno sobre el fluido, de donde:

$$\vec{r} \wedge \overrightarrow{P_{SE} S_{SE}} + \vec{r} \wedge -\overrightarrow{P_{SS} S_{SS}} + \sum M_{xyz} + \vec{r} \wedge -\vec{W}_{\text{peso del } \forall C} =$$
$$\int_{SE} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

En la figura 40.3 se han esquematizado los vectores asociados a cada término.

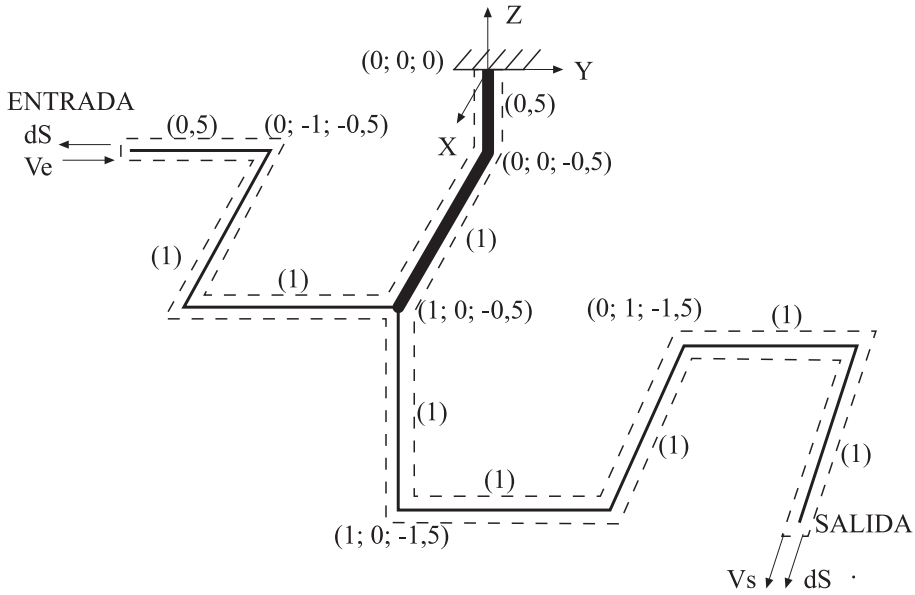


Fig. 40.3 Definición de los vectores velocidad y diferencial de superfície

Se procede ahora a realizar los correspondientes productos vectoriales.

$$\vec{r} \wedge \overrightarrow{P_{SE}S_{SE}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1.5R_y & -0.5R_z \\ 0 & P_eS_e & 0 \end{vmatrix} = 0.5R_zP_eS_e\vec{i}$$

$$\vec{r} \wedge -\overrightarrow{P_{SS}S_{SS}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ R_x & 2R_y & -1.5R_z \\ -P_sS_s & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.5R_zP_sS_s\vec{j} - \left(-2R_yP_sS_s\vec{k}\right) =$$

$$= 1.5R_zP_sS_s\vec{j} + 2R_yP_sS_s\vec{k}$$

$$\vec{r} \wedge -\vec{W}_{\text{peso del } \forall C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.3R_x & 0.3R_y & -0.75R_z \\ 0 & 0 & -W \end{vmatrix} = -0.3R_yW\vec{i} + 0.3R_xW\vec{j}$$

$$\vec{r} \wedge \vec{v}_e = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1.5R_y & -0.5R_z \\ 0 & v_e & 0 \end{vmatrix} = 0.5R_zv_e\vec{i}$$

$$\vec{r} \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ R_x & 2R_y & -1.5R_z \\ v_s & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.5R_zv_s\vec{j} - \left(2R_yv_s\vec{k}\right) = -1.5R_zv_s\vec{j} - 2R_yv_s\vec{k}$$

Sustituyendo el resultado de los productos vectoriales en la ecuación genérica, se obtiene.

$$0.5R_zP_eS_e\vec{i}+1.5R_zP_sS_s\vec{j}+2R_yP_sS_s\vec{k}-0.3R_yW\vec{i}+0.3R_xW\vec{j}+\sum M_{xyz}=$$
$$\int_{SE}\rho\left(0.5R_zv_e\vec{i}\right)\vec{v}\,\vec{ds}+\int_{SS}\rho\left(-1.5R_zv_s\vec{j}-2R_yv_s\vec{k}\right)\vec{v}\,\vec{ds}$$

Resolviendo las dos integrales restantes.

$$\int_{SE}-\rho\left(0.5R_zv_e\vec{i}\right)v_e dS=\int_{SS}-0.5R_z\rho v_e^2 dS\vec{i}=-0.5R_z\rho v_e^2S_e\vec{i}$$
$$\int_{SS}\rho\left(-1.5R_zv_s\vec{j}-2R_yv_s\vec{k}\right)v_s dS=\int_{SS}\rho\left(-1.5R_z\vec{j}-2R_y\vec{k}\right)v_s^2 dS=$$
$$\rho\left(-1.5R_z\vec{j}-2R_y\vec{k}\right)v_s^2S=-1.5R_z\rho v_s^2S_s\vec{j}-2R_y\rho v_s^2S_s\vec{k}$$

De donde la ecuación que caracteriza los diversos pares de reacción que actúan sobre el anclaje es:

$$0.5R_zP_eS_e\vec{i}+1.5R_zP_sS_s\vec{j}+2R_yP_sS_s\vec{k}-0.3R_yW\vec{i}+0.3R_xW\vec{j}+\sum M_{xyz}=$$
$$-0.5R_z\rho v_e^2S_e\vec{i}-1.5R_z\rho v_s^2S_s\vec{j}-2R_y\rho v_s^2S_s\vec{k}$$

Las velocidades entrantes y salientes al volumen de control, se definen como:

$$v_e=\frac{\dot{m}_e}{\rho_eS_e}$$

Y la velocidad de salida:

$$v_s=\frac{\dot{m}_s}{\rho_sS_s}$$

Así, los pares de reacción sobre el anclaje, vendrán dados por:

$$\sum M_{xyz}=-0.5R_z\rho v_e^2S_e\vec{i}-1.5R_z\rho v_s^2S_s\vec{j}-2R_y\rho v_s^2S_s\vec{k}$$
$$-0.5R_zP_eS_e\vec{i}-1.5R_zP_sS_s\vec{j}-2R_yP_sS_s\vec{k}+0.3R_yW\vec{i}-0.3R_xW\vec{j}$$

$$\sum M_{xyz}=\left(-0.5R_z\rho v_e^2S_e-0.5R_zP_eS_e+0.3R_yW\right)\vec{i}+$$
$$\left(-1.5R_z\rho v_s^2S_s-1.5R_zP_sS_s-0.3R_xW\right)\vec{j}+\left(-2R_y\rho v_s^2S_s-2R_yP_sS_s\right)\vec{k}$$

Los pares que el sistema crea sobre el anclaje son los mismos pero con signo contrario.

Problema 41

Enunciado

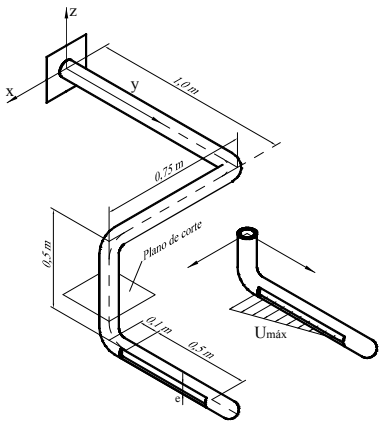
En el conducto de la figura, el fluido sale de la ranura con una velocidad uniforme que varía linealmente con la distancia Y, tal como se muestra en la figura adjunta. Si el caudal volumétrico que entra por el conducto es Q, determine:

1. El valor de la velocidad máxima.

2. Los momentos que el fluido crea sobre el anclaje.

3. Si la parte inferior del conducto pudiese girar respecto al eje z (plano de corte) y sabiendo que el par antagonista al giro está dado por M = Kω, siendo K = cte; ω = vel de giro (rad/s), halle la velocidad de giro.

Fig. 41.1



Resolución

1. Según la ecuación de continuidad en régimen permanente:

$$0 = \oint \rho \vec{v}\, d\vec{s}$$

Para las secciones de entrada y salida:

$$\dot{m}_e = \int_{ss} \rho\ \vec{v}\, d\vec{s}$$

o bien:

$$Q_e = \int_{ss} \vec{v}\, d\vec{s}$$

La ecuación que determina la distribución de velocidades en función de la distancia será:

$$a = \frac{u_{máx}}{0,6-0,1}$$

$$v = v_o - ay$$

$$v = v_o - \frac{u_{máx}}{0,6-0,1} y$$

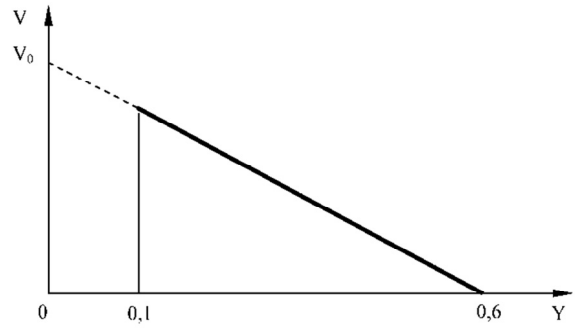


Fig. 41.2

Siendo la velocidad en el origen de coordenadas, V_0.

$$\frac{u_{máx}}{0,5} = \frac{V_0}{0,6}$$

$$V_0 = \frac{0,6u_{máx}}{0,5}$$

de donde la ecuación que determina la velocidad será:

$$v = \frac{0,6u_{máx}}{0,5} - \frac{u_{máx}}{0,6-0,1}y$$

o bien:

$$v = \frac{u_{máx}}{0,5}[0,6-y]$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad:

$$Q_e = \int_{0,1}^{0,6} u_{máx}\left(\frac{0,6-Y}{0,5}\right)e\,dy = \frac{u_{máx}}{0,5}e\left[0,6Y - \frac{Y^2}{2}\right]_{0.1}^{0.6} = u_{máx}\ e\ 0,25$$

2. La ecuación de momento cinético en régimen permanente se enuncia:

$$\vec{M}_0 = \int_{se} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v})\vec{v}d\vec{s} + \int_{ss} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v})\vec{v}d\vec{s}$$

Puesto que el flujo entrante no causa momento respecto a ningún eje, se tiene:

$$\vec{M}_0 = \int_{ss} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v})\vec{v}d\vec{s}$$

el término $\int \rho\vec{v}d\vec{s}$ representa el flujo másico saliente, que se puede dar como: $\rho Q = \rho u_{máx} e\,0,25$, aunque en este caso, puesto que la V depende del ds, es necesario hacer la integración.

El término $(\vec{r} \wedge \vec{v})$ se representa como:

$$(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0,75 & (1+Y) & -0,5 \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0,5v\,\hat{j} - (1+Y)v\,\hat{k}$$

Sustituyendo en la ecuación de cantidad de movimiento, y sustituyendo asimismo la velocidad por su valor, se tiene:

$$\vec{M}_0 = \int e\rho \left[-0,5\,u_{máx}\left(\frac{0,6-Y}{0,5}\right)\hat{j} - (1+Y)\,u_{máx}\left(\frac{0,6-Y}{0,5}\right)\hat{k} \right] u_{máx}\left(\frac{0,6-Y}{0,5}\right) dy =$$

$$= \int_{0.1}^{0.6} -e\rho\,u_{máx}^2\,0,5\left(\frac{0,6-Y}{0,5}\right)^2 \hat{j}\,dy - \int_{0.1}^{0.6} (1+Y)\,e\rho\,u_{máx}^2\left(\frac{0,6-Y}{0,5}\right)^2 \hat{k}\,dy =$$

$$= -e\rho\,u_{máx}^2 \frac{1}{0,5}\left[0,6^2 Y - 2\cdot 0,6\cdot\frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3} \right]_{0.1}^{0.6} \hat{j}$$

$$-e\rho\,u_{máx}^2 \frac{1}{0,25}\left[0,6^2 Y - 2\cdot 0,6\frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3} \right]_{0.1}^{0.6} \hat{k} +$$

$$-e\rho\,u_{máx}^2 \frac{1}{0,25}\left[0,6^2\frac{Y^2}{2} - 2\cdot 0,6\frac{Y^3}{3} + \frac{Y^4}{4} \right]_{0.1}^{0.6} \hat{k}$$

de donde los momentos sobre el anclaje vendrán dados por:

$$\vec{M}_0 = -e\rho\,u_{máx}^2\,0,0833\,\hat{j} - e\rho\,u_{máx}^2\,0,312\,\hat{k}$$

3. Aplicando la ecuación de momento cinético respecto del eje z, situado perpendicular a la sección A-A, y considerando régimen permanente (velocidad de giro constante), se tiene (únicamente la sección saliente causa momento):

$$\vec{M}_z = \int_{ss} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v})\vec{v}d\vec{s}$$

Para ese caso, considerando únicamente el par que provoca un giro sobre el aspersor, se tiene:

$$M_z = -\int_{ss} \rho y\left(v - \omega y\right)\vec{v}\,d\vec{s} = -\int_{ss} \rho y\left(v - \omega y\right) v\,ds$$

La velocidad v es la velocidad con que el fluido sale por la sección de salida del conducto (velocidad absoluta del fluido), de donde:

$$M_z = -\int_{ss} \rho y\left(u_{máx}\left(\frac{0,6-y}{0,5}\right) - \omega y \right) u_{máx}\left(\frac{0,6-y}{0,5}\right) e\,dy =$$

$$= -\int_{0,1}^{0,6} \frac{u_{máx}}{0,5}\rho\,e\,y\left[u_{máx}\frac{(0,6-y)^2}{0,5} - \omega y(0,6-y) \right] dy =$$

$$= -\frac{u_{máx}\rho e}{0,5}\int_{0,1}^{0,6}\left[\frac{u_{máx}}{0,5}\left(0,6^2 - 2\,0,6\,y + y^2\right)y - \omega y^2\left(0,6-y\right)\right]dy =$$

$$= -\frac{u_{máx}\,\rho\,e}{0,5}\left[\frac{u_{máx}}{0,5}\left(0,6^2\,\frac{y^2}{2} - 2\,0,6\,\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right) - \omega\left(0,6\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\right]_{0,1}^{0,6} =$$

$$= -\frac{u_{máx}\,\rho\,e}{0,5}\left[\begin{array}{l}\dfrac{u_{máx}}{0,5}\left(\dfrac{0,6^2}{2}\left(0,6^2 - 0,1^2\right) - \dfrac{2\;0,6}{3}\left(0,6^3 - 0,1^3\right) + \dfrac{0,6^4 - 0,1^4}{4}\right) \\ -\omega\left(\dfrac{0,6}{3}\left(0,6^3 - 0,1^3\right) - \dfrac{0,6^4 - 0,1^4}{4}\right)\end{array}\right]$$

$$= -\frac{u^2{}_{máx}\,\rho\,e}{0,5^2}\,0,009375 + \omega\,0,010625\,\frac{u_{máx}\,\rho\,e}{0,5}$$

Puesto que el par antagonista es k ω, se tiene:

$$k\,\omega = -\frac{u^2{}_{máx}\,\rho\,e}{0,5^2}0,009375 + \omega\,0,010625\,\frac{u_{máx}\,\rho\,e}{0,5}$$

$$\omega\left(-k + 0,010625\,\frac{u_{máx}\,\rho\,e}{0,5}\right) = \frac{u^2{}_{máx}\,\rho\,e}{0,5^2}0,009375;$$

$$\omega = \frac{u^2{}_{máx}\,\rho\,e}{0,5^2}\,0,009375\,\frac{1}{-k + 0,010625\,\dfrac{u_{máx}\,\rho\,e}{0,5}}$$

Problema 42

Enunciado

El esquema que muestra la figura 42.1 representa un sistema de aspersión en forma de Y, el fluido sale por las dos ranuras longitudinales en sentido opuesto y con una velocidad que disminuye linealmente con la longitud de la ranura, tal y como se esquematiza en la figura 42.1.

Se pide determinar los diversos pares que genera dicho sistema. Utilizar un sistema inercial y no inercial de coordenadas. Suponer conocido el flujo volumétrico entrante así como las dimensiones de todo el conjunto.

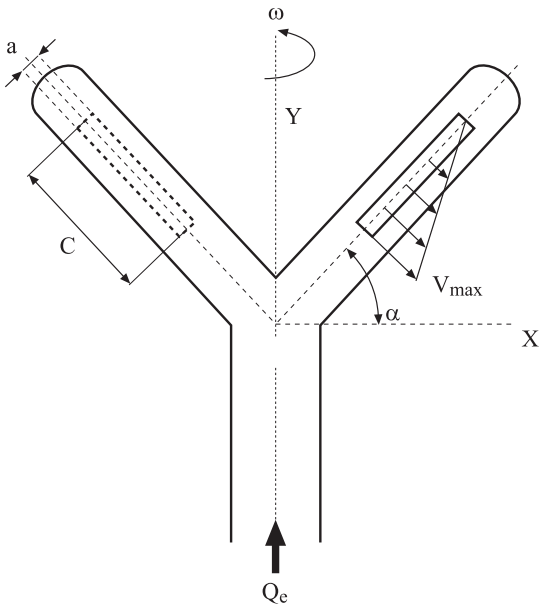


Fig. 42.1
Esquema del conjunto aspersor considerado

Resolución

1. Realización del problema mediante un sistema inercial de coordenadas.

La ecuación de momento cinético para un sistema inercial de coordenadas se expresa:

$$\vec{r} \wedge \oint_{SC} P\vec{ds} + \vec{r} \wedge \oint_{SC} \bar{\bar{\tau}}\vec{ds} + \vec{r} \wedge \int_{\forall C} \rho \vec{g} d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) d\forall + \oint_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right)\, \vec{v}\vec{ds}$$

Dicha ecuación se aplica al volumen de control definido en la figura 42.2, en donde existe una superficie entrante y dos superficies salientes. El par causado por las fuerzas de presión y esfuerzos cortantes en la superficie entrante es nulo, se considerará despreciable el par causado por los esfuerzos cortantes en las dos superficies salientes, si se trabaja en presiones relativas, el par debido a las fuerzas de presión a la salida será nulo, asimismo, será nulo el par debido al flujo de momento cinético en la superficie entrante. Considerando además que el régimen es permanente y despreciando el par resultante debido a las fuerzas másicas, se tiene:

$$\vec{M} = \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right)\, \vec{v}\vec{ds} + \int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right)\, \vec{v}\vec{ds} = 2\int_{SS} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right)\, \vec{v}\vec{ds}$$

La distribución lineal de velocidad en función de la posición de la ranura se define como:

$$V = V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right)$$

Obsérvese que esta velocidad es la que forma el producto escalar con el elemento diferencial de superficie. La posición genérica r, está definida en la figura 42.2.

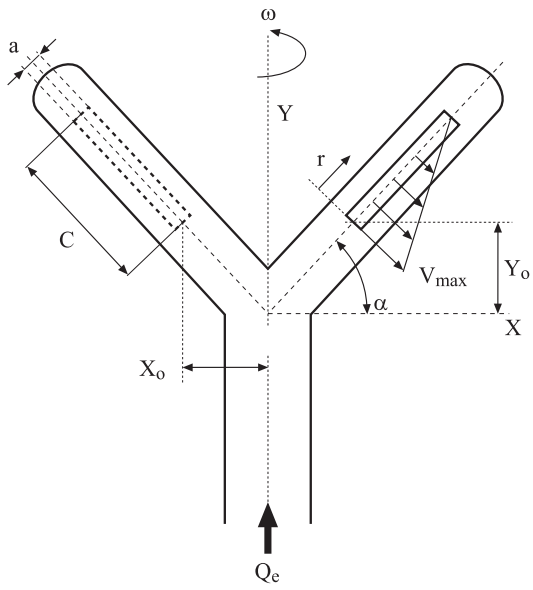


Fig. 42.2
Volumen de control elegido para aplicar la ecuación de momento cinético

La distancia X e Y, definida respecto el origen de coordenadas, a la que se encuentra un elemento diferencial de superficie saliente, se define como: $X = X_0 + r\cos\alpha$, $Y = Y_0 + r\cdot\sin\alpha$

La velocidad del flujo saliente asociada al producto vectorial, está referida al sistema de coordenadas elegido, puesto que para este apartado se utiliza un sistema inercial de coordenadas, dicha velocidad tomará la forma.

$$V_i = V_{max}\cdot\left(1-\frac{r}{c}\right) - \omega\cdot X = V_{max}\cdot\left(1-\frac{r}{c}\right) - \omega\cdot\left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right)$$

Sustituyendo la información hallada hasta el momento en la expresión del momento cinético, se obtiene:

$$M = \int_0^c \rho\left[\left[\left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right),\left(Y_0 + r\cdot\sin\alpha\right)\right] \wedge \left[V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right) - \omega\left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right)\right]\right]$$
$$\cdot\left(V_{max}\cdot\left(1-\frac{r}{c}\right)\right)\cdot a\, dr$$

Véase que esta ecuación proporciona los pares generados por uno de los brazos del aspersor.

Para el brazo derecho del aspersor, el producto vectorial da lugar a:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right) & \left(Y_0 + r\cdot\sin\alpha\right) & 0 \\ 0 & 0 & V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right) - \omega\left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \left[V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) - \omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \right] \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha \right) \hat{i}$$
$$- \left[V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) - \omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \right] \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \hat{j}$$

Sustituyendo en la ecuación del momento cinético y desglosando los pares en cada una de las direcciones coordenadas se obtiene:

$$M_{xD} = \int_0^c \rho \left[\left[V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) - \omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \right] \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha \right) \hat{i} \right] \cdot \left(V_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{c} \right) \right) a \, dr$$

$$M_{yD} = \int_0^c \rho \left[- \left[V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) - \omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \right] \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \hat{j} \right] \cdot \left(V_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{c} \right) \right) a \, dr$$

El producto vectorial que caracteriza los pares generados por el brazo izquierdo del aspersor, se expresa:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) & \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha \right) & 0 \\ 0 & 0 & -V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) + \omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \end{vmatrix} =$$

$$= \left[-V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) + \omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \right] \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha \right) \hat{i}$$
$$- \left[V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) - \omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \right] \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \hat{j}$$

De donde los pares generados por el brazo izquierdo del aspersor son:

$$M_{xI} = \int_0^c \rho \left[- \left[V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) - \omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \right] \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha \right) \hat{i} \right] \cdot \left(V_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{c} \right) \right) a \, dr$$

$$M_{yI} = \int_0^c \rho \left[- \left[V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) - \omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \right] \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \hat{j} \right] \cdot \left(V_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{c} \right) \right) a \, dr$$

Obsérvese que los pares respecto al eje de abscisas, generados por los dos brazos se compensan entre sí, mientras que los pares generados respecto al eje de ordenadas se suman, dando lugar a:

$$M_x = M_{xI} + M_{xD} = 0$$

$$M_y = M_{yI} + M_{yD}$$

$$M_y = \int_0^c 2 \, \rho \left[- \left[V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) - \omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \right] \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \hat{j} \right] \cdot \left(V_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{c} \right) \right) a \, dr$$

Reordenando se obtiene:

$$M_y = 2\,\rho\,a\int_0^c \left[-V_{max}^2\left(1-\frac{r}{c}\right)^2 \left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right) + \omega\left(V_{max}\cdot\left(1-\frac{r}{c}\right)\right)\left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right)^2 \right] dr$$

$$M_y = 2\,\rho\,a\int_0^c \left[\begin{array}{l} -V_{max}^2\left(1-2\frac{r}{c}+\frac{r^2}{c^2}\right) X_0 - V_{max}^2\left(r-2\frac{r^2}{c}+\frac{r^3}{c^2}\right)\cos\alpha \\ +\omega\left(V_{max}\cdot\left(1-\frac{r}{c}\right)\right)\left(X_0^2 + 2\,X_0\;r\cdot\cos\alpha + r^2\;\cos^2\alpha\right) \end{array} \right] dr$$

$$M_y = 2\,\rho\,a\int_0^c \left[\begin{array}{l} -V_{max}^2\left(1-2\frac{r}{c}+\frac{r^2}{c^2}\right) X_0 - V_{max}^2\left(r-2\frac{r^2}{c}+\frac{r^3}{c^2}\right)\cos\alpha \\ +\omega\;V_{max}\left[\begin{array}{l} \left(X_0^2 + 2\,X_0\;r\cdot\cos\alpha + r^2\;\cos^2\alpha\right) \\ -\left(\frac{r}{c}X_0^2 + \frac{r^2}{c}2\,X_0\;\cos\alpha + \frac{r^3}{c}\;\cos^2\alpha\right) \end{array} \right] \end{array} \right] dr$$

Integrando se obtiene:

$$M_y = 2\,\rho\,a\left[\begin{array}{l} -V_{max}^2\left(\frac{c}{3}\right) X_0 - V_{max}^2\left(\frac{c^2}{12}\right)\cos\alpha \\ +\omega\;V_{max}\left[\left(\frac{c\,X_0^2}{2} + X_0\;\frac{c^2}{3}\cdot\cos\alpha + \frac{c^3}{12}\;\cos^2\alpha\right)\right] \end{array} \right]$$

Esta ecuación representa el par de reacción respecto al eje vertical generado por los dos brazos del aspersor y cuando el sistema de referencia elegido es inercial.

2. Determinación del par generado por los dos brazos del aspersor mediante la utilización de un sistema no inercial de coordenadas.

En este apartado, se utilizarán dos sistemas coordenados. Uno de ellos se considera está girando solidario con el aspersor, mientras que el segundo se mantiene fijo e inmóvil. Es importante remarcar que para el caso bajo estudio, los dos sistemas coordenados tienen situado el origen de coordenadas en el mismo punto.

La ecuación de momento de la cantidad de movimiento para sistemas no inerciales de coordenadas, se expresa:

$$\vec{r}\wedge\oint_{SC} P\overrightarrow{ds} + \vec{r}\wedge\oint_{SC}\overline{\overline{\tau}}\;\overrightarrow{ds} + \vec{r}\wedge\int_{\forall C}\rho\vec{g}\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_{i\,x'y'z'}\right)d\forall$$

$$+\oint_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_{i\,x'y'z'}\right)\vec{v}_{x'y'z'}\overrightarrow{ds} + \vec{r}\wedge\int_{\forall C}\rho\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2R}{dt^2} + \left(\frac{d\Omega}{dt}\wedge\vec{r}\right) \\ +\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{i\,x'y'z'} \end{array} \right\} d\forall$$

Realizando los mismos considerandos que en el apartado precedente en lo que hace referencia a los pares generados por las fuerzas de presión, esfuerzos cortantes y másicas, asumiendo además que el régimen es permanente, esta ecuación toma la forma.

$$\vec{M} = \oint_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{i\,x'y'z'}\right)\vec{v}_{x'y'z'}\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \int_{\forall C} \rho\left\{\frac{d^2R}{dt^2} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{i\,x'y'z'}\right\} d\forall$$

Extendiendo ahora los términos del flujo de cantidad de movimiento para la entrada y dos salidas del volumen de control, considerando además que el par generado por el flujo de cantidad de movimiento a la entrada es nulo, y atendiendo a que los dos sistemas coordenados tienen el mismo origen, se obtiene:

$$\vec{M} = \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{i\,x'y'z'}\right)\vec{v}_{x'y'z'}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{i\,x'y'z'}\right)\vec{v}_{x'y'z'}\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \int_{\forall C} \rho\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}\right) \\ +2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{i\,x'y'z'}\end{matrix}\right\} d\forall$$

Cabe recordar que la velocidad $\vec{v}_{i\,x'y'z'}$ asociada a los términos de flujo es la componente de velocidad del fluido referida al sistema de coordenadas móvil. La velocidad $\vec{v}_{x'y'z'}$ caracteriza la asociada al fluido saliente respecto a la propia superficie de salida. Por último, la velocidad $\vec{v}_{i\,x'y'z'}$ ligada a la aceleración de Coriolis, es la asociada al elemento diferencial de volumen en estudio y se define respecto al sistema de coordenadas móvil.

Estudio del par generado por los dos términos de flujo saliente. Utilizando las definiciones halladas en el primer apartado, se tiene:

$$M = \int_0^c \rho\left[\left[\left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right), \left(Y_0 + r\cdot\sin\alpha\right)\right] \wedge \left[V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right)\right]\right] \cdot \left(V_{max}\cdot\left(1 - \frac{r}{c}\right)\right) a\, dr$$

$$+ \int_0^c \rho\left[\left[-\left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right), \left(Y_0 + r\cdot\sin\alpha\right)\right] \wedge \left[-V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right)\right]\right] \cdot \left(V_{max}\cdot\left(1 - \frac{r}{c}\right)\right) a\, dr$$

De la realización de los productos vectoriales se llega a: brazo derecho del aspersor.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right) & \left(Y_0 + r\cdot\sin\alpha\right) & 0 \\ 0 & 0 & V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \left[V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right)\right]\left(Y_0 + r\cdot\sin\alpha\right)\hat{i} - \left[V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right)\right]\left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right)\hat{j}$$

Brazo izquierdo.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\left(X_0 + r\cdot\cos\alpha\right) & \left(Y_0 + r\cdot\sin\alpha\right) & 0 \\ 0 & 0 & -V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \left[-V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) \right] \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha \right) \hat{i} - \left[V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) \right] \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \hat{j}$$

Observando el resultado de los dos productos vectoriales, se puede establecer que el par resultante respecto al eje de abscisas es nulo, el par de reacción respecto al eje de ordenadas será:

$$M_y = \int_0^c 2\,\rho \left[-\left[V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) \right] \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \hat{j} \right] \cdot \left(V_{max} \left(1 - \frac{r}{c} \right) \right) a\, dr$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$M_y = \int_0^c 2\,\rho \left[-\left[V_{max}^2 \left(1 - \frac{r}{c} \right)^2 \right] \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha \right) \right] \cdot a\, dr$$

$$M_y = \int_0^c -2\,\rho \left[V_{max}^2 \left(1 - 2\frac{r}{c} + \frac{r^2}{c^2} \right) X_0 + V_{max}^2 \left(r - 2\frac{r^2}{c} + \frac{r^3}{c^2} \right) \cos\alpha \right] a\, dr$$

$$M_y = -2\,\rho\, a\, V_{max}^2 \left[X_0 \frac{c}{3} + \cos\alpha \, \frac{c^2}{12} \right]$$

El siguiente paso es determinar los pares causados por las aceleraciones, centrípeta y Coriolis sobre los diversos tramos de las dos ramas del aspersor. Dichos tramos están representados en la figura 42.3. El estudio se va a realizar a partir de ahora por separado en cada uno de los 4 tramos .

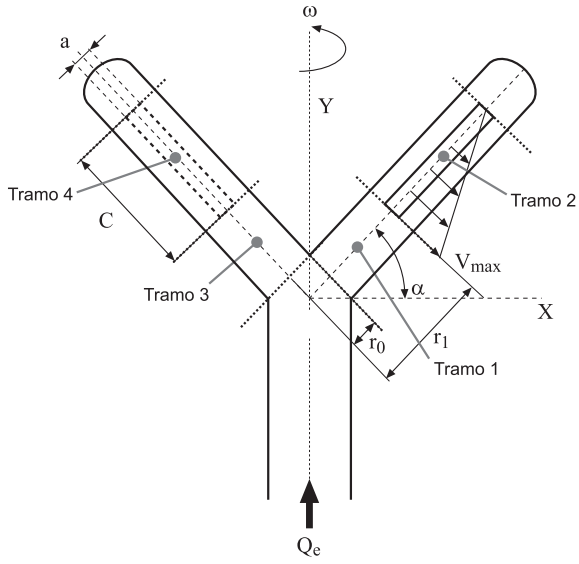


Fig. 42.3 Tramos en donde se evalúa los pares debidos a las aceleraciones, centrípeta y Coriolis

Determinación de los pares generados por las aceleraciones centrípeta y Coriolis en el tramo 1.

$$\vec{M}_{T1} = \vec{r} \wedge \int_{\forall C} \rho \left\{ \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{i\,x'y'z'} \right\} d\forall$$

La velocidad asociada en el tramo 1 a la aceleración de Coriolis, se define:

$$V = \frac{Q_{tramo1}}{S_{tramo1}} = \frac{Q_e}{2\ S_{tramo1}}$$

Véase que este es el módulo de la velocidad del fluido asociada al elemento diferencial del volumen del tramo 1, como se verá a continuación, la velocidad del fluido tiene dos componentes, la aceleración de Coriolis vale.

$$2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{i\,x'y'z'}\right) = 2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega & 0 \\ V\cos\alpha & V\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = -2\ V\cos\alpha\ \omega\ \hat{k}$$

La aceleración centrípeta será:

$$\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right) = \vec{\Omega} \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega & 0 \\ r^*\cos\alpha & r^*\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \vec{\Omega} \wedge -\left(r^*\cos\alpha\ \omega \right)\hat{k}$$

$$\vec{\Omega} \wedge -\left(r^*\cos\alpha\ \omega \right)\hat{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & -\left(r^*\cos\alpha\ \omega \right) \end{vmatrix} = -\omega^2 \left(r^*\cos\alpha \right)\ \hat{i}$$

Sustituyendo en la ecuación del momento cinético se obtiene:

$$\vec{M}_{T1} = \int_{r_0}^{r_1} \left[\left(r^*\cos\alpha\ \hat{i} + r^*\sin\alpha\,\hat{j} \right) \wedge \left(-\omega^2 \left(r^*\cos\alpha \right)\ \hat{i} - 2\ V\cos\alpha\ \omega\ \hat{k} \right) \right] \rho\ S_{tubo}\ dr^*$$

Realizando el producto vectorial.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ r^*\cos\alpha & r^*\sin\alpha & 0 \\ -\omega^2 \left(r^*\cos\alpha \right) & 0 & -2\ V\cos\alpha\ \omega \end{vmatrix}$$

$$= -2\ V\cos\alpha\ \omega\ r^*\sin\alpha\ \hat{i} + 2\ V\cos\alpha\ \omega\ r^*\cos\alpha\ \vec{j} + \omega^2 \left(r^*\cos\alpha \right)\ r^*\sin\alpha\ \hat{k}$$

De donde:

$$\vec{M}_{T1} = \int_{r_0}^{r_1} \begin{bmatrix} -2\ V\cos\alpha\ \omega\ r^*\sin\alpha\ \hat{i} + 2\ V\cos\alpha\ \omega\ r^*\cos\alpha\ \vec{j} \\ +\omega^2 \left(r^*\cos\alpha \right)\ r^*\sin\alpha\ \hat{k} \end{bmatrix} \rho\ S_{tubo}\ dr^*$$

Integrando se obtiene:

$$\vec{M}_{T1} = \rho\, S_{tubo} \left[\begin{array}{l} -2\ V\ \cos\alpha\ \omega\ \sin\alpha \left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} \right) \hat{i} + 2\ V \left(\cos\alpha \right)^2\ \omega \left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} \right) \vec{j} \\ +\omega^2 \cos\alpha\ \sin\alpha \left(\frac{r_1^3 - r_0^3}{3} \right) \hat{k} \end{array} \right]$$

Determinación de los pares generados por las aceleraciones centrípeta y Coriolis en el tramo 3.

El módulo de la velocidad asociada en el tramo 3 a la aceleración de Coriolis, se define:

$$V = \frac{Q_{tramo\,3}}{S_{tramo\,3}} = \frac{Q_e}{2\ S_{tramo\,3}}$$

La aceleración de Coriolis tomara la forma:

$$2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{i\ x'y'z'} \right) = 2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega & 0 \\ -V\cos\alpha & V\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = 2\ V\ \cos\alpha\ \omega\ \hat{k}$$

La aceleración centrípeta será:

$$\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right) = \vec{\Omega} \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega & 0 \\ -r^* \cos\alpha & r^* \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \vec{\Omega} \wedge \left(r^* \cos\alpha\ \omega \right) \hat{k}$$

$$\vec{\Omega} \wedge \left(r^* \cos\alpha\ \omega \right) \hat{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \left(r^* \cos\alpha\ \omega \right) \end{vmatrix} = \omega^2 \left(r^* \cos\alpha \right)\ \hat{i}$$

Sustituyendo en la integral correspondiente se tiene.

$$\vec{M}_{T3} = \int_{r_0}^{r_1} \left[\left(-r^* \cos\alpha\ \hat{i} + r^* \sin\alpha\ \hat{j} \right) \wedge \left(\omega^2 \left(r^* \cos\alpha \right)\ \hat{i} + 2\ V\ \cos\alpha\ \omega\ \hat{k} \right) \right] \rho\, S_{tubo}\ dr^*$$

El producto vectorial da lugar a:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -r^* \cos\alpha & r^* \sin\alpha & 0 \\ \omega^2 \left(r^* \cos\alpha \right) & 0 & 2\ V\ \cos\alpha\ \omega \end{vmatrix}$$

$$= 2\ V\ \cos\alpha\ \omega\ r^* \sin\alpha\ \hat{i} + 2\ V\ \cos\alpha\ \omega\ r^* \cos\alpha\ \vec{j} - \omega^2 \left(r^* \cos\alpha \right)\ r^* \sin\alpha\ \hat{k}$$

La integral resultante será:

$$\vec{M}_{T3} = \int_{r_0}^{r_1} \left[2\ V \cos\alpha\ \omega\ r^* \sin\alpha\ \hat{i} + 2\ V \cos\alpha\ \omega\ r^* \cos\alpha\ \vec{j} - \omega^2 \left(r^* \cos\alpha \right)\ r^* \sin\alpha\ \hat{k} \right]\ \rho\ S_{tubo}\ dr^*$$

Integrando se llega a:

$$\vec{M}_{T3} = \rho\ S_{tubo} \left[\begin{array}{l} 2\ V \cos\alpha\ \omega\ \sin\alpha \left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} \right) \hat{i} + 2\ V \left(\cos\alpha \right)^2\ \omega \left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} \right) \vec{j} \\ -\omega^2 \cos\alpha\ \sin\alpha \left(\frac{r_1^3 - r_0^3}{3} \right) \hat{k} \end{array} \right]$$

Comparando este resultado con el obtenido en el tramo 1, se observa que las componentes en dirección $\hat{i}$ y $\hat{k}$ se anulan entre ellas, en cambio, la componente en dirección $\vec{j}$ resultante es la suma de las componentes de ambos tramos.

Determinación de los pares generados por las aceleraciones centrípeta y Coriolis en el tramo 2.

Tanto en el tramo 2 como en el tramo 4 es importante destacar que la velocidad del fluido asociada al elemento diferencial de volumen, velocidad que aparece en la aceleración de Coriolis, no es constante, sino que depende de la posición del elemento diferencial de volumen.

La velocidad del fluido en el interior del conducto y en función del elemento diferencial de volumen, se define.

$$V_r = \frac{Q_e / 2 - \int_0^r \left(V_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{c} \right) \right)\ a\ dr}{S_{tramo\,2}}$$

$$V_r = \frac{Q_e / 2 - V_{max} \cdot a \left(r - \frac{r^2}{2\ c} \right)}{S_{tramo\,2}}$$

Las aceleraciones, centrípeta y Coriolis en el tramo 2 serán:

Coriolis.

$$2 \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{i\,x'y'z'} \right) = 2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega & 0 \\ V_r\ \cos\alpha & V_r\ \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = -2\ V_r\ \cos\alpha\ \omega\ \hat{k}$$

Centrípeta.

$$\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}\right) = \vec{\Omega} \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega & 0 \\ \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) & \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha\right) & 0 \end{vmatrix} = \vec{\Omega} \wedge -\omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) \hat{k}$$

$$\vec{\Omega} \wedge -\omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) \hat{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) \end{vmatrix} = -\omega^2 \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) \hat{i}$$

Sustituyendo en la integral se tiene:

$$\vec{M}_{T2} = \int_0^e \left[\begin{array}{l} \left(\left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) \hat{i} + \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha\right) \hat{j}\right) \\ \wedge \left(-\omega^2 \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) \hat{i} - 2\, V_r \cos\alpha\, \omega \hat{k}\right) \end{array} \right] \rho\, S_{tubo}\, dr$$

El producto vectorial da lugar a:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) & \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha\right) & 0 \\ -\omega^2 \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) & 0 & -2\, V_r \cos\alpha\, \omega \end{vmatrix}$$
$$= -2\, V_r \cos\alpha\, \omega \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha\right) \hat{i} + 2\, V_r \cos\alpha\, \omega \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) \hat{j}$$
$$+\omega^2 \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha\right) \hat{k}$$

Sustituyendo todos los parámetros en la integral del momento cinético para este tramo se obtiene:

$$\vec{M}_{T2} = \rho\, S_{tubo} \int_0^c \left[\begin{array}{l} -2 \left(\dfrac{Q_e/2 - V_{max} \cdot a \left(r - \dfrac{r^2}{2\,c} \right)}{S_{tramo2}} \right) \cos\alpha\, \omega \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha\right) \hat{i} \\ + \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) 2 \left(\dfrac{Q_e/2 - V_{max} \cdot a \left(r - \dfrac{r^2}{2\,c} \right)}{S_{tramo2}} \right) \cos\alpha\, \omega \hat{j} \\ +\omega^2 \left(X_0 + r \cdot \cos\alpha\right) \left(Y_0 + r \cdot \sin\alpha\right) \hat{k} \end{array} \right] dr$$

$$\vec{M}_{T2} = \rho\, S_{tubo} \int_0^c \left[\begin{array}{l} -2\cos\alpha\ \omega \left(\dfrac{Q_e Y_0}{2\, S_{tramo\,2}} + \dfrac{Q_e r \cdot \sin\alpha}{2\, S_{tramo\,2}} - \dfrac{V_{max} \cdot a\left(r - \dfrac{r^2}{2\, c} \right) Y_0}{S_{tramo\,2}} - \dfrac{V_{max} \cdot a\left(r - \dfrac{r^2}{2\, c} \right) r \cdot \sin\alpha}{S_{tramo\,2}} \right) \hat{i} \\ +2\cos\alpha\ \omega \left(\dfrac{Q_e X_0}{2\, S_{tramo\,2}} + \dfrac{Q_e r \cdot \cos\alpha}{2\, S_{tramo\,2}} - \dfrac{V_{max} \cdot a\left(r - \dfrac{r^2}{2\, c} \right) X_0}{S_{tramo\,2}} - \dfrac{V_{max} \cdot a\left(r - \dfrac{r^2}{2\, c} \right) r \cdot \cos\alpha}{S_{tramo\,2}} \right) \hat{j} \\ +\omega^2 \left(X_0 Y_0 + X_0\, r \cdot \sin\alpha + Y_0\, r \cdot \cos\alpha + r^2 \sin\alpha \cos\alpha \right) \hat{k} \end{array} \right] dr$$

Su integración da lugar a.

$$\vec{M}_{T2} = \rho\, S_{tubo} \left[\begin{array}{l} -2\ \cos\alpha\ \omega \left(\dfrac{Q_e Y_0 c}{2 S_{tramo2}} + \dfrac{Q_e \sin\alpha}{2 S_{tramo2}} \dfrac{c^2}{2} - \dfrac{V_{max} \cdot a\left(\dfrac{c^2}{3} \right) Y_0}{S_{tramo2}} - \dfrac{V_{max} \cdot a\left(\dfrac{5c^3}{24} \right) \sin\alpha}{S_{tramo2}} \right) \hat{i} \\ +\ 2\cos\alpha\ \omega \left(\dfrac{Q_e X_0 c}{2\, S_{tramo\,2}} + \dfrac{Q_e \cos\alpha}{2\, S_{tramo\,2}} \dfrac{c^2}{2} - \dfrac{V_{max} \cdot a\left(\dfrac{c^2}{3} \right) X_0}{S_{tramo\,2}} - \dfrac{V_{max} \cdot a\left(\dfrac{5c^3}{24} \right) \cos\alpha}{S_{tramo\,2}} \right) \hat{j} \\ +\ \omega^2 \left(X_0 Y_0\, c + X_0 \sin\alpha \dfrac{c^2}{2} + Y_0 \cos\alpha \dfrac{c^2}{2} + \sin\alpha \cos\alpha \dfrac{c^3}{3} \right) \hat{k} \end{array} \right]$$

Determinación de los pares generados por las aceleraciones centrípeta y Coriolis en el tramo 4.

Puesto que este tramo es homólogo al tramo 2 se operará de manera análoga. El módulo de la velocidad del fluido V_r, es el mismo que el definido para el tramo 2. Las aceleraciones, centrípeta y Coriolis para el tramo 4 se definen:

Coriolis.

$$2\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{i\,x'y'z'}\right)=2\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & \omega & 0\\ -V_r\,\cos\alpha & V_r\,\sin\alpha & 0\end{vmatrix}=2\,V_r\,\cos\alpha\,\omega\,\hat{k}$$

Centrípeta.

$$\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right)=\vec{\Omega}\wedge\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & \omega & 0\\ -\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right) & \left(Y_0+r\cdot\sin\alpha\right) & 0\end{vmatrix}=\vec{\Omega}\wedge\omega\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right)\,\hat{k}$$

$$\vec{\Omega}\wedge\omega\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right)\,\hat{k}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & \omega & 0\\ 0 & 0 & \omega\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right)\end{vmatrix}=\omega^2\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right)\,\hat{i}$$

Sustituyendo en la ecuación integral que caracteriza el par del tramo 4 se obtiene:

$$\vec{M}_{T4}=\int_0^e\left[\begin{array}{l}\left(-\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right)\hat{i}+\left(Y_0+r\cdot\sin\alpha\right)\hat{j}\right)\\ \wedge\left(\ \omega^2\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right)\,\hat{i}+2\,V_r\,\cos\alpha\,\omega\,\hat{k}\right)\end{array}\right]\rho\,S_{tramo\,4}\,dr$$

El producto vectorial da lugar a:

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ -\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right) & \left(Y_0+r\cdot\sin\alpha\right) & 0\\ \omega^2\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right) & 0 & 2\,V_r\,\cos\alpha\,\omega\end{vmatrix}$$
$$=2\,V_r\,\cos\alpha\,\omega\left(Y_0+r\cdot\sin\alpha\right)\,\hat{i}+2\,V_r\,\cos\alpha\,\omega\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right)\hat{j}$$
$$-\omega^2\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right)\left(Y_0+r\cdot\sin\alpha\right)\,\hat{k}$$

El par generado por el tramo 4 será.

$$\vec{M}_{T4}=\rho\,S_{tubo}\int_0^e\left[\begin{array}{l}2\left(\dfrac{Q_e/2-V_{max}\cdot a\left(r-\dfrac{r^2}{2\,c}\right)}{S_{tramo\,4}}\right)\cos\alpha\,\omega\left(Y_0+r\cdot\sin\alpha\right)\,\hat{i}\\ +\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right)2\left(\dfrac{Q_e/2-V_{max}\cdot a\left(r-\dfrac{r^2}{2\,c}\right)}{S_{tramo\,4}}\right)\cos\alpha\,\omega\,\hat{j}\\ -\omega^2\left(X_0+r\cdot\cos\alpha\right)\left(Y_0+r\cdot\sin\alpha\right)\,\hat{k}\end{array}\right]dr$$

Integrando se obtiene:

$$\vec{M}_{T4} = \rho\, S_{tubo} \left[\begin{array}{l} 2\cos\alpha\ \omega \left(\dfrac{Q_e\, Y_0\, c}{2 S_{tramo4}} + \dfrac{Q_e \sin\alpha}{2 S_{tramo4}} \dfrac{c^2}{2} - \dfrac{V_{max} \cdot a \left(\dfrac{c^2}{3} \right) Y_0}{S_{tramo4}} - \dfrac{V_{max} \cdot a \left(\dfrac{5c^3}{24} \right) \sin\alpha}{S_{tramo4}} \right) \hat{i} \\ +2\cos\alpha\ \omega \left(\dfrac{Q_e\, X_0\, c}{2 S_{tramo4}} + \dfrac{Q_e \cos\alpha}{2 S_{tramo4}} \dfrac{c^2}{2} - \dfrac{V_{max} \cdot a \left(\dfrac{c^2}{3} \right) X_0}{S_{tramo4}} - \dfrac{V_{max} \cdot a \left(\dfrac{5c^3}{24} \right) \cos\alpha}{S_{tramo4}} \right) \hat{j} \\ -\omega^2 \left(X_0 Y_0\, c + X_0 \sin\alpha \dfrac{c^2}{2} + Y_0 \cos\alpha \dfrac{c^2}{2} + \sin\alpha \cos\alpha \dfrac{c^3}{3} \right) \hat{k} \end{array} \right]$$

Comparando esta ecuación con la homóloga del tramo 2, se observa que las componentes en dirección $\hat{i}$ y $\hat{k}$ son exactamente las mismas aunque con diferente signo, estas componentes se anularán entre sí, la componente en dirección $\hat{j}$ es idéntica en ambas ecuaciones.

El par resultante debido a las aceleraciones, centrípeta y Coriolis en los tramos 1, 2, 3 y 4, se obtiene:

$$\vec{M}_{T\,total} = \vec{M}_{T1} + \vec{M}_{T2} + \vec{M}_{T3} + \vec{M}_{T4}$$

$$\vec{M}_{T\,total(X)} = 0$$

$$\vec{M}_{T\,total(Z)} = 0$$

$$\vec{M}_{T\,total(Y)} = 4\ V \left(\cos\alpha \right)^2\ \omega \left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} \right)$$

$$+4\ \cos\alpha\ \omega \left(\frac{Q_e\ X_0\ c}{2\ S_{tramo4}} + \frac{Q_e\ \cos\alpha}{2\ S_{tramo4}} \frac{c^2}{2} - \frac{V_{max} \cdot a \left(\dfrac{c^2}{3} \right) X_0}{S_{tramo4}} - \frac{V_{max} \cdot a \left(\dfrac{5\, c^3}{24} \right) \cos\alpha}{S_{tramo4}} \right)$$

Sumando ahora los pares en dirección Y del flujo saliente y el de las aceleraciones, centrípeta y Coriolis en todos los tramos, se obtiene el par de reacción resultante.

$$\vec{M}_{Resultante(Y)} = -2\ \rho\ a\ V_{max}^2 \left[X_0 \frac{c}{3} + \cos\alpha\ \frac{c^2}{12} \right] + 4\ V\left(\cos\alpha\right)^2\ \omega \left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} \right)$$

$$+4\ \cos\alpha\ \omega \left(\frac{Q_e\ X_0\ c}{2\ S_{tramo4}} + \frac{Q_e\ \cos\alpha}{2\ S_{tramo4}} \frac{c^2}{2} - \frac{V_{max} \cdot a \left(\frac{c^2}{3} \right) X_0}{S_{tramo4}} - \frac{V_{max} \cdot a \left(\frac{5\ c^3}{24} \right) \cos\alpha}{S_{tramo4}} \right)$$

Cabe recordar que la sección de los dos ramales que forman la y griega, se ha considerado la misma, es decir:

$$S_{tubo} = S_{tramo1} = S_{tramo2} = S_{tramo3} = S_{tramo4} = \frac{\pi\ D^2}{4}$$

Problema 43

Enunciado

Sea el dispositivo que se esquematiza en la figura 43.1, el cual está formado por tres conductos aspersores idénticos. En el extremo de cada uno de los conductos aspersores el fluido sale a una velocidad que sigue una distribución lineal, tal y como se especifica en el gráfico adjunto, obsérvese que los vectores velocidad tienen únicamente componente en dirección "Z". Suponiendo conocido el caudal másico entrante al sistema, $\dot{m}$ así como las dimensiones de todos los tramos, hallar:

1. El valor de la velocidad $V_{máx.}$

2. Los diversos pares provocados por el flujo saliente y sus direcciones. Utilizar sistema inercial y no inercial de coordenadas.

3. La velocidad angular a la que girará el aspersor, conociendo que el par antagonista al giro se puede dar como: $M = k\omega$; siendo k una constante conocida y ω la velocidad angular de giro. Utilizar el resultado obtenido mediante el sistema inercial de coordenadas.

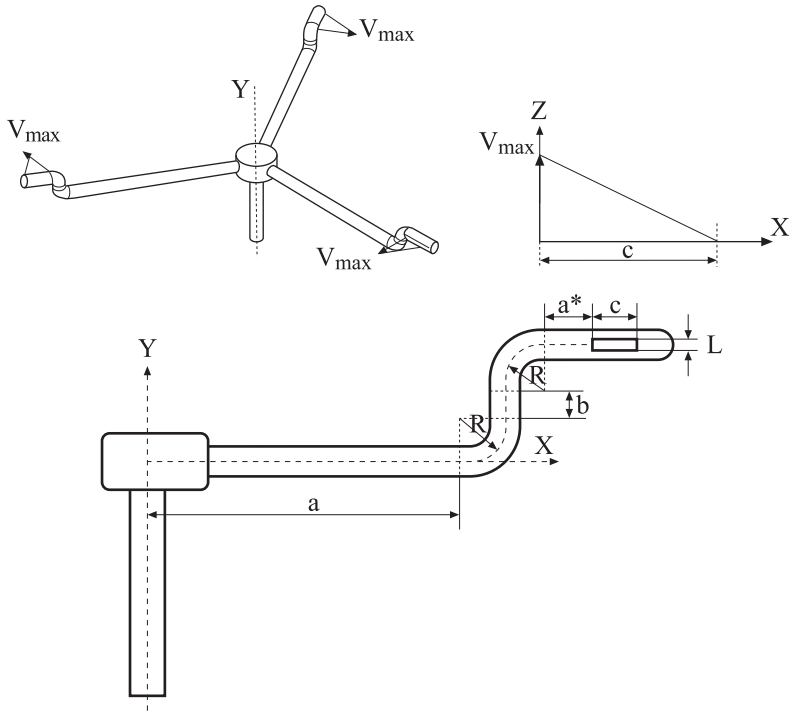


Fig. 43.1 Esquema del sistema de aspersión considerado

Resolución

1. Determinación del valor de la velocidad máxima.

Se va aplicar inicialmente la ecuación de continuidad entre la sección de entrada y las tres secciones de salida, la figura 43.2 muestra el volumen de control para uno de los brazos del aspersor.

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C} \rho d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{v} d\vec{s}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C} \rho d\forall + \int_{SS} \rho \vec{v} d\vec{s} + \int_{SE} \rho \vec{v} d\vec{s}$$

Considerando régimen permanente, la ecuación de continuidad queda:

$$0 = -\int_{SE} \rho v ds + \int_{SS1} \rho v ds + \int_{SS2} \rho v ds + \int_{SS3} \rho v ds$$

$$\int_{SE} \rho v ds = \int_{SS1} \rho v ds + \int_{SS2} \rho v ds + \int_{SS3} \rho v ds = 3\int_{SS} \rho v ds$$

$$\dot{m}_{entrada} = 3\dot{m}_{salida}$$

Obsérvese que se ha considerado que en cada una de las tres salidas fluye el mismo caudal.

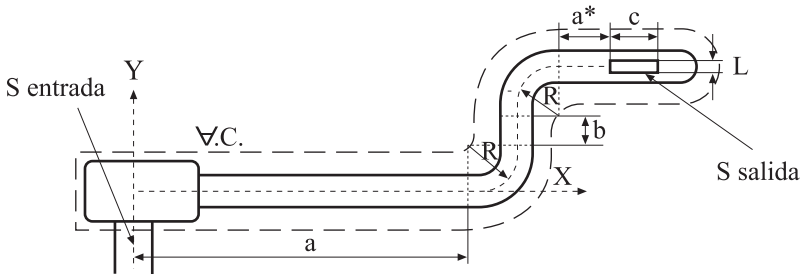


Fig. 43.2
Volumen de control considerado

Para cada una de las tres secciones de salida, el caudal másico saliente se define:

$$\dot{m}_{salida} = \int_{SS} \rho \vec{v} d\vec{s}$$

El diferencial de superficie se define como $dS = dr \cdot L$, (v. figura 43.3).

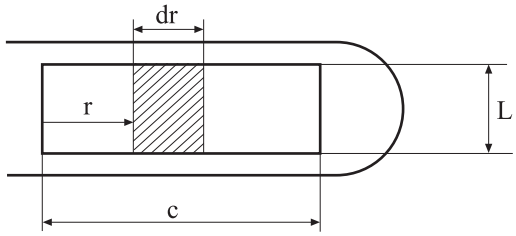


Fig. 43.3
Diferencial de superficie saliente

La velocidad del fluido saliente en cada una de las tres ranuras de salida, se puede definir como $V = k_1 + k_2 \cdot r$ para determinar los valores de las dos constantes se aplican las siguientes condiciones de contorno.

$$\begin{cases} r = 0 \rightarrow V = V_{max} \\ r = c \rightarrow V = 0 \end{cases}$$

Obteniendo:

$$\begin{cases} k_1 = V_{max} \\ k_2 = -\dfrac{V_{max}}{c} \end{cases}$$

$$V = V_{max} - \frac{V_{max}}{c} \cdot r = V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right)$$

Igualando el caudal másico entrante con el saliente y substituyendo el diferencial de superficie se obtiene:

$$\frac{\dot{m}_{entrada}}{3} = m_{salida} = \int_0^c \rho V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)L\cdot dr = \int_0^c \rho V_{max} L\cdot dr - \int_0^c \rho V_{max}\frac{r}{c}L\cdot dr$$

$$\frac{\dot{m}_{entrada}}{3} = \rho V_{max} L\cdot c - \rho V_{max}\frac{c}{2}L$$

$$\frac{\dot{m}_{entrada}}{3} = \frac{\rho c V_{max} L}{2}$$

Finalmente, aislando la velocidad máxima se concluye

$$V_{max} = \frac{2\dot{m}_{entrada}}{3\rho c L}$$

2. Los diversos pares provocados por el flujo saliente y sus direcciones. Utilizar sistema inercial y no inercial de coordenadas.

2.1 Sistema inercial.

Para encontrar los diversos pares se partirá de la ecuación de momento de cantidad de movimiento:

$$\vec{r}\wedge\oint_{SC} P\vec{ds} + \vec{r}\wedge\oint_{SC}\vec{\vec{\tau}}\,\vec{ds} + \vec{r}\wedge\int_{\forall C}\rho\vec{g}d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_i\right)d\forall + \oint_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_i\right)\vec{v}\vec{ds}$$

Si se hace un estudio detallado de cada término, la ecuación queda reducida considerablemente tal y como se muestra a continuación:

El primer término $\vec{r}\wedge\oint_{SC} P\vec{ds}$ hace referencia al momento producido por la presión que el fluido ejerce sobre las superficies del volumen de control, dicho término se acostumbra a dividir en 3 subtérminos que engloban las superficies de entrada, salida y la superficie lateral del volumen de control.

$$\vec{r}\wedge\oint_{SC} P\vec{ds} = \vec{r}\wedge\int_{SE} P\vec{ds} + \vec{r}\wedge\int_{SS} P\vec{ds} + \vec{r}\wedge\int_{SL} P\vec{ds}$$

Si se analiza el producto vectorial en la entrada del sistema $\vec{r}\wedge\int_{SE} P\vec{ds}$ se observa que el vector del resultante va en dirección tangencial, pero al tratarse de una superficie totalmente simétrica el producto vectorial se anula.

$$\vec{r}\wedge\int_{SE} P\vec{ds} = 0$$

Por otra parte, si se analiza el término a la salida $\vec{r} \wedge \int_{SS} P\overrightarrow{ds}$, dado que la presión es la atmosférica, si se consideran presiones relativas, su valor es nulo, siendo asimismo nulo el producto vectorial.

En consecuencia, el término que caracteriza el par debido a las fuerzas de presión sobre el volumen de control se resume:

$$\vec{r} \wedge \oint_{SC} P\overrightarrow{ds} = \vec{r} \wedge \int_{SL} P\overrightarrow{dS}$$

El segundo término de la ecuación de momento cinético, hace referencia al par debido a los esfuerzos cortantes que actúan sobre todas las superficies del volumen de control. De nuevo se establece:

$$\vec{r} \wedge \oint_{SC} \overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds} = \vec{r} \wedge \int_{SE} \overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \int_{SS} \overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \int_{SL} \overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds}$$

Los esfuerzos cortantes tanto a la entrada como a la salida del volumen de control, se pueden considerar muy pequeños y por tanto, el par que resulta de los mismos se puede considerar despreciable, además, en la superficie entrante, el radio medio es nulo, en consecuencia se establece:

$$\vec{r} \wedge \oint_{SC} \overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds} = \vec{r} \wedge \int_{SL} \overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds}$$

El siguiente término de la ecuación de momento cinético, caracteriza el par debido a las fuerzas másicas, $\vec{r} \wedge \int_{\forall C} \rho \vec{g} d\forall$, obsérvese que el par resultante es respecto al eje z, par que tiende a doblar el tubo del brazo aspersor, en consecuencia no afecta al par de giro. En el presente problema se va a despreciar dicho par.

El siguiente de los términos de la ecuación de momento cinético, considera la variación temporal del momento cinético en el volumen de control, dado que el flujo entrante es constante, el régimen es permanente, se ha de concluir que dicho término será nulo.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i \right) d\forall = 0$$

Así, la ecuación de momento de la cantidad de movimiento aplicada al volumen de control definido por uno de los brazos aspersores, tomará la forma:

$$\vec{r} \wedge \int_{SL} P\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \int_{SL} \overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds} = \oint_{SC} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i \right) \vec{v}\overrightarrow{ds} = \int_{SE} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i \right) \vec{v}\overrightarrow{ds} + \int_{SS} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i \right) \vec{v}\overrightarrow{ds}$$

El par generado por las fuerzas de presión y esfuerzos cortantes en la superficie lateral representa el par de reacción a determinar, el par debido al flujo de momento cinético asociado a la superficie entrante es nulo, dado que el radio medio del eje central al

elemento diferencial de superficie de flujo entrante es cero. En consecuencia, la ecuación precedente toma la forma.

$$\vec{M} = \int_{SS} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i \right) \vec{v} \overrightarrow{ds}$$

Obsérvese que la velocidad del fluido asociada al diferencial de superfície $\vec{v}\overrightarrow{ds}$, se define respecto a la propia superficie, así, para la sección de salida tomará la forma $V = V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right)$. Por otro lado, la componente de la velocidad que forma parte del producto vectorial, está referido al eje de coordenadas elegido, para un sisterma inercial de coordenadas dicha componente de velocidad se define como:

$$V_i = V - \omega\, r_x = V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right) - \omega\, r_x$$

Véase que el término $\omega\, r_x$ representa la velocidad tangencial con la que se desplaza cada elemento diferencial de brazo del aspersor.

Sustituyendo en la ecuación del momento resultante se obtiene:

$$\vec{M} = \int_{SS} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i \right) \vec{v} \overrightarrow{ds}$$

$$\vec{M} = \int_{SS} \rho \left(\vec{r} \wedge \left(V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right) - \omega\, r_x \right) \right) V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right) L dr$$

Resolviendo el producto vectorial:

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ 0 & 0 & v_z \end{vmatrix} = \left(r_y v_z \right) \hat{i} - \left(r_x v_z \right) \hat{j}$$

Recuérdese que la velocidad v_z es en realidad: $V_z = V - \omega\, r_x = V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right) - \omega\, r_x$

Sustituyendo en la ecuación del momento resultante se tiene:

$$\vec{M} = \int_{SS} \rho \left[\left(r_y v_z \right) \hat{i} - \left(r_x v_z \right) \hat{j} \right] V ds = \int_{SE} \rho \left[r_y \left(V - \omega\, r_x \right) \hat{i} - r_x \left(V - \omega\, r_x \right) \hat{j} \right] VL\, dr$$

Siendo:

$$r_y = 2R + b; \qquad r_x = a + 2R + a^* + r; \qquad V = V_{max}\left(1 - \frac{r}{c}\right)$$

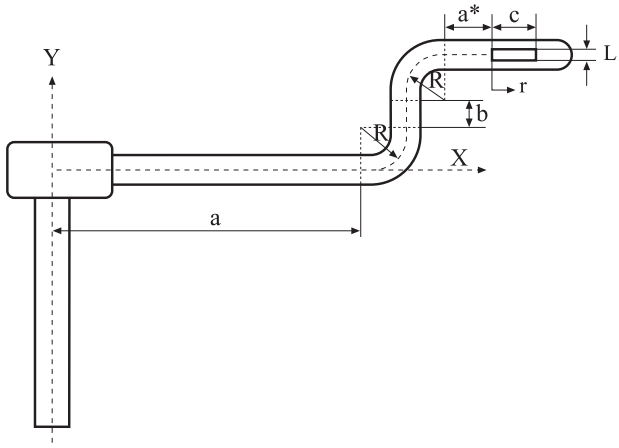


Fig. 43.4

Sustituyendo se obtiene:

$$\vec{M} = \int_0^c \rho(2R+b)\left(V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)-\omega\left(a+2R+a^*+r\right)\right)V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)L\cdot dr\cdot\hat{i}$$

$$-\int_0^c \rho\left(a+2R+a^*+r\right)\left(V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)-\omega\left(a+2R+a^*+r\right)\right)V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)L\cdot dr\cdot\hat{j}$$

Es fácil observar que esta ecuación incluye todos los pares que el fluido saliente causa sobre los ejes coordenados. Para facilitar el cálculo y encontrar los pares deseados se trabajará sobre cada uno de los componentes por separado.

Par respecto al eje X, (componente i):

$$M_x = \int_0^c \rho(2R+b)\left(V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)-\omega\left(a+2R+a^*+r\right)\right)V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)L\cdot dr$$

$$M_x = \int_0^c \rho(2R+b)LV_{max}^2\left(1-\frac{r}{c}\right)^2 dr-\int_0^c \rho(2R+b)LV_{max}\omega\left(1-\frac{r}{c}\right)\left(a+2R+a^*+r\right)dr$$

$$M_x = \int_0^c \rho(2R+b)LV_{max}^2\left(1-2\frac{r}{c}+\left(\frac{r}{c}\right)^2\right)dr$$

$$-\int_0^c \rho(2R+b)LV_{max}\omega\left[\left(a+2R+a^*\right)-\left(a+2R+a^*\right)\frac{r}{c}+r-\frac{r^2}{c}\right]dr$$

$$M_x = \rho(2R+b)LV_{max}^2\left[c-\frac{c^2}{c}+\frac{c^3}{3c^2}\right]$$

$$-\rho(2R+b)LV_{max}\omega\left[\left(a+2R+a^*\right)c-\left(a+2R+a^*\right)\frac{c^2}{2c}+\frac{c^2}{2}-\frac{c^3}{3c}\right]$$

$$M_x = \rho(2R+b)LV_{max}\left[V_{max}\frac{c}{3}-\omega\left(\left(a+2R+a^*\right)\frac{c}{2}+\frac{c^2}{6}\right)\right]$$

Par respecto el eje Y, (componente j):

$$M_y = -\int_0^c \rho\left(a+2R+a^*+r\right)\left(V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)-\omega\left(a+2R+a^*+r\right)\right)V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)L\cdot dr$$

$$M_y = -\int_0^c \rho L\left(a+2R+a^*+r\right)V_{max}{}^2\left(1-\frac{r}{c}\right)^2 dr+\int_0^c \rho\left(a+2R+a^*+r\right)^2 L\omega V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)dr$$

$$M_y = -\int_0^c \rho L\left(a+2R+a^*+r\right)V_{max}{}^2\left(1-2\frac{r}{c}+\left(\frac{r}{c}\right)^2\right)dr$$

$$+\int_0^c \rho L\omega V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)\left(\left(a+2R+a^*\right)^2+2r\left(a+2R+a^*\right)+r^2\right)dr$$

$$M_y = -L\rho V_{max}{}^2\left[\int_0^c\left(a+2R+a^*\right)\left(1-2\frac{r}{c}+\left(\frac{r}{c}\right)^2\right)dr+\int_0^c\left(r-2\frac{r^2}{c}+\frac{r^3}{c^2}\right)dr\right]$$

$$+\rho L\omega V_{max}\int_0^c\left(\left(a+2R+a^*\right)^2+2r\left(a+2R+a^*\right)+r^2\right)dr$$

$$-\rho L\omega V_{max}\int_o^c\frac{r}{c}\left(\begin{array}{l}\left(a+2R+a^*\right)^2\\+2r\left(a+2R+a^*\right)+r^2\end{array}\right)dr$$

$$M_y = -L\rho V_{max}{}^2\left(a+2R+a^*\right)\left(c-2\frac{c^2}{2c}+\frac{c^3}{3c^2}\right)-L\rho V_{max}{}^2\left(\frac{c^2}{2}-\frac{2c^3}{3c}+\frac{c^4}{4c^2}\right)$$

$$+\rho L\omega V_{max}\left[\left(a+2R+a^*\right)^2 c-2\left(a+2R+a^*\right)\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{3}\right]$$

$$-\rho L\omega V_{max}\left[\left(a+2R+a^*\right)^2\frac{c^2}{2c}-\frac{2\left(a+2R+a^*\right)c^3}{3c}+\frac{c^4}{4c}\right]$$

$$M_y = -L\rho V_{max}{}^2\left[\left(a+2R+a^*\right)\frac{c}{3}+\frac{c^2}{12}\right]$$

$$+\rho L\omega V_{max}\left[\begin{array}{l}\left(a+2R+a^*\right)^2 c-\left(a+2R+a^*\right)^2 c^2\\+\frac{c^3}{3}-\left(a+2R+a^*\right)^2\frac{c}{2}-\frac{2}{3}\left(a+2R+a^*\right)c^2-\frac{c^3}{4}\end{array}\right]=$$

$$-L\rho V_{max}{}^2\left[\left(a+2R+a^*\right)\frac{c}{3}+\frac{c^2}{12}\right]+\rho L\omega V_{max}\left[\left(a+2R+a^*\right)^2\frac{c}{2}+\left(a+2R+a^*\right)\frac{c^2}{3}+\frac{c^3}{12}\right]$$

$$M_y=\rho L V_{max}\left[\omega\left(\left(a+2R+a^*\right)^2\frac{c}{2}+\left(a+2R+a^*\right)\frac{c^2}{3}+\frac{c^3}{12}\right)-V_{max}\left(\left(a+2R+a^*\right)\frac{c}{3}+\frac{c^2}{12}\right)\right]$$

2.2 Resolución del problema mediante un sistema no inercial de coordenadas.

Se partirá de la ecuación del momento cinético para sistemas no inerciales:

$$\vec{r}\wedge\oint_{sc}P\overrightarrow{ds}+\vec{r}\wedge\oint_{sc}\overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds}+\vec{r}\wedge\int_{vc}\rho\vec{g}d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_i\right)d\forall+\oint_{sc}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_i\right)\vec{v}\overrightarrow{ds}$$
$$+\vec{r}\wedge\int_{\forall c}\rho\left(\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}+\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{r}+\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}+2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_i\right)d\forall$$

Realizando las mismas simplificaciones que en el caso precedente y considerando régimen permanente, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\vec{r}\wedge\int_{SL}P\overrightarrow{dS}+\vec{r}\wedge\int_{SL}\overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{dS}=\int_{SS}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_i\right)\vec{v}\overrightarrow{ds}+\vec{r}\wedge\int_{\forall c}\rho\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}+2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_i\right)d\forall$$

La parte izquierda de la ecuación representa el par de reacción a determinar, de donde:

$$\vec{M}=\int_{SS}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_i\right)\vec{v}\overrightarrow{ds}+\vec{r}\wedge\int_{\forall c}\rho\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}+2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_i\right)d\forall$$

La integral que caracteriza el par debido al flujo saliente se resuelve:

$$\vec{r}\wedge\vec{v}_i=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ r_x&r_y&0\\0&0&v_z\end{vmatrix}=\left(r_yv_z\right)\hat{i}-\left(r_xv_z\right)\hat{j}$$

Siendo:

$$r_y=b+2R;\qquad r_x=a+2R+a^*+r;\qquad v_z=V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)$$

Sustituyendo en la integral correspondiente y considerando que el diferencial de superficie para flujo saliente es ds = L dr , se obtiene:

Ahora se sustituirá cada valor en la integral, así como el diferencial de superficie:

$$\oint_{SS}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_i\right)\vec{v}\overrightarrow{ds}=\int_0^c\rho L\left[\begin{array}{l}\left(\left(b+2R\right)V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)\right)\hat{i}\\-\left(\left(a+2R+a^*+r\right)V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)\right)\hat{j}\end{array}\right]V_{max}\left(1-\frac{r}{c}\right)dr$$

$$= \rho L V_{max}{}^2 \left[\begin{array}{l} \left(\left(b + 2R \right) \left(c - \dfrac{2c^2}{2c} + \dfrac{c^3}{3c^2} \right) \right) \hat{i} \\ - \left(\left(a + 2R + a^* \right) \left(c - \dfrac{c^2}{c} + \dfrac{c^3}{3c^2} \right) + \dfrac{c^2}{2} - \dfrac{2c^3}{3c} + \dfrac{c^4}{4c^2} \right) \hat{j} \end{array} \right]$$

Agrupando términos se llega:

$$\int_{SS} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i \right) \vec{v} \overrightarrow{ds} = \rho L V_{max}{}^2 \left(\left(\left(b + 2R \right) \frac{c}{3} \right) \vec{i} - \left(\left(a + 2R + a^* \right) \frac{c}{3} + \frac{c^2}{12} \right) \hat{j} \right)$$

Para resolver la integral que caracteriza los pares generados por las aceleraciones centrípeta y Coriolis, se dividirá el conducto en 6 tramos diferentes, tramos definidos en la figura 43.5.

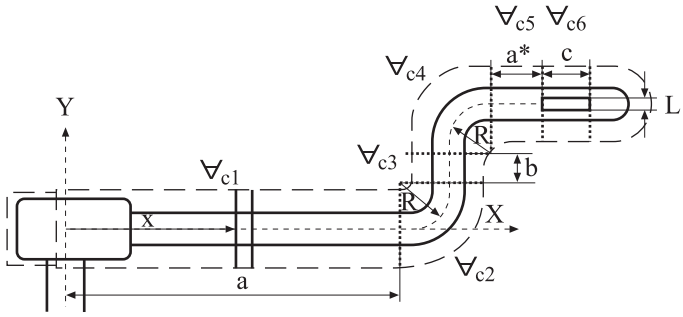


Fig. 43.5 Diferentes tramos donde se estudiarán las aceleraciones centrípeta y Coriolis

La velocidad media del fluido en el interior del conducto, tramos de $\forall_{C1}$ a $\forall_{C5}$ se determina:

$$v \cdot S = \int_0^c V_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{c} \right) L dr = V_{max} L \left(c - \frac{c}{2} \right)$$

$$v = \frac{V_{max} L \dfrac{c}{2}}{S} = \frac{Q}{S}$$

Donde S es la sección del conducto. Véase que dicha velocidad media tiene el mismo módulo aunque direcciones diferentes en cada uno de los cinco tramos mencionados $\forall_{C1}$ a $\forall_{C5}$. De hecho en el tramo $\forall_{C6}$, el módulo de la velocidad media del fluido depende de la posición del elemento diferencial de volumen elegido. En lo que sigue, se evaluarán los pares generados por las aceleraciones, centrípeta y Coriolis en cada uno de los seis tramos definidos en la figura 43.5.

*Primer tramo: La posición (*x*) del elemento diferencial de volumen genérico, oscila de* 0 *a* a:

Coriolis:

$$2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}=2\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\0&\omega&0\\v&0&0\end{vmatrix}=-2\omega v\hat{k}$$

Centrípeta:

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}=\vec{\Omega}\wedge\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\0&\omega&0\\x&0&0\end{vmatrix}=\vec{\Omega}\wedge\left[-\omega x\hat{k}\right]=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\0&\omega&0\\0&0&-\omega x\end{vmatrix}=-\omega^2 x\hat{i}$$

Los pares generados por dichas aceleraciones se definen:

$$\vec{M}_1=\vec{r}\wedge\int_0^a\rho\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}+2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right)Sdx=\int_0^a\vec{r}\wedge\rho\left(-\omega^2 x\hat{i}-2\omega v\hat{k}\right)Sdx$$

De la realización del producto vectorial se obtiene:

$$\vec{r}\wedge\rho Sdx\left(-\omega^2 x\hat{i}-2\omega v\hat{k}\right)=\rho Sdx\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\x&0&0\\-\omega^2 x&0&-2\omega v\end{vmatrix}=2\omega vx\rho Sdx\hat{j}$$

Finalmente, el par generado por las aceleraciones centrípeta y Coriolis en el tramo de conducto comprendido entre los puntos 0 y *a*, valdrá:

$$\vec{M}_1=\int_0^a\rho S2\omega vx\hat{j}dx=\rho S\omega a^2\frac{V_{max}L\frac{c}{2}}{S}\hat{j}=\rho\omega a^2 V_{max}L\frac{c}{2}\hat{j}$$

Segundo tramo. El ángulo γ *oscila entre* 0 *y* $\pi/2$*, ver figura 43.6.*

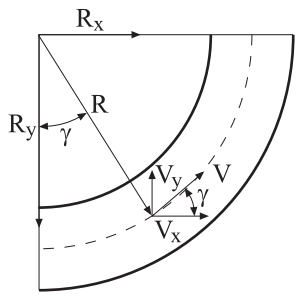


Fig. 43.6
Segundo tramo de conducto a evaluar

Para este tramo, el elemento diferencial de volumen toma la forma: $d\forall = SRd\gamma$

Las aceleraciones se definen.

Coriolis:

$$2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}=2\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & \omega & 0\\ v\cos\gamma & v\sin\gamma & 0\end{vmatrix}=-2\omega v\cos\gamma\hat{k}$$

Centrípeta:

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}=\vec{\Omega}\wedge\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & \omega & 0\\ a+R\sin\gamma & R-R\cos\gamma & 0\end{vmatrix}=\vec{\Omega}\wedge\left[-\omega\left(a+R\sin\gamma\right)\hat{k}\right]$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & \omega & 0\\ 0 & 0 & -\omega\left(a+R\sin\gamma\right)\end{vmatrix}$$

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}=-\omega^2\left(a+R\sin\gamma\right)\hat{i}$$

El par resultante se define:

$$\vec{M}_2=\vec{r}\wedge\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}+2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right)SRd\gamma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vec{r}\wedge\rho\left(-\omega^2\left(a+R\sin\gamma\right)\hat{i}-2\omega v\cos\gamma\hat{k}\right)\ SRd\gamma$$

Desarrollando el producto vectorial.

$$\vec{r}\wedge\rho SRd\gamma\left(-\omega^2\left(a+R\sin\gamma\right)\hat{i}-2\omega v\cos\gamma\hat{k}\right)=\rho SRd\gamma$$

$$\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a+R\sin\gamma & R-R\cos\gamma & 0\\ -\omega^2\left(a+R\sin\gamma\right) & 0 & -2\omega v\cos\gamma\end{vmatrix}$$

$$=\rho SRd\gamma\begin{bmatrix}\left(R-R\cos\gamma\right)\left(-2\omega v\cos\gamma\right)\hat{i}-\left(a+R\sin\gamma\right)\left(-2\omega v\cos\gamma\right)\hat{j}\\ -\left(R-R\cos\gamma\right)\left(-\omega^2\left(a+R\sin\gamma\right)\right)\hat{k}\end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\vec{M}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho SRd\gamma \begin{bmatrix} (R - R\cos\gamma)(-2\omega v\cos\gamma)\hat{i} + (a + R\sin\gamma)(2\omega v\cos\gamma)\hat{j} \\ +(R - R\cos\gamma)(\omega^2(a + R\sin\gamma))\hat{k} \end{bmatrix}$$

$$= 2\rho R\omega \left[\left(-RV_{max} L\frac{c}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right)\hat{i} + \left(V_{max} L\frac{c}{2}\left(a + \frac{R}{2}\right)\right)\hat{j} + \left(S\omega\left(Ra\pi + R^2 - Ra\right)\right)\hat{k} \right]$$

Tercer tramo. Tramo vertical de longitud b*, la velocidad del fluido es en sentido ascendente.*

Coriolis:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = 2\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & v & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Centrípeta:

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} = \vec{\Omega} \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ a + R & R + y & 0 \end{vmatrix} = \vec{\Omega} \wedge \left[-(a + R)\omega\hat{k} \right]$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & -(a + R)\omega \end{vmatrix} = -(a + R)\omega^2\hat{i}$$

De donde el par generado por este tramo se obtiene:

$$\vec{M}_3 = \vec{r} \wedge \int_0^b \rho\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\right) Sdy = \int_0^b \vec{r} \wedge \rho\left(-(a + R)\omega^2\hat{i}\right) Sdy$$

Desarrollando el integrando.

$$\vec{r} \wedge \rho Sdy\left(-(a + R)\omega^2\hat{i}\right) = \rho Sdy \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ (a + R) & R + y & 0 \\ -(a + R)\omega^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a + R)\omega^2 (R + y)\rho Sdy\hat{k}$$

Finalmente se llega a:

$$\vec{M}_3 = \int_0^b (a + R)\omega^2 (R + y)\rho Sdy = \left((a + R)\omega^2 \rho SRb + (a + R)\omega^2 \rho S\frac{b^2}{2} \right)\hat{k}$$

Cuarto tramo. El ángulo γ *descrito en la figura 43.7 está definido entre* 0 *y* $\pi/2$:

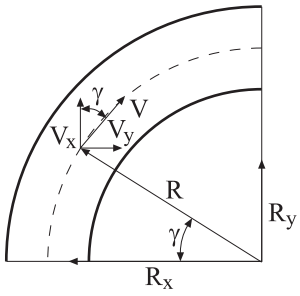


Fig. 43.7
Cuarto tramo del conducto bajo estudio

Coriolis:

$$2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}=2\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & \omega & 0\\ v\sin\gamma & v\cos\gamma & 0\end{vmatrix}=-2\omega v\sin\gamma\hat{k}$$

Centrípeta:

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}=\vec{\Omega}\wedge\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & \omega & 0\\ a+2R-R\cos\gamma & R+b+R\sin\gamma & 0\end{vmatrix}=\vec{\Omega}\wedge\left[-\omega\left(a+2R-R\cos\gamma\right)\hat{k}\right]$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & \omega & 0\\ 0 & 0 & -\omega\left(a+2R-R\cos\gamma\right)\end{vmatrix}=-\omega^2\left(a+2R-R\cos\gamma\right)\hat{i}$$

El par resultante queda:

$$\vec{M}_4=\vec{r}\wedge\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r}+2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right)SRd\gamma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vec{r}\wedge\rho\begin{pmatrix}-\omega^2\left(a+2R-R\cos\gamma\right)\hat{i}\\ -2\omega v\sin\gamma\hat{k}\end{pmatrix}SRd\gamma$$

El desarrollo del integrando da lugar a:

$$\vec{r}\wedge\rho\left(-\omega^2\left(a+2R-R\cos\gamma\right)\hat{i}-2\omega v\sin\gamma\hat{k}\right)SRd\gamma=$$

$$\rho SRd\gamma\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a+2R-R\cos\gamma & R+b+R\sin\gamma & 0\\ -\omega^2\left(a+2R-R\cos\gamma\right) & 0 & -2\omega v\sin\gamma\end{vmatrix}=$$

$$\rho SRd\gamma\begin{bmatrix}\left(R+b+R\sin\gamma\right)\left(-2\omega v\sin\gamma\right)\hat{i}-\left(a+2R-R\cos\gamma\right)\left(-2\omega v\sin\gamma\right)\hat{j}-\\ \left(R+b+R\sin\gamma\right)\left(-\omega^2\left(a+2R-R\cos\gamma\right)\right)\hat{k}\end{bmatrix}$$

El par para este cuarto tramo queda:

$$\vec{M}_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho SR d\gamma \begin{bmatrix} (R+b+R\sin\gamma)(-2\omega v\sin\gamma)\hat{i} - (a+2R-R\cos\gamma)(-2\omega v\sin\gamma)\hat{j} \\ -(R+b+R\sin\gamma)\left(-\omega^2(a+2R-R\cos\gamma)\right)\hat{k} \end{bmatrix}$$

$$\vec{M}_4 = 2\rho R\omega \begin{bmatrix} \left(-V_{max} L\frac{c}{2}\left((R+b)+R\frac{\pi}{4}\right)\right)\hat{i} + \left(V_{max} L\frac{c}{2}\left(a+\frac{3R}{2}\right)\right)\hat{j} \\ +\left(\omega S\left((R+b)(a+2R)\pi - 2Rb + 2Ra + R^2\right)\right)\hat{k} \end{bmatrix}$$

Quinto tramo. Véase que este tramo es un tramo recto horizontal que tiene por longitud a^*, *figura 43.1*.

Coriolis:

$$2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} = 2\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\omega v\hat{k}$$

Centrípeta:

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r} = \vec{\Omega}\wedge\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ a+2R+x & 2R+b & 0 \end{vmatrix} = \vec{\Omega}\wedge\left[-(a+2R+x)\omega\hat{k}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & -(a+2R+x)\omega \end{vmatrix} = -(a+2R+x)\omega^2\hat{i}$$

La integral queda:

$$\vec{M}_5 = \vec{r}\wedge\int_0^{a^*}\rho\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r} + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right)Sdx = \int_0^{a^*}\vec{r}\wedge\rho\left(-2\omega v\hat{k} - (a+2R+x)\omega^2\hat{i}\right)Sdx$$

Desarrollando el interior de la integral:

$$\vec{r}\wedge\rho\left(-2\omega v\hat{k} - (a+2R+x)\omega^2\hat{i}\right)Sdx = \rho Sdx\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a+2R+x & 2R+b & 0 \\ -(a+2R+x)\omega^2 & 0 & -2\omega v \end{vmatrix}$$

$$= \rho Sdx\left((-2\omega v)(2R+b)\hat{i} + 2\omega v(a+2R+x)\hat{j} + (a+2R+x)\omega^2(2R+b)\hat{k}\right)$$

Finalmente:

$$\vec{M}_5 = \int_0^{a^*} \rho S\left((-2\omega v)(2R+b)\hat{i} + 2\omega v(a+2R+x)\hat{j} + (a+2R+x)\omega^2(2R+b)\hat{k}\right)dx =$$

$$\rho S\omega \begin{pmatrix} -2\dfrac{V_{max}L\dfrac{c}{2}}{S}(2R+b)a^*\hat{i} + 2\dfrac{V_{max}L\dfrac{c}{2}}{S}\left(a^*(a+2R)+\dfrac{a^{*2}}{2}\right)\hat{j} \\ +\omega(2R+b)\left(a^*(a+2R)+\dfrac{a^{*2}}{2}\right)\hat{k} \end{pmatrix}$$

$$= \rho\omega \begin{bmatrix} -2V_{max}L\dfrac{c}{2}(2R+b)a^*\hat{i} + 2V_{max}L\dfrac{c}{2}\left(a^*(a+2R)+\dfrac{a^{*2}}{2}\right)\hat{j} \\ +S\omega(2R+b)\left(a^*(a+2R)+\dfrac{a^{*2}}{2}\right)\hat{k} \end{bmatrix}$$

Sexto tramo. Tramo horizontal donde existe la ranura por donde sale el fluido hacia el exterior.

Obsérvese que en este tramo, la velocidad del fluido asociada al elemento diferencial de volumen, varía en función de la posición de dicho diferencial, así, la velocidad genérica en función de la posición r, (v. figura 43.3), se define:

$$v_x = \frac{Q_e - \int_0^x V_{max}\left(1-\dfrac{r}{c}\right)Ldr}{S} = \frac{Q_e - V_{max}L\left(x-\dfrac{x^2}{2c}\right)}{S}$$

Las aceleraciones asociadas a este tramo, serán:

Coriolis:

$$2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} = 2\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ v_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\omega v_x\hat{k}$$

Centrípeta:

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\vec{r} = \vec{\Omega}\wedge\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ a+2R+a^*+x & (b+2R) & 0 \end{vmatrix} = \vec{\Omega}\wedge\left[-(a+2R+a^*+x)\omega\hat{k}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & -(a+2R+a^*+x)\omega \end{vmatrix} = -(a+2R+a^*+x)\omega^2\hat{i}$$

El par resultante, tendrá la forma:

$$\vec{M}_6 = \vec{r} \wedge \int_0^c \rho\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\right) Sdx$$

$$= \int_0^c \vec{r} \wedge \rho \left(-2\omega \frac{Q_e - V_{max} L\left(x - \frac{x^2}{2c}\right)}{S} \hat{k} - \left(a + 2R + a^* + x\right)\omega^2 \hat{i} \right) Sdx$$

Si se desarrolla el integrando queda:

$$\vec{r} \wedge \rho \left(-2\omega \frac{Q_e - V_{max} L\left(x - \frac{x^2}{2c}\right)}{S} \hat{k} - \left(a + 2R + a^* + x\right)\omega^2 \hat{i} \right) Sdx$$

$$= \rho S dx \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a + 2R + a^* + x & (b + 2R) & 0 \\ -\left(a + 2R + a^* + x\right)\omega^2 & 0 & -2\omega \dfrac{Q_e - V_{max} L\left(x - \frac{x^2}{2c}\right)}{S} \end{vmatrix}$$

$$= \rho S dx \left(\begin{array}{l} -(b + 2R)\, 2\omega \dfrac{Q_e - V_{max} L\left(x - \frac{x^2}{2c}\right)}{S} \hat{i} \\ + \left(a + 2R + a^* + x\right) 2\omega \dfrac{Q_e - V_{max} L\left(x - \frac{x^2}{2c}\right)}{S} \hat{j} + (b + 2R)\left(a + 2R + a^* + x\right)\omega^2 \hat{k} \end{array} \right)$$

Y resolviendo la integral se obtiene:

$$\vec{M}_6 = \int_0^c \rho S \begin{pmatrix} -(b+2R)2\omega \dfrac{Q_e - V_{max} L\left(x - \dfrac{x^2}{2c}\right)}{S} \hat{i} \\ +\left(a+2R+a^*+x\right)2\omega \dfrac{Q_e - V_{max} L\left(x - \dfrac{x^2}{2c}\right)}{S} \hat{j} \\ +(b+2R)\left(a+2R+a^*+x\right)\omega^2 \hat{k} \end{pmatrix} dx$$

$$= \rho\omega \begin{bmatrix} -(b+2R)\left(2Q_e c - \dfrac{2V_{max} L c^2}{3}\right)\hat{i} \\ +\left(\begin{matrix} 2\left(a+2R+a^*\right)Q_e c - \left(a+2R+a^*\right)\dfrac{2V_{max} L c^2}{3} \\ +Q_e c^2 - \dfrac{10 V_{max} L c^3}{24} \end{matrix}\right)\hat{j} \\ +S\omega(b+2R)\left(\left(a+2R+a^*\right)c + \dfrac{c^2}{2}\right)\hat{k} \end{bmatrix}$$

Par resultante respecto a los ejes coordenados fijos.

Para determinar el par resultante, únicamente es necesario sumar los pares obtenidos hasta el momento, dicho sumatorio se realiza a continuación para cada una de las direcciones coordenadas.

$$M_x = \rho L V_{max}{}^2 (b+2R)\frac{c}{3} + 2\rho R\omega\left(-R V_{max} L \frac{c}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$+2\rho R\omega\left(-V_{max} L \frac{c}{2}\left((R+b) + R\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$-\rho\omega 2 V_{max} L \frac{c}{2}(2R+b)a^* - \rho\omega(b+2R)\left(2Q_e c - \frac{2V_{max} L c^2}{3}\right)$$

$$M_y = \rho L V_{max}{}^2\left(-\left(\left(a+2R+a^*\right)\frac{c}{3} + \frac{c^2}{12}\right)\right) + \rho\omega a^2 V_{max} L\frac{c}{2} + 2\rho R\omega\left(V_{max} L\frac{c}{2}\left(a + \frac{R}{2}\right)\right)$$
$$+2\rho R\omega\left(V_{max} L\frac{c}{2}\left(a + \frac{3R}{2}\right)\right) + \rho\omega 2 V_{max} L\frac{c}{2}\left(a^*(a+2R) + \frac{a^{*2}}{2}\right)$$
$$+\rho\omega\begin{pmatrix} 2\left(a+2R+a^*\right)Q_e c \\ -\left(a+2R+a^*\right)\dfrac{2V_{max} L c^2}{3} + Q_e c^2 - \dfrac{10 V_{max} L c^3}{24} \end{pmatrix}$$

$$M_z = 2\rho R\omega\left(S\omega\left(Ra\pi + R^2 - Ra\right)\right) + \left(a+R\right)\omega^2\rho SRb + \left(a+R\right)\omega^2\rho S\frac{b^2}{2}$$

$$+2\rho R\omega\left(\omega S\left(\left(R+b\right)\left(a+2R\right)\pi - 2Rb + 2Ra + R^2\right)\right) + \rho\omega S\omega\left(2R+b\right)\left(a^*\left(a+2R\right) + \frac{a^{*2}}{2}\right)$$

$$+\rho\omega S\omega\left(b+2R\right)\left(\left(a+2R+a^*\right)c + \frac{c^2}{2}\right)$$

3. La velocidad angular a la que girará el aspersor, conociendo que el par antagonista al giro se puede dar como $M = k\omega$; siendo k una constante conocida y ω la velocidad angular de giro.

Por último, para hallar la velocidad angular a la que girará el aspersor se tendrá que tener en cuenta el par antagonista de giro, el cual es un dato del enunciado:

$$M_a = \omega K\,\hat{j}$$

En el segundo apartado de este problema, se ha determinado el par respecto al eje y generado por uno de los brazos del aspersor. El par total será tres veces el par encontrado, (la suma del par de cada brazo).

Igualando y operando se encuentra la velocidad angular del sistema considerado.

$$\omega K = 3\left\{-L\rho {V_{max}}^2\left[\left(a+2R+a^*\right)\frac{c}{3} + \frac{c^2}{12}\right] + \rho L\omega V_{max}\left[\begin{array}{l}\left(a+2R+a^*\right)^2\frac{c}{2} \\ +\left(a+2R+a^*\right)\frac{c^2}{3} + \frac{c^3}{12}\end{array}\right]\right\}$$

$$\omega K - 3\rho L\omega V_{max}\left[\left(a+2R+a^*\right)^2\frac{c}{2} + \left(a+2R+a^*\right)\frac{c^2}{3} + \frac{c^3}{12}\right] =$$

$$-3L\rho {V_{max}}^2\left[\left(a+2R+a^*\right)\frac{c}{3} + \frac{c^2}{12}\right]$$

$$\omega = \frac{-3L\rho {V_{max}}^2\left[\left(a+2R+a^*\right)\frac{c}{3} + \frac{c^2}{12}\right]}{K - 3L\rho V_{max}\left[\left(a+2R+a^*\right)^2\frac{c}{2} + \left(a+2R+a^*\right)\frac{c^2}{3} + \frac{c^3}{12}\right]}$$

Problema 44

Enunciado

Sea la turbina Pelton, esquematizada en la figura 44.1. Si se supone que el agua sale de la tobera a una velocidad V constante, que la velocidad de giro de la turbina es ω, también constante, y que el fluido sale de los álabes de la turbina con un ángulo α, determine:

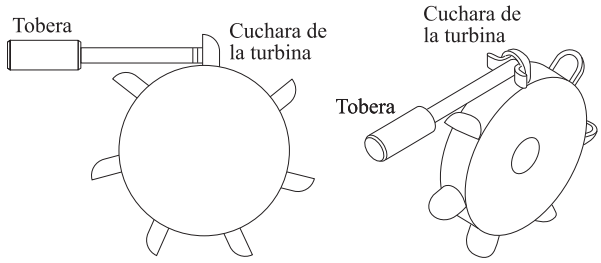
1. La potencia comunicada al eje de la turbina. Considere r el radio de la turbina.

2. Cuál sería la velocidad de giro de la turbina si el par antagonista se estima que está determinado por: $M = a + b\,\omega$, siendo *a* y *b* dos constantes conocidas y ω la velocidad de giro de la turbina.

3. Determine la ecuación del rendimiento de la turbina. ¿Qué consideraciones se pueden realizar para una turbina de ∞ álabes?

Datos: V, ω, r, α, a, b, (ω ha de ser determinada en el apartado 2); ϕ = diámetro del jet

Fig. 44.1 Esquema de una turbina Pelton

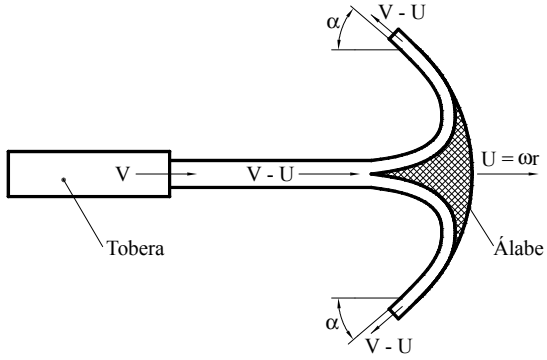


TURBINA PELTON

Resolución

1. Utilizando un volumen de control que se desplace con el álabe de la turbina, y aplicando la ecuación de continuidad entre la entrada y, salida de dicho volumen de control, se desprende que la velocidad relativa del líquido a la entrada y a la salida es la misma.

Fig. 44.2 Incidencia del chorro en el álabe con las velocidades relativas del fluido respecto a un volumen de control que se desplaza con el álabe



Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al mismo volumen de control móvil en régimen permanente se establece:

$$\sum F_{ext\,x} = -\int_{vc} P\,\vec{n}\,ds + \oint_{sc} \bar{\bar{\tau}}\,ds + m\,\vec{g} = \oint_{sc} \rho \vec{V}_x \vec{V}\,d\vec{s} = \int_{ssc_1} \rho\,\vec{V}_x\,\vec{V}\,d\vec{s} + \int_{ssc_2} \rho\,\vec{V}_x\,\vec{V}\,d\vec{s}$$

despreciando los efectos de las fuerzas másicas:

$$\sum F_{x\,superficiales} = \int_{se} \rho \underset{(+)}{\vec{V}_x} \underset{(-)}{\vec{V}\,d\vec{s}} + \int_{ss} \rho \underset{(-)}{\vec{V}_x} \underset{(+)}{\vec{V}\,d\vec{s}} \cdot 2$$

$$F_{x\,sup} = -\rho (v - \omega r)^2 \, S_e - \rho \, (v - \omega r)^2 \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot S_s$$

$$= -\rho (v - \omega r)^2 \left[S_e + 2 S_s \cdot \cos\alpha \right]$$

y, aplicando la ecuación de continuidad entre la entrada y las salidas del volumen de control, se obtiene:

$$S_e \, V_e = S_s \, V_s \cdot 2$$

$$V_e = V_s = V - \omega r$$

$$S_e = 2 S_s = S$$

$$F_{x\,superficiales} = -\rho \left(v - \omega r \right)^2 \cdot S \cdot \left(1 + \cos\alpha \right)$$

Ésta es la fuerza que el contorno realiza sobre el fluido la fuerza que el fluido causa sobre el alabe es:

$$F_x = \rho \left(v - \omega r \right)^2 \cdot S \cdot \left(1 + \cos\alpha \right)$$

El par creado sobre el eje de giro debido a la fuerza hallada será:

$$M_o = F_x \wedge r = F_x \cdot r \, \hat{k} = \rho \left(v - \omega r \right)^2 \cdot S \cdot \left(1 + \cos\alpha \right) \cdot r \, \hat{k}$$

La potencia comunicada será:

$$N_a = M_o \cdot \omega = \rho \left(v - \overbrace{\omega r}^{u} \right)^2 \cdot S \cdot \left(1 + \cos\alpha \right) \cdot \overbrace{r \cdot \omega}^{u}$$

Para este volumen de control móvil, el caudal entrante al volumen de control será:

$$\left(v - \omega r \right) \cdot S = Q_E$$

de donde:

$$N_a = \rho \left(v - \omega r \right) \cdot Q_E \cdot \left(1 + \cos\alpha \right) \cdot \omega r$$

2. Si el par antagonista es del tipo:

M = A + B ω, donde A y B son constantes, y ω es la velocidad de giro en rad/s.

Igualando el par creado por el fluido al par antagonista, se tiene:

$$M_o = \rho \left(v - \omega r \right)^2 \cdot S \cdot \left(1 + \cos\alpha \right) \cdot r = A + B\,\omega$$

ecuación de segundo grado; de aquí se despeja ω:

$$v^2 - 2\,v\cdot\omega r + \omega^2 r^2 = [A + B\omega]\frac{1}{\rho S r(1+\cos\alpha)};$$

$$-2\,v\cdot\omega r + \omega^2 r^2 - \omega\frac{B}{\rho S r(1+\cos\alpha)} + v^2 - \frac{A}{\rho S r(1+\cos\alpha)} = 0;$$

$$\omega^2 - 2v\frac{\omega}{r} - \omega\frac{B}{\rho S r^3(1+\cos\alpha)} + \frac{v^2}{r^2} - \frac{A}{\rho S r^3(1+\cos\alpha)} = 0;$$

$$\omega^2 - \omega\left[\underbrace{\frac{2v}{r} + \frac{B}{\rho S r^3(1+\cos\alpha)}}_{R}\right] + \underbrace{\frac{v^2}{r^2} - \frac{A}{\rho S r^3(1+\cos\alpha)}}_{S} = 0;$$

$$\omega^2 - \omega R + S = 0$$

$$\omega = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4S}}{2}$$

3. Determinación del rendimiento de la turbina:

Considerando que el nivel libre del agua en la presa de aguas arriba de la turbina, respecto a ésta, es H, y despreciando las pérdidas en el conducto de la alimentación, se tiene que la potencia teórica a la entrada de la turbina es:

$$N_o = \rho g H Q = \rho g H v\cdot S = \frac{2}{2}\rho g H v\cdot S$$

puesto que $v = \sqrt{2gH}$

$$N_o = \frac{1}{2}\rho S v^3$$

con lo cual el rendimiento se puede establecer como:

$$\eta = \frac{N_a}{N_o} = \frac{\rho(v-\omega r)^2\cdot S(1+\cos\alpha)\cdot\omega r}{\frac{1}{2}\rho S v^3} =$$

$$\eta = \frac{(v-\omega r)^2\cdot\omega r\cdot(1+\cos\alpha)}{\frac{1}{2}v^3}$$

El rendimiento máximo de la turbina se obtendrá para un valor del ángulo α de 0 grados. Para este considerando se tiene:

$$\eta = \frac{(v-\omega r)^2\cdot\omega r\cdot 2}{\frac{1}{2}v^3} = \frac{(v-u)^2\cdot 4\,u}{v^3} = 4\frac{u}{v}\left[\frac{v-u}{v}\right]^2$$

$$\eta = 4\frac{u}{v}\left[\frac{v-u}{v}\right]^2$$

Derivando el η respecto a $\frac{u}{v}$ se obtendrá el valor de $\frac{u}{v}$ para el cual la función será máxima:

$$\frac{d\eta}{d\left(\frac{u}{v}\right)} = 4\left[1-4\frac{u}{v}+3\left(\frac{u}{v}\right)^2\right] = 0\,;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{1}{3} = 0\,;$$

De los dos resultados posibles, el único que tiene sentido físico es: $\frac{u}{v} = \frac{1}{3}$;

con lo cual el rendimiento máximo se obtendrá cuando la relación entre la velocidad de salida del fluido por la tobera y la velocidad tangencial de la turbina sean:

$$\frac{u}{v} = \frac{\omega r}{v} = \frac{1}{3}$$

por otro lado, se observa que todo el proceso se ha realizado partiendo de la fuerza que el líquido ejerce sobre un álabe en solitario; puesto que la turbina tiene un número elevado de álabes que se suceden, se puede considerar que, en promedio, todo el caudal incidente realiza un trabajo; así, la fuerza media que actúa sobre los álabes se puede expresar (para α=0 grados):

$$F_{media} = 2\rho S \cdot v\left(v-\omega r\right)$$

Véase que ahora se considera que todo el caudal que sale por la tobera actúa sobre los álabes.

La potencia media será $N_{media} = 2\rho S v\left(v-\omega r\right)\omega r$

El rendimiento se obtendrá

$$\eta = \frac{2\rho S v\left(v-\omega r\right)\omega r}{\frac{1}{2}\rho S v^3} = \frac{4\left(v-\omega r\right)\omega r}{v^2}$$

$$\eta = 4\frac{u}{v}\left(1-\frac{u}{v}\right);$$

$$\frac{d\eta}{d\left(\frac{u}{v}\right)} = 4\left(1-2\frac{u}{v}\right) = 0$$

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{2}$$

Siendo ésta la relación de velocidades más apropiada para una turbina Pelton real.

Problema 45

Enunciado

Sea un sistema de aspersión tal como el que se ilustra en la figura 45.1. Los brazos que unen las dos toberas tienen forma de perfil aerodinámico Göttinguen 682, con una anchura y un ángulo de ataque constantes. Los coeficientes de arrastre y sustentación del perfil aerodinámico están dados por:

$$C_L = \frac{L}{\rho \frac{1}{2} V^2_{\infty} S_{proyectada}}$$

$$C_D = \frac{D}{\rho \frac{1}{2} V^2_{\infty} S_{proyectada}}$$

Considerar que la sección proyectada es la perpendicular al movimiento en cada caso.

El valor de los mismos se puede determinar partiendo de la curva polar adjunta, conocido el ángulo de ataque $\alpha = 3^{\circ}$ figuras 45.2 y 45.3.

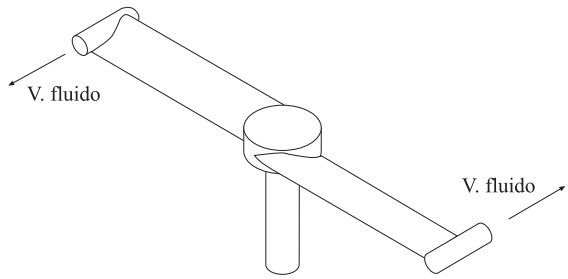


Fig. 45.1 Esquema del sistema de aspersión considerado

Halle:

1. El par que crean los chorros de fluido, en función de la velocidad de salida del líquido por las toberas.

2. El par que se crea en el eje central, debido a la fuerza de arrastre.

3. Si el peso del conjunto es de 1.000 N y ha de ser soportado por el efecto de sustentación de los álabes, determine: la velocidad de giro necesaria para producir la sustentación requerida. ¿Cuál es el caudal requerido para que dicha sustentación exista? Radio del aspersor: R = 0,5 m.

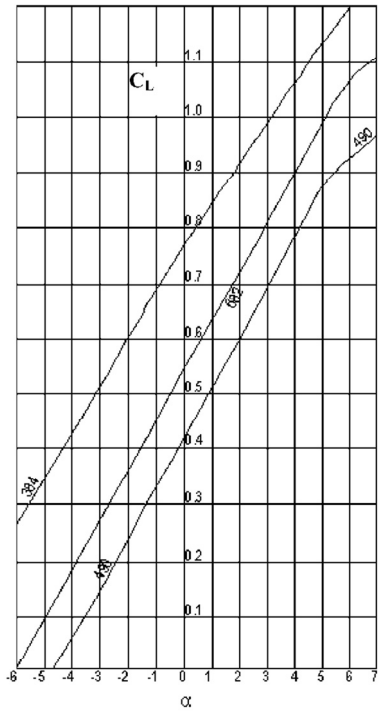


Fig. 45.2
Coeficiente de sustentación C_L, en función del ángulo de ataque α

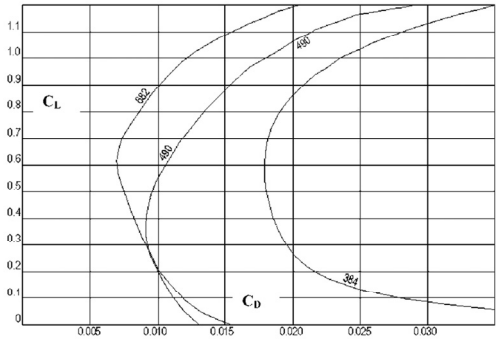


Fig. 45.3
Curvas polares correspondientes a un colectivo de perfiles Göttinguen

Resolución

1. La ecuación del momento de la cantidad de movimiento se expresa:

$$\vec{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho(\vec{r}\wedge\vec{v})\,d\forall + \oint_{SC} \rho(\vec{r}\wedge\vec{v})\,\vec{V}\,d\vec{s}$$

Aplicada al conjunto aspersor, teniendo en cuenta la simetría del mismo y que el flujo entrante no causa momento, se obtiene:

$$\vec{M}_0 = \int_{Ssalida} 2\rho(\vec{r}\wedge\vec{v})\vec{V}\,d\vec{s} = 2\rho\,r\,(V_{fluido} - \omega\,r)\,Q_{un\ aspersor} = \rho\,r\,(V_{fluido} - \omega\,r)\,Q_{entrante}$$

2. El momento resistente establecido para un diferencial de superficie del álabe vendrá dado por:

$$D = C_D\,\rho\,\frac{1}{2}V_\infty^2 S_{PD} \;\Rightarrow\; dD = C_D\,\rho\,\frac{1}{2}V_\infty^2\, b\sin\alpha\, dr \;\Rightarrow\; dD = C_D\,\rho\,\frac{1}{2}\omega^2 r^2\, b\sin\alpha\, dr$$

b = anchura del álabe. $dS_{PD} = b\sin\alpha\, dr$;

De la figura 45.2 entrando para un α de 3º se obtiene un valor del coeficiente de sustentación de C_L=0,82; con dicho valor del coeficiente de sustentación y para el perfil aerodinámico Göttinguen 682, a partir de la figura 45.3 se obtiene un valor del coeficiente de arrastre de C_D = 0,0088.

El momento producido por este diferencial de fuerza será:

$$dM = r\,dD = \frac{1}{2}C_D\,\rho\, r\, r^2\ \omega^2\, b\sin\alpha\, dr$$

de donde el momento que se opone al movimiento vendrá dado, teniendo en cuenta que existen dos álabes.

$$M = \int_0^R 2\,\frac{1}{2}C_D\,\rho\, b\sin\alpha\, r^3\,\omega^2\, dr = C_D\,\rho\ b\sin\alpha\int_0^R r\,(\omega^2 r^2)\,dr$$

$$M = C_D\,\rho\ b\ \sin\alpha\ \omega^2\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{4}C_D\,\rho\ b\sin\alpha\ \omega^2 R^4$$

Igualando los pares de arrastre y de momento cinético, se obtiene:

$$\frac{1}{4}C_D\,\rho\, b\sin\alpha\,\omega^2 R^4 = 2\,\rho\, r\,(V_{flu} - \omega\, r)\,Q_{un\ aspersor} = \ \rho\, r\,(V_{flu} - \omega\, r)\,Q_{entrante}$$

Para r = R, que es la distancia de los chorros de salida al eje de giro, queda:

$$\frac{1}{4}C_D\ \ b\sin\alpha\,\omega^2 R^3 = \ \ (V_{flu} - \omega R)\,Q_{entrante}$$

En función de la sección proyectada de uno de los brazos del aspersor S_{PD} = R b sin α, se tiene:

$$\frac{1}{4}C_D\,S_{PD}\ \ \omega^2 R^2 = \ (V_{flu} - \omega R)\,Q_{entrante}$$

3. La fuerza de sustentación viene dada por:

$$L = \rho\, C_L\,\frac{1}{2}\,V_\infty^2\, S_{PL}$$

Para un diferencial de superficie, se tiene:

$$dL = \rho\, C_L\, \frac{1}{2}\, V_\infty^2\, b \cos\alpha\, dr$$

$$dL = \rho\, C_L\, \frac{1}{2}\, \omega^2\, r^2\, b \cos\alpha\, dr$$

$$\int_0^L dL = \int_0^R \rho\, C_L\, \frac{1}{2}\, \omega^2\, r^2\, b \cos\alpha\, dr$$

de donde la fuerza de sustentación para los dos brazos del aspersor será:

$$L = 2\,\rho\, C_L\, \frac{1}{2}\, \omega^2 \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R b\, \cos\alpha$$

$$L = \rho\, C_L\, \frac{\omega^2\, R^2\, b \cos\alpha\, R}{3} = \rho\, C_L\, \frac{1}{3} S_{PL}\, \omega^2\, R^2; \quad S_{PL} = R\, b \cos\alpha;$$

Puesto que L= 1.000 N; $\rho\, C_L\, \frac{1}{3} S_{PL}\, \omega^2\, R^2 = 1.000 = L$

Con lo cual la velocidad de giro será:

$$\omega = \sqrt{\frac{L}{\rho\, C_L\, \frac{1}{3} S_{PL}\, R^2}}$$

Una vez determinado ω para hallar el caudal circulante, se utilizará la ecuación hallada en el apartado 2:

$$\frac{1}{4} C_D\, S_{PD}\ \ \omega^2\, R^2 = \left(V_{flu} - \omega\, R\right) Q_{entrante} = 2 \quad \left(V_{flu} - \omega\, R\right) Q_{un\ aspersor}$$

$$V_{flu} = \frac{Q_{un\ aspersor}}{S_{conducto\ aspersor}}; \quad \frac{1}{4} C_D\, S_{PD}\ \ \omega^2\, R^2 = 2\left(\frac{Q_{un\ aspersor}}{S_{conducto\ aspersor}} - \omega\, R\right) Q_{un\ aspersor}$$

$$\frac{Q_{un\ aspersor}^2}{S_{conducto}} - \omega R\, Q_{un\ aspersor} = \frac{1}{8} C_D\, S_{PD}\, \omega^2\, R^2$$

$$Q_{un\ aspersor}^2 - \omega\, R\, S_{conducto}\, Q_{un\ aspersor} - \frac{1}{8} C_D\, S_{PD}\, \omega^2\, R^2\, S_{conducto} = 0$$

Ecuación de segundo grado de la cual se obtendrá el caudal saliente en una de las toberas.

Problema 46

Enunciado

Se desea realizar los cálculos preliminares para el estudio de un helicóptero. A priori, se estima que la masa del helicóptero será m, el rotor principal tendrá tres palas y el de la cola, cuatro. Las dimensiones principales del rotor principal y el de la cola se establecen en el dibujo adjunto. (Figura 46.1).

Si el ángulo de ataque de los álabes de ambos rotores se quiere a priori mantener constante igual a 4 grados, y para el perfil aerodinámico elegido se conoce que los coeficientes de sustentación y arrastre, tanto para el rotor principal como el de la cola, son: $C_L = 0{,}8$; $C_D = 0{,}0135$, se pide:

1. Hallar la velocidad de giro del rotor principal ω para que el helicóptero de masa m se mantenga en suspensión.

2. Determinar la ecuación de la velocidad de giro del rotor principal en función de la altura a la que se encuentre el helicóptero. Téngase en cuenta que la variación de la temperatura del aire con la altura de la atmósfera terrestre es $T = T_0 - Kh$.

T y T_0 están dados en grados kelvin. K es una constante conocida. h es la altura en metros.

3. Hallar la potencia del motor del rotor principal cuando el helicóptero se encuentra al nivel del mar.

4. Determinar el radio r_4 para que el rotor de cola compense el par creado por el rotor principal. Considerar que el rotor de cola gira a una velocidad angular constante Ω.

Recuérdese que:

$$\text{Fuerza de sustentación} = L = \rho C_L \frac{1}{2} V_\infty^2 S; \qquad \text{fuerza de arrastre} = D = \rho C_D \frac{1}{2} V_\infty^2 S;$$

V_∞= velocidad del fluido sobre cada elemento diferencial de superficie del álabe.

S= superficie proyectada, en planta, del álabe.

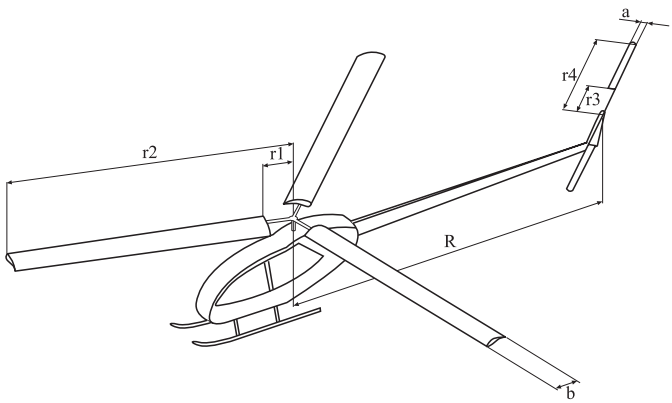


Fig. 46.1 Esquema del helicóptero. Por razones de nitidez, se ha realizado el dibujo con únicamente dos palas en el rotor de cola. No obstante, en los cálculos se consideraran cuatro palas, puesto que así lo indica el enunciado

Resolución

1. Velocidad de giro para que el helicóptero de masa m se mantenga en suspensión.

Se conocen los siguientes datos: Ángulo de ataque $\alpha = 4º$; $C_L = 0,8$; $C_D = 0,0135$

El balance ha de ser tal que la fuerza de sustentación sea igual al peso del helicóptero. La fuerza de sustentación viene dada por:

$$L = \rho_{aire} C_L \frac{1}{2} V_\infty^2 S$$

S= superficie proyectada del álabe

V_∞= velocidad del fluido

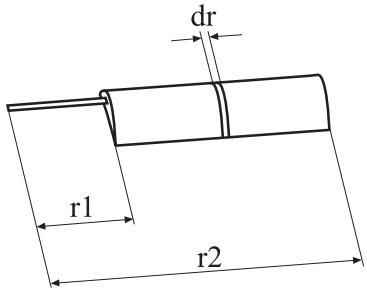


Fig. 46.2

$$\int_0^L dL_1 = \int_{r_1}^{r_2} \rho C_L \frac{1}{2} (\omega r)^2 \, b \cos\alpha \, dr$$

$$L_1 = \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 b \cos\alpha \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$L_1 = \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 b \cos\alpha \frac{r_2^3 - r_1^3}{3};$$

Esta es la fuerza de sustentación que crea un álabe; puesto que hay tres, la fuerza de sustentación será

$$L_{\text{rotor principal}} = \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 b \cos\alpha \left(r_2^3 - r_1^3 \right) = \text{masa del helicóptero} * g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{heli} \cdot g}{\rho C_L \frac{1}{2} b \cos\alpha \left(r_2^3 - r_1^3 \right)}}$$

2. Para hallar la velocidad de giro en función de la altura a la que se encuentra el helicóptero respecto al nivel del mar, es necesario determinar la densidad del aire en función de dicha altura: considerando el aire como fluido ideal:

$$\rho = \frac{P}{RT}; \qquad dp = -\rho g dh$$

$T = T_0 - kh$; T_0 = temperatura a nivel del mar

k = constante conocida

La presión del aire en función de la altura será

$$\int_{P_{atm}}^{P} \frac{dP}{P} = \int_{0}^{h} -\frac{g}{R(T_0 - kh)}dh$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_{atm}}\right) = \frac{g}{kR}\ln\left[\frac{T_0 - kh}{T_0}\right]$$

$$P = P_{atm}\left(\frac{T_0 - kh}{T_0}\right)^{\frac{g}{kR}}$$

Esta ecuación proporciona la variación de la presión del aire con la altura.

La velocidad de giro del rotor en función de la altura a la que se encuentra el helicóptero vendrá dada:

La densidad del aire en función de la altura es

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{P}{R(T_0 - kh)} = \frac{1}{R(T_0 - kh)}\cdot P_{atm}\left(\frac{(T_0 - kh)}{T_0}\right)^{\frac{g}{RK}} = \frac{P_{atm}}{R\ T_0^{\left(\frac{g}{RK}\right)}}\cdot(T_0 - kh)^{\left(\frac{g}{RK}-1\right)}$$

Con lo que:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{heli}\cdot g}{C_L\frac{1}{2}b\cos\alpha\left(r_2^{\,3} - r_1^{\,3}\right)\cdot\frac{P_{atm}}{RT_0^{\left(\frac{g}{RK}\right)}}\cdot(T_0 - kh)^{\left(\frac{g}{RK}-1\right)}}}$$

Esta ecuación da la velocidad de giro del rotor principal en función de la altura a la que esté situado el helicóptero.

3. La potencia del rotor principal será la que se requiera para vencer el par generado por dicho rotor. El par creado por una de las palas del rotor principal será

$$D = C_D\,\rho\frac{1}{2}v_\infty^2 s$$

$$dD = C_D\,\rho\frac{1}{2}\omega^2 r^2 b\,\sin\alpha\,dr$$

$$\int_0^M dM = dD\cdot r = \int_{r_1}^{r_2} C_D\,\rho\frac{1}{2}\omega^2 r^2 r\cdot b\,\sin\alpha\,dr$$

$$M_1 = C_D\,\rho\frac{1}{2}\omega^2 b\,\sin\alpha\,\frac{\left(r_2^4 - r_1^4\right)}{4}$$

El par creado por las tres palas es

$$M_{total} = 3 \cdot C_d \rho \frac{1}{8} \omega^2 b \ \sin\alpha \left(r_2^4 - r_1^4 \right)$$

La potencia del motor será $N_{motor} = M_{total} \cdot \omega$

4. Para hallar el par que sobre el eje principal crea el rotor de cola, se determinará la fuerza que en sentido horizontal crean las cuatro palas del rotor de cola. Dicha fuerza por la distancia entre los dos ejes R será el par que el rotor de cola crea sobre el eje principal.

La fuerza en sentido horizontal creada por una de las palas se determina:

Sea β el ángulo de ataque de las palas del rotor de cola. La velocidad de giro del rotor de cola es Ω.

$$\int_0^L dL = \int_{r_3}^{r_4} \rho C_L \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \ a \cos\beta \ dr$$

$$L_1 = C_L \ \rho \ \frac{1}{2} \ \Omega^2 \ a \cos\beta \frac{\left(r_4^3 - r_3^3 \right)}{3}$$

La fuerza creada por las cuatro palas del rotor de cola es

$$L_{cola} = \frac{2}{3} C_L \ \rho \Omega^2 \ a \cos\beta \left(r_4^3 - r_3^3 \right)$$

El par sobre el eje del rotor principal creado por el rotor de cola será

$$M_{cola} = \frac{2}{3} C_L \ \rho \ \Omega^2 \ a \cos\beta \left(r_4^3 - r_3^3 \right) \cdot R$$

Obsérvese que el parámetro R caracteriza la distancia perpendicular entre el eje de giro del rotor principal y el eje de giro del rotor de cola.

Este par es el que ha de compensar el par creado por el rotor principal, con lo cual

$$3 C_D \frac{1}{8} \ \omega^2 \ b \ \sin\alpha \left(r_2^4 - r_1^4 \right) = \frac{2}{3} C_L \ \Omega^2 \ a \cos\beta \ R \left(r_4^3 - r_3^3 \right)$$

$$r_4 = \sqrt[3]{\frac{C_d \frac{3}{8} \omega^2 \ b \ \sin\alpha \left(r_2^4 - r_1^4 \right)}{\frac{2}{3} C_L \ \Omega^2 \ a \cos\beta \ R} + r_3^3}$$

ecuación que caracteriza el radio del rotor de cola para compensar el par de giro creado por el rotor principal.

Problema 47

Enunciado

Sea el aspersor esquematizado de la fig. 47.1, conocidos el diámetro de las toberas de salida, las longitudes L y L_1 de los brazos del aspersor, el ángulo θ, el caudal másico entrante $\dot{m}$, la densidad del fluido ρ y el par antagonista $M_o = k\ \omega$, siendo k = constante, y ω la velocidad de giro en rad/s. Para la realización de este problema, no es necesario que se consideren en los diversos tramos del conducto, las aceleraciones centrípeta y coriolis.

Se pide hallar la ecuación que determina la velocidad de giro del aspersor.

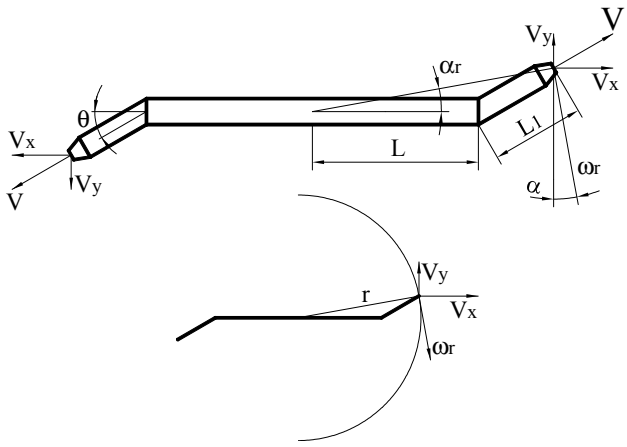


Fig. 47.1 Esquema del aspersor, con sus parámetros físicos fundamentales

Resolución

La ecuación de momento cinético para sistemas inerciales se enuncia:

$$\sum M_0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall c}(\vec{r}\wedge\vec{v})\rho\, d\forall + \int_{sc}(\vec{r}\wedge\vec{v})\rho\,\vec{v}\,d\vec{s}$$

En régimen permanente, para los dos brazos:

$$\sum M_0 = 2\int_{ss}(\vec{r}\wedge\vec{v})\,\rho\,\vec{v}\,d\vec{s}$$

Datos:

$$\begin{aligned} r_x &= L + L_1\cos\theta \\ r_y &= L_1\sin\theta \end{aligned} \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{L_1\sin\theta}{L + L_1\cos\theta} \qquad r = \frac{r_x}{\cos\alpha} = \frac{L + L_1\cos\theta}{\cos\alpha}$$

$$v_x = v\cos\theta + \omega r\,\sin\alpha = v\cos\theta + \omega\frac{L + L_1\cos\theta}{\cos\alpha}\sin\alpha$$

$$v_y = v\,\sin\theta - \omega r\cos\alpha = v\,\sin\theta - \omega\,(L + L_1\cos\theta)$$

$$\vec{r}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = r_x v_y \hat{k} - r_y v_x \hat{k}\ ;$$

$$\vec{r}\wedge\vec{v} = (L + L_1\cos\theta)\cdot[v\,\sin\theta - \omega(L + L_1\cos\theta)]\hat{k}$$
$$-L_1\sin\theta\left[v\cos\theta + \omega\frac{L + L_1\cos\theta}{\cos\alpha}\sin\alpha\right]\hat{k}$$

$$\sum M_0 = 2\int_{SC}\rho\begin{bmatrix}(L + L_1\cos\theta)\cdot\left[v\,\sin\theta - \omega(L + L_1\cos\theta)\right]\hat{k} \\ -L_1\sin\theta\left[v\cos\theta + \omega\frac{L + L_1\cos\theta}{\cos\alpha}\sin\alpha\right]\hat{k}\end{bmatrix}\cdot\vec{v}\,ds$$

$$\sum M_0 = k\cdot\omega = \dot{m}\begin{bmatrix}(L + L_1\cos\theta)\cdot\left[v\sin\theta - \omega\,(L + L_1\cos\theta)\right] \\ -L_1\sin\theta\left[v\cos\theta + \omega\frac{L + L_1\cos\theta}{\cos\alpha}\sin\alpha\right]\end{bmatrix}$$

$$k\cdot\omega = \dot{m}\begin{bmatrix}(L + L_1\cos\theta)^2\cdot[-\omega] + \left[(L + L_1\cos\theta)\right]v\sin\theta \\ -L_1 v\sin\theta\cos\theta - \omega\,L_1\sin\theta\frac{L + L_1\cos\theta}{\cos\alpha}\sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$\frac{k\cdot\omega}{\dot{m}} + \omega\,(L + L_1\cos\theta)^2 + \omega\,L_1\sin\theta\frac{L + L_1\cos\theta}{\cos\alpha}\sin\alpha =$$
$$= (L + L_1\cos\theta)v\sin\theta - L_1 v\sin\theta\cos\theta$$

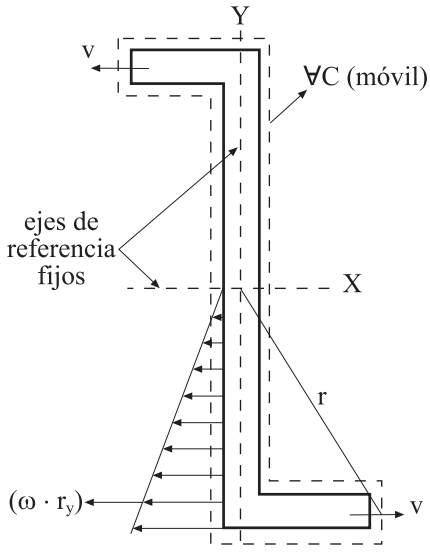
$$\omega = \frac{(L + L_1\cos\theta)v\sin\theta - L_1 v\sin\theta\cos\theta}{\frac{k}{\dot{m}} + (L + L_1\cos\theta)^2 + L_1\sin\theta\frac{L + L_1\cos\theta}{\cos\alpha}\sin\alpha}$$

Problema 48

Enunciado

El esquema de la figura 48.1, representa un aspersor el cual puede girar respecto a su eje central. Conocidos el caudal volumétrico que entra en el aspersor así como las dimensiones del mismo, se pide determinar el par de giro que el fluido crea sobre el eje central de dicho aspersor. Se pide realizar el problema utilizando sistemas inerciales y no inerciales de coordenadas.

Fig. 48.1
Brazo aspersor
bajo estudio



Resolución

1.- Realización del problema utilizando un sistema inercial de coordenadas. Los ejes de referencia son fijos mientras que el volumen de control gira con el aspersor.

Se va a aplicar inicialmente la ecuación de continuidad entre la sección de entrada y las dos secciones de salida del fluido, y considerando el régimen como permanente.

La ecuación de continuidad en forma integral toma la forma.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, d\forall + \oint_{SC} \rho \, \vec{v} \, \overrightarrow{ds}$$

Aplicando la ecuación sobre el volumen de control de la figura y considerando régimen permanente se obtiene:

$$0 = \int_{SE} \rho \, \vec{v} \, \overrightarrow{ds} + \int_{SS1} \rho \, \vec{v} \, \overrightarrow{ds} + \int_{SS2} \rho \, \vec{v} \, \overrightarrow{ds}$$

$$0 = -\rho S_E \, V_E + \rho S_{SS1} \, V_{SS1} + \rho S_{SS2} \, V_{SS2}$$

Asumiendo $S_{SS1} = S_{SS2}$ y $V_{SS1} = V_{SS2}$ se tiene:

$$S_E V_E = 2 S_{SS1} \, V_{SS1}$$

Si además se cumple que, $S_{SS1} = S_E$, se concluye: $V_E = 2V_{SS1}$

Aplicando ahora al mismo volumen de control la ecuación de momento de la cantidad de movimiento se tiene:

$$\vec{r} \wedge \oint_{SC} p\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \oint_{SC} \overline{\overline{\tau}}\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) d\forall + \oint_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

Despreciando el momento generado por las fuerzas másicas y observando que el momento generado por las fuerzas de presión y esfuerzos cortantes en las secciones de entrada y salida es nulo, se tiene:

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) d\forall + \oint_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

Extendiendo ahora los términos de flujo de momento cinético a las superficies entrantes y salientes.

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) d\forall + \int_{SE} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

Considerado ahora el régimen como permanente y observando que el momento cinético generado por el flujo entrante es nulo, se obtiene:

$$\sum \vec{M}_0 = \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds} = 2 \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) \vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

Cabe recordar que la velocidad $\vec{v}$ está referida a la sección de salida del volumen de control, mientras que la velocidad $\vec{v}_i$ caracteriza la componente de velocidad en la dirección iésima y referida al eje de coordenadas elegido, para el presente caso es un eje de referencia fijo. Ambas velocidades representan la velocidad con la que el fluido sale por la sección de salida del volumen de control. De donde.

$$\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_i\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & -r_y & 0 \\ \left(v - \omega r_y\right) & 0 & 0 \end{vmatrix} = r_y \left(v - \omega r_y\right) \hat{k}$$

Se concluye que el par generado es:

$$\sum \vec{M}_0 = 2\,\rho\, r_y \left(v - \omega r_y\right) v S_{S1}\, \hat{k} = 2 \dot{m} r_y \left(v - \omega r_y\right) \hat{k}$$

Su sentido de giro es el de las agujas del reloj, la velocidad v es la del fluido en la sección de salida S_{S1}.

2.- Se realiza ahora de nuevo el problema pero utilizando un sistema de referencia no inercial. Es decir, ahora se utilizan dos ejes de referencia, uno fijo, igual que en el primer caso, y otro móvil que gira solidario con el volumen de control. El volumen de control es el mismo que en el caso anterior. (V. el esquema de la figura 48.2).

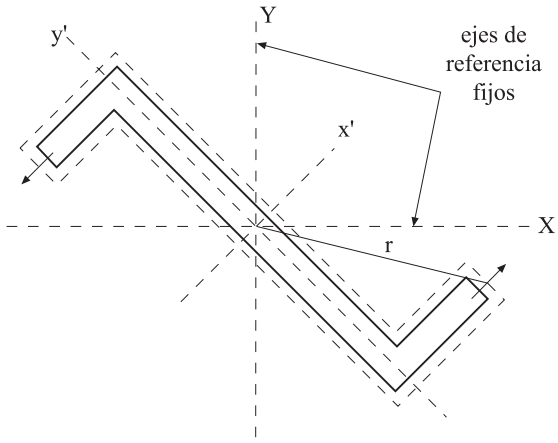


Fig. 48.2. Conjunto aspersor y sistema de referencia no inercial

La ecuación del momento cinético aplicada al caso en estudio, toma la forma.

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) d\forall + \oint_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) \vec{v}\, \overrightarrow{ds}$$
$$+ \int_{\forall C} \vec{r} \wedge \rho\left(\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) d\forall$$

Obsérvese que ya se ha despreciado el momento generado por las fuerzas másicas y se ha considerado que el momento generado por las fuerzas de presión y esfuerzos cortantes en las secciones de entrada y salida es nulo, (idénticas consideraciones fueron asimismo realizadas en el caso precedente).

Extendiendo la ecuación acabada de presentar, para el caso bajo estudio y considerando régimen permanente se concluye:

$$\sum \vec{M}_0 = \int_{SE} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) \vec{v}\, \overrightarrow{ds} + \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) \vec{v}\, \overrightarrow{ds} + \int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) \vec{v}\, \overrightarrow{ds}$$
$$+ \int_{\forall C} \vec{r} \wedge \rho\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) d\forall$$

Puesto que el par generado por el momento cinético en la sección de entrada es nulo, queda:

$$\sum \vec{M}_0 = \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) \vec{v}\, \overrightarrow{ds} + \int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) \vec{v}\, \overrightarrow{ds} +$$
$$\int_{\forall C} \vec{r} \wedge \rho\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) d\forall$$

$$\sum \vec{M}_0 = 2\int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) \vec{v}\, \overrightarrow{ds} + \int_{\forall C} \vec{r} \wedge \rho\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) d\forall$$

En este punto cabe recordar que la velocidad $\vec{v}$ está referida a la sección por donde fluye el fluido, la velocidad $\vec{v}_{x'y'z'}$ es también la velocidad del fluido en la sección de paso del fluido, pero está referida al eje de coordenadas móvil que gira solidario con el

volumen de control. En conclusión, para cada una de las dos secciones de salida, se cumple: $v = v_{x'y'z'} = v_{SS1}$. De donde:

$$\sum \vec{M}_0 = 2\int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{SS1}\right)\vec{v}_{SS1}\,\overrightarrow{ds} + \int_{\forall C} \rho\,\vec{r} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) d\forall + \int_{\forall C} \rho\,\vec{r} \wedge \left(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) d\forall$$

El producto vectorial de la integral a lo largo de una de las secciones de salida toma la forma:

$$\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & -r_y & 0 \\ v_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = v_x\, r_y\, \hat{k}$$

El momento generado por la aceleración centrípeta en un tramo genérico de conducto, (definido por un volumen de control elemental), y caracterizado por un radio genérico r'_x; r'_y, respecto al eje central de coordenadas, da lugar a:

$$\vec{r} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) = \vec{r} \wedge \vec{\omega} \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ r'_x & r'_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{r} \wedge \vec{\omega} \wedge \left(r'_x\, \omega\, \hat{j} - r'_y\, \omega\, \hat{i}\right) =$$

$$\vec{r} \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ -r'_y\,\omega & r'_x\,\omega & 0 \end{vmatrix} = \vec{r} \wedge \left(-r'_y\,\omega^2\,\hat{j} - r'_x\,\omega^2\,\hat{i}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r'_x & r'_y & 0 \\ -r'_x\,\omega^2 & -r'_y\,\omega^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-r'_x\, r'_y\, \omega^2 \hat{k} + r'_x\, r'_y\, \omega^2 \hat{k} = 0$$

De donde se observa que, independientemente del signo asociado a la velocidad angular y a cada una de las componentes del vector posición r'_x y r'_y, la aceleración centrípeta en todo tramo, bien horizontal o vertical, será nula.

Se procede ahora a realizar el estudio del par generado por la aceleración de Coriolis en cada tramo del conducto. El volumen de control se va a dividir en cuatro tramos, dos horizontales y dos verticales, la aceleración de Coriolis en cada uno de ellos valdrá.

En este punto es necesario tener presente que la velocidad angular definida para el aspersor en la figura 48.1, tendrá, según la regla del sacacorchos, un signo asociado negativo.

Tramo vertical superior.

$$\vec{r} \wedge 2\left(\vec{\omega} \wedge v_{x'y'z'}\right) = \vec{r} \wedge 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & v_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{r} \wedge 2\, v_y\, \omega\, \hat{i} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & r'_y & 0 \\ 2\, v_y\, \omega & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\, v_y\, \omega\, r'_y\, \hat{k}$$

Tramo vertical inferior.

$$\vec{r} \wedge 2\left(\vec{\omega} \wedge v_{x'y'z'}\right) = \vec{r} \wedge 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & -v_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{r} \wedge -2\, v_y\, \omega \hat{i} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -r'_y & 0 \\ -2\, v_y\, \omega & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-2\, v_y\, \omega r'_y \hat{k}$$

Tramo horizontal superior.

$$\vec{r} \wedge 2\left(\vec{\omega} \wedge v_{x'y'z'}\right) = \vec{r} \wedge 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\omega \\ -v_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{r} \wedge 2\, v_x\, \omega \hat{j} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r'_x & r_y & 0 \\ 0 & 2\, v_x\, \omega & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-2\, v_x\, \omega r'_x \hat{k}$$

Tramo horizontal inferior.

$$\vec{r} \wedge 2\left(\vec{\omega} \wedge v_{x'y'z'}\right) = \vec{r} \wedge 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\omega \\ v_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{r} \wedge -2\, v_x\, \omega \hat{j} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r'_x & -r_y & 0 \\ 0 & -2\, v_x\, \omega & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-2\, v_x\, \omega r'_x \hat{k}$$

Sustituyendo todos los términos hallados en la ecuación del momento cinético, se tiene:

$$\sum \vec{M}_0 = 2\int_{SS1} \rho v_x\, r_y\, \hat{k}\, \vec{v}_{SS1}\, \overrightarrow{ds} - \int_0^{r_y} \rho 2\, v_y\, \omega r'_y \hat{k} d\forall - \int_0^{r_y} \rho 2\, v_y\, \omega r'_y \hat{k} d\forall$$
$$- \int_0^{r_x} \rho 2\, v_x\, \omega r'_x \hat{k} d\forall - \int_0^{r_x} \rho 2\, v_x\, \omega r'_x \hat{k} d\forall$$

Ecuación que toma la forma.

$$\sum \vec{M}_0 = 2\rho v_x^2\, r_y S_{S1}\, \hat{k} - \int_0^{r_y} \rho 2\, v_y\, \omega r'_y \hat{k}\, S_C\left(dr'_y\right) - \int_0^{r_y} \rho 2\, v_y\, \omega r'_y \hat{k}\, S_C\left(dr'_y\right)$$
$$- \int_0^{r_x} \rho 2\, v_x\, \omega r'_x\, \hat{k}\, S_C\left(dr'_x\right) - \int_0^{r_x} \rho 2\, v_x\, \omega r'_x\, \hat{k}\, S_C\left(dr'_x\right)$$

S_C es la sección del conducto asociada al diferencial de volumen.

De donde se obtiene:

$$\sum \vec{M}_0 = 2\rho v_x^2\, r_y S_{S1}\, \hat{k} - \rho 2\, v_y\, \omega S_C \left[\frac{r_y^2}{2}\right] \hat{k} - \rho 2\, v_y\, \omega S_C \left[\frac{r_y^2}{2}\right] \hat{k}$$
$$- \rho 2\, v_x\, \omega S_C \left[\frac{r_x^2}{2}\right] \hat{k} - \rho 2\, v_x\, \omega S_C \left[\frac{r_x^2}{2}\right] \hat{k}$$

Dado que para el caso en estudio se cumple que: $S_{S1} = S_C$ y en consecuencia, los módulos de las velocidades en dirección x e y son iguales $v_x = v_y$, se concluye que:

$$\sum \vec{M}_0 = 2\rho v_x^2 r_y S_{S1} \hat{k} - \rho 2 v_y \omega S_C r_y^2 \hat{k} - \rho 2 v_x \omega S_C r_x^2 \hat{k}$$

$$\sum \vec{M}_0 = 2\rho v_x r_y S_{S1} \hat{k}\left(v_x - \omega r_y\right) - \rho 2 v_x \omega S_C r_x^2 \hat{k} = 2\dot{m} r_y \left(v_x - \omega r_y\right)\hat{k} - 2\dot{m} r_x \omega r_x \hat{k}$$

Obsérvese que para el caso en que la longitud horizontal de los conductos, r_x sea pequeña, los pares obtenidos mediante ambos sistemas de coordenadas son idénticos.

Problema 49

Enunciado

El esquema de la figura 49.1 muestra un aspersor con dos brazos en forma de semicircunferencia. El fluido entra al sistema mediante un conducto situado en el centro del eje de coordenadas y perpendicular al plano del dibujo. El fluido sale por las dos ramas del aspersor tal y como se muestra en la figura adjunta.

Durante un período de tiempo comprendido entre $0 \leq t \leq t_0$ el caudal volumétrico entrante al sistema está dado por la ecuación: $Q_e = Q_0 \cdot e^t$. Para tiempos mayores que t_0, $t \geq t_0$, el flujo volumétrico entrante queda definido por $Q_e = Q_0 e^{t_0}$. Los valores de Q_0 y t_0 se entenderán como constantes y conocidos., lo cual implica que para tiempos mayores de t_0 el flujo entrante es constante.

Conociendo que en todo momento, el par antagonista al giro, se puede dar por la expresión $M_0 = k * \omega$, donde k es una constante conocida y ω es la velocidad angular del aspersor , se pide determinar:

1 .La ecuación diferencial que caracteriza la velocidad angular del aspersor en función del tiempo, véase que esto sucederá durante el espacio temporal, $0 \leq t \leq t_0$. Resolver y graficar esta ecuación, con el fin de visualizar la variación de velocidad angular con el tiempo.

2. La ecuación algebraica que define la velocidad angular del aspersor para el caso en que $t \geq t_0$.

Considerar el fluido como incompresible. Utilizar en ambos apartados del problema un sistema inercial de coordenadas.

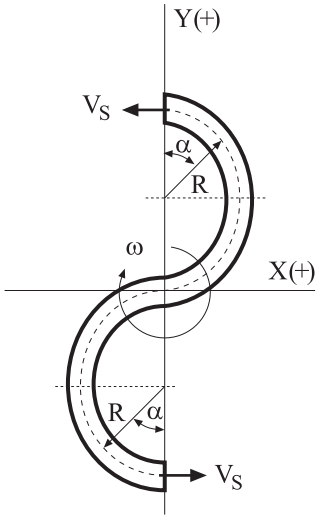


Fig. 49.1
Aspersor bajo estudio

Resolución

1a.- Con el fin de obtener la ecuación que relaciona la velocidad angular del aspersor en función del tiempo, es necesario determinar el par generado por el fluido, una vez determinado dicho par, se igualará al par antagonista generado por las fuerzas de fricción mecánica de los cojinetes, obteniendo de esta manera la ecuación diferencial que caracteriza la velocidad temporal de giro.

Inicialmente se va aplicar la ecuación de continuidad al aspersor en estudio con el fin de relacionar la velocidad temporal de salida del fluido en cada una de las dos ramas con el flujo volumétrico entrante.

La ecuación de continuidad en forma integral se define como:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{V} d\vec{s}$$

Eligiendo como volumen de control los dos brazos del aspersor, volumen de control móvil e indeformable, y considerando el fluido como incompresible, el primer término de la ecuación de continuidad se anula.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho d\forall = 0$$

El segundo término de la ecuación de continuidad se aplica a todas las superficies entrantes y salientes, para el caso en estudio existe una sección entrante, no mostrada en la figura 49.1, y dos secciones salientes, recordando que el producto escalar de dos vectores que forman ángulos de 180 y cero grados, llevan asociado un signo negativo y positivo respectivamente, se concluye que:

$$0 = \oint_{SC} \rho \vec{V} d\vec{s} = -\int_{Se} \rho V_e ds + \int_{Ss_1} \rho V_{S1} ds + \int_{Ss_2} \rho V_{S2} ds$$

Puesto que la velocidad del fluido es independiente del diferencial de superficie, se obtiene:

$$0 = -\rho V_e Se + \rho V_{S1} S_1 + \rho V_{S2} S_2$$

Considerando que las superficies de paso entrante y salientes tienen la misma dimensión.

$$0 = -\rho V_e S + \rho V_S S + \rho V_S S$$

Ecuación que se puede dar como:

$$0 = -\dot{m}_e + 2\dot{m}_S$$

O bien:

$$0 = -V_e + 2V_S$$

$$V_e = 2V_S$$

Puesto que el flujo entrante está definido en el enunciado, se establece, cuando $0 \leq t \leq t_0$.

$$V_e = \frac{Q_e}{S} = \frac{Q_0 \cdot e^t}{S}$$

En consecuencia, la velocidad del fluido saliente será:

$$V_S = \frac{Q_e}{2\,S} = \frac{Q_0 \cdot e^t}{2\,S}$$

Para el caso en que $t \geq t_0$, la velocidad del fluido saliente se define:

$$V_S = \frac{Q_e}{2S} = \frac{Q_0 \cdot e^{t_0}}{2S}$$

Una vez definida la velocidad saliente del fluido, se procede a aplicar al volumen de control elegido la ecuación del momento cinético.

1b.- La ecuación que caracteriza la velocidad angular del aspersor en función del tiempo, se obtendrá de la aplicación de la ecuación del momento de la cantidad de movimiento al volumen de control formado por los dos brazos del aspersor, en este apartado se evalúa esta ecuación para el espacio temporal comprendido entre $0 \leq t \leq t_0$.

La ecuación del momento cinético para sistemas inerciales de coordenadas, toma la forma:

$$\vec{r} \wedge \int_{\forall c} \rho\, \vec{g}\, d\forall + \vec{r}\ \wedge \oint_{SC} P\, d\vec{s} + \vec{r}\ \wedge \int_{SC} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_{\forall C} \rho(\vec{r} \wedge \overrightarrow{V_i})\, d\forall + \oint_{SC} \rho\, (\vec{r} \wedge \overrightarrow{V_i})\, \vec{V}\, d\vec{s}$$

El primer término de la izquierda de la ecuación, caracteriza el par generado por las fuerzas másicas, véase que las fuerzas másicas tienen una línea de acción que pasa por el origen de coordenadas y va en dirección perpendicular al plano del aspersor, por lo que dichas fuerzas no causarán momento alguno.

El segundo término de la izquierda de la ecuación, caracteriza los pares generados por las fuerzas de presión a lo largo de todo el volumen de control, para el caso en estudio este término se descompone en cuatro sub-términos. El primero define el par generado debido a la presión del fluido en la sección entrante, véase que este par será nulo dado que el fluido entra por el origen de coordenadas y perpendicularmente al plano del aspersor, el radio de las fuerzas de presión es nulo. El segundo y tercer sub-términos caracterizan los pares generados por las fuerzas de presión asociadas al flujo saliente, si la presión en las dos secciones de salida es la presión atmosférica y se trabaja con presiones relativas, estos dos sub-términos serán asimismo nulos. El tercer sub-término define los pares debidos a la presión en toda la superficie lateral del aspersor, este término existe.

El tercer término de la izquierda de la ecuación, define los pares generados por los esfuerzos cortantes. De nuevo y al igual que en el caso precedente este término se subdivide en cuatro sub-términos, para la sección entrante del fluido, para las dos secciones salientes y para la sección lateral del aspersor. Dado que la distribución de velocidades en las secciones entrante y salientes se ha considerado como uniforme, no existirán esfuerzos cortantes en dichas secciones con lo que únicamente se considerarán los esfuerzos cortantes a lo largo de toda la superficie lateral del aspersor.

En función de lo acabado de explicar, la ecuación de momento cinético aplicada al aspersor en estudio tomará la forma:

$$\sum M_0 = \vec{r} \wedge \int_{SL} -P\, d\vec{s} + \vec{r} \wedge \int_{SL} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s} = \frac{d}{dt}\int_{\forall C} \rho(\vec{r} \wedge \vec{V}_i)\, d\forall + \oint_{SC} \rho\,(\vec{r} \wedge \vec{V}_i)\, \vec{V} d\vec{s}$$

Obsérvese que los dos términos que caracterizan los pares debidos a las fuerzas de presión y de esfuerzos cortantes actuantes en la superficie lateral del aspersor, se han denominado suma de momentos de reacción que el fluido ejerce sobre el eje central del aspersor, eje perpendicular al plano del aspersor.

Seguidamente se va analizar la parte derecha de la ecuación del momento cinético. El primer término de la derecha caracteriza la variación temporal del momento cinético dentro del volumen de control. La velocidad V_i caracteriza la velocidad del fluido asociada a un diferencial de volumen genérico y referida al sistema de coordenadas elegido. Es importante destacar que puesto que se ha elegido un sistema inercial de coordenadas, a la hora de evaluar la velocidad del fluido es necesario considerar la velocidad de giro del aspersor, este concepto se aclara en la figura 49.2. El radio r define la distancia en forma vectorial entre el diferencial de volumen genérico y el origen de coordenadas. Con el fin de entender estos conceptos, se aplicará el término que caracteriza la variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control, primero a la rama superior del aspersor y luego a la rama inferior del mismo.

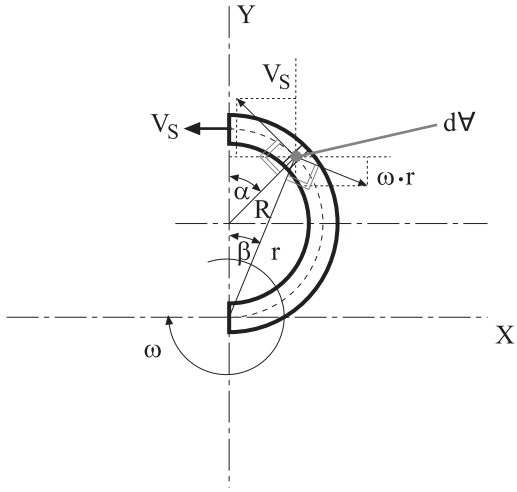


Fig. 49.2 Elemento diferencial de volumen del aspersor con las velocidades y el radio genérico asociados

Aplicación del término de la variación temporal de la cantidad de movimiento a la rama superior del aspersor.

El vector $\vec{r}$ asociado a un elemento diferencial de volumen genérico, se define como:

$$r_x = R\sin\alpha; \quad r_y = R(1+\cos\alpha); \quad r_z = 0$$

El vector $\vec{V}_i$ se ha de dar en función de sus componentes X e Y, y se debe además considerar el desplazamiento del sólido, ver figura 49,2, de donde:

$$V_{ix} = \omega\, r\cos\beta - V_S\cos\alpha; \quad V_{iy} = -\omega\, r\sin\beta + V_S\sin\alpha; \; V_{iz} = 0$$

La relación entre los ángulos α y β se puede definir como: (v. figura 49.2).

$$\tan\beta = \frac{R\sin\alpha}{R + R\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Otras relaciones trigonométricas que se obtienen directamente de la figura 49.2, son:

$$R\sin\alpha = r\sin\beta$$

$$R\sin\alpha = \left(\sqrt{(R\sin\alpha)^2 + \left(R(1+\cos\alpha)\right)^2}\right)\sin\beta$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{(\sin\alpha)^2 + (1+\cos\alpha)^2}}$$

Y también:

$$R\cos\alpha = r\cos\beta - R$$

$$R\,(1+\cos\alpha)=\left(\sqrt{(R\,\sin\alpha)^2+\left(R(1+\cos\alpha)\right)^2}\right)\cos\beta$$

$$\cos\beta=\frac{1+\cos\alpha}{\sqrt{(\sin\alpha)^2+(1+\cos\alpha)^2}}$$

Con lo que la distribución de velocidades se puede dar:

$$V_{ix}=\omega\,R\,(1+\cos\alpha)-\,V_S\cos\alpha;\quad V_{iy}=-\omega\,R\,\sin\alpha+V_S\sin\alpha;\;V_{iz}=0$$

El producto vectorial $\vec{r}\wedge\vec{V}_i$ da lugar a:

$$\vec{r}\wedge\vec{V}_i=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ R\cdot\sin\alpha & R\,(1+\cos\alpha) & 0\\ \omega\,R\,(1+\cos\alpha)-V_S\cos\alpha & -\omega R\sin\alpha+V_S\sin\alpha & 0\end{vmatrix}=$$

$$=(R\cdot\sin\alpha)\left(-\omega R\sin\alpha+V_S\sin\alpha\right)\vec{k}-R\,(1+\cos\alpha)\left(\omega R\,(1+\cos\alpha)-V_S\cos\alpha\right)\vec{k}$$

Trabajando un poco este resultado se llega a:

$$=\left(-\omega R^2\sin^2\alpha+R\,V_S\sin^2\alpha-\omega R^2\,(1+\cos\alpha)^2+\,R\,V_S\,(1+\cos\alpha)\,\cos\alpha\right)\,\vec{k}$$

$$=\left(-\omega R^2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-\omega R^2-2\omega R^2\cos\alpha+R\,V_S\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+R\,V_S\,\cos\alpha\right)\,\vec{k}$$

$$=\left(-2\,\omega\,R^2\,(1+\cos\alpha)+R\,V_S\,(1+\cos\alpha)\right)\,\vec{k}$$

El diferencial de volumen de fluido se define como $d\forall=S\,R\,d\alpha$; donde S es la sección del conducto.

Así, el término de variación temporal de cantidad de movimiento en el interior del volumen de control queda como:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho(\vec{r}\wedge\vec{V}_i)d\forall\Big|_{\text{rama superior aspersor}}=$$

$$=\frac{d}{dt}\int_{\forall c}\rho\left(-2\,\omega\,R^2\,(1+\cos\alpha)+R\,V_S\,(1+\cos\alpha)\right)\vec{k}\,d\forall=$$

$$\rho\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\left(-2\,\omega\,R^2\,(1+\cos\alpha)+R\,V_S\,(1+\cos\alpha)\right)\vec{k}\,SRd\alpha=$$

$$\rho\,S\,R^2\frac{d}{dt}\left[-2\,\omega\,R\,\pi+V_S\,\pi\right]\vec{k}=$$

Y se concluye:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho(\vec{r}\wedge\vec{V}_i)d\forall\Big|_{\text{rama superior aspersor}}=\pi\,\rho\,S\,R^2\left[-2\,R\frac{d\omega}{dt}+\frac{dV_S}{dt}\right]\vec{k}$$

Sustituyendo la velocidad del fluido por su equivalente y derivando se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho(\vec{r}\wedge\vec{V}_i)d\forall\Big|_{\text{rama superior aspersor}}=\pi\,\rho\,S\,R^2\left[-2R\,\dot{\omega}+\frac{Q_0\cdot e^t}{2S}\right]\vec{k}$$

Aunque se espera el mismo resultado, seguidamente se repetirá el proceso en la rama inferior del aspersor.

Aplicación del término de la variación temporal de la cantidad de movimiento a la rama inferior del aspersor.

El vector $\vec{r}$ asociado a un elemento diferencial de volumen genérico, se define como:

$$r_x=-R\sin\alpha;\quad r_y=-R(1+\cos\alpha);\quad r_z=0$$

Las componentes del vector velocidad $\vec{V}_i$ serán:

$$V_{ix}=-\omega\,r\cos\beta+V_S\cos\alpha;\quad V_{iy}=\omega\,r\sin\beta-V_S\sin\alpha;\ V_{iz}=0$$

Utilizando las relaciones obtenidas anteriormente, esta relación se transforma en:

$$V_{ix}=-\omega\,R\,(1+\cos\alpha)+V_S\cos\alpha;\ V_{iy}=\omega\,R\sin\alpha-V_S\sin\alpha;\ V_{iz}=0$$

El producto vectorial dará lugar a:

$$\vec{r}\wedge\vec{V}_i=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -R\cdot\sin\alpha & -R(1+\cos\alpha) & 0\\ -\omega R(1+\cos\alpha)+V_S\cos\alpha & \omega R\sin\alpha-V_S\sin\alpha & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-(R\cdot\sin\alpha)(\omega R\sin\alpha-V_S\sin\alpha)\vec{k}-\left(-R(1+\cos\alpha)\left(-\omega R(1+\cos\alpha)+V_S\cos\alpha\right)\right)\vec{k}$$

Reorganizando esta ecuación se observa que se obtiene el mismo resultado que en la rama superior del aspersor.

$$=(R\cdot\sin\alpha)(-\omega R\sin\alpha+V_S\sin\alpha)\vec{k}-R(1+\cos\alpha)(\omega R(1+\cos\alpha)-V_S\cos\alpha)\vec{k}$$

Dado que el proceso a partir de este punto es idéntico al establecido para el caso precedente se puede concluir que para la rama inferior del aspersor se obtendrá:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho(\vec{r}\wedge\vec{V}_i)d\forall\Big|_{\text{rama inferior aspersor}}=\pi\,\rho\,S\,R^2\left[-2R\,\dot{\omega}+\frac{Q_0\cdot e^t}{2S}\right]\vec{k}$$

Así, el par generado por las dos ramas del aspersor será la suma de ambos pares:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho(\vec{r}\wedge\vec{V}_i)d\forall\Big|_{\text{total}}=2\,\pi\,\rho\,S\,R^2\left[-2R\,\dot{\omega}+\frac{Q_0\cdot e^t}{2S}\right]\vec{k}$$

Se procederá en este punto a determinar el término restante de la ecuación de momento cinético. Dicho término era:

$$\oint_{SC}\rho\,(\vec{r}\wedge\vec{V}_i)\,\vec{V}d\vec{s}$$

Véase que este término caracteriza el momento cinético asociado al flujo que atraviesa las diversas superficies de control. Para el problema en estudio existen tres superficies de control, la entrante y las dos salientes. Consecuentemente, la ecuación precedente se define para este caso:

$$\oint_{SC}\rho(\vec{r}\wedge\vec{V}_i)\,\vec{V}d\vec{s}=\int_{Se}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_i\right)\,\vec{V}d\vec{s}+\int_{Ss_1}\rho(\vec{r}\wedge\vec{V}_i)\,\vec{V}d\vec{s}+\int_{Ss_2}\rho(\vec{r}\wedge\vec{V}_i)\,\vec{V}d\vec{s}$$

La velocidad $\vec{V}_i$ es la velocidad con la que el fluido atraviesa cada una de las tres superficies pero referida al sistema de coordenadas elegido. Por otro lado, la velocidad $\vec{V}$ es la velocidad con la que el fluido atraviesa cada una de las superficies pero respecto a la propia superficie. Obsérvese que en cada una de estas tres integrales existe un producto vectorial y un producto escalar.

Para la sección entrante, el producto vectorial $\vec{r}\wedge\vec{V}_i$ será nulo, dado que el vector $\vec{r}$ vale cero, $(0,0,0)$. Por tanto la integral del flujo de momento cinético a lo largo de la superficie entrante será nula.

Respecto a las dos integrales a lo largo de sendas superficies salientes se tiene; para la superficie superior:

$$\vec{r}\wedge\vec{V}_i=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2R & 0\\ -V_S+\omega 2R & 0 & 0\end{vmatrix}=-\left(2R\left(\omega 2R-V_S\right)\right)\vec{k}=2R\left(V_S-\omega 2R\right)\vec{k}$$

Haciendo lo propio para la superficie inferior S_2 se concluye:

$$\vec{r}\wedge\vec{V}_i=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2R & 0\\ V_S-\omega 2R & 0 & 0\end{vmatrix}=2R\left(V_S-\omega 2R\right)\vec{k}$$

Véase que los dos productos vectoriales dan el mismo resultado, con lo que el momento cinético asociado al flujo a través de las dos superficies salientes queda:

$$\oint_{SC} \rho(\vec{r} \wedge \vec{V}_i)\, \vec{V} d\vec{s} = \int_{Ss_1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_i\right) \vec{V} d\vec{s} + \int_{Ss_2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_i\right) \vec{V} d\vec{s}$$
$$= \int_{Ss} 2\, \rho 2R \left(V_S - \omega 2R\right) \vec{k}\ V_S\ ds$$

Por otro lado, el producto escalar de la velocidad saliente por el diferencial de superficie, toma para las dos superficies salientes el mismo valor, y es: $\vec{V} d\vec{s} = V_S\ ds$; con lo que la resolución de la integral dará lugar a: (obsérvese que ninguno de los parámetros depende del diferencial de superficie).

$$\oint_{SC} \rho(\vec{r} \wedge \vec{V}_i)\, \vec{V} d\vec{s} = \int_{Ss} 2\, \rho 2R \left(V_S - \omega 2R\right) \vec{k}\ V_S\ ds = 4\rho RS\left(V_S - \omega 2R\right) V_S \vec{k}$$

Sustituyendo ahora todos los términos en la ecuación genérica de momento cinético se obtiene:

$$\sum M_0 = \vec{r} \wedge \int_{SL} -P\, d\vec{s} + \vec{r} \wedge \int_{SL} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_{\forall C} \rho(\vec{r} \wedge \vec{V}_i)\, d\forall + \oint_{SC} \rho\, (\vec{r} \wedge \vec{V}_i)\, \vec{V} d\vec{s}$$

$$\sum M_0 = 2\, \pi\, \rho\, S\, R^2 \left[-2R\, \dot{\omega} + \frac{Q_0 \cdot e^t}{2\, S} \right] \vec{k} + 4\rho RS\left(V_S - \omega 2R\right) V_S \vec{k}$$

Sustituyendo en esta ecuación la velocidad temporal del fluido saliente, $V_S = \frac{Q_e}{2\, S} = \frac{Q_0 \cdot e^t}{2\, S}$ se obtiene.

$$\sum M_0 = 2\rho\pi SR^2 \left(\frac{Q_0 \cdot e^t}{2\, S} - 2R\dot{\omega} \right) \vec{k} + 4\rho RS \left(\frac{Q_0 \cdot e^t}{2\, S} - \omega 2R \right) \frac{Q_0 \cdot e^t}{2\, S} \vec{k}$$

Es importante remarcar que esta ecuación proporciona el par antagonista, es decir el par que el contorno, aspersor, realiza sobre el fluido, el par que genera el fluido es el mismo con signo cambiado. Puesto que el enunciado estipula que el par que ejerce el fluido sobre el aspersor es contrarrestado por el par antagonista al giro, se puede concluir que la ecuación diferencial que caracteriza la velocidad temporal del aspersor para el caso $0 \le t \le t_0$ será:

$$k\omega = -2\rho\pi SR^2 \left(\frac{Q_0 \cdot e^t}{2\, S} - 2R\dot{\omega} \right) - 4\rho RS \left(\frac{Q_0 \cdot e^t}{2\, S} - \omega 2R \right) \frac{Q_0 \cdot e^t}{2\, S}$$

Ecuación que se puede dar como:

$$4\rho\pi SR^3 \dot{\omega} + \left(-k + 8R^2 \rho S \frac{Q_0 \cdot e^t}{2S} \right) \omega - 2\rho\pi SR^2 \frac{Q_0 \cdot e^t}{2S} - 4\rho RS \left(\frac{Q_0 \cdot e^t}{2S} \right)^2 = 0$$

Y estableciendo que:

$$A_1 = 4\rho\pi SR^3$$

$$A_2 = -k + 8R^2\rho S\frac{Q_0 \cdot e^t}{2S}$$

$$A_3 = -2\rho\pi SR^2\frac{Q_0 \cdot e^t}{2S} - 4\rho RS\left(\frac{Q_0 \cdot e^t}{2S}\right)^2$$

La ecuación diferencial toma la forma:

$$A_1\,\dot{\omega} + A_2\,\omega + A_3 = 0$$

Para la resolución de esta ecuación, se han supuesto los diferentes valores.

$$\rho = 1000\,\frac{Kg}{m^3};\ R = 0{,}5\ m;\quad Q_0 = 0{,}0025\,\frac{m^3}{s};\ D = 0{,}1\ m;\ S = \frac{\pi 0{,}1^2}{4} = 0{,}007854\ \ m^2;$$

$$t_0 = 5\ s;\ k = 20\ N\ m\ s.$$

Así, se obtiene:

$$A_1 = 12{,}337$$

$$A_2 = -20 + 2{,}5\ e^t$$

$$A_3 = -1{,}96349\ e^t - 0{,}3978\ e^{2t}$$

La ecuación diferencial a resolver será:

$$12{,}337\,\dot{\omega} + \left(-20 + 2{,}5e^t\right)\omega + \left(-1{,}96349e^t - 0{,}3978e^{2t}\right) = 0$$

La resolución de esta ecuación, da lugar a la siguiente gráfica, la cual indica como aumenta la velocidad angular del aspersor con el tiempo.

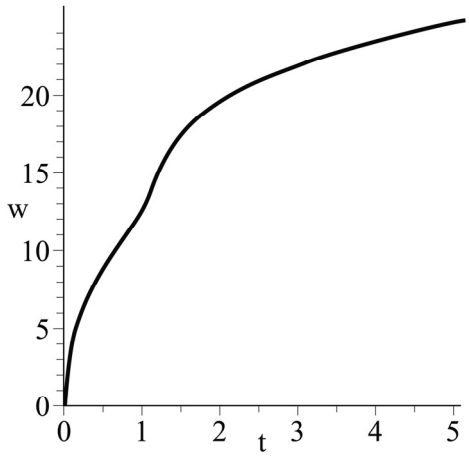


Fig. 49.3 Variación temporal de la velocidad del aspersor en función del tiempo

2.- El segundo apartado del problema pide determinar la ecuación que caracteriza la velocidad de giro del aspersor para régimen permanente, es decir cuando $t \geq t_0$.

Recordando de nuevo que la ecuación del momento cinético para un sistema inercial de coordenadas tomaba la forma:

$$\vec{r} \wedge \int_{\forall c} \rho\, \vec{g}\, d\forall + \vec{r} \wedge \oint_{SC} P\, d\vec{s} + \vec{r} \wedge \oint_{SC} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_{\forall C} \rho(\vec{r} \wedge \overrightarrow{V_i})\, d\forall + \oint_{SC} \rho\, (\vec{r} \wedge \overrightarrow{V_i})\, \vec{V}\, d\vec{s}$$

En lo que hace referencia a la parte izquierda de la ecuación, se puede decir exactamente lo mismo que en el primer apartado del problema, respecto al primer término de la parte derecha es de destacar que para este segundo caso no existe ningún parámetro que dependa del tiempo, consecuentemente este término será nulo, así, la ecuación de momento cinético tomará ahora la forma:

$$\sum M_0 = \vec{r} \wedge \int_{SL} - P\, d\vec{s} + \vec{r} \wedge \int_{SL} \bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s} = \oint_{SC} \rho\, (\vec{r} \wedge \vec{V}_i)\, \vec{V} d\vec{s}$$

Al igual que en el primer apartado, el término que caracteriza el flujo de momento cinético ha de ser extendido a lo largo de las superficies, entrante y salientes, de donde:

$$\sum M_0 = \oint_{SC} \rho(\vec{r} \wedge \vec{V}_i)\, \vec{V} d\vec{s} = \int_{Se} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_i\right)\, \vec{V} d\vec{s}$$
$$+ \int_{Ss_1} \rho(\vec{r} \wedge \vec{V}_i)\, \vec{V} d\vec{s} + \int_{Ss_2} \rho(\vec{r} \wedge \vec{V}_i)\, \vec{V} d\vec{s}$$

Al igual que en el primer apartado, el flujo de momento cinético para la superficie entrante, será nulo, puesto que el producto vectorial $\vec{r} \wedge \vec{V}_i$ es nulo, el vector $\vec{r}$ vale cero, $(0,0,0)$.

Para la superficie saliente superior, S_1, se establece:

$$\vec{r} \wedge \vec{V}_i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2R & 0 \\ -V_S + \omega 2R & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\left(2R\left(\omega 2R - V_S\right)\right)\vec{k} = 2R\left(V_S - \omega 2R\right)\vec{k}$$

Para la superficie saliente inferior, S_2, se puede decir:

$$\vec{r} \wedge \vec{V}_i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2R & 0 \\ V_S - \omega 2R & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2R\left(V_S - \omega 2R\right)\vec{k}$$

Tal y como era de esperar, el resultado es el mismo que el obtenido en el primer apartado; se concluye que:

$$\sum M_0 = \int_{Ss} 2\, \rho 2R\left(V_S - \omega 2R\right)\vec{k}\ V_S\, ds = 4\rho RS\left(V_S - \omega 2R\right)V_S\vec{k}$$

De nuevo es necesario apuntar que este par es el de reacción, el par que ejerce el fluido sobre el cuerpo es el mismo con signo cambiado. Igualando el par de acción al par antagonista se tiene:

$$k\omega = -4\rho RS\left(V_S - \omega 2R\right)V_S$$

De donde:

$$k\omega - 8\rho SR^2 V_s \omega = -4\rho RSV_S^{\ 2}$$

$$\omega\left(k - 8\rho SR^2 V_s\right) = -4\rho RSV_S^{\ 2}$$

$$\omega = \frac{4\rho RSV_S^{\ 2}}{-k + 8\rho SR^2 V_s} = \frac{4\rho RS\left(\frac{Q_0 \cdot e^{t_0}}{2S}\right)^2}{-k + 8\rho SR^2\left(\frac{Q_0 \cdot e^{t_0}}{2S}\right)}$$

Sustituyendo ahora por los valores de los parámetros definidos en el primer apartado, se obtiene:

$$\omega = 24,96\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Esta será la velocidad angular de giro del aspersor en régimen permanente. Obsérvese que esta velocidad angular coincide con la obtenida de la resolución de la ecuación diferencial que proporcionaba la velocidad angular del aspersor en función del tiempo, cuando $t = t_0 = 5$ segundos. Con lo que asegura la resolución correcta del problema.

Problema 50

Enunciado

El esquema que se encuentra a continuación, muestra un sistema de aspersión. El líquido entra axialmente en dirección "-X" y sale en dirección "Z". El par principal que crea el fluido sobre el eje "X" hace que dicho aspersor gire a una velocidad angular constante "ω", a dicho par principal se opone un par antagonista de valor "k ω", donde la constante "k" es conocida.

La presión y el caudal másico a la entrada del aspersor son conocidos, siendo la presión en cada una de las dos salidas la atmosférica. Las dimensiones de cada uno de los tramos del conducto y sus secciones son conocidas.

Para el cálculo, se considerará el fluido como incompresible, se podrán despreciar las fuerzas másicas y deberán considerarse todas las aceleraciones existentes en cada uno de los tramos rectos, despreciar el efecto de los diversos codos.

Se pide:

1. Determinar los pares de reacción que se crean sobre los diversos ejes coordenados. Utilizar sistemas inerciales y no inerciales de coordenadas.

2. Hallar la expresión que determina la velocidad angular a la que gira el aspersor.

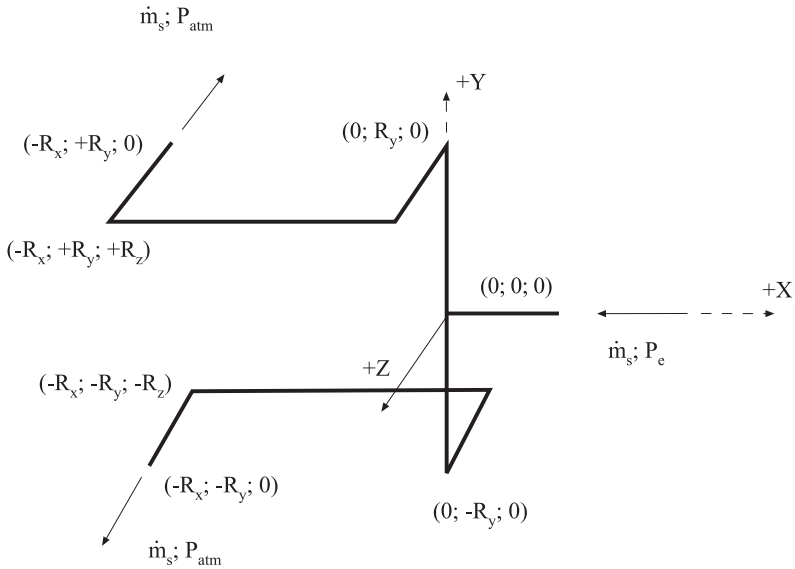


Fig. 50.1
Esquema del aspersor bajo estudio

Las longitudes R_x; R_y; R_z son genéricas.

Resolución

1a.-Determinación de los pares de reacción que se crean sobre los diversos ejes coordenados, sistema no inercial de coordenadas.

Para la realización del problema se definen las siguientes hipótesis de trabajo.

- La sección de los conductos es constante.
- El fluido es incompresible.
- Se desprecian las fuerzas másicas.
- Se considerarán todas las aceleraciones existentes en cada uno de los tramos rectos, despreciando el efecto de los codos.
- Se trabajará con presiones relativas.
- Se considera régimen permanente.

El volumen de control a utilizar, queda definido en la figura siguiente.

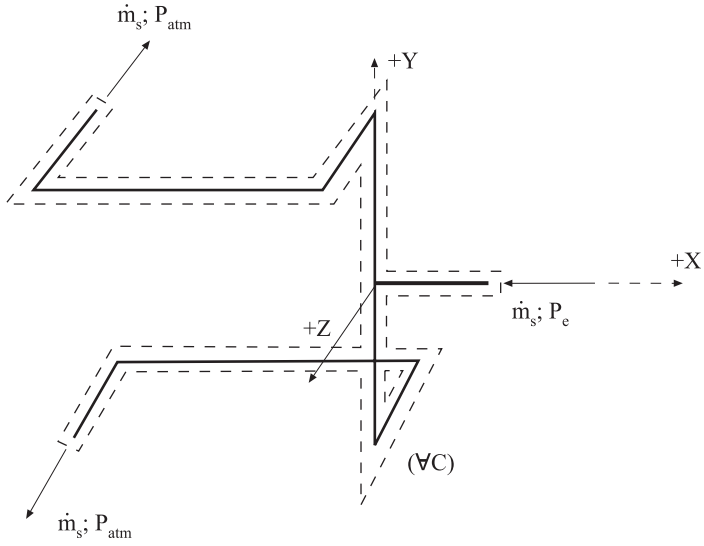


Fig. 50.2
Volumen de control elegido

Una vez definido el volumen de control a utilizar, se empezará con los cálculos, con el fin de encontrar los pares que se crean sobre los ejes de coordenadas.

Se aplicará inicialmente la ecuación de continuidad al volumen de control definido en la figura 50.2.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{"C} \rho \, d\forall + \oint_{SC} \rho \, \vec{v} \, \overrightarrow{ds}$$

Recordando que el régimen es permanente se obtiene:

$$0 = -\dot{m}_e + \dot{m}_{S1} + \dot{m}_{S2}$$

Puesto que se ha de cumplir que:

$$\dot{m}_{S1} = \dot{m}_{S2}\,;\ \text{y que}\ \ S_e = S_S\,;$$

Se obtiene:

$$v_s = \frac{v_e}{2}\,;$$

Cabe recordar que: $v_e = \dfrac{\dot{m}_e}{\rho S_e}$

La ecuación de momento cinético para sistemas no inerciales de coordenadas toma la forma:

$$\vec{r} \wedge \oint_{SC} p \, \overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \oint_{SC} \overline{\overline{\tau}} \, \overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \int_{\forall C} \rho \, \vec{g} \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'} \right) d\forall +$$

$$\oint_{SC} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'} \right) \vec{v} \, \overrightarrow{ds} + \int_{\forall C} \vec{r} \wedge \rho \left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{x'y'z'} \right) d\forall$$

Si se consideran despreciables las fuerzas másicas, se considera régimen permanente, trabajando en presiones relativas, y dado que los centros de los ejes coordenados fijo y móvil coinciden, la ecuación precedente quedará:

$$\sum \vec{M}_{xyz} = \oint_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{\forall C} \vec{r} \wedge \rho\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right)d\forall$$

$$\sum \vec{M}_{xyz} = \int_{SE} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{\forall C} \vec{r} \wedge \rho\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right)d\forall$$

Véase que el término que caracteriza los pares debidos a las aceleraciones, centrípeta y Coriolis ha de ser extendido a lo largo de todos los conductos del volumen de control.

Se observa además, que el par creado por el flujo de momento cinético en la sección de entrada ha de ser nulo, puesto que el radio es cero.

$$\sum \vec{M}_{xyz} = \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{\forall C} \vec{r} \wedge \rho\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right)d\forall$$

Obsérvese que las velocidades $\vec{v}_{x'y'z'}$ están referidas a un sistema de coordenadas móvil que gira con el aspersor.

El producto vectorial definido en el primer término del segundo sumando de la ecuación precedente, se determina:

$$\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) = \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{SS1}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R_x & R_y & 0 \\ 0 & 0 & -v_s \end{vmatrix} = -v_s R_y \hat{i} - v_s R_x \hat{j}$$

De donde el primer término del segundo sumando quedará:

$$\int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{SS1}\right)\vec{v}_{SS1}\,\overrightarrow{ds} = \frac{\dot{m}_e}{2}\left(-v_s R_y \hat{i} - v_s R_x \hat{j}\right)$$

De manera homóloga, el producto vectorial definido en el segundo término del segundo sumando de la ecuación de momento cinético será:

$$\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) = \left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{SS2}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R_x & -R_y & 0 \\ 0 & 0 & v_s \end{vmatrix} = -v_s R_y \hat{i} + v_s R_x \hat{j}$$

De donde el segundo término del segundo sumando quedará:

$$\int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{SS2}\right)\vec{v}_{SS2}\,\overrightarrow{ds} = \frac{\dot{m}_e}{2}\left(-v_s R_y \hat{i} + v_s R_x \hat{j}\right)$$

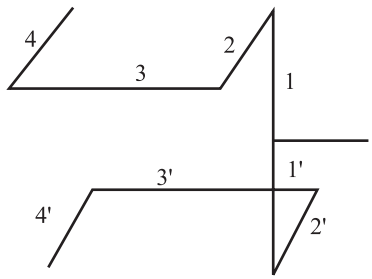
Con lo que los dos primeros términos del segundo sumando tomarán la forma:

$$\int_{SS1}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_{x'y'z'}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds}+\int_{SS2}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_{x'y'z'}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds}=\int_{SS1}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_{SS1}\right)\vec{v}_{SS1}\,\overrightarrow{ds}+$$
$$\int_{SS2}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_{SS2}\right)\vec{v}_{SS2}\,\overrightarrow{ds}=\dot{m}_e\left(-v_s\,R_y\,\hat{i}\right)$$

Tal y como cabía esperar, se observa que los pares respecto el eje j se anulan mientras que los que actúan sobre el eje i se suman.

Se procede seguidamente al cálculo de los pares creados por las aceleraciones centrípeta y Coriolis actuantes en cada uno de los tramos del aspersor. La figura 50.3 presenta los diversos tramos considerados.

Fig. 50.3



Tramo 1.

Los términos que ahora se evaluarán son:

$$\int_{\forall C}\vec{r}\wedge\rho\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}+2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{x'y'z'}\right)d\forall$$

Términos que para el tramo 1 se pueden presentar como:

$$\rho S\int_0^{R_y}\left[\vec{y}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{y}\right)+\vec{y}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)\right]dy$$

Véase que la posición genérica $\vec{r}$ tiene para este tramo únicamente componente y, asimismo el diferencial de volumen se ha sustituido por una sección S que es constante y un diferencial de longitud de tubo dy. Por otro lado, la velocidad $\vec{v}_{x'y'z'}=v_{y'}$ tiene únicamente componente vertical.

Procediendo ahora a realizar los productos vectoriales establecidos en la ecuación precedente, se obtiene:

$$\vec{y}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{y}\right)=\vec{y}\wedge\vec{\omega}\wedge\begin{vmatrix}i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & y & 0\end{vmatrix}=\vec{y}\wedge\vec{\omega}\wedge\left(\omega\,y\,\hat{k}\right)=\vec{y}\wedge\begin{vmatrix}i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & \omega\,y\end{vmatrix}=\vec{y}\wedge\omega^2\,y\,\hat{j}$$

$$\vec{y}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{y}\right)=\vec{y}\wedge\omega^2\,y\,\hat{j}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & y & 0\\ 0 & \omega^2\,y & 0\end{vmatrix}=0$$

El par debido a la aceleración centrípeta es nulo. Seguidamente se estudia el efecto de la aceleración de Coriolis.

$$\vec{y}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)=2\vec{y}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)=2\vec{y}\wedge\begin{vmatrix} i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & v_s & 0\end{vmatrix}=2\vec{y}\wedge\left(\omega\, v_s\,\hat{k}\right)=$$

$$2\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & \omega\, v_s\end{vmatrix}=2y\omega\, v_s\,\hat{i}$$

La aceleración de Coriolis causa un par respecto el eje x. De donde:

$$\rho S\int_0^{R_y}\left[\vec{y}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{y}\right)+\vec{y}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)\right]dy=\rho S\int_0^{R_y}\left[\vec{y}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)\right]dy=$$

$$\rho S\int_0^{R_y}2y\omega\, v_s\,\hat{i}\,dy=\rho S\,2\,\omega\, v_s\frac{R_y^2}{2}\hat{i}$$

Tramo 2.

Ahora el diferencial de volumen se sustituirá por $d\forall = S\,dz$, puesto que para este considerando el diferencial de longitud va en dirección z. Por otro lado, el vector de posición $\vec{r}$ tendrá ahora dos componentes, $\vec{r}=\left(0;R_y;z\right)$.

La aceleración centrípeta valdrá:

$$\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)=\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\begin{vmatrix} i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & R_y & z\end{vmatrix}=\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\left(\omega R_y\,\hat{k}-\omega z\,\hat{j}\right)=\vec{r}\wedge\begin{vmatrix} i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & -\omega z & \omega R_y\end{vmatrix}=$$

$$\vec{r}\wedge\left(-\omega^2 z\hat{k}-\omega^2 R_y\,\hat{j}\right)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & R_y & z\\ 0 & -\omega^2 R_y & -\omega^2 z\end{vmatrix}=-\omega^2 z R_y\,\hat{i}+\omega^2 R_y z\hat{i}=0$$

Se observa que para este tramo 2, la aceleración centrípeta no causa ningún par respecto a ninguno de los ejes coordenados.

La aceleración de Coriolis dará lugar al siguiente par:

$$\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{z'}\right)=2\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{z'}\right)=2\vec{r}\wedge\begin{vmatrix} i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & v_s\end{vmatrix}=2\vec{r}\wedge\left(-\omega\, v_s\,\hat{j}\right)=$$

$$2\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & R_y & z\\ 0 & -\omega\, v_s & 0\end{vmatrix}=2z\omega\, v_s\,\hat{i}$$

Sustituyendo los pares debidos a las aceleraciones centrípeta y Coriolis en las integrales correspondientes se tiene:

$$\rho S\int_0^{R_z}\left[\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)+\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)\right]dz=\rho S\int_0^{R_z}\left[\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)\right]dz=$$

$$\rho S\int_0^{R_z}2z\omega v_s\,\hat{i}\,dz=\rho S\,2\,\omega\,v_s\frac{R_z^2}{2}\hat{i}$$

Tramo 3.

Para este caso, el diferencial de volumen se sustituirá por $d\forall = S\,dx$, puesto que para este considerando el diferencial de longitud va en dirección x. por otro lado, el vector de posición $\vec{r}$ tendrá ahora tres componentes, $\vec{r}=\left(-x;R_y;R_z\right)$.

El par causado por la aceleración centrípeta valdrá:

$$\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)=\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\begin{vmatrix}i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ -x & R_y & R_z\end{vmatrix}=\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\left(\omega R_y\,\hat{k}-\omega R_z\,\hat{j}\right)=$$

$$\vec{r}\wedge\begin{vmatrix}i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & -\omega R_z & \omega R_y\end{vmatrix}=\vec{r}\wedge\left(-\omega^2 R_z\,\hat{k}-\omega^2 R_y\,\hat{j}\right)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ -x & R_y & R_z\\ 0 & -\omega^2 R_y & -\omega^2 R_z\end{vmatrix}=$$

$$-\omega^2 R_z R_y\,\hat{i}+\omega^2 R_y\,x\,\hat{k}+\omega^2 R_z R_y\,\hat{i}-\omega^2 R_z\,x\,\hat{j}=-\omega^2 R_z\,x\,\hat{j}+\omega^2 R_y\,x\,\hat{k}$$

La aceleración de Coriolis dará lugar al siguiente par:

$$\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{x'}\right)=2\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{x'}\right)=2\vec{r}\wedge\begin{vmatrix}i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ -v_x & 0 & 0\end{vmatrix}=2\vec{r}\wedge\left(0\right)=0$$

Sustituyendo los pares obtenidos en las integrales correspondientes se tiene:

$$\rho S\int_0^{R_x}\left[\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)+\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{x'}\right)\right]dx=\rho S\int_0^{R_x}\left[\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)\right]dx=$$

$$\rho S\int_0^{R_x}\left(-\omega^2 R_z\,x\,\hat{j}+\omega^2 R_y\,x\,\hat{k}\right)dx=\rho S\left(-\omega^2 R_z\frac{R_x^2}{2}\hat{j}+\omega^2 R_y\frac{R_x^2}{2}\hat{k}\right)$$

En este punto es interesante remarcar que se hubiese obtenido el mismo resultado si el vector posición se hubiese definido como $\vec{r}=\left(x;R_y;R_z\right)$ y luego se hubiese integrado entre un límite inferior $-R_x$ y un límite superior igual a cero, ejercicio que se deja para el lector.

Tramo 4.

Para este tramo, el diferencial de volumen se sustituirá por $d\forall = S\,dz$, puesto que para este considerando el diferencial de longitud va en dirección z. por otro lado, el vector de posición $\vec{r}$ tendrá ahora tres componentes, $\vec{r} = \left(-R_x; R_y; z\right)$.

El par causado por la aceleración centrípeta será:

$$\vec{r} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) = \vec{r} \wedge \vec{\omega} \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega & 0 & 0 \\ -R_x & R_y & z \end{vmatrix} = \vec{r} \wedge \vec{\omega} \wedge \left(\omega R_y \hat{k} - \omega z \hat{j}\right) =$$

$$\vec{r} \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & -\omega z & \omega R_y \end{vmatrix} = \vec{r} \wedge \left(-\omega^2 z \hat{k} - \omega^2 R_y \hat{j}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R_x & R_y & z \\ 0 & -\omega^2 R_y & -\omega^2 z \end{vmatrix} =$$

$$-\omega^2 z R_y \hat{i} + \omega^2 R_y R_x \hat{k} + \omega^2 z R_y \hat{i} - \omega^2 R_x z \hat{j} = -\omega^2 R_x z \hat{j} + \omega^2 R_y R_x \hat{k}$$

El par debido a la aceleración de Coriolis será:

$$\vec{r} \wedge \left(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{z'}\right) = 2\vec{r} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{z'}\right) = 2\vec{r} \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v_s \end{vmatrix} = 2\vec{r} \wedge \left(\omega v_s \hat{j}\right) =$$

$$2\begin{vmatrix} i & j & k \\ -R_x & R_y & z \\ 0 & \omega v_s & 0 \end{vmatrix} = 2\left(-R_x \omega v_s \hat{k} - \omega v_s z \hat{i}\right)$$

Sustituyendo los pares obtenidos en las integrales correspondientes se llega a:

$$\rho S \int_0^{R_z} \left[\vec{r} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) + \vec{r} \wedge \left(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{z'}\right)\right] dz =$$

$$\rho S \int_0^{R_z} \left[-\omega^2 R_x z \hat{j} + \omega^2 R_y R_x \hat{k} + 2\left(-R_x \omega v_s \hat{k} - \omega v_s z \hat{i}\right)\right] dz =$$

$$\rho S \left(-2\omega v_s \frac{R_z^2}{2} \hat{i} - \omega^2 R_x \frac{R_z^2}{2} \hat{j} + \left(\omega^2 R_y R_x R_z - 2R_x \omega v_s R_z\right) \hat{k}\right)$$

Tramo 1*.

El diferencial de volumen se sustituirá por $d\forall = S\,dy$, puesto que para este considerando el diferencial de longitud va en dirección y, por otro lado, el vector de posición $\vec{r}$ tendrá ahora las componentes componentes, $\vec{r} = (0; y; 0)$.

El par generado por la aceleración centrípeta valdrá:

$$\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)=\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\begin{vmatrix}i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & y & 0\end{vmatrix}=\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\left(\omega\,y\,\hat{k}\right)=\vec{r}\wedge\begin{vmatrix}i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & \omega\,y\end{vmatrix}=$$

$$\vec{r}\wedge\left(-\omega^2\,y\,\hat{j}\right)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & y & 0\\ 0 & -\omega^2 y & 0\end{vmatrix}=0$$

La aceleración de Coriolis dará lugar al siguiente par:

$$\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)=2\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)=2\vec{r}\wedge\begin{vmatrix}i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & -v_s & 0\end{vmatrix}=2\vec{r}\wedge\left(-\omega\,v_s\,\hat{k}\right)=$$

$$2\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & -y & 0\\ 0 & 0 & -\omega\,v_s\end{vmatrix}=2y\omega\,v_s\,\hat{i}$$

Sustituyendo los pares debidos a las aceleraciones centrípeta y Coriolis en las integrales correspondientes se tiene:

$$\rho S\int_0^{R_y}\left[\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)+\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)\right]dy=\rho S\int_0^{R_y}\left[\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)\right]dy=$$

$$\rho S\int_0^{R_y}2y\omega\,v_s\,\hat{i}\,dy=\rho S\,2\,\omega\,v_s\,\frac{R_y^2}{2}\hat{i}$$

Tramo 2*.

El diferencial de volumen será $d\forall = S\,dz$, puesto que para este considerando el diferencial de longitud va en dirección z, por otro lado, el vector de posición $\vec{r}$ tendrá ahora dos componentes, $\vec{r}=\left(0;-R_y;-z\right)$.

El par creado por la aceleración centrípeta valdrá:

$$\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)=\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\begin{vmatrix}i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & -R_y & -z\end{vmatrix}=\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\left(-\omega R_y\,\hat{k}+\omega z\,\hat{j}\right)=$$

$$\vec{r}\wedge\begin{vmatrix}i & j & k\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & \omega z & -\omega R_y\end{vmatrix}=\vec{r}\wedge\left(\omega^2 z\,\hat{k}+\omega^2 R_y\,\hat{j}\right)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & -R_y & -z\\ 0 & \omega^2 R_y & \omega^2 z\end{vmatrix}=$$

$$-\omega^2 z R_y\,\hat{i}+\omega^2 R_y z\,\hat{i}=0$$

La aceleración de Coriolis dará lugar a:

$$\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{z'}\right)=2\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{z'}\right)=2\vec{r}\wedge\begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v_s \end{vmatrix}=2\vec{r}\wedge\left(\omega\, v_s\,\hat{j}\right)=$$

$$2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -R_y & -z \\ 0 & \omega\, v_s & 0 \end{vmatrix}=2z\omega\, v_s\,\hat{i}$$

Procediendo a la integración se tiene:

$$\rho S\int_0^{R_z}\left[\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)+\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)\right]dz=\rho S\int_0^{R_z}\left[\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{y'}\right)\right]dz=$$

$$\rho S\int_0^{R_z}2z\omega\, v_s\,\hat{i}\,dz=\rho S\,2\,\omega\, v_s\,\frac{R_z^2}{2}\hat{i}$$

Tramo 3[*].

El diferencial de volumen se sustituirá por $d\forall = S\,dx$, puesto que para este considerando el diferencial de longitud va en dirección x, por otro lado, el vector de posición $\vec{r}$ tendrá ahora las componentes, $\vec{r}=\left(-x;-R_y;-R_z\right)$.

El par causado por la aceleración centrípeta valdrá:

$$\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)=\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega & 0 & 0 \\ -x & -R_y & -R_z \end{vmatrix}=\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\left(-\omega R_y\,\hat{k}+\omega R_z\,\hat{j}\right)=$$

$$\vec{r}\wedge\begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega R_z & -\omega R_y \end{vmatrix}=\vec{r}\wedge\left(\omega^2 R_z\,\hat{k}+\omega^2 R_y\,\hat{j}\right)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -x & -R_y & -R_z \\ 0 & \omega^2 R_y & \omega^2 R_z \end{vmatrix}=$$

$$-\omega^2 R_z R_y\,\hat{i}-\omega^2 R_y\,x\,\hat{k}+\omega^2 R_z R_y\,\hat{i}+\omega^2 R_z\,x\,\hat{j}=\omega^2 R_z\,x\,\hat{j}-\omega^2 R_y\,x\,\hat{k}$$

La aceleración de Coriolis dará lugar al siguiente par:

$$\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{x'}\right)=2\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{x'}\right)=2\vec{r}\wedge\begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega & 0 & 0 \\ -v_x & 0 & 0 \end{vmatrix}=2\vec{r}\wedge\left(0\right)=0$$

Sustituyendo los pares obtenidos en las integrales correspondientes se tiene:

$$\rho S\int_0^{R_x}\left[\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)+\vec{r}\wedge\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{x'}\right)\right]dx=\rho S\int_0^{R_x}\left[\vec{r}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)\right]dx=$$

$$\rho S\int_0^{R_x}\left(\omega^2 R_z\,x\,\hat{j}-\omega^2 R_y\,x\,\hat{k}\right)dx=\rho S\left(\omega^2 R_z\frac{R_x^2}{2}\hat{j}-\omega^2 R_y\frac{R_x^2}{2}\hat{k}\right)$$

Tramo 4*.

El diferencial de volumen se sustituirá por $d\forall = S\,dz$, puesto que para este considerando el diferencial de longitud va en dirección z, por otro lado, el vector de posición $\vec{r}$ tendrá ahora las componentes, $\vec{r} = \left(-R_x; -R_y; -z\right)$.

El par causado por la aceleración centrípeta valdrá:

$$\vec{r} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) = \vec{r} \wedge \vec{\omega} \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega & 0 & 0 \\ -R_x & -R_y & -z \end{vmatrix} = \vec{r} \wedge \vec{\omega} \wedge \left(-\omega R_y \hat{k} + \omega z \hat{j}\right) =$$

$$\vec{r} \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega z & -\omega R_y \end{vmatrix} = \vec{r} \wedge \left(\omega^2 z \hat{k} + \omega^2 R_y \hat{j}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R_x & -R_y & -z \\ 0 & \omega^2 R_y & \omega^2 z \end{vmatrix} =$$

$$-\omega^2 z R_y \hat{i} - \omega^2 R_y R_x \hat{k} + \omega^2 z R_y \hat{i} + \omega^2 R_x z \hat{j} = \omega^2 R_x z \hat{j} - \omega^2 R_y R_x \hat{k}$$

El par debido a la aceleración de Coriolis será:

$$\vec{r} \wedge \left(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{z'}\right) = 2\vec{r} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{z'}\right) = 2\vec{r} \wedge \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_s \end{vmatrix} = 2\vec{r} \wedge \left(-\omega v_s \hat{j}\right) =$$

$$2\begin{vmatrix} i & j & k \\ -R_x & -R_y & -z \\ 0 & -\omega v_s & 0 \end{vmatrix} = 2\left(R_x \omega v_s \hat{k} - \omega v_s z \hat{i}\right)$$

Sustituyendo los pares obtenidos en las integrales correspondientes se llega a:

$$\rho S \int_0^{R_z} \left[\vec{r} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) + \vec{r} \wedge \left(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{z'}\right)\right] dz =$$

$$\rho S \int_0^{R_z} \left[\omega^2 R_x z \hat{j} - \omega^2 R_y R_x \hat{k} + 2\left(R_x \omega v_s \hat{k} - \omega v_s z \hat{i}\right)\right] dz =$$

$$\rho S \left(-2\omega v_s \frac{R_z^2}{2} \hat{i} + \omega^2 R_x \frac{R_z^2}{2} \hat{j} + \left(-\omega^2 R_y R_x R_z + 2R_x \omega v_s R_z\right) \hat{k}\right)$$

Sustituyendo ahora los términos resultantes correspondientes cada uno de los ocho tramos, en la ecuación general del momento cinético se obtiene:

$$\sum \vec{M}_{xyz} = \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) \vec{v}\, \vec{ds} + \int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) \vec{v}\, \vec{ds} +$$

$$\int_{\forall C} \vec{r} \wedge \rho\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{x'y'z'}\right) d\forall$$

$$\sum \vec{M}_{xyz} = \frac{\dot{m}_e}{2}\left(-v_s R_y \hat{i} - v_s R_x \hat{j}\right) + \frac{\dot{m}_e}{2}\left(-v_s R_y \hat{i} + v_s R_x \hat{j}\right) +$$
$$\rho S 2\omega v_s \frac{R_y^2}{2}\hat{i} + \rho S 2\omega v_s \frac{R_z^2}{2}\hat{i} + \rho S\left(-\omega^2 R_z \frac{R_x^2}{2}\hat{j} + \omega^2 R_y \frac{R_x^2}{2}\hat{k}\right) +$$
$$\rho S\left(-2\omega v_s \frac{R_z^2}{2}\hat{i} - \omega^2 R_x \frac{R_z^2}{2}\hat{j} + \left(\omega^2 R_y R_x R_z - 2R_x \omega v_s R_z\right)\hat{k}\right) +$$
$$\rho S 2\omega v_s \frac{R_y^2}{2}\hat{i} + \rho S 2\omega v_s \frac{R_z^2}{2}\hat{i} + \rho S\left(\omega^2 R_z \frac{R_x^2}{2}\hat{j} - \omega^2 R_y \frac{R_x^2}{2}\hat{k}\right) +$$
$$\rho S\left(-2\omega v_s \frac{R_z^2}{2}\hat{i} + \omega^2 R_x \frac{R_z^2}{2}\hat{j} + \left(-\omega^2 R_y R_x R_z + 2R_x \omega v_s R_z\right)\hat{k}\right)$$

$$\sum \vec{M}_{xyz} = 2\frac{\dot{m}_e}{2}\left(-v_s R_y \hat{i}\right) + 2\rho S 2\omega v_s \frac{R_y^2}{2}\hat{i} = -\dot{m}_e v_s R_y \hat{i} +$$
$$2\rho S \omega v_s R_y^2 \hat{i} = -\dot{m}_e R_y \left(v_s - \omega R_y\right)\hat{i}$$

Obsérvese que el par resultante actúa únicamente sobre el eje x, y es debido al flujo saliente y a la aceleración de Coriolis que actúa en los tramos 1 y 1^*. Cabe recordar que el par obtenido es el de reacción, es decir el que el contorno ejerce sobre el fluido.

1b.- Si se realiza ahora el mismo problema utilizando un sistema inercial de coordenadas, se partirá de la ecuación.

$$\vec{r} \wedge \oint_{SC} p\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \oint_{SC} \bar{\bar{\tau}}\,\overrightarrow{ds} + \vec{r} \wedge \int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right) d\forall + \oint_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

Realizando ahora las mismas hipótesis que en el apartado anterior sobre las fuerzas másicas, considerando el régimen como permanente y trabajando en presiones relativas, la ecuación precedente queda:

$$\sum \vec{M}_{xyz} = \int_{SE} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

Obsérvese que se ha extendido el término de flujo de momento cinético a las secciones entrantes y salientes. Por otro lado, y al igual que sucedía en el apartado precedente, el flujo entrante no causa momento alguno, con lo que se tiene:

$$\sum \vec{M}_{xyz} = \int_{SS1} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds} + \int_{SS2} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{v}_{xyz}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

El producto vectorial para cada una de las superficies salientes tomará la forma.

Para la sección de salida superior:

$$\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_{xyz}\right)=\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_{SS1}\right)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -R_x & R_y & 0 \\ 0 & 0 & -\left(v_s-\omega R_y\right) \end{vmatrix}=$$
$$-\left(v_s-\omega R_y\right)R_y\,\hat{i}-\left(v_s-\omega R_y\right)R_x\,\hat{j}$$

Véase que la velocidad de salida del fluido por la rama superior del aspersor, se ha tomado como relativa al sistema de referencia fijo.

Para la sección de salida inferior, se tiene:

$$\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_{xyz}\right)=\left(\vec{r}\wedge\vec{v}_{SS2}\right)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -R_x & -R_y & 0 \\ 0 & 0 & \left(v_s-\omega R_y\right) \end{vmatrix}=$$
$$-\left(v_s-\omega R_y\right)R_y\,\hat{i}+\left(v_s-\omega R_y\right)R_x\,\hat{j}$$

Sustituyendo ahora el resultado en la ecuación de momento cinético, se llega a:

$$\sum\vec{M}_{xyz}=\int_{SS1}\rho\left(-\left(v_s-\omega R_y\right)R_y\,\hat{i}-\left(v_s-\omega R_y\right)R_x\,\hat{j}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds}+$$
$$\int_{SS2}\rho\left(-\left(v_s-\omega R_y\right)R_y\,\hat{i}+\left(v_s-\omega R_y\right)R_x\,\hat{j}\right)\vec{v}\,\overrightarrow{ds}$$

De donde se obtiene.

$$\sum\vec{M}_{xyz}=-2\,\dot{m}_s\left(v_s-\omega R_y\right)R_y\,\hat{i}=-\dot{m}_e\left(v_s-\omega R_y\right)R_y\,\hat{i}$$

Véase que se ha obtenido el mismo resultado que en el apartado anterior.

2.- Para determinar la velocidad angular a la que gira el aspersor, se utilizará la expresión:

$$\sum\vec{M}_x=I_x\,\frac{d\omega}{dt}$$

I_x es el momento de inercia respecto al eje x.

Dado que según el enunciado, el régimen es permanente, (velocidad angular constante), se tiene:

$$\dot{m}_e\left(v_s-\omega R_y\right)R_y-k\,\omega=0$$

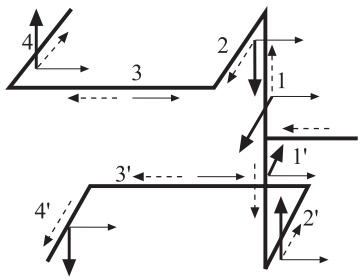
De donde:

$$\omega = \frac{\dot{m}_e \; v_s \; R_y}{\dot{m}_e \; R_y^2 + k}$$

Únicamente con el fin de esclarecer conceptos, se presenta en la figura siguiente los vectores asociados a la aceleración de Coriolis en cada tramo, donde el vector a trazos representa la velocidad del fluido, el vector más grueso la aceleración de Coriolis y el vector más delgado la velocidad angular.

Gráficamente se observa que los momentos creados por 1 y 1^* se suman siendo de valor positivo, los momentos creados por 2 y 2^* también se suman siendo de valor positivo, mientras que por otro lado, en 3 y 3^* no existen momentos, ya que la velocidad i la velocidad angular son paralelas. Finalmente en 4 y 4^* se sumarían también los momentos siendo estos de valor negativo. (Los momentos debidos a la aceleración de Coriolis creados por 2 y 2^*, se anulan con los de 4 y 4^*).

Fig. 50.4



→7

Ecuaciones fundamentales
Ecuación de conservación de la energía

7.1 Introducción

En un volumen de control genérico, y de la forma más genérica posible, se pueden diferenciar cinco formas de energía intrínseca al sistema englobado por dicho volumen:

- Energía cinética. Asociada al movimiento de la partícula. $E_c = \frac{V^2}{2}$
- Energía potencial. Asociada a la posición de la partícula. $E_p = g\,z$
- Energía interna. Asociada a la estructura y movimiento moleculares.
- Energía química. Asociada a la disposición de átomos en moléculas y a las reacciones químicas.
- Energía nuclear. Asociada a la estructura interna de los átomos. Se libera mediante fisión o fusión nuclear.

En el estudio de un primer curso de Mecánica de Fluidos convencional, en general las reacciones químicas y nucleares están ausentes.

Por otro lado, las diferentes formas de energía se pueden clasificar en térmica o mecánica. La térmica se asocia a la temperatura, la estructura molecular y el transporte de calor, mientras que la mecánica se asocia a la fuerza y el movimiento.

Una posible clasificación de las energías mecánica y térmica sería:

Energía mecánica: energía cinética, energía potencial, trabajo.

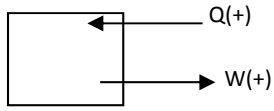
Energía térmica: energía Interna, calor.

Dado un sistema de control genérico, el balance de energía se puede expresar en que la velocidad de variación de energía intrínseca del sistema ha de ser igual a la velocidad

de transferencia de calor al sistema, más la velocidad de transferencia de trabajo realizado sobre el sistema.

Utilizando el convenio de signos de termodinámica, el cual considera el flujo de calor entrante al sistema como positivo y el trabajo entrante como negativo, se tiene:

Fig. T 7.1



$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE_{sis}}{dt} = \frac{dB_{sis}}{dt}$$

Recordando la ecuación de transporte de Reynolds, donde se estudiaba la variación temporal de una propiedad genérica B, y definiendo para el presente caso dicha propiedad como la energía asociada al sistema, se tiene:

$$B_{sis} = E_{sis} = \int_{\forall_{sis}} \rho \ (u + \frac{V^2}{2} + gz)\, d\forall$$

Así, la energía por unidad de masa será:

$$b = \frac{B}{m} = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho(u + \frac{V^2}{2} + gz) d\forall + \oint_{SC} \rho(u + \frac{V^2}{2} + gz)\, \vec{V} d\vec{s}$$

Cabe recordar lo siguiente:

$\dot{W} = \frac{dW}{dt}$ potencia mecánica transmitida o cedida al sistema definido por el volumen de control considerado.

$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ potencia calorífica transferida al sistema o cedida por el mismo.

7.2 Composición del término trabajo

Se pueden distinguir tres diferentes tipos de trabajo que actúan sobre el sistema objeto de estudio: $W = W_{eje} + W_{\tau} + W_P$

El trabajo en el eje (W_{eje}), se realiza debido a los esfuerzos cortantes existentes entre los álabes de la máquina y el fluido.

El trabajo realizado por esfuerzos cortantes (W_{τ}) es debido a los esfuerzos cortantes existentes en el fluido que actúa sobre las fronteras del volumen de control.

El trabajo de presión (W_P) es debido a la acción de la presión del fluido que actúa sobre las fronteras del volumen de control.

La potencia asociada a cada uno de estos términos será $\dot{W} = \dot{W}_{eje} + \dot{W}_{\tau} + \dot{W}_P$

La ecuación que rige cada uno de estos términos se define como:

a) Potencia debida a los esfuerzos cortantes.

$$\dot{W}_{cor} = \oint_{A_{VC}} \vec{V} \cdot d\vec{F}_{cor} = \oint_{A_{VC}} \vec{V} \cdot (\bar{\bar{\tau}}\, d\vec{s})$$

F_{cor} = fuerza debida a los esfuerzos cortantes

Esta potencia ha de entenderse como energía mecánica disipada por las fuerzas de viscosidad.

En las superficies frontera con el sólido, donde la velocidad del fluido es nula, existen esfuerzos cortantes, pero la potencia asociada es nula, al serlo la velocidad.

b) Potencia asociada a un eje mecánico.

$$\dot{W}_{eje} = M \cdot \omega = \omega \int_{S_{eje}} \vec{\tau}\, \vec{r}\, ds$$

El par de torsión se calcula integrando el esfuerzo cortante sobre la sección transversal del eje (en definitiva, sobre la sección de cada trozo de álabe en contacto con el fluido).

Es usual denominar como $\dot{W}_S$ al trabajo realizado sobre el fluido dentro del volumen de control por fuerzas diferentes de las que provienen de la presión: $\dot{W}_s = \dot{W}_{eje} + \dot{W}_{\tau}$

c) Potencia asociada a fuerzas de presión.

En este apartado se distingue entre la potencia debida a las fuerzas de presión asociadas al flujo y la potencia asociada a la posible deformación del volumen de control (esta sólo existirá cuando el volumen de control se deforme bajo la acción de las fuerzas de presión).

El signo de la potencia asociada a la presión del fluido que atraviesa las fronteras del volumen de control, viene dado por el producto escalar del vector velocidad por el ventor diferencial de superficie.

$$d\dot{W}_{P\ flujo} = P\vec{V}_n d\vec{s} = P.\vec{V}.\hat{n}\, ds = P.V \cos\theta\, ds = P\vec{V}_i d\vec{s}$$

V_i es la velocidad relativa a la superficie de control.

Integrando a lo largo de toda la superficie se obtiene: $\dot{W}_{P\ flujo} = \oint_{SC} P\, \vec{V}_i \cdot d\vec{s}$

Por lo que hace referencia a la potencia debida a la posible deformación del volumen de control, bajo la acción de las fuerzas de presión, $\dot{W}_{P\ D}$, es el producto de la presión que actúa sobre la superficie de control y la velocidad de deformación de la misma. Si el volumen de control es indeformable, este término desaparece.

$$\dot{W}_{P\ D} = \oint_{SC} \vec{V}_C\, d\vec{F}_p = \oint_{SC} \vec{V}_C\, P \cdot \hat{n}\, ds = \oint_{SC} P\vec{V}_C\ d\vec{s}$$

$\vec{V}_C$ velocidad de deformación de la superficie de control.

La potencia asociada a las fuerzas de presión quedará:

$$\dot{W}_p = \dot{W}_{flujo} + \dot{W}_{P\ D} = \oint_{SC} P\vec{V}_r \cdot \hat{n}\, ds + \oint_{SC} P\vec{V}_C \cdot \hat{n}\, ds$$

de donde la potencia total será $\dot{W} = \dot{W}_{eje} + \dot{W}_{\tau} + \dot{W}_{P\ flujo} + \dot{W}_{P\ D}$

La ecuación general de la energía tomará la forma:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} - \dot{W}_{\tau} - \oint_{SC} P\vec{V}_r \cdot \hat{n}\, ds - \oint_{SC} P\vec{V}_C \cdot \hat{n}\, ds = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho(u + \frac{V^2}{2} + gz)d\forall +$$

$$\oint_{SC} \rho(u + \frac{V^2}{2} + gz)(\vec{V}_i \cdot \hat{n})ds$$

Es asimismo común representar esta ecuación como:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} - \dot{W}_{\tau} - \oint_{SC} P\vec{V}_c \cdot \hat{n}\, ds = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho(u + \frac{V^2}{2} + gz)d\forall + \oint_{SC} \rho(u + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz)\vec{V}_i \cdot d\vec{s}$$

Cabe recordar que la entalpía asociada al fluido se define $u + \frac{P}{\rho} = h$.

Obsérvese que, para un volumen de control fijo y rígido, en régimen estacionario, fluido incompresible, cuando no existe aporte o sustracción de calor o trabajo al volumen de control, y no se considera la potencia debida a los esfuerzos cortantes, la ecuación de la energía se reduce a la ecuación de Bernoulli.

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + g\,z_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + g\,z_2$$

Esta ecuación es equivalente al primer principio de la termodinámica.

7.3 Ecuación de la energía para turbomáquinas, caso máquinas térmicas e hidráulicas

Sea el sistema definido por la figura siguiente y que caracteriza una turbomáquina. A través del sistema, fluye un fluido cuyas características a la entrada y a la salida son conocidas. Además, un eje atraviesa la frontera del sistema, con lo que se puede comunicar o extraer energía del fluido.

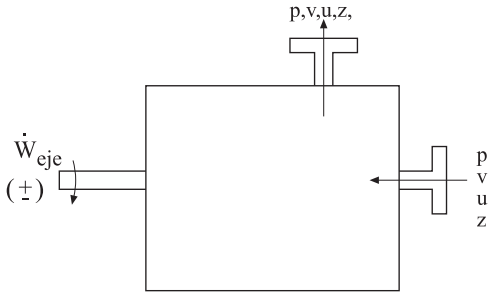


Fig. T 7.2
Esquema de una turbomáquina

Considerando un volumen de control fijo y rígido, la ecuación de la energía da lugar a:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} - \dot{W}_{\tau} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho(u + \frac{V^2}{2} + gz)d\forall + \oint_{SC} \rho\left(u + \frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,d\vec{s}$$

Considerando el funcionamiento en régimen permanente:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} - \dot{W}_{\tau} = \int_{SE} \rho\left(h + gz + \frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,d\vec{s} + \int_{SS} \rho\left(h + gz + \frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,d\vec{s}$$

ecuación utilizada en máquinas térmicas, donde la potencia generada depende básicamente del salto entálpico del fluido entre la entrada y la salida.

Para máquinas hidráulicas, se establece:

$$-\dot{W}_{eje} - \dot{W}_{\tau} = \int_{SE} \rho\left(\frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,d\vec{s} + \int_{SS} \rho\left(\frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,d\vec{s}$$

Si la densidad del fluido se considera variable:

$$-\dot{W}_{eje} - \dot{W}_{\tau} = \int_{SE} -\frac{P}{\rho}\,d\dot{m} + \int_{SS} \frac{P}{\rho}\,d\dot{m} + \dot{m}\left(\frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g\left(z_S - z_E\right)\right)$$

Para fluido de densidad constante.

$$-\dot{W}_{eje} - \dot{W}_{\tau} = \dot{m}\left(\frac{P_S}{\rho} - \frac{P_E}{\rho} + \frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g\left(z_S - z_E\right)\right)$$

Los términos:

$\frac{\dot{W}_{eje}}{\dot{m}} = Y$; energía por unidad de masa cedida o absorbida del fluido.

$\frac{\dot{W}_{\tau}}{\dot{m}} = \Delta y$; pérdidas de energía por esfuerzos cortantes en el interior de la máquina.

$$-Y - \Delta y = \left(\frac{P_S}{\rho} - \frac{P_E}{\rho} + \frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g\left(z_S - z_E\right)\right)$$

Cabe denotar que las pérdidas de energía por esfuerzos cortantes se crean en el interior del volumen de control y es una energía que el fluido pierde transformándose en calor, el cual se distribuye entre el propio fluido y el contorno sólido que lo contiene. Así, según el convenio de signos establecido, se trata de una energía positiva (el fluido la pierde); en consecuencia:

$$-Y + \Delta y = \left(\frac{P_S}{\rho} - \frac{P_E}{\rho} + \frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g\left(z_S - z_E\right) \right)$$

La energía neta transmitida al fluido, en caso de bomba centrífuga o similar, sería:

$$Y_{real} = Y - \Delta y$$

$$-Y_{real} = \left(\frac{P_S}{\rho} - \frac{P_E}{\rho} + \frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g\left(z_S - z_E\right) \right)$$

de donde el rendimiento total de la bomba, siempre y cuando se considere que el rendimiento mecánico es la unidad, se define:

$$\eta_T = \frac{\rho\, Y_{real} Q_{real}}{\dot{W}_{eje}}$$

siendo el rendimiento hidráulico para bombas:

$$\eta_H = \frac{Y_{real}}{Y} = \frac{Y - \Delta y}{Y} = \frac{\dot{W}_{eje} - \dot{W}_\tau}{\dot{W}_{eje}} = \frac{\dot{W}_{eje} - \sum \text{Pérdidas}}{\dot{W}_{eje}}$$

de donde la relación entre el rendimiento hidráulico y el rendimiento total será:

$$\eta_T = \frac{\rho(Y - \Delta y) Q_{real}}{\dot{W}_{eje}} = \frac{\rho(Y - \Delta y) Q_{real}}{\rho\, Y\, Q} = \eta_H \frac{Q_{real}}{Q} = \eta_H\, \eta_V$$

la relación $\eta_V = \dfrac{Q_{real}}{Q}$ se define como el rendimiento volumétrico de la bomba. Obsérvese que $Q_{real} < Q$.

Para el caso de turbinas, el rendimiento total sería:

$$\eta_T = \frac{\dot{W}_{eje}}{\rho\, Y_{real} Q_{real}}$$

El rendimiento hidráulico se define:

$$\eta_H = \frac{Y}{Y_{real}} = \frac{Y}{Y + \Delta y} = \frac{\dot{W}_{eje}}{\dot{W}_{eje} + \dot{W}_\tau} = \frac{\dot{W}_{eje}}{\dot{W}_{eje} + \sum \text{pérdidas}}$$

Obsérvese que, para las turbinas:

$$Y_{real} = Y + \Delta y$$

lo cual significa que, de acuerdo con el convenio de signos establecido, tanto las pérdidas por fricción como la potencia transmitida al eje son energías que se extraen del fluido. La ecuación de la energía para el caso de las turbinas hidráulicas se establece:

$$Y_{real} = \left(\frac{P_S}{\rho} - \frac{P_E}{\rho} + \frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g\left(z_S - z_E\right) \right)$$

de donde la relación entre el rendimiento total y el hidráulico para las turbinas se define:

$$\eta_T = \frac{\dot{W}_{eje}}{\rho\, Y_{real} Q_{real}} = \frac{\rho\, Y\, Q}{\rho\, (Y + \Delta y) Q_{real}} = \eta_H \frac{Q}{Q_{real}} = \eta_H\, \eta_V$$

la expresión $\eta_V = \dfrac{Q}{Q_{real}}$ define el rendimiento volumétrico de la turbina. Obsérvese que ahora el Q_{real} representa el caudal entrante a la máquina, mientras que Q representa el caudal utilizado para transmitir una potencia al eje. En turbinas, se ha de entender que $Q_{real} > Q$.

7.4 Forma diferencial de la ecuación de la energía

Siguiendo el procedimiento utilizado previamente para la obtención de las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos en forma diferencial, ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, se determinará ahora la forma diferencial de la ecuación de la energía, partiendo de la ecuación de la energía en forma integral, y transformando las integrales de superficie en integrales de volumen. Se aplica posteriormente, el resultado a un volumen de control diferencial.

En forma integral, la ecuación de la energía se definía:

$$-\left(\dot{W}_{eje} + \dot{W}_{\tau}\right) + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho(u + \frac{V^2}{2} + gz)d\forall + \int_{SC}\left[(h + \frac{V^2}{2} + gz)\rho\vec{V}\right]d\vec{s}$$

Aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradsky la integral de superficie se puede dar como:

$$-\left(\dot{W}_{eje} + \dot{W}_{\tau}\right) + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho(u + \frac{V^2}{2} + gz)d\forall + \int_{VC}\nabla\left[(h + \frac{V^2}{2} + gz)\rho\vec{V}\right]d\forall$$

Diferenciando con respecto al volumen, se tiene:

$$\frac{d}{d\forall}\left[-\left(\dot{W}_{eje}+\dot{W}_{cortante}\right)+\dot{Q}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(u+\frac{V^2}{2}+gz)\right]+\nabla\left[(h+\frac{V^2}{2}+gz)\rho\vec{V}\right]$$

ecuación que se puede dar como:

$$-\left(\delta\dot{W}_{eje}+\delta\dot{W}_{cortante}\right)+\delta\dot{Q}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(u+\frac{V^2}{2}+gz)\right]+\nabla\left[(h+\frac{V^2}{2}+gz)\rho\vec{V}\right]$$

Cada uno de los términos de esta ecuación representa una potencia por unidad de volumen.

El primer sumando del segundo término de la ecuación se puede expresar:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(u+\frac{V^2}{2}+gz)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(u+\frac{V^2}{2}+gz)\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(P\cdot\upsilon)\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(P\cdot\upsilon)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(u+\frac{V^2}{2}+gz)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(u+P\cdot\upsilon+\frac{V^2}{2}+gz)\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(P\cdot\upsilon)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(u+\frac{V^2}{2}+gz)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(h+\frac{V^2}{2}+gz)\right]-\frac{\partial}{\partial t}P$$

de donde, sustituyendo en la ecuación origen:

$$-\left(\delta\dot{W}_{eje}+\delta\dot{W}_{cortante}\right)+\delta\dot{Q}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(h+\frac{V^2}{2}+gz)\right]+\nabla\left[(h+\frac{V^2}{2}+gz)\rho\vec{V}\right]-\frac{\partial}{\partial t}P$$

El segundo término de esta ecuación se puede descomponer en:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(h+\frac{V^2}{2}+gz)+\rho\frac{\partial}{\partial t}(h+\frac{V^2}{2}+gz)+(h+\frac{V^2}{2}+gz)\cdot\nabla(\rho\vec{V})$$
$$+\rho(\vec{V}\nabla)(h+\frac{V^2}{2}+gz)-\frac{\partial}{\partial t}P$$

Agrupando términos, se tiene:

$$(h+\frac{V^2}{2}+gz)\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{V})\right)+\rho\frac{\partial}{\partial t}(h+\frac{V^2}{2}+gz)+\rho(\vec{V}\nabla)(h+\frac{V^2}{2}+gz)-\frac{\partial}{\partial t}P$$

Recordando la ecuación de continuidad, se observa que el primer término es cero, de donde:

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(h+\frac{V^2}{2}+gz)+\rho(\vec{V}\cdot\nabla)(h+\frac{V^2}{2}+gz)-\frac{\partial P}{\partial t}$$

Mediante el concepto de derivada material los dos primeros sumandos se pueden agrupar en:

$$\rho\frac{D}{Dt}(h+\frac{V^2}{2}+gz)-\frac{\partial P}{\partial t}$$

con lo cual la ecuación de la energía quedará:

$$-\left(\delta\dot{W}_{eje}+\delta\dot{W}_{cortante}\right)+\delta\dot{Q}=\rho\frac{D}{Dt}(h+\frac{V^2}{2}+gz)-\frac{\partial P}{\partial t}$$

Esta ecuación es una de las formas de representar la ecuación diferencial de la energía; las unidades de cada término son $\frac{J}{m^3 s}$, potencia por unidad de volumen.

Problema 51

Enunciado

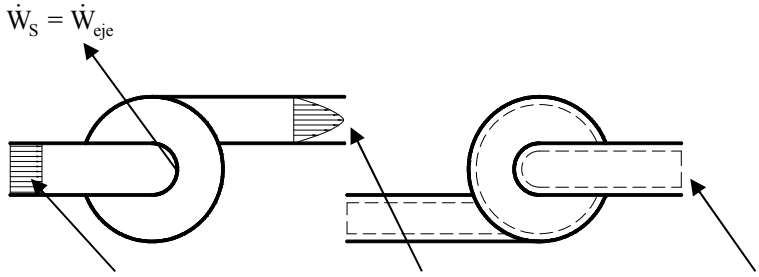
El compresor de la figura adjunta comprime 5 kg/s de aire; las condiciones termodinámicas a la entrada del compresor son: $T_1 = 297$ K y $P_1 = 92.000$ Pa (presión absoluta); las condiciones del fluido a la salida son: $T_2 = 380$ K y $P_2 = 300.000$ Pa (presión absoluta). El perfil de velocidades del fluido a la entrada se considera uniforme, mientras que a la salida se considera parabólico, y está definido por la ecuación:

$$U = U_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Si se considera que el flujo es estacionario y la transferencia de calor es despreciable, determine la potencia requerida para accionar el compresor.

Capacidad calorífica a volumen constante del aire $C_v = 720\dfrac{J}{kg\,K}$

Fig. 51.1



Datos:

$$\dot{m} = 5\frac{kg}{s}$$
$$T_1 = 297\,K$$
$$P_1 = 92.000\ Pa$$
$$R_1 = 0,2\,m$$

$$T_2 = 380\,K$$
$$P_2 = 300.000\ Pa$$
$$R_2 = 0,2\,m$$

Resolución

La ecuación de la energía para régimen permanente y volumen de control fijo y rígido se enuncia:

$$\dot{Q} - \dot{W}_S = \oint_{SC} \rho \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) (\vec{v}\,\vec{n})\, ds$$

$$\dot{W}_S = \dot{W}_{eje} + \dot{W}_t \; ; \qquad \text{se considera} \qquad \dot{Q} = 0 \;\; \dot{W}_t = 0 \;\; Z_1 = Z_2 \qquad \text{(no hay pérdidas)}$$

de donde:

$$-\dot{W}_{eje} = \oint_{SC} \rho \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v}\,\vec{n})\, ds$$

$$-\dot{W}_{eje} = \dot{m} \left[(u_2 - u_1) + \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) \right] + \int_{S.salida} \rho_2 \, \frac{\vec{v}^2}{2} \, \vec{v}\, d\vec{s} - \dot{m} \, \frac{v_1^2}{2}$$

$$\int_{S.salida} \rho_2 \, \frac{v^3}{2} \, ds = \int_0^R \rho_2 \, u_{máx}^3 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^3 \frac{2\pi r}{2} \, dr = \frac{\pi \rho_2 \, u_{máx}^3 \, R_2^2}{8}$$

para determinar la relación entre la velocidad media y la velocidad máxima:

$$\dot{m} = \rho_2 \, \overline{v}_2 \, S_2 = \int_0^{R_2} \rho_2 \, u_2 \, 2\pi r \, dr = \int_0^{R_2} \rho_2 \, u_{máx} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) 2\pi r \, dr$$

$$\rho_2 \, \overline{v}_2 \, \pi R_2^2 = \rho_2 \, u_{máx} \, 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4 R^2} \right]_0^{R_2}$$

$$\rho_2 \, \overline{v}_2 \, \pi \, R_2^2 = \rho_2 \, u_{máx} \, 2\pi \, \frac{R_2^2}{4}$$

$$u_{máx} = \overline{v}_2 \, 2$$

de donde:

$$\int_{S.salida} \rho_2 \, \frac{v^3}{2} \, ds = \frac{\pi \rho_2 \, u_{máx}^3 \, R_2^2}{8} = \frac{\pi \rho_2 \, \overline{v}_2^3 \, 8 \, R_2^2}{8} = \dot{m} \, \overline{v}_2^2$$

Recordando que la ley de los gases perfectos es: $\frac{P}{\rho} = RT$;

sustituyendo en la ecuación de energía queda:

$$-\dot{W}_{eje} = \dot{m} \left(C_v \left(T_2 - T_1 \right) \right) + \dot{m} \, R \left(T_2 - T_1 \right) + \dot{m} \left(\overline{v}_2^2 - \frac{v_1^2}{2} \right)$$

$$\overline{v}_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2\, S_2} = \frac{\dot{m}\, R\, T_2}{P_2\, S_2} = 14,46\frac{m}{s} \qquad \overline{v}_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1\, S_1} = \frac{\dot{m}\, R\, T_1}{P_1\, S_1} = 36,86\frac{m}{s}$$

$$-\dot{W}_{eje} = 5\times 720\times(380-297)+5\times 287\times(380-297)+6\times\left(14,46^2-\frac{36,86^2}{2}\right)$$

$-\dot{W}_{eje} = 415.553$ W El signo indica que se trata de energía que se comunica al volumen de control.

Problema 52

Enunciado

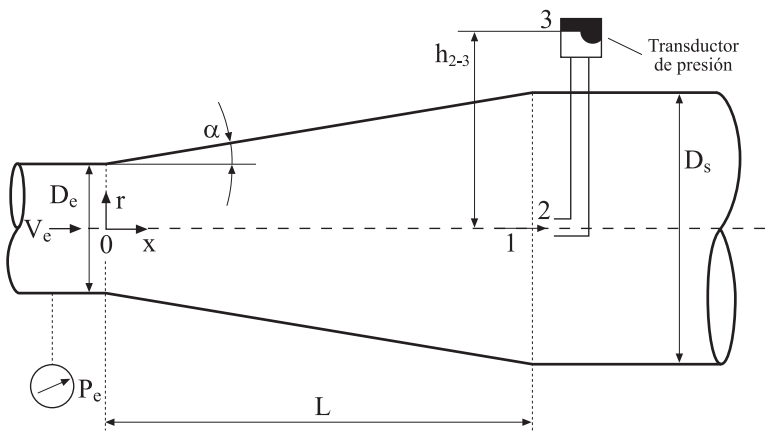
La figura siguiente, representa la voluta o cámara espiral de una turbomáquina, la cual, y para un mejor entendimiento del problema, se ha dispuesto en sentido horizontal.

El fluido, que puede tratarse como incompresible, (agua), fluye en el sentido que indica la flecha, desde la sección de menor diámetro hacia la sección de diámetro mayor.

Se conoce que la velocidad del fluido a la entrada del conducto, se define por la relación: $V_e=V_0+k\,\sin(\omega t)$; donde "V_0" y "k" son dos parámetros conocidos, "ω" es la velocidad angular de la turbomáquina, que se mantiene constante a 150,796 rad/s, y "t" es el tiempo en segundos. La presión del fluido, también a la entrada del conducto de menor diámetro, queda definida como: $P_e=P_0+k_1\,\sin(\varphi_0+\omega t)$; "P_0", "k_1" y "φ_0" son parámetros conocidos.

Se pide determinar, la ecuación que caracteriza la presión temporal que leerá el transductor de presión que se muestra en la figura. Considérense todas las dimensiones como conocidas.

Fig. 52.1



Resolución

La ecuación de continuidad aplicada entre la entrada y salida del tramo cónico, da lugar a:

$$\rho Q_e = \rho Q_s$$

o bien: $V_e\ S_e = V_s\ S_s = V_i\ S_i$

Obsérvese que aunque el flujo es transitorio, no existe variación temporal de masa en el volumen de control.

La velocidad temporal del fluido en cualquier diferencial de volumen del tramo cónico, dado por un punto genérico "i" alejado una distancia genérica "x" del punto "0", se define:

$$V_s = \frac{V_e\ S_e}{S_s}; \quad V_i = \frac{V_e\ S_e}{S_i};$$

Seguidamente se aplicará la ecuación de la energía, al volumen de control cónico, en donde existe una entrada y una salida de flujo.

$$\dot{Q} + \dot{W}_{eje} + \dot{W}_{\tau} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(u + \frac{V_i^2}{2} + g\,z\right) d\forall + \int_{SC} \rho\left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{V_i^2}{2} + g\,z\right)\vec{V}\,d\vec{s}$$

Considerando que, en el volumen de control elegido, no existe transferencia de calor ni trabajo y que el fluido se puede considerar ideal e incomprensible, la ecuación anterior queda reducida a:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^L \left(\frac{V_i^2}{2}\right) S_i\,dx + \int_0^{R_e}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V_i^2}{2}\right)\vec{V}\,d\vec{s} + \int_0^{R_s}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V_i^2}{2}\right)\vec{V}\,d\vec{s}$$

Véase que los términos $\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V_i^2}{2}\right)$ dependen del tiempo, pero no dependen del diferencial de superficie, con lo que se obtiene:

$$\left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{V_e^2}{2}\right) Q_e = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{V_e\ S_e}{S_i}\right)^2 S_i\,dx + \left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2}\right) Q_s$$

De donde:

$$\left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{V_e^2}{2}\right) Q_e - \left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2}\right) Q_s = \frac{S_e^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(V_e^2\right)\int_0^L \frac{dx}{S_i} = \frac{S_e^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(V_e^2\right)\int_0^L \frac{dx}{\pi\left(R_e + x\,tg(\alpha)\right)^2}$$

Procediendo a la integración se tiene:

$$\left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{V_e^2}{2}\right) Q_e - \left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2}\right) Q_s = \frac{S_e^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(V_e^2\right)\left[\frac{-1}{\pi\,tg(\alpha)}\left(\frac{1}{R_e + L\,tg(\alpha)} - \frac{1}{R_e}\right)\right]$$

Derivando ahora respecto el tiempo la velocidad a la entrada.

$$\left(\frac{P_e}{\rho}+\frac{V_e^2}{2}\right)Q_e-\left(\frac{P_s}{\rho}+\frac{V_s^2}{2}\right)Q_s=$$
$$=\left[\frac{-1}{\pi\,tg(\alpha)}\left(\frac{1}{R_e+L\,tg(\alpha)}-\frac{1}{R_e}\right)\right]\frac{S_e^2}{2}\,2\left(V_0+k\sin(\omega t)\right)k\cos(\omega t)\,\omega$$

De esta ecuación, se va a extraer la presión a la salida del tramo cónico, punto 1, obteniendo:

$$\frac{P_s}{\rho}=\frac{P_1}{\rho}=\left(\frac{P_e}{\rho}+\frac{V_e^2}{2}\right)\frac{Q_e}{Q_s}-\left(\frac{V_s^2}{2}\right)+$$
$$\left[\frac{1}{\pi\,tg(\alpha)}\left(\frac{1}{R_e+L\,tg(\alpha)}-\frac{1}{R_e}\right)\right]\frac{S_e^2}{Q_s}\left(V_0+k\sin(\omega t)\right)k\cos(\omega t)\,\omega$$

Recordando lo establecido según la ecuación de continuidad se llega a:

$$\frac{P_s}{\rho}=\frac{P_1}{\rho}=\left(\frac{P_e}{\rho}+\frac{V_e^2}{2}\right)-\left(\frac{S_e^2V_e^2}{2S_s^2}\right)+$$
$$\left[\frac{\omega}{\pi\,tg(\alpha)}\left(\frac{1}{R_e+L\,tg(\alpha)}-\frac{1}{R_e}\right)\right]\frac{S_e^2}{S_e\,V_e}\overbrace{\left(V_0+k\sin(\omega t)\right)}^{V_e}\,k\cos(\omega t)$$

Sustituyendo los valores de los parámetros temporales y agrupando se tiene:

$$\frac{P_s}{\rho}=\frac{P_1}{\rho}=\left(\frac{P_0+k_1\sin(\varphi_0+\omega t)}{\rho}\right)+\left(\frac{\left(V_0+k\sin(\omega t)\right)^2}{2}\right)\left(1-\frac{S_e^2}{S_s^2}\right)+$$
$$\left[\frac{S_e\;\omega\,k\cos(\omega t)}{\pi\,tg(\alpha)}\left(\frac{1}{R_e+L\,tg(\alpha)}-\frac{1}{R_e}\right)\right]$$

Ecuación que caracteriza la presión temporal en la sección de salida de la zona cónica, punto 1.

La relación entre la presión en el punto 2, boca de entrada del tubo de Pitót, y el punto 3, que es donde está situado el transductor de presión, se obtiene mediante la ecuación de la estática de fluidos, de donde: $P_2=P_3+\rho\,g\,h_{2\text{-}3}$, o bien: $P_3=P_2-\rho\,g\,h_{2\text{-}3}$

Ahora, falta únicamente relacionar las presiones entre los puntos 1 y 2 para un tiempo genérico *t*, para ello, se empleará de nuevo la ecuación de la energía entre dichos dos puntos. Obsérvese que para este considerando, el volumen de control se reduce a una línea que va desde el punto 1 en donde existe una velocidad y presión que dependen del

tiempo, hasta el punto 2, que es la boca de entrada del tubo de Pitót, en donde rige únicamente una presión de estancamiento que se denominará presión P_2. Obteniendo:

$$\frac{P_2}{\rho}=\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación de la estática se tiene:

$$\frac{P_3}{\rho}=\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}-g\,h_{2\text{-}3}$$

Sustituyendo la ecuación que caracteriza la presión en el punto 1, y recordando la relación entre la velocidad en el punto 0 y el punto 1 se tiene:

$$\frac{P_3}{\rho}=\left(\frac{P_0+k_1\sin(\varphi_0+\omega t)}{\rho}\right)+\left(\frac{\left(V_0+k\sin(\omega t)\right)^2}{2}\right)\left(1-\frac{S_e^2}{S_s^2}\right)+$$
$$\left[\frac{S_e\;\omega k\cos(\omega t)}{\pi\,tg(\alpha)}\left(\frac{1}{R_e+L\,tg(\alpha)}-\frac{1}{R_e}\right)\right]+\frac{S_e^2\left(V_0+k\sin(\omega t)\right)^2}{2S_s^2}-g\,h_{2\text{-}3}$$

Reordenado se llega a:

$$\frac{P_3}{\rho}=\left(\frac{P_0+k_1\sin(\varphi_0+\omega t)}{\rho}\right)+\left(\frac{\left(V_0+k\sin(\omega t)\right)^2}{2}\right)+$$
$$\left[\frac{S_e\;\omega k\cos(\omega t)}{\pi\,tg(\alpha)}\left(\frac{1}{R_e+L\,tg(\alpha)}-\frac{1}{R_e}\right)\right]-g\,h_{2\text{-}3}$$

Esta ecuación es la que establece la presión temporal que leería el transductor de presión.

Problema 53

Enunciado

El esquema de la figura 53.1, representa un conducto de sección circular conectado a una conexión semiesférica, esta asimismo está conectada a otro conducto circular y de menor diámetro. Considerar conocidas las dimensiones de todos y cada uno de los elementos que forman este conjunto.

Se conoce la velocidad y presión del fluido a la entrada del conducto de mayor diámetro, punto 1 de la figura adjunta, es importante destacar que tanto la velocidad

como la presión del fluido son dependientes del tiempo y obedecen, en dicho punto, respectivamente a las funciones: $V=V_0+K\cdot\sin(t)$; $P=P_0+C^*(\cos(t)-1)$. Las constantes V_0; P_0; K y C se suponen temporalmente invariables y conocidas. El fluido de trabajo se considerará como incompresible. Se pide:

1.- Determinar la ecuación que caracteriza la velocidad temporal del fluido en los puntos 2, 3 y 4.

2.- Hallar la ecuación que caracteriza la presión temporal en los mismos puntos que en el apartado precedente.

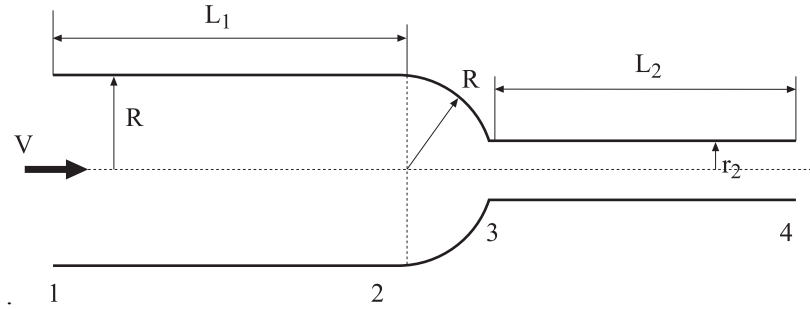


Fig.53.1 Esquema del conjunto de conductos a estudiar

Resolución

1.- Para la resolución de este primer apartado, se utilizará la ecuación de continuidad, la cual se irá aplicando progresivamente a sendos volúmenes de control comprendidos entre los puntos 1 y 2; 2 y 3; y 3 y 4. La figura 53.2 muestra el volumen de control establecido entre los puntos 1 y 2.

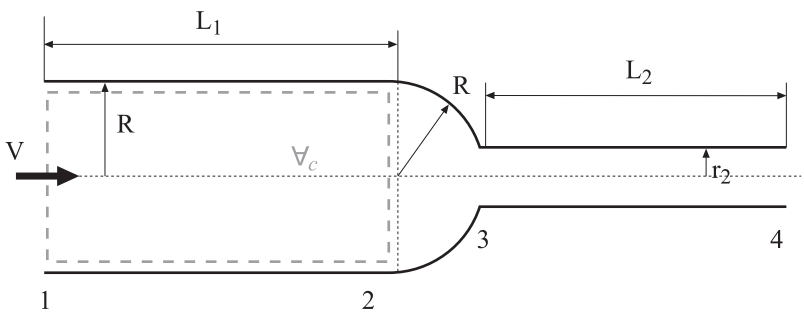


Fig. 53.2 Volumen de control definido entre los puntos 1 y 2

Aplicando la ecuación de continuidad a este volumen de control se obtiene:

$$0=\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\, d\forall+\oint_{SC}\rho\vec{V}\vec{ds}$$

Es importante observar que el volumen de control elegido no depende del tiempo, asimismo, y dado que se ha considerado el fluido como incompresible, la densidad no dependerá del diferencial de volumen elegido, en consecuencia se puede decir que el primer término de la ecuación de continuidad será nulo, es decir:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\, d\forall = 0$$

Por otro lado, el término restante de la ecuación de continuidad, se subdivide en tantos términos como entradas y salidas tenga el volumen e control elegido, es decir, dos para el presente caso.

$$0 = \oint_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{s} = \int_{SE}\rho\vec{V}\cdot d\vec{s} + \int_{SS}\rho\vec{V}\cdot\vec{ds}$$

Puesto que la velocidad del fluido no depende del diferencial de superficie, se puede establecer:

$$0 = \oint_{SC}\rho\vec{V}\cdot\vec{ds} = -\rho V_1 S_1 + \rho V_2 S_2$$

Dado que las secciones en los puntos 1 y 2 son iguales, y conociendo que la densidad es asimismo la misma, se concluye que $\dot{m}_E = \dot{m}_S$; o bien:

$$V_1 = V_2$$

$$V_1 = V_2 = V_0 + K\cdot\sin(t)$$

Es decir, la velocidad temporal en los puntos 1 y 2 será la misma.

El volumen de control utilizado para determinar la velocidad en el punto 3 se especifica en la figura 53.3.

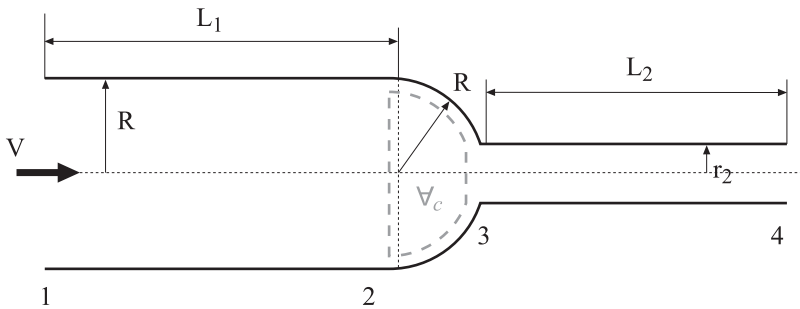


Fig. 53.3 Volumen de control entre los puntos 2 y 3

Aplicando la ecuación de continuidad en este segundo volumen de control, y des pues de realizar las mismas consideraciones que en el apartado precedente se obtiene

$$0 = -\rho V_2 S_2 + \rho V_3 S_3$$

Así, la relación entre las velocidades V_2 y V_3 será:

$$V_3 = V_2 \frac{S_2}{S_3} = V_2 \frac{\pi R^2}{\pi r_2^2} = V_2 \frac{R^2}{r_2^2}$$

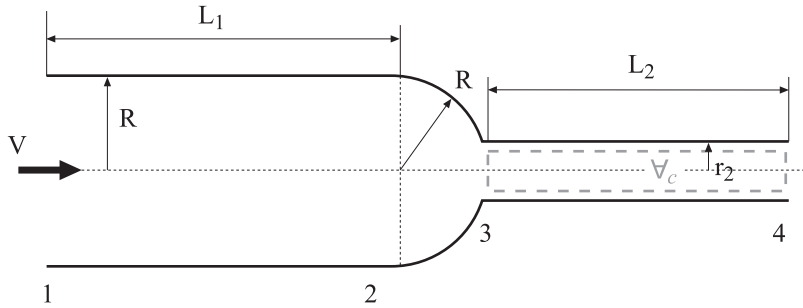
Se concluye que:

$$V_3 = \left(V_0 + K \cdot \sin(t)\right) \frac{R^2}{r_2^2}$$

Aplicando de nuevo la ecuación de continuidad en el volumen de control definido en la figura 53.4, puntos 3 y 4, se obtiene:

$$V_4 = V_3 = V_2 \frac{R^2}{r_2^2} = \left(V_0 + K \cdot \sin(t)\right) \frac{R^2}{r_2^2}$$

Fig. 53.4 Volumen de control entre los puntos 3 y 4



2.- Una vez halladas las velocidades temporales del fluido en cada uno de los 4 puntos, se procederá a determinar la presión temporal en dichos puntos. Para ello, se empezará aplicando la ecuación de la energía en forma integral al volumen de control comprendido entre los puntos 1 y dos, (v. figura 53.2).

La ecuación de la energía en forma integral se expresa:

$$\dot{Q} + \dot{W}_{eje} - \dot{W}_{\tau} = \frac{d}{dt} \int_{\forall C} \rho \left(u + \frac{V^2}{2} + gz\right) d\forall + \oint_{SC} \rho \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right) \vec{V} \cdot \vec{dS}$$

Obsérvese que entre los puntos 1 y 2, no se añade o substrae calor o trabajo, $\dot{Q} = \dot{W}_{eje} = 0$, en consecuencia no existirán variaciones de energía interna dentro del volumen de control elegido, por otro lado, y debido a que no se disponen de más datos, no se van a considerar las pérdidas de energía debidas a los esfuerzos cortantes, $\dot{W}_{\tau} = 0$, y por último, no existen variaciones de energía potencial entre los puntos 1 y 2. Así, la ecuación de la energía tomará la forma:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall + \oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS}$$

El término de variación temporal de la energía cinética en el interior del volumen de control, se puede resumir como:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall = \frac{d}{dt}\,\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)\int_{\forall C}d\forall = \frac{d}{dt}\,\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)S\int_0^{L_1}dx = \frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)S\,L_1\right]$$

Y puesto que únicamente la velocidad depende del tiempo, se concluye:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall = \rho\,S\,L_1 V\frac{dV}{dt} = \rho\,S\,L_1 V\,K\cos(t) = \rho\,S\,L_1\left(V_0 + K\cdot\sin(t)\right)\,K\cos(t)$$

Estudiando ahora el término de flujo de energía a través de todas las entradas y salidas del volumen de control, se puede decir que:

$$\oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS} = \int_{SE}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\vec{dS} + \int_{SS}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\vec{dS}$$

Puesto que tanto la presión como la velocidad del fluido dependen del tiempo pero no del diferencial de superficie, se concluye que:

$$\oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS} = -P_1V_1S - \rho\frac{V_1^3}{2}S + P_2V_2S + \rho\frac{V_2^3}{2}S$$

Uniendo ahora los dos términos de la ecuación de la energía, se obtiene:

$$0 = \rho S L_1\left[\,K\cos(t)\left(V_0 + K\cdot\sin(t)\right)\right] - P_1V_1S - \rho\frac{V_1^3}{2}S + P_2V_2S + \rho\frac{V_2^3}{2}S$$

Despejando de esta ecuación la presión en el punto 2 y recordando que $V_1 = V_2$, se llega a:

$$P_2 = P_1 + \frac{-\rho L_1\left[\,K\cos(t)\left(V_0 + K\cdot\sin(t)\right)\right]}{V_2}$$

Y puesto que: $V_1 = V_2 = V_0 + K\cdot\sin(t)$.

$$P_2 = P_1 - \rho L_1\,K\cos(t)$$

Recordando que la presión en el punto 1 estaba definida por la expresión: $P_1 = P_0 + C\cdot(\cos(t)-1)$, se llega a la ecuación:

$$P_2 = P_0 + C\cdot(\cos(t)-1) - \rho L_1\ K\cos(t)$$

Una vez hallada la presión temporal en el punto 2, se procederá a hallar la misma en el punto 3, a priori se elegirá el mismo volumen de control que el definido en la figura 53.3, de nuevo la ecuación de la energía tomará la forma:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall + \oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS}$$

Al desarrollar ahora el término de variación temporal de energía a lo largo del volumen de control, se observa que la velocidad del fluido es ahora dependiente del diferencial de volumen elegido ente los puntos 2 y 3, la figura 53.5 muestra un diferencial de volumen genérico. En consecuencia, el término de variación temporal tomará la forma:

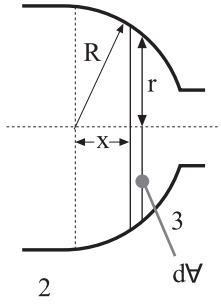


Fig. 53.5 Elemento diferencial de volumen genérico entre los puntos 2 y 3

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall = \frac{d}{dt}\ \rho\int_{\forall C}\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall = \frac{d}{dt}\ \rho\int_0^d\left(\frac{V^2}{2}\right)S\ dx$$

Véase que ahora tanto la velocidad del fluido como la sección del conducto dependen del diferencial de superficie elegido. La sección de paso para un punto genérico se define como: $S = \pi\, r_i^2$, donde el radio se puede definir: $r_i^2 = R^2 - x^2$.

Por otro lado, la velocidad temporal del fluido asociada a un elemento diferencial de volumen genérico, se puede obtener aplicando la ecuación de continuidad entre el punto 2 y dicho punto genérico situado dentro del volumen de control, en consecuencia se puede decir que:

$$V_i = V_2\frac{S_2}{S_i} = V_2\frac{\pi R^2}{\pi r_i^2} = V_2\frac{R^2}{r_i^2}$$

El subíndice "i" se ha utilizado aquí para caracterizar un punto genérico.

Así, el término de variación temporal de la energía tomará la forma:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall=\frac{d}{dt}\ \rho\int_0^{X_{limite}}\left(\frac{V_2^2\ R^4}{2(R^2-x^2)^2}\right)\pi(R^2-x^2)\ dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall=\frac{d}{dt}\ \rho\pi\frac{\left(V_0+K\cdot\sin(t)\right)^2\ R^4}{2}\int_0^{X_{limite}}\left(\frac{1}{(R^2-x^2)}\right)dx$$

El valor de X_{limite} se obtiene de:

$$X_{limite}=\sqrt{R^2-r_2^2}$$

Resolviendo la integral se obtiene:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-r_2^2}}\frac{1}{\left(R^2-x^2\right)}\ dx=\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln(R-x)}{R}+\frac{1}{2}\frac{\ln(R+x)}{R}\right]_0^{\sqrt{R^2-r_2^2}}$$

$$\int_0^{\sqrt{R^2-r_2^2}}\frac{1}{\left(R^2-x^2\right)}\ dx=\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(R-\sqrt{R^2-r_2^2}\right)}{R}+\frac{1}{2}\frac{\ln\left(R+\sqrt{R^2-r_2^2}\right)}{R}\right]$$

$$-\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln(R)}{R}+\frac{1}{2}\frac{\ln(R)}{R}\right]$$

Es importante destacar que el resultado de esta integral es independiente del tiempo. Obsérvese que este resultado se puede simplificar hasta obtener:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-r_2^2}}\frac{1}{\left(R^2-x^2\right)}\ dx=\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(R-\sqrt{R^2-r_2^2}\right)}{R}+\frac{1}{2}\frac{\ln\left(R+\sqrt{R^2-r_2^2}\right)}{R}\right]=\frac{1}{2R}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-r_2^2}}{R-\sqrt{R^2-r_2^2}}\right)$$

El término de variación temporal de cantidad de movimiento quedará como:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall=\frac{d}{dt}\ \rho\pi\frac{\left(V_0+K\cdot\sin(t)\right)^2\ R^4}{2}\ \frac{1}{2R}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-r_2^2}}{R-\sqrt{R^2-r_2^2}}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall=\frac{\rho\ \pi R^3}{2}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-r_2^2}}{R-\sqrt{R^2-r_2^2}}\right)\left(V_0+K\cdot\sin(t)\right)\cdot K\cdot\cos(t)$$

Una vez determinado el término de variación temporal de la energía en el volumen de control se procederá a hallar el término de flujo de energía a través de las superficies del volumen de control. Dicho término tomaba la forma:

$$\oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS}=\int_{SE}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{dS}+\int_{SS}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{dS}$$

Puesto que ninguno de los parámetros depende del diferencial de superficie, se concluye:

$$\oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS}=-P_2V_2\pi R^2-\rho\frac{V_2^{\,3}}{2}\pi R^2+P_3V_3\pi r_2^2+\rho\frac{V_3^{\,3}}{2}\pi r_2^2$$

Reagrupando los términos de variación temporal de la energía y de flujo de energía a través del volumen de control bajo estudio, se obtiene:

$$0=\frac{\rho\,R^3}{2}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-r_2^2}}{R-\sqrt{R^2-r_2^2}}\right)\left[K\cos(t)\left(V_0+K\cdot\sin(t)\right)\right]$$
$$-P_2V_2R^2-\rho\frac{V_2^{\,3}}{2}R^2+P_3V_3r_2^2+\rho\frac{V_3^{\,3}}{2}r_2^2$$

Despejando de esta ecuación, la presión en el punto 3, se llega a:

$$P_3=\frac{-\frac{\rho\,R^3}{2}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-r_2^2}}{R-\sqrt{R^2-r_2^2}}\right)\left[K\cos(t)\left(V_0+K\cdot\sin(t)\right)\right]+P_2V_2R^2+\rho\frac{V_2^{\,3}}{2}R^2-\rho\frac{V_3^{\,3}}{2}r_2^2}{V_3r_2^2}$$

Recordando lo establecido por la ecuación de continuidad entre los puntos 2 y 3, se tiene que:

$$P_3=\frac{-\frac{\rho\,R^3}{2}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-r_2^2}}{R-\sqrt{R^2-r_2^2}}\right)\left[K\cos(t)\left(V_2\right)\right]+P_2V_2R^2+\rho\frac{V_2^{\,3}}{2}R^2-\rho\frac{\left(V_2\frac{R^2}{r_2^2}\right)^3}{2}r_2^2}{V_2\frac{R^2}{r_2^2}\cdot r_2^2}$$

$$P_3=P_2-\frac{\rho\,R}{2}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-r_2^2}}{R-\sqrt{R^2-r_2^2}}\right)\left[K\cos(t)\right]+\rho\frac{V_2^2}{2}-\rho\frac{V_2^2}{2}\frac{R^4}{r_2^4}$$

Recordando de nuevo que:

$$V_2=V_0+K\cdot\sin(t)$$

$$P_2=P_0+C\cdot(\cos(t)-1)-\rho L_1\,K\cos(t)=P_0-C+(C-\rho L_1K)\cos(t)$$

Se concluye que la presión temporal en el punto 3 será:

$$P_3=P_0-C+(C-\rho L_1K)\cos(t)-\frac{\rho\,R}{2}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-r_2^2}}{R-\sqrt{R^2-r_2^2}}\right)\left[K\cos(t)\right]$$
$$+\rho\frac{\left(V_0+K\cdot\sin(t)\right)^2}{2}\left(1-\frac{R^4}{r_2^4}\right)$$

Ecuación que caracteriza la presión temporal en el punto 3 en función de los datos iniciales en el punto 1.

Lo último que resta hacer es determinar la variación de presión en función del tiempo en el punto 4, para ello se aplicará la ecuación de la energía entre los puntos 3 y 4, volumen de control definido en la figura 53.4. Al igual que sucedía entre los puntos 1 y 2, la velocidad del fluido en los puntos 3 y 4 es la misma, la ecuación de la energía aplicada a este volumen de control toma la forma:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall + \oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS}$$

El término de variación temporal de la energía se puede dar como: véase que ahora la velocidad del fluido depende del tiempo pero no del diferencial de volumen elegido.

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall = \frac{d}{dt}\,\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)\int_{\forall C}d\forall = \frac{d}{dt}\,\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)S\int_0^{L_2}dx = \frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)S\,L_2\right]$$

La velocidad del fluido, ha de entenderse que es la velocidad en un punto genérico situado entre los puntos 3 y 4, pero como la ecuación de continuidad establecía que:

$$V_3 = V_4 = \left(V_0 + K\cdot\sin(t)\right)\frac{R^2}{r_2^2}$$

El término de variación temporal de energía quedará como:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall = \rho\,S\,L_2\left[K\frac{R^2}{r_2^2}\cos(t)\left(\left[V_0 + K\cdot\sin(t)\right]\frac{R^2}{r_2^2}\right)\right]$$

Analizando ahora el término de flujo de energía a través de las superficies asociadas al volumen de control, y recordando todo lo establecido previamente, se tiene:

$$\oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS} = \int_{SE}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS} + \int_{SS}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS}$$

$$\oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS} = -\int_{SE}\rho\left(\frac{P_3}{\rho}+\frac{V_3^{\,2}}{2}\right)V_3 dS_3 + \int_{SS}\rho\left(\frac{P_4}{\rho}+\frac{V_4^{\,2}}{2}\right)V_4\,dS_4$$

Y dado que ninguno de los parámetros depende del diferencial de superficie, se concluye:

$$\oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot\vec{dS} = -P_3V_3S - \rho\frac{V_3^{\,3}}{2}S + P_4V_4S + \rho\frac{V_4^{\,3}}{2}S$$

Sustituyendo los términos de flujo y de variación temporal de la energía en la ecuación de la energía, se obtiene:

$$0 = \rho\, S\, L_2 \left[K \frac{R^2}{r_2^2} \cos(t) \left(\left[V_0 + K \cdot \sin(t) \right] \frac{R^2}{r_2^2} \right) \right] - P_3 V_3 S - \rho \frac{V_3^3}{2} S + P_4 V_4 S + \rho \frac{V_4^3}{2} S$$

ecuación que se puede simplificar y da lugar a:

$$P_4 = P_3 - \rho\ L_2 \left[K \frac{R^2}{r_2^2} \cos(t) \right]$$

Dado que la presión en el punto 3 ya se ha obtenido y especificado en función de los parámetros de partida, basta únicamente con sustituir en la ecuación anterior la ecuación de la presión en 3, y se obtiene:

$$P_4 = P_0 - C + (C - \rho L_1 K) \cos(t) - \frac{\rho\ R}{2} \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - r_2^2}}{R - \sqrt{R^2 - r_2^2}} \right) \left[K \cos(t) \right] +$$

$$\rho \frac{\left(V_0 + K \cdot \sin(t) \right)^2}{2} \left(1 - \frac{R^4}{r_2^4} \right) - \rho\ L_2 \left[K \frac{R^2}{r_2^2} \cos(t) \right]$$

Siendo esta la ecuación que pedía el problema y que caracteriza la variación temporal de presión en el punto 4.

Problema 54

Enunciado

El esquema de la figura siguiente representa dos conductos de sección circular y de diferente diámetro, los cuales están conectados mediante una conexión semiesférica, tal como se esquematiza en la figura 54.1. Todas las dimensiones, R_0, R_1, R_2, α_{max} y β_{max} se consideran conocidas.

A la entrada del conducto de menor diámetro (punto 0 de la figura 54.1), se conocen tanto la presión como la velocidad del fluido; ambas son dependientes del tiempo y se caracterizan por las ecuaciones siguientes: $V = V_0 + K^* \sin(t)$; $P = P_0 + C^* \cos(t)$. Las constantes V_0, P_0, K y C se supondrán temporalmente invariables y conocidas. El fluido de trabajo se considera incompresible. Se pide:

1. Determinar la ecuación que caracteriza la velocidad temporal del fluido en los puntos 1 y 2. Obsérvese que dichas secciones han de hallarse inicialmente mediante los datos definidos en el problema.

2. Determinar la ecuación que caracteriza la presión temporal en los mismos puntos que en el apartado precedente.

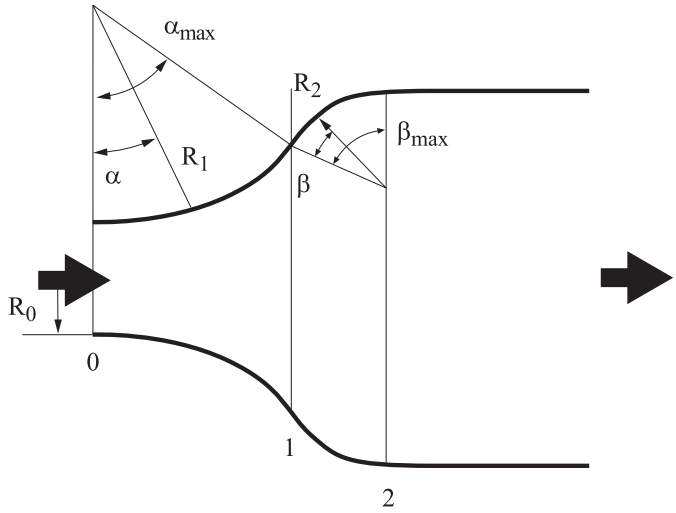


Fig. 54.1
Esquema del conjunto de conductos por estudiar

Resolución

1. Para resolver el primer apartado del problema, se procede a aplicar la ecuación de continuidad entre los puntos 0 y 1, y posteriormente entre los puntos 1 y 2. Para el tramo inicial, el definido entre los puntos 0 y 1, se pueden establecer las relaciones geométricas siguientes:

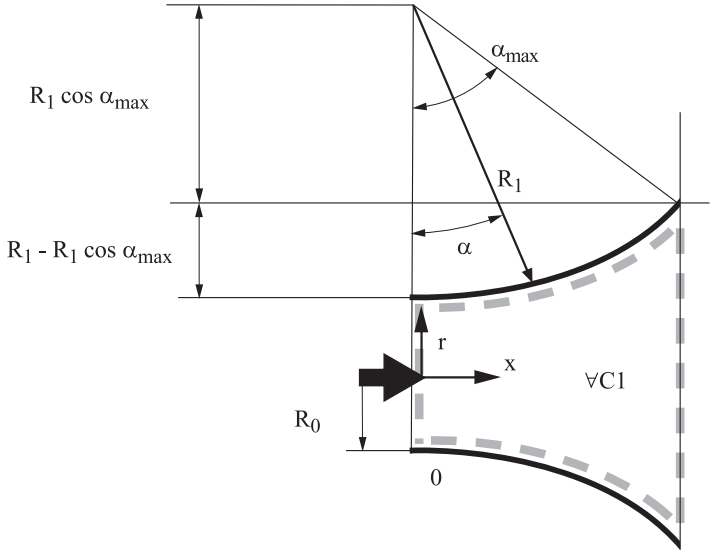


Fig. 54.2
Primer tramo de conducto por evaluar

Aplicando la ecuación de continuidad al volumen de control definido en la figura 54.2, se obtiene:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, d\forall + \oint_{SC} \rho \, \vec{V} \, \vec{ds}$$

El volumen de control se considera indeformable; por otro lado, en el enunciado se especifica que el fluido se puede considerar incompresible; así, la ecuación precedente tomará la forma:

$$0 = \int_{S0} \vec{V}\,\vec{ds} + \int_{S1} \vec{V}\,\vec{ds}$$

En este punto, y observando que la distribución de velocidades según el enunciado se considera uniforme en la sección de entrada, se supondrá que la distribución de velocidades en todas las secciones será también uniforme. En consecuencia, se establece:

$$0 = -V_{S0}\, S_{S0} + V_{S1}\, S_{S1}$$

Las secciones en los puntos 0 y 1 se definen:

$$S_{S0} = \pi R_0^2$$

$$S_{S1} = \pi\left(R_0 + R_1\left(1 - \cos\left(\alpha_{max}\right)\right)\right)^2$$

Sustituyendo estas dos secciones en la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$V_{S1} = \frac{V_{S0}\, S_{S0}}{S_{S1}} = \left(V_0 + K\,\sin(t)\right)\frac{R_0^2}{\left(R_0 + R_1\left(1 - \cos\left(\alpha_{max}\right)\right)\right)^2}$$

Esta ecuación caracteriza la velocidad temporal del fluido en la sección 1. Dicha velocidad se considera uniforme.

El paso siguiente es definir la distribución de velocidades en la sección 2; para ello, se aplicará de nuevo la ecuación de continuidad entre las secciones 1 y 2. El volumen de control está definido en la figura 54.3.

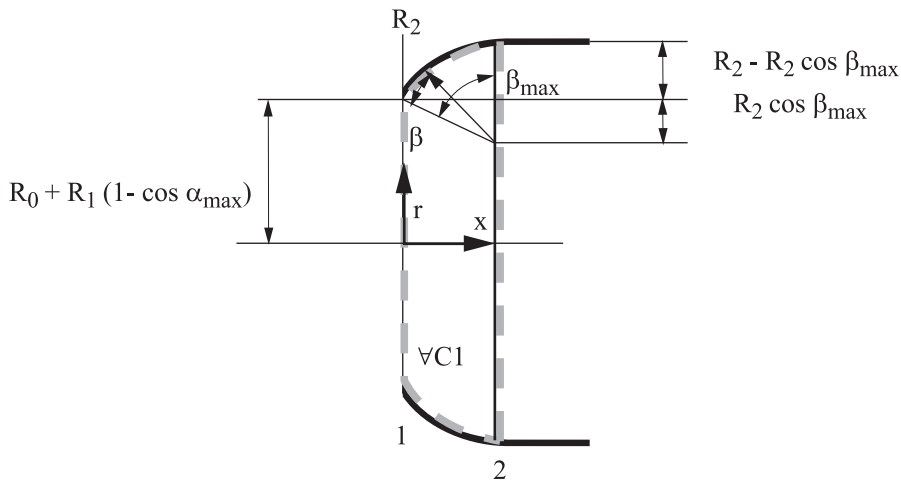


Fig. 54.3
Volumen de control ligado al segundo tramo del conducto por evaluar

De la aplicación de la ecuación de continuidad entre las secciones 1 y 2, se obtiene:

$$V_{S2} = \frac{V_{S1}\, S_{S1}}{S_{S2}}$$

La sección en el punto 1 se ha definido previamente. La sección en el punto 2 tomará la forma:

$$S_{S2} = \pi\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\left(\alpha_{max}\right)\right) + R_2\left(1-\cos\left(\beta_{max}\right)\right)\right)^2$$

de donde, sustituyendo en la ecuación de continuidad, se llega a:

$$V_{S2} = \frac{V_{S1}\, S_{S1}}{S_{S2}} = \left(V_0 + K\sin\left(t\right)\right)\frac{R_0^2}{\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\left(\alpha_{max}\right)\right)\right)^2}$$

$$\frac{\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\left(\alpha_{max}\right)\right)\right)^2}{\pi\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\left(\alpha_{max}\right)\right) + R_2\left(1-\cos\left(\beta_{max}\right)\right)\right)^2}$$

$$V_{S2} = \frac{V_{S1}\, S_{S1}}{S_{S2}} = \left(V_0 + K\sin\left(t\right)\right)\frac{R_0^2}{\pi\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\left(\alpha_{max}\right)\right) + R_2\left(1-\cos\left(\beta_{max}\right)\right)\right)^2}$$

ecuación que caracteriza la velocidad temporal del fluido en la sección 2. Obsérvese que esta ecuación se podría haber obtenido directamente aplicando la ecuación de continuidad entre los puntos 0 y 2.

2. Con el fin de hallar la ecuación que caracteriza la presión en la sección de salida (punto 2 de la figura 54.1), se aplica la ecuación de la energía en forma integral a cada uno de los dos volúmenes de control definidos en el primer apartado del problema; dicha ecuación queda definida como:

$$\dot{Q} + \dot{W}_{eje} + \dot{W}_{\tau} - \oint_{SC} P\,\overrightarrow{V_C}\,\overrightarrow{ds} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(u + \frac{V^2}{2} + g\,z\right)d\forall + \oint_{SC}\rho\left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g\,z\right)\vec{V}\,\overrightarrow{ds}$$

Las hipótesis de trabajo para este segundo apartado son:

No se considera que exista transferencia de calor, $\dot{Q} = 0$

No existe trabajo transmitido o absorbido mediante un eje mecánico, $\dot{W}_{eje} = 0$

No se consideran los esfuerzos cortantes entre el fluido y el conducto, $\dot{W}_{\tau} = 0$

No existe potencia alguna transmitida o cedida por el fluido debido a la deformación del volumen de control y causada por los efectos de la presión actuante sobre el volumen de control; véase que no existe deformación alguna del volumen de control $\oint_{SC} P\,\overrightarrow{V_C}\,\overrightarrow{ds} = 0$.

Dado que no se considera la transferencia de calor, no habrá variaciones de la energía interna asociada al fluido, $\Delta u = 0$.

No existen variaciones de energía potencial asociadas al volumen de control, $\Delta z = 0$.

La ecuación resultante toma la forma:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C}\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)d\forall + \oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds}$$

Evaluando esta ecuación en el primer tramo, entre los puntos 0 y 1, y definiendo el diferencial de volumen tal como especifica la figura 54.4, se obtiene:

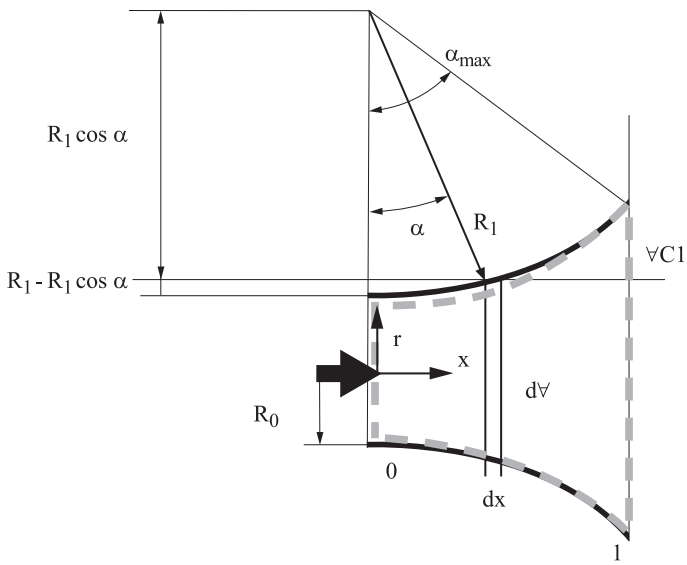


Fig. 54.4 Diferencial de volumen para el primer volumen de control

La posición X genérica se puede dar como $x = R_1 \sin(\alpha)$, el diferencial de longitud será $dx = R_1 \cos(\alpha)\,d\alpha$, la sección genérica asociada a un diferencial de volumen genérico (v. figura 54.4) se define como $S_i = \pi\left(R_0 + R_1(1-\cos\alpha)\right)^2$ y, en función de lo que se acaba de establecer, el diferencial de volumen tomará la forma:

$$d\forall = S_i\,dx = S_i\,R_1\cos(\alpha)\,d\alpha = \pi R_i^2\,R_1\cos(\alpha)\,d\alpha$$
$$= \pi\left(R_0 + R_1(1-\cos\alpha)\right)^2\,R_1\cos(\alpha)\,d\alpha$$

Por otro lado, aplicando la ecuación de continuidad entre la sección 0 y una sección genérica, se obtendrá:

$$V_{Si} = \frac{V_{S0}\ S_{S0}}{S_{Si}}$$

La sección de salida de este tramo SS1 queda definida como $S_{S1} = \pi\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha_{max}\right)\right)^2$

Sustituyendo todos estos términos en la ecuación de la energía, se concluye:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C}\frac{\rho}{2}\left(\frac{V_{S0}\ \pi\ R_0^2}{\pi\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha\right)\right)^2}\right)^2$$

$$\pi\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha\right)\right)^2\ R_1\cos(\alpha)\,d\alpha + \oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C}\frac{\rho}{2}\left(\frac{\left(V_0 + K\sin t\right)^2\ R_0^4}{\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha\right)\right)^2}\right)\pi\,R_1\cos(\alpha)\,d\alpha + \oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds}$$

$$0 = \frac{\rho\pi R_1 R_0^4}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(V_0 + K\sin t\right)^2\int_0^{\alpha_{max}}\left(\frac{\cos(\alpha)\,d\alpha}{\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha\right)\right)^2}\right)\right] + \oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds}$$

Obsérvese que ninguna de las variables de la integral definida depende del tiempo; en consecuencia se puede establecer:

$$0 = \rho\pi R_1 R_0^4\left(V_0 + K\sin t\right)K\cos t\ \int_0^{\alpha_{max}}\left(\frac{\cos(\alpha)\,d\alpha}{\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha\right)\right)^2}\right) + \oint_{SC}\rho\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds}$$

Por ahora se va a dejar la integral entre límites sin resolver y se procede a resolver el término de flujo de energía a través de las superficies de control; véase que ni la presión ni la velocidad dependen del diferencial de superficie, con lo cual se puede decir:

$$0 = \pi R_1 R_0^4\left(V_0 + K\sin t\right)K\cos t\ \int_0^{\alpha_{max}}\left(\frac{\cos(\alpha)\,d\alpha}{\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha\right)\right)^2}\right)$$

$$-\left(\frac{P_{S0}}{\rho}+\frac{V_{S0}^2}{2}\right)V_{S0}S_{S0} + \left(\frac{P_{S1}}{\rho}+\frac{V_{S1}^2}{2}\right)V_{S1}S_{S1}$$

La única incógnita de esta ecuación es la presión en el punto 1, con lo cual se concluye que:

$$\frac{P_{S1}}{\rho}=\left[\frac{-\pi R_1 R_0^4 \left(V_0+K\sin t\right)K\cos t * \int_0^{\alpha_{max}}\left(\frac{\cos(\alpha)\,d\alpha}{\left(R_0+R_1(1-\cos\alpha)\right)^2}\right)}{V_{S1}S_{S1}}+\frac{\left(\frac{P_{S0}}{\rho}+\frac{V_{S0}^2}{2}\right)V_{S0}S_{S0}}{V_{S1}S_{S1}}-\left(\frac{V_{S1}^2}{2}\right)\right]$$

Una vez resuelta la integral entre límites, esta ecuación caracterizará la presión temporal en la sección 1.

La resolución de la integral restante da lugar a:

$$\int_0^{\alpha_{max}}\left(\frac{\cos(\alpha)\,d\alpha}{\left(R_0+R_1(1-\cos\alpha)\right)^2}\right)=\left[\frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(R_0+2R_1)\left(R_0\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+2R_1\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+R_0\right)}\left[1+\frac{R_1}{R_0}\right]+\frac{2R_1\arctan\left(\frac{(R_0+2R_1)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{R_0(R_0+2R_1)}}\right)}{(R_0+2R_1)R_0\sqrt{R_0(R_0+2R_1)}}\right]_0^{\alpha_{max}}$$

Realizando ahora el proceso homólogo entre los puntos 1 y 2, se establece (vean, en la figura 54.5, el volumen de control y el diferencial de volumen utilizados en este subapartado).

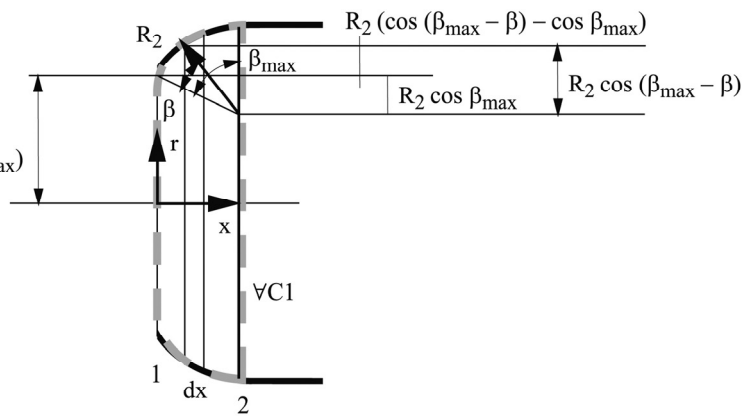


Fig. 54.5 Diferencial de volumen utilizado en el presente subapartado

La posición genérica X medida a partir del eje de referencia definido en la figura 54.5 se define como:

$$x = R_2 \sin(\beta_{max}) - R_2 \sin(\beta_{max} - \beta) = R_2 \left(\sin(\beta_{max}) - \sin(\beta_{max} - \beta)\right)$$

Diferenciando esta ecuación, se obtiene: $dx = R_2 \cos(\beta_{max} - \beta)\, d\beta$

La sección de entrada de este tramo S_{S1} quedó definida anteriormente como: $S_{S1} = \pi \left(R_0 + R_1 (1 - \cos\alpha_{max})\right)^2$

La sección genérica será:

$$S_{Si} = \pi \left(R_0 + R_1 (1 - \cos\alpha_{max}) + R_2 \cos(\beta_{max} - \beta) - R_2 \cos(\beta_{max})\right)^2$$

La sección 2 se define:

$$S_{S2} = \pi \left(R_0 + R_1 (1 - \cos\alpha_{max}) + R_2 - R_2 \cos(\beta_{max})\right)^2$$

El diferencial de volumen toma la forma:

$$d\forall = S_i\, dx = S_i\, R_2 \cos(\beta_{max} - \beta)\, d\beta =$$
$$\pi \left(R_0 + R_1 (1 - \cos\alpha_{max}) + R_2 \cos(\beta_{max} - \beta) - R_2 \cos(\beta_{max})\right)^2 R_2 \cos(\beta_{max} - \beta)\, d\beta$$

Por otro lado, la ecuación de continuidad aplicada entre las secciones de entrada 1 y la sección genérica i, da lugar a:

$$V_{Si} = \frac{V_{S1}\, S_{S1}}{S_{Si}}$$

Sustituyendo todas estas relaciones halladas en la ecuación de la energía, se obtiene:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\forall C} \frac{\rho}{2} \left(\frac{V_{S1}\, \pi \left(R_0 + R_1 (1 - \cos\alpha_{max})\right)^2}{\pi \left(R_0 + R_1 (1 - \cos\alpha_{max}) + R_2 \cos(\beta_{max} - \beta) - R_2 \cos(\beta_{max})\right)^2} \right)^2 *$$
$$\pi \left(R_0 + R_1 (1 - \cos\alpha_{max}) + R_2 \cos(\beta_{max} - \beta) - R_2 \cos(\beta_{max})\right)^2 R_2 \cos(\beta_{max} - \beta)\, d\beta$$
$$+ \oint_{SC} \rho \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V}\, \vec{ds}$$

Simplificando, se llega a:

$$0 = \frac{\rho}{2}\pi\, R_2 \left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha_{max}\right)\right)^4$$
$$\frac{d}{dt}\left[V_{S1}^2 \int_0^{\beta_{max}} \frac{\cos\left(\beta_{max}-\beta\right) d\beta}{\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha_{max}\right) + R_2\cos\left(\beta_{max}-\beta\right) - R_2\cos\left(\beta_{max}\right)\right)^2}\right] +$$
$$\oint_{SC} \rho\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds}$$

De nuevo, se observa que la integral entre límites no depende del tiempo; el único término que depende del tiempo es la velocidad a la salida V_{S1}. Sustituyendo el valor de dicha velocidad y derivando, se obtiene:

$$0 = \rho\pi\, R_2 R_0^4 \left(V_0 + K\sin\left(t\right)\right) K\cos\left(t\right)$$
$$\int_0^{\beta_{max}} \frac{\cos\left(\beta_{max}-\beta\right) d\beta}{\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha_{max}\right) + R_2\cos\left(\beta_{max}-\beta\right) - R_2\cos\left(\beta_{max}\right)\right)^2} +$$
$$\oint_{SC} \rho\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,\vec{ds}$$

Al igual que en el primer volumen de control evaluado, la integral entre límites se realizará más adelante. Ahora procedemos a evaluar el término de flujo de energía; considerando las mismas hipótesis que en el subapartado precedente, se puede decir que:

$$0 = \pi\, R_2 R_0^4 \left(V_0 + K\sin\left(t\right)\right) K\cos\left(t\right)$$
$$\int_0^{\beta_{max}} \frac{\cos\left(\beta_{max}-\beta\right) d\beta}{\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha_{max}\right) + R_2\cos\left(\beta_{max}-\beta\right) - R_2\cos\left(\beta_{max}\right)\right)^2} +$$
$$-\left(\frac{P_{S1}}{\rho} + \frac{V_{S1}^2}{2}\right) V_{S1}\, S_{S1} + \left(\frac{P_{S2}}{\rho} + \frac{V_{S2}^2}{2}\right) V_{S2}\, S_{S2}$$

Despejando la presión en la sección 2, se tiene:

$$\frac{P_{S2}}{\rho} = \frac{-\pi\, R_2 R_0^4 \left(V_0 + K\sin\left(t\right)\right) K\cos\left(t\right)}{V_{S2}\, S_{S2}}$$
$$\int_0^{\beta_{max}} \frac{\cos\left(\beta_{max}-\beta\right) d\beta}{\left(R_0 + R_1\left(1-\cos\alpha_{max}\right) + R_2\cos\left(\beta_{max}-\beta\right) - R_2\cos\left(\beta_{max}\right)\right)^2} +$$
$$+\left(\frac{P_{S1}}{\rho} + \frac{V_{S1}^2}{2}\right)\frac{V_{S1}\, S_{S1}}{V_{S2}\, S_{S2}} - \left(\frac{V_{S2}^2}{2}\right)$$

Esta ecuación caracteriza la presión temporal del fluido en la sección 2. Obsérvese que todas las variables han sido previamente determinadas y únicamente queda por resolver la integral.

La integral por resolver es:

$$\int_0^{\beta_{max}} \frac{\cos(\beta_{max}-\beta)\,d\beta}{\left(R_0+R_1(1-\cos\alpha_{max})+R_2\cos(\beta_{max}-\beta)-R_2\cos(\beta_{max})\right)^2}$$

Esta integral se puede compactar considerando que:

$$A = R_0+R_1(1-\cos\alpha_{max})-R_2\cos(\beta_{max})$$

$$\int_0^{\beta_{max}} \frac{\cos(\beta_{max}-\beta)\,d\beta}{\left(A+R_2\cos(\beta_{max}-\beta)\right)^2}$$

Resolviendo la integral, se obtiene:

$$\int_0^{\beta_{max}} \frac{\cos(\beta_{max}-\beta)\,d\beta}{\left(A+R_2\cos(\beta_{max}-\beta)\right)^2} =$$

$$\left[\frac{2\arctan\left(\frac{(A-R_2)\tan\left(\frac{1}{2}\beta_{max}-\frac{1}{2}\beta\right)}{\sqrt{(A+R_2)(A-R_2)}}\right)}{(A-R_2)\sqrt{(A+R_2)(A-R_2)}} - \frac{2A\tan\left(\frac{1}{2}\beta_{max}-\frac{1}{2}\beta\right)}{(A+R_2)(A-R_2)\left(A\tan\left(\frac{1}{2}\beta_{max}-\frac{1}{2}\beta\right)^2-R_2\tan\left(\frac{1}{2}\beta_{max}-\frac{1}{2}\beta\right)^2+A+B\right)} - \frac{2A\arctan\left(\frac{(A-R_2)\tan\left(\frac{1}{2}\beta_{max}-\frac{1}{2}\beta\right)}{\sqrt{(A+R_2)(A-R_2)}}\right)}{(A-R_2)(A+R_2)\sqrt{(A+R_2)(A-R_2)}} \right]_0^{\beta_{max}}$$

Problema 55

Enunciado

Sea un tanque de almacenamiento de combustible de grandes dimensiones. El nivel del combustible y la presión del mismo se pueden considerar constantes. El combustible es bombeado fuera del tanque mediante una bomba volumétrica, y a la salida de la misma se encuentra un intercambiador de calor que tiene como función incrementar la temperatura del fluido. Conociendo que la temperatura en el tanque es de 5º C, que el intercambiador de calor aporta una energía al fluido de $10^5 \frac{J}{kg}$, que el caudal circulante es de $0{,}004 \frac{m^3}{s}$ y que la longitud de la tubería es de 100 m, determine:

1. La potencia requerida en la bomba.

2. La temperatura a la salida del conducto.

Considere el sistema térmicamente aislado y que la densidad (ρ) se mantiene constante.

Datos:

Rendimiento hidráulico de la bomba: $\eta_H = 90\%$

Factor de fricción del conducto: $f_{conducto} = 0{,}022$

$\Delta Y_{intercambiador} = 5 \cdot 10^6 \cdot Q^2$, donde: $\Delta Y \left[\frac{J}{kg}\right]$; $Q \left[\frac{m^3}{s}\right]$

$$\rho = 875 \frac{kg}{m^3}$$

$P_{salida\ del\ conducto}$ (punto D) $= 4 \cdot 10^5\ P_a$

$$c_{vfuel} = 2.000 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$\phi_{conducto} = 0{,}05 m$$

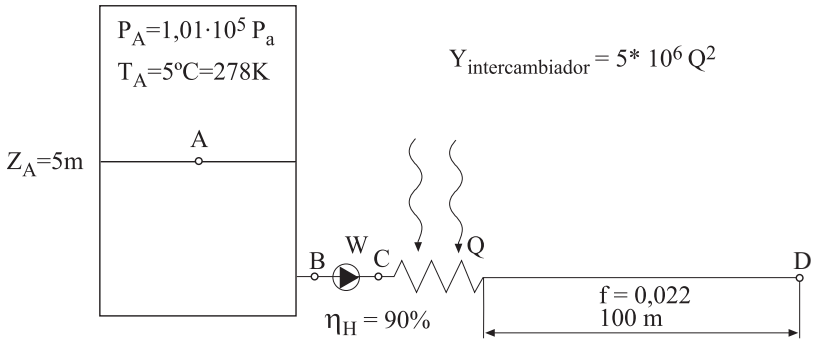


Fig. 55.1

Resolución

1. Aplicando la ecuación de la energía entre A y D, se tiene:

$$\dot{Q}-\dot{W}_{bomba}=\int_{SA}\rho(\frac{P}{\rho}+u+\frac{v^2}{2}+gz)VdS+\int_{SD}\rho(\frac{P}{\rho}+u+\frac{v^2}{2}+gz)VdS+\dot{W}_{\tau}$$

$$\dot{Q}-\dot{W}_{bomba}=\dot{m}(\frac{P_D}{\rho}-\frac{P_A}{\rho}+u_D-u_A+\frac{v_D{}^2}{2}-\frac{v_A{}^2}{2}+g(z_D-z_A))+\dot{W}_{\tau}$$

Se ha de entender que la potencia que la bomba comunica al fluido se utiliza para variar su energía cinética y potencial, y vencer los esfuerzos cortantes que impiden el movimiento del fluido. Que el fluido se caliente o enfríe, implica que su viscosidad variara y por tanto también variaran los esfuerzos cortantes. No obstante para este primer apartado se considerara que la viscosidad del fluido se mantiene constante en todo el dominio. Que es lo mismo que suponer que no existe transferencia de calor y, por tanto, no habrá gradiente térmico.

La potencia que la bomba comunica al fluido será:

$$-W_{fluido}=\frac{P_D}{\rho}-\frac{P_A}{\rho}+\frac{v_D{}^2}{2}-\frac{v_A{}^2}{2}+g(z_D-z_A))+\Delta Y_{intercambiador}+\Delta Y_{conducto}$$

$$-W_{fluido}=\frac{4\cdot10^5}{875}-\frac{1{,}01\cdot10^5}{875}+\frac{1}{2}\left(\frac{0{,}004}{\frac{\pi\cdot0{,}05^2}{4}}\right)^2-0+g(0-5)+5\cdot10^6\cdot Q^2+$$

$$+\frac{0{,}022}{2}\cdot\frac{100}{0{,}05}\left(\frac{0{,}004}{\frac{\pi\cdot0{,}05^2}{4}}\right)^2$$

$$-W_{fluido}=457{,}14-120+2{,}075-49+80+91{,}3$$

$$W_{fluido} = -461,51\frac{J}{kg}$$

Según el convenio de signos de termodinámica, el signo negativo indica que se trata de energía comunicada al fluido.

Dado que el rendimiento hidráulico es del 90%, la energía por unidad de masa es:

$$W_{eje} = W_{fluido} \cdot \frac{1}{0,9} = 512,79\left[\frac{J}{kg}\right]$$

$$\dot{W}_{eje} = 512,79 \cdot 875 \cdot 0,004 = 1.794,78\left[\frac{J}{s}\right]$$

El calor que la bomba transfiere al fluido es el 10% de esta energía.

2. La temperatura del fuel a la salida del conducto, punto D, será debida al incremento de temperatura producido por el intercambio de calor y las pérdidas de energía en la bomba y los conductos, que se transforman en calor comunicado al fluido.

Aplicando de nuevo la ecuación de la energía entre A y D: (Obsérvese que no se incluyen las pérdidas de carga por rozamiento entre fluido y conducto).

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} = \dot{m}\left(\frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + u_D - u_A + \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_D - z_A)\right)$$

$$Q - W_{eje} = \frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + u_D - u_A + \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_D - z_A)$$

de donde:

$$T_D - T_A = \frac{Q - W_{eje} - \left[\frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + \frac{V_D^2}{2} - \frac{V_A^2}{2} + g\left(Z_D - Z_A\right)\right]}{c_V}$$

Véase que W_{eje} engloba los términos de energía cinética y potencial, así como las pérdidas por fricción entre los puntos A y D, teniendo en cuenta, además, el rendimiento hidráulico de la máquina.

Sustituyendo los valores:

$$T_D - T_A = \frac{10^5 + \overbrace{512,79 - \left[\frac{4 \cdot 10^5}{875} - \frac{1,01 \cdot 10^5}{875} + \frac{1}{2}\left(\frac{0,004}{\frac{\pi \cdot 0,05^2}{4}}\right)^2 - 0 + 9,8 \cdot (0 - 5)\right]}^{\text{Este término engloba el 10\% de la energía generada por la bomba, más las perdidas por fricción en los conductos.}}}{2.000} \qquad (\Pi)$$

$$T_D = 50,02 + 278 = 328,02K$$

Como conclusión de este apartado, cabe decir que el aumento de temperatura del fluido es debido a:

a.- El calor transferido al sistema. 10^5 J/Kg.

b.- El 10% de la energía que la bomba necesita.

$$0,1*\left\{\begin{array}{l}\dfrac{4\cdot 10^5}{875}-\dfrac{1,01\cdot 10^5}{875}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{0,004}{\dfrac{\pi\cdot 0,05^2}{4}}\right)^2-0+g(0-5)+5\cdot 10^6\cdot Q^2+\\ +\dfrac{0,022}{2}\cdot\dfrac{100}{0,05}\left(\dfrac{0,004}{\dfrac{\pi\cdot 0,05^2}{4}}\right)^2\end{array}\right\}$$

c.- Las pérdidas por fricción en los conductos.

$$\left\{5\cdot 10^6\cdot Q^2+\frac{0,022}{2}\cdot\frac{100}{0,05}\left(\frac{0,004}{\dfrac{\pi\cdot 0,05^2}{4}}\right)^2\right\}$$

Estos tres términos son los que forman el numerador de la ecuación (Π) de donde se obtiene el aumento de temperatura del fluido.

Problema 56

Enunciado

Estudiando los diferentes diseños de hovercraft, se pretende hacer ensayos con un modelo cuya sección transversal se muestra en la figura. Sabiendo que existen 100 toberas de descarga en la base del cojín, cuyo diámetro unitario es d_T, que el diámetro de la boca de entrada del ventilador es D_e ($D_e >> d_T$), y que se puede considerar que la presión en el depósito (cojín de aire anular) se mantiene constante, pudiéndose despreciar el término de energía cinética en el depósito determine:

1. La ecuación que define el flujo volumétrico que fluye por cada tobera, en función de la presión en el depósito superior (cojín). Considere que las pérdidas de energía en cada tobera dadas en [J/Kg] son:

$$\Delta Y = K_T \cdot Q^2_{\text{tobera}}.$$

2. La ecuación que determina la fuerza de sustentación en función de la presión en el interior del hovercraft, si se considera que dicha fuerza es únicamente producida por el flujo saliente por las toberas.

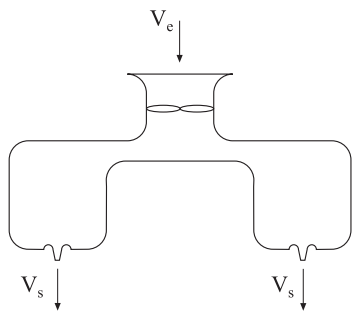
3. La potencia por unidad de masa que hay que comunicar al ventilador (dar la potencia en función de la presión interna del hovercraft). Se sabe que las pérdidas de energía por unidad de masa entre el ventilador y el cojín de aire interno son del tipo $\Delta Y = K_{int} \cdot Q^2_{entrante\ ventilador}$.

4. Considerando el sistema térmicamente aislado, y sabiendo que el rendimiento del ventilador es del 96%, halle el incremento de temperatura del aire entre la entrada y el cojín de aire interno. Considere las pérdidas definidas en el apartado 3.

5. Si alrededor del hovercraft se coloca una falda de un material semirrígido, tal que el flujo de fluido desde la parte interior del hovercraft hacia el exterior está regido por la ecuación $\Delta Y = K_{ext}\ Q^2_{saliente\ hovercraft}$, determine como varia la sustentación de dicho hovercraft.

Realice las hipótesis oportunas en cada caso.

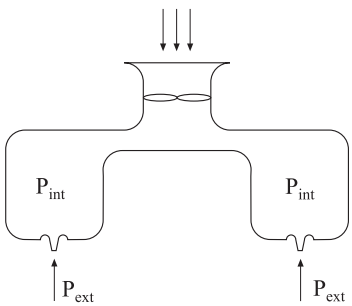
Fig. 56.1
Sección del hovercraft



Resolución

1. De la aplicación de la ecuación de la energía entre el interior y el exterior del cojín de aire a través de la tobera (una de ellas) se obtiene:

Fig. 56.2



$$\frac{P_{int}}{\rho_{int}} + g\,z_{int} + \frac{v^2_{int}}{2} = \frac{P_{ext}}{\rho_{ext}} + g\,z_{ext} + \frac{v^2_{ext}}{2} + K_T\ Q^2_{tobera}$$

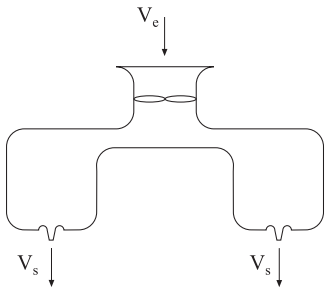
$$\frac{P_{int}}{\rho_{int}} - \frac{P_{ext}}{\rho_{ext}} = \frac{Q^2_{tobera}}{S^2_{tobera}\,2} + K_T\ Q^2_{tobera}$$

$$Q^2_{tobera} = \left(\frac{P_{int}}{\rho_{int}} - \frac{P_{ext}}{\rho_{ext}} \right) \frac{1}{\frac{1}{S^2_{tobera}\,2} + K_T}$$

Caudal saliente total $QTT = 100 * QT$

2. Fuerza ascensorial debida a la variación de la cantidad de movimiento. Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento entre la entrada del ventilador y la salida de las toberas, se establece:

Fig. 56.3



$$-\int_{se} P_e \, d\vec{s} - \int_{ss} P_s \, d\vec{s} + \int_{sl} \bar{\bar{\tau}} \, d\vec{s} + \int_{sl} P \, d\vec{s} = \oint_{sc} \rho \, \vec{v} \, \vec{v} \, d\vec{s}$$

Trabajando en presiones relativas, el empuje debido a la variación de cantidad de movimiento será:

$$F_Y = \int_{se} \rho \, \vec{v} \, \vec{v} \, d\vec{s} + \int_{ss\ tobera\,1} \rho \, \vec{v} \, \vec{v} \, d\vec{s} + ... + \int_{ss\ tobera\,n} \rho \, \vec{v} \, \vec{v} \, d\vec{s}$$

$$F_Y = \dot{m}\left(v_e - v_s\right) = \dot{m}\left(\frac{Q_e}{S_e} - \frac{Q_{tobera}}{S_{tobera}} \right)$$

$$F_Y = \dot{m}\, Q_{tobera} \left(\frac{100}{S_e} - \frac{1}{S_{tobera}} \right)$$

$$F_Y = \rho_{entrada}\, Q_e\, Q_{tobera} \left(\frac{100}{S_e} - \frac{1}{S_{tobera}} \right)$$

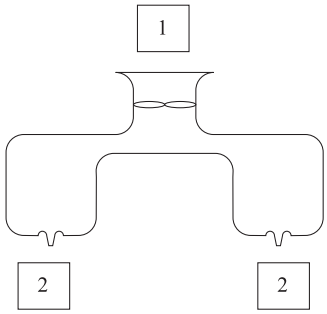
La ecuación de continuidad aplicada entre la entrada y la salida dirá: $Q_e = 100\, Q_{tobera}$

$$F_Y = \rho_{entrada}\, 100\ Q^2_{tobera} \left(\frac{100}{S_e} - \frac{1}{S_{tobera}} \right)$$

3. Potencia del ventilador

Aplicando la ecuación de la energía en régimen permanente entre los puntos 1 y 2 (entrada y salida del hovercraft), se obtiene:

Fig. 56.4



$$\dot{Q} - \dot{W} = \oint_{sc} \rho \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \cdot z + u \right) \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

puesto que $\dot{Q} = 0$; consecuentemente, la ecuación queda:

$$-\dot{W}_{eje} - \dot{W} = \oint_{se} \rho \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g\,z + u \right) \vec{v}\, d\vec{s} + \oint_{ss} \rho \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g\,z + u \right) \vec{v}\, d\vec{s}$$

$$-Y_{eje} = \frac{-\dot{W}_{eje}}{\dot{m}} = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g\,z + u \right)_{ss} - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g\,z + u \right)_{se} + K_T\, Q^2_{tobera} + K_{int}\, Q^2_{ent}$$

Trabajando en presiones relativas, ó para variaciones de presión despreciables:

$$-Y_{eje} = g(z_s - z_e) + \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + \frac{K_T}{100^2} Q^2_{total\ salida} + K_{int} Q^2_{ent}$$

Asumiendo que la potencia comunicada al ventilador es positiva y despreciando las variaciones de energía potencial:

$$W_{eje} = Y_{eje} = \frac{1}{2} \left[\frac{Q^2_{tobera}}{s^2_{tobera}} - \frac{Q^2_{entrada}}{s^2_{entrada}} \right] + \frac{K_T}{100^2} Q^2_{total\ salida} + K_{int} Q^2_{ent}$$

$$Y_{eje\ ventilador} = Q^2_{total\ salida} \left[\frac{1}{2\, s^2_{tobera}} \frac{1}{100^2} - \frac{1}{2\, s^2_{entrada}} \right] + \frac{K_T}{100^2} + K_{int}$$

Recuérdese que $Q_{TT} = 100 \cdot Q_T$

La potencia comunicada al fluido será: $N_{fluido} = \rho\, Y_{eje}\, Q_{Total}$

Nota: En realidad, la potencia necesaria en el ventilador será un 4% mayor que la potencia establecida aquí.

4. El incremento de temperatura que experimentará el fluido desde la entrada hasta la zona de remanso será debido al calor transferido en el ventilador (que equivale al 4% de su potencia), más la energía perdida por fricción entre la entrada y la zona de remanso, y que se convertirá en calor. Así pues,

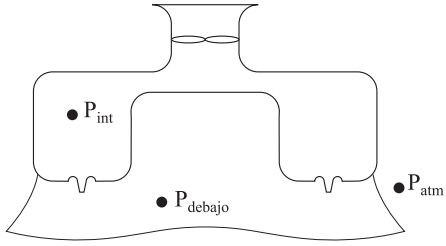
$$C_v\left(T_3 - T_1\right) = 0,04\ Y_{\text{eje ventilador}} + K_{int} Q_{ent}^2$$

La expresión obtenida para el incremento de temperatura es:

$$\left(T_3 - T_1\right) = \frac{0,04\ Y_{\text{eje ventilador}} + K_{int} 100^2 Q_{\text{tobera}}^2}{C_v}$$

5. Al utilizar la falda exterior, la presión debajo del hovercraft será ligeramente mayor que la presión atmosférica. El cálculo analítico para la obtención de dicha presión es:

Fig. 56.5



$$\frac{p_{\text{debajo}}}{\rho_{\text{debajo}}} + g\,z_{\text{debajo}} + \frac{v_{\text{debajo}}^2}{2} = \frac{p_{atm}}{\rho_{atm}} + g\,z_{atm} + \frac{v_{atm}^2}{2} + K_{ext} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2$$

$$\frac{p_{\text{debajo}}}{\rho_{\text{debajo}}} = \frac{p_{atm}}{\rho_{atm}} + K_{ext} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2$$

Recuérdese que:

$$\dot{m}_{\text{entrante}} = \dot{m}_{\text{total toberas}} = \dot{m}_{\text{saliente}}$$

Considerando la densidad del aire prácticamente constante a la entrada y a la salida, queda :

$$Q_{\text{entrante}} = Q_{\text{total toberas}} = Q_{\text{saliente}}$$

Y en presiones relativas:

$$p_{\text{debajo}} = \frac{p_{atm}}{\rho_{atm}} \rho_{\text{debajo}} + K_{ext} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2\ \rho_{\text{debajo}}$$

$$p_{\text{debajo}} = K_{ext} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2\ \rho$$

El caudal que fluye por las toberas quedará modificado, puesto que la presión en el exterior es ahora ligeramente mayor que la atmosférica.

$$Q^2_{\text{tobera 2}} = \left[\left(\frac{p_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}}} - \frac{p_{\text{debajo}}}{\rho_{\text{debajo}}} \right) + g\left(z_{\text{int}} - z_{\text{debajo}} \right) \right] \frac{1}{\frac{1}{2\, S^2_{\text{tobera}}} + K_T}$$

Suponiendo que el caudal que suministra el ventilador es el requerido en este apartado, la fuerza de sustentación tendrá la misma forma que en el apartado 2. Únicamente quedará modificado el caudal de la tobera:

$$F_Y = \rho_{\text{entrada}}\, 100\; Q^2_{\text{tobera 2}} \left(\frac{100}{S_e} - \frac{1}{S_{\text{tobera}}} \right)$$

Además, en este apartado, la presión debajo del hovercraft crea una fuerza de sustentación adicional:

$$F_{\text{adicional}} = P_{\text{debajo}}\; S_{\text{hovercraft proyectada}}$$

$$F_{Y_{\text{total}}} = F_Y + F_{\text{adicional}}$$

Problema 57

Enunciado

Sea una turbina axial como la esquematizada en la figura 57.1, la cual consiste en un conjunto de alabes fijos o directrices (estator) y un rotor. La longitud de los alabes, tanto en el estator como en el rotor, se considerará muy pequeña, comparada con el radio medio del rotor R_M, con lo cual se podrán considerar uniformes las propiedades a lo largo del alabe.

La velocidad del fluido a la entrada del estator (punto 1), la cual tiene únicamente componente axial, tiene un valor conocido C_1. A la salida del rotor, el fluido tiene así mismo únicamente componente axial. El valor de la componente axial se mantendrá a lo largo de la máquina.

Los triángulos de velocidades para un radio medio R_M, tanto a la entrada como a la salida del rotor, se detallan en la figura 57.1.

Considérense conocidos los valores siguientes:

- Constantes termodinámicas del gas que fluye por la turbina: R, C_V, C_P, γ
- Radio medio en el centro de los alabes: R_M
- Altura del alabe del estator: H_1
- Velocidad del fluido a la entrada del estator: C_1
- Presión a la entrada del estator: P_1
- Temperatura a la entrada del estator: T_1

- Ángulo formado por la velocidad relativa y el eje de la turbina: α_2
- Considerar que para el presente caso y para el radio medio de la turbina, U_2 coincide en módulo con W_{2u}

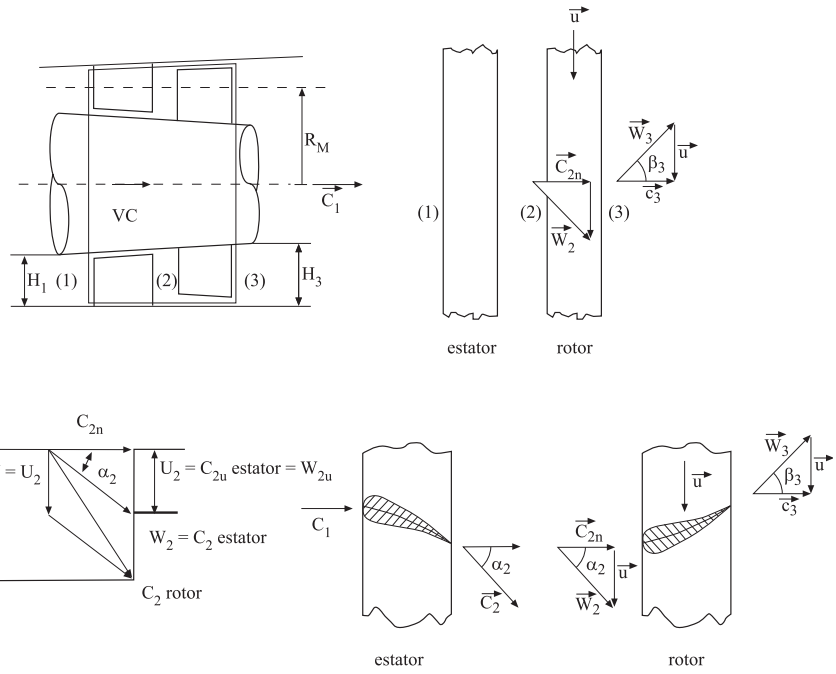


Fig. 57.1
Esquema de una turbina axial

Determine:

1. Suponiendo que los triángulos de velocidades son los esquematizados en la figura, halle la velocidad de giro del rotor. Determine también el caudal másico circulante.

2. La energía por unidad de masa que la turbina absorbe del fluido, el par generado por la turbina y la potencia comunicada al eje.

3. La temperatura del fluido a la salida de la turbina, asumiendo que no existe calor transferido al contorno sólido. Indique que mediciones de los parámetros del fluido se deberían realizar para determinar la altura de los alabes en los puntos 2 y 3.

Indique las hipótesis que se van realizando en cada caso.

Resolución

1. Puesto que se dice que la componente axial se mantendrá a lo largo del rodete, se cumple que:

$C_1 = C_{2n} = C_3$; C_{2n} = Componente normal de la velocidad absoluta a la entrada del rotor.

Con lo que la velocidad de giro del rotor se puede determinar para el presente caso particular, como:

$$Tg\,\alpha_2 = \frac{U_2}{C_{2n}} = \frac{U_2}{C_1} = \frac{\omega\, R_M}{C_1}$$

$$\omega = \frac{Tg\alpha_2\; C_1}{R_M}$$

El caudal másico que fluye por la máquina será, entonces:

$$\dot{m} = \int \rho\, \vec{V}\, d\vec{S} = -\int \rho\, C_1\, d\vec{S} = -\rho\;\; C_1\, \frac{\pi}{4}\left(D_e^2 - D_i^2\right)$$

Puesto que los diámetros exterior e inferior en el estator no son conocidos, la sección de paso se aproximará por:

$$\frac{\pi}{4}\left(D_e^2 - D_i^2\right) \approx 2\pi\, R_M\; H_1$$

con lo cual:

$$\dot{m} = -\rho\, C_1\; 2\pi\, R_M\; H_1$$

La densidad a la entrada de la turbina se hallará:

$$\rho = \frac{P_e}{R\, T_e} = \frac{P_1}{R\, T_1}\;\;;$$

Así pues, el caudal másico circulante será:

$$\dot{m} = -\frac{P_1}{R\, T_1}\, C_1\; 2\pi\, R_M\; H_1$$

Nota. El signo (-) indica que es flujo entrante al sistema.

2. La ecuación de Euler de las turbomáquinas, aplicada a la turbina en estudio, dice:

$$Y_{t\infty} = U_3\, C_{3u} - U_2\, C_{2u}$$

Puesto que todos los parámetros se definen para el radio RM, se tiene que $U_2 = U_3 = U$ Por otro lado, del triángulo de velocidades a la salida del rotor se deduce que la componente tangencial de la velocidad absoluta es $C_{3u} = 0$.

Así, la energía que el fluido transmite al rotor será:

$$Y_{\tau\infty} = - U_2 \, C_{2u} = -\omega \, R_M \, C_{2u}$$

Observe que C_{2u} es la componente tangencial del fluido en el punto 2. Del triángulo de velocidades en este punto se deduce que: $C_{2u} = U + W_2 \sin\alpha_2$; de donde se obtiene:

$Y_{\tau\infty} = - \omega \, R_M \left(U + W_2 \sin\alpha_2 \right)$; $\left[\dfrac{J}{Kg} \right]$; el signo (-) indica que se trata de energía transmitida a la máquina.

De la ecuación del momento cinético aplicada a una turbomáquina, para el caso en estudio se obtiene:

$$\sum M_{eje} = \dot{m} \left(R_{M3} \, C_{3u} - R_{M2} \, C_{2u} \right)$$

Como $R_{M3} = R_{M2} = R_M$ y $C_{3u} = 0$, se dirá que el par generado por la turbina valdrá:

$$M_{eje} = -\dot{m} \, R_M \, C_{2u} = -\dot{m} \, R_M \left(U + W_2 \sin\alpha_2 \right)$$

$$M_{eje} = -\frac{P_1}{R \, T_1} C_1 \, 2\pi \, R_M^2 \, H_1 \left(U + W_2 \sin\alpha_2 \right)$$

Asimismo, la potencia transmitida al eje será:

$$\dot{W}_{eje} = M_{eje} \, \omega = -\dot{m} \, R_M \, \omega \left(U + W_2 \sin\alpha_2 \right)$$

$$\dot{W}_{eje} = -\frac{P_1}{R \, T_1} C_1 \, 2\pi \, R_M^2 \, H_1 \, \omega \left(U + W_2 \sin\alpha_2 \right)$$

3. Finalmente, la temperatura del fluido a la turbina, asumiendo que no existe calor transferido hacia o por el sistema, se determinará partiendo de la ecuación de la energía aplicada entre la entrada y la salida de la turbina. En régimen permanente, se tiene:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} = \int_{S1} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + g \, z + \frac{P}{\rho} \right) \vec{v} d\vec{s} + \int_{S3} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + g \, z + \frac{P}{\rho} \right) \vec{v} d\vec{s}$$

Siendo $\dot{Q} = 0$, se obtiene que:

$$-\dot{W}_{eje} = \dot{m} \left(u + \frac{v^2}{2} + g \, z + \frac{P}{\rho} \right)_{S1} + \dot{m} \left(u + \frac{v^2}{2} + g \, z + \frac{P}{\rho} \right)_{S3}$$

Obsérvese que las pérdidas de energía por esfuerzos cortantes no se han considerado porque no pueden ser evaluadas. Entonces:

$$-\dot{W}_{eje} = \dot{m}\left[u_3 - u_1 + \frac{v_3^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + g\left(z_3 - z_1\right) + \frac{P_3}{\rho_3} - \frac{P_1}{\rho_1}\right]$$

Dado que la cota del punto 3 y 1 es la misma, y que las velocidades absolutas en dichos puntos son iguales, según enunciado $v_3 = C_3$; $v_1 = C_1$; $C_3 = C_1$ y queda que:

$$-\dot{W}_{eje} = \dot{m}.\left[u_3 - u_1 + \frac{P_3}{\rho_3} - \frac{P_1}{\rho_1}\right] = \dot{m}\left[u_3 + \frac{P_3}{\rho_3} - u_1 - \frac{P_1}{\rho_1}\right]$$

$$-\dot{W}_{eje} = \dot{m}\left[h_3 - h_1\right] = \dot{m}\,Cp\left[T_3 - T_1\right]$$

$$T_3 = \frac{-\dot{W}_{eje}}{\dot{m}\,Cp} + T_1$$

Como la potencia en el eje de la turbina se ha hallado en el apartado 2, se tiene:

$$T_3 = \frac{\frac{P_1}{R\,T_1}\,C_1\,2\pi\,R_M^2\,H_1\,\omega\left(U + W_2\sin\alpha_2\right)}{\dot{m}\,Cp} + T_1$$

De la aplicación de la ecuación de continuidad entre los puntos 1, 2 y 3, se puede decir:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

$$Q_1\,\rho_1 = Q_2\,\rho_2 = Q_3\,\rho_3$$

$$S_1\,C_1\,\rho_1 = S_2\,C_{2n}\,\rho_2 = S_3\,C_3\,\rho_3$$

Según el enunciado, $C_1 = C_{2n} = C_3$, y sabiendo que $\rho_i = \frac{P_i}{R\,T_i}$ y $S_i = 2\pi\,R_B\,H_i$, se tiene:

$$2\pi\,R_M\,H_1\,C_1\,\frac{P_1}{R\,T_1} = 2\pi\,R_M\,H_2\,C_1\,\frac{P_2}{R\,T_2} = 2\pi\,R_M\,H_3\,C_1\,\frac{P_3}{R\,T_3};$$

$$H_1\,\frac{P_1}{T_1} = H_2\,\frac{P_2}{T_2} = H_3\,\frac{P_3}{T_3};$$

La altura de los alabes en los puntos 2 y 3 se podría determinar una vez conocidas la presión y la temperatura en dichos puntos. Experimentalmente, se podría realizar introduciendo sendos sensores de presión y temperatura en dichas zonas. Hay que observar que P2 y T2 serán muy similares a P1 y T1.

Flujo con viscosidad dominante

Bajo viscosidad dominante, se entiende que las fuerzas de inercia asociadas a la partícula de fluido juegan un papel irrelevante, con lo que el movimiento del fluido viene dominado por las fuerzas viscosas. En este capítulo se estudiaran diferentes tipos de flujo, definiendo para cada caso, las ecuaciones características del flujo considerado.

8.1 Flujo entre dos placas paralelas

Sean dos placas paralelas de longitud y profundidad infinitas, cuyo esquema se muestra en la figura adjunta. Una de las placas se desplaza a una velocidad U y entre los extremos de las mismas, puede existir un gradiente de presión. Se desea determinar la distribución de velocidades entre las dos placas.

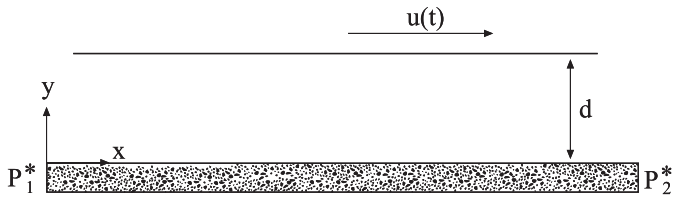


Fig. T 8.1 Esquema del flujo de Couette-Poiseulle plano

Las hipótesis de trabajo que se utilizaran en este primer caso son:

- El fluido se considera incompresible.
- Las placas se consideran infinitas.
- La placa superior se desplaza a una velocidad U en dirección x (esta velocidad puede, a priori, depender del tiempo).
- Se supondrá movimiento unidireccional y bidimensional.
- Puede existir gradiente de presiones entre extremos de las placas.

- La velocidad del fluido en un punto genérico será $V = U\hat{i}$, donde $U = U(x, y, t)$
- Condiciones de contorno: $U(x, 0, t) = 0; \quad U(x, d, t) = U(t)$

Las ecuaciones de Navier-Stokes para fluido incompresible tridimensional y en coordenadas cartesianas se expresan:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

En forma vectorial, sería:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V}$$

La ecuación de continuidad se expresa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{V}) = 0$$

Puesto que ρ es constante, la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\nabla\vec{V} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Puesto que el flujo es unidireccional, la ecuación de continuidad se reducirá a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

lo que implica que la velocidad del fluido dependerá de $U = (y, t)$

Las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso objeto de estudio quedarán:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\vec{g}_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho\vec{g}_y$$

No hay componente en dirección z, puesto que se trata de un flujo bidimensional.

Estas ecuaciones pueden simplificarse combinando las fuerzas gravitacionales con las fuerzas debidas a la presión.

Se define una distancia h respecto al origen de coordenadas h=h(x,y,z), se elegirá h en dirección y; h=h(y).

Para un campo conservativo y con densidad constante, se establece:

$$\vec{g} = -\nabla \amalg = -\left(\underbrace{\frac{\partial \amalg}{\partial x} i}_{\vec{g}_x} + \underbrace{\frac{\partial \amalg}{\partial y} j}_{\vec{g}_y} + \underbrace{\frac{\partial \amalg}{\partial z} k}_{\vec{g}_z} \right)$$

donde $\amalg$ es un potencial escalar de fuerzas másicas, en el campo gravitatorio terrestre, $\amalg = g\,h$

y sustituyendo en las ecuaciones de Navier-Stokes, se obtiene:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} - \rho g \dfrac{\partial h}{\partial x} + \mu \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -\dfrac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho g \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{cases}$$

Definiendo el concepto de presión reducida como $p^* = p + \rho g h$, los términos de la ecuación de Navier-Stokes quedan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial y}$$

La segunda de estas ecuaciones indica que en dirección y regirá la ecuación de la estática de fluidos.

Despejando el término de p^* en la primera de las ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

Obsérvese que la parte izquierda de esta ecuación depende de x; la parte derecha depende de y, y ambas partes dependen del tiempo, con lo cual $\dfrac{\partial p}{\partial x} = F(t)$.

La variación de presión a lo largo del eje x se debe asumir constante, con lo que

$$\frac{\partial p^*(t)}{\partial x} = -\frac{\Delta p^*}{\Delta L} = \frac{(p + \rho U)_1 - (p + \rho U)_2}{L}$$

ecuación que indica la variación temporal de presión reducida entre dos puntos separados una distancia L. Recuérdese que, en general, la presión disminuye al aumentar x, lo cual explica el signo.

La ecuación de Navier-Stokes en forma vectorial, para fluido incompresible, expresada en función de la presión reducida, se define:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p^* + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

8.2 Flujos independientes del tiempo

8.2.1 Flujo de Couette - Poiseulle plano

Considérese el flujo del ejemplo anterior entre dos placas infinitas y paralelas, la placa superior puede desplazarse a una velocidad U independiente del tiempo, existe gradientes de presiones entre los extremos de las placas. Figura T 8.1.

Se establecen las siguientes hipótesis:

- Movimiento unidireccional, bidimensional $w = v = 0$
- Flujo incompresible $\rho = cte$
- Régimen estacionario $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

De las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad, se obtiene:

Ecuación de continuidad:

$$\nabla \vec{V} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ecuación de Navier-Stokes:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$0 = \frac{\partial p^*}{\partial y} \rightarrow p^*\Big|_y = cte$$

Integrando la ecuación de Navier-Stokes en dirección x para $\frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\Delta p^*}{\Delta x} = cte$, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\Delta p^*}{\Delta x} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta p^*}{\Delta x}\frac{1}{\mu}y + C_1$$

$$u = \frac{\Delta p^*}{\Delta x}\frac{1}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Las constantes de integración se obtendrán mediante las siguientes condiciones de contorno:

$$y = 0 \quad u = 0$$

$y = d \quad u = U, \quad$ o bien $\quad U = 0,$ para el caso en que las dos placas fuesen estáticas.

de donde se llega a:

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{U}{d} - \frac{\Delta p^*}{\Delta x}\frac{d}{2\mu}$$

así, la ecuación que proporciona la distribución de velocidades en función de la altura genérica y el gradiente de presiones reducidas, tomara la forma:

$$u = \frac{\Delta p^*}{\Delta x}\frac{y^2}{2\mu} - \frac{\Delta p^*}{\Delta x}\frac{dy}{2\mu} + \frac{U \cdot y}{d} = \frac{\Delta p^*}{\Delta x}\frac{y}{2\mu}\left[y - d\right] + \frac{U \cdot y}{d}$$

Esta ecuación proporciona la distribución de velocidades del fluido que fluye entre dos placas planas paralelas cuando, una de las placas se desplaza paralela a la otra y existe además un gradiente de presiones entre extremos de las mismas.

8.2.2 Flujo de Couette.

Para la determinación de dicho flujo, se considera que el gradiente de presión reducida es igual a cero:

$$\frac{\Delta p^*}{\Delta x} = 0$$

con lo que el movimiento del fluido entre las dos placas será únicamente debido al desplazamiento de la placa superior.

La distribución de velocidades resultante será:

$$u = \frac{U\,y}{d}$$

La fuerza por unidad de superficie que se opone al movimiento se define:

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y} = \mu\frac{U}{d}$$

de donde la potencia disipada por unidad de superficie de la placa será $\dot{W} = \tau\,u = \mu\dfrac{U^2}{d}$

8.2.3 Flujo de Hagen-Poiseulle o Poiseulle plano

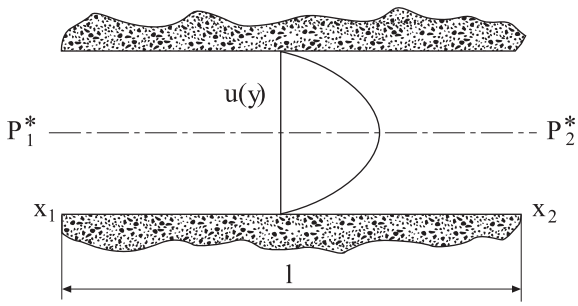
Para este caso se considera que la velocidad de la placa superior es cero (U = 0), con lo cual el desplazamiento del fluido será debido únicamente al gradiente de presiones.

La distribución de velocidades para este caso será:

$$u = \frac{\Delta p^*}{\Delta x}\frac{y}{2\mu}(y-d)$$

ecuación que define una distribución de velocidades parabólica.

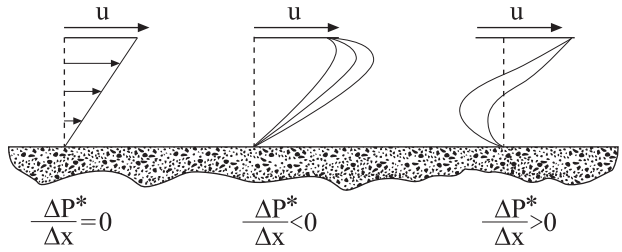
Fig. T 8.2
Esquema del flujo de Poiseulle plano



Si, por otro lado, existiese desplazamiento relativo de la placa superior y, además, gradiente de presiones, se obtendrían distribuciones de velocidades como las siguientes. Distribuciones que vendrán definidas por la ecuación genérica.

$$u = \frac{\Delta p^*}{\Delta x}\frac{y}{2\mu}\left[y-d\right]+\frac{U\cdot y}{d}$$

Fig. T 8.3
Diferentes distribuciones de velocidades posibles para el flujo de Couette-Poiseulle



8.3 Flujo dependiente del tiempo

8.3.1 Flujo de Rayleich

Sea una placa plana inmersa en un fluido, la placa parte del reposo y se acelera hasta alcanzar una velocidad U. Se quiere estudiar el movimiento temporal del fluido en función de la distancia a la placa.

Hipótesis de trabajo

- Movimiento unidireccional
- Fluido en reposo
- La placa está inicialmente a velocidad cero y se acelera hasta alcanzar una velocidad constante U.
- Fluido incompresible
- Flujo unidireccional $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- Régimen transitorio $\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$
- Gradiente de presión reducida entre extremos de la placa, inexistente $\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0$

La ecuación de Navier-Stokes establece:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p^* + \mu \nabla^2 u$$

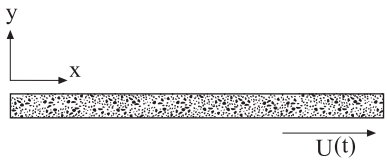


Fig. T 8.4 Esquema del flujo de Rayleic

Para el caso bajo estudio, queda:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0 + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de propagación de una perturbación*.

Las condiciones de contorno necesarias para su resolución son:

$$u(y,0) = 0$$
$$u(\infty,t) = 0$$
$$u(0,t) = U$$

De la ecuación diferencial característica de este fenómeno, se observa que existe una relación de magnitudes del tipo:

$$\frac{U}{t_0} \approx \frac{\mu}{\rho} \frac{U}{\delta^2} = \nu \frac{U}{\delta^2}$$

siendo:

δ=espesor del fluido, el cual está afectado por el movimiento.

t_0 =tiempo genérico con respecto al origen de tiempos.

Se define una variable de semejanza interna η o también llamada *constante característica del flujo,* como:

$$\delta^2 \approx \nu\, t_0 \rightarrow \delta \approx \sqrt{\nu\, t_0} \rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{\nu\, t_0}} = \eta = \frac{y}{\sqrt{\nu\, t}};$$

δ se mide en dirección y.

Se trata de expresar la velocidad del fluido u en función de esta variable η. Este método se denomina *transformación de similaridad.*

Llamando $u^* = \frac{u}{U}$ y sustituyendo en cada uno de los términos de la ecuación de Navier-Stokes, queda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (u^* U)}{\partial t} = U \frac{\partial u^*}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (u^* U)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(u^* U\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(U \frac{\partial u^*}{\partial y}\right) = U \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}$$

de donde, uniendo estos términos y teniendo en cuenta la variable η, se tiene:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{\partial u^*}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta^2}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial \eta^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

Puesto que $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu\, t}}$

su derivación da lugar a:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{y}{\sqrt{\nu}} \cdot \left(-\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\nu\, t}$$

Sustituyendo en la ecuación modificada de Navier-Stokes, se obtiene:

$$\frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot \frac{y}{\sqrt{\nu}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{3}{2}}\right) = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} \cdot \frac{1}{\nu\, t}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot \frac{y}{\sqrt{\nu\, t}} \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} \cdot \frac{1}{t}$$

ecuación que toma la forma:

$$-\frac{\eta}{2}\frac{\partial u^*}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2}$$

y se puede dar como:

$$-\frac{\eta}{2}=\frac{1}{\frac{\partial u^*}{\partial \eta}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right);\equiv -\frac{\eta}{2}=\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \eta};\equiv\ -\frac{\eta}{2}d\eta=\frac{dA}{A}$$

Integrando:

$$-\frac{\eta^2}{4}+C_0=\ln\left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right)$$

Admitiendo que, cuando $\eta = 0$, se cumple:

$$\eta=0\rightarrow\frac{\partial u^*}{\partial \eta}=\left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right)_0$$

La constante de integración tendrá un valor:

$$C_0=\ln\left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right)_0$$

Sustituyendo en la ecuación, se obtiene:

$$-\frac{\eta^2}{4}=\ln\frac{\frac{\partial u*}{\partial \eta}}{\left(\frac{\partial u*}{\partial \eta}\right)_0}$$

Sacando logaritmos, se tiene:

$$e^{-\frac{\eta^2}{4}}=\frac{\frac{\partial u*}{\partial \eta}}{\left(\frac{\partial u*}{\partial \eta}\right)_0};\qquad \frac{\partial u*}{\partial \eta}=\left(\frac{\partial u*}{\partial \eta}\right)_0\cdot e^{-\frac{\eta^2}{4}}$$

Integrando de nuevo:

$$u*=\left(\frac{\partial u*}{\partial \eta}\right)_0\int_0^{\eta}e^{-\frac{\eta^2}{4}}d\eta+c_1$$

Para determinar la constante c_1, se puede emplear la siguiente condición de contorno.

Para $y = 0\ \equiv\ \eta=0\ \rightarrow u^*=u^*(0)=\frac{U}{U}=1$

Puesto que para $\eta=0;\equiv\int_0^{\eta}e^{-\frac{\eta^2}{4}}d\eta=\int_0^0e^{-0}d\eta=0$

se obtiene: $C_1=u^*(0)$

La ecuación quedará:

$$u^* = u^*(0) + \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right)_0 \int_0^\eta e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta$$

La integral $\int_0^\eta e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta$ tiene el nombre de función de error en estadística, siendo su valor:

$$\int_0^\eta e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta = \sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

de donde:

$$u^* = u^*(0) + \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right)_0 \sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

Con el fin de determinar el valor de $\left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right)_0$, se utiliza la segunda condición de contorno:

$$\text{Para } y = \infty;\ \eta = \infty \rightarrow \mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) = 1\ ;\ u^* = 0 = \frac{0}{U}$$

$$0 = u^* = u^*(0) + \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right)_0 \sqrt{\pi} \quad ; \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right)_0 = -\frac{u^*(0)}{\sqrt{\pi}};$$

Así, la velocidad temporal del fluido en forma adimensional tomará la expresión:

$$u^* = \left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)\right) u^*(0)$$

Recuérdese que erf es la función estadística de error.

8.4 Flujo estacionario en conductos circulares

8.4.1 Flujo de Hagen-Poiseulle

Sea el conducto circular genérico de la figura, cuya longitud genérica es L. Se quiere determinar la distribución de velocidades en el interior del conducto en función del gradiente de presiones entre sus extremos.

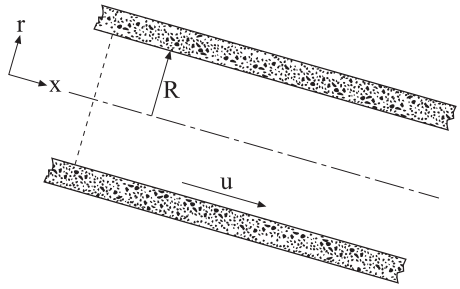


Fig. T 8.5
Flujo de Poiseulle

Hipótesis de trabajo:

- ρ = cte. fluido incompresible

- $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$; régimen permanente

- $v_r = v_\theta = 0$; flujo unidireccional bidimensional

- $v_x = f(r)$ flujo unidireccional. (La velocidad del fluido depende únicamente del radio).

Las condiciones de contorno aplicables serán:

Para $r = 0; \Rightarrow v_x = v_{max}$

Para $r = R; \Rightarrow v_x = 0$

Recordando las, ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad en coordenadas cilíndricas, se tiene:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\, r\, v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\, v_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\, v_x) = 0$$

Ecuación de Navier-Stokes.

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_x\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho\,\vec{g}_r +$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_x\frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{V_r V_\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho\,\vec{g}_\theta +$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_x}{\partial \theta} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\,\vec{g}_x +$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\right)$$

Cabe recordar también que, en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla P^* = \frac{\partial P^*}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P^*}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial P^*}{\partial x}\hat{x}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_r + \vec{g}_\theta$$

$$\vec{g} = -\nabla \amalg = -\nabla(gh) = -\left[\frac{\partial(gh)}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(gh)}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial(gh)}{\partial x}\hat{x}\right]$$

Para el caso que se está considerando, las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes toman la forma:

Ecuación de continuidad: $\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$

Ecuación de Navier-Stokes:

En dirección r: $0 = \frac{\partial P^*}{\partial r}$

En dirección θ: $0 = \frac{1}{r}\frac{\partial P^*}{\partial \theta}$

En dirección x: $0 = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial r} + \mu\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_x}{\partial r}\right)$

Las primeras dos ecuaciones dicen que la presión reducida $P^* = P + \rho g h$ es independiente de la dirección r y la dirección θ, con lo que dicha presión reducida variará únicamente en dirección x.

Al igual que en los casos precedentes, se observa que la caída de presión en dirección x es constante.

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} = \text{constante}$$

En general, el término $\frac{\partial P^*}{\partial x}$ es negativo, puesto que la presión P^* decrece al aumentar x.

La ecuación de Navier-Stokes en dirección x toma la forma:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_x}{\partial r}\right)$$

Integrando, se obtiene:

$$\int \frac{r}{\mu}\frac{\Delta P^*}{\Delta x}dr = \int d\left(r\frac{\partial V_x}{\partial r}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{r^2}{2} + C_0 = r\frac{dV_x}{dr}$$

Aplicando una primera condición de contorno, se tiene:

$$r = 0\ ;\ v_x = v_{máx} \quad \Rightarrow C_0 = 0$$

Integrando nuevamente:

$$\int \frac{1}{\mu}\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{r^2}{2}\frac{dr}{r} = \int dV_x$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{\mu}\frac{r^2}{4} + C_1 = V_x$$

Utilizando la segunda ecuación de contorno:

$$r = R;\ \ v_x = 0;\quad C_1 = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{\mu}\frac{R^2}{4}$$

De donde se obtiene:

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{\mu}\frac{1}{4}(r^2 - R^2)$$

Se observa que la velocidad V_x parece que sea siempre negativa. No obstante, hay que recordar que el término $\frac{\Delta P^*}{\Delta x}$ lleva asociado, en general, un signo negativo.

En el eje central, $r = 0;\quad V_x = V_{máx}$, la velocidad será:

$$V_{max} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}R^2$$

Combinando las dos ecuaciones precedentes, se tiene:

$V_x = V_{máx}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$, ecuación que caracteriza la distribución parabólica de velocidades deseada.

Una vez conocida la distribución de velocidades en función del radio, se puede determinar el flujo volumétrico que circula por el conducto, este vendrá determinado por:

$$Q = \int_0^R V_x \cdot 2\pi r\, dr = \int_0^R V_{max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)2\pi r\, dr = V_{max}\,2\pi\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{R^2}\frac{1}{4}\right)_0^R =$$

$$V_{max}\,2\pi\frac{R^2}{4} = V_{max}\pi\frac{R^2}{2} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{R^4\pi}{8\mu}$$

La velocidad media puede ser calculada como:

$$\bar{V} = \frac{Q}{S} = \frac{-\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{R^4\pi}{8\mu}}{\pi R^2} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{R^2}{8\mu} = \frac{1}{2}V_{max}$$

8.5 Concepto de pendiente motriz

Se denomina *pendiente motriz*:

$$I = \frac{\Delta E}{L}; \quad \frac{\text{Variación de energía entre dos puntos del circuito}}{\text{Distancia entre estos dos puntos}}$$

Que, en definitiva, es la energía de que dispone el fluido entre dos puntos del mismo y que origina su movimiento.

La energía asociada al fluido se define:

$$E = \frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} + u$$

Sea el ejemplo que muestra la figura siguiente, donde el fluido incompresible e isotérmico se desplaza a lo largo de un canal abierto. La variación de energía entre dos puntos del fluido en el canal será:

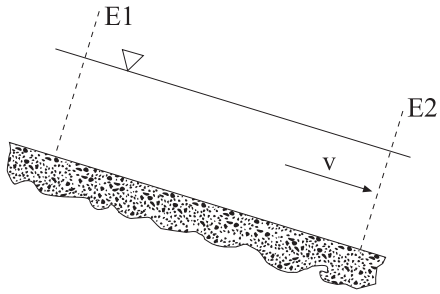


Fig. T 8.6 Flujo deslizándose por un canal abierto

$$I = -\frac{\partial\left\{\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g}\right\}}{\partial x}$$

$$I = -\frac{\left[\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g}\right]_1^2}{L} = -\frac{z_2 - z_1}{L} = \frac{z_1 - z_2}{L}$$

En este caso, la diferencia de cotas es la energía de que se dispone para que se produzca el movimiento del fluido.

Si se aplica el concepto de pendiente motriz en un conducto de sección recta circular, se tiene:

$I = f\left(\frac{\partial P^*}{\partial x}\right)$, donde se desea determinar el valor de la función desconocida f.

El concepto de pendiente motriz venía dado por:

$$I = \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial\left\{\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g}\right\}}{\partial x}$$

$$\rho g\, I = -\rho g \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g}\right)$$

Puesto que la sección del conducto es constante:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2g}\right) = 0$$

con lo que:

$$\rho g I = -\frac{\partial}{\partial x}(P + \rho g z) = -\frac{\partial P^*}{\partial x}$$

Obsérvese que este término es el que daba origen al movimiento del fluido en el flujo de Poiseuille.

En consecuencia, la pendiente motriz, en este caso, tomará la forma:

$$I = -\frac{1}{\rho g}\frac{\partial P^*}{\partial x}$$

A recordar cabe la adimensionalidad de la pendiente motriz.

8.6 Flujo en un conducto anular

Sea el conducto anular que se muestra en la figura T 8.7, donde se va a suponer que el cilindro interior se desplaza axialmente a una velocidad u; y además, puede existir un gradiente de presiones entre los extremos de los conductos.

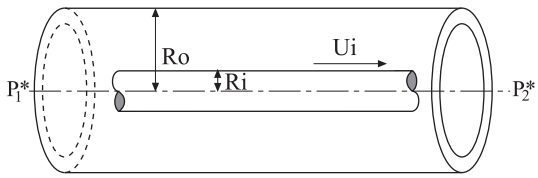


Fig. T 8.7
Flujo entre dos cilindros concéntricos

Las hipótesis de trabajo son las mismas que en el flujo de Poiseuille, de modo que las ecuaciones resultantes diferenciales serán las mismas que en dicho tipo de flujo. Únicamente variarán las condiciones de contorno.

Hipótesis consideradas en el presente caso:

- ρ = cte. fluido incompresible.

- $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ régimen permanente.

- $v_r = v_\theta = 0$ flujo unidireccional bidimensional.

- $v_x = f(r)$ flujo unidireccional. (La velocidad del fluido depende únicamente del radio).

Las diversas condiciones de contorno posibles para este tipo de flujo son:

Condición de contorno 1, a, b

Para $r = R_0;\quad V_x = 0$
$r = R_i;\quad V_x = U_i$
$\dfrac{\Delta P^*}{\Delta x} = 0$

Para $r = R_0;\quad V_x = 0$
$r = R_i;\quad V_x = U_i$
$\dfrac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$

Condición de contorno 2, a, b

Para $r = R_0;\quad V_x = U_0$
$r = R_i;\quad V_x = U_i$
$\dfrac{\Delta P^*}{\Delta x} = 0$

Para $r = R_0;\quad V_x = U_0$
$r = R_i;\quad V_x = U_i$
$\dfrac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$

Condición de contorno 3, a, b

Para $r = R_0;\quad V_x = U_0$
$r = R_i;\quad V_x = 0$
$\dfrac{\Delta P^*}{\Delta x} = 0$

Para $r = R_0;\quad V_x = U_0$
$r = R_i;\quad V_x = 0$
$\dfrac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$

Condición de contorno 4

Para $r = R_0;\quad V_x = 0$
$r = R_i;\quad V_x = 0$
$\dfrac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$

Independientemente de la condición de contorno elegida, y partiendo de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas, las ecuaciones diferenciales resultantes serán:

Ecuación de continuidad: $\dfrac{\partial V_x}{\partial x} = 0$

Ecuación de Navier-Stokes:

desglosando para cada una de las tres componentes, se tiene:

$$0 = \frac{\partial P^*}{\partial r}$$

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial P^*}{\partial \theta}$$

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_x}{\partial r}\right)$$

Se considerará, al igual que en los casos anteriores, que $\frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} = \text{cte.}$

Integrando la ecuación de Navier-Stokes en dirección x se obtiene:

$$\int \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{r}{\mu}dr = \int d\left(r\frac{\partial V_x}{\partial r}\right)$$

$$C_0 + \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{r^2}{2}\frac{1}{\mu} = r\frac{dV_x}{dr}$$

Integrando de nuevo:

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{r^2}{4}\frac{1}{\mu} + C_0 \ln r + C_1$$

Con respecto a las posibles condiciones de contorno, se considerará inicialmente que el cilindro interior se desplaza axialmente con respecto al cilindro exterior, que se mantiene inmóvil y no existe gradiente de presiones entre sus extremos.

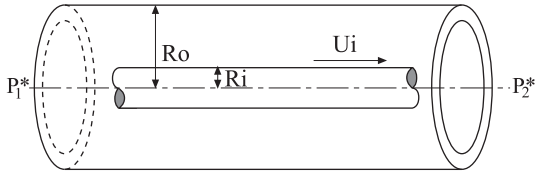


Fig. T 8.8
Flujo entre dos cilindros concéntricos, caso desplazamiento axial del cilindro

$$r = R_0; \quad V_x = 0$$
$$r = R_i; \quad V_x = U_i$$
$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} = 0$$

Aplicando estas condiciones de contorno a la ecuación que da la distribución de velocidades genérica se obtiene:

$$(1) \quad 0 = C_0 \ln R_0 + C_1$$
$$(2) \quad U_i = C_0 \ln R_i + C_1$$

De (2) - (1) se llega:

$$U_i = C_0\left(\ln R_i - \ln R_0\right) = C_0 \ln\frac{R_i}{R_0} \quad ; \quad C_0 = \frac{U_i}{\ln\frac{R_i}{R_0}}$$

Sustituyendo en (1):

$$0 = \frac{U_i}{\ln\frac{R_i}{R_0}} \ln R_0 + C_1$$

$$C_1 = -\frac{U_i}{\ln\frac{R_i}{R_0}} \ln R_0$$

Sustituyendo las constantes en la ecuación genérica de la distribución de velocidades y recordando que $\frac{\Delta P^*}{\Delta x} = 0$, se tiene:

$$V_x = \frac{U_1}{\ln\frac{R_i}{R_0}} \ln r - \frac{U_1}{\ln\frac{R_i}{R_0}} \ln R_0$$

$$V_x = \frac{U_1}{\ln\frac{R_i}{R_0}} (\ln r - \ln R_0) = \frac{U_1}{\ln\frac{R_i}{R_0}} \ln\frac{r}{R_0}$$

Esta sería la distribución de velocidades entre los dos cilindros, para el caso considerado.

El caudal volumétrico que fluye entre los cilindros vendría dado por:

$$Q = \int_{R_i}^{R_0} V_x \cdot 2\pi r\, dr = \int_{R_i}^{R_0} \frac{U_1}{\ln\frac{R_i}{R_0}} \ln\frac{r}{R_0} 2\pi r\, dr$$

$$Q = \frac{2\pi U_1}{\ln\left(\frac{R_i}{R_0}\right)} \left[\int_{R_i}^{R_0} \ln r \cdot r\, dr - \int_{R_i}^{R_0} \ln R_0\, r\, dr \right]$$

$$Q = \frac{2\pi U_1}{\ln\left(\frac{R_i}{R_0}\right)} \left[\left(\frac{r^2}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \right)_{R_i}^{R_0} - \ln R_0 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_0} \right]$$

$$Q = \frac{2\pi U_1}{\ln\left(\frac{R_i}{R_0}\right)} \left[\frac{R_0^2}{2} \left(\ln R_0 - \frac{1}{2} \right) - \frac{R_i^2}{2} \left(\ln R_i - \frac{1}{2} \right) - \ln R_0 \frac{R_0^2}{2} + \ln R_0 \frac{R_i^2}{2} \right]$$

$$Q = \frac{2\pi U_1}{\ln\left(\frac{R_i}{R_0}\right)} \left[\frac{1}{4} \left(R_i^2 - R_0^2 \right) + \frac{R_i^2}{2} \ln\left(\frac{R_0}{R_i} \right) \right]$$

$$Q = \frac{1}{2}\pi R_0^2 U_1 \left[\frac{\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 - 1}{\ln\left(\frac{R_i}{R_0}\right)} - 2\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 \right]$$

La fuerza necesaria para desplazar axialmente el cilindro interior será:

Cilindro interior: $\tau_i = \mu \left.\frac{\partial V_x}{\partial r}\right|_{r=R_i} = \mu \frac{U_1}{\ln \frac{R_i}{R_0}} \frac{1}{R_i}$

$$F_i = \tau_i \, \text{Superficie} = \tau_i \, 2\pi R_i \, L = \mu \frac{U_1}{\ln \frac{R_i}{R_0}} 2\pi L$$

L = longitud unitaria del conducto

La potencia necesaria para desplazar el cilindro interior será:

$$N_i = U_i F_i = \tau_i \, S_i \, U_i = \tau_i \, 2\pi R_i \, L \, U_i = \mu \frac{U_i^2}{\ln \frac{R_i}{R_0}} 2\pi L$$

8.6.1 Considérese ahora el caso en que ambos cilindros son estacionarios pero existe una diferencia de presión entre los extremos de los cilindros

Las condiciones de contorno son:

$$r = R_0; \quad V_x = 0$$
$$r = R_i; \quad V_x = 0$$
$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$$

La ecuación genérica de distribución de velocidades era:

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{r^2}{4} \frac{1}{\mu} + C_0 \ln r + C_1$$

De la aplicación de las condiciones de contorno, se obtiene:

$$(1) \quad 0 = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R_0^2}{4\mu} + C_0 \ln R_0 + C_1$$

$$(2) \quad 0 = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R_i^2}{4\mu} + C_0 \ln R_i + C_1$$

(1) – (2)

$$0 = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}\left(R_0^2 - R_i^2\right) + C_0\left(\ln\frac{R_0}{R_i}\right)$$

$$C_0 = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{\left(R_0^2 - R_i^2\right)}{4\mu}\frac{1}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)}$$

Sustituyendo en (1):

$$C_1 = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{R_0^2}{4\mu} + \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{R_0^2 - R_i^2}{4\mu}\frac{\ln R_0}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)}$$

Sustituyendo las constantes en la ecuación genérica:

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{r^2}{4}\frac{1}{\mu} - \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}\left(R_0^2 - R_i^2\right)\frac{\ln r}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} - \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{R_0^2}{4\mu} + \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}\left(R_0^2 - R_i^2\right)\frac{\ln R_0}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)}$$

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}\left(r^2 - R_0^2\right) + \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}\left(R_0^2 - R_i^2\right)\frac{1}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)}(\ln R_0 - \ln r)$$

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}\left(r^2 - R_0^2\right) + \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}\left(R_0^2 - R_i^2\right)\frac{\ln\left(\frac{R_0}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)}$$

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}\left[\left(r^2 - R_0^2\right) + \left(R_0^2 - R_i^2\right)\frac{\ln\left(\frac{R_0}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)}\right]$$

La velocidad máxima entre los dos cilindros se obtiene al aplicar $\frac{dV_x}{dr} = 0$, de donde:

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}2r - \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}\frac{\left(R_0^2 - R_i^2\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)}\frac{1}{r} = 0$$

Sacando factor común:

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}\left[2r - \frac{\left(R_0^2 - R_i^2\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)}\frac{1}{r}\right] = 0$$

$$2r^2 - \frac{\left(R_0^2 - R_i^2\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} = 0$$

$r = \left(\frac{\left(R_0^2 - R_i^2\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \frac{1}{2} \right)^{1/2}$, radio para el cual se obtiene la velocidad máxima.

Sustituyendo en la ecuación de la velocidad:

$$V_{máx} = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} \left[\frac{\left(R_0^2 - R_i^2\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \frac{1}{2} - R_0^2 + \left(R_0^2 - R_i^2\right) \frac{\ln R_0 - \ln\left(\left[\frac{\left(R_0^2 - R_i^2\right)}{\ln\left(R_0 / R_i\right)} \frac{1}{2} \right]^{1/2} \right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \right]$$

El caudal volumétrico será:

$$Q = \int_{R_i}^{R_0} V_x \cdot 2\pi r \, dr = \int_{R_i}^{R_0} \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{2\pi}{4\mu} \left[\left(r^2 - R_0^2\right) + \left(R_0^2 - R_i^2\right) \frac{\ln\left(\frac{R_0}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \right] r \, dr =$$

$$Q = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{2\pi}{4\mu} \left\{ \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_i}^{R_0} - \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_0} R_0^2 + \frac{\left(R_0^2 - R_i^2\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \left\{ \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_0} \ln R_0 - \int_{R_i}^{R_0} \ln r \cdot r \, dr \right\} \right\}$$

$$Q = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{2\pi}{4\mu} \left\{ \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_i}^{R_0} - \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_0} R_0^2 + \frac{\left(R_0^2 - R_i^2\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \left\{ \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_0} \ln R_0 - \left[\frac{r^2}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \right]_{R_i}^{R_0} \right\} \right\}$$

De donde, recombinando, se llega al resultado:

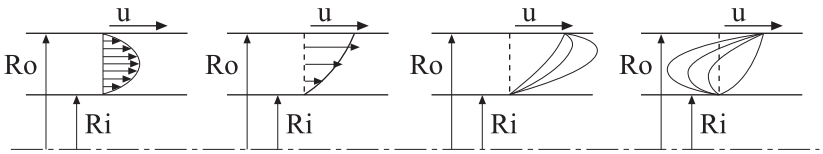
$$Q = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{\pi R_0^4}{8\mu} \left(1 - \left(\frac{R_i}{R_0} \right)^4 - \frac{\left[1 - \left(Ri / Ro \right)^2 \right]^2}{\ln\left(\frac{Ro}{Ri}\right)} \right)$$

La velocidad media del fluido será:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi\left(R_0^2 - R_i^2\right)} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{R_0^2}{8\mu}\left[1 + \left(\frac{Ri}{Ro}\right)^2 - \frac{1-(Ri/Ro)^2}{\ln\left(\frac{Ro}{Ri}\right)}\right]$$

En general, la distribución de velocidades para diferentes casos genéricos se puede representar como:

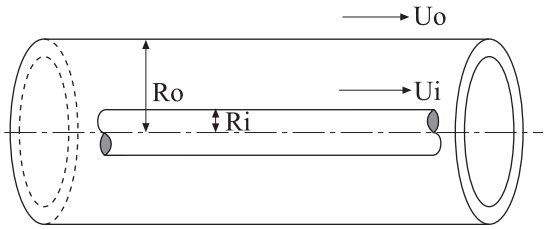
Fig. T 8.9 Distribución de velocidades posibles entre dos cilindros concéntricos



Flujo de Poiseulle en un conducto anular	Desplazamiento axial del cilindro exterior	Desplazamiento axial y gradiente de presiones negativo	Desplazamiento axial y gradiente de presiones positivo
$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$	$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} = 0$	$-\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$	$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$

8.6.2 Caso genérico de flujo entre dos cilindros concéntricos, en donde existe desplazamiento en dirección axial de ambos cilindros y gradiente de presiones entre extremos de los cilindros

Fig. 8.10 Caso genérico de flujo entre dos cilindros concéntricos



Las condiciones de contorno para este caso genérico son:

$$r = R_0; \quad V_x = U_0$$
$$r = R_i; \quad V_x = U_i$$
$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$$

La ecuación de partida, que se obtiene de integrar Navier-Stokes, es la misma que en los casos precedentes, de donde:

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{r^2}{4}\frac{1}{\mu} + C_0 \ln r + C_1$$

De la aplicación de las condiciones de contorno, se obtiene:

$$U_0 = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{R_0^2}{4}\frac{1}{\mu} + C_0 \ln R_0 + C_1$$

$$U_i = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{R_i^2}{4}\frac{1}{\mu} + C_0 \ln R_i + C_1$$

$$U_0 - U_i = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\left[R_0^2 - R_i^2\right] + C_0 \ln\frac{R_0}{R_i}$$

$$C_0 = \frac{\left(U_0 - U_i\right) - \dfrac{\Delta P^*}{\Delta x}\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\mu}\left[R_0^2 - R_i^2\right]}{\ln\dfrac{R_0}{R_i}}$$

$$C_1 = U_0 - \frac{\Delta p^*}{\Delta x}\frac{R_0^2}{4\mu} - C_0 \ln R_0$$

O bien, sumando las dos ecuaciones de partida:

$$U_0 + U_i = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4}\frac{1}{\mu}\left[R_0^2 + R_i^2\right] + C_0 \ln\left(R_0 R_1\right) + 2C_1$$

$$C_1 = \frac{\left(U_0 + U_i\right) - \dfrac{\Delta P^*}{\Delta x}\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\mu}\left[R_0^2 + R_i^2\right] - C_0 \ln\left(R_0 R_i\right)}{2}$$

Sustituyendo el valor de C_0, se obtiene:

$$C_1 = \frac{\left(U_0 + U_i\right)}{2} - \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{8}\frac{1}{\mu}\left[R_0^2 + R_i^2\right] - \frac{\left(U_0 - U_i\right) - \dfrac{\Delta P^*}{\Delta x}\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\mu}\left[R_0^2 - R_i^2\right]}{2\ln\dfrac{R_0}{R_i}}\ln\left(R_0 R_i\right)$$

Con lo que la distribución de velocidad genérica será:

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{r^2}{4}\frac{1}{\mu} + \frac{\left(U_0 - U_i\right) - \dfrac{\Delta P^*}{\Delta x}\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\mu}\left[R_0^2 - R_i^2\right]}{\ln\left(\dfrac{R_0}{R_i}\right)}\ln r + \frac{\left(U_0 + U_i\right)}{2}$$

$$- \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{\left(R_0^2 + R_i^2\right)}{8}\frac{1}{\mu} - \frac{\left(U_0 - U_i\right) - \dfrac{\Delta P^*}{\Delta x}\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\mu}\left[R_0^2 - R_i^2\right]}{2\ \ln\left(\dfrac{R_0}{R_i}\right)}\ln\left(R_0 R_i\right)$$

La fuerza necesaria para desplazar los cilindros interior y exterior será:

Cilindro interior: $\tau_i = \mu \left.\frac{\partial V_x}{\partial r}\right|_{r=Ri}$

$$F_i = \tau_i \, \text{Superficie} = \tau_i \, 2\pi R_i \, L$$

L = longitud unitaria del conducto

Cilindro exterior: $\tau_0 = \mu \left.\frac{\partial V_x}{\partial r}\right|_{r=R_0}$

$$F_0 = \tau_0 \, S = \tau_0 \, 2\pi R_0 \, L$$

La potencia necesaria para desplazar los cilindros interior y exterior será:

$$N_i = U_i F_i = \tau_i \, S_i \; U_i = \tau_i \, 2\pi R_i \, L \, U_i$$

$$N_0 = U_0 F_0 = \tau_0 \, S_0 \; U_0 = \tau_0 \, 2\pi R_0 \, L \, U_0$$

El radio para el cual la velocidad es máxima se determinará aplicando: $\frac{dV_x}{dr} = 0$

El caudal circulante entre los dos cilindros se determinaría del mismo modo que para los casos precedentes:

$$Q = \int_{R_i}^{R_0} V_x \, 2\pi r \, dr$$

8.7 Flujo entre cilindros concéntricos giratorios

Sean dos cilindros concéntricos que giran con velocidades angulares diferentes ω_i y ω_0 .

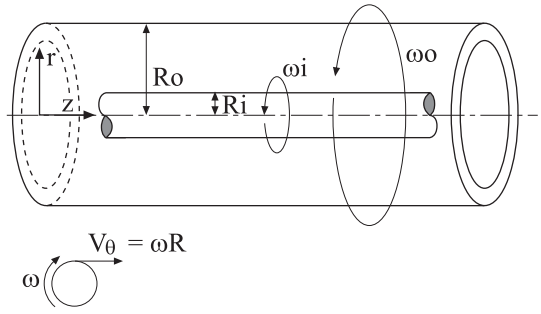


Fig. T 8.11 Flujo entre cilindros concéntricos giratorios

Las hipótesis de trabajo son las mismas que en los casos precedentes, excepto por las velocidades que ahora son relevantes. Así, se tiene:

-ρ = cte; fluido incompresible

- $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$; régimen permanente

- $V_\theta = f(r)$ flujo unidireccional. (La velocidad del fluido depende únicamente del radio)

- $v_r = v_x = 0$; flujo unidireccional bidimensional

Se consideran los cilindros infinitamente largos, régimen permanente; la velocidad varía únicamente en dirección radial, y no hay velocidad en dirección axial ni angular.

Las diferentes condiciones de contorno que se pueden establecer para este tipo de flujo son:

Condición de contorno 1

$$\begin{array}{llll} r = R_i & V_{\theta i} = \omega_i R_i & \frac{\Delta p}{\Delta x} = 0 ; V_x = 0 ; V_r = 0 \\ r = R_0 & V_{\theta 0} = \omega_0 R_0 & \end{array}$$

Condición de contorno 2

$$\begin{array}{llll} r = R_i & V_{\theta i} = 0 & \frac{\Delta p}{\Delta x} = 0 ; V_x = 0 ; V_r = 0 \\ r = R_0 & V_{\theta 0} = \omega_0 R_0 & \end{array}$$

Condición de contorno 3

$$\begin{array}{llll} r = R_i & V_{\theta i} = \omega_i R_i & \frac{\Delta p}{\Delta x} = 0 ; V_x = 0 ; V_r = 0 \\ r = R_0 & V_{\theta 0} = 0 & \end{array}$$

Obsérvese que, para el caso objeto de estudio, no puede existir gradiente de presiones a lo largo del eje, dado que esto induciría a un flujo bidimensional y complicaría en demasía la resolución matemática.

Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas se expresan del modo siguiente:

Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\, r\, V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\, V_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\, V_x) = 0$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas se expresan:

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+V_x\frac{\partial V_r}{\partial x}-\frac{V_\theta^2}{r}\right)=\rho\vec{g}_r-\frac{\partial P}{\partial r}+$$
$$\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+V_x\frac{\partial V_\theta}{\partial x}+\frac{V_r V_\theta}{r}\right)=\rho\vec{g}_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+$$
$$\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial x^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_x}{\partial r}+V_\theta\frac{\partial V_x}{r\partial \theta}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=\rho\vec{g}_x-\frac{\partial P}{\partial x}+$$
$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_x}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_x}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\right]$$

Para el caso en estudio, estas ecuaciones dan lugar a:

Ecuación de continuidad: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta)=0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta)=0 \quad ; \quad \rho\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}=0 \quad ; \quad \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}=0$

Ecuación Navier-Stokes:

En dirección radial:

$$-\rho\frac{V_\theta^2}{r}=\rho g_r-\frac{\partial P}{\partial r}=-\rho g\frac{\partial h}{\partial r}-\frac{\partial P}{\partial r}=-\frac{\partial P^*}{\partial r}$$

$$\rho\frac{V_\theta^2}{r}=\frac{\partial P^*}{\partial r}$$

En dirección angular (se supondrá que el gradiente de presión reducida es inexistente en dirección angular):

$$0=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)\right) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}+\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+V_\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}$$

En dirección axial, se llega a: $0=\frac{\partial P^*}{\partial r}$

De la integración de la ecuación de continuidad resultante, se obtiene:

$\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}=0$; $V_\theta=\text{constante}$; V_θ no depende de θ

De la ecuación de Navier-Stokes en dirección radial: $\int dP^*=\int\rho\frac{V_\theta^2}{r}dr$

Se observa que, para determinar la presión reducida, es necesario conocer cómo varía V_θ con el radio.

V_θ Se determinará integrando la ecuación de Navier-Stokes en dirección angular:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rV_\theta) = C_1$$

$$\frac{d}{dr}(rV_\theta) = C_1 r$$

$$rV_\theta = C_1\frac{r^2}{2} + C_2$$

$$V_\theta = \frac{C_1}{2}r + \frac{C_2}{r}$$

Véase que, partiendo de esta ecuación, cualquiera de las condiciones de contorno definidas en este apartado puede ser aplicada. Para la resolución, se va a considerar el caso en que los dos cilindros estén girando, siendo las condiciones de contorno:

$$V_\theta = R_i\omega_i \quad r = R_i$$
$$V_\theta = R_0\omega_0 \quad r = R_0$$

Aplicando estas condiciones de contorno se obtiene:

$$R_i\omega_i = \frac{C_1}{2}R_i + \frac{C_2}{R_i}$$

$$R_0\omega_0 = \frac{C_1}{2}R_0 + \frac{C_2}{R_0}$$

de donde el valor de las dos constantes serán:

$$C_2 = R_i^2\omega_i - \frac{C_1}{2}R_i^2$$

$$R_0\omega_0 = \frac{C_1}{2}R_0 + \frac{R_i^2\omega_i}{R_0} - \frac{C_1}{2}\frac{R_i^2}{R_0}$$

$$R_0\omega_0 - \frac{R_i^2\omega_i}{R_0} = \frac{C_1}{2}\left(R_0 - \frac{R_i^2}{R_0}\right)$$

$$C_1 = \left(R_0\omega_0 - \frac{R_i^2\omega_i}{R_0}\right)\frac{2}{R_0 - \frac{R_i^2}{R_0}} = \frac{\left(R_0^2\omega_0 - R_i^2\omega_i\right)2}{R_0^2 - R_i^2}$$

$$C_2 = R_i^2\omega_i - R_i^2\frac{\left(R_0^2\omega_0 - R_i^2\omega_i\right)}{R_0^2 - R_i^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de la velocidad:

$$V_\theta = \frac{\left(R_0^2\omega_0 - R_i^2\omega_i\right)}{R_0^2 - R_i^2}\cdot r + \frac{R_i^2\omega_i}{r} - \frac{R_i^2}{r}\frac{R_0^2\omega_0 - R_i^2\omega_i}{R_0^2 - R_i^2}$$

$$V_\theta = \frac{R_0^2\omega_0 - R_i^2\omega_i}{R_0^2 - R_i^2}\left(r - \frac{R_i^2}{r}\right) + \frac{R_i^2\omega_i}{r}$$

la ecuación que caracteriza la distribución de velocidades del fluido atrapado entre los dos cilindros.

Ahora, se puede hallar la presión reducida en función del radio simplemente sustituyendo la ecuación que da la distribución de velocidades en el término de Navier-Stokes en dirección radial:

$$\int_{P_i^*}^{P_r^*} dP^* = \int_{R_i}^{r} \rho\frac{V_\theta^2}{r}dr = \int_{R_i}^{r} \frac{\rho}{r}\left[\frac{R_0^2\omega_0 - R_i^2\omega_i}{R_0^2 - R_i^2}\left(r - \frac{R_i^2}{r}\right) + \frac{R_i^2\omega_i}{r}\right]^2 dr$$

Véase que, para realizar la integración, es necesario conocer la presión reducida en un radio dado. Esto ha de entenderse como una condición de contorno adicional.

Otros casos particulares de este tipo de flujo pueden ser:

a) $r = R_i \Rightarrow \omega_i = 0; \qquad r = R_0 \Rightarrow \omega_0 = \omega$

b) $r = R_i \Rightarrow \omega_i = \omega; \qquad r = R_0 \Rightarrow \omega_0 = 0$

c) $r = R_i \Rightarrow \omega_i = -\frac{\omega}{2}; \qquad r = R_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega}{2}$

Caso a) $r = R_i \Rightarrow \omega_i = 0; \qquad r = R_0 \Rightarrow \omega_0 = \omega$

De la ecuación genérica de la distribución de velocidades, se tiene:

$$V_\theta = \frac{R_0^2\omega_0}{R_0^2 - R_i^2}\left(r - \frac{R_i^2}{r}\right) = \frac{\omega_0\left(r - \frac{R_i^2}{r}\right)}{1 - \left(\frac{R_i^2}{R_0}\right)}$$

La distribución de presión reducida se obtendrá:

$$\rho\frac{V_\theta^2}{r} = \frac{dP^*}{dr} = \frac{\rho}{r}\left(\frac{\omega_0^2\left(r - \frac{R_i^2}{r}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\right)$$

$$\int dP^* = \frac{\rho\omega_0^2}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\int\frac{1}{r}\left(r-\frac{R_i^2}{r}\right)^2 dr = \frac{\rho\omega_0^2}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\int\left(r-\frac{2R_i^2}{r}+\frac{R_i^4}{r^3}\right)dr =$$

$$P^* = \frac{\rho\omega_0^2}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\left[\frac{r^2}{2}-2R_i^2\ln r+R_i^4\frac{r^{-2}}{-2}\right]+C$$

La condición de contorno necesaria para determinar esta nueva constante de integración es,

para $r = R_i \Rightarrow P^* = P_i$:

$$P_i = \frac{\rho\omega_0^2}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\left[\frac{R_i^2}{2}-2R_i^2\ln R_i-R_i^4\frac{R_i^{-2}}{2}\right]+C$$

$$C = P_i - \frac{\rho\omega_0^2}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\left[\frac{R_i^2}{2}-2R_i^2\ln R_i-\frac{R_i^2}{2}\right]$$

$$P^* = P_i + \frac{\rho\omega_0^2}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\left[\frac{1}{2}(r^2-R_i^2)-2R_i^2\ln\frac{r}{R_i}+\frac{R_i^4}{2}\left(\frac{1}{R_i^2}-\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

Para determinar la potencia necesaria para hacer girar uno de estos cilindros, por ejemplo el cilindro interior, será necesario primero determinar el esfuerzo cortante en la superficie del cilindro.

Los esfuerzos cortantes para este tipo de flujo vienen dados por la ecuación:

$$\tau_{r\theta} = 2\mu\,\phi_{r\theta} = 2\mu\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)\right)$$

siendo este uno de los términos del tensor de deformación en coordenadas cilíndricas.

Para el caso en estudio, la ecuación de los esfuerzos cortantes quedará resumida en:

$$\tau_{r\theta} = r\mu\frac{d}{dr}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)\Bigg|_{r=R_i}$$

Dividiendo la ecuación de la distribución de velocidades con respecto a r y luego derivándola, queda:

$$\tau_{r\theta} = r\,\mu \left[\frac{\omega_0}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} R_i^2 \cdot 2\, r^{-3} \right]_{r=R_i}$$

Para el cilindro interior, donde $r = R_i$, se tiene:

$$\tau_{r\theta}\big|_{r=R_i} = \frac{\mu\,\omega_0\, 2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}$$

El momento con respecto al eje central causado por este esfuerzo cortante es (momento por unidad de longitud del cojinete):

$$M_{Ri} = \tau_{r\theta}\big|_{r=R_i} \cdot 2\pi R_i \cdot 1 \cdot R_i = \frac{4\pi\mu\,\omega_0 R_i^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}$$

El momento debido al cilindro exterior sería:

$$M_{R0} = \tau_{r\theta}\big|_{r=R_o} \cdot 2\pi R_0 \cdot 1 \cdot R_0 = \frac{\mu\,\omega_0\, 2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}\left(\frac{R_i^2}{R_0^2}\right) \cdot 2\pi R_0^2 = \frac{4\pi\mu\,\omega_0 R_i^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}$$

Obsérvese que el momento causado por ambos cilindros es idéntico.

La potencia necesaria para hacer girar dichos cilindros será:

$$N_{Ri} = M_{Ri}\,\omega_i$$

$$N_{R0} = M_{R0}\,\omega_0$$

Caso b) $r = R_i \Rightarrow \omega_i = \omega; \qquad r = R_0 \Rightarrow \omega_0 = 0$

Se parte, de nuevo, de la ecuación genérica de distribución de velocidades para llegar a la ecuación:

$$V_\theta = \frac{R_i^2\omega_i}{R_0^2 - R_i^2}\left(\frac{R_i^2}{r} - r\right) + \frac{R_i^2\omega_i}{r}$$

Esta ecuación se puede dar como:

$$V_\theta = \frac{R_i^2\omega_i}{R_0^2 - R_i^2}\left(\frac{R_i^2}{r} - r + \frac{1}{r}\left(R_0^2 - R_i^2\right)\right)$$

$$V_\theta = \frac{R_i^2\omega_i}{R_0^2 - R_i^2}\left(\frac{1}{r}\left(R_i^2 + \left(R_0^2 - R_i^2\right)\right) - r\right)$$

$$V_\theta = \frac{R_i^2 \omega_i}{R_0^2 - R_i^2}\left(\frac{R_0^2}{r} - r\right)$$

$$V_\theta = \frac{\omega_i \dfrac{R_i^2}{R_0^2}\left(\dfrac{R_0^2}{r} - r\right)}{1 - \dfrac{R_i^2}{R_0^2}} = \frac{-\omega_i \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^2 \left(r - \dfrac{R_0^2}{r}\right)}{1 - \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^2}$$

La distribución de presiones vendrá dada por:

$$\rho \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{dp^*}{dr}$$

$$\frac{dP^*}{dr} = \frac{\rho}{r} \frac{-\omega_i^2 \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^4}{\left[1 - \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2} \left(r - \frac{R_0^2}{r}\right)^2$$

$$\frac{dP^*}{dr} = \frac{-\rho\, \omega_i^2 \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^4}{\left[1 - \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2} \frac{1}{r}\left(r^2 - 2R_0^2 + \frac{R_0^4}{r^2}\right)$$

$$\int dP^* = \frac{-\rho\, \omega_i^2 \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^4}{\left[1 - \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2} \int \left(r - 2\frac{R_0^2}{r} + \frac{R_0^4}{r^3}\right) dr$$

$$P^* = \frac{-\rho \omega_i^2 \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^4}{\left[1 - \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2} \left(\frac{r^2}{2} - 2R_0^2 \ln r + \frac{R_0^4}{-2} r^{-2}\right) + C$$

Condición de contorno adicional: $r = R_i \Rightarrow P = P_i$

$$C = P_i + \frac{\rho \omega_i^2 \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^4}{\left[1 - \left(\dfrac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2} \left(\frac{R_i^2}{2} - 2R_0^2 \ln R_i - \frac{R_0^4}{2} \frac{1}{R_i^2}\right)$$

con lo que:

$$P^* = P_i + \frac{\rho\,\omega_i^2\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^4}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\left(\frac{R_i^2}{2}-\frac{r^2}{2}+2R_0^2\ln\frac{r}{R_i}-\frac{R_0^4}{2}\left(\frac{1}{R_i^2}-\frac{1}{r^2}\right)\right)$$

El esfuerzo cortante en la superficie exterior será, para $r = R_0$:

$$\tau_{r\theta} = 2\mu\,\phi_{r\theta} = 2\mu\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)\right)\right)$$

$$\tau_{r\theta} = r\mu\frac{d}{dr}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) = r\,\mu\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{-\omega_i\frac{R_i^2}{R_0^2}\left(r-\frac{R_0^2}{r}\right)}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}\right]_{r=R_0}$$

$$\tau_{r\theta} = r\mu\frac{d}{dr}\left[\frac{-\omega_i\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}\left(1-\frac{R_0^2}{r^2}\right)\right]_{r=R_0}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-\omega_i\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}R_0^2 r\mu 2r^{-3}\Bigg|_{r=R_0}$$

$$\tau_{r\theta}\big|_{r=R_0} = \frac{-2\mu\,\omega_i\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}$$

El momento por unidad de longitud creado en la superficie del cilindro exterior es:

$$|M| = |2\pi R_0\cdot R_0\cdot\tau_{r\theta}| = \frac{4\pi R_0^2\,\mu\,\omega_i\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} = \frac{4\pi\mu\,\omega_i R_i^2 R_0^2}{R_0^2-R_i^2}$$

Caso c) $r = R_i \Rightarrow \omega_i = -\frac{\omega}{2}; \qquad r = R_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega}{2}$

La ecuación genérica de la distribución de velocidades era:

$$V_\theta = \frac{R_0^2\,\omega_0 - R_i^2\,\omega_i}{R_0^2 - R_i^2}\left(r - \frac{R_i^2}{r}\right) + \frac{R_i^2\,\omega_i}{r}$$

Sustituyendo los valores de ω_0 y ω_i por su equivalente, se obtiene:

$$V_\theta = \frac{R_0^2\frac{\omega}{2} + R_i^2\frac{\omega}{2}}{R_0^2 - R_i^2}\left(r - \frac{R_i^2}{r}\right) - \frac{R_i^2\omega}{r\,2}$$

$$V_\theta = \frac{\omega}{2}\frac{\left(R_0^2 + R_i^2\right)}{R_0^2 - R_i^2}\left(r - \frac{R_i^2}{r}\right) - \frac{R_i^2\omega}{2r}$$

$$V_\theta = \frac{\omega}{2}\left[\frac{1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}\left(r - \frac{R_i^2}{r}\right) - \frac{R_i^2}{r}\right]$$

$$V_\theta = \frac{\omega}{2}\frac{R_i^2}{r}\left[-1 - \frac{1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} + \frac{r^2}{R_i^2}\frac{1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}\right]$$

$$V_\theta = \frac{\omega}{2}\frac{R_i^2}{r}\left[\frac{-\left(1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right) - \left(1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} + \frac{r^2}{R_i^2}\frac{1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}\right]$$

$$V_\theta = \frac{\omega}{2}\frac{R_i^2}{r}\left[\frac{-2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} + \frac{r^2}{R_i^2}\frac{1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}\right]$$

$$V_\theta = \frac{\omega R_i^2}{2r}\left[\frac{-2+\frac{r^2}{R_i^2}\left(1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}\right]$$

$$V_\theta = \frac{\omega R_i^2}{2r}\left[\frac{\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\frac{r^2}{R_i^2}-2+\frac{r^2}{R_i^2}}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}\right]$$

$$V_\theta = \frac{\omega}{2r}\left[\frac{\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 r^2-2R_1^2+r^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}\right]$$

$$V_\theta = \frac{\omega}{2}\left[\frac{r\left[1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]-2\frac{R_i^2}{r}}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}\right]$$

$$V_\theta = \frac{\omega\left[\frac{r}{2}\left[\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2+1\right]-\frac{R_i^2}{r}\right]}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}$$

La distribución de presión reducida en función del radio será:

$$\frac{dP^*}{dr} = \rho\frac{V_\theta^2}{r} = \frac{\rho}{r}\frac{\omega^2}{4}\frac{\left(r\left[1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]-2\frac{R_i^2}{r}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}$$

$$\frac{dP^*}{dr}=\frac{\rho}{r}\frac{\omega^2}{4}\frac{r^2\left(1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)^2-2r\left[1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]2\frac{R_i^2}{r}+4\left(\frac{R_i^2}{r}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}$$

$$\int dP^*=\frac{\rho\frac{\omega^2}{4}}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\int\left[r\left(1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)^2-4R_i^2\left[1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]\frac{1}{r}+4\frac{R_i^4}{r^3}\right]dr$$

$$P^*=\frac{\rho\frac{\omega^2}{4}}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\left[\left(1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)^2\frac{r^2}{2}-4R_i^2\left[1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]\ln r-2\frac{R_i^4}{r^2}\right]+C$$

De la aplicación de la condición de contorno $r=R_i \quad P=P_i$, se obtiene:

$$C=P_i-\frac{\rho\frac{\omega^2}{4}}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\left[\left(1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)^2\frac{R_i^2}{2}-4R_i^2\left[1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]\ln R_i-2R_i^2\right]$$

de donde:

$$P=P_i+\frac{\rho\frac{\omega^2}{4}}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}\left[\begin{array}{l}\left(1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)^2\left(\frac{r^2}{2}-\frac{R_i^2}{2}\right)-\\4R_i^2\left[1+\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]\ln\left(\frac{r}{R_i}\right)-\left[2\left(\frac{R_i^2}{r}\right)^2-2R_i^2\right]\end{array}\right]$$

El esfuerzo cortante sería:

$$\tau_{r\theta}=2\mu\phi_{r\theta}=\mu\, r\frac{d}{dr}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)\Big|_{r=R_i}=\frac{\mu\omega R_i^2}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}$$

El momento por unidad de longitud para el cilindro de radio R_i es:

$$|M|=2\pi R_i\cdot R_i\tau_{r\theta}\big|_{r=R_i}=\frac{2\pi\mu\omega R_i^4}{1-\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}=\frac{2\pi\mu\omega R_i^4R_0^2}{R_0^2-R_i^2}$$

La potencia necesaria para hacer girar dicho cilindro es el producto del par por la velocidad de giro.

8.8 Flujos con aceleración despreciable

8.8.1 Introducción

Existen dos familias de flujos que obedecen a estos requerimientos:

Flujos en espacios reducidos (*narrow gaps*)

Flujos con deslizamiento (*creeping flows*), flujos alrededor de cuerpos, esferas, cilindros, da lugar a la ley de Stokes.

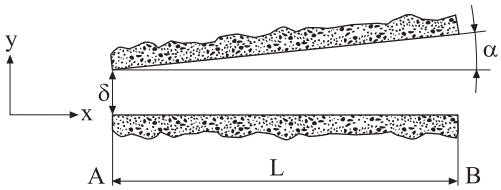
Este apartado se centra en el estudio del primero de los grupos.

Hipótesis de trabajo:

- $-\rho = cte$; fluido incompresible
- $-\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$; régimen permanente
- Los términos de aceleración local y convectiva se consideran despreciables frente a los términos viscosos.
- A priori, se considerará flujo bidireccional, bidimensional, entre dos placas planas.

Sea el espacio entre placas de la figura; la placa superior puede desplazarse en dirección horizontal a una velocidad constante U.

Fig. T 8.12 Esquema del patín de Michel



Con respecto a las relaciones dimensionales, se considera:

$$\frac{\delta}{L} << 1; \quad \alpha < \frac{\delta}{L}; \quad tg\alpha \approx \alpha = \frac{\delta'}{L}; \quad \frac{\delta'}{L} < \frac{\delta}{L};$$

Sea $\bar{u}$ la velocidad media en dirección x, $\bar{u}$ se puede definir de forma genérica:

$$\bar{u} = \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} u dy$$

Aplicando la ley de conservación de la masa entre los dos extremos del patín, se tiene:

$$\bar{u}_A \delta = \bar{u}_B (\delta + \delta') = \bar{u}_B (\delta + L\alpha)$$

Considerando muy pequeño el ángulo de inclinación de la placa superior, se deduce:

$L\tan\alpha \cong L\alpha$, con lo que

$$0 = \bar{u}_B (\delta + L\alpha) - \bar{u}_A \delta$$
$$0 = \delta(\bar{u}_B - \bar{u}_A) + \bar{u}_B L\alpha$$

$$\bar{u}_B - \bar{u}_A = -\bar{u}_B \frac{L\alpha}{\delta}$$

Se puede asimismo establecer:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \cong \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right| \cong \frac{\bar{u}_B - \bar{u}_A}{L} = -\bar{u}_B \frac{\alpha}{\delta} = \left|\bar{u}_B \frac{\alpha}{\delta}\right|, \quad \text{considerando } \bar{u}_B \cong \bar{u}$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \cong \left|\bar{u}\frac{\alpha}{\delta}\right|$$

La ecuación de continuidad, para flujo bidimensional, régimen permanente y densidad constante, se enuncia:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x}$ ha sido dado en valor absoluto, el valor absoluto de la velocidad del fluido en dirección del eje y, y con respecto a dicha dirección $\frac{\partial v}{\partial y}$ será:

$$\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| = \left|\frac{\bar{u}\alpha}{\delta}\right|$$

Las condiciones de contorno para (V) entre los dos platos son: para y = 0, V =0; para $y = \delta$, V =0.

Se puede decir, que el valor máximo de la velocidad $|V|$ estará localizado, aproximadamente, en el centro de las dos placas, con lo que se estima:

$$\left|V_{y\,máx}\right| \approx \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|\frac{\delta}{2} \approx \left|\frac{\bar{u}\alpha}{2}\right| << \bar{u}$$

con lo cual se puede afirmar que la componente de la velocidad en dirección y puede despreciarse frente a la componente de la velocidad en dirección x.

La distribución de velocidades del fluido entre dos placas casi paralelas, siendo la placa superior móvil, se define por el flujo de Couette:

$$u = \frac{U}{\delta} y$$

con lo cual:

$$\frac{u}{y} = \frac{U}{\delta} \text{ de donde: } \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \cong \frac{\Delta u}{\Delta y} \cong \frac{U-0}{\delta} \cong \frac{\bar{u}}{\delta};$$

$$\text{así, } \frac{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|}{\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|} \cong \frac{\left|\frac{\bar{u}\alpha}{\delta}\right|}{\frac{\bar{u}}{\delta}} = \alpha < \frac{\delta}{L} << 1$$

$$\alpha \cong tg\alpha = \frac{\delta_B - \delta_A}{L}$$

La variación de la velocidad en dirección x es de un orden muy inferior a la variación de la velocidad en dirección y. Así, se entenderá que la componente de la velocidad en dirección x únicamente varía en dirección y.

8.8.2 Teoría de la lubricación de Reynolds. Flujo unidireccional.

8.8.2.1 Cojinetes hidrostáticos planos, patín de Michel.

Esta teoría estudia las fuerzas que aparecen en cojinetes y otras superficies deslizantes lubricadas.

Sea el flujo bidimensional entre las dos placas que se muestran en la figura T 8.13.

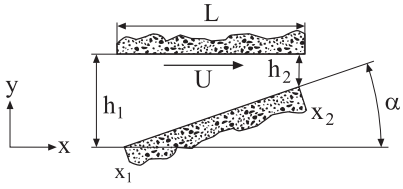


Fig. T 8.13 Esquema del patín de Michel

La cantidad de movimiento en dirección x estará definida por la ecuación de Navier-Stokes para flujo bidimensional, aunque se considerará que $\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} \cong \alpha << 1$; y que

$v << u$;

La ecuación de Navier-Stokes para flujo bidimensional en coordenadas cartesianas se enuncia:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\vec{g}_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho\vec{g}_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

La ecuación de continuidad sería:

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$, puesto que, para el caso que se considera, se establece v << u. La ecuación de continuidad se aproxima a $\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

Recordando que $\frac{\partial u}{\partial y} >> \frac{\partial u}{\partial x}$, los dos términos de Navier-Stokes se reducen a:

$$0=-\frac{dp^*}{dx}+\mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

$$0=-\frac{dp^*}{dy}$$

Obsérvese que se ha utilizado el concepto de presión reducida.

Considerando que $\frac{dp^*}{dx}\cong\frac{\Delta p^*}{\Delta x}$, se concluye:

$$\frac{\Delta p^*}{\Delta x}=\mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

cuya integración da lugar a:

$$u=\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{2\mu}y^2+c_1\,y+c_2$$

Aplicando las condiciones de contorno; para y = 0 se tiene que u = 0, y para y = d se tiene que u = U,

De donde se obtiene:

$$C_2=0$$

$$C_1=\frac{U}{d}-\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p^*}{\Delta x}\frac{d}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación general, se llega a:

$$u=U\frac{y}{d}+\frac{\Delta p^*}{\Delta x}\frac{y}{2\mu}[y-d]$$

ecuación que da la distribución de velocidades entre dos placas planas cuando una de ellas se desplaza a velocidad U y existe gradiente de presiones reducidas entre sus extremos.

Obsérvese que esta ecuación es exactamente la misma que la que se obtuvo para el flujo de Couette-Poiseuille entre dos placas planas. Para el caso objeto de estudio, no obstante, la distancia d no es constante y se va a denominar h(x), con lo cual:

$$u = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{2\mu}y(y-h(x)) + U\frac{y}{h(x)}$$

Para un patín con una profundidad unitaria, el flujo másico viene dado por:

$$\dot{m} = \int_0^{h(x)} \rho\, u\, dy = \int_0^{h(x)} \rho\left(\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{2\mu}\left(y^2 - yh_{(x)}\right) + U\frac{y}{h_{(x)}}\right)dy$$

$$\dot{m} = \rho\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{y^2}{2}h_{(x)}\right]_0^{h(x)} + \frac{\rho U}{h_{(x)}}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{h(x)}$$

$$\dot{m} = (-)\rho\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{2\mu}\frac{1}{6}h_{(x)}^3 + \rho U\frac{h_{(x)}}{2}$$

$$\dot{m} = \rho U\frac{h_{(x)}}{2} - \rho\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{12\mu}h_{(x)}^3$$

Definiendo ahora un caudal másico $\dot{m}$ igual al hallado, el cual venga dado en función de una distribución de velocidades entre dos placas paralelas, características del flujo de Couette, y siendo la distancia entre ambas placas h_0, distancia desconocida pero, que permite cumplir la condición de igual flujo másico. Dicho caudal másico se expresaría:

$$\dot{m} = \int_0^{h_0} \rho\, U\frac{y}{h_{(x)}}dy = \rho\,\frac{U}{h_{(x)}}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{h_0} = \rho\, U\frac{h_0}{2}$$

Igualando los dos flujos másicos, se obtiene:

$$\rho\frac{U}{2}h_0 = \rho\frac{U}{2}h_{(x)} - \rho\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{12\mu}h_{(x)}^3$$

$$\rho\frac{U}{2}\left(h_0 - h_{(x)}\right) = -\rho\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{12\mu}h_{(x)}^3$$

Despejando la diferencia de presiones reducida y denominando $h_{(x)} = h$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \cong \frac{dP^*}{dx} = 6\mu\, U\frac{(h-h_0)}{h^3}$$

Recordando que el ángulo de inclinación es $\alpha \cong \frac{dh}{dx}$

se puede establecer:

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{dP^*}{dh}\frac{dh}{dx} = \alpha\frac{dP^*}{dh}$$
$$\frac{dP^*}{dh} = \frac{1}{\alpha}\frac{dP^*}{dx}$$

de donde:

$$\frac{dP^*}{dh} = 6\mu\frac{U}{\alpha}\frac{(h-h_0)}{h^3}$$
$$P^* = \int 6\mu\frac{U}{\alpha}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h_0}{h^3}\right)dh = 6\mu\frac{U}{\alpha}\left(-\frac{1}{h} + \frac{h_0}{2}\frac{1}{h^2}\right) + C_1$$

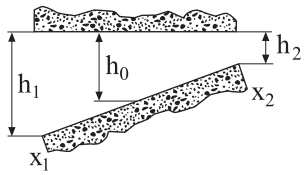
Como condiciones de contorno, para determinar la constante C_1 y la altura h_0, se definen en ambos extremos del patín:

$$\text{Para } h = h_1,\ P^* = P_0 = P_{atm.}$$

$$\text{Para } h = h_2,\ P^* = P_0 = P_{atm}$$

De donde se obtiene:

Fig. T 8.14



$$(1)\quad P_0 = 6\mu\frac{U}{\alpha}\left(-\frac{1}{h_1} + \frac{h_0}{2}\frac{1}{h_1^2}\right) + C_1$$

$$(1)\quad P_0 = 6\mu\frac{U}{\alpha}\left(-\frac{1}{h_2} + \frac{h_0}{2}\frac{1}{h_2^2}\right) + C_1$$

$$(1-2)\quad 0 = 6\mu\frac{U}{\alpha}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} + \frac{h_0}{2}\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right)\right)$$

$$\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} = \frac{h_0}{2}\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right)$$

$$\frac{h_0}{2} = \frac{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}{\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}} = \frac{\frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2}}{\frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1^2 h_2^2}} = \frac{(h_2 - h_1)h_1 h_2}{h_2^2 - h_1^2}$$

$$\frac{h_0}{2} = \frac{(h_2 - h_1)h_1 h_2}{(h_2 + h_1)(h_2 - h_1)} = \frac{h_1 h_2}{h_2 + h_1}$$

Ecuación que da el valor de h_0 en función de las alturas conocidas.

Por otro lado, el valor de la constante C_1 se puede dar como:

$$C_1 = P_0 - 6\mu\frac{U}{\alpha}\left(-\frac{1}{h_1}+\frac{h_0}{2}\frac{1}{h_1^2}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación inicial:

$$P^* - P_0 = 6\mu\frac{U}{\alpha}\left(-\frac{1}{h}+\frac{1}{h_1}+\frac{h_0}{2}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)\right)$$

Sustituyendo el valor de h_0 por su equivalente:

$$P^* - P_0 = 6\mu\frac{U}{\alpha}\left(\frac{h-h_1}{hh_1}+\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}\left(\frac{h_1^2-h^2}{h^2h_1^2}\right)\right)$$

Esta ecuación da la presión en un punto genérico situado entre dos planos ligeramente inclinados. Se puede expresar en forma más compacta como:

$$P^* - P_0 = 6\mu\frac{U}{\alpha}\frac{(h-h_1)(h-h_2)}{(h_1+h_2)h^2}$$

Recordando la definición del flujo másico, este se puede dar como.

$$\dot{m} = \frac{1}{2}\rho u h_0 = \rho u\frac{h_1h_2}{h_2+h_1};\quad h_1 > h_0 > h_2$$

La fuerza de sustentación por unidad de profundidad se puede expresar:

$$L = \int_{x_1}^{x_2}(P^* - P_0)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{h_1}^{h_2}(P^* - P_0)\,dh \text{ ; recuérdese que } \alpha = \frac{dh}{dx}$$

$$L = 6\mu\frac{U}{\alpha^2}\int_{h_1}^{h_2}\left[\frac{(h-h_1)(h-h_2)}{(h_1+h_2)h^2}\right]dh$$

Una vez realizada la integración, se obtiene:

$$L = 6\mu\frac{U}{\alpha^2}\left[\frac{2(h_2-h_1)}{(h_1+h_2)}-\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)\right]$$

Esta ecuación se puede parametrizar, si se utilizan como parámetros: $k = \frac{h_1}{h_2} > 1$; $\ell = x_2 - x_1 = \frac{1}{\alpha}(h_2 - h_1)$ se obtiene:

$$L = \frac{6\,\mu\,U\,\ell^2}{(k-1)^2\,h_2^2}\left[\ln k - \frac{2(k-1)}{k+1}\right]$$

Cabe recordar que $(K-1)^2 = (1-K)^2$.

La fuerza de arrastre por unidad de profundidad viene dada por:

$$D = \int_{x_1}^{x_2} \tau dx = \int_{x_1}^{x_2} \mu \left(\frac{du}{dy}\right)_{y=h} dx = \int_{x_1}^{x_2} \mu \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dP^*}{dx}\right) y(y-h) + U\frac{y}{h}\right)_{y=h} dx$$

Recordando que $\alpha = \frac{dh}{dx}$

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{dP^*}{dh}\frac{dh}{dx} = \alpha \frac{dP^*}{dh}$$

$$D = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\mu}{\alpha}\left[\frac{1}{2\mu}\frac{dP^*}{dx}(2y-h) + \frac{U}{h}\right]_{y=h} dh = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\mu}{\alpha}\left(\frac{1}{2\mu}\frac{dP^*}{dh}\alpha h + \frac{U}{h}\right) dh$$

$$D = \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{dP^*}{dh}\frac{h}{2} + \frac{\mu}{\alpha}\frac{U}{h}\right) dh$$

y que:

$$\frac{dP^*}{dh} = 6\mu \frac{U}{\alpha}\left(\frac{h-h_0}{h^3}\right)$$

queda:

$$D = \int_{h_1}^{h_2} \left(h\frac{6\mu}{2}\frac{U}{\alpha}\frac{h-h_0}{h^3} + \frac{\mu}{\alpha}\frac{U}{h}\right) dh =$$

$$D = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\mu U}{\alpha}\left(3\frac{h-h_0}{h^2} + \frac{1}{h}\right) dh = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\mu U}{\alpha}\left(3\left(\frac{1}{h} - \frac{h_0}{h^2}\right) + \frac{1}{h}\right) dh$$

$$D = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\mu U}{\alpha}\left(\frac{4}{h} - \frac{3h_0}{h^2}\right) dh = \frac{\mu U}{\alpha}\left[4\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 3h_0\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right)\right]$$

Parametrizando esta ecuación en función de:

$$k = \frac{h_1}{h_2} > 1 \quad ; \quad \ell = x_2 - x_1 = \frac{1}{\alpha}(h_2 - h_1)$$

y recordando que

$$\frac{h_0}{2} = \frac{h_1 h_2}{h_2 + h_1}$$

se obtiene:

$$D = \frac{2\mu U \ell}{(k-1)h_2}\left[2\ln k - \frac{3(k-1)}{k+1}\right]$$

El empuje ascensorial para el patín estudiado se maximiza para $\frac{dL}{dk}=0$, y se obtiene k = 2,2, lo cual corresponde a:

$$L=0,4\mu UR^2;\qquad D=1,2\mu UR;\qquad \frac{D}{L}=\frac{3}{R};\qquad R=\frac{2\ell}{h_1+h_2};$$

Para estas condiciones, se considerará que el patín de Michel esta optimizado.

8.8.2.2 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo bidimensional unidireccional. Coordenadas cartesianas

La ecuación que proporcionaba el flujo másico (por unidad de profundidad) en dirección x, para el caso de flujo entre dos placas planas ligeramente inclinadas, era:

$$\dot{m}_x=\rho U\frac{h_{(x)}}{2}-\rho\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{12\mu}h_{(x)}^3$$

El flujo volumétrico por unidad de profundidad será:

$$\left[\frac{m^3}{ms}\right]\quad \dot{\forall}_X=Q_x=U\frac{h_{(x)}}{2}-\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{12\mu}h_{(x)}^3$$

La ecuación de continuidad se podría expresar como:

$\frac{\partial\dot{\forall}_X}{\partial x}=0$ (el caudal no varía en dirección x)

Diferenciando la ecuación del flujo volumétrico con respecto a la coordenada x se obtiene:

$6U\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\right)$, siendo esta la ecuación de Reynolds para flujo unidireccional y régimen permanente.

8.8.2.3 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo bidireccional, tridimensional. Coordenadas cartesianas.

La ecuación de Navier-Stokes en dirección (z) tendría una forma similar a la dirección (x).

En dirección x, Navier-Stokes daba lugar a:

$$0=-\frac{\partial P^*}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

De manera homóloga, en dirección z, Navier Stokes dará lugar a:

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

W es la velocidad de la placa móvil en dirección z.

De donde, operando del mismo modo que en dirección x, el flujo volumétrico en dirección z, será:

$$\dot{\forall}_Z = Q_z = W\frac{h}{2} - \frac{\Delta P^*}{\Delta z}\frac{1}{12\mu}h^3$$

Es importante señalar que la altura de la capa de líquido h puede depender de *x* y *z*.

Si solo existiese flujo en dirección z, cabría decir:

$$\frac{\partial \dot{\forall}_Z}{\partial z} = 0 = 6\,W\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\Delta P^*}{\Delta z}\right)$$

cabe recordar que, para flujo completamente bidimensional, el caudal en forma vectorial toma la forma:

$$\vec{\dot{\forall}} = \vec{\dot{\forall}}_X \hat{i} + \vec{\dot{\forall}}_Z \hat{k}$$

La ecuación de continuidad en función del caudal en coordenadas cartesianas, régimen permanente, establece:

$$\frac{\partial \dot{\forall}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\forall}_z}{\partial z} = 0\,;$$

de donde, sustituyendo, se obtiene:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(W\frac{h}{2}\right)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{h}{2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta P^*}{\Delta z}\frac{1}{12\mu}h^3\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{12\mu}h^3\right)$$

Recuérdese que h depende de "*x*" y "*z*".

8.8.2.4 La ecuación de lubricación de Reynolds en régimen transitório, flujo bidimensional tridireccional, coordenadas cartesianas

Esta ecuación se obtiene al aplicar la ecuación de continuidad a un volumen de control de dimensiones dx dz h como el que se muestra en la figura T 8.15:

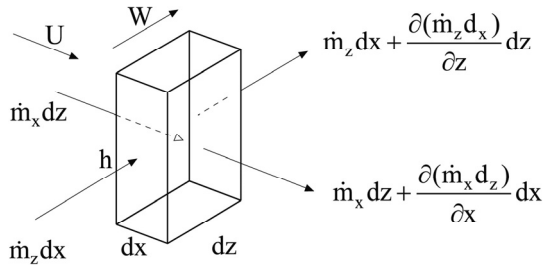


Fig. T 8.15 Elemento diferencial de volumen situado entre dos placas

Los diferenciales de volumen y masa, se establecen: $d\forall = dx\,dz\,h$; $dm = \rho\,dx\,dz\,h$;

Sea $\dot{m}_i$ el caudal másico en la dirección iésima, para una altura h y por unidad de longitud.

La ecuación de continuidad establece:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{masa}_{\text{volumen de control}}\right) + \dot{m}_{\text{saliente}} - \dot{m}_{\text{entrante}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,dx\,dz\,h) + \left[\dot{m}_z\,dx + \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}_z\,dx)\,dz\right] - \dot{m}_z\,dx + \left[\dot{m}_x\,dz + \frac{\partial}{\partial x}(\dot{m}_x\,dz)\,dx\right] - \dot{m}_z\,dx = 0$$

ecuación que se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,dx\,dz\,h) + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}_z\,dx)\,dz\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\dot{m}_x\,dz)\,dx\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,dx\,dz\,h) + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\rho\,Q_z\,dx)\,dz\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho\,Q_x\,dz)\,dx\right] = 0$$

Se ha de entender que dx y dz no dependen de la dirección x o z, ni tampoco del tiempo; así dividiendo por dx y dz, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,h) + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\rho\,Q_z)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho\,Q_x)\right] = 0$$

Sustituyendo en la ecuación anterior las ecuaciones del caudal volumétrico para cada dirección, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,h) + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\,W\frac{h}{2} - \frac{\Delta P^*}{\Delta z}\frac{\rho}{12\mu}h^3\right)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\,U\frac{h}{2} - \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{\rho}{12\mu}h^3\right)\right] = 0$$

de donde:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,h) + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\,W\frac{h}{2}\right)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\,U\frac{h}{2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta P^*}{\Delta z}\frac{\rho}{12\mu}h^3\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{\rho}{12\mu}h^3\right)$$

Para fluido con densidad constante, se obtendrá:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h)+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(W\frac{h}{2}\right)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{h}{2}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta P^*}{\Delta z}\frac{1}{12\mu}h^3\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{12\mu}h^3\right)$$

siendo esta la ecuación de Reynolds para flujo bidireccional, tridimensional y régimen transitorio. Cabe recordar que h depende de *x* y de *z*.

8.8.2.5 Ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas

En secciones precedentes se ha presentado la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas. En la presente sección se partirá de la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas para flujo incompresible, bidireccional, tridimensional y régimen transitorio y mediante una transformación de coordenadas se obtendrá su homóloga en coordenadas cilíndricas. El procedimiento seguido para realizar la transformación de coordenadas se describe a continuación, ver figura T 8.16.

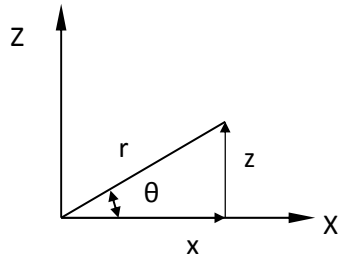


Fig. T 8.16
Relación entre coordenadas cartesianas y polares

La posición genérica definida por el punto x, z, definido en función de las coordenadas radiales y angulares, toma la forma: $x=r\cos\theta$; $z=r\sin\theta$. Obsérvese que se ha de cumplir: $x^2+z^2=r^2$.

Diferenciando las ecuaciones que caracterizan las coordenadas x y z respecto a la variable x, se obtiene:

$$\frac{\partial(x)}{\partial x}=1=\cos\theta\frac{\partial r}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial(z)}{\partial x}=0=\sin\theta\frac{\partial r}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} \quad (2)$$

Y diferenciando ahora las mismas dos ecuaciones respecto la variable z, da lugar a:

$$\frac{\partial(x)}{\partial z}=0=\cos\theta\frac{\partial r}{\partial z}-r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial(z)}{\partial z} = 1 = \sin\theta \frac{\partial r}{\partial z} + r\cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \tag{4}$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) se llega a:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta; \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}; \tag{5}$$

De las ecuaciones (3) y (4) se obtiene:

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \sin\theta; \qquad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\cos\theta}{r}; \tag{6}$$

En este punto se va a definir una función f la cual puede depender de los parámetros r, θ o bien de los parámetros x, z. La derivada parcial de esta función f respecto x y z da lugar a:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{10}$$

La segunda derivada de la función f respecto las variables x, z tomará la forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{12}$$

Sustituyendo la ecuación (7) en (11) y la ecuación (9) en (12) y después de ciertos arreglos matemáticos, se llega a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\sin\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) \tag{14}$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (8) y (10) respectivamente en las ecuaciones (13) y (14) y después de cierta manipulación matemática, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \tag{15}$$

Recordando ahora que la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas, para fluido bidireccional, incompresible y régimen transitorio tomaba la forma.

$$\frac{\partial}{\partial t}(h)+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(W\frac{h}{2}\right)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{h}{2}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta P^*}{\Delta z}\frac{1}{12\mu}h^3\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{12\mu}h^3\right) \tag{16}$$

Considerando la viscosidad del fluido como constante, esta ecuación se puede dar como:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P^*}{\partial z}h^3\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P^*}{\partial x}h^3\right)=6\mu\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z}(W\,h)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x}(U\,h)\right]+2\frac{\partial h}{\partial t}\right\} \tag{17}$$

La parte izquierda de la ecuación (17) toma la forma:

$$h^3\frac{\partial^2 P^*}{\partial x^2}+h^3\frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2}+3h^2\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial P^*}{\partial x}+3h^2\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial P^*}{\partial z} \tag{18}$$

La ecuación (18) se puede representar como:

$$h^3\left[\frac{\partial^2 P^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2}+\frac{3}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial P^*}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial P^*}{\partial z}\right)\right] \tag{19}$$

Sustituyendo las ecuaciones (15), (8) y (10) en (19), y considerando la función genérica f como h o P^* se obtiene:

$$h^3\left[\frac{\partial^2 P^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P^*}{\partial \theta^2}+\frac{3}{h}\left\{\begin{array}{l}\left(\cos\theta\frac{\partial h}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial P^*}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial P^*}{\partial \theta}\right)+\\ \left(\sin\theta\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial P^*}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial P^*}{\partial \theta}\right)\end{array}\right\}\right] \tag{20}$$

Desarrollando la ecuación (20) se llega a obtener:

$$\frac{1}{r^2}\left[r^2h^3\frac{\partial^2 P^*}{\partial r^2}+rh^3\frac{\partial P^*}{\partial r}+h^3\frac{\partial^2 P^*}{\partial \theta^2}+3h^2r^2\frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial P^*}{\partial r}+3h^2\frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\partial P^*}{\partial \theta}\right] \tag{21}$$

El segundo y cuarto término de la ecuación (21) se pueden expresar:

$$r\,h^3\frac{\partial P^*}{\partial r}+3h^2r^2\frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial P^*}{\partial r}=r\left(h^3\frac{\partial P^*}{\partial r}+3h^2r\frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial P^*}{\partial r}\right)=r\frac{\partial P^*}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(h^3r\right)\right) \qquad (22)$$

El primer término de la ecuación (21) más la ecuación (22) dan lugar a:

$$r^2h^3\frac{\partial^2 P^*}{\partial r^2}+r\frac{\partial P^*}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(h^3r\right)\right)=r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,h^3\frac{\partial P^*}{\partial r}\right) \qquad (23)$$

El tercer y quinto términos de la ecuación (21) se pueden representar como:

$$h^3\frac{\partial^2 P^*}{\partial\theta^2}+3h^2\frac{\partial h}{\partial\theta}\frac{\partial P^*}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial P^*}{\partial\theta}\right) \qquad (24)$$

Considerando ahora las ecuaciones (23) y (24), la ecuación (21) toma la forma:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial P^*}{\partial\theta}\right)+r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,h^3\frac{\partial P^*}{\partial r}\right)\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial P^*}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(h^3r\right)\frac{\partial P^*}{\partial r}\right) \qquad (25)$$

La ecuación (25) representa la transformación a coordenadas cilíndricas de la parte izquierda de la ecuación (17).

La parte derecha de la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas, ecuación (17), tomaba la forma.

$$6\mu\left\{\frac{\partial}{\partial z}(W\,h)+\frac{\partial}{\partial x}(U\,h)+2\frac{\partial h}{\partial t}\right\} \qquad (26)$$

Para transformar la ecuación (26) a coordenadas cilíndricas, es necesario dar las velocidades U y W cuya dirección respectiva es hacia los ejes x y z, en función de las velocidades radial L y tangencial T, (v. figura T 8.17), obteniendo:

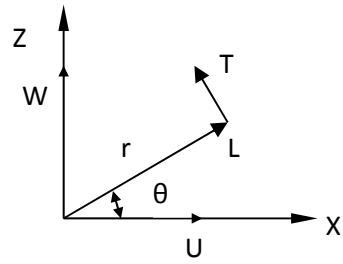


Fig. T 8.17 Relación entre las velocidades en coordenadas cartesianas y polares

$$U = L\cos\theta - T\sin\theta \qquad (27)$$

$$W = L\sin\theta + T\cos\theta \qquad (28)$$

De acuerdo con la figura T 8.17 se puede asimismo establecer:

$$T = W\cos\theta - U\sin\theta \tag{29}$$

$$L = U\cos\theta + W\sin\theta \tag{30}$$

Considerando los terminos (Wh) y (Uh) como la funcion genérica f, y teniendo en cuenta las ecuaciones (8) y (10), la ecuación (26) toma la forma:

$$6\mu\left\{\cos\theta\frac{\partial(Uh)}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial(Uh)}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial(Wh)}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial(Wh)}{\partial\theta} + 2\frac{\partial h}{\partial t}\right\} \tag{31}$$

Sustituyendo las ecuaciones (27) y (28) en la ecuación (31) se obtiene:

$$6\mu\left\{\begin{array}{l}\cos\theta\dfrac{\partial(h(L\cos\theta - T\sin\theta))}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial(h(L\cos\theta - T\sin\theta))}{\partial\theta} + \\ \sin\theta\dfrac{\partial(h(L\sin\theta + T\cos\theta))}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial(h(L\sin\theta + T\cos\theta))}{\partial\theta} + 2\dfrac{\partial h}{\partial t}\end{array}\right\} \tag{32}$$

Reorganizando la ecuación (32) se llega a obtener:

$$6\mu\left\{\frac{\partial(hL)}{\partial r} + \frac{hL}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(hT)}{\partial\theta} + 2\frac{\partial h}{\partial t}\right\} \tag{33}$$

Este término se puede tambien representar como:

$$\frac{6\mu}{r}\left\{\frac{\partial(r\,h\,L)}{\partial r} + \frac{\partial(hT)}{\partial\theta} + 2r\frac{\partial h}{\partial t}\right\} \tag{34}$$

Las ecuaciones (29) y (30) representan la velocidad radial y tangencial de un sistema desplazándose con velocidades U y W en las direcciones respectivas de los ejes coordenados x, z. Si el sistema bajo estudio gira respecto su propio eje con velocidad angular ω y además posee un movimiento de traslación, tal y como representa la figura T 8.18, la velocidad tangencial T tomara la forma:

$$T = W\cos\theta - U\sin\theta + r\,\omega \tag{35}$$

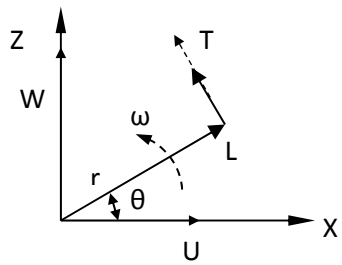


Fig. T 8.18
Velocidades radial y tangencial considerando un movimiento de rotación y otro de traslación

Es interesante remarcar que la ecuación (34) representa la parte derecha de la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas. Las velocidades radial y tangencial de un sistema que gira sobre su eje y se traslada están definidas por las ecuaciones (30) y (35), de sustituir estas dos ecuaciones en (34) se obtiene:

$$\frac{6\mu}{r}\left\{\frac{\partial(r\,h\,(U\cos\theta+W\sin\theta))}{\partial r}+\frac{\partial(h(W\cos\theta-U\sin\theta+r\,\omega))}{\partial\theta}+2\,r\frac{\partial h}{\partial t}\right\} \qquad (36)$$

Reordenando la ecuación (36) se llega a:

$$6\mu\left\{\frac{\partial h}{\partial r}\,(U\cos\theta+W\sin\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}(W\cos\theta-U\sin\theta)+\frac{\partial(h\,\omega)}{\partial\theta}+2\frac{\partial h}{\partial t}\right\} \qquad (37)$$

La ecuación (37) es la forma final de la parte derecha de la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas. Uniendo ahora la parte izquierda y derecha de dicha ecuación, caracterizadas respectivamente por las ecuaciones (25) y (37), se obtiene la forma final de la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, ecuación (38). Cabe recordar que esta ecuación considera un sistema con rotación sobre su propio eje además de traslación.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial P^*}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(h^3 r\right)\frac{\partial P^*}{\partial r}\right)=6\mu\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial h}{\partial r}\,(U\cos\theta+W\sin\theta)+\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial h}{\partial\theta}(W\cos\theta-U\sin\theta)+\dfrac{\partial(h\,\omega)}{\partial\theta}+2\dfrac{\partial h}{\partial t}\end{array}\right\} \qquad (38)$$

8.8.3 Flujos con aceleración despreciable. Cojinetes cilíndricos cargados estáticamente

En este apartado, únicamente se va a considerar el caso de cojinetes hidrostáticos de longitud infinita.

Las hipótesis de trabajo son:

- ρ = cte; fluido incompresible.

- $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=0$; régimen permanente.

- los términos de aceleración local y convectiva son despreciables frente a los términos viscosos.

- A priori, se considerará flujo unidireccional, bidimensional, entre dos placas planas.

Sea el cojinete de la figura, del cual se pueden extraer las siguientes relaciones geométricas:

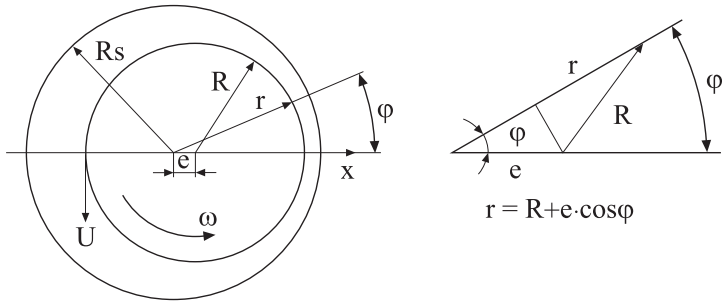


Fig. T 8.19
Esquema de un cojinete cilíndrico de longitud infinita

El radio exterior puede ser dado por:

$$R_s = R + \bar{h} = R\left(1 + \frac{\bar{h}}{R}\right);\ \bar{h} = \text{distancia media entre eje y cojinete}$$

Se puede decir que $\frac{\bar{h}}{R} = \frac{R_s - R}{R} = \psi$

El radio genérico r respecto al centro de coordenadas se puede dar:

$$r = R + e\,\cos\varphi = R\left(1 + \frac{e}{R}\cos\varphi\right)$$

siendo:

e = excentricidad del cojinete.

La relación dada para r es mayormente cierta, cuando la excentricidad tiende a cero.

La distancia entre la carcasa y el eje del cojinete viene dada por:

$$h(\varphi) = R_s - r = R_s - R - e\cos\varphi = \bar{h} - e\cos\varphi = \bar{h}\left(1 - \frac{e}{\bar{h}}\cos\varphi\right) = \bar{h}\,(1 - \varepsilon\ \cos\varphi)$$

donde: $\varepsilon = \frac{e}{\bar{h}}$

Si se abre el cojinete, se observa que el espacio h(φ) varía a lo largo del perímetro del eje, de la forma que se muestra en la figura. Véase que ahora el cojinete cilíndrico se puede tratar como una placa plana de altura variable.

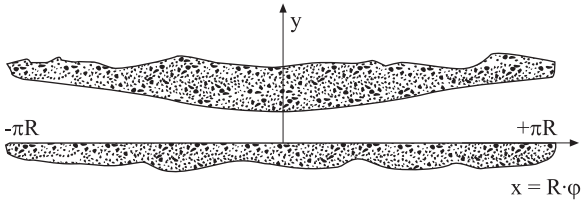


Fig. T 8. 20
Cojinete cilíndrico abierto

Véase que se puede establecer: $dx = Rd\varphi$

La ecuación que proporcionaba el caudal volumétrico en dirección del movimiento para el patín de Michel era:

$$\dot{\forall}_X = Q = \frac{1}{2} U h_{(x)} - \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{12\mu} h^3_{(x)}$$

Para el caso en estudio, esta ecuación se puede utilizar considerando que $h_x = h_{(\varphi)}$; $dx = Rd\varphi$; así:

$$\frac{\dot{\forall}_X}{h^3_{(\varphi)}} = \frac{1}{2} \frac{R\omega}{h^2_{(\varphi)}} - \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} \frac{1}{12\mu R}$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial \varphi} = \left(\frac{1}{2} \frac{R\omega}{h^2_{(\varphi)}} - \frac{\dot{\forall}_X}{h^3_{(\varphi)}} \right) 12\mu R$$

Integrando esta ecuación entre 0 y 2π :

$$\int_{P^*=0}^{P^*=2\pi} dP^* = \int_0^{2\pi} \left(\frac{6R^2\omega\mu}{h^2_{(\varphi)}} - \frac{12\mu R\dot{\forall}_X}{h^3_{(\varphi)}} \right) d\varphi; \text{ se observa que } P^*_{2\pi} = P^*_0$$

$$P^*_{2\pi} - P^*_0 = 0 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{6R^2\omega\mu}{h^2_{(\varphi)}} - \frac{12\mu R\dot{\forall}_X}{h^3_{(\varphi)}} \right) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2\omega\mu}{h^2_{(\varphi)}} \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\mu R\dot{\forall}_X}{h^3_{(\varphi)}} \right) d\varphi$$

$$\dot{\forall}_X = \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2\omega}{h^2_{(\varphi)}} \right) d\varphi \cdot \frac{1}{\int_0^{2\pi} \left(\frac{2R}{h^3_{(\varphi)}} \right) d\varphi}$$

Multiplicando y dividiendo por $\overline{h}^3$, se obtiene:

$$\dot{\forall}_X = \frac{\omega R}{2} \overline{h} \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{\overline{h}}{h_{(\varphi)}} \right)^2 d\varphi \cdot \frac{1}{\int_0^{2\pi} \left(\frac{\overline{h}}{h_{(\varphi)}} \right)^3 d\varphi} \right]$$

Recordando que para el cojinete cilíndrico se establecieron las relaciones:

$$h_{(\varphi)} = \bar{h}\,(1-\varepsilon\cos\varphi); \qquad \varepsilon = \frac{e}{\bar{h}}$$

$$\frac{h_{(\varphi)}}{\bar{h}} = 1-\varepsilon\cos\varphi$$

Las dos integrales que aparecen son:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi = \frac{\pi(2+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Y recordando que

$$\psi = \frac{\bar{h}}{R}$$

se obtiene la ecuación del caudal volumétrico, la cual tomará la forma:

$$\dot{\forall}_X = \frac{1}{2}\omega R^2 \psi \frac{I_2}{I_3}$$

Puesto que ahora se conoce el flujo volumétrico circulante, se puede proceder a despejar el gradiente de presiones:

$$\dot{\forall}_X = \frac{U\,h_{(x)}}{2} - \frac{\partial P^*}{\partial x}\frac{1}{12\mu}h_{(x)}^3$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\partial P^*}{R\partial\varphi} = \left(\frac{U\,h_{(\varphi)}}{2} - \dot{\forall}_X\right)\frac{12\mu}{h_{(\varphi)}^3} = \left(\frac{Uh_{(\varphi)}}{2} - \frac{1}{2}\omega R^2\psi\frac{I_2}{I_3}\right)\frac{12\mu}{h_{(\varphi)}^3}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial P^*}{\partial\varphi} = \frac{6\mu\,\omega R}{h_{(\varphi)}^2}\left(1 - R\,\psi\frac{I_2}{I_3}\frac{1}{h_{(\varphi)}}\right)$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial P^*}{\partial\varphi} = \frac{6\mu\,\omega R}{h_{(\varphi)}^2}\left(1 - \frac{\bar{h}}{h_{(\varphi)}}\frac{I_2}{I_3}\right)$$

Esta ecuación será posteriormente integrada para determinar cómo varía la presión del fluido en función del ángulo φ. Pero, por el momento, se deja tal como está.

La fuerza resultante en dirección *x* e *y* que el fluido ejerce sobre el eje central se puede dar:

$$F_x = -\int_0^{2\pi} P^* \cos\varphi\,R\,d\varphi$$

$$F_y = -\int_0^{2\pi} P^* \sin\varphi\,R\,d\varphi$$

Obsérvese que se trata de una fuerza por unidad de profundidad del cojinete.

Integrando por partes la fuerza en dirección y, se obtiene:

$$P^* = u; \qquad \sin\varphi\, d\varphi = dV$$

$$du = \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} d\varphi; \qquad V = -\cos\varphi;$$

$$F_y = -\left[u.V - \int V du \right] R$$

$$F_y = R P^* \cos\varphi \Big|_0^{2\pi} - R \int_0^{2\pi} \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} \cos\varphi\, d\varphi$$

El primer sumando del segundo término tiene, entre los límites de integración elegidos, un valor nulo, y sustituyendo la variación de presión con respecto al ángulo en el segundo de los sumandos, se obtiene:

$$F_y = -6 \frac{\mu \omega R^3}{h_{(\varphi)}^2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\bar{h}}{h_{(\varphi)}} \frac{I_2}{I_3} \right) \cos\varphi\, d\varphi$$

Multiplicando y dividiendo por $\bar{h}^2$ se obtiene:

$$F_y = -\frac{6\mu\omega R}{\psi^2} \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\bar{h}}{h_{(\varphi)}} \right)^2 - \left(\frac{\bar{h}}{h_{(\varphi)}} \right)^3 \frac{I_2}{I_3} \right) \cos\varphi\, d\varphi; \text{ recuérdese que } \psi = \frac{\bar{h}}{R};$$

F_Y está dada en $\left[\frac{N}{m} \right]$ (fuerza por unidad de longitud del cojinete).

Las integrales resultantes son de la forma:

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \cos\varphi (1 - \varepsilon\cos\varphi)^{-2} d\varphi = \frac{I_2 - I_1}{\varepsilon}$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} \cos\varphi (1 - \varepsilon\cos\varphi)^{-3} d\varphi = \frac{I_3 - I_2}{\varepsilon}$$

La integral I_1 se define como:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon\cos\varphi)^{-1} d\varphi = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$$

La ecuación de la fuerza se puede dar en forma adimensional, obteniendo:

$$S_0 = F_y \frac{\psi^2}{\mu\omega R} = 6 \frac{I_2 I_5 - I_3 I_4}{I_3}; \quad S_0 = \text{número de Sommerfeld .}$$

Véase que la fuerza en dirección vertical por unidad de profundidad se puede dar en forma adimensional mediante el número de Sommerfeld.

El esfuerzo de fricción en el eje de giro, debido a los esfuerzos cortantes, será:

$$\tau_{xy} = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} = \mu \left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P^*}{\partial x}\frac{1}{2\mu}y(y-h) + \frac{Uy}{h}\right)\right|_{y=h}$$

$$\tau_{xy} = \mu U\left(\frac{1}{h} + \frac{\partial P^*}{\partial x}\frac{h}{2\mu U}\right)$$

Sustituyendo $\dfrac{\partial P^*}{\partial x} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial P^*}{\partial \varphi}$ por su equivalente, se obtiene:

$\tau_{xy} = \mu U\left(\dfrac{1}{h} + \dfrac{h 6\mu\omega R}{2\mu h^2 U}\left(1 - \dfrac{\bar{h}}{h}\dfrac{I_2}{I_3}\right)\right)$; cabe recordar que $h_{(\varphi)} = h$

$$\tau_{xy} = \left(\frac{\mu U}{h}4 - 3\mu U\frac{\bar{h}}{h^2}\frac{I_2}{I_3}\right)\frac{\bar{h}}{\bar{h}}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu\omega}{\psi}\left(\frac{\bar{h}}{h}4 - 3\frac{\bar{h}^2}{h^2}\frac{I_2}{I_3}\right)$$

ecuación que representa los esfuerzos cortantes en cada elemento diferencial de superficie.

El par con respecto al eje de giro (por unidad de longitud) será:

$$T = \int_0^{2\pi} \tau_{xy} \cdot R \cdot d\varphi \cdot 1 \cdot R$$

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{R^2\mu\omega}{\psi}\left(\frac{\bar{h}}{h}4 - 3\left(\frac{\bar{h}}{h}\right)^2\frac{I_2}{I_3}\right)d\varphi$$

$$T = \frac{R^2\mu\omega}{\psi}\left(4I_1 - 3\frac{I_2^2}{I_3}\right)$$

De las ecuaciones del flujo volumétrico, el número de Sommerfeld y la ecuación del par, al sustituir los valores de las integrales I_i, se obtiene:

$$\dot{\forall}_X\left(\omega R^2\psi\right)^{-1} = \frac{1-\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2};$$

$$S_0 = F_y\psi^2(\mu\omega R)^{-1} = \frac{12\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}(2+\varepsilon^2)}$$

$$T\psi(\mu\omega R^2)^{-1} = \frac{4\pi(1+2\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}(2+\varepsilon^2)}$$

De la ecuación del número de Sommerfeld, se deduce que, si el eje está poco cargado $F_y \to 0$, la excentricidad ε será pequeña $\varepsilon \to 0$. Por otro lado, la excentricidad ε será asimismo pequeña, cuando para una carga F_y dada, mayor sea la velocidad de giro ω.

De la ecuación del par sobre el eje en forma adimensional, se observa que, cuando $\varepsilon \to 0$ el par vale:

$$T = 2\pi\mu\omega\frac{R^2}{\psi}$$

Esta expresión se denomina *expresión de Petroff*.

Se observa además que, cuanto menor sea la viscosidad del fluido μ menor es la fuerza F_y y menor el par necesario T.

Para hallar la distribución de presiones a lo largo del cojinete cilíndrico, será necesario integrar la ecuación hallada previamente:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial P^*}{\partial\varphi} = \frac{6\mu\omega R}{h^2_{(\varphi)}}\left(1 - \frac{\overline{h}}{h_{(\varphi)}}\frac{I_2}{I_3}\right)$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial\varphi} = 6\mu\omega R^2\left(\frac{1}{h^2_\varphi} - \frac{\overline{h}}{h^3_{(\varphi)}}\frac{I_2}{I_3}\right)\frac{\overline{h}^2}{\overline{h}^2}$$

$$\int dP^* = \frac{6\mu\omega}{\psi^2}\int_0^\varphi\left[\left(\frac{\overline{h}}{h_{(\varphi)}}\right)^2 - \left(\frac{\overline{h}}{h_{(\varphi)}}\right)^3\frac{I_2}{I_3}\right]d\varphi$$

Teniendo en cuenta que $\frac{h_\varphi}{\overline{h}} = 1 - \varepsilon\cos\varphi$

$$\int dP^* = \frac{6\mu\omega}{\psi^2}\int_0^\varphi\left[(1-\varepsilon\cos\varphi)^2 - (1-\varepsilon\cos\varphi)^3\frac{I_2}{I_3}\right]d\varphi$$

Véase que ahora se integra esta ecuación entre 0 y un ángulo genérico.

El resultado de la integral será:

$$P^* = C - 6\frac{\mu\omega}{\psi^2}\varepsilon\frac{\sin\varphi(2-\varepsilon\cos\varphi)}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon\cos\varphi)^2}$$

Para hallar la constante de integración, se necesita una condición de contorno. Esta podría ser que, para un ángulo determinado $\varphi = \varphi_{(A)}$, la presión sea la presión de alimentación del sistema.

La distribución de presiones en el interior del cojinete, y en función del ángulo genérico φ, se muestra en la figura siguiente. Obsérvese que existe una zona donde puede aparecer cavitación. Dicha zona puede ser reducida modificando la presión de alimentación del cojinete.

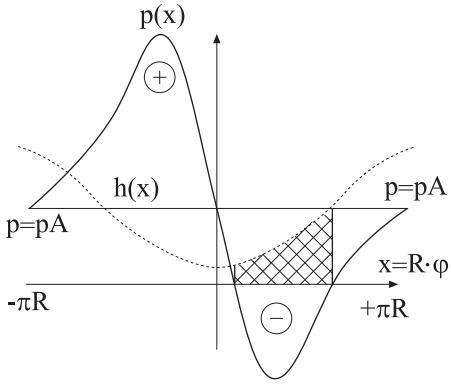


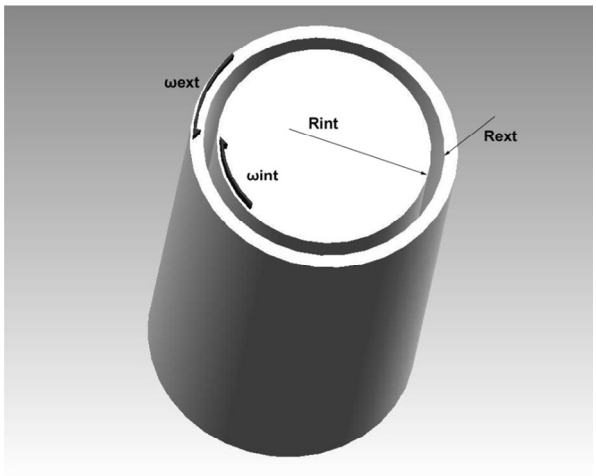
Fig. T 8. 21
Distribución de presiones para un cojinete cilíndrico

Problema 58

Enunciado

Sean dos cilindros concéntricos de longitud unitaria, con radios R_{ext} y R_{int}, respectivamente, separados por una película de aceite de viscosidad μ. El cilindro interior gira a una velocidad angular ω_{int} (sentido horario), mientras que el exterior gira a una velocidad angular ω_{ext} (sentido antihorario).

Fig. 58.1



Halle las ecuaciones que definen:

1. La distribución de velocidades entre cilindros.

2. La distribución de presiones entre cilindros.

3. El par necesario en el cilindro exterior para que se produzca el giro.

Resolución

Cálculos previos

Las condiciones de contorno que definen este problema son:

$$r = R_{ext} \Rightarrow V_\theta = \omega_{ext} R_{ext}$$

$$r = R_{int} \Rightarrow V_\theta = \omega_{int} R_{int} \ (-1)$$

La ecuación de continuidad, en coordenadas cilíndricas, establece:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + \frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0$$

La ecuación de Navier-Stokes, en cilíndricas, se enuncia:

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+V_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{V_\theta^{\,2}}{r}\right)=$$

$$\rho\, g_r-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+V_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}-\frac{V_\theta\,V_r}{r}\right)=$$

$$\rho\, g_\theta-\frac{\partial P}{r\partial \theta}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+V_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=$$

$$\rho\; g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\;\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right]$$

Únicamente existe variación de velocidad V_θ en dirección radial, con lo que se tiene:

La ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta)=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta)=0\Rightarrow\rho\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}=0\Rightarrow\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}=0$$

ρ = constante

La ecuación de Navier-Stokes:

La presión reducida variará únicamente en la dirección radial

$$-\rho\;\frac{V_\theta^{\,2}}{r}=\rho\, g_r-\frac{\partial P}{\partial r}=-\rho\, g\,\frac{\partial h}{\partial r}-\frac{\partial P}{\partial r}=-\frac{\partial P^*}{\partial r}$$

$$0=\mu\;\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\;V_\theta)\right)\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\;V_\theta)\right)=0$$

Se considera que no existen fuerzas másicas en la dirección z.

$$0=\rho\;\, g_z-\frac{\partial P}{\partial z}\Rightarrow\frac{\partial P^*}{\partial z}=0$$

No hay gradiente de presión reducida en la dirección z.

1. Así, se tiene que:

De la primera ecuación de Navier-Stokes:

$$\int dP^*=\int\rho\frac{V_\theta^{\,2}}{r}dr$$

Será necesario conocer la distribución de velocidades en la dirección θ, ya que esta dependerá de r.

De la segunda ecuación de Navier-Stokes:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ V_\theta\right)\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ V_\theta\right) = C_1$$

Las constantes C1 y C2 son constantes de integración

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ V_\theta\right) = r\ C_1$$

$$r\ V_\theta = C_1\frac{r^2}{2} + C_2$$

$$V_\theta = C_1\ \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

Con las condiciones de contorno:

$$r = R_{ext} \Rightarrow V_\theta = \omega_{ext}\ R_{ext}$$

$$r = R_{int} \Rightarrow V_\theta = \omega_{int}\ R_{int}\ (-1)$$

$$(1) \qquad \omega_{ext}\ R_{ext} = C_1\frac{R_{ext}}{2} + \frac{C_2}{R_{ext}}$$

$$(2) \qquad -\omega_{int}\ R_{int} = C_1\frac{R_{int}}{2} + \frac{C_2}{R_{int}}$$

$$C_2 = \omega_{ext}\ {R_{ext}}^2 - C_1\frac{{R_{ext}}^2}{2} \Rightarrow -\omega_{int}\ R_{int} = C_1\frac{R_{int}}{2} + \frac{1}{R_{int}}\left[\omega_{ext}\ {R_{ext}}^2 - C_1\ \frac{{R_{ext}}^2}{2}\right]$$

$$-\omega_{ext}\ {R_{ext}}^2 - \omega_{int}\ {R_{int}}^2 = C_1\left(\frac{{R_{int}}^2}{2} - \frac{{R_{ext}}^2}{2}\right) \Rightarrow C_1 = \frac{2\left(\omega_{int}\ {R_{int}}^2 + \omega_{ext}\ {R_{ext}}^2\right)}{{R_{ext}}^2 - {R_{int}}^2}$$

$$C_2 = \omega_{ext}\ {R_{ext}}^2 - \frac{2\left(\omega_{int}\ {R_{int}}^2 + \omega_{ext}\ {R_{ext}}^2\right)}{{R_{ext}}^2 - {R_{int}}^2}\ \frac{{R_{ext}}^2}{2}$$

$$C_2 = \omega_{ext}\ {R_{ext}}^2 - {R_{ext}}^2\ \frac{\left(\omega_{int}\ {R_{int}}^2 + \omega_{ext}\ {R_{ext}}^2\right)}{{R_{ext}}^2 - {R_{int}}^2}$$

Entonces:

$$V_\theta = \frac{2\left(\omega_{int}\ R_{int}^{\ 2} + \omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2}\right)}{R_{ext}^{\ 2} - R_{int}^{\ 2}}\ \frac{r}{2} + \frac{1}{r}\left(\omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2} - R_{ext}^{\ 2}\ \frac{\left(\omega_{int}\ R_{int}^{\ 2} + \omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2}\right)}{R_{ext}^{\ 2} - R_{int}^{\ 2}}\right)$$

2. De la primera ecuación de Navier-Stokes:

$$\int dP^* = \int \rho \frac{V_\theta^{\ 2}}{r} dr$$

Introduciendo la ecuación de V_θ en la integral, se tiene:

$$\int_{P_{int}^*}^{P_{ext}^*} dP^* = \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \rho\ \frac{1}{r}\left(C_1^{\ 2}\ \frac{r^2}{4} + \frac{C_2^{\ 2}}{r^2} + C_1\ C_2\right) dr$$

y se halla:

$$P_{ext}^* - P_{int}^* = \rho\left(C_1^{\ 2}\ \frac{R_{ext}^{\ 2} - R_{int}^{\ 2}}{8} + \frac{C_2^{\ 2}}{2}\ \frac{1}{R_{int}^{\ 2} - R_{ext}^{\ 2}} + C_1\ C_2\ Ln\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)$$

3. Los esfuerzos cortantes en cilíndricas se pueden dar:

$$\tau_{r\theta} = r\ \mu\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)\Big|_{r=R_{ext}}$$

puesto que

$$V_\theta = C_1\ \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r};\qquad \frac{V_\theta}{r} = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) = -\frac{2C_2}{r^3}$$

$$\tau_{r\theta}\big|_{r=R_{ext}} = -\frac{\mu\ C_2\ 2r}{r^3}\Big|_{r=R_{ext}} = \frac{-2\mu C_2}{R_{ext}^2}$$

El par por unidad de longitud que actúa sobre el cilindro exterior será:

$$M_{R_{ext}} = \tau_{r\theta}\big|_{r=R_{ext}}\ 2\ \pi\ R_{ext}\ \ R_{ext}$$

así, queda:

$$M_{R_{ext}} = -\frac{2\ \mu\ C_2}{R_{ext}^2}\ 2\ \pi\ R_{ext}^2 = -\ 4\ \pi\ \mu\ C_2$$

Obsérvese que, si se determinase el par por unidad de longitud del cilindro que actúa sobre el cilindro interior, el resultado sería el mismo.

Problema 59

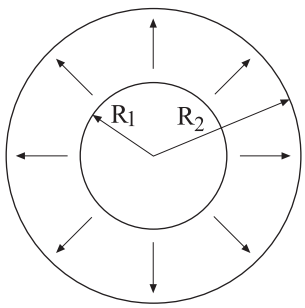
Enunciado

El dibujo que se encuentra a continuación muestra dos cilindros concéntricos de longitud genérica L y radios R_1 y R_2, respectivamente. Un fluido de viscosidad μ fluye radialmente desde el cilindro interno hacia el cilindro externo (se entiende que ambos cilindros son porosos y, por tanto, permiten el paso del fluido en dirección radial a través de sus paredes). El caudal circulante es Q y la presión reducida del fluido a la salida del cilindro interior es también conocida, $P^*_{\text{Inlet R1}}$.

1. Se pide: Hallar, en función de los parámetros conocidos, la ecuación que determina la distribución de presiones del fluido entre los dos cilindros, considerando el flujo con viscosidad dominante y de densidad constante, régimen permanente.

2. Determinar la ecuación que caracteriza la variación de presión en función del radio para el caso de que el fluido se dirija radialmente desde el cilindro superior al cilindro inferior, considerando las mismas hipótesis que en el apartado anterior. La presión reducida conocida es ahora $P^*_{\text{Inlet R2}}$, presión reducida del fluido a la salida del cilindro de radio mayor.

Fig. 59.1
Dirección del flujo para el caso 1



Resolución

1. Según las condiciones definidas para este problema, se puede establecer que, independientemente de la dirección del flujo, se cumplirá:

Régimen permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$V_r \neq 0 \quad V_r = f(r)$$

$$V_\theta = 0$$

$$V_x = 0$$

De las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas, y según las condiciones establecidas en el problema, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales que caracterizan el flujo objeto de estudio:

$$\rho V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{\partial P^*}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)\right) = -\frac{\partial P^*}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2}\right)$$

$$0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial P^*}{\partial \theta}$$

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial x}$$

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas se enuncia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0\,;$$

Para el caso en estudio, esta ecuación toma la forma:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) = 0\,;\ \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) = 0\,;\ \rho\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) = 0\,;\ \rho\left[V_r + r\frac{\partial V_r}{\partial r}\right] = 0\,;\ \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{V_r}{r}$$

ecuación que indica la variación de velocidad en dirección radial.

Sustituyendo la ecuación de continuidad en la ecuación de Navier-Stokes en dirección radial, se obtiene:

$$-\rho\frac{V_r^{\,2}}{r} = -\frac{\partial P^*}{\partial r} + \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)\right)$$

La relación entre el caudal circulante y la velocidad del fluido para cada radio se establece:

$$V_r = \frac{Q}{\pi D L}\,;\qquad \text{y}:\qquad V_{R1} = \frac{Q}{\pi D_1 L}\,;\qquad V_{R2} = \frac{Q}{\pi D_2 L}$$

L es la longitud de ambos cilindros.

Puesto que el caudal es el mismo en cada sección definida por un radio genérico, se tiene:

$$V_{r1} * D_1 = V_{r2} * D_2 = V_r * D\,;\qquad D_1 \le D \le D_2$$

$$\text{de donde } V_r = \frac{V_{R1} * D_1}{D} = \frac{V_{R1} * R_1}{r} = \frac{V_{R2} * R_2}{r};$$

Sustituyendo en el primer término de la ecuación de Navier-Stokes, queda:

$$-\rho \frac{V_r^2}{r} = -\rho \frac{{V_{R1}}^2 * {R_1}^2}{r^3};$$

Por otro lado, el término de fuerzas viscosas de la ecuación de Navier-Stokes da lugar a:

$$\mu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)\right) = \mu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(V_{R1} * R_1)\right) = 0$$

Véase que, si se elige utilizar el término de fuerzas viscosas en la forma:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2}\right)$$

cada uno de los tres sumatorios da lugar a:

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{V_{r1} * R_1}{r^2}\right) = \frac{V_{R1} * R_1 * 2r}{r^4} = \frac{2 * V_{R1} * R_1}{r^3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{V_{R1} * R_1}{r^3}$$

$$-\frac{V_r}{r^2} = -\frac{V_{R1} * R_1}{r^3}$$

con lo que la suma de los tres términos da igual a cero.

Así, la ecuación de Navier-Stokes en dirección radial queda de la forma:

$$-\rho \frac{{V_{R1}}^2 * {R_1}^2}{r^3} = -\frac{dP^*}{dr}$$

Obsérvese que lo realizado hasta este punto sirve tanto para definir el comportamiento del fluido para el caso 1 (fluido que se dirige desde el cilindro de radio menor hacia el cilindro de radio mayor), como para el caso 2, donde el fluido se dirige desde el cilindro de radio mayor al cilindro de radio menor.

Integrando entre el radio del cilindro inferior y un radio genérico, se tiene:

$$\int_{R_1}^{r} \rho \frac{V_{R1}{}^2 * R_1{}^2}{r^3} dr = \int_{P^*_{inlet\,R_1}}^{P^*} dP^*$$

$$P^* = P^*_{Inlet\,R_2} + \rho \frac{V_{R_1}^2}{2} - \rho \frac{V_{R_1}^2 R_1^2}{2r^2}, \text{ siendo } R_1 \le r \le R_2$$

Obsérvese que, para $r = R_1$, la presión del fluido es la presión a la salida del cilindro menor P^*_{Inlet} y, a medida que el radio (r) va aumentado, la presión tiende a aumentar, cuando a priori parece que debería disminuir. Este aumento de presión es debido a que, a medida que el radio aumenta, la sección de paso del fluido también aumenta, y da lugar a una disminución de la energía cinética del fluido; y de acuerdo con el primer principio de la termodinámica, dicha disminución de la energía cinética asociada al fluido ha de conllevar un aumento de la presión del fluido.

2. Para el caso de que el fluido fluya radialmente desde el cilindro de radio mayor, donde la presión reducida es $P^*_{inlet\,R_2}$, hacia el cilindro de radio menor, se tiene:

$$\int_{R_2}^{r} \rho \frac{V_{R1}{}^2 * R_1{}^2}{r^3} dr = \int_{P^*_{inlet\,R_2}}^{P^*} dP^*$$

La integración de esta ecuación dará lugar a:

$$P^* = P^*_{Inlet\,R_2} + \rho \frac{V_{R_1}^2 R_1^2}{2} \left[\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right], \text{ siendo } R_2 \ge r \ge R_1$$

Véase que, tal como indica esta ecuación, la presión a la salida del cilindro superior es $P^*_{inlet\,R_2}$, siendo esta la presión máxima. La presión del fluido entre los dos cilindros irá disminuyendo a medida que el valor del radio (r) vaya disminuyendo, hasta llegar a obtener un valor mínimo para $r = R_1$.

Problema 60

Enunciado

Dado el cojinete esférico de la figura 60.1, halle las ecuaciones que describen la distribución de presiones y el caudal a través del mismo. Realice de nuevo el problema partiendo de la ecuación generalizada de lubricación de Reynolds en coordenadas esféricas.

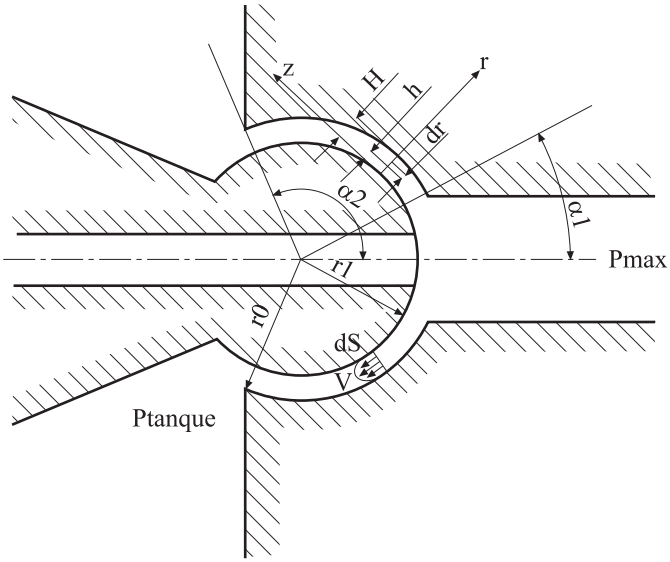


Fig. 60.1
Esquema del cojinete esférico

Resolución

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$$

El diferencial de área en el intersticio entre las dos esferas se puede dar como:

$$\int ds = \int_0^H 2\pi (r_1 + r) \sin\alpha \, dr$$

El caudal volumétrico entre las dos esferas es:

$$dQ = \int_0^H V\, 2\pi (r_1 + r) \sin\alpha \, dr$$

La ecuación de Poiseulle para flujo entre dos placas planas dice:

$$V = -\frac{1}{\mu}\frac{dP}{dz}\frac{r}{2}(H - r)$$

con lo que el caudal volumétrico queda:

$$dQ = \int_0^H -\frac{1}{\mu}\frac{dP}{dz}\frac{r}{2}(H - r)\, 2\pi (r_1 + r) \sin\alpha \, dr$$

La relación entre el diferencial de ángulo y el arco que forma es:

$$dz = (r_1 + \frac{H}{2})\, d\alpha$$

de donde:

$$dQ = \int_0^H -\frac{1}{\mu}\frac{dP}{d\alpha(r_1+\frac{H}{2})}\frac{r}{2}(H-r)\,2\pi\,(r_1+r)\,\sin\alpha\,dr$$

$$dQ = \int_0^H -\frac{1}{\mu}\frac{dP}{d\alpha(r_1+\frac{H}{2})}r\,\pi\,\sin\alpha\left[H\,r_1+H\,r-r_1\,r-r^2\right]dr$$

Una vez realizada la integración, queda:

$$Q = -\frac{1}{\mu}\frac{dP}{d\alpha}\frac{1}{(r_1+\frac{H}{2})}\pi\,\sin\alpha\left[r_1\frac{H^3}{6}+\frac{H^4}{12}\right]$$

La distribución de presiones a lo largo del intersticio es:

$$dP = -Q\,\mu\,(r_1+\frac{H}{2})\frac{1}{\pi\left[r_1\frac{H^3}{6}+\frac{H^4}{12}\right]\sin\alpha}d\alpha$$

con lo que:

$$\int_{P_{max}}^{P_{Tank}} dP = -Q\,\mu\,(r_1+\frac{H}{2})\frac{1}{\pi\left[r_1\frac{H^3}{6}+\frac{H^4}{12}\right]}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{d\alpha}{\sin\alpha}$$

después de la integración se obtiene:

$$P_{máx}-P_{tank} = Q\,\mu\,(r_1+\frac{H}{2})\frac{1}{\pi\left[r_1\frac{H^3}{6}+\frac{H^4}{12}\right]}\ln\left[\frac{tg\frac{\alpha_2}{2}}{tg\frac{\alpha_1}{2}}\right]$$

por lo que el caudal que fluye entre las dos esferas será:

$$Q = \frac{(P_{máx}-P_{tank})\;\pi\,(r_1\frac{H^3}{6}+\frac{H^4}{12})}{\mu\,(r_1+\frac{H}{2})\;\ln\left[\frac{tg\frac{\alpha_2}{2}}{tg\frac{\alpha_1}{2}}\right]}$$

La presión en un punto genérico localizado a un ángulo α se obtiene:

$$Q = \frac{(P_{máx} - P)\ \pi\ (r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12})}{\mu (r_1 + \frac{H}{2})\ \ln\left[\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\alpha_1}{2}}\right]}$$

de donde:

$$P = P_{máx} - \frac{Q\ \mu\ (r_1 + \frac{H}{2})\ \ln\left[\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\alpha_1}{2}}\right]}{\pi\ (r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12})}$$

Sustituyendo el valor del caudal en la ecuación anterior, se obtiene:

$$P = P_{máx} - \frac{(P_{máx} - P_{tank})\ \ln\left[\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\alpha_1}{2}}\right]}{\ln\left[\frac{tg\frac{\alpha_2}{2}}{tg\frac{\alpha_1}{2}}\right]}$$

ecuación que determina la presión entre dos esferas separadas por una distancia muy pequeña y para un ángulo genérico α.

2. Resolución partiendo de la ecuación generalizada de lubricación de Reynolds en coordenadas esféricas.

Dicha ecuación fue hallada por Donna Meyer y publicada en el *Journal of Tribology* - ASME el 2003.

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h^3 \sin\alpha \frac{\partial p}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial\phi}\right) =$$
$$= 6R^2\mu\left[\omega\cos\beta\sin\phi\frac{\partial h}{\partial\alpha} + \left(\omega\sin\beta + \omega\cos\beta\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\phi\right)\frac{\partial h}{\partial\phi} + 2\frac{\partial h}{\partial t}\right]$$

Los parámetros definidos en esta ecuación se detallan en la figura 60.2.

Puesto que para el caso en estudio se cumple que:

$$\omega = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \; ; \quad \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \; ; \qquad \frac{\partial h}{\partial \alpha} = 0 \; ; \quad \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0 \; ;$$

La ecuación diferencial resultante es:

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h^3 \sin\alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha}\right) = 0$$

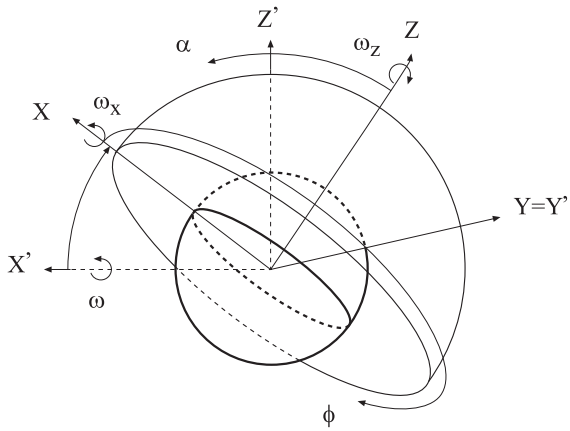


Fig. 60.2 Parámetros definidos en la ecuación de lubricación de Reynolds

La integración de la ecuación diferencial resultante da lugar a:

$$h^3 \sin\alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} = C_1 \; ;$$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{C_1}{h^3 \sin\alpha} \; ;$$

$$\int dp = \frac{C_1}{h^3}\int \frac{1}{\sin\alpha} d\alpha \; ;$$

$$p = \frac{C_1}{h^3} \ln\left(tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + C_2 \; ;$$

Condiciones de contorno:

$$\alpha = \alpha_1 \; ; \; p = p_{máx}$$

$$\alpha = \alpha_2 \; ; \; p = p_{tan\,que}$$

$$p_{máx} = \frac{C_1}{h^3} \ln\left(tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\right) + C_2 \; ;$$

$$p_{tan\,que} = \frac{C_1}{h^3} \ln\left(tg\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)\right) + C_2 \; ;$$

Y se obtiene:

$$p_{máx} - p_{tan\,que} = \frac{C_1}{h^3} \ln\left(\frac{tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)}{tg\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}\right);$$

$$C_1 = \left(p_{máx} - p_{tan\,que}\right) h^3 \frac{1}{\ln\left(\frac{tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)}{tg\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}\right)};$$

$$C_2 = p_{máx} - \frac{1}{h^3} \ln\left(tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\right) \cdot \left[\left(p_{max} - p_{tan\,que}\right) h^3 \frac{1}{\ln\left(tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\right) - \ln\left(tg\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)\right)}\right];$$

$$C_2 = p_{máx} - \left(p_{máx} - p_{tan\,que}\right) \frac{\ln\left(tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\right)}{\ln\left(\frac{tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)}{tg\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}\right)};$$

Sustituyendo en la ecuación de distribución de presiones, se obtiene:

$$p = p_{máx} - \left(p_{máx} - p_{tan\,que}\right) \frac{\ln\left(\frac{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)}\right)}{\ln\left(\frac{tg\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}{tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)}\right)};$$

Obsérvese que se ha obtenido la misma ecuación de distribución de presiones que en el apartado anterior.

La determinación del caudal circulante entre las dos esferas se realiza del mismo modo que en el apartado precedente, con la salvedad de que, al llegar a la ecuación:

$$Q = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\alpha} \frac{1}{(r_1 + \frac{H}{2})} \pi \sin\alpha \left[r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12}\right]$$

ahora la variación de angular de presión se puede dar como: $\frac{dp}{d\alpha} = \frac{C_1}{h^3 \sin\alpha}$ y puesto que la constante C_1 es conocida, se tiene:

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{\left(p_{máx} - p_{tan\,que}\right)}{\sin\alpha} \frac{1}{\ln\left(\frac{tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)}{tg\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}\right)}$$

con lo que, sustituyendo en la ecuación del caudal, se obtiene:

$$Q = \frac{1}{\mu} \frac{\pi}{\left(r_1 + \frac{H}{2}\right)} \left[r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right] \frac{\left(p_{máx} - p_{tan\,k}\right)}{\ln\left(\frac{tg\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}{tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)}\right)}$$

Véase que esta ecuación coincide con la que se ha hallado en el apartado anterior.

Problema 61

Enunciado

El esquema de la figura representa un depósito cerrado y presurizado a 100 bar, en el interior del cual existe un fluido de densidad ρ. La salida de fluido del depósito se efectúa a través de un plato de sección circular y de radio exterior r_e ; la distancia entre el plato y la base (d) se considerará muy pequeña comparada con el radio del plato, de tal manera que el fluido se podrá considerar que fluye únicamente en dirección radial y en régimen laminar.

Sabiendo que la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, flujo unidireccional, se enuncia como: $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\,d^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0$; siendo la ecuación que determina el caudal que fluye entre los platos: $Q = -\frac{\pi}{6}\frac{r\,d^3}{\mu}\frac{dp}{dr}$

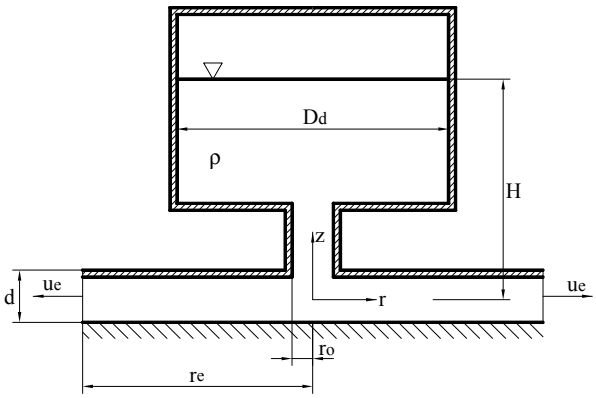
Determine:

1. El caudal que fluye entre los platos y la distribución de presiones en dirección radial. Considere que la altura H se mantiene prácticamente constante.

2. Si la distancia entre los platos (d) aumentase notoriamente, de tal forma que el flujo no pudiese ser considerado laminar, ¿cuál sería la ecuación que define el caudal que fluye? ¿Cuál sería en este caso, la distribución de presiones en función del radio? Considere que el depósito está abierto a la atmósfera y que la altura H no se mantiene constante.

Datos: H, d, r_0, r_e, ρ, g, $P_{\text{depósito}}$; D_d.

Fig. 61.1



Resolución

1. Partiendo de la ecuación de lubricación de Reynolds para el caso en estudio, se establece:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\,d^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right)=0\,; \qquad \left(\frac{r\,d^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right)=C_1\,;$$

$$\frac{\partial P}{\partial r}=C_1\frac{\mu}{r\,d^3}\,;$$

$$P=C_1\frac{\mu}{d^3}\ln r+C_2\,;$$

Por otro lado, el flujo circulante entre las dos placas circulares se define:

$$Q=-\frac{\pi}{6}\frac{r\,d^3}{\mu}\frac{dp}{dr}\,; \qquad Q=-\frac{\pi}{6}C_1\,;$$

Las constantes de integración se determinan mediante las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{cases} r=r_e & ;P=0 \\ r=r_o & ;P=P_{inlet}=100\cdot 10^5+\rho\cdot g\cdot H \end{cases}$$

$$0 = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_e + C_2 ; \qquad P_{inlet} = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_o + C_2 ;$$

$$P_{inlet} = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_o - C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_e ; \qquad P_{inlet} = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln \left(\frac{r_o}{r_e} \right)$$

$$C_1 = \frac{P_{inlet}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left(\frac{r_o}{r_e} \right)}$$

$$0 = \frac{P_{inlet}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left(\frac{r_o}{r_e} \right)} \frac{\mu}{d^3} \ln r_e + C_2 ;$$

$$C_2 = - \frac{P_{inlet} \ln r_e}{\ln \left(\frac{r_o}{r_e} \right)}$$

La ecuación que determina la distribución de presiones entre las dos placas en función del radio queda:

$$P = \frac{P_{inlet}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left(\frac{r_o}{r_e} \right)} \frac{\mu}{d^3} \ln r - \frac{P_{inlet} \ln r_e}{\ln \frac{r_o}{r_e}} ;$$

Agrupando términos, se obtiene:

$$P = \frac{P_{inlet}}{\ln \frac{r_o}{r_e}} \left[\ln r - \ln r_e \right] ;$$

$$P = \frac{P_{in\,let}}{\ln \frac{r_e}{r_o}} \left[\ln r_e - \ln r \right]$$

$$P = \frac{P_{inlet}}{\ln \frac{r_e}{r_o}} \ln \left[\frac{r_e}{r} \right]$$

El caudal circulante viene dado por:

$$Q = - \frac{\pi}{6} C_1 ; \qquad Q = \frac{\pi}{6} \frac{P_{inlet}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left(\frac{r_e}{r_o} \right)}$$

2. Aplicando la ecuación de continuidad entre la superficie del líquido y la salida de la placa:

$$\pi \cdot r_d^{\,2} \cdot u_d = 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d \cdot u_e ; \qquad \frac{u_d}{u_e} = \frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^{\,2}}$$

Aplicando Bernoulli entre la superficie libre del depósito y la sección de salida:

$$P_d + \rho \cdot g \cdot z_d + \frac{\rho}{2} u_d^2 = P_e + \rho \cdot g \cdot z_e + \frac{\rho}{2} u_e^2 ;$$

$$z_d - z_e = H$$

$$2 \cdot g \cdot H = u_e^2 - u_d^2 = u_e^2 \left(1 - \left(\frac{u_d}{u_e} \right)^2 \right);$$

$$u_e = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{\left(1 - \left(\frac{u_d}{u_e} \right)^2 \right)}}$$

Sustituyendo la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$u_e = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left(\frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^{\,2}} \right)^2}}$$

El caudal circulante viene definido por:

$$Q = u_e \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d$$

de donde:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left(\frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^{\,2}} \right)^2}}$$

Para hallar la distribución de presiones, se aplica Bernoulli entre un radio genérico r y la salida de la placa.

$$\frac{P_r}{\rho} + \frac{u_r^2}{2} + g z_r = \frac{P_e}{\rho} + \frac{u_e^2}{2} + g z_e$$

y se obtiene:

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2} \left(u_r^2 - u_e^2 \right)$$

La ecuación de continuidad entre estos dos puntos establece:

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot d \cdot u_r = 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d \cdot u_e ;$$

$$u_r = u_e \frac{r_e}{r} ;$$

de donde, sustituyendo en la ecuación para la distribución de presiones:

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2}\left(u_e^2 \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 - u_e^2 \right) ;$$

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2} \cdot u_e^2 \left(\left(\frac{r_e}{r} \right)^2 - 1 \right)$$

Sustituyendo la velocidad a la salida de las placas:

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2}\left(\left(\frac{r_e}{r} \right)^2 - 1 \right) \cdot \frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left(\frac{2 \cdot d \cdot r_e}{{r_d}^2} \right)^2} ;$$

$$P_e - P_r = \rho \cdot g \cdot H \cdot \frac{\left(\left(\frac{r_e}{r} \right)^2 - 1 \right)}{\left[1 - \left(\frac{2 \cdot d \cdot r_e}{{r_d}^2} \right)^2 \right]}$$

Ecuación que determina la distribución de presiones en función del radio y para flujo turbulento.

Problema 62

Enunciado

La figura 62.1 muestra un patín deslizante, formado por una placa de sección circular situada en la parte inferior de uno de los nueve pistones que forman parte de una bomba de pistones axiales. Una de las características de este patín deslizante es que tiene tallada una ranura en su sección de deslizamiento.

Se pide: Determinar la ecuación que caracteriza el caudal de fugas entre el patín y la placa de deslizamiento, denominada *plato inclinado*, sabiendo que la distancia entre ambos oscila, por lo general, en torno a las 10 micras y en consecuencia, el régimen del fluido se considera laminar. Determinar asimismo la distribución de presiones en dirección radial y la fuerza resultante que el fluido ejerce sobre el patín.

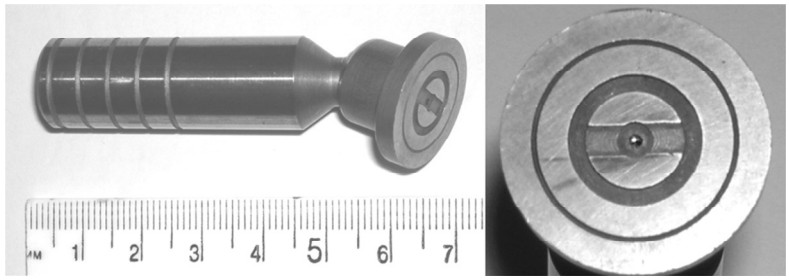
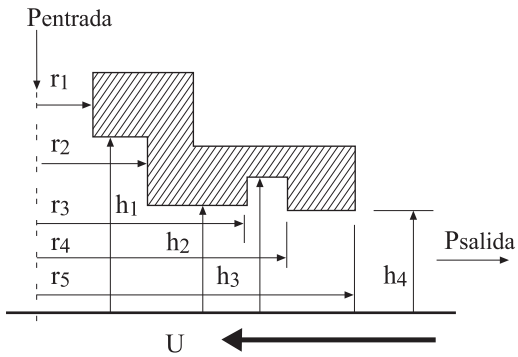


Fig. 62.1
Conjunto pistón / patín deslizante y las dimensiones del patín. Cortesía de Oilgear Towler



Considerar que el fluido entra axialmente por el agujero central del patín y se distribuye, en todo momento, en dirección radial. Como primera aproximación, suponer que el sistema es estático y el patín está paralelo a la placa base.

Se pide, asimismo, extender las ecuaciones halladas para considerar un número de ranuras genérico y de cualquier dimensión.

Resolución

Las hipótesis de partida para la resolución de este problema son:

- El flujo se considera laminar e incompresible.
- Se considera como primera aproximación, el patín deslizante estático y paralelo a la placa de deslizamiento, plato inclinado.
- El movimiento del fluido será, en todo punto, en dirección radial.
- El patín deslizante es suficientemente rígido como para no permitir flexiones del mismo.

A partir de estas consideraciones, se puede aplicar la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, la cual toma la forma siguiente:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,h^3\frac{\partial p}{\partial r}\right)=6\mu\left(U\cos\theta\frac{\partial h}{\partial r}-\frac{U\sin\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}+\omega\frac{\partial h}{\partial\theta}\right)$$

En esta ecuación, la posición angular del patín deslizante se define por la letra θ, cuyo valor oscilará entre 0 y 360 grados. Los términos que consideran la inclinación del patín vienen determinados por $\frac{\partial h}{\partial r}$ y $\frac{\partial h}{\partial \theta}$.

Considerando la viscosidad del fluido constante, el patín sin desplazamiento y situado paralelo a la placa de deslizamiento, la ecuación anterior queda

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\,h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0 \tag{1}$$

Integrando esta ecuación, se obtiene

$$P = \frac{C_1 \mu}{h^3}\ln r + C_2 \tag{2}$$

C_1 y C_2 son constantes que han de ser halladas mediante condiciones de contorno.

Por otro lado, la distribución del perfil de velocidades para un fluido laminar que fluye entre dos platos planos cilíndricos, y en función de la distribución de presiones entre el radio interior y exterior de dichos platos, se enuncia del modo siguiente:

$$u = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{y}{2}(h-y)$$

El caudal volumétrico que fluye entre estos dos platos será

$$Q = \int_0^h u\,2\pi\,r\,dy = -\frac{\pi r}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{h^3}{6}$$

Sustituyendo la primera derivada de la ecuación diferencial (1) en la ecuación anterior, se obtiene

$$Q = -\pi\frac{C_1}{6} \tag{3}$$

Las ecuaciones (2) y (3) proporcionan la distribución de presiones y el caudal entre dos platos cilíndricos.

Para determinar las constantes C_1 y C_2, se utilizarán las siguientes condiciones de contorno:

$$r = r_i;\ \ p = p_i$$

$$r = r_j;\ \ p = p_j.$$

Las ecuaciones (2) y (3) pueden ser aplicadas a cualquier número de placas planas cilíndricas consecutivas, entendiéndose que el fluido se mantiene, en todo punto, laminar. Debe asimismo tenerse en cuenta que, cada vez que se apliquen dichas ecuaciones entre dos placas, aparecerán dos nuevas constantes de integración.

Así, aplicando las ecuaciones para el patín deslizante de la figura 62.1, el cual está formado por cuatro superficies que se consideran paralelas a la placa de deslizamiento, se puede establecer el colectivo de ecuaciones siguiente:

Parte central del patín deslizante

$$p_1 = C_1 \frac{\mu}{h_0^3} \ln r + C_2 \qquad \text{Campo de aplicación} \qquad r_1 < r < r_2 \tag{4}$$

$$Q_1 = -\frac{\pi C_1}{6} \tag{5}$$

Primera placa

$$p_2 = C_3 \frac{\mu}{h_1^3} \ln r + C_4 \qquad \text{Campo de aplicación} \qquad r_2 < r < r_3 \tag{6}$$

$$Q_2 = -\frac{\pi C_3}{6} \tag{7}$$

Ranura

$$p_3 = C_5 \frac{\mu}{h_2^3} \ln r + C_6 \qquad \text{Campo de aplicación} \qquad r_3 < r < r_4 \tag{8}$$

$$Q_3 = -\frac{\pi C_5}{6} \tag{9}$$

Segunda placa

$$p_4 = C_7 \frac{\mu}{h_3^3} \ln r + C_8 \qquad \text{Campo de aplicación} \qquad r_4 < r < r_5 \tag{10}$$

$$Q_4 = -\frac{\pi C_7}{6} \tag{11}$$

Las condiciones de contorno para determinar las constantes de integración son:

$r = r_1 \quad p_1 = p_{entrada}$

$r = r_2 \quad p_1 = p_2 \quad Q_1 = Q_2$

$r = r_3 \quad p_2 = p_3 \quad Q_2 = Q_3$

$r = r_4 \quad p_3 = p_4 \quad Q_3 = Q_4$

$r = r_5 \quad p_4 = p_{salida.}$

Una vez determinadas las constantes $C_1 \ldots C_8$, y sustituidas en las ecuaciones pertinentes, se obtienen las ecuaciones de la distribución de presiones, cuatro en total, una para cada placa plana cilíndrica, así como la ecuación que determina el flujo volumétrico entre placas.

La distribución de presiones para la placa situada entre los radios $r_1 < r < r_2$ viene dada por la ecuación:

$$p_1 = p_{entrada} - \frac{(p_{entrada} - p_{salida})}{\frac{1}{h_1^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3}\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3}\ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)} \frac{1}{h_1^3}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

La distribución de presiones para la placa situada entre los radios $r_2 < r < r_3$ viene dada por la ecuación:

$$p_2 = p_{entrada} - \frac{(p_{entrada} - p_{salida})}{\frac{1}{h_1^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3}\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3}\ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)} \left[\frac{1}{h_1^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3}\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)\right]$$

La distribución de presiones para la placa situada entre los radios $r_3 < r < r_4$ viene dada por la ecuación:

$$p_3 = p_{entrada} - \frac{(p_{entrada} - p_{salida})\left[\frac{1}{h_1^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3}\ln\left(\frac{r}{r_3}\right)\right]}{\frac{1}{h_1^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3}\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3}\ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)}$$

Y, por último, la distribución de presiones para la placa situada entre los radios $r_4 < r < r_5$ viene dada por la ecuación:

$$p_4 = p_{entrada} - \frac{(p_{entrada} - p_{salida})\left[\frac{1}{h_1^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3}\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3}\ln\left(\frac{r}{r_4}\right)\right]}{\frac{1}{h_1^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3}\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3}\ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)}$$

La ecuación del caudal volumétrico que fluye entre las placas paralelas en función del gradiente de presión entre extremos de las mismas es:

$$Q = \frac{\pi}{6\mu} \frac{(p_{entrada} - p_{salida})}{\frac{1}{h_1^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3}\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3}\ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)}$$

Una vez halladas las distribuciones de presión entre extremos de cada placa plana cilíndrica, se puede determinar fácilmente la fuerza que el fluido ejerce sobre el patín deslizante. Dicha fuerza viene dada por la ecuación:

$$F_{sustentacion} = \int_{r_1}^{r_2} P_1(r)\,2\pi\, r\, dr + \int_{r_2}^{r_3} P_2(r)\,2\pi\, r\, dr + \int_{r_3}^{r_4} P_3(r)\,2\pi\, r\, dr + \int_{r_4}^{r_5} P_4(r)\,2\pi\, r\, dr$$

donde las presiones $P_1(r)$, $P_2(r)$, $P_3(r)$ y $P_4(r)$ vienen dadas por las ecuaciones que caracterizan la distribución de presión en cada una de las placas planas en estudio. Así, realizando la sustitución e integración para cada conjunto de placas, se obtiene

$$\begin{aligned} F_{sustentación} &= P_{entrada}\,\pi(r_5^2 - r_1^2) \\ &- C\pi\, r_5^2 \cdot \left(\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right) \right) \\ &+ C\pi \left(\frac{1}{h_1^3} \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} + \frac{1}{h_2^3} \frac{r_3^2 - r_2^2}{2} + \frac{1}{h_3^3} \frac{r_4^2 - r_3^2}{2} + \frac{1}{h_4^3} \frac{r_5^2 - r_4^2}{2} \right) \end{aligned}$$

donde la constante C toma la forma

$$C = \frac{p_{entrada} - p_{salida}}{\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)}$$

Las ecuaciones acabadas de determinar han sido definidas para el caso en estudio, es decir, un patín deslizante de sección circular y con una ranura tallada en su cara de deslizamiento. Para este caso, el número de placas planas circulares (anillos considerados) ha sido de 4, n = 4. No obstante, estas ecuaciones se pueden ampliar para un caso genérico, es decir, un patín deslizante de sección circular con diversas ranuras talladas en su superficie de deslizamiento.

Así, las ecuaciones genéricas que determinan la distribución de presiones, el caudal circulante y la fuerza que el fluido ejerce sobre el patín tomarán la forma:

Véase que las ecuaciones que se encuentran a continuación están definidas en función de un parámetro {n}, que indica el número total de anillos circulares (placas) considerado. Obsérvese que, para el caso en estudio, n = 4.

La ecuación genérica para el caudal es

$$Q = \frac{\pi}{6\mu} \frac{(p_{entrada} - p_{salida})}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}$$

La ecuación genérica que caracteriza la distribución de presiones en cada una de las placas circulares paralelas genéricas {n} toma la forma:

Para la sección de menor radio del patín, bolsillo central: $r_1 < r < r_2$.

$$p_1 = p_{entrada} - \frac{(p_{entrada} - p_{salida})}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} \left[\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)\right]$$

Para el resto de las caras: $2 < j < n$

$$p_j = p_{entrada} - \frac{(p_{entrada} - p_{salida})}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} \left[\frac{1}{h_j^3} \ln\left(\frac{r}{r_j}\right) + \sum_{k=1}^{k=j-1} \frac{1}{h_k^3} \ln\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)\right]$$

La ecuación genérica que determina la fuerza sobre el patín deslizante para un número genérico de ranuras talladas en la cara de deslizamiento del patín es

$$F_{lift} = P_{entrada}\, \pi (r_{(n+1)}^2 - r_1^2) - C\pi\, r_{(n+1)}^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln\left(\frac{r_{(i+1)}}{r_i}\right) + C\pi \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \frac{r_{(i+1)}^2 - r_i^2}{2}$$

donde

$$C = \frac{P_{entrada} - P_{salida}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln\left(\frac{r_{(i+1)}}{r_i}\right)}$$

Algunos de los resultados que se pueden obtener de las ecuaciones acabadas de hallar se muestran en las gráficas siguientes.

La gráfica 62.2 muestra el valor del caudal de fugas para diferentes gradientes de presiones y distancias entre el patín y la placa base. La 62.3 muestra la distribución de presiones en dirección radial. Y la 62.4 indica cómo varía el caudal de fugas y la fuerza resultante sobre el patín cuando los radios interior y exterior de la ranura tallada en la cara de deslizamiento del mismo se desplazan en dirección radial. Obsérvese el enorme efecto que las dimensiones de la ranura tienen sobre la fuerza actuante sobre el patín.

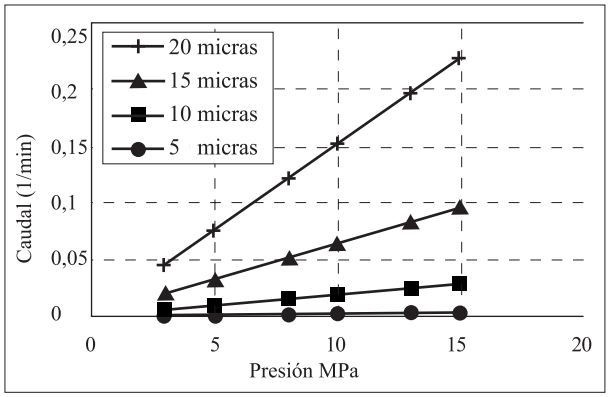


Fig. 62.2
Caudal de fugas en función de la presión diferencial y la distancia entre el patín y la placa base. Escala 2:1

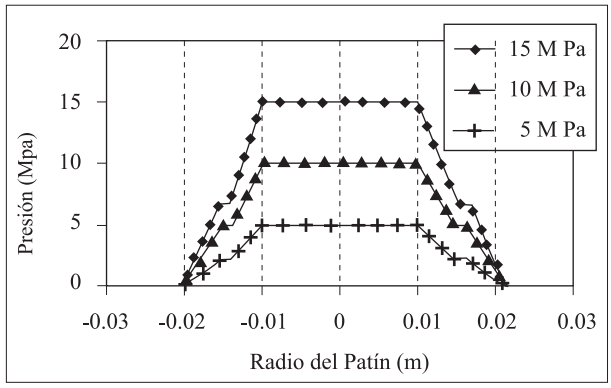
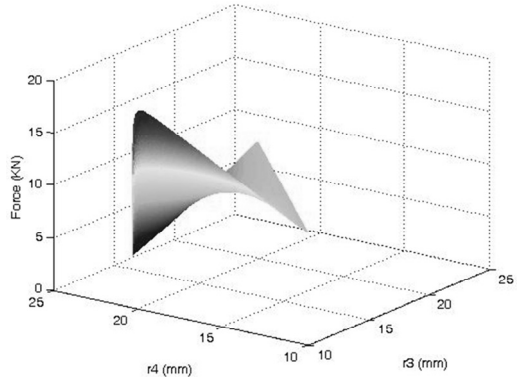
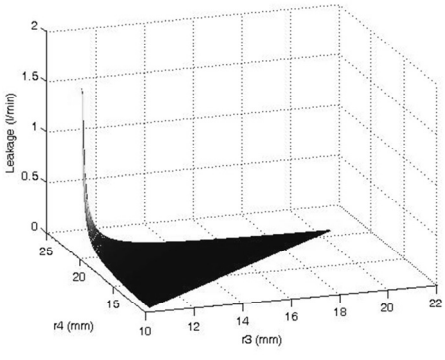


Fig. 62.3 Distribución de presión en dirección radial y en función del gradiente de presiones entre extremos del patín. Escala 2:1



a)



b)

Fig. 62.4 Fuerza y caudal de fugas para el patín deslizante original (escala 2:1) cuando se modifican las dimensiones de la ranura, r3 y r4. La profundidad de la ranura se mantiene constante a 0,8 mm. h2 = h4 =10 micras. Presión de alimentación: 15 MPa. a) fuerza; b) caudal

Problema 63

Enunciado

Sea el patín deslizante estudiado en el problema 62 y definido en la figura 63.1. Determine la distribución de presiones entre el patín y la placa base (plato inclinado), así como el caudal de fugas, para el caso en que el patín tenga una inclinación pequeña respecto a dicha placa base. Considere el fluido como incompresible, régimen laminar,

flujo en dirección radial. Asimismo, considere como primera aproximación que no existe movimiento relativo entre el patín y la placa de deslizamiento. Generalice las ecuaciones para un patín con un número de ranuras cualquiera.

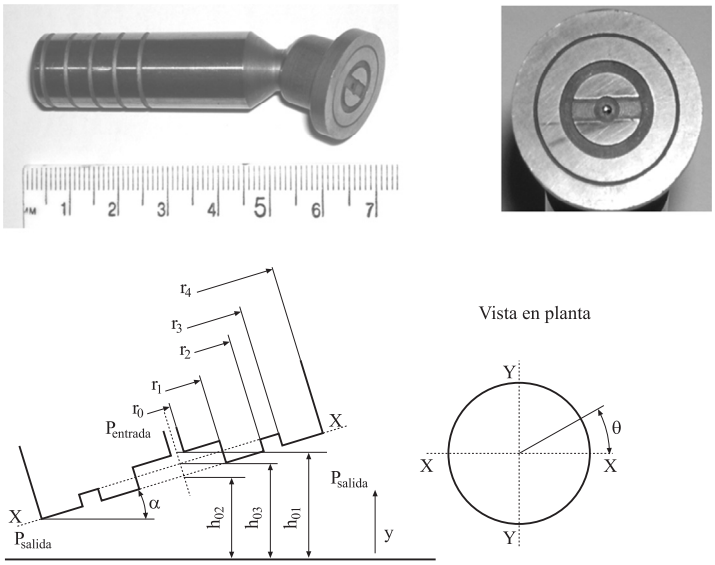


Fig. 63.1
Conjunto pistón / patín deslizante y las dimensiones del patín. Cortesía de Oilgear Towler

Resolución

Las hipótesis de partida para realizar el análisis matemático del patín inclinado son:

- El flujo se considerara laminar.
- El patín deslizante está ligeramente inclinado respecto a la placa base (plato inclinado).
- El análisis se efectuará en condiciones estáticas, aunque se permite la rotación del patín sobre su propio eje central (*spin*).
- El flujo se considera en dirección radial.
- Todas las caras del patín deslizante son planas; no tienen curvatura alguna.
- El único movimiento relativo entre el patín y el plato inclinado es el (*spin*).

De la aplicación de la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, h^3 \frac{\partial p}{\partial r}\right) = 6\mu\, \omega r \frac{\partial h}{\partial \theta} \qquad (1)$$

donde ω es la velocidad angular del patín (*spin*) respecto a su eje central.

El espesor de la película de fluido en función del radio y del ángulo de posición del patín θ se determina del modo siguiente (v. figura 63.1):

$$h = h_0 + \alpha\, r_m \cos\theta \tag{2}$$

Obsérvese que se utiliza el radio medio r_m de la placa circular genérica en estudio.

La variación del espesor de la película de fluido en función de la posición angular del patín se enuncia:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -\alpha\, r_m \sin\theta \tag{3}$$

La primera integración de la ecuación diferencial (1) da lugar a

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{-3\mu\omega\alpha\, r_m \sin\theta\; r}{\left(h_0 + \alpha\, r_m \cos\theta\right)^3} + \frac{k_1}{r\left(h_0 + \alpha\, r_m \cos\theta\right)^3} \tag{4}$$

De la segunda integración, se obtiene

$$p = \frac{-3\mu\omega\alpha\, r_m \sin\theta\; r^2}{2\left(h_0 + \alpha\, r_m \cos\theta\right)^3} + \frac{k_1}{\left(h_0 + \alpha\, r_m \cos\theta\right)^3}\ln(r) + k_2 \tag{5}$$

Por otro lado, el caudal que fluye entre el patín deslizante y la placa base (plato inclinado), se define como

$$Q_{fugas} = \int_0^{2\pi}\int_0^h u\, r\, dy\, d\theta \tag{6}$$

Asumiendo una distribución de velocidades de Poiseulle, la distribución de velocidades en función del gradiente de presión y de la altura genérica h se define

$$u = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{y}{2}(y-h) \tag{7}$$

con lo que:

$$Q_{fugas} = \int_0^{2\pi}\int_0^h \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{y}{2}(y-h)\, r\, dy\, d\theta \tag{8}$$

Sustituyendo en la ecuación 8 la distribución de presiones en función del radio, (ecuación 4), e integrando a lo largo de la altura de la película de líquido, se tiene

$$Q_{fugas} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu}\left[-3\mu\omega\alpha\, r_m \sin\theta\, r^2 + k_1\right] d\theta \tag{9}$$

Es necesario recordar, en este punto, que una segunda integración no se puede llevar a término, puesto que la constante k_1 puede depender de la posición angular θ. En cual-

quier caso, para un patín deslizante compuesto de varias superficies planas paralelas, se pueden aplicar las ecuaciones 5 y 9 a cada una de las superficies.

Para el caso en estudio, donde el patín posee cuatro superficies paralelas, se establece:

Parte central del patín: $r_0 < r < r_1$

$$p_1 = \frac{-3\mu\omega\alpha\, r_{m1} \sin\theta\ r^2}{2\left(h_{01} + \alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3} + \frac{k_1}{\left(h_{01} + \alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}\ln(r) + k_2 \tag{10}$$

$$Q_{caudal\,1} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu}\left[-3\mu\omega\alpha\, r_{m1}\sin\theta\, r^2 + k_1\right]d\theta \tag{11}$$

$$r_{m1} = \frac{r_1 + r_0}{2} \tag{12}$$

Primera placa: $r_1 < r < r_2$

$$p_2 = \frac{-3\mu\omega\alpha\, r_{m2} \sin\theta\ r^2}{2\left(h_{02} + \alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3} + \frac{k_3}{\left(h_{02} + \alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}\ln(r) + k_4 \tag{13}$$

$$Q_{caudal\,2} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu}\left[-3\mu\omega\alpha\, r_{m2}\sin\theta\, r^2 + k_3\right]d\theta \tag{14}$$

$$r_{m2} = \frac{r_2 + r_1}{2} \tag{15}$$

Ranura: $r_2 < r < r_3$

$$p_3 = \frac{-3\mu\omega\alpha\, r_{m3} \sin\theta\ r^2}{2\left(h_{03} + \alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3} + \frac{k_5}{\left(h_{03} + \alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}\ln(r) + k_6 \tag{16}$$

$$Q_{caudal\,3} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu}\left[-3\mu\omega\alpha\, r_{m3}\sin\theta\, r^2 + k_5\right]d\theta \tag{17}$$

$$r_{m3} = \frac{r_3 + r_2}{2} \tag{18}$$

Segunda placa: $r_3 < r < r_4$

$$p_4 = \frac{-3\mu\omega\alpha\, r_{m4} \sin\theta\ r^2}{2\left(h_{04} + \alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3} + \frac{k_7}{\left(h_{04} + \alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}\ln(r) + k_8 \tag{19}$$

$$Q_{caudal\ 4} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu}\left[-3\mu\omega\alpha\, r_{m4}\sin\theta\, r^2 + k_7\right]d\theta \tag{20}$$

$$r_{m4} = \frac{r_4 + r_3}{2} \tag{21}$$

Las condiciones de contorno necesarias para determinar las constantes de integración se definen:

$$r = r_0 \quad p_1 = p_{entrada} \tag{22}$$

$$r = r_1 \quad p_1 = p_2 \quad Q_{fugas\ 1} = Q_{fugas\ 2}$$

$$r = r_2 \quad p_2 = p_3 \quad Q_{fugas\ 2} = Q_{fugas\ 3}$$

$$r = r_3 \quad p_3 = p_4 \quad Q_{fugas\ 3} = Q_{fugas\ 4}$$

$$r = r_4 \quad p_4 = p_{salida}$$

De aplicar las condiciones de contorno a las ecuaciones 10-21 se obtiene el valor de las diversas constantes de integración. Así:

$$k_1 = \frac{p_{salida} - p_{entrada} - \frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta}{2}\left[\frac{r_{m1}\left(r_0^2 - r_1^2\right)}{\left(h_{01} + \alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3} + \frac{r_{m2}\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{\left(h_{02} + \alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3} + \frac{r_{m3}\left(r_2^2 - r_3^2\right)}{\left(h_{03} + \alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3} + \frac{r_{m4}\left(r_3^2 - r_4^2\right)}{\left(h_{04} + \alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}\right]}{\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{\left(h_{01} + \alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02} + \alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\left(h_{03} + \alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{\left(h_{04} + \alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}} +$$

$$- \frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta\left[\frac{r_1^2\left(r_{m2} - r_{m1}\right)\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02} + \alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3} + \frac{\left[r_1^2\left(r_{m2} - r_{m1}\right) + r_2^2\left(r_{m3} - r_{m2}\right)\right]\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\left(h_{03} + \alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3} + \frac{\left[r_1^2\left(r_{m2} - r_{m1}\right) + r_2^2\left(r_{m3} - r_{m2}\right) + r_3^2\left(r_{m4} - r_{m3}\right)\right]\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{\left(h_{04} + \alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}\right]}{\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{\left(h_{01} + \alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02} + \alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\left(h_{03} + \alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{\left(h_{04} + \alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}} \tag{23}$$

$$k_3 = 3\,\mu\,\omega\,\alpha\,\sin\theta\,r_1^2\left[r_{m2} - r_{m1}\right] + k_1 \tag{24}$$

$$k_5 = 3\,\mu\,\omega\,\alpha\,\sin\theta\left[r_1^2\left[r_{m2} - r_{m1}\right] + r_2^2\left[r_{m3} - r_{m2}\right]\right] + k_1 \tag{25}$$

$$k_7 = 3\,\mu\,\omega\,\alpha\,\sin\theta\left[r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]+r_2^2\left[r_{m3}-r_{m2}\right]+r_3^2\left[r_{m4}-r_{m3}\right]\right]+k_1 \tag{26}$$

$$k_2 = p_{entrada}+\frac{3\mu\,\omega\alpha\,r_{m1}\sin\theta}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}\frac{r_0^2}{2}-\frac{k_1}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}\ln r_0 \tag{27}$$

$$k_4 = p_{entrada}+k_1\left[\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{\left(h_{01}+\alpha\,r_{m1}\cos\theta\right)^3}-\frac{\ln r_1}{\left(h_{02}+\alpha\,r_{m2}\cos\theta\right)^3}\right]+$$

$$+\frac{3\mu\,\omega\alpha\,\sin\theta}{2}\left[\frac{r_{m1}\left[r_0^2-r_1^2\right]}{\left(h_{01}+\alpha\,r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m2}\,r_1^2}{\left(h_{02}+\alpha\,r_{m2}\cos\theta\right)^3}\right] \tag{28}$$

$$-\frac{3\mu\,\omega\alpha\,\sin\theta\,r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}\ln r_1$$

$$k_6 = p_{entrada}+k_1\left[\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{\left(h_{01}+\alpha\,r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha\,r_{m2}\cos\theta\right)^3}-\frac{\ln r_2}{\left(h_{03}+\alpha\,r_{m3}\cos\theta\right)^3}\right]$$

$$+\frac{3\mu\,\omega\alpha\,\sin\theta}{2}\left[\frac{r_{m1}\left[r_0^2-r_1^2\right]}{\left(h_{01}+\alpha\,r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m2}\left[r_1^2-r_2^2\right]}{\left(h_{02}+\alpha\,r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m3}\,r_2^2}{\left(h_{03}+\alpha\,r_{m3}\cos\theta\right)^3}\right] \tag{29}$$

$$+3\mu\,\omega\alpha\,\sin\theta\left[\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha\,r_{m2}\cos\theta\right)^3}-\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]+r_2^2\left[r_{m3}-r_{m2}\right]}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}\ln r_2\right]$$

$$k_8 = p_{entrada}+k_1\left[\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{\left(h_{01}+\alpha\,r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha\,r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\left(h_{03}+\alpha\,r_{m3}\cos\theta\right)^3}-\frac{\ln r_3}{\left(h_{04}+\alpha\,r_{m4}\cos\theta\right)^3}\right]$$

$$+\frac{3\mu\omega\alpha\,\sin\theta}{2}\left[\frac{r_{m1}\left[r_0^2-r_1^2\right]}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m2}\left[r_1^2-r_2^2\right]}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{r_{m3}\left[r_2^2-r_3^2\right]}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m4}\,r_3^2}{\left(h_{04}+\alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}\right]$$
$$+3\mu\omega\alpha\,\sin\theta\left[\begin{array}{l}\dfrac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\\ +\dfrac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]+r_2^2\left[r_{m3}-r_{m2}\right]}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)\\ -\dfrac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]+r_2^2\left[r_{m3}-r_{m2}\right]+r_3^2\left[r_{m4}-r_{m3}\right]}{\left(h_{04}+\alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}\ln r_3\end{array}\right] \qquad (30)$$

Sustituyendo el valor de las constantes de integración en las ecuaciones de la distribución de presión en cada una de las cuatro caras paralelas, (ecuaciones 10, 13, 16 y 19), se obtienen ecuaciones explícitas para cada una de las caras paralelas en estudio. El resultado es:

$$p_1=p_{entrada}+\frac{k_1\ \ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right)}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{3\mu\omega\alpha\,r_{m1}\sin\theta}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}\left[\frac{r_0^2}{2}-\frac{r^2}{2}\right] \qquad (31)$$

$$p_2=p_{entrada}+k_1\left[\frac{\ln\left(\dfrac{r_1}{r_0}\right)}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{\ln\left(\dfrac{r}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}\right]+$$
$$+\frac{3\mu\omega\alpha\,\sin\theta}{2}\left[\frac{r_{m1}\left[r_0^2-r_1^2\right]}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m2}\left[r_1^2-r^2\right]}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}\right] \qquad (32)$$
$$+\frac{3\mu\omega\alpha\,\sin\theta\,r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

$$p_3=p_{entrada}+k_1\left[\frac{\ln\left(\dfrac{r_1}{r_0}\right)}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{\ln\left(\dfrac{r}{r_2}\right)}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}\right]$$

$$+\frac{3\mu\omega\alpha\,\sin\theta}{2}\left[\frac{r_{m1}\left[r_0^2-r_1^2\right]}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m2}\left[r_1^2-r_2^2\right]}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m3}\left[r_2^2-r^2\right]}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}\right] \tag{33}$$

$$+3\mu\omega\alpha\,\sin\theta\left[\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]+r_2^2\left[r_{m3}-r_{m2}\right]}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)\right]$$

$$p_4=p_{entrada}+k_1\left[\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}+\frac{\ln\left(\frac{r}{r_3}\right)}{\left(h_{04}+\alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}\right]$$

$$+\frac{3\mu\omega\alpha\,\sin\theta}{2}\left[\frac{r_{m1}\left[r_0^2-r_1^2\right]}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m2}\left[r_1^2-r_2^2\right]}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m3}\left[r_2^2-r_3^2\right]}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m4}\left[r_3^2-r^2\right]}{\left(h_{04}+\alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}\right]$$

$$+3\mu\omega\alpha\,\sin\theta\left[\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]+r_2^2\left[r_{m3}-r_{m2}\right]}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)+\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]+r_2^2\left[r_{m3}-r_{m2}\right]+r_3^2\left[r_{m4}-r_{m3}\right]}{\left(h_{04}+\alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}\ln\left(\frac{r}{r_3}\right)\right]$$

(34)

Por otro lado, al sustituir las constantes de integración en las ecuaciones 11, 14, 17 y 20, se obtiene una única ecuación que determina el caudal de fugas entre el patín deslizante inclinado y la placa base:

$$Q_{fugas}=-\int_0^{2\pi}\frac{k_1}{12\,\mu}\,d\theta \tag{35}$$

Debido a la complejidad de la integral definida en la ecuación 35, esta debe ser integrada numéricamente.

La generalización de las ecuaciones de distribución de presiones y caudal, para un número cualquiera de ranuras talladas en la cara del patín, da lugar a las ecuaciones siguientes:

Se generalizan, inicialmente, las constantes de integración:

Puesto que todas las constantes están dadas en función del parámetro k_1, se generalizará inicialmente esta constante En las ecuaciones siguientes, se debe tener presente que $1< i < n$, donde n es el número de caras paralelas que posee el patín, incluyendo como cara la central del patín y la ranura o las ranuras. Véase que el número mínimo de caras que un patín de estas características puede tener es "n = 2", que obedece a un patín que posee únicamente la cara central y la cara deslizante. Para el patín deslizante objeto estudio, se observa que n = 4.

$$k_1 = \frac{\left[p_{salida} - p_{entrada} - \frac{3\mu\omega\alpha \sin\theta}{2}\left[\sum_{i=1}^{i=n} \frac{r_{mi}\left(r_{i-1}^2 - r_i^2\right)}{\left(h_{0i} + \alpha r_{mi}\cos\theta\right)^3}\right] - 3\mu\omega\alpha \sin\theta\left[\sum_{i=1}^{i=(n-1)} \frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)\left[\sum_{j=1}^{j=i} r_j^2\left(r_{m(j+1)} - r_{mj}\right)\right]}{\left(h_{0(i+1)} + \alpha r_{m(i+1)}\cos\theta\right)^3}\right]\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\ln\left(\frac{r_i}{r_{(i-1)}}\right)}{\left(h_{0i} + \alpha r_{mi}\cos\theta\right)^3}} \quad (36)$$

La ecuación genérica para las constantes impares k_3, k_5, k_7,… será

$$k_L = 3\mu\omega\alpha \sin\theta\left(\sum_{j=1}^{j=\left(\frac{L-1}{2}\right)} \left[r_j^2\left[r_{m(j+1)} - r_{mj}\right]\right]\right) + k_1 \quad (37)$$

donde el valor de "L" tiene que ser impar y entre $3 \le L \le (2n-1)$.

La ecuación genérica para las constantes pares k_2, k_4, k_6, k_8 ….será:

$$k_M = P_{inlet} + \left\{\sum_{i=1}^{i=\left(\frac{M-2}{2}\right)}\left(\frac{\ln\left(\frac{r_i}{r_{(i-1)}}\right)}{\left(h_{0i} + \alpha\, r_{mi}\cos\theta\right)^3}\right) - \frac{\ln r_{\left(\frac{M-2}{2}\right)}}{\left(h_{0(M/2)} + \alpha\ r_{m(M/2)}\cos\theta\right)^3}\right\} k_1 +$$

$$+\frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta}{2}\left\{\sum_{i=1}^{i=\left(\frac{M-2}{2}\right)}\left(\frac{r_{mi}\left(r_{i-1}^2-r_i^2\right)}{\left(h_{0i}+\alpha r_{mi}\cos\theta\right)^3}\right)+\frac{r_{m(M/2)}\,r^2_{\left(\frac{M-2}{2}\right)}}{\left(h_{0(M/2)}+\alpha r_{m(M/2)}\cos\theta\right)^3}\right\}+$$

$$+3\mu\omega\alpha\sin\theta\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=\left(\frac{M-4}{2}\right)}\left(\frac{\left[\displaystyle\sum_{j=1}^{j=i}\left[r_j^2\left(r_{m(j+1)}-r_{mj}\right)\right]\right]\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}{\left(h_{0(i+1)}+\alpha r_{m(i+1)}\cos\theta\right)^3}\right)\\ \\ -\dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{j=\left(\frac{M-2}{2}\right)}\left(r_j^2\left(r_{m(j+1)}-r_{mj}\right)\right)}{\left(h_{0(M/2)}+\alpha r_{m(M/2)}\cos\theta\right)^3}\ln r_{\left(\frac{M-2}{2}\right)}\end{array}\right\} \qquad (38)$$

Los valores de la variable M en la ecuación 38 han de ser pares y estar dentro del margen $2 \le M \le 2n$. Cuando se desarrollen las ecuaciones explícitas partiendo de las ecuaciones genéricas, se debe recordar que, cuando aparezca un sumatorio del tipo $\sum_{\text{límite inferior}}^{\text{límite superior}}$ si el límite superior tiene un valor más pequeño que el límite inferior, significa que todo el término que queda afectado por el sumatorio tendrá el valor 0.

La ecuación genérica que da lugar a la distribución de presión en cualquier punto del patín toma la forma:

$$p_i = p_{entrada} + k_1\left[\frac{\ln\left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)}{\left(h_{0i}+\alpha r_{mi}\cos\theta\right)^3}+\sum_{j=2}^{j=i}\frac{\ln\left(\frac{r_{j-1}}{r_{j-2}}\right)}{\left(h_{0(j-1)}+\alpha r_{m(j-1)}\cos\theta\right)^3}\right]+$$

$$\frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta}{2}\left[\frac{r_{mi}\left[r_{i-1}^2-r^2\right]}{\left(h_{0i}+\alpha r_{mi}\cos\theta\right)^3}+\sum_{j=2}^{j=i}\frac{r_{m(j-1)}\left[r_{j-2}^2-r_{j-1}^2\right]}{\left(h_{0(j-1)}+\alpha r_{m(j-1)}\cos\theta\right)^3}\right]+$$

$$3\mu\omega\alpha\sin\theta\left[\frac{\left[\displaystyle\sum_{j=2}^{j=i}r_{j-1}^2\left[r_{mj}-r_{m(j-1)}\right]\right]}{\left(h_{0i}+\alpha r_{mi}\cos\theta\right)^3}\ln\left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)+\sum_{j=3}^{j=i}\left[\frac{\ln\left(\frac{r_{j-1}}{r_{j-2}}\right)\left[\displaystyle\sum_{k=3}^{k=i}r_{k-2}^2\left[r_{m(k-1)}-r_{m(k-2)}\right]\right]}{\left(h_{0(j-1)}+\alpha r_{m(j-1)}\cos\theta\right)^3}\right]\right] \qquad (39)$$

La ecuación genérica que caracterizaría el caudal de fugas sigue siendo la ecuación 35, aunque cuando el valor de la constante k_1 es el genérico.

La figura que se muestra a continuación (Fig. 63.2), caracteriza el caudal de fugas existente entre el patín deslizante y la placa base en función de la posición angular del patín y para diferentes ángulos de inclinación del mismo. Esta información se obtiene partiendo de la ecuación 35.

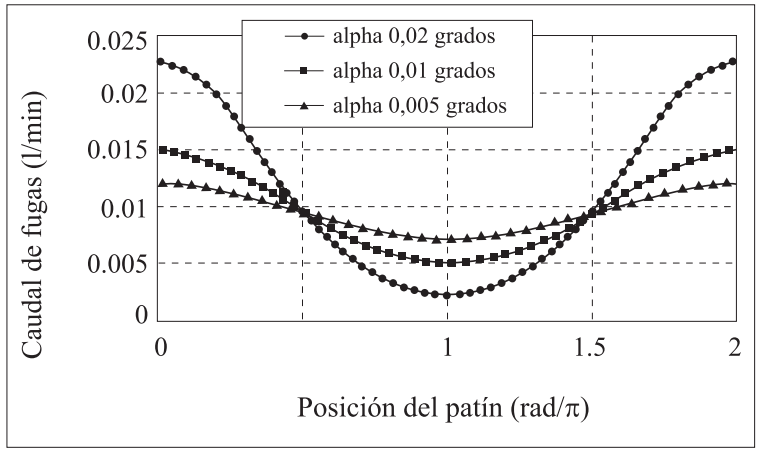


Fig. 63.2 Caudal de fugas en función de la posición angular del patín. Distancia central h02 = 15 micras, Palimentación = 100 bar

La figura 63.3 representa el caudal de fugas (en porcentaje respecto al caudal que tendría el patín situado paralelo a la placa base) entre el patín deslizante y la placa base, para diferentes distancias entre la parte central del patín y la placa base, y diferentes inclinaciones del patín. Obsérvese que la variación de caudal en porcentaje es independiente de la presión de alimentación. Esta información se obtiene al integrar la ecuación 35.

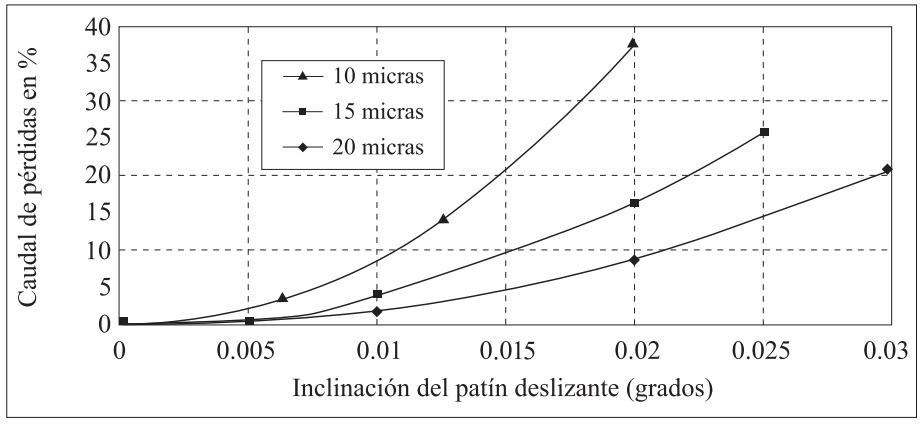


Fig. 63.3 Caudal de fugas del patín deslizante, en porcentaje respecto al caudal cuando el patín está plano

La figura 63.4 presenta la caída de presión en el intersticio patín deslizante/placa base, incluyendo la presión en la parte central del patín y en la ranura tallada sobre el mismo. Este gráfico se obtiene al representar las ecuaciones de la 31 a la 34.

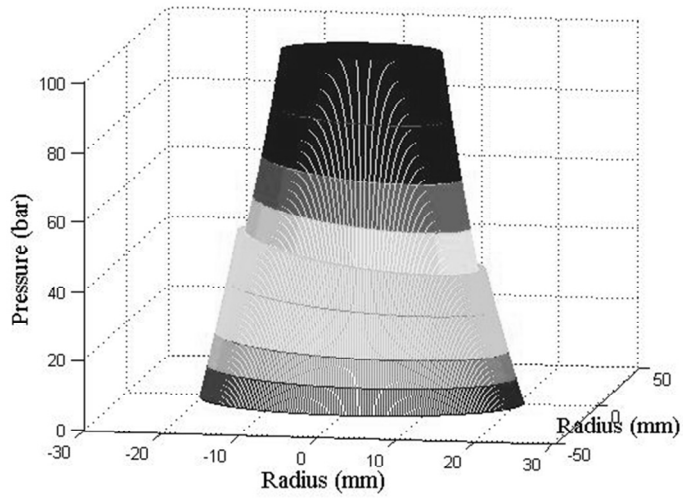


Fig. 63.4
Distribución de presiones existente entre el patín y la placa base
h02=15 micras
α =0,01 grados
ω = 25,12 rad/s

Problema 64

Enunciado

Sea el pistón que se detalla en la figura 64.1, el cual es uno de los nueve pistones que forman parte de una bomba de pistones axiales. El movimiento alternativo del pistón está definido por la ecuación $u = -R_p \tan\alpha \sin(\omega t)\ \omega$, donde R_P es el radio del plato inclinado, α es la inclinación de dicho plato inclinado y ω es la velocidad angular a la que gira la bomba, parámetros que son constantes y conocidos. Las dimensiones del pistón se especifican en la figura 64.2. Determine el caudal temporal de fugas entre pistón y camisa, así como la distribución de presiones a lo largo del mismo. Deben tenerse en cuenta las entallas talladas en el pistón.

Fig. 64.1
Pistón objeto de estudio.
Cortesía de Oilgear Towler

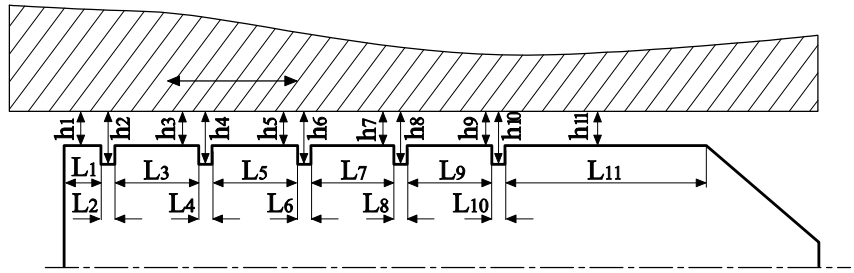


Fig. 64.2
Esquema del pistón y camisa con sus dimensiones consideradas

Resolución

En este caso particular, para desarrollar las ecuaciones requeridas, se partirá de la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas y flujo unidireccional, bidimensional. El flujo entre pistón y camisa se caracteriza como flujo de Couette – Poiseuille. (V. en la figura 64.2), que la distancia entre pistón y camisa se considera constante en todo punto, lo cual es una idealización de la realidad.

Las hipótesis de partida consideradas para este problema son:

- El flujo se considera laminar en todo punto.
- El flujo se considera bidimensional.
- Existe movimiento relativo entre pistón y camisa.
- El espacio existente entre pistón y camisa se simula como flujo entre dos placas planas paralelas.
- No se considera la excentricidad existente entre pistón y camisa.
- Cada una de las superficies del pistón, como las ranuras, se modelizarán como placas planas.

Las dimensiones conocidas del pistón son:

- $h_1 = h_3 = h_5 = h_7 = h_9 = h_{11} = 2{,}5$ micras.
- $h_2 = h_4 = h_6 = h_8 = h_{10} = h_1 + 0{,}4$ mm.
- $L_1 = 1{,}42$ mm
- $L_{11} = 19{,}5$ mm
- $L_2 = L_4 = L_6 = L_8 = L_{10} = 0{,}88$ mm
- $L_3 = L_5 = L_7 = L_9 = 4$ mm

La ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas puede ser dada como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0 \qquad (1)$$

Su integración da lugar a:

$$P = \frac{A\mu}{h^3}x + B \tag{2}$$

La ecuación 2 proporciona la distribución de presiones a lo largo del eje x, eje principal del pistón; las constantes A y B deben ser halladas mediante las condiciones de contorno.

El flujo de Couette – Poiseuille entre dos placas planas paralelas se define como:

$$\dot{V} = \frac{h\,u}{2} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{h^3}{12\mu} \tag{3}$$

Sustituyendo la primera integración de la ecuación 1 en la ecuación 3, se obtiene

$$\dot{V} = \frac{h\,u}{2} - \frac{A}{12} \tag{4}$$

Las ecuaciones 2 y 4 son aplicables a cualquier par de placas planas paralelas, con lo que, para el primero de los pares de placas planas definidos en la figura 64.2, se establece:

$$P_1 = \frac{A\mu}{h^3}x + B \tag{5}$$

$$\dot{V}_1 = \frac{h_1\,u}{2} - \frac{A}{12} \tag{6}$$

El rango de aplicabilidad de estas dos ecuaciones es para $0 \le X \le l_1$.

Para el último de los pares de placas definido en la figura 64.2, se tiene

$$P_{11} = \frac{U\mu}{h_{11}^3}x + V \tag{7}$$

$$\dot{V}_{11} = \frac{h_{11}\,u}{2} - \frac{U}{12} \tag{8}$$

El rango de aplicabilidad de estas dos ecuaciones es

$$\left(\sum_{i=1}^{i=10} l_i\right) \le x \le \left(\sum_{i=1}^{i=11} l_i\right) \tag{9}$$

Obsérvese que, para el caso en estudio, aparecen ecuaciones similares a las presentadas para los nueve pares de placas planas que se encuentran entré la primera y la última definidas aquí

Las constantes A….V deben ser halladas mediante las condiciones de contorno.

Para el presente estudio, se observa que aparecen un total de 22 ecuaciones con 22 constantes a determinar. En cada una de las dos superficies planas, se pueden definir las condiciones de contorno como

$$x = \sum_{j=1}^{j=i} l_j \; ; \quad P_i = P_{i+1}; \qquad \dot{\forall}_i = \dot{\forall}_{i+1} \; ; \quad 1 \le i \le 10 \tag{10}$$

Asumiendo que las dimensiones son

$$l_2=l_4=l_6=l_8=l_{10}; \quad l_3=l_5=l_7=l_9; \quad h_1=h_3=h_5=h_7=h_9=h_{11}; \quad h_2=h_4=h_6=h_8=h_{10}; \tag{11}$$

El valor de cada una de las 22 constantes será

$$A = \frac{P_{tan\,que} - P_{cilindro} - C_{A2}}{\frac{\mu}{h_{11}^3} \sum_{i=1}^{i=11} l_i + C_{A1}} \tag{12}$$

Para el caso en estudio, se cumple que $A=E=I=M=Q=U; \quad B = P_{cilindro};$ (13)

donde se tiene que

$$C_{A1} = \mu \left[\frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \tag{14}$$

$$C_{A2} = 6u\mu \left[\frac{h_{10} - h_1}{h_{10}^3} (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \right] \tag{15}$$

De acuerdo con las especificaciones precedentes, se tiene:

$$C = K = G = O = S = 6u\,(h_2 - h_1) + A \tag{16}$$

$$D = A\mu \left[\frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1) + 6u\mu \left[\frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-l_1) + B; \tag{17}$$

$$F = A\mu \left[\frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] * (l_2) + 6u\mu \left[\frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (l_2) + B; \tag{18}$$

$$H = A\mu \left[\frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1 + l_3) + 6u\mu \left[\frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-(l_1 + l_3)) + B; \tag{19}$$

$$J = A\mu\left[\frac{1}{h_2^3}-\frac{1}{h_1^3}\right]*(l_2+l_4)+6u\mu\left[\frac{h_2-h_1}{h_2^3}\right]*(l_2+l_4)+B; \quad (20)$$

$$L = A\mu\left[\frac{1}{h_1^3}-\frac{1}{h_2^3}\right]*(l_1+l_3+l_5)+6u\mu\left[\frac{h_2-h_1}{h_2^3}\right]*(-(l_1+l_3+l_5))+B; \quad (21)$$

$$N = A\mu\left[\frac{1}{h_2^3}-\frac{1}{h_1^3}\right]*(l_2+l_4+l_6)+6u\mu\left[\frac{h_2-h_1}{h_2^3}\right]*(l_2+l_4+l_6)+B; \quad (22)$$

$$P = A\mu\left[\frac{1}{h_1^3}-\frac{1}{h_2^3}\right]*(l_1+l_3+l_5+l_7)+6u\mu\left[\frac{h_2-h_1}{h_2^3}\right]*(-(l_1+l_3+l_5+l_7))+B \quad (23)$$

$$R = A\mu\left[\frac{1}{h_2^3}-\frac{1}{h_1^3}\right]*(l_2+l_4+l_6+l_8)+6u\mu\left[\frac{h_2-h_1}{h_2^3}\right]*(l_2+l_4+l_6+l_8)+B; \quad (24)$$

$$T = A\mu\left[\frac{1}{h_1^3}-\frac{1}{h_2^3}\right]*(l_1+l_3+l_5+l_7+l_9)+6u\mu\left[\frac{h_2-h_1}{h_2^3}\right]*(-(l_1+l_3+l_5+l_7+l_9))+B \quad (25)$$

$$V = A\mu\left[\frac{1}{h_2^3}-\frac{1}{h_1^3}\right]*(l_2+l_4+l_6+l_8+l_{10})+6u\mu\left[\frac{h_2-h_1}{h_2^3}\right]*(l_2+l_4+l_6+l_8+l_{10})+B; \quad (26)$$

Con este colectivo de ecuaciones, es ahora posible hallar la distribución de presiones a lo largo de la longitud del pistón, teniendo además en cuenta las cinco ranuras talladas en el mismo. De hecho, estas ecuaciones permiten investigar, el incremento de presión creado en cada una de las ranuras, en función de las dimensiones de las mismas y de la velocidad del pistón.

Tradicionalmente, se asume que el caudal de fugas entre pistón y camisa es constante, y sigue una relación lineal con la diferencia de presiones existente entre extremos del pistón. De las ecuaciones acabadas de hallar, se observa que el caudal de fugas entre pistón y camisa es altamente dependiente del movimiento relativo del pistón. Obsérvese que la velocidad del pistón tiene forma senoidal y está definida por la ecuación establecida en el enunciado:

$$u = -R_p \tan\alpha \sin(\omega t) \omega \quad (27)$$

Sustituyendo las constantes determinadas en cada una de las 11 ecuaciones del caudal de fugas, y teniendo en cuenta además la ecuación 27, se obtiene una ecuación que caracteriza el caudal de fugas temporal entre pistón y camisa.

$$q_p = \pi d\left[\frac{h_1 R_p \tan\alpha\ \left(-\sin(\omega t)\right)\omega}{2}\right] - \frac{\pi d}{12} * \left[\frac{P_{Tank} - P_{interior} - 6R_p\ \tan\alpha\left(-\sin(\omega t)\right)\omega\mu\left[\frac{h_{10}-h_1}{h_{10}^3}\right](l_2+l_4+l_6+l_8+l_{10})}{\frac{\mu}{h_{11}^3}(l_1+l_2+l_3+.....+l_{11})+\mu\left[\left(\frac{1}{h_2^3}-\frac{1}{h_1^3}\right)(l_2+l_4+l_6+l_8+l_{10})\right]}\right] \quad (28)$$

En realidad, el caudal total de fugas entre pistón y camisa, es la suma de los caudales de fugas de cada uno de los pistones que en un momento dado están sometidos a presión, con lo que este caudal total se puede dar como

$$q_t = \sum_{p=1}^{p=n'} q_p \quad (29)$$

donde n´ es el número de pistones que en cada instante están sometidos a presión.

La ecuación (28) asume que la totalidad del pistón está en todo momento, en el interior del barril, aunque en realidad esto no es así, dado que la parte inferior de los pistones sale fuera del barril cuando los pistones están en su punto muerto inferior.

Con el fin de considerar la longitud real del pistón que en todo momento está en el interior del barril, se ha creado la ecuación 30.

$$q_p = \pi d\left[\frac{h_1 R_p \tan\alpha\ \left(-\sin(\omega t)\right)\omega}{2}\right] - \frac{\pi d}{12} * \left[\frac{P_{Tank} - P_{interior} - 6R_p\ \tan\alpha\left(-\sin(\omega t)\right)\omega\mu\left[\frac{h_{10}-h_1}{h_{10}^3}\right](l_2+l_4+l_6+l_8+l_{10})}{\frac{\mu}{h_{11}^3}\left(l_1+l_2+l_3+.....+l_{11}-\frac{0.0195}{2}-R_p\tan\alpha\cos(\omega t)\right)+\mu\left[\left(\frac{1}{h_2^3}-\frac{1}{h_1^3}\right)(l_2+l_4+l_6+l_8+l_{10})\right]}\right] \quad (30)$$

La ecuación 30 caracteriza el caudal temporal de fugas entre pistón y camisa, en función del intersticio existente entre ambos, del gradiente de presiones entre extremos del pistón, de la velocidad de rotación de la bomba y de las características geométricas del pistón y la bomba, (plato inclinado). En esta ecuación se ha de entender que, para t = 0, el pistón está situado en su punto muerto inferior.

La distribución de presiones a lo largo del eje del pistón se determinará al sustituir las constantes halladas en las ecuaciones 5, 7 y sus nueve ecuaciones equivalentes. La representación gráfica de esta distribución de presiones para el caso en que existan las 5 ranuras cortadas a lo largo del eje del pistón y para el caso en que no exista ranura alguna se presenta en la figura 64.3, donde se puede apreciar claramente el efecto que las ranuras causan sobre dicha distribución de presiones.

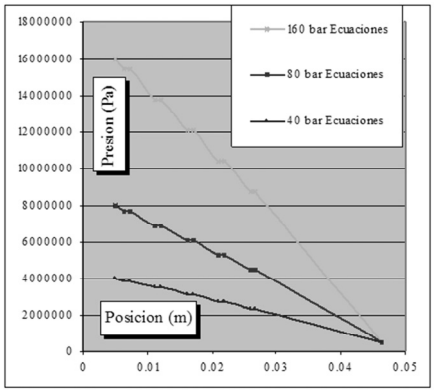


Fig. 64.3
Distribución de presiones a lo largo del eje del pistón

La figura 64.4 muestra el caudal de fugas existente entre pistón y camisa, en función de la velocidad del pistón y para diferentes presiones de la cámara del cilindro. Obsérvese que el flujo de Couette, asociado a la velocidad de desplazamiento del pistón, es el preponderante.

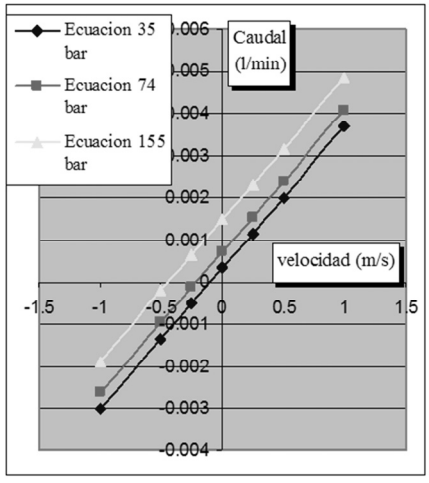


Fig. 64.4
Caudal de fugas de un solo pistón

En la figura 64.5, se presenta el caudal de fugas, suma de la aportación de los 4-5 pistones que constantemente están en contacto con la cámara del cilindro sometida a presión. Obsérvese que en realidad, el caudal de fugas es hacia la cámara del pistón, es decir, negativo. En este mismo gráfico, se presenta la aportación del número de pistones cuya cámara del cilindro está en contacto con el tanque y que están yendo del punto muerto superior al punto muerto inferior, véase que el caudal neto para este caso es hacia el tanque.

Por último, la figura 64.6 muestra el caudal de fugas dinámico, resultante de incluir la aportación de los nueve pistones que forman la bomba, véase que el caudal resultante es hacia el tanque. Dicho caudal de fugas resultante, es mayor a medida que la presión a la que trabaja la bomba aumenta, resultado que era de esperar.

Fig. 64.5 (Izquierda) Caudal de fugas para 4-5 pistones

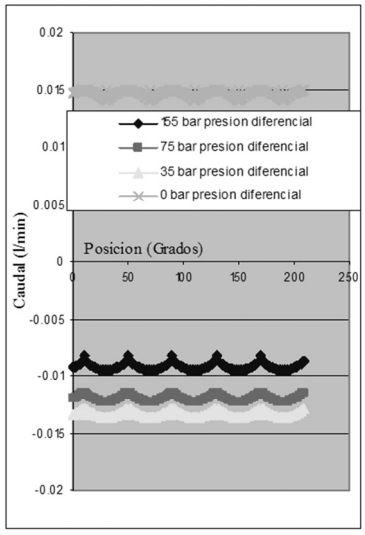
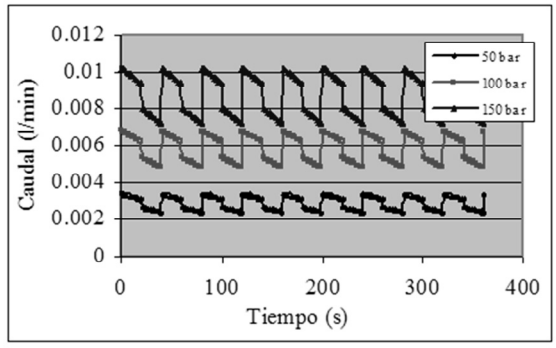


Fig. 64.6 (Derecha) Caudal de fugas para los 9 pistones

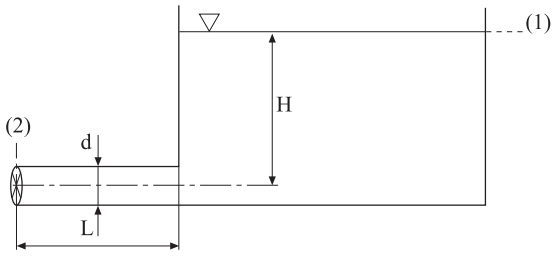


Problema 65

Enunciado

Un tanque de grandes dimensiones se vacía mediante la tubería que se esquematiza en la figura. Determine la velocidad del agua a la salida del conducto en función del tiempo, una vez que se abra la válvula, la cual está situada en el extremo del conducto más alejado del tanque. Se supone que el conducto descarga a la atmósfera.

Fig. 65.1



Considérese que:

- la sección del tanque es muy superior a la sección del conducto.
- el flujo en el interior del conducto es uniforme.

Resolución

Se distinguen tres zonas características: depósito, entrada conducto, y conducto.

Si "u" es la velocidad del fluido en cualquier punto del conducto, los tiempos de residencia del fluido en el conducto se pueden definir como:

$$T_{conducto} = \frac{L}{u}$$

$$T_{entrada\ conducto} = \frac{D}{u}$$

$$T_{de\ residencia\ en\ el\ depósito} = \frac{\forall}{D^2 u}$$

donde L= longitud del conducto; D= diámetro del conducto; ∀= volumen del depósito.

Relacionando estos tiempos, se observa que:

$$\frac{T_{conducto}}{T_{tiempo\ de\ residencia\ en\ el\ depósito}} = \frac{L}{u}\frac{D^2 u}{\forall} = \frac{LD^2}{\forall} << 1$$

Puesto que el volumen del fluido en el depósito es mucho mayor que el volumen de fluido en el conducto, el tiempo de residencia del fluido en el depósito será mucho mayor que el tiempo en el conducto.

$$\frac{T_{entrada\ al\ conducto}}{T_{conducto}} = \frac{D}{u}\frac{u}{L} = \frac{D}{L} << 1$$

Dado que la longitud del conducto es mucho mayor que su diámetro, el tiempo de residencia del fluido en el conducto será mucho mayor que el tiempo que se necesita para que el fluido atraviese la entrada del conducto.

Obsérvese que aparecen tres escalas de tiempos: $T_{depósito} >> T_{conducto} >> T_{entrada\ al\ conducto}$

De la aplicación de la ecuación de continuidad entre el nivel del depósito y el extremo del conducto se puede obtener el orden de magnitud de las velocidades en el conducto y en el depósito:

$$D_{dep}^{\ 2} \cdot u_{dep} = u_c \cdot D^2$$

Puesto que el diámetro del depósito es muy superior al del conducto, se puede concluir que la velocidad del fluido en el depósito es despreciable. Así pues, en el estudio de la aceleración del fluido en el conducto, la altura del depósito se considerará constante.

La ecuación de cantidad de movimiento aplicada a lo largo del conducto establece:

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + \rho g + \nabla\tau$$

Considerando flujo ideal (esfuerzos cortantes despreciables), flujo irrotacional y unidireccional, se obtiene:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla(P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z) = 0$$

Para fluido incompresible y en dirección del movimiento, (eje x) se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz) = 0$$

Integrando entre las secciones de entrada y salida del conducto, y recordando que tanto la velocidad como la cota son las mismas en ambos puntos, se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho}\right) = 0$$

Ecuación que se puede dar como:

$$\int_0^L \frac{dv}{dt}dx + \int_{P_e}^{P_s} d\left(\frac{P}{\rho}\right) = 0$$

Su integración dará lugar a:

$$L\frac{dv}{dt} + \frac{Ps}{\rho} - \frac{Pe}{\rho} = 0$$

La relación entre la presión estática a la entrada del conducto y la presión dinámica se establece:

$$\frac{P_{\text{fondo del depósito}}}{\rho} + \frac{v^2_{\text{fondo del depósito}}}{2} + gz_{\text{fondo del depósito}} =$$
$$\frac{P_{\text{entrada al conducto}}}{\rho} + \frac{v^2_{\text{entrada al conducto}}}{2} + gz_{\text{entrada al conducto}}$$

Si se entiende que la velocidad en el fondo del depósito es nula y que la cota es la misma que la de la entrada del conducto, se tiene.

$$\frac{P_{\text{fondo del depósito}}}{\rho} = \frac{P_{\text{entrada al conducto}}}{\rho} + \frac{v^2_{\text{entrada al conducto}}}{2}$$

Por otro lado, la presión en el fondo del depósito, según la estática de fluidos, es:

$$P_{\text{fondo del depósito}} = \rho g H$$

de donde:

$$\frac{\rho\, g\, H}{\rho} = \frac{P_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2}; \quad \frac{P_e}{\rho} = gH - \frac{v_e^2}{2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial hallada entre la entrada y salida del depósito se tiene:

$$L\frac{dv}{dt} + \frac{P_s}{\rho} - gH + \frac{v_e^2}{2} = 0$$

Suponiendo que la presión a la salida del depósito es la presión atmosférica:

$$\int_0^v \frac{dv}{2gH - v^2} = \int_0^t \frac{dt}{2L}$$

$$\int_0^v \frac{dv}{2gH - v^2} = \int_0^v \frac{dv}{2gH - v^2}\frac{2gH}{2gH}$$

$$\int_0^v \frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right)^2}\frac{1}{2gH} = \frac{1}{\sqrt{2gH}}\operatorname{arctgh}\left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\int_0^t \frac{dt}{2L} = \frac{1}{\sqrt{2gH}}\operatorname{arctgh}\left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right);$$

$$\int_0^t \sqrt{2gH}\,\frac{dt}{2L} = \operatorname{arctgh}\left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right);$$

$$\operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH}\,\frac{t}{2L}\right) = \frac{v}{\sqrt{2gH}};$$

$$v = \sqrt{2gH}\cdot\operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH}\,\frac{t}{2L}\right)$$

ecuación que determina la variación temporal de la velocidad en el conducto.

Un método de resolución alternativo es el siguiente:

Partiendo de la ecuación de Navier Stokes en dirección X:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);$$

si el fluido es ideal $\mu = 0$;

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x ; \qquad \text{sabiendo que} \qquad g_x=-\nabla(gz)$$

$$g_x=-g\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho g\frac{\partial z}{\partial x} \;;$$

multiplicando por dx:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx+udu\right)=-dP-\rho g dz \;;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}dx=-\frac{dP}{\rho}-gdz-udu \;;$$

$$\int_1^2\frac{du}{dt}dx=-\left[\int_1^2\frac{dP}{\rho}+\int_1^2 gdz+\int_1^2 udu\right] ;$$

$$\int_1^2\frac{du}{dt}dx=\frac{P_1-P_2}{\rho}+g\left(z_1-z_2\right)+\frac{u_1^2-u_2^2}{2} \;;$$

$$\frac{P_1}{\rho}+gz_1+\frac{u_1^2}{2}=\frac{P_2}{\rho}+gz_2+\frac{u_2^2}{2}+\int_1^2\frac{du}{dt}dx \;;$$

Como el depósito es muy grande, sólo aparecerá variación de velocidad en dirección x:

$$\int_1^2\frac{du_x}{dt}dx=\int_0^L\frac{du_x}{dt}dx$$

$$\int_0^L\frac{du_x}{dt}dx=\int_0^L\frac{du_2}{dt}dx=L\frac{du_2}{dt}$$

Trabajando con presiones relativas $P_1\cong P_2\cong 0$ y asumiendo $v_1\cong 0$:

$$gz_1=gz_2+\frac{u_2^2}{2}+L\frac{du_2}{dt}$$

$$g\left(z_1 - z_2\right) - \frac{u_2^2}{2} = L\frac{du_2}{dt} \ ;$$

$$\frac{2gH - u_2^2}{2} = L\frac{du_2}{dt} \ ;$$

$\frac{dt}{2L} = \left(2gH - u_2^2\right)^{-1} du_2$; si se soluciona a parte la segunda parte de la ecuación:

$$\int_0^{u_2} \frac{du_2}{2gH - u_2^2} = \int_0^{u_2} \frac{du_2}{2gH - u_2^2}\frac{2gH}{2gH}$$

$$\int_0^{u_2} \frac{du_2}{1 - \left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right)^2}\frac{1}{2gH} = \frac{1}{\sqrt{2gH}}\operatorname{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right)$$

y, sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\int_0^t \frac{dt}{2L} = \frac{1}{\sqrt{2gH}}\operatorname{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right) \ ;$$

$$\int_0^t \sqrt{2gH}\,\frac{dt}{2L} = \operatorname{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right) \ ;$$

$$\operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH}\,\frac{t}{2L}\right) = \frac{u_2}{\sqrt{2gH}} \ ;$$

$$u_2 = \sqrt{2gH}\cdot\operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH}\,\frac{t}{2L}\right)$$

Problema 66

Enunciado

Un motor de aviación cuya velocidad de giro es de 10.000 rpm está soportado por dos cojinetes hidrostáticos. La carga dinámica en dirección vertical del motor se ha estimado en 23.800 N y el diámetro del eje principal es de 48 mm.

Si se quiere diseñar los cojinetes utilizando la teoría de longitud infinita, y se prevé que la longitud de cada uno de ellos sea de 50 mm, y conociendo que el radio del estator (en el cojinete) es 20 micras mayor que el radio del eje principal, halle:

1. Cual será el valor del número de Sommerfeld.
2. Si existirá contacto metal-metal entre eje y estator y en cualquier caso, cuál será la excentricidad entre ambos.
3. Si se quiere que la excentricidad máxima sea de 2 micras y se pretende reducir la longitud de cada uno de los cojinetes a 30 mm, determine cuál será la carga máxima en dirección vertical que podrá soportar.

Viscosidad dinámica del aceite lubricante: $\mu = 0{,}02$ Kg/(m s)

Resolución

1. El número de Sommerfeld viene definido por:

$$So = Fy \cdot \frac{\psi^2}{\mu \omega R} = 6 \cdot \frac{I_2 \cdot I_5 - I_3 \cdot I_4}{I_3};$$

donde:

F_y = fuerza vertical por unidad de longitud del cojinete;

$$\psi = \frac{R_{ext} - R_{eje}}{R_{eje}} = \frac{\overline{h}}{R_{eje}} = \frac{0{,}020\,mm}{24\,mm} = 8{,}33 \cdot 10^{-4};$$

R = radio del eje;

ω = velocidad angular del eje;

μ = viscosidad dinámica del fluido de trabajo = 0,02 Kg/(m s);

$$I_1 = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad I_2 = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad I_3 = \frac{\pi\left(2+\varepsilon^2\right)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$I_4 = \frac{I_2 - I_1}{\varepsilon}; \quad I_5 = \frac{I_3 - I_2}{\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{e}{\overline{h}};$$

El valor del número de Sommerfeld será:

$$\frac{23.800}{2 \cdot 0{,}05} \cdot \frac{\left(8{,}33 \cdot 10^{-4}\right)^2}{0{,}02 \cdot \frac{10.000 \cdot 2\pi}{60} \cdot 0{,}024} = \underline{0{,}3288} = So;$$

2. Una manera de determinar la existencia o no de contacto entre eje y estator será mediante la utilización de un sistema iterativo.

Suponiendo, por ejemplo, que la excentricidad *e* fuese de 10 μm, se tiene:

$$\varepsilon = \frac{e}{h} = \frac{10}{20} = 0{,}5;$$

donde:

$$I_1 = \frac{2\pi}{(1-0{,}5^2)^{\frac{1}{2}}} = 7{,}2551; \qquad I_2 = \frac{2\pi}{(1-0{,}5^2)^{\frac{3}{2}}} = 9{,}6735;$$

$$I_3 = \frac{\pi\left(2+0{,}5^2\right)}{(1-0{,}5^2)^{\frac{5}{2}}} = 14{,}51039; \qquad I_4 = \frac{I_2 - I_1}{0{,}5} = \frac{9{,}6735 - 7{,}2551}{0{,}5} = 4{,}8368;$$

$$I_5 = \frac{I_3 - I_2}{0.5} = \frac{14{,}51039 - 9{,}6735}{0{,}5} = 9{,}6737;$$

con lo cual el número de Sommerfeld será:

$$6 \cdot \frac{9{,}6735 \cdot 9{,}6737 - 14{,}51039 \cdot 4{,}8368}{14{,}51039} = 9{,}6736;$$

Puesto que este valor es muy superior al número de Sommerfeld hallado anteriormente, indica que la excentricidad será mucho menor a 10 micras.

Si la excentricidad fuese de 1 micra:

$$\varepsilon = \frac{e}{h} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$I_1 = \frac{2R}{(1-0{,}05^2)^{\frac{1}{2}}} = 6{,}291054; \qquad I_2 = \frac{2R}{(1-0{,}05^2)^{\frac{3}{2}}} = 6{,}3068211;$$

$$I_3 = \frac{R\left(2+0{,}05^2\right)}{(1-0{,}05^2)^{\frac{5}{2}}} = 6{,}330531;$$

$$I_4 = \frac{I_2 - I_1}{0{,}05} = \frac{6{,}3068211 - 6{,}291054}{0{,}05} = 0{,}315342;$$

$$I_5 = \frac{I_3 - I_2}{0{,}05} = \frac{6{,}330531 - 6{,}3068211}{0{,}05} = 0{,}4741;$$

$$6 \cdot \frac{6{,}3068211 \cdot 0{,}4741 - 6{,}330531 \cdot 0{,}315342}{6{,}330531} = 0{,}941894;$$

Suponiendo como primera aproximación una función lineal, entrando en la gráfica 66.1 con el valor del número de Sommerfeld de 0,3288, se obtiene el valor de la excentricidad.

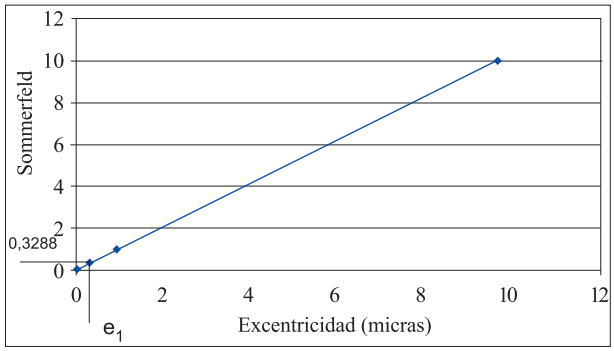


Fig 66.1
Relación entre el número de Sommerfeld y la excentricidad

Así, el valor de la excentricidad será:

$$\text{tg}\alpha = \frac{9,6736 - 0,94184}{10 - 1} = 0,97019;$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{0,94184 - 0,3288}{1 - e_i};$$

$$e_i = 0,3681 \text{micras}$$

Es la excentricidad aproximada que sufrirá el eje. Por tanto, no existirá contacto metal-metal entre eje y estator ya que la excentricidad es mucho menor de 20 micras.

3. Si la excentricidad máxima se requiere que sea de 2 micras:

$$\varepsilon = \frac{e}{h} = \frac{2}{20} = 0,1$$

$$I_1 = \frac{2\pi}{(1-0,1^2)^{\frac{1}{2}}} = 6,31483;$$

$$I_2 = \frac{2\pi}{(1-0,1^2)^{\frac{3}{2}}} = 6,37862;$$

$$I_3 = \frac{\pi\left(2+0,1^2\right)}{(1-0,1^2)^{\frac{5}{2}}} = 6,47527;$$

$$I_4 = \frac{I_2 - I_1}{0,1} = \frac{6,37862 - 6,31483}{0,1} = 0,6379;$$

$$I_5 = \frac{I_3 - I_2}{0,1} = \frac{6,47527 - 6,37862}{0,1} = 0,9665;$$

con lo cual, para este caso, el número de Sommerfeld será:

$$6 \cdot \frac{6,37862 \cdot 0,9665 - 6,47527 \cdot 0,6379}{6,47527} = 1,8850;$$

Por otro lado, el número de Sommerfeld para un cojinete de 3 centímetros de longitud se define:

$$\frac{F_y}{0,03}\cdot\frac{\left(8,33\cdot10^{-4}\right)^2}{0,02\cdot\frac{10.000\cdot2\pi}{60}\cdot0,024}=1,8850;$$

$$F_y=40.965,9\,\mathrm{N}$$

La fuerza que soportarían los dos cojinetes es el doble de la establecida aquí. Obsérvese que un aumento de la excentricidad entre estator y rotor implica un aumento significativo de la fuerza que el cojinete puede soportar.

Problema 67

Enunciado

Sea el cojinete cilíndrico que se muestra en la figura siguiente, el cual tiene una ranura longitudinal en donde la presión se considera conocida ($P_{entrada}$) . Aplicando la teoría para cojinetes infinitamente largos, determine:

1. La distribución de velocidades, el caudal circulante y la distribución de presiones en la película de fluido.

2. La fuerza vertical ejercida por la distribución de presiones y el par de giro.

3. Representar gráficamente la distribución de presiones en función del ángulo φ. Determinar la presión requerida en la ranura de entrada para asegurar la no existencia de cavitación en el cojinete.

4. Se desea que dos de estos cojinetes soporten un motor de aviación de 18.000N de peso y que gira a 30.000 rpm. El radio del eje es de R = 40 mm, y se debe estudiar la posibilidad de utilizar estatores con radios de R_s =40,05; 40,1 y 40,15 mm. La viscosidad del fluido se va a considerar constante e igual a μ = 0,02 Kg/(m s). El centro de la ranura esta situado en la posición angular θ = -40º. Determinar para los diferentes casos la longitud que ha de tener cada uno de los dos cojinetes.

5. Con el fin de entender mejor el efecto que la excentricidad causa sobre los parámetros de funcionamiciento, se pide graficar la fuerza de sustentación versus la velocidad de giro y la excentricidad, realizar las mismas gráficas con el número de Sommerfeld.

Comente las hipótesis realizadas.

Considerar que las integrales siguientes son conocidas.

$$\int_{-\theta}^{\gamma}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-1}\,d\varphi=I_1^* \qquad \int_{-\theta}^{\varphi_i}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi=I_{3P}^*$$

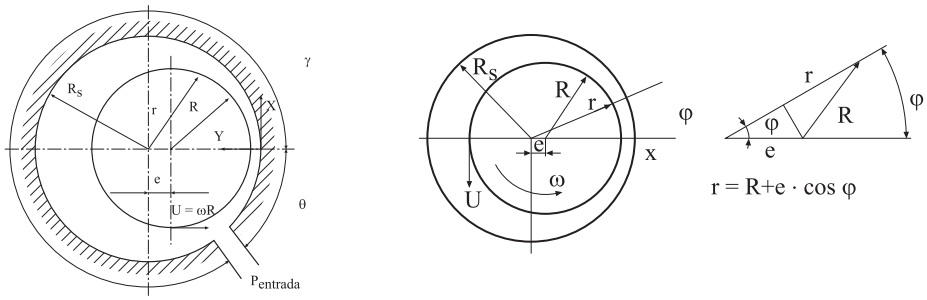
$$\int_{-\theta}^{\gamma}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi=I_2^* \qquad \int_{-\theta}^{\gamma}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\cos\varphi\,d\varphi=I_4^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi=I_3^* \qquad \int_{-\theta}^{\gamma}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\cos\varphi\,d\varphi=I_5^*$$

$$\int_{-\theta}^{\varphi_i}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi=I_{2P}^*$$

Fig. 67.1 (Izquierda) Conjunto estator-rotor para un cojinete largo

Fig. 67.2 (Derecha) Esquema de la relación entre radios



Obsérvese que las integrales I_2^* e I_{2P}^* son en realidad la misma integral; únicamente difieren los límites de integración. Lo mismo sucede con las integrales I_3^* e I_{3P}^*. Así, en realidad, aparecen cinco tipos de integrales diferentes. A continuación, se da la resolución de estas integrales.

Denominando Γ al término $\dfrac{\arctan h\left(\dfrac{(1+\varepsilon)\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{(-1+\varepsilon)(1+\varepsilon)}}\right)}{\sqrt{(-1+\varepsilon)(1+\varepsilon)}}$

Denominando Φ al término $\dfrac{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{(-1+\varepsilon)\left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2+1+\varepsilon\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2-\varepsilon\right)}$

Denominando Π al término $\dfrac{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{(-1+\varepsilon)\left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2+1+\varepsilon\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2-\varepsilon\right)^2}$

Las diversas integrales se pueden dar:

$$I_1^*=\int_{-\theta}^{\gamma}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-1}\,d\varphi=\left[-2\,\Gamma\right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_2^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\, d\varphi = \left[-\frac{2}{(1+\varepsilon)}\Gamma + \frac{4\,\varepsilon\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(1+\varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_{2P}^* = \int_{-\theta}^{\varphi_i} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\, d\varphi = \left[-\frac{2}{(1+\varepsilon)}\Gamma + \frac{4\,\varepsilon\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(1+\varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\varphi_i)}$$

$$I_3^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\, d\varphi =$$

$$= \left[-\frac{2}{(1+\varepsilon)^2}\Gamma + \frac{8\,\varepsilon\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{8\,\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}\left\{ -\frac{1}{4}\Pi - \frac{3}{4}\frac{\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(-1+\varepsilon)} \right\} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_{3P}^* = \int_{-\theta}^{\varphi_i} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\, d\varphi =$$

$$= \left[-\frac{2}{(1+\varepsilon)^2}\Gamma + \frac{8\,\varepsilon\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{8\,\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}\left\{ -\frac{1}{4}\Pi - \frac{3}{4}\frac{\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(-1+\varepsilon)} \right\} \right]_{(-\theta)}^{(\varphi_i)}$$

$$I_4^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\cos\varphi\, d\varphi = \left[\frac{2}{(1+\varepsilon)}\Gamma + \frac{4\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(1+\varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

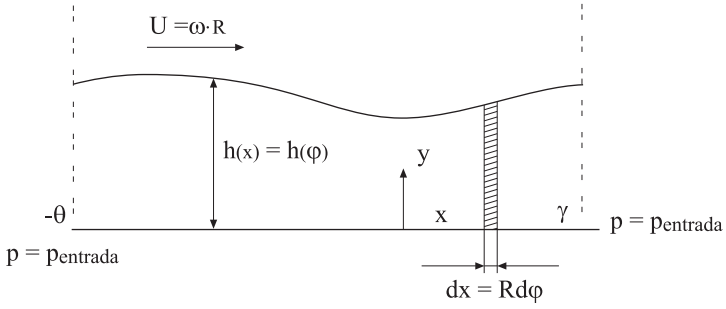
$$I_5^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{(1+\varepsilon)^2}\Gamma + \dfrac{2(2-2\,\varepsilon)\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(1+\varepsilon)^2} \\ + \dfrac{8\,\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\left\{ -\frac{1}{4}\Pi - \frac{3}{4}\dfrac{\left\{-\frac{1}{2}\Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)}\right\}}{(-1+\varepsilon)} \right\} \end{array} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

Resolución

Abriendo el cojinete, se observa que éste se puede considerar como una placa plana de altura variable. Algunas de las relaciones directas que se pueden extraer de las figuras representadas son:

Fig. 67.3



$$R_S - R = \bar{h}\ ;$$

$$\psi = \frac{\bar{h}}{R}\ ;$$

$$r = R + e\cdot\cos\varphi\ ;$$

$$\varepsilon = \frac{e}{\bar{h}}$$

$$h_\varphi = R_S - r = R_S - (R + e\cos\varphi) = R_S - R - e\cos\varphi = \bar{h} - e\cos\varphi = \bar{h}\left(1 - \varepsilon\cdot\cos\varphi\right);$$

El primer paso es determinar la distribución de velocidades en función del espesor de la película, dirección y, para ello se parte de la ecuación de continuidad para fluido unidireccional e incompresible, la cual se reduce a:

$$0 = \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

La ecuación de Navier Stokes, en coordenadas cartesianas, para el flujo bajo estudio toma la forma:

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

La integración de esta ecuación da lugar a:

$$V_x = V_\varphi = \frac{\partial P^*}{\partial x}\cdot\frac{1}{2\mu}\cdot y^2 + C_1 y + C_2$$

Las condiciones de contorno necesarias para determinar las dos constantes de integración son: y = 0, $V_x = 0$; y y = $h_{(\varphi)}$, $V_x = \omega R$. Con lo que las dos constantes de integración toman la forma:

$$C_2 = 0;\ C_1 = \frac{\omega R}{h_{(\varphi)}} - \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot h_{(\varphi)}$$

Con lo que la velocidad entre dos placas de fluido que se desplazan con velocidades relativas $\omega \cdot R$ queda definida como:

$$V_x = V_\varphi = \frac{\omega \cdot R \cdot y}{h_\varphi} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot y \cdot \left(y - h_\varphi \right)$$

El caudal circulante será:

$$\dot{\forall} = Q = \int_0^{h_\varphi} V_\varphi dy = \int_0^{h_\varphi} \left[\frac{\omega \cdot R \cdot y}{h_\varphi} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot y \cdot \left(y - h_\varphi \right) \right] \cdot dy\ ;$$

$$\dot{\forall} = \frac{\omega \cdot R \cdot h_\varphi}{2} - \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{12\mu} \cdot h_\varphi^3\ ;$$

Como el caudal circulante $\dot{\forall}$ ha de ser constante a lo largo de todo el cojinete, despejando $\frac{\partial P^*}{\partial x}$, se tiene:

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \left(\frac{\omega \cdot R \cdot h_\varphi}{2} - \dot{\forall} \right) \cdot \frac{12\mu}{h_\varphi^3} = \frac{6\,\mu \cdot \omega \cdot R}{h_\varphi^2} - \frac{12\mu \cdot \dot{\forall}}{h_\varphi^3}$$

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{dP^*}{R \cdot d\varphi}\ ;$$

$$\int_{P_{-\theta}}^{P_\gamma} dP^* = \int_{-\theta}^{\gamma} \left(\frac{6\,\mu \cdot \omega \cdot R}{h_\varphi{}^2} - \frac{12\mu \cdot \dot{\forall}_\theta}{h_\varphi{}^3} \right) R d\varphi = 0$$

Véase que la ecuación anterior es igual a cero, puesto que la presión en los puntos (-θ) y (γ) es la misma.

Despejando el valor del caudal volumétrico, se tiene:

$$\dot{\forall} = \int_{-\theta}^{\gamma} \frac{6\,\mu \cdot \omega \cdot R^2}{h_\varphi{}^2}\, d\varphi \cdot \frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{12\,\mu \cdot R}{h_\varphi{}^3} d\varphi} = \frac{\omega \cdot R}{2} \left[\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{d\varphi}{h_\varphi{}^2} \cdot \frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{d\varphi}{h_\varphi{}^3}} \right];$$

Adimensionalizando las integrales mediante el espesor medio de la película de líquido, se tiene:

$$\dot{\forall}=\frac{\omega\cdot R\cdot\overline{h}}{2}\left[\int_{-\theta}^{\gamma}\left(\frac{\overline{h}}{h_\varphi}\right)^2 d\varphi\cdot\frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma}\left(\frac{\overline{h}}{h_\varphi}\right)^3 d\varphi}\right];$$

y denominando:

$$\int_{-\theta}^{\gamma}\left(\frac{\overline{h}}{h_\varphi}\right)^2 d\varphi=\int_{-\theta}^{\gamma}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi=I_2^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma}\left(\frac{\overline{h}}{h_\varphi}\right)^3 d\varphi=\int_{-\theta}^{\gamma}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi=I_3^*$$

Se obtiene:

$$\dot{\forall}=\frac{\omega\cdot R\cdot\overline{h}}{2}\left[\frac{I_2^*}{I_3^*}\right]$$

Conocido el caudal, la distribución de presiones a lo largo del cojinete será:

$$\frac{dP^*}{dx}=\frac{dP^*}{R\cdot d\varphi}=\frac{6\mu\cdot\omega\cdot R}{h_\varphi^{\,2}}-\frac{12\mu\cdot\dot{\forall}}{h_\varphi^{\,3}}$$

$$\frac{dP^*}{d\varphi}=\frac{6\,\mu\cdot\omega\cdot R^2}{h_\varphi^{\,2}}-\frac{12\mu\cdot R}{h_\varphi^{\,3}}\cdot\frac{\omega\cdot R\cdot\overline{h}}{2}\frac{I_2^*}{I_3^*}$$

$$\frac{dP^*}{d\varphi}=6\mu\cdot\omega\cdot R^2\left[\frac{1}{h_\varphi^{\,2}}-\frac{\overline{h}}{h_\varphi^{\,3}}\frac{I_2^*}{I_3^*}\right]$$

Integrando entre la sección de entrada y un punto genérico φ_i, se tiene:

$$\int_{P_{\varphi=-\theta}=P_{entrada}}^{P_{\varphi=\varphi_i}=P_{genérica}} dP^*=\frac{6\,\mu\cdot\omega\cdot R^2}{\overline{h}^2}\left[\int_{-\theta}^{\varphi_i}\frac{\overline{h}^2}{h_\varphi^{\,2}}d\theta-\int_{-\theta}^{\varphi_i}\frac{\overline{h}^3}{h_\varphi^{\,3}}\frac{I_2^*}{I_3^*}d\varphi\right]$$

Denominando:

$$\int_{-\theta}^{\varphi_i}\frac{\overline{h}^2}{h_\varphi^{\,2}}d\varphi=\int_{-\theta}^{\varphi_i}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi=I_{2P}^*$$

$$\int_{-\theta}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^3}{h_\varphi^{\,3}} d\varphi = \int_{-\theta}^{\varphi_i} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\, d\varphi = I_{3P}^*$$

(Véase que la solución de estas dos integrales es función de φ_i)

Sustituyendo en la integral de la distribución de presiones, se llega a:

$$P_i^* - P^*_{entrada} = \frac{6\mu\cdot\omega\cdot R^2}{\bar{h}^2}\left[I_{2P}^* - I_{3P}^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

Recordando que: $\psi = \frac{\bar{h}}{R}$, la distribución de presiones puede darse como:

$$P_i^* - P^*_{entrada} = \frac{6\mu\cdot\omega}{\psi^2}\left[I_{2P}^* - I_{3P}^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

(Esta ecuación se puede representar para diferentes presiones de entrada, con el fin de evitar que aparezca cavitación).

2. La fuerza que el fluido a presión ejerce sobre el eje se determina del modo siguiente:

En dirección x:

$$F_x = -\int_{-\theta}^{\gamma} P_i^* \cos\varphi \cdot R \cdot d\varphi$$

Y en dirección y, será:

$$F_y = -\int_{-\theta}^{\gamma} P_i^* \sin\varphi \cdot R \cdot d\varphi$$

Integrando esta ecuación por partes, se obtiene:

$$u = P_i^* \rightarrow du = \frac{\partial P^*}{\partial\varphi} d\varphi$$

$$v = -\cos\varphi \rightarrow dv = \sin\varphi\, d\varphi$$

$$F_y = -R\left[P_i \left(-\cos\varphi\right)\Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} -\cos\varphi \frac{dP}{d\varphi} d\varphi \right]$$

De donde, sustituyendo la distribución de presiones:

$$F_y = R\cdot P_i^* \cos\varphi\Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} \cos\varphi \cdot 6\mu\cdot\omega\cdot R^3 \left[\frac{1}{h_\varphi^{\,2}} - \frac{\bar{h}}{h_\varphi^{\,3}} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right] d\theta$$

Multiplicando y diviendo por $\overline{h}^2$ se obtiene:

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos\varphi\Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} \frac{6\,\mu\cdot\omega\cdot R^3}{\overline{h}^2}\left[\frac{\overline{h}^2}{h_\varphi{}^2}\cos\varphi - \frac{\overline{h}^3}{h_\varphi{}^3}\frac{I_2^*}{I_3^*}\cos\varphi\right]d\varphi$$

Recordando que:

$$\int_{-\theta}^{\gamma}\frac{\overline{h}^2}{h_\varphi{}^2}\cos\varphi\,d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\cos\varphi\,d\varphi = I_4^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma}\frac{\overline{h}^3}{h_\varphi{}^3}\cos\varphi\,d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma}(1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\cos\varphi\,d\varphi = I_5^*$$

Se obtiene:

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos\varphi\Big|_{-\theta}^{\gamma} - \frac{6\mu\cdot\omega\cdot R^3}{\overline{h}^2}\left[I_4^* - I_5^*\frac{I_2^*}{I_3^*}\right]$$

Ecuación que puede representarse como.

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos\varphi\Big|_{-\theta}^{\gamma} - \frac{6\mu\cdot\omega\cdot R}{\psi^2}\left[I_4^* - I_5^*\frac{I_2^*}{I_3^*}\right]$$

El primer sumando del segundo término de esta ecuación, definido entre los límites –θ y γ tiene un valor nulo, dado que estos dos ángulos son en realidad el mismo. Así, la ecuación precedente queda:

$$F_y = \frac{6\mu\cdot\omega\cdot R}{\psi^2}\left[I_5^*\frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^*\right]$$

El par necesario para hacer girar el eje se puede determinar hallando inicialmente los esfuerzos cortantes que actúan sobre el eje:

$$\tau = \mu\left[\frac{\partial V_x}{\partial y}\right]_{y=h_\varphi} = \mu\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial P^*}{\partial x}\frac{1}{2\mu}\cdot y\left(y-h_\varphi\right) + \frac{\omega\cdot R\cdot y}{h}\right]_{y=h_\varphi}$$

$$\tau = \mu\cdot\omega\cdot R\left[\frac{1}{h_\varphi} + \frac{\partial P^*}{\partial x}\frac{1}{2\mu}\frac{h_\varphi}{\omega\cdot R}\right]$$

Sustituyendo $\dfrac{\partial P^*}{\partial x}$ por su valor:

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[\frac{1}{h_\varphi} + 6\mu \cdot \omega \cdot R \left(\frac{1}{h_\varphi{}^2} - \frac{\bar{h}}{h_\varphi{}^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right) \frac{1}{2\mu} \frac{h_\varphi}{\omega \cdot R} \right]$$

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[\frac{1}{h_\varphi} + 3 \cdot \left(\frac{1}{h_\varphi} - \frac{\bar{h}}{h_\varphi{}^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right) \right]$$

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[\frac{4}{h_\varphi} - 3 \frac{\bar{h}}{h_\varphi{}^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

El par sobre el eje, por unidad de longitud, será:

$$T = \int_{-\theta}^{\gamma} \tau \cdot R^2 d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\mu \cdot \omega \cdot R^3}{\bar{h}} \left[\frac{4}{h_\varphi} \bar{h} - 3 \frac{\bar{h}^2}{h_\varphi{}^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right] d\varphi$$

$$T = \frac{\mu \cdot \omega \cdot R^3}{\bar{h}} \left[4 \cdot I_1^* - 3 \cdot \frac{I_2^{*2}}{I_3^*} \right]$$

donde:

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\bar{h}}{h_\varphi} d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos\varphi)^{-1} d\varphi = I_1^*$$

La potencia necesaria para hacer girar el eje será: $W = T^* \omega$, consecuentemente.

$$W = \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot R^3}{\bar{h}} \left[4 \cdot I_1^* - 3 \cdot \frac{I_2^{*2}}{I_3^*} \right]$$

3a. Los siguientes apartados se han realizado para tres distintas parejas de valores de R_s y R (caso 1, caso 2 y caso 3). Para cada pareja de valores se han definido 5 valores de excentricidad.

Los resultados obtenidos se van a comparar al final del problema para poder comprender como influyen las dimensiones del eje, estator y de las excentricidades en la presión de la ranura de entrada, número de Sommerfeld y longitud de los cojinetes.

Caso 1

Para poder calcular la presión necesaria en la ranura de entrada se graficará inicialmente la distribución de presiones en función de la posición angular, seguidamente se establecerá la presión mínima en cada caso para evitar que se produzca el fenómeno de la cavitación en el cojinete.

Los datos de partida son:

- $R_{s1} = 40{,}1 \text{ mm}$; $R_1 = 40 \text{ mm}$
- $\mu = 0{,}02 \dfrac{\text{Kg}}{\text{m s}}$
- $\omega = 30000 \text{ rpm} \rightarrow 30000 \text{ rpm} \dfrac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \dfrac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 1000\pi \text{ rad/s}$
- $\theta = -40° = -\dfrac{2\pi}{9}$ rad ; Posición de la ranura.

Para estas condiciones de partida se estudiarán las siguientes excentricidades:

$e_1 = 50 \ \mu\text{m}$; $e_2 = 30 \ \mu\text{m}$; $e_3 = 10 \ \mu\text{m}$; $e_4 = 5 \ \mu\text{m}$; $e_5 = 1 \ \mu\text{m}$

La excentricidad máxima será: $\bar{h}_1 = R_{s1} - R_1 = 0{,}1 \text{ mm}$

La excentricidad máxima adimisensional se define: $\psi_{11} = \dfrac{\bar{h}_1}{R_1} = \dfrac{0{,}1}{40} = 0{,}0025$

Las diversas excentricidades relativas consideradas serán:

$$\varepsilon_{11} = \frac{e_1}{\bar{h}_1} = \frac{0{,}050}{0{,}1} = 0{,}5$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{e_2}{\bar{h}_1} = \frac{0{,}030}{0{,}1} = 0{,}3$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{e_3}{\bar{h}_1} = \frac{0{,}010}{0{,}1} = 0{,}1$$

$$\varepsilon_{41} = \frac{e_4}{\bar{h}_1} = \frac{0{,}0050}{0{,}1} = 0{,}05$$

$$\varepsilon_{51} = \frac{e_5}{\bar{h}_1} = \frac{0{,}0010}{0{,}1} = 0{,}01$$

Para determinar la distribución de presiones en función de la posición angular se utilizará la ecuación hallada en el apartado uno.

$$P^* = P^*_{\text{entrada}} + \frac{6 \, \mu \, \omega}{\psi_{11}{}^2} \left[I^*_{2P} - I^*_{3P} \frac{I^*_2}{I^*_3} \right]$$

La $P^*_{entrada}$ es la presión en la ranura de entrada, presión que se desea determinar para cada caso. Así a priori se va a determinar la distribución de presiones sin considerar dicha presión, es decir, la expresión a utilizar es:

$$P^* = \frac{6 \cdot 0,02 \cdot 1000\pi}{0,0025^2}\left[I^*_{2P} - I^*_{3P}\frac{I^*_2}{I^*_3} \right]$$

A recordar cabe que en esta expresión las integrales $I^*_{2P}\, y\, I^*_{3P}$ son las que dependen de la posición angular genérica, es decir:

$$I^*_{2P} = \int_{-\theta}^{\varphi_i} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\, d\varphi = \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-2}\, d\varphi$$

$$I^*_{3P} = \int_{-\theta}^{\varphi_i} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\, d\varphi = \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-\varepsilon\cos\varphi)^{-3}\, d\varphi$$

Sustituyendo para las diversas excentricidades en la ecuación de la distribución de presiones se obtiene:

$$P^*_{i11} = 60318578,95\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-0,5\cos\varphi)^{-2}\, d\varphi - \frac{9,673596608}{14,51039491}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-0,5\cos\varphi)^{-3}\, d\varphi \right]$$

$$P^*_{i21} = 60318578,95\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-0,3\cos\varphi)^{-2}\, d\varphi - \frac{7,237986686}{8,311753941}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-0,3\cos\varphi)^{-3}\, d\varphi \right]$$

$$P^*_{i31} = 60318578,95\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-0,1\cos\varphi)^{-2}\, d\varphi - \frac{6,378625085}{6,475270919}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-0,1\cos\varphi)^{-3}\, d\varphi \right]$$

$$P^*_{i41} = 60318578,95\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-0,05\cos\varphi)^{-2}\, d\varphi - \frac{6,306821099}{6,330530952}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-0,05\cos\varphi)^{-3}\, d\varphi \right]$$

$$P^*_{i51} = 60318578,95\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-0,01\cos\varphi)^{-2}\, d\varphi - \frac{6,284127903}{6,285070616}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1-0,01\cos\varphi)^{-3}\, d\varphi \right]$$

La representación gráfica de estas cinco distribuciones de presión en función de la posición angular se ha representado en la figura 67.4. Es interesante observar que a medida que la excentricidad aumenta la presión máxima y mínima también aumentan.

Las diversas integraciones se han realizado con Maple.

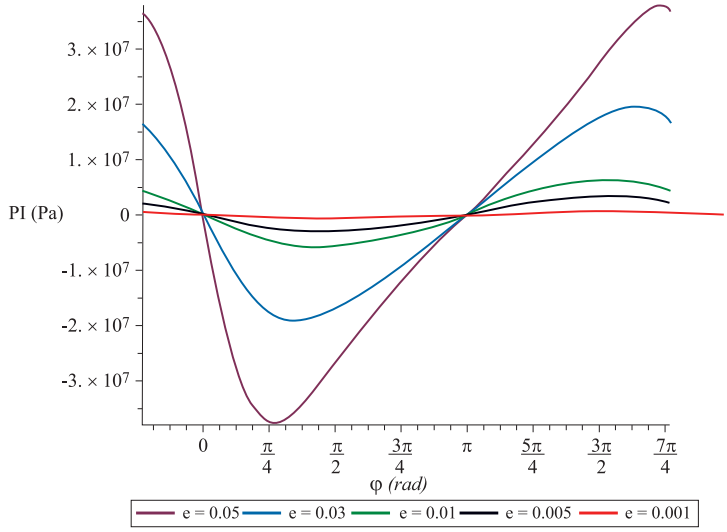


Fig. 67.4 Distribución de presiones para las diferentes excentricidades elegidas

La presión mínima en la película de fluido y en función de las excentricidades evaluadas es:

$$P^*_{i11minima} = -1,192569590 \cdot 10^7 \cdot \pi \ \text{Pa}$$

$$P^*_{i21minima} = -6,136479020 \cdot 10^6 \cdot \pi \ \text{Pa}$$

$$P^*_{i31minima} = -1,932198461 \cdot 10^6 \cdot \pi \ \text{Pa}$$

$$P^*_{i41minima} = -9,615061563 \cdot 10^5 \cdot \pi \ \text{Pa}$$

$$P^*_{i51minima} = -1,920120021 \cdot 10^5 \cdot \pi \ \text{Pa}$$

Obsérvese que esta presión mínima, en sentido positivo, es la presión requerida en la ranura de entrada, como mínimo, para evitar la aparición de cavitación en el cojinete. Véase que esto es equivalente a desplazar las curvas de la figura 67.4 para que el valor mínimo de todas ellas sea de 0 Pa.

4a. En este apartado se ha de diseñar la longitud que los cojinetes han de tener para que dos de ellos puedan soportar una fuerza de 18000 N girando a 30000 rpm.

En uno de los apartados anteriores se ha determinado la ecuación que caracteriza la fuerza por unidad de longitud F. La longitud del cojinete se determinará:

$$F_{tot} = F \cdot L$$

Donde L es la longitud que se está buscando.

Puesto que se necesitan dos cojinetes para soportar el peso del motor, la longitud de cado uno se definirá:

$$L = \frac{1}{2}\frac{F_{tot}}{F}$$

$$L = \frac{1}{2}\cdot\frac{18000}{\frac{6\,\mu\,\omega\,R}{\psi^2}\left[I_5^*\frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^*\right]}$$

Una vez calculadas estas integrales, mediante Maple, se obtienen las diferentes longitudes del cojinete en función de la excentricidad elegida.

$$L_{11} = 0,2313634190 \ \text{cm}$$

$$L_{21} = 0,3945456647 \ \text{cm}$$

$$L_{31} = 1,187312945 \ \text{cm}$$

$$L_{41} = 2,374709669 \ \text{cm}$$

$$L_{51} = 11,87357616 \ \text{cm}$$

5a. En este apartado se pide relacionar la fuerza de sustentación por unidad de longitud del cojinete y el número de Sommerfeld con la velocidad de giro y la excentricidad del cojinete. La ecuación que caracterizaba la fuerza de sustentación era:

$$F = \frac{6\,\mu\,\omega\,R}{\psi^2}\left[I_5^*\frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^*\right]$$

Véase que la fuerza de sustentación por unidad de longitud del cojinete tiene una relación lineal con la velocidad de giro. Para una excentricidad de $e_1 = 50\,\mu m$, la fuerza de sustentación toma el valor de:

$$F = \frac{6\cdot 0,02\cdot 40\cdot 10^{-3}}{0,0025^2}\left[9,673596609\cdot\frac{9,673596608}{14,51039491} - 4,836798305\right]\omega$$

$$F = 1238,220366\ \omega$$

De realizar el mismo proceso para las diferentes excentricidades se observa que la pendiente de la fuerza de sustentación en función de la velocidad de giro aumenta con la excentricidad.

La fuerza de sustentación por unidad de longitud del cojinete en función de la excentricidad se define como

$$F=\frac{6\,\mu\,\omega\,R_k}{\psi^2}\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{\bar{h}_k}\cdot\cos\varphi\right)^{-3}\cos\varphi\,d\varphi\;\frac{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{\bar{h}_k}\cdot\cos\varphi\right)^{-2}d\varphi}{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{\bar{h}_k}\cdot\cos\varphi\right)^{-3}d\varphi}-\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{\bar{h}_k}\cdot\cos\varphi\right)^{-2}\cos\varphi\,d\varphi\right]$$

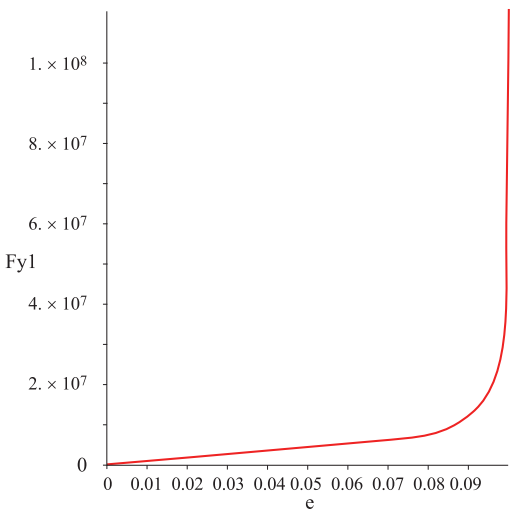
Para este primer caso se tiene:

$$R_{s1}=R_1+\bar{h}_1$$

$$\bar{h}_1=R_{s1}-R_1=0{,}1\text{ mm}$$

Realizando las integrales de la fuerza de sustentación con el software Maple se obtiene la gráfica 67.5. Obsérvese que cuando la excentricidad se acerca a la excentricidad máxima la fuerza de sustentación crece exponencialmente.

Fig. 67.5 Fuerza de sustentación en (Newtons/m) en función de la excentricidad



El número de Sommerfeld (S_0) se define como:

$$S_0=F_y\frac{\psi^2}{\mu\omega R}$$

Sustituyendo el valor de la fuerza de sustentación se tiene:

$$S_0=\frac{6\,\mu\,\omega\,R}{\psi^2}\left[I_5^*\frac{I_2^*}{I_3^*}-I_4^*\right]\frac{\psi^2}{\mu\omega R}$$

De donde:

$$S_0 = 6\left[I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^* \right]$$

Obsérvese que el número de Sommerfeld no depende de la velocidad de giro, depende únicamente de la excentricidad del cojinete, a mayor excentricidad mayor es el número de Sommerfeld.

El número de Sommerfeld en función de la excentricidad viene dado por:

$$S_0 = 6\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\bar{h}_j}\cdot\cos\varphi\right)^{-3} \cos\varphi \, d\varphi \frac{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\bar{h}_j}\cdot\cos\varphi\right)^{-2} d\varphi}{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\bar{h}_j}\cdot\cos\varphi\right)^{-3} d\varphi} - \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\bar{h}_j}\cdot\cos\varphi\right)^{-2} \cos\varphi \, d\varphi \right]$$

Recordando que para este primer caso $\bar{h}_1 = 0{,}1$ mm. y realizando las integraciones mediante el software Maple se obtiene la gráfica 67.6.

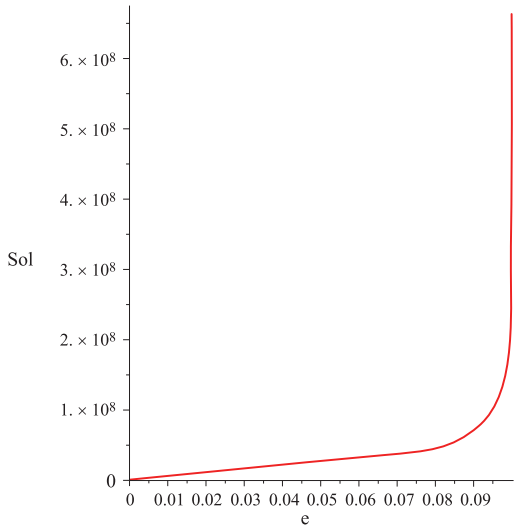


Fig. 67.6 Número de Sommerfeld en función de la excentricidad

En lo que sigue, se realizarán de nuevo los apartados 3, 4 y 5 del problema para el caso 2, donde el radio del estator toma el valor de 40,05 mm.

Caso 2

3b. En este caso los valores del eje y estator son: $R_2 = 40$ mm ; $R_{s2} = 40{,}05$ mm .

La excentricidad máxima para este segundo caso vale: $\bar{h}_2 = R_{s2} - R_2 = 0{,}05$ mm .

La excentricidad máxima adimisensional se define: $\psi_{22} = \dfrac{\overline{h}_2}{R_2} = \dfrac{0,05}{40} = 0,00125$

Utilizando las mismas excentricidades absolutas que para el caso precedente, las diversas excentricidades relativas serán:

$$\varepsilon_{12} = \frac{e_1}{\overline{h}_2} = \frac{0,050}{0,05} = 1$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{e_2}{\overline{h}_2} = \frac{0,030}{0,05} = 0,6$$

$$\varepsilon_{32} = \frac{e_3}{\overline{h}_2} = \frac{0,010}{0,05} = 0,2$$

$$\varepsilon_{42} = \frac{e_4}{\overline{h}_2} = \frac{0,0050}{0,05} = 0,1$$

$$\varepsilon_{52} = \frac{e_5}{\overline{h}_2} = \frac{0,0010}{0,05} = 0,02$$

La distribución de presiones a lo largo de la película de fluido y en función de las diversas excentricidades relativas se define como:

$$P^*_{i12} = 241274315,8\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-1\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi - \frac{\text{Float(infinity)}}{\text{Float(infinity)}}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-1\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi\right]$$

$$P^*_{i22} = 241274315,8\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,6\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi - \frac{7,853981634}{22,62621662}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,6\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi\right]$$

$$P^*_{i32} = 241274315,8\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,2\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi - \frac{6,412749151}{7,097443722}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,2\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi\right]$$

$$P^*_{i42} = 241274315,8\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,1\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi - \frac{6,314838834}{6,475270919}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,1\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi\right]$$

$$P^*_{i52} = 241274315,8\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,02\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi - \frac{6,286957104}{6,290730788}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,02\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi\right]$$

En este punto es interesante observar que puesto que la excentricidad relativa $\varepsilon_{12} = 1$, es decir, el eje está en contacto con la carcasa, la teoría indica que la distribución de presiones P^*_{i12} tiende a infinito, con lo que la fuerza de sustentación del cojinete tenderá asimismo a ser infinita. Esta es la razón del porque en la figura siguiente solo aparecen 4 curvas.

Graficando estas cuatro ecuaciones restantes en función del ángulo φ, se obtiene la figura 67.7. Obsérvese que solo aparecen cuatro de las curvas, la curva correspondiente a la excentricidad máxima da lugar a una presión que tiende a infinito.

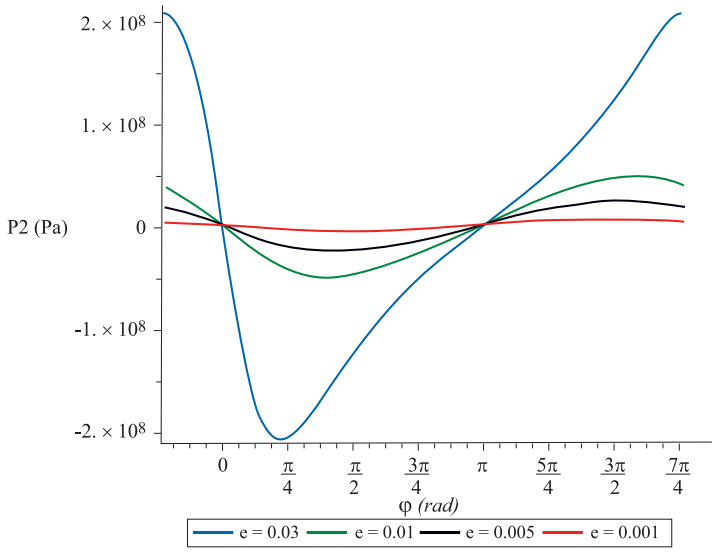


Fig. 67.7 Distribucion angular de presiones para cuatro excentricidades diferentes

El valor de las presiones mínimas en función de la excentricidad es:

$$P^*_{i22minima} = -6,620984800 \cdot 10^7 \cdot \pi \ \text{Pa}$$

$$P^*_{i32minima} = -1,577019219 \cdot 10^7 \cdot \pi \ \text{Pa}$$

$$P^*_{i42minima} = -7,728793843 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot \text{Pa}$$

$$P^*_{i52minima} = -1,536384251 \cdot 10^6 \cdot \pi \ \text{Pa}$$

Estas presiones, en valor positivo, serían las presiones mínimas en cada caso, que debería haber en la ranura de entrada con el fin de evitar que se produzca cavitación en el cojinete.

4b. Las diversas longitudes del cojinete se determinarán mediante la expresión:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{18000}{\frac{6\,\mu\,\omega\,R}{\psi^2}\left[I^*_5 \frac{I^*_2}{I^*_3} - I^*_4\right]}$$

Sustituyendo los valores correspondientes e integrando mediante Maple se obtiene:

$$L_{12} = \text{Float(undefined)} \ \text{cm} \ \ \text{(longitud prácticamente cero)}$$

$$L_{22} = 0,04670273315 \ \text{cm}$$

$$L_{32} = 0,1483294359 \ \text{cm}$$

$$L_{42} = 0,2968282363 \ \text{cm}$$

$$L_{52} = 1,484196935 \ \text{cm}$$

Véase que la longitud de estos cojinetes, independientemente de la excentricidad elegida, es demasiado pequeña, lo cual indica que las dimensiones del estator son poco apropiadas, la excentricidad máxima es demasiado pequeña.

5b. Ya se ha visto en el apartado anterior que la fuerza de sustentación por unidad de longitud es directamente proporcional a la velocidad angular del eje, la ecuación que caracterizaba esta relación era:

$$F=\frac{6\,\mu\,\omega\,R}{\psi^2}\left[I_5^*\,\frac{I_2^*}{I_3^*}-I_4^*\right]$$

Sustituyendo los valores que caraterizan este apartado y graficando el resultado en función de la excentricidad, se obtiene la gráfica 67.8 Obsérvese que para la excentricidad máxima la fuerza de sustentación en función de la velocidad angular daría lugar a una línea vertical.

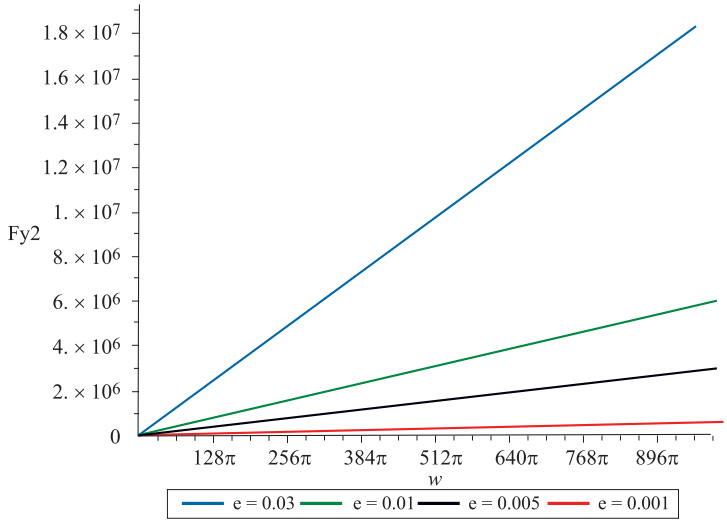


Fig. 67.8 Fuerza de sustentación por unidad de longitud para el caso 2 en función de la velocidad angular y para las diversas excentricidades estudiadas

Recuérdese que la ecuación que relacionaba la fuerza de sustentación por unidad de longitud en función de la excentricidad era:

$$F=\frac{6\,\mu\,\omega\,R}{\psi^2}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-3}\cos\varphi\,d\varphi\;\frac{\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-2}d\varphi}{\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-3}d\varphi}\\ \\ -\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-2}\cos\varphi\,d\varphi\end{array}\right]$$

Recordando asimismo que para el presente caso 2 la excentricidad máxima vale:

$$R_{s2} = R_2 + \overline{h}_2$$

$$\overline{h}_2 = R_{s2} - R_2 = 0{,}05 \text{ mm}$$

La representación gráfica de la ecuación que caracteriza la fuerza en función de la excentricidad se detalla en la gráfica 67.9.

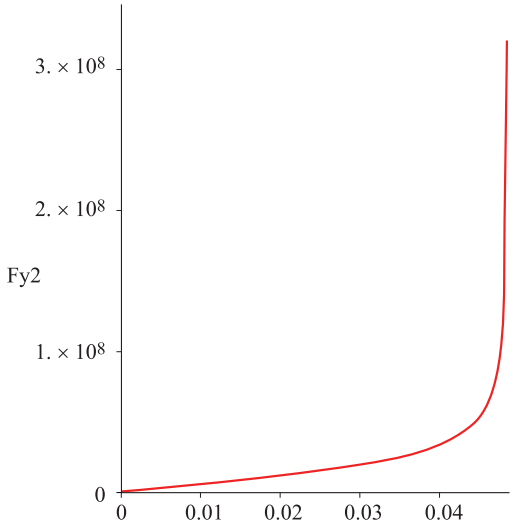


Fig. 67.9
Fuerza de sustentación (Newtons/m) para el caso 2 en función de la excentricidad del cojinete

Ya se ha visto en el caso 1 que el número de Sommerfeld no es función de la velocidad angular, únicamente es función de la excentricidad. La ecuación que caracteriza esta dependencia es:

$$S_0 = 6\left[I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^* \right]$$

$$S_0 = 6\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\overline{h}_j}\cdot\cos\varphi\right)^{-3} \cos\varphi \, d\varphi \; \frac{\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\overline{h}_j}\cdot\cos\varphi\right)^{-2} d\varphi}{\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\overline{h}_j}\cdot\cos\varphi\right)^{-3} d\varphi} \\ \\ -\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\overline{h}_j}\cdot\cos\varphi\right)^{-2} \cos\varphi \, d\varphi \end{array} \right]$$

La representación gráfica de esta ecuación esta representada en la figura 67.10.

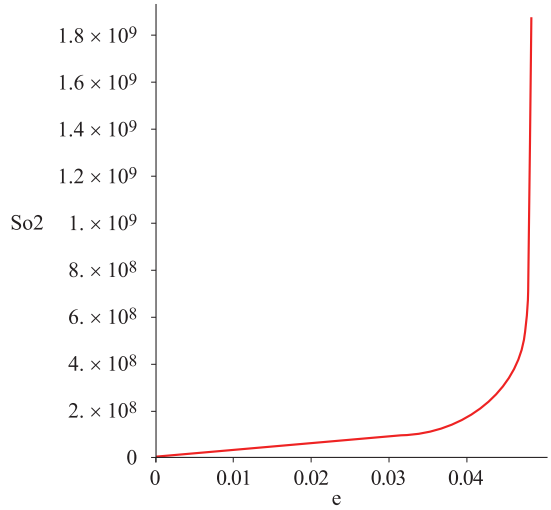


Fig. 67.10 Número de Sommerfeld en función de la excentricidad

Caso 3

3c. Con el fin de conseguir una disminución de la presión en la ranura de entrada, se define este tercer caso, un radio para el estator de 150 micras mayor que el del rotor. El resto de parámetros, velocidad de giro, viscosidad del fluido, peso del motor etc siguen siendo los mismos que los utilizados en los dos apartados precedentes. Se estudiarán las mismas cinco excentricidades que en los dos apartados anteriores.

En este caso los valores del eje y estator son: $R_{s3} = 40{,}15$ mm ; $R_3 = 40$ mm .

La excentricidad máxima para este segundo caso vale: $\overline{h}_3 = R_{S3} - R_3 = 0{,}15$ mm

La excentricidad máxima adimisensional se define: $\psi_{33} = \dfrac{\overline{h}_3}{R_3} = \dfrac{0{,}15}{40} = 0{,}00375$

Utilizando las mismas excentricidades absolutas que para el caso precedente, las diversas excentricidades relativas serán:

$$\varepsilon_{13} = \frac{e_1}{\overline{h}_3} = \frac{0{,}050}{0{,}15} = 0{,}333333$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{e_2}{\overline{h}_3} = \frac{0{,}030}{0{,}15} = 0{,}2$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{e_3}{\overline{h}_3} = \frac{0{,}010}{0{,}15} = 0{,}066667$$

$$\varepsilon_{43} = \frac{e_4}{\overline{h}_3} = \frac{0,0050}{0,15} = 0,033333$$

$$\varepsilon_{53} = \frac{e_5}{\overline{h}_3} = \frac{0,0010}{0,15} = 0,006667$$

Las ecuaciones que caracterizan la distribución de presiones a lo largo del cojinete y para las diferentes excentricidades estudiadas se definen:

$$P^*_{i13} = 26808257,31\left[\begin{array}{l}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,333333\,\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi \\ -\dfrac{7,497364958}{8,903120887}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,333333\,\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi\end{array}\right]$$

$$P^*_{i23} = 26808257,31\left[\begin{array}{l}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,2\,\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi \\ -\dfrac{6,679947032}{7,097443722}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,2\,\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi\end{array}\right]$$

$$P^*_{i33} = 26808257,31\left[\begin{array}{l}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,066667\,\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi \\ -\dfrac{6,325307133}{6,367664100}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,066667\,\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi\end{array}\right]$$

$$P^*_{i43} = 26808257,31\left[\begin{array}{l}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,033333\,\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi \\ -\dfrac{6,293671846}{6,304172967}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,033333\,\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi\end{array}\right]$$

$$P^*_{i53} = 26808257,31\left[\begin{array}{l}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,006667\,\cos\varphi)^{-2}\,d\varphi \\ -\dfrac{6,283604209}{6,284023135}\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i}(1-0,006667\,\cos\varphi)^{-3}\,d\varphi\end{array}\right]$$

La representación de estas ecuaciones en función de la posición angular se muestra en la figura siguiente 67.11.

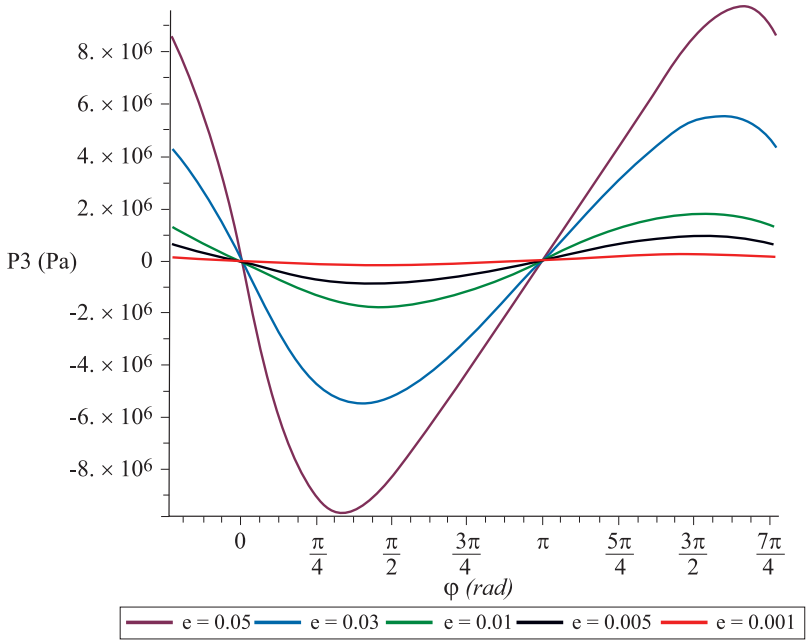


Fig. 67.11 Distribución de presiones en función de la posición angular y para las diferentes excentricidades estudiadas

Las presiones mínimas son para este caso:

$$P^*_{i13minima} = -3,08243167\cdot 6\cdot 10^{6}\cdot \pi \ \text{Pa}$$

$$P^*_{i23minima} = -1,75224357\cdot 6\cdot 10^{6}\cdot \pi \ \text{Pa}$$

$$P^*_{i33minima} = -5,70480693\cdot 6\cdot 10^{5}\cdot \pi \ \text{Pa}$$

$$P^*_{i43minima} = -2,84642334\cdot 8\cdot 10^{5}\cdot \pi \ \text{Pa}$$

$$P^*_{i53minima} = -56890,46920\cdot \pi \ \text{Pa}$$

Comentar de nuevo que estas presiones en valor positivo indican cual ha de ser, para cada caso, la presión mínima necesaria en la ranura de entrada, para evitar que se produzca cavitación en el cojinete.

4c. La longitud del cojinete se determinará:

$$L = \frac{1}{2}\cdot\frac{18000}{\frac{6\,\mu\,\omega\,R}{\psi^2}\left[I_5^*\frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^*\right]}$$

Una vez calculadas estas integrales para cada una de las excentricidades bajo estudio se obtiene:

$$L_{13} = 0,7976091943 \ \text{cm}$$

$$L_{23} = 1,334964923 \ \text{cm}$$

$$L_{33} = 4,007302240 \ \text{cm}$$

$$L_{43} = 8,014660228 \ \text{cm}$$

$$L_{53} = 40,07331967 \ \text{cm}$$

5c. Ya se ha visto en los apartados anteriores que la fuerza de sustentación por unidad de longitud varia linealmente con la velocidad de giro, la figura 67.12 muestra dicha fuerza de sustentación en función de la velocidad angular y para las diferentes excentricidades evaluadas.

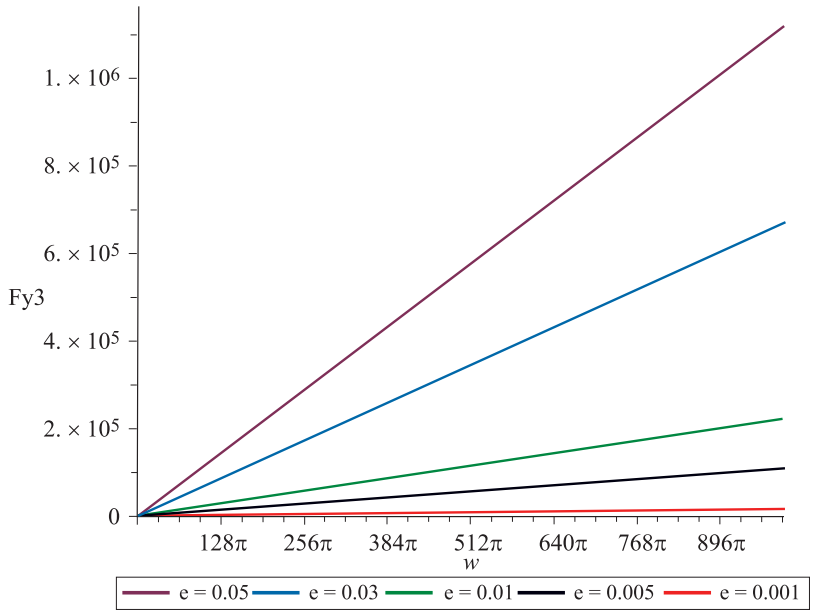


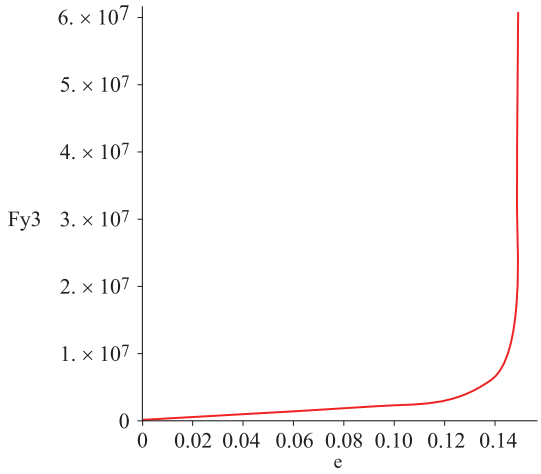
Fig. 67.12 Fuerza de sustentación en (Newtons/m) para el caso 3

La fuerza de sustentación por unidad de longitud en función de la excentricidad se definía como:

$$F = \frac{6\,\mu\,\omega\,R}{\psi^2}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-3}\cos\varphi\,d\varphi\;\frac{\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-2}\,d\varphi}{\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-3}\,d\varphi} \\ \\ -\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-2}\cos\varphi\,d\varphi\end{array}\right]$$

La representación gráfica de esta ecuación se ha presentado en la figura 67.13.

Fig. 67.13 Fuerza de sustentación en (Newtons/m) en función de la excentricidad, caso 3

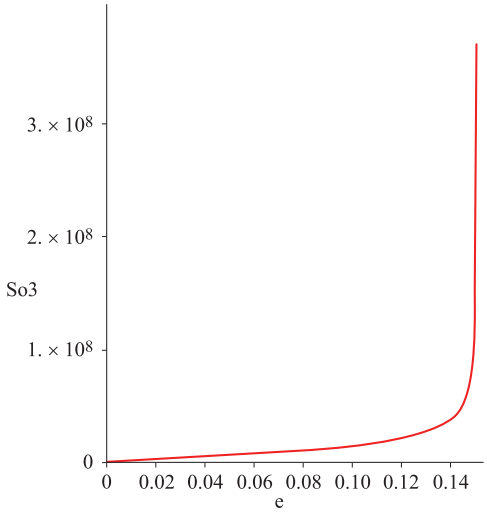


El número de Sommerfeld no es función de la velocidad de giro. El número de Sommerfeld en función de la excentricidad viene dado por:

$$S_0 = 6\left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-3}\cos\varphi\,d\varphi\;\frac{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-2}d\varphi}{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-3}d\varphi}-\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}}\left(1-\frac{e}{h}\cdot\cos\varphi\right)^{-2}\cos\varphi\,d\varphi\right]$$

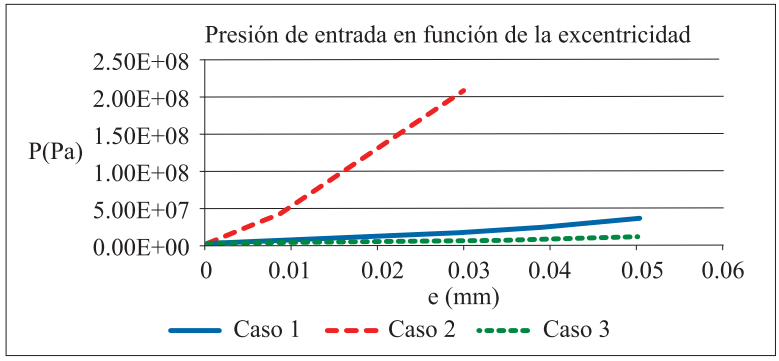
La figura 67.14 muestra la representación gráfica de esta ecuación para el presente caso.

Fig. 67.14 Número de Sommerfeld en función de la excentricidad, caso 3



Comparación de los tres casos.

Las gráficas de la presión en función de la posición angular muestran que a menor valor de excentricidad, menor es la presión necesaria para evitar la cavitación, siendo también menor la fuerza de sustentación. En el grafico que se muestra a continuación se pueden comparar los valores de presión en función de la excentricidad para cada uno de los tres casos estudiados.



La longitud del cojinete ha de ser del mismo orden de magnitud que su diámetro. Observando los resultados obtenidos en los tres casos estudiados se puede concluir que una buena elección sería:

$$R_{s3} = 40{,}15 \text{ mm} ; \quad R_3 = 40 \text{ mm} ; \text{ y } \quad e_4 = 0{,}005 \text{ mm}$$

Con esta configuración se obtiene una longitud de:

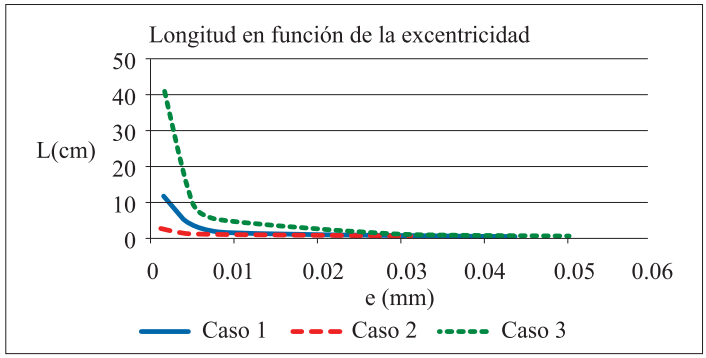
$$L_{43} = 8{,}014660228 \text{ cm}$$

y una presión en la ranura de entrada de:

$$P^*_{\text{entrada } 43} = 2{,}846423348 \cdot 10^5 \cdot \pi \text{ Pa}$$

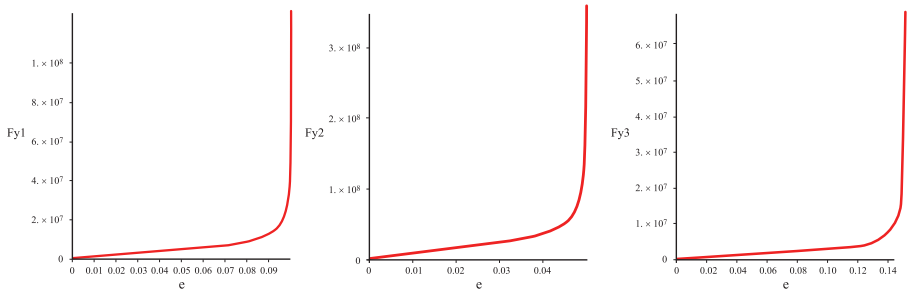
Estudiando los distintos valores de longitud que se han obtenido, se ve que la longitud aumenta a medida que la excentricidad disminuye. Cuanto menor es la excentricidad menor es la fuerza de sustentación por unidad de longitud del cojinete y por lo tanto este debe ser más largo. Para unos mismos valores de excentricidad, la longitud es más grande como mayor es la excentricidad máxima que el cojinete permite.

Estas dos conclusiones se pueden ver en el siguiente gráfico:



Se ha visto que la fuerza de sustentación es directamente proporcional con la velocidad angular. La fuerza de sustentación disminuye a medida que disminuye la excentricidad.

Fijándose en las tres gráficas que caracterizan la fuerza de sustentación por unidad de longitud en función de la excentricidad, ver figura siguiente, se puede ver que la fuerza tiende a infinito cuando el rotor está casi en contacto con la pared del estator. Es necesario tener presente que estos resultados son completamente teóricos y que en realidad la fuerza no puede llegar a ser tan elevada. En esta figura el subíndice a) caracteriza el caso 1, el b) caracteriza el caso 2 y el subíndice c) caracteriza el caso 3. Obsérvese que la fuerza de sustentación aumenta más rápidamente cuanto menor es la excentricidad máxima del cojinete.



a) *b)* *c)*

Problema 68

Enunciado

Se desea estudiar el movimiento de un líquido situado entre dos cilindros concéntricos, la longitud de estos se considerará prácticamente infinita al ser comparada con el intersticio radial existente entre ambos cilindros. Los dos cilindros, se considerará que

giran a velocidades angulares constantes aunque diferentes. El cilindro interior, de radio R_1, gira con una velocidad angular ω_1, el exterior, cuyo radio es R_2, gira a una velocidad angular ω_2. Debido a la naturaleza del problema parece razonable suponer que, utilizando coordenadas cilíndricas, y considerando que el eje z es el eje central de los dos cilindros se puede establecer que: $V_r = V_z = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$. La velocidad del fluido se considerará existente únicamente en dirección tangencial, y variará en dirección radial, es decir: $V_\theta = f(r)$.

1.- Utilizando las ecuaciones de la cantidad de movimiento en forma diferencial, calcular el campo de velocidades y presiones, existente entre los dos cilindros. Hallar asimismo el par necesario para hacer girar cada uno de estos cilindros.

2.- Hallar el campo de temperaturas para cada uno de los dos casos siguientes:

a.- Los dos cilindros están a la misma temperatura.

b.- El cilindro interior está a una temperatura diferente que la correspondiente al cilindro exterior.

Suponer que tanto la densidad como la viscosidad del fluido, permanecen constantes, la conductividad térmica se supondrá asimismo constante e independiente del tiempo.

Es importante denotar que para el primero de los casos, cuando ambos cilindros poseen la misma temperatura, toda variación de temperatura del fluido estará ligada a la disipación viscosa del mismo. En estas condiciones, demostrar que las variaciones de temperatura debidas a la disipación viscosa son del orden:

$$\Delta T \sim \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot R^2}{K}$$

Donde R es cualquiera de los dos radios.

De hecho, esta expresión se denomina número de Brinkman (Br), el cual representa el ratio entre el calor producido por disipación viscosa y el calor transportado por conducción molecular, que es lo mismo que decir el ratio entre la generación de calor viscosa y el calor externo. Un ejemplo de aplicación sería un extrusor de tornillo para plásticos, el calor que funde el plástico proviene de dos fuentes, el generado por los esfuerzos cortantes y el calor de conducción transferido a través de las paredes. Su expresión más común es:

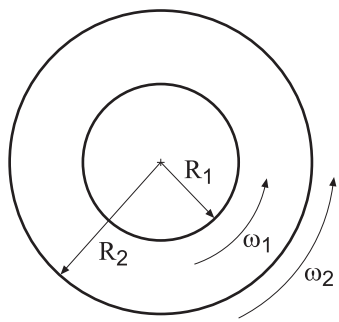
$$Br = \frac{\mu \cdot u^2}{K(T_w - T_0)}$$

Dónde Br es el Número de Brinkman, μ es la viscosidad del fluido en $\frac{N \cdot s}{m^2}$, u es la velocidad del fluido en $\frac{m}{s}$, K es la conductividad térmica del fluido en $\frac{W}{m \cdot K}$, T_w es la temperatura de la pared y T_0 es la temperatura del fluido, ambas dadas en grados Kelvin.

Resolución

1.- La figura 68.1 muestra los dos cilindros concéntricos con sus respectivas velocidades angulares. El problema pide estudiar el movimiento de un fluido localizado entre ambos cilindros.

Fig. 68.1
Representación de los dos cilindros concéntricos



Dado que no hay movimiento axial y que el único movimiento del fluido será debido al giro de los dos cilindros, únicamente existirá componente tangencial de la velocidad, (V_θ). Así, las hipótesis de partida del problema son:

$$V_r = V_z = 0; \qquad \rho = cte.; \qquad \frac{\partial}{\partial z} = 0; \qquad \text{régimen permanente}: \frac{\partial}{\partial t} = 0; \qquad V_\theta = f(r);$$

La ecuación de continuidad en forma diferencial y coordenadas cilíndricas toma la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(\rho \cdot r \cdot V_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \cdot V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot V_z) = 0$$

Teniendo en cuenta las hipótesis anteriores esta ecuación queda reducida a:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \cdot V_\theta) = 0$$

Puesto que la densidad del fluido se considera constante, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_\theta\right)=0$$

Se concluye que la velocidad V_θ es constante en la dirección θ con lo que dicha velocidad dependerá únicamente del radio $V_\theta=f\left(r\right)$.

El siguiente paso es evaluar los términos existentes de la ecuación de Navier Stokes, coordenadas cilíndricas, donde se obtiene:

Componente r:

$$\rho\cdot\left[\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{{V_\theta}^2}{r}\right]$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho\cdot\vec{g_r}+\mu\cdot\left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}-\frac{V_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\right]$$

Utilizando las hipótesis y consideraciones establecidas hasta el momento, esta ecuación toma la forma:

$$-\rho\cdot\frac{{V_\theta}^2}{r}=-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho\cdot\vec{g_r}$$

Dado que en un campo conservativo y con densidad constante, la gravedad se puede definir en función de un potencial escalar de fuerzas másicas, se puede decir que:

$$-\rho\cdot\frac{{V_\theta}^2}{r}=-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho\cdot\frac{\partial\left(-g\cdot h\right)}{\partial r}$$

Sacando el factor común se obtiene:

$$-\rho\cdot\frac{{V_\theta}^2}{r}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(P+\rho\cdot g\cdot h\right)$$

Y denominando presión reducida P^* al término $\left(P+\rho\cdot g\cdot h\right)$ se concluye:

$$-\rho\cdot\frac{{V_\theta}^2}{r}=-\frac{\partial P^*}{\partial r}$$

Ecuación que se puede representar como:

$$dP^*=\frac{\rho\,{V_\theta}^2}{r}\,dr$$

Obsérvese que esta ecuación no puede ser integrada en estos momentos, dado que no se conoce como varía la velocidad V_θ en función del radio.

A continuación se evalúa la componente θ de la ecuación de Navier Stokes, la cual toma la forma:

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial z} - \frac{V_r \cdot V_\theta}{r} \right] =$$

$$= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho \cdot \vec{g}_\theta + \mu \cdot \left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} - \frac{V_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

Aplicando las consideraciones e hipótesis establecidas previamente, esta ecuación toma la forma:

$$\underbrace{0 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho \cdot \vec{g}_\theta}_{A} + \underbrace{\mu \cdot \left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} \right]}_{B}$$

El término A se puede, al igual que en el caso precedente, dar en función de la presión reducida, obteniendo:

$$A = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial \theta}$$

El término B se puede agrupar del siguiente modo:

$$B = \mu \cdot \left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} \right] = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot V_\theta \right) \right)$$

De donde la componente angular de la ecuación de Navier Stokes, toma la forma:

$$0 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot V_\theta \right) \right)$$

De hecho, la variación de presión reducida en dirección angular se puede considerar nula, dado que por un lado los cilindros son concéntricos, y por otro lado el concepto de presión reducida ya incluye los efectos de fuerzas másicas, con lo que la ecuación precedente se reducirá a:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot V_\theta \right) \right)$$

Aunque el flujo bajo estudio se puede considerar bidimensional y bidireccional, se procede seguidamente a evaluar la componente axial de la ecuación de Navier Stokes, dicha componente se enuncia:

$$\rho\cdot\left[\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_z}{\partial z}\right]=$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho\cdot\vec{g}_z+\mu\cdot\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right]$$

Realizando el mismo proceso que en los casos precedentes y considerando las hipótesis establecidas, se obtiene:

$$\frac{\partial P^*}{\partial z}=0$$

Es decir, que la presión reducida no varía a lo largo de la dirección axial.

Procediendo ahora a integrar la componente angular de la ecuación de Navier Stokes, se obtiene:

Ecuación de partida:

$$0=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot V_\theta\right)\right)$$

Primera integración:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot V_\theta\right)=C_1$$

Segunda integración:

$$V_\theta=C_1\cdot\frac{r}{2}+\frac{C_2}{r}$$

Las condiciones de contorno necesarias para determinar las dos constantes de integración, serán:

$$r=R_1 \quad\rightarrow\quad V_{\theta 1}=\omega_1\cdot R_1$$

$$r=R_2 \quad\rightarrow\quad V_{\theta 2}=\omega_2\cdot R_2$$

De donde se obtiene:

$$C_1=2\cdot\left(\frac{\omega_2\cdot {R_2}^2-\omega_1\cdot {R_1}^2}{{R_2}^2-{R_1}^2}\right);\qquad C_2={R_2}^2\cdot{R_1}^2\cdot\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{{R_2}^2-{R_1}^2}\right);$$

En consecuencia, la velocidad tangencial en función del radio, tomará la forma:

$$V_\theta = r\cdot\left(\frac{\omega_2\cdot R_2{}^2-\omega_1\cdot R_1{}^2}{R_2{}^2-R_1{}^2}\right)+\frac{R_2{}^2\cdot R_1{}^2\cdot\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{R_2{}^2-R_1{}^2}\right)}{r}$$

Véase que esta ecuación es válida para $R_1 < r < R_2$:

Una vez hallada la distribución de velocidades angulares en función del radio, se puede proceder a determinar la distribución de presiones, recuérdese que de la ecuación de Navier Stokes en dirección radial, se había obtenido:

$$dP^* = \frac{\rho\cdot V_\theta{}^2}{r}dr$$

Sustituyendo la distribución de velocidades, se tiene:

$$\frac{\partial P^*}{\partial r} = \rho\cdot\frac{\left(\frac{r}{2}\cdot C_1+\frac{C_2}{r}\right)^2}{r}$$

Ecuación que se puede representar como:

$$\frac{\partial P^*}{\partial r} = \rho\cdot\left(\frac{r\cdot C_1{}^2}{4}+\frac{C_2{}^2}{r^3}+\frac{C_1\cdot C_2}{r}\right)$$

Su integración entre el radio inferior y superior dará lugar a:

$$\int_{P_1^*}^{P_2^*} dP^* = \rho\cdot\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{r\cdot C_1{}^2}{4}+\frac{C_2{}^2}{r^3}+\frac{C_1\cdot C_2}{r}\right)dr$$

$$P_2^*-P_1^* = \rho\cdot\left[\frac{r^2}{8}\cdot C_1{}^2-\frac{1}{2\cdot r^2}\cdot C_2{}^2+C_1\cdot C_2\cdot\ln(r)\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$=\rho\cdot\left[\frac{R_2{}^2-R_1{}^2}{8}\cdot C_1{}^2-\frac{C_2{}^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{R_2{}^2}-\frac{1}{R_1{}^2}\right)+C_1\cdot C_2\cdot\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right]$$

Si lo que se desea es determinar la distribución de presiones en función del radio, se puede realizar la integración entre un radio inicial R_1 y un radio genérico r, obteniendo:

$$P-P_1 = \rho\cdot\left[\frac{r^2-R_1{}^2}{8}\cdot C_1{}^2-\frac{C_2{}^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R_1{}^2}\right)+C_1\cdot C_2\cdot\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right]$$

Esta ecuación caracteriza la presión del fluido en función del radio, obsérvese que para hallar dicha presión ha sido necesario establecer una nueva condición de contorno, que es que la presión reducida en la superficie del cilindro inferior, sea conocida.

Otra manera de realizar este apartado del problema sería mediante la adimensionalización y posterior transformación de las ecuaciones de Navier Stokes. Recuérdese que la componente angular de la ecuación de Navier Stokes tomaba la forma:

$$0=\left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r^2}\right]$$

Las condiciones de contorno utilizadas para determinar las constantes de integración eran:

$$r=R_1 \quad \rightarrow \quad V_{\theta 1}=\omega_1\cdot R_1\,; \qquad r=R_2 \quad \rightarrow \quad V_{\theta 2}=\omega_2\cdot R_2$$

En este segundo método, lo primero que se va a hacer es adimensionalizar la ecuación de Navier Stokes, para ello se utilizarán los siguientes parámetros:

$$u=\frac{V_\theta}{\omega_1\cdot R_1}; \quad \varepsilon=\frac{r}{R_1}; \quad \sigma=\frac{R_2}{R_1}; \quad \Omega=\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

De donde: $r=\varepsilon\cdot R_1$; $\quad V_\theta=u\cdot\omega_1\cdot R_1$;

Las condiciones de contorno deberán asimismo ser modificadas, en consecuencia ahora tomarán la forma:

$$\begin{cases} \varepsilon=1;\ u=1 \\ \varepsilon=\sigma;\ u=\Omega\cdot\sigma \end{cases}$$

La componente angular de Navier Stokes en forma adimensional quedará:

$$\frac{d^2\left(u\cdot\omega_1\cdot R_1\right)}{d\left(\varepsilon\cdot R_1\right)^2}+\frac{1}{\varepsilon\cdot R_1}\cdot\frac{d\left(u\cdot\omega_1\cdot R_1\right)}{d\left(\varepsilon\cdot R_1\right)}-\frac{u\cdot\omega_1\cdot R_1}{\left(\varepsilon\cdot R_1\right)^2}=0$$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{d^2\left(u\cdot\omega_1\right)}{d\left(\varepsilon^2\cdot R_1\right)}+\frac{1}{\varepsilon\cdot R_1}\cdot\frac{d\left(u\cdot\omega_1\right)}{d\left(\varepsilon\right)}-\frac{u\cdot\omega_1}{\left(\varepsilon^2\cdot R_1\right)}=0$$

Sacando factor común

$$\frac{\omega_1}{R_1}\left(\frac{d^2u}{d\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{du}{d\varepsilon}-\frac{u}{\varepsilon^2}\right)=0$$

Obsérvese que esta ecuación es idéntica a la original, la diferencia es que ahora esta dada en función de variables adimensionales.

Esta ecuación diferencial se puede, al igual que se ha hecho con su homóloga dimensional, dar en la forma:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{d(\varepsilon\cdot u)}{d\varepsilon}\right)=0$$

La primera integración de esta ecuación da lugar a:

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{d(\varepsilon\cdot u)}{d\varepsilon}=M_1$$

Integrando nuevamente se obtiene:

$$u=\frac{M_1}{2}\cdot\varepsilon+\frac{M_2}{\varepsilon}$$

Seguidamente se determinarán las constantes M_1 y M_2 utilizando las condiciones de contorno dadas.

Para $\varepsilon=1;\ u=1$; de donde: $1=\frac{M_1}{2}+M_2;$

Para $\varepsilon=\sigma;\ u=\Omega\cdot\sigma$; de donde: $\Omega\cdot\sigma=\frac{M_1}{2}\cdot\sigma+\frac{M_2}{\sigma}$

De donde las constantes toman el valor: $M_1=\frac{2\cdot\left(\Omega\cdot\sigma^2-1\right)}{\sigma^2-1}$; $M_2=\frac{\sigma^2\cdot(1-\Omega)}{\sigma^2-1}$;

Y sustituyendo en la ecuación de la velocidad adimensional se obtiene:

$$u=\left(\frac{\left(\Omega\cdot\sigma^2-1\right)}{\sigma^2-1}\right)\cdot\varepsilon+\left(\frac{\sigma^2\cdot(1-\Omega)}{\sigma^2-1}\right)\cdot\frac{1}{\varepsilon}$$

Sustituyendo ahora los parámetros adimensionales por sus equivalentes dimensionales se llega a:

$$\frac{V_\theta}{\omega_1\cdot R_1}=\left(\frac{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\cdot\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2-1\right)}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2-1}\right)\cdot\frac{r}{R_1}+\left(\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\cdot\left(1-\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2-1}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{r}{R_1}\right)}$$

$$\frac{V_\theta}{\omega_1 \cdot R_1} = \left(\frac{\left(\frac{\omega_2 \cdot R_2^{\,2} - \omega_1 \cdot R_1^{\,2}}{\omega_1 \cdot R_1^{\,2}} \right)}{\frac{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}{R_1^{\,2}}} \right) \cdot \frac{r}{R_1} + \left(\frac{\frac{R_2^{\,2}}{R_1^{\,2}} \cdot \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1} \right)}{\frac{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}{R_1^{\,2}}} \right) \cdot \frac{R_1}{r}$$

$$\frac{V_\theta}{\omega_1 \cdot R_1} = \frac{\left(\frac{\omega_2 \cdot R_2^{\,2} - \omega_1 \cdot R_1^{\,2}}{\omega_1} \right)}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}} \cdot \frac{r}{R_1} + \frac{\left(\frac{\omega_1 \cdot R_2^{\,2} - \omega_2 \cdot R_2^{\,2}}{\omega_1} \right)}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}} \cdot \frac{R_1}{r}$$

$$\frac{V_\theta}{\omega_1 \cdot R_1} = \frac{\left(\omega_2 \cdot R_2^{\,2} - \omega_1 \cdot R_1^{\,2}\right) \cdot r^2 + \left(\omega_1 \cdot R_2^{\,2} - \omega_2 \cdot R_2^{\,2}\right) \cdot R_1^{\,2}}{R_1 \cdot r \cdot \omega_1 \cdot \left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)}$$

Finalmente se obtiene:

$$V_\theta = \frac{\left(\omega_2 \cdot R_2^{\,2} - \omega_1 \cdot R_1^{\,2}\right) \cdot r^2 + \left(\omega_1 \cdot R_2^{\,2} - \omega_2 \cdot R_2^{\,2}\right) \cdot R_1^{\,2}}{r \cdot \left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)}$$

Ecuación que caracteriza la distribución de la velocidad tangencial en función del radio. Si se observa detenidamente esta ecuación y se compara con la obtenida utilizado el primero de los métodos, se concluye que ambas ecuaciones son idénticas.

Una vez determinada la distribución de velocidades, es relativamente simple hallar el par y la potencia que actúan sobre cada uno de los dos cilindros. Para ello será inicialmente necesario determinar los esfuerzos cortantes que actúan sobre las caras de los cilindros en contacto con el fluido.

Los esfuerzos cortantes, para un fluido Newtoniano y en coordenadas cilíndricas, se definen en función del tensor de deformación, para el plano rθ se establece:

$$\tau_{r\theta} = 2\,\mu\,\phi_{r\theta}$$

Dónde $\phi_{r\theta}$ es la componente en dirección rθ del tensor de deformación, sustituyendo dicha componente en la ecuación anterior se obtiene:

$$\tau_{r\theta} = 2 \cdot \mu \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r \cdot \frac{\partial \left(\frac{V_\theta}{r} \right)}{\partial r} \right) \right]$$

Ecuación que se puede dar como:

$$\tau_{r\theta} = 2 \cdot \mu \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{r}{r} \cdot \frac{\partial \left(V_\theta \right)}{\partial r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r \cdot V_\theta}{r^2} \right) \right] = \mu \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \left(V_\theta \right)}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right)$$

Puesto que en el caso que se está estudiando no existe velocidad en dirección radial $V_r = 0$, se obtiene:

$$\tau_{r\theta} = \left(\frac{\partial (V_\theta)}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right)$$

Sustituyendo ahora en esta ecuación el valor de V_θ y operando, se concluye que:

$$\tau_{r\theta} = \mu \cdot \left(\frac{\partial \left(C_1 \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \right)}{\partial r} - \frac{C_1 \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}}{r} \right) = \mu \cdot \left(\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} - \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \right) = \mu \cdot \left[-2 \cdot \frac{C_2}{r^2} \right]$$

Véase que esta ecuación caracteriza los esfuerzos cortantes para un radio genérico r, las ecuaciones que caracterizan los esfuerzos cortantes en las paredes del cilindro inferior $r = R_1$; y superior $r = R_2$ serán:

$$\tau_{r\theta}\big|_{r=R_1} = -2 \cdot \mu \cdot \frac{C_2}{R_1^{\,2}}; \qquad \tau_{r\theta}\big|_{r=R_2} = -2 \cdot \mu \cdot \frac{C_2}{R_2^{\,2}};$$

El par por unidad de longitud, generado por los esfuerzos cortantes actuantes en las paredes respectivas de cada cilindro y respecto al eje central, se define:

$$Par_{\text{cilindro interior}} = \int_0^1 \tau_{r\theta}\big|_{r=R_1} \cdot R_1 \cdot ds = \int_0^1 \tau_{r\theta}\big|_{r=R_1} \cdot R_1 \cdot 2\,\pi\, R_1 dz = -4\,\mu\,\pi\, C_2$$

$$Par_{\text{cilindro exterior}} = \int_0^1 \tau_{r\theta}\big|_{r=R_2} \cdot R_2 \cdot ds = \int_0^1 \tau_{r\theta}\big|_{r=R_2} \cdot R_2 \cdot 2\,\pi\, R_2\, dz = -4\,\mu\,\pi\, C_2$$

Obsérvese que el par actuante sobre cada uno de los cilindros es el mismo. Para determinar la potencia por unidad de longitud, requerida para hacer girar cada cilindro, es únicamente necesario multiplicar cada una de las ecuaciones acabadas de hallar por la velocidad angular característica del cilindro bajo estudio.

2.- En el segundo apartado del problema, se pide hallar el campo de temperaturas del fluido bajo dos considerandos:

2a.- Los dos cilindros están a la misma temperatura.

2b.- El cilindro interior esta a una temperatura diferente que la del cilindro exterior.

Para determinar el campo de temperaturas será necesario utilizar la ecuación de la energía en forma diferencial, dicha ecuación se puede definir como:

$$\underbrace{\rho \cdot C_v \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (V\nabla)\cdot T\right]}_{\text{energía interna}} = \underbrace{k\cdot\nabla^2\cdot T}_{\substack{\text{flujo de calor}\\ \text{por conducción}}} - \underbrace{P\cdot(\nabla\,\vec{V})}_{\substack{\text{trabajo de expansión}\\ \text{o compresión}}} + \underbrace{\varnothing}_{\substack{\text{disipación}\\ \text{por viscosidad}}}$$

Con el fin de entender que caracteriza cada uno de los términos de esta ecuación y de poder evaluar el término de disipación viscosa, se procede seguidamente a hallar la ecuación de la energía en forma diferencial.

Para empezar, debe recordarse el principio de conservación de la energía, es decir, que la energía se conserva y no se destruye, únicamente se transforma. Un enunciado de este principio es la primera ley de la termodinámica, que aplicada a un volumen de control genérico establece:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Ritmo de cambio}\\ \text{de la energía dentro}\\ \text{del elemento de fluido}\\ \text{A}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Flujo neto de}\\ \text{calor en el}\\ \text{elemento diferencial}\\ \text{B}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{Trabajo hecho}\\ \text{en el elemento}\\ \text{acausa de las}\\ \text{fuerzas másicas}\\ \text{y superficiales}\\ \text{C}\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Inicialmente se evaluará el término C. Se puede demostrar que el trabajo realizado por una fuerza ejercida sobre un cuerpo que se mueve, es igual al producto de la fuerza por la componente de la velocidad en la dirección de dicha fuerza. Por lo tanto, el ritmo de trabajo realizado por las fuerzas másicas actuantes sobre un elemento diferencial de volumen que se desplaza a una velocidad $\vec{V}$ se define:

$$\rho\,\vec{g}\cdot\vec{V}(dx\,dy\,dz)$$

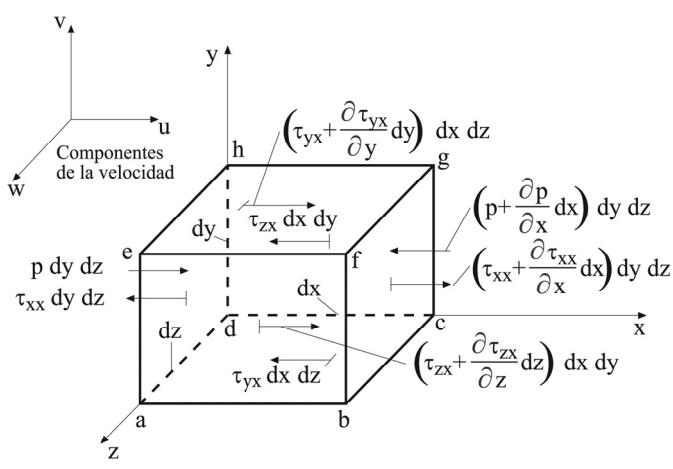


Fig. 68.2
Fuerzas actuantes sobre un elemento diferencial de volumen, esta figura presenta únicamente las fuerzas superficiales actuantes en dirección X

Por lo que hace referencia a las fuerzas superficiales, las debidas a la presión más los esfuerzos cortantes y normales actuantes sobre las superficies del elemento diferencial de volumen, ver figura 68.2, se determinan del modo siguiente. El ratio de trabajo realizado sobre el elemento diferencial de fluido que se mueve en una dirección dada, dirección X por ejemplo, será el producto de cada fuerza elemental actuante en dirección X por la velocidad de desplazamiento del volumen de control en dicha dirección. La figura 68.3 muestra dicho producto para todas las fuerzas elementales actuantes en dirección X. Es importante destacar que las fuerzas en el sentido positivo son las que van en dirección positiva de los ejes coordenados, el trabajo realizado por dichas fuerzas se entenderá asimismo como positivo. Obsérvese también que en la figura 68.3 se ha representado el flujo de calor actuante en dirección X.

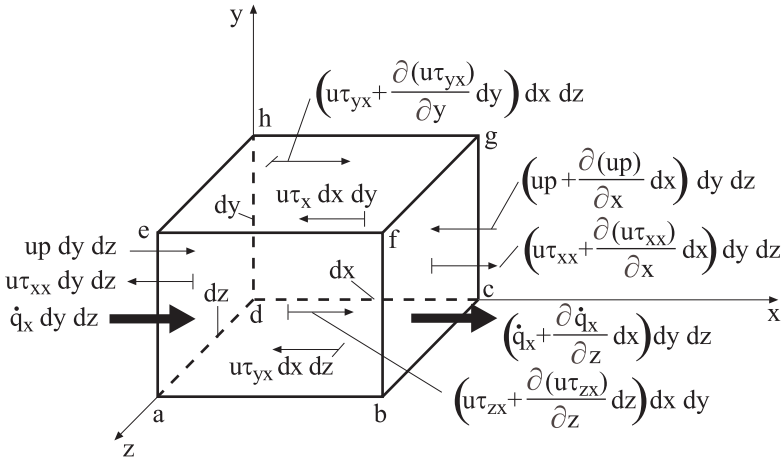


Fig. 68.3 Muestra el trabajo realizado por cada una de las fuerzas elementales actuantes en cada cara y en dirección X. Véase que también se ha representado el flujo de calor en dirección X

Observando lo establecido en la figura 68.3, el trabajo realizado por las fuerzas de presión actuantes en dirección X, es decir, actuantes sobre las caras adhe y bcgf, se puede establecer como:

$$\left[up-\left(up+\frac{\partial(up)}{\partial x}dx\right)\right]dy\,dz=-\frac{\partial(up)}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

De manera similar, el trabajo realizado por las tensiones cortantes actuantes en las caras abcd y efgh en dirección X, se evalúa como:

$$\left[\left(u\tau_{yx}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}dz\right)-u\tau_{yx}\right]dx\,dz=\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}dx\,dy\,dz$$

Aunque no se ha representado en la figura 68.3, esfuerzos cortantes homólogos aparecerán en las caras abfe y dcgh, los cuales darían lugar a:

$$\left[\left(u\tau_{zx}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial y}dy\right)-u\tau_{zx}\right]dx\,dy=\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial y}dx\,dy\,dz$$

El trabajo realizado en dirección X por los esfuerzos normales se define:

$$\left[\left(u\tau_{xx}+\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial y}dx\right)-u\tau_{xx}\right]dy\,dz=\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial y}dx\,dy\,dz$$

En consecuencia, el trabajo realizado por todas las fuerzas superficiales actuantes en dirección X toma la forma:

$$\left[-\frac{\partial(up)}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz$$

Puesto que esta expresión únicamente considera el trabajo realizado por las fuerzas superficiales actuantes en dirección X, realizando lo propio en las direcciones Y y Z, y después de sumar los tres términos, se obtiene:

$$C=\left[\begin{array}{l}-\left(\dfrac{\partial(up)}{\partial x}+\dfrac{\partial(vp)}{\partial y}+\dfrac{\partial(wp)}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\dfrac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}\\ +\dfrac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\dfrac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\dfrac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}+\dfrac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\dfrac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}\\ +\dfrac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\dfrac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\end{array}\right]dx\,dy\,dz+\rho\vec{g}\vec{V}\left(dx\,dy\,dz\right)\quad(2)$$

Obsérvese que esta ecuación caracteriza el término C de la ecuación (1).

El segundo término de la ecuación (1), caracterizaba el flujo neto de calor asociado al volumen elemental de fluido. Este flujo de calor es debido al calentamiento volumétrico debido a la absorción o emisión de radiación, y al calor transferido a través de la superficie debido a gradientes de temperatura, es decir conducción térmica. Defiendo como $\dot{q}$ al ratio neto por unidad de volumen y unidad de masa transferido al volumen elemental, y recordando que la masa del elemento diferencial se define como $\rho\,dx\,dy\,dz$, se establece que:

$$\left[\begin{array}{c}\text{Calentamiento}\\ \text{volumétrico}\\ \text{del elemento diferencial}\end{array}\right]=\rho\,\dot{q}\,dx\,dy\,dz \qquad (3)$$

En la figura 68.3, se ha representado el flujo de calor por conducción térmica existente en las caras adhe y bcgf, véase que el término $\dot{q}_x$ representa el calor transferido por conducción y por unidad de superficie y tiempo, en la dirección X. En consecuencia, el calor neto transferido por conducción en dirección X se puede evaluar como: (obsérvese que se utiliza el convenio de signos de termodinámica, el calor entrante se entiende como positivo).

$$\left[\dot{q}_x - \left(\dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}dx\right)\right]dy\,dz = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

Teniendo en cuenta la transferencia de calor por conducción existente en las direcciones Y y Z, se puede concluir que:

$$\begin{bmatrix}\text{Calentamiento del}\\ \text{elemento de fluido}\\ \text{por conducción}\\ \text{térmica}\end{bmatrix} = -\left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \qquad (4)$$

El término B de la ecuación (1) es la suma de las ecuaciones (3) y (4).

$$B = \left[\rho\,\dot{q} - \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz \qquad (5)$$

De acuerdo con la ley de Fourier, la transferencia de calor por conducción térmica es proporcional al gradiente local de temperatura:

$$\dot{q}_x = -k\frac{\partial T}{\partial x};\quad \dot{q}_y = -k\frac{\partial T}{\partial y};\quad \dot{q}_z = -k\frac{\partial T}{\partial z};$$

Dónde k es la conductividad térmica del fluido. Por lo tanto, la ecuación (5) se puede escribir de la siguiente forma:

$$B = \left[\rho\,\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz \qquad (6)$$

Finalmente, el término A en la ecuación (1), caracteriza la variación temporal de la energía asociada al fluido y que atraviesa las diversas caras del elemento diferencial de volumen. La energía total por unidad de masa, asociada a una partícula de fluido en movimiento, se puede desglosar como la suma de la energía interna, e, y la energía cinética por unidad de masa, $\frac{V^2}{2}$, por lo que la energía total asociada a una partícula de fluido en movimiento será $\left(e + \frac{V^2}{2}\right)$. Puesto que lo que se está haciendo es siguiendo un elemento diferencial de fluido en movimiento, la variación temporal de la energía total por unidad de masa se ha de describir en forma de derivada sustancial. Dado que la masa del elemento diferencial de fluido es $\rho(dx\,dy\,dz)$, se concluye que el término A de la ecuación (1) tomara la forma:

$$A = \rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) dx\, dy\, dz \tag{7}$$

Sustituyendo ahora los términos A, B y C, caracterizados respectivamente por las ecuaciones, (7), (6) y (2), en la ecuación (1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) = \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) \\
&- \left(\frac{\partial (up)}{\partial x} + \frac{\partial (vp)}{\partial y} + \frac{\partial (wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z} \\
&+ \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (w\tau_{zz})}{\partial z} \\
&+ \rho \vec{g} \cdot \vec{V}
\end{aligned} \tag{8}$$

Esta es la ecuación de la energía en la forma no conservativa. Véase que está dada en función de la energía total $\left(e + \frac{V^2}{2}\right)$. Es necesario puntualizar que, la forma no conservativa resulta de la aplicación del primer principio de la termodinámica a un elemento diferencial de fluido en movimiento. Es común expresar la parte izquierda de la ecuación de la energía en la forma que sólo incluya la energía interna, e. La derivación de dicha expresión se clarifica a continuación.

Es necesario recordar, que los tres términos de la ecuación de Cauchy, tomaban la forma:

$$\rho \frac{D(u)}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{zx})}{\partial z} + \rho g_x \tag{9a}$$

$$\rho \frac{D(v)}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{zy})}{\partial z} + \rho g_y \tag{9b}$$

$$\rho \frac{D(w)}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{zz})}{\partial z} + \rho g_z \tag{9c}$$

Multiplicando respectivamente las ecuaciones (9a), (9b) y (9c) por las componentes u, v, w de la velocidad del fluido, se obtiene:

$$\rho \frac{D\left(\frac{u^2}{2}\right)}{Dt} = -u \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial (\tau_{xx})}{\partial x} + u \frac{\partial (\tau_{yx})}{\partial y} + u \frac{\partial (\tau_{zx})}{\partial z} + \rho u g_x \tag{10a}$$

$$\rho\frac{D\left(\frac{v^2}{2}\right)}{Dt}=-v\frac{\partial p}{\partial y}+v\frac{\partial\left(\tau_{xy}\right)}{\partial x}+v\frac{\partial\left(\tau_{yy}\right)}{\partial y}+v\frac{\partial\left(\tau_{zy}\right)}{\partial z}+\rho v g_y \tag{10b}$$

$$\rho\frac{D\left(\frac{w^2}{2}\right)}{Dt}=-w\frac{\partial p}{\partial z}+w\frac{\partial\left(\tau_{xz}\right)}{\partial x}+w\frac{\partial\left(\tau_{yz}\right)}{\partial y}+w\frac{\partial\left(\tau_{zz}\right)}{\partial z}+\rho w g_z \tag{10c}$$

Al sumar las ecuaciones (10a), (10b) y (10c) y recordando que $u^2+v^2+w^2=V^2$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{2}\frac{DV^2}{Dt}=&-u\frac{\partial p}{\partial x}-v\frac{\partial p}{\partial y}-w\frac{\partial p}{\partial z}+u\left(\frac{\partial(\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_{zx})}{\partial z}\right)\\&+v\left(\frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_{zy})}{\partial z}\right)+w\left(\frac{\partial(\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_{zz})}{\partial z}\right)\\&+\rho\left(ug_x+vg_y+wg_z\right)\end{aligned} \tag{11}$$

Sustrayendo la ecuación (11) de la ecuación (8) y recordando que el término $\rho\ \vec{g}\cdot\vec{V}$ se puede dar como:

$$\rho\ \vec{g}\cdot\vec{V}=\rho\left(ug_x+vg_y+wg_z\right)$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}\rho\frac{De}{Dt}=&\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)-p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\\&+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned} \tag{12}$$

La ecuación (12) representa la forma no conservativa de la ecuación de la energía en términos de energía interna, e. Nótese que los términos que caracterizaban las fuerzas másicas han desaparecido, obsérvese además que los esfuerzos viscosos aparecen multiplicados por gradientes de velocidad.

En este punto es importante recordar que para fluidos Newtonianos, Stokes en 1845 establece la relación:

$$\tau_{xx}=\lambda\,\nabla\cdot\vec{V}+2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{13a}$$

$$\tau_{yy} = \lambda\, \nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{13b}$$

$$\tau_{zz} = \lambda\, \nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{13c}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{13d}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{13e}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{13f}$$

Donde λ se define como el segundo coeficiente de viscosidad, Stokes toma como hipótesis $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$.

En función de estos términos, la ecuación (12) se puede dar como:

$$\begin{aligned}\rho\frac{De}{Dt} &= \rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\\ &+ \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\\ &+ \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{14}$$

Esta expresión de la ecuación de la energía sigue siendo una forma no conservativa, aunque ahora la ecuación está definida en función de las variables del flujo.

Para obtener la ecuación de la energía en forma conservativa, se procede del siguiente modo. Recordando el concepto de derivada sustancial, la parte izquierda de las ecuaciones (12) y (14) se puede dar como:

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho\frac{\partial e}{\partial t} + \rho\vec{V}\cdot\nabla e \tag{15}$$

Desde el punto de vista matemático se puede decir.

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = \rho\frac{\partial e}{\partial t} + e\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Asimismo, desde el punto de vista matemático se establece:

$$\nabla\cdot\left(\rho e\vec{V}\right)=e\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)+\rho\vec{V}\cdot\nabla e$$

Sustituyendo estas dos últimas relaciones, en la ecuación (15) se obtiene:

$$\rho\frac{De}{Dt}=\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}-e\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)\right]+\nabla\cdot\left(\rho e\vec{V}\right) \tag{16}$$

Véase que el término entre corchetes es en realidad la ecuación de continuidad en forma diferencial, siendo igual a cero, en consecuencia queda:

$$\rho\frac{De}{Dt}=\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho e\vec{V}\right) \tag{17}$$

Sustituyendo la ecuación (17) en la ecuación (14) se llega a:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho e\vec{V}\right)=\rho\,\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\\&-p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\\&+\mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{18}$$

La ecuación (18) es la ecuación de la energía en forma conservativa, escrita en términos de energía interna.

Si en lugar de la ecuación (15), se utiliza la relación:

$$\rho\frac{D\left(e+\frac{V^2}{2}\right)}{Dt}=\rho\frac{\partial\left(e+\frac{V^2}{2}\right)}{\partial t}+\rho\,\vec{V}\cdot\nabla\left(e+\frac{V^2}{2}\right) \tag{19}$$

Realizando el mismo proceso acabado de establecer se obtendrá:

$$\rho\frac{D\left(e+\frac{V^2}{2}\right)}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\nabla\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right] \tag{20}$$

Sustituyendo la ecuación (20) en la parte izquierda de la ecuación (8), se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\nabla\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right]\\
&=\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\\
&-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x}+\frac{\partial(vp)}{\partial y}+\frac{\partial(wp)}{\partial z}\right)+\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}\\
&+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}+\rho\vec{g}\cdot\vec{V}
\end{aligned}\qquad (21)$$

Esta ecuación caracteriza la forma conservativa de la ecuación de la energía, escrita en términos de la energía total $\left(e+\frac{V^2}{2}\right)$.

Como nota final en este inciso, es importante puntualizar que existen otras formas posibles de la ecuación de la energía; por ejemplo, la ecuación se puede escribir en términos de la entalpía, h, o de la entalpía de estancamiento $\left(h+\frac{V^2}{2}\right)$.

Una vez explicado el origen de los diferentes términos que constituyen la ecuación de la energía, se procederá con el problema.

En coordenadas cilíndricas, la ecuación de la energía expresada en función de la energía interna y cuando no existe transferencia de calor por radiación, se define como: Obsérvese que esta ecuación es en realidad la ecuación (14) expresada en coordenadas cilíndricas.

$$\rho\cdot C_v\cdot\left[\frac{\partial T}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial\theta}+V_z\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right]=$$

$$k\cdot\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]-P\cdot\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\cdot V_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right]+\phi$$

Considerando régimen permanente, que la velocidad angular depende únicamente del radio y que la temperatura varía únicamente en dirección radial, la ecuación de la energía tomará la forma:

$$k\cdot\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{dT}{dr}\right)\right]+\phi=0$$

En el presente problema, los efectos viscosos no son insignificantes, se ha de tener en cuenta el trabajo realizado por las componentes de los esfuerzos cortantes y normales. Con lo que el término de disipación viscosa ϕha de ser introducido, dicho término en coordenadas cilíndricas toma la forma:

$$\phi = 2\cdot\mu\cdot\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{V_r}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial V_r}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\\ \cdot\left(\frac{\partial V_r}{\partial z}+\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r}\right)^2\end{array}\right]$$
$$+\lambda\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\left(r\cdot V_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right]$$

Recordando que para el presente problema la velocidad del fluido existe únicamente en dirección angular y depende únicamente del radio, se concluye que:

$$\phi = \mu\cdot\left[\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r}\right]^2$$

Con lo que la ecuación de la energía para el presente problema tomara la forma:

$$k\cdot\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{dT}{dr}\right)\right]+\mu\cdot\left[\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r}\right]^2=0$$

Con el fin de resolver esta ecuación, se procederá a adimensionalizarla, para ello se utilizarán los mismos parámetros de adimensionalización que los utilizados en el primer apartado del problema. La adimensionalización del término de disipación viscosa da lugar a:

Recuérdese que:

$$\begin{cases}V_\theta = u\cdot\omega_1\cdot R_1\\ r = R_1\cdot\varepsilon\end{cases}$$

$$\phi=\mu\cdot\left[\frac{\partial\left(u\cdot\omega_1\cdot R_1\right)}{\partial\left(R_1\cdot\varepsilon\right)}-\frac{u\cdot\omega_1\cdot R_1}{R_1\cdot\varepsilon}\right]^2=\mu\cdot\left[\frac{R_1}{R_1}\cdot\frac{\partial\left(u\cdot\omega_1\right)}{\partial\varepsilon}-\frac{u\cdot\omega_1}{\varepsilon}\right]^2=\mu\cdot{\omega_1}^2\cdot\left(\frac{du}{d\varepsilon}-\frac{u}{\varepsilon}\right)^2$$

Del primer apartado, la distribución de velocidades adimensionalizada, tomaba la forma:

$$u=\frac{M_1}{2}\cdot\varepsilon+\frac{M_2}{\varepsilon}$$

De donde:

$$\phi = \mu \cdot \omega_1^{\,2} \cdot \left(\frac{d\left(\frac{M_1}{2} \cdot \varepsilon + \frac{M_2}{\varepsilon} \right)}{d\varepsilon} - \frac{\frac{M_1}{2} \cdot \varepsilon + \frac{M_2}{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 = \mu \cdot \omega_1^{\,2} \cdot \left(\frac{M_1}{2} - \frac{M_2}{\varepsilon^2} - \frac{M_1}{2} - \frac{M_2}{\varepsilon^2} \right)^2$$

$$\phi = \mu \cdot \omega_1^{\,2} \cdot \left(-\frac{2 \cdot M_2}{\varepsilon^2} \right)^2 = 4 \cdot \mu \cdot \omega_1^{\,2} \cdot \frac{M_2^{\,2}}{\varepsilon^4}$$

Recuérdese que:

$$M_2 = \frac{\sigma^2 \cdot (1 - \Omega)}{\sigma^2 - 1}$$

Y se concluye:

$$\phi = \frac{4 \cdot \mu \cdot \omega_1^{\,2}}{\varepsilon^4} \cdot \left(\frac{\sigma^2 \cdot (1 - \Omega)}{\sigma^2 - 1} \right)^2$$

El siguiente paso es adimensionalizar el primer término de la ecuación de la energía, para ello, se utilizará la variable de adimensionalización:

$$\psi = \frac{T - T_1}{T_1}$$

Recuérdese que las condiciones de contorno para la temperatura eran:

$$\begin{cases} r = R_1; \quad T = T_1 \\ r = R_2; \quad T = T_2 \end{cases}$$

El primer término de la ecuación de la energía tomará la forma:

$$k \cdot \left[\frac{1}{R_1 \cdot \varepsilon} \cdot \frac{d}{d(R_1 \cdot \varepsilon)} \left(R_1 \cdot \varepsilon \cdot \frac{d(\psi \cdot T_1 + T_1)}{d(R_1 \cdot \varepsilon)} \right) \right] =$$

$$= k \cdot \left[\frac{1}{R_1 \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{d(\psi \cdot T_1 + T_1)}{d(R_1 \cdot \varepsilon)} + R_1 \cdot \varepsilon \cdot \frac{d^2(\psi \cdot T_1 + T_1)}{d(R_1 \cdot \varepsilon)^2} \right) \right] =$$

$$= k \cdot \left[\frac{1}{R_1 \cdot \varepsilon} \cdot \frac{d\left(\psi \cdot T_1 + T_1\right)}{d\left(R_1 \cdot \varepsilon\right)} + \frac{d^2\left(\psi \cdot T_1 + T_1\right)}{d\left(R_1 \cdot \varepsilon\right)^2} \right] = \frac{k \cdot T_1}{{R_1}^2} \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{d\left(\psi + 1\right)}{d\varepsilon} \right) + \frac{d^2\left(\psi + 1\right)}{d\varepsilon^2} \right]$$

$$= \frac{k \cdot T_1}{{R_1}^2} \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\psi}{d\varepsilon} + \frac{d^2\psi}{d\varepsilon^2} \right] = k \cdot \frac{T_1}{{R_1}^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{d}{d\varepsilon} \left(\varepsilon \cdot \frac{d\psi}{d\varepsilon} \right) \right)$$

Juntando los dos términos adimensionalizados se tiene:

$$k \cdot \frac{T_1}{{R_1}^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{d}{d\varepsilon} \left(\varepsilon \cdot \frac{d\psi}{d\varepsilon} \right) \right) + \frac{4 \cdot \mu \cdot {\omega_1}^2}{\varepsilon^4} \cdot {M_2}^2 = 0$$

Ecuación que se puede dar como:

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{d}{d\varepsilon} \left(\varepsilon \cdot \frac{d\psi}{d\varepsilon} \right) \right) = -\frac{1}{T_1} \cdot \frac{4}{\varepsilon^4} \cdot \frac{\mu \cdot {\omega_1}^2 \cdot {R_1}^2}{k} \cdot {M_2}^2$$

Denominando:

$$T_c = \frac{\mu \cdot {\omega_1}^2 \cdot {R_1}^2}{k} \cdot {M_2}^2$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{d}{d\varepsilon} \left(\varepsilon \cdot \frac{d\psi}{d\varepsilon} \right) \right) = -\frac{T_c}{T_1} \cdot \frac{4}{\varepsilon^4}$$

La primera integración de esta ecuación diferencial da lugar a:

$$\varepsilon \cdot \frac{d\psi}{d\varepsilon} = \frac{T_c}{T_1} \cdot \frac{2}{\varepsilon^2} + A$$

$$\frac{d\psi}{d\varepsilon} = \frac{T_c}{T_1} \cdot \frac{2}{\varepsilon^3} + \frac{A}{\varepsilon}$$

Integrando de nuevo:

$$\psi = -\frac{T_c}{T_1 \cdot \varepsilon^2} + A \cdot \ln \varepsilon + B$$

Se utilizarán ahora las condiciones de contorno con el fin de determinar las constantes A y B.

Primera condición de contorno, para $r = R_1$:

$$\varepsilon = 1; \quad \psi = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{T_c}{T_1} + B \quad \rightarrow B = \frac{T_c}{T_1}$$

Segunda condición de contorno, para $r = R_2$:

$$\varepsilon = \sigma; \quad \psi = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \quad \rightarrow \quad \frac{T_2 - T_1}{T_1} = -\frac{T_c}{T_1 \cdot \sigma^2} + A \cdot \ln \sigma + \frac{T_c}{T_1} \quad \rightarrow$$

$$A = \frac{1}{T_1 \cdot \ln \sigma} \cdot \left(T_2 - T_1 - T_c + \frac{T_c}{\sigma^2} \right)$$

Sustituyendo las constantes en la ecuación de origen se obtiene:

$$\psi = -\frac{T_c}{T_1 \, \varepsilon^2} + \frac{1}{T_1} \cdot \left(T_2 - T_1 - T_c + \frac{T_c}{\sigma^2} \right) \frac{\ln \varepsilon}{\ln \sigma} + \frac{T_c}{T_1}$$

$$= \frac{1}{T_1} \cdot \left[-\frac{T_c}{\varepsilon^2} + \frac{\ln \varepsilon}{\ln \sigma} \cdot \left(T_2 - T_1 - T_c + \frac{T_c}{\sigma^2} \right) + T_c \right]$$

Sustituyendo ahora las variables adimensionales por sus equivalentes dimensionales se llega a:

$$\frac{T - T_1}{T_1} = \frac{1}{T_1} \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\dfrac{\mu \cdot \omega_1^{\,2} \cdot R_1^{\,2}}{k} \cdot M_2^{\,2}}{\left(\dfrac{r}{R_1} \right)^2} + \dfrac{\mathrm{In}\left(\dfrac{r}{R_1} \right)}{\mathrm{In}\left(\dfrac{R_2}{R_1} \right)} \\ \cdot \left(T_2 - T_1 - \dfrac{\mu \cdot \omega_1^{\,2} \cdot R_1^{\,2}}{k} \, M_2^{\,2} + \dfrac{\dfrac{\mu \cdot \omega_1^{\,2} \cdot R_1^{\,2}}{k} \cdot M_2^{\,2}}{\left(\dfrac{R_2}{R_1} \right)^2} \right) + \dfrac{\mu \cdot \omega_1^{\,2} \cdot R_1^{\,2}}{k} \cdot M_2^{\,2} \end{array} \right]$$

Véase que la constante M_2 no ha sido aún sustituida por su equivalente. Reordenando esta ecuación, se tiene:

$$T = T_1 + \frac{\mu \cdot \omega_1^{\,2} \cdot R_1^{\,2} \cdot M_2^{\,2}}{k} \left(\frac{\ln\left(\dfrac{r}{R_1} \right)}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1} \right)} \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{R_2}{R_1} \right)^2}{\left(\dfrac{R_2}{R_1} \right)^2} - \frac{R_1^{\,2}}{r^2} + 1 \right) + \frac{\ln\left(\dfrac{r}{R_1} \right)}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1} \right)} \left(T_2 - T_1 \right)$$

Sustituyendo por último el valor de M_2 se obtiene:

$$T = T_1 + \frac{\mu\cdot\omega_1^{\,2}\cdot R_1^{\,2}\cdot\left(\dfrac{\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2\left(1-\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2-1}\right)^2}{k}\left(\frac{\ln\left(\dfrac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2}{\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2}-\frac{R_1^{\,2}}{r^2}+1\right)$$

$$+\frac{\ln\left(\dfrac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}\left(T_2-T_1\right)$$

Esta ecuación caracteriza la variación de temperatura en función del radio. Obsérvese que para el caso en que $T_2 = T_1$ la parte derecha de la ecuación constará únicamente de dos términos, por otro lado, cuando $T_2 \neq T_1$ los tres términos de la parte derecha de la ecuación, son relevantes.

A continuación se procederá a graficar esta ecuación, para ello se elige como fluido de trabajo, agua, siendo los valores de las diferentes constantes, los siguientes.

$$\omega_1 = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{S}}\ ;\ \ \omega_2 = 1,2\,\frac{\text{rad}}{\text{S}}\ ;\ \ R_1 = 0,02\ \text{m}\ ;\ \ R_2 = 0,03\ \text{m}\ ;\ \ T_1 = 293\ \text{K}\ ;$$

$$T_2 = 295\ \text{K}\ ;$$

$$\mu = 1,102*10^{-3}\,\frac{\text{Kg}}{\text{m S}}\ ;\ \ k = 598,4*10^{-3}\,\frac{\text{W}}{\text{m K}}\ ;$$

La figura 68.4a, muestra la variación de temperatura existente en el fluido cuando ambos cilindros, el interior y el exterior se mantienen a la misma temperatura, obsérvese que el incremento de temperatura que sufre el fluido es debido a los esfuerzos viscosos, normales y cortantes, que existen en el fluido, dicho incremento es prácticamente nulo. Esta es la justificación del porqué en muchos problemas prácticos la disipación viscosa se considere menospreciable.

La figura 68.4b muestra el gradiente de temperaturas entre los dos cilindros cuando la temperatura del cilindro exterior está dos grados por encima de la temperatura existente en el cilindro interior, para este caso se aprecia una variación logarítmica de la temperatura con el radio.

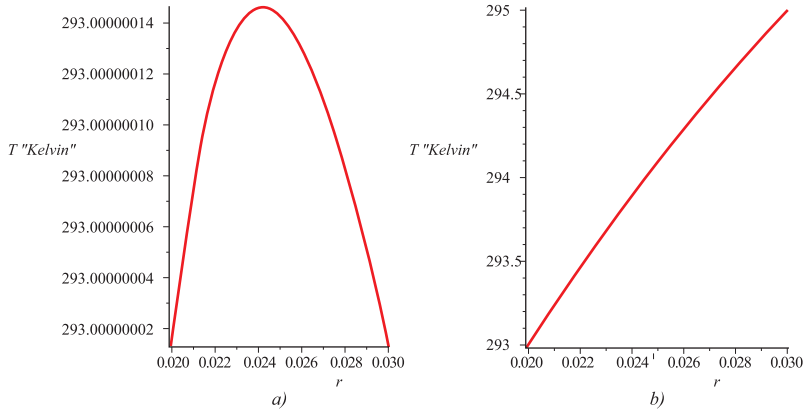


Fig. 68.4
a) Distribución de temperaturas entre el cilindro interior y exterior cuando ambos cilindros están a la misma temperatura. b) Distribución de temperaturas entre los dos cilindros cuando la temperatura del cilindro exterior esta dos grados por encima de la temperatura existente en el cilindro interior

Problema 69

Enunciado

Se pretende diseñar una miniturbina para que gire a altas velocidades angulares y, a priori, se quiere estudiar la posibilidad de que el fluido que fluye por la turbomáquina se pueda utilizar como fluido lubricante en el eje de la propia turbina. A tal efecto, se pretende canalizar el fluido hacia uno de los extremos del eje de la máquina, tal como muestra la figura 69.1.

Se pide determinar:

1. El caudal volumétrico circulante a través del intersticio eje de la turbina y carcasa de la misma.

2. La estabilidad del eje de la turbina en función del fluido de trabajo y de la velocidad de giro del rotor.

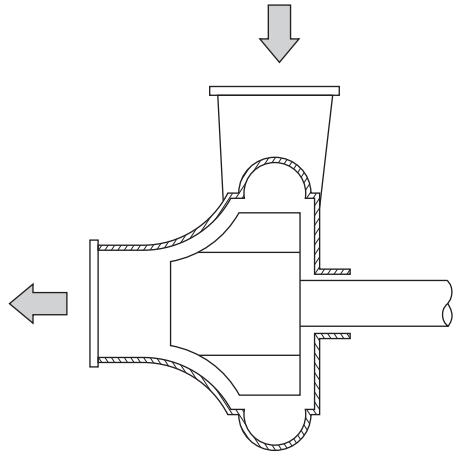


Fig. 69.1.
Turbina objeto de estudio

Resolución

1a. Para determinar el flujo circulante entre el eje y la carcasa, es necesario hallar inicialmente el flujo que fluye entre la pared de la turbina y la carcasa de la máquina, (v. figura 69.2). Es decir, es necesario determinar inicialmente el flujo y la distribución de presiones entre dos platos paralelos con movimiento circular relativo entre ambos.

Puesto que el intersticio entre los dos platos es, en realidad, muy pequeño, se asume inicialmente que el flujo es laminar. Para determinar la distribución de presiones entre ambos discos circulares, se utiliza la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, que toma la forma:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \ h^3\frac{\partial p}{\partial r}\right)=6\mu\ \left(U\ \ \cos\theta\frac{\partial h}{\partial r}-\frac{U\ \ \sin\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}+\omega\frac{\partial h}{\partial\theta}\right) \qquad (1)$$

Asumiendo que el flujo es incompresible y el régimen es laminar, y considerando que los dos platos se mantienen paralelos, siendo la distancia entre ellos (h) = constante, se puede establecer que la distancia entre los platos no va a cambiar ni en dirección angular ni en dirección radial; asimismo, la presión se mantendrá constante en dirección angular:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)=\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)=\left(\frac{\partial h}{\partial\theta}\right)=0\,; \qquad (2)$$

En estas condiciones, la ecuación de lubricación de Reynolds tomará la forma:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \ h^3\frac{\partial p}{\partial r}\right)=0 \qquad (3)$$

La integración de esta ecuación dará lugar a:

$$P=\frac{K_1}{h^3}\ln r+K_2\,,\ \text{donde } K_1 \text{ y } K_2 \text{ son constantes.} \qquad (4)$$

Las condiciones de contorno para determinar dichas constantes serán (v. figura 69.2):

$$\text{Para } r=R_1 \Rightarrow P=P_1,\ \text{y cuando } r=R_2 \Rightarrow P=P_2 \qquad (5)$$

Una vez las constantes K_1 y K_2 han sido determinadas y sustituidas en la ecuación (4), se obtiene:

$$P=P_1+\frac{P_1-P_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \qquad (6)$$

ecuación que proporciona la distribución de presiones entre los dos platos y en función del radio.

Por otro lado, el flujo volumétrico entre los dos platos puede ser determinado como:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^h u \; r \; dy \; d\theta \tag{7}$$

Asumiendo flujo de Poiseulle entre los dos platos, la distribución de velocidades entre los mismos se puede definir como:

$$u = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{y}{2}(y-h), \text{ donde: } 0 < y < h \tag{8}$$

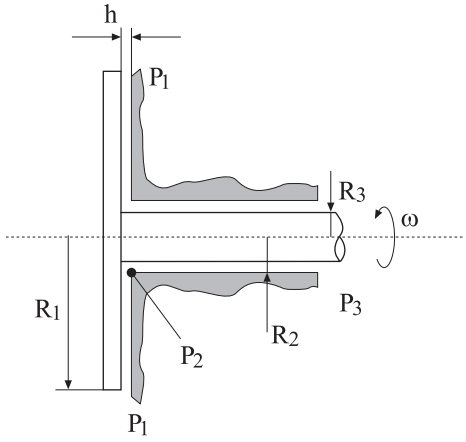


Fig. 69.2. Eje central de la turbina y pared lateral de la misma

Véase que el flujo se asume como unidireccional y que fluye en dirección radial desde el radio mayor al radio menor de los platos paralelos.

Sustituyendo la ecuación (8) en (7), se obtiene:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{y}{2}(y-h) \right) \; r \; dy \; d\theta \tag{9}$$

Véase que la variación de presión con respecto al radio, definida en la ecuación (9), es en realidad la primera derivada de la ecuación (3), con lo que se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{K_1}{r \; h^3} = \frac{(P_1 - P_2)}{r \; \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \tag{10}$$

Sustituyendo la ecuación (10) en la (9) e integrando, se obtiene:

$$Q_{plato} = \frac{\pi}{\mu}\frac{(P_1 - P_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}\frac{h^3}{6} \tag{11}$$

Esta ecuación determina el caudal circulante entre los dos platos paralelos en función de la presión diferencial existente entre los extremos de los mismos, la viscosidad del fluido, la distancia entre platos y las dimensiones de estos.

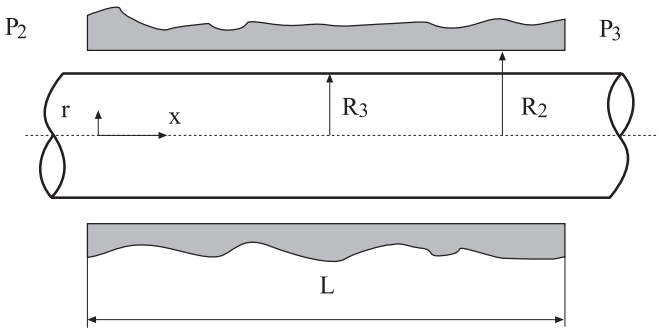
1b. Eje cilíndrico

En este segundo subapartado, se van a determinar el flujo y la distribución de presiones entre el eje de la máquina y la carcasa de la misma (v. figura 69.3).

El flujo a través del intersticio entre el eje giratorio y su alojamiento, flujo en dirección axial, en función de la presión existente entre los extremos del eje, es en realidad bidireccional, dado que $V_X \neq 0$ y $V_\theta \neq 0$; la ecuación diferencial resultante no puede ser resuelta analíticamente. No obstante, si se asume la no existencia de rotación, el flujo tendrá únicamente dirección axial X. En este caso, la ecuación diferencial a resolver tendrá la forma:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \ \frac{\partial V_X}{\partial r} \right) \tag{12}$$

Fig. 69.3 Conjunto eje giratorio y estator. Dimensiones principales



La variación de presión a lo largo del eje de la máquina puede expresarse como:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p_3 - p_2}{L} \tag{13}$$

Sustituyendo la ecuación (13) en (12) e integrando dos veces se obtiene:

$$V_X = \frac{p_3 - p_2}{L}\frac{r^2}{4\ \mu} + C_1 \quad \ln(r) + C_2 \tag{14}$$

Las condiciones de contorno para determinar las constantes C_1 y C_2 son:

$$\text{Cuando } r = R_3 \Rightarrow V_X = 0, \text{ y cuando } r = R_2 \Rightarrow V_X = 0 \tag{15}$$

Una vez halladas las constantes y sustituidas en la ecuación (14), se obtiene:

$$V_X = \frac{(p_3 - p_2)}{L}\frac{(r^2 - R_3^2)}{4\ \mu} - \frac{(p_3 - p_2)}{L\ 4\ \mu}\frac{(R_2^2 - R_3^2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)}\ \ln\left(\frac{r}{R_3}\right) \qquad (16)$$

La ecuación (16) proporciona el perfil de velocidades parabólico existente entre los dos cilindros.

El flujo de fluido en el intersticio existente entre el eje y la carcasa será:

$$Q\big|_{eje} = \int_{R_3}^{R_2} V_X\ \ 2\ \ \pi\ r\ dr \qquad (17)$$

Sustituyendo la ecuación (16) en la (17), se obtiene:

$$Q\big|_{eje} = \int_{R_3}^{R_2} \left[\frac{(p_3 - p_2)}{L}\frac{(r^2 - R_3^2)}{4\ \mu} - \frac{(p_3 - p_2)}{L\ 4\ \mu}\frac{(R_2^2 - R_3^2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)}\ln\left(\frac{r}{R_3}\right) \right] 2\ \pi\ r\ dr \qquad (18)$$

De la integración de la ecuación (18), se obtiene:

$$Q\big|_{eje} = \frac{\pi\ (p_3 - p_2)}{8\ L\ \mu}(R_2^2 - R_3^2)^2 - \frac{\pi\ (p_3 - p_2)}{2\ L\ \mu}\frac{(R_2^2 - R_3^2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)}\left[\frac{R_2^2}{2}\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) - \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{4} \right] \qquad (19)$$

Obsérvese que la ecuación (19) proporciona el flujo entre los dos cilindros en función de la diferencia de presión existente entre sus extremos, las dimensiones del conjunto y la viscosidad del fluido. La ecuación (11), por otro lado, daba el caudal volumétrico entre dos platos giratorios y paralelos, pero ambos caudales han de ser en todo momento el mismo; en consecuencia, de la igualación de las ecuaciones (11) y (19) se obtendrá la presión en el punto de intersección entre el plato y el eje, presión P_2, siendo su valor:

$$p_2 = \frac{\dfrac{p_1\ h^3}{3\ \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} - p_3\left[\dfrac{(R_2^2 - R_3^2)^2}{4\ L} - \dfrac{(R_2^2 - R_3^2)}{L\ \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)}\left(\dfrac{R_2^2}{2}\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) - \dfrac{(R_2^2 - R_3^2)}{4} \right) \right]}{\dfrac{h^3}{3\ \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} - \left[\dfrac{(R_2^2 - R_3^2)^2}{4\ L} - \dfrac{(R_2^2 - R_3^2)}{L\ \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)}\left(\dfrac{R_2^2}{2}\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) - \dfrac{(R_2^2 - R_3^2)}{4} \right) \right]} \qquad (20)$$

Para determinar la distribución de presiones a lo largo del eje de la máquina, se puede utilizar la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas, aunque el intersticio eje-carcasa tenga la forma de un cilindro hueco. Dicha ecuación en modo unidimensional toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{b^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0 \tag{21}$$

Su integración da lugar a:

$$P=\frac{A\ \mu}{b^3}X+B \tag{22}$$

Para el caso que nos ocupa, el parámetro b es, en realidad, $b=(R_2-R_3)$

Las condiciones de contorno para determinar las constantes A y B son:

cuando $X=0 \Rightarrow p=p_2$ y cuando $X=L \Rightarrow p=p_3$ (23)

Una vez las constantes han sido halladas y sustituidas en la ecuación (22), se obtiene:

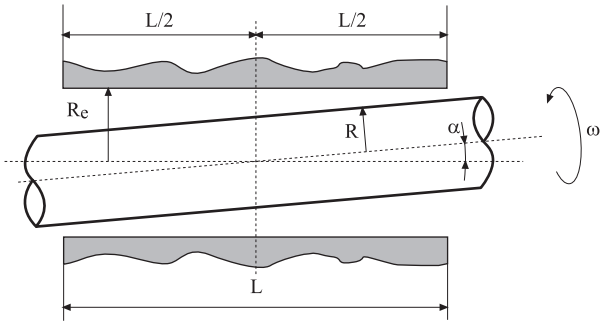
$$P=\frac{(p_3-p_2)}{L}X+P_2 \tag{24}$$

ecuación que proporciona la caída de presión a lo largo del eje de la máquina. Obsérvese que la presión decae linealmente, tal como se estableció en la ecuación (13).

2. En este segundo apartado, se va aplicar la teoría de cojinetes hidrodinámicos infinitamente largos al eje de la máquina, con el fin de determinar la estabilidad del mismo.

La figura 69.4 muestra el eje en estudio, indicando el posible desplazamiento del mismo. La figura 69.5 presenta una sección transversal del conjunto eje y carcasa, donde se observa la posición relativa del rotor *versus* el estátor.

Fig. 69.4
Desplazamiento genérico del eje con respecto a la carcasa



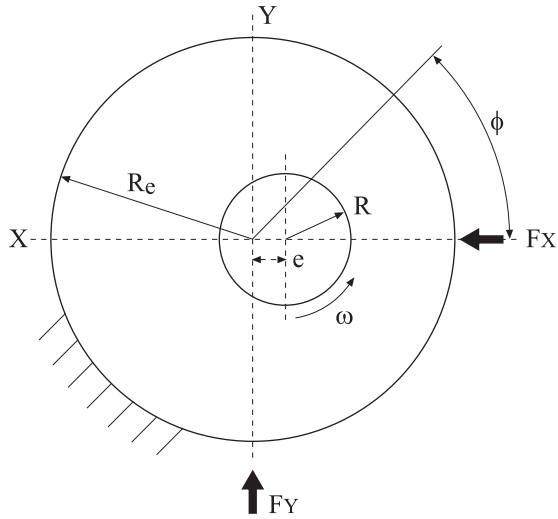


Fig. 69.5
Posición relativa genérica del eje versus el estátor. Sección frontal

De acuerdo con las figuras 69.4 y 69.5, se puede definir:

$$\bar{h} = R_e - R \tag{25}$$

$$\psi = \frac{\bar{h}}{R} = \frac{R_e - R}{R} \tag{26}$$

$$\varepsilon = \frac{e}{\bar{h}} \tag{27}$$

$$h_{(\varphi)} = \bar{h}\ (1 - \varepsilon\ \cos\varphi) \tag{28}$$

Asumiendo el flujo de Couette-Poiseuille, el flujo volumétrico entre estátor y rotor puede expresarse como:

$$\dot{\forall} = Q = \frac{1}{2} U\ h_{(\varphi)} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{12\ \mu} h^3_{(\varphi)} \left[\frac{m^2}{s}\right] \tag{29}$$

Para el presente caso: dx = R dφ

Integrando la ecuación (29) con respecto a la presión entre 0 y 2π, y extrayendo el flujo volumétrico, se obtiene:

$$\dot{\forall} = \frac{1}{2} \omega\ R^2\ \ \psi \frac{I_2}{I_3}; \left[\frac{m^2}{s}\right] \tag{30}$$

donde:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon\ \cos\varphi)^{-2} d\varphi = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \tag{31}$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon\ \cos\varphi)^{-3} d\varphi = \frac{\pi\ (2+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \tag{32}$$

Integrando de nuevo la ecuación (29), ahora entre 0 y un ángulo genérico φ, y sustituyendo la ecuación del flujo volumétrico (30) en dicha ecuación (29), se obtiene:

$$p = -6\frac{\mu\ \omega\ \varepsilon}{\psi^2}\frac{\sin\varphi\ (2-\varepsilon\ \cos\varphi)}{(1-\varepsilon\ \cos\varphi)^2\ (2+\varepsilon^2)} + C\ \left[\frac{N}{m^2}\right] \tag{33}$$

La constante de integración que se obtiene en la ecuación (33) debe ser hallada mediante una condición de contorno, que es la presión en una posición angular genérica ($\varphi = \gamma$) conocida, con lo que la ecuación final que caracteriza la distribución de presiones en dirección angular toma la forma:

$$p = -6\frac{\mu\ \omega\ \varepsilon}{\psi^2}\frac{\sin\varphi\ (2-\varepsilon\ \cos\varphi)}{(1-\varepsilon\ \cos\varphi)^2\ (2+\varepsilon^2)} + p_{(\gamma)}\ \left[\frac{N}{m^2}\right] \tag{34}$$

Las fuerzas en las direcciones X e Y (horizontal y vertical) se definen como (v. figura 69.5):

$$F_Y = -\int_0^{2\pi} p\ \sin\varphi\ R\ d\varphi \tag{35}$$

$$F_X = -\int_0^{2\pi} p\ \cos\varphi\ R\ d\varphi \tag{36}$$

La integración de las ecuaciones (35) y (36) da como resultado:

$$F_Y = \frac{6\ \mu\ \omega\ R}{\psi}\left(\frac{I_2\ I_5 - I_3\ I_4}{I_3}\right) \tag{37}$$

$$F_X = \frac{6\ \mu\ \omega\ R}{\psi^2}\left(\frac{I_6\ I_3 - I_7\ I_2}{I_3}\right) \tag{38}$$

donde:

$$I_4 = \int_0^{2\pi}(1-\varepsilon\ \cos\varphi)^{-2}\ \cos\varphi\ d\varphi = \frac{I_2 - I_1}{\varepsilon} \tag{39}$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi}(1-\varepsilon\ \cos\varphi)^{-3}\ \cos\varphi\ d\varphi = \frac{I_3 - I_2}{\varepsilon} \tag{40}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (1-\varepsilon \cos\varphi)^{-1} d\varphi = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \tag{41}$$

$$I_6 = \int_0^{2\pi} (1-\varepsilon \cos\varphi)^{-2} \sin\varphi \, d\varphi = 0 \tag{42}$$

$$I_7 = \int_0^{2\pi} (1-\varepsilon \cos\varphi)^{-3} \sin\varphi \, d\varphi = 0 \tag{43}$$

El valor de las integrales I_2 e I_3 se ha dado en las ecuaciones (31) y (32). Obsérvese que la fuerza F_x para la posición estudiada tiene un valor nulo.

Asúmase ahora que el eje está situado en una posición genérica definida por el ángulo δ, tal y como muestra la figura 69.6. Las fuerzas horizontales y verticales quedarán ahora definidas como:

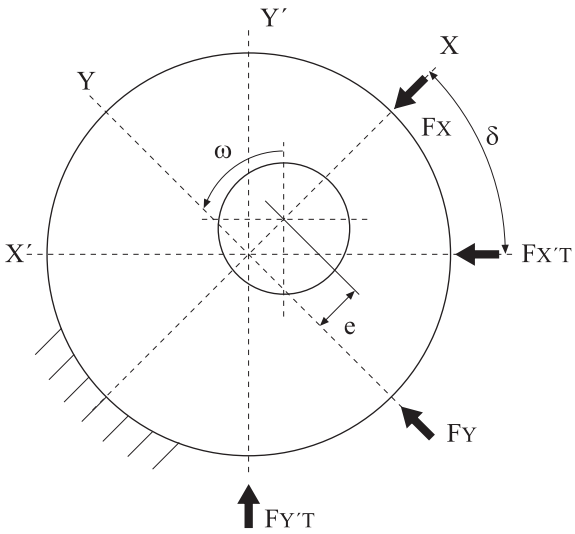


Fig. 69.6
Vista frontal del cojinete hidrodinámico. El eje se ha situado ahora en una posición genérica

$$F_{Y'T} = F_Y \cos\delta - F_X \sin\delta \tag{44}$$

$$F_{X'T} = -F_Y \sin\delta - F_X \cos\delta \tag{45}$$

Puesto que, en este segundo apartado, lo que se quiere es evaluar la estabilidad del eje, el siguiente paso será visualizar las fuerzas que actúan sobre el eje para cualquier posición del mismo. La figura 69.7 presenta la fuerza resultante horizontal y vertical que actúa sobre el eje en función de la posición del mismo. Obsérvese que el eje tenderá a moverse hacia arriba o hacia abajo dependiendo de la posición temporal en que se encuentre. Es de esperar que el eje se mueva en forma elíptica dentro de su alojamiento.

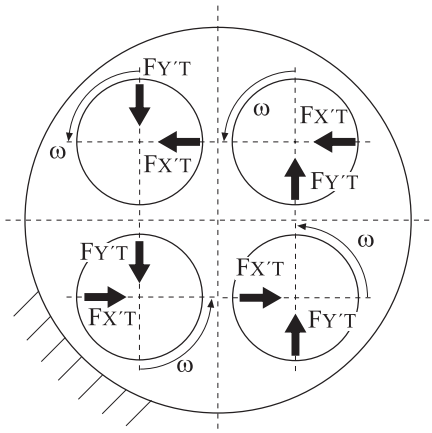


Fig. 69.7
Direcciones de las fuerzas actuantes sobre el eje, en función de la posición relativa del mismo

Con el fin de clarificar este efecto, las figuras 69.8 y 69.9 presentan las fuerzas verticales y horizontales actuantes sobre el eje, en función de su posición relativa con respecto al estátor y para una excentricidad e dada. Obsérvese que dichas fuerzas cambian en magnitud y dirección dependiendo de la posición del eje, tal como se ha mostrado en la figura 69.7.

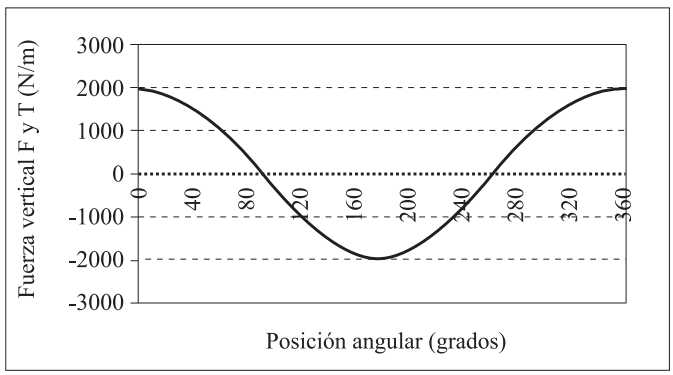


Fig. 69.8
Fuerza horizontal FyT como función de la posición del eje central, definida por el ángulo . Los parámetros utilizados en el cálculo son: radio del eje R=0,01 m; la velocidad de giro 5000 rad/s; distancia media entre eje y carcasa h =Re –R=10 micras; excentricidad e = 1 micra; fluido de trabajo aire, viscosidad 1,983 E-5 (Kg/m s)

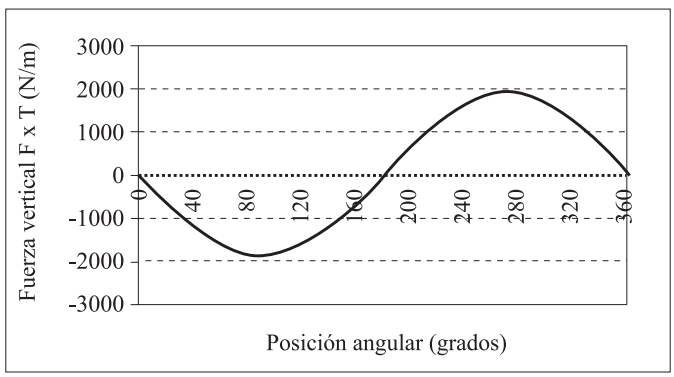


Fig. 69.9
Fuerza horizontal FxT como función de la posición del eje central, definida por el ángulo . Los parámetros utilizados en el cálculo son: radio del eje R=0,01 m; la velocidad de giro 5000 rad/s; distancia media entre eje y carcasa h =Re –R=10 micras; excentricidad e = 1 micra; fluido de trabajo aire, viscosidad 1,983 E-5 (Kg/m s)

Las fuerzas calculadas hasta este punto son fuerzas por unidad de longitud del eje. Así, para determinar el par que tiende a equilibrar el eje y mantenerlo en posición horizontal, se debería entender que las fuerzas calculadas actúan sobre un elemento diferencial de longitud del eje. En lo que sigue, se va a dividir el eje en varias porciones y se determinara el par que se crea en cada una de las porciones, par debido a las fuerzas horizontales y verticales que actúan sobre cada porción de eje, cuya excentricidad es conocida; considerando además para cada caso y, a efecto de la realización de cálculos, la distancia central de cada porción. El par total será la suma de los pares asociados a cada una de las porciones de eje, (v. figura 69.10).

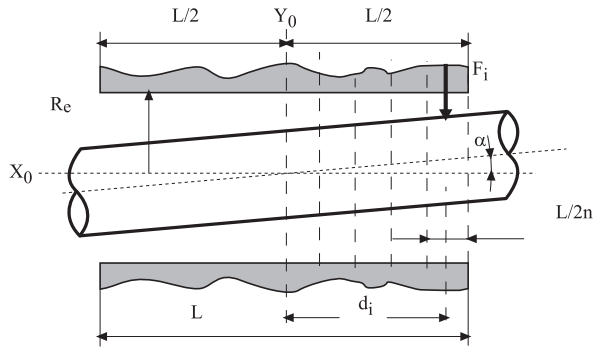


Fig. 69.10 Posición genérica del eje, la mitad del cual ha sido dividido en varias porciones

A continuación, se definirán los pares individuales creados en cada una de las porciones del eje. Es necesario remarcar que cada porción de eje lleva asociada una excentricidad media y una posición del eje con respecto al plano coordenado (figura 69.7), las cuales se utilizan para realizar los cálculos de las fuerzas actuantes sobre la porción de eje considerada. Asimismo, debe remarcarse que cada par lleva su propio signo asociado.

Primer caso. La posición del eje está localizada entre un ángulo $0 < \delta < 90°$ (v. figura 69.11). Los pares con respecto a los tres ejes coordenados producidos por una porción del eje situado en una posición definida en la figura 69.11 se definen del modo siguiente. (Los ejes X_0 e Y_0 se han definido en la figura 69.10; el eje Z es perpendicular al plano del papel).

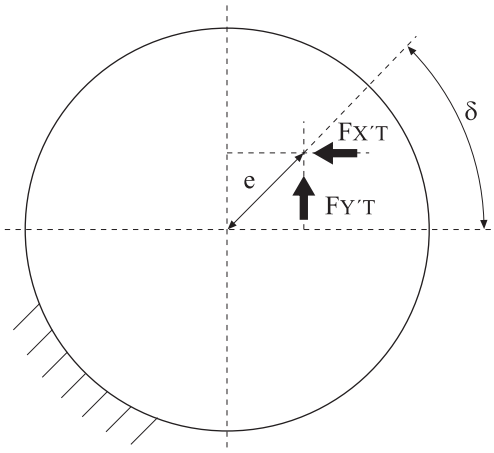
$$M_{iZo} = F_{iY'T} * d_i \text{ (empuja el eje hacia arriba)} \qquad (46)$$

$$M_{iXo} = F_{iX'T} * e * \sin\delta + F_{iY'T} * e * \cos\delta$$

$$M_{iYo} = F_{iX'T} * d_i$$

Recuérdese que las unidades de la fuerza y el par son $F_i = \left[\frac{N}{m}\right]$; $M_i = \left[\frac{N*m}{m}\right]$

Fig. 69.11
Ejemplo de situación del eje para el primer caso



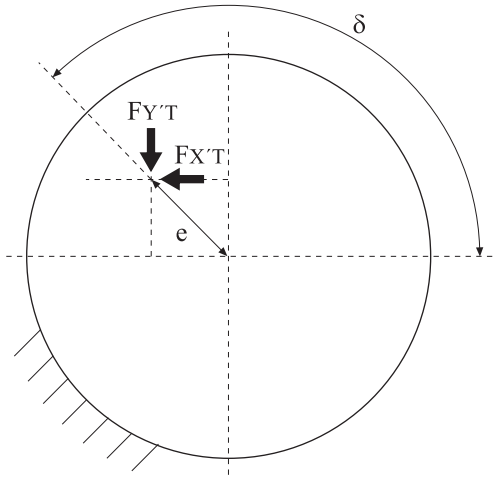
Segundo caso. La posición del eje está localizada entre un ángulo $90° < \delta < 180°$ (v. figura 69.12). Los pares resultantes son ahora:

$$M_{iZo} = F_{iY'T} * d_i \text{ (empuja el eje hacia abajo)} \quad (47)$$

$$M_{iXo} = F_{iX'T} * e * \sin(180 - \delta) + F_{iY'T} * e * \cos(180 - \delta)$$

$$M_{iYo} = F_{iX'T} * d_i$$

Fig. 69.12
Ejemplo de situación del eje para el segundo caso



Tercer caso. La posición del eje está localizada entre un ángulo $180° < \delta < 270°$ (v. figura 69.13). Para este caso, se obtiene:

$$M_{iZo} = F_{iY'T} * d_i \text{ (empuja el eje hacia abajo)} \quad (48)$$

$$M_{iXo} = F_{iX'T} * e * \sin(270 - \delta) + F_{iY'T} * e * \cos(270 - \delta)$$

$$M_{iYo} = F_{iX'T} * d_i$$

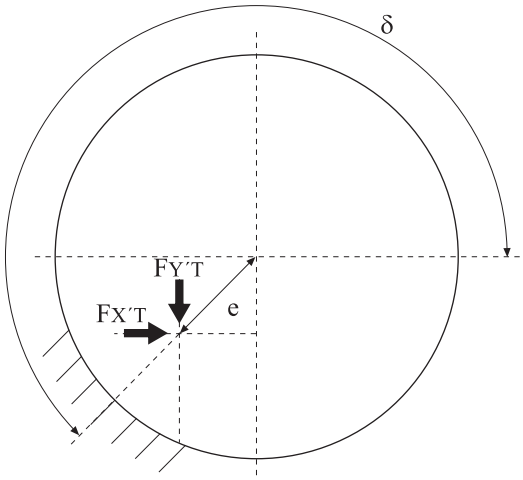


Fig. 69.13
Ejemplo de situación del eje para el tercer caso

Cuarto caso. La posición del eje está localizada entre un ángulo $270° < \delta < 360°$ (v. figura 69.14).

$$M_{iZo} = F_{iY'T} * d_i \text{ (empuja ele eje hacia arriba).} \quad (49)$$

$$M_{iXo} = F_{iX'T} * e * \sin(360 - \delta) + F_{iY'T} * e * \cos(360 - \delta)$$

$$M_{iYo} = F_{iX'T} * d_i$$

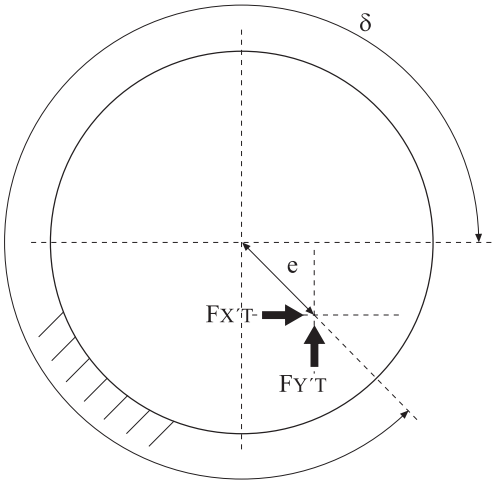


Fig. 69.14
Ejemplo de situación del eje para el cuarto caso

Para calcular el par producido por todo el colectivo de porciones de eje, es necesario determinar para cada caso la distancia d_i entre el centro del pedazo de eje considerado y el punto de giro del eje de la turbina.

Considerando que el número de porciones de eje es n y que la excentricidad máxima es e_{max}, la excentricidad del centro de cada porción de eje será:

$$e_i = \frac{e_{max}\ \frac{L}{n}\left(\frac{n-2i}{2}\right)}{\frac{L}{n}\frac{n}{2}} = \frac{e_{max}}{n}(n-2i) = e_{max}\ \ (1-\frac{2i}{n}) \qquad (50)$$

donde $0 < i < \frac{n-2}{2}$

La figura 69.15 presenta el par restaurador total (M_{ZoT}) actuante sobre el eje de la turbina para tres configuraciones de eje diferentes, para una misma excentricidad e y en función de la velocidad de giro del eje. Las tres configuraciones del eje son (v. figuras 69.7 y 69.10-69.14).

a) Un extremo del eje está situado en la parte inferior derecha, ángulo de (315º) (v. figura 69.14), y el otro extremo del eje está situado en la parte superior izquierda, siendo su posición angular (135°) (v. figura 69.12).

b) Un extremo del eje está situado en la parte inferior izquierda, formando un ángulo de (225°) (v. ver figura 69.13), mientras que el extremo opuesto del eje está situado en la parte superior derecha del plano, formando un ángulo de (45°) (v. figura 69.11).

c) En este tercer caso, se supone que los extremos opuestos de los ejes están situados en las posiciones angulares de (270°) y (90°), respectivamente.

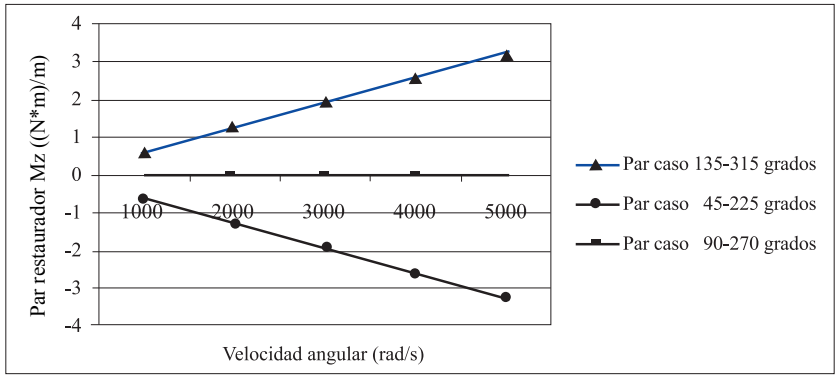


Fig. 69.15 Relación entre el par total actuante sobre el eje (MZoT) en función de la velocidad de giro del mismo y para las tres configuraciones de los ejes establecidas

Finalmente, es necesario remarcar que los cojinetes hidrodinámicos, suelen tener una ranura longitudinal cortada en el estátor, a través de la cual se inyecta fluido en el intersticio rotor-estátor. La presión del fluido a la salida de dicha ranura (fluido entrante en el cojinete) ha de tener un valor mínimo, con el fin de evitar la aparición de cavitación en el fluido circulante dentro del cojinete. En el presente caso, si el fluido de trabajo es aire, no existe riesgo de cavitación. No obstante, la ranura longitudinal podría ser utilizada para introducir aire presurizado en el sistema. La presión de alimentación ha de entenderse como un parámetro que permite modificar la rigidez del sistema, y que puede ayudar a estabilizar el movimiento del eje.

Problema 70

Enunciado

Sea un patín deslizante (patín de Michel) que se desplaza a lo largo de una placa plana. La distancia mínima entre placa y patín debe ser de h = 0,15 mm y su inclinación se ha estipulado en $\alpha = 0{,}2º$, su longitud es de $L_p = 0{,}05$ m. El patín debe soportar 850 N. El fluido entre patín y placa es aceite SAE 10 cuya viscosidad a 20º es $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \frac{Kg}{m\,s}$.

Si se desea que la velocidad de desplazamiento del patín sea de 80 m / s. Halle:

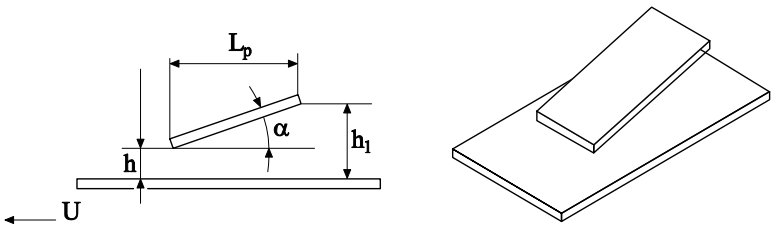


Fig. 70.1
Esquema del patín de Michel propuesto

1. La profundidad que deberá tener dicho patín.

2. La fuerza de arrastre necesaria para desplazar dicho patín.

3. ¿Está dicho patín optimizado?. ¿Por qué?

Resolución

1. Se establece la relación:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{h_1 - h}{L_p} = \frac{\Delta h}{L_p}$$

$$\Delta h = 0{,}05\,\text{tg}(0{,}2) = 0{,}000174\,\text{m}$$

La relación de alturas es: $K = \frac{h_1}{h} = \frac{0{,}00032}{0{,}00015} = 2{,}13$

La fuerza de sustentación por unidad de profundidad y en forma paramétrica viene dada por la ecuación (parámetro K).

$$L = \frac{1}{h^2}\frac{6\mu U L_p^2}{(K-1)^2}\left[\ln(K) - \frac{2(K-1)}{K+1}\right]$$

$$L = \frac{1}{0,00015^2}\frac{6\cdot 29\cdot 10^{-3}\cdot U\cdot 0,05^2}{(2,13-1)^2}\left[\ln(2,13) - \frac{2(2,13-1)}{2,13+1}\right]$$

$$L = 515,95\cdot 80 = 41.276,64\ \left[\frac{N}{m}\right]$$

Si el patín ha de soportar un total de 8500 N, la profundidad del mismo será:

$$\frac{850}{41276,64} = 0,0206\ m$$

2. La fuerza de arrastre en forma paramétrica viene dada por:

$$D = \frac{2\mu U L_p}{(K-1)h}\left[2\ln(K) - \frac{3(K-1)}{K+1}\right]$$

$$D = \frac{2\cdot 29\ 10^{-3}\cdot 80\cdot 0,05}{(2,13-1)\cdot 0,00015}\left[2\ln(2,13) - \frac{3(2,13-1)}{2,13+1}\right]$$

$$D = 587,09\frac{N}{m}$$

Teniendo en cuenta la profundidad del patín, se obtiene una fuerza de arrastre de:

$$D_{total} = 587,09\cdot 0,0206 = 12,08\ N$$

3. Un patín se considera optimizado cuando la fuerza de sustentación respecto al parámetro $K = \frac{h_1}{h}$ es máxima; si se deriva $\frac{dL}{dK} = 0$, se obtendrá el valor de K óptimo, que es de $\boxed{K = 2,2}$

Para este problema se tiene que $\boxed{K = 2,13}$, con lo cual se establece que el patín de Michel no está optimizado, aunque no está lejos de estarlo.

Problema 71

Enunciado

En bombas hidráulicas de pistones, se ha observado que, a través del intersticio existente entre el barrilete y la placa de cierre, se fuga una cierta cantidad de fluido, lo cual hace que el rendimiento volumétrico de la máquina disminuya. En este problema, se quiere estudiar cuál es el caudal de fugas existente entre el barrilete y la placa base, dada una posición genérica entre ambos; se quiere asimismo determinar las fuerzas que la película de fluido crea sobre el barrilete, así como los pares generados por dichas fuerzas.

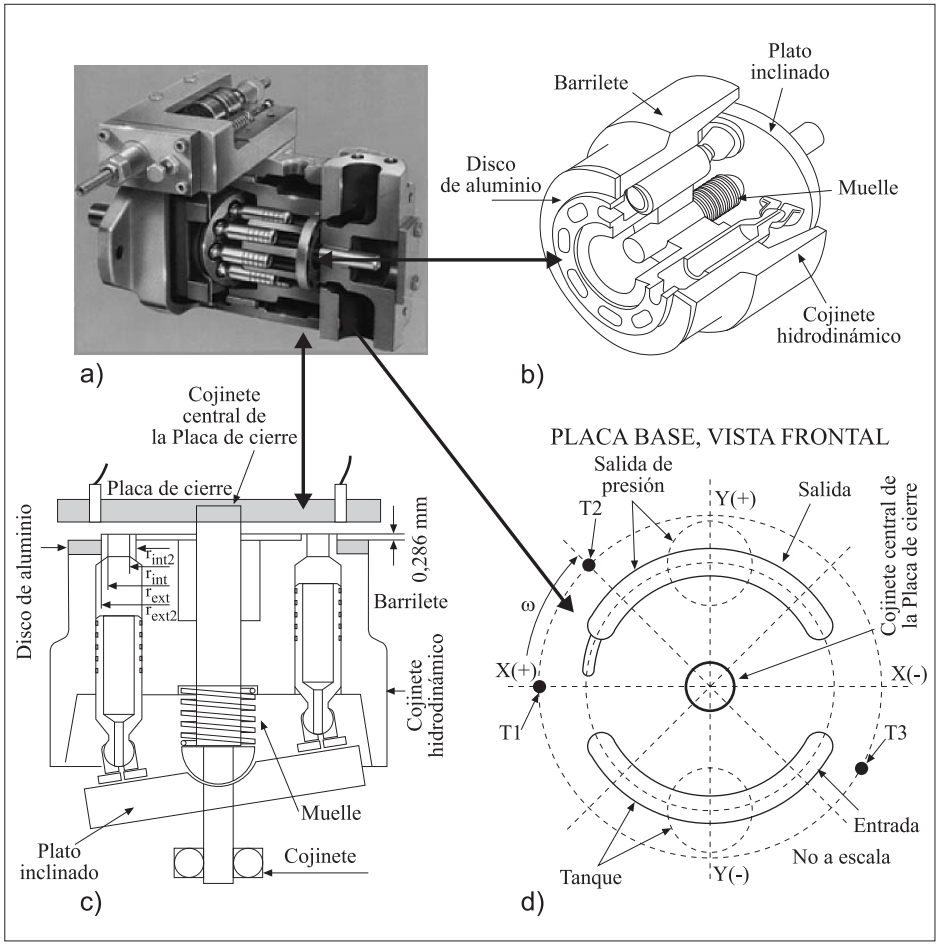


Fig. 71.1 Conjunto bomba de pistones donde se observa el barrilete (barrel), la placa base (port plate), así como los diversos componentes de dicha maquina. El eje de coordenadas XY se ha establecido sobre la vista frontal de la placa base, d).

La figura 71.1c muestra el intersticio teórico existente entre la placa base o placa de cierre (*port plate*) y el barrilete (*barrel*). Dicho intersticio es teórico, puesto que, en dicha figura, parece que sea independiente del radio y de la posición angular. En realidad, esto no es así, y en la figura 71.2 se muestra la situación real del barrilete con

respecto a la placa base, obsérvese que existe una pequeña inclinación entre ambos. Las dimensiones principales están definidas en la figura 71.2.

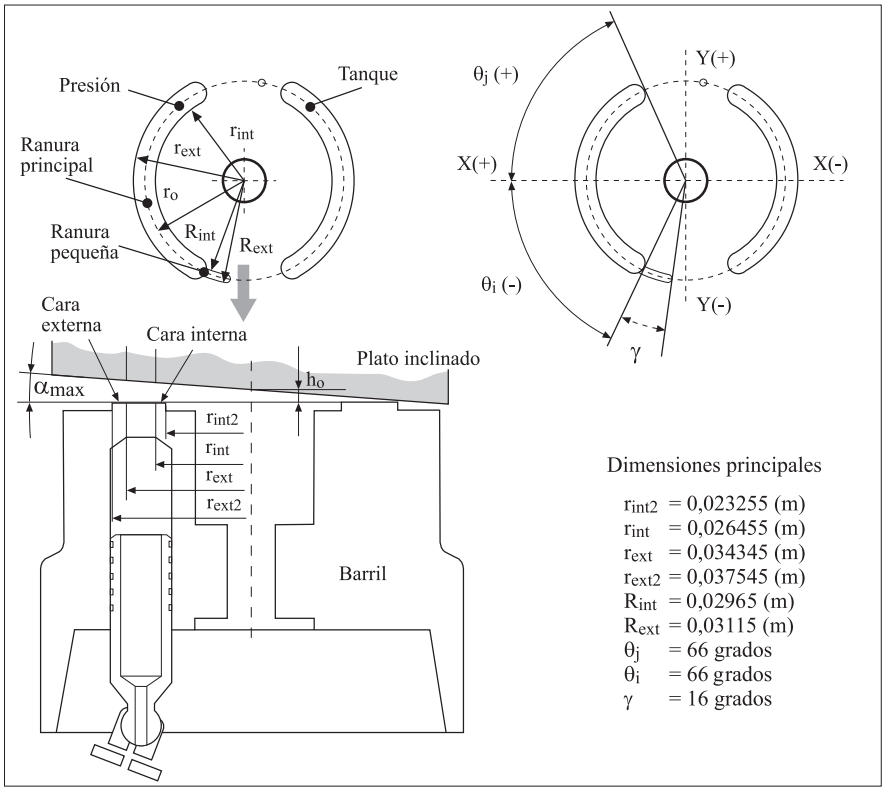


Fig. 71.2 Inclinación entre el barril y la placa base, y sus dimensiones principales

Resolución

De las figuras 71.1 y 71.2, se desprende que el fluido que, en realidad, debería ir desde la cámara del pistón hacia la brida de impulsión de la bomba, pasando por la placa base, parcialmente se fuga por el intersticio existente entre el barrilete y la placa de cierre. Obsérvese, en la figura 71.2, que el fluido ha de atravesar una región de una anchura comprendida entre r_{ext2} y r_{ext} para fluir en dirección radial hacia el exterior de la bomba, pero también se puede fugar hacia el eje de la bomba, lo cual implica que la región a atravesar, en este caso, tiene una anchura comprendida entre r_{int} y r_{int2}. El fluido también puede fugarse en ambas direcciones mencionadas, pero partiendo de la ranura pequeña situada a la entrada de la ranura grande. Para este caso, el fluido deberá atravesar una anchura entre placas comprendida entre r_{ext2} y R_{ext} si se fuga hacia el exterior, y entre R_{int} y r_{int2} si la fuga es hacia el eje de la bomba. Nótese, además que, los diversos intersticios por donde se puede fugar el fluido tienen una altura variable, tanto en dirección radial como en dirección angular, debido a la inclinación del barrilete con respecto a la placa base.

La ecuación que determina la altura variable del intersticio por donde se fuga el fluido se ha definido en la ecuación 1.

$$h = h_0 + \alpha\ r_m \cos\theta \tag{1}$$

Los valores de h_o, α_{max}, y θ, se han definido en la figura 71.2, siendo r_m el radio medio entre los radios mayor y menor de cada superficie en estudio. Por ejemplo, para la superficie externa, *cara externa*, dicho radio medio será $r_{m\ ext} = \frac{r_{ext} + r_{ext2}}{2}$. Obsérvese que el ángulo de inclinación α tiene su valor máximo α_{max} en la dirección del eje X(+).

La derivada de la ecuación (1) con respecto al ángulo θ da lugar a:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -\alpha\ r_m\ \sin\theta \tag{2}$$

Por otro lado, la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas ha de permitir determinar la distribución de presiones en dirección radial y dentro de un intersticio genérico delimitado por los radios exterior e interior. Dicha ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ h^3 \frac{\partial p}{\partial r}\right) = 6\mu\,\omega r \frac{\partial h}{\partial \theta} \tag{3}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1) y (2) en (3), y procediendo a realizar la primera de las integraciones, se obtiene:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{3\mu\,\omega\alpha\, r_m \sin\theta\, r}{\left(h_0 + \alpha\, r_m \cos\theta\right)^3} + \frac{c_1}{r\left(h_0 + \alpha\, r_m \cos\theta\right)^3} \tag{4}$$

La segunda integración da lugar a:

$$p = -\frac{3\mu\,\omega\alpha\, r_m \sin\theta}{\left(h_0 + \alpha\, r_m \cos\theta\right)^3}\frac{r^2}{2} + \frac{c_1}{\left(h_0 + \alpha\, r_m \cos\theta\right)^3}\ln r + c_2 \tag{5}$$

La ecuación (5) puede aplicarse a cada una de las cuatro superficies por donde existe fuga de fluido, superficies delimitadas por los radios r_{ext2} y r_{ext}, *cara externa*; r_{int} y r_{int2}, *cara interna*, r_{ext2} y R_{ext}, *ranura pequeña*, *cara externa*; y R_{int} y r_{int2}, *ranura pequeña, cara interna*, "small groove, internal land". Para la resolución de la ecuación (5) en cada uno de estos casos, se deberán aplicar las condiciones de contorno apropiadas para cada caso, con el fin de determinar las constantes de integración. Así, para las caras externa e interna asociadas a la ranura mayor, las condiciones de contorno serán:

Cara externa.

$$r = r_{ext} \quad p = p_{int} \tag{6}$$

$$r = r_{ext2} \quad p = p_{ext} = p_{tank}$$

$$r_{m\ ext} = \frac{r_{ext} + r_{ext2}}{2}$$

Cara interna.

$$r = r_{int} \quad p = p_{int} \tag{7}$$

$$r = r_{int2} \quad p = p_{ext} = p_{tank}$$

$$r_{m\ int} = \frac{r_{int} + r_{int2}}{2}$$

De la aplicación de las condiciones de contorno (6) para la cara externa, se obtiene:

$$p_{int} = -\frac{3\mu\omega\alpha r_{m\,ext}\sin\theta}{\left(h_0 + \alpha r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3}\frac{r_{ext}^2}{2} + \frac{c_1}{\left(h_0 + \alpha r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3}\ln r_{ext} + c_2 \tag{8}$$

$$p_{ext} = -\frac{3\mu\omega\alpha r_{m\,ext}\sin\theta}{\left(h_0 + \alpha r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3}\frac{r_{ext2}^2}{2} + \frac{c_1}{\left(h_0 + \alpha r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3}\ln r_{ext2} + c_2 \tag{9}$$

Y, aplicando las condiciones de contorno (7) para la cara interna, se llega a:

$$p_{int} = -\frac{3\mu\omega\alpha r_{m\,int}\sin\theta}{\left(h_0 + \alpha r_{m\,int}\cos\theta\right)^3}\frac{r_{int}^2}{2} + \frac{c_3}{\left(h_0 + \alpha r_{m\,int}\cos\theta\right)^3}\ln r_{int} + c_4 \tag{10}$$

$$p_{ext} = -\frac{3\mu\omega\alpha r_{m\,int}\sin\theta}{\left(h_0 + \alpha r_{m\,int}\cos\theta\right)^3}\frac{r_{int2}^2}{2} + \frac{c_3}{\left(h_0 + \alpha r_{m\,int}\cos\theta\right)^3}\ln r_{int2} + c_4 \tag{11}$$

De las ecuaciones (8) y (9), se obtienen los valores de las constantes C_1 y C_2, y de las ecuaciones (10) y (11), se obtienen los valores de las constantes C_3 y C_4. Estos valores son:

$$c_1 = \left[p_{int} - p_{ext} - \frac{3\mu\,\omega\,\alpha\, r_{m\,ext}\,\sin\theta}{\left(h_0 + \alpha\, r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3} \frac{\left(r_{ext2}^2 - r_{ext}^2\right)}{2} \right] \frac{\left(h_0 + \alpha\, r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3}{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}\right)} \tag{12}$$

$$c_3 = \left[p_{int} - p_{ext} - \frac{3\mu\,\omega\,\alpha\, r_{m\,int}\,\sin\theta}{\left(h_0 + \alpha\, r_{m\,int}\cos\theta\right)^3} \frac{\left(r_{int2}^2 - r_{int}^2\right)}{2} \right] \frac{\left(h_0 + \alpha\, r_{m\,int}\cos\theta\right)^3}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int2}}\right)} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} c_2 = {} & p_{int}\left(1 - \frac{\ln r_{ext}}{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\right) + p_{ext}\frac{\ln r_{ext}}{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}\right)} \\ & + \frac{3\mu\,\omega\alpha\, r_{m\,ext}\sin\theta}{\left(h_0 + \alpha\, r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3 2}\left[r_{ext}^2 + \frac{\ln r_{ext}}{\ln\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}}\left(r_{ext2}^2 - r_{ext}^2\right)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} c_4 = {} & p_{int}\left(1 - \frac{\ln r_{int}}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int2}}\right)}\right) + p_{ext}\frac{\ln r_{int}}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int2}}\right)} \\ & + \frac{3\mu\,\omega\alpha\, r_{m\,int}\sin\theta}{\left(h_0 + \alpha\, r_{m\,int}\cos\theta\right)^3 2}\left[r_{int}^2 + \frac{\ln r_{int}}{\ln\frac{r_{int}}{r_{int2}}}\left(r_{int2}^2 - r_{int}^2\right)\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Sustituyendo los valores de las constantes C_1, C_2, C_3, y C_4, en las ecuaciones (8)-(11), se obtiene la distribución de presiones en función del radio.

Para la cara externa, $r_{extr} < r < r_{exter2}$:

$$\begin{aligned} p_{cara\,ext} = {} & p_{int}\left(1 + \frac{\ln\frac{r}{r_{ext}}}{\ln\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}}\right) + p_{ext}\frac{\ln\frac{r_{exr}}{r}}{\ln\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}} \\ & + \frac{3\mu\,\omega\alpha\, r_{m\,ext}\sin\theta}{\left(h_0 + \alpha\, r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3 2}\left[\left(r_{ext}^2 - r^2\right) + \frac{\left(r_{ext2}^2 - r_{ext}^2\right)\ln\left(\frac{r_{ext}}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\right] \end{aligned} \tag{16}$$

Para la cara interna, $r_{int2} < r < r_{int}$:

$$p_{cara\ int} = p_{int}\left(1+\frac{\ln\frac{r}{r_{int}}}{\ln\frac{r_{int}}{r_{int\,2}}}\right)+p_{ext}\frac{\ln\frac{r_{int}}{r}}{\ln\frac{r_{int}}{r_{int\,2}}} + \frac{3\mu\omega\alpha r_{m\ int}\sin\theta}{\left(h_0+\alpha r_{m\ int}\cos\theta\right)^3 2}\left[\left(r_{int}^2-r^2\right)+\frac{\left(r_{int\,2}^2-r_{int}^2\right)\ln\left(\frac{r_{int}}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int\,2}}\right)}\right] \tag{17}$$

El mismo procedimiento ha de ser utilizado para determinar las distribuciones de presión en las caras interior y exterior en contacto con la ranura pequeña. Las condiciones de contorno para este caso son:

Para la *cara externa*, *ranura pequeña*

$$r = R_{ext};\ p = p_{int} \tag{18}$$

$$r = r_{ext\,2};\ p = p_{ext} = p_{tank}$$

$$R_{m\ ext} = \frac{R_{ext}+r_{ext2}}{2}$$

Para la *cara interna, ranura pequeña*

$$r = R_{int};\ p = p_{int} \tag{19}$$

$$r = r_{int2};\ p = p_{ext} = p_{tank}$$

$$R_{m\ int} = \frac{R_{int}+r_{int\,2}}{2}$$

Aplicando las nuevas ecuaciones de contorno (18) y (19) en la ecuación (5), y después de repetir el proceso detallado hasta el momento, se obtiene:

Para la cara externa, ranura pequeña, $R_{ext} < r < r_{ext2}$:

$$p_{cara\ ext_{sg}} = p_{int}\left(1+\frac{\ln\frac{r}{R_{ext}}}{\ln\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}}\right)+p_{ext}\frac{\ln\frac{r_{ext}}{r}}{\ln\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}} + \frac{3\mu\omega\alpha R_{m\,ext}\sin\theta}{\left(h_0+\alpha R_{m\,ext}\cos\theta\right)^3 2}\left[\left(R_{ext}^2-r^2\right)+\frac{\left(r_{ext\,2}^2-R_{ext}^2\right)\ln\left(\frac{R_{ext}}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext\,2}}\right)}\right] \tag{20}$$

Para la cara interna, ranura pequeña, $r_{int2} < r < R_{int}$:

$$p_{cara\ int_{sg}} = p_{int}\left(1+\frac{\ln\frac{r}{R_{int}}}{\ln\frac{R_{int}}{r_{int\,2}}}\right)+p_{ext}\frac{\ln\frac{R_{int}}{r}}{\ln\frac{R_{int}}{r_{int\,2}}} + \frac{3\mu\,\omega\alpha R_{m\,int}\sin\theta}{\left(h_0+\alpha R_{m\,int}\cos\theta\right)^3\,2}\left[\left(R_{int}^2-r^2\right)+\frac{\left(r_{int\,2}^2-R_{int}^2\right)\ln\left(\frac{R_{int}}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int\,2}}\right)}\right] \tag{21}$$

Una vez determinadas las distribuciones de presiones, el siguiente paso es hallar el caudal que fluye a través de cada uno de los cuatro intersticios considerados.

La distribución de velocidades, en función de la altura genérica y para un intersticio dado, se define de acuerdo con la ley de Poiseuille. Así, para la cara externa e interna de la ranura principal, se puede establecer:

Para la *cara externa, ranura principal*:

$$v_e = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{y}{2}(y-h) \tag{22}$$

donde:

$$h = h_0 + \alpha r_{m\,ext}\cos\theta \tag{23}$$

Para la *cara interna, ranura principal*:

$$v_i = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{y}{2}(y-h) \tag{24}$$

donde:

$$h = h_0 + \alpha r_{m\,int}\cos\theta \tag{25}$$

Los términos $\frac{dp}{dr}$ establecidos en las ecuaciones (22) y (24) son, en realidad, la primera derivada de la ecuación (3), es decir, la ecuación (4). Recuérdese que la constante asociada a la ecuación (4) es diferente para cada una de las caras. Así, para la cara externa, se tiene:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{3\mu\,\omega\alpha r_{m\,ext}\sin\theta\,r}{\left(h_0+\alpha r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3}+\frac{c_1}{r\left(h_0+\alpha r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3} \tag{26}$$

Y, para la cara interna, se define:

$$\frac{dp}{dr}=\left[-\frac{3\mu\,\omega\alpha\,r_{m\,int}\sin\theta\,r}{\left(h_0+\alpha\,r_{m\,int}\cos\theta\right)^3}+\frac{c_3}{r\left(h_0+\alpha\,r_{m\,int}\cos\theta\right)^3}\right]*(-1) \tag{27}$$

El signo negativo asociado a la ecuación (27) se utiliza para denotar que, en la cara interna, la presión disminuye al disminuir el radio.

El caudal de fugas que fluye por las caras externa e interna, asociadas a la ranura principal, se definirá como:

$$Q_{fugas}=\int_{-\theta_i}^{\theta_j}\int_0^h v_e\,r\,dy\,d\theta+\int_{-\theta_i}^{\theta_j}\int_0^h v_i\,r\,dy\,d\theta=Q_{ext}+Q_{int} \tag{28}$$

Sustituyendo las ecuaciones (22-23) y (26) en la primera integral de la ecuación (28), y realizando la integración en dirección Y, se obtiene:

Para la cara externa:

$$Q_{ext}=\int_{-\theta i}^{\theta j}-\frac{\left(h_0+\alpha\,r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3 r}{12\,\mu}\left[-\frac{3\mu\,\omega\alpha\,r_{m\,ext}\sin\theta\,r}{\left(h_0+\alpha\,r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3}+\frac{c_1}{r\left(h_0+\alpha\,r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3}\right]d\theta \tag{29}$$

Si se considera la entalla principal como simétrica, es decir, $|\theta_j|=|-\theta_i|$ entonces, la ecuación (29) toma la forma:

$$Q_{ext}=\int_{-\theta_i}^{\theta_j}\frac{(p_{ext}-p_{int})}{12\mu\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\left(h_0+\alpha\,r_{m\,ext}\cos\theta\right)^3 d\theta \tag{30}$$

cuya integración da lugar a:

$$Q_{ext}=\frac{(p_{ext}-p_{int})}{12\,\mu\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{exr2}}\right)}*$$
$$\left[h_0^3\,[\theta]_{-\theta_i}^{\theta_j}+3h_0^2\,\alpha\,r_{m\,ext}\left[\sin\theta\right]_{-\theta_i}^{\theta_j}+\right.$$
$$\left.3h_0\,\alpha^2\,r_{m\,ext}^2\left[\frac{1}{4}\sin(2\theta)+\frac{\theta}{2}\right]_{-\theta_i}^{\theta_j}+\alpha^3\,r_{m\,ext}^3\left[\frac{1}{12}\sin(3\theta)+\frac{3}{4}\sin\theta\right]_{-\theta_i}^{\theta_j}\right] \tag{31}$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (24-25) y (27) en la segunda integral de la ecuación (28), y realizando la integración en dirección Y, se obtiene:

$$Q_{int} = \int_{-\theta i}^{\theta j} \frac{\left(h_0 + \alpha r_{m\,int}\cos\theta\right)^3 r}{12\,\mu}\left[-\frac{3\mu\,\omega\alpha\, r_{m\,int}\sin\theta\; r}{\left(h_0 + \alpha r_{m\,int}\cos\theta\right)^3} + \frac{c_3}{r\left(h_0 + \alpha r_{m\,int}\cos\theta\right)^3}\right] d\theta \quad (32)$$

Si se considera la entalla principal como simétrica, es decir, $|\theta_j| = |-\theta_i|$, entonces la ecuación (32) tomará la forma:

$$Q_{int} = \int_{-\theta_i}^{\theta_j} -\frac{\left(p_{ext} - p_{int}\right)}{12\mu\,\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int\,2}}\right)}\left(h_0 + \alpha r_{m\,int}\cos\theta\right)^3 d\theta \quad (33)$$

De la integración de la ecuación (33), se obtiene:

$$Q_{int} = -\frac{\left(p_{exr} - p_{int}\right)}{12\,\mu\,\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int\,2}}\right)} * \left[\begin{array}{l} h_0^3\left[\theta\right]_{-\theta_i}^{\theta_j} + 3h_0^2\,\alpha\, r_{m\,int}\left[\sin\theta\right]_{-\theta_i}^{\theta_j} + \\ 3h_0\,\alpha^2\, r_{m\,int}^2\left[\frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{\theta}{2}\right]_{-\theta_i}^{\theta_j} + \alpha^3\, r_{m\,int}^3\left[\frac{1}{12}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin\theta\right]_{-\theta_i}^{\theta_j} \end{array}\right] \quad (34)$$

Tal como indica la ecuación (28), el caudal total de fugas a través de las caras interior y exterior que están a ambos lados de la entalla principal se obtendrá de la suma algebraica de los caudales obtenidos mediante las ecuaciones (31) y (34).

Para la obtención de las ecuaciones que caracterizan los caudales de fugas a través de las dos caras en contacto con la ranura pequeña, se utilizará un procedimiento similar al empleado para la obtención de los caudales equivalentes en la ranura principal. Es decir, ecuaciones homólogas a las definidas como (22-27) han de ser ahora definidas para las dos caras en contacto con la ranura pequeña. Dichas ecuaciones deberán ser sustituidas en la ecuación que caracteriza el caudal de fugas para el presente caso, ecuación (35), que es la ecuación homóloga a la (28). Una vez realizado este proceso y sustituidas las constantes de integración por su equivalente, se obtienen las ecuaciones que caracterizan los caudales de fugas para cada una de las dos caras en contacto con la ranura pequeña. Dichas ecuaciones se han definido como las ecuaciones (36) y (37). Obsérvese que el caudal total de fugas debido al efecto de la ranura pequeña es la suma del caudal obtenido mediante las ecuaciones (36) y (37).

$$Q_{fugas_{sg}} = \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\int_{0}^{h} v_e\, r\, dy\, d\theta + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\int_{0}^{h} v_i\, r\, dy\, d\theta = Q_{ext_{sg}} + Q_{int_{sg}} \tag{35}$$

$$Q_{int_{sg}} = \frac{3\omega\alpha R_{mint} R_{int}^2}{12}\left[\cos(-\theta_i) - \cos(-(\theta_i+\gamma))\right] + \frac{3\omega\alpha R_{mint}}{12\ \ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)}\frac{(r_{int2}^2 - R_{int}^2)}{2}\left[\cos(-\theta_i) - \cos(-(\theta_i+\gamma))\right]$$

$$-\frac{p_{ext} - p_{int}}{12\ \mu \ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)} * \left[\begin{array}{l} h_0^3\left[-\theta_i - (-(\theta_i+\gamma))\right] + 3h_0^2\,\alpha R_{mint}\left[\sin(-\theta_i) - \sin(-(\theta_i+\gamma))\right] + \\ 3h_0\,\alpha^2 R_{mint}^2\left[\frac{1}{4}\sin(2*(-\theta_i)) + \frac{-\theta_i}{2} - \frac{1}{4}\sin(2*(-(\theta_i+\gamma))) - \frac{-(\theta_i+\gamma)}{2}\right] + \\ \alpha^3 R_{mint}^3\left[\frac{1}{12}\sin(3*(-\theta_i)) + \frac{3}{4}\sin(-\theta_i) - \frac{1}{12}\sin(3*(-(\theta_i+\gamma))) - \frac{3}{4}\sin(-(\theta_i+\gamma))\right] \end{array}\right] \tag{36}$$

$$Q_{ext_{sg}} = \frac{3\omega\alpha R_{mext} R_{ext}^2}{12}\left[\cos(-\theta_i) - \cos(-(\theta_i+\gamma))\right] - \frac{3\omega\alpha R_{mext}}{12\ \ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\frac{(r_{ext2}^2 - R_{ext}^2)}{2}\left[\cos(-\theta_i) - \cos(-(\theta_i+\gamma))\right]$$

$$+\frac{p_{ext} - p_{int}}{12\ \mu\ \ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)} * \left[\begin{array}{l} h_0^3\left[-\theta_i - (-(\theta_i+\gamma))\right] + 3h_0^2\,\alpha R_{mext}\left[\sin(-\theta_i) - \sin(-(\theta_i+\gamma))\right] + \\ 3h_0\,\alpha^2 R_{mext}^2\left[\frac{1}{4}\sin(2*(-\theta_i)) + \frac{-\theta_i}{2} - \frac{1}{4}\sin(2*(-(\theta_i+\gamma))) - \frac{-(\theta_i+\gamma)}{2}\right] + \\ \alpha^3 R_{mext}^3\left[\frac{1}{12}\sin(3*(-\theta_i)) + \frac{3}{4}\sin(-\theta_i) - \frac{1}{12}\sin(3*(-(\theta_i+\gamma))) - \frac{3}{4}\sin(-(\theta_i+\gamma))\right] \end{array}\right] \tag{37}$$

Una vez determinadas las distribuciones de presiones y los caudales de fugas existentes entre la placa base y el barrilete, se pueden determinar fácilmente la fuerza y los momentos respecto a los dos ejes principales X,Y del barrilete. Para ello, únicamente será necesario integrar las diversas distribuciones de presiones a lo largo del dominio correspondiente, tal como indican las ecuaciones (38-43).

Para la ranura principal:

La fuerza que el fluido ejerce sobre el barrilete se define como:

$$F = \int_{-\theta_i}^{\theta_j}\int_{r_{int}}^{r_{ext}} P_{int}\, r\, d\theta\, dr + \int_{-\theta_i}^{\theta_j}\int_{r_{int\,2}}^{r_{int}} P_{cara\ int}\, r\, d\theta\, dr + \int_{-\theta_i}^{\theta_j}\int_{r_{ext}}^{r_{ext\,2}} P_{cara\ ext}\, r\, d\theta\, dr \qquad (38)$$

donde P_{int} es la presión en el interior de la ranura, que se considerará como constante, y $P_{cara\ ext.}$, $P_{cara\ int}$ son las distribuciones de presiones definidas por las ecuaciones (16) y (17), respectivamente.

Los momentos con respecto a los dos ejes principales del barrilete, X,Y, creados por la distribución de presiones existente en las dos caras en contacto con la ranura principal, se definen como:

$$M_{XX} = \int_{-\theta_i}^{\theta_j}\int_{r_{int}}^{r_{ext}} P_{int}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta + \int_{-\theta_i}^{\theta_j}\int_{r_{int\,2}}^{r_{int}} P_{cara\ int}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta + \int_{-\theta_i}^{\theta_j}\int_{r_{ext}}^{r_{ext\,2}} P_{cara\ ext}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta \qquad (39)$$

$$M_{YY} = \int_{-\theta_i}^{\theta_j}\int_{r_{int}}^{r_{ext}} P_{int}\, r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta + \int_{-\theta_i}^{\theta_j}\int_{r_{int\,2}}^{r_{int}} P_{cara\ int}\, r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta + \int_{-\theta_i}^{\theta_j}\int_{r_{ext}}^{r_{ext\,2}} P_{cara\ ext}\, r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta \qquad (40)$$

Caso ranura pequeña:

La fuerza que el fluido ejerce sobre el fluido se define como:

$$F_{sg} = \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\int_{R_{int}}^{R_{ext}} P_{int}\, r\, d\theta\, dr + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\int_{r_{int\,2}}^{R_{int}} P_{cara\ int_{sg}}\, r\, d\theta\, dr + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\int_{R_{ext}}^{r_{ext\,2}} P_{cara\ ext_{sg}}\, r\, d\theta\, dr \qquad (41)$$

Los momentos creados por la distribución de presiones actuante sobre las caras en contacto con la ranura pequeña quedan definidos por las ecuaciones (42) y (43).

$$M_{XX_{sg}} = \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\int_{R_{int}}^{R_{ext}} P_{int}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\int_{r_{int\,2}}^{R_{int}} P_{cara\ int_{sg}}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\int_{R_{ext}}^{r_{ext\,2}} P_{cara\ ext_{sg}}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta \qquad (42)$$

$$M_{YY_{sg}} = \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\int_{R_{int}}^{R_{ext}} P_{int}\, r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\int_{r_{int\,2}}^{R_{int}} P_{cara\ int_{sg}}\, r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\int_{R_{ext}}^{r_{ext\,2}} P_{cara\ ext_{sg}}\, r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta \qquad (43)$$

Obsérvese que las distribuciones de presión definidas como $P_{cara\ ext\ sg.}$, $P_{cara\ int\ sg}$ han sido previamente obtenidas y dadas en forma de ecuaciónes (20) y (21).

Las ecuaciones resultantes de realizar las integrales definidas en las ecuaciones (38-43) dan lugar a:

Ranura principal:

$$F = P_{int}\frac{(\theta_j-(-\theta_i))}{4}\left[\frac{\left(r_{ext}^2-r_{ext2}^2\right)}{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}\right)}-\frac{\left(r_{int}^2-r_{inr2}^2\right)}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int2}}\right)}\right]+P_{ext}\frac{\left(\theta_j-(-\theta_i)\right)}{2}\left[r_{ext2}^2-r_{int2}^2\right]+$$
$$P_{ext}\frac{(\theta_j-(-\theta_i))}{4}\left[\frac{\left(r_{int}^2-r_{int2}^2\right)}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int2}}\right)}-\frac{\left(r_{ext}^2-r_{ext2}^2\right)}{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\right] \quad (44)$$

$$M_{XX}=\int_{-\theta_i}^{\theta_j}\frac{3\mu\omega\alpha r_{mint}\sin^2\theta\,d\theta}{\left(h_0+\alpha r_{mint}\cos\theta\right)^3}*\left[\frac{r_{int}^2}{6}\left(r_{int}^3-r_{int2}^3\right)-\frac{\left(r_{int}^5-r_{int2}^5\right)}{10}+\right.$$
$$\left.\frac{\left(r_{int2}^2-r_{int}^2\right)}{6}\left(r_{int}^3-r_{int2}^3\right)\frac{\ln\left(r_{int}\right)}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int2}}\right)}-\frac{\left(r_{int2}^2-r_{int}^2\right)}{2\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int2}}\right)}\left[\frac{\left(r_{int2}^3-r_{int}^3\right)}{9}+\frac{r_{int}^3\ln\left(r_{int}\right)-r_{int2}^3\ln\left(r_{int2}\right)}{3}\right]\right]$$
$$+\int_{-\theta_i}^{\theta_j}\frac{3\mu\omega\alpha r_{mext}\sin^2\theta\,d\theta}{\left(h_0+\alpha r_{mext}\cos\theta\right)^3}*\left[\frac{r_{ext}^2}{6}\left(r_{ext2}^3-r_{ext}^3\right)-\frac{\left(r_{ext2}^5-r_{ext}^5\right)}{10}+\frac{\left(r_{ext2}^2-r_{ext}^2\right)}{6}\left(r_{ext2}^3-r_{ext}^3\right)*\right.$$
$$\left.\frac{\ln\left(r_{ext}\right)}{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}\right)}-\frac{\left(r_{ext2}^2-r_{ext}^2\right)}{2\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\left[\frac{\left(r_{ext}^3-r_{ext2}^3\right)}{9}+\frac{r_{ext2}^3\ln\left(r_{ext2}\right)-r_{ext}^3\ln\left(r_{ext}\right)}{3}\right]\right] \quad (45)$$

$$M_{YY}=\frac{p_{int}\left[\sin\theta\right]_{-\theta_i}^{\theta_j}}{9}\left[\frac{\left(r_{int2}^3-r_{int}^3\right)}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int2}}\right)}+\frac{\left(r_{ext}^3-r_{ext2}^3\right)}{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\right]$$
$$+\frac{p_{ext}\left[\sin\theta\right]_{-\theta_i}^{\theta_j}}{9}\left[-\frac{\left(r_{int2}^3-r_{int}^3\right)}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{int2}}\right)}-\frac{\left(r_{ext}^3-r_{ext2}^3\right)}{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\right]+\frac{p_{ext}\left[\sin\theta\right]_{-\theta_i}^{\theta_j}}{3}\left[r_{ext2}^3-r_{int2}^3\right] \quad (46)$$

Para la ranura pequeña, se obtiene:

$$F_{sg} = P_{int}\frac{(-\theta_i-(-(\theta_i+\gamma)))}{4}\left[\frac{\left(R_{ext}^2-r_{ext2}^2\right)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)}-\frac{\left(R_{int}^2-r_{inr2}^2\right)}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)}\right]$$

$$+P_{ext}\frac{\left(-\theta_i-(-(\theta_i+\gamma))\right)}{2}\left[r_{ext2}^2-r_{int2}^2\right]+$$

$$P_{ext}\frac{(-\theta_i-(-(\theta_i+\gamma)))}{4}\left[\frac{\left(R_{int}^2-r_{int2}^2\right)}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)}-\frac{\left(R_{ext}^2-r_{ext2}^2\right)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\right]$$

$$+\int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\frac{3\mu\omega\alpha R_{mint}\sin\theta}{(h_0+\alpha R_{mint}\cos\theta)^3}d\theta *$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(R_{int}^2-r_{int2}^2\right)^2\left[\frac{1}{8}-\frac{\ln(R_{int})}{4\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)}-\frac{1}{8}\frac{1}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)}\right]\\ +\frac{r_{int2}^2-R_{int}^2}{4}\frac{1}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)}\left(r_{int2}^2\ln(r_{int2})-R_{int}^2\ln(R_{int})\right)\end{array}\right\}+$$

$$\int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\frac{3\mu\omega\alpha R_{mext}\sin\theta}{(h_0+\alpha R_{mext}\cos\theta)^3}d\theta *$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(r_{ext2}^2-R_{ext}^2\right)^2\left[-\frac{1}{8}+\frac{\ln(R_{ext})}{4\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)}+\frac{1}{8}\frac{1}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\right]\\ -\frac{r_{ext2}^2-R_{ext}^2}{4}\frac{1}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\left(r_{ext2}^2\ln(r_{ext2})-R_{ext}^2\ln(R_{ext})\right)\end{array}\right\} \qquad (47)$$

$$M_{XX_{sg}} = \frac{p_{ext}}{3}(r_{ext2}^3 - r_{int2}^3) * \left[-\cos\theta\right]_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}$$

$$+\frac{(p_{int}-p_{ext})}{9}\left[\frac{r_{int2}^3 - R_{int}^3}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)} + \frac{R_{ext}^3 - r_{ext2}^3}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\right] * \left[-\cos\theta\right]_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} +$$

$$\int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} \frac{3\mu\omega\alpha R_{mint}\sin^2\theta\, d\theta}{\left(h_0 + \alpha R_{mint}\cos\theta\right)^3} * \left[\frac{\left(R_{int}^5 - r_{int2}^5\right)}{15} - \frac{\left(r_{int2}^2 - R_{int}^2\right)}{18}\frac{\left(r_{int2}^3 - R_{int}^3\right)}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)}\right] +$$

$$+\int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} \frac{3\mu\omega\alpha R_{mext}\sin^2\theta\, d\theta}{\left(h_0 + \alpha R_{mext}\cos\theta\right)^3} * \left[\frac{\left(r_{ext2}^5 - R_{ext}^5\right)}{15} - \frac{\left(r_{ext2}^2 - R_{ext}^2\right)}{18}\frac{\left(R_{ext}^3 - r_{ext2}^3\right)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\right] \quad (48)$$

$$M_{YY_{sg}} = \frac{p_{ext}}{3}(r_{ext2}^3 - r_{int2}^3) * \left[\sin\theta\right]_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} + \frac{(p_{int}-p_{ext})}{9}\left[\frac{r_{int2}^3 - R_{int}^3}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)} + \frac{R_{ext}^3 - r_{ext2}^3}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\right] *$$

$$\left[\sin\theta\right]_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} + \frac{3\mu\omega\alpha R_{mint}}{h_0^3}\left[\frac{\left(R_{int}^5 - r_{int2}^5\right)}{15} - \frac{\left(r_{int2}^2 - R_{int}^2\right)}{18}\frac{\left(r_{int2}^3 - R_{int}^3\right)}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)}\right] *$$

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{\alpha R_{mint}}{h_0}\right)^2}\left[\frac{1}{1+\frac{\alpha R_{mint}}{h_0}\cos\theta} - \frac{1}{2\left(1+\frac{\alpha R_{mint}}{h_0}\cos\theta\right)^2}\right]_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\right] +$$

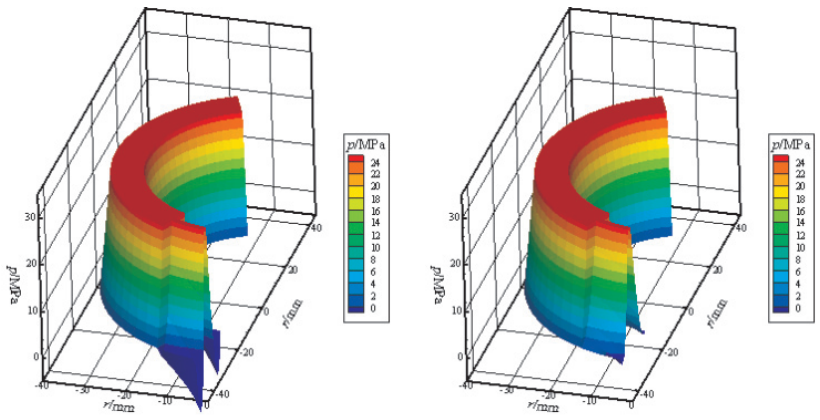
$$\frac{3\mu\omega\alpha R_{mext}}{h_0^3}\left[\frac{\left(r_{ext2}^5 - R_{ext}^5\right)}{15} - \frac{\left(r_{ext2}^2 - R_{ext}^2\right)}{18}\frac{\left(R_{ext}^3 - r_{ext2}^3\right)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)}\right] *$$

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{\alpha R_{mext}}{h_0}\right)^2}\left[\frac{1}{1+\frac{\alpha R_{mext}}{h_0}\cos\theta} - \frac{1}{2\left(1+\frac{\alpha R_{mext}}{h_0}\cos\theta\right)^2}\right]_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i}\right] \quad (49)$$

Véase que, en algunas de las ecuaciones obteidas, quedan algunas integrales por realizar. Dichas integrales han de ser resueltas numéricamente.

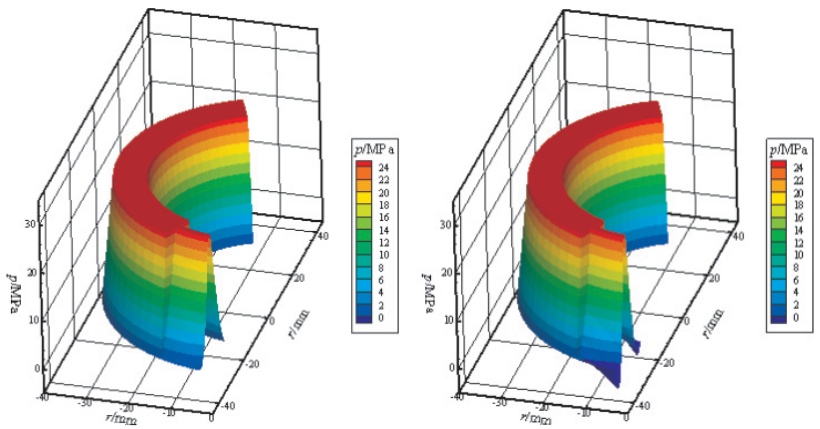
La fuerza y los pares resultantes sobre el barrilete serán la suma algebraica de las fuerzas y los pares que aporta cada una de las ranuras.

A continuación, se presentan algunos de los resultados que pueden obtenerse directamente de las ecuaciones determinadas en este problema.



a) h_o = 2 micras
1440 rpm

b) h_o = 3 micras
1440 rpm



c) h_o = 3 micras
1000 rpm

d) h_o = 3 micras
2000 rpm

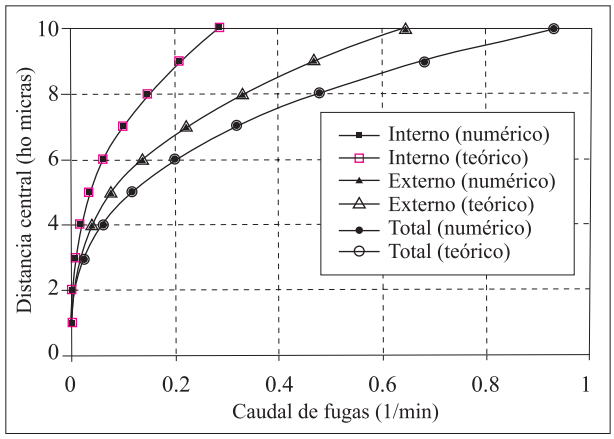
Fig. 71.3
Distribución de presión teórica a lo largo de las caras en contacto con la ranura principal y pequeña. Máxima inclinación posible del barrilete

La figura 71.3 presenta distribuciones de presión en las cuatro caras en contacto, bien con la ranura principal, bien con la ranura pequeña, distribución obtenida mediante las ecuaciones (16, 17) y (20, 21). La presión en el interior de las ranuras es de 25 MPa. Se evalúan diferentes distancias centrales entre el barrilete y la placa de cierre, así como

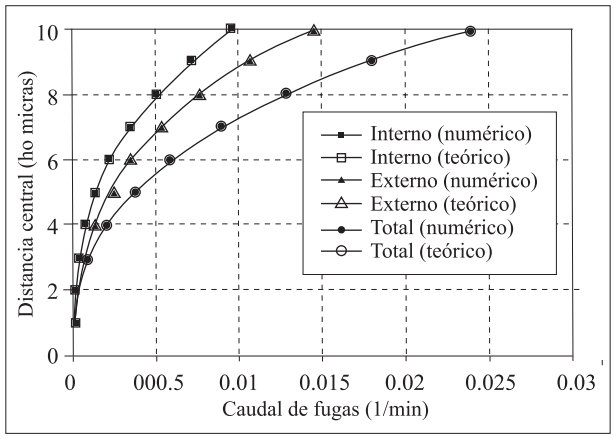
diferentes velocidades de giro de la bomba. En todo momento, se ha considerado la máxima inclinación posible del barrilete, α_{max} (v. figura 71.2). Obsérvese que, a medida que la velocidad de giro aumenta y/o la distancia central entre barrilete y placa de cierre disminuye, existe una mayor tendencia a la aparición de cavitación.

La figura 71.4 presenta los diversos caudales de fugas a través de las caras interna y externa en contacto con la ranura principal y con la ranura pequeña. Los caudales presentados están en función de la distancia central (h_0) entre el barrilete y la placa de cierre. La presión en el interior de las ranuras es de 25 MPa, y para cada caso se ha considerado la inclinación máxima del barrilete. Obsérvese que el caudal de fugas creado por la ranura pequeña es insignificante cuando se compara con el generado por la ranura principal. Las ecuaciones utilizadas para la determinación de estos caudales son la (31) y la (34) para la ranura principal, y la (36) y la (37) para la ranura secundaria o pequeña.

Fig. 71.4 Caudales de fugas a través de las ranuras principal y pequeña, en función de la distancia central entre la placa de cierre y el barrilete. La presión en el interior de las ranuras es de 25 MPa, y para cada caso se ha considerado el ángulo máximo posible, αmax



a) Ranura principal



b) Ranura pequeña

La figura 71.5 presenta la fuerza que actúa sobre el barrilete debido a la aportación de las caras en contacto con la ranura principal y con la ranura pequeña (*timing groove*), ecuaciones (38), (41), (44) y (47). Obsérvese que las ecuaciones (44) y (47), caracterizan respectivamente, las dos últimas integrales de las ecuaciones (38) y (41). En la misma figura, se presenta la comparación de los resultados obtenidos mediante ecuaciones y los obtenidos mediante una modelización numérica basada en la ecuación de lubricación de Reynolds, modelización que no se ha presentado en este problema. Asimismo, se introduce en la misma figura, la fuerza total actuante sobre el barrilete cuando son cuatro o cinco los pistones en contacto con la ranura principal y la pequeña.

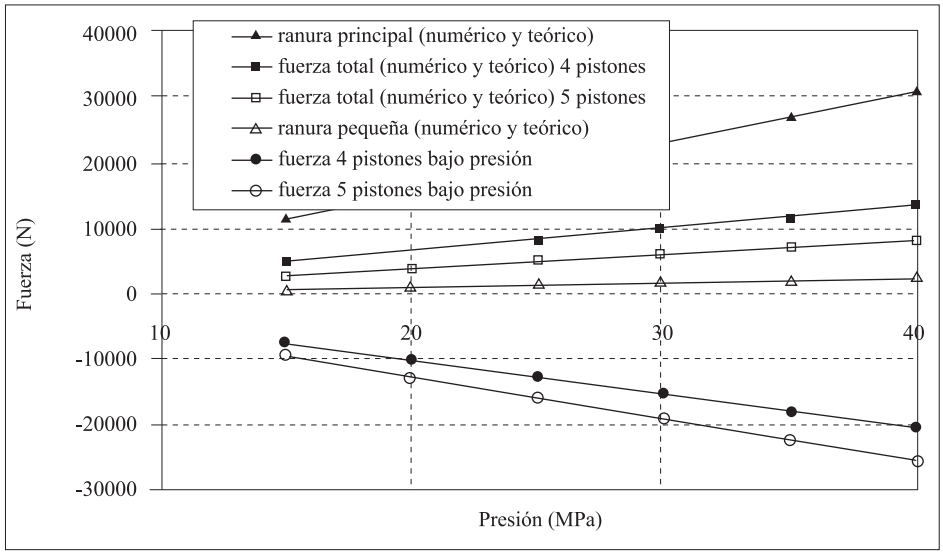
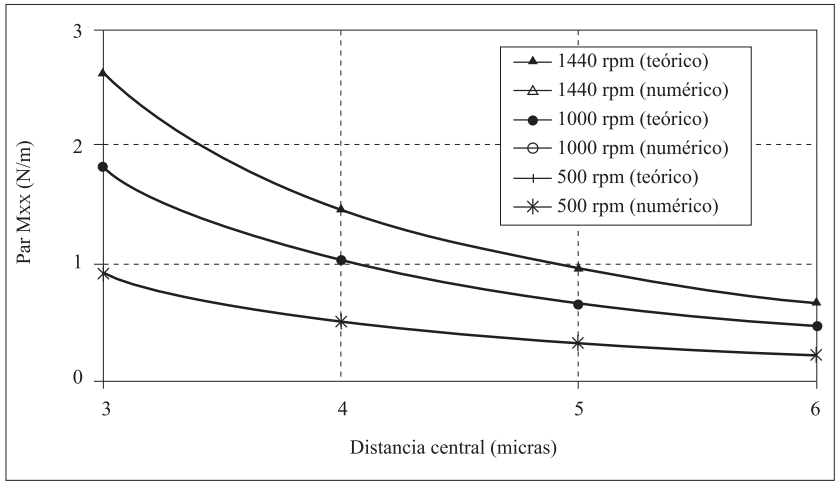


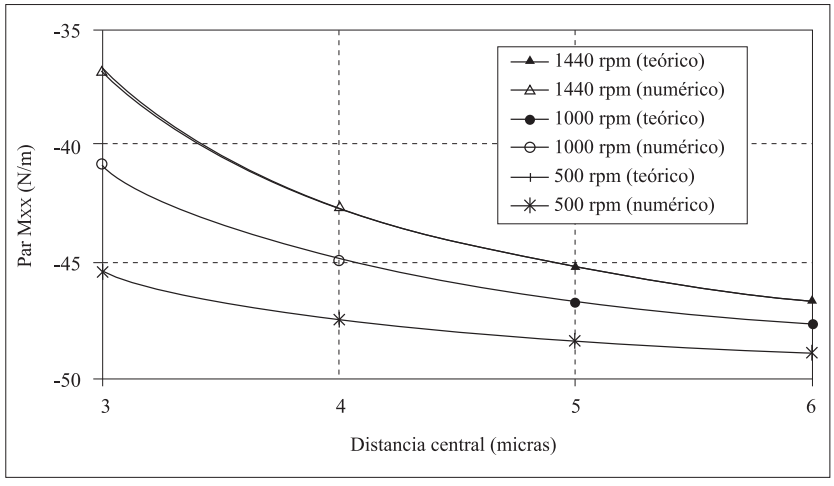
Fig. 71.5
Promedio de la fuerza que actúa sobre el barrilete en función del número de pistones en contacto con las ranuras de alta presión, bien la principal, bien la pequeña. Comparación entre el resultado obtenido mediante las ecuaciones presentadas en este problema y el obtenido mediante una modelización numérica (no presentada en este problema) utilizando la ecuación de lubricación de Reynolds.
P = 25 MPa

Las figuras 71.6 y 71.7 presentan los pares con respecto a los ejes X e Y actuantes sobre la cara del barrilete, en función de la distancia central entre el barrilete y la placa de cierre, y para diferentes velocidades de giro. La presión de alimentación es de 25 Mpa. En todo momento se ha considerado la inclinación máxima del barrilete α_{max}. Véase que cada figura consiste en dos subfiguras que caracterizan el par creado por las caras en contacto con la ranura principal y las que están en contacto con la ranura pequeña. Las ecuaciones utilizadas para realizar dichas gráficas son la (45) y la (48) para la figura 71.6, y la (46) y la (49) para la figura 71.7. Obsérvese, además, que sendas figuras comparan el resultado de estas ecuaciones con el obtenido mediante una modelización numérica no presentada en este problema.

Fig. 71.6
Par MXX debido a las aportaciones de la ranura principal y la ranura pequeña. En todo momento se ha considerado la inclinación máxima del barrilete, αmax. P = 25MPa

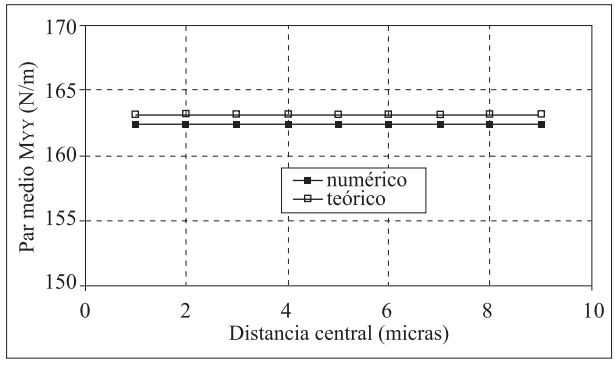


a) Ranura principal

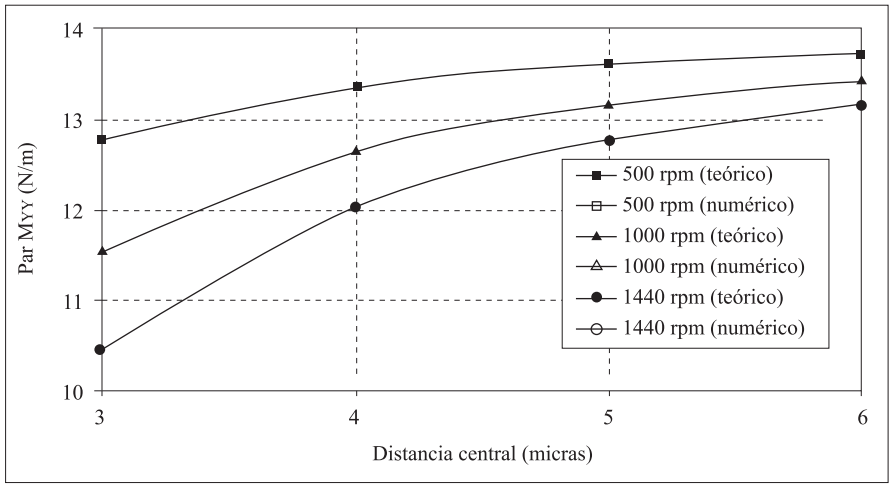


b) Ranura pequeña

Fig. 71.7
Par MYY debido al efecto de las dos ranuras, αmax. P = 25MPa



a) Ranura principal



b) Ranura pequeña

Problema 72

Enunciado

El esquema de la figura 72.1 muestra un patín deslizante, formado por una placa inclinada y una placa plana. El patín se desplaza por encima de una superficie lisa plana a una velocidad constante U. Se sabe que la distribución de presiones a lo largo del eje X, en la zona de la placa inclinada, está dada por:

$$P_1^* = \frac{-\mu 6U}{(Tg\alpha)^2}\left[\frac{h_1}{Tg\alpha}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{Tg\alpha}-X\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{h_1}{Tg\alpha}-X\right)}\right]-\frac{C_3\mu}{(Tg\alpha)^3}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{Tg\alpha}-X\right)^2}+C_4$$

donde C_3 y C_4 son constantes por determinar.

De la aplicación de la ecuación de la lubricación de Reynolds para la zona donde la placa está inclinada se obtiene:

$$-6UTg\alpha\, X = \frac{h^3}{\mu}\frac{\partial P^*}{\partial X}+C_3$$

donde h es la altura entre placas para una posición genérica de X (zona de placa inclinada).

Considere como datos: $\alpha, h_1, h_2, L_1, L_2, \mu, U$

Halle:

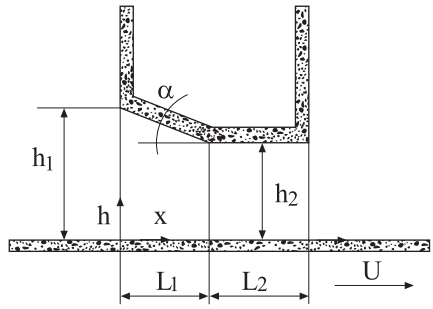
1. La ecuación que da la distribución de presiones a lo largo del eje X, tanto para la zona de la placa inclinada como para la zona de la placa plana. Determine las constantes de integración.
2. La fuerza ascensorial o capacidad de carga por unidad de longitud del cojinete.

Resolución

La ecuación de la lubricación de Reynolds para flujo unidimensional es:

$$6U\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial P^*}{\partial x}\right) \tag{1}$$

Fig.72.1



en la zona de la placa plana $\frac{\partial h}{\partial x}=0$:

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial P^*}{\partial x}\right) \tag{2}$$

$$\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial P^*}{\partial x}=C_1 \tag{3}$$

Distribución de presiones a lo largo de una placa:

$$P^*_2=\frac{C_1\mu}{h^3_2}x+C_2 \tag{4}$$

Condiciones de contorno

$$x=(L_1+L_2);\ P_2^*=0$$

$$x=L_1;\ P_2^*=P_1^*$$

En la zona de la placa inclinada:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{h_1 - h_2}{L_1} = -tg\alpha \tag{5}$$

$$-6\ U\,tg\alpha = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial P^*}{\partial x}\right) \tag{6}$$

$$-6\,U\,tg\alpha\ \ x = \frac{h^3}{\mu}\frac{\partial P^*}{\partial x} + C_3\,(\text{dato del problema}) \tag{7}$$

$$\frac{\mu}{h^3}\left(-6\,U\,tg\alpha\ x - C_3\right)dx = dP^* \tag{8}$$

$$\left(\frac{-6\mu\ U\,tg\alpha\ \ x}{\left(h_1 - tg\alpha\ \ x\right)^3} - \frac{C_3\mu}{\left(h_1 - tg\alpha\ \ x\right)^3}\right)dx = dP^*$$

$$\left(\frac{-6\mu\ U\,tg\alpha\ x}{\left[tg\alpha\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)\right]^3} - \frac{C_3\ \mu}{\left[tg\alpha\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)\right]^3}\right)dx = dP^*$$

$$\frac{-6\mu\ U\,tg\alpha}{tg^3\alpha}\ \underbrace{\frac{x}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^3}dx}_{(*)} - \frac{C_3\mu}{tg^3\alpha}\ \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^3}dx}_{(**)} = dP^*$$

Solución de (**):

$$\int \frac{1}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^3}dx = \int\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^{-3}dx = \frac{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^{-3+1}}{(-3+1)}(-1);$$

Solución de (*):

$$\int \frac{x}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^3}dx = \int \frac{A\,dx}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^3} + \int \frac{B\,dx}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^2} + \int \frac{C\,dx}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)}$$

Se ha de cumplir que:

$$x = A + B\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right) + C\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^2$$

$$x = A + B\frac{h_1}{tg\alpha} - Bx + C\left(\frac{h_1}{tg\alpha}\right)^2 - 2\frac{h_1}{tg\alpha}xC + Cx^2$$

$$0 = C \qquad C = 0$$

$$1 = -B - 2\frac{h_1}{tg\alpha}C \qquad B = -1$$

$$0 = A + B\frac{h_1}{tg\alpha} + C\left(\frac{h_1}{tg\alpha}\right)^2 \qquad A = \frac{h_1}{tg\alpha}$$

$$\int \frac{xdx}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^3} = \int \frac{\frac{h_1}{tg\alpha}dx}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^3} + \int \frac{-dx}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^2} = \frac{h_1}{tg\alpha}\frac{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^{-3+1}}{-3+1}(-1) + \frac{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^{-2+1}}{-2+1} \qquad (9)$$

de donde la distribución de presiones queda, en la zona de la placa inclinada

$$P_1^* = \frac{-\mu 6U}{(tg\alpha)^2}\left[\frac{h_1}{tg\alpha}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - X\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - X\right)}\right] - \frac{C_3\mu}{(tg\alpha)^3}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - X\right)^2} + C_4 \text{ (dato del problema)} \qquad (10)$$

Condiciones de contorno:

$$x = 0\,; \quad P_1^* = 0$$

$$x = L_1\,; \quad P_1^* = P_2^*$$

El caudal másico en la placa plana viene dado por la expresión:

$$\dot{m} = \rho U\frac{h}{2} - \rho\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{12\mu}h^3$$

según la ecuación (3), como $C_1 = \frac{h^3}{\mu}\frac{\partial P^*}{\partial x}$:

$$\dot{m}_2 = \rho\frac{U\,h}{2} - \frac{C_1}{12}\rho$$

El caudal másico para una placa inclinada:

$$\dot{m}_1 = \rho U\frac{h(x)}{2} - \rho\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{12\mu}h^3(x)$$

Según la ecuación (7):

$$-6\ tg\alpha\ \ x = \frac{h^3(x)}{\mu}\frac{\partial P^*}{\partial x} + C_3$$

$$\dot{m}_1 = \rho\ U\frac{h(x)}{2} - \rho\frac{1}{12}\left(-6\ U\ Tg\alpha\ \ x - C_3\right)$$

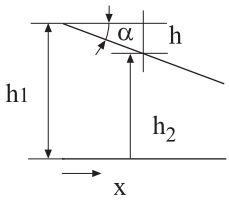


Fig. 72.2

$$x\ tg\alpha = h_i$$

$$h(x) = h_1 - x\ tg\alpha$$

$$x\ tg\alpha = h_1 - h(x)$$

$$\dot{m}_1 = \rho\,U\frac{h(x)}{2} - \frac{\rho}{12}\left(-6U\left(h_1 - h(x)\right) - C_3\right)$$

$$\dot{m}_1 = \rho U\frac{h(x)}{2} + \frac{\rho}{12}6U\left(h_1 - h(x)\right) + \frac{\rho}{12}C_3$$

Puesto que el caudal másico ha de mantenerse, se ha de cumplir $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ para $h(x) = h_2$, punto de intersección de las dos placas.

$$\rho\frac{U\,h_2}{2} - \rho\frac{C_1}{12} = \rho\frac{Uh_2}{2} + \frac{\rho}{12}6U\left(h_1 - h_2\right) + \frac{\rho}{12}C_3$$

$$-\rho\frac{C_1}{12} = \frac{\rho}{12}6U\left(h_1 - h_2\right) + \frac{\rho}{12}C_3$$

$$-C_1 - C_3 = 6U\left(h_1 - h_2\right) \qquad (11)$$

Aplicando las condiciones de contorno en la ecuación (4)

$$x = \left(L_1 + L_2\right);\quad P_2^* = 0$$

$$0 = \frac{C_1\mu}{h_2^{\,3}}(L_1 + L_2) + C_2 \tag{12}$$

Haciendo lo mismo para la ecuación (10)

$$x = 0; \quad P^*_1 = 0$$

$$0 = \frac{-\mu 6U}{(tg\alpha)^2}\left[\frac{h_1}{tg\alpha}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{tg\alpha}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha}\right)}\right] - \frac{C_3\mu}{(tg\alpha)^3}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{tg\alpha}\right)^2} + C_4$$

$$0 = \frac{-\mu\ 6\ U}{(tg\alpha)^2}\left[\frac{tg\alpha}{2h_1} - \frac{tg\alpha}{h_1}\right] - \frac{C_3\ \mu}{h_1^2\ tg\alpha}\frac{1}{2} + C_4$$

$$0 = \frac{\mu 6U}{tg\alpha}\frac{1}{2h_1} - \frac{C_3\mu}{h_1^2\ tg\alpha}\frac{1}{2} + C_4 \tag{13}$$

La última de las condiciones se establece cuando:

$$x = L_1; \quad P^*_1 = P^*_2$$

$$\frac{-\mu\ 6\ U\ Tg\alpha}{(Tg\alpha)^3}\left[\frac{h_1}{Tg\alpha}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{Tg\alpha} - L_1\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{h_1}{Tg\alpha} - L_1\right)}\right] - \frac{C_3\mu}{(Tg\alpha)^3}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{Tg\alpha} - L_1\right)^2} + C_4 = \frac{C_1\mu}{h_2^{\,3}}L_1 + C_2 \tag{14}$$

Sustituyendo (11), (12) y (13) en (14), se obtiene lo siguiente:

Sustituyendo primero la (12):

$$\underbrace{\frac{-\mu 6U\,tg\alpha}{(tg\alpha)^3}\left[\frac{h_1}{tg\alpha}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - L_1\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - L_1\right)}\right]}_{A} - \frac{C_3\mu}{(tg\alpha)^3}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - L_1\right)^2}$$

$$+C_4 = \frac{C_1\mu}{h_2^{\,3}}L_1 - \frac{C_1\mu}{h_2^{\,3}}(L_1 + L_2) = -\frac{C_1\mu}{h_2^{\,3}}L_2$$

Utilizando ahora la (11) y la (13):

$$A - \frac{C_3\mu}{(tg\alpha)^3}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - L_1\right)^2} + \frac{C_3\,\mu}{2h_1^2\,tg\alpha} - \frac{\mu\,6\,U}{2h_1\,tg\alpha} = \frac{\mu\,L_2}{h_2^3}\left[6U(h_1 - h_2) + C_3\right]$$

despejando C_3

$$A + C_3\left[-\frac{\mu}{(tg\alpha)^3}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - L_1\right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2\,tg\alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3}\right] = \frac{\mu L_3}{h_2^3}6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1\,tg\alpha}$$

con lo cual:

$$C_3 = \frac{\frac{\mu L_2}{h_2^3}6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1\,tg\alpha} - A}{-\frac{\mu}{(tg\alpha)^3}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - L_1\right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2\,tg\alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3}}$$

$\text{de}(11)$: $\quad C_1 = -C_3 - 6U(h_1 - h_2)$

$$C_1 = -\frac{+\frac{\mu L_2}{h_2^3}6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1\,tg\alpha} - A}{-\frac{\mu}{(tg\alpha)^3}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - L_1\right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2\,tg\alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3}} - 6U(h_1 - h_2)$$

de (12): $\quad C_2 = -\frac{C_1\mu}{h_2^3}(L_1 + L_2)$

$$C_2 = -\frac{\mu(L_1 + L_2)}{h_2{}^3}\left[-\frac{-\frac{\mu L_2}{h_2{}^3}6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1\,tg\alpha} - A}{-\frac{\mu}{(tg\alpha)^3}\frac{1}{2\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - L_1\right)^2} + \frac{\mu}{2h_1{}^2\,tg\alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2{}^3}} - 6U(h_1 - h_2)\right]$$

de (13) $\quad C_4 = \frac{C_3\mu}{h_1^2\,tg\alpha}\frac{1}{2} - \frac{\mu 6U}{tg\alpha}\frac{1}{2h_1}$

$$C_4 = \frac{\mu}{2h_1^2\,tg\alpha}\,\frac{\dfrac{\mu L_2}{h_2^3}6U(h_1 - h_2) + \dfrac{\mu 6U}{2h_1 tg\alpha} - A}{-\dfrac{\mu}{(tg\alpha)^3}\dfrac{1}{2\left(\dfrac{h_1}{tg\alpha} - L_1\right)^2} + \dfrac{\mu}{2h_1^2\,tg\alpha} - \dfrac{\mu L_2}{h_2^3}} - \frac{\mu 6U}{tg\alpha}\frac{1}{2h_1}$$

La fuerza ascensorial o capacidad de carga por unidad de longitud vale:

$$F_y = \int_{x=0}^{x=l_1} P_1^* dx + \int_{x=l_1}^{x=(l_1+l_2)} P_2^* dx$$

$$F_y = \int_{x=0}^{x=l_1} \frac{-\mu 6U}{(tg\alpha)^2}\left[\frac{h_1}{tg\alpha}\frac{1}{2\left(\dfrac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^2} - \frac{1}{\left(\dfrac{h_1}{tg\alpha} - x\right)}\right]dx - \int_{x=0}^{x=l_1}\left(\frac{C_3\mu}{(tg\alpha)^3}\frac{1}{2\left(\dfrac{h_1}{tg\alpha} - x\right)^2} + C_4\right)dx +$$

$$+ \int_{x=l_1}^{x=(l_1+l_2)}\left(\frac{C_1\mu}{h_2^3}x + C_2\right)dx$$

$$F_y = \frac{-\mu\,6\,U\,tg\alpha}{(tg\alpha)^3}\left[\frac{h_1}{2\,tg\alpha}\frac{1}{\left(\dfrac{h_1}{tg\alpha} - x\right)} + \ln\left(\frac{h_1}{tg\alpha} - x\right)\right]_{x=0}^{x=L_1}$$

$$-\frac{C_3\,\mu}{(tg\alpha)^3}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\dfrac{h_1}{tg\alpha} - x}\right]_{x=0}^{x=L_1} + C_4\left[x\right]_{x=0}^{X=L_1} + \left[\frac{C_1\,\mu\,x^2}{h_2^3\,2} + C_2\,x\right]_{x=L_1}^{x=(L_1+L_2)}$$

Problema 73

Enunciado

Sea la válvula de asiento cónico descrita en la figura 73.1. Considérese la longitud del asiento, l, mucho mayor que la distancia entre placas, H (l >>H), tal que el flujo a través del intersticio pueda considerarse laminar.

Determine las ecuaciones que rigen:

1. El caudal que fluye a través de la válvula, si se conocen las presiones a la entrada y salida de la misma.

2. La distribución de presiones a lo largo del asiento cónico.
3. La fuerza que el fluido ejerce sobre la corredera.

Resolución

Considérese la válvula de asiento cónico de la figura 73.1.

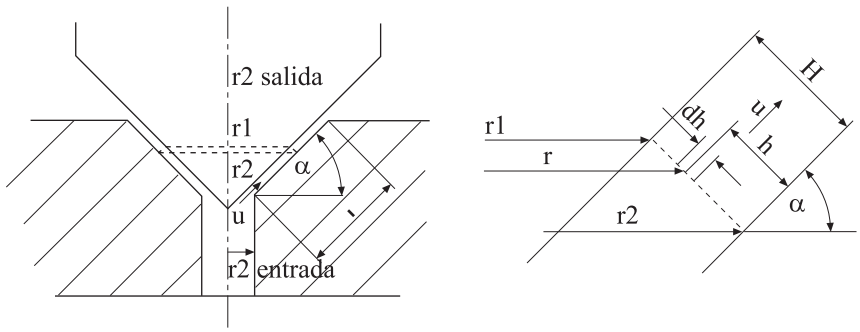


Fig. 73.1
Vista general de una válvula de asiento cónico

1. El diferencial de superficie se puede establecer como:

$$ds = 2\pi r\, dh$$

El flujo volumétrico a través del intersticio será:

$$Q = \int_0^H V\, 2\pi r\, dh$$

$$Q = \int_0^H V\, 2\pi (r_2 - h\cos(90-\alpha))\, dh \qquad (1)$$

y se cumplirá $r = r_2,\ h = 0$ y $r = r_1,\ h = H$

La distribución de velocidades entre las dos placas, de acuerdo con la ecuación de Poiseuille se define:

$$V = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h}{2}(H-h) \qquad (2)$$

De donde el flujo a través del intersticio cónico será:

$$Q = \int_0^H -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h}{2}(H-h)\, 2\pi (r_2 - h\cos(90-\alpha))\, dh \qquad (3)$$

cuya integración da lugar a:

$$Q = -\frac{\pi}{\mu}\frac{dp}{dx}\left[r_2 H^3 \frac{1}{6} - H^4 \cos(90-\alpha)\frac{1}{12}\right] \qquad (4)$$

La distribución de presiones a lo largo del asiento cónico se define:

$$\int_0^L \frac{dx}{r_2\, H^3 \frac{1}{6} - H^4 \cos(90-\alpha)\frac{1}{12}} = \int_{P_{entrada}}^{P_{salida}} -\frac{\pi}{\mu}\frac{dp}{Q} \tag{5}$$

Conociendo que x=0, $r_2 = r_2$ (entrada); y x=l, $r_2 = r_2$ (salida).

$$\cos\alpha = \frac{r_2(\text{salida}) - r_2(\text{entrada})}{l}\,;\ \cos\alpha = \frac{r_2 - r_2(\text{entrada})}{x}\,;\ r_2 = \cos\alpha\, x + r_2(\text{entrada}) \tag{6}$$

con lo cual la distribución de presión queda:

$$\int_0^L \frac{dx}{(\cos\alpha\, x + r_2(\text{entrada}))\, H^3 \frac{1}{6} - H^4 \cos(90-\alpha)\frac{1}{12}} = \int_{P_{entrada}}^{P_{salida}} -\frac{\pi}{\mu}\frac{dp}{Q} \tag{7}$$

De la integración se llega a:

$$Q = (P_{(entrada)} - P_{(salida)})\,\frac{\pi}{\mu}\cos\alpha\,\frac{H^3}{6}\,\frac{1}{\ln\left[\dfrac{L\cos\alpha\,\frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)}\,\frac{H^3}{6} - H^4\cos(90-\alpha)\frac{1}{12}}{r_{2(entrada)}\,\frac{H^3}{6} - H^4\cos(90-\alpha)\frac{1}{12}}\right]} \tag{8}$$

2. Si la presión en un punto genérico situado a una distancia x del origen de coordenadas es P, se define:

$$Q = (P_{(entrada)} - P)\,\frac{\pi}{\mu}\cos\alpha\,\frac{H^3}{6}\,\frac{1}{\ln\left[\dfrac{x\cos\alpha\,\frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)}\,\frac{H^3}{6} - H^4\cos(90-\alpha)\frac{1}{12}}{r_{2(entrada)}\,\frac{H^3}{6} - H^4\cos(90-\alpha)\frac{1}{12}}\right]} \tag{9}$$

Utilizando las ecuaciones (8) y (9), se puede concluir:

$$P = P_{(entrada)} - (P_{(entrada)} - P_{(salida)})\,\frac{\ln\left[\dfrac{x\cos\alpha\,\frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)}\,\frac{H^3}{6} - H^4\cos(90-\alpha)\frac{1}{12}}{r_{2(entrada)}\,\frac{H^3}{6} - H^4\cos(90-\alpha)\frac{1}{12}}\right]}{\ln\left[\dfrac{L\cos\alpha\,\frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)}\,\frac{H^3}{6} - H^4\cos(90-\alpha)\frac{1}{12}}{r_{2(entrada)}\,\frac{H^3}{6} - H^4\cos(90-\alpha)\frac{1}{12}}\right]} \tag{10}$$

La ecuación (10) da la distribución de presión a lo largo del asiento cónico. La representación de esta ecuación para aceite hidráulico ISO 32, una distancia entre placas de 3 micras, una presión diferencial de 100 bar y todo un colectivo de longitudes de asiento cónico se detalla en la figura 73.2. Obsérvese que la distribución de presiones no es lineal; por otro lado, a medida que el ángulo del cono aumenta, la caída de presión por unidad de longitud es mayor para radios pequeños.

Este comportamiento es perfectamente entendible, puesto que para ángulos de cono pequeños la variación de área con el radio es menor que para ángulos grandes, por tanto, la resistencia al paso de fluido es mayor.

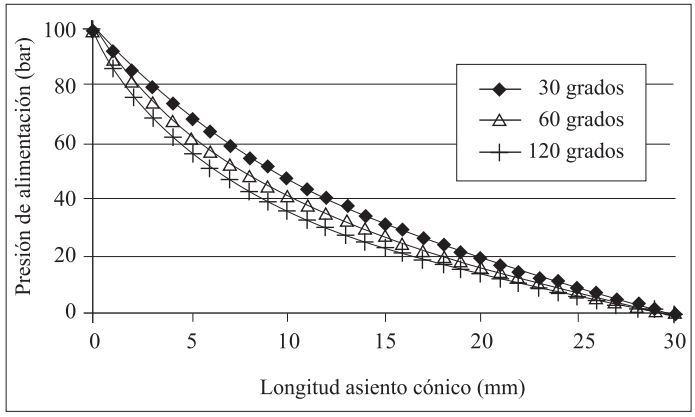
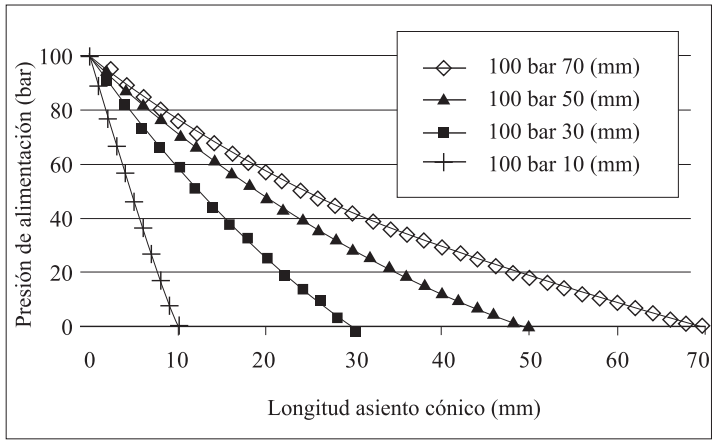


Fig. 73.2
Variación de la distribución de presión a lo largo del asiento cónico, aceite ISO 32 presión =100 bar, distancia entre placas = 3 micras

a) Ángulo del cono: 30^o, 60^o, 120^o



b) Longitud del asiento cónico: 10, 30, 50, 70 mm, $\alpha=45^o$

En la figura 73.3 está representada la ecuación (8), la cual muestra el flujo a través de la válvula para un colectivo de distancias entre platos, presiones diferenciales y ángulos de cono, la longitud del asiento cónico se mantuvo constante en 30 mm. Véase que el caudal aumenta con la presión diferencial, la distancia entre placas y el ángulo del cono.

Este comportamiento se explica cuando se tiene en cuenta que, al aumentar el ángulo del cono, la sección de paso aumenta mucho más rápidamente con la distancia respecto al vértice del cono.

Se ha de tener en cuenta además a medida que el ángulo del cono aumenta, el cambio de cantidad de movimiento experimentado será mayor; asimismo, las líneas de corriente a la entrada de la zona cónica se comprimirán. Estos efectos tenderán a disminuir ligeramente el flujo a través de la válvula, a medida que el ángulo aumente, creando además una ligera disminución de presión a la entrada de la parte cónica. Este efecto ya fue descrito por Urata y por Mokhtarzardeh-Dehghan.

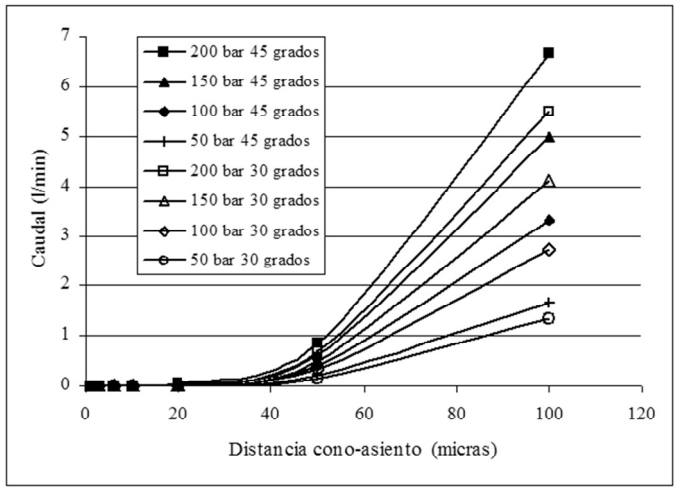


Fig. 73.3 Características de flujo en función de la distancia entre placas, para diferentes presiones de alimentación y ángulos del asiento cónico, α = 45º y 30º

3. Fuerzas que actúan sobre la corredera de asiento cónico

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento en dirección del eje de la válvula, tomando como sección entrante la sección anular de la válvula y como sección saliente la sección de la salida del cono de la válvula, se puede establecer:

$$\int_{A\ \text{entrada}} P_{\text{entrada}}\, d\vec{A} + \int_{A\ \text{salida}} P_{\text{salida}}\, d\vec{A} \cos(90-\alpha) + \int_{A\ \text{cono}} P_{\text{superficie del cono}}\, d\vec{A}\ \cos\alpha +$$
$$\int_{A\ \text{asiento cónico}} P_{\text{asiento cónico}}\, d\vec{A} \cos\alpha + \int_{A\ \text{cono\&asiento}} \bar{\bar{\tau}}\, dA \sin\alpha + \qquad (11)$$
$$+\ m\vec{g} = \int_{A\ \text{saliente}} \rho \vec{V}_j \vec{V}\, d\vec{A} + \int_{A\ \text{entrante}} \rho \vec{V}_j \vec{V}\, d\vec{A}$$

despreciando las fuerzas másicas, la fuerza sobre la corredera queda:

$$F_{\text{corredera}\ \hat{j}} = -\int_{A\ \text{cono}} P_{\text{superficie cono}}\, dA \cos\alpha - \int_{A\ \text{cono\&asiento}} \tau\, dA \sin\alpha = \int_{A\ \text{salida}} \rho V_j V\, dA$$
$$-\int_{A\ \text{entrada}} \rho V_j V\, dA - \int_{A\ \text{entrada}} P_{\text{entrada}}\, dA + \int_{A\ \text{salida}} P_{\text{salida}}\, dA \cos(90-\alpha) - \qquad (12)$$
$$-\int_{A\ \text{asiento cónico}} P_{\text{asiento cónico}}\, dA \cos\alpha$$

Stone y Urata indicaron que, para evaluar las fuerzas de flujo sobre una corredera con asiento cónico, es preciso tener en cuenta la distribución de presiones a lo largo del asiento cónico. Véase que el último término de la ecuación (12) proporciona dicha fuerza. Dado que la distribución de presiones a lo largo del asiento cónico está proporcionada por la ecuación (10), su integración dará lugar a las fuerzas de presión sobre el asiento cónico.

Al resolver la ecuación (12), la distribución de velocidades se va a asumir parabólica tanto en la entrada como en la salida del volumen de control, puesto que se considera que el flujo es laminar en todo momento.

En la entrada, la distribución de presión se considera:

$$V = V_{max}\left[1-\left(\frac{r}{r_{2\ entrada}}\right)^2\right] \tag{13}$$

Con lo cual, la fuerza debida a la cantidad de movimiento en la entrada será:

$$-\int_{A\,entrada}\rho\, V_j\, V\, dA = -\int_0^{r_{2\,entrada}}\rho\, V^2\, 2\pi r\, dr = -\rho\pi V_0^2\, r_{2entrada}^2\,\frac{4}{3} \tag{14}$$

La cantidad de movimiento en la superficie de salida se determinará partiendo de la distribución de velocidades dada por la ecuación (2) y la distribución de presiones dada por la ecuación (10), cuya derivada es:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_{salida} - P_{entrada}}{K_3}\,\frac{K_1}{x\,K_1 + K_2} \tag{15}$$

donde K_1, K_2 y K_3 son constantes dadas por:

$$K_1 = \cos\alpha\,\frac{H^3}{6} \tag{16}$$

$$K_2 = r_{2entrada}\,\frac{H^3}{6} - H^4\cos(90-\alpha)\,\frac{1}{12} \tag{17}$$

$$K_3 = \ln\left[\frac{l\cos\alpha\,\dfrac{H^3}{6} + r_{2entrada}\,\dfrac{H^3}{6} - H^4\cos(90-\alpha)\,\dfrac{1}{12}}{r_{2entrada}\,\dfrac{H^3}{6} - H^4\cos(90-\alpha)\,\dfrac{1}{12}}\right] \tag{18}$$

con lo cual se obtiene:

$$\int_{A\,salida} \rho\, V_j\, V\, dA = \int_0^H \rho\, V^2 \sin\alpha\, (r_{2salida} - h\, \cos(90-\alpha))\, 2\pi\, dh =$$
$$\rho\, 2\pi\, sen(\alpha) \frac{1}{\mu^2} \left[\frac{K_1^2\, (P_{salida}^2 + P_{entrada}^2 - 2\, P_{salida}\, P_{entrada})}{K_3^2\, (1K_1 + K_2)^2} \right] * \qquad (19)$$
$$\int_0^H \frac{h^2}{4} (H-h)^2\, (r_{2\ salida} - h \cos(90-\alpha) dh$$

siendo el resultado de la integración:

$$\int_{A\,salida} \rho\, V_j\, V\, dA = \rho\, 2\pi \sin(\alpha) \frac{1}{\mu^2} \left[\frac{K_1^2\, (P_{salida}^2 + P_{entrada}^2 - 2\, P_{salida} P_{entrada})}{K_3^2\, (1K_1 + K_2)^2} \right] \qquad (20)$$
$$\left(\frac{H^5}{120}\, r_{2salida} - \cos(90-\alpha) \frac{H^6}{240}\right)$$

La fuerza debida a la presión a la entrada será:

$$-\int_{A\,entrada} P_{entrada}\, dA = -\int_0^{r_{2\ entrada}} P_{entrada}\, 2\pi r\, dr = -P_{entrada}\, \pi\, r_{2entrada}^2 \qquad (21)$$

y la fuerza debida a la presión a la salida será:

$$\int_{A\,salida} P_{salida}\, dA \cos(90-\alpha) = \int_0^H P_{salida}\, 2\pi (r_{2salida} - h\cos(90-\alpha))\, \cos(90-\alpha)\, dh\ =$$
$$= P_{salida}\, 2\pi \cos(90-\alpha) \left[r_{2salida}\, H - \frac{H^2}{2} \cos(90-\alpha) \right] \qquad (22)$$

Tomando en consideración que $P_{asiento\ cónico}$ está dado por la ecuación (10), las fuerzas sobre el asiento cónico estarán dadas por

$$-\int_{A\ asiento\ cónico} P_{asiento\ cónico}\, dA \cos\alpha = -\int_0^l P_{asiento\ cónico}\, 2\pi \cos\alpha\, (\cos\alpha\ x + r_{2\ entrada})\, dx = (23)$$

$$= \int_0^l -\left[2\, \pi \cos\alpha\, (\cos\alpha\ x + r_{2\ (entrada)}) \right] \{P_{(entrada)} - (P_{(entrada)} - P_{(salida)}) *$$
$$\frac{\ln \left[\dfrac{x \cos\alpha\, \dfrac{H^3}{6} + r_{2(entrada)}\, \dfrac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \dfrac{1}{12}}{r_{2(entrada)}\, \dfrac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \dfrac{1}{12}} \right]}{\ln \left[\dfrac{l \cos\alpha\, \dfrac{H^3}{6} + r_{2(entrada)}\, \dfrac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \dfrac{1}{12}}{r_{2(entrada)}\, \dfrac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \dfrac{1}{12}} \right]} \} \, dx$$

Utilizando las mismas constantes, K_1, K_2 y K_3, representadas en las ecuaciones (16), (17) y (18), el resultado de la integración da:

$$-\int_{A\ \text{asiento cónico}} P_{\text{asiento cónico}}\ dA\ \cos\alpha = -2\pi\cos\alpha\{P_{\text{entrada}}\ r_{2\,\text{entrada}}\ l + P_{\text{entrada}}\ \cos\alpha\frac{l^2}{2} +$$
$$+\frac{r_{2\,\text{entrada}}}{k_3}[(l+\frac{k_2}{k_1})\ln(l\frac{k_1}{k_2}+1)-l]\,[P_{\text{salida}}-P_{\text{entrada}}] \qquad (24)$$
$$+\frac{\cos\alpha}{k_3}[\frac{1}{2}(l^2-\frac{k_2^2}{k_1^2})\ln(l\frac{k_1}{k_2}+1)-\frac{1}{2}(\frac{l^2}{2}-\frac{k_2}{k_1}l)]\,[P_{\text{salida}}-P_{\text{entrada}}]\}$$

Los esfuerzos cortantes sobre el asiento cónico se pueden expresar:

$$\int_{A\ \text{asiento cónico}} \tau|_{h=0}\ dA\,\text{sen}\alpha \qquad (25)$$

Asumiendo fluido newtoniano y utilizando las ecuaciones (2) y (15) los esfuerzos cortantes se pueden dar:

$$\tau|_{h=0} = \frac{(P_{\text{entrada}}-P_{\text{salida}})\,k_1}{k_3}\ \frac{1}{x\,k_1+k_2}\quad\frac{H}{2} \qquad (26)$$

con lo cual la fuerza debida a los esfuerzos cortantes sobre el cono será:

$$\int_{A\ \text{asiento cónico}} \tau|_{h=0}\ dA\sin\alpha = \left[\frac{(P_{\text{entrada}}-P_{\text{salida}})\,k_1}{k_3}\ \frac{2\,\pi\,H\,\text{sen}\alpha}{2}\right]*$$
$$*\left[\frac{r_{2\,\text{entrada}}}{k_1}\ln\left(\frac{l\,k_1+k_2}{k_2}\right)+\cos\alpha\left\{\frac{1}{k_1}-\frac{k_2}{k_1^2}\ln\left(\frac{l\,k_1+k_2}{k_2}\right)\right\}\right] \qquad (27)$$

Obsérvese que los esfuerzos cortantes valen cero cuando la longitud del asiento cónico es cero.

La fuerza total que actúa sobre la corredera con asiento cónico requerirá de la adición de los términos de las fuerzas de cantidad de movimiento, los términos de presión estática y los términos debidos a los esfuerzos cortantes sobre el asiento cónico, obteniendo:

$$F_{\text{corredera j}} = \rho\,2\pi\,\sin(\alpha)\frac{1}{\mu^2}\left[\frac{K_1^2\,(P_{\text{salida}}^2+P_{\text{entrada}}^2-2\,P_{\text{salida}}\,P_{\text{entrada}})}{K_3^2\,(l\,K_1+K_2)^2}\right]$$
$$(\frac{H^5}{120}\ r_{2\text{salida}}-\cos(90-\alpha)\frac{H^6}{240})$$

$$-\rho\,\pi\,V_0^2\,r_{2\,\text{entrada}}^2\,\frac{4}{3}-P_{\text{entrada}}\,\pi r_{2\,\text{entrada}}^2+P_{\text{salida}}\,2\,\pi\cos(90-\alpha)[r_{2\,\text{salida}}\,H-\frac{H^2}{2}\cos(90-\alpha)]$$

$$-2\,\pi\cos\alpha\,P_{\text{entrada}}\,r_{2\,\text{entrada}}\,l-2\,\pi\cos\alpha\,P_{\text{entrada}}\,\cos\alpha\,\frac{l^2}{2}$$

$$-2\,\pi\cos\alpha\,\frac{r_{2\,\text{entrada}}}{k_3}[(l+\frac{k_2}{k_1})\,\ln(1\frac{k_1}{k_2}+1)-l]\,[P_{\text{salida}}-P_{\text{entrada}}]$$

$$-2\,\pi\cos\alpha\frac{\cos\alpha}{k_3}[\frac{1}{2}(l^2-\frac{k_2^2}{k_1^2})\,\ln(1\frac{k_1}{k_2}+1)-\frac{1}{2}(\frac{l^2}{2}-\frac{k_2}{k_1}l)]\,[P_{\text{salida}}-P_{\text{entrada}}]+$$

$$+\left[\frac{(P_{\text{entrada}}-P_{\text{salida}})\,k_1}{k_3}\,\frac{2\,\pi\,H\,\sin\alpha}{2}\right]$$

$$\left[\frac{r_{2\,\text{entrada}}}{k_1}\ln\left(\frac{l\,k_1+k_2}{k_2}\right)+\cos\alpha\left\{\frac{1}{k_1}-\frac{k_2}{k_1^2}\ln\left(\frac{l\,k_1+k_2}{k_2}\right)\right\}\right]$$

(28)

De la ecuación (28) se observa que:

- El primer término representa las fuerzas de cantidad de movimiento a la salida del volumen de control.
- El segundo término da las fuerzas de cantidad de movimiento a la entrada.
- El tercer y cuarto términos representan las fuerzas de presión a la entrada y a la salida, respectivamente.
- El resto de los términos, excepto el último, están relacionados con las fuerzas de presión sobre el asiento cónico.
- El último término evalúa los esfuerzos cortantes sobre el asiento cónico.

Todas las figuras que se muestran a continuación tienen los siguientes parámetros comunes: $r_{2\,\text{entrada}}$ = 2 mm, α = 45 grados. Todas las fuerzas representadas mantienen el mismo signo que se estableció en la ecuación (28), con lo cual representan las fuerzas de reacción.

La figura 73.4 representa la cantidad de movimiento a la entrada y a la salida del volumen de control en función de la longitud del asiento cónico y para un colectivo de presiones diferenciales y distancias entre platos.

Véase que, para longitudes de asiento pequeñas, de pocos milímetros, la cantidad de movimiento saliente aumenta notoriamente a medida que la longitud del asiento disminuye.

De hecho, la cantidad de movimiento saliente aumenta asimismo con la presión de alimentación y con la distancia entre platos.

A priori, se observa el mismo efecto sobre la cantidad de movimiento entrante, aunque los signos son opuestos. Por otro lado, la magnitud de la cantidad de movimiento entrante es mucho menor que la saliente.

Las fuerzas de cantidad de movimiento tenderán a cerrar la válvula, esto sucederá en mayor medida para pequeñas longitudes del asiento cónico, altas presiones de alimentación y distancias entre platos grandes.

En estos casos, la inestabilidad del flujo se prevé mayor. La relevancia de lo expuesto queda esclarecida si se tiene en cuenta que las válvulas limitadoras se construyen actualmente con longitudes de asiento inferiores a de 3 mm.

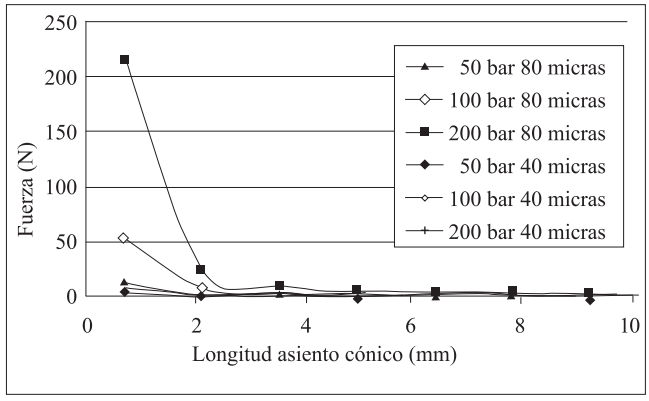
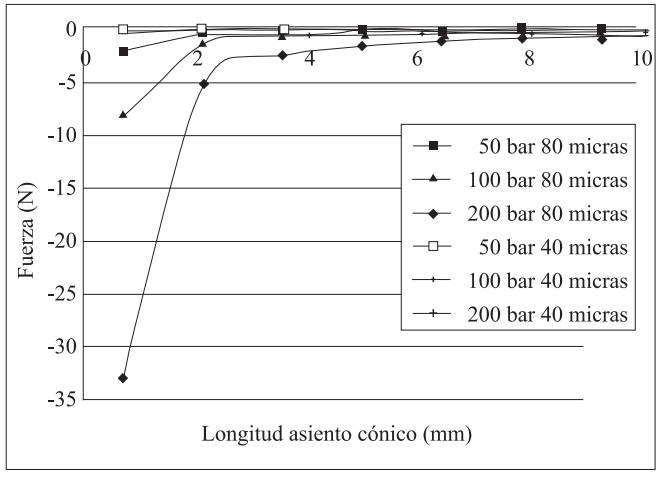


Fig. 73.4
Cantidad de movimiento entrante/saliente, para
r2 entrada = 2 mm,
distancia entre platos 80-40 micras
α = 45 grados,
presión de alimentación
50, 100, 200 bar

a) Salida



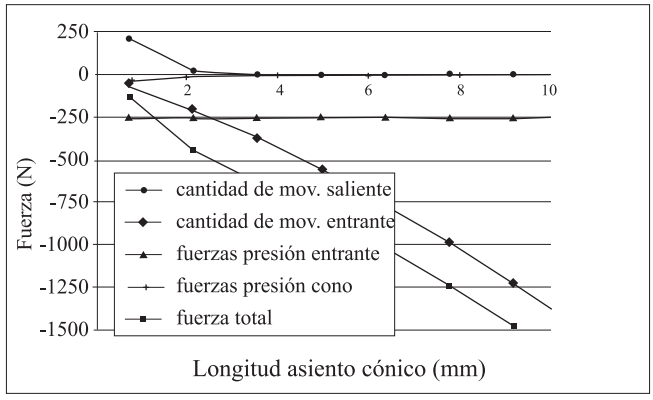
b) Entrada

Un término muy importante a tener en cuenta, según Urata, es el que evalúa las fuerzas de presión sobre el asiento cónico. Este término, definido por la ecuación (24) ha sido representado en la figura 73.5. En el mismo gráfico se evalúan asimismo las diferentes fuerzas que actúan sobre la corredera, es decir, todos los términos de la ecuación (28). Obsérvese que la fuerza total sobre la corredera se debe principalmente a la fuerza de presión sobre el asiento cónico, y la actuante sobre la sección de entrada. A medida que la longitud del asiento se incrementa, la fuerza sobre el asiento cónico se vuelve predominante. Por otro lado, cuando la longitud del asiento cónico es inferior a 2 mm, aproximadamente, son las fuerzas de cantidad de movimiento las que juegan un papel decisivo, forzando a la curva de fuerzas resultante a seguir la trayectoria marcada por la curva de fuerzas de cantidad de movimiento. En algunos casos, (v. figura 73.5b), esto conduce a un cambio de signo de la fuerza resultante.

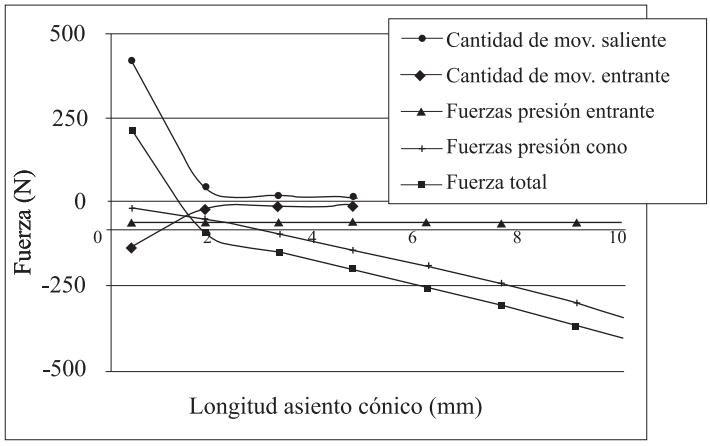
Aunque no queda reflejado en la figura 73.5, se ha de remarcar que las fuerzas sobre el asiento cónico experimentan cambios poco significativos cuando se modifica la distancia entre la corredera y la base cónica. Estas fuerzas, por otro lado, cambian sustancialmente al modificar la presión de alimentación. Este efecto podría predecirse si se comprueba la distribución de presiones a lo largo del asiento cónico, se observa que la distribución de presiones permanece prácticamente constante para el rango de distancias entre platos estudiado y varía drásticamente con la presión de alimentación.

El efecto del diámetro de entrada y el ángulo del cono es estudiado en la figura 73.6, donde se observa que la fuerza resultante sobre la corredera queda afectada al modificar la sección de entrada. Véase que, al aumentar el diámetro de entrada, las curvas no sólo experimentan un desplazamiento, sino que además su pendiente aumenta, (figura 73.6a). De hecho, la pendiente de la curva de fuerzas resultante cambia con la presión de alimentación y con la sección de entrada.

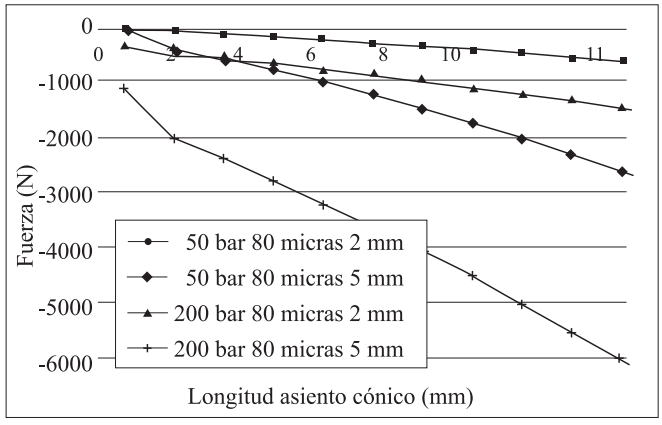
Fig. 73.5
Fuerzas en dirección axial sobre la corredera, término a término



a) Presión de alimentación 200 bar, distancia cono/asiento 80 micras

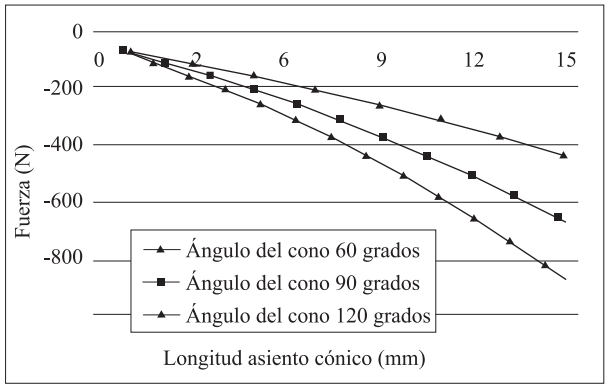


b) 50 bar, 160 micras



a) Radio de entrada, 2, 5 mm

Fig. 73.6
Fuerza total sobre la corredera, para una serie de diámetros de entrada, ángulos del cono, y una distancia cono /asiento de 80 micras



b) Ángulos del cono 60,90,120; presión entrada = 50 bar

La figura 73.6b muestra la fuerza total sobre la corredera en función del ángulo del cono. Véase que, a medida que el ángulo del cono aumenta, aumenta la fuerza sobre la corredera. Para entender mejor este gráfico, se ha de recordar que para una longitud de asiento cónico dada, cuanto mayor sea el ángulo del cono mayor será el radio de salida ($r_{2\ salida}$), (v. figura 73.1), con lo cual la componente de la fuerza en dirección axial será asimismo mayor.

Análisis adimensional

9.1 Introducción

Hasta el momento se ha visto que las ecuaciones en forma integral o diferencial resuelven muchos de los problemas de mecánica de fluidos. No obstante, la resolución de problemas de flujo complejos requiere de la experimentación. Antes de realizar cualquier ensayo experimental, es básico conocer cuáles son las variables que intervienen en el fenómeno y compactarlas en forma de grupos adimensionales. Si se grafican los resultados experimentales, utilizando gráficas adimensionales, se observa que, por un lado, se reduce notoriamente el tiempo de experimentación y, por otro lado, las gráficas halladas son mucho más genéricas que sus homólogas dimensionales.

Los grupos adimensionales que caracterizan un fenómeno físico dado se determinan mediante la técnica de análisis adimensional. El análisis adimensional reduce el número de variables que se deben considerar en una investigación, compactando las variables originales en paquetes convenientes denominados *grupos adimensionales*. El análisis adimensional proporciona las herramientas para decidir a priori si es probable que un flujo sea laminar o turbulento, o si las suposiciones como la consideración de la compresibilidad en un fluido son acertadas.

Con el fin de demostrar la potencia del análisis dimensional en la experimentación, se propone realizar el siguiente experimento. Sea el fenómeno de movimiento de una esfera en un fluido viscoso; la fuerza de arrastre es función de las variables $F = f(D, V, \rho, \mu)$. Para hallar la relación entre la fuerza de arrastre y dichas variables, se deberían hacer una serie de ensayos experimentales modificando cada una de las variables, los diámetros de la esfera, las velocidades, las densidades y las viscosidades. Por tanto, se deberían realizar un número elevadísimo de gráficas dimensionales que relacionasen la fuerza con una de estas variables, por ejemplo la velocidad del fluido, y para diferentes diámetros de la esfera, manteniendo constante el fluido de trabajo. Basta con considerar que se deberían realizar gráficas para todos los fluidos de trabajo existentes, para tener una idea del coste de la experimentación.

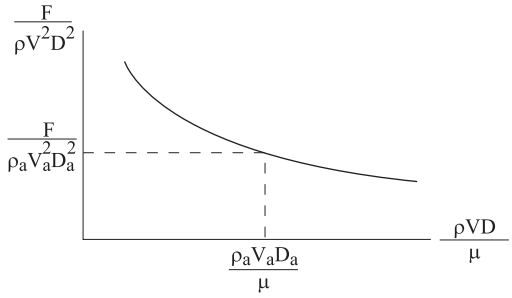
Mediante el análisis dimensional, se llega a demostrar que estas variables se pueden relacionar de la siguiente forma:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)$$

La función f que relaciona estos dos grupos adimensionales se puede determinar gracias a ensayos experimentales.

Mediante la realización de un ensayo experimental para un diámetro de esfera D y un fluido dados, variando únicamente la velocidad del fluido y para cada caso midiendo la fuerza de arrastre, se puede realizar el gráfico siguiente.

Fig. T 9.1



Véase que únicamente se ha realizado un experimento para un diámetro de esfera y fluido dados, pero la información obtenida expuesta en modo adimensional permitirá extrapolar resultados para cualquier diámetro de esfera y fluido, reduciendo así notoriamente los ensayos realizados y ampliando la aplicabilidad de los mismos.

9.2 Fundamentos del análisis adimensional

El principio de homogeneidad dimensional (PHD), establece que cualquier ecuación que describe por completo un fenómeno físico debe ser dimensionalmente homogénea. En Mecánica de Fluidos, se han utilizado tradicionalmente ecuaciones que no cumplían el principio de homogeneidad dimensional, bien porque englobaban variables que tenían que ser dadas en diferentes sistemas de unidades o bien porque necesitaban de constantes dimensionales. En la actualidad, el empleo de dicho tipo de ecuaciones ha quedado reducido a casos muy concretos, con lo que la gran mayoría de ecuaciones utilizadas en Mecánica de Fluidos cumplen el PHD.

Existen tres métodos para hallar los grupos adimensionales que caracterizan un fenómeno:

- Método de π o Buckingham
- Método Matricial o de Rayleich
- Método de Normalización de ecuaciones

En los apartados siguientes, se expondrán las líneas básicas de actuación de cada uno de estos métodos.

9.3 Teorema de π ó Buckingham

Si se sabe que un proceso físico está gobernado por una relación dimensionalmente homogénea que comprende n parámetros dimensionales (variables que intervienen en el fenómeno), tales como:

$X_1 = f(X_2, X_3 .....X_n)$, donde las X_i son variables dimensionales, existe una relación equivalente que contiene un número menor (n-K) de parámetros adimensionales.

K es, generalmente, el número de magnitudes fundamentales contenido en las *X* (variables originales) y nunca puede ser mayor que dicho número de magnitudes fundamentales. El valor de K queda, en realidad, establecido por el rango de la matriz dimensional del proceso.

Los grupos adimensionales que caracterizan el fenómeno físico objeto de estudio, se denominan π y se pueden dar en la forma $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3 .....\pi_{(n-K)})$. Para la determinación de los grupos adimensionales π se elegirán unas variables fundamentales tales que entre todas ellas abarquen las magnitudes fundamentales. No obstante, se ha de cumplir que ninguna combinación de las variables fundamentales elegidas dé lugar a un grupo adimensional. El número de variables fundamentales es, generalmente, igual al número de magnitudes fundamentales, aunque queda definido por el valor de K.

Cada uno de los grupos adimensionales π estará formado por cada una de las variables fundamentales elevadas a un exponente desconocido y multiplicadas por una de las variables restantes. Una vez determinados los exponentes, se tiene el grupo adimensional en cuestión. En el ejemplo siguiente, se detalla cada uno de los pasos a seguir.

9.3.1 Caso de cálculo de las pérdidas de energia en una tubería (No se considera la transferencia de calor)

1. Las variables que influyen en el fenómeno son: $y = g \cdot h = f(L, D, V, \rho, \mu, \varepsilon)$

$y = g \cdot h =$ pérdida de energía mecánica entre dos puntos de un conducto

Utilizando el sistema $[M\ L\ T]$, las dimensiones de cada una de las variables se expresan:

$$\left[\frac{L^2}{T^2}\right] = f\left([L], [L], \left[\frac{L}{T}\right], \left[\frac{M}{L^3}\right], \left[\frac{M}{L\,T}\right], [L]\right);$$

2. Determinación del número de parámetros adimensionales que se requieren construir.

El número de dimensiones fundamentales que se obtiene de la determinación del mayor determinante no nulo hallado partiendo de la matriz de dimensiones de las variables (rango de la matriz dimensional) es 3, K=3, M,L,T.

Si se eligen D, ρ, V, como variables fundamentales, la masa sólo aparece en ρ y el tiempo sólo en V, de tal manera que ninguna combinación de D, ρ, V puede ser adimensional.

El número de parámetros adimensionales que caracterizan este fenómeno es $n - K = 7 - 3 = 4$

3. Si se eligen como variables fundamentales D, ρ, V, los grupos adimensionales serán:

$$\pi_1 = y \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[\frac{L^2}{T^2}\right] \cdot \left[\frac{M}{L^3}\right]^a \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^b \cdot [L]^c$$

Como $\pi_1 = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$, igualando los exponentes de ambos lados de la ecuación, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} M \longrightarrow a = 0 \\ L \longrightarrow 2 - 3a + b + c = 0 \\ T \longrightarrow -2 - b = 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{array}$$

Siendo el resultado: $\overline{|\underline{\pi_1}|} = \underbrace{\frac{L^2}{T^2}}_{y} \cdot \underbrace{\left[\frac{L}{T}\right]^{-2}}_{V^{-2}} = y \cdot V^{-2} = \overline{\left|\frac{y}{V^2}\right|}$;

Realizando el mismo proceso para las restantes tres variables no elegidas como fundamentales, se obtiene:

$$\pi_2 = L \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[\frac{M}{L^3}\right]^a \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^b \cdot [L]^c$$

$$\left.\begin{array}{l} M \longrightarrow a = 0 \\ L \longrightarrow -b = 0 \\ T \longrightarrow -1 - 3a + b + c = 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array} \Bigg\| \overline{|\underline{\pi_2}|} = \overline{\left|\frac{L}{D}\right|};$$

$$\pi_3 = \mu \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[\frac{M}{L\,T}\right] \cdot \left[\frac{M}{L^3}\right]^a \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^b \cdot [L]^c$$

$$\left.\begin{array}{l} M \longrightarrow 1 + a = 0 \\ L \longrightarrow -1 - b = 0 \\ T \longrightarrow -1 - 3a + b + c = 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array} \Bigg\| \overline{|\underline{\pi_3}|} = \mu \cdot \rho^{-1} \cdot V^{-1} \cdot D^{-1} = \overline{\left|\frac{\mu}{\rho\, VD}\right|};$$

$$\pi_4 = \varepsilon \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[\frac{M}{L^3}\right]^a \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^b \cdot [L]^c$$

$$\left.\begin{array}{l} M \longrightarrow a = 0 \\ L \longrightarrow -b = 0 \\ T \longrightarrow 1 - 3a + b + c = 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array} \left\| \overline{\pi_4} = \overline{\frac{\varepsilon}{D}} \right|;$$

Definiendo uno de los grupos adimensionales en función de los demás: $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$, y sustituyendo los valores de π por su equivalente, se llega a:

$$\frac{y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; \frac{\mu}{\rho VD}; \frac{\varepsilon}{D}\right) = f\left(\frac{L}{D}; \frac{1}{Re}; \frac{\varepsilon}{D}\right);$$

Obsérvese que, en realidad, mediante el análisis adimensional se obtiene una colección de grupos adimensionales, sin que se conozca la relación entre ellos. La función que relaciona dichos grupos adimensionales se puede obtener, por ejemplo, multiplicando por una constante cualquiera alguno o varios de los grupos adimensionales, o bien elevando a cualquier potencia cualquiera de los grupos.

El colectivo de grupos adimensionales hallados se puede dar: $\frac{y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; Re; \frac{\varepsilon}{D}\right)$, dado que, desde el punto de vista adimensional, $\frac{1}{Re} = Re$

Puesto que, la pérdida de energía del fluido en el conducto, se observa, es directamente proporcional a la longitud del mismo se puede decir:

$$y = \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2} \cdot f\left(Re \cdot \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Ecuación que se denomina ecuación de *Darcy-Weisbach*. El número 2 se obtiene de la contrastación experimental, y la función restante, que depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, deberá ser hallada experimentalmente.

9.4 Extensión del ejemplo utilizando el método matricial

Sea el caso anterior, donde se quieren evaluar las pérdidas de energía en un conducto.

Las variables que intervenían en el fenómeno eran: $y = (L, D, V, \rho, \mu, \varepsilon)$

El sistema dimensional que debe ser empleado es $[M\ L\ T]$; tras establecer el rango de la matriz dimensional del proceso, se observa que este es 3, con lo que, al igual que en el caso precedente, se deben elegir tres variables como fundamentales, se eligen D, ρ, V. El método consiste, inicialmente, en crear la matriz de dimensiones poniendo las tres variables fundamentales en las tres columnas iniciales, tal como muestra la tabla

adjunta; posteriormente, se sitúan en la parte inferior de la primera de las columnas, la columna de dimensiones, las tres variables fundamentales elegidas, en el mismo orden en que están situadas en la primera de las filas. Finalmente, el método establece que si se consigue, mediante la combinación de cualquiera de las tres filas de dimensiones, denominadas filas (A), (B), (C), que la matriz formada por las tres variables fundamentales situadas en los dos ejes coordenados de la matriz, sea una matriz diagonal, entonces, las demás columnas de la matriz definirán los grupos adimensionales característicos del problema. Obsérvese, en la tabla siguiente, que para conseguir la diagonalización de la matriz de variables fundamentales se ha multiplicado la primera fila, (A), por tres y se le ha sumado la fila (B) y la (C). La segunda fila de la matriz de variables fundamentales se consigue trasladando la fila (A), mientras que la tercera y última fila se consigue trasladando la fila (C) y multiplicándola por (-1).

	D	ρ	V	y	ε	L	μ
(A) M	0	1	0	0	0	0	1
(B) L	1	-3	1	2	1	1	-1
(C) T	0	0	-1	-2	0	0	-1
(3A+B+C) D	1	0	0	0	1	1	1
(A) ρ	0	1	0	0	0	0	1
-(C) V	0	0	1	2	0	0	1

$$\pi_1 = \frac{y}{V^2};\quad \pi_2 = \frac{\varepsilon}{D};\quad \pi_3 = \frac{L}{D};\quad \pi_4 = \frac{\mu}{D\rho V};$$

Véase que los grupos adimensionales se obtienen de dividir la variable de cada columna no diagonalizada por la variable o las variables de las filas diagonalizadas. Los grupos adimensionales hallados son los mismos que los obtenidos en el apartado anterior.

9.5 Método de normalización de las ecuaciones o método del análisis inspeccional

El tercer método para la determinación de grupos adimensionales consiste en la transformación de las ecuaciones diferenciales para que queden escritas en forma adimensional. A partir de estas, se determinarán los coeficientes numéricos que afectan los diferentes términos. Estos coeficientes serán los invariantes de semejanza de los fenómenos físicos regidos por las ecuaciones diferenciales iniciales, es decir, los grupos adimensionales característicos del fenómeno físico regido por la ecuación diferencial.

A modo de ejemplo, se determinarán los grupos adimensionales englobados en la ecuación de Navier-Stokes para fluido incompresible, laminar y en régimen transitorio.

Las variables que intervienen en esta ecuación hacen referencia a la naturaleza del fluido, a sus propiedades de transporte, a su estado termodinámico y a su estado de movimiento. Las soluciones de esta ecuación dependen de las condiciones de contorno y de su valor inicial; esto hace que esta ecuación no tenga, hasta la fecha, una solución general, sino muchas de particulares.

Para adimensionalizar la ecuación de Navier-Stokes, se adoptarán una serie de magnitudes de referencia que se detallan a continuación.

$\overline{T}$ = Se define como el tiempo característico durante el cual el fluido experimenta variaciones de velocidad, por ejemplo, de orden unidad.

$\overline{V}$ = Es el valor medio espacial de la velocidad, dentro del volumen de control.

$\overline{L}$ = Se define como una longitud característica.

$\overline{P}$ = Se define como la presión de estancamiento del fluido.

Partiendo de estas magnitudes de referencia, se pueden definir las siguientes variables adimensionales:

$$t_* = \frac{t}{\overline{T}}; \qquad \vec{V}_* = \frac{\vec{V}}{\overline{V}}; \qquad P_* = \frac{P}{\overline{P}}; \qquad z_* = \frac{z}{\overline{L}};$$

Además de la adimensionalización de las variables, se deberán adimensionalizar los operadores diferenciales existentes en la ecuación de Navier-Stokes; así:

El operador diferencial nabla $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$;

se adimensionalizará de la siguiente forma: $\nabla = \frac{\partial}{\partial (x_* \cdot L)} = \frac{1}{L} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_*} + \frac{\partial}{\partial y_*} + \frac{\partial}{\partial z_*} \right)$;

$\nabla \cdot L = \nabla_*$

Asimismo, el operador diferencial laplaciano: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ se adimensionalizará:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial (x_* L)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (y_* L)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (z_* L)^2} = \frac{1}{L^2} \nabla_*^2$$

La ecuación vectorial de Navier-Stokes para fluido incompresible toma la forma:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \nabla \right) \vec{V} = -\nabla \frac{P}{\rho} - \nabla (gz) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}$$

Sustituyendo los parámetros acabados de hallar en la ecuación de Navier-Stokes, se tiene:

$$\frac{\overline{V}}{\overline{T}}\cdot\frac{\partial\vec{V}_*}{\partial t_*}+\frac{\overline{V}^2}{\overline{L}}\left(\vec{V}_*\cdot\nabla_*\right)\cdot\vec{V}_*=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\overline{L}}\nabla_*\left(\overline{P}P_*+\rho g\overline{L}z_*\right)+\frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{\langle V\rangle}{\overline{L}^2}\cdot\nabla_*{}^2\cdot\vec{V}_*$$

Obsérvese que la viscosidad μ y la densidad ρ del fluido no han sido adimensionalizadas, puesto que según los considerándoos iniciales, se consideran constantes.

Dividiendo los dos términos de la ecuación adimensionalizada por $\frac{\overline{V}^2}{\overline{L}}$, se obtiene:

$$\frac{\overline{L}}{\overline{V}\,\overline{T}}\cdot\frac{\partial\vec{V}_*}{\partial t_*}+\left(\vec{V}_*\cdot\nabla_*\right)\cdot\vec{V}_*=-\frac{\overline{P}}{\rho\overline{V}^2}\cdot\nabla_*\cdot P_*-\frac{g\overline{L}}{\overline{V}^2}\cdot\nabla_*\cdot z_*+\frac{\mu}{\rho\overline{V}\overline{L}}\cdot\nabla_*{}^2\cdot\vec{V}_*$$

Véase que la ecuación resultante es la ecuación de Navier-Stokes adimensionalizada, la cual está multiplicada por unos grupos adimensionales, que son:

$$\frac{\overline{L}}{\overline{V}\,\overline{T}};\ \frac{\overline{P}}{\rho\overline{V}^2};\ \frac{g\overline{L}}{\overline{V}^2};\ \frac{\mu}{\rho\overline{V}\overline{L}};$$

Estos son los grupos adimensionales de las magnitudes características definitorias del fenómeno. Dichos grupos son:

$\frac{\overline{L}}{\overline{V}\,\overline{T}}$; número de Strouhal

Es el cociente entre aceleración local debida a la no estacionariedad del movimiento, asociada a un tiempo característico $\overline{T}$ y la aceleración convectiva.

Para un proceso casi estacionario, el tiempo característico de la no estacionariedad $\overline{T}$ es mucho mayor que el tiempo que una partícula tarda en recorrer la longitud característica del proceso $\frac{\overline{L}}{\overline{V}}$.

El número de Strouhal se acostumbra a dar como:

$St=\frac{f\cdot x}{\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}}$, dónde:

$f=$ frecuencia (ciclos/s); $\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}=$ velocidad (m/s); $x=$ distancia (m)

$\frac{\overline{P}}{\rho\overline{V}^2}$; número de Euler. Representativo de todo proceso de transformación de energía de presión en energía cinética caso fluido incompresible.

$\frac{g\overline{L}}{\overline{V}^2}=\frac{1}{F^2}$, F = número de Froude. Se define como el cociente entre las fuerzas de inercia y las gravitatórias.

$\frac{\mu}{\rho \bar{V} \bar{L}} = \frac{1}{Re}$, Re = número de Reynolds. Representa la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas.

Estos cuatro números caracterizan el movimiento de un fluido real e incompresible, en régimen transitorio y bajo la acción de las fuerzas gravitatorias.

9.6 Algunos de los grupos adimensionales más comunes en Mecánica de Fluidos son:

$$Re = \frac{\rho V \ell}{\mu} = \text{número de Reynolds}$$

$\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}}$; representa los efectos de la viscosidad sobre el flujo.

$$M = \frac{V}{\sqrt{\beta / \rho}} = \text{número de Mach}$$

$\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas elásticas de compresión}}$; relaciona la velocidad del fluido y la del sonido.

β es el módulo de compresibilidad volumétrica.

$$W = \frac{\rho V^2 \ell}{\sigma} = \text{número de Weber}$$

$\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas de tensión superficial}}$; representa los efectos de la tensión superficial (que es importante cuando existe una interfaz entre dos fluidos). La tensión superficial actúa únicamente a pequeñas escalas.

$$F = \frac{V}{\sqrt{g \ell}} = \text{número de Froude}$$

$\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas másicas}}$; representa los efectos de una superficie libre, si esta no existe se puede omitir dicho grupo adimensional.

En fenómenos donde hay oscilaciones de flujo es interesante utilizar el nº de Strouhal.

$$S = \frac{f x}{V} = \frac{\left(x / V \right)}{\left(1 / f \right)} = \frac{\text{Tiempo característico de flujo}}{\text{Tiempo característico de oscilación}}$$

En transferencia de calor, uno de los números más empleados sería el número de Prandtl, que indica la importancia relativa entre dos fenómenos de transporte similares: la difusión viscosa o difusión de cantidad de movimiento y la difusión de calor por conducción.

$$Pr = \frac{C_p \mu}{K} = \frac{\text{Disipación}}{\text{Conducción}}$$

Otro grupo adimensional ampliamente utilizado sería el número de Péclet. El cual da la relación entre el calor por convección y el calor recibido por conducción.

$$Pe = \frac{\rho V C_p L}{K}$$

Obsérvese que se cumple la relación: Péclet= Prandtl * Reynolds.

Otro colectivo de grupos especialmente relevante en flujo externo se define:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 \ell^2} \quad \rightarrow \text{coeficiente de resistencia}$$

$$D = \text{fuerza de arrastre}$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 \ell^2 = \text{fuerza de inercia}$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 \ell^2} \quad \rightarrow \text{coeficiente de sustentación}$$

$$L = \text{Fuerza de sustentación}$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 \ell^2 = \text{Fuerza de inercia}$$

$$C_P = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2} \qquad \frac{\text{Fuerzas de presión}}{\text{Fuerzas de inercia}} \rightarrow \text{Coeficiente de presión.}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V^2} \qquad \frac{\text{Fuerzas debidas a esfuerzos cortantes}}{\text{Fuerzas de inercia}} \rightarrow \text{Coeficiente de fricción.}$$

Estos grupos adimensionales aparecen en una gran cantidad de problemas de mecánica de fluidos. No obstante, existe un enorme número de grupos que tienen un empleo más específico.

9.7 Pruebas con modelos, extrapolación de resultados

En función de lo dicho hasta el momento, podría parecer que los grupos adimensionales se utilizan únicamente para realizar gráficas adimensionales. De hecho, su utilización en la extrapolación de resultados entre los ensayos realizados con un modelo y el comportamiento del prototipo es muy amplia.

A la hora de extrapolar resultados entre modelo y prototipo, es necesario que se cumplan los *principios de semejanza.* Existen tres tipos de semejanza: geométrica, cinemática y dinámica.

a). La semejanza geométrica. Requiere que las formas del modelo y del prototipo sean exactamente las mismas; el modelo cumple todas las relaciones de escala con referencia al prototipo.

b). Semejanza cinemática. Implica que los triángulos de velocidades entre modelo y prototipo sean homotéticos. Las relaciones de la velocidad del fluido y otras velocidades relevantes deben ser iguales para el modelo y el prototipo. La orientación del flujo con respecto al objeto debe ser la misma. Dos flujos que son geométrica y cinemáticamente similares tienen patrones de líneas de corriente geométricamente similares. Si los efectos de viscosidad, de tensión superficial o de compresibilidad son importantes, la semejanza cinemática está condicionada a que exista semejanza dinámica.

c). Semejanza dinámica. Implica que los triángulos de fuerzas entre modelo y prototipo sean homotéticos. La relación de fuerzas entre modelo y prototipo ha de ser la misma en puntos correspondientes, y esta relación ha de ser la misma para todos los tipos de fuerzas existentes.

Obsérvese que muchos de los grupos adimensionales relacionan fuerzas, otros, velocidades, y otros, longitudes. se ha de entender que, detrás de cada una de las leyes de semejanza, aparecen unos grupos adimensionales que han de cumplirse.

El principio de semejanza se puede enunciar del modo siguiente:

Si los flujos en el modelo y en el prototipo cumplen con la semejanza geométrica y cinemática de todos los parámetros relevantes, y si existe semejanza dinámica en todos los parámetros de variables independientes relevantes, se tiene entonces semejanza dinámica completa, esto es, todos los parámetros de variables dependientes son iguales.

De hecho, la existencia de semejanza geométrica, cinemática y dinámica entre modelo y prototipo, únicamente implica que la teoría de modelos es aplicable en el caso objeto de estudio, pero esto no quiere decir que el resultado de igualar los grupos adimensionales entre modelo y prototipo dé lugar a un resultado que pueda considerarse satisfactorio, puesto que en la aplicación de la teoría de modelos aparecen muchos problemas asociados. Un ejemplo de ello se define en el caso siguiente.

Se desean extrapolar resultados entre un coche prototipo y su modelo a escala 1:10. Para ello, se dispone de un túnel de viento donde se situará el modelo. Inicialmente, se realiza una única prueba, cuando la velocidad del aire en el túnel de viento es de 80 m/s; se mide, mediante una balanza, la fuerza de resistencia que el fluido crea sobre el modelo, que es de 250 N. Si las condiciones termodinámicas, presión y temperatura del aire, para el modelo y el prototipo se pueden considerar las mismas, determínese la velocidad correspondiente para el prototipo y la resistencia que el prototipo ofrecerá al aire. Se acepta la existencia de semejanza geométrica entre modelo y prototipo.

Antes de empezar a resolver este ejercicio, cabe señalar que, en muchos casos, existen problemas para que se cumpla la semejanza geométrica, puesto que, por ejemplo, el grupo adimensional que relaciona la rugosidad relativa entre el modelo y el prototipo no siempre es físicamente posible que se cumpla.

La fuerza de arrastre está definida en el coeficiente de arrastre C_D; a priori, se podría dar este grupo adimensional en función de todo el resto de grupos adimensionales, $C_D = f(F; Re; M; W; S; P_r; P_e....)$. No obstante, se observa que los números de Prandtl i el Pecklet, no van a ser relevantes, dado que no se pretende estudiar la transferencia de calor entre el fluido y el coche. El número de Strouhal es, asimismo, irrelevante, puesto que el flujo a estudiar es en régimen permanente. El número de Froude y el número de Weber son irrelevantes, puesto que no existe superficie libre ni efectos de tensión superficial. El número de Mach podría llegar a ser relevante; para analizar esta posibilidad en el presente caso, se determinará el valor de dicho número.

$$M = \sqrt{\frac{V^2}{\frac{\beta}{\rho}}} = \sqrt{\frac{V^2}{C^2}} = \frac{V}{C} = \frac{80\,{}^{m}\!/_{s}}{\sqrt{\gamma RT}} = \frac{80}{\sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 293}} = 0,233$$

Véase que se ha considerado que la temperatura del aire es de 20ºC.

Puesto que se ha obtenido que M<0,3, el fluido se puede tratar como incompresible y, consecuentemente, el número de Mach no es relevante para este estudio.

Así pues, parece que los dos números adimensionales relevantes son $C_D = f(Re)$.

$$Re = \frac{\rho V \ell}{\mu}; \qquad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 \ell^2};$$

Igualando estos dos números adimensionales para el modelo y el prototipo, se obtiene:

$\left.\frac{\rho V \ell}{\mu}\right|_{modelo} = \left.\frac{\rho V \ell}{\mu}\right|_{prototipo}$ Como el fluido de trabajo y las condiciones termodinámicas son las mismas, se tiene que $\rho_m = \rho_p; \quad \mu_m = \mu_p$. Despejando la velocidad del prototipo, se llega a:

$$V_p = \frac{V_m \cdot \ell_m}{\ell_p} = 80 \cdot \frac{1}{10} = 8 \ {}^{m}\!/_{s}$$

Es decir, si el ensayo para el modelo se realiza a 80 m/s, en realidad se esta simulando el comportamiento del prototipo viajando a 8 m/s. Aquí se observa que la escala del modelo es muy relevante a la hora de aplicar teoría de modelos. Ello explica el porqué en general, se tiende a trabajar con modelos a escalas cercanas a 1:1.

Igualando ahora el coeficiente de arrastre entre modelo y prototipo, se obtiene:

$$\left.\frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 \ell^2}\right|_m = \left.\frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 \ell^2}\right|_p \qquad Dp = \frac{D_m \cdot V_p^2 \cdot \ell_p^2}{V_m^2 \cdot \ell_m^2} = \frac{250 \cdot 8^2 \cdot 10^2}{80^2 \cdot 1^2} = 250 \text{ N}$$

con lo que se puede decir que, con este ensayo, se ha simulado el comportamiento del vehículo real moviéndose a una velocidad de 8 m/s, siendo la resistencia que el prototipo ofrece al aire, yendo a esta velocidad, de 250 N.

Ni que decir se tiene que la velocidad del modelo debería ser enorme, con el fin de estimar las fuerzas de arrastre en un vehículo real moviéndose a una velocidad real. Se observa, en consecuencia, que existe cierta problemática inherente a la extrapolación de resultados. Problemática que, tal y como se ha mencionado previamente, se minimiza al trabajar a escalas cercanas a 1:1.

Problema 74

Enunciado

Aplique el teorema de π para determinar las pérdidas de energía en una tubería. Realice nuevamente el problema utilizando el método matricial.

Conceptos generales del teorema de π o Buckingham.

Si se sabe que un proceso físico está gobernado por una relación dimensionalmente homogénea que comprenda a "n" parámetros dimensionales, tales como:

$$X_1 = f\left(X_2, X_3, X_4, ...\right);$$

donde las X son variables dimensionales, existe una relación equivalente que contiene un número menor (n-k) de parámetros adimensionales tales como:

$$\pi_1 = f\left(\pi_2, \pi_3, ..., \pi_{(n-k)}\right);$$

π: son grupos adimensionales que se constituyen a partir de las X (variables originales)

K: es generalmente el número de dimensionales fundamentales retenido en las X (variables originales)

K nunca puede ser mayor que dicho número de variables originales.

Resolución

1. Las variables que influyen en el fenómeno de pérdida de energía en un conducto se establecen:

$$Y = g \cdot h = f\left(L, D, V, \rho, \mu, \varepsilon\right);$$

Y = g ·h : pérdida de energía mecánica entre dos puntos de un conducto.

Utilizando el sistema $[M, L, T]$, las dimensiones se expresan:

$$\left[\frac{L^2}{T^2}\right] = f\left([L], [L], \left[\frac{L}{T}\right], \left[\frac{M}{L^3}\right], \left[\frac{M}{L \cdot T}\right], [L]\right);$$

2. Determinación del número de parámetros adimensionales que se requieren construir.

El número de dimensiones fundamentales es 3 (K=3), → M; L; T.

Si se eligen D, ρ, V, la masa sólo aparecerá en ρ y el tiempo sólo en V, de tal manera que ninguna combinación de D, ρ, V, puede ser adimensional, con lo cual K=3;

El número de parámetros adimensionales que se requiere construir es:

$$n - k = 7 - 3 = 4$$

3. Si se eligen como variables fundamentales D, ρ, V, los grupos adimensionales serán:

1.ª grupo adimensional: $\pi_1 = y \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[\frac{L^2}{T^2}\right] \cdot \left[\frac{M}{L^3}\right]^a \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^b \cdot [L]^c$

como: $\pi_1 = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$

$$\left.\begin{array}{ll} M \rightarrow & a = 0 \\ L \rightarrow & 2 - 3a + b + c = 0 \\ T \rightarrow & -2 - b = 0 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{array}\right.$$

Se obtiene: $\pi_1 = \frac{L^2}{T^2} \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^{-2} = \frac{Y}{V^2}$

2.º grupo adimensional: $\pi_2 = L \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[\frac{M}{L^3}\right]^a \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^b \cdot [L]^c$

$$\left.\begin{array}{ll} M \rightarrow & a = 0 \\ L \rightarrow & -b = 0 \\ T \rightarrow & 1 - 3a + b + c = 0 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array}\right.$$

Se obtiene: $\pi_2 = \frac{L}{D}$

3.ª grupo adimensional: $\pi_3 = \mu \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[\frac{M}{L \cdot T}\right] \cdot \left[\frac{M}{L^3}\right]^a \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^b \cdot [L]^c$

$$\left.\begin{array}{ll} M \rightarrow & 1 + a = 0 \\ L \rightarrow & -1 - b = 0 \\ T \rightarrow & -1 - 3a + b + c = 0 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array}\right.$$

Se obtiene: $\pi_3 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}$

4.º grupo adimensional: $\pi_4 = \varepsilon \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[\frac{M}{L^3}\right]^a \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^b \cdot [L]^c$

$$\left.\begin{array}{ll} M \rightarrow & a = 0 \\ L \rightarrow & -b = 0 \\ T \rightarrow & 1 - 3a + b + c = 0 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array}\right.$$

Se obtiene: $\pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}$

con lo cual se obtiene: $\pi_1 = \pi_2; \pi_3; \pi_4$

$$\frac{Y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}; \frac{\varepsilon}{D}\right) = f\left(\frac{L}{D}; \frac{1}{Re}; \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

4. La ecuación buscada se puede obtener, como ejemplo:

- multiplicando por una constante cualquiera de los grupos adimensionales
- elevando a cualquier potencia cualquiera de los grupos.

con lo cual la relación anterior se puede dar:

$$\frac{2Y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; Re; \frac{\varepsilon}{D}\right).$$

dado que desde el punto de vista adimensional: $\frac{1}{Re} = Re$, y también $\frac{Y}{V^2} \equiv \frac{2 \cdot Y}{V^2}$

El número 2 se obtiene de establecer una contrastación experimental.

puesto que la pérdida de energía es directamente proporcional a la longitud del conducto, se establece:

$$Y = \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2} \cdot f\left(Re \cdot \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Siendo ésta la ecuación que indica la pérdida de energía a lo largo de un conducto cerrado. El término $f\left(Re; \frac{\varepsilon}{D}\right)$ ha de ser determinado mediante el diagrama de Moody.

Resolución del problema utilizando el sistema matricial

Las variables que intervienen en el fenómeno son las mismas que en el caso anterior:

$$Y = f(L, D, V, \rho, \mu, \varepsilon)$$

Sistema dimensional $[M, L, T]$

Las unidades correspondientes a cada parámetro eran:

$$Y=\left[\frac{L^2}{T^2}\right];\qquad D=[L];\qquad \rho=\left[\frac{M}{L^3}\right];\qquad \varepsilon=[L];$$

$$L=[L];\qquad V=\left[\frac{L}{T}\right];\qquad \mu=\left[\frac{M}{T\cdot L}\right];$$

Se eligen como variables fundamentales D, ρ, V, obteniéndose la tabla siguiente:

		D	ρ	V	Y	ε	L	μ
(a)	M	0	1	0	0	0	0	1
(b)	L	1	-3	1	2	1	1	-1
(C)	T	0	0	-1	-2	0	0	-1
(3a+b+c)	D	1	0	0	0	1	1	1
(a)	ρ	0	1	0	0	0	0	1
(-c)	V	0	0	1	2	0	0	1

$$\pi_1=\frac{Y}{V^2}\quad \pi_4=\frac{\varepsilon}{D}\quad \pi_2=\frac{L}{D}\quad \pi_3=\frac{\mu}{\rho\cdot V\cdot D}$$

Véase que los grupos adimensionales son los mismos que en el caso precedente. Siendo el proceso posterior idéntico.

Problema 75

Enunciado

Determine los grupos adimensionales que caracterizan la caída de presión de un fluido compresible que fluye en el interior de un conducto.

Resolución

1. Las variables que influyen en este fenómeno son:

Δp = diferencia de presión entre dos puntos del conducto $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

l = longitud del conducto $[m]$

D = diámetro del conducto $[m]$

ε = rugosidad del tubo $[m]$

ρ = densidad del fluido $\left[\frac{Kg}{m^3}\right]$

μ = viscosidad absoluta del fluido $\left[\frac{Kg}{m\,s}\right]$

g = aceleración de la gravedad $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

v = velocidad del fluido $\left[\frac{m}{s}\right]$

β = módulo de elasticidad del fluido $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

Eligiendo como magnitudes fundamentales MLT y como variables fundamentales D, V, ρ, aparecerán 9 - 3 = 6 grupos adimensionales. Estos grupos son:

		D	ρ	v	Δp	l	ε	μ	g	β
a	M	0	1	0	1	0	0	1	0	1
b	L	1	-3	1	-1	1	1	-1	1	-1
c	T	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	-2
3a+b+c	D	1	0	0	0	1	1	1	-1	0
a	ρ	0	1	0	1	0	0	1	0	1
(-c)	v	0	0	1	2	0	0	1	2	2
					$\frac{\Delta p}{\rho V^2}$	$\frac{l}{D}$	$\frac{\varepsilon}{D}$	$\frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}$	$\frac{g D}{V^2}$	$\frac{\beta}{\rho V^2}$

El nombre de estos grupos adimensionales es:

$\frac{\Delta p}{\rho V^2}$ número de Euler

$\frac{l}{D}$ longitud relativa

$\frac{\varepsilon}{D}$ rugosidad relativa

$\frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}$ inversa del número de Reynolds

$\frac{g D}{V^2}$ inversa del número de Froude

La caída de presión entre dos puntos de un conducto vendrá dada por:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f\left(\frac{\mu}{D\rho V}; \frac{\varepsilon}{D}; \frac{l}{D}; \frac{\beta}{\rho V^2}; \frac{g D}{V^2}\right)$$

Problema 76

Enunciado

Determine los grupos adimensionales que caracterizan el comportamiento de una turbo máquina que trabaja con un fluido compresible.

Resolución

1. Las variables características del fenómeno son:

Variables del fluido:

A la entrada de la máquina: P_{01} = presión de estancamiento $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

T_{01} = temperatura de estancamiento $[K]$

A la salida de la máquina: P_{02} = presión de estancamiento $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

T_{02} = temperatura de estancamiento $[K]$

μ = viscosidad absoluta del fluido $\left[\frac{Kg}{m\,s}\right]$

R = constante del gas $\left[\frac{J}{Kg\,K}\right]$

$K = \frac{Cp}{Cv}$ relación de calores específicos

Variables de la máquina:

D = diámetro característico $[m]$

Ω = velocidad angular $\left[\frac{rad}{s}\right]$

$\dot{m}$ = caudal másico circulante $\left[\frac{Kg}{s}\right]$

η = rendimiento del compresor

Como magnitudes fundamentales, se elegirán M L T θ.

Se eligen cuatro variables fundamentales que caracterizan las magnitudes fundamentales elegidas. Dichas variables son: $\dot{m}$, D, ω, T_{01}.

Existirán siete grupos adimensionales que caracterizan el fenómeno. Estos son:

		$\dot{m}$	D	ω	T_{01}	P_{01}	μ	K	R	P_{02}	ΔT_0	η
a	M	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
b	L	0	1	0	0	-1	-1	0	2	-1	0	0
c	T	-1	0	-1	0	-2	-1	0	-2	-2	0	0
d	θ	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0
a	$\dot{m}$	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
b	D	0	1	0	0	-1	-1	0	2	-1	0	0
(-1)(c+a)	ω	0	0	1	0	1	0	0	2	1	0	0
d	T_{01}	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0

$$\pi_1 = \frac{p_{01}\, D}{\dot{m}\, \omega}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu\, D}{\dot{m}} = \frac{\mu\, D}{Q\, \rho} = \frac{\nu\, D}{s\, \rho} = \frac{\nu\, 4}{\pi D V} \equiv \frac{1}{Re} \quad \text{inversa del número de Reynolds}$$

$\pi_3 = K$ índice de politropía.

$$\pi_4 = \frac{R\, T_{01}}{D^2\, \omega^2}$$

$$\pi_5 = \frac{P_{02}\, D}{\dot{m}\, \omega}$$

$$\pi_6 = \frac{\Delta T}{T_{01}} \quad \text{relación de temperaturas}$$

$\pi_7 = \eta$ rendimiento de la máquina

Una combinación de números adimensionales es asimismo un número adimensional, con lo cual se tiene:

$$\frac{\Pi_1}{\sqrt{\Pi_4}} = \frac{\dfrac{P_{01}\, D}{\dot{m}\, \omega}}{\sqrt{\dfrac{R\, T_{01}}{D^2\, \omega^2}}} = \frac{P_{01}\, D^2}{\dot{m}\, \sqrt{T_{01}\, R}}; \qquad \frac{\sqrt{\Pi_4}}{\Pi_1} = \frac{\dot{m}\, \sqrt{T_{01}\, R}}{P_{01}\, D^2}; \qquad \frac{\sqrt{\Pi_4}}{\Pi_1} = \frac{\sqrt{T_{01}\, R}}{\dfrac{P_{01}\, D^2}{\dot{m}}}.$$

Este nuevo número adimensional es función del número de Mach a la entrada de la máquina.

Por otro lado:

$$\frac{\Pi_5}{\Pi_1} = \frac{\frac{P_{02}\,D}{\dot{m}\,\omega}}{\frac{P_{01}\,D}{\dot{m}\,\omega}} = \frac{P_{02}}{P_{01}};$$ relación de presiones, salida-entrada de la máquina.

$$\frac{1}{\sqrt{\Pi_4}} = \sqrt{\frac{D^2\,\omega^2}{R\,T_{01}}} = \frac{\omega\,D}{\sqrt{R\,T_{01}}};$$

este número es proporcional a la relación entre la velocidad del álabe y la velocidad del sonido. Vendría a ser el número de Mach del álabe.

Del colectivo de números adimensionales hallados, se eligen tres como básicos, los restantes son función de los elegidos.

Por otro lado, dichos grupos básicos han de definir el comportamiento del fluido. Por tanto incluirán P_{02}; η; ΔT_0. Así, se obtiene:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}; \eta_c; \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = f\left[\frac{\omega\,D}{\sqrt{R\,T_{01}}}; \frac{\dot{m}\sqrt{R\,T_{01}}}{P_{01}\,D^2}; \frac{\dot{m}}{\mu\,D}; K\right]$$

Estos números adimensionales relacionan características de ventiladores que trabajen con: presiones diferentes, temperaturas diferentes, medidas diferentes, gases diferentes, etc.

Problema 77

Enunciado

Halle los grupos adimensionales que caracterizan el flujo de un fluido incompresible a través de un vertedero triangular. Determine la altura h que tendría el líquido diferente al original y para un modelo a escala. Determine asimismo la relación entre el caudal circulante y la viscosidad del fluido entre modelo y prototipo.

Resolución

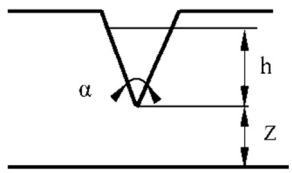
1. Las variables que intervienen en el fenómeno son:

Variables geométricas:

α = ángulo del vertedero
h = altura del nivel del líquido respecto al vértice del vertedero [m]
Z = altura desde la base al vértice del vertedero [m]

Variables cinemáticas: Q = caudal volumétrico que atraviesa el vertedero. $\left[\frac{m^3}{s}\right]$

Fig. 77.1



Variables dinámicas:

ρ = densidad del fluido $\left[\frac{Kg}{m^3}\right]$

μ = viscosidad del fluido $\left[\frac{Kg}{m\,s}\right]$

g = aceleración de la gravedad $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

P = presión $\left[\frac{N}{m^2}\right]=\left[\frac{Kg}{m\,s^2}\right]$

σ = tensión superficial $\left[\frac{N}{m}\right]=\left[\frac{Kg}{s^2}\right]$

Las magnitudes fundamentales elegidas son M, L, T.

Se eligen las variables fundamentales como: h, Q, ρ, con lo cual han de aparecer cinco grupos adimensionales, estos son:

		h	Q	ρ	α	Z	μ	g	P	σ
a	M	0	0	1	0	0	1	0	1	1
b	L	1	3	-3	0	1	-1	1	-1	0
c	T	0	-1	0	0	0	-1	-2	-2	-2
b+3c+3a	h	1	0	0	0	1	-1	-5	-4	-3
-c	Q	0	1	0	0	0	1	2	2	2
a	ρ	0	0	1	0	0	1	0	1	1
					α	$\frac{z}{h}$	$\frac{\mu h}{Q\rho}$	$\frac{g h^5}{Q^2}$	$\frac{p h^4}{Q^2 \rho}$	$\frac{\sigma h^3}{Q^2 \rho}$

Los números adimensionales obtenidos son:

α ángulo del vertedero

$\frac{z}{h}$ longitud relativa

$\frac{\mu\, h}{Q\, \rho} = \frac{1}{Re}$ inversa del número de Reynolds

$\frac{g\, h^5}{Q^2} = \frac{1}{F_r^2}$ inversa del número de Froude al cuadrado

$\frac{p\, h^4}{Q^2\, \rho}$ número de Euler.

(Puesto que se trata de un flujo con superficie libre, el número de Euler se puede desestimar.)

$\frac{\sigma\, h^3}{Q^2\, \rho}$ inversa del número de Weber

(Este número sería relevante si la lámina de fluido fuese delgada.)

2. Suponiendo que la lámina de fluido fuese suficientemente gruesa, los números adimensionales relevantes serían:

$$\frac{\mu\, h}{Q\, \rho} = \frac{\mu_1\, h_1}{Q_1\, \rho_1}; \qquad \frac{\nu\, h}{Q} = \frac{\nu_1\, h_1}{Q_1}; \qquad \frac{\nu}{\nu_1} = \frac{Q\, h_1}{Q_1\, h}$$

$$\frac{g\, h^5}{Q^2} = \frac{g\, h^5}{Q_1^2}; \qquad \frac{Q^2}{Q_1^2} = \frac{h^5}{h_1^5};$$

de donde

$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{h_1}{h} \frac{h^{\frac{5}{2}}}{h_1^{\frac{5}{2}}} = \frac{h^{\frac{3}{2}}}{h_1^{\frac{3}{2}}};$$

siendo ésta la relación entre las viscosidades cinemáticas y las alturas de la lámina de fluido.

3. La relación entre el caudal circulante y la viscosidad del fluido para dos vertederos a escala es:

$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{h_1}{h} \frac{Q}{Q_1}; \qquad \frac{h}{h_1} = \frac{Q^{\frac{2}{5}}}{Q_1^{\frac{2}{5}}};$$

así:
$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{Q_1^{\frac{2}{5}}}{Q^{\frac{2}{5}}} \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q^{\frac{3}{5}}}{Q_1^{\frac{3}{5}}};$$

Problema 78

Enunciado

Se quiere realizar un ensayo con un barco a escala 1/30 con el fin de calcular la potencia necesaria en los motores del prototipo. Se conoce que el prototipo tiene una longitud de 30 m y que ha de desplazarse a una velocidad de 30 km/h. Si las variables que intervienen en el fenómeno son:

- Longitud del barco, L.
- Velocidad del barco, V.
- Fuerza de arrastre del barco, F.
- Densidad del fluido, ρ.
- Viscosidad absoluta del fluido, μ.
- Gravedad, g.

Determine:

1. Los grupos adimensionales que caracterizan dicho fenómeno.

2. La potencia necesaria en los motores del prototipo, suponiendo que se conoce para el modelo la fuerza de arrastre medida en la balanza.

Considere para el agua $\nu = 1{,}02 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$.

Resolución

1 Utilizando como magnitudes fundamentales M, L, T, se tiene que las variables que intervienen en el fenómeno se pueden representar:

	F	V	L	ρ	μ	g
M	1	0	0	1	1	0
L	1	1	1	-3	-1	1
T	-2	-1	0	0	-1	-2

Se eligen como variables fundamentales, las cuales contienen todas las magnitudes fundamentales, como: L, ρ, V. El número de grupos adimensionales que caracterizan el fenómeno es de tres, los cuales se obtienen:

	L	ρ	V	F	μ	g
M	0	1	0	1	1	0
L	1	-3	1	1	-1	1
T	0	0	-1	-2	-1	-2
L	1	0	0	2	1	-1
ρ	0	1	0	1	1	0
v	0	0	1	2	1	2
				Π_1	Π_2	Π_3

con lo que los grupos adimensionales tienen la forma:

$\Pi_1 = \dfrac{F}{L^2 \cdot \rho \cdot V^2}$ ⟶ Este número es el coeficiente de arrastre C_D.

$\Pi_2 = \dfrac{\mu}{L \cdot \rho \cdot V} = \dfrac{\nu}{V \cdot L}$ ⟶ Es la inversa del número de Reynolds $\dfrac{1}{Re}$;

$\Pi_3 = \dfrac{g \cdot L}{V^2}$ ⟶ Es la inversa del número de Froude al cuadrado. $\dfrac{1}{F_r^2}$.

Los grupos adimensionales obtenidos permiten establecer relaciones entre modelo y prototipo.

Puesto que se ha de cumplir similaridad geométrica en lo que respecta a la porción sumergida del barco, es necesario que se cumpla el número de Froude:

$$\left.\frac{v}{\sqrt{g \cdot L}}\right|_m = \left.\frac{v}{\sqrt{g \cdot L}}\right|_p$$

de donde:

$$v_m = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}\, v_p \,; \qquad v_m = \sqrt{\frac{1}{30}} \cdot \frac{30}{3,6} = 1,521 \ \frac{m}{s}$$

Esta es la velocidad a la que ha de desplazarse el modelo durante el ensayo.

Asumiendo que el fluido de trabajo para el modelo y el prototipo es el mismo, los números de Reynolds para el modelo y el prototipo valen:

$$R_{e\,m} = \left.\frac{v \cdot L}{\nu}\right|_m = \frac{1,521}{1,02 \cdot 10^{-6}} = 1.491.176$$

$$R_{e\,P} = \left.\frac{v \cdot L}{\nu}\right|_P = \frac{\frac{30}{3,6} \cdot 30}{1,02 \cdot 10^{-6}} = 245.098.039$$

Se observa que el valor del número de Reynolds para el modelo y el prototipo son, en ambos casos, muy elevados, es decir, en ambos casos la zona de trabajo es la característica para flujo turbulento desarrollado. Y aunque es cierto que ambos valores del número de Reynolds no son iguales, en ambos casos las fuerzas de inercia son las únicas relevantes, con lo que el fenómeno a estudiar es similar en ambos casos. Se entiende que la no igualdad del número de Reynolds no afecta al transporte de información entre modelo y prototipo y, por tanto, el número de Reynolds no aporta información adicional.

De la igualación de los coeficientes de arrastre se tiene:

$$\left.\frac{F}{L^2 \cdot \rho \cdot v^2}\right|_m = \left.\frac{F}{L^2 \cdot \rho \cdot v^2}\right|_p$$

$$\frac{F_P}{F_m} = \frac{L^2{}_p}{L^2{}_m} \cdot \frac{v_p^2}{v_m^2}$$

Del número de Froude, se ha obtenido la relación:

$$\frac{v_p}{v_m} = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}};$$

con lo que:

$$\frac{F_P}{F_m} = \frac{L_p^2}{L_m^2} \cdot \frac{L_p}{L_m} = \frac{L_p^3}{L_m^3};$$

La potencia a la que se quiere para desplazar el prototipo será:

$$Na_p = v_p\, F_p = v_m \left(\frac{L_p}{L_m}\right)^{\frac{1}{2}} F_m \left(\frac{L_p}{L_M}\right)^3 = v_m \cdot F_m \left(\frac{L_p}{L_m}\right)^{\frac{7}{2}} = 1,521\, F_m\, (30)^{\frac{7}{2}} = 224933,2\, F_m \cdot$$

Cuando en esta ecuación se sustituye la fuerza medida sobre el modelo, se obtiene la potencia necesaria en los motores del prototipo para que la velocidad del mismo sea de 30 km/h.

Flujo interno

10.1 Introducción

Uno de los temas más directamente relacionados con la ingeniería industrial es el cálculo de sistemas de tuberías, que aquí se denominará *flujo interno*. El flujo se considerará incompresible y en régimen permanente, de modo que bajo estos considerandos la ecuación de la energía queda reducida a la ecuación de Bernoulli. Los conceptos de pérdidas de energía lineales y singulares, de longitud equivalente, de diámetro hidráulico y de factor de fricción, entre otros, serán definidos en este capítulo.

10.2 Tipos de flujo

Se distinguen los siguientes tipos de flujo.

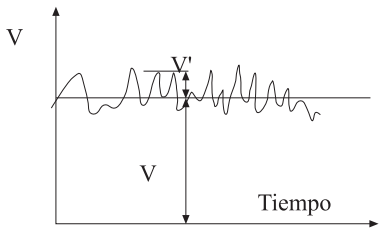
Flujo laminar: las capas de fluido se deslizan una sobre otra. el flujo es de naturaleza ordenada. Las fuerzas viscosas asociadas al fluido son de un orden de magnitud mayor que las fuerzas de inercia; el número de Reynolds tendrá valores bajos, en general, para flujo interno; el límite para régimen laminar se acepta como $Re < 2500$.

La definición del número de Reynolds para conductos cerrados de sección circular es $Re = \frac{V D}{\nu}$.

Flujo turbulento: el flujo es inestable; se desarrollan fluctuaciones irregulares del flujo; existe un enorme intercambio de cantidad de movimiento entre partículas de fluido. Aunque es cierto que, en este tipo de flujo, las fuerzas de inercia son predominantes, las fuerzas viscosas siguen jugando un cierto papel. Los valores del número de Reynolds para los cuales este tipo de flujo aparece, se acepta que son, en flujo interno, de

$4500<Re<10^5$. Las propiedades del fluido han de ser definidas por un valor medio más una fluctuación con respecto dicho valor $V = \overline{V} + V'$. En este capítulo, no obstante, se trabajará con valores medios de la velocidad.

Fig T 10.1
Fluctuación de velocidad para flujo turbulento



***Flujo turbulento desarrollado*:** Este tipo de flujo aparece para valores de $R_e > 10^5 \div 10^6$. Su característica es que las fuerzas de inercia son muchísimo mayores que las fuerzas viscosas; tanto es así que las fuerzas viscosas no juegan ningún papel. La teoría de flujo potencial tiene muchas similitudes con el flujo en este estado.

Para valores del número de Reynolds comprendidos entre 2500 < Re < 4500, las fuerzas de inercia y viscosas son de un mismo orden de magnitud. En dicha zona, es imposible determinar con precisión características asociadas al flujo como esfuerzos cortantes, debido al carácter inestable del propio fluido. No existe repetibilidad en la realización de mediciones.

Es interesante recordar que los límites definidos no son precisos y que, en experimentos de laboratorio, se ha podido obtener flujo laminar en conductos para valores de Reynolds de 40 000. Se ha comprobado, no obstante, que, en conductos comerciales, para valores de Re < 2500 el flujo es necesariamente laminar

En este capítulo, se aceptará que el fluido se puede estudiar como incompresible. Se trabajará, en todo momento, con velocidades medias, y el flujo se considerará completamente desarrollado.

10.3 Establecimiento de flujo en un conducto

El efecto de la capa límite en el interior de conductos provoca que, a lo largo del tramo inicial en la entrada del conducto, la distribución radial de velocidades sea diferente, hasta llegar a un punto donde el flujo está completamente establecido. Un flujo está completamente establecido cuando el perfil de velocidades es el mismo en todas las secciones transversales. Al inicio del conducto, la capa límite es laminar, y evoluciona a lo largo del conducto hasta que toda la sección del conducto forma parte de la capa límite. En este punto, aparece la condición de flujo totalmente establecido.

De hecho, es necesario tener en cuenta que, cuando se pretende instalar instrumentos para la medición de algún parámetro asociado al flujo, es imprescindible situar dichos instrumentos en una zona del conducto donde el flujo esté completamente establecido.

Sea L la distancia desde la entrada del conducto hasta el punto donde se tiene un flujo completamente establecido.

Para régimen turbulento, la longitud de establecimiento de flujo viene dada por $L = 4,4\,Re_D^{\frac{1}{6}} \cdot D$. Si, por otro lado, el régimen es laminar, la longitud de establecimiento de flujo vendrá dada por $L = 0,06\,Re \cdot D$.

La longitud de desarrollo más larga se obtiene, en régimen laminar, para Re ≈ 2300: $\left(\frac{L}{D}\right)_{máx} \approx 140$

En régimen turbulento, para valores de Reynolds alrededor de 10^4; 10^5, la longitud de desarrollo es de:

$$\left(\frac{L}{D}\right) \approx 25$$

Cabe destacar que, las diversas singularidades que se puedan encontrar en cualquier circuito, originan desviaciones de la distribución de velocidades con respecto a la distribución para flujo completamente establecido; así, después de una singularidad, es necesario dejar una longitud equivalente a la longitud de desarrollo, con el fin de que el flujo vuelva a homogeneizarse. Esto es especialmente útil cuando lo que se quiere es realizar una medición de alguna propiedad del fluido después de una singularidad.

10.4 Primera ley de la termodinámica aplicada al flujo en tuberías

Sea el conducto de la figura por el que fluye un caudal de fluido conocido.

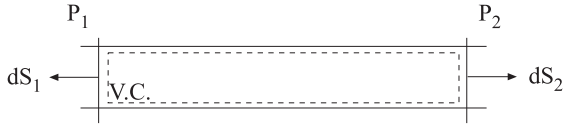


Fig. T 10.2
Volumen de control para un conducto

La ecuación de la energía para régimen permanente aplicada al volumen de control (conducto) será:

$$\delta\dot{Q} - \left(\delta\dot{W}_{eje} + \delta\dot{W}_{\tau}\right) = \delta\dot{m}\left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} + u_2 + gz_2\right) - \delta\dot{m}\left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} + u_1 + gz_1\right)$$

$$q - \left(w_{eje} + w_{\tau}\right) = (u_2 - u_1) + g(z_2 - z_1) + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}$$

ecuación valida tanto para fluido compresible como incomprensible.

El término $\frac{P_2}{\rho_2}-\frac{P_1}{\rho_1}$ representa el trabajo del fluido realizado sobre la partícula en el viaje que esta realiza de 1 a 2.

Los términos $(u_2-u_1)+g(z_2-z_1)+\frac{V_2^2}{2}-\frac{V_1^2}{2}$ se definen como la ganancia neta de la energía intrínseca de la partícula.

El término $q-\left(w_{eje}+w_\tau\right)$ representa la energía neta transferida a la partícula durante su viaje de 1 a 2.

Recordando que

$$\frac{P_2}{\rho_2}-\frac{P_1}{\rho_1}=\int_1^2 d\left(\frac{P}{\rho}\right)=\int_1^2\left(\frac{1}{\rho}dP+P\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)=\int_1^2\frac{1}{\rho}dP+\int_1^2 P\,d\upsilon$$

la ecuación de la energía se puede dar como:

$$q-\left(w_{eje}+w_\tau\right)=(u_2-u_1)+g(z_2-z_1)+\frac{V_2^2}{2}-\frac{V_1^2}{2}+\int_1^2\frac{1}{\rho}dP+\int_1^2 P\,d\upsilon$$

o bien:

$$-\left[(u_2-u_1)+\int_1^2 P\,d\upsilon-q\right]-\left(w_{eje}+w_\tau\right)=g(z_2-z_1)+\frac{V_2^2}{2}-\frac{V_1^2}{2}+\int_1^2\frac{1}{\rho}dP$$

El término $\left[(u_2-u_1)+\int_1^2 P\,d\upsilon-q\right]=\Delta y$ representa la pérdida de potencial al realizar un trabajo útil. Su valor puede ser positivo o cero para un proceso ideal. La acción viscosa del fluido queda representada en este término.

Obsérvese que el término $w_\tau=\frac{1}{\delta\dot{m}}\oint_{S\,\text{volumen de control}}\vec{V}\left(\bar{\bar{\tau}}\,d\vec{S}\right)=0$ tiene un valor nulo, puesto que la velocidad del fluido en las paredes del volumen de control es nula.

De donde se obtiene

$$-w_{eje}-\Delta y-\int_1^2\frac{1}{\rho}dP=g(z_2-z_1)+\frac{V_2^2}{2}-\frac{V_1^2}{2}$$

Esta ecuación se define como la ecuación de la energía aplicada al volumen de control formado por un conducto de sección rectilínea y para fluido compresible.

Si el fluido se puede considerar incompresible, la ecuación tomaría la forma:

$$\frac{V_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho}+gz_1-w_{eje}=\frac{V_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho}+gz_2+\Delta y$$

Es necesario, en este punto, recordar el convenio de signos de termodinámica en lo que hace referencia al trabajo comunicado o cedido por el eje, que no es más que denotar que el trabajo comunicado al sistema se considera como negativo.

Se observa que, en el volumen de control objeto de estudio, no existe trabajo aportado o cedido por el eje $w_{eje} = 0$, con lo que la ecuación más simple y que tiene en cuenta las pérdidas de energía entre los dos puntos del conducto será:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \Delta y$$

Esta ecuación, recibe el nombre de ecuación de Bernoulli generalizada.

10.5 El término de pérdidas

El término Δh o bien Δy se denominan *términos de pérdidas*, los cuales se descomponen en pérdidas lineales y pérdidas singulares. Las primeras caracterizan los conductos mientras que las segundas obedecen a las singularidades que se puedan hallar en una instalación, codos, válvulas, etc. Se cumple que:

$$\Delta y = \Delta h \cdot g; \quad \Delta h = \frac{\Delta y}{g};$$

donde:

$\Delta h \left[\frac{J}{K_g\, g} \right] = [m]$, Energía por unidad de peso

$\Delta y \left[\frac{J}{K_g} \right] = \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$, Energía por unidad de masa

Por otro lado, de la ecuación de la energía dada en forma de energía por unidad de peso, se pueden definir sus diversos términos como:

$\frac{\Delta P}{\rho\, g}$ = altura de presión; $\frac{V^2}{2\, g}$ = altura de energía cinética; Δz = altura de energía potencial

En el capítulo de análisis adimensional, se ha demostrado que la pérdida de energía entre dos puntos situados a lo largo de un conducto viene dada por la ecuación:

$$\Delta Y = \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} f\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

donde aparece una función desconocida $f\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$, que depende del número de Reynolds y la rugosidad relativa y que se conoce como factor de fricción f. De modo que la ecuación de la pérdida de energía tomará la forma:

$$\Delta Y = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2};\ \left[\frac{J}{K_g\, g}\right]=\left[\frac{m^2}{s^2}\right].\ \text{O bien:}\ \Delta h = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2\,g};\ \left[\frac{J}{K_g\, g}\right]=[m]$$

Esta expresión recibe el nombre de ecuación de Darcy-Weisbach, y puede utilizarse tanto para flujo laminar como turbulento; únicamente debe tenerse en cuenta el valor de f en cada caso.

La relación entre el factor de fricción y los esfuerzos cortantes que aparecen en las paredes del conducto se obtiene igualando la fuerza ejercida por el gradiente de presión, con la fuerza debida a los esfuerzos cortantes, de donde:

$$\Delta P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \tau \pi D L$$

Como $\Delta P = \Delta Y \rho$ y $\Delta Y = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2}$,

el valor del factor de fricción f se puede dar en función de los esfuerzos cortantes τ actuantes en las paredes del conducto, y se obtiene:

$$f = \frac{8\tau}{V^2\rho};\quad \tau = f\frac{V^2\rho}{8};$$

Relación esfuerzo cortante-factor de fricción para cualquier tipo de flujo.

El primer investigador que determina experimentalmente el valor del factor de fricción es Nikuradse, utilizando conductos forrados interiormente con arena de granulosidades establecidas, realiza el primer diagrama que establece el valor del factor de fricción en función del número de Reynolds asociado a la velocidad media del fluido y la rugosidad relativa del conducto. De los resultados que obtiene, se observa que, cuando el flujo es laminar, el factor de fricción depende únicamente del número de Reynolds, su relación esta dada por la ecuación:

$$f = \frac{64}{Re}$$

Así, para el estudio del flujo laminar en conductos, la ecuación de Darcy-Weisbach toma la forma:

$$\Delta Y = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} = \frac{64}{Re}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} = \frac{64}{VD}\frac{\mu}{\rho}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} = \frac{64}{D}\frac{\mu}{\rho}\frac{L}{D}\frac{V}{2} = 64\frac{\mu}{\rho}\frac{L}{D^2}\frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}2} = 128\frac{\mu}{\rho}\frac{L}{D^4}\frac{Q}{\pi}$$

expresión que da las pérdidas de energía entre dos puntos de un conducto y para flujo laminar. Véase que la relación entre la pérdida de energía del fluido y el caudal circulante es lineal.

Mientras que el diagrama de Nikuradse se realizó en conductos con rugosidades artificiales, Moody realiza un diagrama similar para conductos comerciales, obteniendo el diagrama que lleva su nombre:

El diagrama de Moody, figura T 10.3, presenta tres zonas completamente diferenciadas: la zona laminar, la zona de transición y la zona para flujo turbulento desarrollado. Véase que, en esta última zona, el factor de fricción depende únicamente de la rugosidad relativa.

Obsérvese que, para 2.500 < Re < 4.000 (que delimita, aproximadamente, una zona que sería de transición entre flujo laminar y turbulento), las curvas están difusas. Para estos valores, el valor de f no se puede precisar, debido a la no existencia de repetibilidad en la realización de mediciones. Las fuerzas de inercia y viscosas tienen un mismo orden de magnitud.

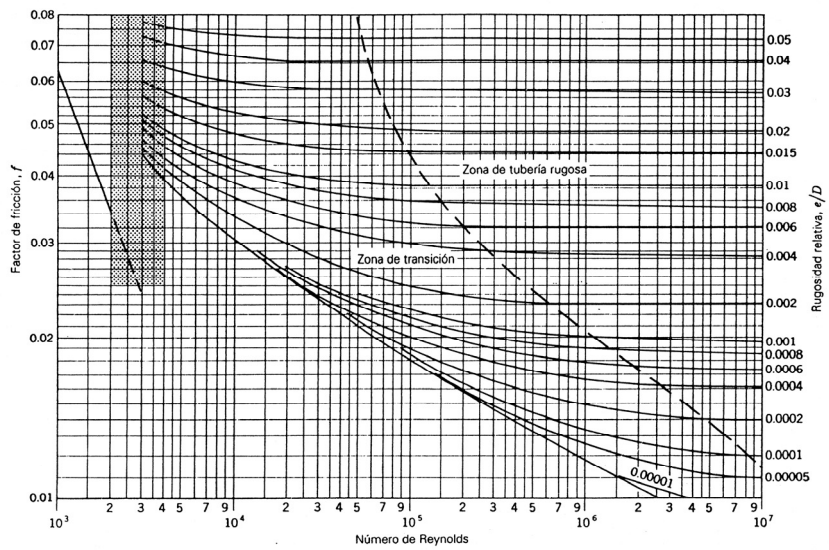


Fig. T 10.3
Diagrama de Moody.
Fuente:
Inving H Shames, McGraw Hill
Edición 1995

El diagrama de Moody puede darse, asimismo, en función de un colectivo de ecuaciones. Para régimen laminar, Moody obtiene la misma ecuación que la que presenta Nikuradse en su diagrama, $f = \frac{64}{Re}$.

El colectivo de ecuaciones que caracterizan al diagrama de Moody son:

Tipo de tubería	Régimen	Expresión	Autor
Lisa y Rugosa	Laminar	$f = \frac{64}{Re}$	Poiseulle
Lisa	Turbulento $Re_D < 100.000$	$f = \frac{0,316}{Re_D^{1/4}}$	Blasius
Lisa	Turbulento $Re_D > 100.000$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log(Re_D \sqrt{f}) - 0,8$	Karman-Prandtl
Rugosa	Turbulento (Transición)	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2\log\left(\frac{\varepsilon}{D} + \frac{9,35}{Re\sqrt{f}}\right)$	Colebrook
Rugosa	Turbulento $Re > 10^5$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) + 1,74$	Karman-Prandtl

La rugosidad absoluta ε depende del material y el proceso de fabricación del conducto, y aunque en menor medida también de su diámetro. Cada fabricante dispone de tablas donde se presenta la rugosidad ε en función del material empleado.

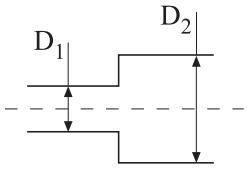
10.6 Pérdidas menores o singulares

En cualquier instalación, existen conexiones como cambios de diámetro, codos, ramificaciones, válvulas etc. En general estos elementos se denominan *singularidades de la instalación*. La pérdida de energía causada por cada una de las singularidades se puede evaluar, de manera genérica, mediante la expresión: $\Delta Y_1 = k\frac{V^2}{2}$, donde la constante k debe ser hallada experimentalmente.

Cabe remarcar que, aunque sea cierto que la constante k deba ser hallada experimentalmente para cada singularidad, existen algunos casos en que dicha constante k se puede determinar mediante una expresión algebraica. Algunos de estos casos son:

Caso de una expansión brusca:

Fig. T 10.4



$\Delta Y = \frac{V_2^2}{2}\left[1-\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2\right]^2$, o bien la constante k de la expresión: $\Delta Y = k\frac{V_2^2}{2}$ será

$$k = \left[1-\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2\right]^2$$

Si la expansión es progresiva, la constante k tiene un valor de:

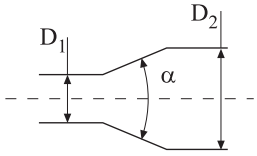


Fig. T 10.5

Para $\alpha \le 45^0$, $k = \dfrac{2,6\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}$;

cuando $45^0 < \alpha \le 180^0$, $k = \dfrac{\left[1-\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}$;

Para el estudio de una contracción progresiva, la constante k se puede dar como:

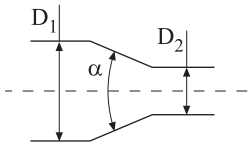


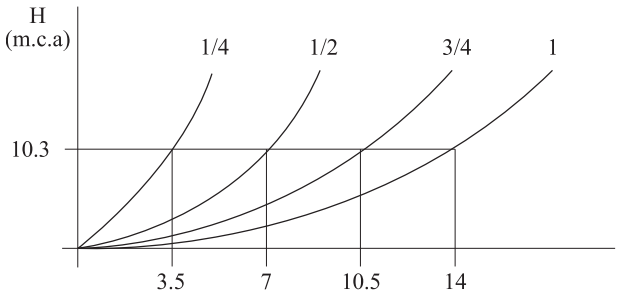
Fig. T 10.6

Para $\alpha \le 45^0$, $k = \dfrac{0,8\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}$;

para $45^0 < \alpha \le 180^0$, $k = \dfrac{0,5\left[1-\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2\right]^2\sqrt{\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}}}{\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}$;

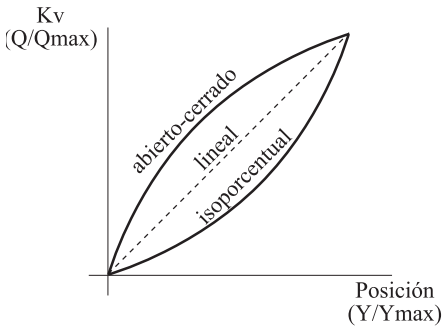
Es necesario puntualizar, no obstante, que aunque las pérdidas en las válvulas se pueden dar mediante esta ecuación, se acostumbran a dar en función del coeficiente K_V, que se define como el caudal medido en (m^3/h) que pasa a través de la válvula cuando el gradiente de presión entre extremos de la misma es de 1 bar, que es equivalente a 10,3 m de columna de agua. La gráfica que se detalla a continuación muestra los diferentes valores que la constante K_V puede tomar, en función del grado de apertura de una válvula.

Fig. T 10.7 Curvas de pérdidas de energía en función del caudal y en función del grado de apertura para una válvula genérica



Se denomina *curva inherente* de una válvula, a la relación entre el grado de apertura de la válvula y el valor de K_V para dicho grado de apertura. Dicha relación puede ser lineal, isoporcentual o bien de tipo abierto-cerrado. La gráfica siguiente, dada en forma adimensional, clarifica estos conceptos.

Fig. T 10.8 Diferentes tipos de curvas inherentes de válvulas



10.7 Casos posibles de problemas en sistemas de tuberías

Existen tres casos posibles de problemas con conductos, en función de los parámetros que se conozcan y de la variable a determinar. Estos posibles casos evalúan la metodología a utilizar para determinar el factor de fricción.

Caso 1. Se conocen todos los datos para determinar el factor de fricción.

Si, por ejemplo, se pide para un circuito dado, como el que muestra la figura siguiente, hallar la presión del fluido en el punto 2, conocidos el caudal circulante, la rugosidad del conducto, el diámetro del conducto, la longitud del conducto, las constantes de las diversas singularidades y las cotas en cada punto, el proceso a seguir será:

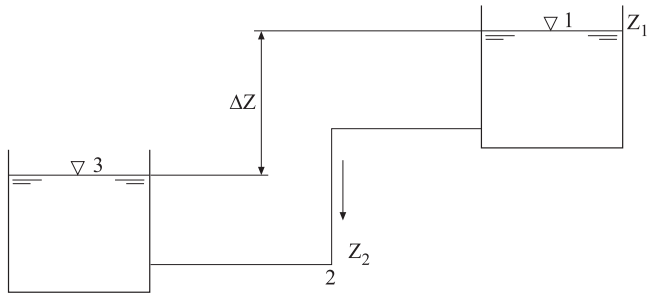


Fig. T 10.9
Esquema típico de una instalación para el caso 1

Se aplicará la ecuación de la energía, (Bernoulli), entre los puntos 1 y 2.

Denominando $E_i = \frac{P_i}{\rho} + \frac{V_i^2}{2} + g\,z_i$, se establece:

$E_1 = E_2 + \Delta Y_{12}$ ecuación que, para el caso objeto de estudio, queda resumida como:

$$z_1 - \frac{V_2^2}{2} - \frac{P_2}{\rho} - z_2 = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} + \sum k_i \frac{V^2}{2}$$

En esta ecuación, los dos términos desconocidos son la presión en 2 y el factor de fricción. El factor de fricción se determinará mediante el diagrama de Moody y entrando con los valores de Re y $\frac{\varepsilon}{D}$, puesto que ambos valores son conocidos.

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{Q}{s}\frac{D}{\nu} \Rightarrow \text{conocido}\ ,\ \frac{\varepsilon}{D} \Rightarrow \text{conocido}\ .$$

En consecuencia, la presión en el punto 2 se obtendrá directamente de la ecuación precedente.

Caso 2. Únicamente se conocen parte de los datos para determinar el factor de fricción.

Ahora se pide hallar el caudal volumétrico que fluye en una instalación si se conocen, el coeficiente de rugosidad ε, las longitudes y los diámetros de los tramos, las cotas en cada punto, las constantes de cada singularidad y la energía disponible para que se produzca el movimiento.

Aplicando la ecuación de la energía entre las superficies libres de los dos depósitos, puntos 1 y 2, (v. figura siguiente), se obtiene:

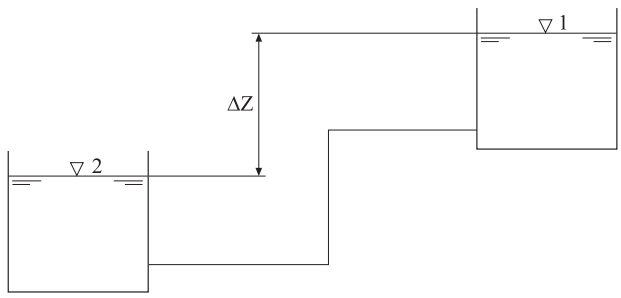


Fig. T 10.10
Esquema típico de una instalación para el caso 2

$$z_1 - z_2 = \Delta Y_{12} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} + \sum k_i \frac{V^2}{2} = f\frac{L}{D^5}\frac{8Q^2}{\pi^2} + \sum k_i \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4}$$

Las incógnitas asociadas a esta ecuación son el caudal y el factor de fricción:

Ahora, el factor de fricción no se puede determinar, puesto que $\frac{\varepsilon}{D} \Rightarrow$ es conocido, $\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} \Rightarrow$ no es conocido. Así, el problema ha de ser resuelto mediante el proceso iterativo siguiente:

Se obtiene el valor inicial del factor de fricción f, entrando en el diagrama de Moody con el valor conocido de $\frac{\varepsilon}{D}$ y suponiendo flujo turbulento desarrollado, Re > 10^5. Sustituyendo el valor inicial de f en la ecuación característica del sistema, se obtiene el caudal circulante, caudal que permitirá determinar un primer valor del número de Reynolds, el cual, conjuntamente con el de la rugosidad relativa, permitirá hallar un segundo factor de fricción f', que se utilizará para hallar un segundo valor del caudal circulante Q'. El proceso seguirá hasta que los valores obtenidos en dos iteraciones consecutivas sean prácticamente los mismos. Este proceso se puede resumir:

$$\frac{\varepsilon}{D} \rightarrow Q \rightarrow \mathrm{Re} \rightarrow f' \rightarrow Q' \rightarrow \mathrm{Re}' \rightarrow f'' \rightarrow Q''$$

Caso 3. No se conoce ningún dato que pueda dar luz sobre el valor del factor de fricción.

En este último caso, se conocen el caudal que ha de circular por el conducto, las longitudes de los diversos tramos, las cotas en todos los puntos y las constantes de las diversas singularidades. Se pide hallar el diámetro del conducto.

Aplicando de nuevo la ecuación de la energía entre las dos superficies libres de los depósitos se obtiene:

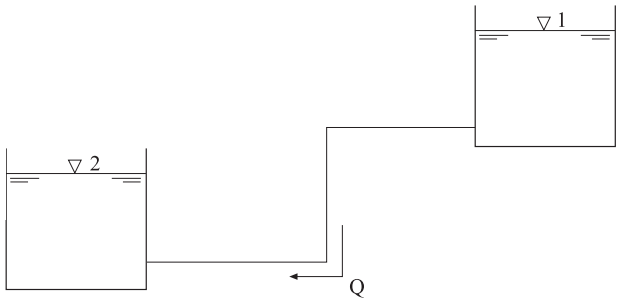


Fig. T 10.11
Esquema típico de una instalación para el caso 3

$z_1 - z_2 = \Delta Y_{12} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} + \sum k_i \frac{V^2}{2} = f\frac{L}{D^5}\frac{8Q^2}{\pi^2} + \sum k_i \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4}$; obsérvese que es la misma ecuación que en el apartado anterior.

En este apartado, no se conocen ni el caudal ni el diámetro; y por otro lado, no es posible estimar a priori el valor del factor de fricción. $\mathrm{Re} = \frac{vD}{\upsilon} \Rightarrow$ desconocido , $\frac{\varepsilon}{D} \Rightarrow$ desconocido .

La manera de proceder será, de nuevo, la utilización de un proceso iterativo, partiendo de un factor de fricción que se estimará en función de la experiencia del diseñador. Los factores de fricción usuales en los sistemas de tuberías se sitúan alrededor de f = 0,02. Una vez definido el factor de fricción inicial, el proceso iterativo seguiría un proceso similar al definido en el apartado anterior, proceso que se detalla en el siguiente esquema:

$$f \rightarrow 0,02 \rightarrow D \rightarrow \mathrm{Re} \rightarrow f' \rightarrow D' \rightarrow \mathrm{Re}' \rightarrow f'' \rightarrow D'' \rightarrow$$
$$\searrow \frac{\varepsilon}{D} \nearrow \qquad \searrow \frac{\varepsilon}{D'} \nearrow$$

El proceso iterativo finalizará cuando el diámetro hallado en la iteración iésima coincida con el obtenido en la iteración anterior.

En sistemas de tuberías, es común utilizar diversos conductos, uno detrás de otro, así como ramificaciones de los mismos. El apartado siguiente caracterizará dichos sistemas.

10.8 Conductos en serie y en paralelo, y conductos ramificados

10.8.1 Características de los sistemas en serie

Sea un colectivo de conductos unidos uno detrás de otro, tal como se muestra en la figura.

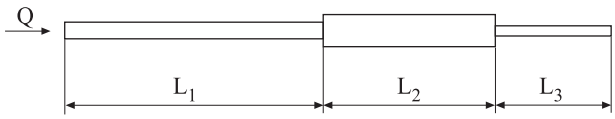


Fig. T 10.12
Sistemas de tuberías en serie

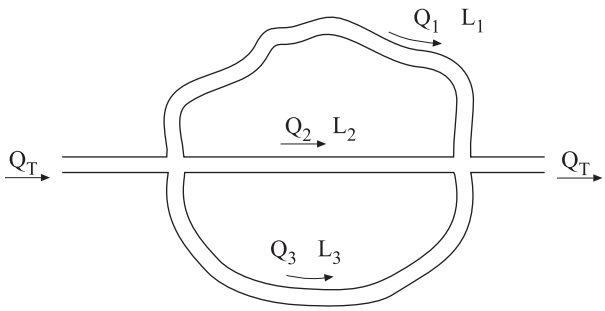
Las condiciones que se cumplen para este tipo de conductos son que el caudal circulante es el mismo para todos los conductos, mientras que la pérdida de energía total es la suma de las pérdidas de energía parciales de cada conducto, es decir: $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_T$; $\Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3 = \Delta Y_T$;

$$\Delta Y_T = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{L_i}{D_i^5} \frac{8Q^2}{\pi^2} + \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{V_i^2}{2}$$

10.8.2 Características de los sistemas en paralelo

Sea el esquema de la figura siguiente, donde se representan tres tramos de tuberías en paralelo.

Fig. T 10.13 Sistemas de tuberías en paralelo



Las condiciones que se cumplen para esta configuración son:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3\,; \quad \Delta Y_T = \Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \Delta Y_3$$

Con el fin de demostrar que la pérdida de energía experimentada por una partícula de fluido que circule por la tubería 1 será la misma que la que circule por el resto de conductos, se aplicará la ecuación de la energía entre la entrada y la salida de cada uno de los tres conductos en paralelo.

Para el conducto 1, se tiene que los puntos 1 y 2 están situados en los extremos de dicho conducto.

$$\frac{P_{1-1}}{\rho} + \frac{V_{1-1}^2}{2} + g\,z_{1-1} = \frac{P_{2-1}}{\rho} + \frac{V_{2-1}^2}{2} + g\,z_{2-1} + \Delta y_{(1-2)-1}$$

$$\frac{P_{1-1} - P_{2-1}}{\rho} + g\left(z_{1-1} - z_{2-1}\right) = \Delta y_{(1-2)-1}$$

Realizando el mismo proceso para los conductos 2 y 3, se tendrá:

$$\frac{P_{1-2} - P_{2-2}}{\rho} + g\left(z_{1-2} - z_{2-2}\right) = \Delta y_{(1-2)-2}$$

$$\frac{P_{1-3} - P_{2-3}}{\rho} + g\left(z_{1-3} - z_{2-3}\right) = \Delta y_{(1-2)-3}$$

Y, observando que $\dfrac{P_{1-1} - P_{2-1}}{\rho} = \dfrac{P_{1-2} - P_{2-2}}{\rho} = \dfrac{P_{1-3} - P_{2-3}}{\rho}$;

$$\left(z_{1-1} - z_{2-1}\right) = \left(z_{1-2} - z_{2-2}\right) = \left(z_{1-3} - z_{2-3}\right);$$

se concluye: $\Delta Y_T = \Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \Delta Y_3$

10.9 Concepto de longitud equivalente

Consiste en determinar la longitud de conducto que dé lugar a una pérdida de energía idéntica a la que se pierde en una singularidad o singularidades dadas. Se obtiene al igualar el término de pérdidas de carga lineales con el de pérdidas de carga singulares.

$$k\frac{V^2}{2} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2}$$

$L_{eq} = \frac{kD}{f}$, ecuación que determina la longitud equivalente de una singularidad de constante k.

10.10 Conductos no circulares. Concepto de diámetro hidráulico

Siempre que la sección del conducto no sea circular o bien el conducto esté parcialmente lleno de fluido, se empleará como longitud característica el diámetro hidráulico D_H.

Todo lo explicado hasta el momento se puede generalizar si, donde aparezca D, se utiliza D_H.

Por ejemplo: $\Delta y = f\frac{L}{D_H}\frac{V^2}{2}$; $Re = \frac{V \cdot D_H}{\nu}$

El diámetro hidráulico se define como: $D_H = \frac{4 \cdot S_m}{P_m}$.

S_m = sección mojada

P_m = perímetro mojado

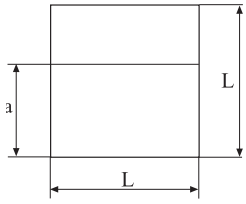
Para tubo de sección circular, lleno de fluido, se obtiene: $D_H = \frac{4\pi D^2}{4\pi D} = D$

Para conductos de sección rectangular, completamente llenos de fluido, cuyos lados tienen longitudes *b* y *h*, el diámetro hidráulico será:

$$D_H = \frac{4 \cdot b \cdot h}{2b + 2h} = \frac{2bh}{b + h}.$$

Para un conducto de sección cuadrada parcialmente lleno de líquido, se tiene:

Fig. T 10.14



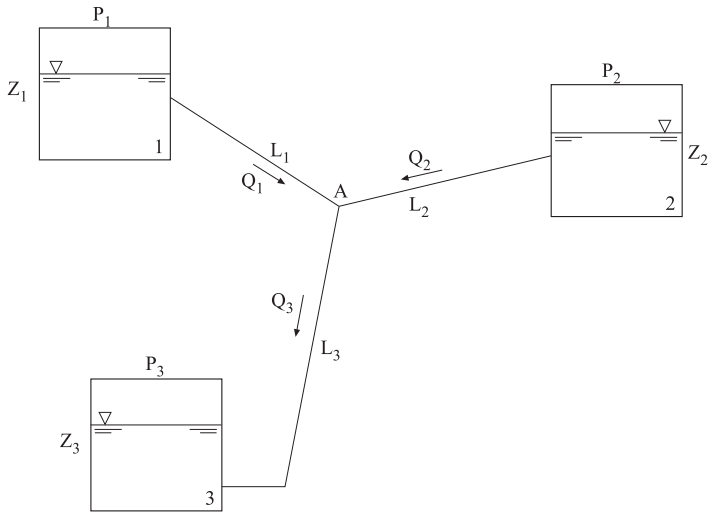
$$D_H = \frac{4 \cdot S_{ecc.\ mojada}}{P_{eri.\ mojado}} = \frac{4 \cdot L \cdot a}{2a + L}$$

Recuérdese que el radio hidráulico no es la mitad del diámetro hidráulico. La definición del radio hidráulico es $R_H = \frac{S_m}{P_m}$ con lo que $R_H = 4 D_H$

10.11 Sistemas de conductos ramificados

Un caso muy clásico es el formado por un colectivo de tres depósitos unidos por sendos conductos (v. figura siguiente). En general, a priori, no se conoce cuál es el sentido de circulación del fluido en alguno de los tramos, con lo que se deberá estimar. Si, al resolver el problema, se obtiene algún valor negativo, esto implica que la estimación inicial no es la acertada, con lo que debe ser modificada.

Fig. T 10.15
Sistemas de conductos ramificados



En función de las variables a determinar en el problema, se deberá utilizar lo establecido en los diferentes métodos de resolución para la determinación del factor de fricción.

Supónganse conocidos las longitudes y los diámetros de los diversos conductos, así como las presiones en los depósitos, las cotas en todos los puntos y la rugosidad abso-

luta de los diversos conductos. No se conocen los caudales circulantes ni la dirección de los mismos, y se pide determinar dichos caudales, así como la presión en el punto A.

Según la posición de los depósitos y la presión en los mismos, se puede tener:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$
$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Se va a suponer que el sentido del flujo es $Q_1 = Q_2 + Q_3$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las superficies libres de los dos depósitos superiores y el punto A, y entre el punto A y la superficie libre del depósito inferior, se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho} + g\,z_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_A}{\rho} + g\,z_A + \frac{V_A^2}{2} + \Delta Y_{1A}$$

$$\frac{P_2}{\rho} + g\,z_2 + \frac{V_2^2}{2} = \frac{P_A}{\rho} + g\,z_A + \frac{V_A^2}{2} + \Delta Y_{A2}$$

$$\frac{P_A}{\rho} + g\,z_A + \frac{V_A^2}{2} = \frac{P_3}{\rho} + g\,z_3 + \frac{V_3^2}{2} + \Delta Y_{A3}$$

Véase que, según lo establecido, los tramos uno y dos están en paralelo, y ambos en serie con el tres.

Se observa que se ha formado un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, siendo las incógnitas: $Q_1; Q_2; Q_3$ y P_A Una vez determinado el factor de fricción inicial, se procedería a la resolución del sistema y se obtendrán los primeros valores de las variables desconocidas, valores que permitirían hallar un segundo valor del coeficiente de fricción para cada tramo. El proceso iterativo seguiría según lo establecido previamente.

Problema 79

Enunciado

Sea el conjunto depósitos y conductos que se expone en los esquemas siguientes. Si se conoce: la potencia que la bomba comunica al fluido W_{bomba}, las longitudes, diámetros y rugosidades absolutas de todos los tramos, determinar el caudal que circula por las dos instalaciones y por cada uno de los tramos. Supóngase que los tramos situados a la entrada y salida de la bomba son muy cortos y se puede despreciar su efecto.

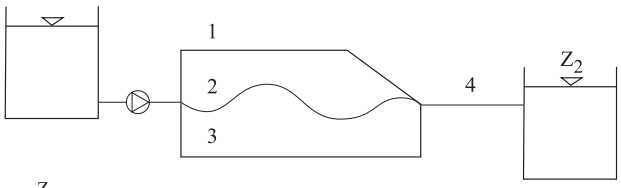


Fig. 79.1 Esquema de la instalación para el primer caso

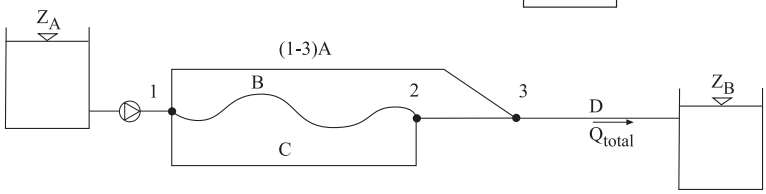


Fig. 79.2 Esquema de la instalación para el segundo caso

La ecuación que deberá utilizarse para determinar las perdidas de carga en cada tramo es la de Darcy Weisbach.

$$\Delta Y_i = f_i \frac{L_i}{D_i^5} \frac{8Q_i^2}{\pi^2}$$

Tomar como primera aproximación, el factor de fricción "f" función de la rugosidad relativa $\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)$.

Resolución

Aplicando la ecuación de la energía entre las superficies libres de los dos depósitos se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + Y_B = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \Delta Y_{12}$$

Trabajando en presiones relativas, y considerando que la superficie de los dos depósitos es muy grande, se tiene:

$$\frac{W}{\rho Q} = Y_B = g\left(z_2 - z_1\right) + \Delta Y_{12} \;\; ; \;\; \Delta Y_{12} = \Delta Y_{paralelo} + \Delta Y_4 \;\; ; \;\; \Delta Y_{paralelo} = \Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \Delta Y_3 \; ;$$

$$\Delta Y_1 = K_1 Q_1^2 \;\; ; \;\; \Delta Y_2 = K_2 Q_2^2 \;\; ; \;\; \Delta Y_3 = K_3 Q_3^2 \;\; ;$$

Obsérvese que la constante K_i representa todos los términos excepto el caudal, de la ecuación de Darcy Weisbach. Dicha constante depende del factor de fricción que asimismo es función de la rugosidad relativa y del número de Reynolds. Estas constantes se supondrán conocidas en todo momento, puesto que como primera aproximación se va a suponer que el régimen es en todo momento turbulento desarrollado.

La ecuación de continuidad establece:

$$Q_4 = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \sqrt{\frac{\Delta Y_{paralelo}}{K_1}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{paralelo}}{K_2}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{paralelo}}{K_3}} \; ;$$

Definiendo como $K_{ef.}$ a la constante equivalente de pérdidas del conjunto de la tres ramas en paralelo, se tiene:

$$\Delta Y_{paralelo} = K_{ef} Q_4^2 = K_{ef} \left(\sqrt{\frac{\Delta Y_{paralelo}}{K_1}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{paralelo}}{K_2}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{paralelo}}{K_3}} \right)^2 ;$$

$$\Delta Y_{paralelo} = K_{ef} \Delta Y_{paralelo} \left(\frac{1}{\sqrt{K_1}} + \frac{1}{\sqrt{K_2}} + \frac{1}{\sqrt{K_3}} \right)^2 ;$$

$$K_{ef} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{K_1}} + \frac{1}{\sqrt{K_2}} + \frac{1}{\sqrt{K_3}} \right)^2} ;$$

La constante para la tubería 4 será:

$$\Delta Y_4 = K_4 \, Q_4^2$$

Con lo que la ecuación general de la energía quedará:

$$\left[\frac{m^2}{s^2} \right] \quad \frac{W}{\rho Q_4} = g\left(z_2 - z_1\right) + K_{ef} Q_4^2 + K_4 Q_4^2$$

De esta ecuación se obtiene Q_4 ;

La perdidas de carga en el tramo 4 y en las tres ramas en paralelo serán: $\Delta Y_4 = K_4 \, Q_4^2$; $\Delta Y_{paralelo} = K_{ef} \, Q_4^2$

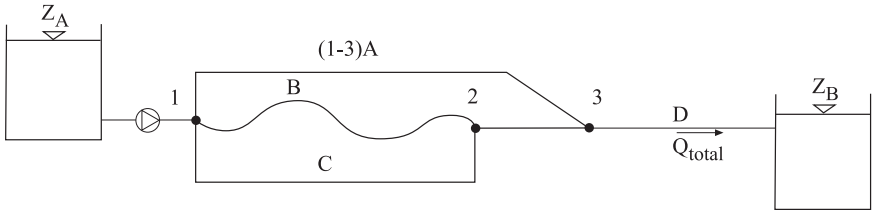
El caudal en cada uno de los tramos de las tres ramas en paralelo se obtendrá:

$$\Delta Y_{paralelo} = K_{ef} \, Q_4^2 = K_1 \, Q_1^2 = K_2 \, Q_2^2 = K_3 \, Q_3^2 \; ;$$

De esta ecuación se extraen los valores de Q_1 ; Q_2 ; Q_3 ;

Para la segunda de las instalaciones, el proceso a seguir será:

Fig. 79.3



Aplicando la ecuación de la energía entre las superficies libres de los dos depósitos se obtiene:

$$\frac{W}{\rho Q_{total}} = Y_B = g\left(z_B - z_A\right) + \Delta Y_{AB}$$

Donde ahora, las pérdidas de energía en la instalación se definirán como:

$$\Delta Y_{AB} = \Delta Y_{paralelo\ 1-3} + \Delta Y_{tramo\ (D)}\ ;$$

El tramo en paralelo se define:

$$\Delta Y_{paralelo\ 1-3} = \Delta Y_{(1-3)A} = \Delta Y_{paralelo\ 1-2} + \Delta Y_{2-3} = K_{ef(1-3)}\ Q^2_{total}\ ;$$

$$Q_{total} = Q_{(1-3)A} + Q_{23} = Q_{(1-3)A} + Q_{(1-2)B} + Q_{(1-2)C}\ ;$$

$$Q_{(1-2)B} + Q_{(1-2)C} = Q_{2-3}\ ;$$

$$\Delta Y_{12} = \Delta Y_{(1-2)B} = \Delta Y_{(1-2)C}\ ; \quad \Delta Y_{(1-2)B} = K_{(1-2)B}\ Q^2_{(1-2)B}\ ; \quad \Delta Y_{(1-2)C} = K_{(1-2)C}\ Q^2_{(1-2)C}\ ;$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad entre los puntos 1 y 2.

$$Q_{2-3} = \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-2)B}}{K_{(1-2)B}}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-2)C}}{K_{(1-2)C}}}\ ;$$

$$\Delta Y_{12} = K_{(1-2)equiva}\ Q^2_{2-3} = K_{(1-2)B}\ Q^2_{(1-2)B} = K_{(1-2)C}\ Q^2_{(1-2)C}\ ;$$

$$\Delta Y_{12} = K_{(1-2)equiva}\ Q^2_{2-3} = K_{(1-2)equiva}\ \Delta Y_{(1-2)} \left(\frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)B}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)C}}} \right)^2\ ;$$

$$K_{(1-2)equiva} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)B}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)C}}} \right)^2}\ ;$$

Por otro lado se tiene:

$$\Delta Y_{(1-3)\,paralelo} = K_{eq(1-3)}\ Q^2_{total} = \Delta Y_{(1-3)A} = \Delta Y_{paralelo(1-2)} + \Delta Y_{(2-3)};$$

$$K_{equiv(1-3)}\ Q^2_{total} = K_{(1-3)A}\ Q^2_{(1-3)A} = K_{(1-2)equiv}\ Q^2_{2-3} + K_{(2-3)}\ Q^2_{2-3}\ ;$$

$$K_{equiv(1-3)}\ Q^2_{total} = K_{(1-3)A}\ Q^2_{(1-3)A} = Q^2_{2-3}\left(K_{(1-2)equiva} + K_{2-3}\right) = \Delta Y_{1-3\ tramo\ superior} = \Delta Y_{1-3\ tramo\ inferior}\ ;$$

$$K_{(1-2)equiva} + K_{(2-3)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)B}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)C}}}\right)^2} + K_{(2-3)} = K_{(1-3)\ tramo\ inf\ erior}$$

Recordando que:

$$K_{equiv(1-3)}\, Q_{total}^2 = K_{(1-3)tramo\,inf\,erior}\, Q_{(2-3)}^2 = K_{(1-3)A}\, Q_{(1-3)A}^2$$

$$Q_{total} = Q_{(2-3)} + Q_{(1-3)A} = \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3)\,tramo\,inf\,erior}}{K_{(1-2)equivalente} + K_{(2-3)}}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3)A}}{K_{(1-3)A}}}$$

$$K_{(1-3)equivalente}\, Q_{total}^2 = \Delta Y_{(1-3)equivalente} = K_{(1-3)equivalente}\left[\sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3)_{tramo\,inf\,erior}}}{K_{(1-2)equiva} + K_{(2-3)}}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3)A}}{K_{(1-3)A}}}\right]^2$$

$$\Delta Y_{(1-3)equivalente} = K_{(1-3)equivalente}\, \Delta Y_{(1-3)equivalente}\left[\frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)equivalente} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}}\right]^2;$$

$$K_{(1-3)equivalente} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)equiva} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}}\right]^2};$$

$$\Delta Y_{AB} = K_{(1-3)equivalent}\, Q_{total}^2 + K_D\, Q_{total}^2;$$

$$\frac{W}{\rho Q_t} = g\left(z_B - z_A\right) + Q_t^2\left[K_{(1-3)equivalent} + K_D\right];$$

$$\frac{W}{\rho} = g\left(z_B - z_A\right)Q_t + Q_t^3\left[K_{(1-3)equivalente} + K_D\right];$$

De aquí se obtiene Q_t;

La pérdida de carga en cada uno de los tramos 1-3 será:

$$Q_{total}^2 = \Delta Y_{(1-3)}\left[\frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)equivalente} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}}\right]^2;$$

$$\Delta Y_{(1-3)} = \frac{Q_{total}^2}{\left[\frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)equivalente} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}}\right]^2}$$

Los caudales en cada uno de los tramos 1-3 se determinarán:

$$\Delta Y_{1-3} = K_{(1-3)A} Q^2_{(1-3)A} \rightarrow \text{se despeja } Q_{(1-3)A}$$

$$\Delta Y_{1-3} = \left(K_{(1-2)equiva} + K_{(2-3)}\right) Q^2_{(2-3)} \rightarrow \text{se despeja } Q_{(2-3)}$$

Por último, el caudal circulante entre los puntos 1-2 en la tubería B y el circulante entre estos dos mismos puntos en la tubería C se obtienen:

$$Q_{2-3} = Q_{(1-2)B} + Q_{(1-2)C};$$

$$\Delta Y_{(1-3)} = \Delta Y_{2-3} + \Delta Y_{(1-2)equivalente};$$

$$\Delta Y_{2-3} = K_{2-3}\, Q_{2-3} \text{ se obtiene } \Delta Y_{2-3}$$

$$\Delta Y_{(1-2)equivalente} = \Delta Y_{(1-3)} - \Delta Y_{(2-3)} \text{ de aquí se obtiene } \Delta Y_{(1-2)equivalent}$$

$$\Delta Y_{(1-2)equivalente} = \Delta Y_{(1-2)B} = \Delta Y_{(1-2)C};$$

$$\Delta Y_{(1-2)B} = K_{(1-2)B}\, Q^2_{(1-2)B}; \text{ siendo la incógnita } Q_{(1-2)B}$$

$$\Delta Y_{(1-2)C} = K_{(1-2)C}\, Q^2_{(1-2)C}; \text{ obteniendo } Q_{(1-2)C}$$

Problema 80

Enunciado

Se tienen dos depósitos de grandes dimensiones, separados por una altura de 25 m. La presión relativa en el depósito inferior es de 200.000 Pa, mientras que en el depósito superior se tiene presión atmosférica. Se desea conectar ambos depósitos mediante un conducto de PVC de 400 m de longitud y con la ayuda de una bomba de 25 kW de potencia se pretende trasvasar un caudal de 0,2 m^3/s de agua del depósito inferior al superior.

Halle:

1. El diámetro del conducto que se ha de utilizar para cumplir con los requerimientos establecidos.

2. Debido a la mala colocación de una brida situada cuatro metros antes de que el tubo llegue al depósito superior, aparece una fuga de agua en este punto. Si se conoce que la pérdida de energía que el agua experimenta al pasar a través de la brida es de $\Delta h = 100\ Q_b^2$, siendo Q_b el caudal de agua que se fuga a través de la brida, halle el nuevo caudal que fluye ahora por la instalación.

Considere que la brida está a la misma altura que el nivel del líquido en el depósito superior. Se puede despreciar la energía cinética a la salida de la brida.

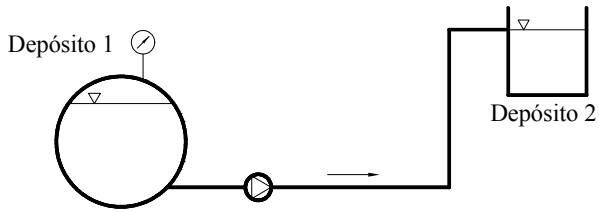


Fig. 80.1
Esquema de la instalación

Resolución

1. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las superficies libres de los dos depósitos, se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + H = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \Delta h_{12}$$

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + \frac{W}{\rho \cdot g \cdot Q} = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}$$

siendo $\Delta h = f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}$ la expresión para la pérdida de carga en tuberías, en función de la longitud L, el diámetro D, el caudal Q y el coeficiente de fricción f, y $H = \frac{W}{\rho \cdot g \cdot Q}$ la altura de elevación de la bomba en función de la potencia (W) y el caudal.

Tomando un valor inicial para f de 0,02 (valor estándar para tuberías), se puede obtener el valor del diámetro D:

$$\frac{200.000\,\text{Pa}}{1.000\,{}^{\text{kg}}/_{\text{m}^3} \cdot 9,81\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}} + 0 + 0 + \frac{25.000\,\text{W}}{1.000\,{}^{\text{kg}}/_{\text{m}^3} \cdot 9,81\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2} \cdot 0,2\,{}^{\text{m}^3}/_{\text{s}}} =$$

$$= 0 + 25\,\text{m} + 0 + 0,02 \cdot \frac{400\,\text{m}}{D^5\,\text{m}^5} \cdot \frac{8 \cdot 0,2^2\,{}^{\text{m}^6}/_{\text{s}^2}}{\pi^2 \cdot 9,81\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}}$$

Aislando la D de la ecuación, se obtiene: $D = 0,318\,\text{m}$

El valor del número de Reynolds para este diámetro es:

$$\text{Re} = V \cdot \frac{D}{\nu} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} \cdot \frac{D}{\nu} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D \cdot \nu} = \frac{4 \cdot 0,2\,{}^{\text{m}^3}/_{\text{s}}}{\pi \cdot 0,318\,\text{m} \cdot 1,02 \cdot 10^{-6}\,{}^{\text{m}^2}/_{\text{s}}} = 785.051,3$$

A través del gráfico de Moody, se halla un valor del coeficiente de fricción correspondiente a este número de Reynolds de f = 0,0125.

Con el nuevo valor de *f* se determina de nuevo la pérdida de carga en función del diámetro:

$$\Delta h = f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} = 0,0125 \cdot \frac{400\,m}{D^5\,m^5} \cdot \frac{8 \cdot 0,2^2\ {}^{m^6}/_{s^2}}{\pi^2 \cdot 9,81\ {}^{m}/_{s^2}} = 0,01653 \cdot \frac{1}{D^5}\,m$$

Utilizando la ecuación de Bernoulli, se halla nuevamente el valor de D para la nueva Δh:

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + H = z_2 + \Delta h_{12}$$

$$\Delta h_{12} = -z_2 + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + H = -25\,m + \frac{200.000\,Pa}{1.000\ {}^{kg}/_{m^3} \cdot 9,81\ {}^{m}/_{s^2}} + \frac{25.000\,W}{1.000\ {}^{kg}/_{m^3} \cdot 9,81\ {}^{m}/_{s^2} \cdot 0,2\ {}^{m^3}/_{s}} = 8,129\,m$$

$$0,01653 \cdot \frac{1}{D^5}\,m = 8,129\,m$$

Aislando D de la ecuación, se obtiene el nuevo valor: $D = 0,289\,m$

El valor del número de Reynolds será:

$$Re = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D \cdot \nu} = \frac{4 \cdot 0,2\ {}^{m^3}/_{s}}{\pi \cdot 0,289\,m \cdot 1,02 \cdot 10^{-6}\ {}^{m^2}/_{s}} = 863.857,5$$

Y, según Moody, $f = 0,012$; considerando que el valor del factor de fricción es prácticamente el mismo que el obtenido con anterioridad, se concluye que el diámetro será:

$D = 0,289\,m$

2. El esquema de la instalación para este segundo caso será:

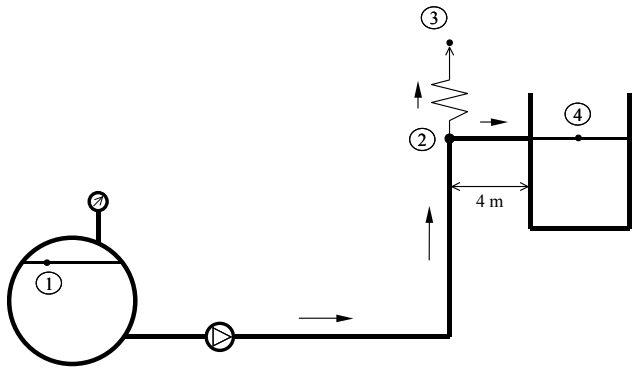


Fig. 80.2
Esquema de la instalación

Las ecuaciones que se tienen en este caso son:

aplicando Bernoulli entre 2 y 3:

$$E_2 = E_3 + \Delta h_{23} = E_3 + 100 \cdot Q_b^{\ 2}$$

Entre los puntos 2 y 4, se concluye:

$$E_2 = E_4 + \Delta h_{24} = E_4 + f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{24}^{\ 2}}{\pi^2 \cdot g} = E_4 + 0,012 \cdot \frac{4\,m}{0,289^5\,m^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{24}^{\ 2}\ m^6/s^2}{\pi^2 \cdot 9,81\ m/s^2}$$
$$= E_4 + 1,967 \cdot Q_{24}^{\ 2}$$

Y entre los puntos 1 y 2:

$$E_1 + H = E_2 + \Delta h_{12} = E_2 + f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_T^{\ 2}}{\pi^2 \cdot g} = E_2 + 0,012 \cdot \frac{396\,m}{0,289^5\,m^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_T^{\ 2}\ m^6/s^2}{\pi^2 \cdot 9,81\ m/s^2}$$
$$= E_2 + 194,764 \cdot Q_T^{\ 2}$$

Según la ecuación de contin**ui**dad:

$$Q_T = Q_b + Q_{24}$$

Si se desprecia la energía cinética en la fuga de la brida (punto 3 de la figura):

$$E_3 = z_3 = 25\,m$$
$$E_4 = z_4 = 25\,m$$

Y los valores de E_1 y H:

$$E_1 = \frac{P_1}{\rho \cdot g} = \frac{200.000\,Pa}{1.000\ kg/m^3 \cdot 9,81\ m/s^2} = 20,387\,m$$

$$H = \frac{25.000\,W}{1.000\ kg/m^3 \cdot 9,81\ m/s^2 \cdot Q_T\ m^3/s} = \frac{2,54841}{Q_T}$$

Se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (Q_T, Q_b, Q_{24}, E_2).

$$E_2 = 25 + 100 \cdot Q_b^{\ 2} \rightarrow \text{ecuación 1}$$

$$E_2 = 25 + 1,967 \cdot Q_{24}^{\ 2} \rightarrow \text{ecuación 2}$$

$$20,387 + \frac{2,54841}{Q_T} = E_2 + 194,764 \cdot Q_T^{\ 2} \rightarrow \text{ecuación 3}$$

$$Q_T = Q_b + Q_{24} \rightarrow \text{ecuación 4}$$

Aislando Q_b y Q_{24} de las ecuaciones 1 y 2, y sustituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación 4, se tiene:

$$Q_T = \sqrt{\frac{E_2 - 25}{100}} + \sqrt{\frac{E_2 - 25}{1,967}} = 0,813 \cdot \sqrt{E_2 - 25}$$

$$Q_T{}^2 = 0,661 \cdot (E_2 - 25)$$

Sustituyendo el valor de Q_T en la ecuación 3 se obtiene:

$$Q_T^3\ 194,764 + Q_T\ (E_2 - 20,387) - 2,5484 = 0$$

$$0,813^3\ (E_2 - 25)^{\frac{3}{2}}\ 194,764 + 0,813\ (E_2 - 25)^{\frac{1}{2}} (E_2 - 20,387) - 2,5484 = 0$$

De donde el valor de la energía en el punto 2 será:

$$E_2 = 25,0617\,\text{m}$$

Con lo que el valor de los tres caudales vendrá a ser:

$$Q_{24} = 0,1771\ {}^{m^3}\!/_{s}$$

$$Q_b = 0,0248\ {}^{m^3}\!/_{s}$$

$$Q_T = 0,2019\ {}^{m^3}\!/_{s},$$

que es el nuevo caudal total que se pedía en el enunciado.

Problema 81

Enunciado

En una central térmica de producción de energía eléctrica se tiene una instalación cuyo esquema se muestra a continuación, siendo el fluido de trabajo agua.

Se sabe que la presión y la temperatura en la caldera de vapor son de P = 2 bar (absoluta), T = 400ºC, y que en la turbina se produce una expansión adiabático-isentrópica con un salto entálpico de 777 KJ/Kg. (Considérese este salto entre los puntos 3 y 6.)

Si las pérdidas de carga en la tubería de aspiración son $\Delta h = 104\ Q^2$ y en la tubería de impulsión $\Delta h = 312\ Q^2$, siendo Q [m^3/s], Δh [m columna de agua], y sabiendo que la bomba que se utiliza es el modelo 150/315, con un diámetro de rodete de 270 mm, (y se considera que la cota del nivel del líquido del condensador está 1m por encima de la cota del nivel del líquido de la caldera,) se pide hallar:

1. El punto de funcionamiento de la bomba.

2. La cota Z (respecto al nivel del líquido del condensador) a la que hay que colocar la bomba para que no se produzca cavitación.

3. Debido a que se ha hecho un reajuste en el proceso, se precisa aumentar el caudal en un 20%. Si al motor de accionamiento de la bomba se le acopla un variador de frecuencia, determine a qué revoluciones debería girar para que la bomba suministre el nuevo caudal. ¿Con qué rendimiento trabaja ahora la bomba?

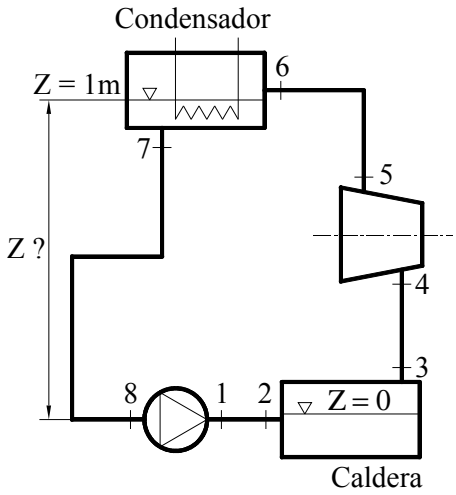


Fig. 81.1
Esquema del circuito en estudio

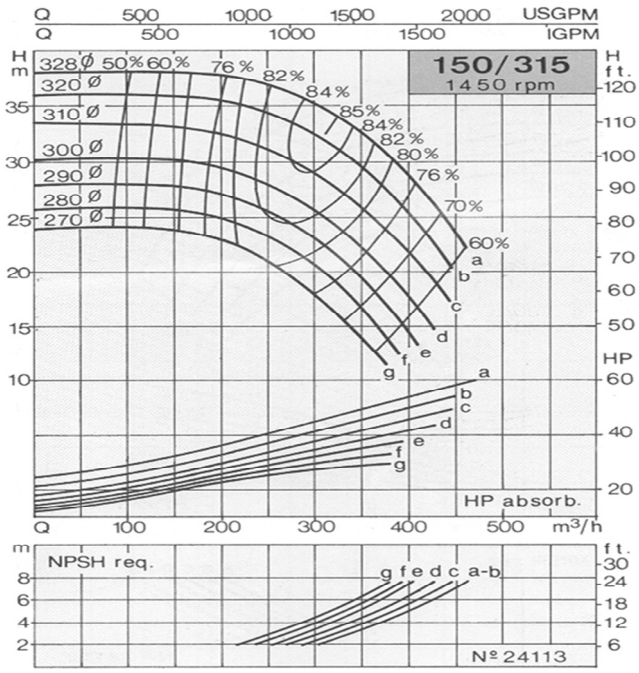


Fig. 81.2
Gráfica de la curva característica de la bomba. Cortesía de bombas ITUR

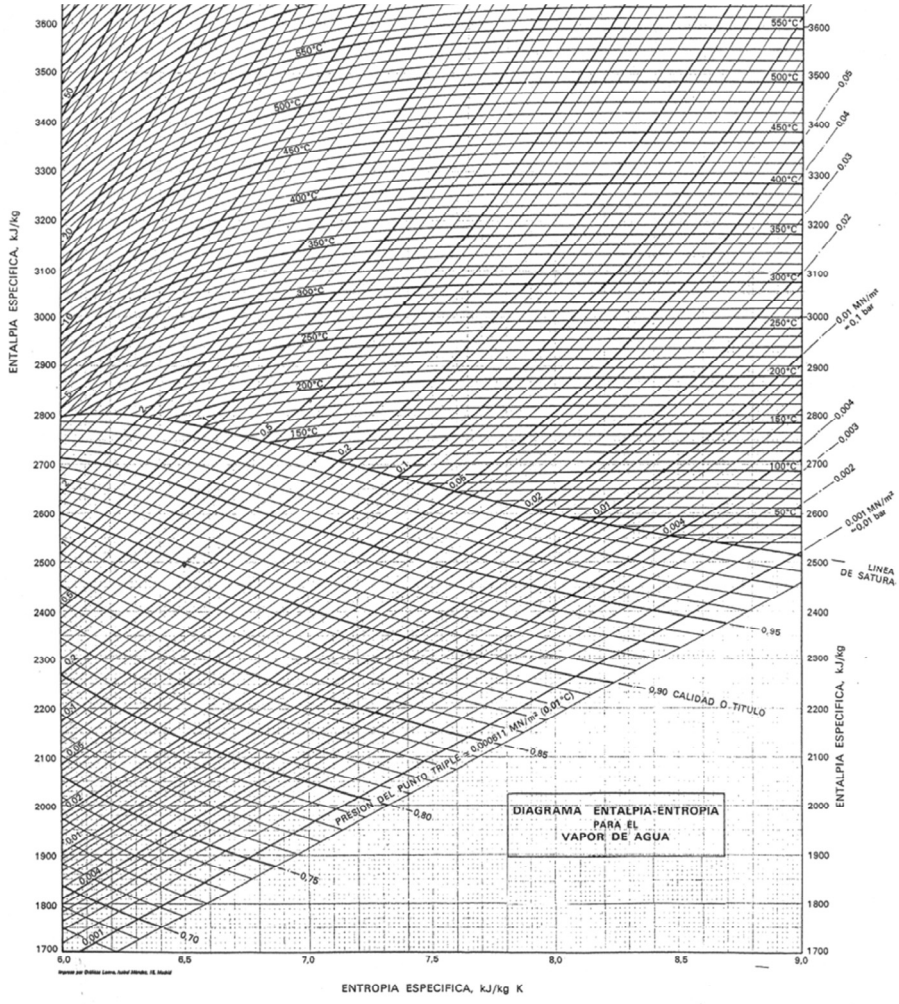


Fig.81.3 Diagrama entalpía–entropía para el vapor de agua. Fuente: José Segura, Termodinámica técnica

Resolución

Las condiciones termodinámicas en la caldera son:

P_3 absoluta = 2 bar

T_3 = 400ºC

Entrando con estas condiciones en el diagrama de Moliere, se obtiene:

h_3 = 3.277 KJ/Kg

Si el salto entálpico entre 3 y 6 es de 777 KJ/Kg, y considerando la evolución adiabática isoentrópica, las condiciones termodinámicas en el punto 6 serán (resultado extraído del diagrama de Moliere):

$P_6 = 0{,}05$ bar

$T_6 = 35ºC$

$h_6 = 2.500$ KJ/Kg

1. Para hallar el punto de funcionamiento, se aplicará la ecuación de Bernoulli entre las superficies libres del condensador y la caldera; así:

$$\frac{P_{con}}{\rho g} + Z_{con} + \frac{V_{con}^2}{2g} + H = \frac{P_{cal}}{\rho g} + Z_{cal} + \frac{V_{cal}^2}{2g} + \Delta h_{72}$$

$$H = \frac{P_{cal} - P_{con}}{\rho g} + Z_{cal} - Z_{con} + \frac{V_{cal}^2 - V_{con}^2}{2g} + \Delta h_{72}$$

Sustituyendo, y considerando las energías cinéticas en las superficies libres de los depósitos despreciables, se tiene:

$$H = \frac{(2 - 0{,}05)10^5}{1.000 \times 9{,}8} - 1 + 416\,Q^2$$

$$H = 18{,}88 + 416\,Q^2$$

$$H[\text{m}]; \quad Q\left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right]$$

La intersección entre esta curva y la curva característica de la bomba da lugar al punto de funcionamiento, y se obtiene:

$$Q = 250\,\text{m}^3/\text{h}$$

$$H = 20{,}88\ \text{m}$$

2. Cálculo de la cota Z:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre del condensador y la brida de aspiración de la bomba, se llega a:

$$\frac{P_{con}}{\rho g} + Z_{con} + \frac{V_{con}^2}{2g} = \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} + \Delta h_{78}$$

$$Z_{con} - Z_8 = \frac{P_8 - P_{con}}{\rho g} + \frac{V_8^2 - V_{con}^2}{2g} + \Delta h_{78}$$

El término de energía cinética en la brida de aspiración es mucho mayor que en el condensador pero, puesto que no se conoce el diámetro del conducto, a priori se desprecian ambos términos; así, la definición de $NPSH_d$ queda:

$$NPSH_d = \frac{P_8}{\rho g} - \frac{P_{vapor}}{\rho g}$$

de donde, sustituyendo en la ecuación de Bernoulli entre condensador y brida de aspiración, se tiene:

$$Z_{con} - Z_8 = NPSH_d + \frac{P_{vapor}}{\rho g} - \frac{P_{con}}{\rho g} + \Delta h_{78}$$

En el punto de cavitación incipiente se ha de cumplir que

$$NPSH_d = NPSH_R$$

En la gráfica de la curva característica de la bomba (fig. 81.2) se observa que, para un caudal de $Q=250\,m^3/h$, el valor de la altura neta requerida es $NPSH_R = 3$ m.

Suponiendo que la temperatura del líquido en el condensador sea la misma que en la brida de aspiración de la bomba, es decir 35 ºC, la presión de vapor será la misma que la presión que existe en el condensador, 0,05 bar, de donde:

$$Z_{con} - Z_8 = 3 + 104\left(\frac{250}{3.600}\right)^2 + \frac{0{,}05\times10^5}{\rho g} - \frac{0{,}05\times10^5}{\rho g} = 3{,}5 \text{ m}$$

La bomba debe ser colocada a una distancia de 3,5m + 0,5m (de seguridad) = 4m por debajo del nivel del líquido del condensador.

3. La figura 81.4 define el nuevo punto de funcionamiento para este apartado, que se obtiene de la intersección de la curva del sistema con el nuevo caudal circulante 250 *1,2 = 300 m^3/h (punto 1, figura 81.4).

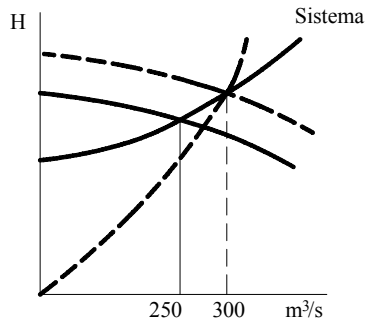


Fig. 81.4 Esquema del nuevo punto de funcionamiento del sistema con la curva de afinidad

Si $Q=300\,m^3/h$, la altura del nuevo punto de funcionamiento será:

$$H=18{,}88+416\left(\frac{300}{3.600}\right)^2$$
$$H=21{,}76\,m$$

La constante de una curva que pase por el punto H = 21,76 m y $Q=300\,m^3/h$, denominada curva de afinidad, se halla:

$$\Delta h = KQ^2$$
$$K=\frac{21{,}76}{\left(\frac{300}{3.600}\right)^2}=3.134{,}72$$

Esta curva corta con la curva característica inicial de la bomba en el punto 2, cuyas características son:

$$H = 18{,}95\ m;\quad Q=280\,m^3/h$$

Entre los puntos H = 21,76 m, $Q=300\,m^3/h$, y H = 18,95 m, $Q=280\,m^3/h$, se pueden aplicar los grupos adimensionales, cifra característica, altura de elevación ψ, y cifra característica de caudal Φ.

$$\frac{H_1}{\omega_1^2 D_1^2}=\frac{H_2}{\omega_2^2 D_2^2}\qquad \frac{21{,}76}{\omega_1^2 \cancel{D}_1^2}=\frac{18{,}95}{1.450^2 \cancel{D}_2^2}\qquad \omega_1^2=\frac{21{,}76\times 1.450^2}{18{,}95};$$
$$\omega_1 = 1.553{,}79\ rpm$$

$$\frac{Q_1}{\omega_1 D^3}=\frac{Q_2}{\omega_2 D^3}\qquad \omega_1=\frac{Q_1\omega_2 \cancel{D}^3}{Q_2 \cancel{D}^3}\qquad \omega_1=\frac{300\times 1450}{280}=1.553{,}57\ rpm.$$

Obsérvese que, utilizando cualquiera de las dos cifras características, se obtiene prácticamente el mismo resultado. Por otro lado, el rendimiento al que trabajará la bomba en el nuevo punto de funcionamiento, punto 1, será prácticamente el mismo que el existente en el punto 2, siendo éste del 77% según se observa en la figura 81.2.

Problema 82

Enunciado

Sea el esquema del grupo de bombeo que se muestra en la figura 82.1, en donde se conoce que las pérdidas por fricción en cada tramo son:

H aspiración = $H_{4\text{-}2}$ = 6.480 Q^2

H impulsión hasta el punto 4 = 25.920 Q^2

$H_{4\text{-}3}$ = 19.440 Q^2

La velocidad de giro de todas las bombas es de 2.900 rpm.

En todos los casos, H (m); Q (m^3/s)

Las bombas B2, B3 y B4 son idénticas.

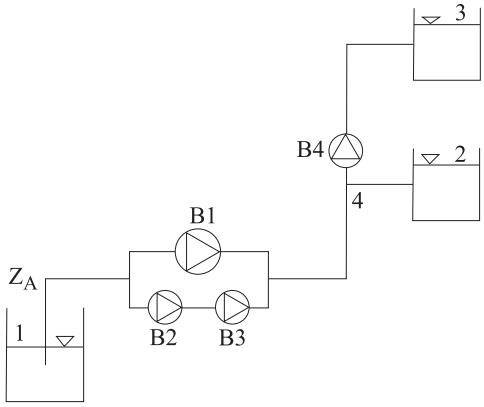
Las cotas de los puntos 2, 3 y 4 respecto al punto 1 son:

Z_2 = 50 m; Z_3 = 100 m; Z_4 = 40 m.

La bomba 1 es del modelo 5026, con un diámetro de rodete de 235 mm.

El resto de bombas, 2,3,4, son del modelo 5020, con un diámetro de rodete de 195 mm.

Fig. 82.1
Esquema de la instalación



Se pide determinar:

1. El caudal circulante en cada uno de los tramos y el punto de funcionamiento de cada una de las bombas.

2. La cota del punto A para que exista cavitación incipiente. Especifique las hipótesis realizadas.

3. Determine la velocidad de giro de la bomba 4 para que el caudal que circula por el tramo 1-4 disminuya en un 2,5%.

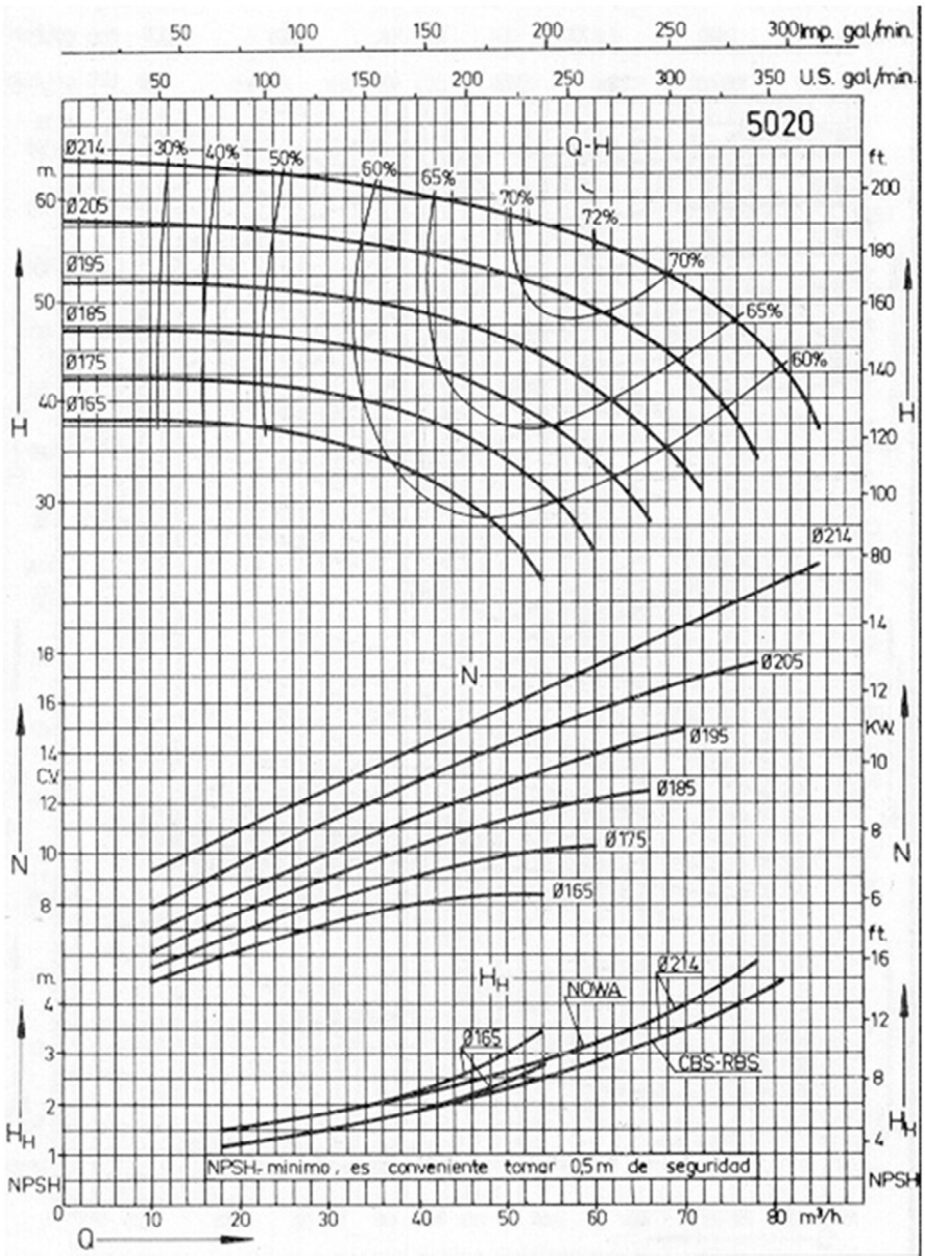


Fig. 82.2 Curva característica de las bombas 2, 3 y 4 modelo 5020. Cortesía de bombas SIHI

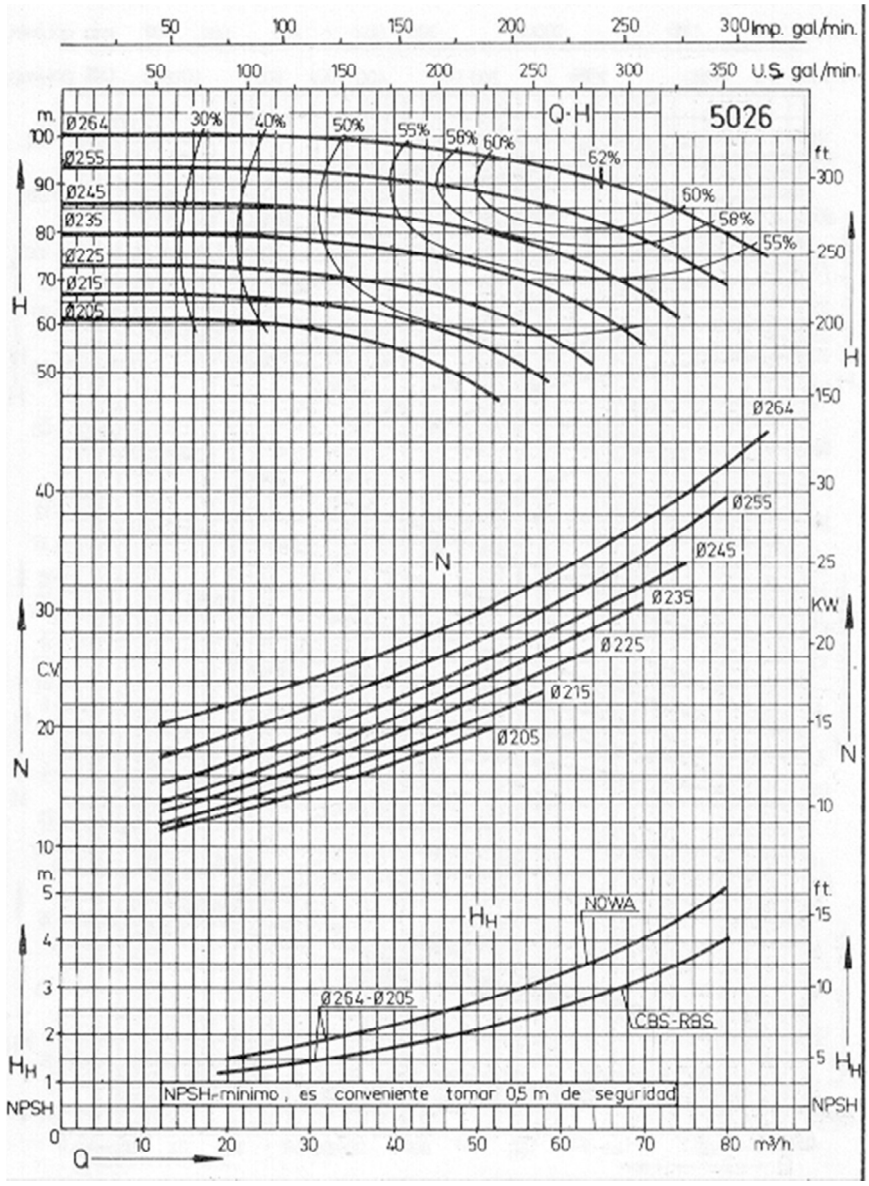


Fig. 82.3 Curva característica de la bomba 1, modelo 5026. Cortesía de bombas SIHI

Resolución

1. Caudal circulante en cada uno de los tramos y punto de funcionamiento de cada una de las bombas.

Suponiendo que no hay pérdidas de caudal en los diferentes tramos, se tiene que

$$Q_{14} = Q_{42} + Q_{43}$$

Aplicando Bernoulli entre los puntos siguientes (1-4 , 4-2 y 4-3), se obtiene:

Tramo 1-4:

$$\frac{p_1}{\rho\, g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + H_{grupo} = \frac{p_4}{\rho\, g} + z_4 + \frac{v_4^2}{2g} + \Delta h_{14}$$

Tramo 4-2:

$$\frac{p_4}{\rho\, g} + z_4 + \frac{v_4^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho\, g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta h_{42}$$

Tramo 4-3:

$$\frac{p_4}{\rho\, g} + z_4 + \frac{v_4^2}{2g} + H_{B4} = \frac{p_3}{\rho\, g} + z_3 + \frac{v_3^2}{2g} + \Delta h_{43}$$

Tomando como plano de referencia el situado en z_1 (cota cero) trabajando en presiones relativas y despreciando el término de energía cinética en el punto 4, se tiene:

$$\frac{p_4}{\rho\, g} = H_{grupo} - z_4 - k_{14}\, Q_{14}^2 \quad \text{(ecuación 1)}$$

$$\frac{p_4}{\rho\, g} = z_2 - z_4 + k_{42} Q_{42}^2 \quad \text{(ecuación 2)}$$

$$\frac{p_4}{\rho\, g} = z_3 - z_4 - H_{B4} + k_{43} Q_{43}^2 \quad \text{(ecuación 3)}$$

Las ecuaciones definitorias del sistema cuando el caudal se da en [m^3/h] vendrán dadas por:

$$\frac{p_4}{\rho\, g} = H_{grupo} - z_4 - \left(\frac{6.480 + 25.920}{3.600^2}\right) Q_{14}^2 \quad \text{(ecuación 1)}$$

$$\frac{p_4}{\rho\, g} = z_2 - z_4 + \left(\frac{6.480}{3.600^2}\right) Q_{42}^2 \quad \text{(ecuación 2)}$$

$$\frac{p_4}{\rho\, g} = z_3 - z_4 - H_{B4} + \left(\frac{19.440}{3.600^2}\right) Q_{43}^2 \quad \text{(ecuación 3)}$$

$$Q_{14} = Q_{42} + Q_{43} \text{ (ecuación 4)}$$

Las ecuaciones 1,2,3,4 forman un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. Las incógnitas son:

$$\frac{P_4}{\rho\, g};\ Q_{1\text{-}4;}\ Q_{4\text{-}2};\ Q_{4\text{-}3}.$$

Un modo de resolución del sistema de ecuaciones hallado sería el gráfico, para ello, se representarán inicialmente las ecuaciones 2 y 3, se sumarán en paralelo y la curva resultante se sustituirá en la ecuación 1.

En la resolución gráfica, se ha de tener en cuenta que las curvas características de las bombas están dadas por:

Bomba 1, modelo 5026, con diámetro de rodete de 235 mm.

Bombas 2, 3, 4, modelo 5020, con diámetro de rodete de 195 mm.

El grupo de bombeo se determinará sumando en serie las características de las bombas 2 y 3. Su resultado se sumará en paralelo con la característica de la bomba 1 (v. figura 82.4).

El proceso de obtención de la curva característica del sistema se ha representado paso a paso en las figuras 82.5 a 82.9.

La figura 82.5 representa las pérdidas de carga en función del caudal para el tramo 1-4:

$$\Delta h_{1\text{-}4} = K_{1\text{-}4}\, Q^2_{1\text{-}4} = H_{\text{aspiración}} + H_{\text{impulsión.}}$$

En la figura 82.6 se representa la ecuación 1 al completo, es decir, el valor de $\left.\frac{P_4}{\rho\, g}\right|_{\text{tramo}\,1-4}$. Obsérvese que a la curva característica del grupo de bombeo, obtenida en la figura 82.4, se le ha restado el valor de la cota en el punto 4 y también las pérdidas por rozamiento en el tramo de tubería entre los puntos 1 y 4, curva representada en la figura 82.5.

Para hallar la curva característica que representa la energía por unidad de peso debida a la presión que existe en el punto 4 en función de las características del tramo 4-2 (ecuación 2), hay que sumar a las pérdidas de carga del tramo 4-2 la cota del punto 2 y restarle la del punto 4 . La curva resultante se detalla en la figura 82.7.

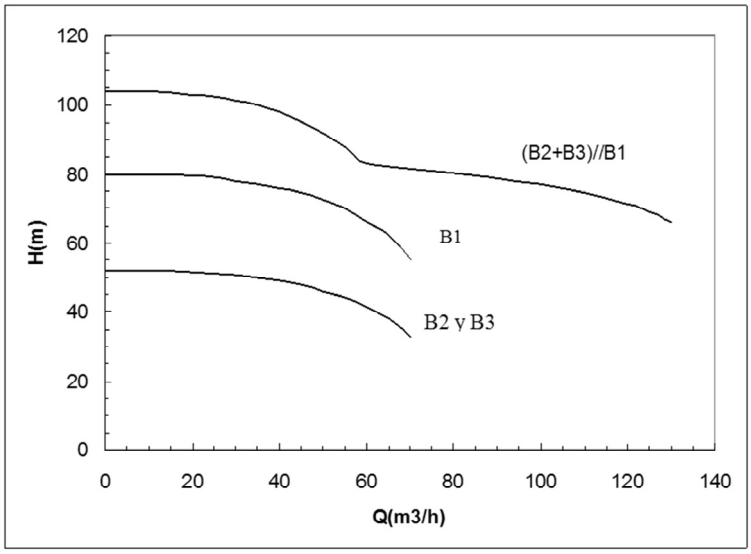


Fig. 82.4
Curva característica del grupo de bombeo

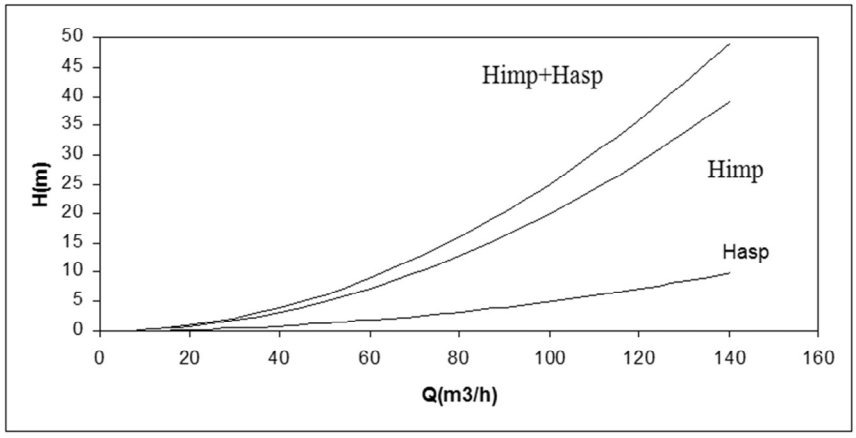


Fig. 82.5
Pérdidas de carga en función del caudal para el tramo 1-4

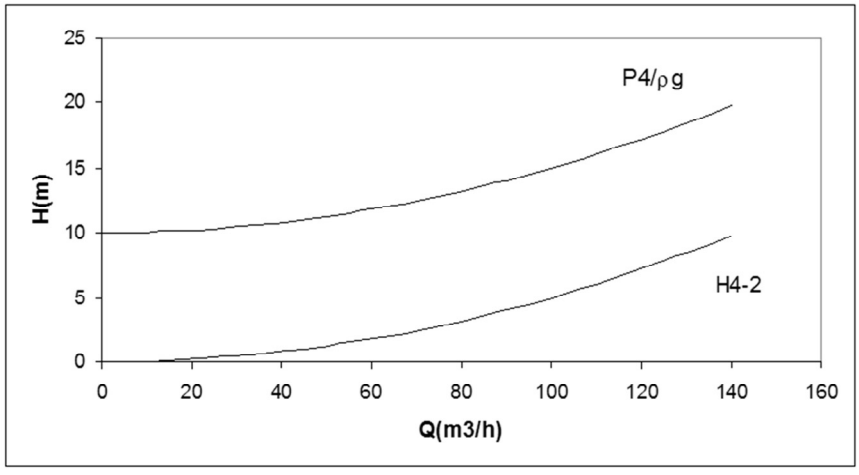


Fig. 82.7
Representación gráfica de la ecuación 2. Energía por unidad de masa existente en el punto 4, según el tramo 4-2

La tercera y última de las curvas a representar es la que corresponde a la ecuación 3. En la figura 82.8 se detallan cada uno de los términos de esta ecuación, cuya suma en serie se especifica en la figura 82.9.

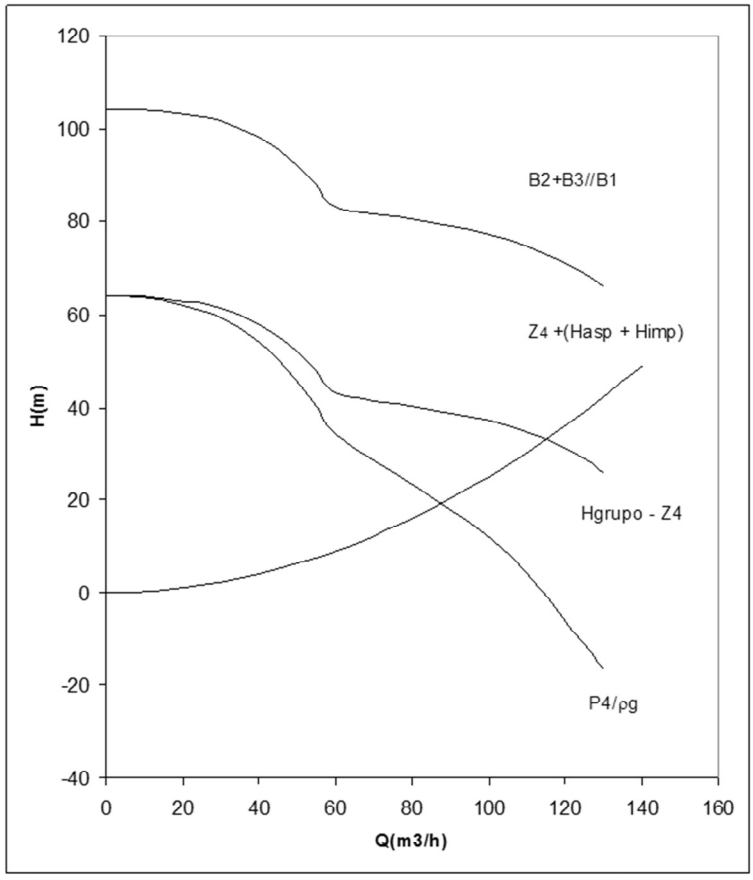


Fig. 82.6
Representación gráfica de la ecuación 1

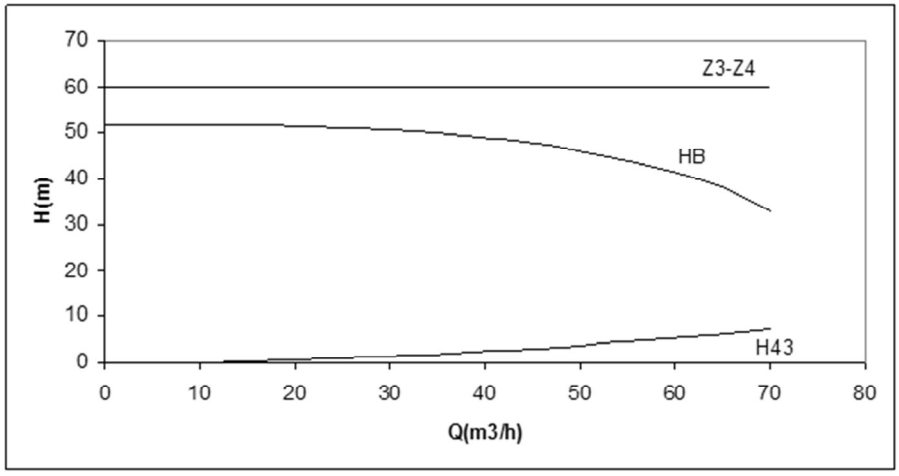


Fig 82.8
Representación gráfica de los diversos términos que componen la curva 3

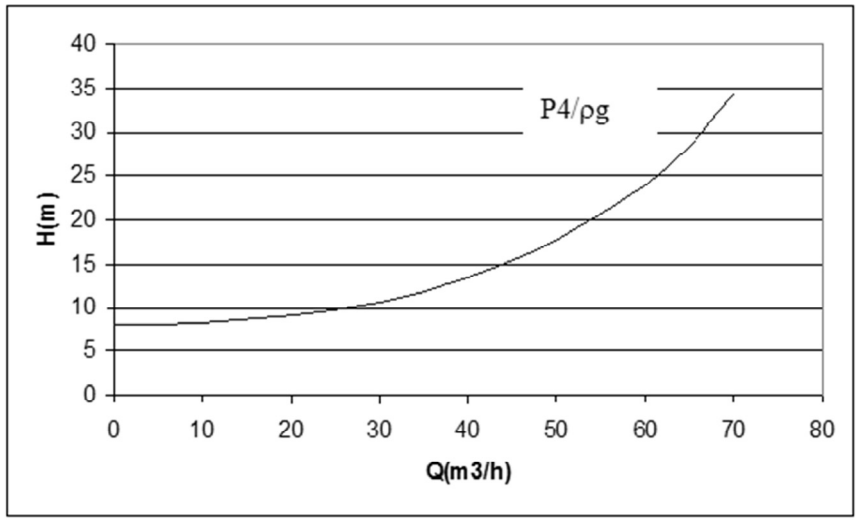


Fig. 82.9 Energía resultante en el punto 4 según el tramo 4-3, curva 3

El punto de funcionamiento se encontrará como el punto de intersección entre las curvas resultantes de sumar las ecuaciones 2 y 3 en paralelo (curvas de las figuras 82.7 y 85.9) y la curva resultante de la ecuación 1 (figura 82.6). La representación de dichas diversas curvas y su punto de intersección se encuentra en la figura 82.10.

En el punto de intersección, se leen en la figura 82.10 las características siguientes.

$$Q_{1\text{-}4} = 100\ m^3/h$$

$$\frac{P_4}{\rho g} = H_4 = 12\,m$$

Al deshacer las curvas partiendo del punto de intersección, se obtienen los caudales que fluyen por cada uno de los tramos restantes (v. figura 82.10). Los valores resultantes son (obsérvese que se cumple la ecuación de continuidad):

$$Q_{4\text{-}2} = 63\ m^3/h \qquad Q_{4\text{-}3} = 37\ m^3/h$$

De la figura 82.11 se obtienen los puntos de funcionamiento para las bombas 1, 2 y 3, siendo:

Bomba 1: H = 78 m; Q = 35 m^3/h.

Bomba 2 = Bomba 3; H = 39 m; Q = 65 m^3/h

Obsérvese que en todo momento se cumple la ecuación de continuidad, además, la altura de elevación de las bombas 2 y 3 en serie es la misma que la de la bomba 1, como era de esperar.

Para hallar el punto de funcionamiento de la bomba 4, basta con entrar con el caudal circulante en el tramo 4-3, que era de $Q_{4\text{-}3}$= 37 m^3/h, a la curva característica de la bomba 4 (figura 82.2), y se obtiene:

$$H_{bomba\ 4} = 49\ m;\ Q_{bomba\ 4} = Q_{4\text{-}3} = 37\ m^3/h.$$

El mismo resultado se habría obtenido si se hubiesen sustituido los valores del punto de funcionamiento en las ecuaciones 1, 2, 3 y 4.

2. Determinación de la cota del grupo de bombeo.

Se aplica Bernoulli entre el nivel del líquido en el depósito 1 y las bridas de aspiración de la bomba 1 y la bomba 2:

$$\frac{p_1}{\rho\, g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{aspb1}}{\rho\, g} + z_{B1} + \frac{v_{B1}^2}{2g} + \Delta h_{1B1}$$

$$\frac{p_1}{\rho\, g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{asp2}}{\rho\, g} + z_{B2} + \frac{v_{B2}^2}{2g} + \Delta h_{1B2}$$

Puesto que $z_1 = 0$; y $\frac{V_1^2}{2g} = 0$; trabajando con presiones absolutas, se tiene:

$$\frac{p_1}{\rho\, g} = \frac{p_{brida\,1}}{\rho\, g} + z_{B1} + \frac{v_{B1}^2}{2g} + \Delta h_{1B1}$$

$$\frac{p_1}{\rho\, g} = \frac{p_{brida\,2}}{\rho\, g} + z_{B2} + \frac{v_{B2}^2}{2g} + \Delta h_{1B2}$$

Según la definición de la altura de aspiración neta disponible, se tiene:

$$NPSHd = \frac{P_{Brida}}{\rho\, g} + \frac{V^2}{2\, g} - \frac{P_{vapor}}{\rho\, g}$$

de donde, para cada una de las dos bombas:

$$NPSHd = \frac{P_1}{\rho\, g} - \left(\frac{P_{vapor}}{\rho\, g} + z + \Delta h_{aspiración} \right)$$

Por falta de datos, se despreciarán las pérdidas de carga desde la brida de aspiración de las bombas B1 y B2, hasta el punto de intersección con el conducto de aspiración común.

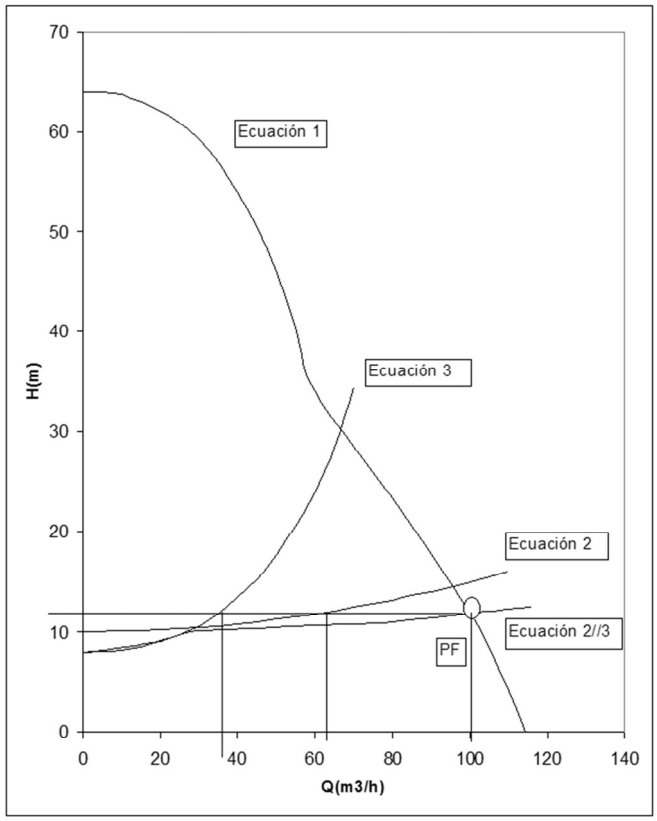


Fig. 82.10 Representación de las curvas resultantes de las ecuaciones 1, 2 y 3, y su punto de intersección

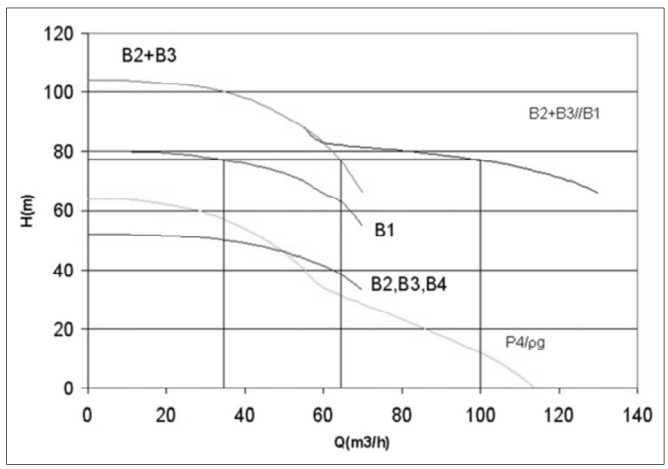


Fig. 82.11 Caudales circulantes en cada tramo

Puesto que se conoce el caudal que circula por cada una de las bombas, B_1 y B_2, cuyo valor es:

$Q_1 = 35\ m^3/h$. Y $Q_2 = 65\ m^3/h$, Entrando con dichos valores en las gráficas de las bombas, (v.fig. 82.2 y 82.3), se obtiene:

NPSHr1: 2 m

NPSHr2: 3,5 m

La condición de no cavitación para cualquier bomba es NPSHd > NPSHr. El caso más desfavorable aparece en la bomba 2, con lo cual, si esta bomba no cavita, no cavitará la 1.

Datos necesarios:

Presión de vapor del agua a 20ºC = 2.337 Pa
Densidad del agua = 1.000 kg/m^3
Presión atmosférica, en metros de columna mercurio = 0,76 m
Densidad del mercurio = 13.600 kg/m^3
En consecuencia:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{0,76*13.600*9,8}{1.000*9,8} = 10,34\,m$$

$$\Delta h_{1B} = 6.480\,Q^2("Q\,en\,\frac{m^3}{s}") = \frac{6.480}{3.600^2}Q^2("Q\,en\,\frac{m^3}{h}") = 0,0005\,Q^2 = 0,0005*100^2 = 5\,m$$

$$\frac{p_v}{\rho g} = \frac{2.337}{1.000*9,8} = 0,24\,m$$

$$z = \frac{p_1}{\rho g} - (\frac{p_v}{\rho g} + NPSHd + \Delta h_{1asp}) = 10,34 - (5 + 3,5 + 0,24) = 1,6\,m$$

Si el grupo de bombeo se sitúa 1,6 m por encima del nivel del líquido del depósito inferior, la bomba 2 cavitará. Si se toma como margen de seguridad admisible 0,5 m, el grupo de bombeo debería estar situado como máximo a 1,1 m por encima del nivel del líquido del depósito 1.

3. Determine la velocidad de giro de la bomba 4 para que el caudal que circula por el tramo 1-4 disminuya en un 2,5%.

Para encontrar la velocidad de giro de la bomba 4 cuando el caudal que circula por 1-4 disminuye, se debe hallar el nuevo punto de funcionamiento del sistema. Este nuevo punto será el punto de intersección de la curva de la ecuación 1 y el nuevo caudal (Q' = 97,5 m^3/h). La altura correspondiente a este caudal es: H' = 13,5 m. (v. figura 82.12).

Puesto que la curva característica para el tramo 4-2 ha de ser la misma que la obtenida en el primer apartado, desplazándose horizontalmente para H´= 13,5 m, se obtiene el caudal que circula por el tramo 4-2.

$$Q'_{4\text{-}2} = 82,5\ m^3/h$$

Según la ecuación de continuidad:

$$Q_{4\text{-}1} = Q_{4\text{-}2} + Q_{4\text{-}3}$$

con lo cual, la curva característica del tramo 4-3 deberá pasar por el punto:

$$Q'_{4\text{-}3} = 15\ m^3/h$$

$$H'_{4\text{-}3} = P_4/\rho\, g = 13{,}5\ m$$

Para que la curva característica del tramo 4-3 pase por este punto, será necesario que la bomba 4 tenga una altura de elevación de $H_{B4} = 46{,}83$ m (v. figura 82.8 y ecuación 3).

$$H_{B4} = z_3 - z_4 - \frac{P_4}{\rho g} + \frac{19.440}{3.600^2} Q^2_{4-3} = 60 - 13{,}5 + \frac{19.440}{3.600^2} 15^2 = 46{,}83\ m$$

Se debe ahora trazar una curva de afinidad que pase por el punto H =46,83 m, Q = 15 m^3/h.

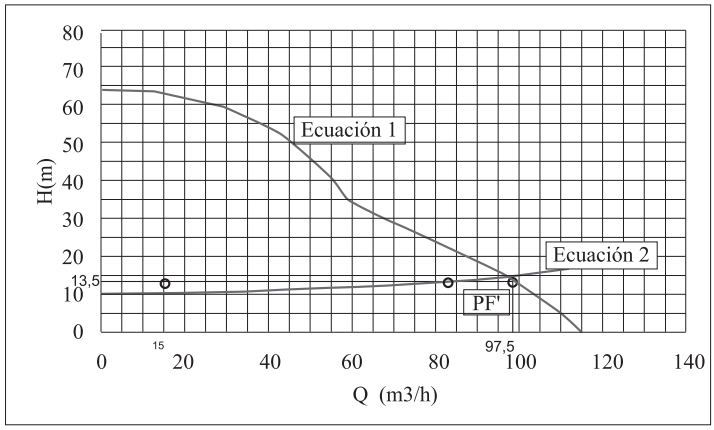


Fig. 82.12
Nuevo punto de funcionamiento

La ecuación de la curva de afinidad será:

$$H = k\, Q'^2_{4-3}$$

$$H = \frac{46{,}83}{15^2} Q^2_{4-3} = 0{,}2081\, Q'^2_{4-3}$$

La curva de afinidad cortará en un determinado punto a la curva característica de la bomba 4. Dicho punto se detalla en la figura 82.13 y tiene por valores: H = 52 m, Q = 16 m^3/h.

Entre los puntos H = 52 m, Q = 16 m^3/h, y H = 46,83 m, Q = 15 m^3/h, ambos pertenecientes a la curva de afinidad, se podrán aplicar las leyes de semejanza.

Igualando las cifras características de altura de elevación, se tiene:

$$\frac{Hg}{\omega_4^2 D^2} = \frac{H'g}{\omega_{4'}^2 D^2}$$

Sabiendo que D = 195 mm; $\omega_4 = 2.900$ rpm.

$$\omega'^2_4 = \frac{H'\omega_4^2}{H} = \frac{46,83 * 2.900^2}{52}$$

$$\omega'_4 = 2.752 \text{ rpm}$$

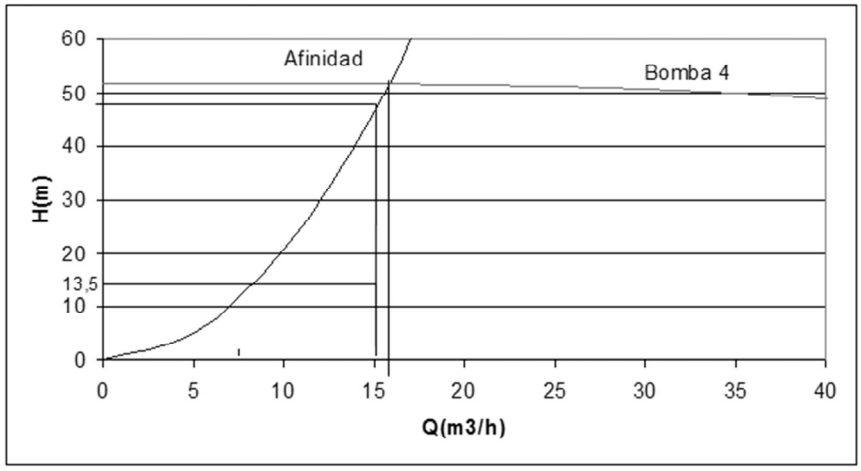


Fig. 82.13 Puntos entre los cuales se aplica semejanza

1.b Método alternativo para la resolución del apartado primero de este problema. Se trata de resolver directamente el sistema de ecuaciones hallado, en lugar de realizar la representación grafica. El sistema de ecuaciones que caracteriza el apartado 1 del problema constaba de las ecuaciones siguientes:

$$H_{grupo} = \frac{p_4}{\rho\, g} + z_4 + k_{14}\, Q_{14}^2 \quad \text{(ecuación 1)}$$

$$\frac{p_4}{\rho\, g} = z_2 - z_4 + k_{42} Q_{42}^2 \quad \text{(ecuación 2)}$$

$$\frac{p_4}{\rho\, g} = z_3 - z_4 - H_{B4} + k_{43} Q_{43}^2 \quad \text{(ecuación 3)}$$

$$Q_{14} = Q_{42} + Q_{43} \text{ (ecuación 4)}$$

Obsérvese que, este sistema de ecuaciones, que define el comportamiento del fluido en el apartado 1 (sistema definido en la figura 82.1), consta de cuatro incógnitas, Q_{14}, Q_{42}, Q_{43} y P_4. No obstante, la energía comunicada por el grupo de bombeo constituido por las bombas 1,2,3 y denominado en la ecuación 1 como H_{grupo}, así como la energía comunicada por la bomba 4, H_{B4}, no son conocidas en forma de ecuación, sino en forma gráfica; de aquí que el apartado 1 se resolviese gráficamente.

Para resolver de nuevo este apartado en forma analítica, será necesario determinar la ecuación que caracteriza la energía comunicada al fluido por el grupo de bombeo H_{grupo} y por la bomba 4 H_{B4}.

La curva altura/caudal, característica de la bomba 4 viene dada por la figura 82.2 para un diámetro de rodete de 195 mm. La interpolación de esta curva, para un caudal dado en [m^3/s], da lugar a la ecuación siguiente:

$$H_{B4} = 52 - 5.301.439,4951\, Q_{43}^3 + 76.933,0569\, Q_{43}^2 - 472,3481\, Q_{43},$$

donde H [m]; Q [m^3/s];

Por otro lado, la curva altura/caudal del grupo de bombeo, H_{grupo}, representa el comportamiento de las bombas 2 y 3 en serie, y estas en paralelo con la bomba 1. La curva característica del grupo de bombeo se ha representado

en la figura 82.4, donde se le ha dado el nombre de (B2+B3)//B1. La interpolación de dicha curva cuando el caudal se mide en m^3/s, ha dado lugar a la ecuación siguiente:

$$H_{grupo} = 103,9861 + 353.699.107.344,00\, Q_{14}^6 - 33.844.751.212,00\, Q_{14}^5 + 832.219.232,75\, Q_{14}^4 + 7.983.219,3945\, Q_{14}^3 - 497.404,4859\, Q_{14}^2 + 3.146,0543\, Q_{14}$$

donde H [m]; Q [m^3/s].

Véase, por otro lado, que cada uno de los términos de las ecuaciones 1, 2 y 3 representa la energía por unidad de peso asociada al fluido $\left[\frac{J}{Kg * g}\right] = [m]$; las constantes K_{14}, K_{42} y K_{43} están definidas en el enunciado del problema y valen: $K_{14} = 25920 \left[\frac{s^2}{m^5}\right]$, $K_{42} = 6480 \left[\frac{s^2}{m^5}\right]$, $K_{43} = 19440 \left[\frac{s^2}{m^5}\right]$, siendo las unidades de los caudales definidos en las ecuaciones 1, 2, 3, 4, H_4 y H_{grupo} de $\left[\frac{m^3}{s}\right]$. Es decir, el sistema de unidades utilizado para definir dichas ecuaciones es el sistema internacional.

Sustituyendo todos los términos en las cuatro ecuaciones constitutivas, se obtiene: (Obsérvese que, al igual que se ha hecho en la resolución precedente, el término que caracteriza la energía cinética en el punto 4 se ha despreciado.)

$$\begin{aligned} &103,9861+353.699.107.344,0\,Q_{14}^6-33.844.751.212,0\,Q_{14}^5+\\ &+832.219.232,75\,Q_{14}^4+7.983.219,3945\,Q_{14}^3-497.404,4859\,Q_{14}^2\\ &+3.146,0543\,Q_{14}=\frac{p_4}{\rho\,g}+40+(6.480+25.920)\,Q_{14}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{p_4}{\rho\,g}-10=6480\,Q_{42}^2 \quad (2)$$

$$\frac{p_4}{\rho\,g}-60+52-5.301.439,4951\,Q_{43}^3+76.933,0569\,Q_{43}^2-472,3481\,Q_{43}=19.440\,Q_{43}^2 \quad (3)$$

$$Q_{14}=Q_{42}+Q_{43} \quad (4)$$

En principio, la resolución de este sistema de ecuaciones no debería conllevar mayor problema, aunque, debido a que algunas de las variables están elevadas a la sexta potencia, otras al cubo y otras al cuadrado, aparecen ciertos problemas matemáticos que ciertos software no pueden resolver, con lo que, para la resolución de este apartado, se ha optado por reducir el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, a una ecuación con una sola incógnita, resolviendo la ecuación resultante mediante aproximaciones sucesivas.

Inicialmente, se ha sustituido la ecuación 2 en 1 y en 3, y se ha obtenido

$$\begin{aligned} &103,9861+353.699.107.344,0\,Q_{14}^6-33.844.751.212,0\,Q_{14}^5+832.219.232,75\,Q_{14}^4\\ &+7.983.219,3945\,Q_{14}^3-497.404,4859\,Q_{14}^2\\ &+3.146,0543\,Q_{14}=+10+6.480\,Q_{42}^2+40+(6.480+25.920)\,Q_{14}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &10+6.480\,Q_{42}^2-60+52-5.301.439,4951\,Q_{43}^3+\\ &+76.933,0569\,Q_{43}^2-472,3481\,Q_{43}=19.440\,Q_{43}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Despejando $Q_{4\text{-}2}$ de la ecuación 6 y sustituyéndolo en 4 y 5 se obtiene:

$$Q_{14}=\sqrt{\frac{-2+5.301.439,49\,Q_{43}^3-57.493,05\,Q_{43}^2+472,34\,Q_{43}}{6.480}}+Q_{43} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &53,98+353699107344,0\,Q_{14}^6-33844751212,0\,Q_{14}^5+832219232,75\,Q_{14}^4+\\ &+7983219,3945\,Q_{14}^3-529804,48\,Q_{14}^2+\\ &+3146,05Q_{14}=-2+5301439,49\,Q_{43}^3-57493,05\,Q_{43}^2+472,34\,Q_{43} \end{aligned} \quad (8)$$

Sustituyendo, por último la ecuación 7 en la 8, se obtiene una ecuación que depende únicamente de Q_{43}:

$$53,98+353699107344,0\left\{\sqrt{\frac{-2+5.301.439,49\,Q_{43}^3-57.493,05\,Q_{43}^2+472,34\,Q_{43}}{6.480}}+Q_{43}\right\}^6$$

$$-33844751212,0\left\{\sqrt{\frac{-2+5.301.439,49\,Q_{43}^3-57.493,05\,Q_{43}^2+472,34\,Q_{43}}{6.480}}+Q_{43}\right\}^5$$

$$+832219232,75\left\{\sqrt{\frac{-2+5.301.439,49\,Q_{43}^3-57.493,05\,Q_{43}^2+472,34\,Q_{43}}{6.480}}+Q_{43}\right\}^4$$

$$+7983219,3945\left\{\sqrt{\frac{-2+5.301.439,49\,Q_{43}^3-57.493,05\,Q_{43}^2+472,34\,Q_{43}}{6.480}}+Q_{43}\right\}^3$$

$$-529804,48\left\{\sqrt{\frac{-2+5.301.439,49\,Q_{43}^3-57.493,05\,Q_{43}^2+472,34\,Q_{43}}{6.480}}+Q_{43}\right\}^2$$

$$+3146,05\left\{\sqrt{\frac{-2+5.301.439,49\,Q_{43}^3-57.493,05\,Q_{43}^2+472,34\,Q_{43}}{6.480}}+Q_{43}\right\}$$

$$+2-5.301.439,49\,Q_{43}^2+57.493,05\,Q_{43}^2-472,34\,Q_{43}=0$$

De la resolución de esta ecuación, se obtiene como una de las posibles soluciones: $Q_{43} = 0,00978125 \left[\frac{m^3}{s}\right]$.

Sustituyendo el valor de Q_{43} en la ecuación 7, se obtiene $Q_{14} = 0,02770013 \left[\frac{m^3}{s}\right]$; al sustituir estos dos valores en la ecuación 4 se obtendrá $Q_{42} = 0,01791888 \left[\frac{m^3}{s}\right]$. Por último, al sustituir el valor de Q_{42} en la ecuación 2, se determina $\frac{P_4}{\rho\, g} = 12,08$ [m].

Dando los caudales hallados en $\left[\frac{m^3}{h}\right]$, se obtiene

$$Q_{43} = 35,2125 \left[\frac{m^3}{h}\right]; \quad Q_{14} = 99,7204 \left[\frac{m^3}{h}\right]; \quad Q_{42} = 64,5079 \left[\frac{m^3}{s}\right].$$

Obsérvese que el resultado obtenido es prácticamente idéntico al hallado en el apartado inicial del problema.

Problema 83

Enunciado

El esquema definido en la figura 83.1 muestra una instalación de bombeo de agua. Las cotas de los puntos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 son respectivamente. Z1 = 0m; Z2 = 20m; Z3 = 50m; Z4 = 20m; Z5 = 40m; Z6 = 80m.

Se conoce que las pérdidas de carga en cada uno de los tramos están dadas por:

$$\Delta h_{1-2} = 5.000 * Q^2_{1-2} \;\; ; \;\; \Delta h_{2-3} = 8.000 * Q^2_{2-3} ; \;\; \Delta h_{4-5} = 10.000 * Q^2_{4-5} ;$$
$$\Delta h_{2-4} = 3.000 * Q^2_{2-4} ; \; \Delta h_{4-6} = 6.000 * Q^2_{4-6}$$

Recuérdese que la pérdida de carga genérica está definida por: $\Delta h = f_i \frac{L_i}{D_i^5} \frac{8\, Q_i^2}{\pi^2 g}$

Se conoce además que la curva característica de cada una de las bombas está definida por:

$$H_{B1} = 100 - 3.000 * Q^2_{1-2} ; \quad H_{B2} = 40 - 6.000 * Q^2_{4-6}$$

Determinar:

1. El caudal circulante en cada tramo, así como las presiones en cada uno de los nudos. En el esquema siguiente se indica el sentido de circulación del fluido.
2. Si se conoce que la longitud de cada uno de los 5 tramos de conducto es de 500 m. y se estima que f = 0,02. Hallar el diámetro de cada uno de los conductos. Desestimar las posibles pérdidas de las singularidades.
3. Comentar como se podría mejorar la instalación partiendo de los datos obtenidos en los apartados precedentes. Determinar los nuevos caudales con la mejora establecida. (Realizar las hipótesis que se crean oportunas).

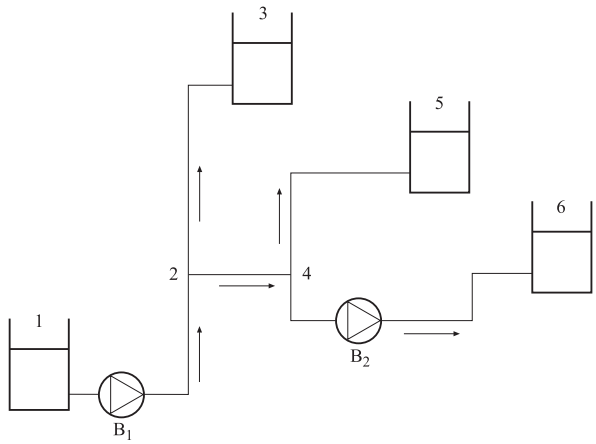


Fig. 83.1
Esquema de la instalación de distribución de agua bajo estudio

Resolución

1. Con el fin de generar el conjunto de ecuaciones que caractericen el sistema de distribución definido en la figura 83.1, se aplicará la ecuación de Bernoulli para fluido incompresible entre los extremos de los diferentes tramos que conforman el sistema.

Se aplica Bernoulli entre los tramos del sistema:

Así, aplicando Bernoulli entre los puntos 1 y 2, se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+Hb_{1\to 2}=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_{1\to 2}^2}{2g}+z_2+\Delta h_{1\to 2}$$

Trabajando en presiones relativas, $P_1 = 0$; Puesto que no se conocen las dimensiones del depósito 1, se establece que la velocidad del fluido en dicho depósito es despreciable, $V_1 \cong 0$, de donde:

$$Hb_{1\to 2}=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_{1\to 2}^2}{2g}+z_2+\Delta h_{1\to 2}$$

$$\left(100-3.000\cdot Q^2{}_{1\to 2}\right)=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_{1\to 2}^2}{2g}+20+5.000\cdot Q^2{}_{1\to 2}\ \to\to\to\to\ (1)$$

Realizando el mismo proceso entre los puntos 2 y 3, se obtiene:

$$\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_{2\to 3}^2}{2g}+z_2=\frac{P_3}{\rho g}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3+\Delta h_{2\to 3}$$

Considerando que la sección del depósito 3 es muy grande, comparada con la sección de los conductos, se puede concluir que $V_3 \cong 0$, llegando a:

$$\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_{2\to 3}^2}{2g}+20=50+8.000\cdot Q^2{}_{2\to 3}\ \to\to\to\to\ (2)$$

Operando del mismo modo en el tramo comprendido entre los puntos 2 y 4, se obtiene:

$$\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_{2\to 4}^2}{2g}+z_2=\frac{P_4}{\rho g}+\frac{V_{2\to 4}^2}{2g}+z_4+\Delta h_{2\to 4}$$

Véase que $V_2 = V_4$; y $Z_2 = Z_4$.

$$\frac{P_2}{\rho g}=\frac{P_4}{\rho g}+\Delta h_{2\to 4}$$

$$\frac{P_2}{\rho g} = \frac{P_4}{\rho g} + 3.000 \cdot Q^2_{2\to4} \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow (3)$$

Entre los puntos 4 y 5, se concluye que:

$$\frac{P_4}{\rho g} + \frac{V^2_{4\to5}}{2g} + z_4 = \frac{P_5}{\rho g} + \frac{V^2_5}{2g} + z_5 + \Delta h_{4\to5}$$

Puesto que $V_5 \cong 0$ y $P_5 = 0$.

$$\frac{P_4}{\rho g} + \frac{V^2_{4\to5}}{2g} + z_4 = z_5 + \Delta h_{4\to5}$$

$$\frac{P_4}{\rho g} + \frac{V^2_{4\to5}}{2g} + 20 = 40 + 10.000 \cdot Q^2_{4\to5} \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow (4)$$

Y, finalmente, para el tramo comprendido entre los puntos 4-6 se obtiene:

$$\frac{P_4}{\rho g} + \frac{V^2_{4\to6}}{2g} + z_4 + Hb_{4\to6} = \frac{P_6}{\rho g} + \frac{V^2_6}{2g} + z_6 + \Delta h_{4\to6}$$

Dado que $V_6 \cong 0$ y $P_6 = 0$, se obtiene:

$$\frac{P_4}{\rho g} + \frac{V^2_{4\to6}}{2g} + z_4 + Hb_{4\to6} = z_6 + \Delta h_{4\to6}$$

$$\frac{P_4}{\rho g} + \frac{V^2_{4\to6}}{2g} + 20 + 40 - 6.000 \cdot Q^2_{4\to6} = 80 + 6.000 \cdot Q^2_{4\to6} \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow (5)$$

Puesto que a priori no se conoce el diámetro de los conductos, se despreciarán los términos $\frac{V^2_{1\to2}}{2g}$; $\frac{V^2_{2\to3}}{2g}$; $\frac{V^2_{4\to6}}{2g}$; $\frac{V^2_{4\to6}}{2g}$; véase que en realidad estos términos son muy pequeños comparados con el resto.

Con el fin de obtener un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, recordar cabe que las incógnitas son los caudales en cada tramo y las presiones en las intersecciones 2 y 4, se deberá aplicar la ecuación de continuidad en dichos puntos.

Para la intersección 2, se concluye:

$$Q_{1\to2} = Q_{2\to3} + Q_{2\to4} \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow (6)$$

Y para la intersección 4:

$$Q_{2\to4} = Q_{4\to5} + Q_{4\to6} \quad \to\to\to\to (7)$$

Obsérvese que el sistema de ecuaciones determinado, ecuaciones de la (1) a la (7), es un sistema de ecuaciones algebraicas cuadrático, su resolución dará lugar al resultado requerido. Es interesante destacar que dicho sistema de ecuaciones da lugar a un conjunto de soluciones posibles, de entre ellas, la única válida es la que se compone de valores reales y positivos.

De la resolución del sistema de ecuaciones hallado, se obtiene:

$$Q_{12} = 0,075189 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{23} = 0,024426 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{24} = 0,050763 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{45} = 0,026538 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{46} = 0,024225 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_2 = 3.41123*10^5 \text{ Pa}$$

$$P_4 = 2.65286*10^5 \text{ Pa}$$

2. Puesto que en el primer apartado del problema se han determinado los caudales que circulan en cada tramo, la determinación del diámetro de cada conducto es directa. Únicamente cabe recordar que las pérdidas de energía debidas a la fricción entre el fluido y el conducto están regidas por la ecuación de Darcy-Weisbach.

$$\Delta h_{i\to j} = K_{i\to j} Q^2{}_{i\to j} = f_{i\to j} \frac{L_{i\to j}}{D_{i\to j}{}^5} \frac{8\, Q^2{}_{i\to j}}{\pi^2 g}$$

En el presente ejercicio, el valor de las diversas $K_{i\to j}$ fueron dadas en el enunciado del problema, véase además que la ecuación anterior se transforma en:

$$f_{i\to j} \frac{L_{i\to j}}{D_{i\to j}{}^5} \frac{8}{\pi^2 g} = K_{i\to j} \quad \to\to\to\to (8)$$

El enunciado del problema estipula que, para todos los tramos, tanto el valor del coeficiente de fricción $f_{i\to j}$ como la longitud del tramo $L_{i\to j}$ se pueden considerar conocidas y constantes, es decir:

$$f = f_{1-2} = f_{2-3} = f_{2-4} = f_{4-5} = f_{4-6} = 0.02$$

$$L = L_{1-2} = L_{2-3} = L_{2-4} = L_{4-5} = L_{4-6} = 500 \text{ m}$$

Así, el diámetro de cada tramo se determinará, partiendo de la expresión 8.

$$D_{i\to j} = \sqrt[5]{f_{i\to j}\,\frac{L_{i\to j}}{K_{i\to j}}\,\frac{8}{\pi^2 g}}$$

Sustituyendo los valores de los diversos parámetros en cada uno de los tramos, se obtiene:

Tramo 1-2:

$$D_{1-2} = \sqrt[5]{f\,\frac{L}{K_{1-2}}\,\frac{8}{\pi^2 g}} = \sqrt[5]{0,02\,\frac{500}{5.000}\,\frac{8}{\pi^2 \cdot 9,81}} = 0,17524 \text{ m}$$

Tramo 2-3:

$$D_{2-3} = \sqrt[5]{f\,\frac{L}{K_{2-3}}\,\frac{8}{\pi^2 g}} = \sqrt[5]{0,02\,\frac{500}{8.000}\,\frac{8}{\pi^2 \cdot 9,81}} = 0,15752 \text{ m}$$

Tramo 2-4:

$$D_{2-4} = \sqrt[5]{f\,\frac{L}{K_{2-4}}\,\frac{8}{\pi^2 g}} = \sqrt[5]{0,02\,\frac{500}{3.000}\,\frac{8}{\pi^2 \cdot 9,81}} = 0,19409 \text{ m}$$

Tramo 4-5:

$$D_{4-5} = \sqrt[5]{f\,\frac{L}{K_{4-5}}\,\frac{8}{\pi^2 g}} = \sqrt[5]{0,02\,\frac{500}{10.000}\,\frac{8}{\pi^2 \cdot 9,81}} = 0,15255 \text{ m}$$

Tramo 4-6:

$$D_{4-6} = \sqrt[5]{f\,\frac{L}{K_{4-6}}\,\frac{8}{\pi^2 g}} = \sqrt[5]{0,02\,\frac{500}{6.000}\,\frac{8}{\pi^2 \cdot 9,81}} = 0,16896 \text{ m}$$

En este punto es interesante remarcar que los diversos diámetros obtenidos, no son posibles en realidad, dado que no existen conductos de estas dimensiones, en el siguiente apartado del problema, se trabaja con esta cuestión.

3. Con el fin de mejorar el sistema de distribución de agua, se calcula inicialmente cual es la velocidad de circulación del fluido en cada tramo. De los apartados precedentes, se conoce el caudal y el diámetro de cada conducto, con lo que la determinación de la velocidad es directa.

$$Q_{i\to j} = V_{i\to j} \cdot S \to \text{donde} \quad S = \pi\left(\frac{D^2_{i\to j}}{4}\right)$$

Ecuación que se puede representar como:

$$V_{i\to j} = \frac{4\,Q_{i\to j}}{\pi\,D^2_{i\to j}} \to\to\to\to (9)$$

Sustituyendo los valores para cada uno de los tramos se obtiene:

$$V_{1-2} = \frac{4\,Q_{1-2}}{\pi\,D^2_{1-2}} = 3{,}11743\,\frac{m}{s}$$

$$V_{2-3} = \frac{4\,Q_{2-3}}{\pi\,D^2_{2-4}} = 1{,}25340\,\frac{m}{s}$$

$$V_{2-4} = \frac{4\,Q_{2-4}}{\pi\,D^2_{2-4}} = 1{,}71574\,\frac{m}{s}$$

$$V_{4-5} = \frac{4\,Q_{4-5}}{\pi\,D^2_{4-5}} = 1{,}45193\,\frac{m}{s}$$

$$V_{4-6} = \frac{4\,Q_{4-6}}{\pi\,D^2_{4-6}} = 1{,}08047\,\frac{m}{s}$$

En este punto se observa que hay dos posibles mejoras a realizar, una sería el conseguir que la velocidad del fluido en cada tramo fuese lo más cercana a 1 m/s, y la segunda sería el conseguir este objetivo utilizando diámetros que existen en realidad.

Con el fin de conseguir estos objetivos, se determinará inicialmente cual es el diámetro que deberían tener los diversos conductos para que la velocidad de circulación del fluido en cada tramo sea de 1m/s. Para ello, se utilizarán las siete ecuaciones que caracterizaban el sistema de tuberías, ecuaciones de (1) a (7), y se transformaran con el fin de darlas en función del diámetro de cada tramo y definiendo la velocidad de circulación como 1 m/s.

Para el tramo 1-2, la ecuación de Bernoulli tomaba la forma:

$$Hb_{1\to 2} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V^2_{1\to 2}}{2g} + z_2 + \Delta h_{1\to 2}$$

$$\left(100 - 3.000\cdot\left(V_{12}\cdot\pi\frac{D^2_{12}}{4}\right)^2\right) = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V^2_{1\to 2}}{2g} + 20 + \left(5.000\cdot\left(V_{12}\cdot\pi\frac{D^2_{12}}{4}\right)^2\right)$$

$$\left(100 - 3.000\cdot\pi^2\frac{D^4_{23}}{16}\right) = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2g} + 20 + \left(5.000\cdot\pi^2\frac{D^4_{23}}{16}\right) \to\to\to\to (11)$$

En el tramo 2-3 se establece:

$$\frac{P_2}{\rho g} + \frac{V^2_{2\to 3}}{2g} + z_2 = z_3 + \Delta h_{2\to 3}$$

$$\frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2g} + 20 = 50 + \left(8.000\cdot\pi^2\frac{D^4_{23}}{16}\right) \to\to\to\to (12)$$

Para el tramo 2-4 se tiene:

$$\frac{P_2}{\rho g} = \frac{P_4}{\rho g} + \Delta h_{2\to 4}$$

$$\frac{P_2}{\rho g} = \frac{P_4}{\rho g} + \left(3.000\cdot\pi^2\frac{D^4_{24}}{16}\right) \to\to\to\to (13)$$

En el tramo 4-5 se concluye:

$$\frac{P_4}{\rho g} + \frac{V^2_{4\to 5}}{2g} + z_4 = z_5 + \Delta h_{4\to 5}$$

$$\frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{2g} + 20 = 40 + \left(10.000\cdot\pi^2\frac{D^4_{45}}{16}\right) \to\to\to\to (14)$$

Y para el tramo 4-6:

$$\frac{P_4}{\rho g} + \frac{V^2_{4\to 6}}{2g} + z_4 + Hb_{4\to 6} = z_6 + \Delta h_{4\to 6}$$

$$\frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{2g} + 20 + \left(40 - 6.000\cdot\pi^2\frac{D^4_{46}}{16}\right) = 80 + \left(6.000\cdot\pi^2\frac{D^4_{46}}{16}\right) \to\to\to\to (15)$$

De la aplicación de la ecuación de continuidad en el punto 2, se obtiene:

$$Q_{1\to 2} = Q_{2\to 3} + Q_{2\to 4}$$

$$v_{1\to 2}\cdot\pi\frac{D^2_{1\to 2}}{4} = v_{2\to 3}\cdot\pi\frac{D^2_{2\to 3}}{4} + v_{2\to 4}\cdot\pi\frac{D^2_{2\to 4}}{4}$$

Puesto que las velocidades se establecen de 1m/S, esta ecuación tomará la forma:

$$D^2_{1\to 2} = D^2_{2\to 3} + D^2_{2\to 4} \to\to\to\to (16)$$

Aplicando la ecuación de continuidad en el punto 4, se obtiene:

$$Q_{2\to 4} = Q_{4\to 5} + Q_{4\to 6}$$

Y después de aplicar el mismo proceso que para la ecuación anterior se obtiene:

$$D^2_{2\to 4} = D^2_{4\to 5} + D^2_{4\to 6} \to\to\to\to (17)$$

De la resolución del sistema de ecuaciones (11) a (17), se obtendrá el valor de cada diámetro así como el valor de la presión en los puntos 2 y 4. Al igual que en el primer apartado, este sistema de ecuaciones no tiene una solución única, con lo que de las diversas soluciones posibles se elegirá la que tenga todos los valores reales y positivos. Estos son:

$$D_{1\to 2} = 0,40176 \text{ m}$$

$$D_{2\to 3} = 0,25769 \text{ m}$$

$$D_{2\to 4} = 0,30804 \text{ m}$$

$$D_{4\to 5} = 0,22272 \text{ m}$$

$$D_{4\to 6} = 0,21280 \text{ m}$$

$$P_2 = 5,08037\cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_4 = 3,44593\cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Puesto que estos diámetros de conductos, no existen en realidad, se aproximan a los valores siguientes, diámetros nominales más próximos:

$$D_{real 1\to 2} = 0,400 \text{ m}$$

$$D_{real 2\to 3} = 0,250 \text{ m}$$

$$D_{real 2\to 4} = 0,300 \text{ m}$$

$$D_{real 4\to 5} = 0,250 \text{ m}$$

$$D_{real 4\to 6} = 0,200 \text{ m}$$

Con estos diámetros reales, y conocidas la longitud y el factor de fricción de cada tramo, se realiza de nuevo el mismo ejercicio que el definido en el apartado primero de este problema, es decir, se determinan los nuevos caudales de circulación para cada tramo. El sistema de ecuaciones ahora será:

$$\left(100-3.000\cdot Q_{1\to 2}{}^{2}\right)=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{8\,Q^2_{1\to 2}}{\pi^2 g 0,4^4}+20+0,02\frac{500}{0,4^5}\,\frac{8\,Q^2_{1\to 2}}{\pi^2 g}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow(1-2)$$

$$\frac{P_2}{\rho g}+\frac{Q^2_{2\to 3}}{\pi^2 g 0,25^4}+20=50+0,02\frac{500}{0,25^5}\,\frac{8\,Q^2_{2\to 3}}{\pi^2 g}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow(2-2)$$

$$\frac{P_2}{\rho g}=\frac{P_4}{\rho g}+0,02\frac{500}{0,3^5}\,\frac{8\,Q^2_{2\to 4}}{\pi^2 g}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow(3-2)$$

$$\frac{P_4}{\rho g}+\frac{Q^2_{4\to 5}}{\pi^2 g 0,25^4}+20=40+0,02\frac{500}{0,25^5}\,\frac{8\,Q^2_{4\to 5}}{\pi^2 g}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow(4-2)$$

$$\frac{P_4}{\rho g}+\frac{Q^2_{4\to 6}}{\pi^2 g 0,2^4}+20+40-6.000\cdot Q_{4\to 6}{}^{2}=80+0,02\frac{500}{0,2^5}\,\frac{8\,Q^2_{4\to 6}}{\pi^2 g}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow(5-2)$$

$$Q_{1\to 2}=Q_{2\to 3}+Q_{2\to 4}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow(6-2)$$

$$Q_{2\to 4}=Q_{4\to 5}+Q_{4\to 6}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow(7-2)$$

De la resolución de este sistema de ecuaciones, se obtienen los siguientes resultados:

$$Q_{12}=0,127076\ m^3/s$$

$$Q_{23}=0,0155529\ m^3/s$$

$$Q_{24}=0,111523\ m^3/s$$

$$Q_{45}=0,085068\ m^3/s$$

$$Q_{46}=0,0264548\ m^3/s$$

$$P_2=2,962576*10^5\ Pa$$

$$P_4=2,547678*10^5\ Pa$$

Las velocidades de circulación en cada tramo serán:

$$V_{1-2} = \frac{4\ Q_{1-2}}{\pi\ D_{1-2}^{\ 2}} = \frac{4*0,127076}{\pi*0,4^2} = 1,0112\ \frac{m}{s}$$

$$V_{2-3} = \frac{4*0,0155529}{\pi*0,25^2} = 0,3168\ \frac{m}{s}$$

$$V_{2-4} = \frac{4*0,111523}{\pi*0,3^2} = 1,577\ \frac{m}{s}$$

$$V_{4-5} = \frac{4*0,085068}{\pi*0,25^2} = 1,733\ \frac{m}{s}$$

$$V_{4-6} = \frac{4*0,0264548}{\pi*0,2^2} = 0,84208\ \frac{m}{s}$$

A partir de este punto se puede ir modificando diámetros con el fin de seguir optimizando el sistema, por ejemplo, si se mantienen todos los diámetros y se utiliza: $D_{real\,2\to3} = 0.3\ m$; $D_{real\,2\to4} = 0.28\ m$ se obtiene:

$$Q_{12} = 0,127087\ m^3/s$$

$$Q_{23} = 0,024063\ m^3/s$$

$$Q_{24} = 0,1030242\ m^3/s$$

$$Q_{45} = 0,0785855\ m^3/s$$

$$Q_{46} = 0,0244387\ m^3/s$$

$$P_2 = 2,961736*10^5\ Pa$$

$$P_4 = 2,461811*10^5\ Pa$$

De donde las velocidades de cada tramo serán:

$$V_{1-2} = \frac{4\ Q_{1-2}}{\pi\ D^2_{1-2}} = \frac{4*0,127087}{\pi*0,4^2} = 1,0113\ \frac{m}{s}$$

$$V_{2-3} = \frac{4*0,024063}{\pi*0,3^2} = 0,340\ \frac{m}{s}$$

$$V_{2-4} = \frac{4*0,103024}{\pi*0,28^2} = 1,673\ \frac{m}{s}$$

$$V_{4-5} = \frac{4*0,0785855}{\pi*0,25^2} = 1,600\,\frac{m}{s}$$

$$V_{4-6} = \frac{4*0,0244387}{\pi*0,2^2} = 0,777\,\frac{m}{s}$$

Si por otro lado se utilizan los diámetros: $D_{real1\to2} = 0.4$ m ; $D_{real2\to3} = 0.2$ m ; $D_{real2\to4} = 0.25$ m ; $D_{real4\to5} = 0.2$ m ; $D_{real4\to6} = 0.2$ m ; Se obtiene como resultado:

$$Q_{12} = 0,122594\ m^3/s\ ;\ Q_{23} = 0,0379824\ m^3/s\ ;\ Q_{24} = 0,0846116\ m^3/s\ ;$$
$$Q_{45} = 0,05477702\ m^3/s\ ;\ Q_{46} = 0,0298345\ m^3/s\ ;\ P_2 = 3,301143*10^5\,Pa\ ;$$
$$P_4 = 2,7068943*10^5\,Pa\ .$$

Ahora las velocidades serán:

$$V_{1-2} = \frac{4\,Q_{1-2}}{\pi\,D^2_{1-2}} = \frac{4*0,122594}{\pi*0,4^2} = 0,975\,\frac{m}{s}$$

$$V_{2-3} = \frac{4*0,0379824}{\pi*0,2^2} = 1,209\,\frac{m}{s}$$

$$V_{2-4} = \frac{4*0,0846116}{\pi*0,25^2} = 1,723\,\frac{m}{s}$$

$$V_{4-5} = \frac{4*0,05477702}{\pi*0,2^2} = 1,743\,\frac{m}{s}$$

$$V_{4-6} = \frac{4*0,0298345}{\pi*0,2^2} = 0,949\,\frac{m}{s}$$

Obsérvese que en cada caso se ha modificado únicamente los diámetros, mientras que el factor de fricción se ha mantenido invariable, en realidad se debería hallar para cada caso y cada conducto el nuevo factor de fricción, ejercicio que se deja para el lector.

Problema 84

Enunciado

El esquema definido en la figura 84.1 muestra una instalación de bombeo de agua. Sabiendo que las longitudes y los diámetros de cada tramo de conducto son conocidos, halle:

1. El caudal circulante en cada tramo, así como las presiones en cada uno de los nudos.

2. Realice de nuevo el problema, modificando el diámetro de los conductos para que la velocidad de circulación del fluido en los mismos sea de aproximadamente 1-2 m/s. Deben utilizarse, en todo momento, las bombas que se definen en este enunciado, entendiendo además, que las cotas de los nudos y los depósitos no se pueden modificar.

Las longitudes de cada uno de los conductos son

L1-3 = 200 m, L2-3 = 250 m, L3-4 = 50 m, L4-5 = 200 m, L4-6 = 300 m,
L7-6 = 70 m, L6-8 = 200 m, L8-9 = 300 m, L8-10 = 200 m.

Las cotas de los diversos puntos son

Z1 = 260 m, Z2 = 250 m, Z3 = 200 m, Z4 = 180 m, Z5 = 135 m, Z6 = 140 m,
Z7 = 80 m, Z8 = 140 m, Z9 = 160 m, Z10 = 150 m.

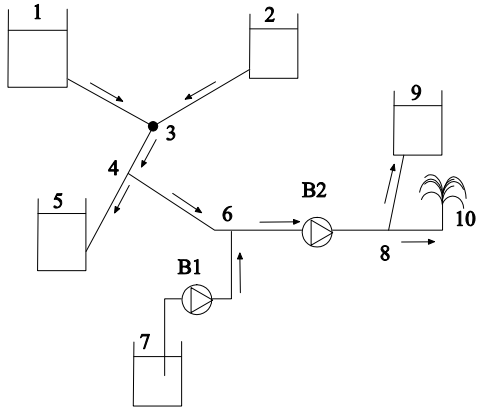


Fig. 84.1
Esquema de la instalación de bombeo a estudiar

Considere que la bomba 1 está muy cercana al depósito 7 y que la bomba 2 está situada a la misma cota que los puntos 6 y 8.

Las curvas características de cada una de estas dos bombas vienen dadas por las ecuaciones

$$H_{B1} = -81.973 \cdot Q_{76}^2 + 100$$

$$H_{B2} = -30.116 \cdot Q_{68}^2 + 50,037$$

Considere, para el apartado 1, que el diámetro de cada uno de los tubos es de 0,1 m. La tobera de salida del punto 10, tiene un diámetro de 0,05 m. La tubería se considerará lisa en todos los tramos.

Las direcciones de los diversos flujos son conocidas y vienen dadas en la figura.

Resolución

1. Puesto que la dirección del flujo en cada tramo se da en el enunciado del problema (v. fig. 84.1), se puede definir el sistema de ecuaciones característico del conjunto de conductos del siguiente modo:

Se denomina $E_i = \frac{P_i}{\rho g} + Z_i + \frac{V_i^2}{2g}$ y $\Delta h_{ij} = \frac{1}{g} \cdot f_{ij} \cdot \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \cdot \frac{8 \cdot Q_{ij}^2}{\pi^2}$, $\frac{V_i^2}{2g} = \frac{8\, Q_i^2}{\pi^2\, D^4\, g}$.

Aplicando la ecuación de la energía entre los extremos de los diversos tramos, se tiene:

Tubería 1-3.

$$E_1 = E_3 + \Delta h_{13} \;\Rightarrow\; Z_1 = \frac{P_3}{\rho g} + Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{13} \cdot \frac{L_{13}}{D_{13}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{13}^2}{\pi^2}$$

Tubería 2-3.

$$E_2 = E_3 + \Delta h_{23} \;\Rightarrow\; Z_2 = \frac{P_3}{\rho g} + Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{23} \cdot \frac{L_{23}}{D_{23}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{23}^2}{\pi^2}$$

Tubería 3-4.

$$E_3 = E_4 + \Delta h_{34} \;\Rightarrow\; \frac{P_3}{\rho g} + Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} = \frac{P_4}{\rho g} + Z_4 + \frac{V_4^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{34} \cdot \frac{L_{34}}{D_{34}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{34}^2}{\pi^2}$$

Tubería 4-5.

$$E_4 = E_5 + \Delta h_{45} \;\Rightarrow\; \frac{P_4}{\rho g} + Z_4 + \frac{V_4^2}{2g} = Z_5 + \frac{1}{g} \cdot f_{45} \cdot \frac{L_{45}}{D_{45}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{45}^2}{\pi^2}$$

Tubería 4-6.

$$E_4 = E_6 + \Delta h_{46} \;\Rightarrow\; \frac{P_4}{\rho g} + Z_4 + \frac{V_4^2}{2g} = \frac{P_6}{\rho g} + Z_6 + \frac{V_6^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{46} \cdot \frac{L_{46}}{D_{46}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{46}^2}{\pi^2}$$

Tubería 7-6.

$$E_7 + H_{B1} = E_6 + \Delta h_{76} \;\Rightarrow\; Z_7 + \left(-81.973 \cdot Q_{76}^2 + 100\right) = \frac{P_6}{\rho g} + Z_6 + \frac{V_6^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{76} \cdot \frac{L_{76}}{D_{76}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{76}^2}{\pi^2}$$

Tubería 6-8.

$$E_6 + H_{B2} = E_8 + \Delta h_{68} \;\Rightarrow\; \frac{P_6}{\rho g} + Z_6 + \frac{V_6^2}{2g} + \left(-30.116 \cdot Q_{68}^2 + 50{,}037\right) = \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{68} \cdot \frac{L_{68}}{D_{68}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{68}^2}{\pi^2}$$

Tubería 8-9.

$$E_8 = E_9 + \Delta h_{89} \;\Rightarrow\; \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} = Z_9 + \frac{1}{g} \cdot f_{89} \cdot \frac{L_{89}}{D_{89}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{89}^2}{\pi^2}$$

Tubería 8-10.

$$E_8 = E_{10} + \Delta h_{810} \Rightarrow \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} = Z_{10} + \frac{V_{10}^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{810} \cdot \frac{L_{810}}{D_{810}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{810}^2}{\pi^2}$$

De aplicar la ecuación de continuidad en cada nudo, se obtiene:

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Los factores de fricción f_{ij} en cada tramo se deben determinar mediante el diagrama de Moody, en función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa. El valor del número de Reynolds es desconocido, puesto que depende del caudal circulante en cada tramo, con lo que, para determinar los factores de fricción, se puede bien suponer que la tubería es lisa y el número de Reynolds es muy elevado, característico de flujo turbulento desarrollado, o bien dar un valor arbitrario a cada factor de fricción. En ambos casos, será necesario corregir el valor del factor de fricción una vez se haya determinado la solución del sistema de ecuaciones. Para el presente estudio, se ha elegido un valor del factor de fricción inicial de 0,02 en todos los tramos.

Obsérvese que, para el circuito objeto de estudio, se crea un sistema de 13 ecuaciones con 13 incógnitas. Las incógnitas son el caudal en cada uno de los tramos, en total 9, y la presión del fluido en cada nudo, en total 4.

Sustituyendo el valor de los parámetros conocidos en las ecuaciones determinadas, se obtiene

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + 33.911,578\, Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + 42.182,695\, Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{P_4}{\rho\, g} + 8.271,11\, Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + 32.257,35\, Q_{45}^2 - 45$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + 49.626,702\ Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 94.379,67\ Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 63.200,468\ Q_{68}^2 - 50,037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 48.799,592\ Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 45.491,145\ Q_{8-10}^2 + 10$$

Por supuesto, las ecuaciones de balance de flujo volumétrico permanecen invariables.

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones establecido, se obtiene como resultado:

$Q_{13} = 0,0342\ m^3/s$; $Q_{23} = 0,0265\ m^3/s$; $Q_{34} = 0,0608\ m^3/s$; $Q_{45} = 0,0412\ m^3/s$;

$Q_{46} = 0,0196\ m^3/s$; $Q_{76} = 0,0099\ m^3/s$; $Q_{68} = 0,0295\ m^3/s$; $Q_{89} = 0,0109\ m^3/s$;

$$Q_{810} = 0,0186\ m^3/s;$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 20,27\,m, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 9,73\,m, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 30,71\,m, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 25,77\,m,$$

La velocidad de circulación y el número de Reynolds para cada uno de los tramos es

$V_{13} = 4,35$ m/s; $V_{23} = 3,37$ m/s; $V_{34} = 7,74$ m/s; $V_{45} = 5,24$ m/s;

$V_{46} = 2,49$ m/s; $V_{76} = 1,26$ m/s; $V_{68} = 3,75$ m/s; $V_{89} = 1,38$ m/s; $V_{810} = 2,36$ m/s.

R_{13}=433.725,86; $R_{23} = 336.074,13$; $R_{34} = 771.068,2$;

$R_{45} = 522.500,16$; $R_{46} = 248.568,03$; $R_{76} = 125.552,22$;

$R_{68} = 374.120,26$; $R_{89} = 138.234,26$; $R_{810} = 235.885,99$.

Obsérvese que las velocidades de circulación son, en la mayoría de los casos, demasiado elevadas, con lo que sería necesario modificar el diámetro de los conductos con el fin de disminuir dichas velocidades de circulación.

Esto se va a realizar en el segundo apartado del problema.

Partiendo del valor del número de Reynolds hallado en cada tramo y considerando la tubería como lisa, se determinará utilizando el diagrama Moody, el factor de fricción, que será

$$f_{13} = 0{,}0137,\ f_{23} = 0{,}0142,\ f_{34} = 0{,}0122,\ f_{45} = 0{,}0132,\ f_{46} = 0{,}0151,\ f_{76} = 0{,}0175,$$

$$f_{68} = 0{,}0139,\ f_{89} = 0{,}017,\ f_{810} = 0{,}0154.$$

Sustituyendo estos nuevos valores del factor de fricción en las ecuaciones precedentes, se obtiene

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + 23.489{,}98\, Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + 30.198{,}58\, Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{P_4}{\rho\, g} + 5.045{,}38\, Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + 21.008{,}64\, Q_{45}^2 - 45$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + \frac{P_6}{\rho\, g} + 37.468{,}17\, Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho\, g} + 92.932{,}23\, Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho\, g} + \frac{P_8}{\rho\, g} + 53.109{,}71\, Q_{68}^2 - 50{,}037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 41.355{,}60\, Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 37.881{,}73\, Q_{8-10}^2 + 10$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, se obtienen unos caudales circulantes y una presión en cada nudo de

$$Q_{13} = 0{,}042\ m^3/s;\quad Q_{23} = 0{,}0323\ m^3/s;\quad Q_{34} = 0{,}0743\ m^3/s;$$

$$Q_{45} = 0{,}0515\ m^3/s;\quad Q_{46} = 0{,}0227\ m^3/s;$$

$$Q_{76} = 0{,}0096\ m^3/s;\ Q_{68} = 0{,}0324\ m^3/s;\ Q_{89} = 0{,}0119\ m^3/s;\ Q_{810} = 0{,}0205\ m^3/s;$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 18{,}57\,m,\quad \frac{P_4}{\rho g} = 10{,}76\,m,\quad \frac{P_6}{\rho g} = 31{,}40\,m,\quad \frac{P_8}{\rho g} = 25{,}85\,m,$$

La velocidad de circulación y el número de Reynolds para cada uno de los tramos serán ahora:

$$V_{13} = 5{,}34\ m/s;\ V_{23} = 4{,}11\ m/s;\ V_{34} = 9{,}46\ m/s;\ V_{45} = 6{,}55\ m/s;\ V_{46} = 2{,}89\ m/s;$$

$$V_{76} = 1{,}22\ m/s;\ V_{68} = 4{,}12\ m/s;\ V_{89} = 1{,}51\ m/s;\ V_{810} = 2{,}61\ m/s;$$

$$R_{13} = 532.645{,}79;\ R_{23} = 409.629{,}98;\ R_{34} = 942.275{,}78;$$

$$R_{45} = 653.125{,}2;\ R_{46} = 287.882{,}37;$$

$$R_{76} = 121.747{,}61;\ R_{68} = 410.898{,}18;\ R_{89} = 150.916{,}30;\ R_{810} = 259.981{,}87.$$

Mediante el diagrama de Moody, y procediendo del mismo modo que para el caso precedente, se obtiene:

$$f_{13} = 0{,}013;\ f_{23} = 0{,}0138;\ f_{34} = 0{,}0118;\ f_{45} = 0{,}0126;\ f_{46} = 0{,}0145;$$

$$f_{76} = 0{,}0177;\ f_{68} = 0{,}01385;\ f_{89} = 0{,}0167;\ f_{810} = 0{,}015.$$

Obsérvese que el valor de los factores de fricción es ahora muy similar al obtenido en la iteración anterior. No obstante, se decide con estos nuevos valores realizar una nueva iteración, y se obtienen las siguientes constantes para las ecuaciones características:

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 22.332{,}02\ Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 29.362{,}47\ Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + 4.879{,}96\ Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + 20016{,}11\ Q_{45}^2 - 45$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + \frac{P_6}{\rho\, g} + 35.979,37\, Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho\, g} + 93.048,03\, Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho\, g} + \frac{P_8}{\rho\, g} + 53.027,003\, Q_{68}^2 - 50,037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 40.611,20\, Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 37.220,04\, Q_{8-10}^2 + 10$$

De la resolución de estas nueve ecuaciones, más las cuatro ecuaciones de continuidad, se obtiene

$$Q_{13} = 0,043\ m^3/s, \quad Q_{23} = 0,0327\ m^3/s, \quad Q_{34} = 0,0757\ m^3/s,$$

$$Q_{45} = 0,0527\ m^3/s, \quad Q_{46} = 0,0230\ m^3/s,$$

$$Q_{76} = 0,0095\ m^3/s,\ Q_{68} = 0,0325\ m^3/s,\ Q_{89} = 0,0119\ m^3/s,\ Q_{810} = 0,0206\ m^3/s,$$

$$\frac{P_3}{\rho\, g} = 18,63\,m, \quad \frac{P_4}{\rho\, g} = 10,65\,m, \quad \frac{P_6}{\rho\, g} = 31,63\,m, \quad \frac{P_8}{\rho\, g} = 25,75\,m$$

Las velocidades y los números de Reynolds correspondientes a cada tramo de conducto son

$$V_{13} = 5,47\ m/s,\ V_{23} = 4,16\ m/s,\ V_{34} = 9,63\ m/s,\ V_{45} = 6,71\ m/s,\ V_{46} = 2,92\ m/s,$$

$$V_{76} = 1,209\ m/s,\ V_{68} = 4,13\ m/s,\ V_{89} = 1,51\ m/s,\ V_{810} = 2,62\ m/s.$$

$$R_{13} = 545.327,84; \quad R_{23} = 414.702,79; \quad R_{34} = 960.030,64; \quad R_{45} = 668.343,65;$$

$$R_{46} = 291.686,98; \quad R_{76} = 120.479,407; \quad R_{68} = 412.166,39;$$

$$R_{89} = 150.916,30; \quad R_{810} = 261.250,08.$$

Los valores de los factores de fricción, según el diagrama de Moody, serán

$$f_{13} = 0,01295; \quad f_{23} = 0,01375; \quad f_{34} = 0,0117; \quad f_{45} = 0,0125; \quad f_{46} = 0,01445;$$

$$f_{76} = 0,0177; \quad f_{68} = 0,01385; \quad f_{89} = 0,0167; \quad f_{810} = 0,015.$$

Se observa que los valores acabados de hallar son prácticamente los mismos que los obtenidos en la iteración precedente, con lo que se podrían dar como válidos los valores de los caudales y las presiones determinados en la iteración anterior. No obstante, si se procede a realizar una última iteración, se obtiene

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + 22.249,31\, Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + 29.259,08\, Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{P_4}{\rho\, g} + 4.838,60\, Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + 19.850,68\, Q_{45}^2 - 45$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + \frac{P_6}{\rho\, g} + 35.855,30\, Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho\, g} + 93.048,03\, Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho\, g} + \frac{P_8}{\rho\, g} + 53.027,003\, Q_{68}^2 - 50,037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 40.611,20\, Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 37.220,04\, Q_{8-10}^2 + 10$$

cuya resolución da lugar a:

$$Q_{13} = 0,0432\ m^3/s, \quad Q_{23} = 0,0328\ m^3/s, \quad Q_{34} = 0,0759\ m^3/s,$$

$$Q_{45} = 0,0529\ m^3/s, \quad Q_{46} = 0,0230\ m^3/s,$$

$$Q_{76} = 0,0095\ m^3/s, \quad Q_{68} = 0,0325\ m^3/s, \quad Q_{89} = 0,0119\ m^3/s, \quad Q_{810} = 0,0206\ m^3/s,$$

$$\frac{P_3}{\rho\, g} = 18,54\,m, \quad \frac{P_4}{\rho\, g} = 10,63\,m, \quad \frac{P_6}{\rho\, g} = 31,65\,m, \quad \frac{P_8}{\rho\, g} = 25,75\,m,$$

Las velocidades y los números de Reynolds correspondientes a cada tramo de conducto son

$$V_{13} = 5{,}50 \text{ m/s}, V_{23} = 4{,}17 \text{ m/s}, V_{34} = 9{,}66 \text{ m/s}, V_{45} = 6{,}73 \text{ m/s}, V_{46} = 2{,}92 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1{,}209 \text{ m/s}, \ V_{68} = 4{,}13 \text{ m/s}, \ V_{89} = 1{,}51 \text{ m/s}, \ V_{810} = 2{,}62 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 547.864{,}24; \ R_{23} = 415.971{,}004; \ R_{34} = 962.567{,}04; \ R_{45} = 670.880{,}06;$$

$$R_{46} = 291.686{,}98; \ R_{76} = 120.479{,}407; \ R_{68} = 412.166{,}39; \ R_{89} = 150.916{,}30;$$

$$R_{810} = 261250{,}08.$$

Entrando con estos valores de los números de Reynolds en el diagrama de Moody, se obtienen exactamente los mismos valores de los factores de fricción que para el caso precedente, con lo que los valores finales del caudal circulante y las presiones en cada nudo son los últimos hallados.

Cabe destacar que las velocidades de circulación del agua para muchos de los tramos son demasiado elevadas, por lo que sería interesante modificar los diámetros de los conductos con el fin de disminuir dicha velocidad.

2A. En el primer apartado, se ha observado que las velocidades de circulación en muchos de los tramos es demasiado elevada. En el presente apartado se redefinirá el diámetro de cada tramo con el fin de que la velocidad de circulación sea de alrededor de 1-2 m/s.

Partiendo de los flujos volumétricos hallados en el apartado 1, y aplicando la ecuación de continuidad en cada tramo, se obtendrá el diámetro del conducto más apropiado. El diámetro se aproximará al valor normalizado más próximo.

A priori, la ecuación para hallar el diámetro será $D = \sqrt{\frac{Q}{V}\frac{4}{\pi}}$, siendo la velocidad considerada, de 1m/s.

Caudal (m^3/s)	Q_{13} = 0,0432	Q_{23} = 0,0328	Q_{34} = 0,0759	Q_{45} = 0,0529	Q_{46} = 0,0230	Q_{76} = 0,095	Q_{68} = 0,0325	Q_{89} = 0,0119	Q_{810} = 0,0206
Diámetro (m)	0,234	0,204	0,310	0,259	0,171	0,109	0,203	0,123	0,161
Diámetro normalizado (m)	0,25	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1	0,2	0,15	0,15
Factor de fricción, f	0,0129	0,0137	0,0117	0,0125	0,0144	0,0177	0,0138	0,0167	0,015

Sustituyendo en las ecuaciones que caracterizan el flujo en cada tramo, los valores de los diámetros normalizados, y utilizando para empezar el valor del factor de fricción obtenido en la última iteración del primer apartado del problema, se obtiene:

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8\,Q_{13}^2}{\pi^2\,0,25^4\,9,8} + \frac{1}{9,8}0,01295\frac{200}{0,25^5}\frac{8Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho g} - 60 + 240,53Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8\,Q_{23}^2}{\pi^2\,0,2^4\,9,8} + \frac{1}{9,8}0,01375\frac{250}{0,2^5}\frac{8Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho g} - 50 + 940,19Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{9,8}0,0117\frac{50}{0,3^5}\frac{8Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} - 20 + 19,91Q_{34}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{8\,Q_{45}^2}{\pi^2\,0,25^4\,9,8} + \frac{1}{9,8}0,0125\frac{200}{0,25^5}\frac{8Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho g} - 45 + 190,56Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + \frac{1}{9,8}0,01445\frac{300}{0,15^5}\frac{8Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 4.721,68Q_{46}^2$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81.973\,Q_{76}^2 + \frac{8\,Q_{76}^2}{\pi^2\,0,1^4\,9,8} + \frac{1}{9,8}0,0177\frac{70}{0,1^5}\frac{8Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 93.048,03Q_{76}^2$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30.116\,Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8}0,01385\frac{200}{0,2^5}\frac{8Q_{68}^2}{\pi^2} - 50,037 =$$
$$= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 50,037 + 30831,96Q_{68}^2$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 - \frac{8\,Q_{89}^2}{\pi^2\,0,15^4\,9,8} + \frac{1}{9,8}0,0167\frac{300}{0,15^5}\frac{8Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 + 5.293,51Q_{89}^2$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 10 - \frac{8\,Q_{810}^2}{\pi^2\,0,15^4\,9,8} + \frac{8\,Q_{810}^2}{\pi^2\,0,05^4\,9,8} + \frac{1}{9,8}0,015\frac{200}{0,15^5}\frac{8Q_{810}^2}{\pi^2} =$$
$$= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 + 16.338,01Q_{810}^2$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Sistema de ecuaciones que, conjuntamente con las cuatro ecuaciones de continuidad aplicadas a cada nudo, da lugar a un sistema de 13 ecuaciones con 13 incógnitas. De su resolución se obtiene

$$Q_{13} = 0{,}4565\ m^3/s,\quad Q_{23} = 0{,}2069\ m^3/s,\quad Q_{34} = 0{,}6354\ m^3/s,\quad Q_{45} = 0{,}5830\ m^3/s,$$

$$Q_{46} = 0{,}0663\ m^3/s,\quad Q_{76} = -0{,}0034\ m^3/s,\quad Q_{68} = 0{,}0346\ m^3/s,$$

$$Q_{89} = 0{,}0779\ m^3/s,\quad Q_{810} = -0{,}0508\ m^3/s,$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 9,73\,m,\quad \frac{P_4}{\rho g} = 19,81\,m,\quad \frac{P_6}{\rho g} = 39,04\,m,\quad \frac{P_8}{\rho g} = 52,12\,m$$

Obsérvese que dos de los caudales son negativos. Esto implica que los sentidos del flujo en estos conductos son contrarios a los establecidos inicialmente. En definitiva, ninguno de los valores acabados de hallar puede considerarse válido. Se observa, asimismo, que uno de los caudales que es negativo es el del conducto 7-6, con lo que parece que la bomba 1 no suministre suficiente altura de elevación. Se observa, por otro lado, que en la parte izquierda del circuito (tuberías 1-3; 2-3; 3-4; 4-5 y 4-6), al aumentar el diámetro de los conductos parece que aumenten muchísimo los caudales circulantes. Este hecho es el que da lugar a que ahora la presión en el punto 6 sea considerablemente mayor que en el caso precedente y, por consiguiente, que la bomba B1 no suministre suficiente energía al fluido como para elevarlo del punto 7 al punto 6. Una manera de solucionar este problema es modificando la bomba B1 y tal vez la B2, puesto que el caudal 8-10 también es negativo, para que den mayor altura de elevación. Aunque en el enunciado se establece que no se deben modificar las bombas existentes, se procede a modificar las mismas con el fin de poder seguir por el camino indicado.

Eligiendo una característica para las bombas de $H_{B1} = 120 - 81973\ Q^2$;

$H_{B2} = 120 - 30116\ Q^2$; las ecuaciones para los tramos 7-6 y 6-8 tomarán la forma:

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81.973\ Q_{76}^2 + \frac{8\,Q_{76}^2}{\pi^2\,0{,}1^4\,9{,}8} + \frac{1}{9{,}8}0{,}0177\frac{70}{0{,}1^5}\frac{8Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho g} - 60 + 93.048{,}03Q_{76}^2$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30.116\ Q_{68}^2 + \frac{1}{9{,}8}0{,}01385\frac{200}{0{,}2^5}\frac{8Q_{68}^2}{\pi^2} - 50{,}037 =$$
$$= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 120 + 30.831{,}96Q_{68}^2$$

Las ecuaciones de los siete conductos restantes, así como las de continuidad en cada nudo, se mantienen invariables. Resolviendo el nuevo sistema de ecuaciones, se obtiene

$$Q_{13} = 0{,}4499\ m^3/s,\quad Q_{23} = 0{,}2029\ m^3/s,\quad Q_{34} = 0{,}6528\ m^3/s,$$

$$Q_{45} = 0{,}5966\ m^3/s,\quad Q_{46} = 0{,}0563\ m^3/s,\quad Q_{76} = 0{,}0114\ m^3/s,$$

$$Q_{68} = 0{,}0677\ m^3/s,\quad Q_{89} = 0{,}0357\ m^3/s,\quad Q_{810} = 0{,}0320\ m^3/s,$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 11{,}30\,m,\quad \frac{P_4}{\rho g} = 22{,}81\,m,\quad \frac{P_6}{\rho g} = 47{,}87\,m,\quad \frac{P_8}{\rho g} = 26{,}73\,m.$$

Para los diámetros de los conductos establecidos en este segundo apartado, se obtienen unas velocidades de circulación, números de Reynolds y factores de fricción de

$$V_{13} = 9{,}16\ m/s,\ V_{23} = 6{,}45\ m/s,\ V_{34} = 9{,}23\ m/s,\ V_{45} = 12{,}15\ m/s,\ V_{46} = 3{,}18\ m/s,$$

$$V_{76} = 1{,}45\ m/s,\ V_{68} = 2{,}15\ m/s,\ V_{89} = 2{,}02\ m/s,\ V_{810} = 1{,}81\ m/s.$$

$$R_{13} = 2.282.260{,}42;\ R_{23} = 1.286.593{,}24;\ R_{34} = 2.759.612{,}51;\ R_{45} = 3.026.442{,}69;$$

$$R_{46} = 475.999{,}33;\quad R_{76} = 144.575{,}28;\ R_{68} = 429.287{,}14;$$

$$R_{89} = 301.832{,}61;\ R_{810} = 270.550{,}24.$$

$$f_{13} = 0{,}0102;\ f_{23} = 0{,}0112;\ f_{34} = 0{,}0096;\ f_{45} = 0{,}0094;\ f_{46} = 0{,}0132;$$

$$f_{76} = 0{,}0168;\ f_{68} = 0{,}0135;\ f_{89} = 0{,}0145;\ f_{810} = 0{,}0148.$$

El diámetro de los conductos para la siguiente iteración se determinará con los nuevos caudales y utilizando la ecuación $D = \sqrt{\frac{Q}{V}\frac{4}{\pi}}$. De nuevo, se considerará una velocidad de circulación de 1m/s.

Caudal (m^3/s)	Q_{13} = 0,4499	Q_{23} = 0,2029	Q_{34} = 0,6528	Q_{45} = 0,5966	Q_{46} = 0,0563	Q_{76} = 0,0114	Q_{68} = 0,0677	Q_{89} = 0,0357	Q_{810} = 0,0320
Diámetro (m)	0,756	0,508	0,911	0,871	0,267	0,120	0,2935	0,213	0,201
Diámetro normalizado (m)	0,75	0,5	1	0,9	0,25	0,1	0,3	0,2	0,2

Con estos nuevos diámetros y utilizando el nuevo factor de fricción acabado de hallar, se obtiene el siguiente colectivo de ecuaciones: (Véase que se mantiene la nueva configuración para las bombas B1 y B2.)

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{8\, Q_{13}^2}{\pi^2\, 0,75^4\, 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0102 \frac{200}{0,75^5} \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho\, g} - 60 + 0,97243 Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{8\, Q_{23}^2}{\pi^2\, 0,5^4\, 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0112 \frac{250}{0,5^5} \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho\, g} - 50 + 8,734 Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{P_4}{\rho\, g} + \frac{1}{9,8} 0,0096 \frac{50}{1^5} \frac{8 Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{P_4}{\rho\, g} - 20 + 0,039 Q_{34}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + \frac{8\, Q_{45}^2}{\pi^2\, 0,9^4\, 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0094 \frac{200}{0,9^5} \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho\, g} - 45 + 0,137 Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + \frac{P_6}{\rho\, g} + \frac{1}{9,8} 0,0132 \frac{300}{0,25^5} \frac{8 Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + \frac{P_6}{\rho\, g} - 40 + 335,39 Q_{46}^2$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho\, g} + 81.973\, Q_{76}^2 + \frac{8\, Q_{76}^2}{\pi^2\, 0,1^4\, 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0168 \frac{70}{0,1^5} \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_6}{\rho\, g} - 60 + 92.526,94 Q_{76}^2$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho\, g} + \frac{P_8}{\rho\, g} + 30.116\, Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,0135 \frac{200}{0,3^5} \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 120 =$$
$$= -\frac{P_6}{\rho\, g} + \frac{P_8}{\rho\, g} - 120 + 30.207,90 Q_{68}^2$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 20 - \frac{8\, Q_{89}^2}{\pi^2\, 0,2^4\, 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0145 \frac{300}{0,2^5} \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 20 + 1072,66 Q_{89}^2$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 10 - \frac{8\, Q_{810}^2}{\pi^2\, 0,2^4\, 9,8} + \frac{8\, Q_{810}^2}{\pi^2\, 0,05^4\, 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0148 \frac{200}{0,2^5} \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2} =$$
$$= -\frac{P_8}{\rho\, g} + 10 + 13.947,17 Q_{810}^2$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Para este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$Q_{13} = 10{,}89\ m^3/s,\ Q_{23} = -3{,}47\ m^3/s,\ Q_{34} = 7{,}41\ m^3/s,\ Q_{45} = 7{,}38\ m^3/s,\ Q_{46} = 0{,}0305\ m^3/s,$$

$$Q_{76} = 0{,}0250\ m^3/s,\ Q_{68} = 0{,}0555\ m^3/s,\ Q_{89} = 0{,}0926\ m^3/s,\ Q_{810} = -0{,}0371\ m^3/s,$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = -55{,}37\,m,\quad \frac{P_4}{\rho g} = -37{,}52\,m,\quad \frac{P_6}{\rho g} = 2{,}16\,m,\quad \frac{P_8}{\rho g} = 29{,}19\,m.$$

Véase que, de nuevo, se tienen ciertos caudales y presiones negativos, lo cual invalida este resultado. No obstante, se ha de denotar que las presiones en los puntos 3 y 4 son negativas y también lo es el caudal 2-3, con lo que cabe pensar que alguna modificación de diámetros alrededor de los puntos 3 y 4 es necesaria. Cabe, asimismo destacar que los caudales son muy grandes. Si se disminuye el diámetro de los conductos 1-3, 3-4 y 4-5 a 0,6 m, 0,9 m y 0,6 m, respectivamente, se observa que tanto las presiones en los puntos 3 y 4 como el caudal en el tramo 2-3 pasan a ser positivos. Por otro lado, y puesto que el caudal en el tramo 8-10 es asimismo negativo, se concluye que se deberá reducir el diámetro del conducto 8-9 hasta un valor de 0,12 m.

La resolución del sistema de ecuaciones con estos nuevos valores da lugar a

$$Q_{13} = 4{,}551\ m^3/s,\ Q_{23} = 2{,}348\ m^3/s,\ Q_{34} = 6{,}900\ m^3/s,\ Q_{45} = 6{,}836\ m^3/s,$$

$$Q_{46} = 0{,}0639\ m^3/s,\ Q_{76} = 0{,}0054\ m^3/s,\ Q_{68} = 0{,}0693\ m^3/s,$$

$$Q_{89} = 0{,}0294\ m^3/s,\ Q_{810} = 0{,}0399\ m^3/s,$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 1{,}83\,m,\quad \frac{P_4}{\rho g} = 18{,}63\,m,\quad \frac{P_6}{\rho g} = 57{,}26\,m,\quad \frac{P_8}{\rho g} = 32{,}17\,m,$$

Véase que algunos de los caudales son enormes. Recuérdese, además, que las bombas B1 y B2 han sido modificadas. Las velocidades de circulación para cada tramo serán

$$V_{13} = 16{,}09\ m/s,\ V_{23} = 11{,}95\ m/s,\ V_{34} = 10{,}84\ m/s,\ V_{45} = 24{,}17\ m/s,\ V_{46} = 1{,}30\ m/s,$$

$$V_{76} = 0{,}68\ m/s,\ V_{68} = 0{,}98\ m/s,\ V_{89} = 2{,}59\ m/s,\ V_{810} = 1{,}27\ m/s.$$

Si, para estos caudales acabados de hallar, se quisiese determinar el diámetro de conducto para que la velocidad de circulación sea de 1 m/s, se obtendría:

Caudal (m^3/s)	Q_{13} = 4,55	Q_{23} = 2,34	Q_{34} = 6,90	Q_{45} = 6,83	Q_{46} = 0,0639	Q_{76} = 0,0054	Q_{68} = 0,0693	Q_{89} = 0,0294	Q_{810} = 0,0399
Diámetro (m)	2,4	1,72	2,96	2,95	0,28	0,08	0,29	0,19	0,225
Diámetro normalizado (m)	2,4	1,7	3	3	0,25	0,1	0,3	0,2	0,2

Se observa que, cada vez las velocidades van aumentando. Los diámetros de los conductos, especialmente los que unen los depósitos 1, 2 y 5 también aumentan. Ello da lugar a diámetros muy grandes, especialmente para las bombas de que se dispone. Recuérdese, por otro lado, que las características de las bombas han sido modificadas y, según el enunciado del problema, esto no estaba permitido. Así pues, esta manera de proceder no parece acertada. Se observa, por otro lado, que existe una cierta independencia entre los flujos que circulan por los conductos que unen los tres depósitos de la izquierda y los conductos situados en la parte derecha del punto 6. De hecho, para estos últimos se observa ya una cierta estabilidad.

2B. A partir de este punto, y con el fin de obtener resultados que estén en concordancia con las directrices del problema, se procederá a modificar los diámetros de los conductos mediante el sistema de prueba-error. Se partirá de los datos obtenidos en el primer apartado.

Se empezará, reduciendo, de manera considerable, el diámetro de los conductos 1-3, 2-3, 3-4, 4-5 y 5-6, respecto a los dados en el apartado 1 del problema, y manteniendo constante o disminuyendo ligeramente el diámetro del resto de los conductos. Estos primeros valores se han deducido mediante el sistema de prueba y error. Se partirá, asimismo, de los factores de fricción hallados en el apartado 1 de este problema, es decir

$$f_{13} = 0{,}01295;\ f_{23} = 0{,}01375;\ f_{34} = 0{,}0117;\ f_{45} = 0{,}0125;\ f_{46} = 0{,}01445;\ f_{76} = 0{,}0177;$$

$$f_{68} = 0{,}01385;\ f_{89} = 0{,}0167;\ f_{810} = 0{,}015.$$

Los diámetros elegidos son

$$D_{13} = 0{,}015\ \text{m};\quad D_{23} = 0{,}015\ \text{m};\quad D_{34} = 0{,}02\ \text{m};\quad D_{45} = 0{,}01\ \text{m};$$

$$D_{46} = 0{,}015\ \text{m};\quad D_{76} = 0{,}1\ \text{m};\quad D_{68} = 0{,}08\ \text{m};\quad D_{89} = 0{,}07\ \text{m};$$

$$D_{810} = 0{,}07\ \text{m}.$$

El sistema de ecuaciones que se genera con estos datos es

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{8\, Q_{13}^2}{\pi^2\, 0{,}015^4\, 9{,}8} + \frac{1}{9{,}8}\, 0{,}01295\, \frac{200}{0{,}015^5}\, \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho\, g} - 60 + 283.736.873{,}5 Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{8\, Q_{23}^2}{\pi^2\, 0{,}015^4\, 9{,}8} + \frac{1}{9{,}8}\, 0{,}01375\, \frac{250}{0{,}015^5}\, \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho\, g} - 50 + 376.046.662{,}5 Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,0117 \frac{50}{0,02^5} \frac{8 Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} - 20 + 15.120.642,12 Q_{34}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2 \, 0,01^4 \, 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0125 \frac{200}{0,01^5} \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho g} - 45 + 2.059.508.998 Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,01445 \frac{300}{0,015^5} \frac{8 Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 472.168.655,2 Q_{46}^2$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81.973 \, Q_{76}^2 + \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2 \, 0,1^4 \, 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0177 \frac{70}{0,1^5} \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 93.048,03 Q_{76}^2$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30.116 \, Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,01385 \frac{200}{0,08^5} \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 50,037 =$$
$$= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 50,037 + 100.034,83 Q_{68}^2$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 - \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2 \, 0,07^4 \, 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0167 \frac{300}{0,07^5} \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 + 243.109,03 Q_{89}^2$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 10 - \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 \, 0,07^4 \, 9,8} + \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 \, 0,05^4 \, 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,015 \frac{200}{0,07^5} \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2} =$$
$$= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 + 157.425,99 Q_{810}^2$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones da lugar a

$$Q_{13} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0006 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{45} = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{46} = 0,0004 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = 0,0174 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0178 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{89} = 0,0065 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0,0113 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 26,87 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 41,62 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 11,80 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 30,17 \text{ m}.$$

Las velocidades de circulación para cada tramo serán

$$V_{13} = 1{,}69 \text{ m/s},\ V_{23} = 1{,}13 \text{ m/s},\ V_{34} = 1{,}9 \text{ m/s},\ V_{45} = 2{,}54 \text{ m/s},\ V_{46} = 2{,}26 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 2{,}21 \text{ m/s},\ V_{68} = 3{,}54 \text{ m/s},\ V_{89} = 1{,}68 \text{ m/s},\ V_{810} = 2{,}93 \text{ m/s}.$$

Obsérvese que varios de los conductos ya tienen velocidades por debajo de los 2 m/s, aunque otros están aún por encima de este nivel. Los valores del número de Reynolds y del factor de fricción para cada conducto serán de:

$$R_{13} = 25.364{,}08;\ R_{23} = 16.909{,}39;\ R_{34} = 38.046{,}12;\ R_{45} = 25.364{,}08;\ R_{46} = 33.818{,}78;$$

$$R_{76} = 220.667{,}54;\ R_{68} = 282.175{,}45;\ R_{89} = 117.761{,}82;\ R_{810} = 204.724{,}405.$$

$$f_{13} = 0{,}0245;\ f_{23} = 0{,}0276;\ f_{34} = 0{,}022;\ f_{45} = 0{,}0245;\ f_{46} = 0{,}023;\ f_{76} = 0{,}0156;$$

$$f_{68} = 0{,}0147;\ f_{89} = 0{,}018;\ f_{810} = 0{,}0158.$$

Estos factores de fricción son los que se van a utilizar para la siguiente iteración. Se va a proceder a modificar algunos diámetros mediante el sistema de prueba y error, con el fin de conseguir que las velocidades de circulación sean en, todos los conductos, menores a 2 m/s. Puesto que las velocidades de circulación de los conductos 7-6 y 6-8 son demasiado grandes, se procederá a aumentar estos diámetros. La velocidad en el tramo 8-10 es también grande. En este caso, lo que se va a hacer es aumentar el diámetro del conducto 8-9, dado que está en paralelo con el 8-10. Se disminuirá asimismo el diámetro del tramo 8-10. Se eligen los siguientes diámetros:

$$D_{13} = 0{,}015 \text{ m};\ D_{23} = 0{,}015 \text{ m};\ D_{34} = 0{,}02 \text{ m};\ D_{45} = 0{,}01 \text{ m};\ D_{46} = 0{,}015 \text{ m};$$

$$D_{76} = 0{,}14 \text{ m};\ D_{68} = 0{,}12 \text{ m};\ D_{89} = 0{,}09 \text{ m};\ D_{810} = 0{,}05 \text{ m}.$$

El sistema de ecuaciones para este caso queda del modo siguiente:

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{8\, Q_{13}^2}{\pi^2\, 0{,}015^4\, 9{,}8} + \frac{1}{9{,}8} 0{,}0245 \frac{200}{0{,}015^5} \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho\, g} - 60 + 535.342.316{,}1 Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{8\, Q_{23}^2}{\pi^2\, 0{,}015^4\, 9{,}8} + \frac{1}{9{,}8} 0{,}0276 \frac{250}{0{,}015^5} \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho\, g} - 50 + 753.182.526{,}1 Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{P_4}{\rho\, g} + \frac{1}{9,8}\, 0,022\, \frac{50}{0,02^5}\, \frac{8 Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho\, g} + \frac{P_4}{\rho\, g} - 20 + 28.431.976,63 Q_{34}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + \frac{8\, Q_{45}^2}{\pi^2\, 0,01^4\, 9,8} + \frac{1}{9,8}\, 0,0245\, \frac{200}{0,01^5}\, \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho\, g} - 45 + 4.044.577.912 Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + \frac{P_6}{\rho\, g} + \frac{1}{9,8}\, 0,023\, \frac{300}{0,015^5}\, \frac{8 Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho\, g} + \frac{P_6}{\rho\, g} - 40 + 751.548.724,5 Q_{46}^2$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho\, g} + 81.973\, Q_{76}^2 + \frac{8\, Q_{76}^2}{\pi^2\, 0,14^4\, 9,8} + \frac{1}{9,8}\, 0,0156\, \frac{70}{0,14^5}\, \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho\, g} - 40 + 83.867,67 Q_{76}^2$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho\, g} + \frac{P_8}{\rho\, g} + 30.116\, Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8}\, 0,0147\, \frac{200}{0,12^5}\, \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 50,037 =$$
$$= -\frac{P_6}{\rho\, g} + \frac{P_8}{\rho\, g} - 50,037 + 39.888,49 Q_{68}^2$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 20 - \frac{8\, Q_{89}^2}{\pi^2\, 0,1^4\, 9,8} + \frac{1}{9,8}\, 0,018\, \frac{300}{0,1^5}\, \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 20 + 43.836,93 Q_{89}^2$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho\, g} + 10 - \frac{8\, Q_{810}^2}{\pi^2\, 0,05^4\, 9,8} + \frac{8\, Q_{810}^2}{\pi^2\, 0,05^4\, 9,8} + \frac{1}{9,8}\, 0,0158\, \frac{200}{0,05^5}\, \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2} =$$
$$= -\frac{P_8}{\rho\, g} + 10 + 836.375,7 Q_{810}^2$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

de donde se obtienen unos caudales y velocidades de circulación de

$Q_{13} = 0,0003\ m^3/s$, $Q_{23} = 0,0002\ m^3/s$, $Q_{34} = 0,0005\ m^3/s$, $Q_{45} = 0,0001\ m^3/s$,

$Q_{46} = 0,0003\ m^3/s$, $Q_{76} = 0,0215\ m^3/s$, $Q_{68} = 0,0218\ m^3/s$, $Q_{89} = 0,0167\ m^3/s$,

$$Q_{810} = 0{,}0052\ \text{m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 22{,}24\,\text{m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 36{,}28\,\text{m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 1{,}17\,\text{m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 32{,}19\,\text{m}.$$

$$V_{13} = 1{,}69\ \text{m/s},\ V_{23} = 1{,}13\ \text{m/s},\ V_{34} = 1{,}59\ \text{m/s},\ V_{45} = 1{,}27\ \text{m/s},\ V_{46} = 1{,}69\ \text{m/s},$$

$$V_{76} = 1{,}39\ \text{m/s},\ V_{68} = 1{,}92\ \text{m/s},\ V_{89} = 2{,}12\ \text{m/s},\ V_{810} = 2{,}64\ \text{m/s}.$$

Obsérvese que ahora en casi todos los conductos se tiene una velocidad de circulación menor o igual a 2 m/s, con lo que esta solución ya se podría considerar válida. Si así lo hacemos, será ahora únicamente necesario calcular los nuevos factores de fricción con los últimos datos obtenidos, manteniendo los últimos diámetros utilizados. Los nuevos números de Reynolds y factores de fricción para cada tramo serán

$$R_{13} = 25.364{,}08;\ R_{23} = 16.909{,}39;\ R_{34} = 31.705{,}1;\ R_{45} = 12.682{,}04;\ R_{46} = 25.364{,}08;$$

$$R_{76} = 194.759{,}94;\ R_{68} = 230.390{,}44;\ R_{89} = 211.790{,}11;\ R_{810} = 131.893{,}24.$$

$$f_{13} = 0{,}0245;\ f_{23} = 0{,}0276;\ f_{34} = 0{,}0234;\ f_{45} = 0{,}03;\ f_{46} = 0{,}0245;\ f_{76} = 0{,}0158;$$

$$f_{68} = 0{,}0153;\ f_{89} = 0{,}0157;\ f_{810} = 0{,}017.$$

Sustituyendo los valores del factor de fricción en el sistema de ecuaciones precedente y resolviéndolo, se obtiene

$$Q_{13} = 0{,}0003\ \text{m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0{,}0002\ \text{m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0{,}0004\ \text{m}^3/\text{s}, \quad Q_{45} = 0{,}0001\ \text{m}^3/\text{s},$$

$$Q_{46} = 0{,}0003\ \text{m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = 0{,}0217\ \text{m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0{,}022\ \text{m}^3/\text{s},$$

$$Q_{89} = 0{,}0171\ \text{m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0{,}0049\ \text{m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 24{,}45\,\text{m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 38{,}54\,\text{m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 0{,}613\,\text{m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 31{,}18\,\text{m}.$$

Las velocidades de circulación, los números de Reynolds y los factores de fricción con estos nuevos datos son

$$V_{13} = 1{,}69\ \text{m/s},\ V_{23} = 1{,}13\ \text{m/s},\ V_{34} = 1{,}27\ \text{m/s},\ V_{45} = 1{,}27\ \text{m/s},\ V_{46} = 1{,}69\ \text{m/s},$$

$$V_{76} = 1{,}40\ \text{m/s},\ V_{68} = 1{,}94\ \text{m/s},\ V_{89} = 2{,}17\ \text{m/s},\ V_{810} = 2{,}49\ \text{m/s}.$$

$R_{13} = 25.364{,}08$; $R_{23} = 16.909{,}39$; $R_{34} = 25.364{,}08$; $R_{45} = 12.682{,}04$; $R_{46} = 25.364{,}08$;

$R_{76} = 196.571{,}66$; $R_{68} = 232.504{,}11$; $R_{89} = 216.862{,}93$; $R_{810} = 124.284{,}01$.

$f_{13} = 0{,}0245$; $f_{23} = 0{,}0276$; $f_{34} = 0{,}0247$; $f_{45} = 0{,}03$; $f_{46} = 0{,}0245$; $f_{76} = 0{,}0158$;

$f_{68} = 0{,}0153$; $f_{89} = 0{,}0157$; $f_{810} = 0{,}0169$.

Obsérvese que los factores de fricción son prácticamente los mismos que los obtenidos en el apartado anterior, exceptuando, tal vez, el de la tubería 3-4, factor que en realidad ha variado debido a la poca precisión con la que se está calculando este caudal, más que por una variación real del mismo. Así pues, se puede concluir que los últimos caudales, las presiones en los nudos, las velocidades de circulación y los factores de fricción hallados son los definitivos.

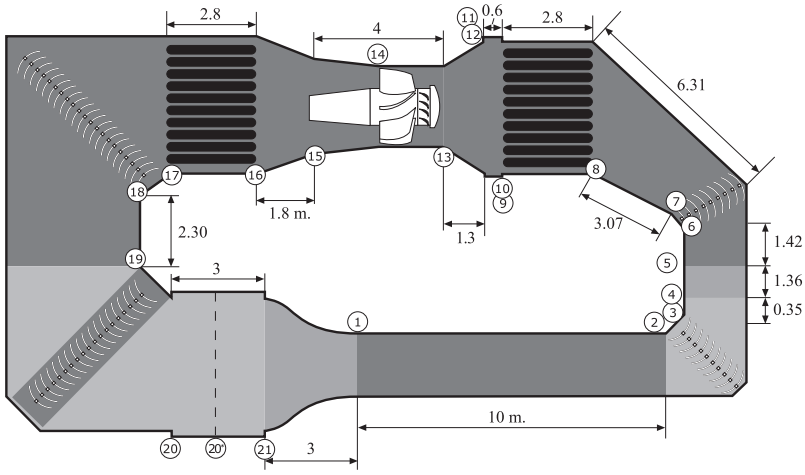
Es necesario remarcar que, con el fin de alcanzar los objetivos establecidos en el enunciado del problema, se han tenido que reducir muchísimo los diámetros de los conductos situados a la izquierda del punto 6. El flujo en estos conductos es debido a la acción gravitatoria y, ya se observó en el apartado 2A, que en dichos conductos, el aumento del diámetro daba lugar a velocidades mayores a las requeridas. No obstante, los diámetros obtenidos para estos conductos, en el presente apartado, son demasiado pequeños y sería poco apropiado utilizarlos en realidad. Lo lógico sería utilizar diámetros mayores y regular el caudal circulante en cada tramo, mediante válvulas de regulación situadas en el extremo inferior de cada tramo. Es también relevante comentar que las bombas proporcionadas en el enunciado dan una altura de elevación pequeña, con lo que la utilización de bombas que proporcionasen mayor altura de elevación, daría lugar a poder trabajar con mayores caudales y, consecuentemente, con mayores diámetros, incluso para los conductos situados a la izquierda del punto 6.

Cabe señalar que existen programas de simulación capaces de resolver este problema, aunque la base matemática de resolución es la misma que la que aquí se ha detallado, es decir, es necesario resolver el sistema de ecuaciones que se genera. En el presente problema, se ha resuelto el sistema de ecuaciones mediante MATLAB.

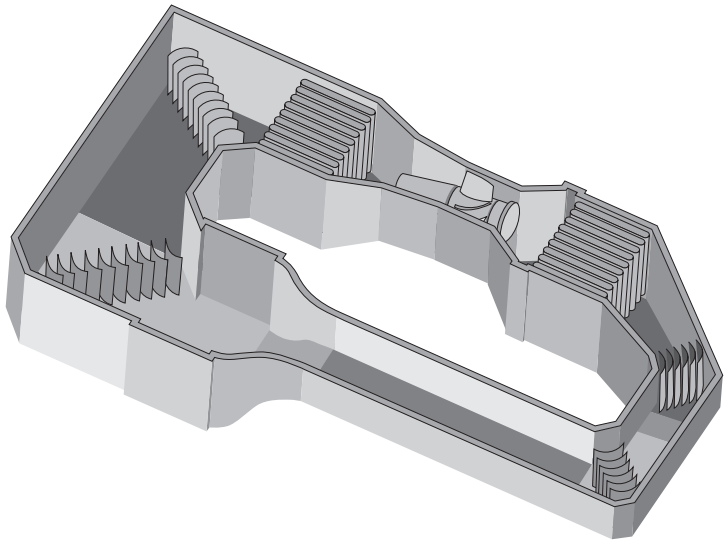
Problema 85

Enunciado

Se desea estudiar la característica de pérdidas de cada uno de los componentes del túnel de viento especificado en la figura 85.1, la idea es evaluar las pérdidas de energía del conjunto de la instalación e identificar cuáles son los componentes que provocan mayores pérdidas. Considerar que la velocidad del fluido en la sección 1 es de 40 m/s.



a)



b)

Fig. 85.1
a, b. Esquema del túnel de viento bajo estudio

Las dimensiones de cada una de las secciones de paso definidas en la figura 85.1 se especifican en la tabla 1. Las longitudes de cada tramo están especificadas en la figura 85.1.

Tabla 1

Posición en el túnel de viento.	Descripción.	Anchura de la sección de entrada. [m]	Altura de la sección de entrada [m]	Anchura de la sección de salida. [m]	Altura de la sección de salida [m]
Puntos 1-2	Sección de medición.	2	1.4	2	1.4
Puntos 2-3	Esquina inferior dcha.	2	1.4	2	1.4
Puntos 3-4	Tramo recto	2	1.4	2	1.4
Puntos 4-5	Primer difusor	2	1.4	2	2.1

Puntos 5-6	Segundo difusor	2	2.1	2	3
Puntos 6-7	Esquina angular	2	3	2	3
Puntos 7-8	Conducto divergente	2	3	4	4
Puntos 8-8	Entrada al linealizador	0.4	4	0.2	4
Puntos 8-9	Linealizador de flujo	0.2	4	0.2	4
Puntos 9-9	Salida del linealizador	0.2	4	0.4	4
Puntos 9-10	Expansión brusca.	4	4	4.1	4.1
Puntos10-11	Sección recta	4.1	4.1	4.1	4.1
Puntos11-12	Contracción brusca	4.1	4.1	4	4
Puntos12-13	Contracción	4	4	Ø2.8	Ø1.4
Puntos13-14	Canal del ventilador	Ø2.8	Ø1.4	Ø2.8	Ø1.4
Puntos14-15	Conducto difusor	Ø2.8	Ø1.4	Ø3	Ø0.92
Puntos15-16	Conducto divergente	Ø3	Ø0.92	4	4
Puntos16-16	Entrada al linealizador	0.4	4	0.2	4
Puntos16-17	Linealizador de flujo	0.2	4	0.2	4
Puntos17-17	Salida del linealizador	0.2	4	0.4	4
Puntos17-18	Esquina superior izquierda.	4	4	4	4
Puntos18-19	Conducto de expansión	4	4	4.2	4.2
Puntos19-20	Esquina inferior izquierda	4.2	4.2	4.2	4.2
Puntos20-20	Expansión brusca	4.2	4.2	4.3	4.3
Puntos20-21	Tramo recto	4.3	4.3	4.3	4.3
Puntos21-21	Contracción brusca	4.3	4.3	4.2	4.2
Puntos21-1	Contracción con tobera	4.2	4.2	2	1.4
Punto 20*	Pantalla de disminución de turbulencia	4.3	4.3	4.3	4.3

Obsérvese en la tabla 1, que entre los puntos 13 y 15 se ha utilizado el símbolo de diámetro, en esta zona, el conducto es de sección circular y tiene forma anular, con un diámetro exterior y un diámetro interior.

Resolución

A continuación se detallarán, las diferentes expresiones que permiten calcular las pérdidas energéticas en cada uno de los diferentes tramos de que consta la instalación. El fluido de trabajo es aire, la presión atmosférica se considerará de 10^5 Pa, la temperatura se va a considerar constante e igual a 293 K, la viscosidad absoluta del aire bajo estas condiciones termodinámicas es de $\mu = 1.02 * 10^{-6} \left[\frac{Kg}{m\,s}\right]$; la densidad del aire será de: $\rho = \frac{P}{R\,T} = \frac{10^5}{287 * 293} = 1.189 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$; Estas cuatro propiedades acabadas de definir, se considerarán como constantes en todo punto de la instalación.

Otro parámetro que se ha definido como constante en todo punto de la instalación, es la rugosidad de la pared del canal, esta se ha tomado de $\varepsilon = 0.001\,m$.

En lo que sigue, se detallará tramo a tramo cual ha sido el proceso de cálculo seguido para evaluar la caída de presión del fluido en dicho tramo, puesto que el proceso de cálculo en tramos similares es idéntico, en cada apartado se detallará qué tramos han sido tratados con la misma metodología.

1. Evaluación de la caída de presión en tramos rectos. Tramos 1-2; 3-4; 10-11 y 20-21.

Los diversos tramos rectos que se encuentran en la instalación, se evaluarán utilizando la ecuación de Darcy-Weissbach, la cual define el gradiente de presión en función de los siguientes parámetros.

$$\Delta p = f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2} \rho$$

En toda la instalación se va a utilizar el concepto de diámetro hidráulico, el cual viene definido por:

$$D_h = \frac{4 * Area_{mojada}}{Perímetro_{mojado}}$$

El factor de fricción f, debe ser hallado mediante el diagrama de Moody y partiendo del valor de la rugosidad relativa $\frac{\varepsilon}{D_h}$ y del número de Reynolds $R_e = \frac{\rho V D_h}{\mu}$.

Dónde:

- ε es la rugosidad de la pared, su valor para todos los casos se tomó igual a 0.001 m.
- V es la velocidad media del fluido en la sección de paso.
- μ es la viscosidad absoluta del fluido.
- ρ es la densidad del aire.

2. Evaluación de la caída de presión en el codo inferior derecho, puntos 2-3, donde hay alabes directrices. Puesto que los codos definidos entre los puntos 17-18 y 19-20, poseen también alabes directrices, el proceso de cálculo es idéntico para los tres casos. El proceso de cálculo que se definirá a continuación, se utilizará asimismo para el cálculo de la caída de presión en el codo 6-7, y aunque bien es cierto que este codo no es de 90 grados, al poseer alabes directrices se estima que la constante de la singularidad será muy similar a la obtenida para codos de 90 grados.

La expresión a utilizar, que caracteriza la caída de presión en una singularidad genérica, toma la forma: $\Delta p = K_c \frac{V^2}{2}\rho$, donde la constante K_c es generalmente hallada experimentalmente. No obstante, puesto que dichos codos poseen alabes directrices, se va a utilizar la ecuación de Wattendorf con el fin de determinar dicha constante.

Según Wattendorf, $K_c = 0{,}10 + \frac{4{,}55}{(\log_{10}(R_{ec}))^{2{,}58}}$; donde R_{ec} es el número de Reynolds a la entrada del codo.

3. Evaluación de la caída de presión en el primer, segundo y tercer difusores, tramos 4-5; 5-6 y 7-8. El mismo proceso se utilizará para el difusor anular, tramo 14-15, y también para los difusores definidos entre los puntos 15-16 y 18-19.

Se utilizará de nuevo la expresión de pérdidas de carga singulares, $\Delta p = K_d \frac{V^2}{2}\rho$ donde ahora, la constante K_d se determinará mediante la expresión.

$$K_d = K_f + K_{ex}$$

Donde la constante de fricción K_f se evalúa:

$$K_f = \left(1 - \frac{1}{A_R^2}\right)\frac{f}{8\ \mathrm{Sin}\,\theta}$$

θ es el semiángulo del difusor, f es el factor de fricción, que se determina del mismo modo que en el apartado 1, y $A_R = \frac{A_2}{A_1}$ es la relación de secciones salida partido por entrada del difusor, (v. figura 85.2).

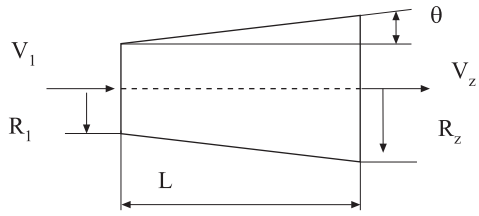


Fig. 85.2
Esquema
de un difusor

Por otro lado, la constante de expansión se determina:

$$K_{ex} = K_e(\theta)\left(\frac{A_R - 1}{A_R}\right)^2$$

El factor $K_e(\theta)$ es función de la forma de la sección por donde fluye el fluido. Para secciones rectangulares se tiene:

$$K_{e\ (rectangular)} = \begin{cases} 0,09623 - 0,004152\ \theta & \text{para } 0 < \theta < 1.5° \\ 0,1222 - 0,04590\ \theta + 0,02203\ \theta^2 + 0,003269\ \theta^3 - 0,0006145\ \theta^4 & \\ -0,00002800\ \theta^5 + 0,00002337\ \theta^6 & \text{para } 1.5° \le \theta \le 5° \\ -0,01322 + 0,05866\ \theta & \text{para } 5° < \theta \end{cases}$$

El valor de dicha constante para el caso de tener secciones de paso cilíndricas será:

$$K_{e\ (circular)} = \begin{cases} 0,1033 - 0,02389\ \theta & \text{para } 0 < \theta < 1.5° \\ 0,1709 - 0,1170\ \theta + 0,03260\ \theta^2 + 0,001078\ \theta^3 - 0,0009076\ \theta^4 & \\ -0,00001331\ \theta^5 + 0,00001345\ \theta^6 & \text{para } 1.5° \le \theta \le 5° \\ -0,09661 + 0,04672\ \theta & \text{para } 5° < \theta \end{cases}$$

4. Evaluación de la caída de presión en los linealizadores de flujo. Tramos 8-9 y 16-17.

Aunque es cierto que los expertos en el campo de evaluación de pérdidas de energía en linealizadores de flujo, desaconsejan que dichos elementos se estudien como el conjunto en serie de una tobera convergente un canal de sección constante y una tobera divergente, este va a ser el método utilizado en el siguiente ejemplo. El flujo volumétrico que fluye por una de las celdas del linealizador, será el flujo total, partido por el número de celdas. Cada celda de linealización constará de una tobera de entrada convergente, un canal de sección constante y una tobera de salida divergente.

La ecuación utilizada para hallar la caída de presión en la entrada y salida del linealizador, conductos convergente y divergente es:

$$\Delta p = \left(K_c + K_{div}\right)\frac{V^2}{2}\rho$$

Las constantes K_c y K_{div} caracterizan el tramo convergente y divergente respectivamente. La expresión que define a las constantes toma la forma:

$$K_c = \frac{0,5\left(1-\left(\frac{D_{h2}}{D_{h1}}\right)^2\right)^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{0,5}}{\left(\frac{D_{h2}}{D_{h1}}\right)^4}$$; obsérvese que se cumple que $D_{h2} < D_{h1}$;

Donde α es el semi-ángulo del conducto convergente.

$$K_{div} = \frac{\left(1-\left(\frac{D_{h2}}{D_{h1}}\right)^2\right)^2}{\left(\frac{D_{h2}}{D_{h1}}\right)^4}$$; cumpliéndose que $D_{h2} > D_{h1}$;

El tramo de linealizador de sección constante, se va a caracterizar mediante la expresión de pérdidas de carga lineales, ecuación de Darcy-Weissbach.

$$\Delta p = f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2}\rho$$

El proceso de cálculo de la caída de presión mediante esta ecuación, ha sido ya definido en el punto 1 de este problema.

5. Expansión brusca. Puntos 9-10 y 20-20.

Para evaluar la caída de presión causada por esta singularidad, se utilizará la ecuación genérica de pérdidas de carga singulares. $\Delta p = K\frac{V^2}{2}\rho$. La constante K se determinará mediante la expresión: $K = \left(1-\left(\frac{D_{h2}}{D_{h1}}\right)^2\right)^2$, cumpliéndose que $D_{h2} > D_{h1}$.

6. Contracción brusca, puntos 11-12 y 21-21.

La expresión genérica a utilizar en este caso es:

$$\Delta p = K\frac{V^2}{2}\rho$$

El valor de la constante K se determinará:

$$K = \frac{0,5\left(1-\left(\frac{D_{h2}}{D_{h1}}\right)^2\right)^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{0,5}}{\left(\frac{D_{h2}}{D_{h1}}\right)^4}$$; Donde se cumple que $D_{h2} < D_{h1}$;

Para el presente caso se cumple además que $\frac{\alpha}{2} = 90°$

7. Conducto convergente. Puntos 12-13.

De nuevo se utiliza la ecuación general de pérdidas de carga singulares.

$$\Delta p = K\frac{V^2}{2}\rho$$

Donde la constante K tendrá ahora el valor:

$$K = \frac{0,5\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(1-\left(\frac{D_{h2}}{D_{h1}}\right)^2\right)^2}{\left(\frac{D_{h2}}{D_{h1}}\right)^4}$$; Siendo $D_{h2} < D_{h1}$.

En la presente fórmula, el diámetro hidráulico D_{h2} se ha calculado en base a los diámetros mayor y menor del punto 13, el semi-ángulo de la reducción cónica, se ha calculado en base a los dos diámetros hidráulicos de los puntos 12 y 13 respectivamente.

8. Sección anular del ventilador. Puntos 13-14.

Aunque bien es cierto que entre los puntos 13 y 14 está localizado el ventilador, para hallar las pérdidas que existen entre estos dos puntos, se considerará como si se tuviese un canal anular donde no hay obstáculo alguno. Por consiguiente, la ecuación a utilizar, será la de Darcy-Weissbach.

$$\Delta p = f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2}\rho$$

El proceso de cálculo para la determinación de la caída de presión, ha sido ya explicado en el apartado 1 del presente problema.

9. Difusor anular. Puntos 14-15.

Se van a utilizar las mismas ecuaciones que las empleadas en el apartado 3, pero ahora las secciones de paso A_1 y A_2 están definidas en función del diámetro hidráulico D_{h1} y D_{h2}. El semi-ángulo del cono se define asimismo en función de los diámetros hidráulicos.

10. Conducto divergente. Puntos 15-16.

Obsérvese que la sección de entrada de este difusor es de tipo anular, mientras que el difusor es de tipo troncocónico. Se utilizarán las mismas expresiones que en el apartado 3 y los mismos conceptos que los descritos en el apartado 9.

11. Segundo linealizador de flujo. Tramo 16-17. Ver lo realizado en el apartado 4.

12. Conducto de expansión. Tramo 18-19.

Este conducto de sección cuadrangular, se tratará como un difusor, con lo que se aplicarán las mismas expresiones y proceso de cálculo que las utilizadas en el apartado 3.

13. Reducción de sección mediante tobera. Puntos 21-1.

De nuevo se utilizará la ecuación genérica de pérdidas singulares.

$$\Delta p = K_n \frac{V_{sc}^2}{2} \rho$$

V_{sc} es la velocidad en la sección de entrada de la tobera.

El valor de la constante K_n se da seguidamente en función del valor de la constante en la sección de salida de la tobera K_t, de donde:

$$K_t = K_n \left(\frac{q_{sc}}{q_{ts}} \right) = K_n \frac{\frac{1}{2}\rho \quad V_{sc}^2}{\frac{1}{2}\rho \quad V_{ts}^2} = K_n \frac{V_{sc}^2}{V_{ts}^2} = K_n \left(\frac{D_{ts}}{D_{sc}} \right)^4$$

Los subíndices: ts indica (test section), sección de salida de la tobera y sc indica (settling chamber), sección de entrada de la tobera.

Según Wattendorf K_t se calcula:

$$K_t = 0,32 f_{av} \frac{L_n}{D_{ts}}$$

f_{av} es el factor de fricción de la tobera.

L_n es la longitud de la tobera.

D_{ts} es el diámetro hidráulico de la sección de salida de la tobera.

D_{sc} es el diámetro hidráulico de la sección de entrada de la tobera.

$$K_n = K_t \left(\frac{D_{sc}}{D_{ts}} \right)^4 = 0,32 f_{av} \frac{L_n}{D_{ts}} \left(\frac{D_{sc}}{D_{ts}} \right)^4$$

14. Pantallas de disminución de turbulencia. Punto 20*.

Las pantallas de disminución de la turbulencia, tienen como su nombre indica la función de disminuir la turbulencia asociada al flujo. Estas pantallas tienen la forma de una red de malla muy fina y de pequeño espesor, que se sitúa perpendicular al flujo. Dichas pantallas se localizan generalmente antes de la tobera convergente que canaliza el flujo hacia la sección de medición, tal y como se muestra en el túnel de viento del ejemplo.

Eckerd et al, dan una expresión para hallar las pérdidas de carga que provoca la pantalla en función de los estudios realizados previamente por Idelchik. Se definen dos parámetros que caracterizan la pantalla, la porosidad (β_s) y el número de Reynolds basado en el diámetro del hilo de acero utilizado para formar la pantalla $R_{ew} = \frac{\rho \ V \ d_w}{\mu}$. Un tercer parámetro, denominado el factor de malla (K_{mesh}), se utiliza para caracterizar la finura de la superficie de la pantalla.

Denominando d_w al diámetro del hilo de acero y W_m a la anchura de una de las celdas de malla. La densidad de la malla ρ_m y su porosidad β_s se definen como:

$$\rho_m \equiv \frac{1}{W_m};$$

$$\beta_s = (1 - d_w \, \rho_m)^2$$

La solidez de la malla σ_s, se define como: $\sigma_s = 1 - \beta_s$

Para el presente ejemplo, se ha tomado un diámetro de hilo de acero de 1 mm.

Según Idelchik se distinguen tres valores para el factor de malla (K_{mesh}): El valor 1, se toma cuando la malla está hecha con hilos de metal nuevos. El valor 1.3 se utiliza cuando los hilos de metal no son perfectamente cilíndricos. Se tomará un valor de 2.1 cuando la malla esté constituida por hilos de seda. Para el presente ejemplo, se utilizará un valor de (K_{mesh}) = 1.3.

La ecuación que evalúa la caída de presión causada por la pantalla, es la ecuación genérica de pérdidas de carga singulares. $\Delta p = K_m \frac{V^2}{2} \rho$

La constante de pérdidas de la malla K_m se define como:

$$K_m = K_{mesh} \quad K_{Rn} \quad \sigma_s + \frac{\sigma_s^2}{\beta_s^2}$$

Según Eckerd et al, para un valor de número de Reynolds en el rango: $0 \le R_{ew} < 400$, el valor de la constante K_{Rn} se determina: $K_{Rn} = \left[0,785\left(1 - \frac{R_{ew}}{354}\right) + 1,01 \right]$

Cuando $R_{ew} \ge 400$, el valor de la constante es $K_{Rn} = 1,0$

En el apartado siguiente, tabla 2, se resume la utilización de todas estas expresiones en una tabla Excel, la cual servirá para hallar la caída de presión total generada por la instalación.

Tabla 2a. Calculo de la caída de presión en cada tramo de la instalación

Puntos en el túnel de viento	Descripción	Anchura de la sección de entrada [m]	Altura de la sección de entrada [m]	Anchura de la sección de salida [m]	Altura de la sección de salida [m]	Diámetro hidráulico sección entrada [m]	Diámetro hidráulico sección de salida [m]
1-2	Sección de medición.	2	1.4	2	1.4	1.647	1.647
2-3	Esquina inferior derecha	2	1.4	2	1.4	1.647	1.647
3-4	Tramo recto	2	1.4	2	1.4	1.647	1.647
4-5	Primer difusor	2	1.4	2	2.1	1.647	2.048
5-6	Segundo difusor	2	2.1	2	3	2.048	2.4
6-7	Esquina angular	2	3	2	3	2.4	2.4
7-8	Conducto divergente	2	3	4	4	2.4	4
8-8	Entrada al linealizador	0.4	4	0.2	4	0.7272	0.3809
8-9	Linealizador de flujo	0.2	4	0.2	4	0.3809	0.3809
9-9	Salida del linealizador	0.2	4	0.4	4	0.3809	0.7272
9-10	Expansión brusca.	4	4	4.1	4.1	4	4.1
10-11	Sección recta	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1
11-12	Contracción brusca	4.1	4.1	4	4	4.1	4

12-13	Contracción	4	4	2.8	1.4	4	1.4
13-14	Canal del ventilador	2.8	1.4	2.8	1.4	1.4	1.4
14-15	Conducto difusor	2.8	1.4	3	0.92	1.4	2.08
15-16	Conducto divergente	3	0.92	4	4	2.08	4
16-16	Entrada al linealizador	0.4	4	0.2	4	0.7272	0.3809
16-17	Linealizador de flujo	0.2	4	0.2	4	0.3809	0.3809
17-17	Salida del linealizador	0.2	4	0.4	4	0.3809	0.7272
17-18	Esquina superior izquierda.	4	4	4	4	4	4
18-19	Conducto de expansión	4	4	4.2	4.2	4	4.2
19-20	Esquina inferior izquierda	4.2	4.2	4.2	4.2	4.2	4.2
20-20	Expansión brusca	4.2	4.2	4.3	4.3	4.2	4.3
20-21	Tramo recto	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3
21-21	Contracción brusca	4.3	4.3	4.2	4.2	4.3	4.2
21-22	Contracción con tobera	4.2	4.2	2	1.4	4.2	1.647
		Diámetro alambre [m]	Anchura de malla [m]	Porosidad β	Solidez σ	Factor de Malla K_{mesh}	Reynolds (alambre)
20*-21*	Pantalla turbulenta	0.0008	0.003	0.5377	0.4622	1.3	$2.91*10^2$

Tabla 2b. Calculo de la caída de presión en cada tramo de la instalación

Puntos en el túnel de viento	Descripción	Rugosidad relativa	Velocidad del fluido a la entrada del canal [m/s]	Reynolds a la entrada del canal	Factor de fricción	Longitud del canal	Semi ángulo de la singula-ridad [rad]
1-2	Sección de medición.	0.0006071	40	$3.96*10^6$	0.017	10	
2-3	Esquina inferior derecha		40	$3.96*10^6$			
3-4	Tramo recto	0.0006071	40	$3.96*10^6$	0.017	0.35	
4-5	Primer difusor	0.0006071	40	$3.96*10^6$	0.017	1.36	0.1466

5-6	Segundo difusor	0.0004880	26.664	$3.28*10^6$	0.017	1.42	0.1230
6-7	Esquina angular		18.664	$2.69*10^6$			
7-8	Conducto divergente	0.0004880	18.664	$2.69*10^6$	0.017	4.69	0.1689
8-8	Entrada al linealizador		7	$3.06*10^5$		0.1	0.7854
8-9	Linealizador de flujo	0.002625	12.724	$2.91*10^5$	0.0235	2.8	
9-9	Salida del linealizador		12.724	$2.91*10^5$		0.1	0.7854
9-10	Expansión brusca.		7	$1.68*10^6$			
10-11	Sección recta	0.0002439	6.66	$1.64*10^6$	0.0148	0.6	
11-12	Contracción brusca		6.66	$1.64*10^6$			1.5708
12-13	Contracción		7	$1.68*10^6$		1.3	0.7854
13-14	Canal del ventilador	0.0007142	24.25	$2.04*10^6$	0.019	2	
14-15	Conducto difusor	0.0007142	24.25	$2.04*10^6$	0.018	2	0.1684
15-16	Conducto divergente	0.0004807	17.48	$2.18*10^6$	0.017	1.8	0.4900
16-16	Entrada al linealizador		7	$3.06*10^5$		0.1	0.7854
16-17	Linealizador de flujo	0.002625	12.724	$2.91*10^5$	0.0235	2.8	
17-17	Salida del linealizador		12.724	$2.91*10^5$		0.1	0.7854
17-18	Esquina superior izquierda.		7	$1.68*10^6$			
18-19	Conducto de expansión	0.00025	7	$1.68*10^6$	0.0148	2.3	0.0435
19-20	Esquina inferior izquierda		6.348	$1.60*10^6$			
20-20	Expansión brusca		6.348	$1.60*10^6$			
20-21	Tramo recto	0.0002325	6.056	$1.56*10^6$	0.01475	3	
21-21	Contracción brusca		6.056	$1.56*10^6$			1.5708
21-22	Contracción con tobera	0.0002380	6.348	$1.60*10^6$	0.0147	3	0.4023
		K_{rn}	Vel fluido	K_m			
20^*-21^*	Pantalla turbulenta	1.15	6.056	1.4295			

Tabla 2c. Calculo de la caída de presión en cada tramo de la instalación

Puntos en el túnel de viento	Descripción	Constante de la singularidad	Caída de presión [Pa]	Caida de presión en porcentaje %
1-2	Sección de medición.		98.1929	5.9438
2-3	Esquina inferior derecha	0.1350	128.4299	7.7741
3-4	Tramo recto		3.4368	0.2080
4-5	Primer difusor	0.0614	58.3839	3.5341
5-6	Segundo difusor	0.0449	18.9676	1.1482
6-7	Esquina angular	0.1374	28.4666	1.7231
7-8	Conducto divergente	0.2275	47.1356	2.8532
8-8	Entrada al linealizador	3.7840	110.2482	6.6736
8-9	Linealizador de flujo		16.6359	1.0070
9-9	Salida del linealizador	0.5625	54.1768	3.2794
9-10	Expansión brusca.	0.0026	0.0747	0.0045
10-11	Sección recta		0.0572	0.0035
11-12	Contracción brusca	0.0000002	0.00000516	0.00000031
12-13	Contracción	21.57	628.56	38.0485
13-14	Canal del ventilador		9.4924	0.5746
14-15	Conducto difusor	0.0489	17.1018	1.0352
15-16	Conducto divergente	1.1229	204.2369	12.3629
16-16	Entrada al linealizador	3.7840	110.2482	6.6736
16-17	Linealizador de flujo		16.6359	1.0070
17-17	Salida del linealizador	0.5625	54.1768	3.2794
17-18	Esquina superior izquierda.	0.1406	4.0977	0.2480
18-19	Conducto de expansión	0.087	0.2535	0.0153
19-20	Esquina inferior izquierda	0.1410	3.3798	0.2046
20-20	Expansión brusca	0.0023	0.0557	0.0034

20-21	Tramo recto		0.2245	0.0136
21-21	Contracción brusca	0.00000016	0.00000351	0.00000021
21-22	Contracción con tobera	0.3401	8.1512	0.4934
		K_m	Caída presión [Pa]	
20^*-21^*	Pantalla turbulenta	1.4295	31.1873	1.8878
			Σ caída de presión. [Pa]	
			1652.0142	

Véase que la tabla 2, permite detectar qué partes de la instalación son las que provocan unas pérdidas de carga mayores, permitiendo así, detectar qué zonas son susceptibles de modificación con el fin de minimizar las pérdidas de energía y por consiguiente optimizar la instalación y minimizar la energía requerida para el funcionamiento de la instalación.

De la tabla 2 se observa que el codo inferior derecho, el primer difusor y los dos linealizadores de flujo, en su conjunto, (incluyendo la entrada, la salida y el tramo de sección constante), es donde aparecen unas caídas de presión de cierta relevancia. Se observa asimismo que, la caída de presión más relevante, aparece en el conducto convergente situado a la entrada del ventilador, puntos 12-13. Es asimismo relevante destacar que el conducto divergente situado entre los puntos 15-16 provoca unas pérdidas considerables. Véase que entre los puntos 12 y 13 se pasa de una sección cuadrada de 4m de lado, a una sección anular con un diámetro exterior de 2,8m y un diámetro interior de 1,4m, con lo que la sección de paso se reduce casi un 75%. Algo similar ocurre entre los puntos 15 y 16, donde la sección aumenta casi en un 100%. Se puede por tanto concluir que estas reducciones y ampliaciones de sección sería conveniente realizarlas de modo más progresivo.

Obsérvese que estos cálculos han sido realizados considerando una velocidad del aire en la sección de medición de 40 m/s, sabiendo que la caída de presión, para flujo turbulento depende de la velocidad de circulación al cuadrado, se puede fácilmente deducir que las caídas de presión serán mucho menores para velocidades de circulación más reducidas.

Capa límite, flujo externo, flujo potencial

11.1 Capa límite

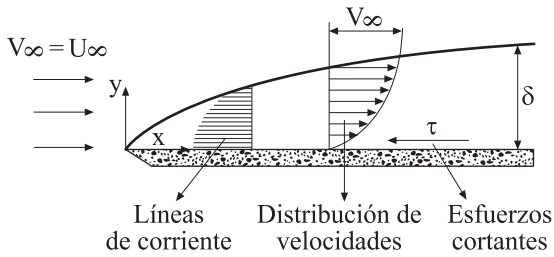
11.1.1 Introducción

La capa límite es una región de pequeño espesor, generalmente denominado δ y gran longitud X, que se sitúa alrededor de cualquier cuerpo aerodinámico o en el interior de los conductos. Dicha capa se puede encontrar adherida al cuerpo o separada de el, siendo los fenómenos de transporte molecular y convectivos de gran importancia en la capa límite. En función del número de Reynolds, la capa límite se define como laminar o turbulenta, entre ambas aparece una zona de transición donde las fuerzas de inercia y viscosas son de un mismo orden de magnitud. En la zona turbulenta de la capa límite, aparece una subcapa laminar.

Características generales de la capa límite:

- La capa límite es muy delgada, siempre se cumple que su espesor δ es mucho menor que la longitud respecto el inicio de la placa (x), $\delta << x$.
- Su espesor, aumenta corriente abajo, aunque siempre se cumple que $\delta << x$
- El perfil de velocidades de la capa límite, cumple la condición de no deslizamiento en la pared
- Se considerarán los esfuerzos cortantes sobre la superficie de la pared.
- Las líneas de corriente del flujo en el interior de la capa límite, se pueden considerar aproximadamente paralelas a la superficie de la placa, es decir, la componente de la velocidad paralela a la superficie de la placa, es siempre mucho mayor que la componente normal a la superficie. El borde exterior de la capa límite, no es una línea de corriente.

Fig. T 11.1
Evolución de la capa límite

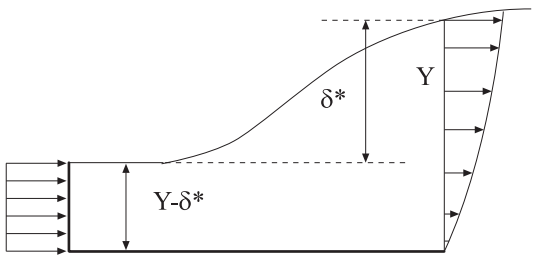


11.1.2 Efectos de la capa límite sobre el flujo, concepto de espesor de desplazamiento de la capa límite

Entre los efectos que la capa límite causa sobre el flujo de fluido, cabe destacar la deflexión de las líneas de corriente. Asimismo, el caudal másico en la zona donde existe la capa límite disminuye, puesto que la velocidad del fluido en dicha zona es menor que la que existe fuera de la capa límite.

Para cuantificar estos dos efectos, se introduce el concepto de espesor de desplazamiento, que es la distancia que las líneas de corriente del flujo exterior se desplazan debido a la existencia de la capa límite.

Fig. T 11.2
Concepto de espesor redesplazamiento de la capa límite



Haciendo un balance de masa entre el flujo no perturbado y el flujo en el interior de la capa límite, se obtiene:

$$\int_0^y \rho\, u\, dy = \int_0^{y-\delta^*} \rho\, V_\infty\, dy$$

$$\int_0^y u\, dy = V_\infty (y - \delta^*)$$

$$\delta^* = y - \int_0^y \frac{u}{V_\infty} dy = \int_0^y dy - \int_0^y \frac{u}{V_\infty} dy = \int_0^y \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) dy$$

Puesto que $u = V_\infty$ para $y \geq \delta$, se tiene:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) dy$$

ecuación que caracteriza el espesor de desplazamiento de la capa límite en función de la distribución de velocidades en una sección dada.

11.1.3 Concepto de espesor de cantidad de movimiento para la capa límite

Sea el volumen de control definido en la figura siguiente.

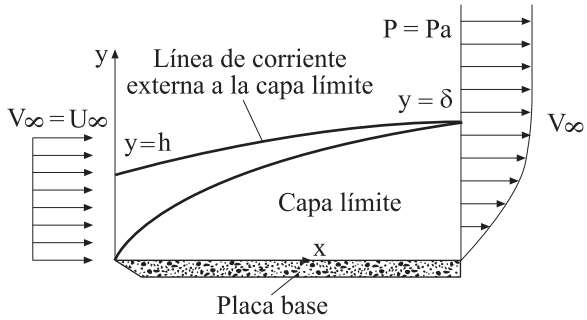


Fig. T 11.3
Volumen de control para la obtención del espesor de la cantidad de movimiento para la capa límite

La determinación de la fuerza de arrastre que el fluido ejerce sobre la placa se obtiene aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control definido en dicha figura, de donde asumiendo una profundidad de la placa unitaria, se obtiene:

$$-D = \sum F_x = \int \rho\, u_{(0,y)} \vec{v}\, d\vec{s} + \int \rho\, u_{(L,y)}\, \vec{v}\, d\vec{s} = -\int_0^h \rho\, V_\infty^2\, dy + \int_0^\delta \rho\, u_{(L,y)}\, u_{(L,y)}\, dy$$

$$D = \rho\, V_\infty^2\, h - \rho \int_0^\delta u^2\Big|_{x=L}\, dy$$

Obsérvese que el valor de h en realidad no es conocido, con lo que se debe determinar.

Por otro lado, aplicando al volumen de control de la figura T 11.3, la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$0 = -\int_0^h \rho\, V_\infty\, dy + \int_0^\delta \rho\, u\Big|_{x=L}\, dy$$

$$V_\infty\, h = \int_0^\delta u\Big|_{x=L}\, dy$$

Sustituyendo el valor de la altura h en la ecuación de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$D = \rho\, V_\infty \int_0^\delta u\Big|_{x=L}\, dy - \rho \int_0^\delta u^2\Big|_{x=L}\, dy = \rho \int_0^\delta u(V_\infty - u)\Big|_{x=L}\, dy$$

Este resultado fue obtenido por Von Karman en 1921.

Esta ecuación también se puede presentar como:

$$D = V_\infty^2 \, \rho \int_0^\delta \frac{u}{V_\infty}(1-\frac{u}{V_\infty})\Big|_{x=L} dy = \rho \, V_\infty^2 \, \theta$$

ecuación que relaciona la fuerza de arrastre en la placa con el espesor de cantidad de movimiento θ. Recuérdese que la ecuación indica la fuerza de arrastre por unidad de profundidad de la placa.

El espesor de cantidad de movimiento se define por la ecuación $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{V_\infty}(1-\frac{u}{V_\infty})\, dy$

y es una medida de la resistencia total de la placa.

Sería interesante, en este punto, determinar la relación entre los esfuerzos cortantes actuantes sobre la superficie de la placa y el espesor de cantidad de movimiento. Para ello, cabe recordar que la fuerza de arrastre por unidad de profundidad actuante sobre la placa se puede dar en función de los esfuerzos cortantes mediante la relación:

$$D = \int_0^x \tau_w \, dx$$

Diferenciando esta ecuación, se obtiene:

$$\frac{dD}{dx} = \tau_w$$

Por otro lado, la diferenciación de la ecuación que relaciona la fuerza de arrastre con el espesor de cantidad de movimiento da lugar a:

$$\frac{dD}{dx} = \rho \, V_\infty^2 \, \frac{d\theta}{dx}$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\tau_w = \rho \, V_\infty^2 \, \frac{d\theta}{dx}$$

ecuación que relaciona los esfuerzos cortantes en la placa con el espesor de cantidad de movimiento. Esta ecuación es válida para cualquier tipo de flujo, laminar o turbulento.

11.1.4 Ecuación diferencial de Prandtl para el análisis de la capa límite

Dicha ecuación, ha de permitir, una vez integrada, determinar la distribución de velocidades a través de la capa límite laminar, y se obtendrá de aplicar las ecuaciones de conservación de la masa y de cantidad de movimiento lineal a un volumen de control situado por completo en el interior de la capa limite laminar.

Sea el volumen de control representado en la figura siguiente.

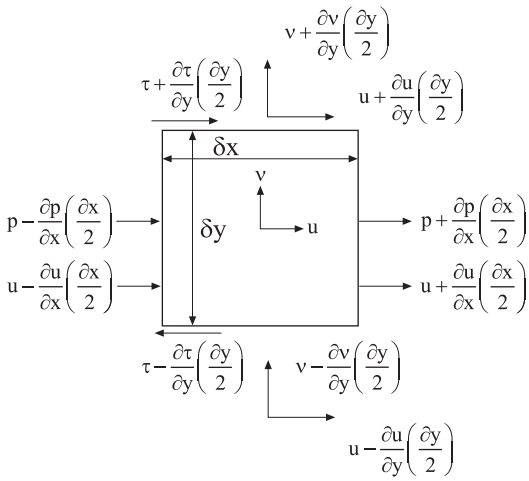


Fig. T 11.4
Elemento diferencial de fluido situado en el interior de la capa límite

Obsérvese que, en las superficies del volumen de control, se han representado los esfuerzos de presión y esfuerzos cortantes, así como las velocidades actuantes en cada una de las caras. Véase el carácter bidimensional del volumen de control elegido. A la hora de aplicar las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento al volumen de control, se establecen las siguientes hipótesis:

- La densidad del fluido es constante.
- La presión se considera constante en dirección perpendicular a la capa límite, $\frac{\partial P}{\partial y}\approx 0$
- La presión es una función conocida de x y está relacionada con la velocidad no perturbada fuera de la capa límite mediante la ecuación de Bernoulli.
- La velocidad del fluido, cambia con mucha más rapidez en dirección perpendicular a la capa límite que a lo largo de la misma, lo cual se puede expresar matemáticamente: $\frac{\partial u}{\partial x}<<\frac{\partial u}{\partial y}$

La ecuación de continuidad para un flujo incompresible bidimensional y bidireccional se expresa:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control definido en la figura precedente, se observa que los términos de flujo de la ecuación de cantidad de movimiento en dirección x son:

$$\delta\dot{M}_{x\ saliente} - \delta\dot{M}_{x\ entrante} = \delta\dot{M}_{x\ derecho} + \delta\dot{M}_{x\ arriba} - \delta\dot{M}_{x\ izquierdo} - \delta\dot{M}_{x\ abajo}$$

$$= \left[\rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)\right)\cdot\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)\right)\delta_y\cdot\delta_z\right] + \left[\rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\delta_y}{2}\right)\right)\cdot\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\delta_y}{2}\right)\right)\delta_x\cdot\delta_z\right]$$

$$-\left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)\right)\cdot\rho\cdot\left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)\right)\delta_y\cdot\delta_z\right] - \left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\delta_y}{2}\right)\right)\cdot\rho\cdot\left(v - \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\delta_y}{2}\right)\right)\delta_x\cdot\delta_z\right]$$

Reordenando términos, se obtiene:

$$\delta\dot{M}_{xsaliente} - \delta\dot{M}_{xentrante} = \rho\, u\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z + \rho\, u\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\delta x\ \delta z + \rho v\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\delta x\ \delta z$$

$$+\rho\, u\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z + \rho\, u\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\delta x\ \delta z + \rho v\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\delta x\ \delta z$$

Agrupando, se llega a:

$$\delta\dot{M}_{x\ saliente} - \delta\dot{M}_{x\ entrante} = \rho\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\delta_x\ \delta_y\ \delta_z$$

Recordando la ecuación de continuidad para flujo bidimensional e incompresible, la ecuación anterior se reduce a:

$$\delta\dot{M}_{x\ saliente} - \delta\dot{M}_{x\ entrante} = \rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right]\delta_x\delta_y\cdot\delta_z$$

La fuerza neta en dirección x debida a los gradientes de presión y a los esfuerzos cortantes actuantes sobre las superficies del volumen de control establece:

$$\delta F_x = \delta F_{p,izquierda} - \delta F_{p,derecha} + \delta F_{\tau,arriba} - \delta F_{\tau,abajo}$$

$$\delta F_x = \left[P - \frac{dP}{dx}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)\right]\delta_y\cdot\delta_z - \left[P + \frac{dP}{dx}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)\right]\delta_y\cdot\delta_z + \left[\tau + \frac{d\tau}{dy}\left(\frac{\delta_y}{2}\right)\right]\delta_x\cdot\delta_z$$

$$-\left[\tau - \frac{d\tau}{dy}\left(\frac{\delta_y}{2}\right)\right]\delta_x\cdot\delta_z$$

Simplificando, queda:

$$\delta F_x = \left(-\frac{dP}{dx} + \frac{d\tau}{dy}\right)\delta_x\cdot\delta_y\cdot\delta_z$$

Uniendo los términos de flujo de cantidad de movimiento con los de las fuerzas debidas a la presión y a los esfuerzos cortantes se obtiene:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación diferencial de Prandtl para la capa límite* y es aplicable tanto a flujo laminar como turbulento; únicamente dependerá de cómo se hallen los esfuerzos cortantes τ. Para un fluido Newtoniano en régimen laminar, en flujo unidireccional y con viscosidad constante, sería:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Con lo que la ecuación de Prandtl toma la forma:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dx}\right) + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Esta ecuación, junto con la de continuidad, forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas u y v, que se denominan *ecuaciones de Prandtl de la capa límite*.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre dos puntos situados en el borde exterior de la capa límite, puede escribirse:

$P + \frac{\rho V_\infty^2}{2} = cte$; V_∞ = velocidad en el exterior de la capa límite

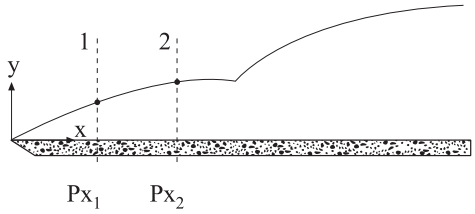


Fig. T 11.5
Balance de energía entre dos puntos situados en el borde de la capa límite

Diferenciando la ecuación precedente para $\rho = cte$, se obtiene: $-\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dx}\right) = V_\infty\left(\frac{dV_\infty}{dx}\right)$

Sustituyendo esta ecuación en la de cantidad de movimiento, se elimina el término de presión en dicha ecuación y se obtiene:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = V_\infty\left(\frac{dV_\infty}{dx}\right) + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

La integración de esta ecuación diferencial dará lugar a la distribución de velocidades en el interior de la capa límite y para flujo laminar. Las condiciones de contorno necesarias para la integración de esta ecuación son:

- En la pared, $y = 0; \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$
- En el borde exterior, $u = V_\infty$; $y = \delta$; pero δ es desconocida, con lo cual $u \to V_\infty \equiv y \to \infty$

δ se define como el valor de y para el cual u es 0,99 V_∞.

La ecuación diferencial de Prandtl fue integrada por Blasius, que obtuvo lo que se denomina la distribución exacta de velocidades para la zona laminar de la capa límite.

11.1.5 Efecto del gradiente de presión en la capa límite.

Uno de los apartados más interesantes en el estudio de la capa límite, es el análisis de los factores que intervienen en el desprendimiento o separación de la misma, en este apartado se realizará un pequeño repaso de estos conceptos.

Ludwig Prandtl (1875-1953), demuestra que la separación de la capa límite, (v. figura T 11.6B), es debida a una pérdida excesiva de la cantidad de movimiento del fluido en el interior de la capa límite y en las posiciones más cercanas a la pared del sólido, cuando dicho fluido debe moverse aguas abajo donde aparece un gradiente de presión positivo, $\frac{dP}{dx} > 0$. Este gradiente recibe el nombre de gradiente adverso de presión.

Si en el interior de la capa límite el gradiente de presión decrece, $\frac{dP}{dx} < 0$, no aparecerá separación de la capa límite, se dice que el gradiente de presión es favorable.

Obsérvese en la figura T 11.6B, que en la parte frontal del cuerpo, existe un gradiente de presión favorable, dicho gradiente se vuelve positivo en la parte posterior del cuerpo, dando lugar a la separación de la capa límite.

La separación de la capa límite, puede explicarse en función de la velocidad del fluido en la pared. Para un flujo bidimensional e incompresible, Prandtl define las ecuaciones gobernantes como: ver sección 11.1.4.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \cong -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = V_\infty \frac{d\,V_\infty}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

Recuérdese que en general, se establece.

$$\tau = \begin{cases} \mu\dfrac{\partial u}{\partial y} \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \text{Caso flujo laminar} \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial y} - \rho\overline{u'v'} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \text{Caso flujo turbulento} \end{cases}$$

Las condiciones de contorno para la determinación de las constantes de integración, son:

En la pared: y = 0; u = v = 0. Condición de no deslizamiento.

En la corriente exterior: $y = \delta_{(x)}$; u =V(x) . Velocidad no perturbada.

$\delta_{(x)}$ = Espesor genérico de la capa límite.

Estas ecuaciones son parabólicas, se resuelven comenzando por el borde de ataque y avanzando aguas abajo hasta llegar al punto de separación.

En la pared del cuerpo, donde u = v = 0; la ecuación de cantidad de movimiento toma la forma:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = V_\infty \frac{d\,V_\infty}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{Pared} = -\rho\, V_\infty \left.\frac{d\,V_\infty}{dx}\right|_{Pared}$$

$$\mu\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right|_{Pared} = \frac{dP}{dx}$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right|_{Pared} = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}$$

Ecuaciones que son válidas tanto para flujo laminar como turbulento.

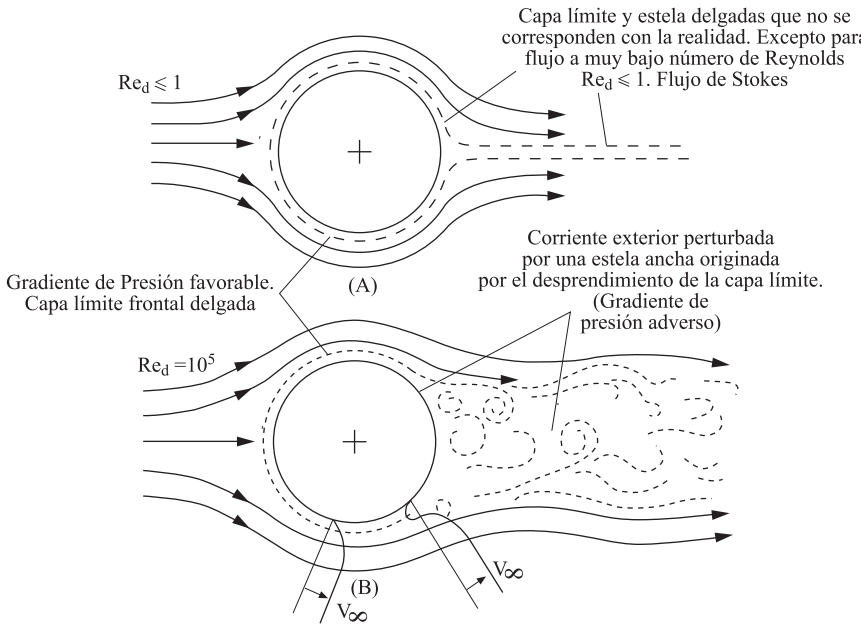


Fig. T 11.6
A) Flujo alrededor de un cilindro sin que exista separación de la capa límite. B) se observa la separación de la capa límite y el flujo vorticular aguas abajo

Obsérvese que según la ecuación acabada de hallar, cuando el gradiente de presión es adverso, $\frac{dP}{dx} > 0$, la segunda derivada de la velocidad definida en la pared del cuerpo, es también positiva. Por otro lado, en la pared exterior de la capa límite, donde y = δ, la derivada de la velocidad debe ser negativa con el fin de que la distribución de velocidades conecte suavemente con la corriente exterior V_∞.

Si la segunda derivada de la velocidad para gradientes de presión adversos, es positiva en las regiones mas cercanas a la pared y negativa en el extremo superior de la capa límite, en algún punto intermedio deberá haber un punto de inflexión. Consecuentemente el perfil de velocidades en el interior de la capa límite y cuando el gradiente de presión es adverso, tendrá forma de S.

En la figura T 11.7, se muestra la posible evolución de un gradiente de velocidades, desde un estado inicial donde el gradiente de presiones es favorable $\frac{dP}{dx} < 0$, hasta un estado final donde el gradiente de presiones es adverso. La figura T 11.7I, muestra la capa límite con un gradiente de presiones favorable, el perfil de velocidades es convexo, bastante redondeado, no existe ningún punto de inflexión. Cuando aparece este perfil, el flujo esta adherido y es laminar, es un perfil muy resistente a la transición a la turbulencia. Este perfil se daría en la parte frontal del cuerpo de la figura T 11.6B.

La figura T 11.7II, muestra una distribución de velocidades con un gradiente de presión nulo, el punto de inflexión (PI) aparece en la propia pared. No existe separación de flujo y este se vuelve turbulento para Re_x alrededor de $3*10^6$, caso de una placa plana. En la figura T 11.6B este gradiente aparecería poco antes de alcanzar el máximo espesor del cuerpo.

Las figuras T 11.7III, IV y V, muestran diversas distribuciones de velocidades para gradientes de presión adversos $\frac{dP}{dx} > 0$; estos gradientes aparecerían progresivamente en la parte posterior del cuerpo definido en la figura T 11.6B. Obsérvese que el punto de inflexión (PI) se sitúa cada vez más alejado de la pared a medida que el gradiente adverso de presión aumenta de intensidad. En las figuras T 11.7III y IV, el flujo no está desprendido. La situación crítica queda definida en la figura T 11.7IV, en donde el esfuerzo sobre la pared es nulo $\tau_{pared} = 0$, además, la pendiente de la distribución de velocidades es asimismo nula en la pared $\frac{du}{dy} = 0$. Este caso define el punto de separación de la capa límite.

La figura T 11.7V, muestra el caso en que el gradiente de presión adverso es suficientemente intenso como para que exista una corriente de recirculación del fluido en la zona adyacente a la pared. Es interesante remarcar que a partir del punto de separación,

el espesor de la capa límite crece notoriamente, la corriente principal del fluido se separa de la pared.

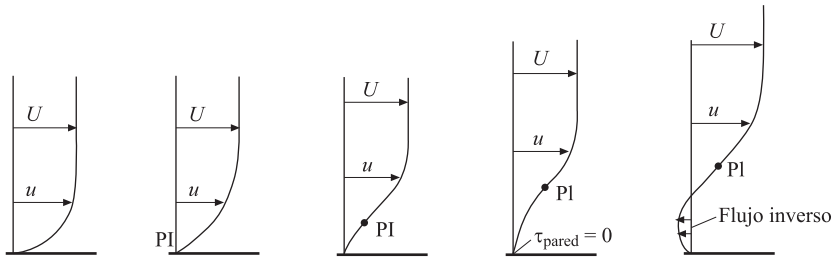


Fig. T 11.7
Evolución de la distribución de velocidades en la capa límite en función del gradiente de presiones actuante

I. Gradiente favorable
$\frac{dU}{dx} > 0$
$\frac{dp}{dx} < 0$
Sin separación, punto de inflexión (PI) en el interior de la pared

II. Gradiente nulo
$\frac{dU}{dx} = 0$
$\frac{dp}{dx} = 0$
Sin separación, punto de inflexión (PI) en la pared

III. Gradiente adverso débil
$\frac{dU}{dx} < 0$
$\frac{dp}{dx} > 0$
Sin separación, punto de inflexión (PI) en la corriente

IV. Gradiente adverso crítico
Pendiente nula en la pared
$\frac{du}{dy} = 0$
$\frac{dp}{dx} > 0$
Separación

V. Gradiente adverso fuerte
Flujo inverso en la pared
$\frac{dp}{dx} > 0$
Región desprendida

Un ejemplo típico en donde se pueden observar las diversas fases de la evolución de la capa límite, incluido el desprendimiento de la misma, es en un conjunto tobera convergente divergente como el que se muestra en la figura T 11.8, flujo subsónico.

En la zona convergente de la tobera, el gradiente de presiones es favorable $\frac{dP}{dx} < 0$, no aparece desprendimiento de la capa límite. En la garganta, el gradiente de presiones es próximo a cero $\frac{dP}{dx} \cong 0$, con lo que tampoco dará lugar a un desprendimiento de la capa límite.

En la zona divergente de la tobera, la velocidad media del fluido tiende a disminuir y la presión estática ha de aumentar, esto da lugar a que aparezca un gradiente de presiones adverso $\frac{dP}{dx} > 0$. A partir del punto donde el gradiente de presiones posee una cierta intensidad, se producirá el desprendimiento de la capa límite, dicho desprendimiento aparecerá más cerca de la garganta de la tobera cuanto mayor sea el ángulo de apertura de la zona divergente.

A partir del punto de desprendimiento, caracterizado por que los esfuerzos cortantes en la pared son nulos, $\tau_{pared} = 0$, aparece flujo inverso en las zonas cercanas a la pared, la recuperación de presión, característica de la zona divergente de la tobera, se ve comprometida, y las perdidas por fricción aumentarán notoriamente.

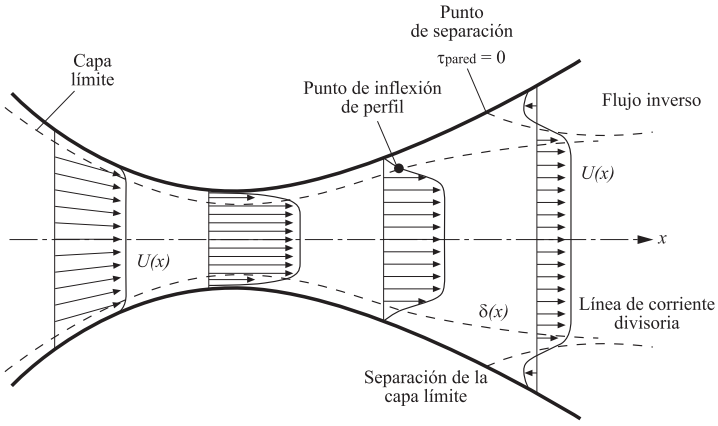


Fig. T 11.8 Distribución de velocidades del fluido en su evolución por el interior de una tobera convergente divergente, la zona divergente posee un ángulo tal que da lugar al desprendimiento de la capa límite, observándose flujo inverso

Tobera:	*Garganta:*	*Difusor:*
Presión y área decrecientes.	Presión y área constantes.	Presión y área crecientes.
Velocidad creciente.	Velocidad constante.	Velocidad decreciente.
Gradiente de presión favorable, capa límite delgada.	Gradiente de presión nulo, capa límite delgada.	Gradiente de presión adverso, el espesor de la capa límite aumenta notoriamente.

11.1.6 Ecuación integral de cantidad de movimiento para la capa límite. Ecuación de Von Karman

En la mayoría de los casos de ingeniería, no es necesario conocer la distribución de velocidades u y v en función de x e y, distribución que se obtiene de integrar la ecuación de Prandtl. Lo que realmente se requiere son los valores del espesor de la capa límite, el espesor de desplazamiento δ^*, los coeficientes de fricción y arrastre C_f, C_D, etc. Para determinar estos parámetros, será necesario desarrollar una ecuación integral que se denominará, ecuación de Von Karman.

Sea el volumen de control que se muestra en la figura siguiente. Obsérvese que dicho volumen de control atraviesa la frontera de la capa límite. En cada una de las caras verticales del volumen de control, se considerará una distribución de velocidades no uniforme, mientras que la presión sí que se va a considerar uniforme en dirección y.

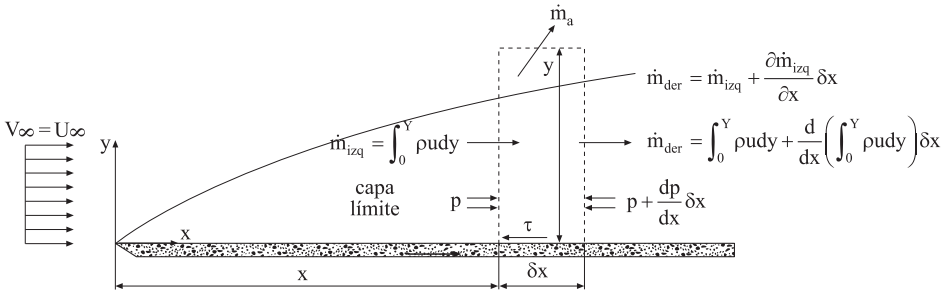


Fig. T 11.9 Volumen de control utilizado para la determinación de la ecuación integral de cantidad de movimiento

Aplicando la ecuación de continuidad al volumen de control acabado de definir, se tiene:

$$\dot{m}_{izquierda} = \dot{m}_{derecha} + \dot{m}_{arriba}$$

de donde: $\dot{m}_{izquierda} = \int_0^y \rho\, u\, dy\Big)_x$; $\dot{m}_{derecha} = \dot{m}_{x+\delta x} = \int_0^y \rho\, u\, dy\Big)_x + \frac{d}{dx}\left(\int_0^y \rho\, u\, dy\right)\delta x$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación precedente, se obtiene que, para que se cumpla continuidad, se ha de cumplir:

$$\dot{m}_{arriba} = -\frac{d}{dx}\left(\int_0^y \rho\, u\, dy\right)\delta x$$

Aplicando para este mismo volumen de control la ecuación de cantidad de movimiento se tiene:

$$\dot{M}_{x,derecha} + \dot{M}_{x,arriba} - \dot{M}_{x,izquierda} = F_{x,presión} + F_{x,esfuerzo\,cortante}$$

donde:

$$\dot{M}_{x,izquierda} = \int_0^y \rho\, u\, v_r\, dA = \int_0^y \rho\, u^2\, dy\Big|_X$$

$$\dot{M}_{x,derecha} = \dot{M}_x\Big|_{x+\delta x} = \int_0^y \rho\, u^2\, dy\Big|_X + \frac{d}{dx}\left(\int_0^y \rho\, u^2\, dy\right)\delta x$$

$$\dot{M}_{x,arriba} = \dot{m}_{arriba}\, u_{arriba\,x} = \dot{m}_{arriba}\, V_{\infty,x}$$

$$\dot{M}_{x,arriba} = -V_{\infty,x}\,\frac{d}{dx}\left(\int_0^y \rho\, u\, dy\right)\delta x\ ;$$

Las fuerzas debidas a la presión y a los esfuerzos cortantes toman la forma:

$$F_{x,presión} = P\cdot Y - \left(P + \frac{dP}{dx}\delta_x\right)Y = -\frac{dP}{dx}Y\delta x$$

$$F_{x,esfuerzo\,cortante} = -\tau_w\,\delta x$$

Sustituyendo los diversos términos en la ecuación inicial de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\int_0^y \rho\, u^2\, dy - V_\infty\,\frac{d}{dx}\int_0^y \rho\, u\, dy = -Y\left(\frac{dP}{dx}\right) - \tau_w$$

Teniendo en cuenta que:

$$Y = \int_0^y dy$$

Y recordando que, de la aplicación de la ecuación de Bernoulli entre dos puntos exteriores a la capa límite se obtuvo:

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dx}\right) = V_\infty\left(\frac{dV_\infty}{dx}\right)$$

sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en la ecuación de cantidad de movimiento, considerando el fluido como incompresible y multiplicando el resultado por -1, se tiene:

$$V_\infty \frac{d}{dx}\int_0^y u\,dy + V_\infty\left(\frac{dV_\infty}{dx}\right)\int_0^y dy - \frac{d}{dx}\int_0^y u^2\,dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Seguidamente, se procede a diferenciar el siguiente término:

$$\frac{d}{dx}\left(V_\infty\int_0^y u dy\right) = \frac{dV_\infty}{dx}\left(\int_0^y u dy\right) + V_\infty\frac{d}{dx}\int_0^y u dy$$

Observando que el segundo sumando del segundo término de esta ecuación es idéntico al primer sumando de la ecuación precedente, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left(V_\infty\int_0^y u dy\right) - \frac{dV_\infty}{dx}\left(\int_0^y u dy\right) + V_\infty\left(\frac{dV_\infty}{dx}\right)\int_0^y dy - \frac{d}{dx}\int_0^y u^2 dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Agrupando términos:

$$\frac{d}{dx}\int_0^y u(V_\infty - u)dy + \left(\frac{dV_\infty}{dx}\right)\int_0^y (V_\infty - u)dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Véase que, para $Y > \delta$, las integrales se anularían, puesto que $u = V_\infty$; así, los límites de integración se pueden establecer:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(V_\infty - u)dy + \left(\frac{dV_\infty}{dx}\right)\int_0^\delta (V_\infty - u)dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Esta es la ecuación integral de cantidad de movimiento ó de Von Karman, aplicable para flujo laminar y turbulento, puesto que no se ha dado ninguna expresión para τ_w; multiplicando la primera integral por $\frac{V_\infty^2}{V_\infty^2}$ y la segunda por $\frac{V_\infty}{V_\infty}$ se llega a:

$$\frac{d}{dx}\left[V_\infty^2\int_0^\delta \frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)dy\right] + V_\infty\left(\frac{dV_\infty}{dx}\right)\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Multiplicando ahora cada integral por $\frac{\delta}{\delta}$ (observando que δ es independiente de y), y teniendo en cuenta que los límites de integración son: cuando y = 0, $\frac{y}{\delta}=0$, y cuando y =δ, $\frac{y}{\delta}=1$, modificando asimismo la variable de integración de y a $\frac{y}{\delta}$, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left\{\delta\cdot V_\infty^2\left[\int_0^1 \frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)\right]\right\}+\delta\cdot V_\infty\left(\frac{dV_\infty}{dx}\right)\int_0^1\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)=\frac{\tau_w}{\rho}$$

Véase que la segunda integral de esta ecuación representa el espesor de desplazamiento δ^*, mientras que la primera integral tiene dimensiones de longitud, y se denomina *espesor de cantidad de movimiento* θ.

$$\delta^*=\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)dy=\delta\int_0^1\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\theta=\int_0^\delta\frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)dy=\delta\int_0^1\frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

En función de δ^* y θ, la ecuación integral de cantidad de movimiento de Von Karman se puede escribir:

$$\frac{d}{dx}\left[V_\infty^2\theta\right]+\delta^*V_\infty\frac{dV_\infty}{dx}=\frac{\tau_w}{\rho}$$

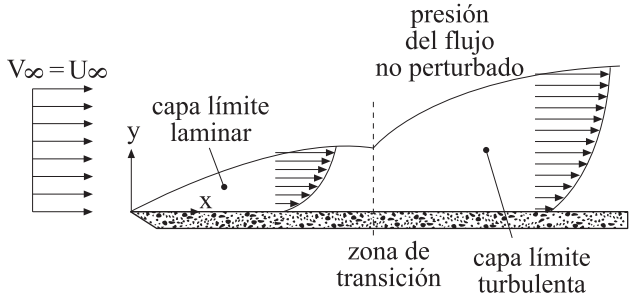
Véase que, para la aplicación de la ecuación de Von Karman a un caso dado, es necesario conocer el perfil de velocidades del fluido en el interior de la capa límite y el valor de los esfuerzos cortantes en la pared. En función del tipo de fluido que caractericen estos datos, se obtendrá una ecuación aplicable a régimen laminar o turbulento.

11.1.7 Evaluación de los parámetros de la capa límite para el flujo sobre una placa plana

La capa límite sobre una placa plana es la más simple de calcular, dado que no existe gradiente de velocidad o de presión en la corriente libre (zona exterior a la capa límite).

Sea la placa plana representada en la figura siguiente:

Fig. T 11.10
Capa límite sobre una placa plana



En un punto alejado de la placa, se cumplirá: $V_\infty = cte$; $P = P_\infty = cte$

Obsérvese que, dado que tanto la distribución de velocidades como los esfuerzos cortantes se evalúan de manera diferente para diferentes regímenes de flujo, para el cálculo de la capa límite se deberán considerar por separado las zonas laminar y turbulenta.

11.1.7.1 Características para la capa límite en la región laminar

Para una velocidad V_∞ = constante en la corriente libre, se cumple que $\frac{dV_\infty}{dx} = 0$, con lo que la ecuación de Von Karman toma la forma:

$$V_\infty^2 \frac{d}{dx}\left[\delta\int_0^1 \frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)\right] = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Para flujo laminar, el esfuerzo cortante se define: $\tau_w = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$

Puesto que la velocidad no perturbada V_∞ y el espesor de la capa límite δ no dependen de y, se puede dar:

$$\tau_w = \frac{\mu V_\infty}{\delta}\left(\frac{\partial\left(\frac{u}{V_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}\right)_{\frac{y}{\delta}=0}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación resultante de Von Karman para capa límite laminar, se tiene.

$$V_\infty{}^2 \frac{d}{dx}\left[\delta\int_0^1 \frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)\right] = \frac{\mu V_\infty}{\rho\,\delta}\left(\frac{\partial\left(\frac{u}{V_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}\right)_{\frac{y}{\delta}=0}$$

Con el fin de resolver esta ecuación, es necesario conocer la relación entre $\frac{u}{V_\infty}$ y $\frac{y}{\delta}$.

Una primera aproximación podría hallarse suponiendo un perfil de velocidades parabólico. Así, recordando la expresión de la distribución de velocidades parabólica para un conducto circular:

$$u = u_{máx}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \quad ; \quad \frac{u}{u_{máx}} = 1-\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Para el caso en estudio, la velocidad máxima sería la velocidad no perturbada, $u_{máx} = V_\infty$; por otro lado, se puede establecer que el radio del conducto se aproximará ahora a R = r + y, de donde:

$$\frac{u}{V_\infty} = 1-\left(\frac{R-y}{R}\right)^2 = 1-\left(1-\frac{y}{R}\right)^2$$

$$\frac{u}{V_\infty} = 1-\left[1-2\frac{y}{R}+\left(\frac{y}{R}\right)^2\right]$$

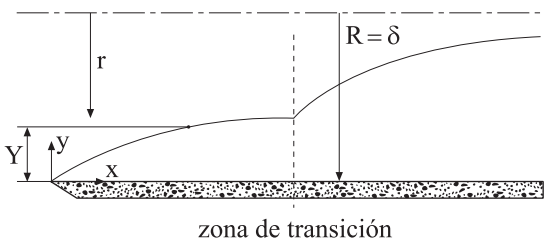


Fig. T 11.11
Capa límite en el interior de un conducto

Asumiendo ahora que el radio pudiese darse como el espesor de la capa límite R = δ, y denominando $\eta = \frac{y}{\delta}$; se obtiene:

$$\frac{u}{V_\infty} \cong 2\left(\frac{y}{\delta}\right)-\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 2\eta-\eta^2$$

Obsérvese que: cuando y = 0, u = 0, y cuando y = δ, u = V_∞.

Derivando la ecuación anterior y aplicándola para el caso en que $\eta = \frac{y}{\delta} = 0$, se obtiene:

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{u}{V_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}\right]_{\frac{y}{\delta}=0} = \left.\frac{d\left(\frac{u}{V_\infty}\right)}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 2$$

Sustituyendo las relaciones establecidas en la ecuación de Von Karman para el caso en estudio, se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left[\delta\int_0^1\left(2\eta-\eta^2\right)\left(1-\left(2\eta-\eta^2\right)\right)d\eta\right]=2\frac{\mu}{\rho\,\delta\,V_\infty}$$

Véase que la integral tiene un valor numérico, con lo que, procediendo a la integración, se obtiene:

$$\frac{2}{15}\left(\frac{d\delta}{dx}\right)=2\frac{\mu}{\rho\delta V_\infty}$$

Integrando esta ecuación resultante, se tiene:

$$\int_0^\delta \delta\,d\delta=\int_0^x 15\frac{\mu}{\rho\,V_\infty}dx$$

$$\frac{\delta^2}{2}=15\frac{\mu\,x}{\rho\,V_\infty};\quad \delta=5,48\sqrt{\frac{\mu\,x}{\rho\,V_\infty}};\ \text{o bien: }\frac{\delta}{x}=5,48\sqrt{\frac{\mu\,x}{\rho\,V_\infty x^2}}=5,48\frac{1}{\sqrt{R_{ex}}}$$

ecuación que determina el espesor de la capa límite laminar en función de la distancia al origen de coordenadas (inicio de la placa).

El esfuerzo cortante actuante sobre la placa plana se calcula mediante la ecuación:

$$\tau_w=\frac{\mu V_\infty}{\delta}\left(\frac{\partial\left(\frac{u}{V_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}\right)_{\frac{y}{\delta}=0}=\frac{2\mu V_\infty}{\delta}=\frac{2\mu V_\infty}{5,48\sqrt{\frac{\mu\,x}{\rho\,V_\infty}}}$$

Obsérvese que el esfuerzo cortante es función de la distancia al origen de la placa, que es máximo al inicio de la misma y va disminuyendo a medida que aumenta la distancia con respecto al origen.

La determinación del coeficiente de fricción para la zona laminar de la capa límite se realiza:

$$C_f=\frac{2\tau_w}{\rho V_\infty^2}=\frac{2\frac{2\mu V_\infty}{5,48\sqrt{\frac{\mu\,x}{\rho\,V_\infty}}}}{\rho V_\infty^2}=0,730\sqrt{\frac{\mu}{\rho\,V_\infty x}}=\frac{0,730}{\sqrt{R_{ex}}}$$

Los espesores de desplazamiento y de cantidad de movimiento se determinarán:

$$\delta^* = \delta\int_0^1\left(1-\frac{u}{U}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right) \cong \delta\int_0^1(1-2\eta+\eta^2)d\eta \quad ; \quad \delta^* = \delta\frac{1}{3} \quad ;$$

$$\theta = \delta\int_0^1\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right) \cong \delta\int_0^1(2\eta-\eta^2)(1-2\eta+\eta^2)d\eta; \qquad \theta = \delta\frac{1}{7,5};$$

Sustituyendo el valor del espesor de la capa límite, se obtiene:

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1,83}{\sqrt{R_{ex}}} \quad ; \quad \frac{\theta}{x} = \frac{0,73}{\sqrt{R_{ex}}};$$

La resistencia que una placa plana de longitud L y de ancho unitario ejerce sobre el fluido, viene dada por:

$$D = \int_0^L \tau_w dx$$

El grupo adimensional, coeficiente de arrastre, para una placa de longitud L y profundidad unitaria, se define como:

$C_D = \dfrac{D}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 L} = \dfrac{1}{L}\int_0^L \dfrac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}dx = \dfrac{1}{L}\int_0^L C_f dx$; obsérvese la relación entre el coeficiente de arrastre y el coeficiente de fricción.

$$C_D = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{0,730}{\sqrt{\frac{\rho V_\infty x}{\mu}}}dx = \frac{0,730}{\sqrt{\frac{\rho V_\infty}{\mu}}}\frac{1}{L}\frac{L^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1,460}{\sqrt{\frac{\rho V_\infty L}{\mu}}} = \frac{1,460}{\sqrt{R_{eL}}}$$

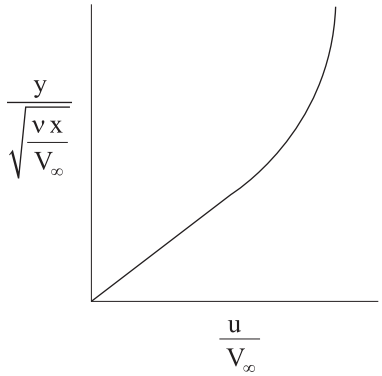
Véase que el coeficiente de arrastre, según las hipótesis establecidas, es igual a dos veces el coeficiente de fricción, definido para el número de Reynolds al final de la placa x = L, es decir: $C_D = 2C_{f(L)}$.

Cabe recordar que $R_{ex} = \dfrac{\rho V_\infty x}{\mu}$; $\quad R_{eL} = \dfrac{\rho V_\infty L}{\mu}$

Debe tenerse en cuenta que la exactitud de estas ecuaciones depende del acierto que se haya tenido en la elección de la distribución de velocidades en el interior de la capa límite laminar. Recuérdese que se ha partido de la suposición de una distribución parabólica de velocidades.

Blasius integra la ecuación diferencial de Prandtl y encuentra la distribución denominada "exacta" de velocidades en la región laminar de la capa límite. Dicha distribución de velocidades dada en forma de gráfica es: Recuérdese que desde el punto de vista dimensional: $\frac{y}{\sqrt{\frac{\mu x}{\rho V_\infty}}} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}}} = \frac{y}{\delta}$

Fig. T 11.12 Distribución de velocidades de Blasius



Véase que la relación que representa esta gráfica es del tipo: $\frac{u}{V_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$

Sustituyendo la distribución de Blasius en la ecuación de Von Karman, y operando del mismo modo que para la distribución de velocidades parabólica, se obtienen los parámetros denominados "exactos" de la capa límite, que son:

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\mu \cdot x}{\rho\, V_\infty}}$$

$$C_f = \frac{0,664}{\sqrt{R_{ex}}}$$

$$\delta^* = 1,721\sqrt{\frac{\mu \cdot x}{\rho\, V_\infty}}$$

$$\theta = 0,664\sqrt{\frac{\mu \cdot x}{\rho\, V_\infty}}$$

$C_D = \frac{1,328}{\sqrt{R_{eL}}}$; véase que, de nuevo, $C_D = 2C_{f(L)}$

En la tabla que se encuentra a continuación, se indica el valor de las constantes asociadas a las ecuaciones de los parámetros básicos de la capa límite, y para diferentes distribuciones de velocidades en la capa límite laminar. Es necesario destacar que, además de las distribuciones presentadas, existen otras que son igualmente aceptadas. Así, se debe concluir que existe todo un colectivo de posibles soluciones para la zona laminar de la capa límite, lo cual indica que no se tiene un conocimiento exacto y preciso del comportamiento de la misma.

	$\frac{\delta}{x}\sqrt{R_x} =$	$C_f\sqrt{R_x} =$	$\frac{\delta^*}{x}\sqrt{R_x} =$	$C_D\sqrt{R_L} =$	$\frac{\theta}{x}\sqrt{R_x} =$
Perfil lineal $\frac{u}{U} \approx \frac{y}{\delta}$	3,46	0,578	1,73	1,156	0,578
Perfil parabólico $\frac{u}{U} \approx 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	5,48	0,730	1,83	1,460	0,730
Solución exacta, Blasius.	5,0	0,664	1,721	1,328	0,664

11.1.7.2 Capa límite turbulenta

En el capítulo de análisis adimensional, se ha observado que un flujo se considera turbulento cuando las fuerzas de inercia asociadas al fluido son mayores que las fuerzas viscosas. Una de las características del flujo turbulento es su capacidad para intercambiar cantidad de movimiento entre partículas, lo cual dificulta mucho el análisis del movimiento de una partícula específica. Sin embargo, utilizando el concepto de velocidad media, es más fácil determinar la trayectoria principal del fluido.

La capa límite laminar, al evolucionar a lo largo de la placa plana, da lugar a una zona de transición, donde existe una cierta inestabilidad de fuerzas, y es a partir de este punto donde se inicia el proceso hacia la capa límite turbulenta. Se denomina X_{Tr} a la distancia entre el origen de la placa y el inicio de la zona turbulenta. Para una placa plana lisa, el número de Reynolds de transición se toma $R_{Tr} = \frac{V_\infty X_{Tr}}{\nu} = 5 \cdot 10^5$, siempre que la placa sea perfectamente plana y sin rugosidad. Para casos más reales se aceptan valores menores, del orden de $R_{Tr} = 3 \cdot 10^5$.

La ecuación de Von Karman para régimen turbulento no tiene solución exacta. Esto es debido a que no se conoce una expresión ampliamente aceptada para el esfuerzo cortante en régimen turbulento. De hecho, la ecuación de partida para la determinación de los parámetros característicos de la capa límite turbulenta en una placa plana es idéntica a la utilizada en régimen laminar.

$$\frac{d}{dx}\left[\delta\int_0^1 \frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)\right]=\frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2}$$

El perfil de velocidades es muy diferente para la capa límite laminar o turbulenta. Para la zona turbulenta, uno de los perfiles más utilizados es el de la ley de potencia sugerido por Prandtl:

$\frac{u}{V_\infty}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}}=\eta^{\frac{1}{n}}$; en general, se acepta que $n = 7$.

En régimen turbulento, el esfuerzo cortante en la pared se puede definir por la ecuación:

$\tau_w=\mu\frac{\partial u}{\partial y}-\overline{\rho u'v'}$ Se observa que es necesario utilizar algún modelo de turbulencia para determinar el término de esfuerzos aparentes de Reynolds. En consecuencia es muy común dar una ecuación empírica para hallar τ_w . Utilizando, por ejemplo, la ecuación de Colebrook para régimen turbulento en tuberías, se puede decir que $\tau_w=\frac{f}{8}\rho V^2$. Se acepta que, para $R_{eD}>10^5$, el factor de fricción es $f=0,3164R_{eD}^{-\frac{1}{4}}$, donde $R_{eD}=\frac{\rho V.D}{\mu}$.

En general, se acepta la aproximación $D=2\delta$; $V=\frac{2n^2V_\infty}{(n+1)(2n+1)}$; $n=7$; $V=0,81\hat{6}V_\infty$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de los esfuerzos cortantes, se obtiene una ecuación aproximada para los esfuerzos cortantes turbulentos en la región turbulenta de la capa límite:

$$\tau_w=0,02266\cdot\rho\cdot V_\infty^{\frac{7}{4}}\left(\frac{\mu}{\rho\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Sustituyendo las ecuaciones del esfuerzo cortante y de la distribución de velocidades en la ecuación de Von Karman, se llega a:

$$\frac{d}{dx}\left[\delta\int_0^1 \eta^{\frac{1}{7}}\left(1-\eta^{\frac{1}{7}}\right)d\eta\right]=0,02266\left(\frac{\mu}{\rho V_\infty}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\delta^{-\frac{1}{4}}$$

cuya integración da lugar a:

$$\delta^{\frac{1}{4}}\left(\frac{d\delta}{dx}\right)=0,233\left(\frac{\mu}{\rho V_{\infty}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

A la hora de realizar la integración de esta ecuación resultante, se va a suponer que en toda la placa el flujo es turbulento, con lo que se obtiene:

$$\int_0^{\delta}\delta^{\frac{1}{4}}d\delta=\int_0^{x}0,233\left(\frac{\mu}{\rho V_{\infty}}\right)^{\frac{1}{4}}dx$$

$$\frac{4}{5}\delta^{\frac{5}{4}}=0,233\left(\frac{\nu}{V_{\infty}}\right)^{\frac{1}{4}}x$$

Despejando el espesor de la capa límite turbulenta:

$$\delta=0,372\left(\frac{\mu}{\rho V_{\infty}}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{4}{5}}$$

ecuación que, al ser dividida por x, da lugar a:

$$\frac{\delta}{x}=0,372R_x^{-\left(\frac{1}{5}\right)}$$

Si se comparan las ecuaciones para la capa límite laminar y turbulenta, se observa que la capa límite turbulenta crece con mayor velocidad, dado que su espesor es función de la distancia al origen elevada a (4/5), mientras que en la capa límite laminar el espesor es función de dicha distancia elevada a (1/2).

Para la determinación del coeficiente de fricción en régimen turbulento, se sustituyen las ecuaciones ya determinadas, de los esfuerzos cortantes y del espesor de la capa límite para dicho régimen, en la ecuación del coeficiente de fricción, y se obtiene:

$$C_{f\,Tur}=\frac{2\tau_w}{\rho V_{\infty}^2}=0,05803\left(\frac{\mu}{\rho V_{\infty}x}\right)^{\frac{1}{5}}=0,05803\,R_{ex}^{-\frac{1}{5}}$$

La determinación del espesor de desplazamiento se realiza mediante la siguiente ecuación:

$$\delta^*=\delta\int_0^1\left(1-\frac{u}{V_{\infty}}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)=\delta\int_0^1\left(1-\eta^{\frac{1}{7}}\right)d\eta=0,125*\delta$$

$$\frac{\delta^*}{x}=0,125\left(\frac{\delta}{x}\right)=0,0465\,R_x^{-\frac{1}{5}}$$

Con el fin de evaluar la precisión de los resultados obtenidos mediante estas ecuaciones, se concluye que la precisión en concreto para la ecuación del coeficiente de fricción es de un ± 3 % para valores del número de Reynolds comprendidos entre $5.10^5 < Re < 10^7$. Esta información fue obtenida tras comparar los valores de la ecuación con resultados experimentales.

El espesor de la cantidad de movimiento se determinará:

$$\theta^* = \delta\int_0^1 \frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta\int_0^1 \eta^{\frac{1}{7}}\left(1-\eta^{\frac{1}{7}}\right)d\eta = \delta\ 0,0972$$

$$\frac{\theta^*}{x} = \frac{\delta}{x}0,0972 = 0,036158\ R_x^{-\left(\frac{1}{5}\right)}$$

El coeficiente de resistencia C_D para una placa plana y flujo turbulento en toda su longitud puede obtenerse:

$$C_D = \frac{1}{L}\int_0^L C_f dx$$

Sustituyendo, en la ecuación anterior, la ecuación del coeficiente de fricción se llega:

$C_D = 0,07253\,R_L^{-\frac{1}{5}}$, coeficiente de resistencia para la zona turbulenta.

Hay que tener presente, no obstante, que, en la mayoría de los casos, existe una zona inicial de la placa donde la capa límite es laminar y una segunda región donde dicha capa límite es turbulenta, con lo cual el coeficiente de arrastre para este caso genérico ha de tener en cuenta estas dos regiones. Dicho coeficiente se define como:

$$C_D = \frac{1}{L}\left(\int_0^{Xtr} C_{f\ Lam}dx + \int_{Xtr}^L C_{f\ Turb}dx\right)$$

Sustituyendo las ecuaciones del coeficiente de fricción para las regiones laminar y turbulenta en la ecuación anterior del coeficiente de arrastre, y recordando que el punto de transición para una placa ideal se, ha definido anteriormente como $\frac{\rho\, V_\infty X_{Tr}}{\mu} = 5\cdot 10^5$, se obtiene:

$$C_D = 0,07253\,R_L^{-\frac{1}{5}} - \frac{1689,64}{R_L}$$

ecuación que proporciona un resultado suficientemente satisfactorio, cuando en una placa existen una región laminar y una turbulenta apreciables. Cabe recordar que, para la obtención de esta ecuación, se ha utilizado el coeficiente de fricción obtenido según la distribución de velocidades de Blasius para la zona laminar.

De nuevo, al igual que sucedía, aunque en menor medida, para la capa límite laminar, es importante remarcar que no existe un conocimiento absoluto de la distribución de velocidades dentro de la región turbulenta de la capa límite, y no existe ninguna teoría que proporcione la distribución de velocidades exacta, con lo cual existen diversas distribuciones que son, en mayor o menor medida, aceptadas.

Una de dichas distribuciones es la que caracteriza un perfil logarítmico de velocidad, ampliamente aceptado para la capa límite en el interior de conductos y definido por la ecuación siguiente:

$$\frac{u}{u_t} = \frac{1}{0,41} \ln\left(\frac{\rho\, y\, u_t}{\mu}\right) + 5$$

siendo u_t la denominada velocidad de fricción.

La relación entre la velocidad de fricción y los esfuerzos cortantes se define:

$$u_t = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_f V_\infty^2}{2}}$$

Aceptando que $u = V_\infty$, cuando $y = \delta$, la combinación de las dos ecuaciones anteriores da lugar a:

$$\left(\frac{C_f}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2,439\left[\ln\left(R_{e\,\delta}\left(\frac{C_f}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\right] + 5\,, \text{ donde } R_{e\,\delta} = \frac{\rho\,\delta\,V_\infty}{\mu}$$

ecuación que relaciona el coeficiente de fricción C_f con $R_{e\,\delta}$. Esta última ecuación se estima que es demasiado complicada, con lo que Prandtl sugirió utilizar una ecuación de tipo potencial, cuyo resultado es muy similar al obtenido con la ecuación precedente. La ecuación potencial de Prandtl toma la forma:

$$C_f = 0,02\, R_\delta^{-\left(\frac{1}{6}\right)}$$

Recordando la ecuación que relacionaba los esfuerzos cortantes con el espesor de cantidad de movimiento para cualquier tipo de flujo, tanto laminar como turbulento:

$$\tau_w = \rho\, V_\infty^2 \frac{d\theta}{dx}$$

Y, puesto que el coeficiente de fricción se define como $C_f = \dfrac{2\,\tau_w}{\rho\, V_\infty^2}$,

de la combinación de estas dos ecuaciones se obtiene: $C_f = 2\dfrac{d\theta}{dx}$

Sustituyendo en esta ecuación el valor del coeficiente de fricción definido por Prandtl, se obtiene:

$$0,02\,R_{\delta}^{-\left(\frac{1}{6}\right)} = 2\frac{d\theta}{dx}$$

Prandtl, asimismo sugiere que el perfil de velocidades que aparece en la zona turbulenta de la capa límite, para números de Reynolds bajos, dentro de la región turbulenta, se puede aproximar por la ley de potencia:

$$\left(\frac{u}{V_{\infty}}\right) \approx \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = \eta^{\frac{1}{7}}$$

con lo que el espesor de cantidad de movimiento se puede determinar:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_{\infty}}\left(1-\frac{u}{V_{\infty}}\right)dy = \delta\int_0^1 \frac{u}{V_{\infty}}\left(1-\frac{u}{V_{\infty}}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_0^1 \delta\left(\left(\eta^{\frac{1}{7}}\right)\left(1-\eta^{\frac{1}{7}}\right)\right)d\eta = \frac{7}{72}\delta$$

y se obtiene:

$$0,02\,R_{\delta}^{-\left(\frac{1}{6}\right)} = 2\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{72}\delta\right)$$

ecuación que, desarrollada, se puede dar como:

$$R_{\delta}^{-\left(\frac{1}{6}\right)} = \left(\frac{\rho\, V_{\infty}\,\delta}{\mu}\right)^{-\left(\frac{1}{6}\right)} = 9,722\frac{d}{dx}(\delta)$$

Y, procediendo a su integración se tiene:

$$\int_0^x \left(\frac{\mu}{\rho\, V_{\infty}}\right)^{\frac{1}{6}} dx = \int_0^{\delta} 9,72\,\delta^{\frac{1}{6}}\,d\delta$$

Obsérvese que de nuevo se supone que existe capa límite turbulenta en toda la placa.

$$\left(\frac{\mu}{\rho\, V_{\infty}}\right)^{\frac{1}{6}} x = \frac{9,72\,\delta^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}$$

Despejando de esta ecuación el espesor de la capa límite, se tiene:

$\delta = \left(\frac{\mu}{\rho\, V_{\infty}}\right)^{\frac{1}{7}} x^{\frac{6}{7}}\, 0,16248$, y, dividiendo ambos términos por x, se llega:

$$\frac{\delta}{x}=\left(\frac{\mu}{\rho\, V_\infty\, x}\right)^{\frac{1}{7}} 0{,}16248=\frac{0{,}16248}{R_{ex}^{\frac{1}{7}}}$$

Obsérvese que el espesor de la capa límite turbulenta aumenta en función de la distancia elevada a 6/7, con lo que de nuevo se observa que la zona turbulenta de la capa límite aumenta mucho más rápidamente que su homóloga laminar.

El espesor de desplazamiento se obtendrá:

$$\delta^*=\int_0^1 \delta\left(1-\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)=\int_0^1 \delta\left(1-\eta^{\frac{1}{7}}\right) d\eta=0{,}125\ \delta$$

La ecuación que caracteriza los esfuerzos cortantes en la zona turbulenta se define como:

$$\tau_{w\,turbu}=\rho\, V_\infty^2\,\frac{d\theta}{dx}=\rho\, V_\infty^2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{72}\delta\right)=\rho\, V_\infty^2\,\frac{7}{72}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\mu}{\rho\, V_\infty}\right)^{\frac{1}{7}} 0{,}16248\, x^{\frac{6}{7}}\right]=$$

$$\rho\, V_\infty^2\left(\frac{\mu}{\rho\, V_\infty}\right)^{\frac{1}{7}} 0{,}01354\, x^{\left(-\frac{1}{7}\right)}$$

$$\tau_{w\,turbu}=\rho\, V_\infty^2\left(\frac{\mu}{\rho\, V_\infty\, x}\right)^{\frac{1}{7}} 0{,}01354$$

El coeficiente de fricción vendrá dado por:

$$C_f=\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho\, V_\infty^2}=\frac{0{,}01354}{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu}{\rho\, V_\infty\, x}\right)^{\frac{1}{7}}=0{,}02708\,\frac{1}{\left(R_{e\,x}\right)^{\frac{1}{7}}}$$

El coeficiente de arrastre para la zona turbulenta viene dado por:

$$C_D=\frac{D}{\frac{1}{2}\rho\, V_\infty^2\, L}=\int_0^L\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho\, V_\infty^2\, L}\,dx=\frac{1}{L}\int_0^L C_f\,dx=\frac{1}{L}\int_0^L\left(\frac{\mu}{\rho\, V_\infty\, x}\right)^{\frac{1}{7}} 0{,}02708\,dx=$$

$$\frac{1}{L}0{,}02708\,\frac{7}{6}\left(\frac{\mu}{\rho\, V_\infty}\right)^{\frac{1}{7}}(L)^{\frac{6}{7}}$$

$$C_D=0{,}02708\,\frac{7}{6}\left(\frac{\mu}{\rho\, V_\infty\, L}\right)^{\frac{1}{7}}=\frac{7}{6}\,C_{f(L)}=\frac{0{,}03159}{\left(R_{e(L)}\right)^{\frac{1}{7}}}$$

Se ha comprobado experimentalmente que estas ecuaciones tienen una precisión de ± 5 % para valores del número de Reynolds comprendidos entre $10^5 < R_{e\,x} < 10^9$.

El coeficiente de arrastre para el caso de tener una placa plana donde las regiones laminar y turbulenta de la capa límite sean relevantes, y considerando el coeficiente de fricción para la zona laminar como el de Blasius y para la zona turbulenta el acabado de determinar, se obtiene:

$$C_D = \frac{1}{L}\left(\int_0^{Xtr} C_{f\,Lam}\,dx + \int_{Xtr}^{L} C_{f\,Turb}\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{L}\left(\int_0^{Xtr} \frac{0,664}{\sqrt{\frac{\rho\,V_\infty\,x}{\mu}}}\,dx + \int_{Xtr}^{L} 0,02708\left(\frac{\mu}{\rho\,V_\infty\,x}\right)^{\frac{1}{7}}\,dx\right)$$

Considerando que $\frac{\rho\,V_\infty X_{Tr}}{\mu} = 5\cdot 10^5$, se llega a:

$$C_D = 0,0315933\,R_L^{-\frac{1}{7}} - \frac{1484,37}{R_L}$$

Obsérvese que, en la zona turbulenta de la capa límite, se obtienen ecuaciones bastante diferentes en función de la distribución de velocidades elegida y del procedimiento utilizado para la determinación de los esfuerzos cortantes en la pared.

Es necesario tener presente que en la región turbulenta de la capa límite, en realidad, se pueden distinguir tres regiones:

a) región interior, es la región en contacto con la pared del sólido, en la cual, los esfuerzos viscosos son dominantes y dan lugar a una subcapa límite laminar.

b) región intermedia, situada entre la región interior y exterior, donde tanto los esfuerzos viscosos como los de inercia son relevantes.

c) región exterior, es la región completamente turbulenta de la capa límite, donde las fuerzas de inercia son muy superiores a las viscosas.

La ecuación del perfil logarítmico caracteriza el comportamiento del fluido con bastante exactitud, tanto en la región interior como en la intermedia. Cabe decir, no obstante, que la región interior ocupa menos del 2% del espesor de la capa límite turbulenta, con lo que se concluye que el perfil logarítmico es aplicable a casi todo el espesor de la capa límite turbulenta. La ley logarítmica es especialmente útil para flujos en conductos cerrados.

11.2 Flujo externo

11.2.1 Introducción

Durante gran parte de los siglos XIX y XX se estudió la posibilidad de evaluar el flujo alrededor de cuerpos utilizando meramente las ecuaciones teóricas. Para números de Reynolds elevados, aparece el concepto de flujo potencial o flujo sin viscosidad, que en realidad implica que, para este tipo de flujo, las fuerzas de inercia asociadas a cada partícula de fluido son mucho mayores que las fuerzas viscosas. Cuando los valores del número de Reynolds asociados al flujo son muy bajos, el flujo se denomina *con viscosidad dominante*. La utilización de túneles de viento y la modelización CFD son herramientas básicas en este capítulo, dado que hasta el momento no se ha conseguido desarrollar ecuaciones que sean capaces de caracterizar con precisión las fuerzas que el fluido ejerce sobre cuerpos complejos. Las teorías tanto cualitativas como cuantitativas del flujo externo se basan en el concepto de dividir el campo del flujo en las regiones del flujo potencial y de la capa límite.

11.2.2 Fuerzas de resistencia y sustentación sobre cuerpos inmersos en un fluido

Las fuerzas de sustentación se dan, en general, cuando el cuerpo en estudio presenta asimetría, ángulo de ataque, ángulo entre el eje del cuerpo y el fluido. La fuerza sobre un cuerpo puede tener tres componentes: resistencia, sustentación y fuerza lateral.

Las fuerzas de presión y las debidas a esfuerzos cortantes sobre la superficie del cuerpo dan lugar a la resistencia y a la sustentación de los cuerpos. Dichas fuerzas son el resultado de integrar las distribuciones de presión y los esfuerzos cortantes a lo largo de todo el cuerpo: $\vec{F} = -\oint p\, d\vec{s} + \oint \bar{\bar{\tau}}_w ds$

En general, la fuerza que el flujo ejerce sobre un cuerpo se descompone en dirección horizontal y vertical, y da lugar a:

$$D = \oint (-p\cos(\theta) + \tau_\omega \text{sen}(\theta)) ds$$

$$L = \oint (-p\,\text{sen}(\theta) - \tau_\omega \cos(\theta)) ds$$

El ángulo θ es el formado por el diferencial de superficie y la corriente de fluido o, en su caso, el diferencial de superficie y la dirección de los esfuerzos cortantes.

Las ecuaciones anteriores son útiles para hallar la resistencia y la sustentación de cuerpos, cuando son conocidas las distribuciones de presiones y los esfuerzos cortantes.

Pero, en general, las fuerzas y los coeficientes de arrastre y sustentación se determinan experimentalmente. Mediante análisis adimensional, se demuestra que cuando los efectos de la tensión superficial, regulados por el número de Weber, son despreciables, y no se trabaja con superficies libres, caracterizadas por el número de Froude, y además se trabaja con fluido incompresible número de Mach < 0,3, los coeficientes de resistencia y sustentación dependen únicamente del ángulo de ataque y del número de Reynolds.

$$C_D = C_D(\alpha, Re); \quad C_L = C_L(\alpha, Re);$$

Siendo: $C_D = \dfrac{D}{\frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2 S}; \quad C_L = \dfrac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2 S};$

Donde:

V∞ = velocidad del fluido relativa al objeto

S = área de referencia o sección proyectada

Las dos áreas de referencia más comunes son el área frontal y el área proyectada. Para cuerpos bidimensionales, el área se basa en un ancho unitario.

En realidad, los coeficientes de resistencia y sustentación, C_D y C_L, se relacionan con los coeficientes de fricción y presión, (C_f y C_p), mediante:

$$C_D = \frac{\oint (-P\cos\theta + \tau_w \operatorname{sen}\theta)\, ds}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S_{proyectada}} = \oint (-C_P \cos\theta + C_f \operatorname{sen}\theta)\, d\left(\frac{s}{S_P}\right)$$

$$C_D = \oint (-C_p \cos(\theta) + C_f \operatorname{sen}(\theta))\, d\left(\frac{s}{S_p}\right); \quad C_L = \oint (-C_p \operatorname{sen}(\theta) - C_f \cos(\theta))\, d\left(\frac{s}{S_p}\right);$$

cabe recordar que los coeficientes de presión y fricción toman la forma:

$$C_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2}; \; C_f = \frac{\tau_\omega}{\frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2};$$

Nótese que la resistencia debida a los esfuerzos cortantes depende básicamente de la cantidad de superficie en contacto con el fluido, mientras que la resistencia de forma, que es debida a la distribución de presiones alrededor del objeto, depende básicamente de la forma del cuerpo.

A altos números de Reynolds, parece que a priori, se puedan calcular, para cuerpos simples y simétricos, las fuerzas de arrastre y sustentación; no obstante, según la paradoja de D'Alembert (1752), la suposición de un fluido no viscoso no permite investigar, ni de manera aproximada, la resistencia de forma.

En 1904, L. Prandtl introduce la hipótesis de la capa límite. Dice que la velocidad del fluido debe aumentar desde cero en la superficie hasta un valor que es del orden de magnitud de la velocidad de la corriente libre. Prandtl observa que, para números de Reynolds altos, la capa límite es muy delgada, y llega a la expresión:

$$\frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{\nu}{V_\infty * L}} = \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$

Cuanto más delgada es la capa límite, mayor es el valor de $\frac{\partial u}{\partial y}$; en consecuencia, el fluido en la capa limite presenta esfuerzos cortantes significativos. Se observa, además que las superficies rugosas dan lugar a un esfuerzo mayor que las lisas.

A bajos números de Reynolds, el concepto de capa límite pierde su validez, puesto que las fuerzas viscosas no están confinadas en una región delgada y cercana al cuerpo; la capa límite es tan gruesa que distorsiona el patrón de líneas de corriente en todo el campo.

En 1851, G. Stokes analiza el flujo sobre una esfera a números de Reynolds muy bajos. Observa que las líneas de corriente son casi simétricas, y solamente tiene una estela delgada (sin separación). Sin embargo, observa que la distribución de presiones es asimétrica. Stokes encuentra que la resistencia a números de Reynolds muy bajos, y para el caso de una esfera, viene dada por $D = 3\pi\mu d V_\infty$, ecuación que recibe el nombre de ley de Stokes.

El coeficiente de resistencia para una esfera a Re muy bajos, según la expresión del coeficiente de arrastre, se establece del modo siguiente:

$$C_D = \frac{3\pi\mu d V_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2 \left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} = \frac{24\mu}{\rho V_\infty d} = \frac{24}{Re};$$

De hecho, el coeficiente de resistencia C_D no es muy adecuado utilizarlo para flujos a bajos números de Reynolds, puesto que la fuerza de arrastre se compara con la fuerza de inercia, y en flujos laminares la inercia no es relevante. Así pues, se define un coeficiente de arrastre en función de la resistencia viscosa.

$$C_D^* = \frac{D}{\mu V_\infty l};\ \text{para la esfera toma el valor}\ C_D^* = \frac{\text{Fuerza de resistencia}}{\text{Fuerza viscosa}} = \frac{3\pi\mu d V_\infty}{\mu V_\infty l} = 3\pi$$

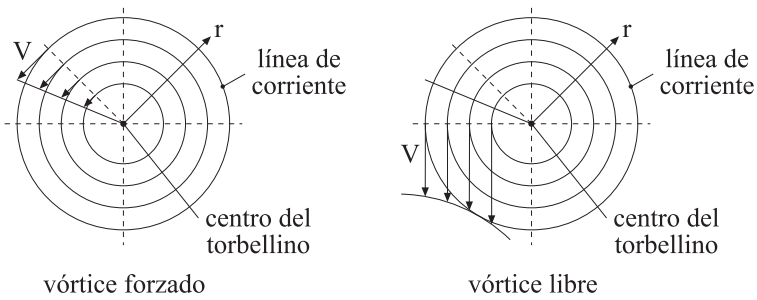
Se observa que el coeficiente de resistencia viscosa para cualquier cuerpo en un flujo con un número de Reynolds muy bajo es una constante. y solo depende de la forma del cuerpo.

Es necesario tener presente que las medidas que se toman para reducir la resistencia en un flujo con altos números de Reynolds son contraproducentes a bajos números de Reynolds; así por ejemplo, el fuselado de un cuerpo implica un aumento de la resistencia a bajos números de Reynolds, puesto que aumenta la superficie en contacto. Para valores del número de Reynolds comprendidos entre $10 < Re < 1000$, es difícil analizar la resistencia de manera cualitativa, puesto que, en las regiones situadas alrededor del cuerpo, las fuerzas de inercia y viscosas tienen un mismo orden de magnitud, y existe alternancia de unas y otras.

11.2.3 Conceptos de vórtice libre y vórtice forzado

Un vórtice o torbellino es un fluido en movimiento circular que induce flujo en el fluido circundante. Se denomina *vórtice forzado* una línea que induce un flujo en el fluido circundante, que se mueve en círculos concéntricos con respecto al centro del torbellino y en el que la velocidad del fluido aumenta linealmente con el radio. En un torbellino forzado, se cumple: $V_\theta = \omega \cdot r$

Fig. T 11.13
Esquema de vórtice libre y vórtice forzado



Un vórtice libre está caracterizado por un fluido que se mueve en círculos concéntricos alrededor del centro del torbellino y en el cual la velocidad disminuye inversamente con el radio. Su ecuación es: $V_\theta \cdot r = cte$.

$$V_\theta = \frac{cte}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \text{ donde } \Gamma = cte\ .$$

Recuérdese que el concepto de circulación estaba definido por $\Gamma = \oint \vec{V} \cdot \vec{dl} \left[\frac{m^2}{s}\right]$

La circulación para un vórtice forzado tomará la forma:

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \omega r (r d\theta) = 2\pi\omega r^2$$

La circulación para un vórtice libre es:

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V_\theta \,(r d\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{cte}{r} r \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r}(r d\theta) = 2\pi \frac{\Gamma}{2\pi} = \Gamma = cte.$$

Se concluye que la circulación es constante para cualquier trayectoria que encierre un torbellino libre.

11.2.4 El teorema de Kutta-Joukowsky (válido para flujo subsónico)

Desarrollado por W. M. Kutta (1902) y N. E. Joukowsky (1906), muestra la fuerte relación entre un patrón de flujo de circulación y la sustentación.

La figura siguiente ilustra un perfil aerodinámico inmerso en una corriente de fluido. La velocidad del fluido y la presión lejos del perfil son V_∞ y P_∞. Se supone fluido sin viscosidad e irrotacional (es una buena suposición fuera de la capa límite y estela corriente abajo), se define un sistema de coordenadas y un volumen de control. Obsérvese que el perfil está excluido del volumen de control.

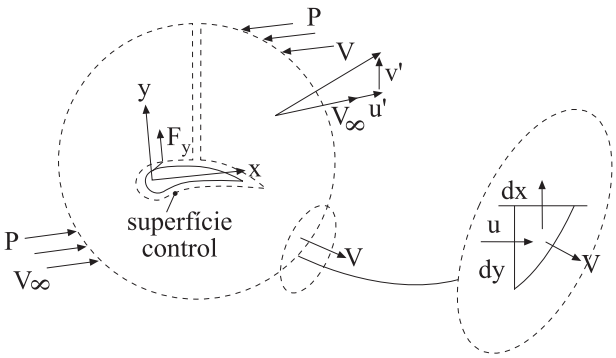


Fig. T 11.14
Volumen de control donde se aplica el teorema de Kutta-Joukowsky

La fuerza que el perfil ejerce sobre el fluido en la porción interna de la superficie de control es la reacción a la fuerza de sustentación: $L = -Fy$

A través de la frontera interna del volumen de control no fluye fluido, ya que es adyacente al perfil. Las componentes de la velocidad del fluido en la frontera exterior del volumen de control se pueden escribir como:

$$u = V_\infty + u'$$
$$v = v'$$

u' y v' son las fluctuaciones de velocidad respecto a los valores medios de V_x y V_y. En la frontera exterior de la superficie de control lejos del perfil, u' y v' son muy pequeñas en comparación con V_∞.

$$\frac{u'}{V_\infty} << 1; \qquad \frac{v'}{V_\infty} << 1;$$

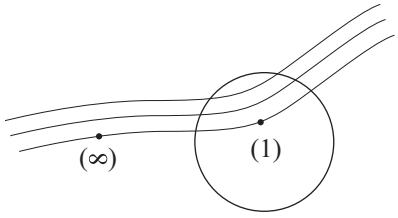
Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control en la dirección Y para una profundidad unitaria, se obtiene la fuerza Fy por unidad de profundidad.

$$Fy + \oint_{\substack{\text{frontera}\\ \text{exterior}}} p \cdot dx \cdot = \oint_{\substack{\text{frontera}\\ \text{exterior}}} \rho \cdot \vec{v}_y \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

ds es el diferencial de superficie para una profundidad unitaria.

Para flujo ideal e irrotacional, la integral de presión se evalúa partiendo de la ecuación de Bernoulli.

Fig. T 11.15



$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2 + \rho g z_\infty$$

$$p = p_\infty + \rho g(z_\infty - z) + \frac{1}{2}\rho(V_\infty{}^2 - V^2)$$

Por otro lado:

$$V^2 = u^2 + v^2 = (V_\infty + u')^2 + v'^2 = V_\infty{}^2 + 2u'V_\infty + u'^2 + v'^2 =$$

$$V_\infty{}^2\left[1 + 2\left(\frac{u'}{V_\infty}\right) + \left(\frac{u'}{V_\infty}\right)^2 + \left(\frac{v'}{V_\infty}\right)^2\right]$$

Puesto que $\frac{u'}{V_\infty} << 1$; $\frac{v'}{V_\infty} << 1$, queda:

$$V^2 = V_\infty{}^2\left[1 + 2\left(\frac{u'}{V_\infty}\right)\right]; \quad V^2 = V_\infty{}^2 + 2V_\infty \cdot u'; \quad V_\infty{}^2 - V^2 = -2V_\infty \cdot u';$$

Puesto que $p = p_\infty + \rho g(z_\infty - z) + \frac{1}{2}\rho(V_\infty{}^2 - V^2)$.

Y, considerando que $z \approx z_\infty$, se tiene que $p_\infty - p = -\frac{1}{2}\rho(V_\infty{}^2 - V^2) = \rho V_\infty u'$

con lo que $\oint p \cdot dx \simeq -\oint \rho V_\infty u' \cdot dx$.

La integral del flujo de cantidad de movimiento por unidad de área es:

$$\dot{M}y = \oint \rho v_y \vec{v}\, d\vec{s} = \oint \rho v_y (u dy - v dx) .$$

Sustituyendo $u = V_\infty + u'; \quad v = v';$

$$\dot{M}y = \oint \rho v'((V_\infty + u')dy - v'dx) = \oint \rho v' V_\infty dy + \oint \rho v' u' dy - \oint \rho v'^2 dx$$

Como las dos últimas integrales son muy pequeñas, comparadas con la primera, se puede establecer:

$$\dot{M}y = \oint \rho v' V_\infty dy$$

Sustituyendo las integrales de flujo y cantidad de movimiento por unidad de área y de presión en la ecuación de fuerza por unidad de profundidad:

$$Fy = \oint \rho V_\infty \cdot u' dx \cdot (l) + \oint \rho \cdot v' V_\infty dy$$

$$Fy = \rho V_\infty \oint (u' dx + v' dy)$$

Como V_∞ es constante, $\oint V_\infty dx = 0$ (la circulación del vector velocidad a lo largo de una línea cerrada es cero, puesto que la velocidad es constante, y el flujo es irrotacional).

Teniendo en cuenta lo que se acaba de decir con respecto a la circulación, la ecuación de la fuerza se puede dar:

$$Fy = \rho V_\infty \oint (V_\infty + u')dx + v' dy = \rho V_\infty \oint (udx + vdy)$$

El vector de longitud de la trayectoria es: $\vec{ds} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$

por lo que $\vec{V}\vec{ds} = (u\hat{i} + v\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = udx + vdy$

Así $Fy = \rho V_\infty \oint \vec{V}\vec{ds} = -L;$

La integral es la circulación Γ, de donde queda

$L = -\rho V_\infty \Gamma$, esta ecuación recibe el nombre de *Teorema de Kutta-Joukowsky*.

Dicho teorema demuestra que añadir un vórtice libre al patrón de flujo de un perfil no solo es una manera de aproximarse al flujo real, sino que es absolutamente necesario introducir circulación para producir sustentación.

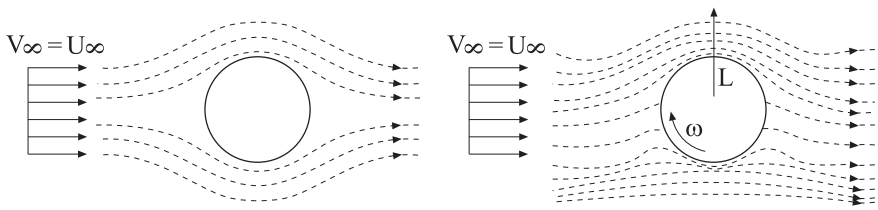
El teorema demuestra, asimismo, que el análisis del volumen de control no puede resolver completamente un problema de flujo externo. Para hallar la sustentación, se debe conocer la circulación y, para determinar esta, se debe tener información sobre el campo de velocidades "cerca" del perfil. Solo el análisis diferencial puede aportar el nivel necesario de detalle sobre dicho campo de velocidades.

11.2.5 Efecto Magnus

El teorema de Kutta-Joukowsky demuestra que todo cuerpo que de lugar a una circulación en una corriente de fluido experimenta una sustentación. El perfil que genera la circulación, experimenta una velocidad del fluido mayor en su lado superior que en su lado inferior.

Sea un cilindro circular inmerso en un fluido. Si el flujo alrededor del cilindro es simétrico, no existe circulación. Si el cilindro se hace girar con una velocidad angular ω en sentido de las manecillas del reloj, el fluido en la parte superior del cilindro aumenta su velocidad, mientras que en la parte inferior la aminora, lo cual da lugar a que las líneas de corriente alrededor del cilindro no sean simétricas. El efecto se desvanece a medida que nos alejamos del cilindro. Este tipo de flujo tiene circulación y, por tanto, sustentación.

Fig. T 11.16
Líneas de corriente alrededor de un cilindro estático y otro giratorio



El flujo sobre el cilindro giratorio se modeliza suponiendo un vórtice libre en el sentido de las manecillas del reloj.

La circulación delvórtice que se requiere en la superficie del cilindro queda definida por:

$$\Gamma = \oint \vec{V}\vec{dl} = -\int_0^{2\pi} UR \cdot d\theta = -2\pi UR = -2\pi\omega R^2$$

El signo – indica que el cilindro gira en sentido de las manecillas del reloj.

Al aplicar el teorema de Kutta-Joukowsky se tiene:

$L = -\rho V_\infty \Gamma(l) = 2\pi\rho U V_\infty R$. Recuérdese que el cilindro tiene una longitud unitaria.

El coeficiente de sustentación teórico valdrá:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2 S} = \frac{2\pi\rho U V_\infty R(l)}{\frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2 S} = \frac{2\pi\rho U V_\infty R(l)}{\frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2 2R(l)} = \frac{2\pi U}{V_\infty}$$

El modelo desarrollado, que determina el coeficiente de sustentación, no es capaz de predecir la resistencia.

En la figura T 11.17, se exponen los valores de los coeficientes de arrastre y sustentación para cilindros, hallados experimentalmente, entre los que se ha incluido el coeficiente de sustentación, hallado teóricamente. Obsérvese la diferencia entre los valores real y teórico.

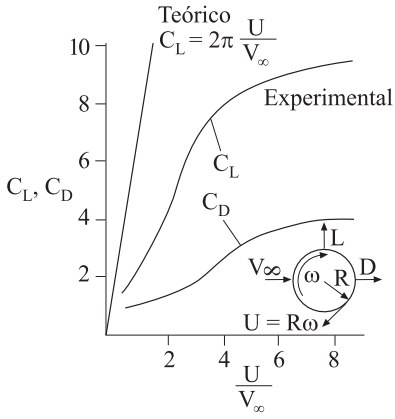


Fig. T 11.17
Coeficientes de arrastre y sustentación para un cilindro

Experimentalmente, se ha comprobado que hacer más rugosa la superficie del cilindro produce una mayor sustentación, ya que una superficie rugosa causa una circulación más efectiva.

11.3 Introducción al Flujo Potencial

11.3.1 Ecuaciones de Euler y Bernoulli

En el estudio de movimientos bidimensionales o tridimensionales de un fluido ideal, como puede ser el estudio del flujo alrededor de un álabe, fuera de la zona de la capa límite, la condición de idealidad del fluido, es decir, fluido sin viscosidad, lleva asociada la condición de irrotacionalidad del mismo, con lo que el vector velocidad en un punto genérico se puede dar en función de la función potencial, simplificando de este modo el cálculo del campo de velocidades.

Las ecuaciones que caracterizan el movimiento de un fluido cuando los efectos viscosos son despreciables son, la de continuidad y la de Euler, y para coordenadas cartesianas, se enuncian:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+g_z$$

Utilizando el concepto de presión reducida, la ecuación de Euler queda:

$$\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+v\nabla u=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x}$$

$$\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+v\nabla v=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial y}$$

$$\frac{Dw}{Dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+v\nabla w=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial z}$$

De la ecuación de Euler, se extrae que, en ausencia de viscosidad, una partícula de fluido que tenga inicialmente una velocidad angular cero mantiene tal condición.

En capítulos anteriores, se ha visto que, cuando los esfuerzos viscosos son depreciables y el flujo es incompresible, el fluido se caracteriza por un movimiento irrotacional $\nabla\wedge\vec{V}=0$; existe, por tanto, un potencial de velocidades ϕ tal que $\vec{V}=\nabla\phi$, ecuación que también se puede expresar como:

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x};\quad v=\frac{\partial\phi}{\partial y};\quad w=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

La rotación del fluido se cuantifica por la vorticidad: $\xi=\text{rot}\vec{v}=\nabla\wedge\vec{v}$

La ecuacións de Navier-Stokes en notación vectorial, fluido incomprensible, toma la forma:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\vec{g}+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v}$$

Tomando el operador rotacional de la ecuación de Navier-Stokes, se obtiene la ecuación de transporte de la vorticidad:

$$\frac{D\vec{\xi}}{Dt}=(\vec{\xi}\nabla)\vec{v}+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{\xi}$$

Si el flujo carece de viscosidad, queda:

$$\frac{D\vec{\xi}}{Dt}=(\vec{\xi}\nabla)\vec{v}$$

De esta ecuación, se deduce que, si inicialmente una partícula de fluido tiene $\vec{\xi} = 0$, entonces $\frac{D\vec{\xi}}{Dt} = 0$, con lo que la partícula de fluido mantiene su vorticidad constante. Si la viscosidad es nula, un campo de flujo inicialmente irrotacional permanece irrotacional.

Cuando el flujo es irrotacional y estacionario, las ecuaciones diferenciales de Euler se pueden reemplazar por la ecuación algebraica de Bernoulli:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \frac{P^*}{\rho} + \frac{v^2}{2} = cte$$

La ecuación de Bernoulli para flujo potencial y régimen transitorio tomará la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P^*}{\rho} + \frac{v^2}{2} = cte$$

11.3.2 Concepto de potencial de velocidades y función de corriente

Para un flujo tridimensional, el vector velocidad se descompone en tres componentes. Por tanto, se requieren tres ecuaciones para determinar dichas componentes. La utilización de la función potencial simplifica el cálculo del vector velocidad, dado que una única ecuación permitirá determinar dicho vector.

Supóngase que el vector velocidad se puede encontrar a partir de una sola función escalar:

$$\phi(x, y, z) \;\; ; \;\; \vec{v} = \text{gradiente}\,\phi = \nabla\phi$$

En términos de componentes:

A) $$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad ; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Matemáticamente, las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tal función son:

B) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)=0$$

Sustituyendo A en B se obtiene;

C) $$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\,;\quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0\,;\quad \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0\,;$$

Recuérdese que los componentes de la vorticidad en tres dimensiones se dan:

$$\text{rotv}_x=2\omega_x=\xi_x=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z};\quad \text{rotv}_y=2\omega_y=\xi_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\text{rotv}_z=2\omega_z=\xi_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y};$$

Comparando estas ecuaciones con las ecuaciones C se concluye que la función potencial ϕ existirá únicamente si el flujo es irrotacional. Cualquier función derivada de una función potencial siempre constituye un flujo irrotacional. El potencial de velocidades para una geometría de flujo particular se determina resolviendo una sola ecuación.

La ecuación de continuidad para un fluido incompresible, estacionario o no, toma la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,;$$

Sustituyendo las ecuaciones A en la ecuación de continuidad se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)=0\,;\quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0\,;$$

Ecuación que recibe el nombre de ecuación de Laplace, aplicable a cualquier sistema de coordenadas: $\nabla^2\phi=0$.

En coordenadas polares y flujo bidimensional, la ecuación de Laplace toma la forma:

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right)=0$$

Las componentes de la velocidad serán: $V_r=\frac{\partial \phi}{\partial r}\,;\quad V_\theta=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)$

Existe, asimismo, una segunda función escalar a partir de la cual se pueden deducir las componentes de la velocidad del fluido. Dicha función recibe el nombre de *función de corriente* o *función de líneas de corriente* ψ .

Las componentes de la velocidad se pueden dar como $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$; $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

de donde la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas y flujo bidimensional se puede dar como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \; ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

ecuación que recibe el nombre de ecuación de Laplace para ψ.

Se demuestra que:

Las líneas de ψ =cte. son tangentes al vector velocidad y son las líneas de corriente.

La ecuación de continuidad es la condición necesaria y suficiente para que ψ exista.

Los campos de velocidad deducidos a partir de ψ satisfacen automáticamente la ecuación de continuidad.

Para que exista ψ , no es necesario que el flujo sea irrotacional.

En coordenadas polares, la ecuación de continuidad toma la forma:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Definiendo:

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} ; \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

se obtiene:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0$$

Ecuación que recibe el nombre de ecuación de Laplace para ψ, en coordenadas polares.

Considérese la variación de ψ entre dos líneas de corriente, coordenadas cartesianas:

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 d\psi = \int_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \int_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

Recordando la relación entre la función de corriente y las componentes del vector velocidad, se establece:

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 -v\,dx + \int_1^2 u\,dy = \int_2^1 v\,dx + \int_1^2 u\,dy = \int_1^2 dQ = Q_{1-2}\ ;$$

Es decir, se observa que esta integral representa el caudal volumétrico, por unidad de profundidad, entre las dos líneas de corriente.

Para determinar la función de corriente de un flujo particular, se debe resolver la ecuación diferencial gobernante adecuada.

En coordenadas cartesianas, la vorticidad se expresa en función de ψ según la expresión:

$$\xi_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = -\nabla^2 \psi\ ;$$

Si el flujo es irrotacional:

$$\xi_z = 0\,; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0\,; \qquad \nabla^2 \psi = 0$$

Esta ecuación es del mismo tipo que la ecuación de Laplace, pero ambas ecuaciones tienen condiciones frontera diferentes.

Las líneas de $\phi = cte.$, líneas equipotenciales, son perpendiculares a las líneas de ψ =cte, líneas de corriente. Esta propiedad se demuestra observando que:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi=cte} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = -\frac{u}{v}\,; \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi=cte} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{v}{u}$$

Como las líneas equipotenciales y las de corriente tienen pendientes recíprocas negativas, dichas líneas son perpendiculares entre sí.

Problema 86

Enunciado

Si se conoce que la superficie mojada de una embarcación es de 70 m^2, su longitud es de 15 m y se desplaza a una velocidad de 20 Km/h, halle:

1. El espesor de la capa límite a una distancia de 3 m de la proa. El valor del coeficiente de resistencia en la zona turbulenta de la placa. ¿Cuál es la fuerza de fricción que se opone al movimiento del barco?

Datos: $\nu_{agua} = 1{,}3\ 10^{-5}\ m^2/s$; densidad = 1.150 kg/m^3

2. Al navegar, el barco se encuentra con una mancha de petróleo. Si se conoce que en aquel instante las velas comunican al barco una fuerza de 5.000 N en la dirección del movimiento, determine a qué velocidad se podrá mover dicho velero a través de la mancha. Considere que la superficie mojada no varía y que toda ella está, en todo momento, en contacto con el petróleo.

Datos: $\nu_{petróleo} = 1{,}076\ 10^{-3}\ m^2/s$; densidad = 860 kg/m^3

Resolución

1. Se asimilará la superficie mojada del barco a una placa plana de longitud 15 m. Se halla inicialmente el valor del número de Reynolds a una distancia de 3 m de la proa.

$$V = 20\,{}^{km}\!/_{h} = 5{,}56\,{}^{m}\!/_{s}$$

$$Re_{3m} = \frac{V \cdot X}{\nu} = \frac{5{,}56\,{}^{m}\!/_{s} \times 3\,m}{1{,}3 \times 10^{-5}\,{}^{m^2}\!/_{s}} = 1.282.051{,}3;$$

$$X_{tr} = \frac{500.000 * \nu}{V} = \frac{500.000 * 1{,}3 * 10^{-5}}{5{,}56} = 1{,}1691\ m$$

Como $Re_{3m} > 500.000$ en este punto se tiene capa límite turbulenta, las expresiones para el espesor de la capa límite y el coeficiente de resistencia serán:

$$\delta = 0{,}37 \cdot Re_x^{\frac{-1}{5}}\ x$$

donde δ es el espesor de la capa límite a una distancia x del inicio de la placa, teniendo en cuenta que el valor mínimo que puede tener la "X" es la X de transición, X_{tr}.

$$C_D = 0{,}072 \cdot Re_L^{\frac{-1}{5}}$$

donde $C_{D,}$ es el coeficiente de resistencia para la zona turbulenta (y Re_L es el valor del número de Reynolds en el extremo final de la placa).

$$C_D = \frac{0,074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1.740}{Re_L}$$

donde C_D es el coeficiente de resistencia para placa plana con zona turbulenta y zona laminar (función de. Re_L).

Procediendo al cálculo:

$$Re_L = \frac{V \cdot x}{\nu} = \frac{5,56\,{}^{m}\!/\!_{s}\; 15\,m}{1,3\;\; 10^{-5}\;{}^{m^2}\!/\!_{s}} = 6.410.256,4$$

$$\delta_3 = 0,37 \cdot 1.282.051,3^{-\frac{1}{5}} \cdot 3\,m = 0,066\,m$$

$$C_{D_{Turbulento}} = 0,072 \cdot 6.410.256,4^{\frac{-1}{5}} = 3,133 \times 10^{-3}$$

$$C_{D_{Turbulento+laminar}} = \frac{0,074}{6.410.256,4^{\frac{1}{5}}} - \frac{1.740}{6.410.256,4} = 2,949 \cdot 10^{-3}$$

La fuerza de fricción total que se opone al movimiento del barco es:

$$F = C_D\, S\;\; \rho \frac{V\infty^2}{2} = 2,949\,10^{-3} \quad 70\,m^2\; 1.150\,{}^{kg}\!/\!_{m^3}\; \frac{5,56^2\;{}^{m^2}\!/\!_{s^2}}{2} = 3.662,96\,N$$

2. El valor del número de Reynolds en el extremo final del barco cuando navega en petróleo con una velocidad V es:

$$Re_L = \frac{V\,{}^{m}\!/\!_{s}\; 15\,m}{1,076\quad 10^{-3}\;{}^{m^2}\!/\!_{s}} = 13.940,52\,V \qquad (A)$$

Considerando a priori que a lo largo de la longitud del barco tendremos únicamente capa límite laminar:

$$C_{D_{Laminar}} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} = \frac{1,328}{\sqrt{13.940,52 \times V}}$$

Se impone la condición de que la fuerza de fricción que ha de vencer el barco es de 5.000 N:

$$F = C_D \times S \times \rho \times \frac{V_\infty{}^2}{2}$$

$$5.000\,N = \frac{1,328}{\sqrt{13.940,52 \times V}}\; 70\,m^2\; 860\,{}^{kg}\!/\!_{m^3}\; \frac{V^2\;{}^{m^2}\!/\!_{s^2}}{2}$$

obteniendo el valor de la velocidad: $V = 3,79\,{}^{m}\!/\!_{s}$

Se determina el número de Reynolds en el extremo de la placa con el fin de corroborar la hipótesis de régimen laminar en todo el dominio.

$$Re_L = \frac{3,79 \cdot 15}{1,076 \quad 10^{-3}} = 52.834,5$$

Problema 87

Enunciado

Se quiere determinar la fuerza que un aeroplano opone al movimiento, debido a la fricción entre fluido y superficie. Para ello, y únicamente como primera aproximación, se va a considerar la superficie del aeroplano como una placa plana. Dicha placa tendrá 18 metros de ancho por 70 metros de largo (supóngase que el fluido pasa por un lado de la placa).

Si la velocidad de crucero del avión es de 750 Km/h; determine:

La fuerza que se opone al movimiento cuando dicho aeroplano está volando a 500 metros de altura, donde $\mu = 1,7737 \cdot 10^{-5}$ Kg/m s ^{2} y $\rho = 1,1673$ Kg/m^3, y cuando vuela a 20.000 metros donde: $\mu = 1,4216 \cdot 10^{-5}$ y $\rho = 0,08891$ Kg/m^3.

Determine en ambos casos el punto de transición entre la capa límite laminar y turbulenta, así como el espesor de la capa límite en este punto.

Resolución

1. Se calculan las fuerzas que se oponen al movimiento a las alturas de 500 y 20.000 metros

a) Vuelo a 500 metros de altura

El objetivo del ejercicio es calcular la fuerza que se opone al movimiento del avión. Suponiendo el avión como una placa plana (tal como dice el enunciado), el valor de la fuerza viene dada por la expresión siguiente:

$$F_D = C_D \cdot B \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{v_\infty^2}{2}$$

donde:

C_D : coeficiente de resistencia o de arrastre

B : anchura de la placa

L : longitud de la placa

ρ : densidad del fluido en contacto con la placa.

V_∞ : velocidad de la placa

Antes de calcular el coeficiente de resistencia, se determinará que zona de la placa se encuentra en régimen laminar y en régimen turbulento. Para ello, se utiliza:

$$500.000 = \frac{V_\infty \, X_{tr}}{\nu}$$

Sustituyendo valores, se obtiene: $X_{tr} = 0{,}0364$ m

Se observa que la mayor parte de la placa está sujeta a régimen turbulento; de todas maneras, y con el fin de trabajar con la mayor precisión, se va a utilizar la ecuación del coeficiente de resistencia, que considera tanto la zona laminar como la turbulenta.

$$C_D = \frac{0{,}072}{(Re_L)^{0,2}} - \frac{1.700}{Re_L}$$

de donde:

$$750\,Kmh^{-1} \cdot \frac{1h}{3.600\,s} \cdot \frac{1.000m}{1Km} = 208{,}333\,ms^{-1}$$

$$Re_L = \frac{\rho \cdot v_\infty \cdot L}{\mu} = \frac{1{,}1673 \cdot 208{,}333 \cdot 70}{1{,}17737 \cdot 10^{-5}} = 959.750.677{,}285$$

El coeficiente de resistencia quedará:

$$C_D = \frac{0{,}072}{(959.750.677{,}285)^{0,2}} - \frac{1.700}{959.750.677{,}285} = 1{,}148 \cdot 10^{-3}$$

Siendo la fuerza:

$$F(h = 500\,m) = 1{,}148 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 70 \cdot 1{,}1673 \cdot \frac{(208{,}333)^2}{2}$$

$$F(h = 500\,m) = 36.666{,}618\,N$$

b) Vuelo a 20.000 metros de altura

De la misma manera que en el apartado anterior, se calculará el Re_L para poder determinar el coeficiente de resistencia, C_D.

$$Re_L = \frac{\rho \cdot v_\infty \cdot L}{\mu} = \frac{0{,}08891 \cdot 208{,}33 \cdot 70}{1{,}4216 \cdot 10^{-5}} = 91.207.237{,}767$$

La zona laminar y turbulenta de la placa, quedarán definidas:

$$500.000 = \frac{V_\infty \, X_{tr}}{\nu} = \frac{208{,}33 \, X_{tr}}{\frac{1{,}4216\,10^{-5}}{0{,}08891}}$$

$$X_{tr} = 0{,}38 \ \text{m}$$

En este caso, es más necesario que antes utilizar la ecuación genérica con el fin de determinar el coeficiente de arrastre; así:

$$C_D = \frac{0,072}{(91.207.237,767)^{0,2}} - \frac{1.700}{91.207.237,767} = 1,8235 \cdot 10^{-3}$$

la fuerza será:

$$F(h = 20.000\,m) = 1,8235 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 70 \cdot 0,08891 \cdot \frac{(208,333)^2}{2}$$

$$F(h = 20.000m) = 4.433,2N$$

Véase la notable disminución de la fuerza de arrastre con la altura.

2. Cálculo del punto de transición entre régimen laminar y turbulento, así como el espesor de la capa límite en este punto.

a) Vuelo a 500 metros de altura

El punto de transición ha sido hallado anteriormente, y su valor era:

$$X_{tr\ 500} = 0,0364\ m$$

$$X_{tr\ 20.000} = 0,38\ m$$

El espesor de la capa límite entre estos dos puntos vendrá dado por la expresión:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

donde:

δ: espesor de la capa límite

x: punto n donde se quiere calcular el espesor de la capa límite

Re_x : número adimensional de Reynolds evaluado en el punto de estudio

Así:
$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5 \cdot 0,03646}{\sqrt{5 \cdot 10^5}}$$

$$\delta(h = 500\,m) = 2,578 \cdot 10^{-4}\,m$$

b) Vuelo a 20.000 metros

Operando de la misma manera que en el caso anterior:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5 \cdot 0,38374}{\sqrt{5 \cdot 10^5}}$$

$$\delta(h = 20.000\,m) = 2,713 \cdot 10^{-3}\,m$$

Problema 88

Enunciado

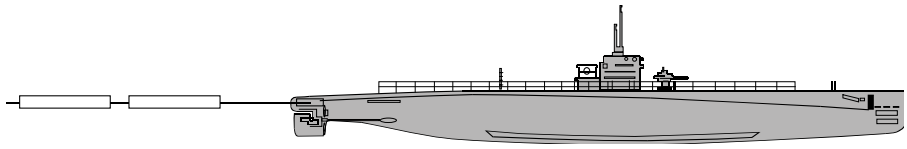
En la fase de ejecución de la obra de un oleoducto submarino, se ha pensado que para el transporte de los conductos hasta la zona donde han de ser soldados se utilizará un mini submarino. Se pretende que el submarino arrastre conductos de 50 m de longitud y 2 m de diámetro. Se entenderá que los conductos llevan unas boyas que los mantiene sumergidos y en posición horizontal.

Considérese los conductos como placas planas.

Viscosidad cinemática del agua = $1{,}2\ 10^{-6}\ m^2/s$

Densidad del agua = $1.100\ Kg/m^3$

Fig. 91.1



1. Determine el número de conductos que puede llevar a la vez el mini submarino en función de la velocidad de desplazamiento (1-10 km/h) conociendo que puede realizar una fuerza de arrastre adicional de 500 N.

2. Cuál es el valor de los esfuerzos cortantes en la zona de transición de la capa límite.

Resolución

$\nu = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$

$\rho = 1.100\ Kg/m^3$

1.- Si V = 1 Km/h = 0,27 m/s

La zona de separación entre el régimen laminar y turbulento de la placa viene dada por:

$$Re = \frac{V\ X_{tr}}{\nu} = \frac{0{,}27\ X_{tr}}{1{,}2\ \ 10^{-6}} = 500.000$$

$$X_{tr} = 2{,}16\ m$$

Para el resto de velocidades posibles:

V (Km/h)	V (m/s)	Xtr (m)
1	0,277	2,16
2	0,555	1,08
3	0,833	0,72
4	1,111	0,54
5	1,388	0,43

V (Km/h)	V (m/s)	Xtr (m)
6	1,666	0,36
7	1,944	0,308
8	2,222	0,27
9	2,5	0,24
10	2,777	0,216

Obsérvese que la zona laminar de la placa es prácticamente relevante en todos los casos, con lo cual se utilizará para el cálculo la ecuación genérica del coeficiente de resistencia.

El coeficiente de resistencia para una placa, teniendo en cuenta la zona laminar y turbulenta, se expresa:

$$C_D = \frac{0,074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1.740}{Re_L}$$

Cuando el submarino se desplaza a la velocidad mínima, se tiene:

$$Re_L = \frac{0,277 \cdot 50}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 11.574.074,1$$

$$C_D = \frac{0,074}{11.574.074,1^{\frac{1}{5}}} - \frac{1.740}{11.574.074,1} = 2,7107 \cdot 10^{-3}$$

$$F = C_D \cdot b \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{V_\infty^2}{2} = 2,7107\ 10^{-3} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 50 \cdot 1100 \cdot \frac{0,2777^2}{2} = 36,14\ N$$

Puesto que hay dos superficies de contacto, $F = 2 \cdot 36,14 = 72,28\ N$

Cuando el submarino se desplaza a la velocidad máxima:

$$Re_L = \frac{2,77 \cdot 50}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 1,154 \cdot 10^8$$

$$C_D = \frac{0,074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1.740}{Re_L} = 1,7902 \cdot 10^{-3}$$

$$F = C_D \cdot b \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{V_\infty^2}{2} = 1,7902 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 50 \cdot 1.100 \cdot \frac{2,777^2}{2} = 2.386,76\ N$$

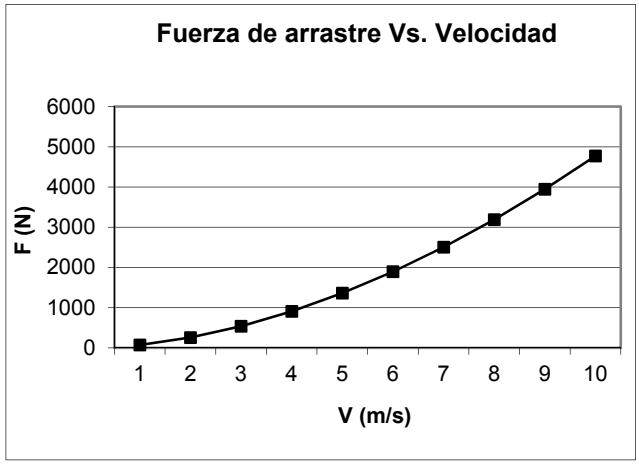
$$F_T = 2F = 4.773,53\ N$$

Puesto que la fuerza de arrastre en función de la velocidad del submarino venia definida por:

$$F = C_D\, b\, L\, \rho\, V^2/2$$

sustituyendo los valores para el resto de velocidades del submarino, se obtiene:

Fig. 91.2

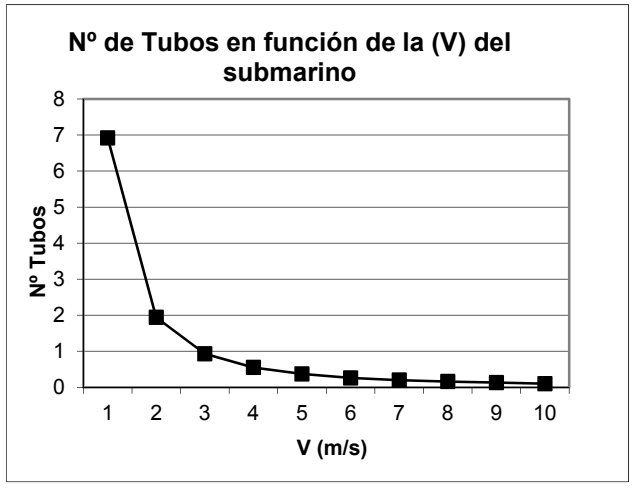


V (m/s)	F (N)
0,27	72,28
0,55	257,63
0,83	539,13
1,11	909,02
1,38	1.362,27
1,66	1.895,2
1,94	2.504,94
2,22	3.189,16
2,5	3.945,87
2,77	4.773,53

El número de conductos en función de la velocidad se establece:

$$\text{N.º de tubos} = \frac{F \rightarrow_{\text{arrastre}}}{F \leftarrow_{\text{necesaria}}}$$

Fig. 91.3



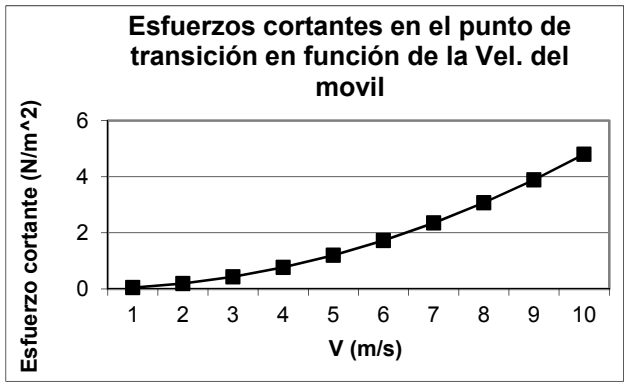
V(m/s)	N.º Tubos
0,27	6,92
0,55	1,94
0,83	0,93
1,11	0,55
1,38	0,37
1,66	0,26
1,94	0,2
2,22	0,16
2,50	0,13
2,77	0,1

Obsérvese que el submarino sólo podrá transportar tubos cuando se desplace a baja velocidad.

2. La variación del esfuerzo cortante en el punto de transición para las diferentes velocidades se define:

$$\tau_w = \frac{2\,\mu\,V_\infty}{\delta} = \frac{2\,\nu\,\rho\,V_\infty}{5\sqrt{\frac{\nu\,X_{tr}}{V_\infty}}}$$

de donde, sustituyendo para los valores determinados anteriormente, se tiene:



V (m/s)	τw (N/m^2)
0,27	0,048
0,55	0,192
0,83	0,432
1,11	0,768
1,38	1,2
1,66	1,728
1,94	2,353
2,22	3,073
2,5	3,889
2,77	4,801

Fig. 91.4

A modo de ejemplo en la figura siguiente se detalla, el valor del coeficiente de arrastre hallado experimentalmente para placas planas lisas, en función del número de Reynolds.

Véase que los valores del coeficiente de arrastre obtenidos para sendos valores del número de Reynolds se podrían haber obtenido utilizando dicho diagrama.

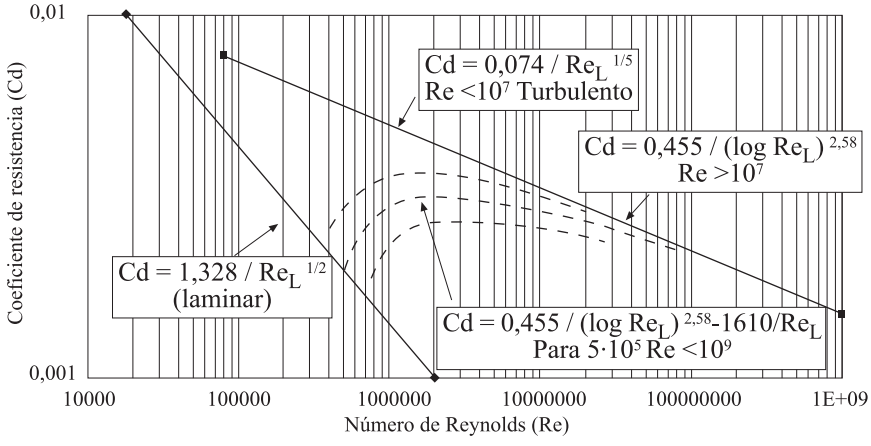


Fig. 91.5

Problema 89

Enunciado

Se desea construir un barco que utilice el efecto, Magnus, con el fin de producir el desplazamiento del mismo.

Las condiciones del navío son:

-Velocidad del crucero, 10 km/h; superficie en contacto con el agua, 80 m^2(4x20 m)
-La velocidad del crucero debería alcanzarse para una velocidad del viento de 6m/s.
-Debido al diseño del barco se prevé que se puedan instalar, como máximo, dos mástiles de 15 m de altura, y 0,5 m de diámetro.

Determine:

1. La velocidad de giro de dichos mástiles para conseguir la velocidad de crucero deseada. Se puede considerar despreciable la velocidad relativa del barco, así como el rozamiento del aire sobre el mismo. Considere que el viento actúa ortogonalmente al eje principal del barco.

2. Qué ángulo ha de formar el eje del barco respecto al viento, con el fin de aprovechar al máximo la fuerza resultante del efecto Magnus.

3. Determine la potencia mínima necesaria para hacer girar los cilindros.

Propiedades del agua: $\nu = 1{,}3\ \ 10^{-5}\ m^2/s$

$\rho = 1.150\ Kg/m^3$

Propiedades del aire: $P = 100.000\ Pa$

$T = 293\ K$

$\nu = 1{,}5\ \ 10^{-5}\ m^2/s$

Resolución

1. El primer paso es determinar la fuerza que se opone al movimiento del barco. Considerando la superficie mojada del mismo como una placa plana, se debe hallar inicialmente qué zona de la placa está en régimen laminar y qué zona está en régimen turbulento; para ello, se determinará la distancia de transición.

$$Re_x = 500.000 = \frac{10 \cdot \frac{1.000}{3.600} \cdot X_{tr}}{1.3 \cdot 10^{-5}};\ X_{tr} = 2{,}34\ m$$

Como la placa tiene 20 m de longitud, ha de considerar que la capa límite tiene una zona laminar y una turbulenta, con lo cual se utilizará la expresión del coeficiente de arrastre que considera tanto la capa límite laminar como la turbulenta.

$$C_D = 0{,}072 \cdot Re_L^{-\frac{1}{5}} - \frac{1.700}{Re_L}$$

de donde:

$$Re_L = \frac{10 \cdot \frac{1.000}{3.600} \cdot 20}{1{,}3 \cdot 10^{-5}} = 4.273.504{,}2$$

sustituyendo, se obtiene:

$$C_D = 3{,}3976 \cdot 10^{-3} - 3{,}978 \cdot 10^{-4} = 2{,}9998 \cdot 10^{-3}$$

Así pues, la fuerza necesaria para mover la embarcación a la velocidad requerida es:

$$F = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho \cdot v_\infty{}^2 \cdot b \cdot l = 2{,}9998 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.150 \cdot \left(10 \frac{1}{3{,}6}\right)^2 \cdot 4 \cdot 20 = 1.064{,}75 \text{ N}$$

Esta fuerza en la dirección del movimiento ha de ser comunicada por los cilindros con efecto Magnus.

Dado que la relación $\frac{u}{v_\infty} = \frac{\omega \cdot r}{v_\infty} = \frac{\omega \cdot 0{,}25}{6}$ no es conocida, se partirá de la fuerza necesaria para determinar la velocidad angular.

Puesto que la dirección del viento es lateral, la fuerza en la dirección del movimiento será la *lift* creada por los dos cilindros:

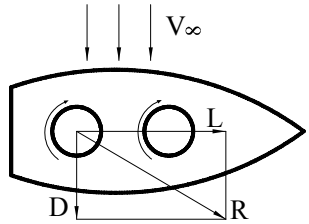


Fig. 92.1
Esquema del barco y las fuerzas actuantes sobre el mismo

$$L_{1\ \text{cilindro}} = C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty{}^2 \cdot S$$

$$F = 2 \cdot L_{1\ \text{cilindro}} = 2 \cdot C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty{}^2 \cdot S$$

$$C_{L1\ \text{cilindro}} = \frac{F}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty{}^2 \cdot S} = \frac{1.064{,}75}{1{,}189 \cdot 6^2 \cdot 15 \cdot 0.5} = \frac{1.064{,}75}{321{,}03} = 3{,}316$$

La densidad del aire se ha obtenido: $\rho = \frac{P}{RT} = \frac{100.000}{287 \cdot 293} = 1{,}189 \frac{Kg}{m^3}$ considerando presión atmosférica y temperatura de 20ºC.

Con el valor del coeficiente de sustentación, se obtienen de la figura 92.2 los valores:

$$\frac{u}{v_\infty} = 1{,}7; \qquad C_D = 1{,}4;$$

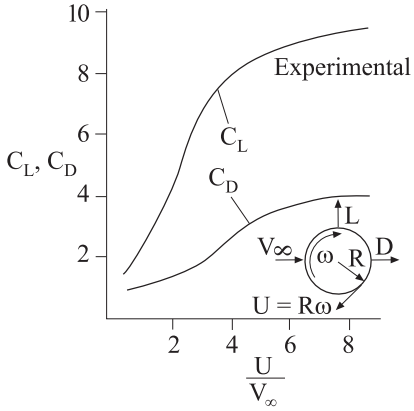


Fig. 92.2 Valores del coeficiente de arrastre y sustentación en función de la relación de velocidades tangencial y no perturbada

Consecuentemente, la velocidad de giro de los cilindros será:

$$\frac{u}{v_\infty} = \frac{\omega \cdot r}{v_\infty} = \frac{\omega \cdot 0{,}25}{6} = 1{,}7$$

$$\omega = 40{,}8 \quad {}^{rad}\!/_{s} \equiv 389{,}6 \ \text{rpm}$$

2. Para determinar el ángulo que el eje del barco ha de formar respecto a la corriente no perturbada, con el fin de aprovechar al máximo el efecto Magnus, se deberá determinar la dirección de la fuerza resultante.

Así, la fuerza de arrastre valdrá:

$$C_D = 1{,}4 = \frac{D_{\text{1 cilindro}}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty{}^2 \cdot S}$$

$$D_{\text{1 cilindro}} = 1{,}4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty{}^2 \cdot S = 1{,}4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}189 \cdot 6^2 \cdot 0{,}5 \cdot 15 = 224{,}721 \ \text{N}$$

$$D_{\text{2 cilindros}} = 449{,}442 \ \text{N}$$

de donde la fuerza resultante será:

$$R = \sqrt{D_2^2 + L_2^2} = \sqrt{449{,}44^2 + 1.064{,}75^2} = 1.155{,}72 \ \text{N}$$

La cual forma un ángulo respecto la dirección inicial del movimiento de:

$$\text{tg}\alpha = \frac{449{,}44}{1.064{,}75} = 0{,}4221 \;\; ; \quad \alpha = 22{,}88^{\text{o}}$$

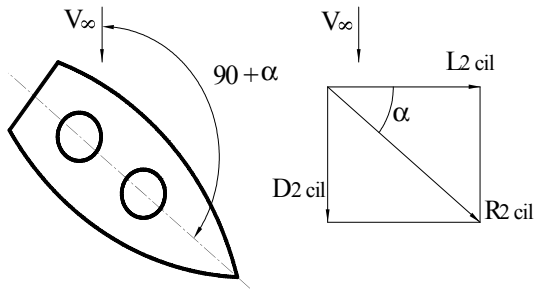


Fig. 92.3
Angulo óptimo para aprovechar al máximo el efecto Magnus

Con lo cual, el ángulo que el eje del barco ha de formar respecto al viento para aprovechar al máximo el efecto Magnus ha de ser de 112,88º. Obsérvese que este ángulo será diferente para cada valor de velocidad del viento y velocidad de giro de los cilindros.

3. Para hallar la potencia que ha de tener cada uno de los motores eléctricos que hace girar los cilindros, (y dado que no se dispone de la distribución de velocidades del fluido en dirección radial partiendo de la velocidad en la pared del cilindro), se considerará cada cilindro como una placa plana que se desplaza con una velocidad igual a la velocidad tangencial del cilindro. No obstante, ha de tenerse en cuenta que se está realizando una somera aproximación a la realidad.

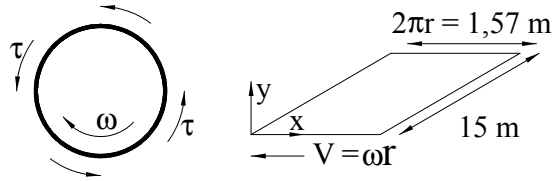


Fig. 92.4
Simil de los esfuerzos sobre el fluido en forma de placa plana

Los esfuerzos cortantes alrededor del cilindro se pueden dar:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial \omega}{\partial n} \approx \mu \cdot \frac{v - 0}{\delta} = \mu \cdot \frac{\omega \cdot r}{\delta}$$

δ = espesor de la capa límite, el cual variará en cada punto.

Puesto que no se tiene conocimiento del espesor, se procederá a asimilar el cilindro a una placa plana, la cual se desplaza a una velocidad $v = \omega r$.

La distancia respecto al origen para la cual la capa límite dejará de ser laminar es:

$$R_e = \frac{\omega \cdot r \cdot x}{\nu_{aire}} = \frac{40{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot x}{1{,}5 \cdot 10^{-5}} = 500.000 \; ; \qquad x = 0{,}7352 \text{ m};$$

El número de Reynolds en el extremo de la placa vendrá dado por:

$$\mathrm{Re_L} = \frac{40{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0{,}25}{1{,}5 \cdot 10^{-5}} = 1.068.141{,}5$$

Por tanto, el coeficiente de arrastre y la fuerza necesaria para desplazar esta placa ficticia serán:

$$\mathrm{C_D} = 0{,}072 \cdot \mathrm{Re_L}^{-1/5} - \frac{1.700}{\mathrm{Re_L}} = 0{,}072 \cdot 1.068.141{,}5^{-1/5} - \frac{1.700}{1.068.141{,}5} =$$
$$= 0{,}0044833 - 0{,}0015915 = 0{,}0028918$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{C_D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \mathrm{v_\infty}^2 \cdot \mathrm{b} \cdot \mathrm{l} = 0{,}0028918 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}189 \cdot (\omega \cdot \mathrm{r})^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0{,}25 \cdot 15 = 4{,}21 \ \mathrm{N}$$

La potencia necesaria para mover esta placa ficticia sería:

$$\mathrm{N} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{V_\infty} = \mathrm{F} \cdot \omega \cdot \mathrm{r} = 4{,}21 \cdot 40{,}8 \cdot 0{,}25 = 42{,}98 \ \mathrm{W}$$

La potencia necesaria para mover los dos cilindros sería de 85,97 W.

En realidad, no sólo hay que tener en cuenta que el símil de la placa plana es poco satisfactorio, sino que además se deberían evaluar los esfuerzos debidos a los rozamientos mecánicos.

Problema 90

Enunciado

El ojo de un tornado tiene un radio de 30 m, la velocidad tangencial del viento para este radio es de 50 m/s. Asumiendo que la variación de velocidad desde el eje central del tornado al susodicho radio es la característica a la de un vórtice forzado, mientras que desde el radio del ojo hasta el radio exterior del tornado la distribución de velocidades puede considerarse como de un vórtice libre.

Determine la distribución de presiones en función del radio del tornado.

Se puede despreciar el efecto de las fuerzas másicas.

Resolución

Lo primero que es necesario recordar es la ecuación característica de un vórtice libre y un vórtice forzado:

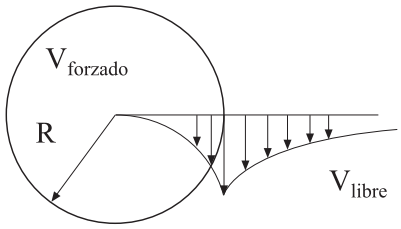
Para un vórtice libre, se cumple: $v_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\cdot\pi\cdot r}$

Para un vórtice forzado: $v_\theta = \omega\cdot r$

Donde r, es el radio genérico, ω es la velocidad de giro del aire y Γ es la circulación del vector velocidad a lo largo de una curva cerrada genérica.

Según el enunciado, la representación gráfica de la distribución de velocidades alrededor del ojo del tornado es:

Fig. 93.1



Para el radio exterior del ojo del tornado (r = R), el vórtice forzado y el libre se encuentran, con lo que se puede decir:

$$\omega\cdot R = \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Despejando el valor de la circulación del fluido, se obtiene:

$$\Gamma = 2\,\pi\,\omega\,R^2$$

con lo cual las ecuaciones para el vórtice forzado y libre se darán:

Vórtice forzado: $v_\theta = \omega\cdot r$; ecuación válida para $r \le R$;

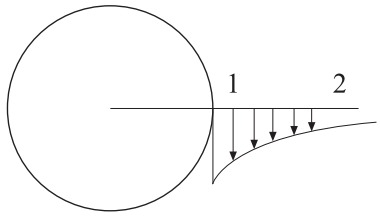
Vórtice libre: $v_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\,\pi\,r} = \dfrac{2\cdot\pi\cdot\omega\cdot R^2}{2\cdot\pi\cdot r} = \dfrac{\omega\cdot R^2}{r}$; ecuación válida para $r \ge R$

El valor de la velocidad angular puede calcularse:

$$v_\theta = \omega\cdot r\,; \quad 50 = \omega\cdot 30; \quad \omega = \frac{5}{3} = 1,66\left[\frac{rad}{s}\right];$$

En la zona donde existe el vórtice libre, se va a aplicar la ecuación de la energía entre los puntos 1 y 2 que se detallan en la figura siguiente. Entendiendo que el punto 2 está situado suficientemente alejado del centro del tornado y por tanto, la velocidad del aire se puede considerar cero y la presión es la atmosférica, se tiene:

Fig. 93.2



$$\frac{P_1}{\rho} + g \cdot z_1 + \frac{v_\theta^2}{2} = \frac{P_{atm}}{\rho} + g \cdot z_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

Puesto que la velocidad del aire en un punto suficientemente alejado del centro del tornado se puede considerar nula, se tiene:

$$\frac{v_\theta^2}{2} = \frac{P_{atm} - P_1}{\rho}$$

Sustituyendo la ecuación del vórtice libre en la ecuación anterior, se obtiene:

$$P_1 = P_{atm} - \frac{\rho \cdot v_\theta^2}{2} = P_{atm} - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot R^4}{r^2}; \quad \text{ecuación válida para } r \geq R$$

Por otro lado, en el ojo del huracán se puede aplicar la ecuación de Euler en coordenadas cilíndricas y flujo bidimensional, y se obtiene:

En dirección radial: $-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + g_r$

En dirección angular: $0 = -\frac{1}{\rho \cdot r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + g_\theta$

Según el enunciado, los términos de fuerzas másicas pueden ser despreciados, con lo que la ecuación en dirección angular es:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \text{; con lo que la presión ha de ser constante respecto a } \theta;$$

Del término de la ecuación de Euler en dirección radial, se tiene:

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}$$

cuya integración da lugar a:

$$\int dP = \int \frac{v_\theta^2}{r} \cdot \rho \cdot dr = \int \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} \cdot \rho \cdot dr$$

$$P = \omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{r^2}{2} + cte$$

Para determinar la constante, se necesita una condición de contorno. Dicha condición se obtiene al igualar la presión, en el contorno del ojo del tornado.

Igualando la presión en el punto r = R, desde el punto de vista de las dos distribuciones de presiones, se obtiene:

$$\omega^2 \rho \cdot \frac{R^2}{2} + cte = P_{atm} - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot R^4}{R^2};$$

$$cte = P_{atm} - \rho \cdot \omega^2 \cdot R^2$$

con lo que la distribución de presiones para la zona de vórtice forzado queda:

$$P = \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot r^2}{2} + P_{atm} - \rho \cdot \omega^2 R^2$$

$$P = P_{atm} + \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[\frac{r^2}{2} - R^2 \right];$$ el límite de validez de esta ecuación es: $r \leq R$;

Obsérvese que tanto la ecuación que caracteriza la distribución de presiones para vórtice forzado como la de vórtice libre dan lugar a distribuciones de presión menores que la atmosférica. Obsérvese que cuanto mayor es la velocidad angular del tornado, mayor será la depresión creada. A modo de ejemplo, en la figura siguiente se muestra cómo varia la presión a lo largo del radio del tornado para dos velocidades angulares diferentes, que corresponden a una velocidad tangencial de 50 y 100 m/s para un radio del ojo del tornado de 30 m.

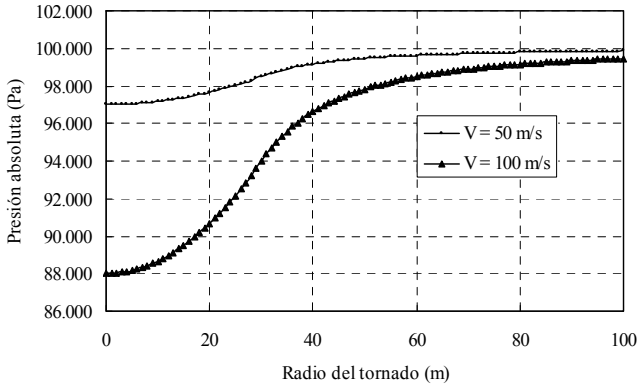


Fig. 93.3

Problema 91

Enunciado

Una máquina de entrenamiento para tenistas tiene una boca de salida situada a Y metros del suelo. La máquina lanza paralelamente al suelo una pelota con una velocidad

$V_{inicial}$ y una rotación en sentido de las agujas del reloj de ω radianes/segundo. Determine la posición de la pelota cuando llegue al tenista, el cual está situado a una distancia X de la máquina. Consideren conocido el diámetro de la pelota D y la masa de la pelota m.

Los valores de los coeficientes de arrastre y sustentación para una esfera que gira sobre sí misma se detallan en la figura siguiente.

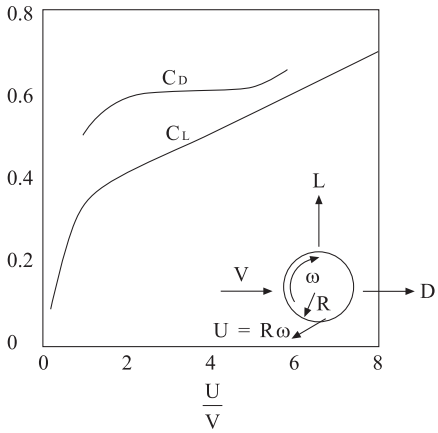


Fig. 94.1 Coeficientes de arrastre y sustentación para una esfera sometida al efecto Magnus

Resolución

La velocidad tangencial de la pelota, debida a su rotación, será:

$$U = \omega \frac{D}{2}; \quad \frac{m}{s}$$

La velocidad con la que la pelota sale de la máquina es la velocidad no perturbada V_∞.

El cociente entre ambas velocidades $\frac{U}{V_\infty}$ es el valor con que se entra en el diagrama inicial, y se obtienen los valores del coeficiente de arrastre y sustentación: C_D; C_L;

El diagrama del cuerpo libre para la pelota, en un punto genérico de su movimiento, sería:

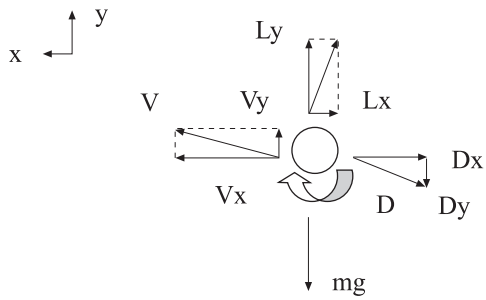


Fig. 94.2

De la aplicación de la segunda ecuación de Newton en las dos direcciones del movimiento, se tiene:

$$\sum F_x = m \cdot \vec{a}_x$$

$$\sum F_y = m \cdot \vec{a}_y$$

Sustituyendo las componentes de las fuerzas actuantes, se tiene:

$$-L_x - D_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt}; \qquad L_y - D_y - mg = m\frac{dV_y}{dt};$$

de donde la relación entre los coeficientes de arrastre y sustentación y las fuerzas se pueden dar como:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot V_\infty^2\cdot S} = \frac{D}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot V_x^2\cdot S}; \qquad C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot V_\infty^2\cdot S} = \frac{L}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot V_x^2\cdot S}$$

siendo: $S = \frac{\pi\cdot d^2}{4}$;

Para un tiempo inicial, justamente cuando la pelota sale de la máquinas, se cumple: $V_y = 0;\ D_x >> L_x;\ L_y >> D_y$; con lo que la segunda ecuación de Newton en las dos direcciones del movimiento será:

$$-D_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt}$$

$$L_y - m\cdot g = m\frac{dV_y}{dt}$$

La integración de la ecuación del movimiento en dirección X da lugar a:

$$\int_{t=0}^{t} -C_D\frac{1}{2}\rho\cdot S\cdot dt = \int_{V_{X\,incial}}^{V_x} m\cdot\frac{dV_x}{V_x^2}$$

$$-C_D\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot S\cdot t = -m\left[\frac{1}{V_x}\right]_{Vx_{inicial}}^{Vx} = -m\cdot\left[\frac{1}{V_x} - \frac{1}{V_{x_{inicial}}}\right]$$

$$C_D\frac{1}{2}\frac{\rho\cdot S\cdot t}{m} = \frac{1}{V_x} - \frac{1}{V_{x_{inical}}}$$

$$V_x = \frac{1}{C_D\frac{1}{2}\frac{\rho\cdot S\cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}};$$

Ecuación que da la velocidad de la pelota en dirección X y en función del tiempo.

De la integración de la ecuación del movimiento en dirección Y, se obtiene:

$$C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_x^2 \cdot S - m \cdot g = m \cdot \frac{dV_y}{dt}$$

$$C_L \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot \left[\frac{1}{C_D \cdot \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inical}}}} \right]^2 - m \cdot g = m \cdot \frac{dV_y}{dt}$$

$$\int_{V_{yinical}=0}^{V_y} dV_y = \int_{t=0}^{t=t} \left[-g + \frac{C_L \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S}{m} \left[\frac{1}{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}} \right]^2 \right] dt$$

$$V_y = -g\,t - \frac{C_L \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S}{m} \cdot \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S}{m}} \cdot \left[\frac{1}{C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}} \right]_{t=0}^{t}$$

$$V_y = -g \cdot t - \frac{C_L}{C_D} \left[\frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}} - V_{x_{inicial}} \right]$$

Ésta es la ecuación que caracteriza la velocidad en dirección vertical en función del tiempo. Obsérvese que para el tiempo t = 0, se ha considerado que la velocidad V_y es asimismo nula.

La posición temporal de la pelota en dirección X se obtiene de la ecuación:

$$V_x = \frac{dx}{dt};$$

de donde:

$$\int_{x=0}^{x=x} dx = V_x dt = \int_{t=0}^{t} \frac{dt}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}} = \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S}{m}} \cdot \ln \left[\frac{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}}{\frac{1}{V_{x_{inicial}}}} \right];$$

$$X \cdot C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S}{m} = \ln \left(\frac{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}}{\frac{1}{V_{x_{inicial}}}} \right)$$

$$\left[\frac{1}{V_{x_{inicial}}}e^{C_D\frac{1}{2}\frac{\rho\cdot S\,X}{m}}-\frac{1}{V_{x_{inicial}}}\right]\cdot\frac{1}{C_D\frac{1}{2}\frac{\rho\cdot S}{m}}=t \qquad (A)$$

Esta ecuación caracteriza el tiempo que tarda la pelota en recorrer la distancia entre la máquina y el tenista (X).

La posición de la pelota en dirección vertical se determina:

$$V_y=\frac{dy}{dt};$$

$$\int_{y=y_{incial}}^{y=y} dy=\int_{t=0}^{t=t}\left[-g\cdot t-\frac{C_L}{C_D}\cdot\left[\frac{1}{C_D\frac{1}{2}\frac{\rho\cdot S\cdot t}{m}+\frac{1}{V_{x_{inicial}}}}-V_{x_{inicial}}\right]\right]dt$$

$$Y-Y_{inicial}=-g\cdot\frac{t^2}{2}+\frac{C_L}{C_D}V_{x_{inicial}}\cdot t-\frac{C_L}{C_D}\frac{1}{C_D\frac{1}{2}\frac{\rho\cdot S}{m}}\cdot\ln\left[C_D\frac{1}{2}\frac{\rho\cdot S\cdot t}{m}+\frac{1}{V_{x_{inicial}}}\right]_{t=0}^{t=t}$$

$$Y-Y_{inicial}=-g\cdot\frac{t^2}{2}+\frac{C_L}{C_D}V_{x_{inicial}}\cdot t-\frac{C_L}{C_D}\frac{1}{C_D\frac{1}{2}\frac{\rho\cdot S}{m}}\cdot\ln\left[\frac{C_D\frac{1}{2}\frac{\rho\cdot S\cdot t}{m}+\frac{1}{V_{x_{inicial}}}}{\frac{1}{V_{x_{inicial}}}}\right] \qquad (B)$$

Esta ecuación caracteriza la posición vertical de la pelota en función del tiempo.

El proceso a seguir para obtener la información deseada es: de la ecuación (A), para la distancia X entre la máquina y el tenista se obtiene el tiempo necesario para que la pelota recorra dicha distancia. Este tiempo debe ser sustituido en la ecuación (B) y se obtendrá como resultado la altura final a la que se encontrará la pelota cuando ésta llegue al tenista.

Cabe remarcar, no obstante, que el proceso de resolución seguido no es estrictamente correcto, puesto que no se han utilizado todos los términos involucrados en la segunda ecuación de Newton en las direcciones X e Y.

Un proceso más correcto sería si se utilizase el procedimiento descrito para determinar la posición Y, el tiempo y las velocidades de la pelota V_{x1}, V_{y1}, cuando se ha recorrido una distancia pequeña, ΔX (en el límite sería una distancia infinitesimal), respecto a la posición de la máquina. No obstante, se supone que en todo momento la velocidad de giro de la pelota sobre sí misma se mantiene.

Así, cuando la pelota haya recorrido la distancia ΔX, se podrán determinar los nuevos coeficientes de arrastre y sustentación entrando con el valor de: $\frac{U}{V_{x1}}$ en la gráfica inicial, y se obtendrán C_{Ly1}, C_{Dx1}.

Por otro lado, gracias a la relación $\frac{U}{V_{y1}}$, se puede determinar la relación C_{Lx1}, C_{Dy1}.

Gracias al conocimiento de estos cuatro coeficientes, se pueden utilizar las ecuaciones del movimiento al completo:

$$-L_x - D_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt};$$

$$L_y - D_y - mg = m\frac{dV_y}{dt};$$

y se obtiene:

$$-C_{Lx}\frac{1}{2}\rho\, V_{y1}^2 S - C_{Dx}\frac{1}{2}\rho\, V_{x1}^2 S = m\frac{dV_X}{dt} \approx m\frac{V_{x2} - V_{x1}}{\Delta t}$$

$$+C_{Ly}\frac{1}{2}\rho\, V_{x1}^2 S - C_{Dy}\frac{1}{2}\rho\, V_{y1}^2 S - mg = m\frac{dV_y}{dt} \approx m\frac{V_{y2} - V_{y1}}{\Delta t}$$

De la resolución de estas ecuaciones, se obtiene: V_{x2}, V_{y2}, para el segundo diferencial de tiempo, y dan paso a $\frac{U}{V_{x2}}$, $\frac{U}{V_{y2}}$, dando lugar a unos coeficientes C_{Ly2}, C_{Dx2}, C_{Lx2}, C_{Dy2}; sustituyendo los valores de los nuevos coeficientes y las velocidades en las ecuaciones análogas a las dos precedentes se obtendrían las características en el diferencial de posición siguiente. V_{x3}, V_{y3}. El proceso seguiría de manera homóloga.

Problema 92

Enunciado

En los procesos de aterrizaje y despege de aeronaves, se producen vórtices que se generan originariamente bajo las alas de dichas aeronaves. Dichos vórtices interaccionan con el suelo creando campos de presiones y velocidades que, de hecho, perturban el despegue y/o aterrizaje de aeronaves más pequeñas. En este problema, se pide determinar inicialmente la ecuación de Bernoulli para flujo potencial; posteriormente, definir el concepto de vorticidad y flujo de vorticidad, y finalmente se pide determinar, utilizando la teoría potencial, el colectivo de ecuaciones que, para el caso de tener dos vórtices paralelos y cercanos al suelo, definan el campo de velocidades y presiones en cualquier punto del vórtice bidimensional y del suelo. Partiendo de las expresiones genéricas halladas, se requiere asimismo determinar las expresiones particulares que caracterizan el campo de presiones y velocidades sobre el suelo.

Resolución

1 Determinación de la ecuación de Bernoulli para flujo potencial

Distribución de presiones causada por un flujo vorticular sobre una superficie plana paralela al eje del vórtice.

La distribución de presiones a lo largo del eje x, puede ser determinada utilizando la ecuación de Bernoulli para flujo potencial, la cual puede obtenerse partiendo de la ecuación de Navier-Stokes. Dicha ecuación para fluido incompresible, toma la forma:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}\right)=-\nabla P+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{V} \tag{1}$$

Recordando las relaciones vectoriales:

$$\vec{V}\ \text{x}\ (\nabla\ \text{x}\ \vec{V})=\vec{V}\ \text{x}\ \text{rot}\vec{V}=\text{grad}\frac{V^2}{2}-\vec{V}\ \ \text{grad}\vec{V}=\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-(\vec{V}\nabla)\vec{V} \tag{2}$$

$$\text{rot}\ \ \text{rot}\vec{V}=\text{grad}\ \ \text{div}\vec{V}-\nabla^2\vec{V} \tag{3}$$

Sustituyendo las ecuaciones 2 y 3 en 1, se obtiene:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\vec{V}\ \ \text{x}\ \ \text{rot}\vec{V}\right)=-\nabla P+\rho\vec{g}+\mu\left[\text{grad}\ \ \text{div}\ \ \vec{V}-\text{rot}\ \ \text{rot}\vec{V}\right] \tag{4}$$

Asumiendo el flujo como potencial, se ha de cumplir , $\text{rot}\vec{V}=0$, de donde:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)\right)=-\nabla P+\rho\vec{g}+\mu\left[\text{grad}\ \ \text{div}\ \ \vec{V}\right] \tag{5}$$

Por otro lado, para flujo incompresible, se tiene que $\nabla\vec{V}=0$, obteniendo:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)\right)=-\nabla P+\rho\vec{g} \tag{6}$$

dividiendo por la densidad:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left[\left(\frac{V^2}{2}\right)+\left(\frac{P}{\rho}\right)\right]=\vec{g} \tag{7}$$

De acuerdo con la teoría potencial, , $\text{rot}\vec{V}=0\equiv\vec{V}=\nabla\phi$, siendo ϕ el potencial de velocidades, de donde:

$$\frac{\partial\nabla\phi}{\partial t}+\nabla\left[\left(\frac{V^2}{2}\right)+\left(\frac{P}{\rho}\right)\right]=\vec{g} \tag{8}$$

Esta ecuación puede ser asimismo presentada como:

$$\nabla\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left(\frac{V^2}{2}\right)+\left(\frac{P}{\rho}\right)\right]=\vec{g} \tag{9}$$

Las fuerzas gravitacionales pueden expresarse como $\vec{g}=-\nabla U=-\nabla(gh)$, siendo h, la posición de un punto genérico *versus* un plano establecido, de donde:

$$\nabla\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left(\frac{V_2}{2}\right)+\left(\frac{P}{\rho}\right)+(g\quad h)\right]=0 \tag{10}$$

La integración de esta ecuación tiene como resultado:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left(\frac{V^2}{2}\right)+\left(\frac{P}{\rho}\right)+(g\quad h)=\text{cte.} \tag{11}$$

La ecuación (11) puede también expresarse como:

$$\frac{\partial(\phi_2-\phi_1)}{\partial t}+\left(\frac{V_2^2-V_1^2}{2}\right)+\left(\frac{P_2-P_1}{\rho}\right)+g(h_2-h_1)=0 \tag{12}$$

Para el caso en estudio, las fuerzas gravitacionales juegan un papel insignificante, con lo cual:

$$\frac{\partial(\phi_2-\phi_1)}{\partial t}+\left(\frac{V_2^2-V_1^2}{2}\right)+\left(\frac{P_2-P_1}{\rho}\right)=0 \tag{13}$$

ecuación que también puede darse como:

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left(\rho\frac{V^2}{2}\right)+P=P_0 \tag{14}$$

donde P_0 representa la presión total en un punto genérico.

Las ecuaciones 11-14 reciben el nombre de ecuación de Bernoulli para flujo potencial y evalúan la energía existente en un punto genérico en comparación con la energía asociada al fluido en otro punto conocido. Por tanto, esta ecuación ha de ser aplicada entre dos puntos situados en una misma línea de corriente. Si uno de estos dos puntos esta situado sobre una superficie horizontal, se tiene:

$$\rho\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{wall}+\left(\rho\frac{V_{wall}^2}{2}\right)+P_{(x)}=P_0 \tag{15}$$

Con el fin de determinar la presión a lo largo de la placa plana, $P_{(X)}$, será necesario hallar la velocidad V_{wall}, así como la variación temporal del potencial de velocidades $\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{wall}$ sobre la superficie horizontal.

2 Definición de vorticidad y flujo de vorticidad

La ecuación de Navier-stokes para fluido incompresible, dada como ecuación (1), puede ser extendida en dirección x y toma la forma:

$$\rho\left(\frac{\partial V_X}{\partial t}+V_X\frac{\partial V_X}{\partial X}+V_Y\frac{\partial V_X}{\partial Y}+V_Z\frac{\partial V_X}{\partial Z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial X}+\rho\, g_X+\mu\left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 V_X}{\partial Z^2}\right) \quad (16)$$

La ecuación de continuidad para fluido incompresible se representa:

$$\nabla\vec{V}=0=\frac{\partial V_X}{\partial X}+\frac{\partial V_Y}{\partial Y}+\frac{\partial V_Z}{\partial Z} \quad (17)$$

Para el presente estudio, en flujo bidimensional, dado que se quiere evaluar la velocidad del fluido sobre una placa plana, se puede asumir: $V_z=0$; $V_Y=0$; $V_X\neq 0$

con lo que la ecuación de continuidad tomará la forma: $\frac{\partial V_X}{\partial X}=0$

Así, la ecuación de Navier-Stokes a lo largo del eje x tomará la forma:

$$0=-\left.\frac{\partial P}{\partial X}\right|_{wall}+\rho\;\; g_X+\mu\left.\left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2}\right)\right|_{wall} \quad (18)$$

Considerando que las fuerzas gravitacionales son muy poco relevantes en este estudio, se tiene:

$$0=-\left.\frac{\partial P}{\partial X}\right|_{wall}+\mu\left.\left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2}\right)\right|_{wall} \quad (19)$$

El subíndice *wall* clarifica que esta ecuación es aplicable a una placa plana situada a lo largo del eje X. Véase que se han considerado las condiciones de flujo deslizante sobre la placa plana.

Por otro lado, la vorticidad del fluido $\vec{\varepsilon}=\mathrm{rot}\vec{V}$ se puede dar en tres dimensiones como:

$$\nabla \mathrm{x}\,\vec{V}=\begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ V_X & V_Y & V_Z \end{bmatrix}=\left(\frac{\partial V_Z}{\partial Y}-\frac{\partial V_Y}{\partial Z}\right)\hat{i}\;+\;\left(\frac{\partial V_X}{\partial Z}-\frac{\partial V_Z}{\partial X}\right)\hat{j}\;+\;\left(\frac{\partial V_Y}{\partial X}-\frac{\partial V_X}{\partial Y}\right)\hat{k} \quad (20)$$

Considerando las mismas condiciones de contorno que las utilizadas hasta el momento, $V_z=0$, $V_Y=0$, $V_X\neq 0$, la ecuación (20) para la dirección $\hat{k}$, tomara la forma:

$$\varepsilon_Z=\left(-\frac{\partial V_X}{\partial Y}\right)\hat{k} \quad (21)$$

Combinando las ecuaciones (19) y (21), resulta:

$$0 = -\left.\frac{\partial P}{\partial X}\right|_{wall} - \mu \left.\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Y}\right)\right|_{wall} \tag{22}$$

ecuación que relaciona la variación de presión a lo largo de la placa horizontal con la ratio de vorticidad a lo largo de un eje situado perpendicularmente a la placa. Algunos autores definen el concepto de flujo de vorticidad como ε_f , de donde:

$$\varepsilon_f = \left.\frac{\partial P}{\partial X}\right|_{wall} = -\mu \left.\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Y}\right)\right|_{wall} \tag{23}$$

La ecuación (23) puede ser utilizada para graficar el flujo de vorticidad a lo largo de la placa plana horizontal.

3 Distribución de velocidades y variación temporal del potencial de velocidades en un punto genérico del plano del fluido y sobre una superficie plana

El campo de fluido bajo estudio, consiste en dos vórtices localizados sobre una superficie plana. La posición del centro de cada vórtice, esta dada, para un sistema de coordenadas cartesiano, como: $Z_0 = (X_0, Y_0)$; $Z_1 = (-X_0, Y_0)$; ver figura 95.1. En dicha figura 95.1, se puede ver asimismo, la posición de los dos vórtices imagen, cuyos centros están definidos por las coordenadas: $Z_0^* = (X_0, -Y_0)$; $Z_1^* = (-X_0, -Y_0)$:

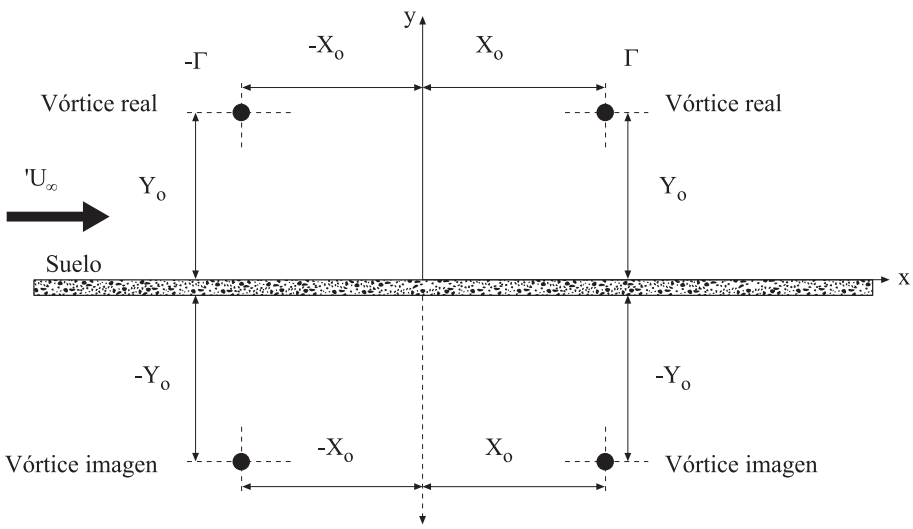


Fig. 95.1 Representación esquemática de los dos vórtices reales y los dos vórtices imagen

Para determinar la velocidad del fluido sobre la placa (suelo), V_{wall}, se va a utilizar la teoría potencial. Esta teoría se va a aplicar inicialmente a los dos vórtices (real e ima-

gen), situados a la derecha de la figura 95.1, y posteriormente a los otros dos vórtices localizados en la parte izquierda de dicha figura.

Consideremos, inicialmente, los dos vórtices (real e imagen) situados en las posiciones: $Z_0 = (X_0, Y_0)$; y su imagen $Z_0^* = (X_0, -Y_0)$.

La función potencial para este par de vórtices se define como:

$$f(Z) = U_\infty \quad Z + \frac{i \quad \Gamma}{2 \quad \pi} \quad \ln\left(\frac{Z - Z_0^*}{Z - Z_0}\right) \tag{24}$$

donde Γ es la circulación asociada a cada vórtice.

La relación entre la función potencial compleja, el potencial de velocidades ϕ, y la función de corriente ψ se define como $f(Z) = \phi + i\psi$ (25)

Así, para los dos vórtices situados en la parte derecha del plano, la función potencial compleja toma la forma:

$$\begin{aligned} f(Z) &= U_\infty \quad Z + \frac{i \quad \Gamma}{2 \quad \pi} \quad \ln\left(\frac{(X + iY) - (X_0 - iY_0)}{(X + iY) - (X_0 + iY_0)}\right) \\ &= U_\infty (X + iY) + \frac{i \quad \Gamma}{2 \quad \pi} \ln\left(\frac{(X - X_0) + i(Y + Y_0)}{(X - X_0) + i(Y - Y_0)}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

Esta ecuación puede ser dada como:

$$\begin{aligned} f(Z) = U_\infty (X + iY) &+ \frac{i \quad \Gamma}{2 \quad \pi} \ln\left((X - X_0) + i(Y + Y_0)\right) \\ &- \frac{i \quad \Gamma}{2 \quad \pi} \ln\left((X - X_0) + i(Y - Y_0)\right) \end{aligned} \tag{27}$$

Recuérdese que el logaritmo de una función compleja puede ser representado como:

$$\ln(Z) = \ln|Z| + i\theta \tag{28}$$

donde: $|Z| = \left(Z \quad \overline{Z}\right)^{1/2} = \left(X^2 + Y^2\right)^{1/2}$ representa la función compleja y θ es el ángulo de un punto genérico *versus* el sistema de coordenadas cartesiano elegido.

La ecuación (27) puede ser representada como:

$$\begin{aligned} f(Z) = U_\infty (X + iY) &+ \frac{i \quad \Gamma}{2 \quad \pi}\left[\ln|(X - X_0) + i(Y + Y_0| + i \quad \text{arctg}\left(\frac{Y + Y_0}{X - X_0}\right)\right] \\ &- \frac{i \quad \Gamma}{2 \quad \pi}\left[\ln|(X - X_0) + i(Y - Y_0)| + i \quad \text{arctg}\left(\frac{Y - Y_0}{X - X_0}\right)\right] \end{aligned} \tag{29}$$

Una vez los términos logarítmicos en la ecuación (29) han sido multiplicados por su conjugado, y las partes real e imaginaria han sido separadas, se obtiene:

$$\phi(x,y) = U_\infty \quad X - \frac{\Gamma}{2\ \pi}\text{arctg}\left(\frac{Y+Y_0}{X-X_0}\right) + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\text{arctg}\left(\frac{Y-Y_0}{X-X_0}\right) \tag{30}$$

$$\psi(x,y) = U_\infty \quad Y + \frac{\Gamma}{4\ \pi}\left[\ln\left[(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2\right] - \ln\left[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2\right]\right] \tag{31}$$

De acuerdo con la teoría potencial, la relación entre la velocidad potencial ó (potencial de velocidades) ϕ, la función de corriente ψ y las velocidades del fluido V_X y V_Y se define:

$$V_X = U = \frac{\partial\phi}{\partial X} = \frac{\partial\psi}{\partial Y}; \qquad V_Y = V = \frac{\partial\phi}{\partial Y} = -\frac{\partial\psi}{\partial X}; \tag{32}$$

con lo cual la distribución de velocidades en la dirección X e Y queda definida como:

$$U = V_{X_R} = \frac{\partial\psi}{\partial Y} = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\left[\frac{(Y+Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2} - \frac{(Y-Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2}\right] \tag{33}$$

$$V = V_{Y_R} = -\frac{\partial\psi}{\partial X} = -\frac{\Gamma}{2\ \pi}\left[\frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2} - \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2}\right] \tag{34}$$

Las ecuaciones (33) y (34) proporcionan la velocidad del fluido V_X e V_Y en cualquier punto del campo del fluido, cuando son considerados únicamente los dos vórtices de la derecha.

Para determinar las velocidades del fluido sobre la superficie sólida, V_X e V_Y, será únicamente necesario considerar Y = 0 en las ecuaciones (33) y (34). El resultado es:

$$V_{X_R} = U_\infty + \frac{\Gamma}{\pi}\left[\frac{Y_0}{(X-X_0)^2+Y_0^{\ 2}}\right] \tag{35}$$

$$V_{Y_R} = 0 \tag{36}$$

Procediendo del mismo modo para los dos vórtices situados en la parte izquierda de la figura 95.1, cuyas posiciones coordenadas de sus centros son: $Z_1 = (-X_0; Y_0)$, $Z_1^* = (-X_0; -Y_0)$, la función potencial compleja toma la forma: (las coordenadas de estos dos nuevos puntos han sido ya sustituidas en la ecuación).

$$f(Z) = \frac{i\ \Gamma}{2\ \pi}\ \ln\left(\frac{(X+iY)-(-X_0-iY_0)}{(X+iY)-(-X_0+iY_0)}\right) = \frac{i\ \Gamma}{2\ \pi}\ln\left(\frac{(X+X_0)+i(Y+Y_0)}{(X+X_0)+i(Y-Y_0)}\right) \tag{37}$$

(Obsérvese que la velocidad no perturbada U_∞, ya ha sido considerada en la función compleja que definía los dos vórtices de la derecha y, dado que la teoría potencial es una teoría lineal, dicha velocidad no ha de ser ahora introducida de nuevo).

Véase que la circulación presentada en la ecuación (37) ha de tener un signo diferente al de la circulación utilizada en la ecuación (26), con lo que el signo de la circulación de la ecuación (37) ha de ser negativo.

La ecuación (37) puede expresarse como:

$$f(Z) = \frac{i\ \Gamma}{2\ \pi}\ln\left((X+X_0)+i(Y+Y_0)\right) - \frac{i\ \Gamma}{2\ \pi}\ln\left((X+X_0)+i(Y-Y_0)\right) \qquad (38)$$

Considerando la forma compleja de los términos logarítmicos, se tiene:

$$\begin{aligned} f(Z) = {} & \frac{i\ \Gamma}{2\ \pi}\left[\ln\left|(X+X_0)+i(Y+Y_0)\right| + i\ \ \text{arctg}\left(\frac{Y+Y_0}{X+X_0}\right)\right] \\ & -\frac{i\ \Gamma}{2\ \pi}\left[\ln\left|(X+X_0)+i(Y-Y_0)\right| + i\ \ \text{arctg}\left(\frac{Y-Y_0}{X+X_0}\right)\right] \end{aligned} \qquad (39)$$

La solución de esta ecuación da lugar a: (Obsérvese que el valor de la circulación es aún considerado como positivo, cuando en realidad es negativo).

$$\phi(x,y) = -\frac{\Gamma}{2\ \pi}\text{arctg}\left(\frac{Y+Y_0}{X+X_0}\right) + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\text{arctg}\left(\frac{Y-Y_0}{X+X_0}\right) \qquad (40)$$

$$\psi(x,y) = \frac{\Gamma}{4\ \pi}\left[\ln\left[(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2\right] - \ln\left[(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2\right]\right] \qquad (41)$$

Recordando lo definido en la ecuación (32), las velocidades V_X e V_Y resultan:

$$U = V_{X_L} = \frac{\partial\phi}{\partial X} = \frac{\partial\psi}{\partial Y} = \frac{\Gamma}{2\ \pi}\left[\frac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2} - \frac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2}\right] \qquad (42)$$

$$V = V_{Y_L} = \frac{\partial\phi}{\partial Y} = -\frac{\partial\psi}{\partial X} = -\frac{\Gamma}{2\ \pi}\left[\frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2} - \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2}\right] \qquad (43)$$

Es necesario recordar que el valor de la circulación en las ecuaciones (42) y (43) es, en realidad, negativo.

La velocidad del fluido V_X e V_Y sobre la superficie plana, debido a los dos vórtices (real e imaginario) de la izquierda, se determina considerando Y = 0 en las ecuaciones (42) y (43). El resultado es: (obsérvese que ahora se ha incluido el signo real de la circulación).

$$U = V_{X_L} = \frac{-\ \Gamma}{\pi}\left[\frac{Y_0}{(X+X_0)^2+Y_0^{\,2}}\right] \qquad (44)$$

$$V = V_{Y_L} = 0 \tag{45}$$

Con el fin de calcular la velocidad total sobre la superficie estática, es necesario considerar el efecto del conjunto total de vórtices sobre la superficie plana. Así: $V_{wall} = V_{X_T} = V_{X_R} + V_{X_L}$, con lo que:

$$V_{wall} = V_{X_T} = U_\infty + \frac{\Gamma}{\pi}\left[\frac{Y_0}{(X-X_0)^2 + Y_0^2}\right] + \left[\frac{-\Gamma}{\pi}\frac{Y_0}{\left[(X+X_0)^2 + Y_0^2\right]}\right] \tag{46}$$

ecuación que se puede dar como:

$$V_{wall} = V_{X_T} = U_\infty + \frac{\Gamma}{\pi}\left[\frac{4X\ X_0\ Y_0}{(X^2 + X_0^2 + Y_0^2)^2 - 4X^2X_0^2}\right] = U_\infty + \frac{4\Gamma}{\pi}\left[\frac{X\ X_0\ Y_0}{B}\right] \tag{47}$$

Véase que la ecuación (47) da la velocidad del fluido a lo largo del eje X y encima de la superficie plana. Las ecuaciones genéricas que dan la distribución de velocidades V_X e V_Y en cualquier punto del plano X,Y, se obtienen de la combinación de las ecuaciones genéricas (33) y (42) para V_X y (34) y (43) para V_Y.

Cálculo de las ecuaciones de velocidad mediante la utilización del sistema total de vórtices en una única ecuación.

Es interesante remarcar que el procedimiento utilizado para desarrollar la ecuación (46), puede acortarse mediante el cálculo del efecto causado por los cuatro vórtices en una sola ecuación. La función potencial compleja que considera el efecto de los cuatro vórtices toma la forma:

$$f(Z) = U_\infty\ \ Z + \frac{i\ \ \Gamma}{2\ \ \pi}\ \ \ln\left(\frac{Z - Z_0^*}{Z - Z_0}\right) - \frac{i\ \ \Gamma}{2\ \ \pi}\ln\left(\frac{Z - Z_1^*}{Z - Z_1}\right) \tag{48}$$

El valor negativo que se ha dado al segundo de los términos es para considerar el valor negativo de la circulación.

Cuando se sustituyen las coordenadas de los vórtices en la ecuación (48), se obtiene:

$$\begin{aligned} f(Z) = U_\infty\ \ Z + \frac{i\ \ \Gamma}{2\ \ \pi}\ \ \ln\left(\frac{(X+iY)-(X_0-iY_0)}{(X+iY)-(X_0+iY_0)}\right) \\ -\frac{i\ \ \Gamma}{2\ \ \pi}\ln\left(\frac{(X+iY)-(-X-iY_0)}{(X+iY)-(-X_0+iY_0)}\right) \end{aligned} \tag{49}$$

Esta ecuación puede asimismo presentarse como:

$$f(Z) = U_\infty (X + iY) + \frac{i}{2}\frac{\Gamma}{\pi}\ln\left(\frac{(X - X_0) + i(Y + Y_0)}{(X - X_0) + i(Y - Y_0)}\right) - \frac{i}{2}\frac{\Gamma}{\pi}\ln\left(\frac{(X + X_0) + i(Y + Y_0)}{(X + X_0) + i(Y - Y_0)}\right) \tag{50}$$

Extendiendo los términos logarítmicos, se tiene:

$$f(Z) = U_\infty (X + iY) + \frac{i}{2}\frac{\Gamma}{\pi}\left[\ln\left((X - X_0) + i(Y + Y_0)\right) - \ln\left((X - X_0) + i(Y - Y_0)\right)\right] - \frac{i}{2}\frac{\Gamma}{\pi}\left[\ln\left((X + X_0) + i(Y + Y_0)\right) - \ln\left((X + X_0) + i(Y - Y_0)\right)\right] \tag{51}$$

Recordando el concepto de logaritmo de una función compleja, se tiene:

$$f(Z) = U_\infty (X + iY) + \frac{i}{2}\frac{\Gamma}{\pi}\left[\begin{array}{l}\ln\left|(X - X_0) + i(Y + Y_0)\right| + i \ \ \text{arctg}\left(\dfrac{Y + Y_0}{X - X_0}\right) \\ -\left[\ln\left|(X - X_0) + i(Y - Y_0)\right| + i \ \ \text{arctg}\left(\dfrac{Y - Y_0}{X - X_0}\right)\right]\end{array}\right] - \frac{i}{2}\frac{\Gamma}{\pi}\left[\begin{array}{l}\ln\left|(X + X_0) + i(Y + Y_0)\right| + i \ \ \text{arctg}\left(\dfrac{Y + Y_0}{X + X_0}\right) \\ -\left[\ln\left|(X + X_0) + i(Y - Y_0)\right| + i \ \ \text{arctg}\left(\dfrac{Y - Y_0}{X + X_0}\right)\right]\end{array}\right] \tag{52}$$

Extrayendo de la ecuación (52) los términos reales e imaginarios, se tiene:

$$\phi(x, y) = U_\infty \ \ X - \frac{\Gamma}{2\pi}\text{arctg}\left(\frac{Y + Y_0}{X - X_0}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\text{arctg}\left(\frac{Y - Y_0}{X - X_0}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\text{arctg}\left(\frac{Y + Y_0}{X + X_0}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\text{arctg}\left(\frac{Y - Y_0}{X + X_0}\right) \tag{53}$$

$$\psi(x, y) = U_\infty Y + \frac{\Gamma}{4\pi}\left[\begin{array}{l}\ln\left[(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2\right] - \ln\left[(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2\right] \\ +\ln\left[(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2\right] - \ln\left[(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2\right]\end{array}\right] \tag{54}$$

Recordando la relación existente para flujo potencial entre las funciones potencial y de corriente con las velocidades del fluido en la dirección X e Y, ver ecuaciones (32), se obtiene: (obsérvese que se ha considerado el signo real de la circulación para cada uno de los vórtices).

$$V_{X_T} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\left[\frac{(Y+Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2} - \frac{(Y-Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2} + \frac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2} - \frac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2}\right] \quad (55)$$

$$V = V_{Y_T} = -\frac{\partial \psi}{\partial X} = -\frac{\Gamma}{2\ \pi}\left[\frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2} - \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2} + \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2} - \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2}\right] \quad (56)$$

Las ecuaciones (55) y (56) son capaces de dar la velocidad del fluido en las direcciones X e Y, y, para cualquier punto del campo fluido bidimensional, el efecto de todos los vórtices existentes es asimismo considerado. Véase que estas dos ecuaciones podrían ser ampliadas para un número genérico de vórtices.

Dado que lo que se requería en el problema es la velocidad del fluido sobre la superficie plana, para obtener el resultado requerido, es únicamente necesario sustituir el valor de Y = 0 en las ecuaciones (55) y (56), obteniendo:

$$V_{wall} = V_{X_T} = U_\infty + \frac{4\Gamma}{\pi}\left[\frac{X\ \ X_0\ \ Y_0}{B}\right] \quad (57)$$

$$V = V_{Y_T} = 0 \quad (58)$$

Obsérvese que la ecuación (57) es la misma que la ecuación (47) y que la ecuación (58) produce el mismo resultado que las ecuaciones (36) y (48), determinadas mediante el procedimiento precedente.

Calculo de la variación temporal de la función potencial de velocidades ϕ, la denominada velocidad potencial

Con el fin de considerar todos los términos involucrados en la ecuación (15), es necesario determinar la velocidad potencial $\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{wall}$. Este termino, considera la variación temporal de la posición de los vórtices, con lo que no es necesario que se considere cuando se quieren estudiar vórtices estacionarios.

Matemáticamente, la velocidad temporal del potencial de velocidades, para un flujo vorticular dado, se puede representar como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial X_0}\ \frac{\partial X_0}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial Y_0}\frac{\partial Y_0}{\partial t} \quad (59)$$

Para el presente caso, esta ecuación ha de ser calculada sobre la placa plana, con lo que se puede establecer:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{wall} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial X_0}\right|_{wall} \frac{\partial X_0}{\partial t} + \left.\frac{\partial\phi}{\partial Y_0}\right|_{wall} \frac{\partial Y_0}{\partial t} \tag{60}$$

Es necesario tener presente que los parámetros X_0 e Y_0 representan la posición del centro del vórtice real. (Se ha elegido el vórtice de la derecha, con el fin de determinar su velocidad de desplazamiento).

La ecuación (60) puede ser aplicada a cada uno de los dos vórtices reales, sumando luego los resultados obtenidos, ecuación (63), o bien puede ser aplicada directamente al conjunto de vórtices, siempre que se determine previamente la función potencial de velocidades de dicho conjunto de vórtices, para este caso, se aplicara directamente la ecuación (59) o la (60).

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{(R)} + \left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{(L)} \tag{61}$$

En cualquier caso, debe recordarse que cada término lleva su circulación asociada.

Calculo de la velocidad del vórtice

Los términos $\frac{\partial X_0}{\partial t}$ y $\frac{\partial Y_0}{\partial t}$ de la ecuación (59) representan la velocidad del vórtice real de la derecha con respecto al sistema de coordenadas central X, Y. Para determinar dichos términos, será necesario considerar el efecto que los otros tres vórtices causan sobre el vórtice elegido. Para realizar dicha operación es necesario determinar la denominada *función potencial reducida*, que se define como:

$$\phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty \left[Z + \frac{i}{2}\frac{\Gamma}{\pi} \ln(Z - Z_0^*) - \frac{i}{2}\frac{\Gamma}{\pi} \ln\left(\frac{Z - Z_1^*}{Z - Z_1}\right)\right] \tag{62}$$

siendo: $Z_0^* = (X_0 - iY_0)$; $Z_1 = (-X_0 + iY_0)$; $Z_1^* = (-X_0 - iY_0)$; $Z = (X + iY)$

Sustituyendo las diferentes coordenadas de los tres vórtices en la ecuación (62), se obtiene:

$$\begin{aligned}\phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty \left[(X + iY) + \frac{i}{2}\frac{\Gamma}{\pi} \ln((X + iY) - (X_0 - iY_0))\right. \\ \left. - \frac{i}{2}\frac{\Gamma}{\pi} \ln\left(\frac{(X + iY) - (-X_0 - iY_0)}{(X + iY) - (-X_0 + iY_0)}\right)\right]\end{aligned} \tag{63}$$

$$\phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty \quad (X + iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \quad \ln((X - X_0) + i(Y + Y_0)) \\ - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \quad \ln\left(\frac{(X + X_0) + i(Y + Y_0)}{(X + X_0) + i(Y - Y_0)}\right) \tag{64}$$

$$\phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty \quad X + iU_\infty Y + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \quad \ln((X - X_0) + i(Y + Y_0)) \\ - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \quad \ln\left((X + X_0) + i(Y + Y_0)\right) + \frac{i}{2\pi} \frac{\Gamma}{} \ln((X + X_0) + i(Y - Y_0)) \tag{65}$$

$$\phi^* + i\psi^* = U_\infty \quad X + iU_\infty Y + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln\left|(X - X_0) + i(Y + Y_0)\right| + i \quad \text{arctg}\left(\frac{(Y + Y_0)}{X - X_0}\right)\right] \\ - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \quad \left[\ln\left|(X + X_0) + i(Y + Y_0)\right| + i \quad \text{arctg}\left(\frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)}\right)\right] \\ + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln\left|(X + X_0) + i(Y - Y_0)\right| + i \quad \text{arctg}\left(\frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)}\right)\right] \tag{66}$$

con lo que:

$$\phi^* = U_\infty \quad X - \frac{\Gamma}{2} \frac{}{\pi} \left[\text{arctg}\left(\frac{(Y + Y_0)}{(X - X_0)}\right)\right] \quad + \frac{\Gamma}{2} \frac{}{\pi} \quad \left[\text{arctg}\left(\frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)}\right)\right] + \\ \frac{\Gamma}{2} \frac{}{\pi} \left[\text{arctg}\left(\frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)}\right)\right] \tag{67}$$

$$\psi^* = U_\infty Y + \frac{\Gamma}{4} \frac{}{\pi} \quad \ln((X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2) \quad - \frac{\Gamma}{4} \frac{}{\pi} \ln\left((X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2\right) \\ + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln((X + X_0)^2 + i(Y - Y_0)^2) \tag{68}$$

La velocidad del vórtice localizado en el punto $(X_0 ; Y_0)$ se define como:

$$U_0 = \frac{\partial X_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial X}\bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = \frac{\partial \psi^*}{\partial Y}\bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} \tag{69}$$

$$V_0 = \frac{\partial Y_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial Y}\bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = -\frac{\partial \psi^*}{\partial X}\bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} \tag{70}$$

Derivando las funciones potencial y de corriente, ecuaciones (67) y (68), se obtiene:

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial X}=\frac{\partial\psi^*}{\partial Y}=U_\infty+\frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(Y+Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2}-\frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2}+\frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2} \tag{71}$$

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial Y}=-\frac{\partial\psi^*}{\partial X}=-\frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2}+\frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2}-\frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2} \tag{72}$$

sustituyendo $X = X_0$ y $Y = Y_0$ en las ecuaciones (71) y (72), se obtiene:

$$U_0=\frac{\partial X_0}{\partial t}=\left.\frac{\partial\phi^*}{\partial X}\right|_{\substack{X=X_0\\Y=Y_0}}=\left.\frac{\partial\psi^*}{\partial Y}\right|_{\substack{X=X_0\\Y=Y_0}}=U_\infty+\frac{\Gamma}{4\ \pi\ Y_0}-\frac{\Gamma}{4\ \pi}\left(\frac{Y_0}{X_0^2+Y_0^2}\right)=$$
$$=U_\infty+\frac{\Gamma}{4\ \pi}\left[\frac{X_0^2}{Y_0\left(X_0^2+Y_0^2\right)}\right] \tag{73}$$

$$V_0=\frac{\partial Y_0}{\partial t}=\left.\frac{\partial\phi^*}{\partial Y}\right|_{\substack{X=X_0\\Y=Y_0}}=-\left.\frac{\partial\psi^*}{\partial X}\right|_{\substack{X=X_0\\Y=Y_0}}=\frac{\Gamma}{4\ \pi}\left(\frac{X_0}{X_0^2+Y_0^2}\right)-\frac{\Gamma}{4\ \pi\ X_0}=$$
$$=\frac{\Gamma}{4\ \pi}\left[\frac{-Y_0^2}{X_0\left(X_0^2+Y_0^2\right)}\right] \tag{74}$$

Las ecuaciones (73) y (74) dan la velocidad del vórtice respecto a los ejes X e Y respectivamente. Recuérdese que el vórtice analizado se halla inicialmente en el punto $X = X_0$; $Y = Y_0$; y su velocidad de desplazamiento es debida al efecto que los otros tres vórtices causan sobre el elegido.

Cálculo de los términos $\frac{\partial\phi}{\partial X_0}$ ***y*** $\frac{\partial\phi}{\partial Y_0}$

Para calcular los últimos dos términos necesarios para evaluar completamente las ecuaciones (59) y (60), la función potencial ϕ, que considera el efecto de los cuatro vórtices, ha de ser calculada y posteriormente derivada con respecto a X_0 y Y_0; dicha función potencial de velocidades ha sido ya previamente determinada, y viene definida como la ecuación (53). La ecuación (54) proporcionaba, asimismo, la función de corriente ψ generada por el conjunto de los cuatro vórtices.

Derivando la ecuación (53) con respecto a X_0 y Y_0, se obtiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X_0} = -\frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(Y+Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(Y-Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\frac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2} \tag{75}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y_0} = -\frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2} \tag{76}$$

En realidad, y de acuerdo con la ecuación (60), estos dos términos (ecuaciones (75) y (76)), han de ser evaluados sobre la superficie plana que separa los vórtices reales con los imaginarios. Lo cual significa que las ecuaciones (75) y (76) han de ser evaluadas cuando Y = 0, y se obtiene:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial X_0}\right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(-Y_0)}{(X-X_0)^2+(-Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\frac{(-Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y_0)^2} \tag{77}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial X_0}\right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma}{\pi}\ \frac{(Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{\pi}\ \frac{(Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y_0)^2} \tag{78}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial X_0}\right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma\ Y_0}{\pi}\ \frac{2(X^2+X_0^2+Y_0^2)}{((X-X_0)^2+Y_0^2)\ ((X+X_0)^2+Y_0^2)} \tag{79}$$

Procediendo del mismo modo con la ecuación (76), se obtiene:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial Y_0}\right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\ \pi}\frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y_0)^2} \tag{80}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial Y_0}\right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma}{\pi}\ \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{\pi}\ \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y_0)^2} \tag{81}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial Y_0}\right|_{Y=0} = \frac{\Gamma\ X_0}{\pi}\ \frac{2(-X^2+X_0^2+Y_0^2)}{((X-X_0)^2+Y_0^2)\ ((X+X_0)^2+Y_0^2)} \tag{82}$$

Es necesario puntualizar que, al llevar a término las derivaciones precedentes, la siguiente consideración ha de ser recordada: $\frac{\partial\phi}{\partial X_0} \neq \frac{\partial\psi}{\partial Y_0}$; y $\frac{\partial\phi}{\partial Y_0} \neq -\frac{\partial\psi}{\partial X_0}$

A partir de este punto, se utilizara la siguiente relación:

$$((X-X_0)^2+Y_0^2)\ \ ((X+X_0)^2+Y_0^2)=B \tag{83}$$

Cálculo final de la ecuación (60)

Para determinar el resultado final de la ecuación (60), lo único que hace falta es sustituir los diferentes términos hallados en dicha ecuación. Dichos términos están definidos en las ecuaciones (79), (82), (73) y (74). El resultado de la sustitución es:

La ecuación (62) era: $\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{wall} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial X_0}\right|_{wall} \frac{\partial X_0}{\partial t} + \left.\frac{\partial\phi}{\partial Y_0}\right|_{wall} \frac{\partial Y_0}{\partial t}$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma\ Y_0\ 2}{\pi}\left(\frac{X^2+X_0^2+Y_0^2}{B}\right)\left[U_\infty+\frac{\Gamma}{4\ \pi\ Y_0}-\frac{\Gamma}{4\ \pi}\frac{Y_0}{(X_0^2+Y_0^2)}\right] + \frac{2\ \Gamma X_0}{\pi}\left(\frac{(-X^2+Y_0^2+X_0^2}{B}\right)\left[\frac{\Gamma}{4\ \pi}\frac{X_0}{(X_0^2+Y_0^2)}-\frac{\Gamma}{4\pi X_0}\right] \tag{84}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma\ Y_0\ 2\ U_\infty}{\pi}\left(\frac{X^2+X_0^2+Y_0^2}{B}\right) - \frac{\Gamma^2}{2\ \pi^2}\left(\frac{X^2+X_0^2+Y_0^2}{B}\right) + \frac{\Gamma^2 Y_0^2}{2\ \pi^2}\left(\frac{X^2+Y_0^2+X_0^2}{B\ (X_0^2+Y_0^2)}\right)+\frac{\Gamma^2 X_0^2}{2\ \pi^2}\left(\frac{-X^2+Y_0^2+X_0^2}{B\ (X_0^2+Y_0^2)}\right)-\frac{\Gamma^2}{2\pi^2}\left(\frac{-X^2+Y_0^2+X_0^2}{B}\right) \tag{85}$$

Reordenando la ecuación, se obtiene:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma\ Y_0\ 2\ U_\infty}{\pi}\left(\frac{X^2+X_0^2+Y_0^2}{B}\right) - \frac{\Gamma^2}{2\ \pi^2 B}\left(2(X_0^2+Y_0^2)\right) + \frac{\Gamma^2}{2\ \pi^2 B(X_0^2+Y_0^2)}\left(X^2(Y_0^2-X_0^2)+(X_0^2+Y_0^2)^2\right) \tag{86}$$

ecuación que se puede dar como:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma\ Y_0\ 2\ U_\infty}{\pi}\left(\frac{X^2+X_0^2+Y_0^2}{B}\right) + \frac{\Gamma^2}{2\ \pi^2 B(X_0^2+Y_0^2)}\left(X^2(Y_0^2-X_0^2)-(X_0^2+Y_0^2)^2\right) \tag{87}$$

ecuación que caracteriza la variación temporal de la función potencial.

Generalización de la ecuación (60), ecuación (59)

Si, en lugar de determinar el término $\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{wall}$ sobre la superficie plana, se quiere hallar el término genérico $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ en un punto cualquiera del campo fluido, término que está definido en la ecuación (59), será necesario seguir el mismo procedimiento que el utilizado para hallar el término definido en la ecuación (60).

La ecuación (59) tomaba la forma: $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \frac{\partial X_0}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \frac{\partial Y_0}{\partial t}$.

Los términos que dan la velocidad del vórtice, $\frac{\partial X_0}{\partial t}$ y $\frac{\partial Y_0}{\partial t}$, son los mismos que los hallados previamente, y están definidos en las ecuaciones (73) y (74). Pero ahora no es necesario que los términos $\frac{\partial \phi}{\partial X_0}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial Y_0}$ sean evaluados en el punto Y = 0, dado que en la ecuación (59) estos términos están definidos en forma genérica. La forma genérica de estos dos términos, fue determinada en las ecuaciones (75) y (76). Así, sustituyendo las ecuaciones (73), (74), (75) y (76) en la ecuación (59), se obtendrá la forma genérica de la variación temporal de la función potencial de velocidades, que es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(-\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y+Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y-Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2}\right) \left[U_\infty + \frac{\Gamma}{4\pi Y_0} - \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{Y_0}{X_0^2+Y_0^2}\right)\right] +$$

$$\left(\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2}\right) \left[\frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{X_0}{X_0^2+Y_0^2}\right) - \frac{\Gamma}{4\pi X_0}\right] \quad (88)$$

Distribución genérica de presiones. Caso vórtices estacionarios

La ecuación (14) es capaz de determinar la presión en cualquier punto del campo fluido, en función de la magnitud de la velocidad del fluido en dicho punto y de la varia-

ción temporal del potencial de velocidades. Para el caso de que se quieran considerar vórtices estáticos, entonces el término que caracteriza la variación temporal de la velocidad potencial se debe considerar nulo, la ecuación resultante tendrá la forma:

$$\left(\rho\frac{V^2}{2}\right)+P=P_0 \tag{89}$$

Donde:
$$V^2=V_X^2+V_Y^2 \tag{90}$$

Las ecuaciones que caracterizan las velocidades V_X e V_Y en cualquier punto del campo fluido, han sido halladas anteriormente y definidas como ecuaciones (55) y (56). Dichas expresiones tomaban la forma:

$$V_{X_T}=\frac{\partial\psi}{\partial Y}=U_\infty+\frac{\Gamma}{2\ \pi}\left[\begin{array}{l}\dfrac{(Y+Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2}-\dfrac{(Y-Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2}\\ +\dfrac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2}-\dfrac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2}\end{array}\right] \tag{55}$$

$$V_{Y_T}=V=-\frac{\partial\psi}{\partial X}=-\frac{\Gamma}{2\ \pi}\left[\begin{array}{l}\dfrac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2}-\dfrac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2}\\ +\dfrac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2}-\dfrac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2}\end{array}\right] \tag{56}$$

Con lo cual, la presión en cualquier punto del campo de fluido bidimensional se calculará sustituyendo las ecuaciones (55) y (56) en la ecuación (90) y esta en la ecuación (89). Si, además, en estas ecuaciones se le asigna a la coordenada Y , el valor Y = 0, entonces, se obtendrá la presión a lo largo del eje X situado sobre la placa plana horizontal.

Distribución genérica de presiones. Caso vórtices en movimiento (dinámicos)

La evaluación completa de la ecuación (14) implica considerar el término que caracteriza la variación temporal del potencial de velocidades, con lo que la ecuación (88) deberá ser implementada a los términos ya hallados de la ecuación (14). Dicha ecuación era:

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left(\rho\frac{V^2}{2}\right)+P=P_0 \tag{14}$$

Distribución de presiones sobre la superficie plana horizontal. Caso vórtices dinámicos.

Si se quiere evaluar la distribución de presiones sobre la placa plana y teniendo además en cuenta el posible desplazamiento de los vórtices, la ecuación a utilizar es la (15), la cual tomaba la forma:

$$\rho\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{wall}+\left(\rho\frac{V_{wall}^2}{2}\right)+P_{(x)}=P_0 \tag{15}$$

Los diferentes términos de esta ecuación, fueron ya definidos en las ecuaciones (87) y (57). Cuando estas dos ecuaciones son sustituidas en la ecuación (15), y considerando el caso particular en que $U_\infty = 0$, se obtiene:

$$P - P_0 = -\frac{\rho_0 \ \Gamma^2}{2\pi^2}\left[\left(\frac{4X \ \ X_0 \ \ Y_0}{B}\right)^2 + \frac{A}{B(X_0^2 + Y_0^2)}\right] \tag{91}$$

donde se ha definido: $A = X^2(Y_0^2 - X_0^2) - (X_0^2 + Y_0^2)^2$ (92)

La ecuación (91) caracteriza la distribución de presiones a lo largo del eje X situado sobre la placa plana horizontal (suelo) y considerando que no existe corriente de fluido no perturbada $U_\infty = 0$.

A continuación se presentan algunos resultados que se obtienen directamente de la aplicación de algunas de estas ecuaciones. Otras gráficas, y aplicaciones quedan como ejercicio para el lector

Supóngase que se tienen dos vórtices situados paralelamente sobre una superficie plana (suelo) y que el centro de dichos vórtices está situado en los puntos: $Z_0 = (X_0, Y_0) = (1, 1)$; y $Z_0^* = (-X_0, Y_0) = (-1, 1)$. Si, por ejemplo, se quiere ver cuál es el desplazamiento de dichos vórtices debido a su interacción mutua, e incluso para diferentes velocidades no perturbadas del fluido, se deberá aplicar la ecuación (91) para el caso de que $U_\infty = 0$, y la ecuación (15) para el caso de que $U_\infty \neq 0$. Tomando los valores de la circulación y la densidad del fluido como: $\Gamma = 0{,}1 \ \left(\frac{m^2}{s}\right)$; $\rho_0 = 1{,}2 \ \left(\frac{Kg}{m^3}\right)$, se obtiene:

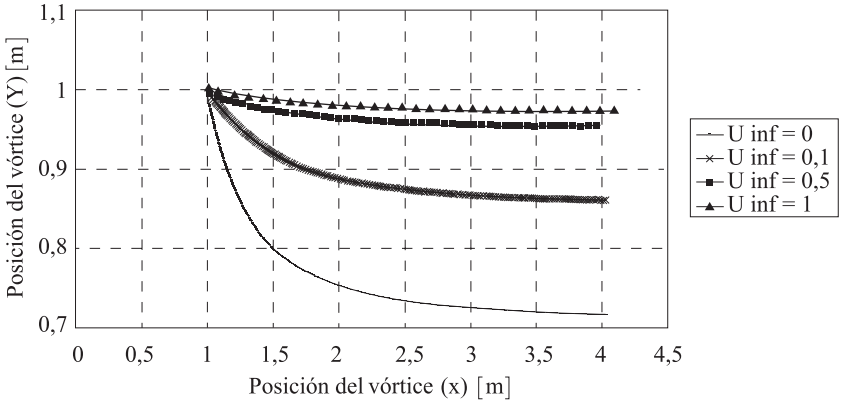


Fig. 95.2
Posición del vórtice dependiendo de la iteración con su homóogo y la velocidad no perturbada del fluido. Posición inicial del vórtice. Z0 = (X0; Y0) = (1, 1).

(Obsérvese que a medida que la velocidad no perturbada aumenta, el vórtice tiende a desplazarse en la dirección de dicha velocidad). Aunque no se muestra en la figura 95.2, a medida que la velocidad no perturbada aumenta, la velocidad de desplazamiento del vórtice también aumenta

La figura 95.3 presenta la distribución de presiones a lo largo del eje x y sobre la placa plana (suelo). Véase que la presión mínima aparece en un punto situado justamente debajo de la posición del centro del vórtice. La figura 95.4, presenta el flujo de vorticidad sobre la placa plana, caracterizado por la ecuación (23). Obsérvese el cambio del flujo de vorticidad justamente debajo de la posición del centro del vórtice.

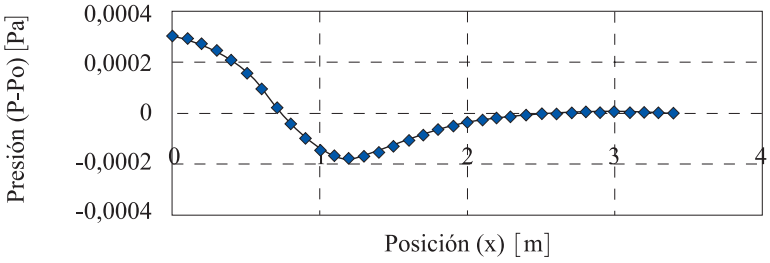


Fig. 95.3
Distribución de presiones sobre la placa plana y a lo largo del eje "x".
Ecuación (91).
Z0 = (X0, Y0) = (1, 1).
U∞ = 0

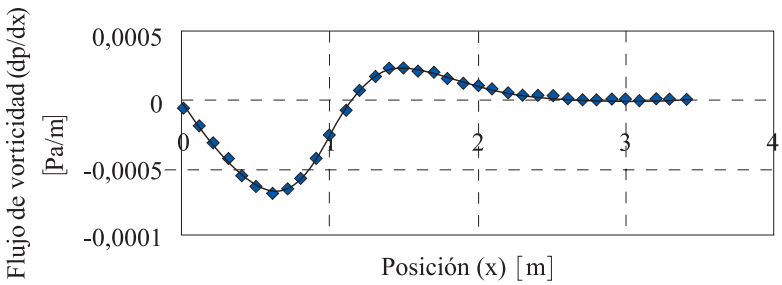


Fig. 95.4
Flujo de vorticidad calculado mediante la ecuación (23).
Z0 = (X0; Y0) = (1, 1).
U∞ = 0

Las figuras 95.5 y 95.6, presentan la distribución de presiones y el flujo de vorticidad determinados mediante las ecuaciones (89) y (23), respectivamente. Las mismas condiciones que las utilizadas para hallar las figuras 95.3 y 95.4 son también utilizadas ahora.

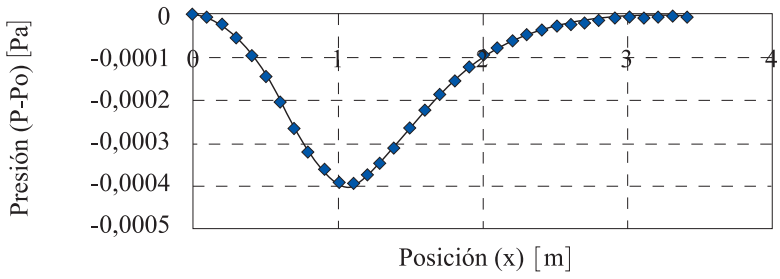


Fig. 95.5
Distribución de presiones sobre la placa plana y a lo largo del eje "x".
Ecuación (89).
Z0 = (X0, Y0) = (1, 1).
U∞ = 0

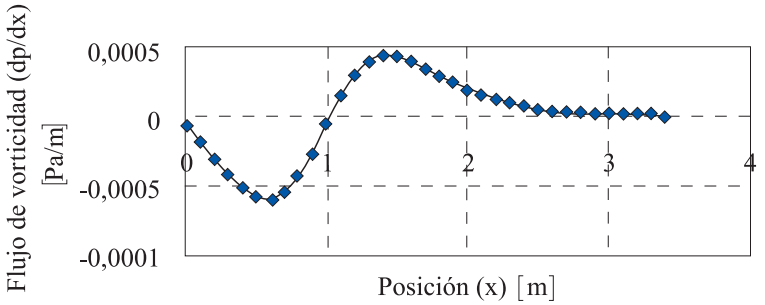


Fig. 95.6
Flujo de vorticidad calculado mediante la ecuación (23) y basado en la distribución de presiones presentada en la figura 86.4.
Z0 = (X0, Y0) = (1, 1).
U∞ = 0

Golpe de ariete

12.1 Fenómeno físico

El fenómeno del golpe de ariete tiene un gran interés para la industria de transporte de fluidos, puesto que permite evaluar las pulsaciones de presión experimentadas en cualquier punto del conducto cuando el fluido se somete a deceleraciones o a aceleraciones, ya sea por el cierre de válvulas o por la puesta en marcha o parada de máquinas que existan en el circuito. En consecuencia, su entendimiento, ha de permitir evitar posibles fallos catastróficos en sistemas de tuberías.

El estudio al completo del fenómeno del golpe de ariete requiere tener en cuenta que el fluido es compresible, que el conducto es elástico y que el régimen de flujo es transitorio, lo cual implica que las ecuaciones diferenciales que caracterizan el fenómeno sean de difícil resolución, siendo necesarios métodos gráficos o bien programas informáticos para calcular y visualizar las fluctuaciones de presión y caudal que experimenta el fluido.

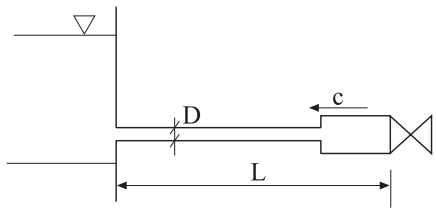
Si, por ejemplo, se analiza el caso de la apertura o el cierre de una válvula, se observa que, al cerrar una válvula rápidamente, la energía cinética del fluido se transforma en energía de presión, que produce una dilatación de la tubería. Al abrir rápidamente una válvula, se produce una depresión de la tubería, o un golpe de ariete negativo.

Aunque la apertura o el cierre instantáneos de una válvula son físicamente imposibles, su estudio va a aportar conocimientos decisivos en el estudio de los casos reales.

Sea un fluido que circula por el conducto definido en la figura siguiente. En un momento dado, se cierra por completo e instantáneamente la válvula localizada en el extremo del conducto. Al producirse dicho cierre, se crea a la entrada de la válvula una onda elástica, es decir, una onda de presión que se propaga por la tubería a una veloci-

dad c, celeridad del fluido. Dicha onda tiene una dirección contraria a la velocidad del fluido y, cuando llega al extremo superior de la tubería, retorna hacia la válvula, acarreando consigo una descompresión del conducto. Al llegar de nuevo la onda a la válvula, cambia de nuevo de dirección y retorna hacia el depósito. En teoría, el proceso se repite indefinidamente, aunque, en realidad, las pérdidas de energía que experimenta el fluido en su movimiento alternativo originan un decaimiento de las sobrepresiones y depresiones que se crean en la tubería.

Fig. T 12.1
Esquema de la evolución de una onda de presión a lo largo del conducto



Tal como se observa en la figura precedente, si c es la velocidad de propagación de la onda de presión en el medio, onda que se produce al cerrar instantáneamente la válvula, y L es la longitud de la tubería, el tiempo que tarda la onda en recorrer la distancia entre la válvula y el embalse es:

$$t_0 = \frac{L}{c}$$

Entendiendo que no se consideran las pérdidas de energía, de acuerdo con la exposición que se realiza a continuación, se observa que para $T = 4t_0$ el ciclo se repite.

Sea un conducto que separa un embalse y una válvula de regulación. Se quiere estudiar cómo evolucionan las ondas de presión a lo largo del conducto al cerrar la válvula instantáneamente y por completo. En la explicación que sigue, cada punto se refiere a la situación definida en cada una de las figuras que se detallan a continuación.

1. Situación inicial. El fluido se desplaza por la tubería con una velocidad constante v. Situación de régimen permanente.

2. Tiempo inicial. La válvula se cierra instantaneamente, con lo que, la velocidad del fluido a la entrada de la válvula se anula.

3. Tiempo $t_0/2$. La onda de presión se ha propagado hacia el embalse con una celeridad c y el frente de onda ha llegado a la mitad de la tubería. En la mitad derecha, la velocidad del fluido es nula y la tubería se ha dilatado por efecto de la sobrepresión creada. En cambio, la mitad izquierda mantiene el radio y la velocidad del fluido.

4. Tiempo t_0. La onda de presión ha llegado al embalse; el fluido en el interior del conducto se encuentra en reposo, aunque no esté en equilibrio, puesto que existe una sobrepresión en toda la tubería.

5. Tiempo $3t_0/2$. Ahora la onda está retornando hacia la válvula; la mitad izquierda de la tubería se ha contraído a su forma inicial; el fluido circula a una velocidad v y en sentido contrario al original. En el resto de tubería, sigue habiendo una sobrepresión.

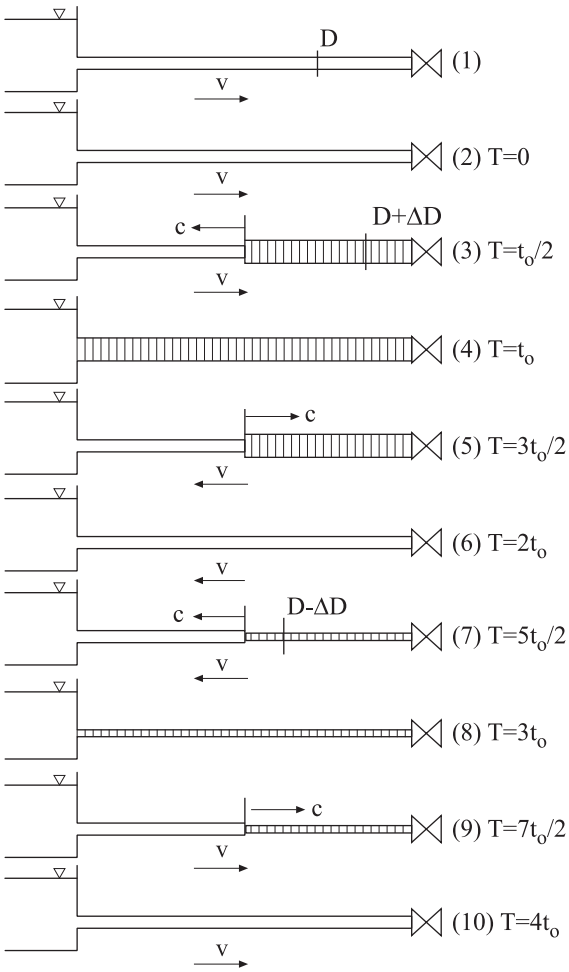


Fig. T 12.2
Fenómeno del golpe de ariete

6. Tiempo $2t_0$. Todo el conducto tiene el diametro inicial pero, a diferencia del estado inicial, el fluido se desplaza a velocidad v, pero en sentido contrario, hacia el depósito. Debido a la inercia del fluido, la presión en el conducto sigue disminuyendo, con lo que la onda se sigue propagando, ahora hacia el depósito, creando una depresión en el conducto, lo cual da lugar a una disminución del diámetro del tubo.

7. Tiempo $5t_0/2$. La onda de presión (depresión) alcanza la mitad de la tubería, el diámetro del conducto en esta mitad de conducto ha disminuido; el fluido en esta zona está en reposo, siendo su presión menor que la que había en el estado inicial. En la otra mitad del conducto, el fluido sigue fluyendo hacia el tanque.

8. Tiempo $3t_0$. El fluido, en toda la tubería, se encuentra en reposo pero no en equilibrio, dado que su presión es menor que la que existía en el estado inicial. Este desequilibrio da lugar a que el fluido vuelva a circular con velocidad v en sentido a la válvula.

9. Tiempo $7t_0/2$. En la mitad de la tubería cercana al depósito, el fluido se desplaza a una velocidad v hacia la válvula y su diámetro ha recuperado el diámetro normal; la mitad derecha del conducto sigue en depresión y en reposo (no en equilibrio) y la onda se desplaza a velocidad c, con el mismo sentido que v.

10. Tiempo $4t_0$. La tubería recupera el tamaño inicial y se repiten exactamente las condiciones iniciales, en que el fluido se desplazaba hacia la válvula a una velocidad v y la válvula se cerraba instantáneamente. Se demuestra, por tanto, que el período es de $4t_0$.

12.2 Expresiones para obtener el valor de la presión máxima o sobrepresión en el conducto

Este estudio fue realizado inicialmente por Joukowski, aunque la solución definitiva la dio Allievi.

La sobrepresión que se obtenga en el conducto dependerá de la velocidad de cierre de la válvula. Denominando t_c el tiempo de cierre de la válvula, se distinguen tres casos:

Cierre instantáneo: $t_c=0$. La válvula se cierra instantáneamente.
Cierre rápido: $0<t_c< 2t_0$. La válvula se cierra antes de que la onda de presión haya retornado a la válvula. En este caso, se verá que la presión máxima será la misma que en el caso anterior.
Cierre lento: $t_c>2t_0$. La depresión de la onda elástica llega a la válvula antes de que se complete el cierre de la misma e impide el aumento ulterior de la presión.

1. Determinación de la sobrepresión máxima para el caso de cierre instantáneo o rápido.

La fuerza de inercia asociada a la deceleración del fluido se evalúa:

$$F_i = -m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

donde Δt es el tiempo transcurrido para que una cierta masa $m = \rho l \cdot A$ de fluido que ocupa una longitud finita de la tubería (l) reduzca su velocidad a un cierto valor finito dependiendo del tipo de cierre.

Se considera v_0 la velocidad inicial del fluido y v la velocidad final:

Para un cierre total de la válvula $\Delta v = -v_0$, se tiene:

$$F_i = \rho \cdot l \cdot A\frac{v_0}{\Delta t}$$

Para un cierre parcial de la válvula: $\Delta v = v - v_0$

$$F_i = \rho \cdot l \cdot A \frac{v_0 - v}{\Delta t}$$

Recuérdese que l es la longitud recorrida por la onda elástica en el tiempo Δt .

La sobrepresión que experimenta el fluido es:

$$\Delta P = \frac{F_i}{A}$$

Dado que la velocidad de propagación de la onda elástica es $c = \frac{l}{\Delta t}$, al sustituir esta ecuación en la ecuación del aumento de presión, se obtiene:

Para el cierre total:

$$\Delta P = \frac{F_i}{A} = \rho \cdot c \cdot v_0 \Rightarrow \frac{\Delta P}{\rho} = c v_0 \Rightarrow \frac{\Delta P}{\rho \cdot g} = \frac{c v_0}{g} = \Delta H \Rightarrow \text{fórmula de Joukowsky}$$

Para el cierre parcial:

$$\Delta P = \rho \cdot c \cdot (v_0 - v)$$

Es necesario destacar que la expresión que determina la velocidad de propagación de la onda de presión en una tubería, cuando se considera que tanto el fluido como el propio conducto son compresibles, es:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\beta}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\beta \cdot D}{E \cdot \delta}}}$$

donde:

c≡ celeridad de la onda elástica [m/s]

β≡ módulo de elasticidad del fluido [N/m^2] (para el agua, $\beta = 2{,}03\ 10^9\ N/m^2$)

ρ≡ densidad del fluido [Kg/m^3]

D≡ diámetro de la tubería [m]

E≡ módulo de elasticidad del material de la tubería (para acero, $E = 2{,}5 \cdot 10^{11}\ N/m^2$)

δ≡ espesor de la pared del conducto [m]

2. Para el caso en que el cierre de la válvula sea lento, total y uniforme, y la tubería se considere rígida (indeformable).

Como se ha visto anteriormente, la fuerza de inercia depende de la masa de fluido que se decelera y de la variación de la velocidad con respecto al tiempo; la sobrepresión que se produce es asimismo función de estos dos factores.

$$F_i = -\rho \cdot L \cdot A \frac{dv}{dt}$$

$$\Delta P = \frac{F_i}{A} = -\rho \cdot L \cdot \frac{dv}{dt}$$

Para el cierre total, la velocidad final será cero:

$$\Delta P = \frac{\rho \cdot L \cdot v_0}{t_c}$$

ecuación que proporciona el incremento de presión para cierre lento y uniforme y tubería rígida. Obsérvese que la longitud de la tubería es la longitud total de la misma, puesto que para el tiempo de cierre menor a t_c la onda de presión ha llegado al extremo superior del conducto, y todo el fluido del conducto ha quedado afectado.

Si el conducto se considera elástico, se tiene:

$$\Delta P = k \frac{\rho \cdot L \cdot v_0}{t_c}$$

donde el valor de k en general oscila entre 1 y 2, $1 < k < 2$.

Se concluye que las condiciones en que la sobrepresión debida al golpe de ariete es mayor son:

- Cuanto mayor es la longitud de la tubería.
- Cuanto mayor es la velocidad del fluido en la tubería.
- Cuanto más rápido es el cierre de la válvula.

Algunos de los medios que se emplean actualmente para reducir el golpe de ariete son:

- Cerrar lentamente la válvula de regulación.
- Escoger un diámetro de tubería grande, con el fin de reducir la velocidad del fluido que circule por ella.
- Instalar las bombas con un volante de inercia, para que, en el caso de corte de la corriente, se reduzca lentamente la velocidad de la máquina y, por consiguiente, la velocidad del fluido en la tubería.

- Inyectar aire con un compresor para producir un muelle elástico durante la sobrepresión.
- Utilizar una válvula de seguridad, normalmente cerrada, pero que se abre cuando la sobrepresión sobrepasa un límite establecido.
- Utilizar acumuladores con cámara de aire para que absorban la energía creada al producirse la sobrepresión.
- Utilizar chimeneas de equilibrio que permitan un alivio de la sobrepresión producida.

12.3 Estudio temporal de las perturbaciones de presión en un punto genérico del conducto

El estudio del golpe de ariete para un sistema de tuberías donde la válvula de cierre está situada hacia la mitad de un conducto es especialmente interesante, puesto que se muestran las ondas de presión y depresión con más detenimiento y de manera simultánea.

La figura siguiente muestra la evolución de las ondas de presión, tanto aguas arriba como aguas abajo de la válvula, al producirse un cierre total e instantáneo.

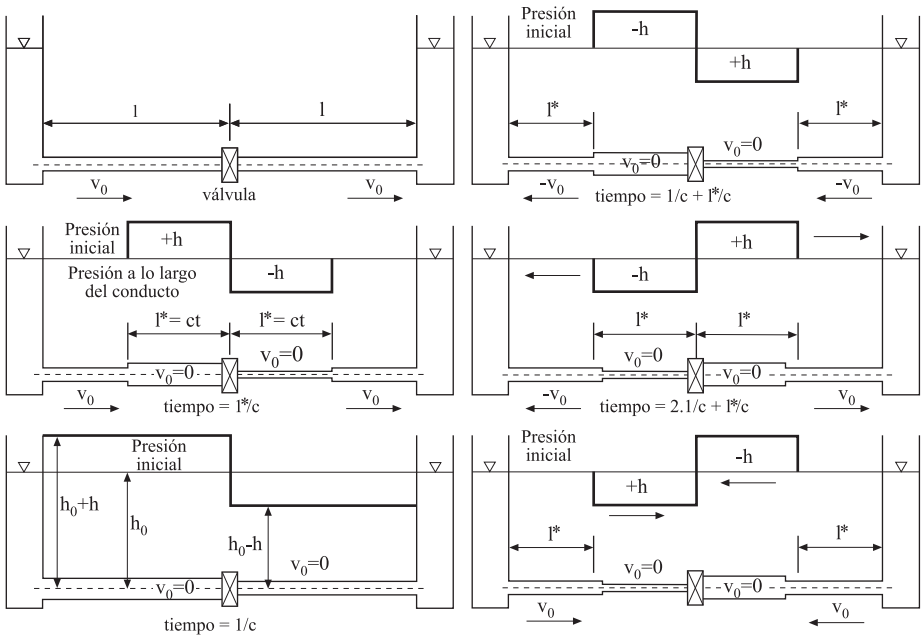


Fig. T 12.3
Evolución de las ondas de presión en un conducto con una válvula situada en su parte central
Fuente: Douglas J.F.; Gasiorek J.M. ; Swaffield J.A. Fluid Mechanics 3rd edition, 1998

Se observa que, tanto en la tubería superior como en la inferior, el ciclo vuelve a su estado inicial para t = 4l/c, tal como se había deducido para el caso de un depósito y una tubería; además, los ciclos de ambas tuberías se superponen.

Partiendo de la descripción del transitorio en los conductos, es posible realizar el diagrama de presión respecto al tiempo. Este diagrama se halla calculando el tiempo para

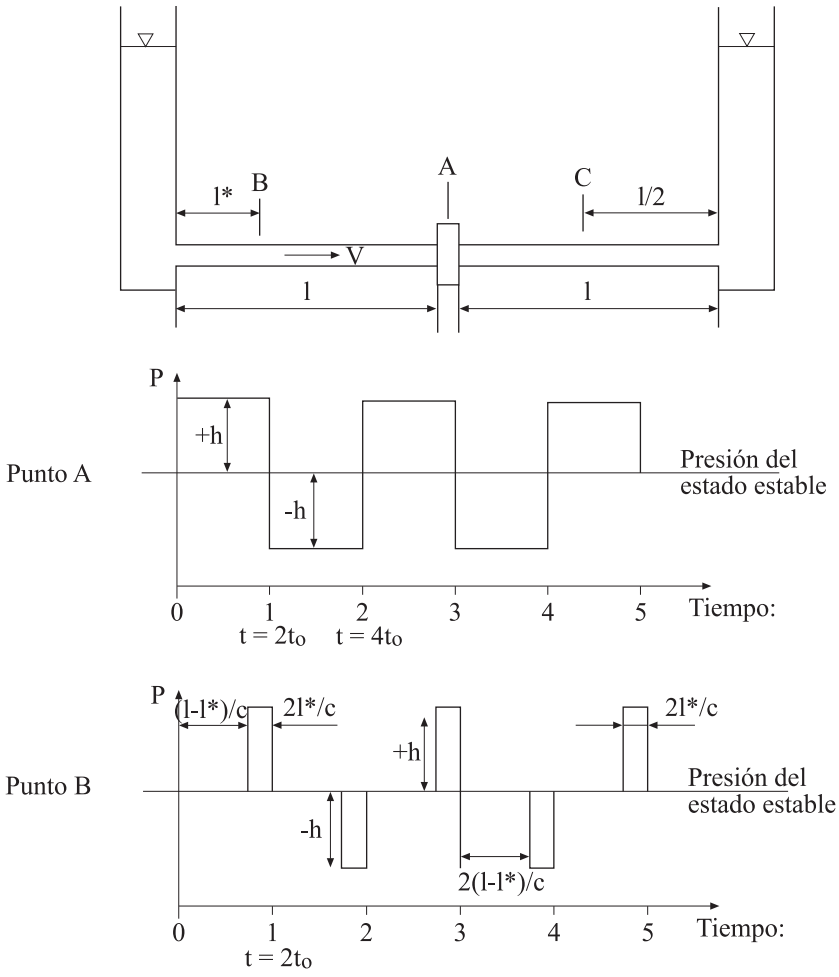
el cual alguna de las ondas de ±h llega a un punto determinado del sistema, y se asume que la velocidad de propagación c es constante.

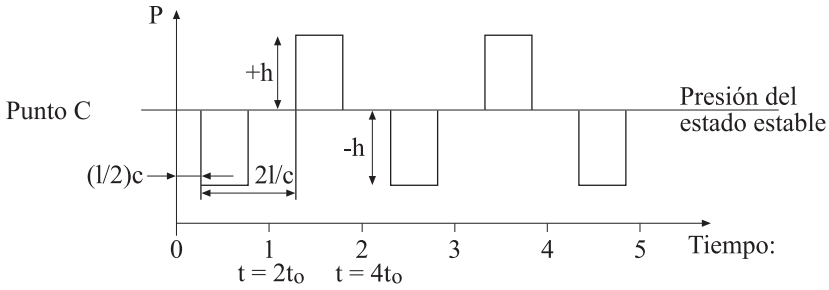
El interés por el estudio de los transitorios es debido a la posibilidad de limitar la presión máxima, que se consigue disminuyendo la velocidad de cierre de la válvula.

Mediante estas gráficas, se puede extraer que, mientras el tiempo de cierre de la válvula no supere un período de la tubería, no se producirá disminución de presión. En realidad, la reducción de presión se produce cuando la onda negativa procedente de aguas arriba llega a la válvula.

En la figura siguiente, se presentan las variaciones de presión para cierre instantáneo y cuando no se considera el efecto del rozamiento en el conducto. Estas variaciones de presión se presentan en tres puntos diferentes, A, B y C; obsérvese que, según el punto elegido, el tiempo de permanencia a alta o a baja presión variará.

Fig. T 12.4
Variación temporal de la presión en diferentes puntos de la instalación
Fuente: Douglas J.F. ; Gasiorek J.M. ; Swaffield J.A. Fluid Mechanics 3rd edition, 1998





Es muy interesante remarcar que, el efecto de la fricción del conducto, provoca que la sobrepresión en la entrada de la válvula, sea, durante un cierto período de tiempo, mayor que la sobrepresión teórica (ρcv); y está sobrepresión será tanto mayor cuanto mayor sean las pérdidas de carga del conducto. En consecuencia, para tuberías de gran longitud esta sobrepresión puede ser muy significativa.

A la entrada de la válvula, y para un tiempo 4l/c, la presión será mínima. Dicha presión en valores absolutos ha de ser mayor que la presión de vapor del fluido; si no es así, se producirá cavitación. Es necesario remarcar que, en una instalación, hay que evitar la aparición de presiones negativas, puesto que su efecto destructivo es incluso mayor que el provocado por las sobrepresiones.

12.4 Ecuaciones diferenciales que caracterizan el fenómeno del golpe de ariete

Se obtienen a partir de la ecuación de continuidad y de la conservación de la cantidad de movimiento.

Las variables dependientes serán la velocidad media del fluido y la presión, mientras que las independientes, el tiempo y la distancia.

Las hipótesis de trabajo son:

- Flujo unidimensional.

- La fricción se asume proporcional a la velocidad al cuadrado. Las condiciones varían suficientemente despacio como para que puedan ser incorporadas las pérdidas por rozamiento en la ecuación de la cantidad de movimiento.

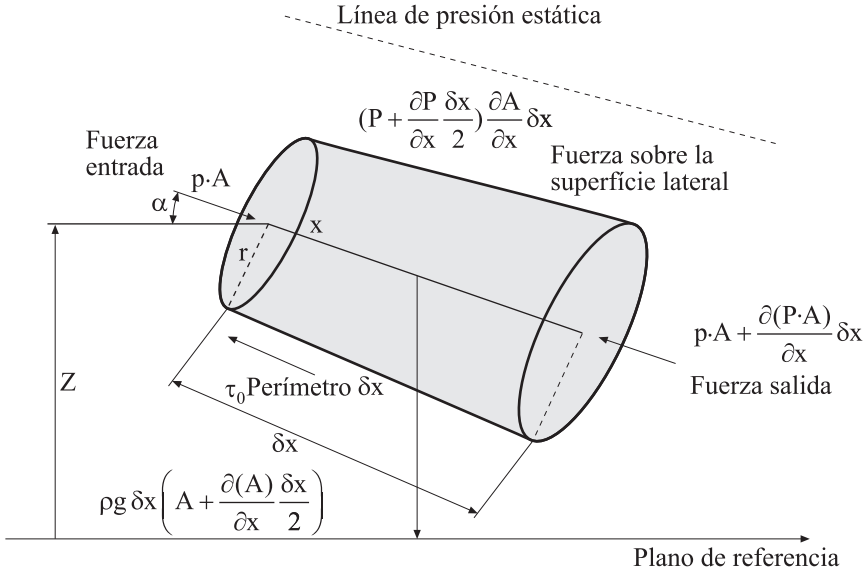
- Se considera que tanto el fluido como el conducto son elásticos.

- En todo momento el conducto está lleno de líquido (no se llega nunca a la presión de vapor).

12.4.1 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Considérese un elemento diferencial de fluido localizado en el interior de un conducto, como el que se muestra en la figura siguiente. Sobre dicho elemento diferencial, actúan fuerzas superficiales y másicas.

Fig. T 12.5 Elemento diferencial de volumen



Realizando el sumatorio de fuerzas que actúan sobre todas las caras del volumen de control diferencial, y utilizando la segunda ecuación de Newton $\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}$, se obtiene:

$$P\cdot A-(P\cdot A+\frac{\partial(P\cdot A)}{\partial x}\delta x)+(P+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\frac{\partial A}{\partial x}\delta x+\rho g\delta x(A+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\sin\alpha$$
$$-\tau_0 P_{erímetro}\delta x=\rho\,\delta x(A+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\frac{dv}{dt}$$

donde:

$P+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\rightarrow$ presión en el centro del elemento diferencial.

$(P+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\frac{\partial A}{\partial x}\delta x\rightarrow$ representa la proyección de la fuerza sobre el lateral del elemento diferencial y en la dirección del movimiento.

$A+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\rightarrow$ sección en el punto medio del elemento diferencial.

$\delta x(A+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\rightarrow$ volumen del elemento diferencial.

puesto que se cumple que:

$$\frac{\partial(PA)}{\partial x} = A\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial A}{\partial x}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial y despreciando los diferenciales de segundo orden, se obtiene:

$$-\frac{\partial P}{\partial x}A\cdot\delta x + \rho\cdot g\cdot\delta x\cdot A\cdot\sin\alpha - \tau_0 P_{\text{erímetro}}\delta x = \rho\cdot\delta x\cdot A\frac{dv}{dt}$$

Dividiendo por $-\rho\cdot\delta x\cdot A$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - g\cdot\sin\alpha + \frac{\tau_0}{\rho\cdot m} + \frac{dv}{dt} = 0$$

donde se denomina: $m = \dfrac{\text{área}}{\text{perímetro}} = \dfrac{A}{P_{\text{perímetro}}}$

Si se considera la velocidad del fluido como constante, el esfuerzo cortante en la pared se puede expresar como:

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\rho\cdot f\cdot v^2 = \frac{1}{2}\rho\, f\, v|v|$$

La representación del esfuerzo cortante en función de la velocidad en valor absoluto se realiza para que la propia velocidad dé el signo del esfuerzo cortante.

donde f es el factor de fricción definido en la ecuación de Darcy-Weisbach.

Como la velocidad es función de la posición y del tiempo, la aceleración en la dirección del movimiento puede ser dada, utilizando el concepto de derivada material y para flujo unidireccional:

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{dv}{dt} = v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

Agrupando las tres ecuaciones anteriores, se obtiene:

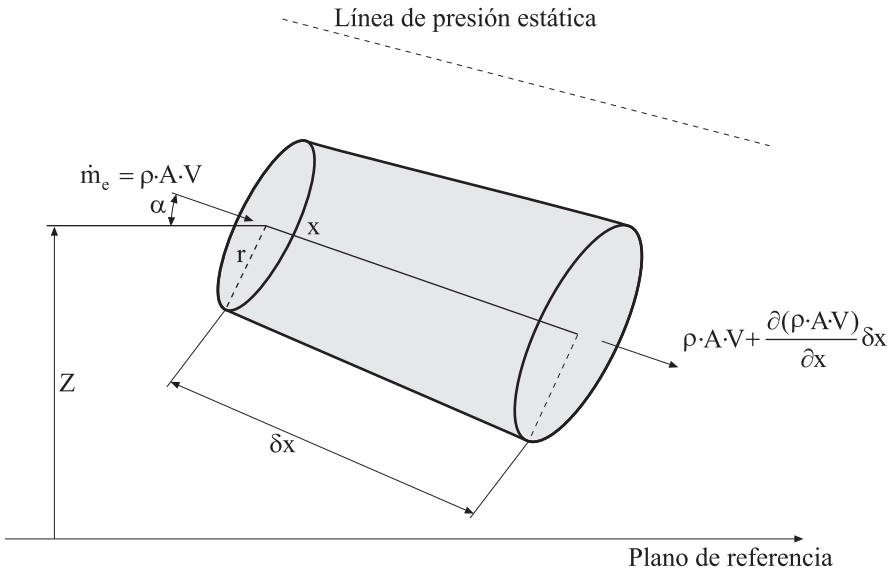
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - g\cdot\sin\alpha + \frac{f\cdot v|v|}{2m} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Esta es la ecuación dinámica del movimiento, ecuación que se ha obtenido de aplicar la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control diferencial. Es interesante denotar que tiene unidades de aceleración [m/s^2].

12.4.2 Ecuación de continuidad

Para determinar la ecuación de continuidad, se parte del siguiente volumen diferencial:

Fig. T 12.6 Elemento diferencial de volumen



La ley de conservación de la masa establece que el flujo neto por unidad de tiempo en el volumen elemental ha de ser igual a la variación de masa en dicho volumen elemental.

En forma de ecuación, será:

$$\rho \cdot A \cdot v - (\rho \cdot A \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot A \cdot v)}{\partial x} \delta x) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \, \delta x \, (A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\delta x}{2}))$$

Despreciando el diferencial de segundo orden, queda:

$$\rho \cdot A \cdot v - (\rho \cdot A \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot A \cdot v)}{\partial x} \delta x) = \frac{\partial(\rho \cdot A \cdot \delta x)}{\partial t}$$

donde:

$\rho \cdot A \cdot v \rightarrow$ Caudal másico entrante

$\rho \cdot A \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot A \cdot v)}{\partial x} \delta x \rightarrow$ Caudal másico saliente

$\frac{\partial(\rho \cdot A \cdot \delta x)}{\partial t} \rightarrow$ variación temporal de masa en el volumen de control

Desarrollando las derivadas de los productos en la ecuación diferencial de continuidad, se obtiene:

$$-A\cdot v\frac{\partial \rho}{\partial x}\delta x-\rho\cdot v\frac{\partial A}{\partial x}\delta x-\rho\cdot A\frac{\partial v}{\partial x}\delta x=A\delta x\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\delta x\frac{\partial A}{\partial t}+\rho A\frac{\partial \delta x}{\partial t}$$

Dividiendo por $\rho\cdot A\cdot\delta x$ se llega:

$$\frac{v}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{v}{A}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{1}{\delta x}\frac{\partial \delta x}{\partial t}=0$$

El último término de la ecuación anterior representa la variación de un diferencial con respecto al tiempo, con lo cual dicho término es prácticamente cero.

Recordando el concepto de derivada material:

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+v\frac{\partial \rho}{\partial x};\qquad \frac{DA}{Dt}=\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+v\frac{\partial A}{\partial x};$$

La ecuación de continuidad se puede expresar como:

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{A}\cdot\frac{dA}{dt}=0$$

Siendo esta la ecuación de continuidad que caracteriza el fenómeno del golpe de ariete en conductos. Sus términos representan:

$\frac{\partial v}{\partial x}\rightarrow$ Variación de velocidad entre entrada y salida

$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt}\rightarrow$ Tiene en cuenta la compresibilidad del líquido

$\frac{1}{A}\cdot\frac{dA}{dt}\rightarrow$ Valora el incremento de sección del conducto

12.4.3 Modificación de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para que puedan ser aplicadas a transitorios y conductos deformables

Para un conducto de sección constante, se ha definido una variable m tal que:

$$m=\frac{\text{Superficie}}{\text{Perímetro}}=\frac{\frac{\pi\cdot D^2}{4}}{\pi\cdot D}=\frac{D}{4}$$

Sustituyendo dicha variable en la ecuación de cantidad de movimiento anteriormente deducida, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - g\cdot\sin\alpha + \frac{4\cdot f\cdot v|v|}{2D} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Saint Venant.

Suponiendo aplicable la teoría de cilindros de pared delgada, que es para casos en que $\frac{D}{e_{\text{espesor de la pared}}} > 30$, el incremento de diámetro al aumentar la presión en el interior del conducto, se puede definir como:

$$\frac{dD}{D} = \frac{D}{2\cdot E\cdot e}\cdot dp$$

donde E = módulo de Young del material del conducto.

e = espesor de la pared del tubo.

El diferencial de superficie del conducto se puede dar como:

$$A = \frac{\pi\cdot D^2}{4} \Rightarrow dA = \frac{\pi}{4}\cdot 2D\cdot dD = \frac{\pi\cdot D}{2}\cdot dD$$

de donde, sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{2\cdot dA}{\pi\cdot D^2} = \frac{D}{2\cdot E\cdot e}\cdot dp \Rightarrow \frac{1}{A}\cdot dA = \frac{D}{E\cdot e}dp \Rightarrow \frac{1}{A}\cdot\frac{dA}{dt} = \frac{D}{E\cdot e}\frac{dp}{dt}$$

El módulo de elasticidad volumétrica para el fluido β se ha definido en el capítulo primero como:

$$\beta = \rho\cdot\frac{dp}{d\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\beta}\frac{dp}{dt}$$

Utilizando las relaciones halladas, se consigue modificar las ecuaciones de régimen transitorio, la ecuación de continuidad queda:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{D}{E\cdot e}\right)\frac{dp}{dt} = 0$$

Recuérdese que la velocidad de propagación de una onda de presión en el interior de un conducto, donde se considera que tanto el fluido como el conducto son deformables, se define como:

$$\frac{1}{c^2} = \rho\cdot\left(\frac{1}{\beta} + \frac{D}{E\cdot e}\right) \Rightarrow c^2 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\beta}{1 + \frac{D\cdot\beta}{E\cdot e}}\right)$$

Sustituyendo el concepto de velocidad de propagación, la ecuación de continuidad toma la forma:

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho\cdot c^2}\frac{dp}{dt}=0\Rightarrow \rho\cdot c^2\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{dp}{dt}=0$$

y, recordando que en la ecuación de la continuidad se había utilizado el concepto de derivada material:

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{d\rho}{dt}=v\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \rho}{\partial t};\quad \frac{Dp}{Dt}=\frac{dp}{dt}=v\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial t};$$

la ecuación de continuidad finalmente queda:

$$\rho\cdot c^2\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial t}=0$$

Esta representación de la ecuación de continuidad tiene en cuenta la expansión y/o la compresión del conducto al variar la presión en el interior del mismo.

12.4.4 Simplificación de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en régimen transitorio

Si no se tiene en cuenta el efecto de la fricción, las fuerzas másicas se consideran despreciables y se ignoran los términos convectivos, se obtiene:

Los términos convectivos se pueden ignorar en comparación con:

$$\frac{\partial p}{\partial t}\ \text{y}\ \frac{\partial v}{\partial t};\quad v\frac{\partial v}{\partial x}<<\frac{\partial v}{\partial t};\quad v\frac{\partial p}{\partial x}<<\frac{\partial p}{\partial t}$$

Si, además, las fuerzas másicas se consideran despreciables las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad resultantes, que se denominan ecuaciones de D'Alembert dan lugar a las ecuaciones de las cuerdas vibrantes, su determinación es:

La ecuación de cantidad de movimiento para este caso, quedará:

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

Mientras que la de continuidad:

$$\rho\cdot c^2\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial t}=0$$

Derivando la primera de estas dos ecuaciones con respecto a x y la segunda con respecto a t, y combinándolas, se obtiene una expresión que pone de manifiesto los incrementos de presión con la velocidad de propagación de la onda de presión.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t \cdot \partial x} = 0 \\ \rho \cdot c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}\right\} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Según D'Alembert, las soluciones a estas ecuaciones, que representan la ecuación de la onda que recorre la tubería, son:

$$p - p_0 = F\left(t + \frac{x}{c}\right) + f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$v - v_0 = -\left(\frac{1}{\rho \cdot c}\right)\left[F\left(t + \frac{x}{c}\right) - f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones generales de Allievi.

F y f son funciones arbitrarias, que pueden ser seleccionadas para satisfacer las condiciones impuestas mediante las condiciones de contorno.

En un sistema consistente en un depósito y una tubería, en cuyo extremo más alejado del depósito existe una válvula de regulación, la función F puede ser interpretada como una onda de presión moviéndose en dirección –x (hacia el depósito). La función f puede ser interpretada como una onda de presión moviéndose en dirección x (del depósito hacia la válvula); ambas ondas se propagan a la velocidad del sonido c.

La primera de las ecuaciones de Allievi proporciona la presión en cualquier punto de la tubería y en cualquier tiempo gracias al sumatorio de las funciones de onda F y f.

Problema 93

Enunciado

Sea un sistema de distribución de agua formado por un depósito y un conducto de 1.965 m de longitud. En el extremo inferior del conducto está instalada una válvula de descarga a la atmósfera; el nivel de la superficie libre del depósito respecto de la válvula es de 70 m y se conoce que la velocidad de propagación de la onda de presión en la instalación es de 1.310 m/s. Se ha observado que la velocidad de circulación del fluido por el conducto es de 2,5 m/s, cuando la válvula está totalmente abierta.

Determine:

1. El diámetro del conducto que satisfaga las condiciones establecidas anteriormente, sabiendo que el factor de fricción se puede considerar de f = 0,02

2. Si se considera que el proceso de cierre de la válvula es lineal con el tiempo, y el tiempo de cierre es de 6 s, determine el diagrama de variación temporal de la presión en la entrada de la válvula en función del tiempo. Considere despreciables, como primera aproximación, las pérdidas de energía por rozamiento. Se puede asimismo considerar que el proceso de cierre se ejecuta en 6 pasos.

3. A la vista de los resultados, comente las anomalías encontradas en el diseño de la instalación y proporcione posibles soluciones al problema. ¿Qué sucedería si el conducto fuese de 0,5 m de diámetro?

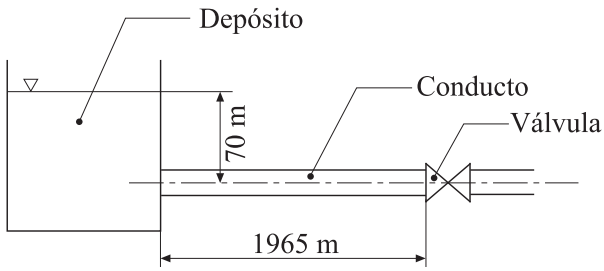


Fig. 93.1 Esquema de la instalación

Resolución

1. En primer lugar, se observa que se trata de un problema de golpe de ariete, para la resolución del cual se determinará el diámetro del conducto mediante la aplicación de la ecuación de Bernoulli entre la superficie del depósito y el extremo del conducto, de modo que:

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta h_{12} \qquad [\mathrm{m}]$$

y queda

$$z_1 - z_2 = 70\,\text{m} = \frac{v_2^2}{2g} + f\,\frac{L}{D}\,\frac{v^2}{2g} = \frac{2.5^2}{2\times 9,8} + 0,02\,\frac{1.965}{D}\times\frac{2,5^2}{2\times 9,8}$$

$$\frac{1}{D} = \frac{70 - \dfrac{2,5^2}{2\times 9,8}}{0,02\times 1.965\times\dfrac{2,5^2}{2\times 9,8}} \quad\Rightarrow\quad D = 0,1798\,\text{m}$$

La curva característica de la instalación en forma gráfica se puede dar como:

Fig. 93.2

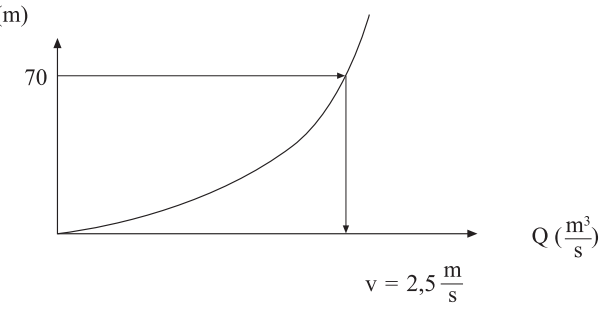
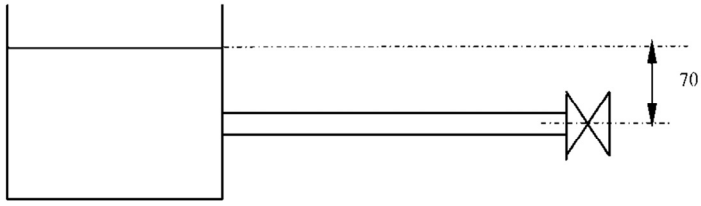


Fig.93.3



2. Las características iniciales del sistema, que son el punto de partida para la realización del análisis dinámico, son:

$V_{\text{fluido}} = 2,5$ m/s Pérdidas por fricción despreciables

H = 70 m $L_{\text{tubería}} = 1.965$ m

C = 1.310 m/s

Suponiendo cierre uniforme en seis pasos y en 6 s, se tiene:

$$\Delta P = \rho C\left(V_f - V_o\right) = -\rho\ C\,\Delta V$$

$$\frac{\Delta P}{\rho g} = \Delta h = -\frac{C}{g}\Delta V \ \Rightarrow\ h_f - h_o = \frac{C}{g}\left(V_o - V_f\right)$$

Aplicando la ecuación de continuidad entre el conducto y la válvula, considerando además que, entre la entrada y la salida de la válvula, la energía de presión en la entrada se convierte en energía cinética a la salida, se tiene:

$$S_{tubo} \times V_{tubo} = Q = S_v \times V_{válvula} = C_d \times S_v \sqrt{2gh}$$

$$V_{tubo} = \frac{C_d S_V}{S_{tubo}} \sqrt{2gh}$$

en forma genérica, esta ecuación se puede dar:

$V = \Omega \times \sqrt{h} \Rightarrow \Omega = \frac{C_d S_V}{S_{tubo}} \sqrt{2g}$, considerando el coeficiente de descarga (Cd) constante

La variación de la sección de la válvula con el tiempo presenta la forma siguiente:

$\frac{S_V}{S_{tubo}} = 1 - \frac{t}{T}$ y se verifica:

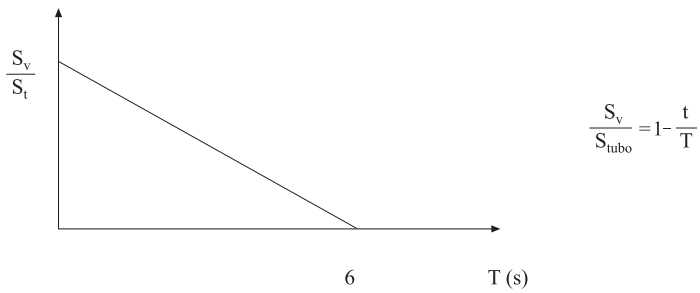


Fig .93.4

Véase, a continuación, cómo varía la constante de tiempo Ω con el tiempo respecto al número de segundos transcurridos y al número de pasos realizados hasta su cierre.

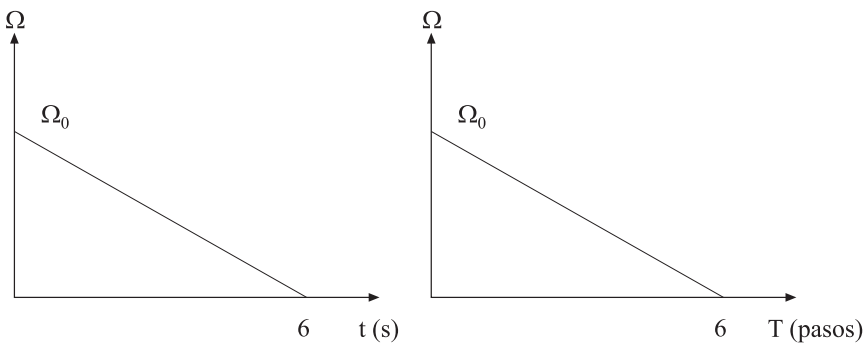


Fig. 93.5

$\Omega = \Omega_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$ T = tiempo = 6 $\Omega = \Omega_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$ T = pasos = 6

Para el estado inicial, se tiene:

$$V_i = \Omega_0 \sqrt{H} \;\Rightarrow\; 2,5 = \Omega_0 \sqrt{70}\ ,\ \text{donde}\ \ \Omega_0 = 0,2988 \left[\frac{m^{\frac{1}{2}}}{s} \right]$$

En la tabla siguiente, se muestra el conjunto de valores de la constante de tiempo, en función de las diferentes posiciones de abertura de la válvula.

t(s)	T(pasos)	Posición de la válvula	$\Omega = 0,2988\left(1 - \frac{t}{6}\right)\left[\frac{m^{\frac{1}{2}}}{s}\right]$
0	0	Abierta	0,2988
1	1	1/6 cerrada	0,2490
2	2	2/6 cerrada	0,1992
3	3	3/6 cerrada	0,1494
4	4	4/6 cerrada	0,0996
5	5	5/6 cerrada	0,0498
6	6	cerrada	0

Las ecuaciones que se utilizarán para la determinación de las velocidades y los incrementos temporales de presión serán:

$$\Delta h = \frac{C}{g}\left(V_0 - V\right)$$

$$V = \Omega \sqrt{h_i + \Delta h}$$

Para el primer paso, cuando t = 1 (s), se tiene:

$$\Delta h = 133,67\left(2,5 - V\right)$$

$$V = 0,249\sqrt{70 + \Delta h}$$

Estas dos ecuaciones se satisfacen para los valores de V= 2,354 m/s y Δh = 19,21 m.

En la tabla que se encuentra a continuación, se resumen estos resultados y los obtenidos para tiempos sucesivos.

t(s)	Ω	v	Δh	$h_i + \Delta h$	Total
0	0,2988	2,5	0	70	70
1	0,2490	2,35	19,21	70+19,21	89,2100
2	0,1992	2,15	27,27	70+19,21+27,27	116,480
3	0,1494	1,86235	38,74	70+19,21+27,27+38,74	155,220
4	0,0996	1,4464	55,59	70-19,21+27,27+38,74+55,59	172,390
5	0,0498	0,8697	77,072	70-19,21-27,27+38,74+55,59+77,072	194,922
6	0	0	116,27	70-19,21-27,27-38,74+55,59+77,072+116,275	233,717
7	0	0	-	70+19,21-27,27-38,74-55,59+77,072+116,275	160,957
8	0	0	-	70+19,21+27,27-38,74-55,59-77,072+116,275	61,3530
9	0	0	-	70+19,21+27,27+38,74-55,59-77,072-116,275	-93,7170
10	0	0	-	70-19,21+27,27+38,74+55,59-77,072-116,275	-20,9570
11	0	0	-	70-19,21-27,27+38,74+55,59+77,072-116,275	78,6470

Por tanto el diagrama temporal será:

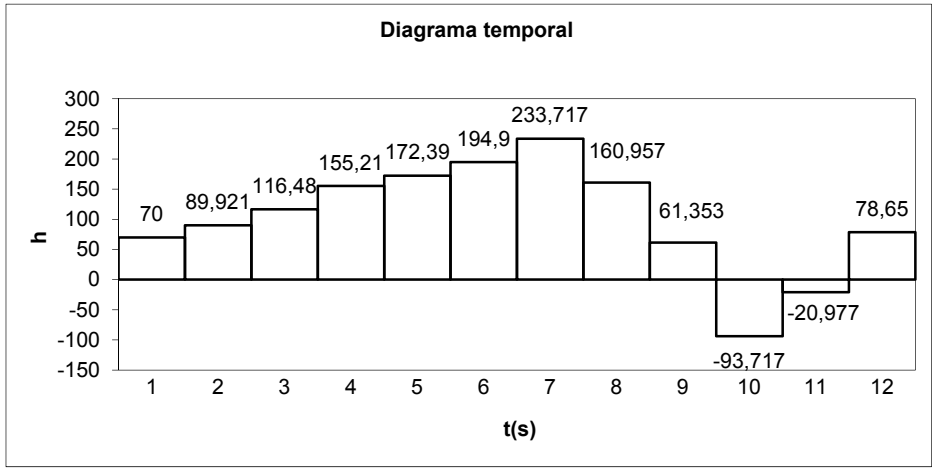


Fig. 93.6

Obsérvese que las ecuaciones explícitas para la determinación en cada paso, además de la velocidad de circulación del fluido, son:

$V = \Omega\sqrt{h_i + \Delta h}$, h_i y v_i son la presión en forma de altura de elevación y la velocidad a la entrada de la válvula utilizadas para la iteración.

$$\Delta h = 133,67\left(V_i - V\right)$$

$$V = \Omega\sqrt{h_i + 133,67\left(V_i - V\right)}$$

$$V^2 = \Omega^2\left[h_i + 133,67\left(V_i - V\right)\right]$$

$$V^2 = h_i\Omega^2 + 133,67V_i\,\Omega^2 - \Omega^2 133,67V$$

$$V^2 + \Omega^2 133,67V - \Omega^2\left(h_i + 133,67V_i\right) = 0$$

$$V = \frac{-\Omega^2 133,67 \pm \sqrt{\left(\Omega^2 \times 133,67\right)^2 + 4\Omega^2\left(h_i + 133,67V_i\right)}}{2}$$

De modo que para la primera iteración se tendrá:

$$V = \frac{-0,2479^2 \times 133,67 \pm \sqrt{\left(0,249^2 \times 133,67\right)^2 + 4 \times 0,249^2\left(70 + 133,67 \times 2,5\right)}}{2}$$

$$= 2,356\frac{m}{s}$$

Por tanto:

$$\Delta h = 133,67\left(2,5 - 2,356\right) = 19,21\,m$$

3. Se observa que el aumento de presión respecto al estado de régimen permanente es de unas tres veces, lo cual no causaría grandes problemas en la instalación, pero, por otro lado, las presiones negativas que aparecen en el diagrama temporal son demasiado elevadas y no sólo causarían cavitación en la instalación, sino que muy probablemente destrucción de la misma. En definitiva, sería más que recomendable disminuir la velocidad de cierre de la válvula, aumentando su tiempo de cierre. En un primer paso, se podría aumentar el tiempo de cierre a 10 segundos en lugar de los seis actuales. Una vez realizado el diagrama temporal, se podría ver si este aumento en el tiempo de cierre es suficiente o no.

Por otro lado, si el diámetro del conducto aumenta a 0,5 m la fuerza de inercia asociada al mismo aumenta y consecuentemente, aumentarán las sobrepresiones; consecuentemente el tiempo de cierre debería aumentar con el fin de mantener el aumento de presión a un nivel aceptable.

Problema 94

Enunciado

Sea el sistema depósito-conducto esquematizado en la figura 94.1. En el extremo del conducto, existe una válvula cuyo cierre será lento y progresivo. La sección de paso de la válvula adimensionalizada en función de las cuatro etapas de cierre se define en la tabla 1. En la tabla 2 se define la constante de pérdidas de la válvula para las diversas etapas de cierre. Dicha constante se entenderá que obedece a la ecuación.

$$\Delta h_{\text{válvula}} = K \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta h \text{ [m]}$$

v = velocidad del fluido en el conducto

g = aceleración gravitatoria

Conociendo que:

Factor de fricción, f = 0,02

Longitud del conducto, 1.250 m

Diámetro del conducto, D = 0,2 m

Celeridad de la onda de presión, C= 1.250 m/s

Diferencia de alturas geométricas entre el nivel de líquido del depósito y la válvula: 100 m

El extremo del conducto descarga a la atmósfera.

Determine:

1. La velocidad de circulación del fluido por el conducto en las cuatro etapas de cierre.

2. La variación temporal de la altura de elevación en la entrada de la válvula. Comente los resultados obtenidos.

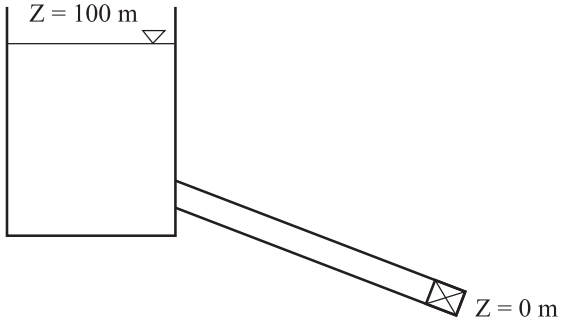
Tabla 1

S/S_{total}	Tc/(L/C)
1	0
0,8	1
0,6	2
0,4	3
0	4

Tabla 2

Tc/(L/C)	K
0	1.000
1	5.000
2	10.000
3	18.000
4	∞

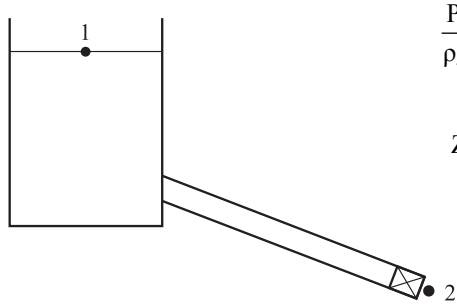
Fig. 94.1



Resolución

1. Aplicando Bernoulli entre los puntos 1 y 2, se tiene:

Fig. 94.2



$$\frac{P_1}{\rho g}+Z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{v_2^2}{2g}+Z_2+\frac{P_2}{\rho g}+f\frac{L}{D}\cdot\frac{v^2}{2g}+K\frac{v^2}{2g}$$

$$Z_1-Z_2=\frac{Q^2}{S_2^2\cdot 2\cdot g}+f\frac{L}{D}\cdot\frac{Q^2}{S_T^2\cdot 2\cdot g}+K\frac{Q^2}{S_T^2\cdot 2\cdot g}$$

$$Q^2=\frac{Z_1-Z_2}{\frac{1}{S_2^2\cdot 2\cdot g}+f\frac{L}{D}\cdot\frac{1}{S_T^2\cdot 2\cdot g}+K\frac{1}{S_T^2\cdot 2\cdot g}}$$

Para las diferentes posiciones de la válvula, se tiene:

Abierta	$S_2 = S_T \cdot 1$	$K = 1.000$
1	$S_2 = S_T \cdot 0{,}8$	$K = 5.000$
2	$S_2 = S_T \cdot 0{,}6$	$K = 10.000$
3	$S_2 = S_T \cdot 0{,}4$	$K = 18.000$
4	$S_2 = S_T \cdot 0$	$K = \infty$

Sustituyendo para los diferentes casos en la expresión del caudal, se obtiene:

$$v_{abierta}=\frac{Q}{S}=1{,}319\,\text{m/s}$$

$$v_1 = 0{,}618\,\text{m/s}$$

$$v_2 = 0{,}439\,\text{m/s}$$

$$v_3 = 0{,}3287\,\text{m/s}$$

$$v_4 = 0\,\text{m/s}\ ;$$

Adimensionalizando los valores de la velocidad:

$$v^* = \frac{v}{v_o} = \frac{v}{1{,}319}$$

v^*	$T_c / \frac{L}{C}$
1	0
0,468	1
0,3328	2
0,2486	3
0	4

Adimensionalizando el término de pérdidas de carga en el conducto:

$$\frac{H_o}{H_o}\Delta h = f\frac{L}{D}\cdot\frac{v^2}{2g}\cdot\frac{v_o^2}{v_o^2}$$

$$\Delta h^* = f\frac{L}{D}\cdot\frac{v^{*2}}{2g}\cdot\frac{v_o^2}{H_o}$$

$$\Delta h^* = 0{,}11095\cdot v^{*2}$$

Adimensionalizando allievi:

$$h - h_i = -\frac{c}{g}(v - v_i)$$

$$\frac{H_o}{H_o}\Delta h = -\frac{c}{g}\Delta v\frac{v_o}{v_o}$$

$$\Delta h^* = -\frac{c\cdot v_o}{g\cdot H_o}\Delta v^*$$

Sustituyendo por:

$$v_0 = 1{,}319\,\frac{m}{s}$$
$$c = 1250\,\frac{m}{s}$$
$$H_0 = 100\ m$$

Se obtiene:

$$\Delta h^* = -1{,}68\cdot\Delta v^*$$

En la gráfica adjunta, se representan las variaciones de la presión en función del tiempo. En ella se observa que el incremento de presión más preponderante se da en el segundo espacio temporal. La mayor depresión se da en el séptimo espacio temporal, aunque no se llegan a registrar presiones negativas, con lo que a priori queda descartada la aparición de cavitación.

Para disminuir el pico de presión en el segundo espacio temporal, se debería utilizar una válvula en la que la constante de pérdidas en el primer y el segundo espacios temporales fuese menor.

Fig. 94.3
Gráfica adimensional para los diferentes tiempos de cierre

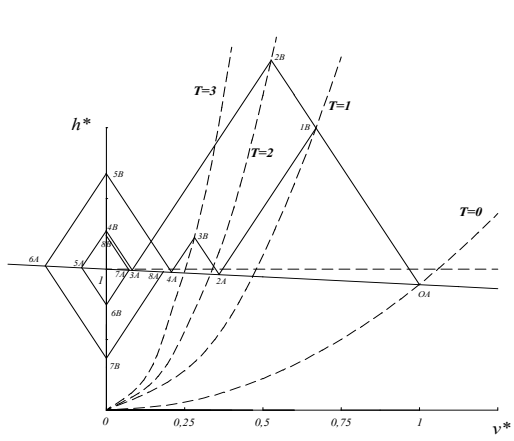
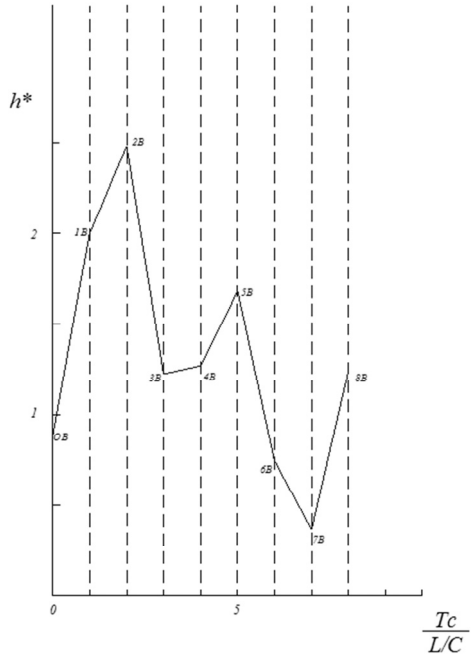


Fig. 94.4
Variación temporal de la presión en la válvula



Flujo compresible

13.1 Relaciones termodinámicas

El tratamiento del fluido como compresible conlleva generalmente, debido a la baja densidad de los gases, la consideración de que las fuerzas másicas desempeñan un papel prácticamente irrelevante. Asimismo es muy común considerar que el fluido se comporta como un gas ideal. Bien es cierto que, por ejemplo, en el análisis de la evolución del vapor de agua en calderas y conductos, el gas es necesario que se considere real. En este capítulo, que es únicamente una introducción al flujo compresible, se estudiará el fluido como ideal.

Cabe recordar que algunas relaciones termodinámicas aplicables a gases perfectos, son:

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T$$

$$u_2 - u_1 = \int_{T1}^{T2} C_v dT;$$

$$h_2 - h_1 = \int_{T1}^{T2} C_p dT;$$

$$h = u + \frac{p}{\rho};$$

$$C_p = C_v + R; \qquad \frac{C_p}{C_v} = \gamma; \qquad \gamma = \text{índice de politropía}$$

$$h_2 - h_1 = C_v(T_2 - T_1) + R(T_2 - T_1) = u_2 - u_1 + \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 - \left(\frac{p}{\rho}\right)_1;$$

Diferenciando la ecuación de la entalpía:

$$dh = du + \frac{dp}{\rho} + p \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) = du + \frac{dp}{\rho} - p \cdot \left(\frac{d\rho}{\rho^2}\right)$$

La relación entre la variación de entropía y el calor transferido a un sistema se enuncia:

$$s_2 - s_1 \geq \int_1^2 \frac{dq}{T}; \quad \begin{array}{l} = \text{proceso reversible} \\ > \text{proceso irreversible} \end{array}$$

Las ecuaciones de Gibbs se enuncian:

$$dq = dh - \frac{dp}{\rho}; \quad Tds = dh - \frac{dp}{\rho}; \quad Tds = du - p\frac{d\rho}{\rho^2}$$

Para gas ideal y calor específico constante, las ecuaciones de Gibbs se pueden integrar para dar:

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{dp}{\rho T} = C_p \frac{dT}{T} - \frac{R \cdot dp}{p}; \qquad ds = \frac{du}{T} - \frac{p\, d\rho}{\rho^2 T} = C_v \frac{dT}{T} - \frac{R \cdot d\rho}{\rho};$$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right); \qquad s_2 - s_1 = C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

Si el proceso es isentrópico: $s_2 - s_1 = 0$

$$0 = C_p \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln\frac{P_2}{P_1}; \qquad 0 = C_v \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Dividiendo por R, tomando antilogaritmos y teniendo en cuenta:

$$\frac{C_p = C_v + R}{C_v}; \qquad \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}; \qquad \gamma - 1 = \frac{R}{C_v}; \qquad \frac{C_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1};$$

$$\frac{C_p}{R} = \frac{C_v + R}{R} = \frac{C_v}{R} + 1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1};$$

se obtienen las relaciones:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{Cp}{R}}; \qquad \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; \qquad \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma}$$

Cabe recordar que estas relaciones son utilizables para gas ideal y proceso isentrópico.

13.2 Concepto de propiedades de estancamiento

Se definen dos tipos de propiedades en función del parámetro a medir:

- Propiedades de estado o estáticas: son los valores que medirían los instrumentos que no son capaces de apreciar el efecto de la velocidad del fluido.
- Propiedades de estancamiento: resultan de la combinación de las propiedades termodinámicas, con la velocidad y la posición del fluido. Estas propiedades representan el estado total (termodinámico y mecánico).

Con el fin de introducir el concepto de estancamiento, se procede al estudio de una partícula de fluido que se desplaza del punto 1 al punto 0.

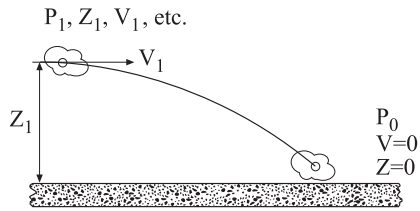


Fig. T 13.1
Concepto de estancamiento

Aplicando la ecuación de la energía entre 1 y 0, se tiene:

$$q - w_s = h_0 - h_1 + \frac{V_0^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + g \cdot z_0 - g \cdot z_1;$$

Si entre estos dos puntos no existe aporte de calor o trabajo y por definición, v_0 y z_0; son 0, se llega a:

$$h_0 = h_1 + \frac{V_1^2}{2} + g \cdot z_1; \quad h_0 = \text{se define como la entalpía de estancamiento.}$$

Recuérdese que, en el estudio del flujo compresible, la energía potencial debida a la fuerza de la gravedad es, en la mayora de los casos, despreciable, de donde:

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2}$$

Si el fluido es un gas ideal con calor específico constante, se cumple:

$$C_p \cdot T_0 = C_p \cdot T + \frac{v^2}{2}$$

Así, la temperatura de estancamiento o remanso se definirá: $T_0 = T + \dfrac{v^2}{2 \cdot C_p}$

Para gas ideal y proceso de estancamiento isentrópico, la relación entre presión y densidad de estancamiento con la temperatura se define:

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Dividiendo la temperatura de estancamiento por la temperatura estática, se tiene:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T};$$

Sustituyendo esta ecuación en las dos anteriores, se llega a:

$$P_0 = P\left(1+\frac{v^2}{2\cdot C_p\cdot T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}};\qquad \rho_0 = \rho\left(1+\frac{v^2}{2\cdot C_p\cdot T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

ecuaciones que determinan la presión y la densidad de estancamiento para un gas ideal en función de las características estáticas del mismo.

13.3 Estudio de la propagación de una onda débil en un fluido compresible. Concepto de velocidad del sonido y el número de Mach. Límite de incompresibilidad

En este apartado, se definirán las características principales de las ondas de presión al propagarse en el seno de un fluido.

Se define como:

c = velocidad de la onda de presión
Δv = velocidad del fluido detrás de la onda de presión
A = área de paso

Se supondrá que inicialmente el fluido está en reposo y se pone en movimiento por acción de la onda de presión; alternativamente, se podría suponer que el frente de onda es estacionario y el fluido se desplaza a la velocidad c en sentido contrario al frente de onda cuando este se movía.

Aplicando la ecuación de continuidad delante y detrás de la onda, volumen de control, se tiene:

$$\dot{m} = \rho\cdot A\cdot c = (\rho+\Delta\rho)\cdot(c-\Delta v)\cdot A$$

$$\frac{\rho\cdot c}{\rho+\Delta\rho} = c-\Delta v$$

$$\Delta v = c-\frac{\rho\cdot c}{\rho+\Delta\rho} = \frac{c(\rho+\Delta\rho)-\rho\cdot c}{\rho+\Delta\rho} = \frac{\Delta\rho\cdot c}{\rho+\Delta\rho}$$

Asumiendo que la variación de densidad entre ambos extremos sea pequeña: $\Delta v = c\cdot\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)$

Aplicando ahora la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control que engloba el frente de onda, y considerando que, los lados superior e inferior del volumen

de control son de tamaño despreciable, se obtendrá que la fuerza debida a la presión sobre las caras de entrada y salida ha de ser igual al flujo de cantidad de movimiento a través de las fronteras del volumen de control. Véase que la dirección positiva del eje de abscisas es hacia la izquierda.

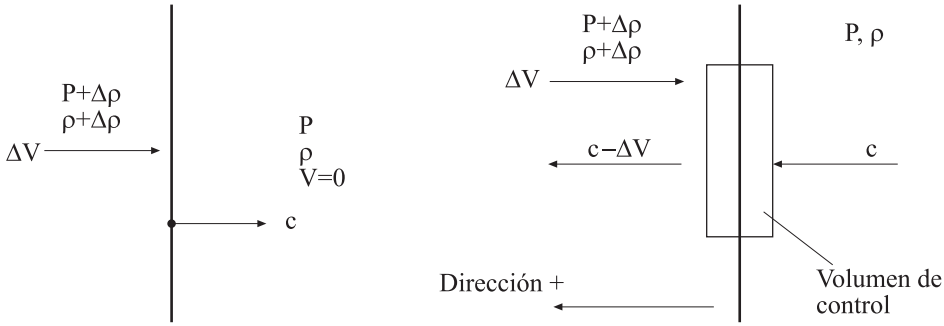


Fig. T 13.2
Frente de onda y volumen de control utilizado para su análisis

$$\sum F_x = p\cdot A-(p+\Delta p)\cdot A=\int \rho c_x \vec{c}\,d\vec{A}+\int (\rho+\Delta\rho)(c-\Delta v)_x\,(\vec{c}-\Delta\vec{v})\,d\vec{A}$$
$$=\dot{m}((c-\Delta V)-c)$$

y se obtiene:

$$-A\cdot\Delta p=-\dot{m}\cdot\Delta v$$

$$\Delta p=\frac{\dot{m}\cdot\Delta V}{A}=\rho\cdot A\cdot c\cdot\frac{\Delta V}{A}=\rho\cdot c\cdot\Delta V$$

Sustituyendo en esta ecuación, la ecuación de continuidad, queda:

$$\Delta p=\rho\cdot c\cdot\frac{\Delta\rho\cdot c}{\rho+\Delta\rho}$$

$$c^2=\frac{\Delta p}{\Delta\rho}\cdot\frac{\rho+\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta p}{\Delta\rho}\cdot\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)$$

La velocidad de propagación de una onda muy débil, es decir cuando el gradiente de presión y densidad entre extremos de la misma es muy pequeño, se denomina velocidad del sonido.

$$c^2=\lim_{\substack{\Delta p\to 0\\ \Delta\rho\to 0}}\left[\frac{\Delta p}{\Delta\rho}\cdot\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)\right]=\frac{\partial p}{\partial\rho}$$

En realidad, considerando el proceso termodinámico provocado por la onda como un proceso adiabático isentrópico, se puede definir la velocidad del sonido como:

$$c^2=\left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_s$$

Para un gas ideal, un proceso isentrópico obedece a la ecuación:

$$\frac{p}{p_{ref}} = \left(\frac{\rho}{\rho_{ref}}\right)^{\gamma},$$

de donde: $p = p_{ref}\left(\frac{\rho}{\rho_{ref}}\right)^{\gamma}$, $\frac{\partial p}{\partial \rho} = \left(\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}^{\gamma}}\right)\gamma\rho^{\gamma-1}$; $\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_{ref}} = \left(\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}}\right)\gamma = \gamma R\,T$

Así, para un gas ideal, $\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s = \gamma\cdot\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}} = \gamma\cdot R\cdot T$, con lo cual: $c = \sqrt{\gamma\cdot\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma\cdot R\cdot T}$

Para cualquier líquido y sólido, la velocidad de propagación del sonido y el módulo de elasticidad isentrópico están relacionados mediante la expresión:

$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$. Recuérdese que el módulo de elasticidad se definió como: $\beta = \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$

Un grupo adimensional básico para el análisis del flujo comprensible es el número de Mach, cuya definición era:

$M = \frac{v}{\sqrt{\frac{\beta}{\rho}}} = \frac{v}{c}$; o bien para gases ideales: $M^2 = \frac{v^2}{\gamma\cdot R\cdot T} = \frac{\rho\cdot v^2}{\gamma\cdot p}$

Un fluido se considera matemáticamente como incompresible cuando el número de Mach es pequeño, M<<1. En realidad, se puede evaluar el error que se comete al considerar un fluido como incompresible en función de su número de Mach.

Sea un flujo estacionario, ideal, donde no hay transferencia de trabajo o calor y donde se consideran irrelevantes los cambios de elevación. La presión de estancamiento en cualquier punto viene dada:

Según Bernoulli, fluido incompresible, $P_0 = P + \frac{1}{2}\rho V^2$;

Para fluido compresible, gas ideal, $P_0 = P\cdot\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

Si la consideración se restringe a números de Mach inferiores a 1, expandiendo en serie se tiene:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)\cdot(n-1)}{3!}x^3 + ...$$

Llamando a

$x = \frac{\gamma-1}{2}M^2$ y $n = \frac{\gamma}{\gamma-1}$ se obtiene:

$$\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1+\frac{\gamma}{2}M^2+\frac{\gamma}{8}M^4+....$$

Sustituyendo en la ecuación de la relación de presiones para fluido compresible, se tiene:

$$P_0 = P\left(1+\frac{\gamma}{2}M^2+\frac{\gamma}{8}M^4+....;\right)$$

Despreciando los términos de orden superior, esta relación se establece:

$$P_0 \cong P+\frac{\gamma P M^2}{2}\left(1+\frac{M^2}{4}\right);$$

Recuérdese que el número de Mach para gas ideal se puede dar como: $M^2 = \frac{v^2}{\gamma R T} = \frac{\rho v^2}{\gamma P}$

Así: $\gamma P M^2 = \rho V^2$

Sustituyendo en la ecuación de presión de estancamiento para fluido ideal, se obtiene:

$$P_0 \cong P+\frac{1}{2}\rho V^2\left(1+\frac{M^2}{4}\right)$$

Para valores del número de Mach pequeños, se tiene: $\frac{M^2}{4} << 1$

con lo cual la ecuación queda:

$$P_0 \cong P+\frac{1}{2}\rho V^2$$

que es exactamente igual a la ecuación de Bernoulli para fluido incompresible.

Se demuestra así que la ecuación de Bernoulli es una aproximación de la relación de presión del flujo isentrópico para números de Mach<<1.

Si se desea, por ejemplo, que el error al utilizar la ecuación de Bernoulli sea menor del 2%, entonces

$$M \le \sqrt{4 \cdot 0,02} = 0,283$$

Si el error es ≤ 2,25% → M ≤ 0,3 (valor que se acepta como límite de incompresibilidad)

13.4 Relación entre el número de Mach y las propiedades de estancamiento del fluido

La relación entre la temperatura de estancamiento y la temperatura estática se había definido como:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T}$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término por $\gamma \cdot R$, y utilizando las relaciones:

$$C_p = C_v + R; \qquad \frac{C_p}{C_v} = \gamma; \qquad c = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T}; \qquad M^2 = \frac{v^2}{\gamma \cdot R \cdot T} = \frac{\rho \cdot v^2}{\gamma \cdot p}$$

se llega a:

$$\frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} = \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} \cdot \frac{\gamma \cdot R}{\gamma \cdot R} = \frac{v^2}{2 \cdot c^2} \cdot \frac{\gamma \cdot R}{C_p} = \frac{v^2}{2 \cdot c^2} \cdot \frac{\gamma \cdot (C_p - C_v)}{C_p} = \frac{v^2}{2 \cdot c^2} \cdot \gamma \left(1 - \frac{C_v}{C_p}\right) = \frac{v^2}{2 \cdot c^2} \cdot \gamma \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$= \frac{v^2}{2 \cdot c^2} \cdot (\gamma - 1) = \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M^2$$

de donde:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M^2$$

Haciendo lo propio para las demás ecuaciones halladas, ecuaciones de presión, densidad y entalpía de estancamiento, se concluye:

$$P_0 = P\left(1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad ; \quad \frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\rho_0 = \rho\left(1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad ; \qquad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2} \qquad \frac{h_0}{h} = 1 + \frac{M^2 (\gamma - 1)}{2}$$

La relación entre presiones y densidades estáticas y de estancamiento se puede obtener:

$$\frac{P}{\rho \cdot T} = R; \qquad \frac{P_0}{\rho_0 \cdot T_0} = R; \qquad \frac{P}{P_0} = \frac{\rho \cdot T}{\rho_0 \cdot T_0};$$

Cabe recordar que la mayoría de las expresiones que se acaban de definir se encuentran tabuladas; por tanto para la realización de problemas, es común utilizar las tablas.

13.5 El cono de Mach

Se observa que, en función de la velocidad del fluido, las ondas de pequeña perturbación, como pueden ser las ondas sonoras, crean una evolvente que delimita la zona audible.

Para observar este fenómeno, se supone que se tiene una fuente sonora en reposo, y se estudia la propagación de las ondas sonoras cuando el fluido se desplaza a diferentes velocidades con respecto a la fuente. Se distinguen cuatro casos, (v. figura T 13.3):

(a) el fluido inicialmente no tiene movimiento

(b) el fluido se mueve a M=0,5 (efecto Doppler)

(c) el fluido se mueve a M=1

(d) el fluido se mueve a M=2

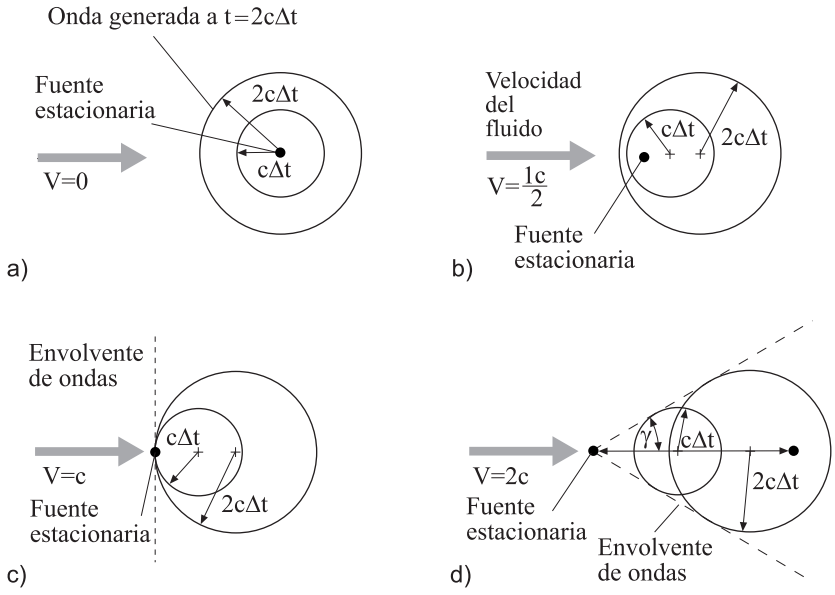
Obsérvese que, de estos cuatro casos, en tres de ellos las ondas de presión generadas son arrastradas corriente abajo por el fluido. Para el caso (c), las ondas forman una envolvente recta perpendicular a la velocidad del fluido. Las ondas no se propagan corriente arriba. En el caso (d), las ondas se arrastran corriente abajo más rápido de lo que se difunden, y quedan confinadas en una región triangular, o cónica, que se extiende corriente abajo desde el punto origen de las mismas. La envolvente formada se conoce como el *cono de Mach*. El semiángulo de la envolvente se puede calcular:

$$\sin\gamma = \frac{c\cdot\Delta t}{v\cdot\Delta t} = \frac{2\cdot c\cdot\Delta t}{2\cdot v\cdot\Delta t} = \ldots = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}; \qquad \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M}\right);$$

En conclusión se puede decir que:

- Cuando el flujo es incompresible M<<1, la influencia de la fuente sonora se percibe en todos los demás puntos del campo. Dicha influencia tiene la misma intensidad corriente arriba que corriente abajo.
- Para flujo subsónico, la influencia de la fuente sonora se percibe en todo el campo de fluido. El efecto se concentra más cerca del punto en la región corriente arriba.
- Para flujo sónico, la influencia de la fuente sonora no se percibe corriente arriba.
- Cuando el flujo es supersónico, la influencia de la fuente sonora está confinada a una región limitada corriente abajo. Cuanto mayor sea el número de Mach, menor será la región de influencia corriente abajo.

Fig. T 13.3
El cono de Mach



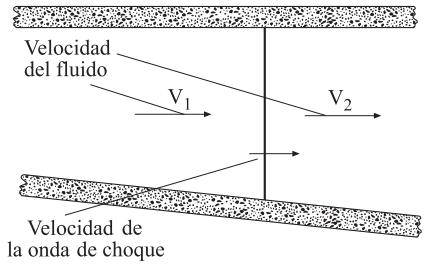
13.6 Características de las ondas de choque planas

Hasta este punto, se han considerado perturbaciones infinitesimales y ondas de fuerza infinitesimal; ahora, se considerarán ondas asociadas a perturbaciones finitas. Si se coloca un objeto finito, una cuña, un cono, etc., en el seno de una corriente de un flujo supersónico, se genera una onda de fuerza finita, a estas ondas se les denomina *ondas de choque* y son muy delgadas; las propiedades del fluido y su velocidad cambian muchísimo delante y detrás de la onda de choque.

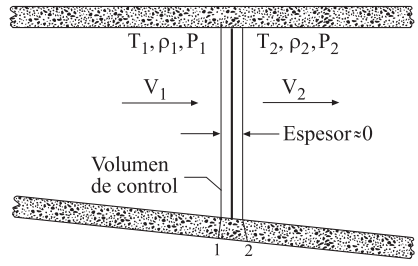
Puesto que este capítulo es meramente introductorio, el estudio se centra en las ondas de choque normales, ondas que aparecen en el flujo unidimensional y unidireccional.

Sea la onda de choque normal que se desplaza a lo largo del conducto que se muestra en la figura T 13.4.

Fig. T 13.4
Esquema de ondas de choque normales



Esquema del flujo



Volumen de control fijo situado alrededor de la onda de choque

Como hipótesis de trabajo, se establece:

El fluido tiene una distribución de velocidades uniforme, tanto a la entrada como a la salida de la onda.

La onda de choque tiene un espesor prácticamente nulo, con lo cual las secciones delante y detrás de la onda serán idénticas: $A_1 = A_2 = A$.

El volumen del fluido englobado en el interior del volumen de control se considera nulo.

De la aplicación de la ecuación de continuidad al volumen de control, se establece:

$$\rho_1 \cdot A \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A \cdot v_2$$

La velocidad del fluido viene dada por: $V = M \cdot c = M \cdot \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T}$

de donde la ecuación de continuidad puede expresarse como:

$$M_1 \cdot \rho_1 \cdot A \cdot \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_1} = \rho_2 \cdot A \cdot \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_2} \cdot M_2$$

$$M_1 \cdot \frac{P_1}{R \cdot T_1} \cdot \sqrt{T_1} = \frac{P_2}{R \cdot T_2} \cdot \sqrt{T_2} \cdot M_2$$

$$\frac{M_1 \cdot P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2 \cdot M_2}{\sqrt{T_2}}; \qquad \frac{M_2}{M_1} = \frac{P_1}{P_2} \cdot \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

ecuación que relaciona los números de Mach delante y detrás de la onda de presión con la presión y la temperatura en esos mismos dos puntos.

La aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento en el mismo volumen de control y para el flujo en dirección x da lugar a:

$$\sum F_x = \rho_2 \cdot v_2^{\,2} \cdot A - \rho_1 \cdot v_1^{\,2} \cdot A$$

Si el espesor del volumen de control es ≈ 0, las únicas fuerzas que actúan sobre la superficie son las de presión, con lo que:

$$\sum F_x = P_1 \cdot A - P_2 \cdot A$$

Puesto que el número de Mach se puede expresar como $M^2 = \frac{v^2}{\gamma \cdot R \cdot T} = \frac{\rho \cdot v^2}{\gamma \cdot P}$;

$\rho \cdot v^2 = M^2 \cdot \gamma \cdot P$.

Agrupando ambos términos de la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene:

$$P_1 \cdot A - P_2 \cdot A = \rho_2 \cdot v_2^{\,2} \cdot A - \rho_1 \cdot v_1^{\,2} \cdot A$$

$$P_1 - P_2 = M_2^{\,2} \cdot \gamma \cdot P_2 - M_1^{\,2} \cdot \gamma \cdot P_1$$

$$P_1 \cdot (1 + \gamma \cdot M_1^{\,2}) = P_2 \cdot (1 + \gamma \cdot M_2^{\,2})$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma \cdot M_1^{\,2}}{1 + \gamma \cdot M_2^{\,2}}$$

Aplicando al mismo volumen de control la ecuación general de la energía, se tiene:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} \left(h_2 - h_1 + \frac{v_2^{\,2}}{2} - \frac{v_1^{\,2}}{2} \right)$$

Considerando, además, que no existe transferencia de calor ni de trabajo, se llega a:

$$h_2 + \frac{v_2^2}{2} = h_1 + \frac{v_1^2}{2}$$

ecuación que implica que la entalpía de estancamiento delante y detrás de la onda permanece constante: $h_{02} = h_{01}$

Para gas ideal, que la entalpía de estancamiento sea constante implica $T_{02} = T_{01}$

Recordando que la relación entre temperatura estática y de estancamiento venía dada por la ecuación:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M^2$$

La relación de temperaturas estáticas delante y detrás de la onda de choque será:

$$T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M_2^{\,2} \right) = T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M_1^{\,2} \right)$$

ecuación que, en general, se presenta como:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \left[\frac{(\gamma - 1)}{2} \right] \cdot M_1^{\,2}}{1 + \left[\frac{(\gamma - 1)}{2} \right] \cdot M_2^{\,2}}$$

La relación del número de Mach con la presión y la temperatura en ambos extremos de la onda de choque se obtuvo de la ecuación de continuidad. Al elevarla al cuadrado, se obtiene:

$$\frac{M_2^{\,2}}{M_1^{\,2}} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Sustituyendo en esta ecuación las ecuaciones que proporcionan la relación de presiones y temperaturas en función del número de Mach, se obtiene una ecuación cuadrática, que relaciona los números de Mach a la entrada y salida de la onda de choque. Las soluciones de dicha ecuación resultante son:

-1. Solución válida cuando no hay onda de choque:

$$M_2^{\,2} = M_1^{\,2}$$

-2. Proporciona el número de Mach corriente abajo, en función del número de Mach corriente arriba.

$$M_2^{\,2} = \frac{M_1^{\,2} + \dfrac{2}{(\gamma-1)}}{\left[\dfrac{2\cdot\gamma}{(\gamma-1)}\right]\cdot M_1^{\,2} - 1}$$

Sustituyendo esta ecuación en las expresiones que relacionaban las presiones estáticas y las temperaturas estáticas con los números de Mach a la entrada y a la salida de la onda de choque, se obtienen estas mismas expresiones, en función ahora únicamente del número de Mach aguas arriba de la onda, y se obtiene:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\cdot\gamma}{1+\gamma}\cdot M_1^{\,2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2}\cdot M_1^{\,2}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot\gamma}{\gamma-1}\cdot M_1^{\,2} - 1\right)\cdot\left[\frac{2\cdot(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2\cdot M_1^{\,2}}\right]$$

Ecuaciones que relacionan respectivamente, las presiones estáticas y temperaturas estáticas en la entrada y salida de la onda de choque en función del número de Mach a la entrada.

La relación entre la presión estática y de estancamiento en un punto cualquiera se ha definido:

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\cdot M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Así, la relación entre las presiones de estancamiento delante y detrás de la onda de choque sería:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2 \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M_2^{\,2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}{p_1 \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M_1^{\,2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

Sustituyendo en esta ecuación, la ecuación que proporciona la relación de presiones entre extremos de la onda y la ecuación que da la relación de números de Mach, se obtiene:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \cdot M_1^{\,2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M_1^{\,2}\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \gamma}{1 + \gamma} \cdot M_1^{\,2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^{\frac{-1}{\gamma - 1}}$$

ecuación que relaciona la presión de estancamiento entre los dos extremos de la onda de choque con el número de Mach a la entrada.

La onda de choque se ha de entender como un cambio brusco de las propiedades del fluido.

La segunda ley de la termodinámica se expresa:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dq}{T}$$

cuyo desarrollo, expuesto al principio de este capítulo, ha dado lugar a la relación:

$$s_2 - s_1 = C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Dividiendo por R y recordando que $\frac{C_p}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ se obtiene:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right);$$

Si en esta ecuación se sustituyen las ecuaciones que proporcionan la diferencia de temperaturas y presiones entre extremos de la onda en función del número de Mach aguas arriba, se obtiene una expresión que relaciona la variación de entropía en función del número de Mach aguas arriba, de la cual se deduce:

-El cambio de entropía es negativo para números de Mach subsónicos a la entrada, en consecuencia, no puede existir tal onda de choque.
-Las ondas de choque pueden existir solamente si el flujo corriente arriba (en relación con la onda de choque) es supersónico.

13.7 Estudio del flujo isentrópico y estacionario para un gas ideal

Hipótesis de trabajo:

-El flujo es estacionario.
-Las fuerzas másicas son despreciables.
-No se consideran los esfuerzos cortantes.
-No existe transferencia de calor.
-No existe onda de choque en la zona donde se realiza el estudio.

La ecuación de la energía en forma integral y para flujo en régimen permanente queda representada por:

$$q - W_{eje} + W_{\tau} = \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right)$$

Según las hipótesis establecidas, $q = 0$ y $W_{\tau} = 0$, de donde:

$$-W_{eje} = \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right)$$

Utilizando la definición de entalpía de estancamiento:

$$-W_{eje} = h_{02} - h_{01}$$

para un gas ideal.

$$-W_{eje} = C_p \left(T_{02} - T_{01} \right)$$

Esta ecuación indica que, si se realiza un trabajo sobre un fluido, se incrementa su temperatura de estancamiento.

La entropía de estancamiento para flujo isentrópico cumple las siguientes condiciones:

$$S_{01} = S_1 \quad ; \quad S_{02} = S_2$$
$$S_{02} - S_{01} = S_2 - S_1 = 0$$

Recordando la relación entre la variación de la entropía en función de la variación de temperaturas y presiones para un gas ideal:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \text{ ; para flujo isentrópico, } 0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Sacando logaritmos:

$$1 = \frac{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}, \text{ o bien: } \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Realizando un proceso homólogo para el caso de la entropía de estancamiento, se obtendría:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{C_p}{R}}$$

Puesto que $-W_{eje} = C_p\left(T_{02} - T_{01}\right)$; $\frac{-W_{eje}}{C_p\, T_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)$

La relación de presiones de estancamiento se podrá dar:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(1 - \frac{W_{eje}}{CpT_{01}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Esta ecuación concluye que, si el flujo es isentrópico, las presiones de estancamiento son constantes sí y solo sí no existe trabajo en el eje. (Recuérdese que, según el convenio de signos de termodinámica, el trabajo comunicado al fluido es negativo).

Si $W_{eje} = 0$, el flujo se denomina *isentrópico e isoenergético*, $P_{01} = P_{02}$.

Véase, asimismo, que, según la ecuación de la energía:

$$-W_{eje} = 0 = C_p(T_{02} - T_{01}); \Rightarrow T_{01} = T_{02} \Rightarrow h_{01} = h_{02}$$

La relación entre las temperaturas estáticas y el número de Mach se estableció cuando se realizó el estudio para ondas de choque planas, y se obtuvo:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \left[(\gamma - 1)/2\right] \cdot M_1^2}{1 + \left[(\gamma - 1)/2\right] \cdot M_2^2};$$

Obsérvese que la relación de temperaturas estáticas obtenida en el apartado de ondas de choque planas es aplicable a flujo isentrópico, puesto que en ambos casos las temperaturas de estancamiento se mantienen constantes.

Para un flujo isentrópico e isoenergético, la presión de estancamiento, estática, y el número de Mach se relacionan:

Teniendo en cuenta que $P_{01} = P_{02}$ y recordando que

$$P_0 = P\left(1+\frac{V^2}{2CpT}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$P_1\left(1+\frac{V_1^2}{2CpT_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P_2\left(1+\frac{V_2^2}{2CpT_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \text{ o bien:}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\left\{1+\left[(\gamma-1)/2\right]\cdot M_1^2\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left\{1+\left[(\gamma-1)/2\right]\cdot M_2^2\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Se observa que las ecuaciones que relacionan las presiones y temperaturas estáticas entre dos puntos de una instalación y cuando el flujo es isentrópico, son función de los números de Mach en ambos puntos.

13.8 Condiciones críticas

Se denomina *estado crítico* cuando el flujo se desplaza a una velocidad sónica. Las propiedades del fluido en la sección donde esto suceda se denominan *propiedades críticas*.

Se quiere estudiar la aceleración de un gas, partiendo de una velocidad inicial nula hasta llegar a la velocidad sónica, y cuando el proceso es isoenergético e isentrópico. A medida que la velocidad del fluido aumenta, decrece su temperatura, con lo que la velocidad del sonido también decrecerá. Recuérdese que:

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\sqrt{\gamma R T}}{\sqrt{\gamma R T_0}} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para un proceso isentrópico y gas ideal, la relación entre la temperatura estática y la temperatura de estancamiento se ha definido como:

$$T_0 = T\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right);$$

En el estado crítico, M = 1, con lo cual:

$$T_0 = T^*\left(1+\frac{\gamma-1}{2}1^2\right), \qquad \text{o bien:} \quad \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma-1}$$

Se denomina T*, P* y ρ* a las propiedades del fluido en el estado crítico, mientras que T_0, P_0 y ρ_0 son las propiedades de estancamiento.

Para un proceso isoenergético e isentrópico dado, la relación entre las presiones críticas y de estancamiento y las densidades críticas y de estancamiento con la tempertura se definen:

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Estas dos ecuaciones se obtienen de combinar la ecuación que relacionaba la temperatura estática y de estancamiento con el número de Mach con, por un lado, la ecuación que relacionaba la presión estática y de estancamiento con el número de Mach y, por otro lado, la ecuación que relaciona la densidad estática y de estancamiento con el número de Mach. En las ecuaciones resultantes, se han sustituido los parámetros estáticos por los críticos.

13.9 Flujo unidimensional de un fluido comprensible evolucionando a lo largo de un conducto de sección variable

Cuando un fluido fluye a lo largo de un conducto, su movimiento está afectado por los cambios en el área del conducto, la fricción en las paredes y la transferencia de calor o trabajo. No obstante, en conductos de sección variable, es común no considerar la transferencia de calor o trabajo, ni tampoco la existencia de fricción con las paredes, con lo cual las posibles aceleraciones o desaceleraciones del fluido estarán causadas por el cambio de sección del conducto. El flujo se considerará isoenergético e isentrópico.

Se denomina *flujo isoenergético*, cuando no existe transferencia de calor o trabajo. El flujo es isentrópico, cuando no existen ondas de choque ni fricción en el volumen de control a estudiar.

El fluido debe satisfacer las ecuaciones de:

Ecuación de continuidad: $\rho V A = \dot{m} = cte.$

Ecuación de la Energía: $h + \frac{V^2}{2} = h_0 = cte.$

Ecuación de Gibbs: $dh - \frac{dP}{\rho} = T\,ds = 0$

Tomando logaritmos de la ecuación de continuidad y diferenciando, se llega a:

$$\log \rho + \log V + \log A = \log \text{cte.}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0;$$

Diferenciando la ecuación de la energía:

$$dh + V\,dV = 0$$

De la relación de Gibbs, se tiene:

$$dh = \frac{dP}{\rho}$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores, se tiene:

$$\frac{dP}{\rho} + V\,dV = 0$$

La velocidad de propagación de una perturbación se definió como

$$c^2 = \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_S, \quad dP = c^2 \cdot d\rho$$

de donde:

$$c^2 \frac{d\rho}{\rho} + V\,dV = 0$$

Combinando esta ecuación con la ecuación de continuidad, se llega a:

$$c^2\left(-\frac{dV}{V} - \frac{dA}{A}\right) + V\,dV = 0$$

$$-c^2 \frac{dV}{V} + V\,dV = \frac{dA}{A} c^2$$

$$\frac{dV}{V}\left(V^2 - c^2\right) = \frac{dA}{A} c^2$$

$$\frac{dV}{V}\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right) = \frac{dA}{A};$$

Recordando que el número de Mach se define: $M = \frac{V}{c}$, se obtiene:

$$\frac{dV}{V}=\frac{dA}{A}\left(\frac{1}{\frac{V^2}{c^2}-1}\right)=\frac{dA}{A}\left(\frac{1}{M^2-1}\right);$$

De esta última ecuación, se obtiene que la relación entre el cambio de velocidad y el cambio de sección del conducto depende del número de Mach del fluido, así para flujo subsónico y supersónico y un conducto convergente, se tiene:

- Para flujo subsónico, $M < 1$, si $dA < 0$; entonces $V \uparrow \Rightarrow h \downarrow; P \downarrow; \rho \downarrow$
- Para flujo supersónico, $M > 1$, si $dA < 0$; entonces $V \downarrow \Rightarrow h \uparrow; P \uparrow; \rho \uparrow$

De las ecuaciones diferenciales acabadas de hallar, se observa que, al aumentar la velocidad del fluido, la entalpía, la presión y la densidad disminuyen.

Con lo cual se concluye, que para flujo isoenergético e isentrópico, un conducto convergente siempre conduce el número de Mach hacia la unidad, mientras que uno divergente siempre lo lleva lejos de la unidad.

Si se considera el proceso de aceleración de un gas desde el reposo o desde un número de Mach subsónico bajo un conducto convergente, el número de Mach máximo posible que se puede alcanzar es la unidad. Este valor máximo puede ocurrir sólo al final del conducto convergente. Así, para que un fluido pase de régimen subsónico a supersónico, es necesaria una tobera convergente divergente.

Con el fin de averiguar si en la garganta de un conducto por el que fluye un fluido compresible el número de Mach es siempre la unidad, se utilizará de nuevo la ecuación:

$$\frac{dA}{A}=\left(M^2-1\right)\frac{dV}{V}$$

Véase que, si $dA = 0$, la igualdad en la ecuación se cumple si $M = 1$ o bien si $dV = 0$; a priori, no es posible conocer cuál de las dos condiciones se cumple. Con el fin de averiguarlo, se realiza el siguiente estudio. Sea un conducto de sección variable por el que circula un fluido compresible. La ecuación de continuidad aplicada entre dos puntos genéricos del conducto establece:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

Para un gas ideal, se cumple:

$$\rho = \frac{P}{R T}$$

$$V = M c = M\sqrt{\gamma R T}$$

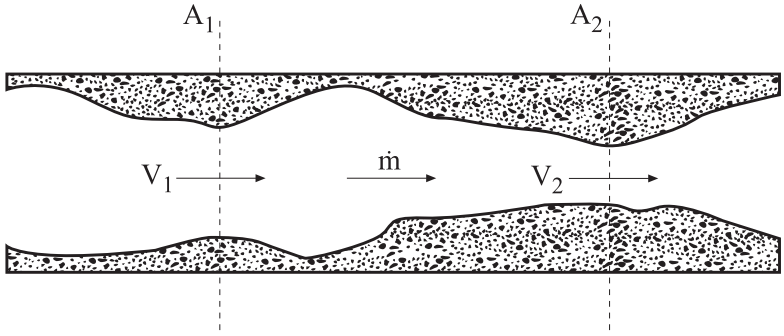


Fig. T 13.5
Esquema
de un conducto
de sección variable

Sustituyendo en la ecuación de continuidad:

$$P_1 M_1 A_1 \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{1}{\sqrt{T_1}} = P_2 M_2 A_2 \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{1}{\sqrt{T_2}}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2} \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo en esta ecuación las expresiones determinadas con anterioridad para fluido isentrópico, entre la relación de temperaturas y los números de Mach para dos puntos genéricos, y la relación entre presiones y los números de Mach, se obtiene:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2} \left\{ \frac{1 + \left[(\gamma - 1)/2 \right] M_2^2}{1 + \left[(\gamma - 1)/2 \right] M_1^2} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Ecuación que relaciona las dos secciones genéricas con los números de Mach en un conducto de sección variable.

Si una de estas dos secciones fuese la sección crítica, implicaría que en dicha sección el número de Mach ha de ser la unidad, de donde:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left\{ \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right) \left(1 + \left[(\gamma - 1)/2 \right] M^2 \right) \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Representando gráficamente la relación de áreas en función del número de Mach y para un valor de γ dado, se observa que la función pasa por un mínimo para M = 1, lo cual implica que, para un conducto de sección variable, el número de Mach puede llegar a ser la unidad, únicamente en el punto donde la sección sea mínima.

13.9.1 Concepto de caudal de bloqueo

La determinación del caudal másico que fluye por un conducto de sección variable, se define cuando se conocen la densidad, velocidad y sección en un punto dado: $\dot{m} = \rho V A$

Si el fluido es un gas ideal: $\rho = \frac{P}{R T}$; $V = M \cdot c = M \sqrt{\gamma R T}$

de donde $\dot{m} = P \cdot A \cdot M \left(\frac{\gamma}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}$;

Las relaciones entre las presiones y temperaturas estáticas y de estancamiento con el número de Mach eran:

$$P = P_0 \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)}; \qquad T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación del caudal másico, se obtiene:

$$\dot{m} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{P_0 A}{\sqrt{R T_0}} \right) M \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right]^{-\left(\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \right)}$$

En el punto donde el área sea el área crítica, se cumplirá A = A*; y M = 1, de donde:

$$\dot{m} = \frac{P_0 A^*}{\sqrt{R T_0}} \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

Siendo este el caudal másico que fluye a través de la sección mínima de paso.

La ecuación del caudal másico se puede dar en forma adimensional, y se obtiene:

$$\frac{\dot{m} \cdot \sqrt{R T_0}}{P_0 A} = \sqrt{\gamma} M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\left(\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \right)};$$

El término de la izquierda de esta ecuación muestra la función adimensional del caudal másico; se observa que es únicamente función del número de Mach y del índice de politropía.

Si se representa esta ecuación para diferentes valores del índice de politropía, se observa que todas las funciones tienen un máximo y este máximo siempre aparece para Mach igual a la unidad. Puesto que el valor máximo del número de Mach en la garganta es la unidad, esto implica que el valor de la función adimensionalizada de caudal másico será también máxima en dicha sección.

13.9.2 Evolución del flujo en una tobera convergente

Sea un tanque de grandes dimensiones del cual se extrae gas a través de una tobera convergente hacia una región de presión variable. Dicha presión se puede variar a voluntad. Se supone que no existe fricción en las paredes ni transferencia de calor o trabajo. El flujo se considera isentrópico e isoenergético.

En función de lo explicado hasta el momento, se conoce:

Puesto que la tobera es convergente, el caudal másico estará bloqueado al llegar a M = 1 en la sección mínima. El flujo en la entrada de la tobera será subsónico; por tanto, toda la tobera estará sometida a flujo subsónico, con la posible excepción del extremo de la misma. Como el flujo no puede ser supersónico, no pueden existir ondas de choque. Existe un caudal másico máximo, que se determinará en función de las constantes del gas (γ y R), los valores de las propiedades en el tanque y el área de salida. Recuérdese que, para flujo isentrópico, las propiedades P_0 y T_0 se mantienen constantes en todo punto.

En la figura que se reproduce a continuación, se ha graficado el caudal másico adimensional $\frac{\dot{m}\sqrt{R\,T_0}}{P_0 A_{sal}}$ en función del gradiente de presiones; asimismo, se detalla la caída de presión a lo largo de la tobera, así como la presión adimensional en la sección mínima de paso en función del gradiente de presiones entre depósitos. El gradiente de presiones se modificará, al ir disminuyendo la presión en el depósito receptor, el de la derecha.

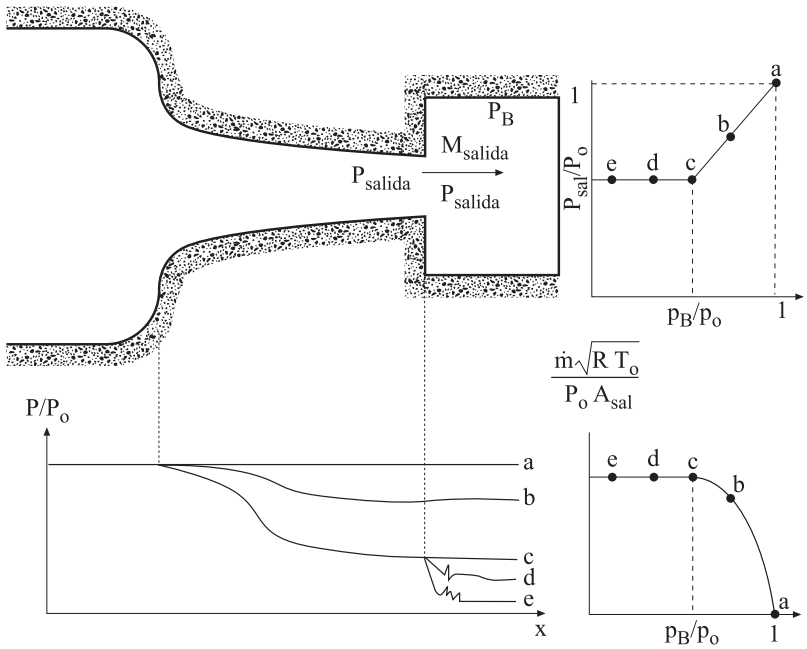


Fig. T 13.6
Distribución de presiones y caudal másico circulante en una tobera convergente
Fuente: Gerhard P., Gross R., Hochstein J. Mecánica de Fluidos 1995

Véase que la curva a es la que caracteriza un flujo nulo; en la b el flujo es pequeño, siendo asimismo pequeño el gradiente de presiones a lo largo de la tobera. Para estas curvas, el flujo es subsónico en todo punto. La curva *c* caracteriza el flujo sónico en la garganta de la tobera; a partir de este punto, el flujo estará bloqueado, el caudal másico no podrá aumentar y el número de Mach en la garganta será la unidad. Las curvas *d* y *e* se caracterizan por tener la misma distribución de presiones y caudal másico que la curva *c*. El fluido saliente de la garganta ha de realizar una adaptación brusca de su presión con la presión que posee el depósito receptor; esta adaptación se realiza mediante una expansión del fluido.

Para las curvas *b* y *c*; se cumple que:

$$\frac{P_{sal}}{P_0} = \frac{P_B}{P_0}$$

El flujo bloqueado aparece puesto que, una vez el flujo de salida se hace sónico, las ondas de presión de la región de salida no se pueden propagar corriente arriba en la tobera con el fin de causar algún ajuste del flujo.

13.9.3 Evolución del flujo en una tobera convergente divergente

Sea la tobera convergente divergente que se expone en la figura siguiente. Al igual que en el caso precedente, la presión en la cámara aguas abajo se puede variar mediante la válvula de control. Se supone que no existe fricción y que no hay transferencia de calor o trabajo.

Como observaciones preliminares, se puede establecer:

El flujo podrá superar el número de Mach sónico en la zona divergente de la tobera, con lo cual, en esta región el flujo podrá llegar a ser supersónico y, en consecuencia, podría haber ondas de choque en el flujo. Si las hay, el flujo no se podrá considerar completamente isentrópico aunque sí isoenergético.

El caudal másico máximo posible en la tobera está determinado por las constantes del gas, las propiedades del gas en el tanque y el área mínima, la cual se presenta en la garganta.

Los valores máximos del número de Mach aparecen en la sección divergente de la tobera y son debidos a la aceleración del fluido en un proceso isentrópico. El número de Mach máximo forzosamente ha de aparecer en la salida de la tobera, al final de la zona divergente.

Comparando las mismas variables que en el caso precedente, se obtiene el siguiente diagrama:

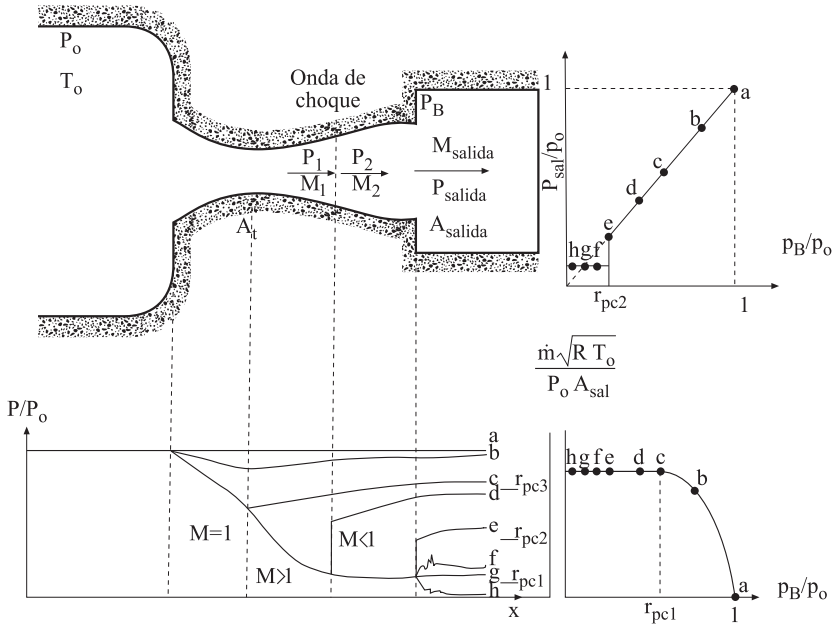


Fig. T 13.7 Distribución de presiones y caudal másico circulante en una tobera convergente-divergente. Fuente: Gerhard P., Gross R., Hochstein J. Mecánica de Fluidos 1995

En la curva *a* no hay flujo; la curva *b* caracteriza un flujo subsónico, tanto en la zona convergente como en la divergente. En la parte convergente de la tobera, el gas se acelera y la presión decrece, $M_{garganta}<<1$, en la parte divergente de la tobera el flujo se desacelera y la presión aumenta. Se tiene flujo subsónico, no hay ondas de choque.

El caudal másico circulante se puede calcular mediante la ecuación:

$$\frac{\dot{m}\cdot\sqrt{R\,T_0}}{P_0 A}=\sqrt{\gamma}\,M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\right)}$$

Con las ecuaciones:

$$\dot{m}=\frac{P_0\,A^*}{\sqrt{R\,T_0}}\sqrt{\gamma}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}};\qquad \frac{A}{A^*}=\frac{1}{M}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\left[(\gamma-1)/2\right]M^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

se podría calcular un valor de A* en el plano de salida, entendiendo que la A* sería menor que la A_t.

Recuérdese que, en general, el área A* es el área necesaria para acelerar o desacelerar un flujo hasta llegar a condiciones sónicas. Dicha sección no tiene por qué ser un área real del conducto.

En la curva *c*, el flujo es tal que el número de Mach en la garganta es igual a 1; el flujo está bloqueado; la presión y la sección en la garganta se definen como P* y A*. Corriente abajo de la garganta, la presión aumenta; ahora el fluido se expande; la contra-

presión a la cual la tobera se bloquea es mayor que P^*/P_0; la relación de presiones que causa que el bloqueo ocurra en primera instancia se denomina *primera relación de presión crítica* $r_{pc1,}$ y se puede calcular, hallando la relación de presiones correspondiente a la región subsónica de $\frac{A}{A^*}$.

En la curva *d*, se observa que, en la porción convergente de la tobera, el flujo se acelera, alcanza la velocidad sónica en la garganta y se sigue acelerando en la zona divergente inmediatamente después de la garganta, alcanzando en esta zona una velocidad supersónica. En un punto genérico en la zona divergente de la tobera, aparece una onda de choque, lo cual modifica sustancialmente las condiciones de presión después de la onda, aumenta la presión y el flujo pasa a ser subsónico; la presión a partir de este punto irá aumentando hasta llegar a ser la presión del depósito de salida. La posición exacta de la onda de choque depende de la contrapresión.

La curva *e* sigue un proceso similar al seguido por la curva *d,* aunque ahora la onda de choque se crea en la sección de salida de la tobera, es decir, la relación de presiones entrada-salida es tal que en toda la zona divergente de la tobera el flujo es supersónico, y la onda de choque se produce en el punto más alejado de la garganta posible. A partir de este punto, se verá que, aunque disminuya la presión en el depósito de salida, la onda de choque se producirá en el mismo punto. El caudal másico circulante, por otro lado, sigue siendo el mismo que para las curvas *c* y *d.*

Una ulterior disminución de la presión en el depósito de salida da lugar a las mismas características de flujo que en el caso anterior, lo que sucede ahora, curva *f*, es que la presión que aparece a la salida de la onda de choque es menor que la que hay en el depósito de salida; así, el flujo experimentará una pequeña compresión en el depósito hasta acomodarse a la presión del mismo. En realidad, la onda de choque se convierte ahora en multidimensional, el gas saldrá de la tobera con velocidad supersónica y con un número de Mach saliente que corresponde a la relación de áreas entre la garganta y la salida de la tobera.

Puesto que el flujo en toda la tobera se considera isentrópico, la presión de estancamiento se mantendrá constante en toda la tobera.

La curva *g* da lugar a las mismas características que la curva *f*, con la salvedad de que ahora la presión a la salida de la onda de choque coincide con la presión del depósito, así que no es necesario ajuste alguno de presión.

Por último, se observa que en la curva *h* la presión a la salida de la onda de choque es mayor que la que existe en el depósito de salida, con lo cual la adaptación de presión se realizará mediante una expansión del gas.

Como conclusión, se puede establecer que, en una tobera convergente divergente, aparecen cuatro regímenes de flujo, delimitados por las curvas *c, e,* y *g*. En las curvas anteriores a la *c*, el régimen de flujo es simplemente el de un tubo de venturi, el flujo es subsónico e isentrópico en todo punto. En la porción convergente, el flujo se acelera y,

en la divergente, se desacelera. El número de Mach máximo y la presión mínima ocurren en la garganta.

Entre las curvas *c* y *e*, el flujo es sónico en la garganta y parcialmente supersónico en la porción divergente de la tobera. La aceleración del fluido termina en una onda de choque; que se mantiene en la porción divergente en una localización determinada por el valor exacto de la contrapresión. El flujo experimenta una desaceleración subsónica desde la onda de choque hasta la salida. El flujo está bloqueado.

El estado existente entre las curvas *e* y *g* se denomina *régimen sobreexpandido*. El flujo se acelera a lo largo de toda la tobera. En la garganta, el flujo es sónico y, a la salida de la tobera, es supersónico. Al salir de la tobera, la presión del gas aumenta hasta llegar a tener la presión del fluido aguas abajo, depósito de salida.

Por último, la curva *h* obedece al flujo en *régimen subexpandido*. Este caso es similar al régimen sobreexpandido, con la excepción de que los ajustes de presión externos son expansivos en lugar de compresivos.

Las relaciones de la contrapresión con respecto a la presión de suministro que corresponden a estos casos se denominan:

-Primera relación de presión crítica (r_{pc1}); (curva *c*)
-Segunda relación de presión crítica (r_{pc2}); (curva *e*)
-Tercera relación de presión crítica (r_{pc3}); (curva *g*)

Estas relaciones se calculan:

a) $$r_{pc1} = \frac{P}{P_0}\ \frac{A}{A^*}; \qquad \frac{A}{A^*} = \frac{A_{sal}}{A_{garganta}},\ M < 1$$

Mediante la relación de áreas, se determina la relación $\frac{p_{estática}}{p_0}$ buscando en la zona subsónica de las tablas.

b) $$r_{pc2} = \frac{P_2}{P_1}(M_{sal}) \cdot \frac{P_1}{P_{01}}(M_{sal})$$

Puesto que existe una onda de choque a la salida de la tobera, la segunda relación de presión crítica se calcula determinando la relación entre las presiones estática corriente abajo y de estancamiento corriente arriba, donde:

$\frac{P_2}{P_1}(M_{sal})$ es la función de la relación de presiones estáticas de la onda de choque.

$\frac{P_1}{P_{01}}(M_{sal})$ es la relación de presiones estática, estancamiento a la entrada de la onda de choque.

El número de Mach a la salida se determina mediante la relación de secciones:

$$M_{sal} = M\left(\left(\frac{A}{A^*}\right) = \left(\frac{A_{sal}}{A_{garganta}}\right)\right);$$

c) $$r_{pc3} = \frac{P}{P_0}\frac{A}{A^*}; \qquad \frac{A}{A^*} = \left(\frac{A_{sal}}{A_{garganta}}\right), \quad M > 1$$

Para la relación de secciones de la tobera, la relación $\frac{p_{estática}}{p_0}$ se halla buscando en la zona supersónica de tablas.

13.10 Flujo compresible unidimensional estacionario en conductos de sección constante

En un conducto de sección constante por el que circula fluido incompresible, la velocidad media, el caudal másico, la cantidad de movimiento y la energía cinética se mantienen constantes.

En un conducto de sección constante por el que circula fluido compresible, al variar la densidad variará también la velocidad media con el fin de que se cumpla la ecuación de continuidad. La variación de velocidad implica que la energía cinética y la cantidad de movimiento también varíen; la caída de presión en el sistema dependerá de los esfuerzos cortantes y de los cambios de cantidad de movimiento.

La fricción existente entre el fluido y el conducto no puede ser interpretada en términos de caída de presión estática. Para flujo compresible, el término de fricción aparecerá en la ecuación de cantidad de movimiento. En consecuencia, es necesario solucionar simultáneamente las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, para determinar los efectos de la fricción sobre el fluido.

Aparecen cuatro tipos de problemas:

a. Flujo adiabático sin transferencia de calor y con fricción. Flujo de Fanno.

b. Flujo isotérmico. Se transfiere el calor necesario para mantener la temperatura.

c. Flujo con transferencia de calor y sin fricción. Flujo de Rayleigh.

d. Flujo con fricción y transferencia de calor simultáneas.

A continuación, se va a realizar un breve resumen de varios de estos flujos.

13.10.1 Flujo adiabático sin transferencia de calor y con fricción, flujo de Fanno

Hipótesis de trabajo:

- Régimen permanente
- Gas ideal
- No hay transferencia de calor
- El conducto es horizontal y de sección constante
- Existen esfuerzos cortantes entre el fluido y la pared

La figura siguiente representa un conducto de sección constante por donde circula fluido compresible. Se define un volumen de control donde se aplicarán las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos.

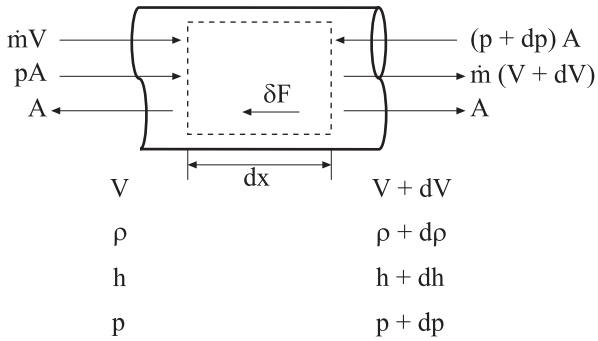


Fig. T 13.8 Elemento diferencial de volumen en un conducto de área constante, con fricción y sin transferencia de calor

Aplicando la ecuación integral de continuidad al volumen de control de la figura anterior, y para régimen permanente se tiene:

$$\rho\, v\, A = (\rho + d\rho)(v + dv)A$$

Esta ecuación se puede dar como $\dfrac{\dot{m}}{A} = G = \text{cte.}$

Despreciando los diferenciales de segundo orden, se obtiene:

$$\rho\, dv + v\, d\rho = 0$$

Dividiendo por ρV:

$$\frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Tomando la ecuación de estado para gases ideales, $P = R\,T\rho$, y, diferenciándola, se tiene:

$$dP = R\,(\rho\, dT + T\, d\rho)$$

Dividiendo por $RT\rho$ se obtiene: $\dfrac{dP}{RT\rho} = \dfrac{dT}{T} + \dfrac{d\rho}{\rho}$,

que también se puede dar como $\frac{dP}{P}=\frac{dT}{T}+\frac{d\rho}{\rho}$, o bien $\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dP}{P}-\frac{dT}{T}$

La velocidad del fluido se puede dar como $v = M\,c = M\sqrt{\gamma R\,T}$

Aplicando logaritmos y diferenciando, se tiene, (diferenciando logarítmicamente):

$$\ln(v)=\ln(M)+\frac{1}{2}\ln(\gamma R\,T)$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{dM}{M}+\frac{\gamma R\,dT}{2\gamma R\,T};\quad \frac{dv}{v}=\frac{dM}{M}+\frac{dT}{2T}$$

Sustituyendo las ecuaciones que definen $\frac{dv}{v}$ y $\frac{d\rho}{\rho}$ en la ecuación de continuidad, se obtiene la expresión resultante de la ecuación de continuidad:

$$\frac{dM}{M}+\frac{dP}{P}-\frac{1}{2}\left(\frac{dT}{T}\right)=0 \qquad (A)$$

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control definido en la figura inicial de este apartado, se tiene:

$\sum dF_x = \rho\,v\,A\left[(v+dv)-v\right]$

Las fuerzas correspondientes a la distribución de presiones y el esfuerzo cortante son:

$$\sum dF_x = p\,A-(p+dp)\,A-\tau_w\,P_{\text{erímetro}}\,dx$$

Igualando estas dos ecuaciones, se tiene:

$$\rho\,v\,A\,dv=-A dp-\tau_w\,P_{\text{erímetro}}\,dx$$

Dividiendo por $\rho\,v^2\,A$, se llega a:

$$\frac{dV}{V}+\frac{dP}{\rho v^2}+\frac{\tau_w}{\rho v^2}\left(\frac{P_{\text{erímetro}}}{A}\right)dx=0$$

Recordando que

$$M^2=\frac{v^2}{\gamma RT}=\frac{\rho\,v^2}{\gamma p};\quad D_h=\frac{4\,A_{\text{área mojada}}}{P_{\text{perímetro mojado}}};\ C_f=\frac{f}{4}=\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho v^2}$$

Y, sustituyendo estas relaciones en la ecuación diferencial anterior, se llega a:

$$\frac{dv}{v}+\frac{1}{\gamma M^2}\left(\frac{dP}{P}\right)+\frac{1}{2}4C_f\,\frac{dx}{D_h}=0$$

Recuérdese que la ecuación de continuidad establecía $\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T}$

Sustituyendo la ecuación de continuidad en la de cantidad de movimiento y multiplicando por γM^2, se obtiene:

$$\gamma M dM + \frac{\gamma M^2}{2}\frac{dT}{T} + \frac{dP}{P} + \frac{\gamma M^2}{2} 4C_f \frac{dx}{D_h} = 0 \qquad \text{(B)}$$

De la aplicación de la ecuación de la energía al mismo volumen de control que para las ecuaciones precedentes, se obtiene:

$$dq - dw = \left[(h + dh) + \frac{1}{2}(v + dv)^2 \right] - \left[h + \frac{v^2}{2} \right]$$

Si el flujo se considera adiabático y no hay transferencia de trabajo, despreciando además los diferenciales de segundo orden con respecto a los de primer orden, se obtiene:

$$dh + v\,dv = 0$$

Puesto que el gas se considera ideal, se puede decir que:

$$C_p\,dT + v\,dv = 0$$

ecuación que se puede dar como:

$$C_p \left[dT + d\left(\frac{v^2}{2C_p} \right) \right] = C_P\,dT_0 = 0\,;\ \text{siendo } T_0 = \text{temperatura de estancamiento}$$

De esta ecuación se deduce que la temperatura de estancamiento a lo largo de todo el conducto se mantiene constante y, en consecuencia la entalpía de estancamiento deberá ser asimismo constante a lo largo de todo el conducto. Esta ecuación se denomina *ecuación de la línea de Fanno.*

En la figura siguiente, se representan dos líneas de Fanno en un diagrama temperatura - entropía, líneas de entalpía de estancamiento constante. Dichas líneas se caracterizan por tener un caudal másico $G = \frac{\dot{m}}{A}$ constante y unas mismas condiciones estáticas iniciales. Obsérvese que, independientemente del estado inicial, la evolución del fluido en el interior del conducto es hacia el punto de máxima entropía, donde el número de Mach será la unidad. Este diagrama ha de entenderse de modo que, en un conducto dado, pueden pasar diferentes caudales másicos. Para cada caudal másico existe una longitud de conducto para la cual el flujo en el extremo del conducto es sónico y la entropía es máxima.

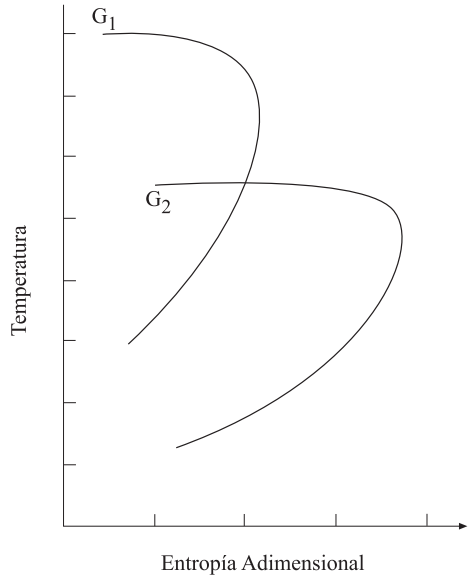


Fig. T 13.9 Representación de la línea de Fanno

Recuérdese que la ecuación de continuidad se podía dar como:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T}; \qquad dv = v\left(\frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T}\right)$$

Puesto que $\frac{c_P}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ y que $M^2 = \frac{\rho V^2}{\gamma P} = \frac{V^2}{\gamma RT}$,

el término $\frac{v^2}{C_P T}$ se puede dar como $\frac{v^2}{C_P T} = \frac{\gamma R}{C_P}\frac{v^2}{\gamma R\, T} = (\gamma - 1)M^2$

La ecuación de la energía para gas ideal $C_p\, dT + v\, dv = 0$ se podrá transformar en:

$$C_p\, dT + v^2\left(\frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T}\right) = 0$$

Dividiendo por $C_p\, T$, se llega a:

$$\frac{dT}{T} + \frac{v^2}{C_p\, T}\left(\frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T}\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{dT}{T}\left(1 + \frac{v^2}{C_p\, T2}\right) + \frac{v^2}{C_p\, T}\frac{dM}{M} = 0$$

de donde, en función del número de Mach, se tiene:

$$\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)M dM = 0 \qquad \text{(C)}$$

siendo esta la ecuación de la energía resultante. Véase que relaciona el cambio de temperatura con el cambio del número de Mach entre dos puntos genéricos de un conducto.

Las ecuaciones resultantes de continuidad, cantidad de movimiento y energía contienen cuatro diferenciales adimensionales: $\frac{dp}{p}$; $\frac{dT}{T}$; $\frac{dx}{D_h}$; dM. Puesto que se dispone de tres ecuaciones, se podrán expresar tres de las diferenciales en función de la diferencial independiente. Esta será $\frac{dx}{D_h}$, puesto que caracteriza la longitud del conducto.

La ecuación de la energía (C) se puede dar de la forma:

$$\frac{dT}{T} = (-)\frac{(\gamma-1)M}{1+\left[\frac{(\gamma-1)}{2}M^2\right]}dM \qquad (D)$$

Sustituyendo esta ecuación en la de continuidad (A), se obtiene:

$$\frac{dP}{P} = -\left\{\frac{1}{M} + \frac{\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)M}{1+\frac{(\gamma-1)}{2}M^2}\right\}dM \qquad (E)$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación de cantidad de movimiento (B), y después de simplificar, se llega a:

$$dM = \frac{M\left\{1+\left[\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)M^2\right]\right\}}{\left(1-M^2\right)}\frac{\gamma M^2}{2}4C_f\frac{dx}{D_h} \qquad (F)$$

Sustituyendo ahora la ecuación acabada de hallar en las dos ecuaciones precedentes, se obtendrá la variación de temperaturas y presiones en función del número de Mach, del índice de politropía y de las características del conducto.

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma-1)M^2}{\left(1-M^2\right)}\frac{\gamma M^2}{2}4C_f\frac{dx}{D_h} \qquad (G)$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1+(\gamma-1)M^2}{\left(1-M^2\right)}\frac{\gamma M^2}{2}4C_f\frac{dx}{D_h} \qquad (H)$$

Las ecuaciones (F), (G) y (H) determinan cómo varían la temperatura, la presión y el número de Mach a medida que el flujo se desplaza a lo largo de la tubería.

Obsérvese que, dependiendo del término $(1 - M^2)$, los cambios de presión, temperatura y número de Mach pueden ser positivos o negativos. Así, se puede decir que para flujo subsónico, la fricción provoca que el número de Mach aumente y la presión y temperatura disminuyan a medida que se avanza por el conducto, el flujo se acelera. En cambio para flujo supersónico, la fricción provoca que el número de Mach disminuya mientras que la presión y temperatura aumentan.

El punto en donde M = 1 sólo puede ocurrir cuando $4C_f \frac{dx}{D_h} = 0$, y esto únicamente puede suceder cuando $C_f = 0$ ó dx = 0. Si $C_f = 0$, implica que no existe fricción. Este sería el caso del estudio de un flujo isentrópico. Si dx = 0, significa que el fluido no puede seguir corriente abajo; es decir, para flujo adiabático con fricción, el número de Mach sólo puede ser 1 al final del conducto.

El flujo adiabático con fricción en un conducto de área constante y el flujo isentrópico en una tobera convergente se parecen en que, en ambos, el número de Mach se dirige hacia el valor 1 y en que el número de Mach solo puede valer 1 al final del conducto.

A continuación, se estudiará cómo actúa el efecto de fricción sobre las propiedades de estancamiento. Para flujo adiabático, se ha demostrado mediante la ecuación de la energía que la temperatura de estancamiento se mantiene constante, $dT_0 = 0$.

La relación entre la de presión de estancamiento, la presión estática y el número de Mach venía dada por:

$$P_0 = P\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Sacando logaritmos y luego diferenciando (diferenciando logarítmicamente), se obtiene:

$$\ln P_0 = \ln P + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{dP}{P} + \left\{\frac{\gamma M}{1 + \left[\frac{\gamma - 1}{2} M^2\right]}\right\} dM ; \qquad \text{(I)}$$

Sustituyendo las ecuaciones en (F) y (H) en la ecuación acabada de determinar y simplificando, se llega a:

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma M^2}{2} 4C_f \frac{dx}{D_h} ;$$

Esta ecuación indica que la presión de estancamiento en un conducto de sección constante y con fricción, siempre decrece a lo largo del conducto. El valor mínimo de la presión de estancamiento ha de encontrarse al final del conducto.

El caudal másico adimensional venía dado por la ecuación $\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{P_0 A}$. Esta ecuación encontrará su máximo al final del conducto, puesto que R, A y T_0 son constantes a lo largo del conducto, y P_0 tiene su mínimo al final del conducto.

Si se integran las ecuaciones (F), (G) y (H), se obtienen la variación del número de Mach, la presión y la temperatura a lo largo del conducto.

Integrando la ecuación (F) entre una sección genérica del conducto y una sección en donde se cumple que el número de Mach vale la unidad, se obtiene:

$$\int_x^{x+L^*} 4C_f \frac{dx}{D_h} = \int_M^1 \frac{2(1-M^2)}{\gamma M^3 \left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right\}} dM$$

Procediendo a la integración, se obtiene:

$$4C_f \frac{L^*}{D_h} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln\left(\frac{(\gamma+1)M^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right\}}\right)$$

La longitud L^* se denomina *longitud crítica,* es decir, longitud para la cual en el extremo del conducto se tienen condiciones críticas, valor del número de Mach igual a la unidad. El número de Mach que aparece en la ecuación precedente es el número de Mach del fluido en el extremo entrante del conducto de longitud L^*.

Entre dos puntos genéricos del conducto, y basándose en la ecuación obtenida, se puede establecer:

$$4C_f \frac{\Delta x}{D_h} = 4C_f \frac{L^*}{D_h}(M_1) - 4C_f \frac{L^*}{D_h}(M_2)$$

Obsérvese que esta ecuación relaciona la longitud entre dos puntos genéricos de un conducto con la longitud de cada uno de estos puntos con la sección donde M = 1.

La relación entre la presión estática y la temperatura estática con el número de Mach se obtiene de integrar las ecuaciones (D) y (E).

De la integración de la ecuación (E) entre un punto genérico y un punto donde el número de Mach valga la unidad, se obtiene:

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M}\left\{\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Operando de manera homóloga para la ecuación (D), se obtendrá:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}$$

Para obtener la relación de presiones de estancamiento, se combinan las ecuaciones (E) e (I) y, después de proceder a la integración, se llega a:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{1}{M}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Estas funciones se encuentran tabuladas para diferentes valores de γ.

Es interesante recordar que, entre dos puntos de un conducto, se pueden establecer las siguientes relaciones, cuyo numerador y denominador han sido definidos por las ecuaciones precedentes.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{P}{P^*}(M_2)}{\frac{P}{P^*}(M_1)}; \qquad \frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\frac{P_0}{P_0^*}(M_2)}{\frac{P_0}{P_0^*}(M_1)}; \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{T}{T^*}(M_2)}{\frac{T}{T^*}(M_1)};$$

13.10.2 Flujo compresible isotérmico con fricción en una conducción larga de sección constante

Este es el caso de un fluido compresible que fluye a lo largo de una tubería larga donde se considera la ficción y existe además una transferencia de calor suficiente para que la temperatura del gas se mantenga constante.

Para flujo isotérmico, la viscosidad del gas se mantendrá constante a lo largo de la tubería, puesto que la temperatura se mantiene constante y las variaciones de viscosidad con la presión son pequeñas.

Las ecuaciones gobernantes obtenidas al aplicar las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos a un volumen diferencial de fluido situado en el interior de un conducto de sección constante son:

Ecuación de continuidad: $G = \dfrac{\dot{m}}{A} = \rho\, v = cte.$

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{2\,dP}{\rho\, v^2} + \frac{2\,dv}{v} + \frac{4 C_f\, dx}{D_h} = 0 \text{ , o bien } \frac{dP}{\rho} + v\,dv + \frac{v^2}{2}\frac{4 C_f\, dx}{D_h} = 0$$

Ecuación de la energía: $\delta Q = d\left(\dfrac{v^2}{2}\right) = dh_0 = C_p\, dT_0$

Extrayendo logaritmos y luego diferenciando la ecuación de continuidad, se tiene: $\dfrac{d\rho}{\rho} = -\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{d\upsilon}{\upsilon}$

Considerando el fluido como un gas ideal, se tiene que se han de cumplir cualquiera de las siguientes relaciones:

$$\frac{P}{\rho} = p\,\upsilon = RT = cte \text{ ., o también: } \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P_2}{\rho_2} \text{ ; ó } P_1 v_1 = P_2 v_2$$

De la diferenciación logarítmica de la ecuación de estado, se tiene:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{dv}{v}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación de cantidad de movimiento, se llega a:

$$\frac{2\,P\,dP}{P\,\rho\, v^2} - \frac{2\,dP}{P} + \frac{4 C_f\, dx}{D_h} = 0$$

Para flujo isotérmico, el término $\dfrac{2}{P\,\rho\, v^2}$ se puede dar como

$$\frac{2}{P\,\rho\, v^2} = \frac{2\,\upsilon^2}{v^2 P\,\upsilon} = \frac{2}{G^2\, RT} = cte\ .$$

con lo que, si se definen estos parámetros en un punto dado, se puede proceder como si se tratase de una constante. Combinando las dos ecuaciones precedentes, se tiene:

$$\frac{2}{P_1\,\rho_1\, v_1^2}\int_1^2 P\,dP - 2\int_1^2 \frac{dP}{P} + \frac{4 C_f}{D_h}\int_0^L dx = 0$$

Integrando entre dos puntos genéricos, se llega a:

$$\frac{4 C_f\, L}{D_h} = \frac{\left(P_1^2 - P_2^2\right)}{P_1\,\rho_1\, v_1^2} + \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2$$

Puesto que $c_1^2 = \gamma R\, T_1 = \dfrac{\gamma P_1}{\rho_1} = \gamma P_1\, \upsilon_1$; $\qquad M_1^2 = \dfrac{v_1^2}{c_1^2}$

se concluye:

$$\frac{4 C_f L}{D_h} = \frac{\gamma P_1}{\gamma P_1} \frac{\upsilon_1 \left(P_1^2 - P_2^2\right)}{P_1\, v_1^2} + \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 = \frac{1}{\gamma M_1^2}\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2\right] + \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2$$

ecuación que relaciona el factor de fricción con la caída de presión en la tubería y el número de Mach a la entrada.

Recordando que la ecuación que determina la relación entre la temperatura estática y, de estancamiento en un punto dado era $T_{01} = T_1\left(1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)$, y dado que, para el presente caso, la temperatura estática se mantiene constante, se obtiene:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_1^2}$$

Utilizando ahora la ecuación que determina la relación entre la presión estática y la de estancamiento para una sección de conducto genérica, y comparando dicha ecuación entre dos puntos del conducto, se obtiene:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{P_2}{P_1}\left(\frac{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

La función impulso se define como la cantidad de movimiento asociada al fluido en una sección determinada, $F = PA + \dot{m} v$. En función del número de Mach, esta relación puede darse como $F = PA\left(1 + \gamma M^2\right)$, con lo que la relación de funciones impulso entre dos puntos del conducto será:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\left(1 + \gamma M_2^2\right)}{\left(1 + \gamma M_1^2\right)}$$

Obsérvese que estas dos últimas ecuaciones, al igual que la ecuación que relaciona el factor de fricción con la caída de presión en la tubería y el número de Mach a la entrada, dependen de la relación de presiones estáticas, con lo que seria interesante relacionar las presiones estáticas de dos puntos genéricos con el número de Mach en dichos puntos.

13.10.2.1 Concepto de condición límite en flujo isotérmico con fricción

A medida que el gas fluye a lo largo del conducto, la presión estática disminuye. La condición límite se alcanzará cuando el conducto no pueda alargarse sin que se alteren las condiciones aguas arriba; esta condición es la de flujo bloqueado. En dicho punto, se debe cumplir que $\frac{dx}{dP} = 0$

Recordando que la ecuación de cantidad de movimiento hallada previamente era:

$$\frac{2\,P\,dP}{P\,\rho\,v^2} - \frac{2\,dP}{P} + \frac{4\,C_f\,dx}{D_h} = 0$$

dividiendo por dP, reordenando y teniendo en cuenta la condición límite definida previamente, se tiene:

$$\frac{dx}{dP} = \frac{2\,D_h}{4\,C_f}\left(-\frac{1}{\rho\,v^2} + \frac{1}{P}\right) = 0$$

Esta condición da lugar a que la velocidad límite sea:

$$v_L = \sqrt{\frac{P_L}{\rho_L}} = \sqrt{P_L\,\upsilon_L} = \sqrt{R\,T_L} = \sqrt{R\,T_1} = \frac{c_1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{c_L}{\sqrt{\gamma}}$$

con lo que el número de Mach límite será $M_L = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, y se encontrará al final del conducto.

Obsérvese que, para este tipo de flujo, el número de Mach límite que establece las condiciones de bloqueo de flujo es menor que la unidad.

Según la ecuación de estado para gases ideales, se establece:

$$\frac{P_L}{P_1} = \frac{\rho_L}{\rho_1} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_L} = \frac{v_1}{v_L} = \frac{v_1\sqrt{\gamma}}{c_1} = M_1\sqrt{\gamma}\,; \qquad M_1^2\,\gamma = \left(\frac{P_L}{P_1}\right)^2;$$

Una forma de la ecuación de cantidad de movimiento hallada para flujo isotérmico era:

$$\frac{4\,C_f\,L}{D_h} = \frac{1}{\gamma M_1^2}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\right] + \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2;$$

Recordando que, cuando $L = L_{max}$, $P_2 = P_{L,}$ y utilizando la relación acabada de hallar, se obtiene:

$$\frac{4C_f L_{max}}{D_h} = \left(\frac{p_1}{p_L}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{p_L}{p_1}\right)^2\right] + \ln\left(\frac{p_L}{p_1}\right)^2;$$

$$\frac{4C_f L_{max}}{D_h} = \left[\left(\frac{p_1}{p_L}\right)^2 - 1\right] - \ln\left(\frac{p_1}{p_L}\right)^2;$$

$$\frac{4C_f L_{max}}{D_h} = \left[\frac{1-\gamma M_1^2}{\gamma M_1^2}\right] + \ln\left(\gamma M_1^2\right);$$

ecuación que relaciona el coeficiente de fricción, diámetro y longitud máxima del conducto en función del número de Mach en un punto genérico del conducto. Esta ecuación se encuentra tabulada.

Operando de manera similar con las ecuaciones que relacionaban las presiones de estancamiento, las temperaturas de estancamiento y la función impulso entre dos puntos genéricos del conducto, y sustituyendo los parámetros en el punto 2 por los parámetros límite, se obtiene:

$$\frac{p_0}{p_{0L}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}M}\left[\frac{2\gamma}{3\gamma-1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{T_0}{T_{0L}} = \left(\frac{2\gamma}{3\gamma-1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)$$

$$\frac{F}{F_L} = \frac{\left(1+\gamma M^2\right)}{\left(2\sqrt{\gamma}M\right)}$$

Las relaciones que muestran las ecuaciones acabadas de presentar se pueden encontrar, asimismo, en forma de tablas.

13.10.3 Flujo compresible estacionario con transferencia de calor y sin fricción. Flujo de Rayleigh

La línea de Fanno caracterizaba el flujo de fluido cuando $dA = dW = dQ = dz = 0$, donde el potencial conductor era la fricción $d\tau$, siendo τ = esfuerzos de fricción fluido–conducto.

En muchas aplicaciones industriales, sin embargo, se cumple que

$$dA = dW = d\tau = dz = 0 \text{, pero } dQ \neq 0.$$

El calor puede ser dado o transferido al fluido, en consecuencia, la entalpía de estancamiento h_0 no se mantendrá constante.

Las hipótesis de partida para el análisis a realizar en este apartado son: el flujo es unidimensional, estacionario, sin fricción; el conducto es de sección constante, y se considera la transferencia de calor; no se considera la existencia de trabajo externo, ni de fuerzas másicas.

13.10.3.1 Ecuaciones gobernantes

De nuevo, se van a aplicar al volumen de control diferencial definido en la figura siguiente, las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía.

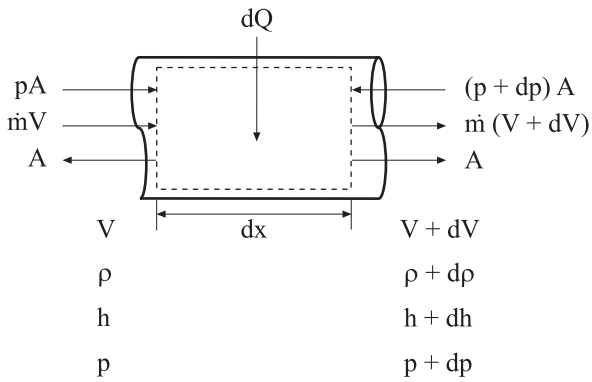


Fig. T 13.10 Volumen de control elemental para flujo de Rayleigh

De la aplicación de la ecuación de la energía, se obtiene:

$$\delta Q = dh + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = dh_0$$

De la ecuación de la cantidad de movimiento, cuando no se consideran los efectos de fricción, se obtiene:

$$dP + \rho v dv = 0$$

Al igual que en los dos casos precedentes, la ecuación de continuidad da lugar a:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho\, v = \frac{v}{\upsilon} = \text{cte.}$$

Combinando las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad se obtiene:

$$dP + G\, dv = 0$$

Integrando esta ecuación entre dos puntos genéricos 1 y 2, se obtiene:

$$P_2 + G\, v_2 = P_1 + G\, v_1 = \text{cte}$$

Recordando que se denominaba *empuje de corriente* o *función impulso* a $F = PA + \rho A v^2$, la ecuación anterior puede darse como:

$\frac{F}{A} = P + G\,v = cte.$, es decir, para este tipo de flujo, la función impulso se mantendrá constante.

De la ecuación de la función impulso, se obtiene: $P_2 - P_1 = G(v_1 - v_2)$, y recordando que $V = \frac{G}{\rho} = G\upsilon$, se obtiene $P_2 + G^2\,\upsilon_2 = P_1 + G^2\,\upsilon_1 = cte.$

Ecuación que recibe el nombre de *ecuación de la línea de Rayleigh*, de donde, dadas las condiciones iniciales p_1, υ_1, para cada valor de G, se obtiene una línea de Rayleigh diferente.

La ecuación de la línea de Rayleigh, se puede expresar como $-G^2 = \frac{P_2 - P_1}{\upsilon_2 - \upsilon_1}$;

Esta ecuación describe una línea recta en el plano p, υ, que obedecería a la línea de Rayleigh en dicho plano p, υ. Dicha línea recta tiene una pendiente $-G^2$; denominando α el ángulo formado por la recta de Rayleigh con el eje de abscisas, se tiene que $tg\,\alpha = -G^2$. Cada valor del flujo másico G dará lugar a una recta diferente.

La velocidad del fluido correspondiente a una línea de Rayleigh específica en el plano p υ, según la ecuación de continuidad, es:

$$V = \upsilon G = \upsilon\left(\frac{P_2 - P_1}{\upsilon_1 - \upsilon_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \upsilon(-tg\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

La figura que se encuentra a continuación muestra dos líneas de Rayleigh y tres líneas de entalpía específica constante, en el plano P υ.

Se observa que, sí G se mantiene constante, un aumento de entalpía del fluido desde h_1 a h_2, al adicionar calor, provocará que la presión estática del fluido decaiga, y se incrementará el volumen específico.

Si, por el contrario, el fluido se enfriase, la entalpía específica disminuiría de h_2 a h_1, y se produciría un incremento de la presión estática y un decremento del volumen específico. Se observa que, para un mismo incremento de entalpía específica $\Delta h = h_2 - h_1$, incrementando el flujo másico desde un valor genérico G a un valor 2G, se cuadruplica la pendiente de la línea de Rayleigh, y se incrementa notoriamente la diferencia de presión $P_1 - P_2$.

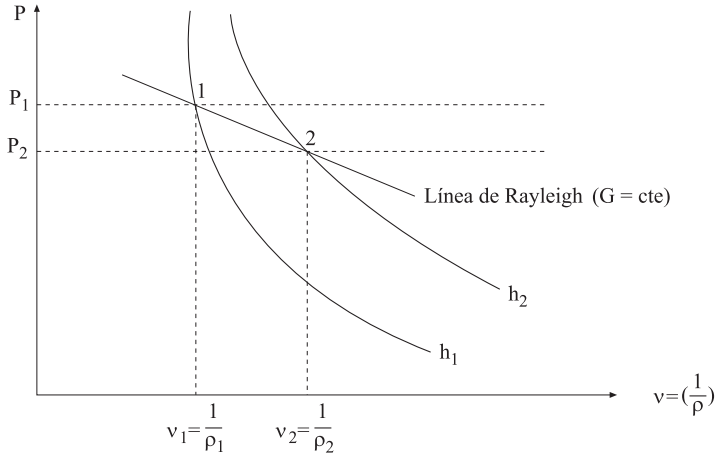


Fig. T 13.11
Líneas de Rayleigh para un conducto de área constante, representadas en el plano p υ.

Si se graficasen en un mismo plano, volumen específico-presión (υ, P), líneas de entalpía, $h = cte$., líneas de entropía, $s = cte$., y una línea de Rayleigh, se observaría que existe una línea de entalpía constante y otra de entropía constante que son tangentes a la línea de Rayleigh, aunque los puntos de tangencia son diferentes. Ello implica que los estados de máxima entalpía y máxima entropía en una misma línea de Rayleigh son diferentes.

Si se representa la curva de Rayleigh en un plano entalpía-entropía, (h, s), (v. figura T 13.12), se ve claramente que estos dos puntos no coinciden.

Obsérvese, además, en esta misma figura, que si a la entrada del conducto el flujo es subsónico, la adición de calor al fluido dará lugar a que este progrese hacia un estado sónico; asimismo es necesaria la adición de calor al fluido para que, teniendo condiciones supersónicas a la entrada de un conducto, experimente una evolución hacia condiciones sónicas.

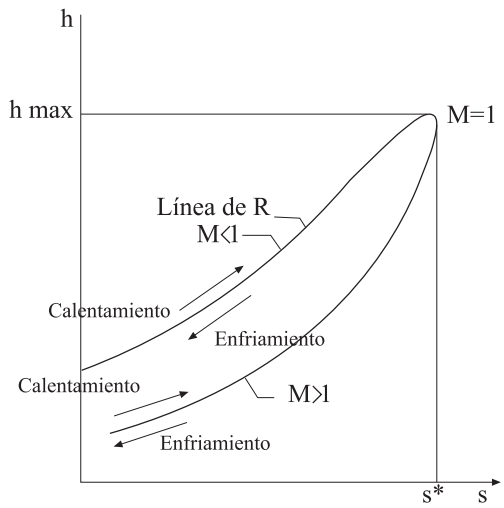


Fig. T 13.12
Línea de Rayleigh en el plano h s, (conducto de área constante)

La rama superior de la línea de Rayleigh (v. figura T 13.12), es el lugar geométrico de los estados termodinámicos que se pueden conseguir al calentar un fluido compresible subsónico M < 1, partiendo de un estado inicial "1" genérico.

La rama inferior corresponde a los estados termodinámicos alcanzables para flujo supersónico M > 1, partiendo del punto "2", asimismo genérico. Se observa asimismo que, para flujo subsónico, la adición de calor tiende a acelerar el fluido, hasta llegar a M = 1. Por otro lado, si el flujo es supersónico, la adición de calor da lugar a una deceleración del fluido, hasta llegar a M = 1.

13.10.3.2 Características del fluido para condiciones de máxima entalpía y máxima entropía

Cuando el fluido se encuentra en el estado de máxima entalpía, cualquier adición de calor causa un incremento de la energía cinética del fluido, siendo la ratio incremental igual a la ratio de calor añadido.

Si la velocidad del fluido (energía cinética) aumenta con una ratio mayor que la adición de calor suministrada, el fluido experimentará una disminución de la entalpía, puesto que la energía necesaria para aumentar la energía cinética proviene del propio fluido. Desde el punto de h_{max} de la figura anterior, el desplazamiento se realizará hacia la derecha de la curva, hacia puntos de mayor entropía.

Recuérdese que la pendiente de la línea de Rayleigh venía dada por la ecuación:

$$-G^2 = \frac{P_2 - P_1}{\upsilon_2 - \upsilon_1} \text{ con lo cual: } \quad tg\alpha = \left(\frac{dp}{d\upsilon}\right)_R = -G^2 = -\frac{v^2}{\upsilon^2}$$

La pendiente de una línea de entalpía constante sería de la forma:

$$tg\delta = \left(\frac{dp}{d\upsilon}\right)_h$$

En el punto donde las pendientes de las líneas h = cte. y R = cte. coincidan, se cumplirá la condición:

$$tg\delta = tg\alpha = -\frac{v^2}{\upsilon^2}$$

Por otro lado, la pendiente de una línea de entropía constante se define como:

$$tg\phi = \left(\frac{dp}{d\upsilon}\right)_s = -\frac{1}{\upsilon^2}\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s = -\frac{c^2}{\upsilon^2}\text{; recuérdese que } \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s = c^2$$

En el punto donde la entropía sea máxima, se cumplirá la relación $tg\phi = tg\alpha$.

con lo cual $\frac{v^2}{\upsilon^2} = \frac{c^2}{\upsilon^2}$; $\quad v = c$

Así, se concluye que, en el punto de máxima entropía, la velocidad del fluido ha de ser igual a la velocidad del sonido, $v = c^*$. Esta condición se denomina *condición de bloqueo térmico*. Si se siguiese añadiendo calor al sistema, no causaría ningún cambio de estado del fluido (respecto a las condiciones de bloqueo), aunque produciría un cambio en las condiciones aguas arriba.

Se concluye que las pendientes de las líneas de Rayleigh, entalpía constante y entropía constante, en el plano p.υ, definidas anteriormente, vienen dadas por las ecuaciones:

Pendiente de Rayleigh constante: $\tan\alpha = -\frac{V^2}{\upsilon^2} = -\frac{\gamma.P.V^2}{\gamma.P.\upsilon^2} = -\gamma.\frac{P}{\upsilon}M^2$

Pendiente de entalpía constante: $\tan\delta = \left(\frac{\partial P}{\partial \upsilon}\right)_h = \left[\frac{\partial(R.T/\upsilon)}{\partial \upsilon}\right]_h = -\frac{R.T}{\upsilon^2}$

Pendiente de entropía constante: $\tan\phi = \left(\frac{\partial P}{\partial \upsilon}\right)_S = -\rho^2\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = -\frac{c^2}{\upsilon^2}$

con lo que las relaciones: $\frac{\tan\alpha}{\tan\phi} = M^2 = 1;$

de donde se obtiene que, cuando las pendientes de la línea de Rayleigh y la curva de entropía constante son iguales, el número de Mach ha de valer 1, siendo este el punto de máxima entropía.

Relacionando las pendientes de las líneas de entalpía y Rayleigh constantes, se llega a:

$\frac{\tan\alpha}{\tan\delta} = \gamma.M^2 = 1,$

lo cual demuestra que, en el punto de máxima entalpía, que es el punto donde las pendientes de la curva de Rayleigh y de las curvas de entalpía constante son iguales, el valor del número de Mach ha de ser $M = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$.

13.10.3.3 Intersección entre las líneas de Fanno y Rayleigh

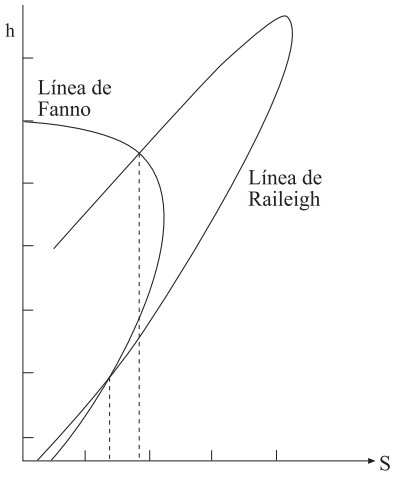
Si, para un mismo flujo másico G, se dibujan las líneas de Fanno y Rayleigh en un diagrama entalpía-entropía, estas se intersecan en dos puntos.

Puesto que toda línea de Fanno tiene la misma entalpía de estancamiento h_0 y toda línea de Rayleigh tiene el mismo valor del empuje de flujo $\frac{F}{A}$, los puntos 1 y 2, que se muestran en la figura T 13.13, tendrán el mismo valor de G, h_0 y $\frac{F}{A}$.

Es necesario destacar que el flujo a través de una onda de choque satisface las ecuaciones de energía y continuidad de la línea de Fanno, y las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para la línea de Rayleigh. Así, los cambios espontáneos del estado 1 al 2 (v. figura T 13.13), irán acompañados de una onda de choque.

Si la evolución del proceso es de 1 a 2, se tiene que la onda de choque creada es de compresión, puesto que $p_2 > p_1$ (la presión y la entropía del fluido aumentan, y disminuye su velocidad de régimen supersónico a subsónico). El proceso de 2 a 1 es imposible, puesto que implicaría una disminución de entropía, y ello vulnera el segundo principio de la termodinámica.

Fig. T 13.13 Determinación de una onda de choque normal de compresión en un conducto de sección constante



13.10.3.4 Propiedades termodinámicas de flujo estacionario unidimensional con adición de calor

Hasta este punto, únicamente se ha hallado la ecuación característica de la línea de Rayleigh, así como sus principales características. A partir de este momento se determinarán las ecuaciones algebraicas que permiten relacionar propiedades del fluido en dos puntos diferentes del conducto.

Recuérdese que la ecuación de la energía para el caso en estudio se reducía a

$$\delta Q = dh + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = dh_0$$

Si, entre los puntos 1 y 2 genéricos de un conducto se adiciona un calor Q_2, la ecuación representativa será:

$$h_2 + \frac{v_2^{\,2}}{2} = h_1 + \frac{v_1^{\,2}}{2} + Q_2$$

Como $G = \frac{v}{\upsilon}$; $\quad h_2 + \frac{G^2\upsilon_2^2}{2} = h_1 + \frac{G^2\upsilon_1^2}{2} + Q_2$

de la definición de la entalpía de estancamiento $h_0 = h + \frac{v^2}{2}$, se puede establecer:

$$\delta Q = \delta h_0 \text{ , o bien } h_{02} = h_{01} + Q_2$$

Esta ecuación relaciona el potencial conductor (calor transferido) y las propiedades del fluido entre dos puntos genéricos del conducto.

La característica de la línea de Rayleigh establecía que el empuje de flujo por unidad de área es constante:

$$\frac{F}{A} = \text{cte.} = P + \rho.v^2 = P(1 + \frac{\rho.v^2}{P}) = P(1 + \gamma M^2) = P_2(1 + \gamma.M_2^2) = P_1(1 + \gamma.M_1^2)$$

Recuérdese que $M^2 = \frac{v^2}{\gamma RT} = \frac{v^2\rho}{\gamma p}$

De la ecuación anterior, se tiene que entre dos puntos de la línea de Rayleigh se cumplirá:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma.M_1^2}{1 + \gamma.M_2^2}$$

La ecuación de continuidad para un gas ideal y un conducto de área constante se puede dar como:

$$\frac{P_2.M_2}{\sqrt{T_2}} = \frac{P_1.M_1}{\sqrt{T_1}}$$

Combinando estas dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2^2M_2^2}{P_1^2M_1^2} = \frac{M_2^2}{M_1^2}\left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right)^2$$

Para un gas ideal, la ecuación de estado se enuncia:

$$\frac{P_2.\upsilon_2}{T_2}=\frac{P_1.\upsilon_1}{T_1}$$

Sustituyendo, en la ecuación anterior, la relación de presiones y temperaturas en función del número de Mach y recordando que $G = \rho v = cte$., se tiene:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{P_2.T_1}{P_1.T_2}=\frac{M_1^2}{M_2^2}.\left(\frac{1+\gamma.M_2^2}{1+\gamma.M_1^2}\right)$$

El cambio de entropía para un gas perfecto se ha definido como:

$\Delta s = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{P_2}{P_1}$, ecuación que se puede expresar como:

$$\frac{\Delta s}{R}=\ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\right]$$

Sustituyendo los términos $\frac{P_1}{P_2}$ y $\frac{T_2}{T_1}$ por las relaciones en función del número de Mach deducidas previamente, se tiene:

$$\frac{\Delta s}{R}=\ln\left[\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.\left(\frac{1+\gamma.M_1^2}{1+\gamma.M_2^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right]$$

ecuación que relaciona la variación de entropía en función de los números de Mach en dos puntos genéricos.

La relación entre la presión estática y la presión de estancamiento con el número de Mach para una sección dada era $P_0 = P\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$;

Entre dos puntos genéricos del conducto, se puede establecer:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}=\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right).\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}.M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)=\left(\left(\frac{1+\gamma.M_1^2}{1+\gamma.M_2^2}\right).\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}.M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right);$$

De la definición de la temperatura de estancamiento para una sección dada, se tiene $T_0 = T\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)$.

La ratio de temperaturas de estancamiento $\frac{T_{02}}{T_{01}}$ puede expresarse en términos del número de Mach en los puntos 1 y 2 genéricos:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)}{T_1\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)}$$

Puesto que la relación entre temperaturas estáticas en función del número de Mach ya ha sido hallada anteriormente, sustituyendo dicha relación en la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{M_2^2}{M_1^2}\left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right)^2 \frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)}$$

Obsérvese que, para el flujo de Rayleigh, se han obtenido sendas ecuaciones que relacionan las propiedades entre dos puntos genéricos del conducto en función de los números de Mach en dichos dos puntos. Si las condiciones del fluido en uno de estos puntos obedecen a las condiciones críticas, M = 1, la relación entre las propiedades en un punto genérico del conducto y el punto donde aparece la condición sónica quedan definidas por las ecuaciones siguientes, que se encuentran tabuladas.

$$\frac{P}{P^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma.M^2} \qquad \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{\upsilon^*}{\upsilon} = \frac{V^*}{V} = \frac{1+\gamma.M^2}{(\gamma+1).M^2} \qquad \frac{T}{T^*} = \frac{(\gamma+1)^2.M^2}{(1+\gamma.M^2)^2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{(\gamma+1)}{1+\gamma.M^2}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad \frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(\gamma+1)M^2}{(1+\gamma.M^2)^2}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)$$

13.11 Introducción a las ondas de choque oblicuas

En un flujo supersónico, la aparición de ondas de choque oblicuas es muy usual. Ello da lugar a que el flujo entrante cambie de dirección, con lo cual se producen variaciones notables de las condiciones termodinámicas del fluido.

La figura T 13.14 muestra el caso de una onda de choque oblicua estacionaria, la cual es producida cuando un flujo supersónico encuentra una variación de inclinación de una pared sólida, pared que se considerará sin fricción.

Las velocidades V_1 y V_2 son las correspondientes al fluido entrante y saliente a la onda de choque. El ángulo ε, denominado *ángulo de la onda*, es el formado por la velocidad entrante y la onda de choque oblicua. El ángulo β es el formado por la onda de choque oblicua y la velocidad saliente V_2. El ángulo δ, denominado *ángulo de deflexión* del flujo, es el ángulo de inclinación de la pared sólida, y se cumple que:

$$\delta = \varepsilon - \beta$$

En el proceso matemático siguiente se han considerado estas hipótesis: las fuerzas másicas son despreciables; el flujo se considera bidimensional, adiabático y estacionario, y no existe aportación o sustracción de trabajo.

En función de sus componentes normal y tangencial, las velocidades del fluido entrante y saliente a la onda de choque toman la forma:

$$\begin{aligned} V_1^2 &= V_{T1}^2 + V_{N1}^2 \\ V_2^2 &= V_{T2}^2 + V_{N2}^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Por otro lado, las componentes normal y tangencial de la velocidad entrante y saliente se pueden expresar en función del ángulo β y ε, de donde:

$$\begin{aligned} V_{T1} &= V_1 \cos\varepsilon; \qquad V_{N1} = V_1 \sin\varepsilon; \\ V_{T2} &= V_2 \cos\beta; \qquad V_{N2} = V_2 \sin\beta; \end{aligned} \qquad (2)$$

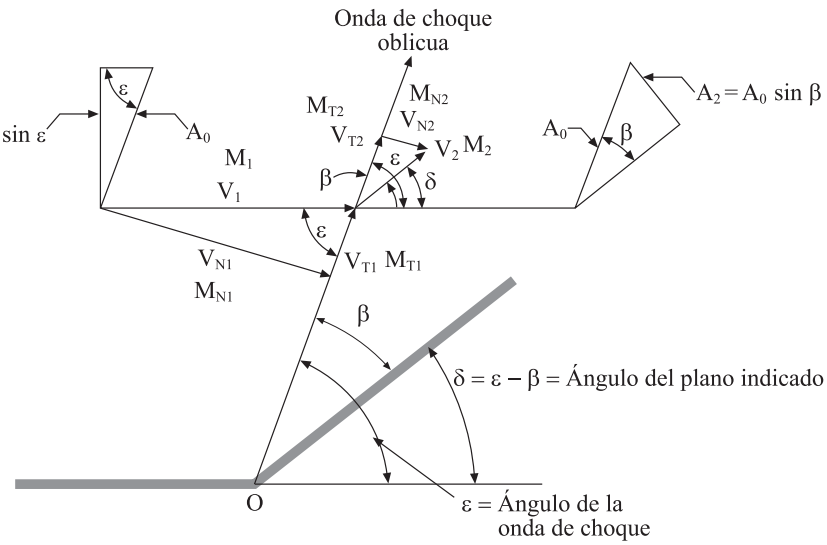


Fig. T 13.14 Componentes de velocidad características de una onda de choque oblicua plana. Fuente: M.J. Zucrow; J.D. Hoffman

Seguidamente, se aplica la ecuación de continuidad entre la parte frontal y trasera de la onda de choque oblicua. Se denomina A_0 la sección de paso del fluido paralela a la onda de choque, (v. figura 13.14). Las secciones A_1 y A_2 serán las perpendiculares a la velocidad V_1 y V_2, respectivamente. En función de los ángulos definidos previamente, se establece que:

$$A_1 = A_0 \sin\varepsilon; \qquad A_2 = A_0 \sin\beta; \tag{3}$$

La ecuación de continuidad se expresa:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= A_1\, \rho_1\, V_1 = A_2\, \rho_2\, V_2 \\ \dot{m} &= A_0\, \rho_1\, V_1 \sin\varepsilon = A_0\, \rho_2\, V_2 \sin\beta \\ \rho_1\, V_{N1} &= \rho_2\, V_{N2} \end{aligned} \tag{4}$$

Obsérvese que esta ecuación es idéntica a la obtenida para ondas de choque planas, con la salvedad de que, en lugar de la velocidad entrante y saliente ahora se utiliza la componente normal de dichas velocidades.

El paso siguiente es aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento a la onda de choque oblicua definida en la figura 13.14. Dicha ecuación se aplicará en la dirección perpendicular a la onda y también en la dirección tangencial. Recordando las hipótesis establecidas en esta sección, de la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento en dirección normal a la onda de choque oblicua, se obtiene:

$$P_1 + \rho_1\, V_{N1}^2 = P_2 + \rho_2\, V_{N2}^2 \tag{5}$$

De nuevo, se observa que esta ecuación es la misma que la que se ha obtenido para ondas de choque planas, con la salvedad de que ahora las velocidades del fluido son las perpendiculares a la onda de choque oblicua.

De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento en dirección tangencial a la onda de choque, se concluye que:

$$\rho_1\, V_{N1} V_{T1} = \rho_2\, V_{N2} V_{T2} \tag{6}$$

Considerando ahora lo establecido por la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$V_{T1} = V_{T2} = V_T \tag{7}$$

Es decir, las velocidades tangenciales son idénticas en ambos lados de la onda de choque.

Atendiendo las relaciones entre las velocidades tangencial y absoluta, tanto a la entrada como a la salida de la onda de choque, relaciones definidas al inicio de este apartado, se puede decir que:

$$\frac{V_{T2}}{V_{T1}} = 1 = \frac{V_2 \cos\beta}{V_1 \cos\varepsilon}; \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\beta}; \tag{8}$$

Combinando ahora la ecuación de continuidad con las ecuaciones que relacionan las velocidades normal y absoluta a la entrada y la salida, y teniendo en cuenta la ecuación precedente, se obtiene:

$$\rho_1 \, V_1 \sin\varepsilon = \rho_2 \, V_2 \sin\beta$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{N1}}{V_{N2}} = \frac{V_1 \sin\varepsilon}{V_2 \sin\beta} = \frac{\cos\beta * \sin\varepsilon}{\cos\varepsilon * \sin\beta} = \frac{\tan\varepsilon}{\tan\beta}; \tag{9}$$

ecuación que relaciona las densidades a ambos lados de la onda de choque oblicua con los ángulos de entrada y salida del fluido.

La aplicación de la ecuación de la energía entre la entrada y la salida de la onda de choque oblicua, para régimen permanente, flujo adiabático y cuando no hay transferencia externa de calor y trabajo, considerando despreciables las fuerzas másicas, da lugar a:

$$h_1 + \frac{V_{N1}^2}{2} = h_2 + \frac{V_{N2}^2}{2} = \text{cte.} \tag{10}$$

De nuevo, se observa que esta ecuación es equivalente a la obtenida para ondas de choque planas. La diferencia es que la ecuación actual viene dada en función de las velocidades normales a la onda.

Se concluye que las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía para una onda de choque oblicua son las mismas que las obtenidas para una onda de choque plana; la salvedad reside en que para una onda de choque oblicua, las velocidades han de ser sustituidas por la componente normal de la misma.

El conjunto de relaciones que se acaba de determinar, ecuaciones 2, 4, 5, 7 y 10, conjuntamente con la ecuación de estado del gas objeto de estudio, dan lugar a un sistema de ecuaciones cuyas variables conocidas generalmente son P_1, ρ_1, h_1, T_1, V_1 y δ, y las variables a determinar, por lo general, son: P_2, ρ_2, h_2, T_2, V_2, V_{N2}, V_{T2}, V_{N1}, V_{T1} y ε.

13.11.1 Ondas de choque oblicuas para gases ideales

En este apartado, se van a determinar las ecuaciones algebraicas que caracterizan la variación de propiedades entre la entrada y la salida de cualquier onda de choque oblicua y plana, considerando el fluido ideal.

Es importante recordar en todo momento que las ondas de choque oblicuas tienen dos grados de libertad, que son las condiciones del fluido aguas arriba y el ángulo de deflexión del flujo δ.

Las ecuaciones de estado para un gas ideal se enuncian $\rho = \frac{P}{RT}$, $h = C_p \, t$ (11)

La ecuación de la energía, (v. ecuación 10) para un gas ideal toma la forma:

$$C_P\ t_1 + \frac{V_{N1}^2}{2} = C_P\ t_2 + \frac{V_{N2}^2}{2} = \text{cte.} \tag{12}$$

Ya se ha comentado que las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía para ondas de choque planas y oblicuas son, en realidad, las mismas; únicamente hay que sustituir, para el caso de las ondas de choque oblicuas, la velocidad entrante y saliente de la onda por sus componentes normales. Ello implica que toda el álgebra empleada en la transformación de las ecuaciones para el caso de ondas de choque planas será idéntica para el caso de las ondas de choque oblicuas. El resultado es que las ecuaciones que caracterizan los parámetros entre la parte frontal y trasera de las ondas de choque oblicuas son las mismas que las que se obtuvieron para las ondas de choque planas, únicamente será necesario recordar que la relación entre el número de Mach en función de la velocidad normal a la onda y el obtenido considerando la velocidad absoluta entrante es: $M_{N1} = M_1 \sin\varepsilon$. En consecuencia, se pueden establecer las relaciones siguientes:

Relación de densidades:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tan\varepsilon}{\tan\beta} = \frac{V_{N1}}{V_{N2}} = \frac{(\gamma+1)\ M_{N1}^2}{2+(\gamma-1)M_{N1}^2} = \frac{(\gamma+1)\ M_1^2\ \sin^2\varepsilon}{2+(\gamma-1)M_1^2\ \sin^2\varepsilon} \tag{13}$$

En función del ángulo del flujo saliente, esta ecuación se puede expresar como:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tan\varepsilon}{\tan\beta} = \frac{V_{N1}}{V_{N2}} = \frac{2}{(\gamma+1)}\left[\frac{1}{M_2^2\ \sin^2\beta} + \frac{(\gamma-1)}{2}\right] \tag{14}$$

Relación de velocidades:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_{N2}\ \sin\varepsilon}{V_{N1}\ \sin\beta} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta}\left(\frac{2+(\gamma-1)M_1^2\ \sin^2\varepsilon}{(\gamma+1)\ M_1^2\ \sin^2\varepsilon}\right) = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta}\left(\frac{2}{(\gamma+1)\ M_1^2\ \sin^2\varepsilon} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}\right) \tag{15}$$

Relación de presiones:

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_{N1}^2 - 1\right) = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2\ \sin^2\varepsilon - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{16}$$

La relación entre el número de Mach correspondiente a la velocidad normal a la salida de la onda de choque oblicua y el homólogo a la entrada se define:

$$M_{N2}^2 = \frac{M_{N1}^2 + \left[\dfrac{2}{(\gamma-1)}\right]}{\left[\dfrac{2\,\gamma}{(\gamma-1)}\right]M_{N1}^2 - 1} \tag{17}$$

ecuación que se puede dar como:

$$M_2^2 \sin^2(\varepsilon-\delta) = \frac{M_1^2 \sin^2\varepsilon + \left[\frac{2}{(\gamma-1)}\right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)}\right] M_1^2 \sin^2\varepsilon - 1} \tag{18}$$

De la ecuación de los gases ideales, se deduce:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1}\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{19}$$

Partiendo de la ecuación 13, y recordando que $\beta = \varepsilon - \delta$ y que la tangente de la diferencia de dos ángulos se define como:

$$\mathrm{tg}(\varepsilon-\delta) = \frac{\mathrm{tg}\varepsilon - \mathrm{tg}\delta}{1+\mathrm{tg}\varepsilon\,\mathrm{tg}\delta} \tag{20}$$

se obtiene la relación entre el ángulo de inclinación de la pared sólida y el ángulo de la onda de choque oblicua para un número genérico de Mach entrante:

$$\frac{1}{\tan\delta} = \left[\frac{(\gamma+1)}{2}\left(\frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2\varepsilon - 1}\right) - 1\right]\tan\varepsilon \tag{21}$$

ecuación que también se puede expresar como:

$$\tan\delta = 2\cot\varepsilon\left[\frac{M_1^2 \sin^2\varepsilon - 1}{M_1^2\left(\gamma+\cos(2\varepsilon)\right)+2}\right] \tag{22}$$

De las ecuaciones 16 y 21 o 22, se deduce que la intensidad de la onda de choque oblicua depende tanto del número de Mach inicial como de la inclinación de la onda de choque ε. Es interesante remarcar que existirá onda de choque oblicua siempre que se cumpla que $M_1 \sin\varepsilon \geq 1$. Para $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, la onda de choque es plana, con lo cual las ecuaciones que caracterizan las ondas de choque planas no son más que un caso particular de las ecuaciones genéricas para ondas de choque oblicuas.

En la mayoría de los casos, los datos conocidos son el número de Mach entrante, M_1, y el ángulo de inclinación de la superficie sólida, δ. Partiendo de esta información, las ecuaciones 21 y 22 permiten determinar el ángulo de inclinación de la onda de choque; no obstante, estas ecuaciones no son explícitas. En la literatura, se encuentran diversas ecuaciones que, de una manera explícita, definen el ángulo de inclinación de la onda de choque ε en función de M_1 y δ. Dichas ecuaciones se basan en la representación de la

ecuación (22) en forma cúbica, Emanuel expresa la ecuación 22 en forma cúbica y en términos de la tangente de ε, y obtiene:

$$\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)\tan\delta\tan^3\varepsilon-\left(M_1^2-1\right)\tan^2\varepsilon+\left(1+\frac{\gamma+1}{2}M_1^2\right)\tan\delta\tan\varepsilon+1=0 \qquad (23)$$

De esta ecuación, se obtienen dos raíces positivas que caracterizan las soluciones para las ondas de choque débiles y fuertes, y una raíz negativa, que carece de significado físico. Las dos raíces positivas se obtienen de la ecuación siguiente:

$$\tan\varepsilon=\frac{M_1^2-1+2A\cos\left[\dfrac{4\pi B+\cos^{-1}C}{3}\right]}{3\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)\tan\delta} \qquad (24)$$

donde:

$$A=\left[\left(M_1^2-1\right)^2-3\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)\left(1+\frac{\gamma+1}{2}M_1^2\right)\tan^2\delta\right]^{0,5} \qquad (25)$$

$$C=\frac{\left(M_1^2-1\right)^3-9\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2+\dfrac{\gamma+1}{4}M_1^4\right)\tan^2\delta}{A^3} \qquad (26)$$

Cuando B = 1, se obtiene la solución que caracteriza la onda de choque débil y, cuando B = 0, la solución proporciona el ángulo para la onda de choque fuerte.

Es importante destacar que la ecuación 24 proporciona una solución exacta, no aproximada.

Para una onda de choque plana, el salto entrópico experimentado por el fluido venía dado por:

$$\Delta s=C_p\ln\left[\frac{T_2}{T_1}\right]-R\ln\left[\frac{P_2}{P_1}\right]=C_v\ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{-(\gamma-1)}\right] \qquad (27)$$

Y, recordando la ecuación de los gases ideales, la ecuación del salto entrópico se puede expresar como:

$$\Delta s=C_v\ln\left[\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}\right] \qquad (28)$$

La relación de presiones y densidades en función del número de Mach entrante M_1 están definidas, respectivamente, por las ecuaciones 16 y 13; al sustituir dichas ecuaciones en la ecuación 28, se obtiene el salto entrópico para una onda de choque oblicua en función del número de Mach entrante M_1 y del ángulo de deflexión de la onda ε.

$$\Delta s = C_v \ln\left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 \sin^2\varepsilon - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(\frac{2+(\gamma-1)M_1^2 \sin^2\varepsilon}{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2\varepsilon}\right)^{\gamma}\right] \qquad (29)$$

De las ecuaciones 28 y 29, se deduce que, cuando $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1$, entonces $\Delta s = 0$; es decir, no existe onda de choque. Por otro lado, cuando $\varepsilon = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta s = \max$, es decir, la onda de choque que origina un salto entrópico máximo es una onda de choque normal.

Las figuras T 13.15 y T 13.16 son la representación gráfica de las ecuaciones 21 o 22, donde, en función del número de Mach entrante M_1 y el ángulo de inclinación de la superficie sólida δ, se obtiene el ángulo de inclinación de la onda de choque oblicua ε, y las gráficas están definidas para $\gamma = 1{,}4$. Es interesante destacar que, para un mismo valor de M_1 y δ, aparecen dos valores del ángulo de inclinación de la onda de choque ε. Ello indica que dos ondas de choque oblicuas con diferentes intensidades son posibles. De entre estas dos, la de menor intensidad, que da lugar a ángulos de deflexión más pequeños, es la más usual. En realidad, que la onda de choque sea débil o fuerte está íntimamente ligado a las condiciones de presión del flujo aguas abajo. A medida que la presión aguas abajo aumenta, se pasa de tener una onda de choque débil a una onda de choque fuerte.

Una característica interesante de las ondas de choque fuertes es que el número de Mach después de la onda es subsónico $M_2 < 1$ mientras que, para ondas de choque oblicuas débiles, el número de Mach detrás de la onda de choque es supersónico, $M_2 > 1$, excepto cuando el ángulo de inclinación del sólido está cercano al valor máximo $\delta = \delta_{max}$, (v. figura T 13.16).

El ángulo δ_{max} es el mayor ángulo de la superficie sólida para el cual la onda de choque está adherida a la pared. Si se excede dicho ángulo, la onda de choque se separará de la pared. Obsérvese que existe un δ_{max} diferente para cada número de Mach del flujo entrante M_1.

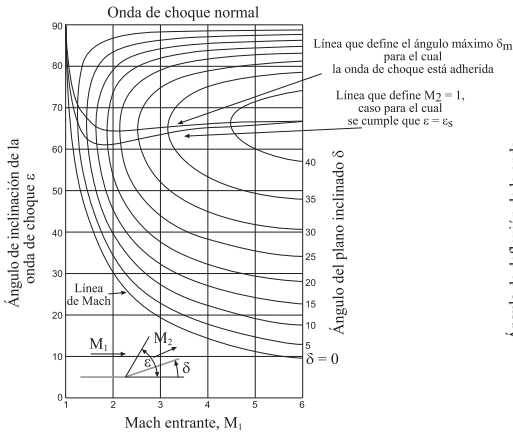


Fig. T 13.15
Ángulo de deflexión de la onda de choque oblicua en función del número de Mach entrante y el ángulo de inclinación del sólido.
Fuente: M.J.Zucrow; J.D. Hoffman

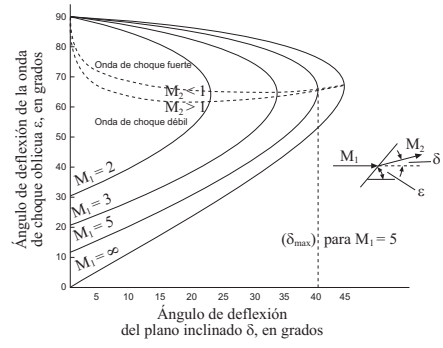


Fig. T 13.16
Ángulo de deflexión de la onda de choque oblicua en función del número de Mach entrante y el ángulo de inclinación del sólido.
Fuente: J.D. Anderson

De las figuras T 13.15 y T 13 16, se observa que, para un número de Mach dado, como es el caso de ondas de choque débiles, a medida que el ángulo del sólido aumenta, también aumenta el ángulo de deflexión de la onda de choque y, aunque no se muestra en dichas figuras, de las ecuaciones halladas en este apartado se deduce que la presión, la temperatura y la densidad estáticas a la salida de la onda de choque también aumentará.

En la figura T 13.17, se muestran ejemplos de ángulos de deflexión para ondas de choque débiles y fuertes, así como de ondas de choque oblicuas adheridas y separadas.

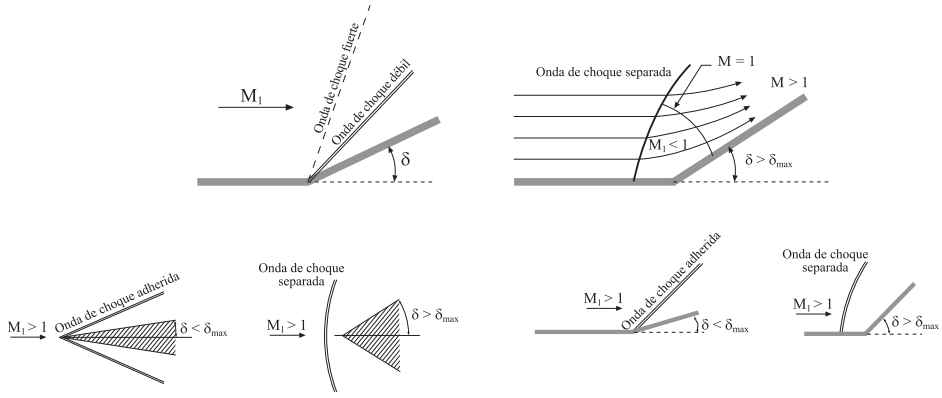


Fig. T 13.17 Esquema de ondas de choque adheridas y separadas, y de ondas de choque débiles y fuertes

El proceso que hay que seguir con el fin de obtener el valor de los diferentes parámetros que relacionan las características entre la parte frontal y trasera de una onda de choque oblicua es: entrando con el valor de M_1 y δ en la ecuación 21 o 22 o 24, se obtiene el valor de ε. Con el valor de M_1 y ε, y mediante las ecuaciones 13, 16 y 19, se obtienen, respectivamente, las relaciones entre $\frac{\rho_2}{\rho_1}; \frac{P_2}{P_1}$ y $\frac{T_2}{T_1}$. La ecuación 18 permite determinar el número de Mach a la salida M_2, partiendo de los datos M_1, ε y δ. La relación de velocidades entre los flujos saliente y entrante se podrá determinar mediante la ecuación 15 partiendo de M_1, ε y β. Recuérdese que el ángulo $\beta = \varepsilon - \delta$.

De la figura T 13.15, se observa que el punto donde la tangente a las curvas de δ = cte se hace máxima caracteriza el valor del ángulo de inclinación máximo δ_{max} para el cual la onda de choque está aún adherida. A cada ángulo de inclinación máximo del sólido, le corresponde un ángulo máximo de la onda de choque oblicua ε_{max}. Dicho ángulo se puede extraer directamente de la figura T 13.15 o bien mediante la relación:

$$\sin^2 \varepsilon_{max} = \frac{1}{\gamma M_1^2}\left\{\frac{\gamma+1}{4}M_1^2 - 1 + \left[(\gamma+1)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2+\frac{\gamma+1}{16}M_1^4\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \qquad (30)$$

La figura T 13.18 muestra los diferentes valores de δ_{max} y ε_{max} en función del número de Mach entrante M_1.

Es interesante destacar que, para un valor de $M_1 = \infty$, el valor de $\delta_{max} = 45{,}37$ grados.

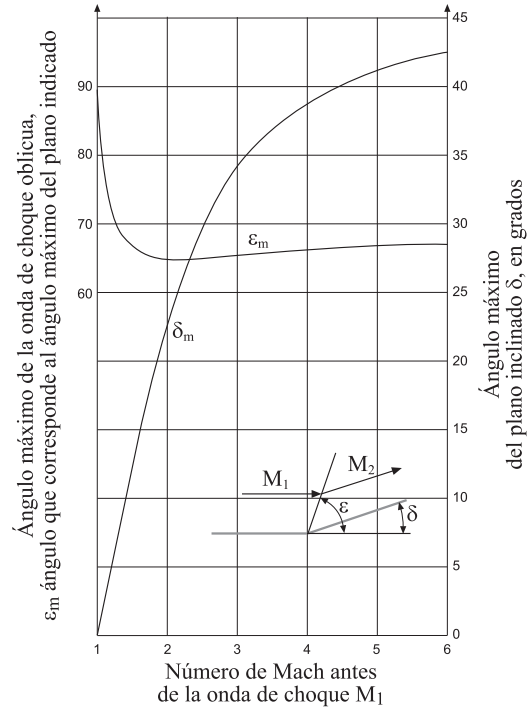


Fig. T 13.18 Valores de δ_{max} y ε_{max} en función del número de Mach entrante. Fuente: M.J. Zucrow; J.D. Hoffman

Otra de las curvas interesantes que se puede observar en la figura T 13.15 es la curva de $M_2 = 1$. El concepto aquí consiste en establecer, para un número de Mach entrante dado, M_1, cuál ha de ser el ángulo de inclinación del sólido δ, para que a la salida de la onda de choque oblicua el número de Mach sea la unidad. El ángulo de inclinación de la onda de choque oblicua, para el cual el número de Mach saliente es la unidad, se denomina ε_s y viene definido en función del número de Mach entrante por la ecuación 31. En la figura T 13.15, se observa además que, para cualquier número de Mach entrante, M_1, el valor de los ángulos ε_s y ε_{max} está muy cercano, lo cual indica que el ángulo de la onda de choque oblicua para el cual dicha onda de choque se separa del cuerpo es ligeramente mayor que el necesario para que el número de Mach a la salida de la onda sea igual a la unidad, $M_2 = 1$. O, dicho de otra manera, las ondas de choque se van a separar del cuerpo siempre que el número de Mach a la salida sea ligeramente mayor que el sónico:

$$\sin^2 \varepsilon_S = \frac{1}{\gamma M_1^2}\left\{\frac{\gamma+1}{4}M_1^2 - \frac{3-\gamma}{4} + \left[(\gamma+1)\left(\frac{9+\gamma}{16} - \frac{3-\gamma}{8}M_1^2 + \frac{\gamma+1}{16}M_1^4\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \quad (31)$$

13.11.2 Curva polar para las ondas de choque oblicuas

Considérese una onda de choque oblicua, generada por un flujo de velocidad V_1 al incidir sobre un plano bidimensional inclinado un ángulo δ respecto a la horizontal. Las velocidades entrante y saliente del fluido, V_1 y V_2, se pueden descomponer en sus direcciones normal y tangencial a la onda de choque; dicha descomposición se muestra, para dos ángulos de inclinación δ diferentes, en la figura T 13.19. Recuérdese que la componente tangencial se mantiene constante para la entrada y la salida de la onda de choque.

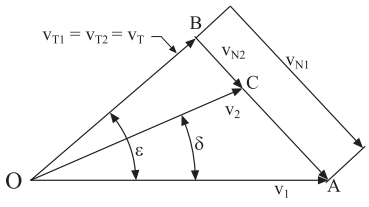
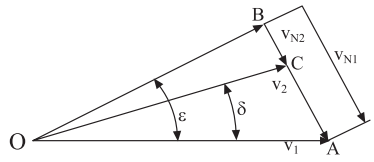


Fig. T 13.19
Descomposición de las velocidades entrantes y salientes a la onda de choque en sus direcciones normal y tangencial. Se han representado dos ángulos de inclinación diferentes.
Fuente:
M.J. Zucrow; J.D. Hoffman



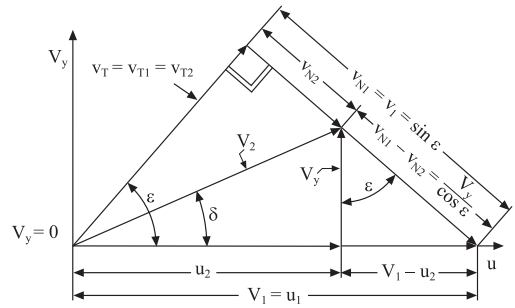


Fig. T 13.20
Distribución de velocidades entre la parte frontal y trasera de una onda de choque oblicua, y para un ángulo del sólido δ genérico.
Fuente:
M.J. Zucrow; J.D. Hoffman

La relación en forma de triángulos de velocidades entre la velocidad entrante V_1 y la saliente V_2 queda perfectamente definida, para un ángulo genérico δ, en la figura T 13.20. Si la velocidad del flujo entrante V_1 se mantiene constante y el ángulo de inclinación del sólido δ varía desde su valor mínimo hasta su valor máximo $\delta = \delta_{max}$, ángulo límite para el cual la onda de choque oblicua aún se puede considerar adherida, se observa que, a medida que δ aumenta, la magnitud de la velocidad V_2 disminuye, dado que la onda de choque aumenta de intensidad. Si se grafica para todos los ángulos δ posibles la posición del extremo superior del vector V_2, se obtendrá la curva polar para esta velocidad V_1, curva representada en la figura T 13.21.

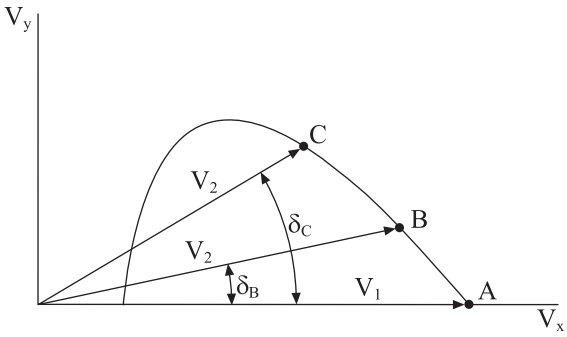


Fig. T 13.21
Curva polar para una onda de choque oblicua y para una velocidad entrante V1 = cte.
Fuente:
J.D. Anderson

Resulta muy conveniente adimensionar la curva polar definida en la figura T 13.21, puesto que ello permitirá representar en un mismo plano todos los estados posibles, para todos los números de Mach entrantes y todas las inclinaciones de la pared sólida posibles. El parámetro que se utilizará para adimensionar las diversas velocidades es la velocidad sónica crítica, C^*. Es interesante puntualizar que, dado que el flujo a través de la onda de choque es adiabático, la velocidad sónica crítica es la misma a ambos lados de la onda de choque. El resultado de realizar este proceso proporciona el lugar geométrico de todos los números de Mach M_2^* posibles para cada valor dado de M_1^*, tal como se muestra en las figuras T 13.22 y T 13.23. En la figura T 13.23, se observa claramente que, para un número de Mach entrante $M_1 = \infty$, el valor del M_1^* asociado es

de 2,45, siendo este el valor máximo posible. Es interesante observar asimismo que (v. figura T 13.22), si se traza un arco de circunferencia con un valor de $M^* = 1$, los puntos de corte entre dicho arco y las diferentes curvas polares dividen dichas curvas en dos regiones, la región subsónica, que será la parte de la curva polar que quedará comprendida en el interior de arco de circulo de $M^* = 1$, donde se cumplirá que $M_2 < 1$, y la región supersónica que quedará fuera de dicho arco de círculo, donde los valores de número de Mach saliente M_2 serán supersónicos. Cabe remarcar que el tipo de ondas de choque que aparecen en la región subsónica son ondas de choque fuertes, mientras que las débiles quedan fuera del arco de círculo de $M^* = 1$. El punto D de la figura T 13.22 caracteriza una onda de choque fuerte, mientras que el punto B caracteriza una onda de choque débil.

Fig. T 13.22 Proceso de construcción del lugar geométrico de una onda de choque oblicua, dado un número de Mach entrante. Fuente: J.D. Anderson

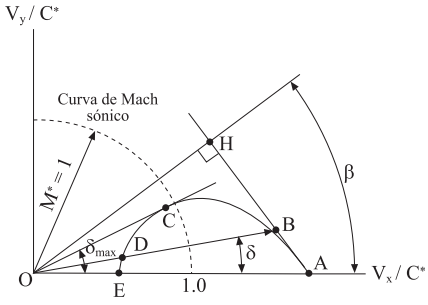
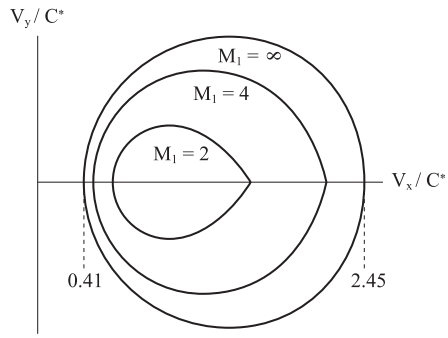


Fig. T 13.23 Diversos lugares geométricos para sendos números de Mach entrantes M1. Fuente: J.D. Anderson



La línea OC representada en la figura T 13.22, línea que es tangente a la curva polar, define el ángulo de inclinación máximo δ_{max} de la superficie sólida, ángulo para el cual la onda de choque está aún adherida.

El punto E caracteriza una onda de choque perpendicular al flujo. Si se unen los puntos A y B mediante una línea recta, y se traza una línea perpendicular a la línea AB y que pase por el punto O, se obtiene el punto H. El triángulo HOA define el ángulo de inclinación de la onda de choque ε. Es interesante comparar las figuras T 13.22 y T 13.20, con el fin de entender de forma global los triángulos de velocidades y la curva polar.

De hecho, es posible determinar una ecuación analítica que permita representar la curva polar en forma adimensional. Dicha ecuación caracterizaría la abscisa de cada punto de la curva en función de la ordenada de dicho punto y del número de Mach adimensional entrante M_1^*. Dicha ecuación toma la forma:

$$\left(\frac{V_{y2}}{C^*}\right)^2 = \frac{\left(M_1^* - \frac{V_{x2}}{c^*}\right)^2 \left[\frac{V_{x2}}{c^*} M_1^* - 1\right]}{\frac{2}{\gamma+1}\left(M_1^*\right)^2 - \frac{V_x}{c^*} M_1^* + 1} \tag{32}$$

La deducción de esta ecuación se detalla a continuación.

De la figura T 13.20, se deducen las relaciones siguientes:

$$V_T = V_{T1} = V_{T2} = V_1 \cos\varepsilon \tag{33}$$

$$V_{N1} = V_1 \sin \varepsilon \tag{34}$$

$$V_{N2} = V_1 \sin \varepsilon - \frac{V_{y2}}{\cos \varepsilon} \tag{35}$$

$$\tan \varepsilon = \frac{V_1 - V_{x2}}{V_{y2}} \tag{36}$$

La ecuación de Prandtl para una onda de choque oblicua toma la forma:

$$V_{N1}\ V_{N2} = \left(c^*\right)^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_T^2 \tag{37}$$

Sustituyendo las ecuaciones 33, 34 y 35 en 37, se obtiene:

$$V_1^2 \sin^2 \varepsilon - V_1\, V_{y2} \tan \varepsilon = \left(c^*\right)^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_1^2 \cos^2 \varepsilon \tag{38}$$

El seno al cuadrado de un ángulo se puede dar como:

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{\tan^2 \varepsilon}{1 + \tan^2 \varepsilon}; \tag{39}$$

Sustituyendo la ecuación 36 en la 39, se tiene:

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{\left(V_1 - V_{x2}\right)^2}{V_{y2}^2 + \left(V_1 - V_{x2}\right)^2}; \tag{40}$$

El coseno al cuadrado del mismo ángulo sería:

$$\cos^2 \varepsilon = 1 - \sin^2 \varepsilon = \frac{V_{y2}^2}{V_{y2}^2 + \left(V_1 - V_{x2}\right)^2}; \tag{41}$$

Sustituyendo las ecuaciones 36, 40 y 41 en la ecuación 38, se tiene:

$$V_{y2}^2 \left(\left(c^*\right)^2 + \frac{2}{\gamma + 1} V_1^2 - V_1\, V_{x2} \right) = \left(V_1 - V_{x2}\right)^2 \left(V_1\, V_{x2} - \left(c^*\right)^2 \right) \tag{42}$$

Obsérvese que esta ecuación da la relación entre V_1; V_{x2} y V_{y2}. Esta ecuación se puede adimensionar dividiendo cada uno de los términos por $\left(c^*\right)^4$, y el resultado da lugar a:

$$\left(\frac{V_{y2}}{c^*}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{V_1}{c^*}\right)^2 - \frac{V_1}{c^*} \frac{V_{x2}}{c^*} \right) = \left(\frac{V_1}{c^*} - \frac{V_{x2}}{c^*} \right)^2 \left(\frac{V_1}{c^*} \frac{V_{x2}}{c^*} - 1 \right) \tag{43}$$

Y, denominando $M_1^* = \frac{V_1}{c^*}$; $V_{x2}^* = \frac{V_{x2}}{c^*}$; $V_{y2}^* = \frac{V_{y2}}{c^*}$, la ecuación 43 toma la forma:

$$\left(V_{y2}^*\right)^2 \left(1 + \frac{2}{\gamma+1}\left(M_1^*\right)^2 - M_1^*\, V_{x2}^*\right) = \left(M_1^* - V_{x2}^*\right)^2 \left(M_1^*\, V_{x2}^* - 1\right) \qquad (44)$$

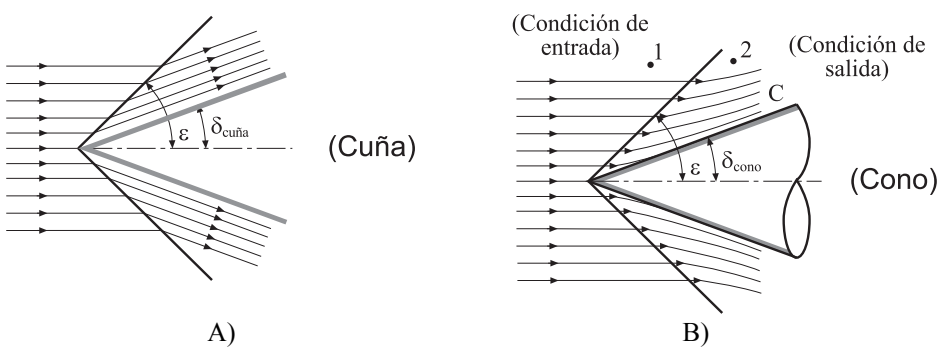
Obsérvese que las ecuaciones 32, 43 y 44 son, en realidad, la misma ecuación.

13.11.3 Flujo supersónico sobre superficies en forma de cuña plana y superfícies cónicas

Una de las características fundamentales que diferencia el flujo sobre cuñas planas o sobre superficies cónicas es que las líneas de corriente generadas detrás de una onda de choque oblicua que aparece por el efecto de una cuña son todas ellas paralelas a la superficie de la cuña, (v. figura T 13.24A). Por otro lado, las líneas de corriente que aparecen detrás de una onda de choque oblicua, generada por una superficie cónica, son inherentemente tridimensionales. Esta tercera dimensión proporciona un espacio extra al fluido para moverse, lo cual da lugar a que las líneas de corriente trás la onda de choque se curven para adaptarse a la superficie (v. figura T 13.24B). Este efecto se denomina *efecto de alivio tridimensional* y explica por qué el ángulo de inclinación de las ondas de choque, ε, generadas por una superficie cónica con un ángulo dado δ, es siempre menor que el generado por una cuña con el mismo ángulo δ. Es importante recordar que la intensidad de la onda es menor cuanto menor es el ángulo de inclinación ε de la misma, lo cual implica que la presión, la temperatura y la densidad tras la onda de choque, p_2, T_2 y ρ_2, serán menores para una superficie cónica que para una cuña. Se entiende que el número de Mach entrante M_1 y la inclinación del sólido δ son los mismos en ambos casos.

Asimismo es necesario remarcar que, para una cuña, y debido a que las líneas de corriente detrás de la onda de choque son paralelas a la superficie de la cuña, la presión detrás de la onda de choque será la misma que la existente sobre la superficie de la cuña. Esto no sucede así para el caso de una superficie cónica: debido a que las líneas de corriente detrás de la onda de choque se curvan, la presión detrás de la onda de choque no es la misma que la que existe sobre la superficie del cono.

Fig. T 13.24 Líneas de corriente detrás de una superficie tipo cuña A) o cónica B)



13.11.3.1 Características del flujo sobre una cuña

El flujo sobre una cuña se ha de considerar bidimensional, con lo cual el estudio de las ondas de choque sobre este tipo de cuerpos se basa en las mismas ecuaciones que las obtenidas para ondas de choque oblicuas sobre planos inclinados. Esta similitud se aprecia mejor si se escoge como ángulo característico de una cuña el semiángulo de la misma, $\delta_{cuña}$, (v. figura T 13.24A), ángulo que se ha denominado δ en el estudio de las ondas de choque sobre planos inclinados. Para cuñas simétricas, $\delta_{cuña}$ es idéntico para la parte superior e inferior de la cuña, y se entenderá que el flujo es asimismo simétrico. Si esta simetría dejase de existir, entonces debería de estudiarse por separado el plano superior e inferior de la cuña, dado que cada uno estaría caracterizado por un ángulo $\delta_{cuña}$ diferente. Al igual que sucedía para el caso de un plano inclinado, si el semiángulo de la cuña $\delta_{cuña}$ supera un cierto valor, que se denominará como δ_{max}, la onda de choque se separa de la superficie de la cuña (v. figura T 13.25). Detrás de la onda de choque separada, se creará una región con flujo subsónico y otra con flujo supersónico.

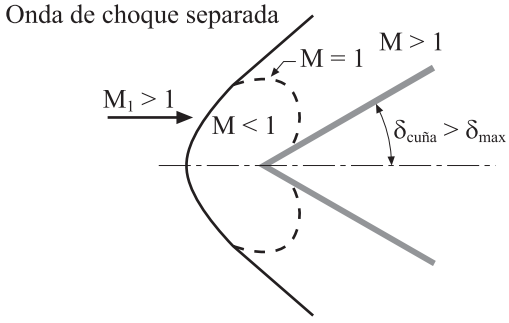


Fig. T 13.25 Efectos de la separación de una onda de choque oblicua para el caso de una cuña bidimensional

En el apartado de flujo sobre superficies inclinadas, se ha observado que, cuando el numero de Mach del flujo entrante es $M_1 = \infty$, el ángulo de inclinación máximo que podía tener el plano inclinado era de $\delta_{max} = 45{,}37$ grados; por encima de este ángulo, la onda de choque estará separada, sea cual sea el número de Mach entrante. Extendiendo esto para el caso actual, se concluye que, cuando el ángulo de la cuña sea mayor de 90,74 grados, la onda de choque oblicua estará siempre separada.

Ya se ha visto que la onda de choque oblicua aumenta de intensidad a medida que su ángulo ε aumenta, con lo cual cabe esperar que la fuerza de arrastre sobre el cuerpo, causada por dicha onda de choque, aumente a medida que aumenta el ángulo de inclinación de la onda ε.

Es interesante asimismo remarcar que, para el caso de que una cuña tenga una prolongación rectangular aguas abajo (v. figura T 13.26), la línea de inflexión que delimita el final de la cuña y el inicio de la zona rectangular dará lugar a la aparición de ondas de expansión, las cuales interaccionarán con la onda de choque adherida en la punta del cono. Esta interacción hace que las condiciones de presión y velocidad detrás de la onda de choque primaria queden modificadas, con lo cual dicha onda de choque tiende a curvarse. De hecho, toda irregularidad que pueda aparecer sobre la superficie de la cuña dará lugar a la aparición de ondas de choque adicionales. Recuérdese que, para ondas de choque débiles, el flujo detrás de la onda de choque primaria sigue siendo supersónico.

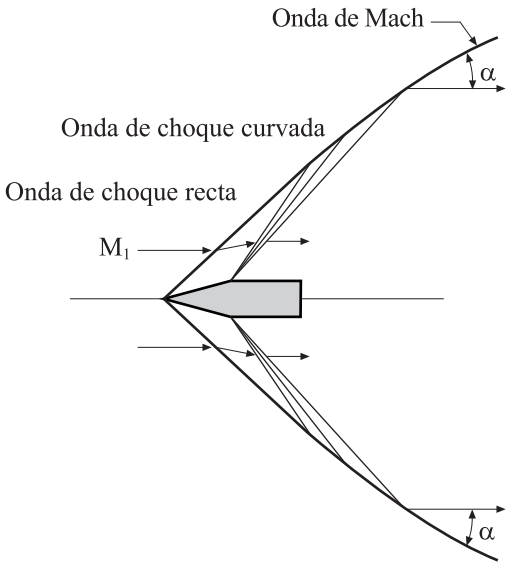


Fig. T 13.26 Interacción entre una onda de choque oblicua y ondas de expansión creadas aguas atrás para una cuña bidimensional

13.11.3.2 Características del flujo sobre una superficie cónica

El flujo sobre una superficie sólida es especialmente interesante debido a que todos los aviones y misiles supersónicos poseen una punta cónica. Ya se ha comentado anteriormente que el flujo sobre una superficie cónica es eminentemente tridimensional, lo cual conlleva que el estudio matemático del flujo implique la utilización de las ecuaciones gobernantes de forma diferencial.

Por conveniencia, se trabaja en coordenadas, (r, ϕ, z), en que el eje z es el eje central del cono. El flujo se considera simétrico respecto al ángulo ϕ, con lo cual las variables independientes serán r y z. El flujo se considerará isentrópico, tanto antes como después de la onda de choque oblicua, y se considera que la onda de choque está adherida a la punta del cono.

Es interesante remarcar que la primera solución de flujo supersónico sobre una superficie cónica fue obtenida por A. Busemann en 1929. La solución numérica apareció en 1933 y fue generada por G.I. Taylor y J.W. Maccoll. Esta solución es la que se presenta en esta sección. El ángulo de ataque, formado por el flujo aguas arriba y el eje del cono, será de 0º.

Sea el cono definido en la figura T 13.27; su semiángulo es δ_{cono} y el eje del cono está alineado con la corriente supersónica de flujo que aparece aguas arriba, la cual provoca una onda de choque oblicua adherida a la punta del cono. Las líneas de corriente, al atravesar la onda de choque, quedan deflectadas y se van curvando hasta que se sitúan asintóticamente paralelas a la superficie del cono, en teoría en el infinito. La presión que ejerce el fluido sobre la superficie del cono se va a considerar constante en todo punto de la superficie; el resto de propiedades del fluido se considerarán asimismo constantes en cualquier punto de la superficie del cono. Si se define un radio genérico que parte del vértice del cono, tanto la

superficie del cono como la onda de choque se pueden definir por sendas direcciones radiales que difieren en el ángulo de inclinación del radio, (v. figura T 13.28). La definición de flujo cónico implica que las partículas de fluido que fluyen entre la superficie del cono y la onda de choque seguirán una trayectoria marcada por un radio genérico r, que posee una inclinación genérica μ. Dichas partículas de fluido tendrán, a lo largo de toda la longitud del radio r, las mismas propiedades p, T, ρ, V.

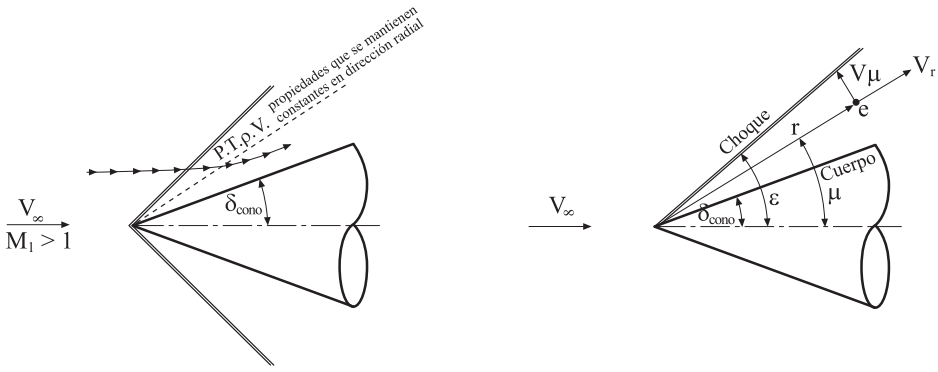


Fig. T 13.27
Evolución de las líneas de corriente después de la onda de choque

Fig. T 13.28
Sistema de coordenadas a utilizar en este apartado

13.11.3.2.1 Formulación matemática de las ondas de choque sobre superficies cónicas, de acuerdo con Taylor y Maccoll

Sea el sistema de coordenadas superpuesto, cartesiano y esférico que se presenta en la figura T 13.29. El flujo entrante definido por la velocidad V_∞ se considerará detrás de la onda de choque simétrico y de forma cónica, y, por tanto, independiente del ángulo ϕ. En consecuencia, el ángulo μ y el radio r serán las dos variables independientes. De acuerdo con estos considerandos, cualquier punto del fluido existente entre la superficie del cono y la onda de choque oblicua se puede caracterizar por una velocidad en dirección radial V_r y otra en dirección angular V_μ (v. figura T 13.28).

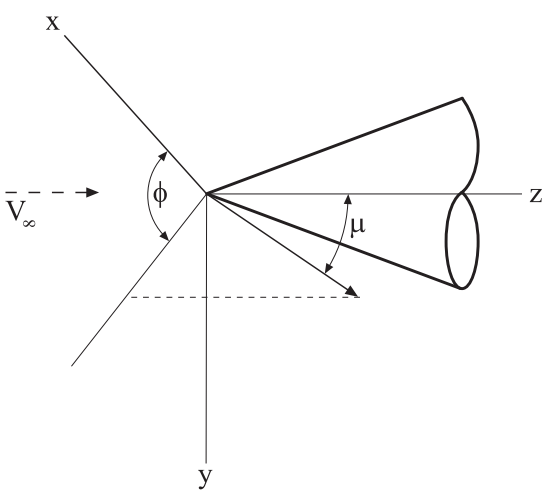


Fig. T 13.29
Sistema de coordenadas empleado

En forma matemática, la simetría del flujo se puede dar como:

$\frac{\partial}{\partial\phi} \cong 0$ El flujo es independiente del ángulo ϕ.

$\frac{\partial}{\partial r} \cong 0$ Las propiedades del fluido son constantes a lo largo del radio r.

Considerando el flujo como estacionario y compresible, la ecuación de continuidad toma la forma:

$$\nabla(\rho\vec{V}) = 0 \tag{45}$$

En coordenadas esféricas, esta ecuación se expresa:

$$\nabla(\rho\vec{V}) = 0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\rho\,V_r\right) + \frac{1}{r\sin\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}(\rho\,V\mu\sin\mu) + \frac{1}{r\sin\mu}\frac{\partial(\rho\,V\phi)}{\partial\phi} \tag{46}$$

La ecuación 46 se puede desglosar del modo siguiente:

$$0 = \frac{1}{r^2}\left[r^2\frac{\partial(\rho\,V_r)}{\partial r} + \rho\,V_r\,2r\right] + \frac{1}{r\sin\mu}\left[\rho V_\mu\,\cos\mu + \sin\mu\frac{\partial(\rho\,V_\mu)}{\partial_\mu}\right] + \frac{1}{r\sin\mu}\frac{\partial(\rho\,V_\delta)}{\partial_\phi} \tag{47}$$

Teniendo en cuenta las consideraciones de simetría de flujo establecidas previamente, la ecuación precedente se reduce a:

$$0 = \frac{2\rho\,V_r}{r} + \frac{\rho\,V_\mu}{r}\cot\mu + \frac{1}{r}\left(\rho\frac{\partial V_\mu}{\partial\mu} + V_\mu\frac{\partial_\rho}{\partial\mu}\right) \tag{48}$$

O bien:

$$0 = 2\rho\,V_r + \rho\,V_\mu\cot\mu + \rho\frac{\partial V_\mu}{\partial\mu} + V_\mu\frac{\partial_\rho}{\partial\delta} \tag{49}$$

Esta ecuación se podría definir como la ecuación de continuidad para flujo cónico simétrico.

En las figuras T 13.27 y T 13.28, se observa que la onda de choque oblicua es recta, es decir, no está curvada como en el caso expuesto en la figura T 13.26. Este hecho da lugar a que se pueda considerar que todas las líneas de corriente experimentan el mismo salto entrópico al atravesar la onda de choque y que, por consiguiente, la entropía asociada al fluido en cualquier punto de la zona de flujo cónico será la misma, es decir, $\nabla s = 0$. Por otro lado, el flujo a través de una onda de choque se considera adiabático, siendo nula la variación de temperatura de estancamiento y entalpía de estancamiento entre la parte frontal y trasera de la onda de choque

$\nabla h_0 = 0$. Recordando ahora la ecuación que L. Crocco publicó en 1937, que es una combinación de las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía, que relacionaba las características termodinámicas con las de cinemática de fluidos para un fluido compresible, y considerando únicamente los términos que caracterizan el régimen permanente, dicha ecuación se expresa:

$$T\nabla s = \nabla h_0 - \vec{V} \wedge \left(\nabla \wedge \vec{V}\right) \tag{50}$$

Teniendo en cuenta las consideraciones que acabamos de realizar sobre el flujo cónico, la ecuación de Crocco toma la forma $\left(\nabla \wedge \vec{V}\right) = 0$. O, dicho de otra manera, el flujo existente entre la onda de choque oblicua y la superficie del cono se ha de considerar irrotacional.

El rotacional de un campo vectorial en coordenadas esféricas se define como:

. $$0 = \nabla \wedge \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin\mu} \begin{vmatrix} e_r & re_\mu & (r\sin\mu)e_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \mu} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ V_r & rV_\mu & (r\sin\mu)V_\phi \end{vmatrix} \tag{51}$$

Operando, se obtiene:

$$0 = \nabla \wedge \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin\mu} \begin{bmatrix} e_r \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu}\left(V_\phi\, r\sin\mu\right) - \frac{\partial}{\partial \phi}\left(rV_\mu\right) \right\} \\ +re_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi}\left(V_r\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(V_\phi\, r\sin\mu\right) \right\} \\ +(r\sin\mu)\, e_\phi \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(V_\mu r\right) - \frac{\partial}{\partial \mu}\left(V_r\right) \right\} \end{bmatrix} \tag{52}$$

Y, puesto que el flujo es simétrico $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$; $V_\phi = 0$ y que las propiedades del mismo no varían a lo largo del radio r, la ecuación 52 queda reducida a:

$$0 = \frac{1}{r^2 \sin\mu}\left[(r\sin\mu)e_\phi \left\{ V_\mu + r\frac{\partial}{\partial r}\left(V_\mu\right) - \frac{\partial}{\partial_\mu}\left(V_r\right) \right\} \right] = \frac{e_\phi}{r^2}\left(V_\mu - \frac{\partial}{\partial \mu}\left(V_r\right) \right) \tag{53}$$

Y, finalmente, se obtiene la condición de irrotacionalidad para flujo simétrico cónico.

$$V_\mu = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(V_r\right) \tag{54}$$

Recuérdese que, (v. fig. T 13.28), la velocidad del fluido en un punto genérico situado entre la superficie del cono y la onda de choque está definida, para el sistema de coordenadas elegido, por $\vec{V} = \vec{V}_\mu + \vec{V}_r$, lo cual implica que se puede escribir: $V^2 = V_r^2 + V_\mu^2$

Puesto que el flujo en la zona objeto de estudio se puede considerar irrotacional, según la ecuación de Euler se establece que:

$$dp = -\rho V\, dV \tag{55}$$

ecuación que, para el presente caso, se puede expresar:

$$dp = -\rho\left(V_r\, dV_r + V_\mu\, dV_\mu\right) \tag{56}$$

Recuérdese que la definición de velocidad de propagación del sonido para flujo isentrópico venía dada por:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) = c^2 \equiv \frac{dp}{d\rho} \tag{57}$$

Teniendo en cuenta el concepto de velocidad de propagación del sonido, la ecuación 56 se puede expresar:

$$d\rho = -\frac{\rho}{c^2}\left(V_r\, dV_r + V_\mu\, dV_\mu\right) \tag{58}$$

La definición de entalpía de estancamiento era: $h_0 = h + \frac{v^2}{2}$. Definiendo como V_{max} la máxima velocidad teórica obtenible, partiendo de un fluido donde la entalpía de estancamiento es de h_0 y que se expande hasta llegar a un valor nulo de temperatura, se concluye:

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2} = \frac{v_{max}^2}{2} \tag{59}$$

Para un gas ideal, el calor específico a presión constante se puede expresar como: $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ con lo cual la entalpía estática se puede dar:

$$h = C_p T = \frac{\gamma R T}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1} \tag{60}$$

Teniendo en cuenta 60, la ecuación 59 se puede expresar:

$$\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2} = \frac{v_{max}^2}{2} \tag{61}$$

$$c^2 = \frac{\left(v_{max}^2 - v^2\right)(\gamma - 1)}{2} = \frac{(\gamma - 1)}{2}\left(v_{max}^2 - v_r^2 - v_\mu^2\right) \tag{62}$$

Sustituyendo la ecuación 62 en la ecuación 58, se obtiene:

$$d\rho = -\left(\frac{V_r\, dV_r + V_\mu\, dV_\mu}{v_{max}^2 - v_r^2 - v_\mu^2} \right) = \frac{2\rho}{(\gamma - 1)} \tag{63}$$

La ecuación 63 se podría definir como la ecuación de Euler modificada para ser utilizada en flujo cónico.

Las ecuaciones 49, 54 y 63 tienen tres variables dependientes, V_μ, V_r y ρ. Debido a la simetría del flujo, existe únicamente una variable independiente, que es el ángulo μ, con lo cual las derivadas parciales de estas tres ecuaciones se pueden dar, en realidad, en forma de derivada total. En consecuencia, se puede decir:

De la ecuación 49:

$$0 = 2\rho\, V_r + \rho V_\mu \cot\mu + \rho \frac{dV_\mu}{d\mu} + V_\mu \frac{d\rho}{d\mu} \tag{64}$$

De la ecuación 54:

$$V\mu = \frac{dV_r}{d\mu} \tag{65}$$

ecuación que se puede expresar de la forma siguiente:

$$\frac{dV_\mu}{d\mu} = \frac{d^2 V_r}{d\mu^2} \tag{66}$$

De la ecuación 63:

$$\frac{d\rho}{d\mu} = -\left(\frac{V_r \dfrac{dV_r}{d\mu} + V_\mu \dfrac{dV_\mu}{d\mu}}{V_{max}^2 - V_r^2 - V_\mu^2} \right) \frac{2\rho}{(\gamma - 1)} \tag{67}$$

Sustituyendo la ecuación 67 en la 64, se obtiene:

$$0 = 2V_r + V_\mu \cot\mu + \frac{dV_\mu}{d\mu} - \left(\frac{V_r \dfrac{dV_r}{d\mu} + V_\mu \dfrac{dV_\mu}{d\mu}}{V_{max}^2 - V_r^2 - V_\mu^2} \right) \frac{V_\mu 2}{(\gamma - 1)} \tag{68}$$

Considerando las ecuaciones 65 y 66, la ecuación 68 toma la forma:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{(\gamma - 1)}{2} \left(V_{max}^2 - V_r^2 - \left(\frac{dV_r}{d\mu} \right)^2 \right) \left(2V_r + \frac{dV_r}{d\mu} \cot\mu + \frac{d^2 V_r}{d\mu^2} \right) \\ & - \frac{dV_r}{d\mu} \left(V_r \frac{dV_r}{d\mu} + \frac{dV_r}{d\mu} \frac{d^2 V_r}{d\mu^2} \right) \end{aligned} \tag{69}$$

Esta es la ecuación diferencial que obtuvieron Taylor y Maccoll. Obsérvese que es una ecuación diferencial ordinaria, en que se evalúa la velocidad en dirección radial V_r en función del ángulo de inclinación genérico del flujo μ. Cabe destacar, sin embargo, que la velocidad V_{max} es a priori desconocida. Para obviar este problema, se van a adimensionalizar las velocidades utilizando la velocidad V_{max} como parámetro para la adimensionalización. Así, se define:

$$V^+ = \frac{V}{V_{max}}; \qquad V_r^+ = \frac{V_r}{V_{max}}; \tag{70}$$

donde la velocidad V es una velocidad genérica.

Es interesante remarcar que la velocidad adimensional V^+ es únicamente función del número de Mach del fluido. Para observar este detalle se divide inicialmente la ecuación 61 por la velocidad genérica del fluido al cuadrado V^2, y se obtiene:

$$\left(\frac{c}{V}\right)^2 \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2} = \left(\frac{V_{max}}{V}\right)^2 \frac{1}{2} \tag{71}$$

ecuación que se puede expresar como:

$$V^+ = \frac{V}{V_{max}} = \frac{1}{\left[\frac{2}{M^2(\gamma-1)} + 1\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{72}$$

La ecuación 72 muestra la relación entre la velocidad adimensional y el número de Mach del fluido en el punto considerado.

Dividiendo la ecuación 69 por V_{max}^3 y utilizando las relaciones definidas en la ecuación 70, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{(\gamma-1)}{2}\left(1 - V_r^{+2} - \left(\frac{dV_r^+}{d\mu}\right)^2\right)\left(2V_r^+ + \frac{dV_r^+}{d\mu}\cot\mu + \frac{d^2V_r^+}{d\mu^2}\right) \\ & - \frac{dV_r^+}{d\mu}\left(V_r^+ \frac{dV_r^+}{d\mu} + \frac{dV_r^+}{d\mu}\frac{d^2V_r^+}{d\mu^2}\right) \end{aligned} \tag{73}$$

La ecuación 73 es la ecuación de Taylor y Maccoll dada en forma de velocidad adimensionalizada. Véase que es una ecuación diferencial ordinaria, aunque ha de ser resuelta numéricamente.

El proceso que se debe seguir para determinar las propiedades del fluido sobre la superficie cónica es el siguiente:

Para un número de Mach aguas arriba, M_1 se va a suponer un ángulo de deflexión de la onda de choque ε. Partiendo de estos dos datos, se puede determinar el número de Mach a la salida de la onda de choque M_2, así como la inclinación de la superficie ficticia plana que daría lugar a la onda de choque δ. De hecho, mediante las ecuaciones 13 a 22 para ondas de choque oblicuas bidimensionales, se pueden obtener las relaciones de las propiedades del fluido entre la parte frontal y trasera de la onda de choque. Dichas propiedades debido a la curvatura que experimentan las líneas de corriente para el caso de flujo cónico, variarán en función del ángulo genérico μ y, por tanto, serán diferentes en la superficie del cono.

Partiendo de los valores de M_2 y δ (v. figura T 13.30), determinados gracias a las hipótesis iniciales, se pueden hallar los valores de V_r^+ y V_μ^+, tras la onda de choque, valores que se obtendrán proyectando en dirección normal y tangencial la velocidad adimensional V^+, la cual se obtiene de sustituir el número de Mach M_2 en la ecuación 72.

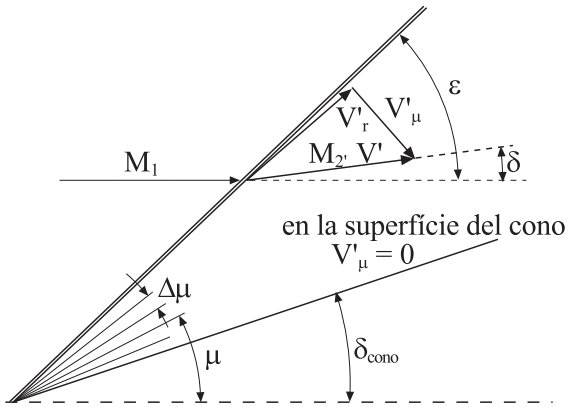


Fig. T 13.30
Consideraciones geométricas para determinar el ángulo del cono

El valor de V_r^+ que acabamos de determinar detrás de la onda de choque oblicua se utilizará como condición de contorno para hallar, mediante la ecuación 73 el valor de la velocidad V_r^+ en función de las diversas direcciones radiales definidas por sendos ángulos μ. Para cada valor incremental de μ, se puede determinar la velocidad en dirección radial, V_μ^+, utilizando la ecuación 65. Durante la realización de este proceso, se observa que, para un valor dado de μ, que se denominará $\mu = \delta_{cono}$ (v. fig. T 13.30), la componente normal de la velocidad será nula $V_\mu^+ = 0$. Este ángulo representa el ángulo de la superficie del cono que da lugar a la onda de choque de inclinación ε y cuando el número de Mach entrante es M_1, valores que han sido definidos como hipótesis inicial.

Obsérvese que, para cualquier dirección radial genérica, definida por un ángulo μ, se pueden conocer las velocidades V_r^+ y V_μ^+ y, en consecuencia se puede determinar V^+, $V^+ = \sqrt{\left(V_r^+\right)^2 + \left(V_\mu^+\right)^2}$; mediante la ecuación 72, se podrá obtener asimismo el número de Mach M_2 en cada punto.

Repitiendo este proceso para toda una serie de valores de M_1 y ε iniciales, se obtienen las tablas y los gráficos que caracterizan este tipo de flujo. Las figuras T 13.31, T 13.32 y T 13.33 muestran sendos parámetros obtenidos siguiendo este proceso. La figura T 13.31 presenta el ángulo de inclinación de la onda de choque en función del número de Mach entrante y del semiángulo de inclinación del cono. El número de Mach en la superficie del cono M_c en función del número de Mach entrante M_1 y el semiángulo de inclinación del cono δ_{cono} se muestra en la figura T 13.32. En la figura T 13.33, se puede observar la relación entre la presión estática sobre la superficie del cono y la presión estática a la entrada de la onda de choque, en función del número de Mach entrante y del semiángulo de inclinación del cono. Para todos los casos, se ha supuesto un índice de politropía de $\gamma = 1{,}4$. Es importante comentar que estas figuras representan el caso de aparición de ondas de choque débiles, que son las usuales; de hecho, al igual que sucedía con las cuñas planas, si la presión aguas atrás es suficientemente elevada, podrían aparecer las ondas de choque fuertes.

El semiángulo de inclinación máximo, tanto para superficies planas adimensionales, cuñas, como para superficies cónicas, para el cual la onda de choque está aún adherida al cuerpo, se presenta en función del número de Mach entrante en la figura T 13.34.

En el estudio de las ondas de choque sobre superficies cónicas se ha observado que, después de la onda de choque, el flujo es en general supersónico, aunque para ángulos de inclinación del cono suficientemente grandes se ha visto que puede aparecer una región detrás de la onda de choque donde el flujo es supersónico, pero en las regiones cercanas a la pared del cono el flujo es subsónico. Para estos casos, se ha de entender que existe una dirección radial definida por un ángulo μ para la cual el flujo pasa de supersónico a subsónico. Las líneas de corriente a partir de este punto son prácticamente paralelas a la superficie del cono.

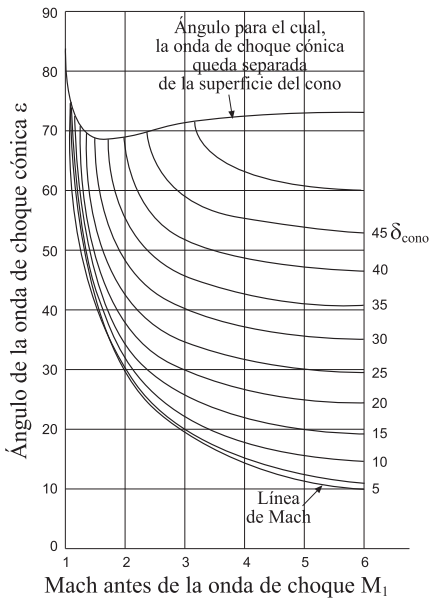


Fig. T 13.31 Relación entre el semiángulo de la punta cónica, el número de Mach entrante y el ángulo de inclinación de la onda de choque. Fuente: M.J. Zucrow; J.D. Hoffman

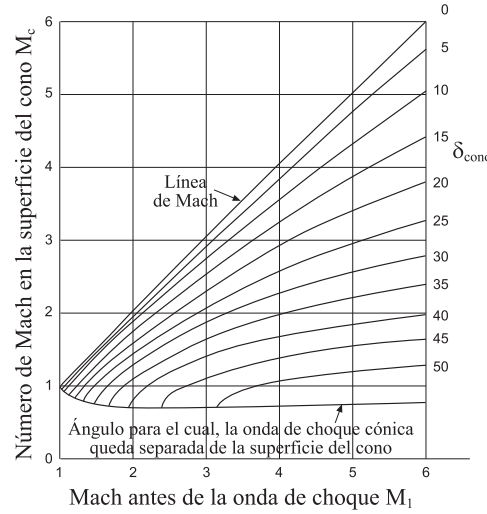
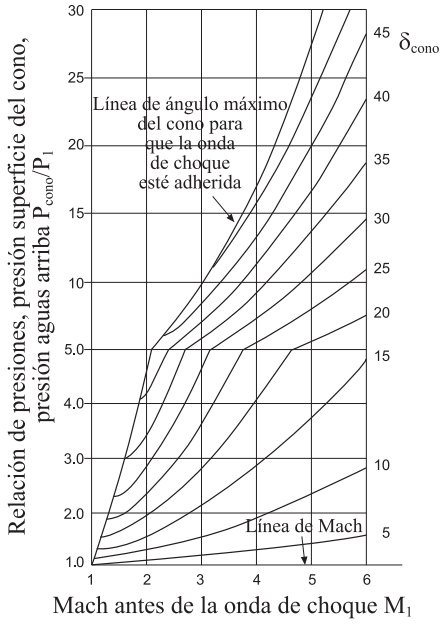


Fig. T 13.32 Presenta el número de Mach en la superficie del cono Mc, como función del número de Mach inicial M_1 y para diferentes valores del ángulo del cono δcono, $\gamma = 1{,}4$ Fuente: M.J. Zucrow; J.D. Hoffman



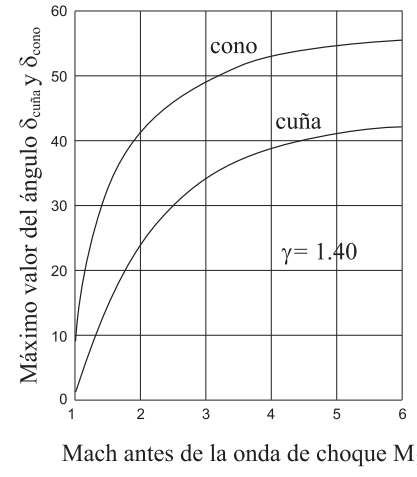


Fig. T 13.33
Relación entre la presión estática en la superficie del cono y la presión delante de la onda de choque, en función del número de Mach M_1 y del semiángulo de la punta cónica, δcono.
Fuente:
M.J. Zucrow;
J.D. Hoffman

Fig.T 13.34
Semiángulo máximo en función del número de Mach entrante para el cual la onda de choque esta aún adherida.
Caso de una punta bidimensional plana y un cono.
Fuente:
M.J. Zucrow;
J.D. Hoffman

13.11.4 Reflexión de ondas de choque oblicuas bidimensionales sobre una superfície sólida

Un punto interesante a estudiar es qué sucede con las ondas de choque oblicuas una vez han sido generadas. En esta sección, se detalla cómo las ondas de choque oblicuas bidimensionales se reflejan en superficies sólidas y generan otras ondas oblicuas de menor intensidad. Sea por ejemplo la onda de choque oblicua bidimensional generada cuando la corriente supersónica aguas arriba incide sobre un plano inclinado, (v. fig. T 13.35). Obsérvese que la onda de choque inicial se refleja al llegar al punto II formando un ángulo β respecto a la horizontal. Debido a esta reflexión, se crean tres zonas claramente diferenciadas: la primera o zona A es la que caracteriza el flujo supersónico aguas arriba, donde el número de Mach es M_1. La segunda o zona B es la que aparece entre la onda incidente y la reflejada; se entenderá que el número de Mach en esta zona es M_2 y las propiedades del fluido se considerarán contantes en todo este segundo dominio. La tercera zona es la que aparece aguas abajo de la onda de choque reflejada; el número de Mach que caracteriza el flujo en esta área será M_3. El ejemplo siguiente pretende clarificar el proceso de cálculo para hallar las propiedades del fluido en cada una de estas tres zonas.

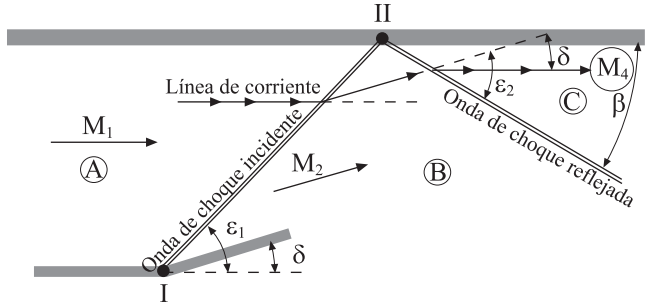


Fig. T 13.35
Ejemplo de onda de choque reflejada en una pared sólida
Fuente:
J.D. Anderson

Supóngase que, en la zona A, definida en la figura T 13.35, las propiedades del flujo son $M_1 = 3$, $T_1 = 600$ K, $P_1 = P_{atmosférica} = 10^5$ Pa. El ángulo de deflexión del plano inclinado δ es de 20 grados y se considera $\gamma = 1{,}4$. Con estos datos, se quieren determinar las características del fluido en las zonas B y C.

El primer paso será hallar el ángulo de inclinación de la onda de choque oblicua incidente. Para ello, se pueden utilizar las figuras T 13.15 o T 13.16, las cuales son poco precisas, o bien utilizar las expresiones implícitas 21 o 22 o la expresión explicita de Emanuel, (expresión 24).

Utilizando cualquiera de las tres ecuaciones posibles, se obtiene un ángulo para la onda de choque débil de $\varepsilon_1 = 37{,}763$ grados, y un ángulo para la onda de choque fuerte de $\varepsilon_1 = 82{,}144$ grados.

El número de Mach perpendicular a la onda de choque incidente será:

$$M_{N1} = M_1 \sin \varepsilon_1 = 3 * \sin(37,763) = 1,83719$$

Entrando en las tablas de ondas de choque normales con $M_{N1} = 1{,}83719$, se obtienen las relaciones entre los parámetros de entrada y salida de la onda de choque. En lugar de utilizar las tablas, se utilizan las ecuaciones homólogas, dado que ofrecen mayor precisión.

El número de Mach perpendicular a la onda de choque incidente y a la salida de la misma será:

$$M_{N2} = \left[\frac{M_{N1}^2 + \left[\frac{2}{\gamma - 1}\right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma - 1)}\right] M_{N1}^2 - 1} \right]^{0,5} = \left[\frac{1,83719^2 + \frac{2}{0,4}}{\frac{2,8}{0,4} 1,83719^2 - 1} \right] = 0,608397$$

La relación de presiones viene dada por la ecuación:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_{N1}^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{2,8}{2,4} 1,83719^2 - \frac{0,4}{2,4} = 3,771144$$

Y la relación de temperaturas para una onda de choque normal es definida por:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{N1}^2\right)\left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_{N1}^2 - 1\right)\left[\frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)^2 M_{N1}^2}\right]$$

Sustituyendo valores se obtiene: $\frac{T_2}{T_1} = 1,5595974$

El número de Mach después de la onda de choque incidente será:

$$M_2 = \frac{M_{N2}}{\sin(\varepsilon_1 - \delta)} = \frac{0,608397}{\sin(37,763 - 20)} = 1,9942187$$

Utilizando de nuevo las ecuaciones 21 o 22 o 24 y considerando los valores de entrada como M_2 =1,9942187 y δ = 20 grados (v. figura T 13.35), se obtiene un valor de ε_2 para la onda de choque reflejada de 53,6303 grados para una onda de choque débil, o bien de 74,132 para una onda de choque fuerte.

Así pues, el número de Mach perpendicular a la onda de choque reflejada será (utilizando los valores para la onda de choque débil):

$$M_{N3} = M_2 \sin \varepsilon_2 = 1,9942187 \sin(53,6303) = 1,6057599$$

Véase que se considera $M_2 = M_3$, Mach saliente de la onda de choque incidente, igual a Mach entrante a la onda de choque reflejada.

Utilizando de nuevo las ecuaciones para la onda de choque plana, se obtiene:

$$M_{N4} = \left[\frac{M_{N3}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma - 1)} \right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma - 1)} \right] M_{N3}^2 - 1} \right]^{0,5} = \left[\frac{1,6057599^2 + \frac{2}{0,4}}{\frac{2,8}{0,4} 1,6057599^2 - 1} \right]^{0,5} = 0,6667115$$

$$\frac{P_4}{P_3} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_{N3}^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{2,8}{2,4} 1,6057599^2 - \frac{0,4}{2,4} = 2,8415423$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{N3}^2 \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_{N3}^2 - 1 \right) \left[\frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 M_{N3}^2} \right]$$

Sustituyendo valores, se obtiene: $\frac{T_4}{T_3} = 1,3919477$

Cabe recordar que en la zona B se cumple $T_2 = T_3$; y $P_2 = P_3$.

Obsérvese que los valores de las relaciones de presión y temperatura obtenidos para la onda de choque reflejada son menores que los obtenidos para la onda de choque incidente; ello es lógico puesto que la onda de choque reflejada es de menor intensidad.

$$M_4 = \frac{M_{N4}}{\sin(\varepsilon_2 - \delta)} = \frac{0,6667115}{\sin(53,6303 - 20)} = 1,2038155$$

El ángulo de inclinación de la onda de choque reflejada respecto a la horizontal será: $\beta = \varepsilon_2 - \delta = 33,6303$ grados.

La presión y la temperatura estáticas detrás de la onda de choque reflejada, zona C, se determinan del modo siguiente:

$$P_4 = \frac{P_4}{P_3}\frac{P_2}{P_1}P_1 = 2,8415423 * 3,771144 * 10^5 = 10,715865 * 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_4 = \frac{T_4}{T_3}\frac{T_2}{T_1}T_1 = 1,3919477 * 1,5595974 * 600 = 1302,52 \text{ K}$$

Un caso particular podría ser la determinación del ángulo de inclinación del plano inclinado para que, dado un número de Mach aguas arriba, M_1, se obtenga un número de Mach deseado detrás de la onda de choque incidente, M_2. Sea por ejemplo el caso en que el número de Mach entrante vale $M_1 = 3,25$, y se quiere que el número de Mach después de la onda de choque oblicua tenga un valor de $M_2 = 2$. Se pide hallar el ángulo de inclinación del plano inclinado para que se cumplan las condiciones establecidas de M_1 y M_2. Claramente, este ejemplo se podría resolver mediante un proceso iterativo, suponiendo inicialmente un ángulo δ de inclinación del plano inclinado y operando del mismo modo que en el ejemplo anterior. No obstante, se puede realizar una resolución directa partiendo de las siguientes relaciones derivadas anteriormente:

$$M_{N2} = \left[\frac{M_{N1}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma-1)}\right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)}\right]M_{N1}^2 - 1}\right]^{0,5}$$

$$M_{N1} = M_1 \sin\varepsilon$$

$$M_{N2} = M_2 \sin(\varepsilon - \delta)$$

$$\tan\delta = 2\cot\varepsilon\left[\frac{M_1^2 \sin^2\varepsilon - 1}{M_1^2\left(\gamma + \cos(2\varepsilon)\right) + 2}\right] \qquad (22)$$

Combinando estas cuatro ecuaciones, se obtiene la relación:

$$M_2 \sin\left(\varepsilon - \arctan\left(2\cot\varepsilon\left[\frac{M_1^2 \sin^2\varepsilon - 1}{M_1^2\left(\gamma + \cos(2\varepsilon)\right) + 2}\right]\right)\right) = \left[\frac{M_1^2 \sin^2\varepsilon + \left[\frac{2}{(\gamma-1)}\right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)}\right]M_1^2 \sin^2\varepsilon - 1}\right]^{0,5}$$

Para un índice de politropía γ conocido, que se considera de $\gamma = 1,4$, esta ecuación relaciona los números de Mach entrante y saliente con el ángulo de inclinación de

la onda de choque ε. Así, sustituyendo $M_1 = 3{,}25$ y $M_2 = 2$, se obtiene un ángulo ε= 39,1238 grados. Y sustituyendo el valor de ε en la ecuación 22 se obtiene un ángulo de inclinación del plano inclinado de $\delta = 22{,}596$ grados.

Un estudio tal vez más interesante sería el que corresponde al caso en que la onda de choque oblicua incidente se refleja sobre una pared inclinada. Este caso queda expuesto en la figura T 13.36. Véase que la onda de choque incidente choca contra la pared superior justo en el punto II, donde dicha pared superior empieza a inclinarse un ángulo δ_2.

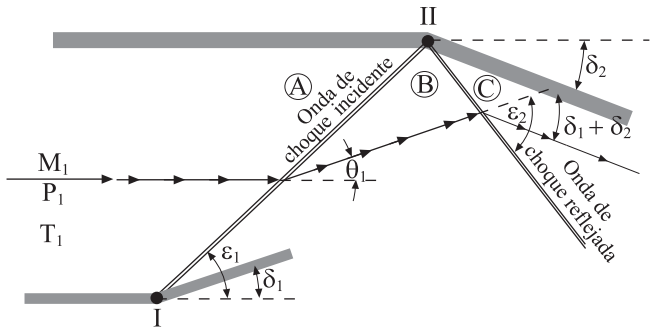


Fig. T 13.36 Reflexión de una onda de choque incidente en una pared inclinada

Véase que, en este caso, aparecen también tres zonas claramente diferenciadas, las zonas A, B, C. Si las condiciones del flujo aguas arriba fuesen las mismas que las definidas en el caso precedente, es decir: $M_1 = 3$, $T_1 = 600$ K, $P_1 = P_{atmosférica} = 10^5$ Pa, y el ángulo de deflexión del plano inclinado δ_1 sigue siendo de 20 grados, $\gamma = 1{,}4$, se deduce que las propiedades del flujo en las zonas A y B serán las mismas que las definidas previamente, siendo el proceso de cálculo idéntico. En consecuencia, se puede establecer que:

$$\varepsilon_1 = 37{,}763 \text{ grados};\ M_{N1} = 1{,}83719;\ M_{N2} = 0{,}608397;\ M_2 = 1{,}9942187.$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 3{,}771144; \frac{T_2}{T_1} = 1{,}5595974$$

Para definir los parámetros del flujo en la zona C, se partirá de las características del flujo en la zona B, que son: número de Mach $M_2 = 1{,}9942187$ y ángulo de inclinación $\delta_1 = 20$ grados. No obstante, puesto que la pared superior está inclinada un ángulo δ_2 que se supone de $\delta_2 = 15$ grados, en realidad debe considerarse que el número de Mach M_2 está reflectado por un plano inclinado con un ángulo, $\delta = \delta_1+\delta_2$. Así, utilizando las expresiones 21, 22 o 24, y considerando los valores $M_2 = 1{,}9942187$ y $\delta = 35$ grados, se obtiene un valor de $\varepsilon_2 = 168{,}05$ grados. Véase que este valor del ángulo de la onda de choque reflejada es absolutamente imposible, lo cual indica que, para los valores de M_2 y δ elegidos, la onda de choque no está adherida al cuerpo, sino que está separada. Este hecho se puede comprobar fácilmente mediante la figura T 13.15. De esta misma figura, se observa que el ángulo del plano inclinado superior máximo que se puede tener para que exista una onda de choque reflejada adherida es aproximadamente de 2 grados. En vista de estos resultados, se plantea un nuevo caso.

Sea el caso en que el flujo aguas arriba está caracterizado por los parámetros siguientes:

$M_1 = 3{,}5$, $T_1 = 400$ K, $P_1 = P_{atmosférica} = 10^5$ Pa. El ángulo de inclinación del plano inclinado inferior es de $\delta_1 = 10$ grados, $\gamma = 1{,}4$.

Mediante las ecuaciones 21, 22 o 24 se obtiene: $\varepsilon_1 = 24{,}38403319$ grados para la onda de choque débil y $\varepsilon_1 = 86{,}8617345$ para la onda de choque fuerte.

El número de Mach perpendicular a la onda de choque incidente, débil, será:

$$M_{N1} = M_1 \sin \varepsilon_1 = 3{,}5 * \sin(24{,}38403) = 1{,}4449772$$

El número de Mach perpendicular a la onda de choque incidente y a la salida de la misma será:

$$M_{N2} = \left[\frac{M_{N1}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma-1)} \right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)} \right] M_{N1}^2 - 1} \right]^{0,5} = \left[\frac{1{,}4449772^2 + \frac{2}{0{,}4}}{\frac{2{,}8}{0{,}4} 1{,}4449772^2 - 1} \right]^{0,5} = 0{,}7215067$$

La relación de presiones se determina mediante la expresión:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N1}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2{,}8}{2{,}4} 1{,}4449772^2 - \frac{0{,}4}{2{,}4} = 2{,}2692856$$

La relación de temperaturas para una onda de choque normal viene definida por:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{N1}^2 \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_{N1}^2 - 1 \right) \left[\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 M_{N1}^2} \right]$$

de donde, para el presente caso, se tiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} 1{,}4449772^2 \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} 1{,}4449772^2 - 1 \right) \left[\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 1{,}4449772^2} \right] = 1{,}2839175$$

El número de Mach después de la onda de choque incidente será:

$$M_2 = \frac{M_{N2}}{\sin(\varepsilon_1 - \delta_1)} = \frac{0{,}7215067}{\sin(24{,}38403 - 10)} = 2{,}904383$$

Utilizando de nuevo las ecuaciones 21, 22 o 24, y conociendo que $M_2 = 2{,}904383$ y $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 25$ grados, considerando que $\delta_2 = 15$ grados, se obtiene un valor de ε_2 para la onda de choque reflejada de 45,01975711 grados para una onda de choque débil, o bien de 78,88515223 para una onda de choque fuerte.

El número de Mach perpendicular a la onda de choque reflejada será:

$$M_{N3} = M_2 \sin \varepsilon_2 = 2,904383 * \sin(45,01975711) = 2,054417$$

Utilizando de nuevo las ecuaciones para la onda de choque plana, se obtiene:

$$M_{N4} = \left[\frac{M_{N3}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma-1)} \right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)} \right] M_{N3}^2 - 1} \right]^{0,5} = \left[\frac{2,054417^2 + \frac{2}{0,4}}{\frac{2,8}{0,4} 2,054417^2 - 1} \right]^{0,5} = 0,5683551$$

$$\frac{P_4}{P_3} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N3}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2,8}{2,4} 2,054417^2 - \frac{0,4}{2,4} = 4,7574$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} 2,054417^2 \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} 2,054417^2 - 1 \right) \left[\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 2,054417^2} \right] = 1,7322152$$

De nuevo, es importante tener presente que, en la zona B, se cumple $T_2 = T_3$, y $P_2 = P_3$.

El número de Mach en la zona C será de:

$$M_4 = \frac{M_{N4}}{\sin(\varepsilon_2 - \delta)} = \frac{M_{N4}}{\sin(\varepsilon_2 - (\delta_1 + \delta_2))} = \frac{0,5683551}{\sin(45,01975711 - 25)} = 1,6601864$$

La presión y la temperatura estáticas detrás de la onda de choque reflejada, zona C, se determinan del modo siguiente:

$$P_4 = \frac{P_4}{P_3} \frac{P_2}{P_1} P_1 = 4,7574 * 2,2692856 * 10^5 = 10,7958993 * 10^5 \text{ Pa}$$

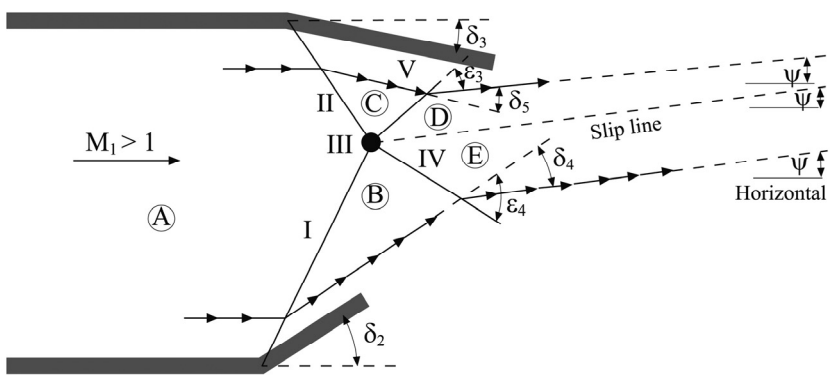
$$T_4 = \frac{T_4}{T_3} \frac{T_2}{T_1} T_1 = 1,7322152 * 1,2839175 * 400 = 889,6085 \text{ K}$$

Como puntualización final, cabe observar que, utilizando ángulos δ_2 negativos, se podría llegar a neutralizar la onda de choque reflejada.

Otro caso que es de gran interés práctico es el correspondiente al estudio de la intersección de dos ondas de choque de diferente intensidad. Este caso se esquematiza en la figura T 13.37. Véase que el flujo no perturbado incide sobre dos planos inclinados, situados en la parte inferior y superior del canal. La inclinación de cada uno de estos dos planos se supone diferente, lo cual da lugar a que las ondas de choque incidentes tengan diferente intensidad, en que la intensidad superior corresponde a la onda de choque generada por el plano inclinado de mayor ángulo. Detrás de cada una de las dos ondas de choque, se generan sendas zonas, B y C, donde las propiedades del fluido son diferentes. Las dos ondas de choque incidentes entran en contacto en el punto III, don-

de se refractan y continúan aguas abajo generando otras dos zonas, D y E (v. fig. T 13.37), donde existirán diferentes propiedades del flujo. Obsérvese que las zonas D y E quedan separadas por una línea de corriente que se denomina *slip line*. Dado que las ondas de choque incidentes son de diferente intensidad, una línea de corriente que atraviese las ondas de choque I y IV, experimentará un salto entrópico diferente que la línea de corriente que atraviese las ondas de choque II y V. Este hecho da lugar a que la *slip line*, que aparece detrás del punto III, se caracterice por un salto discontinuo de entropía del fluido. No obstante, la presión estática a ambos lados de la *slip line* deberá ser la misma, dado que, si no fuese así, dicha línea de corriente sería curvada. Otra característica del flujo en las zonas D y E es que la velocidad del fluido en ambas zonas sigue la misma dirección, dirección marcada por la *slip line*, aunque es cierto que la magnitud de esta velocidad será diferente en cada zona. Otra consideración a tener en cuenta es que el ángulo de inclinación de las ondas reflejadas, δ_4 y δ_5, se determina en función del ángulo de los planos inclinados, δ_2 y δ_3, y del ángulo de inclinación respecto a la horizontal de la *slip line*, ángulo ψ. En concreto, se establece: $\delta_4 = \delta_2 - \psi$; $\delta_5 = \delta_3 + \psi$.

Fig. T 13.37
Esquema de la intersección de dos ondas de choque de diferentes intensidades



Con el fin de afianzar los conceptos que intervienen en la intersección de ondas de choque, se propone el ejemplo siguiente.

Supóngase que por la zona A, figura T 13.37, fluye aire con una presión de 10^5 Pa y un número de Mach $M_1 = 4.5$. El fluido incide en la parte inferior del canal, con un plano inclinado de $\delta_2 = 22$ grados, y en la parte superior del canal el plano posee una inclinación de $\delta_3 = 12$ grados. Considerando el fluido ideal y el flujo bidimensional, se pide hallar la presión y los números de Mach en las zonas B, C, D y E. Además, es necesario determinar el ángulo de inclinación de la *slip line*, ψ, que separa las zonas D y E. Considérese $\gamma = 1{,}4$.

Bien utilizando la tabla de ondas de choque oblicuas, bien mediante el empleo de las ecuaciones 21, 22 o 24), se obtiene, con un $M_1 = 4.5$ y un $\delta_2 = 22$ grados, el valor del ángulo de inclinación de la onda de choque débil de $\varepsilon_2 = 33{,}25699$, siendo el ángulo para la onda de choque fuerte de $\varepsilon_2 = 83{,}5628$. Utilizando el mismo número de Mach y un valor de $\delta_3 = 12$ grados, se obtiene $\varepsilon_3 = 22{,}5049$ para una onda de choque débil y $\varepsilon_3 = 86{,}7566$ para el caso de considerar una onda de choque fuerte. Puesto que las ondas de choque usuales son las débiles, se utilizarán los valores obtenidos para estas.

El número de Mach perpendicular a la onda de choque incidente inferior será:

$$M_{N1i} = M_1 \sin \varepsilon_2 = 4,5 * \sin(33,25699) = 2,467778$$

Y el correspondiente para la onda de choque incidente superior será:

$$M_{N1s} = M_1 \sin \varepsilon_3 = 4,5 * \sin(22,5049) = 1,722431$$

De las tablas de ondas de choque planas o bien de las ecuaciones homólogas, entrando con un número de Mach de $M_{N1i} = 2,467778$, se obtiene el número de Mach normal detrás de la onda de choque incidente inferior, así como la relación de presiones estáticas, cuyo valor es:

$$M_{N2i} = \left[\frac{M_{N1i}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma - 1)} \right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma - 1)} \right] M_{N1i}^2 - 1} \right]^{0,5} = \left[\frac{2,467778^2 + \frac{2}{0,4}}{\frac{2,8}{0,4} 2,467778^2 - 1} \right]^{0,5} = 0,5161355$$

$$\frac{P_{2i}}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_{N1i}^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{2,8}{2,4} 2,467778^2 - \frac{0,4}{2,4} = 6,9382496$$

Haciendo lo propio para la onda incidente superior, se tiene:

$$M_{N2s} = \left[\frac{M_{N1s}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma - 1)} \right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma - 1)} \right] M_{N1s}^2 - 1} \right]^{0,5} = \left[\frac{1,722431^2 + \frac{2}{0,4}}{\frac{2,8}{0,4} 1,722431^2 - 1} \right]^{0,5} = 0,6348433$$

$$\frac{P_{2s}}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_{N1s}^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{2,8}{2,4} 1,722431^2 - \frac{0,4}{2,4} = 3,2945633$$

El número de Mach después de la onda de choque incidente inferior será:

$$M_{2i} = \frac{M_{N2i}}{\sin(\varepsilon_2 - \delta_2)} = \frac{0,5161355}{\sin(33,25699 - 22)} = 2,6440017$$

El número de Mach después de la onda de choque incidente superior tomará un valor:

$$M_{2s} = \frac{M_{N2s}}{\sin(\varepsilon_3 - \delta_3)} = \frac{0,6348433}{\sin(22,5049 - 12)} = 3,4820351$$

El procedimiento a partir de este punto no puede seguir, a menos que se conozcan datos del flujo aguas abajo, en las regiones D y E. Para realizar el problema, es necesario utilizar un proceso iterativo. Dicho proceso empieza suponiendo un ángulo ψ de la *slip line* respecto a la horizontal. Supóngase un ángulo $\psi = 7$ grados. Se determina el ángulo de inclinación de las líneas de corriente en la zona E (v. figura 24), $\delta_4 = 22 - \psi = 22 - 7 = 15$ grados, y, para la zona D, parte superior del canal, el ángulo de inclinación de las líneas de corriente después de atravesar la onda de choque reflejada será $\delta_5 = 12 + \psi = 12 + 7 = 19$ grados.

Para la zona inferior del canal, el número de Mach del fluido incidente en la onda de choque reflejada era $M_{2i} = 2,644017$ y se ha supuesto un ángulo de deflexión del flujo a la salida de la onda de choque reflejada de $\delta_4 = 15$ grados. Entrando con estos datos en las tablas de ondas de choque oblicuas o mediante el empleo de las ecuaciones 21. 22 o 24, se obtiene $\varepsilon_4 = 35,34613$ para el caso de una onda de choque débil y $\varepsilon_4 = 83,56139$ para el caso de tener una onda de choque fuerte.

Utilizando las mismas ecuaciones para la zona superior del canal y partiendo de los datos $M_{2s} = 3,4820351$ y $\delta_5 = 19$ grados, se obtiene, para la zona superior, un ángulo de deflexión de $\varepsilon_5 = 33,56187$ para una onda débil y $\varepsilon_5 = 83,59859$ para el caso de tener una onda de choque fuerte. De hecho, hay que denotar que, aunque se hayan presentado los dos resultados posibles, se entenderá que las ondas de choque reflejadas son débiles.

El número de Mach perpendicular a la onda de choque reflejada inferior será:

$$M_{N3i} = M_{2i} \sin \varepsilon_4 = 2,6440017 * \sin(35,34613) = 1,5295933$$

Y el correspondiente para la onda de choque incidente superior será:

$$M_{N3s} = M_{2s} \sin \varepsilon_5 = 3,4820351 * \sin(33,56187) = 1,9249982$$

Los números de Mach normales a las ondas de choque reflejadas y a la salida de las mismas serán:

Para la onda de choque reflejada inferior:

$$M_{N4i} = \left[\frac{M_{N3i}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma - 1)} \right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma - 1)} \right] M_{N3i}^2 - 1} \right]^{0,5} = \left[\frac{1,5295933^2 + \frac{2}{0,4}}{\frac{2,8}{0,4} 1,5295933^2 - 1} \right]^{0,5} = 0,690865823$$

Para la onda de choque reflejada superior:

$$M_{N4s} = \left[\frac{M_{N3s}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma - 1)} \right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma - 1)} \right] M_{N3s}^2 - 1} \right]^{0,5} = \left[\frac{1,9249982^2 + \frac{2}{0,4}}{\frac{2,8}{0,4} 1,9249982^2 - 1} \right]^{0,5} = 0,59082307$$

La presión del fluido detrás de las ondas de choque reflejadas, zonas D y E, se determina del modo siguiente:

Para la zona E, onda de choque reflejada inferior, la relación de presiones estáticas entre la existente aguas abajo y aguas arriba de la onda de choque está definida por la ecuación:

$$\frac{P_{4i}}{P_{3i}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N\text{-}i}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2,8}{2,4} 1,5295933^2 - \frac{0,4}{2,4} = 2,5629316$$

Recordando que previamente se ha obtenido la relación:

$$\frac{P_{2i}}{P_1} = 6,9382496$$

Hay que tener presente que $P_{2i} = P_{3i}$, de donde:

$$P_{4i} = P_1 * 6,9382496 * 2,5629316 = 10^5 * 6,9382496 * 2,5629316 = 17,7822591 * 10^5 \text{ Pa}$$

siendo esta la presión estática en la zona E.

Realizando lo propio para la onda de choque superior, zona D, se obtiene:

$$\frac{P_{4s}}{P_{3s}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N3s}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2,8}{2,4} 1,9249982^2 - \frac{0,4}{2,4} = 2,6565544$$

y, recordando que $P_{2s} = P_{3s}$, y que $\frac{P_{2s}}{P_1} = 3,2945633$, se concluye:

$$P_{4s} = P_1 * 3,2945633 * 2,6565544 = 10^5 * 3,2945633 * 2,6565544 = 8,75218663 * 10^5 \text{ Pa}$$

La teoría establece que la presión estática en ambas zonas, D y E, debería ser la misma, dado que si no fuese así la línea de corriente o *slip line* sería curvada. Puesto que la presión estática en la zona inferior E es bastante superior que la homóloga en la zona superior D, el ángulo de inclinación de la *slip line* elegido al inicio de este problema es demasiado pequeño; en consecuencia, se realiza de nuevo todo el proceso para un ángulo de inclinación $\psi = 12$ grados. La elección del valor de este ángulo es arbitraria.

Los nuevos datos de partida ahora son:

Para la parte inferior del canal:

$\delta_4 = 22 - \psi = 22 - 12 = 10$ grados

$$M_{2i} = 2,6440017$$

Para la parte superior del canal:
$\delta_5 = 12 + \psi = 12 + 12 = 24$ grados

$$M_{2s} = 3,4820351$$

Utilizando los datos de partida y empleando de las ecuaciones 21, 22 o 24, se obtiene:

Para la parte inferior del canal:
$\varepsilon_4 = 30,35321561$ para el caso de una onda de choque débil
$\varepsilon_4 = 85,87704363$ para el caso de tener una onda de choque fuerte

Para la parte superior del canal:
$\varepsilon_5 = 39,50670475$ para una onda débil
$\varepsilon_5 = 81,37347906$ para el caso de tener una onda de choque fuerte

El número de Mach perpendicular a la onda de choque reflejada inferior será:

$$M_{N3i} = M_{2i} \sin \varepsilon_4 = 2,6440017 * \sin(30,35321561) = 1,336091574$$

y el correspondiente para la onda de choque incidente superior será:

$$M_{N3s} = M_{2s} \sin \varepsilon_5 = 3,4820351 * \sin(39,50670475) = 2,2154161085$$

La presión del fluido detrás de las ondas de choque reflejadas, zonas D y E, se determina:

Para la zona E, onda de choque reflejada inferior:

$$\frac{P_{4i}}{P_{3i}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N3i}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2,8}{2,4} 1,336091574^2 - \frac{0,4}{2,4} = 1,915997476$$

Recordando que previamente se ha obtenido la relación:

$$\frac{P_{2i}}{P_1} = 6,9382496$$

y que $P_{2i} = P_{3i}$:

$$P_{4i} = P_1 * 6,9382496 * 1,915997476 = 10^5 * 6,9382496 * 1,915997476$$
$$= 13,293668725 * 10^5 \text{ Pa}$$

Que es la presión estática en la zona E.

Realizando lo propio para la onda de choque superior, zona D, se obtiene:

$$\frac{P_{4s}}{P_{3s}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N3s}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2,8}{2,4} 2,215161085^2 - \frac{0,4}{2,4} = 5,558095071$$

Recordando que $P_{2s} = P_{3s}$ y que $\frac{P_{2s}}{P_1} = 3,2945633$, se concluye:

$$P_{4s} = P_1 * 3,2945633 * 5,558095071 = 10^5 * 3,2945633 * 5,558095071$$
$$= 18,311496039 * 10^5 \text{ Pa}$$

Véase que ahora la presión en la parte superior es mayor que en la inferior, con lo cual el ángulo ψ debe ser de menos de 12 grados y de más de 7. Utilizando el método de la secante y partiendo de los datos obtenidos hasta el momento, se puede estimar el valor del ángulo ψ apropiado para que se cumpla $P_{4i} = P_{4s}$

$$\frac{\Delta P - (P_{4i} - P_{4s})\big|_{\text{1a iteracción}}}{\Psi - \Psi_{\text{1a iteracción}}} = \frac{(P_{4i} - P_{4s})\big|_{\text{2a iteracción}} - (P_{4i} - P_{4s})\big|_{\text{1a iteracción}}}{\Psi_{\text{2a iteracción}} - \Psi_{\text{1a iteracción}}}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\frac{\Delta P - (17,7822 - 8,7521) * 10^5}{\Psi - 7} = \frac{(13,2936 - 18,3114) * 10^5 - (17,7822 - 8,7521) * 10^5}{12 - 7}$$

$$\frac{\Delta P - (17,7822 - 8,7521) * 10^5}{\Psi - 7} = -2,80958 * 10^5$$

de donde $0 = \Delta P = -2,80958 * 10^5 \Psi + 28,69716 * 10^5$

Se concluye que $\Psi = 10,214039$ grados.

Realizando de nuevo los cálculos para este ángulo de inclinación de la *slip line*, se tiene:

Los nuevos datos de partida serán:

Para la parte inferior del canal:
$\delta_4 = 22 - \psi = 22 - 10,214039 = 11,78596$ grados

$$M_{2i} = 2,6440017$$

Para la parte superior del canal:
$\delta_5 = 12 + \psi = 12 + 10,214039 = 22,214039$ grados

$$M_{2s} = 3,4820351$$

Utilizando los datos de partida y mediante el empleo de las ecuaciones 21, 22 o 24, se obtiene:

Para la parte inferior del canal:
$\varepsilon_4 = 32,05888259$ para el caso de una onda de choque débil
$\varepsilon_4 = 85,08155884$ para el caso de una onda de choque fuerte

Para la parte superior del canal:
$\varepsilon_5 = 37{,}29931489$ para una onda débil
$\varepsilon_5 = 82{,}22104439$ para el caso de tener una onda de choque fuerte

El número de Mach perpendicular a la onda de choque reflejada inferior será:

$$M_{N3i} = M_{2i} \sin \varepsilon_4 = 2{,}6440017 * \sin(32{,}05888259) = 1{,}403411035$$

Y el correspondiente a la onda de choque incidente superior será:

$$M_{N3s} = M_{2s} \sin \varepsilon_5 = 3{,}4820351 * \sin(37{,}29931489) = 2{,}1100039759$$

La presión del fluido detrás de las ondas de choque reflejadas, zonas D y E, se evalúa:
Para la zona E, onda de choque reflejada inferior:

$$\frac{P_{4i}}{P_{3i}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N3i}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2{,}8}{2{,}4} 1{,}403411035^2 - \frac{0{,}4}{2{,}4} = 2{,}131156289$$

Recordando que previamente se ha obtenido la relación:

$$\frac{P_{2i}}{P_1} = 6{,}9382496$$

y que $P_{2i} = P_{3i}$:

$$P_{4i} = P_1 * 6{,}9382496 * 2{,}131156289 = 10^5 * 6{,}9382496 * 2{,}131156289$$
$$= 14{,}78649427 * 10^5 \text{ Pa}$$

que es la presión estática en la zona E.

Realizando lo propio para la onda de choque superior, zona D, se obtiene:

$$\frac{P_{4s}}{P_{3s}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N3s}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2{,}8}{2{,}4} 2{,}110039759^2 - \frac{0{,}4}{2{,}4} = 5{,}027645749$$

Recordando que $P_{2s} = P_{3s}$ y que $\frac{P_{2s}}{P_1} = 3{,}2945633$, se concluye:

$$P_{4s} = P_1 * 3{,}2945633 * 5{,}027645749 = 10^5 * 3{,}2945633 * 5{,}027645749$$
$$= 16{,}563897169 * 10^5 \text{ Pa}$$

Puesto que las presiones en las zonas D y E aún no coinciden, se utiliza de nuevo el método de la secante empleando los datos hallados en la segunda iteración y en la tercera.

$$\frac{\Delta P - (13{,}293668725 - 18{,}311496039) * 10^5}{\Psi - 12}$$
$$= \frac{(14{,}78649427 - 16{,}563897169) * 10^5 - (13{,}293668725 - 18{,}311496039) * 10^5}{10{,}214039 - 12}$$

$$\frac{\Delta P-(-5,017827314)*10^5}{\Psi-12}=-1,814386997*10^5$$

$$0=\Delta P=-1,814386997*10^5\Psi+21,772643964*10^5$$

Se concluye que $\Psi=9,234422796$ grados

Realizando el mismo proceso entre la primera iteración y la tercera, se obtiene:

$$\frac{\Delta P-(14,78649427-16,563897169)*10^5}{\Psi-10,214039}$$
$$=\frac{(17,7822591-8,75218663)*10^5-(14,78649427-16,563897169)*10^5}{7-10,214039}$$

$$\frac{\Delta P-(-1,777402899)*10^5}{\Psi-10,214039}=-3,362583767*10^5$$

$$0=\Delta P=-3,362583767*10^5\Psi+32,568158841*10^5$$

Así, se obtiene: $\Psi=9,685456511$ grados.

Para la última iteración, se elige un ángulo de inclinación de la *slip line* que es el promedio de los dos valores acabados de hallar, con lo cual se concluye que $\Psi=9,459939654$ grados.

Los datos de partida, considerando este nuevo ángulo de inclinación de la *slip line*, son:

Para la parte inferior del canal:
$\delta_4 = 22 - \psi = 22 - 9,459939654 = 12,540060346$ grados

$$M_{2i}=2,6440017$$

Para la parte superior del canal:
$\delta_5 = 12 + \psi = 12 + 9,459939654 = 21,459939654$ grados

$$M_{2s}=3,4820351$$

Utilizando los datos de partida y empleando las ecuaciones 21, 22 o 24, se obtiene:

Para la parte inferior del canal:
$\varepsilon_4 = 32,80431065$ para el caso de una onda de choque débil.
$\varepsilon_4 = 84,73623665$ para el caso de tener una onda de choque fuerte

Para la parte superior del canal:
$\varepsilon_5 = 36{,}39659151$ para una onda débil
$\varepsilon_5 = 82{,}55952261$ para el caso de tener una onda de choque fuerte

El número de Mach perpendicular a la onda de choque reflejada inferior será:

$$M_{N3i} = M_{2i} \sin \varepsilon_4 = 2{,}6440017 * \sin\left(32{,}80431065\right) = 1{,}432444632$$

y el correspondiente para la onda de choque incidente superior será:

$$M_{N3s} = M_{2s} \sin \varepsilon_5 = 3{,}4820351 * \sin\left(36{,}39659151\right) = 2{,}06613866$$

La presión del fluido detrás de las ondas de choque reflejadas, zonas D y E, se evalúa:

Para la zona E, onda de choque reflejada inferior:

$$\frac{P_{4i}}{P_{3i}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N3i}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2{,}8}{2{,}4} 1{,}432444632^2 - \frac{0{,}4}{2{,}4} = 2{,}227213894$$

Recordando que previamente se ha obtenido la relación:

$$\frac{P_{2i}}{P_1} = 6{,}9382496$$

y que $P_{2i} = P_{3i}$:

$$P_{4i} = P_1 * 6{,}9382496 * 2{,}227213894 = 10^5 * 6{,}9382496 * 2{,}227213894$$
$$= 15{,}452965912 * 10^5 \text{ Pa}$$

que es la presión estática en la zona E.

Realizando lo propio para la onda de choque superior, zona D, se obtiene:

$$\frac{P_{4s}}{P_{3s}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N3s}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2{,}8}{2{,}4} 2{,}06613866^2 - \frac{0{,}4}{2{,}4} = 4{,}813750456$$

Recordando que $P_{2s} = P_{3s}$ y que $\frac{P_{2s}}{P_1} = 3{,}2945633$, se concluye:

$$P_{4s} = P_1 * 3{,}2945633 * 4{,}813750456 = 10^5 * 3{,}2945633 * 4{,}813750456$$
$$= 15{,}859205588 * 10^5 \text{ Pa}$$

Ahora, la presión en las zonas D y E es prácticamente idéntica, con lo cual se concluye el problema.

13.12 Ondas de expansión simples o bien ondas de expansión de Prandtl-Meyer

Del estudio de las ondas oblicuas de compresión, definidas en la figura T 13.14, se ha visto que la onda de choque de compresión actúa como una discontinuidad de flujo y que el fluido que atraviesa dicha onda oblicua experimenta un aumento de entropía. Parece lógico pensar que, si el flujo supersónico se encuentra con un plano inclinado convexo (v. fig. T 13.38), el fluido tenderá a expandirse al pasar a través de la discontinuidad de flujo, onda de choque, y en consecuencia la entropía del mismo debería disminuir, lo cual vulnera el segundo principio de la termodinámica. Esto da lugar a establecer que, en realidad, para estos casos no se va a producir una onda de choque de compresión, sino de expansión.

Las ondas de choque de expansión no pueden caracterizarse en todos los casos por teorías unidimensionales; no obstante, el caso más simple, denominado de *ondas de expansión* simples u *ondas de Prandtl-Meyer*, sí puede ser tratado por una teoría unidimensional. Este es el tipo de ondas que se analiza a continuación. El origen de la teoría se remonta a los estudios que Ludwig Prandtl y Theodor Meyer realizaron en 1908.

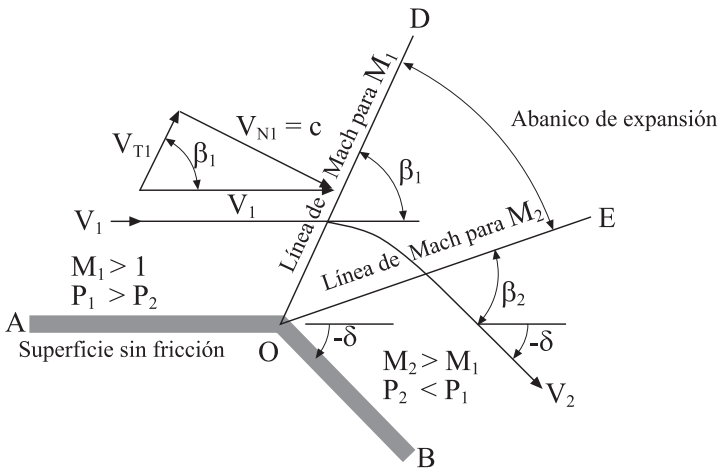


Fig. T 13.38 Esquema de la evolución del flujo a través de las ondas de expansión de Prandtl-Meyer

La figura T 13.39 compara las características genéricas de las ondas de compresión y expansión. Véase que la densidad, la presión y la temperatura del fluido, al atravesar una onda de choque de compresión, aumentan, mientras que el número de Mach disminuye. Obsérvese asimismo que lo contrario sucede cuando el fluido atraviesa una onda de expansión. Es interesante notar que no se puede hablar de una onda de expansión, sino de un abanico de ondas de expansión, es decir, para que el fluido pase del estado inicial supersónico, aguas arriba, al estado final, también supersónico, aguas abajo, es necesario que el fluido evolucione por todo un colectivo de expansiones progresivas, denominado *abanico de ondas de expansión*. El abanico de ondas de expansión se caracteriza por una onda de expansión inicial, definida por la línea de Mach incidente o delantera, y una onda de expansión final, definida por la línea de Mach trasera. Entre estas dos ondas de expansión límite, existe un número infinito de ondas de expansión.

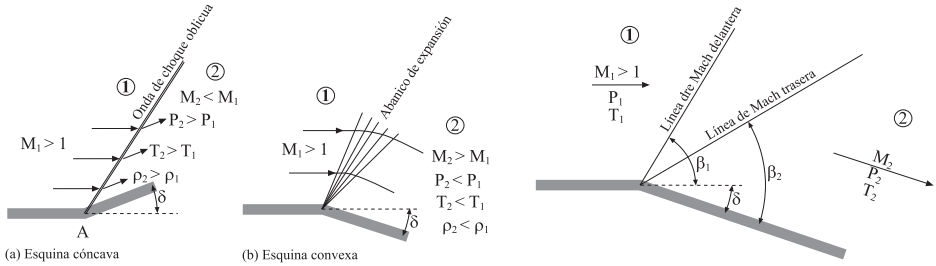


Fig. T 13.39
a) Comparación entre las características de evolución del flujo a través de una onda de choque de compresión y de expansión.
b) Posiciones límite de las ondas de expansión

Como resumen del proceso de evolución del fluido entre las condiciones aguas arriba (1) y las que posee el fluido después del proceso de expansión (2) se puede decir que:

- El número de Mach aguas abajo será mayor que el existente aguas arriba. $M_2 > M_1$.
- La presión, la temperatura y la densidad del fluido aguas abajo son mayores que las existentes aguas arriba. $P_2 > P_1$; $T_2 > T_1$; $\rho_2 > \rho_1$.
- El abanico de expansión es una región continua donde se producen expansiones progresivas. El inicio y el final de la región de expansión, vienen definidos por las líneas de Mach delantera y trasera, caracterizadas por sendos ángulos de inclinación $\beta_1 = \arcsin(1/M_1)$, para la línea de Mach delantera, y $\beta_2 = \arcsin(1/M_2)$, para la línea de Mach trasera.
- Las líneas de corriente a través de la zona de expansión poseen una curvatura progresiva.
- La evolución del fluido a través de una línea de expansión se considera isentrópica, con lo cual la evolución entre el estado inicial y el final del fluido se considera también como isentrópica.
- El fluido se considera gas ideal y las condiciones del mismo aguas arriba se consideran uniformes, y el número de Mach es supersónico.
- El flujo se considera estacionario y bidimensional.
- Al final del proceso de compresión, las propiedades del fluido serán constantes y estacionarias, y las líneas de corriente serán paralelas a la superficie sólida.
- Las propiedades del fluido a lo largo de una línea de Mach genérica se consideran constantes; todas las líneas de Mach son líneas rectas que parten del vértice del sólido.

Obsérvese que, si el ángulo de la línea de Mach incidente o delantera se define por el ángulo del cono de Mach, $\beta_1 = \arcsin(1/M_1)$, la velocidad perpendicular a la onda de expansión será (v. fig. T 13.38), $V_{N1} = V_1 \sin\beta_1 = \dfrac{V_1}{M_1}$. Para un gas ideal:

$$V_{N1} = \frac{V_1}{M_1} = C1 = \sqrt{\gamma R T_1}$$

Para determinar las ecuaciones que caracterizan las condiciones de flujo aguas abajo M_2, P_2, T_2, detrás de una onda de expansión de Prandtl-Meyer, se suponen conocidas las condiciones aguas arriba, M_1, P_1, T_1, así como el ángulo de inclinación del plano, que a priori se supone infinitesimal (v. fig. T 13.39b y T 13.40).

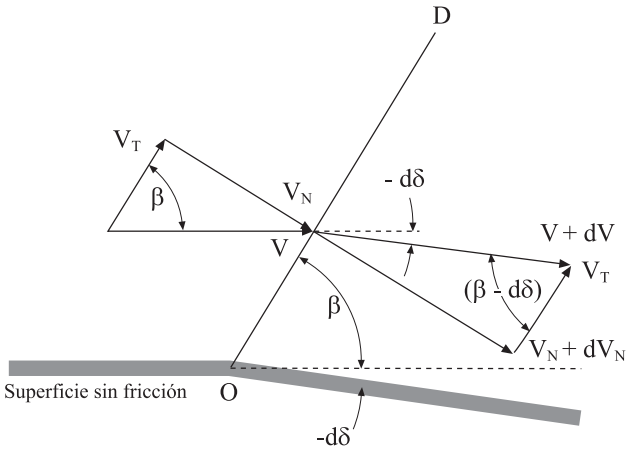


Fig. T 13.40
Relación de velocidades, delante y detrás de una onda de expansión generada por un desplazamiento infinitesimal

La velocidad tangencial, en la dirección de la onda de expansión, que se mantiene constante delante y detrás de la onda, se puede definir como:

$$V_T = V\cos\beta = V(V+dV)\cos(\beta - d\delta) \tag{74}$$

Recordando la relación trigonométrica: $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$, la ecuación precedente se puede expresar como:

$$V\cos\beta = (V+dV)\left(\cos\beta\cos(d\delta) + \sin\beta\sin(d\delta)\right) \tag{75}$$

$$V\cos\beta = (V)\left(\cos\beta\cos(d\delta) + \sin\beta\sin(d\delta)\right) + dV\left(\cos\beta\cos(d\delta) + \sin\beta\sin(d\delta)\right) \tag{76}$$

Obsérvese que en el límite, cuando $d\delta \to 0$, se cumple que $\sin(d\delta) \approx d\delta$ y $\cos(d\delta) \approx 1$.

$$V = (V)\left(1 + \tan\beta(d\delta)\right) + dV\left(1 + \tan(d\delta)\right) \tag{77}$$

Considerando además irrelevantes los diferenciales de segundo orden, se tiene:

$$V = V + \tan\beta(d\delta) + dV \tag{78}$$

$$-\tan\beta(d\delta) = \frac{dV}{V} \tag{79}$$

El ángulo de la línea de Mach, línea de expansión, viene dado por la relación: $\beta = \arcsin(1/M)$

de donde:

$$(\tan\beta)^2 = \left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)^2 = \frac{1}{M^2(\cos\beta)^2} = \frac{1}{M^2\left(1-(\sin\beta)^2\right)} = \frac{1}{M^2\left(1-\frac{1}{M^2}\right)} = \frac{1}{M^2-1} \tag{80}$$

En consecuencia, la relación anterior se puede dar como $\frac{-1}{\sqrt{M^2-1}}(d\delta)=\frac{dV}{V}$ (81)

O bien: $$d\delta=-\frac{dV}{V}\sqrt{M^2-1} \tag{82}$$

Esta ecuación es la ecuación diferencial gobernante de las ondas de expansión; para su integración, se requiere conocer la relación entre la velocidad del fluido V y el número de Mach.

Para el caso de un gas ideal, se pueden establecer las relaciones siguientes:

$$V=M\,C=M\sqrt{\gamma R\,T} \tag{83}$$

La relación entre las temperaturas estáticas y de estancamiento se establece:

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2 \tag{84}$$

Uniendo estas dos ecuaciones, se obtiene:

$$V^2=\frac{M^2\,\gamma R\,T_0}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}=\frac{M^2C_0^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \tag{85}$$

Obsérvese que el término $C_0^2=\gamma R\,T_0$ define la velocidad acústica de estancamiento. Este parámetro es constante en todo el flujo.

Sacando logaritmos de la ecuación precedente, se tiene:

$$2\,In(V)=In\left(C_0^2\right)+2\,In(M)-In\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right) \tag{86}$$

Diferenciando la ecuación resultante:

$$2\frac{dV}{V}=2\frac{dM}{M}-\frac{\frac{\gamma-1}{2}2M\,dM}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}=dM\left(\frac{2}{M}-\frac{\frac{\gamma-1}{2}2M}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\right) \tag{87}$$

Y, reordenando se llega:

$$\frac{dV}{V}=-\frac{dM}{M}\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\right) \tag{88}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación gobernante de las ondas de expansión, se concluye:

$$d\delta = -\frac{dM}{M}\left(\frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\right) \tag{89}$$

Siendo esta la ecuación gobernante de las ondas de expansión de Prandtl-Meyer, dada en función del número de Mach entrante. La integración de esta ecuación diferencial da lugar a:

$$\delta = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)} + \tan^{-1}\sqrt{\left(M^2-1\right)} + k \tag{90}$$

La constante de integración k se puede determinar conociendo el número de Mach entrante y el ángulo de deflexión δ. Para un número de Mach entrante igual a la unidad y un ángulo inicial de deflexión igual a cero, δ = 0, la constante de integración toma un valor nulo. Para este caso particular, el ángulo δ de la ecuación anterior se denomina η y se define como el ángulo que ha de deflectar el flujo sónico aguas arriba, para que el flujo se expanda hasta obtener un Mach supersónico aguas abajo. Este ángulo se conoce también como el ángulo de Prandtl-Meyer y su ecuación es:

$$\eta = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)} + \tan^{-1}\sqrt{\left(M^2-1\right)} \tag{91}$$

El ángulo de Prandtl-Meyer, que se obtiene mediante la ecuación precedente, se encuentra tabulado para diferentes valores de γ. La figura T 13.41 muestra dicho ángulo para diferentes números de Mach y cuando γ =1,4.

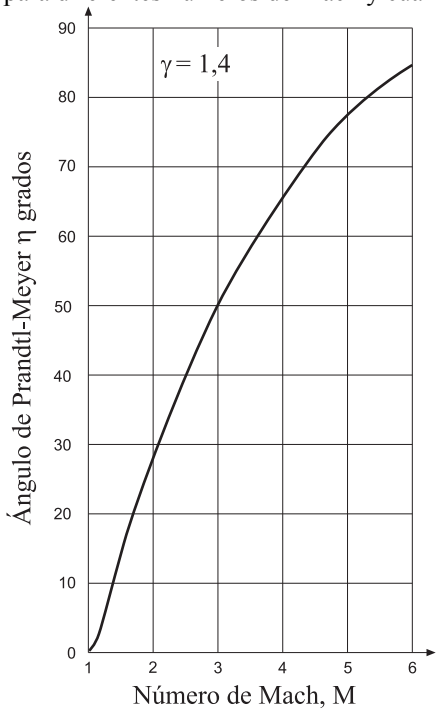


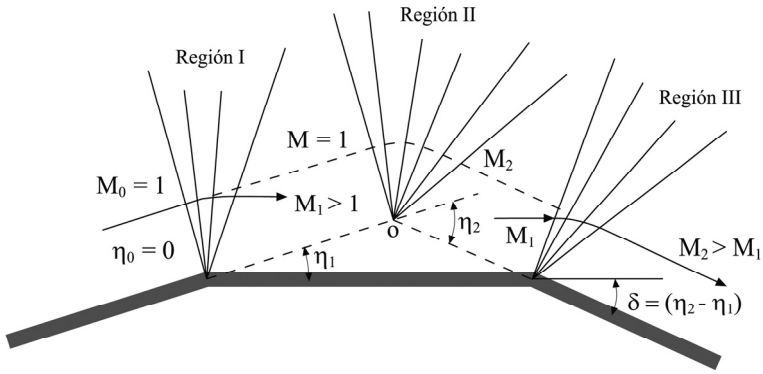
Fig. T 13.41
Representación del ángulo de Prandtl-Meyer para γ=1,4 y en función del número de Mach.
Fuente:
M.J. Zucrow;
J.D. Hoffman

El ángulo de deflexión para que el flujo aguas arriba con un número de Mach M_1 se expansione hasta obtener un número de Mach aguas abajo M_2 se puede obtener mediante la relación: $\delta = \eta_2 - \eta_1$, o bien de forma explícita. Recuérdese que $M_2 > M_1$.

$$\delta = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M_2^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M_1^2-1\right)}\right) + \tan^{-1}\sqrt{\left(M_2^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{\left(M_1^2-1\right)} \tag{92}$$

En realidad, esta ecuación se entiende mejor con la ayuda de la figura T 13.42, donde se ilustra que un fluido con un Mach inicial M_0 y un ángulo de inclinación η_0, se expande hasta alcanzar un número de Mach M_1, y para ello ha de girar un ángulo de deflexión η_1. Asimismo, se asume en la misma figura que, si el fluido ha de pasar de las condiciones iniciales M_0, η_0, a unas condiciones finales M_2, el ángulo de deflexión será η_2. Así pues, para pasar de unas condiciones iniciales M_1 a unas condiciones finales M_2, el ángulo de deflexión será: $\delta = \eta_2 - \eta_1$.

Fig. T 13.42 Representación gráfica de la expansión del flujo al pasar por un ángulo de deflexión y partiendo de unas condiciones iniciales sónicas

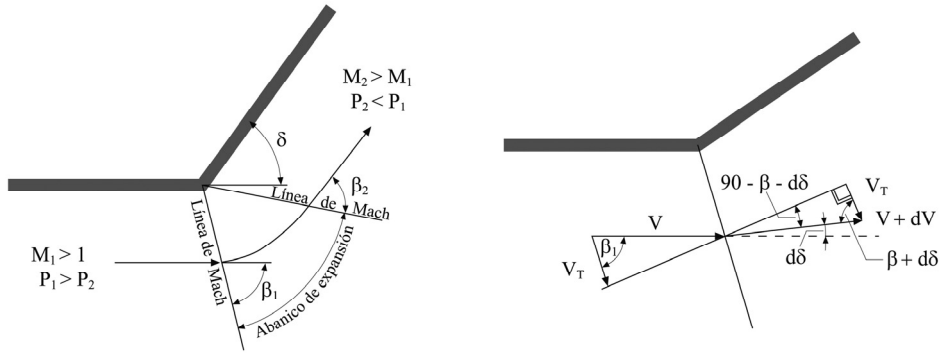


Conocidos δ y M_1, se puede obtener fácilmente, mediante la ecuación precedente, el número de Mach M_2. El resto de parámetros del flujo aguas abajo se podrán obtener mediante las ecuaciones de flujo isentrópico y partiendo de los parámetros aguas arriba.

Por último, es importante recordar que, si la expansión del fluido se produce en la dirección contraria a las agujas del reloj (v. fig. T 13.43), la velocidad tangencial tomará la forma:

$$V_T = V\cos\beta = (V + dV)\cos(\beta + d\delta) \tag{93}$$

Fig. T 13.43 Expansión de Prandtl-Meyer en sentido antihorario



El proceso restante es idéntico al establecido y se obtiene la ecuación que caracteriza el ángulo de Prandtl-Meyer para este considerando, la cual tomará la forma:

$$\eta = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{\left(M^2-1\right)} \qquad (94)$$

El ángulo de deflexión δ sigue definiéndose como $\delta = \eta_2 - \eta_1$ y la ecuación resultante es:

$$\delta = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M_2^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M_1^2-1\right)}\right) - \tan^{-1}\sqrt{\left(M_2^2-1\right)} + \tan^{-1}\sqrt{\left(M_1^2-1\right)}$$

13.12.1 Ejemplos de aplicación

1. Considérese se tiene un flujo sónico uniforme aguas arriba, M = 1, y se desea que el número de Mach aguas abajo sea de $M_2 = 3$. Se pide determinar cuál es el ángulo de expansión necesario. Considérese $\gamma = 1{,}4$ (flujo en sentido antihorario).

Utilizando la ecuación:

$$\eta = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{\left(M^2-1\right)}$$

Sustituyendo M = 3 y $\gamma = 1{,}4$, se obtiene $\eta = 0{,}868429528$ rad, que equivale a $\eta = 49{,}75734919$ grados.

2. Sea un flujo sónico M = 1, que se expande al pasar por una expansión en sentido antihorario de ángulo $\delta = 10$ grados. Se pide determinar cuál será el número de Mach aguas abajo. Considérese $\gamma = 1{,}4$.

Puesto que el número de Mach aguas arriba es la unidad, para determinar el Mach aguas abajo se puede aplicar directamente la ecuación:

$$\eta = \frac{10*2*\pi}{360} = 0{,}1745329167 = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)} + \tan^{-1}\sqrt{\left(M^2-1\right)}$$

Resolviendo esta ecuación con Mapple, se obtiene: $M_2 = 1{,}434974484$.

3. Se pide determinar el número de Mach aguas abajo M2, sabiendo que el homólogo aguas arriba M1 tiene un valor de 1,6 y el ángulo de la expansión es de $\delta = 15$ grados. Considérese $\gamma = 1{,}4$.

En este caso, dado que el valor del número de Mach aguas arriba no es la unidad, debe utilizarse la expresión $\delta = \eta_2 - \eta_1$. Inicialmente, se determinará el ángulo η_1, que sería

el ángulo teórico necesario para que el flujo se expansione de un Mach inicial M = 1 a un Mach final M_1 = 1.6. Para ello se empleará la misma ecuación que en los casos precedentes obteniendo: η_1 = 0,259362099rad, que equivale a η_1 = 14,86035436 grados.

En consecuencia, el valor de η_2 será: $\eta_2 = \delta + \eta_1 = 15 + 14{,}86035436 = 29{,}86035436$ grados. Este sería el ángulo necesario para que el flujo con un Mach teórico aguas arriba igual a la unidad M = 1, se expanda hasta llegar al Mach aguas abajo M_2, número de Mach a determinar.

Utilizando de nuevo la ecuación.

$$\eta = \frac{29{,}86035436 * 2 * \pi}{360} = 0{,}5211614739 = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)} + \tan^{-1}\sqrt{\left(M^2-1\right)}$$

Y resolviendo con Maple, se obtiene: M_2 = 2.128637731. Este sería el número de Mach del flujo aguas abajo cuando el ángulo de inclinación es de 15 grados y el número de Mach aguas arriba es de M_1 =1,6. Es importante destacar que el resultado es el mismo tanto si el ángulo de expansión es en sentido horario como antihorario.

4.- Se conoce que el flujo aguas arriba de una expansión, es uniforme, su presión y temperatura son respectivamente de $9*10^4$ Pa y 280K, el número de Mach en esta zona es de 2.4. Si el ángulo de expansión en sentido horario es de $\delta = -14$ grados, se pide determinar la presión, temperatura y número de Mach después de la expansión. Considerar γ = 1.4.

Véase que el proceso a seguir para determinar el número de Mach aguas abajo, es exactamente el mismo que el seguido en el ejercicio precedente, se determinará inicialmente el ángulo necesario para que un flujo con M = 1 se expanda hasta alcanzar un número de Mach de 2.4. La ecuación a utilizar será:

$$-\eta_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{\left(M^2-1\right)}$$

Sustituyendo γ = 1,4 y M = 2,4 se obtiene:

$\eta_1 = -0.641347957$rad , que equivale a $\eta_1 = -36{,}74653293$ grados.

El ángulo de inclinación que relaciona el número de Mach saliente con el Mach sónico a la entrada es: $\eta_2 = \delta + \eta_1 = -14 - 36{,}74653293 = -50{,}74653293$ grados. Obsérvese que el signo negativo únicamente indica que el ángulo está definido en sentido horario.

El número de Mach después de la expansión se obtendrá de la expresión.

$$\eta = \frac{-50,74653293 * 2 * \pi}{360} = -0,885694084 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)}$$
$$-\tan^{-1}\sqrt{\left(M^2-1\right)}$$

De resolver con Maple se obtiene: $M_2 = 3.051788589$. Este será el número de Mach después de la expansión.

Para determinar la presión y temperatura del fluido después de la expansión, se debe recordar que el proceso de expansión se considera isentrópico, con lo que se cumplen las relaciones siguientes entre las condiciones estáticas y estancamiento, tanto en el punto 1, aguas arriba, como el 2, aguas abajo.

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Es importante recordar para flujo isentrópico, la presión y temperatura de estancamiento se mantienen constantes. En consecuencia se pueden establecer las siguientes relaciones entre el flujo delante y detrás de la expansión.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Recordando que los parámetros conocidos son: $P_1 = 9*10^4$Pa; $T_1 = 280$K; $M_1 = 2,4$; $M_2 = 3.051788589$; $\gamma = 1,4$, se obtiene:

$$T_2 = T_1\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2} = 210,487\ \text{K}$$

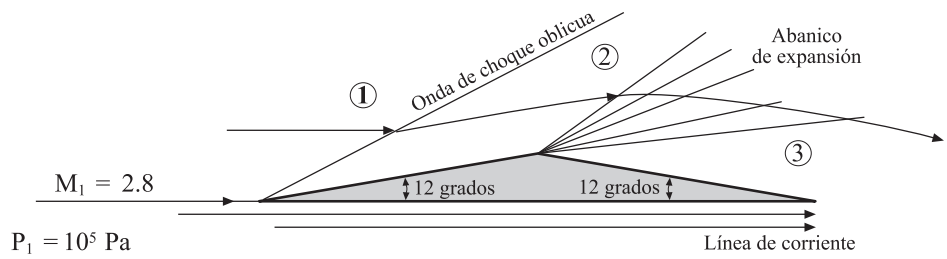
$$P_2 = P_1 \frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = 33150,049 \text{ Pa}$$

Obsérvese que tanto la presión como la temperatura tienen valores muy bajos.

5.- Supóngase que una corriente de flujo supersónico con $M_1 = 2,8$, se encuentra con una cuña convergente divergente tal y como se muestra en la figura T 13.44. La presión aguas arriba es la presión atmosférica que se considerará 10^5 Pa, el ángulo de deflexión de la cuña se considerará de 12 grados, tanto el ángulo de entrada como el de salida de la cuña. Se pide determinar los números de Mach y las presiones en cada una de las tres caras, en función de estos datos se desean hallar los coeficientes de arrastre y sustentación para este cuerpo. Considerar $\gamma = 1.4$.

Para la resolución de este problema, es interesante observar que en el vértice aguas arriba del cuerpo, se producirá una onda de choque oblicua y posteriormente, en el vértice superior del cuerpo, se producirá el abanico de expansión de Prandtl-Meyer.

Fig. T 13.44
Flujo supersónico sobre una cuña convergente divergente



Inicialmente se va a determinar el ángulo de inclinación de la onda de choque oblicua, los datos de partida son $M_1 = 2,8$ y $\delta = 12$ grados.

Mediante la utilización de las ecuaciones (21) o (22), se puede determinar el ángulo de inclinación de la onda de choque débil a la entrada, ε, su valor para este caso es de: $\varepsilon = 0.5380791075$rad; $\varepsilon = 30.82966341$ grados.

El número de Mach perpendicular a la onda de choque incidente será:

$$M_{n1} = M_1 \sin\varepsilon = 2,8 * \sin(30,82966341) = 1,434965$$

Entrando en las tablas de ondas de choque normales con $M_{N1} = 1,434965$ se obtendrán las relaciones entre los parámetros de entrada y salida de la onda de choque. En lugar de utilizar las tablas se utilizarán las ecuaciones homólogas, dado que ofrecen mayor precisión.

El número de Mach perpendicular a la onda de choque incidente y a la salida de la misma será:

$$M_{N2}=\left[\frac{M_{N1}^2\left[\frac{2}{(\gamma-1)}\right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)}\right]M_{N1}^2-1}\right]=\left[\frac{1,434965^2+\frac{2}{0,4}}{\frac{2,8}{0,4}1,434965^2-1}\right]=0,7254347$$

De donde el número de Mach a la salida de la onda será:

$$M_2=\frac{M_{N2}}{\sin(\varepsilon-\delta)}=\frac{0,7254347}{\sin(30,82966341-12)}=2,24762746$$

La relación de presiones entre la salida y entrada de la onda de choque oblicua, estaba dada por la ecuación:

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_{N1}^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}=\frac{2,8}{2,4}1,434965^2-\frac{0,4}{2,4}=2,235645309$$

$$P_2=P_1*2,235645309=2,235645309*10^5\,Pa$$

La siguiente parte del problema consiste en determinar la presión y el número de Mach detrás de la expansión de 12 grados, sabiendo que el número de Mach entrante es de M_2 = 2,24762746. Para ello deberá inicialmente hallarse el ángulo η_1, que caracteriza el ángulo de deflexión del flujo para que se expanda desde un Mach inicial M = 1 hasta un Mach M_2 = 2,24762746, la ecuación a utilizar era:

$$-\eta_1=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)}-\tan^{-1}\sqrt{\left(M^2-1\right)}$$

Sustituyendo M = 2,24762746 y γ = 1.4 se obtiene: $-\eta_1$ = 0,575223476rad. $-\eta_1$ = 32,95787907grados.

El ángulo de inclinación que relaciona el número de Mach saliente con el Mach sónico a la entrada es: $\eta_2 = \delta + \eta_1 = -12 - 32,95787907 = -44,\ 95787907$ grados. Obsérvese que el signo negativo únicamente indica que el ángulo está definido en sentido horario.

El número de Mach después de la expansión se obtendrá de la expresión.

$$\eta=\frac{-44,95787907*2*\pi}{360}=-0,784663015$$
$$=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)}-\tan^{-1}\sqrt{\left(M^2-1\right)}$$

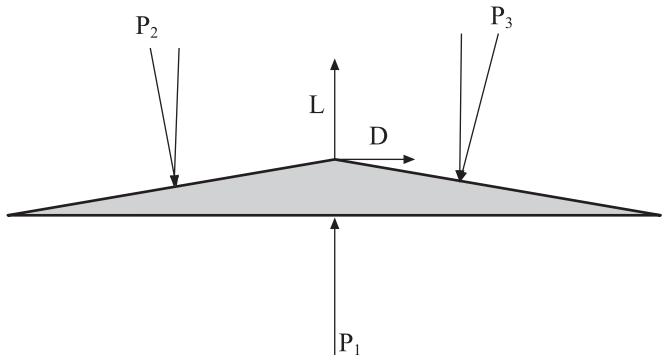
De resolver con Maple se obtiene: M_3 = 2,762459158. Este será el número de Mach después de la expansión.

La presión del fluido después de la expansión se determinará mediante la expresión siguiente y recordando que, $M_3 = 2{,}762459158$; $M_2 = 2{,}24762746$; $\gamma = 1{,}4$; $P_2 = 2,235645309 * 10^5\,\text{Pa}$

$$P3 = P2\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = 1,005094619 * 10^5\,\text{Pa}$$

La determinación de las fuerzas de arrastre y sustentación que actúan sobre el cuerpo, se realiza teniendo únicamente las fuerzas debidas a la presión del fluido actuante sobre las diversas superficies. La figura T 13.45 esquematiza dichas fuerzas actuantes.

Fig. T 13.45
Fuerzas que actúan sobre la cuña bajo estudio



Denominando Z a la longitud de cada uno de las dos superficies inclinadas, cuya profundidad es unitaria, la fuerza de sustentación por unidad de profundidad L, se define como:

$$L = -P_2\ Z\cos(12) - P_3\ Z\cos(12) + P_1\ 2\ Z\cos(12)$$

De donde:

$$L = -2,2356 * 10^5\,Z\cos(12) - 1,00509 * 10^5\,Z\cos(12) + 10^5\ 2\,Z\cos(12)$$
$$= -1,24073 * 10^5\,Z\cos(12) = -1,21362 * 10^5\,Z\left(\frac{N}{m}\right)$$

Por otro lado, la fuerza de arrastre por unidad de profundidad D, queda definida como:

$$D = P_2\ Z\sin(12) - P_3\ Z\sin(12)$$

$$D = 2,2356 * 10^5\,Z\sin(12) - 1,00509 * 10^5\,Z\sin(12) = 0,25583 * 10^5\,Z\left(\frac{n}{m}\right)$$

Problema 95

Enunciado

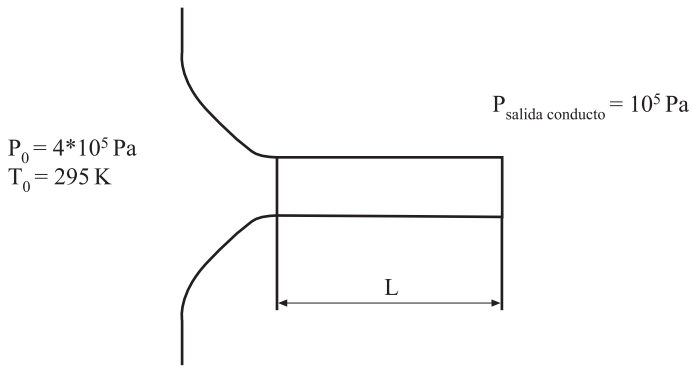
El esquema que se presenta a continuación, muestra un conducto de 0,1m de diámetro, que separa un depósito donde se almacena aire comprimido y una cámara, se conoce que la presión estática a la salida del conducto es de 10^5 Pa. Las características de presión y temperatura de estancamiento en el interior del depósito son: $P_0 = 4*10^5$ Pa, $T_0 = 295$ K;

1. Determinar el caudal másico que circula por el conducto para tres longitudes diferentes del mismo; L = 1m, L = 3m, L = 9m.

Hallar asimismo la longitud de conducto necesaria para que con las condiciones dadas, el flujo esté bloqueado. Considerar f = 0,02; R = 287 J/kgK; γ =1,4 .

¿Hay posibilidad de que en algún punto del circuito, y bajo alguno de las tres longitudes consideradas, aparezca alguna onda de choque? Razonar la respuesta.

Fig. 95.1



2. Supóngase que dos depósitos independientes y que contienen aire a presión, están separados por un conducto de diámetro 0,1 m.

Si la presión y temperatura a la entrada del conducto son: $P = 1.2*10^5$ Pa; T = 295K y la presión en el segundo de los depósitos es de $P_0 = 10^5$ Pa.

Determinar la cantidad de calor que hay que aportar en el conducto para que el flujo a la salida del mismo esté bloqueado. ¿Cuál será el caudal másico circulante?

$C_{P\ aire}$ = 1023 J/(kg K); Considérese el conducto sin fricción, y el fluido como ideal, γ = 1,4 .

Resolución

1. Para L = 1m y suponiendo flujo bloqueado a la salida del conducto:

Si f = 0.02; se tiene:

$$\frac{4C_f\,L}{D}=\frac{f\,L}{D}=\frac{0,02*1}{0,1}=0,2$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo de Fanno se obtiene:

$$\frac{P_0}{P_0^*}=1,0944\;;\quad \frac{P}{P^*}=1,4935\;;\quad \frac{T}{T^*}=1,0929\;;\quad M=0,7\;;$$

De donde: $P_0^*=\dfrac{P_0}{1,0944}=\dfrac{400.000}{1,0944}=365.497,07\ \text{Pa}$

De la tabla de flujo isentrópico, entrando con un número de Mach igual $M=0,7$; se extrae:

$$\frac{P}{P_0}=0,72093$$

De la misma tabla, para $M=1$ se tiene: $\dfrac{P}{P_0}=\dfrac{P^*}{P_0^*}=0,52828$

El gradiente de presiones disponible en el sistema es:

$$\frac{P_{0\ \text{entrada}}}{P_{\text{salida}}}=\frac{400.000}{100.000}=4$$

El gradiente de presiones necesario para asegurar flujo bloqueado es:

$$\frac{P_0}{P^*}=\frac{\dfrac{P_0}{P_0^*}}{\dfrac{P^*}{P_0^*}}=\frac{1,0944}{0,52828}=2,0716$$

Se concluye, consecuentemente, que para esta longitud de conducto considerada, el flujo está bloqueado. A la salida del conducto se tendrá $M=1$.

El caudal másico circulante valdrá: (determinándolo en el punto donde $M=1$).

$$\dot{m}=\frac{P_0\,A}{\sqrt{R\,T_0}}\sqrt{\gamma}\,M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}=\frac{365.497,07\,\dfrac{\pi\ 0.1^2}{4}}{\sqrt{287*295}}\,0,6847=6,75\,\frac{kg}{s}$$

Cabe recordar que para flujo de Fanno así como para una tobera isentrópica, la temperatura de estancamiento se mantiene constante.

Para el caso de tener un conducto de L = 3 m.

Para f = 0,02; se tiene:

$$\frac{4\,C_f\,L}{D}=\frac{f\,L}{D}=\frac{0,02*3}{0,1}=0,6$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo de Fanno se obtiene:

$$\frac{P_0}{P_0^*}=1,22\,;\quad M=0,575\,;$$

De donde: $P_0^*=\frac{P_0}{1,22}=\frac{400.000}{1,22}=327.868,85\ \text{Pa}$

La relación de presiones necesaria para asegurar el flujo bloqueado será:

$$\frac{P_0}{P^*}=\frac{\frac{P_0}{P_0^*}}{\frac{P^*}{P_0^*}}=\frac{1,22}{0,52828}=2,3093$$

Puesto que el gradiente de presiones disponible es de 4, se puede afirmar que el flujo también esta boqueado para esta segunda longitud de conducto.

El caudal másico circulante será ahora de:

$$\dot{m}=\frac{P_0\,A}{\sqrt{R\,T_0}}\sqrt{\gamma}\,M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}=\frac{327.868,85\,\frac{\pi\,0,1^2}{4}}{\sqrt{287*295}}\,0,6847=6,059\,\frac{kg}{s}$$

Por último, si la longitud de la tubería es de L = 9 m. se tiene:

Puesto que f = 0,02; se deduce:

$$\frac{4\,C_f\,L}{D}=\frac{f\,L}{D}=\frac{0,02*9}{0,1}=1.8$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo de Fanno se obtiene:

$$\frac{P_0}{P_0^*}=1,5\,;\quad M=0,43\,;$$

De donde: $P_0^* = \frac{P_0}{1,5} = \frac{400.000}{1,5} = 266.666,66 \text{ Pa}$

La relación de presiones necesaria para asegurar el flujo bloqueado será:

$$\frac{P_0}{P^*} = \frac{\frac{P_0}{P_0^*}}{\frac{P^*}{P_0^*}} = \frac{1,5}{0,52828} = 2,8394$$

Se puede afirmar que el flujo también está bloqueado para esta tercera longitud de conducto, a la salida del mismo se cumplirá que $M=1$

El caudal másico circulante será ahora de:

$$\dot{m} = \frac{P_0 A}{\sqrt{R T_0}} \sqrt{\gamma} M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{266.666,66 \frac{\pi 0,1^2}{4}}{\sqrt{287 * 295}} 0,6847 = 4,928 \frac{Kg}{s}$$

Para las tres longitudes de conducto estudiadas se cumple que a la salida del conducto $M=1$. En consecuencia es imposible que en el interior del conducto aparezca onda de choque alguna. A la salida del conducto aparecerá en los tres casos una expansión brusca del fluido.

La longitud de conducto para la cual se tendrá el gradiente de presiones definido en el enunciado será:

Se conoce que: $\frac{P_0}{P^*} = 4$; y que al final del conducto $M=1$; y por tanto $\frac{P}{P_0} = \frac{P^*}{P_0^*} = 0,52828$

Por tanto la relación: $\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{\frac{P_0}{P^*}}{\frac{P_0^*}{P^*}} = \frac{4}{\frac{1}{0,52828}} = 2,11312$

Entrando con este valor en la tabla del flujo de Fanno, se extrae:

$$M = 0.28775 ; \quad \frac{4 C_f L}{D} = 5,92440 = \frac{0,02 * L^*}{0,1}$$

Con lo que la longitud del conducto será $L^* = 29,62 \text{ m}$

Obsérvese que, el efecto de la fricción, da lugar a que a medida que la longitud del conducto aumenta, el caudal másico disminuye y se necesita un mayor gradiente de presión para que el flujo este bloqueado.

2. En este apartado se conoce la presión y temperatura estáticas a la entrada del conducto, la presión de estancamiento a la salida, y se pide el calor necesario a aportar para que el flujo esté bloqueado.

El requerimiento es que el número de Mach a la salida del conducto sea la unidad.

Entrando a la tabla de flujo isentrópico con un número de $M=1$, se tiene a la salida del conducto:

$$\frac{P}{P_0}=\frac{P^*}{P_0^*}=0,52828\ ;\quad \frac{T}{T_0}=\frac{T^*}{T_0^*}=0,83333$$

Considerando que la presión de estancamiento a la salida del conducto, será, como condición límite, de 10^5 Pa la presión estática a la salida deberá ser de:

$$P^*=P_0^*\ 0,52828=52.828\ \text{Pa}$$

La relación de presiones estáticas entre la entrada y salida del conducto tomará un valor de:

$$\frac{P_{entrada}}{P_{salida}}=\frac{P_{entrada}}{P^*}=\frac{1,2*10^5}{52.828}=2,2715$$

Entrando con este valor a las tablas de flujo de Rayleich se obtiene:

$$\frac{P_0}{P_0^*}=1,23\ ;\quad \frac{T_0}{T_0^*}=0,1735\ ;\quad \frac{T}{T^*}=0,20661\ ;\quad M=0,2\ .$$

La presión de estancamiento a la entrada del conducto será:

$$P_{0\ entrada}=P_{0\ salida}\ 1,23=P_0^*\ 1,23=10^5\ *\ 1,23=123.000\ \text{Pa}$$

Si el proceso es correcto, se debería hallar el mismo valor partiendo de la presión estática a la entrada.

Entrando en la tabla de flujo isentrópico para $M=0,2$ se tiene:

$$\frac{P_{entrada}}{P_{0\ entrada}}=0,97205\ ;\ \text{de donde:}\ P_{0\ entrada}=\frac{P_{entrada}}{0,97205}=\frac{1,2*10^5}{0,97205}=123.450,4\ \text{Pa}$$

Véase que la presión es prácticamente la misma que la obtenida anteriormente, estas pequeñas discrepancias son debidas a que el número de Mach no era en realidad exactamente igual a 0,2.

Entrando con $M = 0,2$ en la tabla de flujo isentrópico se tiene:

$$\frac{T}{T_0} = 0,99206 \text{ ; con lo que se llega a: } T_0 = T_{0\,\text{entrada}} = \frac{T_{\text{entrada}}}{0,99206} = \frac{295}{0,99206} = 297,36 \text{ K}$$

De la tabla de flujo de Rayleich, para $M = 0,2$ se había obtenido:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = 0,1735 \text{ ; } \quad T_0^* = T_{0\,\text{salida}} = \frac{T_0}{0,1735} = \frac{297,36}{0,1735} = 1713,89 \ K$$

El calor necesario que hay que añadir al conducto es:

$$Q = h_{0\,\text{salida}} - h_{0\,\text{entrada}} = C_P \left(T_{0\,\text{salida}} - T_{0\,\text{entrada}} \right) =$$
$$= 1023 \left(1713,89 - 297,36 \right) = 1.449.116,86 \frac{J}{kg}$$

Problema 96

Enunciado

Se desea suministrar oxígeno a una cámara aislada, donde se quiere que a la entrada de la misma la presión estática sea de P_2 = 120.000 Pa. Los tanques de oxígeno se encuentran situados a una distancia de 7m de la cámara, siendo su presión de estancamiento P_{01} = 350.000 Pa y su temperatura de estancamiento T_{01} = 10ºC. Se dispone, no obstante, de tanques alternativos de oxígeno cuya presión es P_{01} = 600.000 Pa, y la temperatura es la misma que la de los tanques de menor presión. Si el caudal másico máximo que se quiere suministrar es de 0,2 kg/s, hallar el diámetro del conducto que se deberá utilizar.

De los dos tipos de tanques disponibles utilizar el más apropiado, indicando el porqué.

(Las presiones dadas son presiones absolutas).

Parámetros conocidos:

Rugosidad del conducto: ε = 0,01 mm.

$$R_{O_2} = 260 \frac{J}{kg\ K} ; \quad \mu_{O_2} = 1,97 * 10^{-5} \frac{Ns}{m^2} ; \quad \gamma = 1,4 ;$$

Resolución

El número de Reynolds, se puede expresar para el presente caso como:

$$R_e = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{\rho Q D}{S \mu} = \frac{\dot{m} 4}{\pi D \mu} = \frac{4*0{,}2}{\pi*1{,}97*10^{-5} D} = \frac{12.926{,}67}{D}$$

El caudal másico en un punto genérico del conducto viene dado por la ecuación.

$$\dot{m} = \frac{P_0 A}{\sqrt{R T_0}} \sqrt{\gamma} M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Aislando el diámetro del conducto de esta ecuación, se tiene:

$$D = \sqrt{\frac{4 \dot{m} \sqrt{R T_0}}{P_0 \pi} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\sqrt{\gamma} M}} = \sqrt{\frac{4*0.2\sqrt{260*283}}{350.000\,\pi} \frac{\left(1 + \frac{1.4-1}{2} 0{,}5^2\right)^{\frac{1.4+1}{2(1.4-1)}}}{\sqrt{\gamma}\, 0{,}5}}$$

Obsérvese que a la entrada del conducto, (salida de los depósitos), la presión y temperatura de estancamiento son conocidas, con lo que, según la ecuación precedente, si se conociese el número de Mach en dicho punto, se podría obtener el diámetro del conducto, se plantea aquí un proceso iterativo, el cual se va a empezar haciendo una estimación del número de Mach a la entrada del conducto. Se va a suponer, que el número de Mach a la entrada del conducto es M = 0,5. Ha de entenderse que para este número de Mach a la entrada, el flujo está bloqueado, el caudal másico circulante es 0,2 Kg/s y consecuentemente el número de Mach a la salida del conducto será M = 1.

Los siguientes cálculos se van a realizar considerando que P_{01} = 350.000 Pa, y T_{01} = 283K, es decir, se utiliza inicialmente el depósito de menor presión.

Gracias a la hipótesis establecida se obtiene:

$$D = 0{,}0196516 \text{ m}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}000001}{0{,}0196516} = 5{,}08862\,10^{-5}$$

$$R_e = \frac{12.926{,}67}{0{,}0196516} = 657.845{,}801$$

Entrando en el diagrama de Moody con los valores de $\frac{\varepsilon}{D}$ y R_e se obtiene f = 0,0175,

Por otro lado y entendiendo que la evolución del flujo en el interior del conducto obedece a flujo de Fanno, se establece:

$$\frac{4 C_f \Delta L}{D} = \frac{4 C_f L_1^*}{D} - \frac{4 C_f L_2^*}{D}$$

Los puntos 1 y 2 son respectivamente la entrada y la salida del conducto, puesto que se desea que el flujo este bloqueado, el Mach a la salida del conducto debe ser la unidad, obteniéndose: recuérdese que $4\,C_f = f$.

$$\frac{4\,C_f\,\Delta L}{D} = \frac{4\,C_f\,L_1^*}{D} = \frac{0,0175*7}{0,0196516} = 6,233$$

Entrando en las tablas de flujo de Fanno con el valor acabado de obtener se tiene:

$$M_1 = 0,285\,;\quad \frac{P}{P^*} = \frac{P_1}{P^*} = 3,80\,;$$

Entrando con el valor del número de Mach $M_1 = 0,285$ en la tabla de flujo isentrópico, se tiene: $\frac{P_1}{P_{01}} = 0,945$

Así, la relación de presiones, estática a la salida del conducto, partido por la presión de estancamiento a la entrada del conducto, necesaria para que el flujo este bloqueado es:

$$\frac{P_2}{P_{01}} = \frac{P^*}{P_{01}} = \frac{\frac{P_1}{P_{01}}}{\frac{P_1}{P^*}} = \frac{0,945}{3,8} = 0,2486$$

En realidad, la relación de presiones de que se dispone es, (caso de querer utilizar el tanque de menor presión).

$$\frac{P_2}{P_{01}} = \frac{120.000}{350.000} = 0,3428$$

Se observa que el gradiente de presiones de que se dispone, no es suficiente para que se cumplan las condiciones requeridas en el problema, es decir, con el depósito de menor presión y para el caudal másico requerido, no se podrá encontrar un diámetro de conducto tal que el flujo esté bloqueado. Consecuentemente, se procede a realizar de nuevo los cálculos considerando que el depósito de suministro tiene una presión de $P_{01} = 6*10^5$ Pa, que es la presión del segundo depósito disponible.

Suponiendo, al igual que en el caso precedente, que el número de Mach a la entrada del conducto es M = 0,5 se tiene:

$$D = \sqrt{\frac{\dot{m}\sqrt{R\,T_0}}{P_0\,\pi}\,\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\sqrt{\gamma}\,M}} = \sqrt{\frac{4*0.2\sqrt{260*283}}{600.000\;\pi}\,\frac{\left(1+\frac{1.4-1}{2}0,5^2\right)^{\frac{1.4+1}{2(1.4-1)}}}{\sqrt{\gamma}\,0,5}}$$

Obteniendo:

$$D = 0{,}01501 \text{ m}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}000001}{0{,}01501} = 6{,}66\,10^{-4}$$

$$R_e = \frac{12.926{,}67}{0{,}01501} = 861.043{,}78$$

Entrando con estos valores en el diagrama de Moody se extrae: f = 0,018.

Suponiendo que en el conducto existe flujo de Fanno, debe cumplirse:

$$\frac{4C_f\ \Delta L}{D} = \frac{4C_f\ L_1^*}{D} - \frac{4C_f\ L_2^*}{D}$$

Y si el flujo está bloqueado quedará:

$$\frac{4C_f\ \Delta L}{D} = \frac{4C_f\ L_1^*}{D} = \frac{0{,}018 * 7}{0{,}01501} = 8{,}3944$$

Entrando con este valor en las tablas de flujo de Fanno se obtiene:

$$M_1 = 0{,}25\,; \quad \frac{P}{P^*} = \frac{P_1}{P^*} = 4{,}3546\,;$$

Entrando ahora con el valor del número de Mach $M_1 = 0.25$ en las tablas de flujo isentrópico se tiene:

$$\frac{P_1}{P_{01}} = 0{,}9574$$

$$\frac{P_2}{P_{01}} = \frac{P^*}{P_{01}} = \frac{\frac{P_1}{P_{01}}}{\frac{P_1}{P^*}} = \frac{0{,}9574}{4{,}3546} = 0{,}2198$$

Para este segundo depósito se cumple que $\frac{P_2}{P_{01}} = \frac{120.000}{600.000} = 0{,}2$

Ahora se observa que $\frac{P_2}{P_{01}} = 0{,}2 < \frac{P_2}{P_{01}} = 0{,}2198$; con lo que se puede asegurar que el flujo estará bloqueado.

No obstante se ha de tener presente que todo este proceso parte de la estimación de un número de Mach a la entrada del conducto, es necesario pues seguir con el proceso iterativo, se hallará ahora un nuevo diámetro del conducto para un número de Mach a la entrada del mismo de: $M = \frac{0,5+0,25}{2} = 0,375$

$$D=\sqrt{\frac{\dot{m}\sqrt{R\,T_0}}{P_0\,\pi}\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\sqrt{\gamma}\,M}} = \sqrt{\frac{4*0.2\sqrt{260*283}}{600.000\;\pi}\frac{\left(1+\frac{1.4-1}{2}0,375^2\right)^{\frac{1.4+1}{2(1.4-1)}}}{\sqrt{\gamma}\,0,375}}$$

De donde:

$$D = 0,01679 \text{ m}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,000001}{0,01679} = 5,995\,10^{-4}$$

$$R_e = \frac{12.926,67}{0,01679} = 769.902,91$$

Entrando con estos valores en el diagrama de Moody se extrae: $f = 0,0179 \approx 0,018$.

Suponiendo que existe flujo de Fanno, debe cumplirse:

$$\frac{4\,C_f\,\Delta L}{D} = \frac{4\,C_f\,L_1^*}{D} = \frac{0,0179*7}{0,01679} = 7,4627$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo de Fanno, se tiene:

$$M_1 = 0,261;\;\; \frac{P}{P^*} = \frac{P_1}{P^*} = 4,15;$$

Entrando ahora con el valor del número de Mach $M_1 = 0,261$ en las tablas de flujo isentrópico se tiene:

$$\frac{P_1}{P_{01}} = 0,953$$

$$\frac{P_2}{P_{01}} = \frac{P^*}{P_{01}} = \frac{\frac{P_1}{P_{01}}}{\frac{P_1}{P^*}} = \frac{0,953}{4,15} = 0,2296$$

Para este segundo depósito se cumple que $\frac{P_2}{P_{01}} = \frac{120.000}{600.000} = 0,2$

Ahora se observa que $\frac{P_2}{P_{01}} = 0,2 < \frac{P_2}{P_{01}} = 0,2296$; con lo que se puede asegurar que el flujo estará bloqueado.

Para la siguiente iteración se utilizará un número de Mach a la entrada del conducto de:

$$M = \frac{0,375 + 0,261}{2} = 0,318$$

$$D = \sqrt{\frac{\dot{m}\sqrt{R\,T_0}}{P_0\,\pi}\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\sqrt{\gamma}\,M}} = \sqrt{\frac{4*0,2\sqrt{260*283}}{600.000\ \pi}\frac{\left(1+\frac{1,4-1}{2}0,318^2\right)^{\frac{1.4+1}{2(1.4-1)}}}{\sqrt{\gamma}\,0,318}}$$

$$D = 0,01802 \text{ m}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,000001}{0,01802} = 5,547\,10^{-4}$$

$$R_e = \frac{12.926,67}{0,01802} = 717.351,27$$

Entrando con estos valores en el diagrama de Moody se extrae: $f = 0,01785 \approx 0,0179$.

Para flujo de Fanno, debe cumplirse:

$$\frac{4\,C_f\,\Delta L}{D} = \frac{4\,C_f\,L_1^*}{D} = \frac{0,01785*7}{0,01802} = 6,933$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo de Fanno, se tiene:

$$M_1 = 0,27\,;\quad \frac{P}{P^*} = \frac{P_1}{P^*} = 4,0279\,;$$

Entrando ahora con el valor del número de Mach $M_1 = 0,261$ en las tablas de flujo isentrópico se tiene:

$$\frac{P_1}{P_{01}} = 0,9506$$

$$\frac{P_2}{P_{01}} = \frac{P^*}{P_{01}} = \frac{\frac{P_1}{P_{01}}}{\frac{P_1}{P^*}} = \frac{0,9506}{4,027} = 0,236$$

Para este segundo depósito se cumple que $\frac{P_2}{P_{01}} = \frac{120.000}{600.000} = 0,2$

Ahora se observa que $\frac{P_2}{P_{01}} = 0,2 < \frac{P_2}{P_{01}} = 0,236$; con lo que se puede asegurar que el flujo está bloqueado.

El número de Mach para la siguiente iteración es de:

$$M = \frac{0,318 + 0,027}{2} = 0,294$$

Siguiendo el proceso iterativo descrito se obtiene al final un diámetro de $D = 0,01866\ m$ y un número de Mach a la entrada del conducto de 0,275. El flujo estará bloqueado, cumpliéndose las condiciones requeridas por el enunciado.

Problema 97

Enunciado

Sea un tanque de grandes dimensiones donde está almacenado un gas. Al tanque se le ha realizado un pequeño agujero de sección (A) por donde fluye el gas almacenado hacia el exterior.

1. Considerando el flujo al fluir a través del agujero como isentrópico, se pide determinar la velocidad del gas (C_2) al pasar por dicho agujero, el número de Mach y el caudal circulante. Considérese el gas como ideal.

2. Supóngase ahora que el tanque es una cabina espacial presurizada y supóngase que la sección del agujero por donde se fuga el fluido (aire) es suficientemente pequeña para considerar que existirá flujo sónico en dicha sección.

Suponiendo conocidos el volumen de la cabina espacial, su presión y temperatura iniciales y la sección del agujero, determínese: la variación de la presión en el interior de la cabina en función del tiempo. Supóngase el aire como fluido ideal y el proceso como isentrópico.

Resolución

1. La ecuación de la energía para flujo isentrópico, dada en función de la entalpía, toma la forma:

$$h_1 + \frac{C_1^2}{2} + g\,z_1 = h_2 + \frac{C_2^2}{2} + g\,z_2 \qquad (1)$$

ecuación que se puede representar como:

$$h + \frac{C^2}{2} + g\,z = cte. \tag{2}$$

Esta ecuación se puede representar de forma diferencial como:

$$dh + C\,dC + g\,dz = 0 \tag{3}$$

Considerando el fluido como ideal, la ecuación de los gases ideales establece:

$$P\upsilon = RT \tag{4}$$

Diferenciando logarítmicamente esta ecuación, se obtiene:

$$\ln P + \ln \upsilon = \ln R + \ln T \tag{5}$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \frac{dT}{T} \tag{6}$$

La ecuación de los gases ideales dada en función de la densidad en lugar de en función del volumen específico se enuncia:

$$\frac{P}{\rho} = RT \tag{7}$$

Su diferenciación logarítmica da lugar a:

$$\ln P - \ln \rho = \ln R + \ln T \tag{8}$$

$$\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \tag{9}$$

Para flujo isentrópico, se cumple:

$$\frac{P}{\rho^{\gamma}} = \frac{P_0}{\rho_0^{\gamma}} \tag{10}$$

Ecuación que resulta de integrar la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \tag{11}$$

La relación entre la variación de la energía interna y la variación de la temperatura se define:

$$u_2 - u_1 = C_V \left(T_2 - T_1\right) \tag{12}$$

En forma diferencial, esta ecuación se puede dar como:

$$du = C_V \, dT \tag{13}$$

La ecuación diferencial que relaciona la variación de la entalpía con la temperatura toma la forma:

$$dh = C_P \, dT \tag{14}$$

o bien: $h_2 - h_1 = C_P \left(T_2 - T_1 \right)$ (15)

Otras relaciones termodinámicas que cabe recordar son:

$$R = C_P - C_V ; \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} ; \quad C_V = \frac{R}{\gamma - 1} ; \quad C_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R \tag{16}$$

Combinando las ecuaciones (3) y (14), se tiene:

$$C_P \, dT + C \, dC + g \, dz = 0 \tag{17}$$

Sustituyendo en esta ecuación la ecuación (9), se tiene:

$$C_P \, T \left(\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} \right) + C \, dC + g \, dz = 0 \tag{18}$$

Sustituyendo la ecuación (16) en la (18), se tiene:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} R \, T \left(\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} \right) + C \, dC + g \, dz = 0 \tag{19}$$

Recordando la ecuación de los gases ideales:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \left(\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} \right) + C \, dC + g \, dz = 0 \tag{20}$$

ecuación que se puede dar como:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} d\left(\frac{P}{\rho} \right) + C \, dC + g \, dz = 0 \tag{21}$$

Esta es la denominada *ecuación diferencial de Bernoulli para flujo compresible, ideal e isentrópico*.

Su integración entre un punto inicial (1) y un punto final (2) (v. figura adjunta), da lugar a:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \frac{C_2^2}{2} - \frac{C_1^2}{2} + g \left(z_2 - z_1 \right) = 0 \tag{22}$$

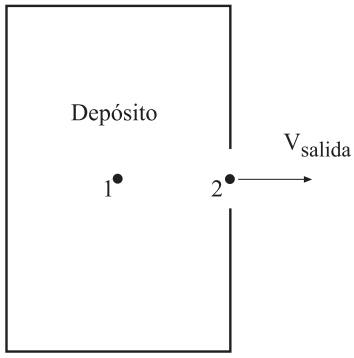


Fig. 97.1
Tanque donde se almacena el fluido compresible

Considerando que los puntos están en la misma posición espacial y que la velocidad del fluido en el interior del tanque es, aproximadamente, igual a cero, se tiene:

$$C_2 = \sqrt{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P_2}{\rho_2}-\frac{P_1}{\rho_1}\right)} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P_1}{\rho_1}-\frac{P_2}{\rho_2}\right)} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1}{\rho_1}\left(1-\frac{P_2}{\rho_2}\frac{\rho_1}{P_1}\right)} \qquad (23)$$

Considerando la expansión del fluido como adiabático isentrópica, se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho_1^{\gamma}} = \frac{P_2}{\rho_2^{\gamma}} \qquad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \qquad (24)$$

Sustituyendo la ecuación (24) en la (23), se tiene:

$$C_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1}{\rho_1}\left(1-\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1}{\rho_1}\left(1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \qquad (25)$$

ecuación que caracteriza la velocidad del fluido en la sección de salida del agujero, y en función del gradiente de presiones entre el interior y el exterior del tanque, así como del índice de politropia.

El número de Mach del fluido en la sección de salida, se obtendrá:

$$M = \frac{C}{\sqrt{\gamma R T_2}} = \frac{C}{\sqrt{\gamma\frac{P_2}{\rho_2}}} = \frac{\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1}{\rho_1}\left(1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}}{\sqrt{\gamma\frac{P_2}{\rho_2}}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\frac{P_1}{\rho_1}\frac{\rho_2}{P_2}\left(1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \qquad (26)$$

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\frac{P_1}{P_2}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}\left(1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \qquad (27)$$

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right)} \tag{28}$$

El caudal másico circulante para un gradiente de presiones dado se define:

$$\dot{m} = A_2 C_2 \rho_2 = A_2\ \rho_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1}{\rho_1}\left(1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \tag{29}$$

$$\dot{m} = A_2\ \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1}{\rho_1}\left(1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}\ \rho_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{30}$$

$$\dot{m} = A_2\ \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}P_1\ \rho_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left(1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \tag{31}$$

$$\dot{m} = A_2\ \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}P_1\ \rho_1\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right)} \tag{32}$$

2. Para este segundo apartado, el tanque es una cabina espacial presurizada a la presión atmosférica. La presión en el exterior se puede considerar nula y el agujero tiene una sección de paso suficientemente pequeña para poder considerar que el flujo en esta sección es sónico. Al igual que en el primer apartado del problema, se considerara fluido ideal y el proceso como isentrópico.

Para halar la ecuación que caracteriza la variación temporal de la caída de presión en el interior de la cabina espacial, se empieza determinando el flujo másico de fluido a través del agujero.

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{\Gamma A_2 P_{02}}{\left(\gamma R T_{02}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)2}} A_2 P_{02}}{\left(\gamma R T_{02}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{33}$$

P_{02} y T_{02} son la presión y la temperatura de estancamiento en la sección de salida del fluido A_2. (Los puntos 1 y 2 se han definido en el apartado anterior, figura 97.1).

Entendiendo que el proceso de descompresión es isentrópico, la relación entre presiones y temperaturas de estancamiento en el punto 2 se establece:

$$\frac{T_{02}}{T_{i02}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{i02}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{34}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)2}} A_2\, P_{02}}{\left(\gamma R\, T_{i02}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{P_{i02}}{P_{02}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \tag{35}$$

El subíndice (i) indica las condiciones iniciales de las variables.

La masa de fluido que en un momento dado se encuentra en el interior de la cabina espacial se puede dar como:

$$P_1 \forall = m_c R T_1 \tag{36}$$

$$m_c = \frac{P_1 \forall}{R T_1} \tag{37}$$

La masa de fluido en función de la presión y la temperatura de estancamiento en la cabina se define:

$$m_c = \frac{P_{01} \forall}{R T_{01}} \tag{38}$$

Asimismo, se puede establecer en la cabina la relación:

$$\frac{T_{01}}{T_{i01}} = \left(\frac{P_{01}}{P_{i01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{39}$$

Sustituyendo la ecuación (39) en la (38), se tiene:

$$m_c = \frac{P_{01} \forall}{R T_{i01}} \left(\frac{P_{i01}}{P_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{\forall \left(P_{i01}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{R T_{i01}} \left(P_{01}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}+1} = \frac{\forall \left(P_{i01}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{R T_{i01}} \left(P_{01}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{40}$$

Diferenciando la ecuación (40) con respecto al tiempo, se tiene (recuérdese que únicamente P_{01} depende del tiempo):

$$\frac{dm_c}{dt} = \frac{\forall}{R T_{i01}} \left(P_{i01}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} P_{01}^{\frac{1}{\gamma}-1} \left(\frac{dP_{01}}{dt}\right) \tag{41}$$

Se observa que la disminución de la masa del fluido en la cabina ha de ser igual al flujo másico saliente, con lo cual:

$$-\frac{dm_c}{dt} = \dot{m} = \frac{dm}{dt} \tag{42}$$

Sustituyendo ecuaciones (35) y (41) en la (42), se tiene:

$$-\frac{\forall}{RT_{i01}}\left(P_{i01}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\frac{1}{\gamma}P_{01}^{\frac{1}{\gamma}-1}\left(\frac{dP_{01}}{dt}\right) = \frac{\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)2}}A_2\,P_{02}}{\left(\gamma R\,T_{i02}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{P_{i02}}{P_{02}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \tag{43}$$

Dado que el proceso se ha considerado isentrópico, las temperaturas y presiones de estancamiento, tanto en la cabina como en la sección del agujero de salida, son en todo momento las mismas, $P_{i01} = P_{i02}$; $P_{01} = P_{02}$; $T_{i01} = T_{i02}$; así, la ecuación (43) se puede dar como:

$$-\frac{\forall}{RT_{i0}}\left(P_{i0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\frac{1}{\gamma}P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\left(\frac{dP_0}{dt}\right) = \frac{\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)2}}A_2\,P_0}{\left(\gamma R\,T_{i0}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{P_{i0}}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \tag{44}$$

Reagrupando términos, esta ecuación queda:

Obsérvese que para el tiempo inicial, t = 0, la presión es P_{i0} y, para un tiempo genérico t, la presión será P_0.

$$\int_{P_{i0}}^{P_0} -P_0^{\frac{1-3\gamma}{2\gamma}}\,dP_0 = \int_0^t \frac{\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)2}}A_2\left(\gamma R\,T_{i0}\right)^{\frac{1}{2}}}{\forall}P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}\,dt \tag{45}$$

El resultado de la integración da lugar a:

$$-\frac{P_0^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}}{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} + \frac{P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}}{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} = \gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)2}}\frac{A_2}{\forall}\left(\gamma R\,T_{i0}\right)^{\frac{1}{2}}P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}\,t \tag{46}$$

$$-P_0^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} = -P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} + \frac{\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)2}}\frac{A_2}{\forall}\left(\gamma R\,T_{i0}\right)^{\frac{1}{2}}P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}\,t}{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} \tag{47}$$

$$P_0^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} = P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} \left[1 + \frac{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)2}} \frac{A_2}{\forall} \left(\gamma R T_{i0} \right)^{\frac{1}{2}} t}{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right] \tag{48}$$

$$\frac{P_0}{P_{i0}} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)2}} \frac{A_2}{\forall} \left(\gamma R T_{i0} \right)^{\frac{1}{2}} t \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}} \tag{49}$$

ecuación que caracteriza la variación temporal (decremento) de la presión en el depósito.

Problema 98

Enunciado

Con el fin de suministrar vapor recalentado a un colectivo de máquinas de una industria textil, se instala una caldera de vapor, encontrándose a la salida de la misma un tanque de almacenamiento, (v. figura 98.1). Las condiciones del fluido a la entrada de la caldera son: P_{1c} = 1 bar (abs); T_{1c} = 100 ºC; h_{1c} = 2.676 KJ/kg, siendo la velocidad del fluido a la entrada de 5m/s. En la caldera, el vapor se calienta hasta adquirir una temperatura de T_{2c}= 350ºC y una presión de P_{2c}=5 10^5 N/m^2 (abs).

Considérese: R = 287 J/kg K; γ = 1,4; μ_{vapor} = 1,086 10^{-5} N. s /m^2; Cp = 1,8641 KJ/kg K. Como primera aproximación, considerar el gas como ideal.

Halle:

1. El número de Mach a la salida de la caldera M_{2c}, sabiendo que el calor comunicado al fluido es de 500 KJ/kg.

2. Si el tubo que une los dos depósitos tiene un diámetro de 0,02 m y su coeficiente de fricción medio es de 4 Cf = f = 0,02; halle la longitud del conducto para que a la entrada del segundo tanque el número de Mach sea de 0,9. Indique las hipótesis realizadas.

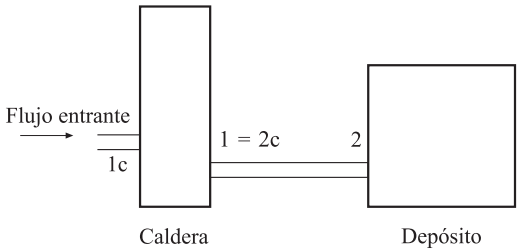
3. El flujo másico circulante entre los dos depósitos.

4. La presión a la entrada del segundo depósito.

5. El número de Mach a la salida del conducto para que la presión estática en el extremo de éste sea de 250.000 Pa.

6. Si se decide unir los dos depósitos mediante una tubería de 5 m de longitud, y se quiere que las presiones absolutas de estancamiento en los depósitos sean: $P_{01} = 5\ 10^5$ N/m^2; $P_{02} = 0{,}5\ 10^5$ N/m^2, con el caudal másico máximo a transferir de 1 kg/s y la rugosidad del tubo $\varepsilon = 0{,}01$ mm halle el diámetro del conducto. Considérese que la temperatura de estancamiento en la caldera es la misma que en los apartados anteriores.

Fig. 98.1
Esquema de la instalación



Datos:

$P_{1c} = 10^5$ N/m^2

$T_{1c} = 100$ ºC

$h_{1c} = 2.676$ kJ/Kg $= 2{,}676 \cdot 10^6$ J/kg

$\gamma = 1{,}4$

$v_{e1c} = 5$ m/s

Cp = 1,8641 KJ/kgK = 1.864,1 J/kgK

$Q_{caldera} = 500$ KJ/kg

$T_{2c} = 350$ ºC = 623 K

$P_{2c} = 5 \cdot 10^5$ N/m^2

Resolución

1. Número de Mach a la salida de la caldera

Se calculará inicialmente la temperatura y la entalpía de estancamiento a la entrada de la caldera.

$$T_{01c} = T_{1c} + \frac{v^2}{2 \cdot Cp} = (100 + 273) + \frac{5^2}{2 \cdot 1.864{,}1} = 373{,}006\,K$$

$$h_{01} = h_1 + \frac{v^2}{2} = 2.676.000 + \frac{5^2}{2} = 2.676.012{,}5\ J/kg$$

Según la ecuación de la energía, se conoce:

$$q + h_{01} = h_{02}$$

donde la entalpía de estancamiento a la salida de la caldera será:

$$h_{02} = 500.000 + 2.676.012,5 = 3.176.012,5 \text{ J/kg}$$

Para un gas ideal, se cumple:

$$\int_{h_{01}}^{h_{02}} dh = \int_{T_{01}}^{T_{02}} Cp \cdot dT$$

de donde el valor de T_{02} se obtiene:

$$q = h_{02} - h_{01} = Cp\left(T_{02} - T_{01}\right)$$

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{Cp} = 373,006 + \frac{500}{1,8641} = 641,21 \text{ K}$$

El siguiente paso será calcular la velocidad del fluido a la salida de la caldera y la velocidad del fluido en este mismo punto.

$$T_{02} = T_2 + \frac{v^2}{2 \cdot Cp}$$

$$T_{02} - T_2 = \frac{v^2}{2 \cdot Cp}$$

$$v^2 = \left(T_{02} - T_2\right) \cdot 2 \cdot Cp$$

$$v = \sqrt{\left(T_{02} - T_2\right) \cdot 2 \cdot Cp}$$

$$v = \sqrt{(641,21 - (350 + 273)) \cdot 2 \cdot 1864,1} = 260,5 \text{ m/s}$$

$$C_2 = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_2} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 623} = 500,32$$

$$M_2 = \frac{v}{C_2} = \frac{260,5}{500,32} = 0,5206$$

El número de Mach a la salida de la caldera es $M_{2c} = 0,5206$

2. Si el conducto es de diámetro ($\Phi = 0,02$ m) y $f = 4 \cdot C_f = 0,02$, la longitud del conducto, para que $M = 0,9$ en su extremo, será:

Suponiendo flujo de Fanno,

de tablas se tiene:

$$M_1 = 0,52 \longrightarrow \frac{4 \cdot C_f \cdot L_1^*}{D} = 0,9174$$

$$M_2 = 0,9 \longrightarrow \frac{4 \cdot C_f \cdot L_2^*}{D} = 0,014$$

$$M_1 = M_{2c} = 0{,}5206 \qquad M_2 = 0{,}9$$

$$\frac{4 \cdot C_f \cdot \Delta L}{D} = \frac{4 \cdot C_f \cdot L_1^*}{D} - \frac{4 \cdot C_f \cdot L_2^*}{D} = 0{,}9174 - 0{,}014 = 0{,}903$$

$$\Delta L = \frac{0{,}903 \cdot D}{4 \cdot Cf} = \frac{0{,}903 \cdot 0{,}02}{0{,}02} = 0{,}903 \text{ m}$$

La longitud del conducto ha de ser de 0,903 m

3. El flujo másico se puede determinar:

$$\dot{m} = \rho \cdot s \cdot v = \frac{P}{R \cdot T} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}02^2}{4} \cdot 260{,}5 = \frac{5 \cdot 10^5}{287 \cdot (350 + 273)} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}02^2}{4} \cdot 260{,}5 = 0{,}228 \text{ kg/s}$$

flujo másico circulante entre los depósitos es de 0,228 kg/s

4. Dado que la presión en el extremo del conducto será la misma que a la entrada del segundo depósito:

Para $M_2 = 0{,}9$, (Fanno):

$$\frac{P_2}{P^*} = 1{,}129 \qquad \frac{P_{02}}{P_0^*} = 1{,}0089$$

Para $M_1 = M_{20} = 0{,}52$ (Fanno):

$$\frac{P_1}{P^*} = 2{,}0519 \qquad \frac{P_{01}}{P_0^*} = 1{,}3034$$

Para $M_2 = 0{,}9$ (tabla de flujo isentrópico):

$$\frac{P_2}{P_{02}} = 0{,}59126$$

Con lo cual se puede establecer:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}}{\frac{P_2}{P^*}} = \frac{2{,}0519}{1{,}129} = 1{,}817$$

$$P_2 = \frac{P_1}{1{,}817} = \frac{5 \cdot 10^5}{1{,}817} = 275.178{,}8 \text{ N/m}^2$$

$$P_{02} = \frac{P_2}{0{,}59126} = 465.410{,}9 \text{ N/m}^2$$

La presión a la entrada del segundo depósito será de 275.178,8 N/m^2

5. Si la presión a la salida del conducto se quiere que sea de 250.000 Pa, halle el número de Mach en este punto:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{500.000}{250.000} = 2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}(M_1)}{\frac{P_2}{P^*}(M_2)};$$

A la entrada del conducto, se ha visto que:

$$M_1 = 0{,}52, \text{ (Fanno):} \quad \frac{P_1}{P^*} = 2{,}0519$$

$$\frac{P_2}{P^*}(M_2) = \frac{\frac{P_1}{P^*}(M_1)}{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{2{,}0519}{2} = 1{,}02595$$

Entrando en las tablas de Fanno para $\frac{P_2}{P^*}(M_2) = 1{,}02595 \rightarrow \ M_2 \cong 0{,}98$,

se obtiene que el número de Mach a la salida del conducto es de 0,98.

6. Datos en los puntos de entrada (1) y salida (2) del conducto:

$P_{01} = 5 \cdot 10^5$ Pa

$P_{02} = 0{,}5 \cdot 10^5$ Pa

$\dot{m} = 1$ kg/s

$\varepsilon = 0{,}01$ mm

$T_{01} = 641$ K

Se va a considerar que para estas condiciones se tiene flujo bloqueado.

Se calcula el número de Reynolds en función del diámetro:

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{Q}{S}\frac{D \cdot \rho}{\mu} = \frac{\dot{m} D}{S \cdot \mu} = \frac{\dot{m} D}{\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \mu} = 4 \cdot \frac{\dot{m}}{\pi \cdot \mu \cdot D}$$

$$Re = 4 \cdot \frac{\dot{m}}{\pi \cdot \mu \cdot D} = 4 \cdot \frac{1}{\pi \cdot \left(1{,}086 \cdot 10^5\right) \cdot D} = \frac{117.241{,}2}{D}$$

El cálculo del diámetro se realizará aplicando la ecuación para régimen sónico.

$$\dot{m} = \sqrt{\gamma} \cdot \frac{P_{01} \cdot A}{\sqrt{R \cdot T_{01}}} \cdot M_1 \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_1^{\,2} \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \text{ siendo } A = \frac{\pi \cdot D^2}{4},$$

Despejando el diámetro:

$$D^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\dot{m}\sqrt{R \cdot T_{01}}}{P_{01} \cdot \sqrt{\gamma}} \cdot \frac{1}{M_1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Puesto que

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

con lo cual se obtiene:

$$D^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\dot{m}\sqrt{R \cdot T_{01}}}{P_{01} \cdot \sqrt{\gamma}} \cdot \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \frac{A}{A^*}(M_1)$$

Sustituyendo valores:

$$D^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{287 \cdot 641}}{5 \cdot 10^5 \sqrt{1,4}} \cdot \left(\frac{1,4 + 1}{2} \right)^{\frac{1,4+1}{2(1,4-1)}} \cdot \frac{A}{A^*}(M_1)$$

$$D = 0,0399 \sqrt{\frac{A}{A^*}(M_1)}$$

Se conoce, además, que para este apartado:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{0,5 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^5} = 0,1$$

Hipótesis:

Suponiendo que $M_1 = 0,5$, de tablas de flujo isentrópico se obtiene: $\frac{A_1}{A^*} = 1,34$

$$D = 0,0399 \sqrt{1,34} = 0,04618 \text{ m}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Re = \dfrac{117.241,2}{0,04618} = 2.538.370,2 \\ \dfrac{\varepsilon}{D} = \dfrac{0,01 \cdot 10^{-3}}{0,04618} = 2,1 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{Por el diagrama de Moody}$$

$$f = 0,0145 = 4 \cdot C_f$$

$4 \cdot C_f \cdot \frac{L^*}{D} = 0,0145 \cdot \frac{5}{0,04618} = 1,5699$, de las tablas para flujo de Fanno se obtiene $M_1 = 0,45$.

$M_1 = 0,45$ → Fanno $\frac{P_1}{P^*} = 2,3865$

$M_1 = 0,45$ → Flujo isentrópico $\frac{P_1}{P_{01}} = 0,87027$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2^*}{P_{01}} = \frac{\frac{P_1}{P_{01}}}{\frac{P_1}{P^*}} = \frac{0,87027}{2,3865} = 0,36568 > 0,1$$ Se concluye que el flujo está bloqueado.

Es necesario realizar una segunda iteración.

Realizando una media aritmética de M_1 (obtenida y supuesta):

$M_1' = \frac{0,5 + 0,45}{2} = 0,475$ de las tablas para flujo isentrópico; se obtiene $\frac{A}{A^*} = 1,39$

$$D = 0,0399\sqrt{1,39} = 0,04704 \text{ m}$$

$\left\{ \begin{array}{l} Re = 2.492.297,9 \\ \frac{\varepsilon}{D} = 2,12 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\} \Rightarrow$ Por el diagrama de Moody $f = 0,0145$

$$4 \cdot C_f \cdot \frac{L^*}{D} = 0,0145 \cdot \frac{5}{0,04704} = 1,541$$

De las tablas para flujo de Fanno, se determina: $M_1 = 0,451$.

Llegado a este punto, no hace falta seguir, puesto que obtendríamos los mismos valores que en la iteración anterior.

El diámetro del tubo será de D = 0,047 m; el flujo está bloqueado.

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	ρ / ρ_o	A / A*
0,00	0,00000	0,10000+1	0,10000+1	0,10000+1	∞
0,01	0,01095	0,99998+0	0,99993+0	0,99995+0	0,57874+2
0,02	0,02191	0,99992+0	0,99997+0	0,99980+0	0,28942+2
0,03	0,03286	0,99982+0	0,99937+0	0,99955+0	0,19301+2
0,04	0,04381	0,99968+0	0,99888+0	0,99920+0	0,14481+2
0,05	0,05476	0,99950+0	0,99825+0	0,99875+0	0,11591+2
0,06	0,06570	0,99928+0	0,99748+0	0,99820+0	0,96659+1
0,07	0,07664	0,99902+0	0,99658+0	0,99755+0	0,82915+1
0,08	0,08758	0,99872+0	0,99653+0	0,99681+0	0,72616+1
0,09	0,09851	0,99838+0	0,99435+0	0,99596+0	0,64613+1
0,10	0,10944	0,99800+0	0,99303+0	0,99502+0	0,58218+1
0,11	0,12035	0,99759+0	0,99158+0	0,99398+0	0,52992+1
0,12	0,13126	0,99713+0	0,98998+0	0,99284+0	0,48643+1
0,13	0,14217	0,99663+0	0,98826+0	0,99160+0	0,44969+1
0,14	0,15306	0,99610+0	0,98640+0	0,99027+0	0,41824+1
0,15	0,16395	0,99552+0	0,98441+0	0,98884+0	0,39103+1
0,16	0,17482	0,99491+0	0,98228+0	0,98731+0	0,36727+1
0,17	0,18569	0,99425+0	0,98003+0	0,98569+0	0,34635+1
0,18	0,19654	0,99356+0	0,97765+0	0,98398+0	0,32779+1
0,19	0,20739	0,99283+0	0,97514+0	0,98218+0	0,31123+1
0,20	0,21822	0,99206+0	0,97250+0	0,98028+0	0,29635+1
0,21	0,22904	0,99126+0	0,96973+0	0,97829+0	0,28293+1
0,22	0,23984	0,99041+0	0,96685+0	0,97620+0	0,27076+1
0,23	0,25063	0,98953+0	0,96383+0	0,97403+0	0,25968+1
0,24	0,26141	0,98861+0	0,96070+0	0,97177+0	0,24956+1
0,25	0,27217	0,98765+0	0,95745+0	0,96942+0	0,24027+1
0,26	0,28291	0,98666+0	0,95408+0	0,96698+0	0,23173+1
0,27	0,29364	0,98563+0	0,95060+0	0,96446+0	0,22385+1
0,28	0,30435	0,98456+0	0,94700+0	0,96185+0	0,21565+1
0,29	0,31504	0,98346+0	0,94329+0	0,95916+0	0,20979+1

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1{,}4$					
M	M*	t / T_o	p / P_o	ρ / ρ_o	A / A*
0,30	0,32572	0,98232+0	0,93947+0	0,95638+0	0,20351+1
0,31	0,33637	0,98114+0	0,93554+0	0,95352+0	0,19765+1
0,32	0,34701	0,97993+0	0,93150+0	0,95058+0	0,19219+1
0,33	0,35762	0,97868+0	0,92735+0	0,94756+0	0,18707+1
0,34	0,36822	0,97740+0	0,92312+0	0,94446+0	0,18229+1
0,35	0,37879	0,97609+0	0,91877+0	0,94128+0	0,17780+1
0,36	0,38935	0,97473+0	0,91433+0	0,93803+0	0,17358+1
0,37	0,39938	0,97335+0	0,90979+0	0,93470+0	0,16961+1
0,38	0,41039	0,97193+0	0,90516+0	0,93130+0	0,16587+1
0,39	0,42087	0,97048+0	0,90043+0	0,92782+0	0,16234+1
0,40	0,43133	0,96899+0	0,89561+0	0,92427+0	0,15901+1
0,41	0,44177	0,96747+0	0,89071+0	0,92066+0	0,15587+1
0,42	0,45218	0,96592+0	0,88572+0	0,91647+0	0,15289+1
0,43	0,46257	0,96434+0	0,88056+0	0,91322+0	0,15007+1
0,44	0,47293	0,96272+0	0,87550+0	0,90940+0	0,14740+1
0,45	0,48326	0,96108+0	0,87027+0	0,90551+0	0,14487+1
0,46	0,49357	0,95940+0	0,86496+0	0,90157+0	0,14246+1
0,47	0,50385	0,95769+0	0,85958+0	0,89756+0	0,14018+1
0,48	0,51410	0,95595+0	0,85413+0	0,89349+0	0,13801+1
0,49	0,52433	0,95418+0	0,84861+0	0,88936+0	0,13595+1
0,50	0,53452	0,95238+0	0,84302+0	0,88517+0	0,13398+1
0,51	0,54469	0,95055+0	0,83737+0	0,88093+0	0,13212+1
0,52	0,55483	0,94869+0	0,83165+0	0,87663+0	0,13034+1
0,53	0,56493	0,94681+0	0,82588+0	0,87228+0	0,12865+1
0,54	0,57501	0,94489+0	0,82005+0	0,86788+0	0,12703+1
0,55	0,58506	0,94295+0	0,81417+0	0,86342+0	0,12549+1
0,56	0,59507	0,94098+0	0,80823+0	0,85892+0	0,12403+1
0,57	0,60505	0,93898+0	0,80824+0	0,85437+0	0,12263+1
0,58	0,61501	0,93696+0	0,79621+0	0,84978+0	0,12130+1
0,59	0,62492	0,93491+0	0,79013+0	0,84514+0	0,12003+1

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	ρ / ρ_o	A / A*
0,60	0,63491	0,93284+0	0,78400+0	0,84045+0	0,11882+1
0,61	0,64466	0,93073+0	0,77784+0	0,83573+0	0,11767+1
0,62	0,65448	0,92861+0	0,77164+0	0,83096+0	0,11656+1
0,63	0,66427	0,92646+0	0,76540+0	0,82616+0	0,11552+1
0,64	0,67402	0,92428+0	0,75913+0	0,82132+0	0,11451+1
0,65	0,68374	0,92208+0	0,75283+0	0,81644+0	0,11356+1
0,66	0,69342	0,91986+0	0,74650+0	0,81153+0	0,11256+1
0,67	0,70307	0,91762+0	0,74014+0	0,80659+0	0,11179+1
0,68	0,71268	0,91535+0	0,73376+0	0,80162+0	0,11097+1
0,69	0,72225	0,91305+0	0,72735+0	0,79661+0	0,11018+1
0,70	0,73179	0,91075+0	0,72093+0	0,79158+0	0,10944+1
0,71	0,74129	0,90841+0	0,71448+0	0,78652+0	0,10873+1
0,72	0,75076	0,90606+0	0,70803+0	0,78143+0	0,10806+1
0,73	0,76019	0,90369+0	0,70155+0	0,77632+0	0,10742+1
0,74	0,76958	0,90129+0	0,69507+0	0,77119+0	0,10681+1
0,75	0,77894	0,89888+0	0,68859+0	0,76604+0	0,10624+1
0,76	0,78825	0,89644+0	0,68207+0	0,76086+0	0,10570+1
0,77	0,79753	0,89399+0	0,67556+0	0,75567+0	0,10519+1
0,78	0,80677	0,89152+0	0,66905+0	0,75046+0	0,10471+1
0,79	0,81597	0,88903+0	0,66254+0	0,74523+0	0,10425+1
0,80	0,82514	0,88652+0	0,65602+0	0,73999+0	0,10382+1
0,81	0,83426	0,88400+0	0,64951+0	0,73474+0	0,10342+1
0,82	0,84335	0,88146+0	0,64300+0	0,72947+0	0,10305+1
0,83	0,85239	0,87898+0	0,63650+0	0,72419+0	0,10270+1
0,84	0,86140	0,87633+0	0,63000+0	0,71891+0	0,10237+1
0,85	0,87037	0,87374+0	0,62351+0	0,71361+0	0,10207+1
0,86	0,87929	0,87114+0	0,61703+0	0,70831+0	0,10179+1
0,87	0,88818	0,85852+0	0,61057+0	0,70300+0	0,10153+1
0,88	0,89703	0,86589+0	0,60412+0	0,69768+0	0,10129+1
0,89	0,90583	0,86324+0	0,59768+0	0,69236+0	0,10108+1

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1{,}4$					
M	M*	t / T_o	p / P_o	ρ / ρ_o	A / A*
0,90	0,91460	0,86059+0	0,59126+0	0,68704+0	0,10089+1
0,91	0,92333	0,85791+0	0,58486+0	0,68172+0	0,10071+1
0,92	0,93201	0,85523+0	0,57848+0	0,67640+0	0,10056+1
0,93	0,94065	0,85253+0	0,57211+0	0,67108+0	0,10043+1
0,94	0,94925	0,84982+0	0,56578+0	0,66576+0	0,10031+1
0,95	0,95781	0,84710+0	0,55946+0	0,66044+0	0,10021+1
0,96	0,96633	0,84437+0	0,55317+0	0,65513+0	0,10014+1
0,97	0,97481	0,84162+0	0,54691+0	0,64982+0	0,10008+1
0,98	0,98325	0,83887+0	0,54067+0	0,64452+0	0,10003+1
0,99	0,99165	0,83611+0	0,53446+0	0,63923+0	0,10001+1
1,00	1,00000	0,83333+0	0,52828+0	0,63394+0	0,10000+1
1,01	1,00831	0,83055+0	0,52213+0	0,62866+0	0,10001+1
1,02	1,01658	0,82776+0	0,51602+0	0,62339+0	0,10003+1
1,03	1,02481	0,82496+0	0,50994+0	0,61813+0	0,10007+1
1,04	1,03300	0,82215+0	0,50389+0	0,61289+0	0,10013+1
1,05	1,04114	0,81934+0	0,49787+0	0,60775+0	0,10020+1
1,06	1,04925	0,81651+0	0,49189+0	0,60243+0	0,10029+1
1,07	1,05731	0,81368+0	0,48595+0	0,59722+0	0,10039+1
1,08	1,06533	0,81085+0	0,48005+0	0,59203+0	0,10059+1
1,09	1,07331	0,80800+0	0,47418+0	0,58686+0	0,10064+1
1,10	1,08124	0,80515+0	0,46835+0	0,58170+0	0,10079+1
1,11	1,08913	0,80230+0	0,46257+0	0,57655+0	0,10095+1
1,12	1,09699	0,79944+0	0,45682+0	0,57143+0	0,10113+1
1,13	1,10479	0,79657+0	0,45111+0	0,56632+0	0,10132+1
1,14	1,11256	0,79370+0	0,44545+0	0,56123+0	0,10153+1
1,15	1,12029	0,79083+0	0,43983+0	0,55616+0	0,10175+1
1,16	1,12797	0,78795+0	0,43425+0	0,55112+0	0,10189+1
1,17	1,13561	0,78506+0	0,42872+0	0,54609+0	0,10222+1
1,18	1,14321	0,78218+0	0,42322+0	0,54108+0	0,10248+1
1,19	1,15077	0,77929+0	0,41778+0	0,53610+0	0,10276+1

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	ρ / ρ_o	A / A*
1,20	1,15828	0,77640+0	0,41238+0	0,53114+0	0,10304+1
1,21	1,15575	0,77350+0	0,40702+0	0,52620+0	0,10334+1
1,22	1,17319	0,77061+0	0,40171+0	0,52129+0	0,10366+1
1,23	1,18057	0,76771+0	0,39645+0	0,51640+0	0,10398+1
1,24	1,18792	0,76481+0	0,39123+0	0,51154+0	0,10432+1
1,25	1,19523	0,76190+0	0,38606+0	0,50670+0	0,10468+1
1,26	1,20249	0,75900+0	0,38093+0	0,50189+0	0,10504+1
1,27	1,20972	0,75610+0	0,37586+0	0,49710+0	0,10542+1
1,28	1,21690	0,75319+0	0,37083+0	0,49234+0	0,10581+1
1,29	1,22404	0,75029+0	0,36585+0	0,48761+0	0,10621+1
1,30	1,23114	0,74738+0	0,36091+0	0,48290+0	0,10663+1
1,31	1,23819	0,74448+0	0,35603+0	0,47822+0	0,10706+1
1,32	1,24521	0,74158+0	0,35119+0	0,47357+0	0,10750+1
1,33	1,25218	0,73867+0	0,34640+0	0,46895+0	0,10796+1
1,34	1,25912	0,73577+0	0,34166+0	0,46436+0	0,10842+1
1,35	1,26601	0,73287+0	0,33697+0	0,45980+0	0,10890+1
1,36	1,27286	0,72997+0	0,33233+0	0,45526+0	0,10940+1
1,37	1,27968	0,72707+0	0,32773+0	0,45076+0	0,10990+1
1,38	1,28645	0,72418+0	0,32319+0	0,44628+0	0,11042+1
1,39	1,29318	0,72128+0	0,31869+0	0,44184+0	0,11095+1
1,40	1,29987	0,71839+0	0,31424+0	0,43742+0	0,11149+1
1,41	1,30652	0,71550+0	0,30984+0	0,43304+0	0,11205+1
1,42	1,31313	0,75262+0	0,30549+0	0,42869+0	0,11262+1
1,43	1,31970	0,70973+0	0,30118+0	0,42436+0	0,11320+1
1,44	1,32623	0,70685+0	0,29693+0	0,42007+0	0,11379+1
1,45	1,33272	0,70398+0	0,29272+0	0,41581+0	0,11440+1
1,46	1,33917	0,70110+0	0,28856+0	0,41158+0	0,11501+1
1,47	1,34558	0,69824+0	0,28445+0	0,40739+0	0,11565+1
1,48	1,35195	0,69537+0	0,28039+0	0,40322+0	0,11629+1
1,49	1,35828	0,69251+0	0,27637+0	0,39909+0	0,11695+1

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1{,}4$					
M	M*	t / To	p / Po	ρ / ρ_o	A / A*
1,50	1,36458	0,68966+0	0,27240+0	0,39948+0	0,11762+1
1,51	1,37083	0,68680+0	0,26848+0	0,39091+0	0,11830+1
1,52	1,37705	0,68396+0	0,26491+0	0,38688+0	0,11899+1
1,53	1,38322	0,68111+0	0,26078+0	0,38287+0	0,11977+1
1,54	1,38936	0,67828+0	0,25700+0	0,37890+0	0,12042+1
1,55	1,39546	0,67545+0	0,25326+0	0,37495+0	0,12116+1
1,56	1,40152	0,67262+0	0,24957+0	0,37105+0	0,12190+1
1,57	1,40755	0,66980+0	0,24593+0	0,36717+0	0,12266+1
1,58	1,41353	0,66699+0	0,24233+0	0,36332+0	0,12344+1
1,59	1,41948	0,66418+0	0,23878+0	0,35951+0	0,12422+1
1,60	1,42539	0,66138+0	0,23527+0	0,35573+0	0,12502+1
1,61	1,43127	0,65858+0	0,23181+0	0,35198+0	0,12584+1
1,62	1,43710	0,65579+0	0,22839+0	0,34827+0	0,12666+1
1,63	1,44290	0,65301+0	0,22501+0	0,34458+0	0,12750+1
1,64	1,44866	0,65023+0	0,22168+0	0,34093+0	0,12836+1
1,65	1,45439	0,64746+0	0,21839+0	0,33731+0	0,12922+1
1,66	1,46008	0,64470+0	0,21515+0	0,33372+0	0,13010+1
1,67	1,46573	0,64194+0	0,21195+0	0,33017+0	0,13100+1
1,68	1,47135	0,63919+0	0,20879+0	0,32664+0	0,13190+1
1,69	1,47693	0,63645+0	0,20567+0	0,32315+0	0,13283+1
1,70	1,48247	0,63371+0	0,20259+0	0,31969+0	0,13376+1
1,71	1,48798	0,63099+0	0,19956+0	0,31626+0	0,13471+1
1,72	1,49345	0,62827+0	0,19656+0	0,31287+0	0,13567+1
1,73	1,49889	0,62556+0	0,19361+0	0,30950+0	0,13665+1
1,74	1,50429	0,62285+0	0,19070+0	0,30617+0	0,13764+1
1,75	1,50966	0,62016+0	0,18782+0	0,30287+0	0,13865+1
1,76	1,51499	0,61747+0	0,18499+0	0,29959+0	0,13967+1
1,77	1,52029	0,61479+0	0,18219+0	0,29635+0	0,14070+1
1,78	1,52555	0,61211+0	0,17944+0	0,29315+0	0,14176+1
1,79	1,53078	0,60945+0	0,17672+0	0,28997+0	0,14281+1

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	ρ / ρ_o	A / A*
1,80	1,53598	0,60680+0	0,17404+0	0,28682+0	0,14390+1
1,81	1,54114	0,60415+0	0,17140+0	0,28370+0	0,14499+1
1,82	1,54626	0,60151+0	0,16879+0	0,28061+0	0,14610+1
1,83	1,55136	0,59888+0	0,16622+0	0,27756+0	0,14723+1
1,84	1,55642	0,59626+0	0,16369+0	0,27453+0	0,14836+1
1,85	1,56145	0,59365+0	0,16119+0	0,27153+0	0,14952+1
1,86	1,56640	0,59104+0	0,15873+0	0,26857+0	0,15069+1
1,87	1,57140	0,58845+0	0,15631+0	0,26563+0	0,15187+1
1,88	1,57639	0,58586+0	0,15392+0	0,26272+0	0,15308+1
1,89	1,58123	0,58329+0	0,15156+0	0,25984+0	0,15429+1
1,90	1,58609	0,58072+0	0,14924+0	0,25699+0	0,15553+1
1,91	1,59092	0,57816+0	0,14695+0	0,25417+0	0,15677+1
1,92	1,59572	0,57561+0	0,14470+0	0,25138+0	0,15804+1
1,93	1,60049	0,57307+0	0,14247+0	0,24861+0	0,15932+1
1,94	1,60523	0,57054+0	0,14028+0	0,24588+0	0,16062+1
1,95	1,60993	0,56802+0	0,13813+0	0,24317+0	0,16193+1
1,96	1,6146	0,56551+0	0,13600+0	0,24049+0	0,16326+1
1,97	1,61925	0,56301+0	0,13390+0	0,23784+0	0,16461+1
1,98	1,62385	0,56051+0	0,13184+0	0,23521+0	0,16597+1
1,99	1,62844	0,55803+0	0,12981+0	0,23652+0	0,16735+1
2,00	1,63299	0,55556+0	0,12780+0	0,23005+0	0,16875+1
2,02	1,64201	0,55064+0	0,12389+0	0,22499+0	0,17160+1
2,04	1,65090	0,54576+0	0,12009+0	0,22004+0	0,17451+1
2,06	1,65967	0,54091+0	0,11640+0	0,21519+0	0,17750+1
2,08	1,66833	0,53611+0	0,11282+0	0,21045+0	0,18056+1
2,10	1,67687	0,53135+0	0,10935+0	0,20580+0	0,18369+1
2,12	1,68530	0,52663+0	0,10599+0	0,20126+0	0,18690+1
2,14	1,69392	0,52194+0	0,10273+0	0,19681+0	0,19018+1
2,16	1,70183	0,51730+0	0,99562 -1	0,19247+0	0,19354+1
2,18	1,70992	0,51269+0	0,96495 -1	0,18821+0	0,19698+1

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1{,}4$					
M	M*	t / To	p / Po	ρ / ρ_o	A / A*
2,20	1,71791	0,50813+0	0,93622 -1	0,18405+0	0,20050+1
2,22	1,72579	0,50361+0	0,90640 -1	0,17998+0	0,20409+1
2,24	1,73357	0,49912+0	0,87846 -1	0,17600+0	0,20777+1
2,26	1,74125	0,49468+0	0,85139 -1	0,17211+0	0,21153+1
2,28	1,74882	0,49027+0	0,82515 -1	0,16830+0	0,21538+1
2,30	1,75629	0,48591+0	0,79973 -1	0,16458+0	0,21931+1
2,32	1,76366	0,48158+0	0,77509 -1	0,16095+0	0,22333+1
2,34	1,77093	0,47730+0	0,75122 -1	0,15739+0	0,22744+1
2,36	1,77811	0,47305+0	0,72810 -1	0,15391+0	0,23164+1
2,38	1,78519	0,46885+0	0,70570 -1	0,15052+0	0,23593+1
2,40	1,79218	0,46468+0	0,68399 -1	0,14720+0	0,24031+1
2,42	1,79907	0,46056+0	0,66297 -1	0,14395+0	0,24479+1
2,44	1,80587	0,45647+0	0,64261 -1	0,14078+0	0,24936+1
2,46	1,81256	0,45242+0	0,62288 -1	0,13768+0	0,25403+1
2,48	1,81921	0,44841+0	0,60378 -1	0,13465+0	0,25880+1
2,50	1,82574	0,44444+0	0,58528 -1	0,13169+0	0,25637+1
2,52	1,83219	0,44051+0	0,56736 -1	0,12879+0	0,26865+1
2,54	1,83585	0,43662+0	0,55000 -1	0,12597+0	0,27372+1
2,56	1,84483	0,43277+0	0,53319 -1	0,12321+0	0,27891+1
2,58	1,85103	0,42895+0	0,51692 -1	0,12051+0	0,28420+1
2,60	1,85714	0,42517+0	0,50115 -1	0,11787+0	0,28960+1
2,62	1,86318	0,42143+0	0,48598 -1	0,11530+0	0,29511+1
2,64	1,86913	0,41772+0	0,47110 -1	0,11278+0	0,30073+1
2,66	1,87501	0,41406+0	0,45679 -1	0,11032+0	0,30647+1
2,68	1,88081	0,41043+0	0,44282 -1	0,10792+0	0,31233+1
2,70	1,88653	0,40683+0	0,42950 -1	0,10557+0	0,31830+1
2,72	1,89218	0,40328+0	0,45650 -1	0,10328+0	0,32440+1
2,74	1,89775	0,39976+0	0,40391 -1	0,10104+0	0,32061+1
2,76	1,90325	0,39627+0	0,39172 -1	0,98851 -1	0,33695+1
2,78	1,90868	0,39282+0	0,37992 -1	0,96714 -1	0,34342+1

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1{,}4$					
M	M*	t / To	p / Po	ρ / ρ_o	A / A*
2,80	1,91404	0,38941+0	0,36848 -1	0,94626 -1	0,35001+1
2,82	1,91933	0,38603+0	0,35741 -1	0,92587 -1	0,35674+1
2,84	1,92455	0,38268+0	0,34669 -1	0,90594 -1	0,36359+1
2,86	1,92970	0,37937+0	0,33631 -1	0,88648 -1	0,37058+1
2,88	1,93479	0,37610+0	0,32625 -1	0,86747 -1	0,37771+1
2,90	1,93981	0,37286+0	0,31651 -1	0,84886 -1	0,38498+1
2,92	1,94477	0,36965+0	0,30708 -1	0,83075 -1	0,39238+1
2,94	1,94966	0,36647+0	0,29795 -1	0,81302 -1	0,39993+1
2,96	1,95449	0,36333+0	0,28910 -1	0,79571 -1	0,40763+1
2,98	1,95925	0,36022+0	0,28054 -1	0,77879 -1	0,41547+1
3,00	1,96396	0,35714+0	0,27224 -1	0,76226 -1	0,42346+1
3,10	1,98661	0,34223+0	0,23449 -1	0,68517 -1	0,46573+1
3,20	2,00786	0,32808+0	0,20228 -1	0,61654 -1	0,51210+1
3,30	2,02781	0,31466+0	0,17477 -1	0,55541 -1	0,56286+1
3,40	2,04656	0,30193+0	0,15125 -1	0,50093 -1	0,61837+1
3,50	2,06419	0,28986+0	0,13111 -1	0,45233 -1	0,67896+1
3,60	2,08077	0,27840+0	0,11385 -1	0,40894 -1	0,74501+1
3,70	2,09639	0,26752+0	0,99029 -2	0,37017 -1	0,81691+1
3,80	2,11111	0,25720+0	0,86290 -2	0,33549 -1	0,89506+1
3,90	2,12499	0,24740+0	0,75320 -2	0,30445 -1	0,97990+1
4,00	2,13809	0,23810+0	0,65861 -2	0,27662 -1	0,10719+2
4,10	2,15046	0,22925+0	0,57690 -2	0,25164 -1	0,11715+2
4,20	2,16215	0,22085+0	0,50621 -2	0,22921 -1	0,12792+2
4,30	2,17321	0,21286+0	0,44494 -2	0,20903 -1	0,13955+2
4,40	2,18368	0,20525+0	0,39176 -2	0,19087 -1	0,15210+2
4,50	2,19360	0,19802+0	0,34553 -2	0,17449 -1	0,16562+2
4,60	2,20300	0,19113+0	0,30526 -2	0,15971 -1	0,18018+2
4,70	2,21192	0,18457+0	0,27012 -2	0,14635 -1	0,19583+2
4,80	2,22038	0,17832+0	0,23943 -2	0,13427 -1	0,21264+2
4,90	2,22842	0,17235+0	0,21256 -2	0,12333 -1	0,23067+2

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1{,}4$					
M	M*	t / To	p / Po	ρ / ρ_o	A / A*
5,00	2,23607	0,16667+0	0,18900 -2	0,11340 -1	0,25000+2
5,10	2,24334	0,16124+0	0,16832 -2	0,10439 -1	0,27070+2
5,20	2,25026	0,15605+0	0,15013 -2	0,96204 -2	0,29283+2
5,30	2,26685	0,15110+0	0,13411 -2	0,88753 -2	0,31649+2
5,40	2,26313	0,14637+0	0,11997 -2	0,81965 -2	0,34175+2
5,50	2,26913	0,14184+0	0,10748 -2	0,75775 -2	0,36869+2
5,60	2,27487	0,13751+0	0,96430 -3	0,70124 -2	0,39740+2
5,70	2,28030	0,13337+0	0,86635 -3	0,64959 -2	0,42797+2
5,80	2,28552	0,12940+0	0,77941 -3	0,60233 -2	0,46050+2
5,90	2,29051	0,12650+0	0,70214 -3	0,55904 -2	0,49507+2
6,00	2,29528	0,12195+0	0,63336 -3	0,51936 -2	0,53180+2
6,50	2,31626	0,10582+0	0,38547 -3	0,36427 -2	0,75134+2
7,00	2,33333	0,92593 -1	0,24156 -3	0,26088 -2	0,10414+3
7,50	2,34738	0,81633 -1	0,15549 -3	0,19040 -2	0,14184+3
8,00	2,35907	0,72464 -1	0,10243 -3	0,14135 -2	0,19011+3
8,50	2,36899	0,64725 -1	0,68984 -4	0,10658 -2	0,25109+3
9,00	2,37722	0,58140 -1	0,47386 -4	0,81504 -3	0,32719+3
9,50	2,38433	0,52493 -1	0,33141 -4	0,63134 -3	0,42113+3
10,00	2,39046	0,47619 -1	0,23563 -4	0,49483 -3	0,53594+3
11,00	2,40040	0,39683 -1	0,12448 -4	0,31369 -3	0,84191+3
12,00	2,40804	0,33557 -1	0,69222 -5	0,20628 -3	0,12762+4
13,00	2,41404	0,28736 -1	0,40223 -5	0,13998 -3	0,18761+4
14,00	2,41883	0,24876 -1	0,24278 -5	0,97597 -4	0,26854+4
15,00	2,42272	0,21739 -1	0,15148 -5	0,69680 -4	0,37552+4
16,00	2,42591	0,19157 -1	0,97309 -6	0,50795 -4	0,51446+4
17,00	2,42857	0,17007 -1	0,64147 -6	0,37719 -4	0,69205+4
18,00	2,43081	0,15198 -1	0,43272 -6	0,28473 -4	0,91593+4
19,00	2,4327	0,13661 -1	0,29800 -6	0,21813 -4	0,11946+5
20,00	2,43432	0,12346 -1	0,20908 -6	0,16935 -4	0,15377+5
∞	2,44949	0	0	0	∞

Tabla para flujo de Fanno $\gamma = 1{,}4$ (Flujo adiabático)					
M	M*=ρ*/ ρo	t / t*	p / p*	P /P*	(4fL*)/D
0,00	0,00000	0,12000+1	∞	∞	∞
0,01	0,01095	0,12000+1	0,10954+3	0,57874+2	0,71344+4
0,02	0,02191	0,11999+1	0,54770+2	0,28942+2	0,17784+4
0,03	0,03286	0,11998+1	0,36512+2	0,19301+2	0,78708+3
0,04	0,04381	0,11996+1	0,27382+2	0,14481+2	0,44035+3
0,05	0,05476	0,11994+1	0,21903+2	0,11591+2	0,28002+3
0,06	0,06570	0,11991+1	0,18251+2	0,96659+1	0,19303+3
0,07	0,07664	0,11988+1	0,15642+2	0,82915+1	0,14066+3
0,08	0,08758	0,11985+1	0,13684+2	0,72616+1	0,10672+3
0,09	0,09851	0,11981+1	0,12162+2	0,64613+1	0,83496+2
0,10	0,10944	0,11976+1	0,10944+2	0,58218+1	0,66922+2
0,11	0,12035	0,11971+1	0,99466+1	0,52992+1	0,54688+2
0,12	0,13126	0,11966+1	0,91156+1	0,48643+1	0,54408+2
0,13	0,14217	0,11960+1	0,84123+1	0,44969+1	0,38207+2
0,14	0,15306	0,11953+1	0,78093+1	0,41824+1	0,32511+2
0,15	0,16395	0,11946+1	0,72866+1	0,39103+1	0,27932+2
0,16	0,17482	0,11939+1	0,68291+1	0,36727+1	0,24198+2
0,17	0,18569	0,11931+1	0,64253+1	0,34635+1	0,21115+2
0,18	0,19654	0,11923+1	0,60662+1	0,32779+1	0,18543+2
0,19	0,20739	0,11914+1	0,57448+1	0,31123+1	0,16375+2
0,20	0,21822	0,11905+1	0,54554+1	0,29635+1	0,14533+2
0,21	0,22904	0,11895+1	0,51936+1	0,28293+1	0,12956+2
0,22	0,23984	0,11885+1	0,49554+1	0,27076+1	0,11596+2
0,23	0,25063	0,11874+1	0,47378+1	0,25968+1	0,10416+2
0,24	0,26141	0,11863+1	0,45383+1	0,24956+1	0,93865+1
0,25	0,27217	0,11852+1	0,43546+1	0,24027+1	0,84834+1
0,26	0,28291	0,11840+1	0,41851+1	0,23173+1	0,76876+1
0,27	0,29364	0,11828+1	0,40279+1	0,22385+1	0,69832+1
0,28	0,30435	0,11815+1	0,38819+1	0,21656+1	0,63572+1

Tabla para flujo de Fanno $\gamma = 1{,}4$ (Flujo adiabático)					
M	M*=ρ*/ ρo	t / t*	p / p*	P /P*	(4fL*)/D
0,29	0,31504	0,11801+1	0,37459+1	0,20979+1	0,57989+1
0,30	0,32572	0,11788+1	0,36191+1	0,20351+1	0,52993+1
0,31	0,33637	0,11774+1	0,35002+1	0,19765+1	0,48507+1
0,32	0,34701	0,11759+1	0,35887+1	0,19219+1	0,44467+1
0,33	0,35762	0,11744+1	0,32839+1	0,18707+1	0,40821+1
0,34	0,32822	0,11729+1	0,31853+1	0,18229+1	0,37519+1
0,35	0,37879	0,11713+1	0,30922+1	0,17779+1	0,34525+1
0,36	0,38935	0,11697+1	0,30042+1	0,17358+1	0,31801+1
0,37	0,39988	0,11680+1	0,29209+1	0,16961+1	0,29319+1
0,38	0,41039	0,11663+1	0,28419+1	0,16587+1	0,27054+1
0,39	0,42087	0,11646+1	0,27671+1	0,16234+1	0,24983+1
0,40	0,43133	0,11628+1	0,26958+1	0,15901+1	0,23085+1
0,41	0,44177	0,11610+1	0,26279+1	0,15587+1	0,21344+1
0,42	0,45218	0,11591+1	0,25634+1	0,15289+1	0,19744+1
0,43	0,46257	0,11572+1	0,25017+1	0,15007+1	0,18272+1
0,44	0,47293	0,11553+1	0,24428+1	0,14739+1	0,16915+1
0,45	0,48326	0,11533+1	0,23865+1	0,14487+1	0,15664+1
0,46	0,49357	0,11513+1	0,23326+1	0,14246+1	0,14509+1
0,47	0,50385	0,11492+1	0,22809+1	0,14018+1	0,13441+1
0,48	0,51410	0,11471+1	0,22313+1	0,13801+1	0,12353+1
0,49	0,52433	0,11450+1	0,21838+1	0,13595+1	0,11539+1
0,50	0,53452	0,11429+1	0,21381+1	0,13398+1	0,10691+1
0,52	0,55483	0,11384+1	0,20519+1	0,13034+1	0,91742+0
0,54	0,57501	0,11339+1	0,19719+1	0,12703+1	0,78663+0
0,56	0,59507	0,11292+1	0,18975+1	0,12403+1	0,67357+0
0,58	0,61501	0,11244+1	0,18282+1	0,12129+1	0,57568+0
0,60	0,63481	0,11194+1	0,17634+1	0,11882+1	0,49082+0
0,62	0,65448	0,11143+1	0,17026+1	0,11656+1	0,41719+0
0,64	0,67402	0,11091+1	0,16456+1	0,11451+1	0,3533+0
0,66	0,69342	0,11038+1	0,15919+1	0,11256+1	0,29785+0

Tabla para flujo de Fanno $\gamma=1,4$ (Flujo adiabático)					
M	M*=ρ*/ ρo	t / t*	p / p*	P /P*	(4fL*)/D
0,68	0,71268	0,10984+1	0,15913+1	0,11097+1	0,24978+0
0,70	0,73179	0,10929+1	0,14935+1	0,10944+1	0,20814+0
0,72	0,75076	0,10873+1	0,14482+1	0,10806+1	0,17215+0
0,74	0,76958	0,10815+1	0,14054+1	0,10681+1	0,14112+0
0,76	0,78825	0,10757+1	0,13647+1	0,10569+1	0,11447+0
0,78	0,80677	0,10698+1	0,13261+1	0,10147+1	0,91675 -1
0,80	0,82514	0,10638+1	0,12893+1	0,10382+1	0,72289 -1
0,82	0,84335	0,10578+1	0,12542+1	0,10305+1	0,55932 -1
0,84	0,86140	0,10516+1	0,12208+1	0,10237+1	0,42256 -1
0,86	0,87929	0,10454+1	0,11989+1	0,10179+1	0,30965 -1
0,88	0,89703	0,10391+1	0,11583+1	0,10129+1	0,21795 -1
0,90	0,91460	0,10327+1	0,11251+1	0,10089+1	0,14512 -1
0,92	0,93201	0,10263+1	0,11011+1	0,10056+1	0,89133 -2
0,94	0,94925	0,10198+1	0,10743+1	0,10031+1	0,48154 -2
0,96	0,96633	0,10132+1	0,10485+1	0,10014+1	0,20571 -2
0,98	0,98325	0,10066+1	0,10238+1	0,10003+1	0,49469 -3
1,00	1,00000	0,10000+1	0,10000+1	0,10000+1	0,0
1,02	1,01658	0,99331+0	0,97711+0	0,10003+1	0,45869 -3
1,04	1,03300	0,98658+0	0,95507+0	0,10013+1	0,17685 -2
1,06	1,04925	0,97982+0	0,93383+0	0,10029+1	0,38379 -2
1,08	1,06533	0,97302+0	0,91335+0	0,10051+1	0,65846 -2
1,10	1,08124	0,96618+0	0,89359+0	0,10079+1	0,99349 -2
1,12	1,09699	0,95932+0	0,87451+0	0,10113+1	0,13823 -1
1,14	1,11256	0,95244+0	0,85608+0	0,10153+1	0,18188 -1
1,16	1,12797	0,94554+0	0,83826+0	0,10198+1	0,22977 -1
1,18	1,14321	0,93861+0	0,82103+0	0,10248+1	0,28142 -1
1,20	1,15828	0,93168+0	0,80436+0	0,10304+1	0,33638 -1
1,22	1,17319	0,92473+0	0,78822+0	0,10366+1	0,39426 -1
1,24	1,18792	0,91777+0	0,77258+0	0,10432+1	0,45471 -1

Tabla para flujo de Fanno $\gamma = 1{,}4$ (Flujo adiabático)					
M	M*=ρ*/ ρo	t / t*	p / p*	P /P*	(4fL*)/D
1,26	1,20249	0,91080+0	0,75743+0	0,10504+1	0,51739 -1
1,28	1,21690	0,90383+0	0,74274+0	0,10581+1	0,58201 -1
1,30	1,23114	0,89686+0	0,72848+0	0,10663+1	0,64832 -1
1,32	1,24521	0,88989+0	0,71465+0	0,10749+1	0,71607 -1
1,34	1,25912	0,88292+0	0,70122+0	0,10842+1	0,78504 -1
1,36	1,27286	0,87596+0	0,68818+0	0,10939+1	0,85503 -1
1,38	1,28645	0,86901+0	0,67751+0	0,11042+1	0,92586 -1
1,40	1,29987	0,86207+0	0,66319+0	0,11149+1	0,99738 -1
1,42	1,31313	0,85514+0	0,65122+0	0,11262+1	0,10694+0
1,44	1,32623	0,84822+0	0,63958+0	0,11379+1	0,11419+0
1,46	1,33917	0,84133+0	0,62825+0	0,11501+1	0,12146+0
1,48	1,35195	0,83445+0	0,61722+0	0,11629+1	0,12875+0
1,50	1,36458	0,82759+0	0,60648+0	0,11762+1	0,13605+0
1,55	1,39546	0,81054+0	0,58084+0	0,12116+1	0,15427+0
1,60	1,42539	0,79365+0	0,55679+0	0,12502+1	0,17236+0
1,65	1,45439	0,77695+0	0,53421+0	0,12922+1	0,19023+0
1,70	1,48247	0,76046+0	0,51297+0	0,13376+1	0,20779+0
1,75	1,50966	0,74419+0	0,49295+0	0,13865+1	0,22504+0
1,80	1,53598	0,72816+0	0,47407+0	0,14389+1	0,24189+0
1,85	1,55145	0,71838+0	0,45623+0	0,14952+1	0,25832+0
1,90	1,58609	0,69686+0	0,43936+0	0,15553+1	0,27433+0
1,95	1,60993	0,68162+0	0,42339+0	0,16193+1	0,28989+0
2,00	1,63299	0,66667+0	0,40825+0	0,16875+1	0,30500+0
2,10	1,67687	0,63762+0	0,38024+0	0,18369+1	0,33785+0
2,20	1,71791	0,60979+6	0,35494+0	0,20049+1	0,36091+0
2,30	1,75629	0,68309+0	0,33200+0	0,21931+1	0,38623+0
2,40	1,79218	0,55762+0	0,31114+0	0,24031+1	0,40989+0
2,50	1,82574	0,53333+0	0,29212+0	0,26367+1	0,43198+0
2,60	1,85714	0,51020+0	0,27473+0	0,28959+1	0,45259+0
2,70	1,88653	0,48820+0	0,25878+0	0,31829+1	0,47182+0
2,80	1,91404	0,46729+0	0,24414+0	0,35001+1	0,48976+0

Tabla para flujo de Fanno γ=1,4 (Flujo adiabático)					
M	M*=ρ*/ ρo	t / t*	p / p*	P /P*	(4fL*)/D
2,90	1,93981	0,44743+0	0,23066+0	0,38498+1	0,50652+0
3,00	1,96396	0,42857+0	0,21822+0	0,42346+1	0,52216+0
3,10	1,98661	0,41068+0	0,20672+0	0,46573+1	0,53678+0
3,20	2,00786	0,39370+0	0,19608+0	0,51209+1	0,55044+0
3,30	2,02781	0,37760+0	0,18621+0	0,56286+1	0,56323+0
3,40	2,04656	0,36232+0	0,17704+0	0,61837+1	0,57521+0
3,50	2,06419	0,34783+0	0,16851+0	0,67896+1	0,58643+0
3,60	2,08077	0,33408+0	0,16055+0	0,74701+1	0,59695+0
3,70	2,09639	0,32103+0	0,15313+0	0,81691+1	0,60684+0
3,80	2,11111	0,30864+0	0,14620+0	0,89506+1	0,61612+0
3,90	2,12499	0,29688+0	0,13971+0	0,97989+1	0,62485+0
4,00	2,13809	0,28571+0	0,13363+0	0,10719+2	0,63306+0
4,50	2,19359	0,23762+0	0,10833+0	0,16562+2	0,66763+0
5,00	2,23607	0,20000+0	0,89443 -1	0,25000+2	0,69379+0
5,50	2,26913	0,17021+0	0,75012 -1	0,36869+2	0,71700+0
6,00	2,29528	0,14634+0	0,63758 -1	0,53180+2	0,72988+0
6,50	2,31626	0,12698+0	0,54823 -1	0,75134+2	0,74254+0
7,00	2,33333	0,11111+0	0,47619 -1	0,10414+3	0,75279+0
7,50	2,34738	0,97959 -1	0,41731 -1	0,14184+3	0,76121+0
8,00	2,35907	0,86957 -1	0,36860 -1	0,19011+3	0,76819+0
8,50	2,36889	0,77670 -1	0,32787 -1	0,25109+3	0,77404+0
9,00	2,37722	0,69767 -1	0,29348 -1	0,32719+3	0,77899+0
9,50	2,38433	0,62992 -1	0,26419 -1	0,42113+3	0,78319+0
10,00	2,39046	0,57143 -1	0,23905 -1	0,53594+3	0,78683+0
11,00	2,40039	0,47619 -1	0,19838 -1	0,84191+3	0,79270+0
12,00	2,40804	0,40268 -1	0,16723 -1	0,12762+4	0,79721+0
13,00	2,41404	0,34483 -1	0,14284 -1	0,18761+4	0,80074+0
14,00	2,41883	0,29851 -1	0,12341 -1	0,26854+4	0,80356+0
15,00	2,42272	0,26087 -1	0,10768 -1	0,37552+4	0,80584+0
∞	2,44949	0,0	0,0	∞	0,82151+0

Problema 99

Enunciado

Supóngase que se quiere medir la presión y/o velocidad de una corriente de fluido al pasar alrededor de un cuerpo. En general, lo que se hace es realizar un colectivo de pequeños agujeros en la zona donde se quiere realizar la medición. Dichos agujeros son conectados individualmente a sendos sensores de presión mediante un pequeño conducto. Si las mediciones son estáticas, el sistema no conlleva ningún problema, pero si existen fluctuaciones de presión, por ejemplo para el caso en que se quiera medir flujo turbulento, entonces, la longitud de la línea de transmisión (conducto) puede hacer que en la zona donde se encuentra el transductor de presión, la amplitud y la fase de la perturbación no sean las mismas que las que existen en el fluido situado en el otro extremo del conducto, es decir, no se mide lo que en realidad sucede. Con el fin de evitar, en la medida de lo posible esta variación de amplitud y desfase de la onda de presión, se sitúan muchas veces pequeñas restricciones dentro del conducto que une la sonda de medición (agujero) y el transductor de presión. La aplicación del método de Bergh-Tijdemann al conducto de transmisión de la perturbación, permite determinar, para un conjunto conducto con un número de restricciones genérico, cuál es la variación de amplitud y desfase que la perturbación de presión experimenta cuando se propaga a lo largo del conducto de medición, y en función de la frecuencia de la perturbación.

Sea, pues, el caso de un colectivo de conductos en serie que unen la sección de medición situada sobre un cuerpo genérico y el transductor de presión (v. figura 99.1). Se pide describir, inicialmente, el conjunto de ecuaciones que caracterizan el método de Bergh-Tijdemann, comentando las hipótesis de trabajo y los campos de aplicación, y aplicar el método a un conjunto de cinco tubos en serie, con diferentes secciones y longitudes, que unen el punto de medición y el transductor. Los datos del problema son:

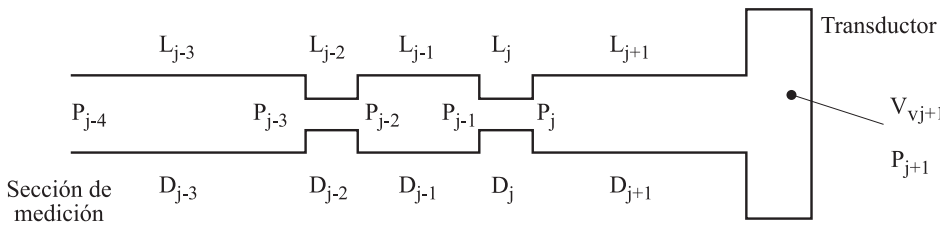


Fig. 99.1
Cinco conductos que conectan el punto de medición con el transductor

Los diferentes parámetros que caracterizan el fluido y la instalación toman los siguientes valores:

-Fluido utilizado, aire, el punto de medición esta a condiciones atmosféricas normales.
-Temperatura = 20 ºC
-Presión = 102.000 Pa

En la sección de conexión entre un conducto y el siguiente, el método considera la posible existencia de un volumen de fluido, (v. figura 99.2); para el caso de la figura 99.1, estos volúmenes tienen el valor de:

$$V_{Vj+1} = 100 \ \ mm^3, \quad V_{Vj} = 0 \ \ mm^3, \quad V_{Vj-1} = 0 \ \ mm^3; \quad V_{Vj-2} = 0 \ \ mm^3;$$
$$V_{Vj-3} = 0 \ \ mm^3$$

L_{j+1} = 16 mm. L_j = 30 mm. L_{j-1} = 50 mm. L_{j-2} = 30 mm. L_{j-3} = 374 mm.

D_{j+1} = 1,5 mm. D_j = 0,4 mm. D_{j-1} = 1,5 mm. D_{j-2} = 0,4 mm. D_{j-3} = 1,5 mm.

$$V_{t\ j+1} = \pi \frac{D_{j+1}^2}{4} L_{j+1}; \quad V_{t\ j} = \pi \frac{D_j^2}{4} L_j; \quad V_{t\ j-1} = \pi \frac{D_{j-1}^2}{4} L_{j-1}; \quad V_{t\ j-2} = \pi \frac{D_{j-2}^2}{4} L_{j-2}$$

$$V_{t\ j-3} = \pi \frac{D_{j-3}^2}{4} L_{j-3}$$

$$\sigma_j = 0,01$$

$$K_j = 1,4$$

$$\gamma = 1,4$$

$$\mu_{j+1} = \mu_j = \mu_{j-1} = \mu_{j-2} = \mu_{j-3} = 18,21 \ * \ 10^{-6} \ \ kg/(m\,s);$$

$$\rho_{s\ j+1} = \rho_{s\ j} = \rho_{s\ j-1} = \rho_{s\ j-2} = \rho_{s\ j-3} = 1,2129 \ \ kg/m^3;$$

Valor del número de Prandtl: Pr = 0,713

Resolución

1. Descripción del método de Bergh-Tijdemann.

El método de Bergh-Tijdemann se basa en las siguientes hipótesis:

Las perturbaciones a medir son sinusoidales y tienen una amplitud muy pequeña.

El radio interno del tubo o tubos es muy pequeño, comparado con su longitud.

El flujo es considerado laminar a lo largo de todo el conducto de transmisión.

El conducto genérico al que se aplica el método se puede representar como:

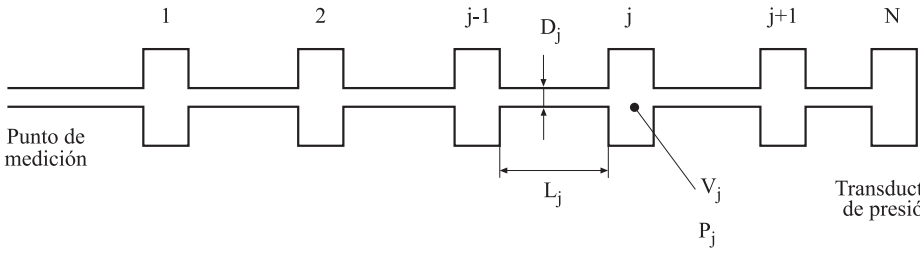


Fig. 99.2 Conducto de transmisión genérico. Obsérvese que al final de cada conducto puede existir un volumen que separe dicho conducto del siguiente

El método se basa en una fórmula recursiva, la cual evalúa la diferencia de amplitud de presión dinámica entre los extremos opuestos de un conducto de una sección y una longitud dadas.

Dicha formula recursiva se expresa como:

$$\frac{P_j}{P_{j-1}} = \left[\begin{array}{l} \cosh\left(\phi_j L_j\right) + \dfrac{V_{Vj}}{V_{tj}}\left(\sigma_j + \dfrac{1}{K_j}\right) n_j \phi_j L_j \sinh\left(\phi_j L_j\right) \\ + \dfrac{V_{t\,j+1}\,\phi_{j+1}\,L_j\,J_0\left(\alpha_j\right)\,J_2\left(\alpha_{j+1}\right)\sinh\left(\phi_j L_j\right)}{V_{t\,j}\,\phi_j\,L_{j+1}\,J_0\left(\alpha_{j+1}\right)\,J_2\left(\alpha_j\right)\sinh\left(\phi_{j+1} L_{j+1}\right)}\left[\cosh\left(\phi_{j+1} L_{j+1}\right) - \dfrac{P_{j+1}}{P_j}\right] \end{array} \right]^{-1} \quad (1)$$

Teniendo para cada uno de los conductos considerados:

$$\phi_j = \frac{2\ \pi\ f}{a_{0j}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_j)}{J_2(\alpha_j)}}\ \sqrt{\frac{\gamma}{n_j}} \quad (2)$$

$$\alpha_j = i^{1,5}\,\frac{D_j}{2}\sqrt{\frac{\rho_{Sj}\ \ 2\ \ \pi\ \ f}{\mu_j}} \quad (3)$$

$$n_j = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\frac{J_2\left(\alpha_j\ \ \sqrt{Pr}\right)}{J_2\left(\alpha_j\ \ \sqrt{Pr}\right)}\right]^{-1} \quad (4)$$

Obsérvese que, para calcular la ecuación (3), la densidad y viscosidad del fluido han de ser determinadas en cada uno de los conductos.

Los términos $J_0(\alpha_j)$, $J_0(\alpha_{j+1})$, $J_2(\alpha_j)$, $J_2(\alpha_{j+1})$ representan las funciones de Bessel de primera especie y de orden cero (0) o de orden dos (2), definidas para el parámetro (α), bien de la tubería (j), bien de la tubería (j+1).

El ratio de amplitud de la onda de presión entre los extremos de un colectivo de conductos unidos en serie, se puede definir como:

$$\frac{P_N}{P_0} = \frac{P_N}{P_{j+1}} \frac{P_{j+1}}{P_j} \frac{P_j}{P_{j-1}} \frac{P_{j-1}}{P_{j-2}} \cdots \frac{P_{j-n}}{P_0} \tag{5}$$

Es necesario remarcar que la ecuación recursiva (1) da como resultado un número complejo, cuya parte real, debe ser introducida en la ecuación (5) con el fin de poder determinar la función de transferencia de la onda de presión entre los extremos del colectivo de conductos. La parte imaginaria dará el ángulo de desfase entre la señal real a la entrada del conducto y la señal que medirá el transductor. Dichas señales tienen, supuestamente, una forma sinusoidal.

$$\frac{P_j}{P_{j-1}} = x + y_i = c\, e^{i\varphi}; \tag{6}$$

$$\text{donde } c = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \varphi = \text{artg}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7}$$

Aunque no se utiliza cuando los parámetros físicos del fluido a medir tienen régimen permanente, es necesario remarcar que, para calcular la presión (P_i) en un punto genérico del circuito, se deberá utilizar la siguiente ecuación:

$$P_i = P_0 + c\ e^{i\varphi} \tag{8}$$

donde P_0 es la presión a la entrada del conducto y los parámetros c y φ han sido ya definidos en la ecuación (7).

Cabe recordar que todos los parámetros utilizados en las diferentes ecuaciones presentadas, están definidos en unidades del sistema internacional.

De acuerdo con los resultados presentados por Bergh y Tijdemann en 1965, y también por Holmes y Lewis en 1987, se puede afirmar que el material utilizado en la línea de transmisión juega un papel insignificante en lo referente al efecto causado sobre la amplitud y el ángulo de fase de la onda de presión.

2. Aplicación del método para el caso especificado en el presente problema: cinco conductos conectados en serie, (v. figura 99.1).

Si se observan detenidamente los parámetros referentes a las longitudes y los diámetros de los cinco conductos, se ve que el conducto de transmisión tiene un diámetro de 1,5 mm y que dentro del mismo están insertadas dos restricciones de diámetro 0,4 mm. Estas restricciones juegan un papel importantísimo en lo que hace referencia a poder mantener constante la amplitud de oscilación de la onda de presión a lo largo del conducto de transmisión.

Las ecuaciones definidas en el método de Bergh y Tijdemann toman, para el caso en estudio, la siguiente forma, (v. la figura 99.1).

Conducto de la izquierda:

$$\frac{P_{j+1}}{P_j}=\left[\cosh\left(\phi_{j+1}\,L_{j+1}\right)+\frac{V_{Vj+1}}{V_{tj+1}}\left(\sigma_{j+1}+\frac{1}{K_{j+1}}\right)n_{j+1}\phi_{j+1}L_{j+1}\sinh\left(\phi_{j+1}\,L_{j+1}\right)\right]^{-1} \tag{9}$$

Restricción de la izquierda:

$$\frac{P_j}{P_{j-1}}=\left[\begin{array}{l}\cosh\left(\phi_j\,L_j\right)+\dfrac{V_{Vj}}{V_{tj}}\left(\sigma_j+\dfrac{1}{K_j}\right)n_j\phi_jL_j\sinh\left(\phi_j\,L_j\right)\\ +\dfrac{V_{t\,j+1}\,\phi_{j+1}\,L_j\,J_0\left(\alpha_j\right)J_2\left(\alpha_{j+1}\right)\sinh\left(\phi_j\,L_j\right)}{V_{t\,j}\,\phi_j\,L_{j+1}\,J_0\left(\alpha_{j+1}\right)J_2\left(\alpha_j\right)\sinh\left(\phi_{j+1}\,L_{j+1}\right)}\left[\cosh\left(\phi_{j+1}\,L_{j+1}\right)-\dfrac{P_{j+1}}{P_j}\right]\end{array}\right]^{-1} \tag{10}$$

Conducto central:

$$\frac{P_{j-1}}{P_{j-2}}=\left[\begin{array}{l}\cosh\left(\phi_{j-1}\,L_{j-1}\right)+\dfrac{V_{Vj-1}}{V_{tj-1}}\left(\sigma_{j-1}+\dfrac{1}{K_{j-1}}\right)n_{j-1}\phi_{j-1}L_{j-1}\sinh\left(\phi_{j-1}\,L_{j-1}\right)\\ +\dfrac{V_{t\,j}\,\phi_j\,L_{j-1}\,J_0\left(\alpha_{j-1}\right)J_2\left(\alpha_j\right)\sinh\left(\phi_{j-1}\,L_{j-1}\right)}{V_{t\,j-1}\,\phi_{j-1}\,L_j\,J_0\left(\alpha_j\right)J_2\left(\alpha_{j-1}\right)\sinh\left(\phi_j\,L_j\right)}\left[\cosh\left(\phi_j\,L_j\right)-\dfrac{P_j}{P_{j-1}}\right]\end{array}\right]^{-1} \tag{11}$$

Restricción de la derecha:

$$\frac{P_{j-2}}{P_{j-3}}=\left[\begin{array}{l}\cosh\left(\phi_{j-2}\,L_{j-2}\right)+\dfrac{V_{Vj-2}}{V_{tj-2}}\left(\sigma_{j-2}+\dfrac{1}{K_{j-2}}\right)n_{j-2}\phi_{j-2}L_{j-2}\sinh\left(\phi_{j-2}\,L_{j-2}\right)\\ +\dfrac{V_{t\,j-1}\,\phi_{j-1}\,L_{j-2}\,J_0\left(\alpha_{j-2}\right)J_2\left(\alpha_{j-1}\right)\sinh\left(\phi_{j-2}\,L_{j-2}\right)}{V_{t\,j-2}\,\phi_{j-2}\,L_{j-1}\,J_0\left(\alpha_{j-1}\right)J_2\left(\alpha_{j-2}\right)\sinh\left(\phi_{j-1}\,L_{j-1}\right)}\\ \left[\cosh\left(\phi_{j-1}\,L_{j-1}\right)-\dfrac{P_{j-1}}{P_{j-2}}\right]\end{array}\right]^{-1} \tag{12}$$

Conducto de la derecha:

$$\frac{P_{j-3}}{P_{j-4}}=\left[\begin{array}{l}\cosh\left(\phi_{j-3}\,L_{j-3}\right)+\dfrac{V_{Vj-3}}{V_{tj-3}}\left(\sigma_{j-3}+\dfrac{1}{K_{j-3}}\right)n_{j-3}\phi_{j-3}L_{j-3}\sinh\left(\phi_{j-3}\,L_{j-3}\right)\\ +\dfrac{V_{t\,j-2}\,\phi_{j-2}\,L_{j-3}\,J_0\left(\alpha_{j-3}\right)J_2\left(\alpha_{j-2}\right)\sinh\left(\phi_{j-3}\,L_{j-3}\right)}{V_{t\,j-3}\,\phi_{j-3}\,L_{j-2}\,J_0\left(\alpha_{j-2}\right)J_2\left(\alpha_{j-3}\right)\sinh\left(\phi_{j-2}\,L_{j-2}\right)}\\ \left[\cosh\left(\phi_{j-2}\,L_{j-2}\right)-\dfrac{P_{j-2}}{P_{j-3}}\right]\end{array}\right]^{-1} \tag{13}$$

Como conclusión, la ratio de amplitud de la onda de presión entre los extremos de la instalación se determinará:

$$\frac{P_{j+1}}{P_{j-4}} = \frac{P_{j+1}}{P_j}\ \frac{P_j}{P_{j-1}}\ \frac{P_{j-1}}{P_{j-2}}\ \frac{P_{j-2}}{P_{j-3}}\ \frac{P_{j-3}}{P_{j-4}} \tag{14}$$

A la hora de utilizar las ecuaciones (9-13), se ha de tener presente que, para el caso objeto de estudio, los volúmenes $V_{V\,j}, V_{V\,j-1}, V_{V\,j-2}, V_{V\,j-3}$ tienen un valor nulo, con lo que los términos de las ecuaciones donde aparecen dichos volúmenes serán cero. Además, hay que tener presente que el proceso de cálculo empieza calculando inicialmente la ecuación (9).

Cabe recordar, asimismo, que las ecuaciones (2), (3) y (4) han de ser calculadas para cada uno de los cinco conductos de que consta el circuito. Para el presente caso, dichas ecuaciones tomarán la forma:

$$\phi_{j+1} = \frac{2\ \pi\ f}{a_{0\,j+1}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_{j+1})}{J_2(\alpha_{j+1})}}\ \sqrt{\frac{\gamma}{n_{j+1}}} \tag{15}$$

$$\phi_j = \frac{2\ \pi\ f}{a_{0\,j}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_j)}{J_2(\alpha_j)}}\ \sqrt{\frac{\gamma}{n_j}} \tag{16}$$

$$\phi_{j-1} = \frac{2\ \pi\ f}{a_{0\,j-1}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_{j-1})}{J_2(\alpha_{j-1})}}\ \sqrt{\frac{\gamma}{n_{j-1}}} \tag{17}$$

$$\phi_{j-2} = \frac{2\ \pi\ f}{a_{0\,j-2}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_{j-2})}{J_2(\alpha_{j-2})}}\ \sqrt{\frac{\gamma}{n_{j-2}}} \tag{18}$$

$$\phi_{j-3} = \frac{2\ \pi\ f}{a_{0\,j-3}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_{j-3})}{J_2(\alpha_{j-3})}}\ \sqrt{\frac{\gamma}{n_{j-3}}} \tag{19}$$

$$\alpha_{j+1} = i^{1,5}\ \frac{D_{j+1}}{2} \sqrt{\frac{\rho_{Sj+1}\ 2\ \pi\ f}{\mu_{j+1}}} \tag{20}$$

$$\alpha_j = i^{1,5}\ \frac{D_j}{2} \sqrt{\frac{\rho_{Sj}\ 2\ \pi\ f}{\mu_j}} \tag{21}$$

$$\alpha_{j-1} = i^{1,5}\ \frac{D_{j-1}}{2} \sqrt{\frac{\rho_{Sj-1}\ 2\ \pi\ f}{\mu_{j-1}}} \tag{22}$$

$$\alpha_{j-2} = i^{1,5}\ \frac{D_{j-2}}{2} \sqrt{\frac{\rho_{Sj-2}\ 2\ \pi\ f}{\mu_{j-2}}} \tag{23}$$

$$\alpha_{j-3} = i^{1,5}\,\frac{D_{j-3}}{2}\,\sqrt{\frac{\rho_{Sj-3}\;\;2\;\;\pi\;\;f}{\mu_{j-3}}} \tag{24}$$

$$n_{j+1} = \left[1+\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{J_2\left(\alpha_{j+1}\;\;\sqrt{Pr}\right)}{J_2\left(\alpha_{j+1}\;\;\sqrt{Pr}\right)}\right]^{-1} \tag{25}$$

$$n_{j} = \left[1+\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{J_2\left(\alpha_{j}\;\;\sqrt{Pr}\right)}{J_2\left(\alpha_{j}\;\;\sqrt{Pr}\right)}\right]^{-1} \tag{26}$$

$$n_{j-1} = \left[1+\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{J_2\left(\alpha_{j-1}\;\;\sqrt{Pr}\right)}{J_2\left(\alpha_{j-1}\;\;\sqrt{Pr}\right)}\right]^{-1} \tag{27}$$

$$n_{j-2} = \left[1+\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{J_2\left(\alpha_{j-2}\;\;\sqrt{Pr}\right)}{J_2\left(\alpha_{j-2}\;\;\sqrt{Pr}\right)}\right]^{-1} \tag{28}$$

$$n_{j-3} = \left[1+\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{J_2\left(\alpha_{j-3}\;\;\sqrt{Pr}\right)}{J_2\left(\alpha_{j-3}\;\;\sqrt{Pr}\right)}\right]^{-1} \tag{29}$$

Por último, cabe señalar que, la consideración de que para cada conducto existe una densidad y una viscosidad medias aplicables a todo punto dentro de dicho conducto es, perfectamente válida para la gran mayoría de aplicaciones reales. Para el caso en estudio, se consideran constantes e iguales, las densidades y viscosidades del fluido en todos los conductos.

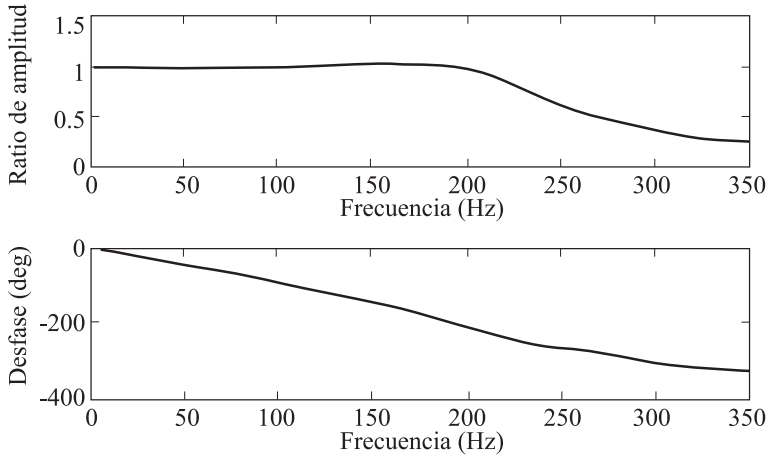


Fig. 99.3 Variación de amplitud y cambio de fase para el sistema consistente en cinco conductos conectados en serie. Sistema definido en la figura 99.1

Un pequeño programa utilizando el software MATLAB ha sido realizado con el fin de visualizar, para el caso considerado, la variación de amplitud y ángulo de fase que una onda de presión experimentaría al evolucionar por el sistema objeto de estudio. Obsérvese que, para la configuración elegida, (v. figura 99.3), prácticamente no existe cambio de amplitud de la perturbación hasta una frecuencia de unos 200 Hz.

Problema 100

Enunciado

El esquema que se muestra a continuación caracteriza un flujo de aire saliendo por un conjunto conducto-tobera que descarga a la atmósfera. Las dimensiones del sistema son:

-D_0 = 0,5 m; $D_1 = D_2$ = 0,18 m; D_3 = 0,15 m. Longitud del conducto L = 10 m.
-En el depósito de entrada se tiene: $P_0 = 10^6$ Pa; T_0 = 500 K.
-Raire = 287 J/(kgK); γ = 1,4.

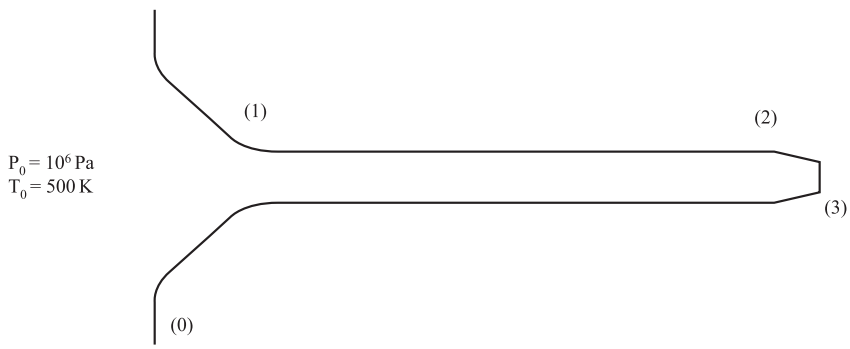
Se pide calcular: El caudal másico circulante, los números de Mach, y las presiones y temperaturas estáticas y de estancamiento en los puntos 1, 2, y 3 para cada uno de los casos siguientes:

1- El flujo en el conducto de longitud "l", se puede considerar isentrópico. Calcular además en este caso, el número de Mach en el punto (0).
2- El flujo en el conducto se considerará flujo de Fanno, con un factor de fricción medio de f = 0,024.
3- El flujo en el conducto se considerará flujo isotérmico, con un factor de fricción medio de f = 0,024.

Comprobar en cada caso que el flujo este bloqueado.

Considerar el flujo en las toberas como isentrópico.

Fig. 100.1
Esquema de la instalación



Resolución

1.- Flujo isentrópico.

Se supondrá a priori que el flujo está bloqueado, con lo que en el extremo de la tobera de salida, se considerará M = 1.

Para el primer caso, el flujo es isentrópico en todo el conjunto, tanto en la zona de toberas como en el conducto de sección constante, por lo tanto, T_0 y P_0 son constantes para el conducto y las toberas.

El caudal másico se determinará a partir de la expresión:

$$\dot{m} = \frac{P_0\, A}{\sqrt{R\, T_0}} \sqrt{\gamma}\, M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{10^6\, \frac{\pi\, 0.15^2}{4}}{\sqrt{287 * 500}}\, 0.6847 = 31.939\, \frac{kg}{s}$$

Entre los puntos 2 y 3 se tiene:

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{A}{A^*} = \frac{0,18^2}{0,15^2} = 1,44$$

Entrando con este valor en las tablas de flujo isentrópico, se llega a:

$$M_2 = 0,45\ ;\ \ \frac{T_2}{T_{02}} = 0,96108\ ;\ \ \frac{P_2}{P_{02}} = 0,87027\ ;\ \ \frac{\rho_2}{\rho_{02}} = 0,9055$$

$$T_2 = T_{02}\ 0,96108 = 500 * 0,96108 = 480,54\ K$$

$$P_2 = P_{02}\ 0,87027 = 10^6 * 0,87027 = 870.270\ Pa$$

En el punto 3, entrando a la tabla de flujo isentrópico para $M_2 = 1$, se extrae:

$$\frac{T_3}{T_{03}} = 0,83333\ ;\ \ \frac{P_3}{P_{03}} = 0,52828$$

$$T_3 = T_{03}\ 0,83333 = 500 * 0,83333 = 416,65\ K$$

$$P_3 = P_{03}\ 0,52828 = 10^6 * 0,52828 = 528.280\ Pa$$

Al considerar en el conducto de sección constante el flujo como isentrópico, se cumplirá que $M_2 = M_1 = 0,45$. Es decir, la longitud del conducto es irrelevante.

Para encontrar el número de Mach en el punto 0, se partirá de la relación de secciones entre el punto 0 y el punto 3.

$$\frac{A_0}{A_3} = \frac{A_0}{A^*} = \frac{0,5^2}{0,15^2} = 11,11$$

Entrando en la tabla de flujo isentrópico con este valor se obtiene:

$$M_0 = 0,05\ ;\ \frac{T_0}{T_{00}} = 0,999\ ;\ \frac{P_0}{P_{00}} = 0,9982$$

Para comprobar la existencia de flujo bloqueado, comparamos la presión requerida en el punto 3 que vale $P_3 = 528.280$ Pa con la presión disponible en el mismo punto, que es $P_{atm} = 10^5$ Pa

Puesto que la presión necesaria en el punto 3, es mucho mayor que la que en realidad se tiene, implica que el gradiente de presiones gradiente de presiones necesario es mucho menor que el disponible y en consecuencia se puede decir que el flujo estará bloqueado.

2.- Flujo de Fanno.

Se partirá de nuevo del punto 3, en donde se asumirá que el flujo está bloqueado $M_3 = 1$.

Entrando en la tabla de flujo isentrópico con este valor del número de Mach se tiene: (al igual que en el apartado precedente).

$$\frac{T_3}{T_{03}} = 0,83333\ ;\ \frac{P_3}{P_{03}} = 0,52828$$

$$T_3 = T_{03}\ 0,83333 = 500 * 0,83333 = 416,65\ K$$

Entre los puntos 2 y 3 se tiene:

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{A}{A^*} = \frac{0,18^2}{0,15^2} = 1,44$$

Entrando con este valor en las tablas de flujo isentrópico, se llega a:

$$M_2 = 0,45\ ;\ \frac{T_2}{T_{02}} = 0,96108\ ;\ \frac{P_2}{P_{02}} = 0,87027\ ;\ \frac{\rho_2}{\rho_{02}} = 0,9055$$

Entre los puntos 1 y 2 se tiene flujo de Fanno, y consecuentemente se ha de cumplir:

$$\frac{4\,C_f\,\Delta L}{D} = \frac{4\,C_f\,L_1^*}{D} - \frac{4\,C_f\,L_2^*}{D}$$

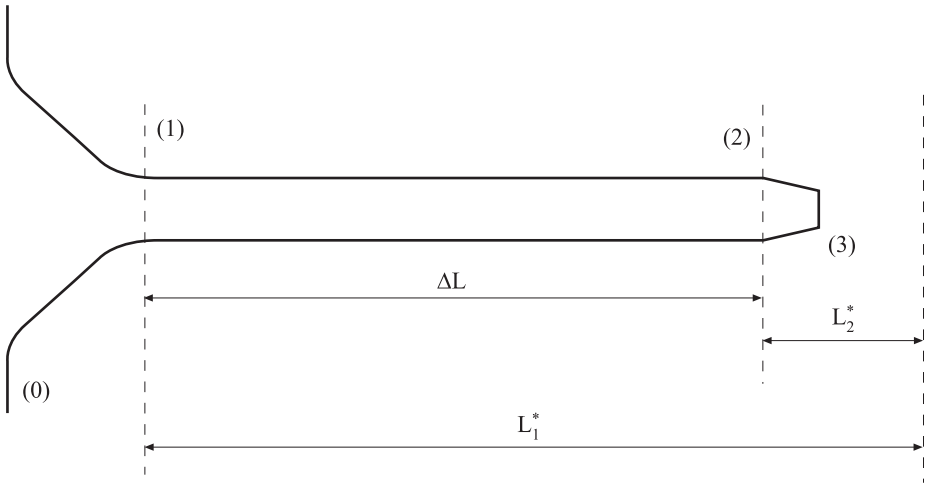


Fig. 100.2
Longitudes características para el flujo de Fanno

Entrando a la tabla de flujo de Fanno para $M_2 = 0,45$ se obtiene:

$$\frac{4\,C_f\,L_2^*}{D} = 1.5664$$

Conocido el coeficiente de fricción entre los puntos 1 y 2, f = 0,024, se tiene:

$$\frac{4\,C_f\,\Delta L}{D} = \frac{0,024 * 10}{0,18} = 1,333$$

De donde:

$$\frac{4\,C_f\,L_1^*}{D} = \frac{4\,C_f\,\Delta L}{D} + \frac{4\,C_f\,L_2^*}{D} = 1,333 + 1,5664 = 2,8994$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo de Fanno se obtiene:

$$M_2 = 0,37\ ;\ \ \frac{T_1}{T^*} = 1,168\ ;\ \ \frac{P_{01}}{P_0^*} = 1,6961\ ;\ \ \frac{P_1}{P^*} = 2,9209$$

La relación de presiones de estancamiento entre los puntos 1 y 2 será:

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = \frac{\left.\frac{P_{01}}{P_0^*}\right|_{M_1}}{\left.\frac{P_{02}}{P_0^*}\right|_{M_2}} = \frac{1,6961}{1,4487} = 1,1707$$

$$P_{02} = \frac{P_{01}}{1,1707} = 854.135,95\ \text{Pa} = P_{03}$$

En el punto 3 se había obtenido la relación $\frac{P_3}{P_{03}} = 0,52828$.

Con lo que la presión estática en el punto 3 será:

$$P_3 = P_{03}\ 0,52828 = 854.135,95 * 0,52828 = 451.222,94 \text{ Pa}$$

El caudal másico circulante valdrá:

$$\dot{m} = \frac{P_0\ A}{\sqrt{R\ T_0}} \sqrt{\gamma}\, M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{854.135,95\ \frac{\pi\ 0,15^2}{4}}{\sqrt{287 * 500}}\ 0,6847 = 27,281 \frac{kg}{s}$$

Se observa que la presión estática en el punto 3 es mucho mayor que la presión que en realidad se tiene, $P_3 = 451.222,94 \text{ Pa} > P_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$. Se concluye que el flujo, también en este apartado está bloqueado.

3.- Flujo isotérmico.

El Mach límite para flujo isotérmico vale: $M_L = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1,4}} = 0,845154$, este valor es el que aparecería en el extremo del conducto de sección constante, pero puesto que en el extremo del conducto existe una tobera convergente, en el extremo de la tobera, el número de Mach sigue siendo la unidad al igual que en los casos precedentes.

Las condiciones del punto 2 serán:

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{A}{A^*} = \frac{0,18^2}{0,15^2} = 1,44$$

Entrando con este valor en las tablas de flujo isentrópico, se llega a:

$$M_2 = 0,45\ ;\ \frac{T_2}{T_{02}} = 0,96108\ ;\ \frac{P_2}{P_{02}} = 0,87027\ ;\ \frac{\rho_2}{\rho_{02}} = 0,9055$$

La relación entre el punto 1 y el punto 2 será: (entre estos dos puntos se tiene flujo isotérmico).

$$\frac{4\ C_f\ L_{1L}}{D} = \frac{4\ C_f\ \Delta L}{D} + \frac{4\ C_f\ L_{2L}}{D}$$

Entrando en la tabla de flujo isotérmico para $M_2 = 0,45$, se tiene:

$$\frac{4\ C_f\ L_{2L}}{D} = 1,2715\ ;\ \frac{P_{02}}{P_{0L}} = 1,353$$

Como $f = 0,024$

$$\frac{4\,C_f\,\Delta L}{D} = \frac{0,024 * 10}{0,18} = 1,333$$

De donde:

$$\frac{4\,C_f\,L_{1L}}{D} = \frac{4\,C_f\,\Delta L}{D} + \frac{4\,C_f\,L_{2L}}{D} = 1,333 + 1,2715 = 2,60485$$

Entrando en la tabla de flujo isotérmico con este valor, se obtiene:

$$M_1 = 0,373\,;\quad \frac{T_1}{T_L} = 0,8985\,;\quad \frac{P_{01}}{P_{0L}} = 1,57$$

La presión de estancamiento en el punto 2 será:

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = \frac{\left.\frac{P_{01}}{P_{0L}}\right|_{M_1}}{\left.\frac{P_{02}}{P_{0L}}\right|_{M_2}} = \frac{1,57}{1,353} = 1,160\,;\qquad P_{02} = P_{03} = \frac{P_{01}}{1,160} = \frac{10^6}{1,160} = 861.783,439\ \text{Pa}$$

Entrando en la tabla de flujo isentrópico para $M_1 = 0,373$, se obtiene:

$$\frac{T_1}{T_{01}} = 0,9730$$

$$T_1 = T_{01}\ 0,9730 = 500 * 0,9730 = 486,5\ \text{K}$$

Puesto que entre los puntos1 y 2 el flujo es isotérmico: $T_{02} = T_{01}$.

Gracias a las relaciones obtenidas en el punto 2 se tiene:

$$\frac{T_2}{T_{02}} = 0.96108\,;\quad T_{02} = \frac{T_2}{0,96108} = \frac{486,5}{0,96108} = 506,2\ \text{K}$$

El caudal másico circulante será:

$$\dot{m} = \frac{P_0\,A}{\sqrt{R\,T_0}}\sqrt{\gamma}\,M\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{861.783,43\,\frac{\pi\,0,15^2}{4}}{\sqrt{287 * 506,2}}\,0,6847 = 27,35\,\frac{\text{Kg}}{\text{s}}$$

De la tabla de flujo isentrópico, para $M = 1$, punto 3, se obtiene:

$$\frac{P_3}{P_{03}} = 0.52828\ ;\quad P_3 = P_{03}\ 0,52828 = 861.783,439 * 0,52828 = 455.262,95\ \text{Pa}$$

Se comprueba de nuevo que $P_3 = 455.262,95\ \text{Pa} > P_{atm} = 10^5\ \text{Pa}$; por lo que el flujo está bloqueado.

Problema 101

Enunciado

Sea un sistema de extinción de incendios destinado a buques, que consta de dos rociadores con un diámetro de 36 mm cada uno, ambos rociadores están conectados por un conducto de 14 m de longitud en cuyo extremo opuesto están situados los tanques de agente extintor. Si se quiere que el caudal másico total que circula por los rociadores sea de 7 kg/s y la presión de estancamiento en los tanques de 17 bar, que se considerará constante durante el tiempo en que actúen los rociadores, determine el diámetro del conducto necesario.

Considérese en primera aproximación:

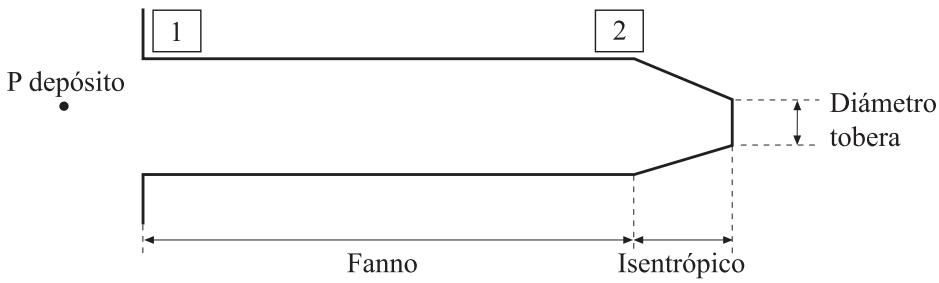
-Que el fluido circulante tiene las mismas propiedades que el aire

-Que en el extremo del conducto existe un sólo rociador cuya sección es la suma de secciones de los rociadores iniciales

-Que en el conducto se tiene flujo de Fanno con Cf = 0,005

-Que la unión entre la sección resultante de los rociadores y el conducto se realiza mediante una tobera convergente donde el flujo se considera isentrópico

Fig. 101.1



Datos:

∅ tobera	L longitud del conducto (m)
P depósito	f factor de fricción = 0,005
T temperatura del aire	$\dot{m}$ caudal másico circulante requerido

La sección de salida de la tobera será igual a la sección de la suma de agujeros de la tobera o toberas instaladas.

$$R_{AIRE} = 287,04\left[\frac{J}{kg\,K}\right]$$

Resolución

1. Determinación de la presión de estancamiento en la tobera de salida

Datos de partida:

A^* = área de salida de la tobera (m^2)

$\dot{m}$ = caudal másico circulante (kg/s)

$\gamma = 1,4$ (índice de adiabaticidad)

T_0 = temperatura de estancamiento (K)

$$T_0 = T + \frac{v^2}{2c_p} = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)$$

Suponiendo que en la tobera el flujo estará bloqueado, se tomará como temperatura de estancamiento $T_0 \cong 1,2\ T$: un valor 20% mayor que la temperatura estática del fluido circulante, considerando ésta de 25ºC.

El caudal másico circulante en condiciones de flujo bloqueado y para una tobera convergente vendrá dado por:

$$\dot{m} = \frac{P_0 \cdot A^*}{\sqrt{R \cdot T_0}}\sqrt{\gamma}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 0,6847 \cdot \frac{P_0 \cdot A_{SALIDA}}{\sqrt{R \cdot T_0}};$$

$$P_0 = \frac{\dot{m}\sqrt{R \cdot T_0}}{0,6847 \cdot A_{SALIDA}}$$

El diámetro equivalente de las dos toberas se obtendrá:

$$\frac{\pi\, 0,036^2}{4}2 = A_{SALIDA} = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$D_{Tobera} = 0,0509\ m$$

Para:

$$\dot{m} = 7\left[\frac{kg}{s}\right]; \qquad T_0 = 30[k] \equiv 303[k]; \quad A_{SALIDA} = \frac{\pi}{4}(\text{diámetro de la tobera})^2$$

$$= \frac{\pi}{4}(0,0509)^2 \left[m^2\right] \quad R = 287,04\left[\frac{J}{Kg\,K}\right]$$

y se obtendrá: $P_0 = 1.481.035\,[Pa] \cong 14,8[bar]$

Esta sería la presión de estancamiento en la tobera convergente para que a la salida de la misma se tenga flujo bloqueado.

2. Determinación de las condiciones estáticas y de estancamiento a la entrada de la tobera y, por ende, determinación del diámetro del conducto:

En la tobera convergente se cumple: $P_0 = cte$; $T_0 = cte$

El proceso de cálculo empleado es iterativo. Se supondrá inicialmente un diámetro del conducto, hallándose la presión de estancamiento necesaria en los depósitos de alimentación, si ésta es superior a la presión existente, se deberá aumentar el diámetro del conducto.

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A_C}{A_T} = \frac{\frac{R \cdot D_C}{4}}{\frac{R \cdot D_T}{4}} = \left(\frac{D_C}{D_T}\right)^2$$

Si ∅ conducto ≅ 3" ≅ 76,2 mm;

$$\frac{A}{A^*} = \left(\frac{D_C}{D_T}\right)^2 = \left(\frac{76,2}{50,8}\right)^2 = 2,25$$

El numero de Mach a la entrada de la tobera será:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A_C}{A_T} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

De esta ecuación, para un valor dado de $\frac{A}{A^*}$ hay que despejar M: (que será el número de Mach a la entrada de la tobera).

De la tabla de flujo isoentrópico para $\frac{A}{A^*} = 2,25 \xrightarrow{\text{SE OBTIENE}} M_2 = 0,27$

Nota. El valor de M_2 ha de ser siempre inferior a la unidad.

En la sección de entrada de la tobera, donde se tiene M_2=0,27, se cumple:

$$\frac{T_{02}}{T_2}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right);$$ relación de las temperaturas de estancamiento y estática a la entrada de la tobera

$$\frac{P_{02}}{P_2}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}};$$ relación presión estancamiento y presión estática a la entrada de la tobera

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_2}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}};$$ relación de densidades

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores el valor de M_2= 0,27, se halla:

$$\frac{T_{02}}{T_2}=0,98563 \qquad \frac{P_{02}}{P_2}=0,95060 \qquad \frac{\rho_{02}}{\rho_2}=0,96446$$

de donde:

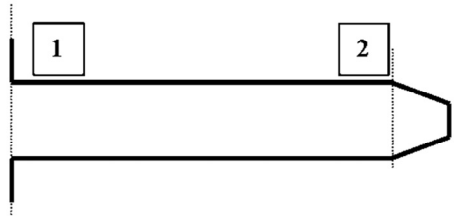
$$P_2=0,95060*1.481.035=1.407.871,9\ \text{Pa}$$

3. La presión a la entrada del conducto, $P_{depósito}$ se obtiene:

Puesto que el flujo en el conducto es de Fanno, se cumplirá:

Fig. 101.2

$$\left.\frac{4Cf\,l^*}{D}\right|_1=\left.\frac{4Cf\,l^*}{D}\right|_2+4Cf\frac{\Delta x}{D}$$



donde:

$$\frac{4\overline{Cf}\,l^*}{D}=\frac{1-M^2}{\gamma M^2}+\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)Ln\left\{M^2\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{-1}\right\} \qquad (A)$$

Para M_2=0,27; de la tabla para flujo de Fanno $\xrightarrow{\text{SE OBTIENE}}$ $\left.\frac{4f\,l^*}{D}\right|_2=6,9832$

Por otro lado:

$$4Cf\frac{\Delta x}{D_{\text{estimado del tubo}}}=4*0,005*\frac{14}{0,0762}=3,6745$$

con lo cual:

$$\left.\frac{4Cf\,l^*}{D}\right|_1 = 6,9832 + 3,6745 = 10,6577$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo de Fanno, o bien sustituyendo M en la ecuación (A), se obtiene el valor de Mach en el punto 1.

Así: $M_1 = 0,229$

Este valor siempre tiene que ser menor que M2.

Las presiónes estática y de estancamiento a la entrada del conducto se determinan (de la tabla de flujo de Fanno).

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\left.\frac{P}{P^*}\right|_{M1}}{\left.\frac{P}{P^*}\right|_{M2}} = \frac{4,7378}{4,0279} \xrightarrow{\text{SE OBTIENE}} P_1 = 1.407.871,9\,\frac{4,7378}{4,0279} = 1.656.003,2\ (\text{Pa})$$

La relación entre la presión estática y la de estancamiento, para un número de Mach dado, se puede obtener aplicando asimismo la ecuación:

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{-1/2}$$

La presión de estancamiento en el punto 1 se obtendrá:

$$\frac{P_{01}}{P_1} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^{\,2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \xrightarrow{\text{DE DONDE}} P_{01} = \frac{P_1}{0,964141} = 1.717.594,4\,(\text{Pa})$$

O bien de la tabla de flujo isentrópico para M_1=0,299: $\left.\frac{P_1}{P_{01}}\right|_{M1} = 0,964132$

Si esta presión es superior a la presión de estancamiento de las botellas de alimentación que se ha considerado como constante e igual a 17 bar, será necesario aumentar la relación $\frac{A}{A^*} = \frac{A_C}{A_T}$, es decir, aumentar la sección del conducto. En realidad, puesto que la presión de estancamiento obtenida en 1 es ligeramente superior a 17 bar, se debería repetir el problema para un diámetro de conducto ligeramente superior.

Problema 102

Enunciado

Se tienen dos depósitos unidos por un conducto de diámetro 0,2 m y una longitud de 2 m, en cuyos extremos se encuentran sendas toberas. En el primero de los depósitos, las características termodinámicas del fluido de trabajo son: Po = 50 bar To = 700 K mientras que en el depósito de salida se puede considerar que la presión es la atmosférica.

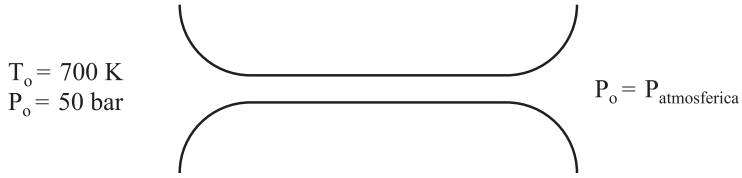


Fig. 102.1

Determine:

1. Si el fluido de trabajo es aire, el conducto es rugoso, con una rugosidad absoluta de ε = 0,00003 m determine las características de presión y temperatura a la entrada y a la salida del conducto. Halle asimismo el caudal másico circulante. Considere el índice de adiabaticidad γ = 1,4 en todo el problema.

2. ¿Cuál sería el caudal másico circulante si se considerase la tubería como lisa y el flujo a lo largo de la misma como isentrópico?

3. Si el fluido de trabajo es vapor recalentado y se desea que el caudal circulante sea el 75 % del caudal hallado en el primer apartado, determine: el calor que hay que suministrar al conducto con el fin de que se tenga flujo bloqueado. Considere el conducto sin rugosidad. Considere, además, para este apartado que la presión y la temperatura del depósito inicial se pueden tomar en primera aproximación como estáticas. R vapor de agua = 461,52 J/(kg K).

Resolución

1. A priori, se supone que el flujo está bloqueado, con lo que el valor del número de Mach a la salida del conducto, punto 2, será la unidad.

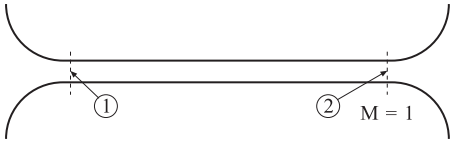


Fig. 102.2

Según Fanno, entre los puntos 1 y 2 se ha de cumplir: $\frac{4C_f L_1^*}{D} = \frac{4C_f L_2^*}{D} + \frac{4C_f \Delta L^*}{D}$

Puesto que, según la hipótesis en el punto 2 el número de Mach es la unidad, se tiene:

$$\frac{4C_f L_1^*}{D} = \frac{4C_f \Delta L^*}{D}$$

El factor de fricción se puede determinar partiendo de: $\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,00003}{0,2} = 0,00015$

Suponiendo flujo turbulento desarrollado, del diagrama de Moody se obtiene f = 0,013 = 4 C_f, con lo que:

$$\frac{4C_f L_1^*}{D} = \frac{4C_f \Delta L^*}{D} = \frac{0,013}{0,2} \cdot 2 = 0,13$$

Entrando con este valor en las tablas de flujo de Fanno, se obtiene:

$$M_1 = 0,746; \quad \frac{P}{P^*} = 1,413 \; ; \quad \frac{P_0}{P_0^*} = 1,064 \; ; \quad \frac{T}{T^*} = 1,079 \; ; \quad \frac{\rho^*}{\rho} = 0,773 \; ;$$

Para $M_1 = 0,746$ de las tablas de flujo isentrópico, se tiene:

$$\frac{T}{T_0} = 0,8995 \; ; \quad \frac{P}{P_0} = 0,692 \; ; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 0,7685 \; ;$$

Puesto que Po y To son conocidas y se mantienen a lo largo de la tobera de entrada, se tiene que:

$$P_1 = 0,692 \cdot 5.000.000 = 3.460.000 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 0,8995 \cdot 700 = 629,65 \text{ K}$$

La presión y temperatura estática a la salida del conducto, donde M = 1 (hipótesis)

$$P_2^* = \frac{P_1}{1,413} = \frac{3.460.000}{1,413} = 2.448.690,72 \text{ Pa}$$

$$P_{02}^* = \frac{P_{01}}{1,064} = \frac{5.000.000}{1,064} = 4.699.248,1 \text{ Pa}$$

$$T^* = \frac{T_1}{1,079} = \frac{629,65}{1,079} = 583,54 \text{ K}$$

Para M = 1 de la tabla de flujo isentrópico, se tiene:

$$\frac{T}{T_0} = 0{,}83333 \qquad T_{02} = \frac{T_2}{0{,}83333} = \frac{583{,}54}{0{,}83333} = \ 700 \text{ K}$$

Obsérvese que la temperatura de estancamiento se mantiene; ésta es una característica del flujo de Fanno.

Se comprueba, por otro lado, que la diferencia de presiones que en realidad existe entre los dos depósitos es mucho mayor que la diferencia de presiones necesaria para que exista flujo bloqueado; por tanto, se concluye que la hipótesis realizada al principio de este problema es acertada: el flujo está bloqueado.

El caudal másico se determinará mediante la expresión:

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{P_0 A} = \sqrt{\gamma}\cdot M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Para M = 1 y $\gamma = 1{,}4$; se obtiene:

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{P_0 A} = 0{,}6847;$$

de donde:

$$\dot{m} = 0{,}6847\cdot 4699248{,}1\cdot\frac{1}{\sqrt{287\cdot 700}}\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}2^2}{4} = 225{,}47\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Éste es el caudal másico máximo que, para las condiciones de entrada dadas, puede fluir por esta instalación.

El caudal másico por unidad de superficie será:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \ 7.176{,}93 \text{ kg /sm}^2$$

Dicho caudal másico se puede determinar, asimismo:

$$C \ = \ V^* = \sqrt{\gamma RT^*} = \sqrt{1{,}4\cdot 287\cdot 583{,}54} = \ 484{,}21 \text{ m/s}$$

$$\rho_2{}^* = \frac{P_2}{RT} = \frac{2.448.690{,}72}{287\cdot 583{,}5495} = 14{,}62 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m} = \rho_2{}^* A V^* = 14{,}62\,\frac{\pi\cdot 0{,}2^2}{4}\cdot 484{,}21 \ = \ 222{,}401 \text{ kg / s}$$

Véase que el caudal másico obtenido es prácticamente el mismo por los dos métodos.

2. Si el flujo se considera adiabático en todo punto, Po y To se mantienen. Así, el caudal másico será:

$$\dot{m} = \frac{P_0 A}{\sqrt{RT_0}} 0,6847 = \frac{5.000.000 \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4}}{\sqrt{287 \cdot 700}} 0,6847 = 236,77 \text{ kg / s};$$

Obsérvese que si el flujo es ideal, el caudal másico máximo circulante es mayor.

3. En este apartado, el fluido circulante es vapor de agua, gas real; el flujo se considera sin fricción y con transferencia de calor, flujo de Rayleigh.

Según el enunciado, el caudal máximo que se quiere que circule por la instalación es:

$$G = 0,75 \cdot G_{(\text{apartado 1})}$$

$$G = 0,75 \cdot 7.176,93 = 5.382,69 \text{ kg / (s m}^2\text{)}$$

La ecuación de la curva característica de Rayleigh será:

$$\frac{1}{\rho_2} = \upsilon_2 = \frac{P_1 + G^2 \upsilon_1 - P_2}{G^2};$$

El enunciado dice que, como primera aproximación, se puede considerar la presión y la temperatura de estancamiento en el depósito inicial como estáticas. Por consiguiente, entrando con los valores de P = 50 10^5 Pa y T = 700 K en el diagrama de Molière para el vapor de agua, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} = \upsilon = 0,062 \quad \text{m}^3 / \text{kg}$$

$$h = 3.275 \text{ kJ /kg}$$

$$s = 6,73 \text{ kJ / kg K}$$

Sustituyendo en la ecuación característica para flujo de Rayleigh, se tiene:

$$\frac{1}{\rho_2} = \upsilon_2 = \frac{P_1 + G^2 \upsilon_1 - P_2}{G^2} = \frac{5.000.000 + 5.382,59^2 \cdot 0,062 - P_2}{5.382,59^2}$$

Sustituyendo en la expresión anterior los valores conocidos y dando valores arbitrarios a P_2, se obtendrán sendos valores del volumen específico. Entrando con los valores de la presión y el volumen específico en el punto 2 (extremo final del tubo), en el diagrama de Molière se obtendrá el valor de la temperatura, entalpía y entropía en este punto.

Parámetros de entrada diagrama de Molière		Parámetros de salida obtenidos mediante el diagrama de Molière		
P_2 (Pa)	υ_2 (m^3/kg)	T_2 (ºC)	h_2 (kJ/kgK)	S_2 (kJ/kgK)
$52 \cdot 10^5$	0,05509	390	3180	6,58
$50 \cdot 10^5$	0,062	427	3275	6,74
$46 \cdot 10^5$	0,0758	520	3490	7,06
$40 \cdot 10^5$	0,09651	580	3630	7,29
$32 \cdot 10^5$	0,12412	584	3650	7,43
$30 \cdot 10^5$	0,13102	583	3650	7,45
$26 \cdot 10^5$	0,14483	520	3600	7,44
$22 \cdot 10^5$	0,158	480	3425	7,31

Los puntos definidos en esta tabla formarían la denominada línea de Rayleigh, que es el lugar geométrico de todos los estados posibles para flujo sin fricción, con transferencia de calor y para el flujo másico deseado.

El flujo bloqueado se obtendrá en el punto de entropía máxima.

La velocidad del fluido en la zona de bloqueo se puede obtener como:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \frac{\rho V A}{A} = \rho V \qquad V = \frac{G}{\rho} = \frac{G}{\frac{1}{\upsilon}} = \frac{5.382,69}{\frac{1}{0,13102}} = 705,28 \text{ m/s}$$

La velocidad del fluido a la entrada del conducto será:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho V \qquad V = \frac{G}{\rho} = \frac{5.382,69}{\frac{1}{0,062}} = 333,727 \text{m/s}$$

El número de Mach a la entrada será:

$$C = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1,4 \cdot 461,52 \cdot 700} = 672,52 \text{ m/s}$$

$$M = \frac{333,72}{677,52} = 0,4962$$

A la salida del conducto, el número de Mach será:

$$C = \sqrt{1,4 \cdot 461,52 \cdot (583 + 273)} = 743,69 \text{ m / s}$$

$$M = \frac{705,28}{743,69} = 0,948$$

El número de Mach debería dar la unidad. Esta desviación es debida a que los puntos arbitrarios definidos en la tabla anterior no tienen porqué coincidir con la entropía máxima real; y por otro lado, se tiene poca precisión al utilizar el diagrama de Molière.

El calor comunicado al fluido se puede determinar:

$$Q + h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$Q + 3.275.000 + \frac{333,72^2}{2} = 3.650.000 + \frac{705,28^2}{2}$$

$$Q = 568.023,08 \text{ J/kg}$$

Puesto que las condiciones estáticas a la entrada del conducto en realidad se han supuesto, el problema debe repetirse para los nuevos valores de la presión y temperatura estáticas a la entrada del conducto.

El nuevo número de Mach determinado a la entrada del conducto es: $M_1 = 0,496$.

Entrando con este número de Mach en la tabla de flujo isentrópico, se obtiene:

$$\frac{T}{T_0} = 0,9531 ; \qquad \frac{P}{P_0} = 0,845256 ; \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = 0,886846$$

con lo que la nueva presión y temperatura estáticas en el punto 1 serán:

$$P = 50 \cdot 10^5 \cdot 0,845256 = 4.226.280 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 700 \cdot 0,9531 = 667,17 \text{ K}$$

Entrando en el diagrama de Molière con estos dos valores se obtienen el valor del volumen específico, la entalpía y la entropía.

Sustituyendo estos valores en $\frac{1}{\rho_2} = \upsilon_2 = \frac{P_1 + G^2 \upsilon_1 - P_2}{G^2}$, se puede obtener una tabla similar a la obtenida para los valores precedentes, de donde se obtendrá un nuevo punto de entropía máxima, un nuevo número de Mach a la entrada y un nuevo calor comunicado. El proceso seguirá hasta que se obtenga convergencia.

Problema 103

Enunciado

El esquema de la figura muestra dos depósitos de grandes dimensiones unidos por un conducto de sección constante, la presión y temperatura de estancamiento en el depósito de la izquierda son conocidas y se conoce también la presión estática a la salida del conducto, punto 2, ver figura adjunta. Si el caudal másico máximo que se desea que circule por el conducto es de 0,8kg/s se pide:

1.- Determinar el diámetro del conducto que será necesario utilizar. (Considerar flujo de Fanno).

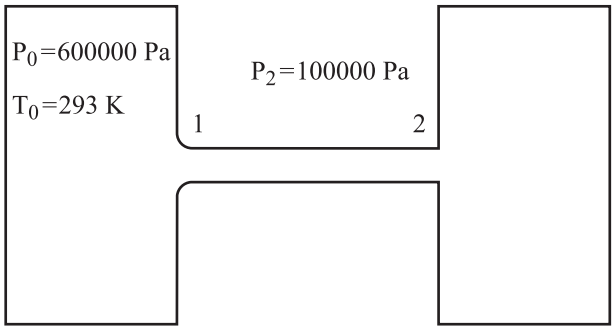
Datos:

- Fluido de trabajo, aire: $\mu = 1{,}83*10^{-5}$ $[(N*s)/m^2]$
- Rugosidad del conducto: $\varepsilon = 0{,}01$ mm = 0,00001 m.
- Longitud del conducto 15m.
- Índice de politropia, $\gamma = 1.4$.

2.- Entre los dos depósitos de la figura, se desea colocar otros dos tubos paralelos al que se muestra, el primero de diámetro 0,2 m y el segundo de diámetro 0,01 m, ambos tienen una rugosidad de: $\varepsilon = 0{,}1$ mm = 0,0001 m. El gradiente de presiones entre los dos depósitos es el mismo que el del apartado anterior.

Longitud de cada uno de estos dos conductos: 15m.

Determinar el caudal másico que circulará por cada uno de estos dos conductos.



Resolución

1.- Si el caudal másico máximo que se quiere que circule por el conducto es conocido, se puede suponer a priori que el número de Mach a la salida del conducto será la unidad. Puesto que lo que se pide es hallar el diámetro, no se pueden establecer relaciones

entre los dos extremos del conducto con lo que la resolución de este apartado pasa por la utilización de un proceso iterativo. Inicialmente se va a suponer un número de Mach a la entrada del conducto, con este dato se va a determinar el diámetro del conducto, y luego se establecerán las relaciones de flujo de Fanno entre los dos extremos del conducto y se evaluará la hipótesis de si el gradiente de presiones de que se dispone es suficiente como para que el número de Mach a la salida del conducto sea la unidad.

La ecuación que caracteriza el caudal másico adimensional es:

$$\frac{\dot{m}\sqrt{R\,T_0}}{P_0\,A}=\sqrt{\gamma}\,M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\,M^2\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\right)}$$

Despejando de esta ecuación el diámetro del conducto se tiene:

$$D^2=\frac{4\,\dot{m}\sqrt{R\,T_0}}{P_0\,\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\gamma}\,M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\,M^2\right)^{\left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\right)}}$$

A la entrada del conducto, todos los datos de la ecuación precedente, excepto en número de Mach, son conocidos, se establece la hipótesis de que el número de Mach a la entrada vale $M_1 = 0{,}5$, recordando que a la entrada se cumple: $P_{01} = 600.000$ Pa; $T_{01} = 293$K; $\dot{m} = 0{,}8$ kg / s ; R = 287 K; de la ecuación anterior se obtiene:

D = 0,03103 m.

Para hallar el factor de fricción, es necesario conocer el número de Reynolds y la rugosidad relativa.

$$R_e=\frac{V\,D\,\rho}{\mu}=\frac{V\,D^2\,\rho\,\pi 4}{D\,\mu\,\pi 4}=\frac{\dot{m}4}{\pi\,D\,\mu}=\frac{55.660,74}{D}=\frac{55.660,74}{0,03103}=1.793.771,8$$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{1*10^{-5}}{0,03103}=0,000322$$

Entrando con estos valores al diagrama de Moody se obtiene: f = 0,0152.

Ahora se puede relacionar los dos extremos del conducto, para ello se utiliza:

$$\frac{4\,C_f\,\Delta x}{D}=\frac{4\,C_f\,L_1^*}{D}-\frac{4\,C_f\,L_2^*}{D}$$

Y recordando que $f = 4\,C_f$; y que según la hipótesis establecida de que a la salida del conducto el número de Mach es la unidad, se concluye que $L_2^* = 0$, en consecuencia:

$$\frac{4\,C_f\,\Delta x}{D}=\frac{4\,C_f\,L_1^*}{D}=\frac{0,0152*15}{0,03103}=7,347$$

Entrando con este valor a las tablas de flujo de Fanno para la zona subsónica, se obtiene:

$$M_1 = 0{,}26483;\ \frac{T_1}{T^*} = 1{,}18341;\ \frac{P_1}{P^*} = 4{,}109;\ \frac{P_{01}}{P_0^*} = 2{,}2791;$$

Recuérdese que las condiciones con el superíndice * se ha supuesto que son las de la salida del conducto.

Entrando en la tabla de flujo isoentrópico con $M_1 = 0{,}26483$ se obtienen las relaciones:

$$\frac{T_1}{T_{01}} = 0{,}9861;\ \frac{P_1}{P_{01}} = 0{,}9523;$$

Con lo que la diferencia de presiones necesaria entre la entrada y la salida para que el flujo este bloqueado es:

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{\dfrac{P_1}{P^*}}{\dfrac{P_1}{P_{01}}} = \frac{4{,}109}{0{,}9523} = 4{,}3148$$

Puesto que en realidad se dispone de:

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{600.000}{100.000} = 6$$

Se observa que el gradiente de presiones de que se dispone es mayor que el necesario, con lo que se puede concluir que el flujo estará bloqueado, el número de Mach a la salida del conducto será la unidad.

Véase que todo este proceso se ha realizado partiendo de un número de mach a la entrada de 0,5. Según lo establecido previamente el número de Mach a la entrada debe ser de 0,2648, con lo que es necesario realizar una segunda iteración, el nuevo número de Mach que se supondrá ahora a la entrada será el promedio entre el dado como hipótesis inicial y el obtenido según Fanno, es decir:

$$M_1 = \frac{0{,}5 + 0{,}2648}{2} = 0{,}3824$$

Suponiendo este nuevo número de Mach a la entrada, el nuevo diámetro del conducto será: véase que el resto de datos se mantienen constantes.

$$D^2 = \frac{4\,\dot{m}\sqrt{R\,T_0}}{P_0\,\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\gamma}\,M}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\,M^2\right)^{\left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\right)}$$

$$D = 0{,}03444 \text{ m.}$$

$$R_e = \frac{V\,D\,\rho}{\mu} = \frac{V\,D^2\,\rho\,\pi 4}{D\,\mu\,\pi 4} = \frac{\dot{m} 4}{\pi\,D\,\mu} = \frac{55.660{,}74}{D} = \frac{55.660{,}74}{0{,}03444} = 1.616.165{,}5$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{1*10^{-5}}{0{,}03444} = 0{,}0002904$$

Entrando con estos dos valores al diagrama de Moody se obtiene: f = 0,0153.

$$\frac{4\,C_f\,\Delta x}{D} = \frac{4\,C_f\,L_1^*}{D} = \frac{0{,}0153*15}{0{,}03444} = 6{,}6637$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo de Fanno se extrae:

$$M_1 = 0{,}2751;\ \ \frac{T_1}{T^*} = 1{,}1821\ ;\ \ \frac{P_1}{P^*} = 3{,}9534\ ;\ \ \frac{P_{01}}{P_0^*} = 2{,}2012\ ;$$

Entrando con $M_1 = 0{,}2751$ en la tabla de flujo isentrópico se obtiene:

$$\frac{T_1}{T_{01}} = 0{,}985084\ ;\ \ \frac{P_1}{P_{01}} = 0{,}94876\ ;$$

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{\dfrac{P_1}{P^*}}{\dfrac{P_1}{P_{01}}} = \frac{3{,}9534}{0{,}94876} = 4{,}1669$$

Puesto que esta relación de presiones, necesaria, es menor que la disponible, se concluye que el flujo, para esta segunda iteración, está bloqueado.

El número de Mach que se va a utilizar a la entrada del conducto para realizar la tercera iteración es:

$$M_1 = \frac{0{,}3824 + 0{,}2751}{2} = 0{,}32875$$

El diámetro del conducto será:

$$D = 0{,}036734 \text{ m}$$

$$R_e = \frac{V\,D\,\rho}{\mu} = \frac{55.660{,}74}{D} = \frac{55.660{,}74}{0{,}036734} = 1.515.237{,}65$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{1*10^{-5}}{0,036734} = 0,0002722$$

Del diagrama de Moody se obtiene: f = 0,0152.

$$\frac{4\ C_f\ \Delta x}{D} = \frac{4\ C_f\ L_1^*}{D} = \frac{0,0152*15}{0,036734} = 6,20678$$

De las tablas del flujo de Fanno se obtiene:

$$M_1 = 0,28269;\ \ \frac{T_1}{T^*} = 1,18112\ ;\ \ \frac{P_1}{P^*} = 3,845358\ ;\ \ \frac{P_{01}}{P_0^*} = 2,14736\ ;$$

Entrando con $M_1 = 0,28269$ en la tabla de flujo isentrópico se obtiene:

$$\frac{T_1}{T_{01}} = 0,98426\ ;\ \ \frac{P_1}{P_{01}} = 0,946\ ;$$

Consecuentemente, la diferencia de presión requerida para que el flujo este bloqueado es:

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}}{\frac{P_1}{P_{01}}} = \frac{3,845}{0,946} = 4,0644$$

Se comprueba que el flujo está bloqueado, con lo que se procede con la siguiente iteración, el Mach a utilizar será:

$$M_1 = \frac{0,32875 + 0,28269}{2} = 0,30572$$

El diámetro del conducto será ahora de: D = 0,03792m

$$R_e = \frac{V\ D\ \rho}{\mu} = \frac{55660,74}{D} = \frac{55660,74}{0,03792} = 1467846,51$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{1*10^{-5}}{0,03792} = 0,0002637$$

Del diagrama de Moody se obtiene: f = 0,0152.

$$\frac{4\ C_f\ \Delta x}{D} = \frac{4\ C_f\ L_1^*}{D} = \frac{0,0152*15}{0,03792} = 6,012658$$

De las tablas del flujo de Fanno se obtiene:

$$M_1 = 0{,}286;\ \frac{T_1}{T^*} = 1{,}18063\ ;\ \frac{P_1}{P^*} = 3{,}7980\ ;\ \frac{P_{01}}{P_0^*} = 2{,}12382\ ;$$

Entrando con $M_1 = 0{,}286$ en la tabla de flujo isentrópico se obtiene:

$$\frac{T_1}{T_{01}} = 0{,}9839\ ;\ \frac{P_1}{P_{01}} = 0{,}9447\ ;$$

La diferencia de presión requerida para que el flujo este bloqueado es:

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}}{\frac{P_1}{P_{01}}} = \frac{3{,}7980}{0{,}9447} = 4{,}0203$$

El flujo está bloqueado con lo que se puede proceder a la siguiente iteración, el nuevo número de Mach será.

$$M_1 = \frac{0{,}30572 + 0{,}286}{2} = 0{,}29586$$

El diámetro del conducto será ahora de: D = 0,03848m

$$R_e = \frac{V\,D\,\rho}{\mu} = \frac{55.660{,}74}{D} = \frac{55.660{,}74}{0{,}03848} = 1.446.484{,}92$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{1{*}10^{-5}}{0{,}03848} = 0{,}0002598$$

Del diagrama de Moody se obtiene: f = 0,0151.

$$\frac{4\,C_f\,\Delta x}{D} = \frac{4\,C_f\,L_1^*}{D} = \frac{0{,}0151{*}15}{0{,}03848} = 5.88617$$

De las tablas del flujo de Fanno se obtiene:

$$M_1 = 0{,}2884;$$

En este punto, se deja como ejercicio para el lector el comprobar que el flujo está bloqueado, así, la siguiene iteración empezaría con un numero de Mach de.

$$M_1 = \frac{0{,}29586 + 0{,}2884}{2} = 0{,}29214$$

De donde el diámetro del conducto sería: D = 0,038708m

Véase que este diámetro difiere del obtenido en la iteración anterior en pocas decimas de milímetro, con lo que se puede concluir que el número de Mach a la entrada será de $M_1 = 0,292$ y el diámetro del conducto necesario para que el flujo este bloqueado, siendo el caudal másico circulante el estipulado en el enunciado, de 0,0387m.

2.- En el segundo apartado del problema, se han situado otros dos conductos, paralelos al inicial entre los dos depósitos bajo estudio. El diámetro de estos dos conductos es de 0,2m y 0,01m respectivamente, se entiende que las presiones en ambos depósitos se mantienen iguales a las del apartado anterior, y se pide determinar el caudal másico circulante en cada conducto.

2a.- Se empezará hallando cual es el caudal másico circulante por el conducto de diámetro 0,2m.

Las características físicas para este conducto son:

$$D = 0,2 \text{ m}; L = 15 \text{ m}; \varepsilon = 0,0001\text{m}.$$

Como hipótesis inicial se supondrá que el flujo está bloqueado, en número de Mach a la salida del conducto es la unidad. Bajo esta hipótesis se establece:

$$\frac{4\ C_f\ \Delta x}{D} = \frac{4\ C_f\ L_1^*}{D} - \frac{4\ C_f\ L_2^*}{D} = \frac{4\ C_f\ L_1^*}{D}$$

Véase que el factor de fricción $f = 4\ C_f$ no se puede determinar dado que no se conoce el caudal másico circulante. El caudal másico esta dado por la ecuación:

$$\dot{m} = \frac{P_0\ A}{\sqrt{R\ T_0}} \sqrt{\gamma}\ M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\ M^2\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\right)}$$

Dicho caudal no es posible determinarlo dado que no se conoce el número de Mach a la entrada del conducto.

No obstante en este apartado se conoce que:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,0001}{0,2} = 0,0005$$

$$R_e = \frac{V\ D\ \rho}{\mu} = \frac{\dot{m}4}{\pi\ D\ \mu} = \frac{\dot{m}*4}{\pi*0,2*1,83*10^{-5}}$$

Dado que el número de Reynolds no se puede determinar, se realizará la hipótesis de que este valor es muy elevado y consecuentemente irrelevante. Entrando al diagrama de Moody con el valor de la rugosidad relativa, se obtiene: f = 0,0167.

Consecuentemente:

$$\frac{4\ C_f\ \Delta x}{D} = \frac{4\ C_f\ L_1^*}{D} = \frac{0,0167*15}{0,2} = 1,2525$$

Entrando con este valor en las tablas del flujo de Fanno se obtiene:

$$M_1 = 0,4792;\ \ \frac{T_1}{T^*} = 1,14725\ ;\ \ \frac{P_1}{P^*} = 2,23505\ ;\ \ \frac{P_{01}}{P_0^*} = 1,38174$$

Entrando con $M_1 = 0,4792$ en la tabla de flujo isentrópico, se tiene:

$$\frac{T_1}{T_{01}} = 0,9560892\ ;\ \ \frac{P_1}{P_{01}} = 0,854566\ ;$$

La diferencia de presión requerida para que el flujo este bloqueado es:

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}}{\frac{P_1}{P_{01}}} = \frac{2,23505}{0,854566} = 2,61542$$

Recordando que el gradiente de presiones de que se dispone es de 6, se puede afirmar que el flujo está bloqueado.

El caudal másico circulante es:

$$\dot{m} = \frac{600.000*\frac{\pi 0,2^2}{4}}{\sqrt{287*293}}\sqrt{1,4}*0,4792\left(1+\frac{1,4-1}{2}0,4792^2\right)^{-\left(\frac{1,4+1}{2(1,4-1)}\right)}$$

$$\dot{m} = 32,21\frac{Kg}{s}$$

Determinando ahora el valor del número de Reynods se obtiene:

$$R_e = \frac{V\ D\ \rho}{\mu} = \frac{\dot{m}4}{\pi\ D\ \mu} = \frac{32,21*4}{\pi*0,2*1,83*10^{-5}} = 11.205.537,43$$

Véase que este valor del número de Reynolds es tan elevado que es totalmente irrelevante a la hora determinar el factor de fricción. Con lo que se puede concluir que la hipótesis realizada al inicio de este apartado es totalmente válida y el factor de fricción vale f = 0,0167, siendo el caudal másico circulante el acabado de hallar.

2b.- Seguidamente se va a realizar el mismo proceso para el caso del conducto de 0,01 m de diámetro.

Los datos de partida son: D = 0,01 m; L = 15 m; ε = 0,0001m. El gradiente de presiones entre los dos depósitos es el mismo que el de los apartados anteriores. Se supone asimismo que el número de Mach a la salida del conducto es la unidad.

La rugosidad relativa valdrá:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,0001}{0,01} = 0,01$$

Realizando de nuevo la hipótesis de que el número de Reynolds es muy elevado, del diagrama de Moody se obtiene: f = 0,038.

$$\frac{4\ C_f\ \Delta x}{D} = \frac{4\ C_f\ L_1^*}{D} = \frac{0,038*15}{0,01} = 57$$

Entrando en las tablas de flujo de Fanno con este valor, se obtiene:

$$M_1 = 0,10811;\ \ \frac{T_1}{T^*} = 1,197194;\ \ \frac{P_1}{P^*} = 10,13509;\ \ \frac{P_{01}}{P_0^*} = 5,3979617$$

Entrando con $M_1 = 0,10811$ en la tabla de flujo isentrópico, se tiene:

$$\frac{T_1}{T_{01}} = 0,997667;\ \ \frac{P_1}{P_{01}} = 0,9918541$$

La diferencia de presión requerida para que el flujo este bloqueado es:

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}}{\frac{P_1}{P_{01}}} = \frac{10,13509}{0,9918541} = 10,2183 > 6 = \frac{600.000}{100.000}$$

Véase que en este caso, no existe flujo bloqueado, es decir, no se puede considerar que al final del conducto el número de Mach será la unidad, el flujo será subsónico en todos los puntos del conducto. Para hallar los números de Mach a la entrada y salida del conducto se realizará el siguiente proceso iterativo, se irán dando valores al número de mach a la entrada hasta obtener que el gradiente de presiones requerido entre entrada y salida del conducto sea exactamente igual al disponible. Por ahora se conoce que si el número de mach a la entrada es $M_1 = 0,10811$ el gradiente de presiones requerido es $\frac{P_{01}}{P_2} = 10,21$.

Véase además de que la suposición de que el número de Reynolds es muy elevado y que por consiguiente se puede determinar el factor de fricción basándose únicamente con el valor de la rugosidad relativa, no tiene porque ser correcta.

Con el fin de intuir aproximadamente cual es el número de Reynolds del flujo circulante, se utilizarán los valores acabados de determinar, es decir:

$$\dot{m} = \frac{600.000^* \frac{\pi 0,01^2}{4}}{\sqrt{287^*293}} \sqrt{1,4}^* 0,10811 \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 0,10811^2\right)^{-\left(\frac{1,4+1}{2(1,4-1)}\right)}$$

$$\dot{m} = 0,0206421 \frac{Kg}{s}$$

$$R_e = \frac{V\, D\, \rho}{\mu} = \frac{\dot{m} 4}{\pi\, D\, \mu} = \frac{0,0206421^* 4}{\pi^* 0,01^* 1,83^* 10^{-5}} = 143.619,45$$

Recuérdese que estos valores son una mera aproximación.

Con $\frac{\varepsilon}{D} = 0,01$ y $R_e = 143.619,45$ del diagrama de Moody se obtiene: f = 0,038. Véase que este valor es el mismo que el obtenido considerando un número de Reynols muy elevado, con lo que se puede decir que por ahora el valor del número de Re no es relevante.

La relación entre los parámetros de la entrada y salida del conducto viene dado por:

$$\frac{4\, C_f\, \Delta x}{D} = \frac{4\, C_f\, L_1^*}{D} - \frac{4\, C_f\, L_2^*}{D}$$

En realidad solo se conoce:

$$57 = \frac{0,038^* 15}{0,01} = \frac{0,038\, L_1^*}{0,01} - \frac{0,038\, L_2^*}{0,01}$$

Para empezar la iteración se va a considerar que el número de Mach a la entrada es de $M_1 = 0,107$. Entrando con este valor en las tablas de flujo de Fanno se obtiene:

$$\frac{4\, C_f\, L_1^*}{D} = 58,3582\ ;\ \frac{P_1}{P^*} = 10,24582\ ;.$$

Obsérvese que ahora la P^* no representa la presión a la salida del conducto.

De donde:

$$\frac{4\, C_f\, L_2^*}{D} = \frac{4\, C_f\, L_1^*}{D} - \frac{4\, C_f\, \Delta x}{D} = 58,3582 - 57 = 1,3582$$

Entrando con $\frac{4\, C_f\, L_2^*}{D} = 1,3528$ a las tablas del flujo de Fanno, se obtiene:

$$M_2 = 0,4691854;\ \frac{P_2}{P^*} = 2,2851115$$

De las tablas de flujo isentrópico, entrando con $M_1 = 0{,}107$, se obtiene $\frac{P_1}{P_{01}} = 0{,}992015$

Con lo que la relación de presiones requerida para que se cumplan estas condiciones es:

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}}{\frac{P_1}{P_{01}}\frac{P_2}{P^*}} = \frac{10{,}24582}{0{,}992015*2{,}2851115} = 4{,}5198$$

Se observa que, para $M_1 = 0{,}10811$; se ha obtenido $\frac{P_{01}}{P_2} = 10{,}2183$. Cuando $M_1 = 0{,}107$; se acaba de obtener que $\frac{P_{01}}{P_2} = 4{,}5198$; siendo el $M_2 = 0{,}4691854$. Obsérvese además que como el número de Mach a la entrada ha variado muy poco, el caudal másico, el número de Reynolds y el factor de fricción, serán prácticamente idénticos a los previamente determinados.

Se realiza una nueva iteración para $M_1 = 0{,}1077$. De Fanno se obtiene:

$$\frac{4\ C_f\ L_1^*}{D} = 57{,}50182\ ;\ \frac{P_1}{P^*} = 10{,}176\ ;$$

Obsérvese que de nuevo, la P^* no representa la presión a la salida del conducto.

$$\frac{4\ C_f\ L_2^*}{D} = \frac{4\ C_f\ L_1^*}{D} - \frac{4\ C_f\ \Delta x}{D} = 57{,}50182 - 57 = 0{,}50182$$

Con lo que en el punto 2 se puede decir que: $M_2 = 0{,}597407$; $\frac{P_2}{P^*} = 1{,}7717997$

De las relaciones de flujo isentrópico, con $M_1 = 0{,}1077$ se obtiene $\frac{P_1}{P_{01}} = 0{,}9919135$.

Así:

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}}{\frac{P_1}{P_{01}}\frac{P_2}{P^*}} = \frac{10{,}176}{0{,}9919135*1{,}7717997} = 5{,}79013$$

Obsérvese que esta relación de presiones es prácticamente de la que se dispone. Repitiendo el proceso para $M_1 = 0{,}10772$ se llega a:

Según Fanno $\frac{4\ C_f\ L_1^*}{D} = 57{,}47735\ ;\ \frac{P_1}{P^*} = 10{,}174$

De las tablas de flujo isentrópico, con $M_1 = 0{,}10772$ se obtiene $\frac{P_1}{P_{01}} = 0{,}9919106$.

Por otro lado:

$$\frac{4\ C_f\ L_2^*}{D} = \frac{4\ C_f\ L_1^*}{D} - \frac{4\ C_f\ \Delta x}{D} = 57{,}47735 - 57 = 0{,}47735$$

Entrando en las tablas de Fanno con este valor se tiene: $M_2 = 0{,}6036593$; $\frac{P_2}{P^*} = 1{,}7522756$

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}}{\frac{P_1}{P_{01}}\frac{P_2}{P^*}} = \frac{10{,}174}{0{,}9919106 * 1{,}7522756} = 5{,}853515$$

Si $M_1 = 0{,}10776$ se obtendría:

Según Fanno $\frac{4\ C_f\ L_1^*}{D} = 57{,}428416$; $\frac{P_1}{P^*} = 10{,}170017$

De las tablas de flujo isentrópico, con $M_1 = 0{,}10776$ se obtiene $\frac{P_1}{P_{01}} = 0{,}99191048$.

Por otro lado:

$$\frac{4\ C_f\ L_2^*}{D} = \frac{4\ C_f\ L_1^*}{D} - \frac{4\ C_f\ \Delta x}{D} = 57{,}428416 - 57 = 0{,}428416$$

Entrando en las tablas de Fanno con este valor se tiene: $M_2 = 0{,}616953$;

$$\frac{P_2}{P^*} = 1{,}7118629$$

$$\frac{P_{01}}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}}{\frac{P_1}{P_{01}}\frac{P_2}{P^*}} = \frac{10{,}170017}{0{,}99191048 * 1{,}7118629} = 5{,}98935 \cong 6$$

A priori se podría concluir que los números de Mach a la entrada y salida del conducto serán de:

$M_1 = 0{,}10776$; $M_2 = 0{,}616953$; pero antes de afirmar esto es necesario comprobar si el factor de fricción considerado ha sufrido variación. Para ello se determinará el caudal másico circulante, y el número de Reynolds.

$$\dot{m} = \frac{600.000 * \frac{\pi 0,01^2}{4}}{\sqrt{287*293}} \sqrt{1,4} * 0,10776 \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 0,10776^2\right)^{-\left(\frac{1,4+1}{2(1,4-1)}\right)}$$

$$\dot{m} = 0,0205762 \frac{Kg}{s}$$

$$R_e = \frac{V D \rho}{\mu} = \frac{\dot{m} 4}{\pi D \mu} = \frac{0,0205762*4}{\pi*0,01*1,83*10^{-5}} = 143.160,97$$

Véase que ni el caudal másico circulante ni el factor de fricción han experimentado variación apreciable alguna. Recordando que $\frac{\varepsilon}{D} = 0,01$, del diagrama de Moody se obtiene de nuevo f = 0,038, y así se concluye el problema.

Problema 104

Enunciado

El esquema de la figura 104.1 muestra dos depósitos unidos por un conducto de dos secciones diferentes. Las longitudes, los diámetros y la rugosidad absoluta de cada conducto se especifican en el esquema adjunto, donde también se indican las condiciones de presión y temperatura. Considerando que el fluido de trabajo es aire R = 287 J/(kg K) y el flujo es de Fanno, se pide hallar:

1. El número de Mach en los puntos 1, 2, 3 y 4.

2. El caudal másico circulante. ¿Está el flujo bloqueado? ¿Aparecerá una onda de choque en algún punto? Razona la respuesta.

Realiza las hipótesis que consideres oportunas.

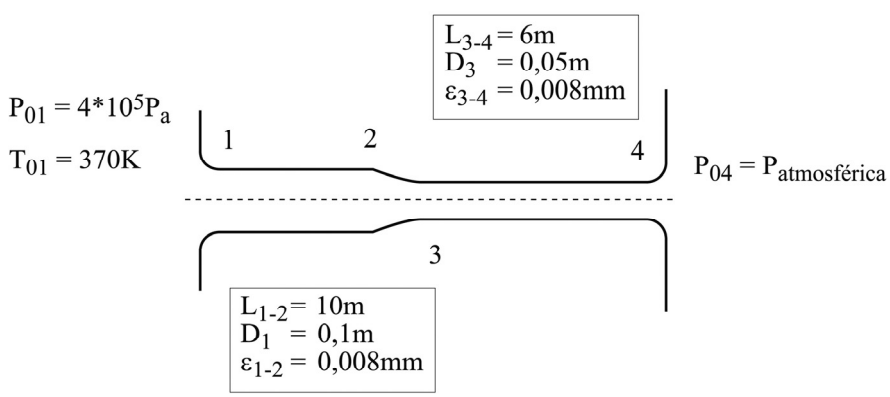


Fig. 104.1
Esquema de la instalación objeto de estudio

Resolución

1. Para determinar el número de Mach en los cuatro puntos establecidos, se realiza la hipótesis de que en uno de estos cuatro puntos el número de Mach vale la unidad; este punto ha de ser obligatoriamente el punto 4. Esta hipótesis debe comprobarse en este apartado.

Si se establece que $M_4 = 1$, y sabiendo que el flujo entre extremos de cada uno de los conductos es de Fanno, entre los puntos 3 y 4 se puede establecer la relación:

$$\frac{4C_f\,\Delta L}{D} = \frac{4C_f\,L_3^*}{D} - \frac{4C_f\,L_4^*}{D}$$

Como se ha supuesto que en el punto 4 el número de Mach es la unidad, se ha de cumplir que la longitud $L_4^* = 0$. En consecuencia, se tiene:

$$\frac{4C_f\,\Delta L}{D} = \frac{4C_f\,L_3^*}{D} = \frac{0,013*6}{0,05} = 1,56$$

Obsérvese que el factor de fricción $f = 4$, $C_f = 0,013$, se ha obtenido partiendo del valor de la rugosidad relativa $\frac{\varepsilon_{2-3}}{D_3} = \frac{0,008}{50} = 0,00016$, entrando con este valor en el diagrama de Moody y suponiendo que el número de Reynolds es muy elevado. Esta suposición implica que el factor de fricción es independiente del número de Reynolds, suposición que también debe comprobarse.

El número de Mach en el punto 3 se obtiene mediante la ecuación:

$$\frac{4C_f\,L_3^*}{D} = \frac{0,013*6}{0,05} = 1,56 = \frac{1-M_3^2}{\gamma M_3^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_3^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right\}}\right)$$

Para $\gamma = 1,4$, se obtiene $M_3 = 0,45053$.

La relación de temperaturas estáticas entre los puntos 3 y 4 se determina mediante la ecuación:

$$\frac{T_3}{T_4^*} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2} = 1,15318$$

La relación entre las presiones estáticas y las de estancamiento entre los mismos dos puntos da lugar a:

$$\frac{P_3}{P_4^*} = \frac{1}{M_3}\left\{\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = 2,3835\,; \qquad \frac{P_{03}}{P_{04}^*} = \frac{1}{M_3}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1,4473$$

Entre los puntos 2 y 3, se tiene un conducto de sección variable, con lo cual se supone flujo isentrópico, y se cumple: $P_{02} = P_{03}$; $T_{0\,2} = T_{03}$.

La relación entre las condiciones estáticas y de estancamiento en el punto 3 se establece como:

$$\frac{T_{03}}{T_3} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2 = 1,04059\,; \quad \frac{P_{03}}{P_3} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 1,149441$$

Por otro lado, para determinar las propiedades del fluido en el punto 2, es necesario utilizar la relación:

$$\frac{A_3}{A^*} = \frac{1}{M_3}\left\{\left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2\right)\right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = 1,44736$$

Es interesante destacar que la sección A^* no se corresponde con ninguna de las secciones definidas en el problema; así pues, es una sección ficticia en que el número de Mach es la unidad. Su valor será: $A^* = \dfrac{A_3}{1,44736} = \dfrac{\pi \dfrac{0,05^2}{4}}{1,44736} = 0,0013566\,\text{m}^2$

Entre las secciones 2 y A*, se establece:

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{\dfrac{\pi 0,1^2}{4}}{0,0013566} = 5,78944 = \frac{1}{M_2}\left\{\left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)\right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

y se obtiene $M_2 = 0,10056$.

La relación entre las condiciones estáticas y de estancamiento en el punto 2 será:

$$\frac{T_{02}}{T_2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 = 1,00202\,; \quad \frac{P_{02}}{P_2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 1,00709$$

Ahora, entre los puntos 1 y 2, se establece:

$$\frac{4 C_f \Delta L}{D} = \frac{4 C_f L_1^*}{D} - \frac{4 C_f L_2^*}{D}$$

Por otro lado, en el punto 2 se puede establecer:

$$\frac{4 C_f L_2^*}{D} = \frac{1 - M_2^2}{\gamma M_2^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln\left(\frac{(\gamma + 1) M_2^2}{2\left\{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right\}}\right) = 66,137$$

En consecuencia, se puede definir:

$$\frac{4C_f\,\Delta L}{D}=\frac{4C_f\,L_1^*}{D}-66{,}137$$

Entrando en el diagrama de Moody con el valor de $\frac{\varepsilon_{1-2}}{D_1}=\frac{0{,}008}{100}=0{,}00008$ y considerando que el número de Reynolds del flujo es muy elevado, se obtiene $4*C_f = f = 0{,}0115$; en consecuencia:

$$\frac{4C_f\,L_1^*}{D}=\frac{4C_f\,\Delta L}{D}+66{,}137=\frac{0{,}0115*10}{0{,}1}+66{,}137=67{,}287$$

de modo que el número de Mach en el punto 1 se obtendrá de la relación:

$$\frac{4C_f\,L_1^*}{D}=67{,}287=\frac{1-M_1^2}{\gamma M_1^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right\}}\right)$$

La solución es M1 = 0,099742; véase que este número de Mach es ligeramente menor que el del punto 2, tal como cabía esperar.

La relación entre las propiedades estáticas y de estancamiento en el punto 1 se establece:

$$\frac{T_{01}}{T_1}=1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2=1{,}00198\;;\quad\frac{P_{01}}{P_1}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=1{,}00698$$

Para saber si los datos hallados son ciertos, es necesario comprobar las hipótesis realizadas. La primera hipótesis y más importante ha sido considerar que, en el punto 4, el número de Mach era la unidad; esto se cumple solo si el gradiente de presiones existente entre los dos depósitos es mayor que el necesario para obtener flujo bloqueado. Recuérdese que la relación de presiones de que se dispone es de

$$\frac{P_{01}}{P_4}=\frac{4*10^5}{10^5}=4$$

Por otro lado, la relación teórica de presiones necesaria para que el flujo esté bloqueado se define como:

$$\frac{P_{01}}{P_4}=\frac{P_{01}}{P_0^*}\frac{P_0^*}{P_{02}}\frac{P_{03}}{P_{04}}\frac{P_{04}}{P_4}$$

La relación $\frac{P_{01}}{P_0^*}$ se obtiene mediante la ecuación:

$$\frac{P_{01}}{P_0^*} = \frac{1}{M_1}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 5,8367$$

Homólogamente, se obtiene:

$$\frac{P_{02}}{P_0^*} = \frac{1}{M_2}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 5,7897$$

La relación $\frac{P_{03}}{P_{04}^*}$ se ha hallado anteriormente y valía:

$$\frac{P_{03}}{P_{04}^*} = \frac{1}{M_3}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1,4473$$

Por último, la relación entre la presión estática y de estancamiento en el punto 4 se obtiene de la expresión:

$$\frac{P_{04}}{P_4} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1,8929$$

de donde se concluye que:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_0^*}\frac{P_0^*}{P_{02}}\frac{P_{03}}{P_{04}}\frac{P_{04}}{P_4} = 5,8367 * \frac{1}{5,7897} * 1,4473 * 1,8929 = 2,7618$$

Obsérvese que la relación de presiones necesaria para que exista un flujo bloqueado es bastante menor de la que se tiene, con lo cual cabe concluir que el flujo está bloqueado y que los números de Mach hallados son correctos. No obstante, es cierto que se han de comprobar los factores de fricción, ya que se ha supuesto que el flujo lleva asociado un número de Reynolds muy elevado. Esta segunda hipótesis se contrastará una vez se haya determinado el flujo másico circulante.

2. En este segundo apartado, se desea hallar el caudal másico circulante; para ello, se utiliza la ecuación:

$$\dot{m} = \frac{P_0 A}{\sqrt{R T_0}} \sqrt{\gamma}\, M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

Esta ecuación se puede aplicar a cualquiera de los cuatro puntos hallados. Aplicándola en el punto 1, donde se tiene que P_{01} = 4*105 Pa, T_{01} = 370 K y M_1 = 0,099742, se concluye:

$$\dot{m} = \frac{4*10^5 * \frac{\pi}{4} 0{,}1^2}{\sqrt{287*370}} \sqrt{\gamma}\, 0{,}099742 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} 0{,}099742^2\right)^{-\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} = 1{,}13099 \frac{kg}{s}$$

En función de los datos obtenidos, se concluye que el flujo está bloqueado y que en ningún punto del conducto aparecerá onda de choque alguna; obsérvese que la tobera es convergente. No obstante, antes de dar por finalizado el problema, es necesario comprobar que los factores de fricción estimados son, en realidad, los correctos.

El número de Reynolds se define mediante la ecuación:

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{VD\rho A}{\mu A} = \frac{\dot{m} D}{\mu \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\dot{m}\, 4}{\pi D \mu}$$

La viscosidad absoluta del aire a 370 K es aproximadamente de μ = 21,81*10-6 kg/(m s), con lo cual el número de Reynolds en los conductos de mayor y menor diámetro será, respectivamente, de Re = 660.113,79; Re = 1.320.227,59. Es importante recordar que estos números de Reynolds que se acaban de hallar son únicamente aproximados, dado que en realidad se deberían hallar utilizando la viscosidad del fluido para las condiciones de presión y temperatura medias en cada uno de los dos conductos.

Una vez se ha llegado a este punto, se puede comprobar si los factores de fricción determinados previamente son correctos o no. Para el conducto de menor diámetro, entrando en el diagrama de Moody con los valores de $\frac{\varepsilon_{2-3}}{D_3} = \frac{0{,}008}{50} = 0{,}00016$ y Re = 1.320.227,59, se obtiene f = 0,014.

Para el conducto de mayor diámetro, se concluye que cuando $\frac{\varepsilon_{1-2}}{D_1} = \frac{0{,}008}{100} = 0{,}00008$ y Re = 660.113,79, el factor de fricción vale f = 0,0135.

Puesto que en ambos diámetros de conducto el factor de fricción que se ha supuesto inicialmente no es el que se ha obtenido con posterioridad, es necesario rehacer el problema con los nuevos datos.

El nuevo número de Mach en el punto 3 se obtendrá mediante la ecuación:

$$\frac{4C_f L_3^*}{D} = \frac{0.014*6}{0.05} = 1.68 = \frac{1-M_3^2}{\gamma M_3^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_3^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right\}}\right)$$

Para $\gamma = 1{,}4$, se obtiene $M_3 = 0{,}44088$.

La relación de temperaturas estáticas entre los puntos 3 y 4 se determina mediante la ecuación:

$$\frac{T_3}{T_4^*} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2} = 1{,}15509$$

La nueva relación entre las presiones estáticas y las de estancamiento entre los mismos dos puntos da lugar a:

$$\frac{P_3}{P_4^*} = \frac{1}{M_3}\left\{\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = 2{,}4377\,; \qquad \frac{P_{03}}{P_{04}^*} = \frac{1}{M_3}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1.4717$$

Entre los puntos 2 y 3, se supone flujo isentrópico y se cumple: $P_{02} = P_{03}$, $T_{02} = T_{03}$.

La nueva relación entre las condiciones estáticas y de estancamiento en el punto 3 se establece como:

$$\frac{T_{03}}{T_3} = 1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2 = 1{,}0388\,; \quad \frac{P_{03}}{P_3} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1{,}1428$$

Las propiedades del fluido en el punto 2 se determinan mediante la relación:

$$\frac{A_3}{A^*} = \frac{1}{M_3}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1{,}4717$$

Es interesante recordar que la sección A* no se corresponde con ninguna de las secciones definidas en el problema; es, pues, una sección ficticia donde el número de Mach es la unidad. Su valor será $A^* = \frac{A_3}{1{,}4717} = \frac{\pi\frac{0{,}05^2}{4}}{1{,}4717} = 0{,}0013341\,m^2$

Entre las secciones 2 y A^*, se establece:

$$\frac{A_2}{A^*}=\frac{\frac{\pi 0,1^2}{4}}{0,0013341}=5,88688=\frac{1}{M_2}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

y se obtiene $M_2 = 0,09888$

La relación entre las condiciones estáticas y de estancamiento en el punto 2 será:

$$\frac{T_{02}}{T_2}=1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2=1,001955\,;\quad \frac{P_{02}}{P_2}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=1,00686$$

Obsérvese que, hasta el momento, los valores han variado de forma casi insignificante.

Entre los puntos 1 y 2, se establece que:

$$\frac{4C_f\,\Delta L}{D}=\frac{4C_f\,L_1^*}{D}-\frac{4C_f\,L_2^*}{D}$$

Por otro lado, en el punto 2 se puede definir la relación:

$$\frac{4C_f\,L_2^*}{D}=\frac{1-M_2^2}{\gamma M_2^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_2^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right\}}\right)=68,529$$

En consecuencia, se puede definir:

$$\frac{4C_f\,\Delta L}{D}=\frac{4C_f\,L_1^*}{D}-68,529$$

Utilizando ahora el nuevo factor de fricción f = 0,0135 determinado al principio del segundo apartado, se obtiene:

$$\frac{4C_f\,L_1^*}{D}=\frac{4C_f\,\Delta L}{D}+68,529=\frac{0,0135*10}{0,1}+68,529=69,879$$

con lo cual el número de Mach en el punto 1 se obtendrá de la relación:

$$\frac{4C_f\,L_1^*}{D}=69.879=\frac{1-M_1^2}{\gamma M_1^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right\}}\right)$$

La solución es $M_1 = 0,097968$. Véase que este número de Mach es ligeramente menor que el del punto 2, como cabía esperar.

La relación entre las propiedades estáticas y de estancamiento en el punto 1 es:

$$\frac{T_{01}}{T_1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 = 1,001919 \; ; \quad \frac{P_{01}}{P_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 1,00673$$

Aunque ahora parece evidente, se comprobará de nuevo si la relación de presiones requerida para flujo bloqueado es menor que la que se dispone.

La relación teórica de presiones necesaria para que el flujo esté bloqueado se define como:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{02}} \frac{P_{03}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4}$$

La relación $\frac{P_{01}}{P_0^*}$ se obtiene mediante la ecuación:

$$\frac{P_{01}}{P_0^*} = \frac{1}{M_1} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = 5,9411$$

Homólogamente, se obtiene:

$$\frac{P_{02}}{P_0^*} = \frac{1}{M_2} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = 5,8869$$

La relación $\frac{P_{03}}{P_{04}^*}$ se ha hallado anteriormente y valía:

$$\frac{P_{03}}{P_{04}^*} = \frac{1}{M_3} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = 1,4717$$

Por último, la relación entre la presión estática y de estancamiento en el punto 4 se obtiene de la expresión:

$$\frac{P_{04}}{P_4} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_4^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 1,8929$$

de donde se concluye que:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{02}} \frac{P_{03}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4} = 5,9411 * \frac{1}{5,8869} * 1,4717 * 1,8929 = 2,811$$

Claramente, el flujo sigue estando bloqueado.

Determinando el nuevo caudal másico en el punto 1, se tiene:

$$\dot{m} = \frac{4*10^5 * \frac{\pi}{4} 0,1^2}{\sqrt{287*370}} \sqrt{\gamma}\, 0,097968 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} 0,097968^2\right)^{-\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} = 1,11107 \frac{kg}{s}$$

Manteniendo la misma viscosidad que en el caso precedente, los nuevos números de Reynolds para el diámetro mayor y menor, respectivamente, son Re = 648.492,57; Re = 1.296.974,56.

Dado que los números de Reynolds son casi idénticos a los obtenidos en el caso precedente, se puede concluir que los factores de fricción no variarán y se considerarán definitivos los datos obtenidos en esta segunda iteración.

Problema 105

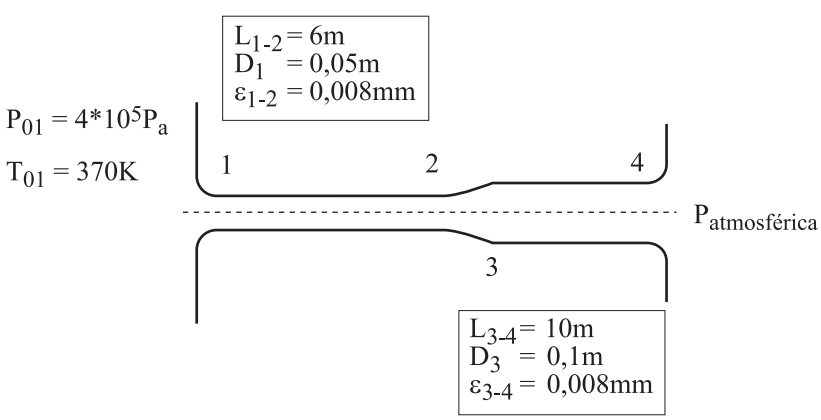
Enunciado

El esquema de la figura 105.1 muestra dos depósitos unidos por un conducto de dos secciones diferentes. Las longitudes, los diámetros y la rugosidad absoluta de cada conducto se especifican en el esquema adjunto; también se indican las condiciones de presión y temperatura. Considerando que el fluido de trabajo es aire R = 287 J/(kg K) y el flujo es de Fanno, se pide hallar:

1. El número de Mach en los puntos 1, 2, 3 y 4, así como el caudal másico circulante. ¿Está el flujo bloqueado? ¿Aparecerá una onda de choque en algún punto? Razona la respuesta.

2. La distribución de presiones y temperaturas en los diversos puntos definidos a lo largo de los dos conductos.

Fig. 105.1



Resolución

1. Tal vez lo más importante en este problema es observar que, aunque tenga un parecido físico con el problema precedente, el proceso de resolución ha de ser muy diferente, dado que ahora, al tener una tobera divergente, cabe la posibilidad de que aparezca una onda de choque en el interior de la instalación. Véase además que, si en esta instalación existiese flujo bloqueado, el número de Mach crítico aparecería en el punto 2. Esta será inicialmente la hipótesis que se va a realizar, $M_2 = 1$.

Si se considera que en el punto 2 el número de Mach es la unidad, en el punto 3 el número de Mach puede ser subsónico o supersónico y, si es supersónico, puede ser que exista una onda de choque entre estos dos puntos o no. La relación de presiones entre los dos extremos de los conductos es la que va a caracterizar la situación real existente.

Suponiendo $M_2 = 1$ y considerando flujo de Fanno, el número de Mach en el punto 1 se determinará partiendo de la expresión:

$$\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{4C_f L_1^*}{D} - \frac{4C_f L_2^*}{D}$$

Bajo la hipótesis de partida, se establece que $L_2^* = 0$, de donde:

$$\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{0.013 * 6}{0,05} = 1,56$$

Véase que el factor de fricción $f = 4\ C_f$ se ha obtenido mediante el diagrama de Moody y partiendo de la relación:

$$\frac{\varepsilon_{1-2}}{D_1} = \frac{0,008}{50} = 0,00016$$

En realidad, se ha supuesto además que el número de Reynolds asociado al flujo es muy elevado. Esta nueva hipótesis debe ser contrastada.

De la siguiente relación, y considerando un índice de politropía de $\gamma = 1,4$, se obtiene que el número de Mach en el punto 1 será de $M_1 = 0,4505$.

$$\frac{4C_f L_{1-2}^*}{D} = \frac{0,013 * 6}{0,05} = 1,56 = \frac{1 - M_1^2}{\gamma M_1^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right\}} \right)$$

Sustituyendo el número de Mach del punto 1 en las expresiones siguientes, se obtiene la relación de las diversas variables entre los puntos 1 y 2.

$$\frac{T_1}{T^*}=\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}=1{,}1531$$

$$\frac{P_1}{P^*}=\frac{P_1}{P_2}=\frac{1}{M_1}\left\{\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right\}^{\frac{1}{2}}=2{,}3837\ ;$$

$$\frac{P_{01}}{P_0^*}=\frac{P_{01}}{P_{02}}=\frac{1}{M_1}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}=1{,}4474$$

Entre los puntos 2 y 3, se supone flujo isentrópico, partiendo de la relación de secciones:

$$\frac{A_3}{A_2}=\frac{A_3}{A^*}=\frac{\frac{\pi}{4}*0.1^2}{\frac{\pi}{4}*0.05^2}=4=\frac{1}{M_3}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Se obtendrá el número de Mach en el punto 3, que, como se ha dicho anteriormente, a priori puede ser subsónico o supersónico. Los dos valores posibles son $M_3 = 0{,}14655$, $M_3 = 2{,}94018$.

Suponiendo ahora flujo subsónico en el punto 3, las condiciones en el punto 4 se obtienen de aplicar la ecuación:

$$\frac{4C_f\,\Delta L}{D}=\frac{4C_f\,L_3^*}{D}-\frac{4C_f\,L_4^*}{D}$$

El coeficiente de fricción entre los puntos 3 y 4 se obtendrá mediante el diagrama de Moody y entrando con el valor de $\frac{\varepsilon_{3-4}}{D_3}=\frac{0{,}008}{100}=0{,}00008$, al igual que en el conducto anterior se considera que el número de Reynolds asociado al fluido circulante es muy elevado. Se obtiene que f = 4 C_f = 0,0115; en consecuencia, se establece que $\frac{4C_f\,\Delta L}{D}=\frac{0{,}0115*10}{0{,}1}=1{,}15$

Mediante la ecuación que se enuncia a continuación y sustituyendo $M_3 = 0{,}14655$, se obtiene:

$$\frac{4C_f\,L_3^*}{D}=\frac{1-M_3^2}{\gamma M_3^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_3^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right\}}\right)=29{,}4045$$

El número de Mach en el punto 4 se obtiene partiendo de:

$$\frac{4C_f L_4^*}{D} = \frac{4C_f L_3^*}{D} - \frac{4C_f \Delta L}{D} = 29,4045 - 1,15 = 28,2545$$

Bajo los considerandos realizados hasta el momento, el número de Mach en el punto 4 se obtendrá mediante la ecuación:

$$28.2545 = \frac{1-M_4^2}{\gamma M_4^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln\left(\frac{(\gamma+1)M_4^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right\}} \right)$$

de donde $M_4 = 0,1492$.

En este punto, se ha de valorar si la relación de presiones existente entre los extremos de los conductos es la apropiada para que exista flujo subsónico en los puntos 3 y 4. La relación de presiones de que se dispone es $\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{4*10^5}{10^5} = 4.$

Por otro lado, la relación teórica de presiones necesaria para que en el punto 2 el número de Mach sea la unidad y en los puntos 1, 3 y 4 el flujo sea subsónico se define como:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4}$$

La primera relación se ha obtenido previamente y vale $\frac{P_{01}}{P_{02}} = 1,4474$, entre los puntos 2 y 3, y se ha considerado flujo isentrópico, con lo cual se concluye que $P_{02} = P_{03}$.

La relación $\frac{P_{03}}{P_{04}}$ se obtendrá de hallar las relaciones, $\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{P_{03}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}}$, de donde cada una de las relaciones restantes se obtiene al sustituir el número de Mach de los puntos 3 y 4 en las expresiones.

$$\frac{P_{03}}{P_0^*} = \frac{1}{M_3} \left\{ \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 3,9999 ; \qquad \frac{P_{04}}{P_0^*} = \frac{1}{M_4} \left\{ \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 3,9307$$

de donde $\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{P_{03}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}} = 3,9999 \frac{1}{3,9307} = 1,0176$

Por último, la relación $\frac{P_{04}}{P_4}$ se obtiene de sustituir el Mach del punto 4 en la ecuación:

$$\frac{P_{04}}{P_4}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=1,0156$$

En consecuencia, la relación de presiones requerida para que el flujo sea subsónico en todo el tramo comprendido entre los puntos 2 y 4 será:

$$\frac{P_{01}}{P_4}=\frac{P_{01}}{P_{02}}\frac{P_{02}}{P_{03}}\frac{P_{03}}{P_{04}}\frac{P_{04}}{P_4}=1,4474*1*1,0176*1,0156=1,4959$$

Se observa que el gradiente de presiones requerido es bastante menor que el disponible, con lo cual se concluye que el flujo será supersónico en algún punto. Se debe realizar de nuevo este apartado, pero considerando que en el punto 3 el flujo es supersónico, es decir, $M_3 = 2,94018$.

Bajo este nuevo considerando, el número de Mach en el punto 4 se obtendrá mediante la relación:

$$\frac{4C_f\,\Delta L}{D}=\frac{4C_f\,L_3^*}{D}-\frac{4C_f\,L_4^*}{D}$$

Realizando las mismas hipótesis que en el apartado precedente en lo que respecta a la obtención del factor de fricción, para este caso se establece también que $\frac{4C_f\,\Delta L}{D}=\frac{0,0115*10}{0,1}=1,15.$

Por otro lado, sustituyendo el nuevo número de Mach del punto 3 en la siguiente ecuación, se obtiene:

$$\frac{4C_f\,L_3^*}{D}=\frac{1-M_3^2}{\gamma M_3^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_3^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right\}}\right)=0,5129$$

En consecuencia. $\frac{4C_f\,L_4^*}{D}=\frac{4C_f\,L_3^*}{D}-\frac{4C_f\,\Delta L}{D}=0,5129-1,15=-0,6371$

Claramente este resultado es imposible, lo cual indica que en el punto 3 el número de Mach ha de ser menor que $M_3 = 2,94018$. Este resultado indica también que la longitud del conducto entre los puntos 3 y 4 es demasiado larga para que el número de Mach pase de $M_3 = 2,94$ al valor de $M_4 = 1$, que es el valor máximo que se podría tener bajo estas condiciones en el punto 4. También se podría entender que, en realidad, el gradiente de presiones entre los dos depósitos no es suficiente para que en el punto 3 el número de Mach sea supersónico.

Una manera de comprobar lo que acabamos de decir es determinar el número de Mach en el punto 4 y el gradiente de presiones requerido entre los dos depósitos para que el número de Mach en el punto 3 sea supersónico. Esto se puede realizar si se considera, por ejemplo, una longitud de conducto entre los puntos 3 y 4 de 4 m, en lugar de los 10 m iniciales. Véase que, para este caso hipotético, se tendría:

$$\frac{4C_f\,\Delta L}{D}=\frac{0,0115*4}{0,1}=0,46$$

de donde se obtiene $\frac{4C_f\,L_4^*}{D}=\frac{4C_f\,L_3^*}{D}-\frac{4C_f\,\Delta L}{D}=0,5129-0,46=0,0529$

con lo cual el número de Mach en el punto 4 se obtendrá de la expresión siguiente:

$$\frac{4C_f\,L_4^*}{D}=0,0529=\frac{1-M_4^2}{\gamma M_4^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_4^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right\}}\right)$$

El resultado es $M_4 = 1,2636$.

Es importante destacar que, para este caso hipotético, el flujo sería supersónico entre los puntos 2 y 3, y el Mach entre estos dos puntos sería creciente. Entre los puntos 3 y 4, el flujo también sería supersónico, aunque el Mach sería decreciente.

El gradiente de presiones requerido para que en los puntos 3 y 4 exista flujo supersónico sería:

$$\frac{P_{01}}{P_4}=\frac{P_{01}}{P_{02}}\frac{P_{02}}{P_{03}}\frac{P_{03}}{P_{04}}\frac{P_{04}}{P_4}$$

Las relaciones $\frac{P_{01}}{P_{02}}=1,4474$ y $P_{02}=P_{03}$ son las mismas que en el apartado anterior.

La relación $\frac{P_{03}}{P_{04}}$ se obtendrá de hallar las relaciones $\frac{P_{03}}{P_{04}}=\frac{P_{03}}{P_0^*}\frac{P_0^*}{P_{04}}$, donde cada una de las relaciones restantes se obtiene sustituyendo el número de Mach en los puntos 3 y 4 $M_3 = 2,94018$, $M_4 = 1,2636$, respectivamente, en las expresiones siguientes:

$$\frac{P_{03}}{P_0^*}=\frac{1}{M_3}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}=4,0000\,;\qquad \frac{P_{04}}{P_0^*}=\frac{1}{M_4}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}=1,0517$$

de donde $\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{P_{03}}{P_0^*}\frac{P_0^*}{P_{04}} = 4,0000\frac{1}{1,0517} = 3,8033$

Para $M_4 = 1,2636$, se obtiene:

$$\frac{P_{04}}{P_4} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 2,6378$$

con lo cual el gradiente de presiones requerido para que los números de Mach en los puntos 3 y 4 sean supersónicos, y el conducto que une estos puntos sea de 4 metros, es:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}}\frac{P_{02}}{P_{03}}\frac{P_{03}}{P_{04}}\frac{P_{04}}{P_4} = 1,4474*1*3,8033*2,6378 = 14,520$$

Véase que el gradiente de presiones requerido es muy superior al que se tiene. Se concluye que el flujo ha de ser subsónico en el punto 3, y entre los puntos 2 y 3 existirá una onda de choque. El primer caso a evaluar es suponiendo que la onda de choque está situada en el punto 3.

Bajo este nuevo considerando, se supone de nuevo que $M_2 = 1$ y que M_1 y M_3 son los ya previamente determinados, $M_1 = 0,4505$, y $M_3 = 2,94018$. Como ahora en el punto 3 se supone que existe una onda de choque plana, el número de Mach detrás de la onda de choque M_{3bis} será:

$$M_{3bis} = \left[\frac{\frac{2}{\gamma-1}+M_3^2}{\frac{2\gamma}{\gamma-1}M_3^2-1}\right]^{\frac{1}{2}} = 0,4788$$

Entrando con este número de Mach en la expresión siguiente, se obtiene:

$$\frac{4C_f L_{3bis}^*}{D} = \frac{1-M_{3bis}^2}{\gamma M_{3bis}^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_{3bis}^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_{3bis}^2\right\}}\right) = 1,2568$$

La relación entre los puntos 3bis y 4 será:

$$\frac{4C_f L_4^*}{D} = \frac{4C_f L_{3bis}^*}{D} - \frac{4C_f \Delta L}{D} = 1,2568 - \frac{0,0115*10}{0,1} = 0,1068$$

Obsérvese que se ha considerado la longitud inicial del enunciado.

El nuevo número de Mach en el punto 4 se determina mediante la expresión:

$$\frac{4C_f L_4^*}{D} = 0{,}1068 = \frac{1-M_4^2}{\gamma M_4^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_4^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right\}}\right)$$

de donde $M_4 = 0{,}7663$.

La relación de presiones de estancamiento entre los puntos 3 y 3bis se obtiene entrando con $M_3 = 2{,}94018$ en la relación.

$$\frac{P_{03bis}}{P_{03}} = \left(\frac{\gamma+1}{2}M_3^2\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)^{\frac{-\gamma}{(\gamma-1)}}\left(\frac{2\gamma}{1+\gamma}M_3^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{-1}{(\gamma-1)}} = 0{,}3456$$

La relación $\frac{P_{03bis}}{P_{04}}$ se obtiene de hallar las relaciones $\frac{P_{03bis}}{P_{04}} = \frac{P_{03bis}}{P_0^*}\frac{P_0^*}{P_{04}}$, de donde cada una de las relaciones restantes se obtiene al sustituir el número de Mach en los puntos 3bis y 4 $M_{3bis} = 0{,}4788$, $M_4 = 0{,}7663$, respectivamente, en las expresiones siguientes:

$$\frac{P_{03bis}}{P_0^*} = \frac{1}{M_3}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1{,}3826\,; \qquad \frac{P_{04}}{P_0^*} = \frac{1}{M_4}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1{,}0537$$

de donde $\frac{P_{03bis}}{P_{04}} = \frac{P_{03bis}}{P_0^*}\frac{P_0^*}{P_{04}} = 1{,}3826\frac{1}{1{,}0537} = 1{,}3121$

Para $M_4 = 0{,}7663$, se obtiene:

$$\frac{P_{04}}{P_4} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1{,}4749$$

El gradiente de presiones requerido para este caso debe ser:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}}\frac{P_{02}}{P_{03}}\frac{P_{03}}{P_{03bis}}\frac{P_{03bis}}{P_{04}}\frac{P_{04}}{P_4} = 1{,}4474*1*\frac{1}{0{,}3456}*1{,}3121*1{,}4749 = 8{,}1053$$

Este resultado indica que la onda de choque no está a la salida de la tobera, punto 3, con lo cual la onda de choque deberá estar situada entre los puntos 2 y 3.

El caso siguiente que se analiza es que la onda de choque esté localizada en el diámetro medio de la tobera, diámetro $D_2 = 0{,}075$m; los nuevos puntos que se van a considerar en la instalación están definidos en la figura 105.2.

Véase que la suposición de que en el punto 2 el número de Mach es la unidad se mantiene, con lo cual el número de Mach en el punto 1 sigue siendo el mismo que el que se ha hallado en los apartados anteriores, $M_1 = 0{,}4505$.

El número de Mach en el punto 3, situado ahora en la posición media de la tobera, se obtiene de la ecuación:

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{A_3}{A^*} = \frac{\frac{\pi}{4} * 0{,}075^2}{\frac{\pi}{4} * 0{,}05^2} = 2{,}25 = \frac{1}{M_3}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

de donde el número de Mach en el punto 3 será $M_3 = 2{,}3181$. Obsérvese que la ecuación da también como posible solución $M_3 = 0{,}2684$, pero este valor debe descartarse, dado que en el nuevo punto 3 el número de Mach ha de ser supersónico.

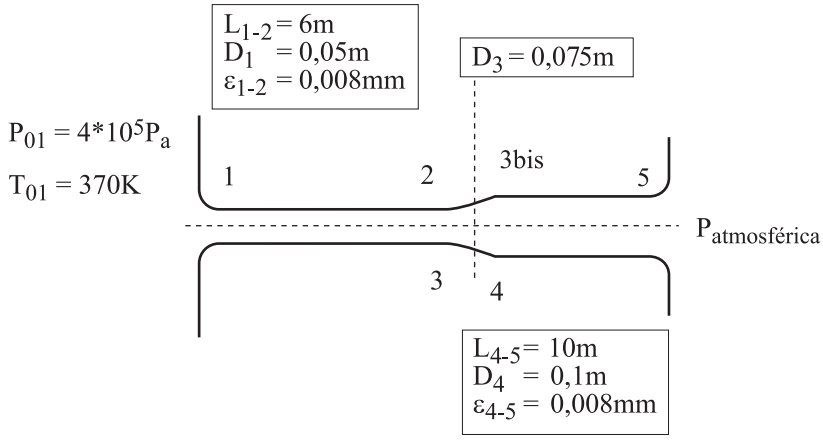


Fig. 105.2 Esquema de la instalación, con el punto 3 situado en el centro de la tobera, punto donde ahora se supone que existe una onda de choque

El número de Mach en el punto 3bis ahora será:

$$M_{3bis} = \left[\frac{\frac{2}{\gamma-1}+M_3^2}{\frac{2\gamma}{\gamma-1}M_3^2-1}\right]^{\frac{1}{2}} = 0{,}5322$$

Para hallar el número de Mach en el punto 4, se debe determinar, partiendo del número de Mach en el punto 3bis, la sección A^* ficticia, y después utilizar dicha sección para determinar el Mach en 4, se procede del modo siguiente:

$$\frac{A_{3bis}}{A^*}=\frac{\frac{\pi}{4}*0,075^2}{A^*}=\frac{1}{M_{3bis}}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{3bis}^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}=1,2828$$

$$A^*=\frac{\frac{\pi}{4}*0,075^2}{1,2828}$$

Ahora, entre la sección A^* y la sección 4, se tiene:

$$\frac{A_4}{A^*}=\frac{1,2828*\frac{\pi}{4}*0.1^2}{\frac{\pi}{4}*0,075^2}=2,2805=\frac{1}{M_4}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

de donde el número de Mach en el punto 4 será $M_4 = 0,2645$.

Para este número de Mach en el punto 4 se puede establecer:

$$\frac{4C_f L_4^*}{D}=\frac{1-M_4^2}{\gamma M_4^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_4^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right\}}\right)=7,3601$$

Entre los puntos 4 y 5, se establece:

$$\frac{4C_f L_5^*}{D}=\frac{4C_f L_4^*}{D}-\frac{4C_f \Delta L}{D}=7,3601-\frac{0,0115*10}{0,1}=6,2101$$

de donde el número de Mach en el punto 5 será:

$$\frac{4C_f L_5^*}{D}=6,2101=\frac{1-M_5^2}{\gamma M_5^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_5^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_5^2\right\}}\right)$$

$$M_5 = 0,2825$$

La relación de presiones requerida para este considerando será:

Al igual que en los apartados anteriores, entre los puntos 1 y 2 se establece $\frac{P_{01}}{P_{02}}=1,4474$, entre los puntos 2 y 3 se concluye que $P_{02} = P_{03}$. Entre los puntos 3 y 3bis, para $M_3 = 2,3181$, se establece:

$$\frac{P_{03bis}}{P_{03}}=\left(\frac{\gamma+1}{2}M_3^2\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)^{\frac{-\gamma}{(\gamma-1)}}\left(\frac{2\gamma}{1+\gamma}M_3^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{-1}{(\gamma-1)}}=0,5753$$

Entre los puntos 3bis y 4, se tiene que $P_{03bis} = P_{04}$.

Entre los puntos 4 y 5, se concluye:

$\frac{P_{04}}{P_{05}} = \frac{P_{04}}{P_0^*}\frac{P_0^*}{P_{05}}$, de donde cada una de las relaciones restantes se obtiene sustituyendo el número de Mach en los puntos 4 y 5 $M_4 = 0{,}2645$, $M_5 = 0{,}2825$, respectivamente, en las expresiones siguientes:

$$\frac{P_{04}}{P_0^*} = \frac{1}{M_4}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 2{,}28104\,; \qquad \frac{P_{05}}{P_0^*} = \frac{1}{M_5}\left\{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_5^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 2{,}1481$$

de donde $\frac{P_{04}}{P_{05}} = \frac{P_{04}}{P_0^*}\frac{P_0^*}{P_{05}} = 2{,}28104\frac{1}{2{,}1481} = 1{,}0618$

Para $M_5 = 0{,}2825$, se obtiene:

$$\frac{P_{05}}{P_5} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_5^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1{,}0569$$

El gradiente de presiones requerido para este caso considerado ha de ser:

$$\frac{P_{01}}{P_5} = \frac{P_{01}}{P_{02}}\frac{P_{02}}{P_{03}}\frac{P_{03}}{P_{03bis}}\frac{P_{03bis}}{P_{04}}\frac{P_{04}}{P_{05}}\frac{P_{05}}{P_5} = 1{,}4474*1*\frac{1}{0{,}5753}*1*1{,}0618*1{,}0569 = 2{,}8233$$

Dado que este gradiente de presiones es menor que el disponible, se puede concluir que la onda de choque está situada entre el diámetro de 0,075 m y 0,1 m. El proceso para determinar la sección exacta donde se crea la onda de choque es el mismo que el que se acaba de presentar. En cualquier caso, se concluye que el flujo está bloqueado, con lo cual las condiciones en los puntos 1 y 2 son las ya definidas.

El caudal másico circulante será:

$$\dot{m} = \frac{4*10^5*\frac{\pi}{4}0{,}05^2}{\sqrt{287*370}}\sqrt{\gamma}\,0{,}4505\left(1+\frac{\gamma-1}{2}0{,}4505^2\right)^{-\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} = 1{,}1401\frac{kg}{s}$$

Cabe recordar que los factores de fricción para cada uno de los dos conductos se han obtenido en función de la rugosidad relativa y considerando que el número de Reynolds

es muy elevado. Esta hipótesis debe corroborarse; el número de Reynolds para los tramos 1-2 y 4-5 vale:

El número de Reynolds se define mediante la ecuación:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{VD\rho A}{\mu A} = \frac{\dot{m}D}{\mu \dfrac{\pi D^2}{4}} = \frac{\dot{m}\,4}{\pi D \mu}$$

La viscosidad absoluta del aire a 370 K es, aproximadamente, de $\mu = 21{,}81*10^{-6}$ kg/(m s), con lo cual el número de Reynolds en los conductos de menor y mayor diámetro será, respectivamente, de Re = 1.331.151,2; Re = 665.575,6. Es importante recordar que los números de Reynolds que se acaban de hallar son únicamente aproximados, dado que en realidad se deberían hallar utilizando la viscosidad del fluido para las condiciones de presión y temperatura promedio en cada uno de los dos conductos.

Llegados a este punto, se puede comprobar si los factores de fricción determinados previamente son correctos o no. Para el conducto de menor diámetro, entrando en el diagrama de Moody con los valores de $\frac{\varepsilon_{2-3}}{D_3} = \frac{0{,}008}{50} = 0{,}00016$ y Re = 1.331.151,2, se obtiene f = 0,014.

Para el conducto de mayor diámetro, se concluye que cuando $\frac{\varepsilon_{1-2}}{D_1} = \frac{0{,}008}{100} = 0{,}00008$ y Re = 665.575,6, el factor de fricción vale f = 0,0135.

Con el fin de incluir estos nuevos factores de fricción, se realiza de nuevo el último cálculo, considerando que la onda de choque se produce en el punto de la tobera donde el diámetro es de $D_3 = 0{,}085$ m.

El número de Mach en el punto 2 sigue siendo la unidad; el nuevo número de Mach en el punto 1 será:

$$\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{4C_f L_1^*}{D} - \frac{4C_f L_2^*}{D}$$

Bajo la hipótesis de partida, se establece que $L_2^* = 0$, de donde:

$$\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{0{,}014*6}{0{,}05} = 1{,}68$$

Sustituyendo este valor en la ecuación que se encuentra a continuación, se obtiene $M_1 = 0{,}4408$.

$$\frac{4C_f L^*_{1-2}}{D} = 1,68 = \frac{1-M_1^2}{\gamma M_1^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right\}}\right)$$

Entre los puntos 2 y 3 se establece. Recuérdese que el punto 3 es donde el diámetro de la tobera es de 0,085m.

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{A_3}{A^*} = \frac{\frac{\pi}{4}*0,085^2}{\frac{\pi}{4}*0,05^2} = 2,89 = \frac{1}{M_3}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

de donde el número de Mach en el punto 3 será de $M_3 = 2,5978$.

Después de la onda de choque en el punto 3bis, el número de Mach será:

$$M_{3bis} = \left[\frac{\frac{2}{\gamma-1}+M_3^2}{\frac{2\gamma}{\gamma-1}M_3^2-1}\right]^{\frac{1}{2}} = 0,5040$$

Para determinar el número de Mach en el punto 4, entre los puntos 3bis y 4, se concluye que:

$$\frac{A_{3bis}}{A^*} = \frac{\frac{\pi}{4}*0,085^2}{A^*} = \frac{1}{M_{3bis}}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{3bis}^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1,3323$$

$$A^* = \frac{\frac{\pi}{4}*0,085^2}{1,3323}$$

Ahora, entre la sección A^* ficticia y la sección 4, se tiene:

$$\frac{A_4}{A^*} = \frac{1,3323*\frac{\pi}{4}*0,1^2}{\frac{\pi}{4}*0,085^2} = 1,8440 = \frac{1}{M_4}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

de donde el número de Mach en el punto 4 será $M_4 = 0,3355$:

Entrando con este número de Mach en la siguiente ecuación, se obtiene:

$$\frac{4C_f L^*_4}{D} = \frac{1-M_4^2}{\gamma M_4^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{(\gamma+1)M_4^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right\}}\right) = 3,8964$$

Entre los puntos 4 y 5, se puede decir que:

$$\frac{4C_f L_5^*}{D} = \frac{4C_f L_4^*}{D} - \frac{4C_f \Delta L}{D} = 3,8964 - \frac{0,0135*10}{0,1} = 2,5464$$

de donde el número de Mach en el punto 5 será:

$$\frac{4C_f L_5^*}{D} = 2,5464 = \frac{1-M_5^2}{\gamma M_5^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln\left(\frac{(\gamma+1)M_5^2}{2\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}M_5^2\right\}} \right)$$

$$M_5 = 0,3876$$

La relación de presiones requerida para que el caso considerando en este subapartado sea correcto se determina mediante la relación:

$$\frac{P_{01}}{P_5} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{03bis}} \frac{P_{03bis}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_{05}} \frac{P_{05}}{P_5}$$

La relación de presiones de estancamiento entre los puntos 1 y 2 es caracterizada por:

$$\frac{P_{01}}{P_0^*} = \frac{P_{01}}{P_{02}} = \frac{1}{M_1} \left\{ \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1,4719$$

Entre los puntos 2 y 3, se cumple que $P_{02} = P_{03}$; lo mismo se cumple entre los puntos 3bis y 4.

Entre los puntos 3 y 3bis, existe una onda de choque, con lo cual se establece:

$$\frac{P_{03bis}}{P_{03}} = \left(\frac{\gamma+1}{2}M_3^2 \right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}} \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2 \right)^{\frac{-\gamma}{(\gamma-1)}} \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma}M_3^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{\frac{-1}{(\gamma-1)}} = 0,4609$$

Entre los puntos 4 y 5, se concluye (recuérdese que se tiene $M_4 = 0,3355$ y $M_5 = 0,3876$):

$$\frac{P_{04}}{P_0^*} = \frac{1}{M_4} \left\{ \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1,844 \; ; \qquad \frac{P_{05}}{P_0^*} = \frac{1}{M_5} \left\{ \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_5^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1,6317$$

de donde $\frac{P_{04}}{P_{05}} = \frac{P_{04}}{P_0^*}\frac{P_0^*}{P_{05}} = 1,844\frac{1}{1,6317} = 1,1301$

Para $M_5 = 0,3876$, se obtiene:

$$\frac{P_{05}}{P_5} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_5^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1,1092$$

de donde la relación de presiones requerida será:

$$\frac{P_{01}}{P_5} = \frac{P_{01}}{P_{02}}\frac{P_{02}}{P_{03}}\frac{P_{03}}{P_{03bis}}\frac{P_{03bis}}{P_{04}}\frac{P_{04}}{P_{05}}\frac{P_{05}}{P_5} = 1,4719*1*\frac{1}{0,4609}*1*1,1301*1,1092 = 4,0031$$

En vista de esta relación de presiones, se concluye que la onda de choque estará situada en el punto donde el diámetro de la tobera es de 0,085 m.

El caudal másico circulante será, utilizando las condiciones en el punto 1:

$$\dot{m} = \frac{4*10^5*\frac{\pi}{4}0.05^2}{\sqrt{287*370}}\sqrt{\gamma}\,0,4408\left(1+\frac{\gamma-1}{2}0,4408^2\right)^{-\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} = 1,1211\frac{kg}{s}$$

de donde los números de Reynolds en los conductos de menor y mayor diámetro serán:

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{VD\rho A}{\mu A} = \frac{\dot{m}D}{\mu\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\dot{m}\,4}{\pi D\mu}$$

Re = 1.305.973,33 (menor diámetro); Re = 652.986,66 (mayor diámetro)

Obsérvese que los números de Reynolds son casi idénticos a los obtenidos en el caso precedente, con lo cual se puede concluir que los últimos factores de fricción hallados son los definitivos. Además, se debe concluir que los números de Mach en los puntos 1, 2, 3, 3bis, 4 y 5 serán $M_1 = 0,4408$, $M_2 = 1$, $M_3 = 2,5978$, $M_{3bis} = 0,5040$, $M_4 = 0,3355$, $M_5 = 0,3876$. El flujo está bloqueado y el caudal másico circulante es el que se acaba de hallar.

2. En el segundo apartado del problema, se pide determinar las presiones y temperaturas estáticas y de estancamiento en todos los puntos de la instalación. A la hora de realizar esta operación, es importante recordar que una de las propiedades que se mantienen constantes en el flujo de Fanno es la temperatura de estancamiento; esta misma propiedad se mantiene asimismo constante para el flujo isentrópico y también en ambos lados de una onda de choque; en consecuencia se puede concluir que la temperatura de estancamiento $T_{01} = 370$ K, definida en el enunciado del problema, será la misma en todos los puntos 1, 2, 3, 3bis, 4 y 5 de la instalación. Los números de Mach en dichos puntos se han hallado en el primer apartado del problema. Por consiguiente, la

temperatura estática en cada uno de los puntos de la instalación se puede determinar utilizando la ecuación:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Sustituyendo en esta ecuación cada uno de los números de Mach determinados en el apartado 1, se obtiene:

$T_1 = 356{,}16$ K; $T_2 = 308{,}33$ K; $T_3 = 157{,}46$ K; $T_{3bis} = 352{,}11$ K; $T_4 = 361{,}85$ K; $T_5 = 359{,}20$ K

Lo primero que cabe observar es que las temperaturas estáticas son demasiado bajas, especialmente en el punto 3, que es donde aparece la onda de choque. Para que este problema fuera factible, habría que aumentar considerablemente la temperatura de estancamiento en el depósito de partida.

El paso siguiente será determinar las presiones estáticas y de estancamiento en estos mismos puntos.

La relación entre la presión de estancamiento entre los puntos 1 y 2 (Recuérdese que el Mach en el punto 2 es la unidad) se ha hallado en el apartado anterior y valía:

$$\frac{P_{01}}{P_0^*} = \frac{P_{01}}{P_{02}} = \frac{1}{M_1} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1{,}4719$$

En consecuencia $P_{02} = 271.757{,}59$ Pa

Dado que entre los puntos 2 y 3 (v. fig. 105.2) se tiene parte de una tobera, se considera que $P_{02} = P_{03}$. La relación de presiones de estancamiento entre los puntos 3 y 3 bis, delante y detrás de la onda de choque, también se ha determinado en el apartado precedente, y se ha obtenido

$$\frac{P_{03bis}}{P_{03}} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} M_3^2 \right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2 \right)^{\frac{-\gamma}{(\gamma-1)}} \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma} M_3^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{\frac{-1}{(\gamma-1)}} = 0{,}4609$$

de donde se llega a: $P_{03bis} = 125.253{,}0732$ Pa

Entre los puntos 3_{bis} y 4, se cumple $P_{03bis} = P_{04}$.

La relación de presiones de estancamiento entre los puntos 4 y 5 quedaba definida (v. apartado anterior) por:

$$\frac{P_{04}}{P_{05}} = \frac{P_{04}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{05}} = 1{,}844 \frac{1}{1{,}6317} = 1{,}1301$$

La presión de estancamiento en el punto 5 será $P_{05} = 110.833{,}619$ Pa.

Dado que ahora se conocen las presiones de estancamiento en todos los puntos, las presiones estáticas se determinarán mediante la ecuación:

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Sustituyendo en esta expresión los números de Mach y presiones de estancamiento existentes en cada punto, se obtiene la presión estática en dichos puntos, su valor es:

P_1 = 350.033,04 Pa; P_2 = 143.564,58 Pa; P_3 = 13.665,63 Pa; P_{3bis} = 105.308,52 Pa; P_4 = 115.864,09 Pa; P_5 = 99.924,55 Pa.

De la observación de estas presiones se concluye que, la presión en el punto 3, punto donde el número de Mach es máximo, es muy baja, recuérdese que la temperatura en este mismo punto era también demasiado baja, se concluye que tanto la presión de estancamiento como la temperatura de estancamiento en el depósito de partida deberían ser considerablemente aumentadas. A recordar cabe que si estas condiciones son modificadas, se deben realizar de nuevo los cálculos definidos en este problema.

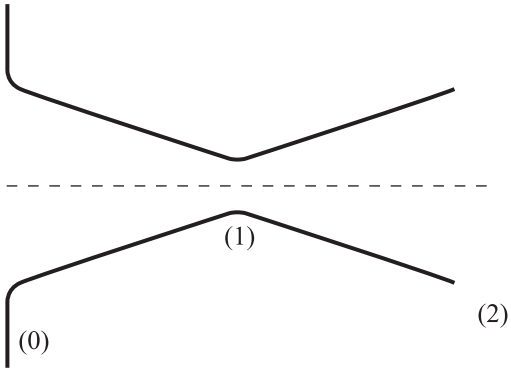
Véase además que la presión estática en el punto 5 debería ser de 10^5Pa, la pequeña discrepancia respecto al valor acabado de obtener, se debe a que la posición a la que se ha supuesto la onda de choque no es suficientemente precisa.

Problema 106

Enunciado

La tobera que se muestra en la figura 106.1 se utiliza en un misil supersónico, los diámetros de los puntos 0, 1 y 2, son respectivamente: 0,68 m; 0,2 m y 1,4 m. Se desea que la tobera esté adaptada a una altura de 10.000 m, se sabe que la temperatura del aire en la atmósfera varía según la relación: $T_z = 288{,}16\text{-}0{,}0065 \cdot Z$, donde Z es la altura en metros respecto el nivel del mar. Considérese aire como fluido de trabajo. γ = 1,4

Fig. 106.1
Tobera convergente divergente bajo estudio



Se pide determinar:

1. El número de Mach en cada uno de los tres puntos.

2..La presión estática en los puntos (0) y (2).

3. La temperatura estática en los puntos (0) y (2), sabiendo que la temperatura estática en el punto (2) se quiere que sea 100º superior a la temperatura del aire atmosférico a 10.000m de altura.

4.- Qué pasaría si en la cámara de combustión (punto (0)) hubiese una presión estática absoluta de $300*10^5$ Pa y la tobera se mantuviese a 10.000m de altura, ¿aparecería alguna onda de choque? y si fuera así, ¿dónde aparecería?

Resolución

1.- Como el ejercicio exige que la tobera esté adaptada a una altura de 10.000m, se tendrá que calcular la temperatura y la presión a dicha altura.

La temperatura a 10.000 m de altura se obtiene:

$$T_Z = 288{,}16 - 0{,}0065 \cdot Z = 288{,}16 - 0{,}0065 \cdot 10.000 = 223{,}16 \text{ k}$$

Para realizar el cálculo de la presión a 10.000 metros de altura, se deberá aplicar la ecuación de la estática.

$$dP = -\rho \cdot g \cdot dz$$

Mediante la ecuación de gases ideales se relacionará la densidad con la presión y la temperatura del gas.

$$P\forall = n\ r\ T; \qquad \left(n = \frac{m}{PM}\right); \qquad P = \underbrace{\frac{m}{\forall}}_{\rho} \cdot \underbrace{\frac{r}{PM}}_{R} \cdot T = \rho RT$$

$$\rho = \frac{P}{R \cdot T}$$

La R corresponde a la constante específica del gas, para el aire R = 287 [J/(Kg K)].

Sustituyendo la relación encontrada en la ecuación de la estática, queda:

$$dP = -\frac{P}{R \cdot T} \cdot g \cdot dz; \quad \int_{P_{atm}}^{P_{z=10000\,m}} \frac{dP}{P} = \int_{Z=0}^{Z=10000} \frac{-g}{R \cdot \left(\underbrace{288{,}16}_{A} - \underbrace{0{,}0065}_{B} \cdot Z\right)} \cdot dz$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_{atm}}\right)=\frac{g}{R\cdot B}\cdot\ln\left(\frac{A-B\cdot 10^4}{A}\right);\qquad \frac{P}{P_{atm}}=\left(\frac{A-B\cdot 10^4}{A}\right)^{\frac{g}{R\cdot B}}$$

$$P=P_{atm}\cdot\left(\frac{A-B\cdot 10^4}{A}\right)^{\frac{g}{R\cdot B}}=10^5\cdot\left(\frac{223,16}{288,16}\right)^{\frac{9,8}{286,9\cdot 0,0065}}=26.097\ \text{Pa}$$

Esta es la presión a 10.000m de altura, que se entenderá como la presión estática en el punto 2 de la tobera, concepto de tobera adaptada.

Las secciones en los puntos 0, 1, 2 son:

$$\begin{cases} A_0=\dfrac{\pi\cdot 0,68^2}{4}=0,36316 \\ A_1=\dfrac{\pi\cdot 0,2^2}{4}=0,03141 \\ A_2=\dfrac{\pi\cdot 1,4^2}{4}=1,5394 \end{cases}$$

Como se trata de un misil supersónico, en el punto (1) la velocidad del fluido ha que ser de Mach = 1. El área crítica corresponde a $A^*=A_1$; la relación de áreas entre los puntos 0,1 y 2,1 es:

$$\text{Punto}\,0:\ \frac{A_0}{A^*}=\frac{0,36316}{0,03141}=11,56$$

$$\text{Punto}\,2:\ \frac{A_2}{A^*}=\frac{1,5394}{0,03141}=49,01$$

Hipótesis: Se supone que la evolución del flujo por la tobera es isentrópica.

Para encontrar la velocidad del fluido en los puntos 0 y 2, se utilizará la relación de áreas.

Punto 0: Entrando en la Tabla de flujo isentrópico con la relación de áreas, $\frac{A_0}{A^*}$ y sabiendo que es una región de flujo subsónico, se obtiene:

$$\text{Tabla de flujo isentrópico}\left(\text{Región Subsónica}\right)\begin{cases}\dfrac{A}{A^*}=9,6659\,\text{con M}=0,06\\ \dfrac{A}{A^*}=11,591\,\text{con M}=0,05\end{cases}$$

Mediante interpolación, se puede determinar exactamente el número Mach del punto 0.

$$\frac{9,6659-11,591}{0,06-0,05}=\frac{9,6659-11,56}{0,06-M(0)};\qquad M(0)=0,05016\cong 0,05$$

Punto 2: Haciendo lo mismo que en el punto anterior pero en la región de flujo supersónico:

$$\text{Tabla de flujo isentrópico}\left(\text{Región Supersónica}\right)\begin{cases}\dfrac{A}{A^*}=46,050\ ;M=5,8\\ \dfrac{A}{A^*}=49,507\ ;M=5,9\end{cases}$$

Realizando una interpolación lineal se tiene:

$$\frac{46,050-49,507}{5,8-5,9}=\frac{46,050-49,01}{5,8-M(2)};\qquad M\left(2\right)=5,886$$

2.- Entrando en la tabla de flujo isentrópico, en la región subsónica y supersónica respectivamente, con los números de Mach encontrados, se obtienen las relaciones siguientes:

Punto 0: Entrando en la tabla de flujo isentrópico con Mach = $0,05016\cong 0,05$

$$\text{Tabla de flujo isentrópico}\left(\text{Región Subsónica}\right)\text{ para M}=0,05\quad\begin{cases}\dfrac{P}{P_0}=0,99825\\ \dfrac{T}{T_0}=0,9995\end{cases}$$

Punto 1: Entrando con Mach = 1 en la tabla de flujo isentrópico.

$$\text{Tabla de flujo isentrópico para M}=1\quad\begin{cases}\dfrac{P}{P_0}=0,52213\\ \dfrac{T}{T_0}=0,83333\end{cases}$$

Punto 2: en este caso, se debe interpolar dado que no se encuentra un valor exacto en la tabla de flujo isentrópico.

$$\text{Tabla de flujo isentrópico, }\left(\text{Región Supersónica}\right)\text{ para M}=5,8\quad\begin{cases}\dfrac{P}{P_0}=0,77941\cdot 10^{-3}\\ \dfrac{T}{T_0}=0,12940\end{cases}$$

$$\text{Tabla de flujo isentrópico}\left(\text{Región Supersónica}\right)\text{ para M}=5,9\quad\begin{cases}\dfrac{P}{P_0}=0,70214\cdot 10^{-3}\\ \dfrac{T}{T_0}=0,1256\end{cases}$$

Interpolando:

$$\frac{5,8-5,9}{0,77941\cdot10^{-3}-0,70214\cdot10^{-3}}=\frac{5,8-5,886}{0,77941\cdot10^{-3}-\frac{P}{P_0}(2)};\qquad \frac{P}{P_0}(2)=0,71296\cdot10^{-3}$$

$$\frac{5,8-5,9}{0.12940-0.1256}=\frac{5,8-5,886}{0.12940-\frac{T}{T_0}(2)};\qquad \frac{T}{T_0}(2)=0,12613$$

Hay que recordar que la presión estática que hay en el punto 2 es la que se ha calculado a 10.000m de altura, teniendo asimismo en cuenta que para fluido isentrópico se conservan las propiedades de estancamiento, temperatura, presión y entalpía, se procederá del modo siguiente:

Mediante la relación de presiones estática, estancamiento en el punto 2, se puede determinar la presión de estancamiento en dicho punto.

$$P_0=26097\Big/0,71296\cdot10^{-3}=36,6037\cdot10^{6}\ \text{Pa}\ .$$

Puesto que la presión de estancamiento se mantiene constante en toda la tobera, la presión estática en los puntos 0 y 1 será:

$$\begin{cases}\text{Punto}1:\dfrac{P}{P_0}=0,52213; & P(1)=P_0\cdot0,52213=19,1119\cdot10^{6}\ \text{Pa}\\ \text{Punto}\,0:\dfrac{P}{P_0}=0,99825; & P(0)=P_0\cdot0,99825=36,53968\cdot10^{6}\ \text{Pa}\end{cases}$$

3. El enunciado dice que se desea una temperatura a la salida de la tobera 100 grados por encima de la que se encuentra el aire a 10.000m de altura.

Así, la temperatura estática del aire en el punto (2) será:

$$T_2=288,16-0,0065*10.000+100=323,16\ \text{k}$$

La temperatura de estancamiento en el punto 2 será:

$$\text{De la tabla de flujo isentrópico para el Punto}\,2:\ \frac{T}{T_0}=0,12613;$$

$$T_0=\frac{323,16}{0,12613}=2562,1185\ \text{k}$$

Puesto que la temperatura de estancamiento es constante en toda la tobera, las temperaturas estáticas en los puntos 0 y 1 se determinarán:

$$\begin{cases} \text{Punto}\,1: \dfrac{T}{T_0} = 0,83333; & T = 2.562,1185 \cdot 0,83333 = 2.135,090\,\text{k} \\ \text{Punto}\,0: \dfrac{T}{T_0} = 0,9995; & T = 2.562,1185 \cdot 0,9995 = 2.560,8374\,\text{k} \end{cases}$$

4. Para resolver este apartado se supondrá que se produce una onda de choque justo a la salida de la tobera, partiendo de este considerando se calculará cual debería ser la presión en la cámara de combustión (punto 0), presión que se comparará con la definida por el enunciado que es de 300 * 10^5 Pa.

La presión estática a la salida de la tobera, después de la onda de choque, se considerará la existente a 10.000m de altura, presión estática hallada previamente.

El número de Mach en el punto (2) era de $M(2) = 5,886$; de las tablas para ondas de choque planas, se obtienen las relaciones:

$$\text{Tabla ondas de choque planas} \begin{cases} \dfrac{P_2'}{P_2} = 39,080\,; & M_1(2) = 5,8 \\ \dfrac{P_2'}{P_2} = 40,445\,; & M_2(2) = 5,9 \end{cases}$$

El término P_2' caracteriza la presión estática aguas abajo de la onda de choque.

Interpolando se tiene:

$$\frac{5,8-5,9}{39,080-40,445} = \frac{5,8-5,886}{39,080-\dfrac{P_2'}{P_2}}\,; \quad \text{de donde} \frac{P_2'}{P_2} = 40,2539$$

Puesto que se conoce que $P_2' = 26.097$ Pa, la presión estática en el punto (2) será:

$$P_2 = \frac{P_2'}{40,2539} = \frac{26.097}{40,2539} = 648,309\ \text{Pa}$$

En el segundo apartado de este problema, se ha determinado la relación entre la presión estática y de estancamiento en el punto (2), punto donde $M(2) = 5,886$,

obteniendo: $\frac{P_2}{P_{02}} = 0,71296*10^{-3}$; consecuentemente la presión de estancamiento en el punto 2 será:

$$P_{02} = 909.321,49 \text{ Pa}.$$

Puesto que la evolución del fluido por la tobera se ha definido como isentrópica, se concluye que la presión de estancamiento es la misma en cualquier punto de la misma.

En el punto (0) la relación de presiones estática/estancamiento valía, apartado 2 de este problema:

$$\frac{P_{(0)}}{P_{0(0)}} = 0,99825;$$

De donde la presión estática en el punto (0) será:

$$P_{(0)} = 909.321,49*0,99825 = 907.730,17 \text{ Pa}$$

Véase que esta presión es muy inferior a $300*10^5$ Pa. Por otro lado en el apartado segundo se ha determinado que para que la tobera esté adaptada 10.000 m, la presión estática en el punto (0) debe ser de $36,53*10^6$ Pa. En función de estos valores de presiones se puede concluir que, si la presión en la cámara de combustión fuese de $300*10^5$ Pa y la tobera estuviese situada a 10.000 m de altura, dicha tobera no estaría adaptada y no existiría onda de choque plana a la salida de la misma, de hecho a la salida de la tobera el fluido experimentaría una compresión brusca tal y como muestra la curva f de la figura 106.2.

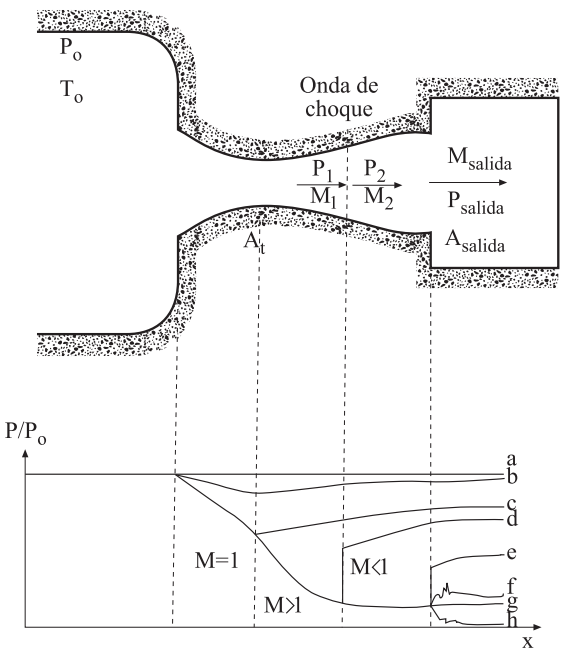


Fig. 106.2 Diferentes curvas de evolución de presión en el interior de una tobera convergente divergente

Problema 107

Enunciado

La figura 107.1 muestra un depósito de grandes dimensiones que contiene aire comprimido. Inicialmente, el depósito de volumen 1000 m^3 está aislado del exterior, siendo la presión y temperatura de estancamiento del fluido de T_{0i} = 293K; $P_{0i} = 3*10^5$ Pa. A partir del estado inicial, se transfiere al fluido una potencia calorífica de $\dot{Q} = 10^8 \frac{J}{Hora}$; potencia que se mantendrá hasta que el fluido llega a tener una presión de $6*10^5$ Pa.

Una vez el fluido llega a estas condiciones finales, se abre una válvula de seguridad situada en la parte superior del depósito y se deja de transferir calor al fluido. Dicha válvula tiene un diámetro máximo de apertura de 0,05m y está conectada al depósito mediante un conducto de diámetro 0,1m y de muy corta longitud, asimismo en la sección de salida de la válvula el diámetro es de 0,1m, la válvula descarga a la atmósfera.

Se pide:

1.- Determinar el tiempo transcurrido desde el estado inicial hasta que se abre la válvula de seguridad. Recuérdese que en este primer apartado el depósito está cerrado, considerar un proceso de compresión isocórico, (a volumen constante). Recordar que $dQ = C_v\ dT$; C_v = 718 J/(kg K); R = 287 J/(kg K).

2.- Una vez se abre la válvula de seguridad, se quiere saber:

2a.- Si el flujo está o no bloqueado. Determinar el caudal másico circulante.

2b.- La presión que deberá haber en el depósito para que exista una onda de choque en el punto donde el diámetro de la tobera es de 0,051m. ¿Cuál es en este caso el gradiente de presiones entre la estática existente a la salida de la tobera y la de estancamiento en el depósito?

2c.- Determinar el tiempo necesario para que la presión del fluido decaiga desde la existente en el momento en que se abre la válvula hasta que la presión en el depósito sea la obtenida en el apartado 2b. Considerar que durante todo este tiempo la válvula permanece abierta y con el mismo diámetro mínimo de paso que el definido previamente. Durante este período considerar un proceso politrópico a volumen constante con un índice de politropía de n = 1,5, la ecuación que regula dicho proceso se define como:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

Considerar el fluido como ideal.

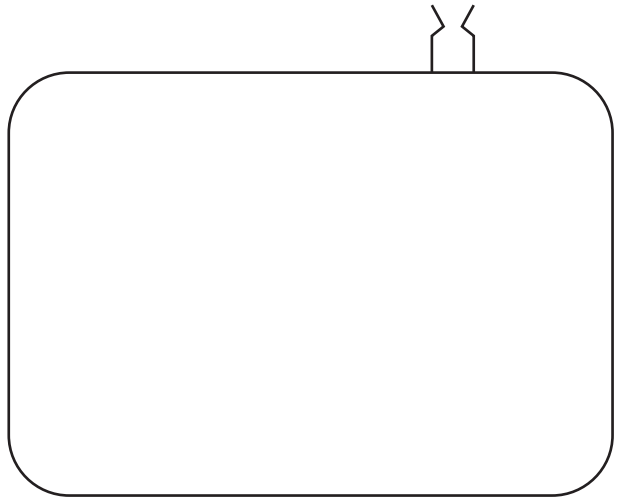


Fig. 107.1 Esquema del depósito con la válvula de seguridad

Resolución

La densidad del aire en el estado inicial es de:

$$\rho_i = \frac{P_i}{R\ T_i} = \frac{3*10^5}{287*293} = 3.567,5\ \frac{kg}{m^3}$$

La masa de aire que hay en el depósito es de:

$$m = \frac{\forall_i\ P_i}{R\ T_i} = \frac{1.000*3*10^5}{287*293} = 3.567,5\ \frac{kg}{m^3}$$

La potencia calorífica transferida al fluido por unidad de masa será:

$$\frac{\dot{Q}}{Kg} = \frac{10^8}{3.600*3.567,5} = 7,7863\left[\frac{J}{S\ kg}\right]$$

Esta potencia calorífica se utiliza para aumentar la energía interna el fluido, con lo que se puede realizar el siguiente balance:

$$7,7863\left[\frac{J}{S\ kg}\right]*t = C_v\ dT = 718\left[\frac{J}{kg\ K}\right]*\left(T_f - T_i\right)[K]$$

En esta ecuación, T_f es la temperatura final del fluido, es decir la temperatura del fluido cuando su presión sea de $6*10^5$ Pa. T_i es la temperatura inicial del fluido y t el tiempo necesario para que el fluido vaya de la temperatura inicial a la temperatura final.

La temperatura final a la que llegará el fluido no es conocida, pero sí que se conoce que el proceso de compresión ha de ser isocórico, a volumen constante, con lo que se puede establecer la relación:

$$\frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f}$$

Consecuentemente:

$$T_f = \frac{P_f}{P_i} T_i = \frac{6*10^5}{3*10^5} * 293 = 586\,[K]$$

Con lo que el tiempo necesario para pasar de las condiciones iniciales a las finales será de:

$$7,7863\left[\frac{J}{S\ Kg}\right] * t = C_v\ dT = 718\left[\frac{J}{Kg\ K}\right] * (586 - 293)[K]$$

$$t = 27.018,48\ [S];\ \ t = 7,505\ [Horas].$$

2a.- En este punto, las condiciones del fluido en el interior del depósito son de $P=6*10^5$ [Pa]; T = 586[K].

La válvula de seguridad se considerará como una tobera convergente divergente, el diámetro de entrada y salida es de 0,1 [m] y el diámetro del cuello, que coincide con el diámetro máximo de apertura de la válvula, es de 0,05 [m]. Por otro lado, el conducto que une el depósito con la válvula se considerará muy corto con lo que se va a despreciar su efecto. Lo primero que se va a determinar en este apartado es si el flujo está bloqueado, como punto de partida se establece que la presión de estancamiento en el depósito es de $6*10^5$[Pa] y la presión estática a la salida de la tobera es la atmosférica, 10^5[Pa].

El esquema de la válvula se muestra en la figura 107.2.

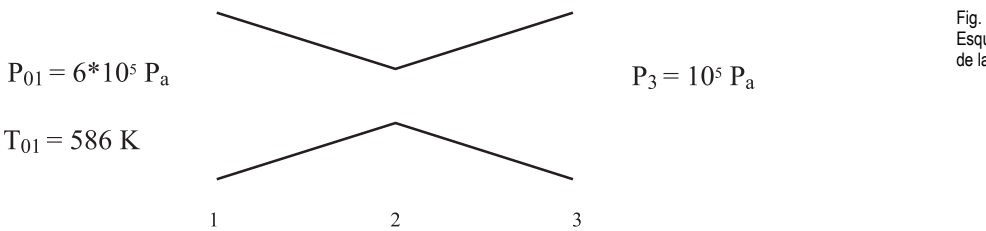


Fig. 107.2 Esquema de la válvula

A priori se va a realizar la hipótesis de que el flujo está bloqueado, entre los puntos 1 y 2, se puede establecer:

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{\frac{\pi D_1^2}{4}}{\frac{\pi D_*^2}{4}} = \frac{0,1^2}{0,05^2} = 4$$

Entrando con esta relación en las tablas de flujo isentrópico se obtiene:

$$\frac{P_1}{P_{01}} = 0,985066\ ; \quad \frac{T_1}{T_{01}} = 0,9957112\ ;\ M_1=0,1467.$$

Entre los puntos 2 y 3, se establece.

$$\frac{A_3}{A^*} = \frac{\frac{\pi D_3^2}{4}}{\frac{\pi D_*^2}{4}} = \frac{0,1^2}{0,05^2} = 4$$

Entrando con esta relación en las tablas de flujo isentrópico, zona supersónica de la tabla, se obtiene:

$$\frac{P_3}{P_{03}} = 0,029787\ ; \quad \frac{T_3}{T_{03}} = 0,3664415\ ;\ M_3 = 2,9401.$$

Consecuentemente:

$$P_3 = P_{03} * 0,029787 = 6 * 10^5 * 0,029787 = 17.872,2 \text{ Pa}$$

$$T_3 = T_{03} * 0,3664415 = 586 * 0,3664415 = 214,734 \text{ K}$$

Estas condiciones de presión y temperatura en el punto 3 serían las que existirían para el caso de que la tobera estuviese adaptada, véase que la presión obtenida en el punto 3 es bastante menor que la atmosférica, con lo que se puede asegurar que la tobera no está adaptada. La pregunta que en este punto se ha de plantear es: ¿existe onda de choque a la salida?, para responder a esta pregunta se procederá a determinar el gradiente de presiones necesario para que esto sea factible.

Considerando que existe una onda de choque plana a la salida, y entrando a las tablas de ondas de choque planas con un número de Mach $M_3 = 2,94$, se obtiene:

$$M_3 = 2,94;\ M_4 = 0,47884; \quad \frac{P_{04}}{P_{03}} = 0,34570\ ; \quad \frac{P_4}{P_3} = 9,9175\ ; \quad \frac{T_4}{T_3} = 2,6091\ ;$$

Con lo que la presión a la salida de la onda de choque punto 4, para que, sabida la presión de estancamiento en el depósito exista una onda de choque plana a la salida de la tobera ha de ser:

$$P_4 = P_3 * 9,9175 = 17.872,2 * 9,9175 = 177.247,54 \text{ Pa}$$

El gradiente de presiones necesario para que exista onda de choque a la salida es de:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{600.000}{177.247,54} = 3,385$$

El gradiente de presiones necesario para que la tobera esté adaptada es:

$$\frac{P_{01}}{P_3} = \frac{600.000}{17.872,2} = 33,57$$

Dado que el gradiente de presiones disponible es de:

$$\frac{P_{01}}{P_3} = \frac{600.000}{100.000} = 6$$

Se puede concluir que la tobera no está adaptada ni existe onda de choque plana a la salida en realidad existirá una compresión brusca del fluido a la salida, no obstante se puede afirmar que el flujo estará bloqueado. La figura 107.3 muestra los tres estados acabados de definir.

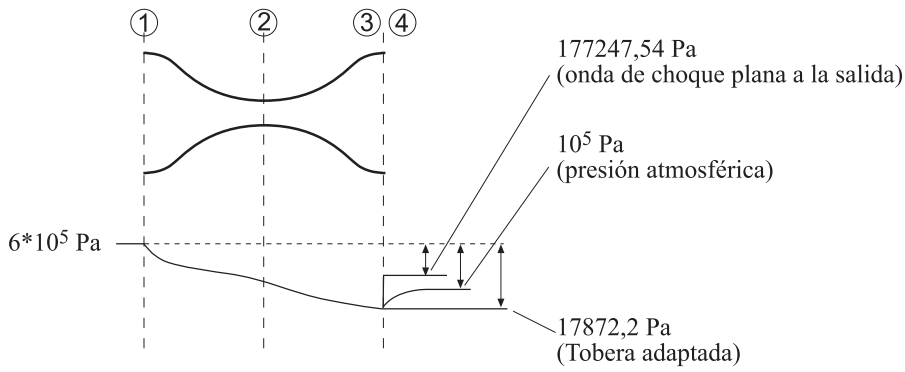


Fig. 107.3 Esquema de la válvula con los gradientes de presión necesarios para que la tobera este adaptada, o bien exista onda de choque a la salida, se presenta asimismo la situación actual

El caudal másico que sale del depósito a través de la válvula será:

$$\dot{m} = \left(\frac{P_0\ A}{\sqrt{R\ T_0}} \right) \sqrt{\gamma}\ M \left(1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \right)}$$

En la garganta, donde M = 1, se obtiene:

$$\dot{m} = \left(\frac{P_0\ A^*}{\sqrt{R\ T_0}} \right) \sqrt{\gamma}\ \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \right)}$$

Sustituyendo valores:

$$\dot{m} = \left(\frac{6*10^5 * \frac{\pi 0,05^2}{4}}{\sqrt{287*586}} \right) \sqrt{1,4}\ \left(\frac{1,4+1}{2} \right)^{-\left(\frac{1,4+1}{2(1,4-1)} \right)}$$

$$\dot{m} = 1,96703\ \frac{Kg}{S}$$

2b.- El siguiente apartado pregunta cuál es la diferencia de presiones que debe haber entre los extremos de la tobera para que aparezca una onda de choque en el punto donde la tobera posee un diámetro de 0,051 m. La figura 107.4, esquematiza la distribución de presiones para este caso.

Es interesante remarcar que para la condición definida en este apartado, el flujo aún está bloqueado, con lo que se ha de entender que el caudal másico sigue siendo el mismo que el acabado de determinar.

Entre los puntos 2 y 3, ver figura 107.4, se establece:

$$\frac{A_3}{A^*} = \frac{\frac{\pi D_3^2}{4}}{\frac{\pi D_*^2}{4}} = \frac{0,051^2}{0,05^2} = 1,0404$$

Entrando con este valor en las tablas de flujo isentrópico, zona supersónica, se obtiene:

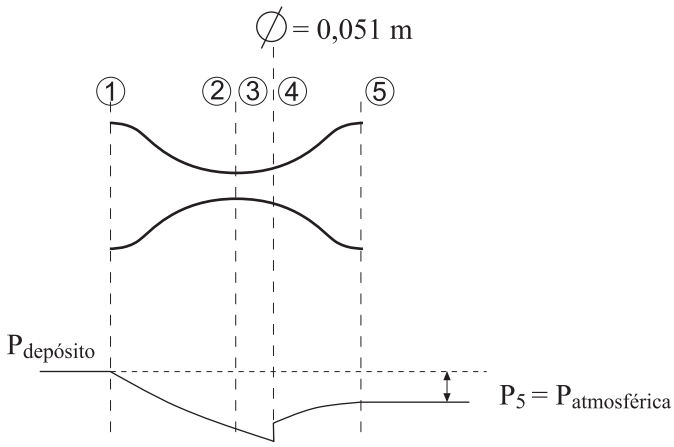


Fig. 107.4 Esquema de la distribución de presiones para el caso en que la onda de choque aparezca en el punto donde el diámetro de la tobera es de 0,051m

$$\frac{P_3}{P_{03}} = 0,3955288\,; \quad \frac{T_3}{T_{03}} = 0,7671982\,; \quad M_3 = 1,23176.$$

Para un proceso isentrópico, la presión de estancamiento en los puntos 1, 2 y 3 es la misma. Si se considera, por ahora, que la presión de estancamiento en el depósito sigue siendo de $6*10^5$ Pa, la presión estática en le punto 3 sería:

$$P_3 = P_{03} * 0,3955288 = 6*10^5 * 0,3955288 = 237.317,28 \text{ Pa}$$

Entrando en la tabla de ondas de choque planas con $M_3 = 1,23176$ se obtienen las relaciones:

$$M_4 = 0,817303; \quad \frac{P_4}{P_3} = 1,6034688\,; \quad \frac{P_{04}}{P_{03}} = 0,9894128\,; \quad \frac{T_4}{T_3} = 1,1479088\,;$$

Considerando por ahora que la presión de estancamiento en el depósito es la del enunciado y sabiendo que para un flujo isentrópico, esta se mantiene constante se puede decir que:

$$P_{01} = P_{02} = P_{03} = 6*10^5 \text{ Pa.}$$

$$P_{04} = P_{03} * 0,9894128 = 593.647,68 \text{ Pa.}$$

$$P_4 = P_3 *1,6034688= 237.317,28*1,6034688 = 380.530,85 \text{ Pa.}$$

Entrando con el valor del número de Mach $M_4 = 0,817303$ en las tablas de flujo isentrópico se obtiene:

$$\frac{A}{A^*} = 1,0314979$$

Es interesante remarcar que esta relación de secciones compara la sección entre el punto cuatro, donde $M_4 = 0,817303$ y una sección ficticia donde el numero de Mach es la unidad, esta sección ficticia no es la sección real mínima de la tobera, de hecho ahora se determinará el valor de esta sección hipotética.

$$A^* = \frac{A}{1,0314979} = \frac{\frac{\pi 0,051^2}{4}}{1,0314979} = 0,0019804 \text{ m}^2 = \frac{\pi d_*^2}{4}$$

De donde el diámetro ficticio del punto donde el numero de Mach sería la unidad es: $d_* = 0,0502153$ m

Entre el punto 5 de la figura 107.4, sección de salida de la tobera, y la sección ficticia acabada de hallar, se puede establecer:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A_5}{A^*} = \frac{\frac{\pi 0,1^2}{4}}{\frac{\pi 0,0502153^2}{4}} = 3,9657732$$

Entrando con la relación $\frac{A_5}{A^*} = 3,9657732$ en las tablas de flujo isentrópico se obtiene:

$$M_5 = 0,1479613; \quad \frac{P_5}{P_{05}} = 0,9848157; \quad \frac{T_4}{T_3} = 0,9956382;$$

$P_5 = P_{05} * 0,9848157 = 593.647,68 *0,9848157 = 584.633,55$ Pa. Recuérdese que $P_{05} = P_{04}$

Es decir, la relación de presiones que ha de existir entre los dos extremos de la tobera, para que aparezca una onda de choque en el punto donde el diámetro es de 0,051m es:

$$\frac{P_5}{P_{01}} = \frac{584.633,55}{6*10^5} = 0,9743892$$

Si se realiza ahora el proceso inverso, es decir en lugar de partir de una presión de estancamiento en el depósito, se parte de una presión estática a la salida de la tobera igual a la presión atmosférica, se obtendría una presión de estancamiento en el depósito de:

Considerando $P_5 = P_{atm} = 10^5$ Pa.

$$\frac{P_5}{P_{01}} = 0,9743892 = \frac{100.000}{P_{01}}$$

$$P_{01} = 102.628,39 \text{ Pa.}$$

En este punto es necesario recordar que puesto que el flujo a través de la tobera se ha considerado como isentrópico, en realidad el gradiente de presiones evaluado aquí sería en realidad ligeramente mayor.

Obsérvese que este mismo resultado se habría obtenido si se hubiese realizado el proceso paso a paso partiendo de la presión estática en el punto 5, es decir:

$$P_{05} = \frac{P_5}{0,9848157} = \frac{100.000}{0,9848157} = 101.541,84 \text{ Pa}$$

$$P_{05} = P_{04}:$$

Recordando que:

$$\frac{P_{04}}{P_{03}} = 0,9894128$$

$$P_{03} = \frac{P_{04}}{0,9894128} = \frac{101.541,84}{0,9894128} = 102.628,389 \text{ Pa}$$

$$P_{01} = P_{02} = P_{03}$$

2c.- En el último apartado del problema se requiere determinar el tiempo requerido para que en el depósito la presión de estancamiento decaiga de un valor inicial de $6*10^5$ Pa a un valor final de 102.628,3 Pa. El enunciado comenta que este proceso se puede considerar como politrópico con un índice de politropía de 1,5.

La temperatura de estancamiento que habrá en el depósito cuando la presión de estancamiento es de 102.628,3 Pa se calcula mediante la expresión:

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = \left(\frac{T_{01}}{T_{02}}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$T_{02} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{n-1}{n}} T_{01} = \left(\frac{102.628,3}{600.000}\right)^{\frac{1,5-1}{1,5}} * 586 = 325,28 \text{ K}$$

La densidad del aire en el depósito en las condiciones iniciales y finales definidas en este apartado será:

$$\rho_{ini} = \frac{P_{ini}}{R\, T_{ini}} = \frac{6*10^5}{287*586} = 3,5675 \frac{Kg}{m^3}$$

$$\rho_{fin} = \frac{P_{fin}}{R\, T_{fin}} = \frac{102.628,3}{287*325,28} = 1,09932 \frac{Kg}{m^3}$$

Es interesante destacar que entre estas condiciones inicial y final establecidas, el flujo en la sección de salida estará bloqueado. Bajo estas condiciones, la caída de presión de estancamiento temporal en el depósito, se establece mediante la ecuación (47) del problema 97, ecuación que tomaba la forma.

$$-P_0^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} = -P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} + \frac{\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{A_2}{\forall} \left(\gamma R\, T_{i0}\right)^{\frac{1}{2}} P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}\, t}{\frac{2\gamma}{1-\gamma}}$$

Véase que esta ecuación define la presión de estancamiento en el depósito en función de las condiciones iniciales de presión y temperatura de estancamiento en dicho depósito, del volumen del depósito, de la sección de salida, y del tiempo. Para el presente caso, todos estos parámetros excepto el tiempo son conocidos, con lo que sustituyendo en la ecuación precedente se obtiene el tiempo necesario para el vaciado del depósito ente las condiciones inicial y final establecidas.

$$t = \frac{\left(P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} - P_0^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}\right)\frac{2\gamma}{1-\gamma}}{\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{A_2}{\forall} \left(\gamma R\, T_{i0}\right)^{\frac{1}{2}} P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}} =$$

$$\frac{\left(600.000^{\frac{1-1,5}{2*1,5}} - 102.628,3^{\frac{1-1,5}{2*1,5}}\right)\frac{2*1,5}{1-1,5}}{1,5\left(\frac{2}{1,5+1}\right)^{\frac{1,5+1}{2(1,5-1)}} \frac{\pi*0,05^2}{4} \frac{1}{1.000} \left(1,5*287*586\right)^{0,5} 600.000^{\frac{1-1,5}{2*1,5}}}$$

Dicho tiempo de vaciado parcial del depósito es de t = 2425,2 segundos, t = 0,6736 horas.

Problema 108

Enunciado

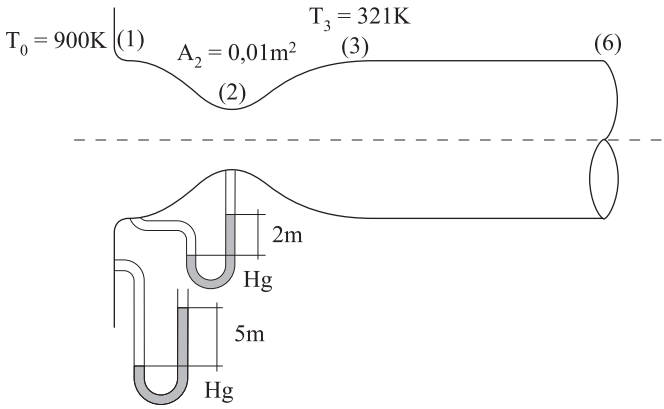
La instalación que se muestra en la figura 108.1 consta de una tobera convergente divergente la cual está conectada a un conducto de 5m de longitud. La garganta de la tobera tiene una sección de $0{,}01 m^2$, la temperatura de estancamiento en el depósito de entrada es de 900K. El factor de fricción del conducto es de f = 0.02, y se quiere que la temperatura estática a la salida de la tobera, punto (3), sea de 321K. γ =1.4; Fluido de trabajo aire.

Se pide:

1. Determinar los números de Mach en los puntos (1), (2), (3) y (6), teniendo en cuenta que el flujo está bloqueado y sabiendo que en algún punto del conducto de sección circular, donde M = 2,4 , aparece una onda de choque. Determinar todas las secciones.

2. Determinar las presiones estáticas y de estancamiento en todos los puntos anteriormente citados, así como en la entrada y salida de la onda de choque. Hallar la posición donde aparece dicha onda de choque. Determinar el caudal másico circulante.

Fig. 108.1



Resolución.

Se va a considerar el flujo en la tobera convergente divergente como isentrópico, mientras que en el conducto de sección constante se considerará flujo de Fanno.

Dado que el flujo ha de ser supersónico en la zona divergente de la tobera, en la garganta se cumplirá que M = 1. Entrando con este valor del número de Mach en las tablas de flujo isentrópico se obtiene: $\frac{P_2}{P_{02}} = 0{,}52828$

Puesto que el flujo en la tobera convergente divergente se considera isentrópico, la presión de estancamiento ha de ser la misma en todo punto, dicha presión de estancamiento se determina en la cámara de la izquierda gracias al manómetro conectado a la misma, siendo su valor:

$$P_0 = P_{01} = P_{02} = P_{03} = P_{atm} + \rho_{Hg}\ g\ h = 100.000 + 13.600 * 9,8 * 5 = 766.400 Pa$$

La presión estática en el punto 2 será: $P_2 = P_{02} * 0,52828 = 404.873,79 Pa$

El segundo de los manómetros, relaciona la presión estática entre los puntos uno y dos, con lo que la presión estática en el punto 1 será:

$$P_1 = P_2 + \rho_{Hg}\ g\ h = 404.873,79 + 13.600 * 9,8 * 2 = 671.433,79\ Pa$$

Con lo que en el punto 1, entrada de la tobera, se tiene:

$$\frac{P_1}{P_{01}} = \frac{671.433,79}{766.400} = 0,87608$$

Entrando en la tabla para flujo isentrópico con este valor de la relación de presiones en el punto 1, y para la zona subsónica se obtiene:

$$M_1 = 0,44\ ;\ \ \frac{T_1}{T_{01}} = 0,96272\ ;\ \ \frac{A_1}{A^*} = 1,474$$

De donde la temperatura estática y sección en el punto 1 serán:

$$T_1 = T_{01} * 0,96272 = 900 * 0,96272 = 866,448\ K$$

$$A_1 = A^*\ \ 1,474 = 0,01 * 1,474 = 0,0147\ m^2$$

En la garganta de la tobera, punto 2, se cumple $M_2 = 1$, entrando con este valor en la tabla de flujo isentrópico se tiene la relación:

$$\frac{T_2}{T_{02}} = 0.8333\ ;\ \ T_2 = T_{02} * 0,8333 = 900 * 0,8333 = 749,99\ K$$

Véase que se ha considerado que la temperatura de estancamiento es la misma en todo punto dentro de la tobera convergente divergente, característica típica de flujo isentrópico.

El enunciado dice que la temperatura estática en el punto 3 es de $T_3 = 321 K$, con lo que la relación temperatura estática, temperatura de estancamiento será:

$$\frac{T_3}{T_{03}} = \frac{321}{900} = 0,3566$$

Y entrando con este valor en la tabla de flujo isentrópico se obtiene:

$$M_3 = 3\ ;\ \frac{P_3}{P_{03}} = 0,027224\ ;\ \frac{A_3}{A^*} = 4,2346$$

La presión estática y la sección en el punto 3 valdrán:

$$P_3 = P_{03} * 0,027224 = 766.400 * 0,027224 = 20.864,47\ \text{Pa}$$

$$A_3 = A^*\ 4,2346 = 0,01 * 4,2346 = 0,042346\ \text{m}^2 \Rightarrow D = 0,2322\ \text{m}\ ;$$

Entrando en la tabla de flujo de Fanno, para M = 3, se extrae:

$$\frac{T}{T^*} = 0,42857\ ;\ \frac{P}{P^*} = 0,21822\ ;\ \frac{P_0}{P_0^*} = 4,2346\ ;\ \frac{4\,C_f\,L^*}{D} = 0,52216\ ;$$

El enunciado dice que existe un punto en el conducto en donde M = 2,4 y en dicho punto aparece una onda de choque.

Entrando en la tabla de flujo de Fanno, para M = 2,4, se obtiene:

$$\frac{T}{T^*} = 0,55762\ ;\ \frac{P}{P^*} = 0,31114\ ;\ \frac{P_0}{P_0^*} = 2,4031\ ;\ \frac{4\,C_f\,L^*}{D} = 0,40989\ ;$$

La relación de las presiones estáticas, estancamiento y temperaturas estáticas, entre los puntos tres y cuatro se obtendrá:

$$\frac{P_3}{P_4} = \frac{\frac{P_3}{P^*}}{\frac{P_4}{P^*}} = \frac{0,21822}{0,31114} = 0,70135$$

$$\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{\frac{P_{03}}{P_0^*}}{\frac{P_{04}}{P_0^*}} = \frac{4,2346}{2,4031} = 1,7621$$

$$\frac{T_3}{T_4} = \frac{\frac{T_3}{T^*}}{\frac{T_4}{T^*}} = \frac{0,42857}{0,55762} = 0,76856$$

Puesto que se conoce que: $P_3 = 20.864,47\ \text{Pa}$; $P_{03} = 766.400\ \text{Pa}$; $T_3 = 321\ \text{K}$; $T_{03} = 900\ \text{K}$; se tiene:

$$P_4 = \frac{P_3}{0,70135} = \frac{20.864,47}{0,70135} = 29.749,012\ \text{Pa}$$

$$P_{04} = \frac{P_{03}}{1,7621} = \frac{766.400}{1,7621} = 43.493,58$$

$$T_4 = \frac{T_3}{0,76856} = \frac{321}{0,76856} = 417,66\ \text{K}$$

Cabe recordar que la temperatura de estancamiento se mantiene constante para flujo de Fanno, con lo que la temperatura de estancamiento en los puntos 3 y 4 será la misma.

Entrando con el valor del número de Mach M = 2.4 en la tabla de ondas de choque planas, se extrae:

$$M_5 = 0,52312\ ;\ \frac{T_5}{T_4} = 2,0403\ ;\ \frac{P_5}{P_4} = 6,5533\ ;\ \frac{P_{05}}{P_{04}} = 0,54014\ ;\ \frac{\rho_5}{\rho_4} = 3,2119\ ;$$

Con lo que las propiedades en el punto 5 son:

$$T_5 = T_4 * 2,0403 = 417,66 * 2,0403 = 852,15\,\text{K}$$

$$P_5 = P_4 * 6,5533 = 29.749,012 * 6,5533 = 194.954,2\ \text{Pa}$$

$$P_{05} = P_{04} * 0,54014 = 434.935,58 * 0,54014 = 234.926,1\ \text{Pa}.$$

La distancia entre el origen del conducto y el punto donde aparece la onda de choque se determina:

$$\frac{4C_f\ \Delta x}{D} = \frac{4C_f\ L^*}{D}\bigg|_{M_{\text{Punto 3}}} - \frac{4C_f\ L^*}{D}\bigg|_{M_{\text{Punto 4}}}$$

Entrando en las tablas de flujo de Fanno para $M_3 = 3$ y $M_4 = 2,4$ se obtiene:

$$\frac{4C_f\ L^*}{D}\bigg|_{M_{\text{Punto 3}}} = 0,52216$$

$$\frac{4C_f\ L^*}{D}\bigg|_{M_{\text{Punto 4}}} = 0,40989$$

$$\frac{4C_f\ \Delta x}{D} = \frac{4C_f\ L^*}{D}\bigg|_{M=3} - \frac{4C_f\ L^*}{D}\bigg|_{M=4} = 0,52216 - 0,40989 = 0,11227$$

$$\Delta x = \frac{0,11227\ D}{4\ C_f} = \frac{0,11227 * 0,2322}{0,02} = 1,303\ \text{m}$$

Esta es la distancia respecto el origen del conducto en donde aparecerá la onda de choque.

La distancia desde la sección donde aparece la onda de choque hasta el final del conducto es: $5 - 1,303 = 3,697$ m

Se procede ahora a determinar las propiedades del fluido a la salida del conducto. Entrando en la tabla de Fanno con $M_5 = 0,52312$ se obtiene:

$$\frac{T}{T^*} = 1,1384 ; \quad \frac{P}{P^*} = 2,0519 ; \quad \frac{P_0}{P_0^*} = 1,3034 ; \quad \frac{4\, C_f\, L^*}{D} = 0,91742 ;$$

Entre los puntos 5 y 6 se establece:

$$\frac{4C_f\, \Delta x}{D} = \frac{4C_f\, L^*}{D}\bigg|_{M_{Punto\ 5}} - \frac{4C_f\, L^*}{D}\bigg|_{M_{Punto\ 6}}$$

De donde:

$$\frac{4C_f\, L^*}{D}\bigg|_{M_{Punto\ 6}} = \frac{4C_f\, L^*}{D}\bigg|_{M_{Punto\ 5}} - \frac{4C_f\, \Delta x}{D} = 0,91742 - \frac{0,02 * 3,697}{0,2322} = 0,598987$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo de Fanno se obtiene, (aproximadamente):

$$M_6 = 0,58 ; \quad \frac{T}{T^*} = 1,1244 ; \quad \frac{P}{P^*} = 1,8282 ; \quad \frac{P_0}{P_0^*} = 1,213 ;$$

Con lo que las presiones y temperaturas en el punto 6 serán:

$$\frac{P_6}{P_5} = \frac{\frac{P_6}{P^*}}{\frac{P_5}{P^*}} = \frac{1,8282}{2,0519} = 0,89097$$

$$\frac{P_{06}}{P_{05}} = \frac{\frac{P_{06}}{P_0^*}}{\frac{P_{05}}{P_0^*}} = \frac{1,213}{1,3034} = 0,93064$$

$$\frac{T_6}{T_5} = \frac{\frac{T_6}{T^*}}{\frac{T_5}{T^*}} = \frac{1,1244}{1,1384} = 0,9877$$

Y por tanto, se obtiene:

$$P_6 = P_5\ 0,89097 = 194.954,2 * 0,89097 = 173.698,34 \text{ Pa}$$

$$P_{06} = P_{05}\ 0,93064 = 234.926,1 * 0,93064 = 218.631,62 \text{ Pa}$$

$$T_6 = T_5\ 0,9877 = 852,15 * 0,9877 = 841,66\ K$$

El caudal másico circulante se determinará mediante la ecuación:

$$\dot{m} = \frac{P_0\ A}{\sqrt{R\ T_0}} \sqrt{\gamma}\ M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Aplicando esta ecuación en la garganta de la tobera, y considerando $\gamma = 1.4$, se tiene:

$$\dot{m} = \frac{766.400 * 0,01}{\sqrt{287 * 900}} \sqrt{1.4} \left(1 + \frac{1,4 - 1}{2}\right)^{-\frac{1.4+1}{2(1.4-1)}} = 10,3225\ \frac{Kg}{s}$$

Problema 109

Enunciado

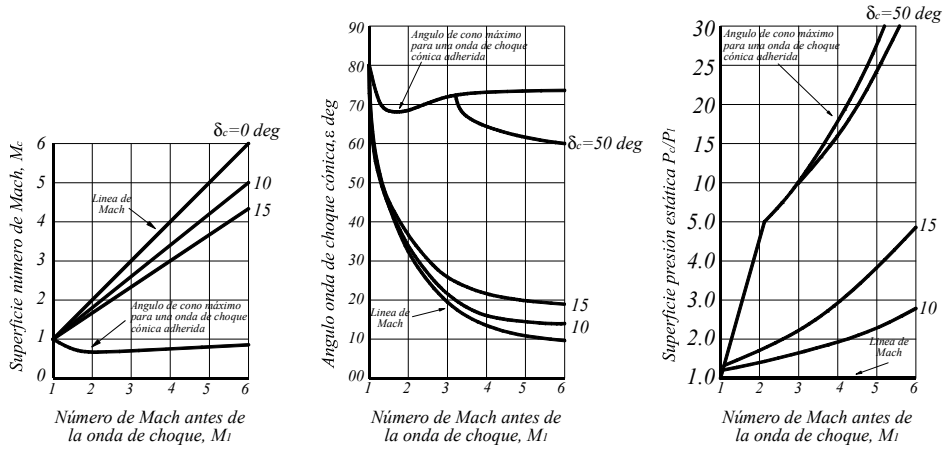
Se requiere diseñar un prototipo de avión supersónico. A priori, se pretende que vuele a 10.000 y 20.000 m de altura, y se requiere estudiar la posibilidad de que vuele a M = 2 y M = 5. Como primera aproximación, se entenderá que el coeficiente de arrastre del avión está básicamente influenciado por las fuerzas que actúan sobre la estructura cónica de la parte frontal del avión. Determine para las condiciones de vuelo establecidas, cuál es la potencia requerida en los motores del avión, suponiendo que el ángulo del cono pueda ser de 30º o bien de 20º. Considere el diámetro de la base del cono de 1,5 m $\gamma = 1,4$.

¿Cuál es el valor de la presión de estancamiento en la superficie del cono y de la corriente no perturbada?

¿Qué conclusiones se extraen de los resultados obtenidos?

Propiedades de la atmósfera:	a 10.000 m.	a 20.000 m.
T (K)	223,25	216,65
P (Pa)	$2,65 * 10^4$	$5,5293 * 10^3$
ρ (Kg/m^3)	0,41351	0,088910
μ (Kg/(ms))	$1,4577 * 10^{-5}$	$1,4216 * 10^{-5}$

Fig. 109.1 Diferentes diagramas de trabajo. Fuente: M.J. Zucrow; J.D. Hoffman



Resolución

De las gráficas del enunciado, se obtiene:

$M_1 = 2;\ \delta_c = 15º;\ \rightarrow \quad \varepsilon = 34º; \quad M_c = 1{,}7; \quad P_c/P_1 = 1{,}5$

$M_1 = 2;\ \delta_c = 10º;\ \rightarrow \quad \varepsilon = 31{,}5º; \quad M_c = 1{,}82; \quad P_c/P_1 = 1{,}25$

$M_1 = 5;\ \delta_c = 15º;\ \rightarrow \quad \varepsilon = 20º; \quad M_c = 3{,}8; \quad P_c/P_1 = 3{,}7$

$M_1 = 5;\ \delta_c = 10º;\ \rightarrow \quad \varepsilon = 16º; \quad M_c = 4{,}3; \quad P_c/P_1 = 2{,}35$

La fuerza sobre la estructura cónica vendrá dada por el producto de la presión estática sobre la superficie del cono por el área del mismo.

1. Para una altura de 10.000 m:

$M = 2;\ \delta_c = 15º; \quad P_c = 1{,}5 * 2{,}65*10^4 = 39.750\ Pa$

$M = 2;\ \delta_c = 10º; \quad P_c = 1{,}25 * 2{,}65*10^4 = 33.125\ Pa$

$M = 5;\ \delta_c = 15º; \quad P_c = 3{,}7 * 2{,}65*10^4 = 98.050\ Pa$

$M = 5;\ \delta_c = 10º; \quad P_c = 2{,}35 * 2{,}65*10^4 = 62.275\ Pa$

La presión de estancamiento en la superficie del cono, que se obtiene tabla de flujo isentrópico es:

$M_c = 1{,}7; \rightarrow \quad P_c/P_{oc} = 0{,}20259; \quad P_{oc} = 39.750 / 0{,}20259 = 196.209\ Pa$

$M_c = 1{,}82; \rightarrow \quad P_c/P_{oc} = 0{,}16879; \quad P_{oc} = 33.125 / 0{,}16879 = 196.249\ Pa$

$Mc = 3{,}8; \rightarrow \quad Pc/Poc = 0{,}0086290; \quad Poc = 98.050 / 0{,}0086290 = 11.362.846{,}2\ Pa$

$Mc = 4{,}3; \rightarrow \quad Pc/Poc = 0{,}0044494; \quad Poc = 62.275 / 0{,}0044494 = 13.996.269\ Pa$

La presión de estancamiento antes de la onda de choque que se obtiene yendo a la tabla de flujo isentrópico responde a la relación:

M = 2; → P_1/P_{01} = 0,12780; $P_{01} = 2{,}65*10^4 / 0{,}12780 = 207.355{,}2$ Pa

M = 5; → P_1/P_{01} = 0,00189; $P_{01} = 2{,}65*10^4 / 0{,}00189 = 14.021.164$ Pa

La superficie sobre la que actúa la presión es $\pi * 1{,}5^2 / 4 = 1{,}7671$ m^2

La fuerza en la estructura será:

39.750 * 1,7671 = 70.244 N M = 2; $\delta_c = 15º$;

33.125 * 1,7671 = 58.536 N M = 2; $\delta_c = 10º$;

98.050 * 1,7671 = 173.268 N M = 5; $\delta_c = 15º$;

62.275 * 1,7671 = 110.049 N M = 5; $\delta_c = 10º$;

de donde la potencia:

P = F* V; $C = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1{,}4 * 287 * 223{,}25} = 299{,}5 \frac{m}{s}$

M = V / C;

M = 2; δ_c= 15º; 70.244 * 2 * 299,5 = 42.076.156 W

M = 2; δ_c= 10º; 58.536 * 2 * 299,5 = 35.063.064 W

M = 5; δ_c= 15º; 173.268 * 2 * 299,5 = 259.468.830 W

M = 5; δ_c= 10º; 110.049 * 2 * 299,5 = 164.798.377 W

2. Para una altura de 20.000 m:

M = 2; δ_c = 15º; $P_c = 1{,}5 * 5{,}5293 * 10^3 = 8.293{,}9$ Pa

M = 2; δ_c = 10º; $P_c = 1{,}25 * 5{,}5293 * 10^3 = 6.911{,}6$ Pa

M = 5; δ_c = 15º; $P_c = 3{,}7 * 5{,}5293 * 10^3 = 20.458{,}4$ Pa

M = 5; δ_c = 10º; $P_c = 2{,}35 * 5{,}5293 * 10^3 = 12.993{,}8$ Pa

La presión de estancamiento en la superficie del cono será:

$$P_{oc} = 8.293,9 / 0,20259 = 40.939,3 \text{ Pa}$$

$$P_{oc} = 6.911,62 / 0,16879 = 40.948,0 \text{ Pa}$$

$$P_{oc} = 20.458,4 / 0,008629 = 2.370.888,8 \text{ Pa}$$

$$P_{oc} = 12.993,8 / 0,0044494 = 2.920.348,8 \text{ Pa}$$

La presión de estancamiento antes de la onda de choque vale:

$$P_{01} = 5,5293*10^3 / 0,12780 = 43.265,2 \text{ Pa}$$

$$P_{01} = 5,5293*10^3 / 0,00189 = 2.925.555,5 \text{ Pa}$$

La fuerza actuante será:

$$8.293,9 * 1,7671 = 14.656 \text{ N}$$

$$6.911,62 * 1,7671 = 12.213 \text{ N}$$

$$20.458,4 * 1,7671 = 36.152 \text{ N}$$

$$12.993,8 * 1,7671 = 22.961,3 \text{ N}$$

La velocidad del sonido a 20.000 m se determina:

$$C = \sqrt{1,4 * 287 * 216,65} = 295,04 \frac{m}{s}$$

La potencia requerida será:

$$14.656 * 2 * 295,04 = 8.648.212 \text{ W}$$

$$12.213 * 2 * 295,04 = 7.206.647 \text{ W}$$

$$36.152 * 5 * 295,04 = 53.331.430 \text{ W}$$

$$22.961,3 * 5 * 295,04 = 33.872.509 \text{ W}$$

Obsérvese que la disminución del ángulo del cono da lugar a una disminución notoria de la potencia requerida.

Por otro lado, al aumentar la altura de vuelo, disminuye la potencia necesaria en los motores.

En realidad, para determinar la potencia total, será necesario tener en cuenta las fuerzas debidas a la fricción y a la distribución de presiones sobre los demás elementos componentes del avión.

Problema 110

Enunciado

Sea el motor de cohete que se muestra en la figura. Las dimensiones principales del mismo son: diámetro de la cámara de combustión 40 cm; diámetro de la garganta de la tobera 25 cm; diámetro de la salida de la tobera supersónica 100 cm. Se sabe que la tobera está adaptada a una altura de 3.000 m. $\gamma = 1{,}4$.

Determine:

1. La presión estática en la cámara de combustión necesaria para que exista la adaptación requerida.
2. El caudal másico circulante bajo las condiciones de adaptación.
3. El empuje del motor en estas condiciones.
4. La ecuación que determina la aceleración temporal del cohete en la zona subsónica de velocidad.
5. La ecuación de la aceleración del cohete en régimen supersónico.

-Comente en cada caso las hipótesis realizadas.

-Considere la temperatura estática en la cámara de combustión de 900 K.

-Variación de la temperatura del aire atmosférico con la altura: T=288,16 - 0,0065 Z.

-P atmosférica a nivel del mar: 100.000 Pa.

-Ángulo del cono de la punta del cohete 30º.

-Como primera aproximación, tome la constante del gas (R) como la del aire.

-Supóngase conocido el coeficiente de arrastre C_D.

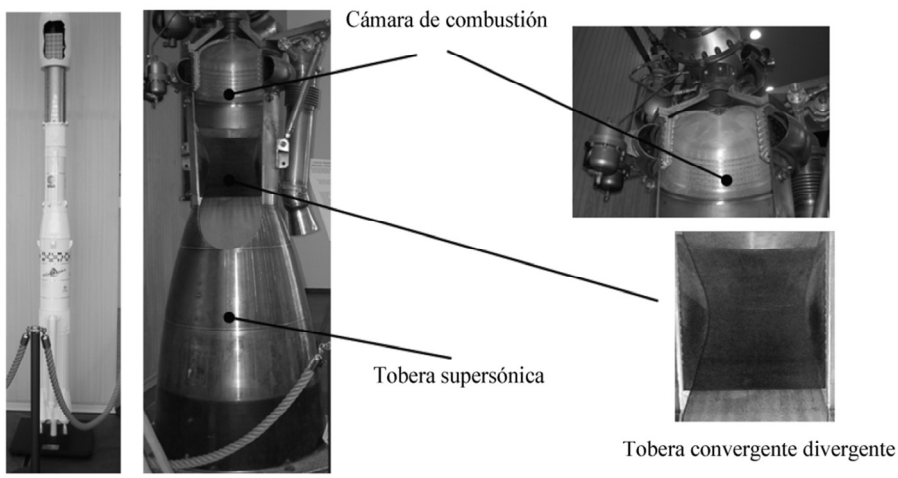


Fig. 110.1
Conjunto motor de cohete

Resolución

La presión del aire atmosférico a una altura de 3.000 m se determina:

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz$$

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T$$

$$T = T_0 - Bz$$

$$T_o = 288{,}16\ K$$

$$B = 0{,}00650 \frac{K}{m}$$

$$R = 287 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$P_{atm} = 10^5\ Pa$$

La presión a 3000 m de altura será:

$$\int_{P_{atm}}^{P_{3000}} \frac{dp}{p} = -\int_{z_o=0}^{z=3000} \frac{g}{R\left(T_o - Bz\right)} dz$$

$$\ln\left(\frac{P_{3000}}{P_{atm}}\right) = \frac{g}{R \cdot B} \ln\left(\frac{T_o - BZ_{3000}}{T_o - BZ_o}\right)$$

$$P_{3000} = P_{atm} \cdot \left(\frac{T_o - BZ_{3000}}{T_o - BZ_o}\right)^{\frac{g}{R \cdot B}}$$

$$P_{3000} = 10^5 \cdot \left(\frac{288{,}16 - 0{,}0065 \cdot 3.000}{288{,}16}\right)^{\frac{9{,}8}{0{,}0065 \cdot 287}}$$

$$P_{3000} = 10^5 \cdot 0{,}932329^{5{,}2532}$$

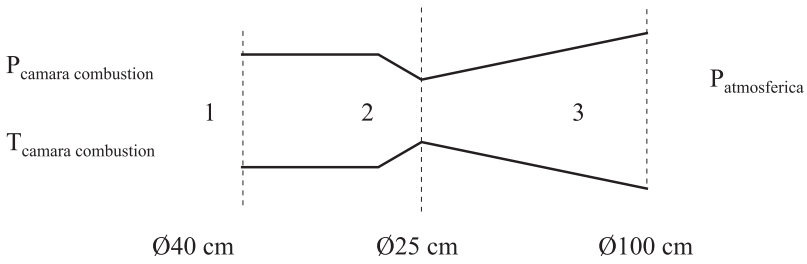
$$P_{3000} = 10^5 \cdot 0{,}69205 = 69.205{,}54 Pa$$

Una vez se conoce la presión atmosférica a 3.000 m de altura, se puede determinar la presión mínima necesaria en la cámara de combustión. Para ello, será necesario recordar el concepto de adaptación de presión en una tobera supersónica.

Una tobera se dice esta adaptada, cuando la presión estática a la salida de la tobera, coincide con la presión atmosférica a la altura a la que esta realizada dicha adaptación, no existiendo bajo estas condiciones onda de choque alguna a la salida de la tobera.

Para la resolución de este problema no obstante, se considerará que la adaptación a la que hace referencia el enunciado, es tal que, la presión estática a la salida de la tobera coincide con la presión atmosférica a una altura de 3.000 m, pero si que existe una onda de choque plana a la salida de la tobera. Esta consideración se realiza con el fin de incluir en el problema el tratamiento de ondas de choque planas.

Fig. 110.2



Puesto que en el punto 2, garganta de la tobera, el número de Mach será $M_2 = 1$; de la tabla de flujo isentrópico, entrando con la relación de áreas:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{0,4^2}{0,25^2} = 2,56$$

Se obtiene:

$$M_1 = 0,233; \qquad \left.\frac{T}{T_0}\right|_1 = 0,9892\ ; \qquad \left.\frac{P}{P_0}\right|_1 = 0,9627\ ;$$

Entre los puntos 2 y 3 la relación de áreas es:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1^2}{0,25^2} = 16$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo isentrópico:

$$\frac{T}{T_0} = 0,201056\ ; \qquad \frac{P}{P_0} = 0,00364946\ ; \qquad M_3 = 4,458\ ;$$

Puesto que en las condiciones de diseño a la salida de la tobera se supone que aparece una onda de choque plana, entrando en la tabla de ondas de choque planas para un número de Mach de $M_3 = 4,458$ se obtienen las condiciones entre la entrada y la salida de la onda de choque.

M_3 antes de la onda de choque = 4,458

M_3 después de la onda de choque= 0,42426

$$\frac{T_{3\ despues}}{T_{3\ antes}} = 4,802272\ ; \qquad \frac{P_{3\ despues}}{P_{3\ antes}} = 23,022\ ;$$

La presión $P_{después}$ se considera que es la presión atmosférica a una altura de 3.000 m.

$$P_{3\,antes} = \frac{P_{3\,después}}{23,022} = \frac{69.205,54}{23,022} = 3.006,061\ Pa$$

La presión de estancamiento delante y detrás de la onda de choque se calcula:

Entrando con el valor de $M_{3\,después} = 0,42426$ en la tabla de flujo isentrópico se tiene:

$$\left.\frac{P}{P_0}\right|_{3\,después} = 0,88277\ ; \qquad P_{0_{3\,después}} = \frac{69.205,54}{0,88277} = 78.395,89 Pa$$

A la entrada de la onda de choque, donde $M_{3\,entrada} = 4,458$ de la tabla de flujo isentrópico, se tiene:

$$\left.\frac{P}{P_0}\right|_{3\,antes} = 0,00364946\ ; \qquad P_{0_{3\,antes}} = \frac{3.006,061}{0,00364946} = 823.700,21\ Pa$$

Cabe recordar que la presión de estancamiento determinada a la entrada de la onda de choque se mantiene constante a lo largo de toda la tobera.

La presión estática en la garganta se determina mediante la relación $\left.\frac{P}{P_0}\right|_2$, la cual se obtiene de la tabla de flujo isentrópico, entrando con un número de Mach igual a la unidad. $M_2 = 1$, y se obteniene:

$$\left.\frac{P}{P_0}\right|_2 = 0,52828$$

$$P_2 = P_0 \cdot 0,52828 = 823.700,21 \cdot 0,52828 = 435.144,34\ Pa$$

Entrando con el valor del número de Mach de $M_1 = 0,233$ en la tabla de flujo isentrópico, se obtiene la relación:

$$\left.\frac{P}{P_0}\right|_1 = 0,9627$$

de donde:

$$P_1 = 823.700,21 \cdot 0,9627 = 792.976,19\ Pa$$

Ésta es la presión estática necesaria en la cámara de combustión para que se cumplan las condiciones establecidas en el enunciado.

El flujo másico que circula por la tobera, para un $\gamma = 1{,}4$, es de:

$$\frac{\dot{m}\cdot\sqrt{RT_0}}{P_0\cdot A^*} = 0{,}6847;$$

$$\dot{m} = \frac{P_0\cdot A^*\cdot 0{,}6847}{\sqrt{RT_0}}$$

El enunciado establece que la temperatura estática del gas en la cámara de combustión es de 900 K con lo que la temperatura de estancamiento se determinará: Entrando con el número de Mach M = 0,233 en la tabla de flujo isentrópico se llega.

$$\frac{T}{T_0} = 0{,}9892\ ; \qquad T_0 = \frac{900}{0{,}9892} = 909{,}82\text{K}\ ;$$

Recordando que la presión y la temperatura de estancamiento se mantienen a lo largo de toda la tobera, se tiene:

$$\dot{m} = \frac{823.700{,}21\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}25^2}{4}\cdot 0{,}6847}{\sqrt{287\cdot 909{,}82}} = 54{,}177\frac{\text{kg}}{\text{S}}$$

La fuerza de empuje de la tobera se determina por la expresión: $F = \dot{m}V + A_T(P_{salida} - P_{atm})$; donde A_T es la sección de salida de la tobera, P_{salida} es la presión estática a la salida de la tobera, y P_{atm} es la presión atmosférica en las condiciones en las que se produce la adaptación de la tobera. Para el caso de una tobera adaptada la fuerza de empuje es simplemente $F = \dot{m}V$.

Si se realiza el cálculo de la fuerza de empuje delante de la onda de choque se tiene:

$$M_{3\,\text{antes}} = 4{,}458 = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{\gamma RT}}$$

La temperatura estática del fluido antes de la onda de choque, donde $M_3 = 4{,}453$, se obtiene mediante la relación de temperaturas que se obtendrá de la tabla de flujo isentrópico.

$$\left.\frac{T}{T_0}\right|_{3\,\text{antes}} = 0{,}201056\ ;$$

$$T = T_0\cdot 0{,}201056 = 909{,}82\cdot 0{,}201056 = 182{,}92\text{K}\ ;$$

$$v = M_3\cdot\sqrt{\gamma RT} = 4{,}458\cdot\sqrt{1{,}4\cdot 287\cdot 182{,}92} = 1.208{,}59\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El empuje de la tobera será:

$$F_y = 54,177 \cdot 1.208,59 + \frac{\pi\, 1^2}{4}\left(3.006,06 - 69.205,54\right) = 13.484,83\text{N}$$

Si se calcula la fuerza de empuje a la salida de la onda de choque se obtendrá:

$$T_{3\text{despues}} = T_{3\text{antes}} * 4,802272 = 182,92 * 4,802272 = 878,43\text{K}\ ;$$

$$V_{3\text{despues}} = 0,42426 * \sqrt{\gamma R\, T_{3\text{despues}}} = 0,42426 * \sqrt{1,4 * 287 * 878,43} = 252,05\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$F_y = 54,177 \cdot 252,05 = 13.655,44\text{N}$; Dado que para este caso $P_{salida} = P_{atm} = 69.205,54$ Pa.

Obsérvese que, tal y como cabía esperar, ambos resultados son prácticamente idénticos.

Es necesario remarcar que, el empuje que bajo estas condiciones ejerce la tobera, es considerablemente menor que el que ejercería si la tobera estuviera adaptada.

Suponiendo que el cohete sigue una trayectoria ascendente con una inclinación de 75º respecto a la horizontal, la aceleración del mismo vendrá dada por la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas no inerciales de coordenadas.

$$-\dot{m} \cdot \underset{\text{escape}}{V_{\text{gases}}} + m_{\text{cohete}} \cdot \vec{a} = -\int_{sc} P \cdot d\vec{S} + \int_{sc} \bar{\bar{\tau}} \cdot dS + \int_{vc} \rho \vec{g} \forall$$

Para flujo subsónico, las fuerzas de presión y esfuerzos cortantes actuantes sobre el cohete se pueden dar como:

$$D = C_D \cdot \rho_{aire} \cdot S \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2}$$

Considerando que la variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control se puede despreciar, la ecuación anterior se puede dar como:

$$m_{\text{cohete}} \cdot \vec{a} = -C_D \cdot \rho_{aire} \cdot S \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2} - m_{\text{cohete}} \cdot g \cos 15 + \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}}$$

$$m_{\text{cohete}} \cdot \frac{dV_{\text{cohete}}}{dt} = -C_D \cdot \rho_{aire} \cdot S \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2} - m_{\text{cohete}} \cdot g \cos 15 + \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}}$$

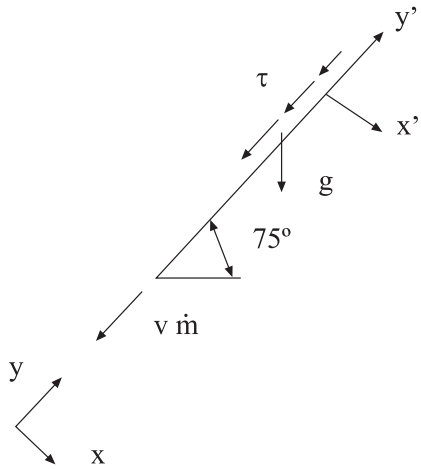


Fig. 110.3
Esquema de las fuerzas que actúan sobre el cohete

En la ecuación diferencial anterior, obsérvese que la variable que se busca es la velocidad de cohete; no obstante, ha de tenerse en cuenta que la masa del cohete depende del tiempo y, asimismo, la densidad del aire atmosférico que se encuentra en el término del coeficiente de arrastre es función de la altura a la que se encuentre el cohete.

A priori, se considera que la densidad del aire es la que existe a 3.000 m de altura y se mantiene constante.

La masa del cohete variable será:

$$m_{cohete} = m_{inicial} - \dot{m}_{saliente} \cdot t$$

con lo que:

$$(m_{inicial} - \dot{m}_{saliente} \cdot t) \cdot \frac{dV_{cohete}}{dt} = -C_D \cdot \rho_{aire} \cdot S \cdot \frac{V_{cohete}^2}{2} \qquad (A)$$
$$-(m_{inicial} - \dot{m}_{saliente} \cdot t) \cdot g \cos 15 + \dot{m}_{saliente} \cdot V_{gases\ escape}$$

ecuación diferencial que permite determinar la velocidad del cohete partiendo de un punto que a priori debe estar situado a 3.000 m, con lo cual es necesario conocer la velocidad del cohete a dicha altura. No obstante, esta ecuación podría utilizarse para hallar la velocidad del cohete partiendo del reposo.

Una vez que la velocidad del cohete llegue a ser sónica, es decir, $M_{cohete} = 1$, aparecerá en la punta cónica del cohete una onda de choque oblicua.

A partir de este momento, las fuerzas de arrastre, antagonistas al movimiento del cohete, serán mayormente debidas a la sobrepresión que actúa sobre la punta cónica del cohete. Dicha sobrepresión será mayor cuanto mayor sea el número de Mach del cohete.

A modo de ejemplo, la presión que actúa sobre la superficie cónica del cohete será:

Para Mach del cohete igual a $M_{cohete} = 2$ y semiángulo del cono de 15 grados, de la figura (110.1) (problema anterior), se obtiene:

$$\frac{P_c}{P_1} = 1,5$$
$$P_c = P_1 \cdot 1,5$$

Si el número de Mach fuese de $M_{cohete} = 4$, la relación de presiones sería $\frac{P_c}{P_1} = 2,75$

Véase que P_1 representa la presión antes de la onda de choque en cada caso (presión atmosférica a la altura a la que se encuentre el cohete en cada instante).

La ecuación de cantidad de movimiento, teniendo en cuenta la sobrepresión que actúa en la punta del cohete, queda:

$$(m_{inicial} - \dot{m}_{saliente} \cdot t) \cdot \frac{dV_{cohete}}{dt} = -C_D \cdot \rho_{aire} \cdot S_{P\,cohete} \cdot \frac{V_{cohete}^2}{2}$$
$$-(m_{inicial} - \dot{m}_{saliente} \cdot t) \cdot g\cos 15 - P_{S\,cono}\ S_{cono\ cohete} + \dot{m}_{saliente} \cdot V_{gases\ escape} \qquad \text{(B)}$$

Tal y como se ha representado esta ecuación, el coeficiente de arrastre C_D que se halla en la parte derecha de la misma, no puede tener el mismo valor que para el flujo subsónico, puesto que ahora las fuerzas de presión, que actúan sobre la punta cónica se evalúan por separado; de hecho, el coeficiente de arrastre C_D ahora, sería el que evaluase mayormente los esfuerzos cortantes actuantes sobre la superficie lateral del cohete. Al respecto, es necesario indicar que, a medida que el número de Mach del cohete aumente, este término llegará a ser mucho menor que el debido a la presión actuante sobre la superficie cónica de la punta del cohete.

Por otro lado, la presión sobre el cono depende asimismo de la altura a la que se encuentra el cohete, puesto que a cada altura existe una presión atmosférica diferente, siendo la velocidad del cohete asimismo diferente y, por tanto, lo es también el número de Mach.

Así, la primera de las ecuaciones de cantidad de movimiento hallada, la ecuación (A), deberá ser utilizada hasta que la velocidad del cohete llegue a ser sónica. La segunda de las ecuaciones de cantidad de movimiento, la ecuación (B), se utilizará una vez se llegue a la velocidad sónica, recordando que la presión sobre la punta cónica varía en función del número de Mach del cohete en cada instante.

Consiguientemente, el proceso para determinar la velocidad y la aceleración del cohete en cada instante ha de seguir los pasos siguientes:

Considerando las características que se conocen a 3.000 m de altura, se determina $\dot{m}_{saliente}$ y $V_{gases\ escape}$. En la práctica, estos dos valores se pueden considerar constantes

para todo el problema o, lo que es lo mismo, se puede considerar que el empuje de la tobera es constante. (Esta consideración no es estrictamente cierta.) Mediante la resolución de la ecuación diferencial (A), se pueden determinar la velocidad temporal del cohete, su aceleración y su posición. Dicha ecuación diferencial (A) se podrá aplicar partiendo del reposo o partiendo de la velocidad del cohete para una altura de 3.000 m; en este segundo caso, la velocidad del cohete a dicha altura debe ser conocida.

Cuando la velocidad del cohete llegue a ser la sónica, aparecerá una onda de choque oblicua en la punta cónica del cohete. Ello causará una sobrepresión sobre la punta cónica. Dicha sobrepresión aumentará con el número de Mach del cohete. A partir del punto en que $M_{cohete} > 1$, el cálculo de la velocidad del mismo seguirá la ecuación B. Cabe remarcar, no obstante, que el coeficiente de arrastre C_D, ligado a la ecuación B, estará asociado únicamente a los esfuerzos de fricción actuantes sobre el cohete, puesto que el efecto de la distribución de presiones que actúan sobre el extremo cónico del cohete, debido a la onda de choque cónica, se considera por separado. Obsérvese que los coeficientes de arrastre C_D asociados a las ecuaciones A y B han de hallarse experimentalmente.

El proceso de cálculo mediante la ecuación B será el siguiente: cuando mediante la ecuación A se haya calculado la velocidad del cohete, su aceleración y su posición, y se cumpla $M_{cohete} > 1$, mediante la gráfica 109.1 se calculará la relación de presiones P_c / P_1, puesto que P_1 es la presión de la atmósfera a la altura a la cual se encuentre el cohete. Se determinará esta presión, que a su vez permitirá determinar la presión actuante sobre el cono del cohete P_c. Sustituyendo estos valores en la ecuación B, se hallará la velocidad temporal del cohete partiendo de este punto. Así, para un diferencial de tiempo posterior, se conocerán la nueva velocidad del cohete, su nueva aceleración y su posición; asimismo se podrán determinar el nuevo número de Mach del cohete y la nueva presión P_c sobre el mismo. (Si se observa relevante, se puede hallar asimismo el nuevo valor de C_D.) Sustituyendo estos datos en la ecuación B, se podrá hallar la velocidad del cohete para el tiempo $t + 2\Delta t$. El proceso expuesto se repite a partir de este punto.

Problema 111

Enunciado

La figura 111.1 muestra el modelo de la aeronave supersónica X43. Obsérvese que, en realidad, el vehículo consta de una cuña formada por dos planos inclinados; la inclinación de ambos planos cambia a partir de una cierta coordenada X respecto al origen del aeroplano. La figura 111.2 muestra un esquema de las dimensiones y los ángulos estimados asociados a cada plano. Véase que, en esta estimación, la aeronave tiene 5 m de longitud y 1 m de anchura, y su espesor depende de los ángulos de inclinación de los

diversos planos, con lo cual es diferente para cada valor de la coordenada X. El índice de adiabaticidad se supone en todo momento, igual a $\gamma = 1{,}4$.

Suponiendo que se quiera que el avión vuele a un número de Mach 7 y a una altura de 10.000 m, se desea conocer:

1. El número de Mach, la inclinación de las ondas de choque oblicuas y las expansiones de Prandtl-Meyer sobre los planos correspondientes.

2. La presión y la temperatura existentes sobre cada uno de los planos inclinados. Determinar dichos parámetros cuando el avión vuela a M = 7 y a una altura de 10.000 y 30.000 m.

3. Hallar la potencia que deberían tener los motores para los dos casos definidos en el apartado 2 del problema.

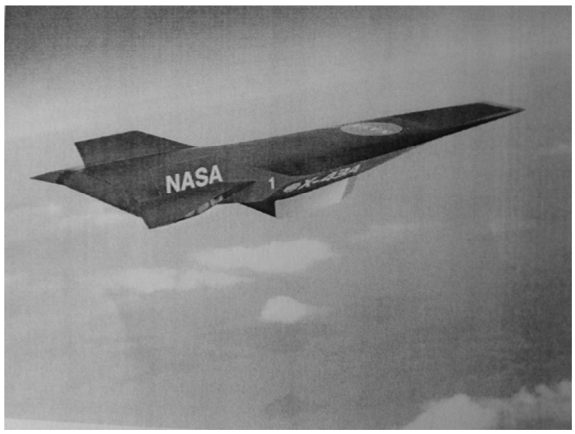


Fig. 111.1 Fotografía aproximada del avión supersónico no tripulado X43

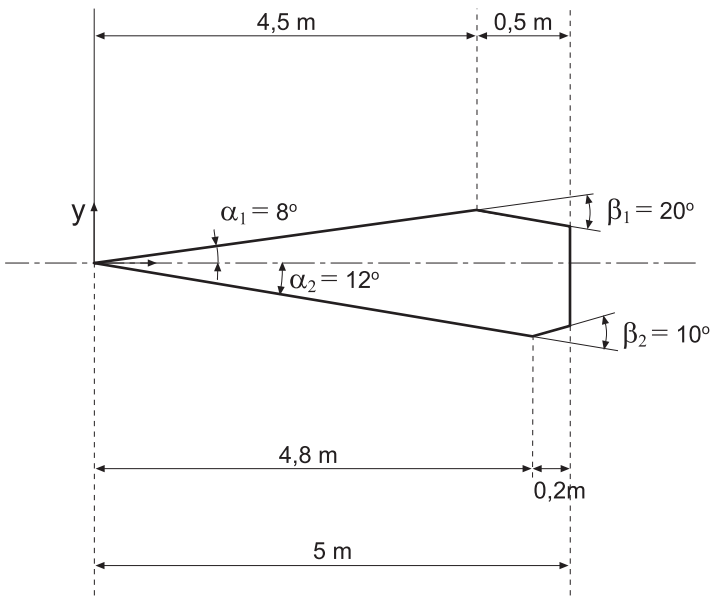


Fig. 111.2 Esquema de las dimensiones estimadas y de los ángulos asociados a cada uno de los planos inclinados

Resolución

1. Puesto que los planos inclinados en la parte superior y en la inferior de vehículo poseen diferentes ángulos de inclinación, se realiza el estudio por separado.

1a. Determinación de las características del fluido en la parte superior.

Partiendo del número de Mach aguas arriba, $M_1 = 7$, del ángulo de inclinación del plano superior $\alpha_1 = 8^o$ y utilizando la ecuación siguiente, se puede obtener el ángulo que forma la onda de choque oblicua respecto a la horizontal ε_1.

$$\frac{1}{\tan\alpha_1} = \left[\frac{(\gamma+1)}{2}\left(\frac{M_1^2}{M_1^2\,\sin^2\varepsilon_1 - 1}\right) - 1\right]\tan\varepsilon_1$$

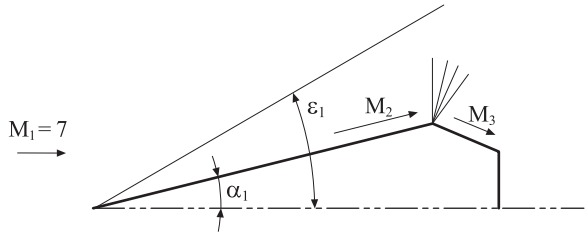


Fig. 111.3
Esquema del flujo en la parte superior del vehículo

El valor del ángulo ε_1 es de 0,2524537787 rad; 14,4643º. Es importante recordar que un segundo ángulo de 88,17 º se obtiene asimismo de la ecuación precedente, pero para este segundo ángulo la onda de choque dejaría de estar adherida, con lo cual se debe elegir como solución el primero de los ángulos hallados.

El número de Mach asociado al flujo incidente y perpendicular a la onda de choque se tiene mediante la relación siguiente: $M_{N1} = M_1 * \sin(\varepsilon_1)$, de donde $M_{N1} = 1{,}7484$.

El número de Mach después de la onda de choque y perpendicular al plano generado por la misma será:

$$M_{N2}^2 = \frac{M_{N1}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma-1)}\right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)}\right]M_{N1}^2 - 1}; \qquad M_{N2} = 0{,}628457;$$

Para obtener el número de Mach después de la onda de choque y paralelo a la superficie inclinada M_2, se utiliza la ecuación:

$$M_2 = \frac{M_{N2}}{\sin(\varepsilon_1 - \alpha_1)} = \frac{0{,}628457}{\sin(0{,}252453 - 0{,}139626)} = 5{,}5819$$

Una vez determinado dicho número de Mach, se puede proceder a hallar el número de Mach sobre el segundo de los planos inclinados, M_3. Véase que entre el primero y el segundo de los planos inclinados aparecen ondas de choque de expansión o de Prandtl-Meyer.

El proceso que hay que seguir para determinar el número de Mach después de las ondas de expansión, M_3, consiste en determinar inicialmente el ángulo η_1 necesario para que el fluido incidente con un número de Mach M = 1 se transforme en un número de Mach M_2 = 5,5819. El ángulo η_1 obtenido deberá sumarse al ángulo $\beta_1 = 20^\circ$ y utilizar el ángulo resultante para hallar finalmente el número de Mach después de las ondas de expansión. La figura 111.4 esquematiza el proceso que se debe seguir. La ecuación siguiente, que relaciona el ángulo η con el número de Mach aguas abajo, se utilizará en todo el proceso.

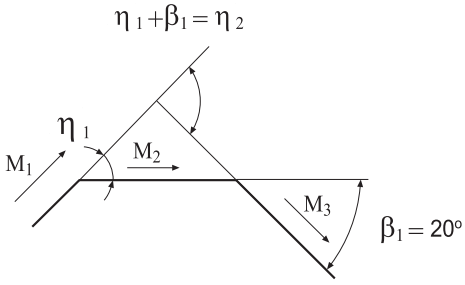


Fig.111.4 Esquema del proceso que hay que seguir para determinar el número de Mach detrás de las ondas de expansión

$$\eta = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{\left(M^2-1\right)}$$

El ángulo η_1 necesario para que, partiendo de un número de Mach que sea la unidad, se obtenga el número de Mach M_2 = 5,5819, γ = 1,4, será:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M_2^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{\left(M_2^2-1\right)}$$

$$\eta_1 = 1.42927 \text{ rad}; \quad \eta_1 = 81{,}8911^\circ$$

El nuevo ángulo que hay que considerar es $\eta_2 = \eta_1 + \beta_1 = 81{,}8911+20 = 101{,}8911^\circ$; η_2 =1,7783 rad. En consecuencia, el número de Mach después de las ondas de expansión se obtendrá de despejar de la ecuación siguiente:

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M_3^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{\left(M_3^2-1\right)}$$

$$M_3 = 9{,}8449$$

Véase que este número de Mach es bastante más elevado que el correspondiente al flujo no perturbado.

1b. A partir de este punto, el proceso debe repetirse con el fin de determinar los números de Mach correspondientes a la parte inferior de la aeronave. Para un número de Mach M_1 = 7 y un ángulo de ataque $\alpha_2 = 12^\circ$ (v. fig. 111.5), el ángulo de la onda de choque oblicua ε_2 tomará un valor de ε_2 = 0,321198 rad; ε_2 = 18,4033 deg:

$$\frac{1}{\tan\alpha_2} = \left[\frac{(\gamma+1)}{2}\left(\frac{M_1^2}{M_1^2\,\sin^2\varepsilon_2 - 1}\right) - 1\right]\tan\varepsilon_2$$

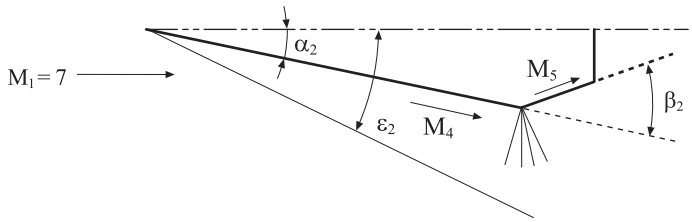


Fig. 111.5
Esquema del flujo en la parte inferior de la aeronave

El número de Mach normal a la onda de choque se obtiene mediante la relación siguiente: $M_{N1(inf)} = M_1 * \sin(\varepsilon_2)$, de donde $M_{N1(inf)} = 2{,}2099$.

El número de Mach después de la onda de choque y perpendicular al plano generado por la misma será:

$$M_{N4}^2 = \frac{M_{N1(inf)}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma-1)}\right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)}\right] M_{N1(inf)}^2 - 1}; \qquad M_{N2} = 0{,}54573$$

El número de Mach paralelo a la superficie inclinada después de la onda de choque M_4 se obtiene mediante la ecuación:

$$M_4 = \frac{M_{N4(inf)}}{\sin(\varepsilon_2 - \alpha_2)} = \frac{0{,}54573}{\sin(0{,}321198 - 0{,}20943)} = 4{,}8928$$

El paso siguiente es proceder a determinar el ángulo $\eta_{1(inf)}$ necesario para que, partiendo de un número de Mach que sea la unidad, se obtenga el número de Mach $M_4 = 4{,}8928$, $\gamma = 1{,}4$. De la ecuación siguiente, se obtiene $\eta_{1(inf)} = 1{,}3247$ rad; $\eta_{1(inf)} = 75{,}8997$ deg.

$$\eta_{1(inf)} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M_4^2 - 1\right)} - \tan^{-1} \sqrt{\left(M_4^2 - 1\right)}$$

El ángulo requerido para determinar el número de Mach M_5 será de $\eta_{2(inf)} = \eta_{1(inf)} + \beta_2 = 75{,}8997 + 10 = 85{,}8997^o$; $\eta_{2(inf)} = 1{,}4992$ rad. Sustituyendo este valor en la ecuación siguiente, se obtiene el número de Mach requerido:

$$\eta_{2(inf)} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M_5^2 - 1\right)} - \tan^{-1} \sqrt{\left(M_5^2 - 1\right)}$$

El resultado es $M_5 = 6{,}1395$.

2. La presión y la temperatura existentes sobre cada uno de los planos inclinados dependerán de la altura a que se encuentre la aeronave. En la tabla 1, se indican algunas de las propiedades del aire a diferentes alturas.

Tabla 1. Presión, temperatura y densidad del aire atmosférico a tres diferentes alturas

Altura (m)	Temperatura (K)	Presión (N/m^2)	Densidad (kg/m^3)
1.000	281,64	89.880	1,112
10.000	223,24	26.500	0,4135
30.000	226,5	1.197	0,01841

2.1 Presión y temperatura sobre los diferentes planos a 10.000 m de altura.

2.1a. Plano superior después de la onda de choque inclinada. Los datos de que se disponen son:

$M_1 = 7$; $M_{N1} = 1,7484$; $\alpha_1 = 8^o$; $\varepsilon_1 = 14,4643^o$; $P_1 = 26.500$ Pa; $T_1 = 223,24$ K.

La presión estática después de la onda de choque oblicua P_2 se determina mediante la ecuación:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N1}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2,8}{2,4} 1,7484^2 - \frac{0,4}{2,4} = 3,3997$$

La presión en el plano inclinado superior, situado después de la onda de choque, será:

$$P_2 = P_1 * 3,3997 = 90.092,5\,\text{Pa}$$

La temperatura estática sobre este mismo plano se determina utilizando la expresión:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{N1}^2\right)\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_{N1}^2 - 1\right)\left(\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2\, M_{N1}^2}\right) = 1,4934$$

de donde $T_2 = T_1 * 1,4934 = 333,38\,\text{K}$

Puesto que ahora se conocen la presión y la temperatura en la superficie inclinada superior, situada después de la onda de choque oblicua, para hallar las propiedades del fluido después de las ondas de expansión se utilizarán las expresiones:

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2}; \quad \frac{P_3}{P_2} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Dado que los números de Mach en las superficies inclinadas 2 y 3 se han hallado previamente, $M_2 = 5,5819$, $M_3 = 9,8449$, la presión y la temperatura en el plano 3 serán:

$$T_3 = T_2 * 0,3547 = 333,38 * 0,3547 = 118,24\,\text{K}$$
$$P_3 = P_2 * 0,02659 = 90.092 * 0,02659 = 2.395,5\,\text{Pa}$$

Es interesante observar que tanto la presión como la temperatura después de las ondas de expansión de Prandtl-Meyer son muy bajas. Sería interesante disminuir los ángulos de inclinación de las superficies, especialmente el segundo de los ángulos β_2, con el fin de obtener valores de temperaturas y presiones más razonables.

2.1b. Superficies inferiores de la aeronave

Procediendo del mismo modo que en el apartado anterior, y sabiendo que los datos conocidos son:

$M_1 = 7$; $M_{N1(inf)} = 2{,}2099$; $\alpha_2 = 12^o$; $\varepsilon_2 = 18{,}4033^o$;

$P_1 = 26.500$ Pa. $T_1 = 223{,}24$ K; $M_4 = 4{,}8928$; $M_5 = 6{,}1395$

se establece lo siguiente:

La presión y la temperatura estáticas después de la onda de choque oblicua $P_{4(inf)}$ y $T_{4(inf)}$ se determinan mediante las expresiones:

$$\frac{P_{4(inf)}}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N1(inf)}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2{,}8}{2{,}4} 2{,}2099^2 - \frac{0{,}4}{2{,}4} = 5{,}5309$$

$$\frac{T_{4(inf)}}{T_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{N1(inf)}^2\right)\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_{N1(inf)}^2 - 1\right)\left(\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2\ M_{N1(inf)}^2}\right) = 1{,}8656$$

de donde:

$$T_{4(inf)} = T_1 * 1{,}8656 = 416{,}47 \text{ K}$$

$$P_{4(inf)} = P_1 * 5{,}5309 = 146.568{,}8 \text{ Pa}$$

Utilizando ahora las ecuaciones que relacionan las temperaturas y las presiones estáticas delante y detrás de las ondas de expansión, y recordando que los números de Mach sobre los dos planos inclinados inferiores eran de $M_4 = 4{,}8928$, $M_5 = 6{,}1395$, se concluye:

$$\frac{T_{5(inf)}}{T_{4(inf)}} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_5^2}; \quad \frac{P_{5(inf)}}{P_{4(inf)}} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_5^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$T_{5(inf)} = T_{4(inf)} * 0{,}6778 = 282{,}28 \text{ K}$$

$$P_{5(inf)} = P_{4(inf)} * 0{,}2564 = 37.580{,}24 \text{ Pa}$$

Obsérvese que, en estas superficies inferiores, las presiones y las temperaturas parecen mucho más razonables.

Con el fin de comparar los resultados, se procede ahora a realizar el mismo cálculo pero para una altura de vuelo de 30.000 m.

2.1 Presión y temperatura sobre los diferentes planos a 30.000 m de altura.

2.2a. Planos superiores de la aeronave. Los datos de partida son:

$M_1 = 7$; $M_{N1} = 1{,}7484$; $\alpha_1 = 8^o$; $\varepsilon_1 = 14{,}4643^o$;

$P_1 = 1.197$Pa. $T_1 = 226{,}5$K; $M_2 = 5{,}5819$; $M_3 = 9{,}8449$.

Puesto que las ecuaciones a emplear dependen de los diversos números de Mach y estos son los mismos que los utilizados en el subapartado anterior, se concluye:

$$P_2 = P_1 * 3{,}3997 = 1.197 * 3{,}3997 = 4.069{,}44 \text{ Pa}$$
$$T_2 = T_1 * 1{,}4934 = 226{,}5 * 1{,}4934 = 338{,}25 \text{ K}$$

$$T_3 = T_2 * 0{,}547 = 338{,}25 * 0{,}3547 = 119{,}97 \text{ K}$$
$$P_3 = P_2 * 0{,}02659 = 4.069{,}44 * 0{,}02659 = 108{,}206 \text{ Pa}$$

Se observa que, a medida que aumenta la altura de vuelo, la presión y la temperatura sobre el plano 3, están fuera de cualquier lógica; en consecuencia, modificar como mínimo el ángulo de inclinación $\beta_2 = 20^o$ y disminuirlo drásticamente.

2.2b. Planos inferiores de la aeronave. Los datos de partida son:

$M_1 = 7$; $M_{N1(inf)} = 2{,}2099$; $\alpha_2 = 12^o$; $\varepsilon_2 = 18{,}4033^o$;

$P_1 = 1.197$ Pa. $T_1 = 226{,}5$ K; $M_4 = 4{,}8928$; $M_5 = 6{,}1395$

Las relaciones ahora son:

$$T_{4(inf)} = T_1 * 1{,}8656 = 226{,}5 * 1{,}8656 = 422{,}55 \text{ K}$$

$$P_{4(inf)} = P_1 * 5{,}5309 = 1.197 * 5{,}5309 = 6.620{,}48 \text{ Pa}$$

$$T_{5(inf)} = T_{4(inf)} * 0{,}6778 = 422{,}55 * 0{,}6778 = 286{,}4 \text{ K}$$

$$P_{5(inf)} = P_{4(inf)} * 0{,}2564 = 6.620{,}48 * 0{,}2564 = 1.697{,}49 \text{ Pa}$$

Véase que en la parte inferior de la aeronave las presiones y temperaturas son mucho más acordes de lo que cabría esperar.

3. Para determinar la potencia necesaria en los motores que han de impulsar la aeronave a una altura de 10.000 y 30.000 m, con una velocidad de M = 7, inicialmente hay que determinar las fuerzas de arrastre y sustentación que actúan sobre la aeronave a las dos alturas de vuelo indicadas. El esquema de las fuerzas de presión que actúan sobre el móvil está definido en la figura 111.6. Para realizar este problema, no se van a considerar las fuerzas de fricción debidas a los esfuerzos cortantes actuantes sobre las diversas superficies; de hecho, dichas fuerzas son mucho menores que las debidas a la presión.

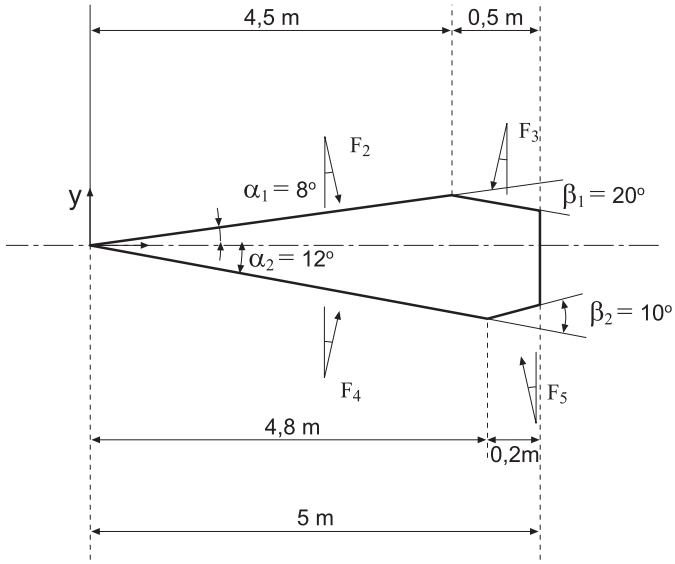


Fig. 111.6
Fuerzas que actúan sobre cada uno de los planos de la aeronave

Las fuerzas debidas a la presión que actúa sobre las respectivas superficies inclinadas se definen como:

$$F_2 = P_2 * S_2 = P_2 * \left(4.8 / \cos\left(8\right)\right) * 1$$

$$F_3 = P_3 * S_3 = P_3 * \left(0.2 / \cos\left(8 - 20\right)\right) * 1$$

$$F_4 = P_4 * S_4 = P_4 * \left(4.5 / \cos\left(12\right)\right) * 1$$

$$F_5 = P_5 * S_5 = P_5 * \left(0.5 / \cos\left(12 - 10\right)\right) * 1$$

Una vez definidas las diversas fuerzas qe actúan en cada plano, la fuerza resultante en dirección horizontal y vertical será:

$F_{2X} = F_2 * \sin\left(8\right)$; signo asociado, positivo

$F_{2Y} = F_2 * \cos\left(8\right)$; signo asociado, negativo

$F_{3X} = F_3 * \sin\left(8 - 20\right)$; signo asociado, negativo

$F_{3Y} = F_3 * \cos\left(8 - 20\right)$; signo asociado, negativo

$F_{4X} = F_4 * \sin\left(12\right)$; signo asociado, positivo

$F_{4Y} = F_4 * \cos\left(12\right)$; signo asociado, positivo

$F_{5X} = F_5 * \sin\left(12 - 10\right)$; signo asociado, positivo

$F_{5Y} = F_5 * \cos\left(12 - 10\right)$; signo asociado, positivo

$$F_{X(Total)} = F_{2X} - F_{3X} + F_{4X} + F_{5X}$$
$$F_{Y(Total)} = -F_{2Y} - F_{3Y} + F_{4Y} + F_{5Y}$$

Las presiones que actúan sobre cada plano a una altura de 10.000 m eran:

P_2 = 90.092,5 Pa; P_3 = 2.395,5 Pa; $P_4 = P_{4(inf)}$ = 146.568,8 Pa.; $P_5 = P_{5(inf)}$ = 37.580,24 Pa

Las diversas fuerzas asociadas a la altura de vuelo de 10.000 m son:

$$F_2 = 90.092,5 * \left(4.8 / \cos\left(8\right)\right) * 1 = 436.693,8 \text{ N}$$
$$F_3 = 2.395,5 * \left(0.2 / \cos\left(8-20\right)\right) * 1 = 489,8 \text{ N}$$
$$F_4 = 146.568,8 * \left(4.5 / \cos\left(12\right)\right) * 1 = 674.294,5 \text{ N}$$
$$F_5 = 37.580,24 * \left(0.5 / \cos\left(12-10\right)\right) * 1 = 18.801,5 \text{ N}$$

$F_{2X} = 436.693,8 * \sin\left(8\right) = 60.776,03$ N ; Signo asociado, positivo

$F_{2Y} = 436.698,8 * \cos\left(8\right) = 432.448,8$ N ; Signo asociado, negativo.

$F_{3X} = 489,8 * \sin\left(8-20\right) = -101,8$ N ; Signo asociado, negativo

$F_{3Y} = 489,8 * \cos\left(8-20\right) = 479,09$ N ; Signo asociado, negativo.

$F_{4X} = 674.294,5 * \sin\left(12\right) = 140.193,7$ N ; Signo asociado, positivo

$F_{4Y} = 674.294,5 * \cos\left(12\right) = 659.559,5$ N ; Signo asociado, positivo.

$F_{5X} = 18.801,5 * \sin\left(12-10\right) = 656,1$ N ; Signo asociado, positivo

$F_{5Y} = 18.801,5 * \cos\left(12-10\right) = 18.790,04$ N ; Signo asociado, positivo.

$$F_{X(Total)} = F_{2X} - F_{3X} + F_{4X} + F_{5X} = 60.776,03 - 101,8 + 140.193,7 + 656,1 = 201.524,03 \text{N}$$
$$F_{Y(Total)} = -F_{2Y} - F_{3Y} + F_{4Y} + F_{5Y} = -432.448,8 - 479,09$$
$$+659.559,5 + 18.790,04 = 245.421,6 \text{ N}$$

Para esta configuración estudiada, se observa que tanto la fuerza que se opone al movimiento como la fuerza de sustentación son muy elevadas. Se procede ahora a realizar estos mismos cálculos a una altura de 30.000 m.

Las presiones que actúan sobre cada plano a una altura de 30.000 m son:

P_2 = 4.069,44 Pa; P_3 = 108.206 Pa; $P_4 = P_{4(inf)}$ = 6.620,48 Pa; $P_5 = P_{5(inf)}$ = 1.697,49 Pa

Las diversas fuerzas asociadas a la altura de vuelo de 30.000 m son:

$$F_2 = 4.069,44 * \left(4,8 / \cos\left(8\right)\right) * 1 = 19.725,27 \text{ N}$$
$$F_3 = 108,2 * \left(0,2 / \cos\left(8-20\right)\right) * 1 = 22,12 \text{ N}$$
$$F_4 = 6.620,48 * \left(4,5 / \cos\left(12\right)\right) * 1 = 30.457,7 \text{ N}$$
$$F_5 = 1.697,49 * \left(0,5 / \cos\left(12-10\right)\right) * 1 = 849,26 \text{ N}$$

$F_{2X} = 19.725,27 * \sin(8) = 2.745,22$ N ; Signo asociado, positivo

$F_{2Y} = 19.725,27 * \cos(8) = 19.533,3$N ; Signo asociado, negativo.

$F_{3X} = 22,12 * \sin(8-20) = -4,59$ N ; Signo asociado, negativo

$F_{3Y} = 22,12 * \cos(8-20) = 21,63$ N ; Signo asociado, negativo.

$F_{4X} = 30.457,7 * \sin(12) = 6.332,5$ N ; Signo asociado, positivo.

$F_{4Y} = 30.457,7 * \cos(12) = 29.792,12$ N ; Signo asociado, positivo.

$F_{5X} = 849,26 * \sin(12-10) = 29,63$ N ; Signo asociado, positivo

$F_{5Y} = 849,26 * \cos(12-10) = 848,74$ N ; Signo asociado, positivo.

$$F_{X(Total)} = F_{2X} - F_{3X} + F_{4X} + F_{5X} = 2.745,22 - 4.59 + 6.332,5 + 29.63 = 9.102,76\,\text{N}$$

$$F_{Y(Total)} = -F_{2Y} - F_{3Y} + F_{4Y} + F_{5Y} = -19.533,3 - 21.63 + 29.792,12 + 848,74 = 11.085,9\text{N}$$

Es importante destacar que las fuerzas tanto de arrastre como de sustentación son, a 30.000 m de altura, muchísimo menores que las correspondientes a 10.000 m.

Para determinar la potencia de los motores necesaria para realizar el vuelo a M = 7 y a las alturas de 10.000 y 30.000 m, es necesario determinar la velocidad a que la aeronave se desplaza a estas diferentes alturas.

A 10.000m se conoce que $M = 7, T = 223,24\,\text{K}$

$$M = 7 = \frac{V}{\sqrt{\gamma\, R\, T}} = \frac{V}{\sqrt{1.4 * 287 * 223,24}}$$

de donde $V = 2.096,47$ m/s.

A 30.000 m de altura se tiene que $M = 7\,, T = 226,5$ K

$$M = 7 = \frac{V}{\sqrt{\gamma\, R\, T}} = \frac{V}{\sqrt{1.4 * 287 * 226,5}}$$

En consecuencia $V = 2111,7$ m/s.

La potencia necesaria en los motores para realizar el vuelo a 10.000 m será:

$$W = 201.524,03 * 2.096,47 = 422.489.083,2 \text{ vatios}$$

A 30.000 m dicha potencia será:

$$W = 9.102,76 * 2.111,7 = 19.222,29 \text{ vatios}$$

De este resultado, se observa claramente que estas aeronaves solo pueden volar a velocidades supersónicas.

Nomenclatura

a = Aceleración. [m/s^2]

A = Área. [m^2]

B = propiedad arbitraria asociada al fluido.

C = velocidad del sonido. [m/s]

C_d = Coeficiente de descarga.

C_D = Coeficiente de arrastre. Coeficiente de resistencia para la capa límite.

C_f = Coeficiente de fricción.

C_L = Coeficiente de sustentación.

C_P = Calor específico a presión constante. [J/Kg K]

C_V = Calor específico a volumen constante. [J/Kg K]

D = Fuerza de arrastre. [N]

D = Diámetro. [m]

D_e = Número de Deborah.

D_h = Diámetro hidráulico. [m]

E_u = Número de Euler.

e = Espesor de la pared del conducto. [m]

F = Fuerza. [N].

F = Número de Froude.

f = Coeficiente de fricción.

g = Aceleración gravitatoria. [m/s^2]

H = Energía por unidad de peso. [J/Kg g]

H=h=Z = Nivel de referencia, (cota). [m]

h = Entalpía. [J/Kg]

K_n = Número de Knudsen.

L = Longitud. [m]

L = Fuerza de sustentación. [N]

M = T = Par. [N m]

M = Número de Mach.

m = Masa. [Kg]

$\dot{m}$ = Caudal másico. [Kg/s]

N = $\dot{W}$ Potencia. [W] [Kw]

NPSH = Altura neta positiva de aspiración. [m]

P = Presión. [Pa]

P^*= Presión reducida. [Pa]

P_e = Número de Pecklet.

P_r = Número de Prandtl.

Q = $\dot{\forall}$ = Caudal volumétrico. [m^3/s]

$\dot{Q}$ = Flujo de calor. [J/s]

q = Calor por unidad de masa. [J/Kg]

R, r = Radio. [m]

R = Constante característica de cada gas. [J / Kg K]

Re = Número de Reynolds.

S = Sección de paso. [m^2]

S_t = Número de Strouhal.

s = Entropia. [J/Kg K]

T = Temperatura [ºC; K]

t = Tiempo. [s]

U = V= Velocidad del fluido. [m/s]

u = e =Energía interna. [J/Kg]

V = Velocidad. [m/s]

V_x = u Componente del vector velocidad en dirección x. [m/s]

V_y = v Componente del vector velocidad en dirección y. [m/s]

V_z = w Componente del vector velocidad en dirección z. [m/s]

$\dot{W}$ = Potencia. [W] [Kw]

W = Número de Weber.

$\forall$ = Volumen. [m^3]

Y = Energía por unidad de masa. [J/Kg]

Y_T = Energía teórica por unidad de masa. [J/Kg]

Z = Nivel de referencia, (cota). [m]

α_T = Coeficiente de expansión térmica. [K^{-1}]

β = Módulo de compresibilidad volumétrica. [N/m^2]

Γ = circulación. [m^2/s]

γ = Indice de politropía.

$\dot{\gamma}$ = velocidad de deformación angular. [s^{-1}].

δ = Espesor de la capa límite. [m]

δ^*= Espesor de desplazamiento para la capa límite. [m]

ε = Rugosidad. [m]

ε = Excentricidad. [m]

η = Rendimiento.

θ = Espesor de cantidad de movimiento para la capa límite. [m]

λ = Segundo coeficiente de viscosidad de Stokes. [Kg/(m s)]

μ = Viscosidad dinámica. [Kg /(s m)]

ν = Viscosidad cinemática. [m^2/s]

ρ = Densidad. [Kg /m^3]

σ = Tensión superficial. [N/m]

σ = Esfuerzo normal . [N/m^2]

τ = Esfuerzo cortante. [N/m^2]

υ = Volumen específico. [m^3/Kg]

Φ = Velocidad de deformación angular. [s^{-1}]

ϕ = Función potencial. [m^2/s]

ψ = función de corriente. [m^2/s]

$\Omega = \xi$ = Vorticidad.

$\omega = \Omega$ =Velocidad angular [rad / s]

$\amalg$ = potencial escalar de fuerzas másicas. [m^2/s^2]

Δx = Variación de posición [m].

Δh = Pérdidas de carga por rozamiento. [m^2/s^2]

ΔP = Variación de presión. [N/m^2]

∇ = operador diferencial nabla. Gradiente para un escalar, divergencia para un vector. [1/m]

∇^2 = operador diferencial laplaciano. [$1/m^2$]

Bibliografía

ANDERSON, JOHN D. *"Fundamentals of Aerodynamics"*. McGraw Hill. 2001.

ANDERSON, JOHN D. "*Computational Fluid dynamics".* McGraw Hill. 1995.

ANDERSON, JOHN D. "*Modern compressible flow, with historical perspective",* third edition. Tata McGraw Hill. 2003.

ASHLEY, HOLT; LANDAHL, MARTEN. *"Aerodynamics of wings and bodies"*. Dover Publications. 1985.

BARRERO, RIPOLL, ANTONIO; PÉREZ-SABORID SÁNCHEZ-PASTOR, MIGUEL. *"Fundamentos y Aplicaciones de Mecánica de Fluidos"*. McGraw Hill. 2005.

BATCHELOR, GK. *"Introducción a la dinámica de fluidos"*. Ministerio de Medio Ambiente. 1997.

BERGADA, JOSEP M; KUMAR, SUSHIL. *"Fluid power, mathematical design of several components"* Nova Publishers. 2014.

BERGADA, JOSEP M. *"Mecánica de Fluidos, breve introducción teórica con problemas resueltos",* 2ª Ed. Ediciones Iniciativa Digital Politécnica. UPC. 2015.

BERTIN, JOHN J. *"Aerodynamics for Enginyers"*. Prentice Hall. 2002.

CRESPO, ANTONIO. *"Mecánica de Fluidos"*. Thomson. 2006.

DOUGLAS, J.F; GASIOREK, J.M; SWAFFIELD, J.A. "*Fluid Mechanics"*. Longman. 2001.

EMANUEL GEORGE. *"Gasdynamics: Theory and Applications"*. AIAA Education Series. 1986.

FOX, R.W; MCDONALD, A.T. *"Introducción a la Mecánica de Fluidos"*. McGraw Hill. 1995.

GERHART, P; GROSS, R; HOCHSTEIN, J. *"Fundamentos de Mecánica de Fluidos"*. Addison Wesley 1995.

GORDILLO ARIAS DE SAAVEDRA, JM; RIBOUX ACHER, G; FERNÁNDEZ GARCÍA, JM. *"Introducción a la Mecánica de Fluidos"*. Ed. Paraninfo. 2017.

GORDON LEISHMAN, J. *"Principles of Helicopter Aerodynamics"*. Cambridge University Press. 2005.

JOHNSON, WAYNE. *"Helicopter theory"*. Dover Publications. 1994.

LIEPMANN H.W; ROSHKO A. *"Elements of Gasdynamics"*. Dover Publications. 1993

LIÑÁN MARTÍNEZ, A; RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M; HIGUERA ANTÓN, F. *"Mecánica de Fluidos*". (Primera parte). 2000.

LIÑÁN MARTÍNEZ, A; RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M; *"Mecánica de Fluidos"*. (Segunda parte). 2000.

LOPEZ HERRERA, JM; HERRADA ,MA; PÉREZ-SABORID, M; BARRERO, A. *"Problemas resueltos de Mecánica de Fluidos"*. McGraw Hill. 2005.

MANCEBO DEL CASTILLO, URIEL. *"Teoría del golpe de ariete"*. Limusa. 1987.

MASSEY, BS. *"Fluid Mechanics"*. Chapman & Hall. 1989.

MESEGUER RUIZ J; SANZ ANDRÉS A. *"Aerodinámica Básica"*. Universidad Politécnica de Madrid. 2005.

MILNE.THOMSON, LM. *"Theoretical Aerodynamics"*. Dover Publications. 1973.

MORAN, JACK. *"An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics"*. Dover Publications. 2003.

PNUELI, D; GUTFINGER, C. *"Fluid Mechanics"*. Cambridge University press. 1997.

PRANDTL, L; TIETJEMS, OG. *"Applied Hydro and Aeromechanics"*. Dover Publications. 1957.

PRANDTL, L; TIETJEMS, OG. *"Fundamentals of Hydro and Aeromechanics"*. Dover Publications. 1957.

Research and Education Association. *"Fluid Mechanics Problem Solvers REA"*. 1996.

SCHLICHTING, H; GERSTEN, K. *"Boundary Layer Theory"*. 2003.

SHAMES, IH. *"Mecánica de Fluidos"*. McGraw Hill. 1995.

SPURK, JOSEPH H. *"Fluid Mechanics"*. Springer 1997.

SPURK, JOSEPH H. *"Fluid Mechanics Problems and Solutions"*. Springer 1997.

STEPNIEWSKI, WZ; KEYS, CN. *"Rotary-Wing Aerodynamics"*. Dover Publications. 1984.

WATTON, J. *"Fundamentals of Fluid Power control"*. Cambridge University Press. 2009.

WHITE FRANK, M. *"Mecánica de Fluidos"*. McGraw Hill. 1988.

WHITE FRANK, M. *"Mecánica de Fluidos"*. McGraw Hill. 2004.

ZUCROW, M.J; HOFFMAN, J.D. *"Gas Dynamics"* Volume 1. John Wiley & Sons 1976.