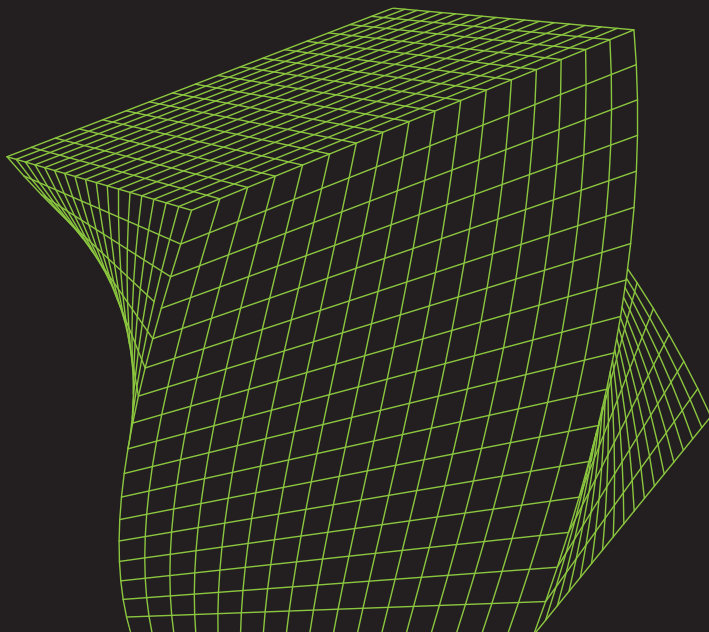


Mecànica del medi continu en l'enginyeria

Teoria i problemes resolts



Xavier Ayneto Gubert
Miquel Ferrer Ballester

UPCGRAU 76



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Mecànica del medi continu en l'enginyeria

Teoria i problemes resolts

Xavier Ayneto Gubert
Miquel Ferrer Ballester

Amb el suport de



Generalitat de Catalunya
**Departament de Recerca
i Universitats**

Traducció del llibre: *Mecánica del medio continuo en ingeniería. Teoría y problemas resueltos*

Traductor: Pere Farrando Canals

Primera edició maig de 2024

© Els autors, 2024
© Iniciativa Digital Politècnica, 2024
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Edifici K2M, Planta S1, Despacho S103-S104
Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Producció: Service Point
Pau Casals, 161-163
08820 El Prat de Llobregat (Barcelona)

ISBN:978-84-10008-51-9
ISBN digital: 978-84-10008-52-6
DL: B 11063-2024
DOI: [10.5821/ebook-9788410008526](https://doi.org/10.5821/ebook-9788410008526)

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, excepte l'excepció prevista a la llei.

Presentació

Aquest curs és una continuació natural del curs de Mecànica Racional, en què s'enuncien les lleis bàsiques de la mecànica newtoniana i s'analitzen sistemes mecànics de complexitat creixent, des del punt material o partícula fins al sòlid rígid, passant per la mecànica dels sistemes de partícules. De fet, la mecànica del sòlid rígid resulta d'introduir una condició cinemàtica a les partícules d'un sistema, que les obliga a mantenir fixes les distàncies entre elles.

La mecànica del sòlid rígid es desenvolupa després i dona lloc a la mecànica de sistemes de sòlids rígids, que s'aplica a l'anàlisi d'un ventall extens de màquines i mecanismes.

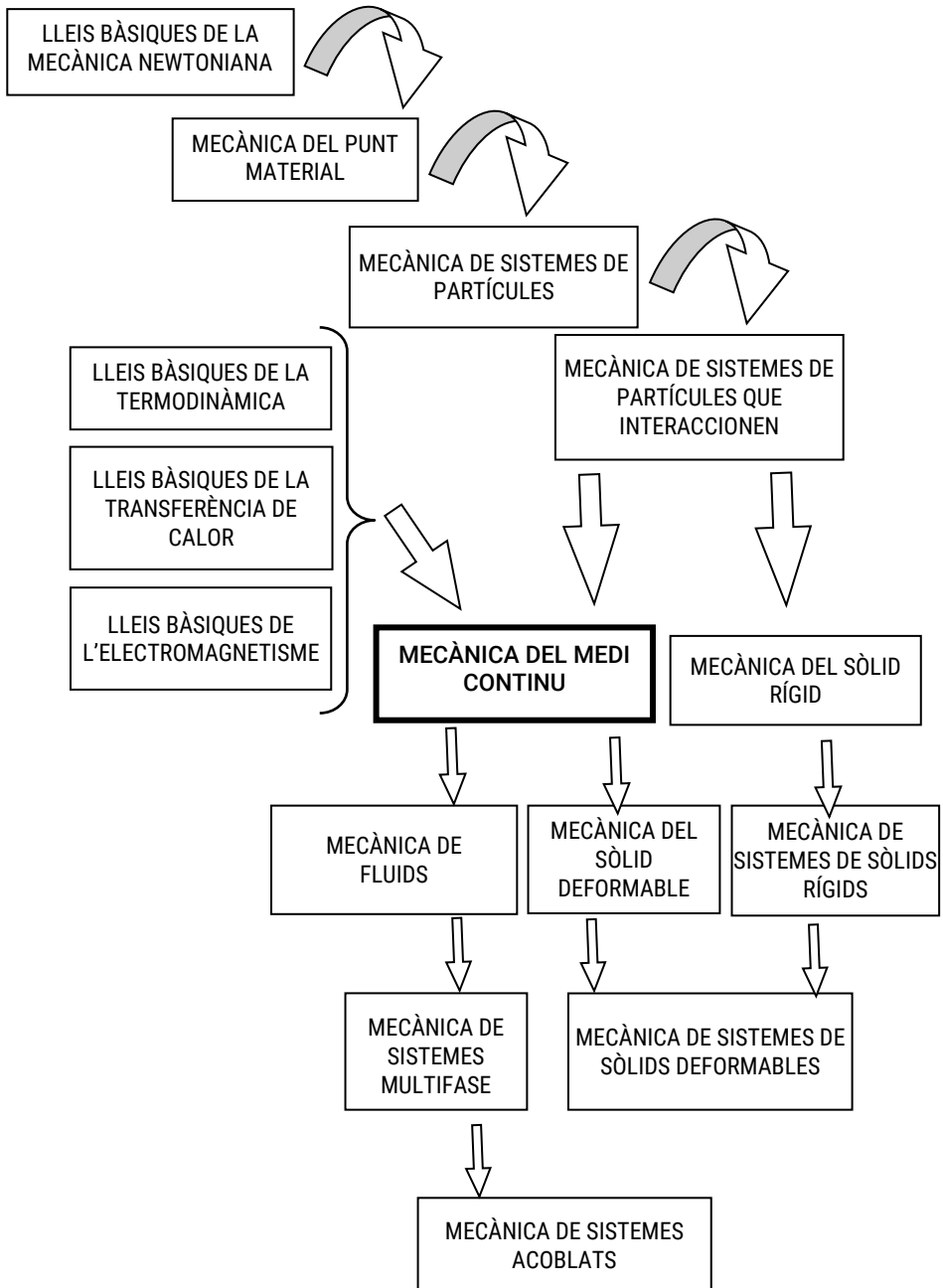
La mecànica del medi continu parteix de la mecànica de sistemes de partícules que interaccionen per donar lloc a un model material, sòlid o fluid, molt més genèric que el de sòlid rígid. En un model d'aquest tipus s'hi poden incorporar a més les lleis de la termodinàmica, de la transferència de calor i de l'electromagnetisme, a fi de representar apropiadament la complexitat de molts fenòmens físics d'interès tècnic.

La mecànica del medi continu evoluciona posteriorment en dues direccions ben definides, la mecànica de sòlids deformables i la mecànica de fluids. En el primer cas, i per extensió de la mecànica racional, es pot arribar a formular la mecànica de sistemes de sòlids deformables.

Finalment, es pot desenvolupar una mecànica acoblada entre sistemes fluids i sistemes sòlids a fi de representar situacions en què tots dos tipus de sistema interaccionen.

En aquest primer curs de mecànica del medi continu se centrarà l'atenció només en els aspectes purament mecànics, i es deixarà per a cursos més avançats la interacció amb altres disciplines com la termodinàmica, la transferència de calor o l'electromagnetisme. També es deixarà per a cursos posteriors l'anàlisi detallada de la mecànica dels sòlids deformables i la dels fluids, així com les seves aplicacions tecnològiques. L'objectiu principal del curs consisteix, doncs, a establir les bases físiques i matemàtiques comunes a totes aquestes disciplines sota un cos de doctrina únic.

En la figura adjunta es mostra una perspectiva global dels diversos camps de la mecànica.



Presentació	3
Índex	5
1. Postulats bàsics	11
1.1. Introducció	11
1.2. Dinàmica d'un sistema de partícules que interaccionen	12
1.2.1. Propietats de les forces d'interacció.....	12
1.2.2. Principis bàsics de la dinàmica d'un sistema de partícules.....	13
1.2.3. Equilibri d'un sistema de partícules.....	15
1.3. Principis de la termodinàmica.....	16
1.3.1. Principi de la conservació de l'energia (primer principi de la termodinàmica).....	16
1.3.2. Segon principi de la termodinàmica.....	17
1.4. Transformació de la configuració geomètrica d'un sistema de partícules	17
1.5. Introducció al concepte de medi continu.....	18
1.6. Propietats mecàniques intensives	21
1.7. Forces de superfície i forces de volum.....	22
1.8. Tensions internes. Postulat d'Euler-Cauchy	23
1.9. Homogeneïtat i isotropia.....	25
2. Cinemàtica del medi continu	27
2.1. Introducció	27
2.2. Hipòtesi de partida	28
2.3. Enfocaments lagrangiana i euleriana.....	29
2.4. Concepte de derivada material	30
2.5. Vector desplaçament.....	32
2.5.1. Concepte de desplaçament	32
2.5.2. Anàlisi de desplaçaments en l'entorn d'un punt.....	32
2.6. Vector velocitat	34
2.6.1. Concepte de velocitat.....	34
2.6.2. Camp de velocitats.....	35
2.6.3. Anàlisi de velocitats a l'entorn d'un punt.....	36
2.7. Vector acceleració.....	41
2.7.1. Concepte d'acceleració.....	41
2.8. Transformacions infinitesimals.....	42



2.8.1. Camp de desplaçaments infinitesimals	43
2.8.2. Anàlisi de deformacions infinitesimals	45
2.9. Transformacions finites	58
2.9.1. La ràtio d'extensió	59
2.9.2. El tensor de deformació de Cauchy-Green (lagrangiana)	60
2.9.3. El tensor de deformacions finites lagrangiana	61
2.9.4. Deformació longitudinal unitària de Green	61
2.9.5. Deformació longitudinal unitària de Biot	62
2.9.6. Deformacions angulars	63
2.9.7. Hipòtesis simplificatives	65
3. L'estat de tensió	67
3.1. Introducció	67
3.2. El vector tensió	67
3.3. Components intrínsecs del vector tensió	69
3.4. El tensor tensió	71
3.4.1. Expressió matemàtica del tensor tensió	71
3.4.2. Condicions de contorn	74
3.4.3. Reciprocitat de les tensions tallants	75
3.4.4. Els components intrínsecs en funció del tensor tensió	77
3.5. Canvi de base. Direccions i tensions principals	77
3.5.1. Canvi de base	77
3.5.2. Tensions i direccions principals	78
3.5.3. Valors característics dels components intrínsecs	79
3.6. Descomposició del tensor tensió en tensor esfèric i desviador	82
3.7. Representació gràfica de l'estat de tensió	83
3.7.1. El·lipsoide de Lamé	83
3.7.2. Cercles de Mohr	84
3.8. Anàlisi bidimensional de tensions	90
3.8.1. Vector tensió	90
3.8.2. Canvi de base. Tensions i direccions principals	92
3.8.3. Representació gràfica de l'estat de tensió en el pla	94
4. Dinàmica del medi continu	97
4.1. Introducció	97
4.2. Concepte de volum de control	97
4.3. Derivada material d'una integral de volum	99
4.4. Teorema del transport de Reynolds	100
4.5. Principi de conservació de la massa	103
4.5.1. Equació de continuïtat per a un volum de control material	103
4.5.2. Equació de continuïtat per a un volum de control espacial (enfocament eulerià)	104
4.5.3. Conseqüències del principi de conservació de la massa	105
4.6. Principi de la quantitat de moviment	106



4.6.1. Principi de la quantitat de moviment per a un volum de control material.....	106
4.6.2. Principi de la quantitat de moviment per a un volum de control espacial.....	109
4.7. Teorema del moment cinètic.....	110
4.7.1. Teorema del moment cinètic per a un volum de control material....	110
4.7.2. Teorema del moment cinètic per a un volum de control espacial.....	111
4.8. Condicions d'equilibri per a un medi continu	112
4.8.1. Condicions d'equilibri per a un punt interior	112
4.8.2. Condicions d'equilibri per a un punt del contorn.....	112
4.9. Treball i potència de les forces exteriors	113
4.10. Teorema de les forces vives. Energia de deformació.....	114
4.10.1. Forma diferencial del teorema de les forces vives	114
4.10.2. Potència de tensió	116
4.10.3. Forma integral del teorema de les forces vives.....	117
4.10.4. Energia de deformació	118
4.11. Teorema de les potències virtuals	118
4.12. Primer principi de la termodinàmica	119
5. Models constitutius materials	123
5.1. Introducció.....	123
5.2. Models constitutius materials elementals	123
5.3. Postulats bàsics de les equacions constitutives materials.....	126
5.4. Models constitutius materials sòlids	127
5.4.1. Sòlid elàstic.....	127
5.5. Comportaments constitutius materials fluids.....	159
5.5.1. Fluids ideals	159
5.5.2. Fluids viscosos	160
5.5.3. Fluids newtonians	162
5.5.4. Potència de tensió.....	163
6. Introducció a l'elasticitat lineal	165
6.1. Introducció.....	165
6.2. El problema elàstic.....	166
6.3. Formulació matemàtica del problema elàstic	167
6.3.1. Introducció	167
6.3.2. Tipus de problema elàstic en funció de les condicions de contorn ...	168
6.4. Unicitat de la solució del problema elàstic	170
6.5. Mètodes de resolució del problema elàstic	171
6.5.1. Mètodes analítics de resolució del problema elàstic.....	171
6.5.2. Mètodes numèrics de resolució del problema elàstic.....	183



Problemes	205
Problema 1.....	205
Problema 2.....	206
Problema 3.....	207
Problema 4.....	208
Problema 5.....	209
Problema 6.....	210
Problema 7.....	211
Problema 8.....	211
Problema 9.....	212
Problema 10	214
Problema 11	215
Problema 12	216
Problema 13	217
Problema 14	218
Problema 15	218
Problema 16	220
Problema 17	221
Problema 18	222
Problema 19	223
Problema 20	224
Problema 21	226
Problema 22	226
Problema 23	227
Problema 24	228
Problema 25	229
Problema 26	230
Problema 27	231
Problema 28	232
Problema 29	233
Problema 30	235
Problema 31	236
Problema 32	237
Problema 33	238
Problema 34	239
Problema 35	240
Problema 36	241
Problema 37	242
Problema 38	244
Problema 39	245
Problema 40	246
Problema 41	247
Problema 42	249
Problema 43	250



Soluciones	251
Problema 1	251
Problema 2	252
Problema 3	255
Problema 4	257
Problema 5	259
Problema 6	261
Problema 7	264
Problema 8	266
Problema 9	268
Problema 10	270
Problema 11	273
Problema 12	275
Problema 13	278
Problema 14	280
Problema 15	283
Problema 16	285
Problema 17	287
Problema 18	289
Problema 19	291
Problema 20	295
Problema 21	297
Problema 22	299
Problema 23	301
Problema 24	303
Problema 25	306
Problema 26	307
Problema 27	309
Problema 28	313
Problema 29	315
Problema 30	317
Problema 31	319
Problema 32	321
Problema 33	323
Problema 34	325
Problema 35	328
Problema 36	331
Problema 37	332
Problema 38	334
Problema 39	336
Problema 40	339
Problema 41	342
Problema 42	346
Problema 43	347

Postulats bàsics

1.1. Introducció

La matèria, en estat sòlid líquid o gasós, està formada per partícules que interaccionen. En els gasos aquesta interacció és molt feble, i per això no presenten ni forma ni volum propis. En els líquids és una mica més gran i, encara que no presenten una forma pròpia, tenen un volum que es manté en passar d'un recipient a un altre. En els sòlids reals la interacció en molt superior i per això tenen una forma i un volum propis quan no estan sotmesos a accions exteriors.

La mecànica racional presenta un model extrem de sòlid que anomenem *sòlid rígid*. El sòlid rígid està format per partícules unides entre si per vincles infinitament rígids, de manera que la distància entre dues partícules qualssevol es manté constant sempre. Aquesta idealització resulta molt útil per estudiar la cinemàtica i la dinàmica d'un sòlid quan la variació de la seva geometria és insignificant davant els moviments de conjunt. No obstant això, no pot explicar com es transmeten les forces per l'interior del sòlid ni permet avaluar-ne el comportament resistent davant les càrregues que s'hi apliquin.

La idealització de sòlid rígid presenta problemes amb enllaços redundants, en què les equacions de la mecànica racional són incapaces de determinar la totalitat de les accions d'enllaç. Evidentment, tampoc permet tractar sistemes materials en estat líquid o gasós, on els vincles entre partícules són molt inferiors i la idealització de sòlid rígid manca de tot sentit.

Per aquests i altres motius, cal introduir un model mecànic més detallat per a l'anàlisi macroscòpica dels sistemes materials reals, un model que consideri de manera més realista la interacció entre les partícules que els constitueixen. Per aconseguir-ho ara per ara n'hi ha prou d'eliminar la condició que les distàncies entre partícules es mantinguin constants. Així doncs, un medi material real pot ser considerat, a nivell microscòpic,



com un sistema de partícules en interacció entre si. D'aquesta manera és possible abordar no solament els problemes relacionats amb la mecànica dels sòlids reals, sinó també la dels fluids, siguin líquids o gasos.

1.2. Dinàmica d'un sistema de partícules que interaccionen

Com sigui que la mecànica d'un sistema de partícules és el punt natural d'inici per a l'estudi dels medis materials, resulta convenient recordar alguns conceptes de la dinàmica de partícules, en un sistema de referència inercial, i en concret de la dinàmica de sistemes de partícules que interaccionen entre si.

1.2.1. Propietats de les forces d'interacció

Sobre les partícules d'un sistema amb interaccions internes actuen forces exteriors \overline{F} i forces interiors \overline{f} d'interacció entre les partícules, d'ara endavant *forces d'interacció*. El conjunt de les forces d'interacció està sotmès al principi d'acció i reacció; en conseqüència, aquestes forces apareixen en parelles col·lineals de mòdul igual i sentits oposats. Per tant, el conjunt de les forces interiors d'interacció entre partícules té una resultant nul·la i un moment resultant nul respecte a qualsevol punt quan s'avaluen sobre la totalitat del sistema.

Forces sobre la partícula i : $\overline{F}_{p_i} = \sum_k \overline{F}_{ik} + \sum_j \overline{f}_{ij} = \overline{F}_i + \overline{f}_i$

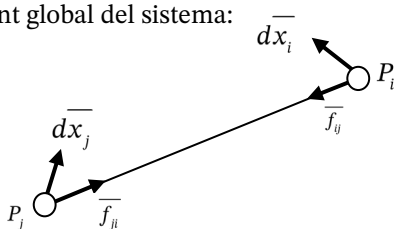
Com que les forces d'interacció, pel principi d'acció i reacció, formen parelles d'igual magnitud i direcció però sentits oposats, la seva resultant total és nul·la:

$$\sum_{\text{sistema}} \overline{f}_i = 0$$

Com que, a més a més, les parelles esmentades abans són col·lineals, el moment de cada parella respecte a qualsevol punt és sempre nul, amb què el moment resultant total també ho és:

$$\sum_{\text{sistema}} \overline{OP}_i \wedge \overline{f}_i = 0$$

D'altra banda, el treball exercit per les forces interiors en un desplaçament infinitesimal de les partícules depèn només del desplaçament relatiu entre aquestes i no del moviment global del sistema:



$$dW_{ij} = \overline{f}_{ji} \times \overline{dx}_j + \overline{f}_{ij} \times \overline{dx}_i = \overline{f}_{ij} \times (\overline{dx}_i - \overline{dx}_j)$$

$$dW_{ij} = \overline{f}_{ij} \times \overline{dx}_{ij}$$



Així doncs, aquest treball és nul solament en la idealització de sòlid rígid, ja que en aquest cas les distàncies entre partícules no varien. El sistema de forces interiors és conservatiu si el treball exercit per aquestes en un desplaçament finit no depèn del camí que s'hagi seguit.

NOTA: *En un medi material real, i a l'efecte de la modelització del seu comportament des d'un punt de vista macroscòpic, les forces d'interacció entre partícules depenen de la variació de la distància entre elles i/o de la seva velocitat relativa.*

La mecànica del medi continu no considera les forces internes que garanteixen la cohesió interna de la matèria, sinó només la seva variació respecte a un estat inicial de referència.

1.2.2. Principis bàsics de la dinàmica d'un sistema de partícules

En aquest apartat s'enuncien, a manera de recordatori, els principis bàsics de la dinàmica dels sistemes de partícules que després seran generalitzats per a l'estudi de medis continus.

Principi de la quantitat de moviment (segona llei de Newton)

La resultant de les forces exteriors que actua sobre un sistema de n partícules que interaccionen és igual a la derivada temporal de la quantitat de moviment total del sistema:

$$\sum_{\text{sistema}} \overline{F}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\text{sistema}} m_i \overline{v}_i \right)$$

En un sistema de massa constant, s'obté l'enunciat clàssic de la segona llei de Newton:

$$\sum_{\text{sistema}} \overline{F}_i = \sum_{\text{sistema}} m_i \overline{a}_i = M \overline{a}_G$$

on M és la massa total del sistema i \overline{a}_G l'acceleració del seu centre de gravetat.

Conservació de la quantitat de moviment

Si la resultant de les forces exteriors que actuen sobre un sistema de partícules que interaccionen és nul·la, llavors la seva quantitat de moviment total es conserva:

$$\sum_{\text{sistema}} m_i \overline{v}_i = \text{cte.}$$



Teorema del moment cinètic

El moment resultant de totes les accions exteriors que actuen sobre un sistema de partícules que interaccionen, calculat respecte a un punt fix en l'espai, o al voltant del seu centre de masses, és igual a la derivada temporal del seu moment cinètic:

$$\sum_{\text{sistema}} \overline{OP_i} \wedge \overline{F_i} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\text{sistema}} \overline{OP_i} \wedge m_i \overline{v_i} \right)$$

Conservació del moment cinètic

Si el moment resultant de totes les accions exteriors que actuen sobre un sistema de partícules que interaccionen, calculat respecte a un punt fix en l'espai o al voltant del seu centre de masses, és nul, llavors el seu moment cinètic roman constant.

$$\sum_{\text{sistema}} \overline{OP_i} \wedge m_i \overline{v_i} = cte.$$

Teorema de les forces vives

El teorema de les forces vives per a un sistema de partícules que interaccionen estableix que, en un interval de temps Δt definit entre dos instants t_1 i t_2 , el treball de les forces exteriors més el treball de les forces interiors és igual a l'increment en l'energia cinètica del sistema.

$$W_{12} = E_{c_2} - E_{c_1}$$

La forma instantània d'aquest teorema s'obté dividint tots dos membres per Δt i passant al límit quan Δt tendeix a zero.

$$\dot{W} = \frac{d}{dt}(E_c)$$

Aquest resultat implica que, en qualsevol instant, la suma de la potència de les forces exteriors més la potència de les forces interiors és igual a la velocitat de variació de l'energia cinètica del sistema en aquest instant.

Aquesta última forma del teorema de les forces vives es deriva de manera directa del principi de la quantitat de moviment per a cada partícula, sense fer altra cosa que multiplicar els dos membres per la velocitat de la partícula.

Conservació de l'energia

Si totes les forces actuant sobre un sistema de partícules, externes i d'interacció, són conservatives, és a dir, si existeix una funció energia potencial, llavors la suma de l'energia cinètica i la potencial es conserva.



$$E_c + E_p = cte.$$

Teorema de les potències virtuals per a un sistema de partícules

En un sistema de partícules que interaccionen, el treball efectuat per unitat de temps per totes les forces, exteriors, d'inèrcia i d'interacció, en una distribució arbitrària (virtual) de velocitats és nul.

1.2.3. Equilibri d'un sistema de partícules

Es diu que un sistema de partícules està en equilibri, en una referència donada, quan les velocitats i acceleracions de totes les seves partícules en aquesta referència són nul·les, és a dir, quan està en repòs relatiu.

La condició necessària i suficient d'equilibri per a una partícula és que en algun moment s'anul·li la seva velocitat i la suma de totes les forces que actuen sobre ella, tant si són exteriors al sistema de partícules \overline{F}_{ik} com si resulten de la interacció d'aquesta amb les seves veïnes \overline{f}_{ij} .

$$\sum_k \overline{F}_{ik} + \sum_j \overline{f}_{ij} = 0 \Rightarrow \overline{F}_i + \overline{f}_i = 0$$

En un sòlid rígid la condició de suma de forces exteriors i suma de moments exteriors nul·la és una condició necessària i suficient d'equilibri. No obstant això, en un medi material, conceputat com un sistema de partícules genèric, aquestes condicions no són suficients per a l'equilibri, sinó solament necessàries. En efecte:

estenen el sumatori de forces a tot el sistema, estant aquest en equilibri:

$$\sum_{\text{sistema}} \overline{F}_i + \sum_{\text{sistema}} \overline{f}_i = 0$$

Però el terme $\sum \overline{f}_i$ és nul perquè es tracta de forces d'interacció (que compleixen el principi d'acció i reacció). En conseqüència, el terme $\sum \overline{F}_i$ ha de ser també nul perquè ho és la suma total.

Per tant, la condició

$$\sum_{\text{sistema}} \overline{F}_i = 0$$

és condició necessària d'equilibri, és a dir: si el sistema està en equilibri, aquesta condició s'ha de complir. Malgrat això, la inversa no és necessàriament certa, per la qual cosa no és condició suficient.



De manera anàloga, si s'avalua el moment resultant respecte a un punt qualsevol de totes les forces exteriors i interiors actuant sobre el sistema, estant aquest en equilibri, tenim:

$$\sum_{\text{sistema}} \overline{OP_i} \wedge \overline{F_i} + \sum_{\text{sistema}} \overline{OP_i} \wedge \overline{f_i} = 0$$

Però el terme $\sum \overline{OP_i} \wedge \overline{f_i}$ és nul pel fet de tractar-se de forces d'interacció; en conseqüència, el terme $\sum \overline{OP_i} \wedge \overline{F_i}$ ha de ser també nul pel fet de ser-ho la suma total.

Per tant, la condició

$$\sum \overline{OP_i} \wedge \overline{F_i} = \sum \overline{M_{o_i}} = 0$$

és condició necessària d'equilibri; és a dir, si el sistema està en equilibri, aquesta condició s'ha de complir. No obstant això, la inversa no és necessàriament certa, per la qual cosa no és condició suficient.

Una altra manera de veure que aquestes condicions són necessàries per a l'equilibri consisteix a observar que l'estat de repòs relatiu implica que l'acceleració del centre de gravetat és nul·la, per la qual cosa ha de ser-ho la suma de forces exteriors. D'altra banda, també resulta nul·la la variació del moment cinètic, per la qual cosa el moment de les forces exteriors ha de ser també nul.

La mecànica racional mostra que en el cas d'un sòlid rígid les condicions anteriors són necessàries i suficients per a l'equilibri, mentre que no és així per als medis materials reals.

Teorema dels treballs virtuals per a un sistema de partícules en equilibri

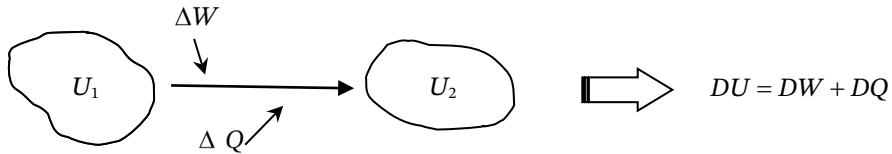
En un sistema de partícules que interaccionen i que estigui en equilibri, el treball efectuat per totes les forces, exteriors i d'interacció, en un desplaçament virtual compatible amb els enllaços, és nul.

1.3. Principis de la termodinàmica

La termodinàmica constitueix una ampliació de la mecànica clàssica que permet tractar sistemes en què intervé la calor com a font d'energia. Aquesta ciència es fonamenta en dos principis bàsics que s'enuncien a continuació.

1.3.1. Principi de la conservació de l'energia (primer principi de la termodinàmica)

Si un sistema evoluciona d'un estat 1 a un altre estat 2 per aportació d'energia exterior en forma de treball mecànic i calor, l'energia interna del sistema s'incrementa en una quantitat igual a les aportacions efectuades:



En un petit canvi infinitesimal tenim: $dU = dW + dQ$

Dividint per un diferencial de temps, s'obté una versió instantània d'aquest principi en termes de potències:

$$\dot{U} = \dot{W} + \dot{Q}$$

1.3.2. Segon principi de la termodinàmica

El primer principi no estableix direccionalitat en els processos. Aquest segon principi indica en quina direcció es produeixen les transformacions termodinàmiques físicament possibles. Es basa en el concepte d'entropia i s'enuncia de la manera següent: Quan en un sistema aïllat té lloc una transformació irreversible, augmenta l'entropia del sistema.

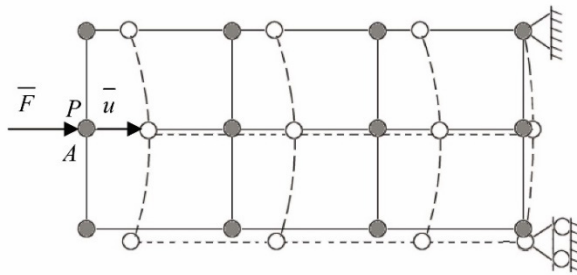
Malgrat ser un principi bàsic de la física, no serà utilitzat durant aquest curs i se n'inclou aquí l'enunciat solament per completar la llista de tots els principis bàsics relacionats amb la mecànica del medi continu.

1.4. Transformació de la configuració geomètrica d'un sistema de partícules

Una altra dificultat de la idealització de sòlid rígida està en la no descripció dels fenòmens físics relacionats amb trànsit de forces a través d'ell. El model genèric de partícules que interaccionen dona una explicació molt més detallada d'aquesta qüestió, generalitzable a més a més a altres tipus de medi continu.

Per simplificar, suposem un medi material sòlid en què les forces d'interacció entre partícules siguin solament funció de la distància relativa entre elles (medi material elàstic).

Quan un sòlid real com aquest és sotmès a un sistema de forces exteriors, forces aplicades directament i reaccions d'enllaç, les partícules afectades es desplacen i la geometria del sistema es modifica fins que la variació de les forces interiors permet aconseguir una situació en què les partícules queden en una nova posició d'equilibri. També ens podem imaginar transformacions infinitament lentes en què qualsevol situació intermèdia sigui un estat d'equilibri.



Per exemple, quan en el punt A, on es troba la partícula P, fem créixer una càrrega F lentament, aquesta partícula es desplaça per acostar-se a les seves veïnes. En alterar-se la distància entre partícules, es genera una força d'interacció que empeny les partícules veïnes, i així successivament fins que l'acció arriba a les partícules situades en els punts d'enllaç. La posició inicial de les partícules, que anomenarem *configuració inicial* (sense deformar), s'altera i el procés continua a través d'una successió d'estats d'equilibri. Finalment, el moviment de les partícules cessa i la posició de totes elles s'ha alterat, la qual cosa dona lloc al que anomenarem *configuració final* (deformada).

El vector que uneix les posicions inicial i final de cada partícula s'anomena *vector desplaçament* \underline{u} . Conegut aquest vector per a cadascuna de les partícules, és possible passar de la configuració inicial a la final, i viceversa.

El comportament d'un fluid en repòs és, en alguns aspectes, semblant al d'un sòlid. No obstant això, si el fluid està en moviment, apareixen forces d'interacció que són funció de la velocitat relativa de les partícules, per la qual cosa, en lloc de tenir interès el camp de corriments el té el camp de velocitats.

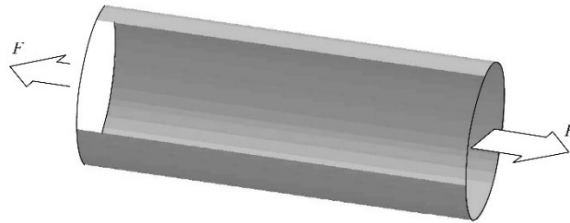
1.5. Introducció al concepte de medi continu

Del que s'ha vist fins aquí sembla deduir-se'n que els medis materials reals, formats per àtoms o molècules, poden ser tractats com a sistemes de partícules que interaccionen. Si bé això és teòricament correcte, en la pràctica no és possible, ni tan sols necessari, seguir la cinemàtica i dinàmica de cadascuna de les moltíssimes partícules que constitueixen la matèria. L'experiència demostra que la major part dels problemes d'interès tecnològic relacionats amb els medis materials poden ser tractats a nivell macroscòpic amb prou aproximació sense tenir en compte de manera explícita la seva estructura microscòpica ni les forces de cohesió interna de la matèria.

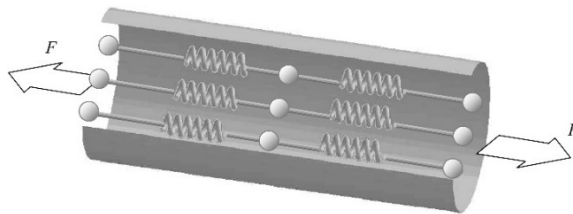
En conseqüència, és necessari introduir un enfocament més potent per a l'anàlisi mecànica dels medis materials reals. Aquest enfocament rep el nom de *mecànica del medi*

continu i es fonamenta, com es veurà a continuació, en un pas al límit en què l'enfocament discret de la mecànica de partícules és substituït pels mètodes matemàtics d'anàlisi de funcions contínues.

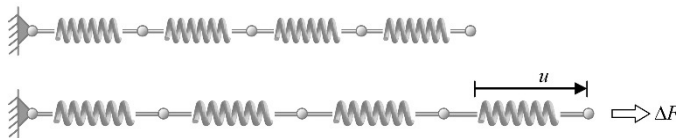
Vegem, doncs, com és possible abandonar l'enfocament microscòpic derivat de l'anàlisi partícula a partícula. Per fer-ho analitzem, per exemple, un cas simple consistent en una barra de material elàstic sotmesa a tracció.



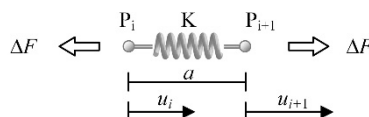
Ens podem imaginar que el material de la barra està format per una sèrie de cadenes longitudinals de partícules que interaccionen entre elles a través de forces funció de la distància, que representem en la figura mitjançant molles.



Sobre cadascuna d'aquestes cadenes actuarà una certa fracció, molt petita, ΔF , de la càrrega total aplicada. Com a conseqüència la seva acció, cada partícula experimentarà un desplaçament en la direcció longitudinal x . El desplaçament en l'esmentada direcció x el representarem per u .



Com que aquesta força actua sobre cada baula de la cadena, podem simplificar encara més la qüestió centrant l'anàlisi sobre dues partícules veïnes:





Anomenant K la rigidesa de la “molla” equivalent a les forces d'interacció, podem escriure:

$$\Delta F = K (u_{i+1} - u_i)$$

Ara bé, a nivell macroscòpic no podem distingir les partícules com a entitats aïllades. De fet, no sabem on són exactament les partícules i i $i+1$, ni quina és la distància a entre elles. Tanmateix, sí que podem localitzar punts materials sobre el medi identificant-los amb el punt en l'espai ocupat per les seves mateixes coordenades en la configuració inicial i seguir la seva evolució fins a la configuració deformatada, amb la qual cosa en podrem mesurar el desplaçament.

La idealització del continu evita la necessitat de tractar el problema partícula a partícula, considerant que tot el volum ocupat pel medi material està replet de matèria, de manera totalment contínua. Per enllaçar aquesta nova concepció del medi material amb l'exposada anteriorment de sistema de partícules, s'efectua un pas al límit en què s'identifica la distància entre partícules a amb una distància infinitesimal Δx . El desplaçament de cada punt del material es considera com una funció contínua de la coordenada x . Aleshores es pot escriure:

$$u_i = u(x) \quad u_{i+1} = u(x + \Delta x) = u_i + \Delta u$$

i, en conseqüència,

$$\Delta F = K (u(x + \Delta x) - u(x))$$

Amb això s'aconsegueix obviar la consideració de les partícules com a entitats discretes i la matèria passa a considerar-se distribuïda contínuament en l'espai, la qual cosa equival a suposar que en cada punt espacial existeix una partícula material. Per la seva banda, els desplaçaments deixen de ser un nombre finit de valors discrets per passar a expressar-se com a funcions contínues de les coordenades. En general se suposa, també, que són funcions contínues del temps.

La idealització macromecànica que implica l'aproximació de medi continu és summent útil, ja que permet utilitzar tots els recursos matemàtics associats a l'anàlisi de funcions contínues. Així, per exemple, si es multiplica i divideix el membre esquerre de la igualtat per Δx i, passant al límit, apareix el concepte de derivada de la funció desplaçament segons x , tenim:

$$\Delta F = K \Delta x \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \Rightarrow dF = K dx \frac{du}{dx}$$

Com sigui que tampoc no és possible establir la força infinitesimal dF que actua sobre cada cadena de partícules, és més convenient referir-se a la força aplicada sobre un element infinitesimal de superfície dS . D'aquesta manera, pel fet de ser el quocient dF/dS un concepte *intensiu*, no és necessari distingir una a una les partícules que es troben sobre l'element dS .



$$\frac{dF}{dS} = \frac{K}{dS} \frac{dx}{dx}$$

En aquesta expressió hi tenim tres paràmetres de gran importància en la mecànica del medi continu, especialment en l'anàlisi de sòlids elàstics. El terme dF/dS és una força per unitat d'àrea. Més endavant definirem i generalitzarem aquest concepte com a tensió mecànica t . El terme du/dx es pot interpretar com un increment de longitud per unitat de longitud, i més endavant l'identificarem amb el concepte de deformació longitudinal unitària ε . El terme $K dx/dS$ és una mesura macroscòpica de la intensitat de les forces internes en funció de la variació de les distàncies entre partícules. L'experiència demostra que en un sòlid elàstic aquesta quantitat és un valor característic del material anomenat *mòdul de Young* E .

En conseqüència, podem escriure: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, equació que es coneix amb el nom de *lleï de Hooke* i que és la base d'un apartat important de la mecànica del medi continu anomenada *elasticitat lineal*.

1.6. Propietats mecàniques intensives

Tampoc és possible tractar les propietats màssiques partícula a partícula, per la qual cosa s'introdueixen conceptes de tipus intensiu (que no depenen de la quantitat de matèria) com la densitat, el pes específic, etc.

Respecte a això, cal destacar que existeix un llindar per a la grandària del volum a partir del qual es pot considerar que una propietat intensiva és independent del volum considerat. Això es dona pel fet que, per a volums molt petits extrets d'un mateix medi material, el nombre de partícules pot no ser constant. No obstant això, aquest valor llindar és prou petit perquè la seva existència no invalidi l'aproximació contínua en les aplicacions d'enginyeria. Així, per exemple, definim la densitat com a:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V'} \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

on $\Delta V'$ és un element de volum molt petit, però prou gran perquè contingui una quantitat representativa de partícules que permeti l'enfocament de medi continu. Aquesta matisació, malgrat tot, es deixa de costat per facilitar el tractament, i es passa a una definició purament matemàtica de l'estil següent:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV}$$

on es postula que el límit existeix i és una quantitat finita. Aquest mateix postulat s'admet per a qualsevol propietat intensiva definida sobre el medi continu.



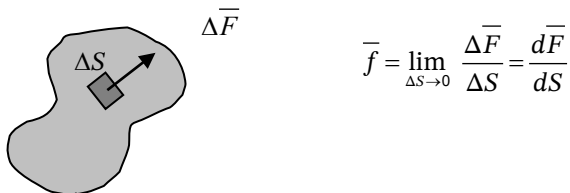
En la mecànica del medi continu se suposa que totes les propietats que en descriuen el comportament queden definides apropiadament per funcions contínues i derivables de les coordenades i del temps.

1.7. Forces de superfície i forces de volum

Tal com s'assenyalava anteriorment, les forces exteriors puntuals, aplicades sobre una sola partícula, no tenen sentit en el context de la mecànica del medi continu. Per aquesta raó es tracten les forces exteriors com a forces intensives (forces per unitat d'àrea o volum).

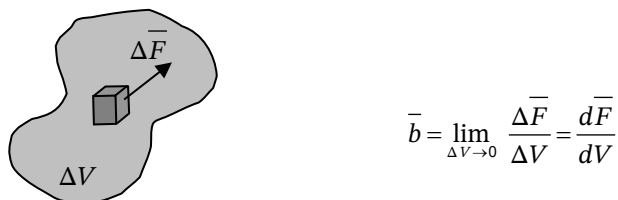
Aquestes forces exteriors poden actuar sobre la superfície del medi, si resulten de la interacció d'aquest amb el seu entorn en forma d'accions de contacte, o directament sobre el seu volum, si resulten de l'acció de camps de forces a distància.

Les forces que actuen sobre la superfície, d'ara endavant *forces de superfície* \bar{f} , s'expressen en termes de força per unitat d'àrea (dimensionalment F/ℓ^2). Com sigui que \bar{f} no té per què ser constant, el seu valor en cada punt es refereix a un element infinitesimal de superfície en tal punt, tal com s'observa en la figura següent:



De la mateixa manera, les forces que actuen sobre el volum, d'ara endavant *forces de volum* \bar{b} , s'expressen en termes de força per unitat de volum (dimensionalment F/ℓ^3).

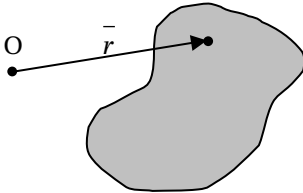
Com sigui que \bar{b} no té per què ser constant, el seu valor en cada punt es refereix a un element infinitesimal de volum en aquest punt, tal com es veu en la figura següent:



La resultant de les forces exteriors sobre un medi continu de volum V i superfície S s'expressa per:

$$\bar{R} = \int_S \bar{f} ds + \int_V \bar{b} dV$$

El moment resultant de les forces exteriors respecte a un punt O s'expressa per:

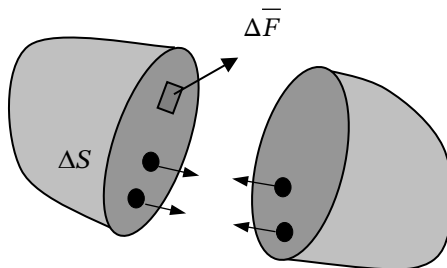


$$\bar{M}_0 = \int_S \bar{r} \wedge \bar{f} dS + \int_V \bar{r} \wedge \bar{b} dV$$

1.8. Tensions internes. Postulat d'Euler-Cauchy

Les forces d'interacció entre partícules es transmeten a través de tot el volum del medi continu. Aquestes forces internes poden caracteritzar-se a nivell macroscòpic, atesa la força transmesa per unitat d'àrea a través de qualsevol superfície imaginària interior al medi. Aquesta mena de força intensiva interior s'anomena tensió \bar{t} i substitueix convenientment les interaccions partícula a partícula.

L'anàlisi detallada de les tensions es desenvoluparà en el capítol 3.



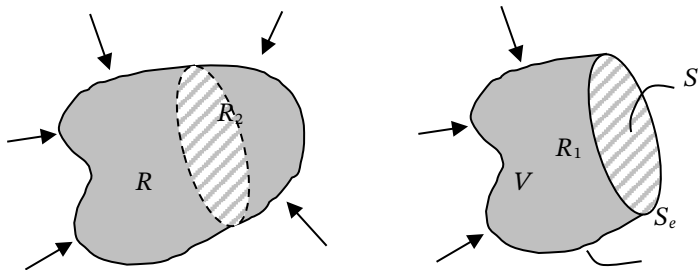
$$\bar{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta S} = \frac{d\bar{F}}{dS}$$

D'altra banda, qualsevol subdivisió arbitrària del medi considerada aïlladament constitueix un sistema de partícules que interaccionen. Com s'ha vist anteriorment, la dinàmica d'un sistema d'aquest estil depèn solament de les forces exteriors i els seus moments. En el cas de la subdivisió arbitrària, les forces i moments exteriors es determinen a partir de: les tensions sobre les fronteres interiors amb la resta del medi, les forces sobre les superfícies exteriors i les forces sobre el volum. Això justifica el postulat d'Euler-Cauchy:



“Les tensions existeixen a través de qualsevol element de superfície interior, i les lleis vectorials del moviment per a qualsevol subdivisió arbitrària del medi, inclòs l'element infinitesimal de volum, així com el medi en el seu conjunt, es poden expressar a partir d'elles i de les forces exteriors de superfície i de volum.”

Aquest postulat queda corroborat pel fet que les conclusions que se'n deriven són conformes a l'evidència experimental.



La resultant de les forces exteriors sobre una subdivisió del medi continu de volum V , superfície exterior S_e i frontera interior S_i s'expressa per:

$$\overline{R}_{R_1} = \int_{S_e} \overline{f} \, dS_e + \int_{S_i} \overline{t} \, dS_i + \int_V \overline{b} \, dV$$

El moment resultant de les forces exteriors sobre una subdivisió del medi continu respecte a un punt arbitrari O s'expressa per:

$$\overline{M}_{O_{R_1}} = \int_{S_e} \overline{r} \wedge \overline{f} \, dS_e + \int_{S_i} \overline{r} \wedge \overline{t} \, dS_i + \int_V \overline{r} \wedge \overline{b} \, dV$$

Evidentment, si el medi continu considerat en el seu conjunt està en equilibri, sobre qualsevol part d'aquest s'haurà de verificar la condició necessària d'equilibri:

$$\overline{R}_{R_1} = 0 \quad \overline{M}_{O_{R_1}} = 0$$

NOTA: En aquest enfocament de la mecànica del medi continu s'omet la possible existència de moments distribuïts. Hi ha un enfocament més avançat de la mecànica del medi continu degut a Crosseraut en què sí que s'inclou aquest efecte. En aquest curs, tanmateix, se seguirà l'enfocament de Cauchy.



1.9. Homogeneïtat i isotropia

Es diu que un medi és homogeni quan les seves propietats mecàniques intrínseques són les mateixes en tots els seus punts.

Es diu que un medi és isòtrop quan les seves propietats mecàniques intrínseques en un punt donat són les mateixes independentment de la direcció en què s'avaluïn.

Els medis materials reals no són en general homogenis ni isòtrops. No obstant això, en moltes ocasions aquestes hipòtesis es poden acceptar des d'un punt de vista macroscòpic amb una aproximació suficient.

Homogeneïtat i isotropia no són hipòtesis essencials de la mecànica del medi continu, sinó solament hipòtesis convenients amb vista a simplificar l'anàlisi.

Cinemàtica del medi continu

2.1. Introducció

En aquest capítol s'analitzen els processos de transformació geomètrica d'un medi continu des d'un punt de vista purament cinemàtic, sense parar atenció a les causes que els produeixen.

Per a l'anàlisi d'aquestes transformacions, cal definir prèviament uns quants conceptes essencials:

- Anomenarem **punt** una posició concreta fixa en l'espai.
- Anomenarem **partícula** (o punt material) un element infinitesimal de volum d'un medi continu que contingui una quantitat constant de matèria.
- En un instant de temps t , un medi continu que té un volum V i una superfície límit S , ocupa una regió R de l'espai físic. La identificació de les partícules amb els punts de l'espai que ocupen en un instant t respecte a un conjunt adequat d'eixos coordenats defineix la configuració del medi continu en aquest instant.

Es defineix el concepte de deformació com tota transformació geomètrica d'un medi continu consistent en un canvi en la seva forma i/o volum entre una configuració inicial sense deformar (o de referència) i una altra configuració final deformada (o actual).

Es defineix la **velocitat de deformació** com una mesura de la ràtio de variació de la deformació respecte al temps.

Cal observar que són possibles transformacions geomètriques que no impliquin canvi en la forma i/o volum. Aquestes transformacions corresponen a moviments de sòlid rígid i no impliquen, per tant, la deformació del medi.

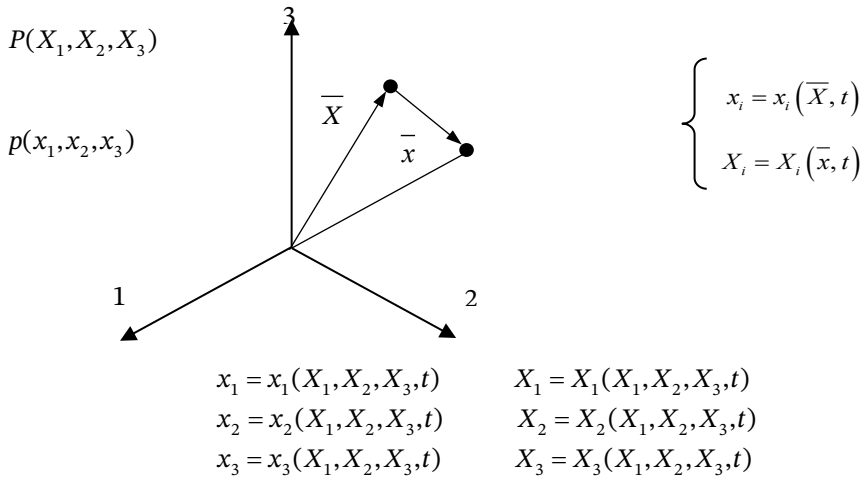
En general, tota transformació geomètrica pot incorporar una part corresponent a un moviment de sòlid rígid i una altra part purament deformacional.



2.2. Hipòtesi de partida

Com a hipòtesi fonamental es considerarà la continuïtat de la transformació geomètrica. A més a més, s'admetrà que, atès que la matèria no apareix ni desapareix durant la transformació, a cada punt de la configuració inicial li correspon un únic punt transformat en la configuració final, i viceversa, per la qual cosa existeix una correspondència biunívoca entre totes dues configuracions.

Si anomenem X_1, X_2, X_3 les coordenades d'una partícula del sòlid abans de la transformació (*configuració de referència*, corresponent a l'instant inicial $t = t_0$) i x_1, x_2, x_3 les coordenades d'aquesta mateixa partícula després de la transformació (*configuració actual*, corresponent a un instant t), tots dos conjunts de coordenades estaran relacionats entre ells:



Des del punt de vista matemàtic, i a conseqüència de les hipòtesis fixades, aquestes funcions són uniformement contínues i tenen inversa única. Aquesta última hipòtesi constitueix un dels postulats bàsics de la mecànica del medi continu. La condició necessària i suficient per a l'existència de les funcions inverses és que el determinant jacobí de la transformació no s'anul·li:

$$J = \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] \neq 0$$

A més a més, se suposaran funcions derivables amb derivades parcials contínues fins a qualsevol ordre, ja que l'experiència demostra que els resultats que es deriven d'aquesta suposició són apropiats.

La continuïtat de la transformació implica que:



- Dos punts infinitament pròxims abans de la transformació es mantenen infinitament pròxims després d'aquesta.
- Una línia contínua abans de la transformació segueix sent contínua després d'aquesta, i si aquella és tancada, aquesta també ho és, i viceversa.
- Una superfície contínua abans de la transformació segueix sent contínua després d'aquesta, i si aquella és tancada, aquesta també ho és, i viceversa.

Queden excloses d'aquesta anàlisi, per tant, aquelles situacions en què no es compleixin aquests supòsits: per exemple, quan es formin esquerdes o buits a l'interior del material durant el procés de transformació.

2.3. Enfocaments lagrangiana i euleriana

L'anàlisi de la transformació geomètrica d'un medi continu es pot efectuar amb dos enfocaments. En el primer, anomenat **lagrangiana**, cada partícula queda identificada per les coordenades del punt que ocupa inicialment (també anomenades *coordenades materials*), X_1, X_2, X_3 , que es prenen com a variables independents. En un enfocament lagrangiana s'anomena *trajectòria d'una partícula* la corba espacial definida per l'equació següent:

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{X}, t)$$

i és el lloc geomètric de totes les posicions ocupades per una mateixa partícula al llarg del temps.

En el segon enfocament, anomenat **euleriana**, se centra l'atenció en un punt fix de l'espai de coordenades x_1, x_2, x_3 (també anomenades *coordenades espacials*), que pot ser ocupat per diferents partícules en temps diferents. En aquest cas, les variables x_1, x_2, x_3 fan el paper de variables independents.

Tots dos plantejaments són equivalents, ja que, pel fet de ser invertibles les funcions que defineixen la transformació, donades les coordenades inicials d'una partícula, és possible determinar la seva posició en qualsevol instant, i donada la posició d'una partícula en un instant donat, és possible determinar-ne la posició inicial. L'elecció de l'un o l'altre plantejament queda condicionada pel tipus de problema a resoldre i pel fet de si es desitja posar l'èmfasi en el seguiment d'una partícula donada o en la descripció del que succeeix en un cert punt fix de l'espai.



Per al desenvolupament d'aquest curs s'ha utilitzat l'enfocament lagrangia en la formulació de la mecànica dels sòlids deformables, ja que en aquest cas la geometria coneguda és la geometria abans de la deformació. No obstant això, en els aspectes relacionats amb el moviment i flux de sistemes fluids, s'aplicarà l'enfocament eulerià, perquè aleshores és molt més còmode referir el problema a punts fixos en l'espai.

2.4. Concepte de derivada material

Durant tot el curs serà necessari avaluar la rapidesa de la variació temporal de diverses magnituds associades a partícules materials, és a dir, aquella que seria mesurada per un observador que viatgés amb la partícula. Per fer-ho, s'introdueix el concepte de derivada material definit de la manera següent:

La derivada material és una mesura de la rapidesa de variació en el temps de qualsevol propietat del medi (escalar, vectorial o tensorial), referida a una partícula material específica, tal com s'observaria en la referència d'estudi. S'expressa com a D/Dt .

Així, per exemple, la derivada material del vector de posició d'una partícula és la seva velocitat:

$$\frac{D\bar{x}}{Dt} = \dot{\bar{x}} = \bar{v} \qquad v_i = \frac{dx_i}{dt}$$

NOTA: En aquest curs, excepte quan s'indiqui de manera expressa, se suposa que la referència d'estudi és galileana i que totes les derivades temporals s'efectuen expressant les magnituds físiques en una base fixa.

La derivada material es pot avaluar utilitzant un enfocament lagrangia o un enfocament eulerià de la manera següent:

Sigui P una propietat qualsevol (magnitud escalar o component d'un vector o un tensor). Si P s'expressa en coordenades materials (descripció lagrangiana), la seva derivada material és:

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P(\bar{X}, t)}{\partial t} \qquad \left(\begin{array}{l} \frac{D\bar{X}}{Dt} = 0 \text{ per ser la posició inicial donada per } \bar{X} \\ \text{independent del temps} \end{array} \right)$$

ja que \bar{X} no varia amb el temps. No obstant això, si P s'expressa en coordenades espacials (descripció euleriana), la derivada material pren la forma següent:

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P(\bar{x}, t)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial P(\bar{x}, t)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$



perquè en aquest cas les coordenades \bar{x} sí que són funció del temps, i cal aplicar-hi la regla de la cadena. És a dir:

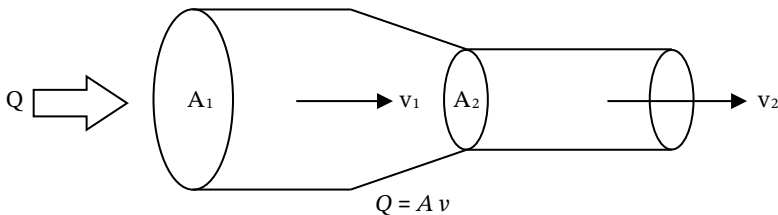
$$\frac{dx_i}{dt} = v_i$$

queda:

$$\frac{DP}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t}}_{\text{local}} + \underbrace{\sum_i v_i \frac{\partial P}{\partial x_i}}_{\text{convectiu}} = \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{v} \times \text{grad } P$$

Aquesta expressió presenta dos components denominats **local** i **convectiu**, respectivament. La part local denota la variació de la propietat associada al canvi temporal en la posició actual, mentre que la part convectiva denota la variació de la propietat associada al canvi de posició de la partícula.

Per exemple, en el flux d'un fluid dins d'un conducte de secció variable, i suposant que el cabal es manté constant, la velocitat d'una partícula presenta solament canvi convectiu a causa de la variació de la secció en passar aquesta d'un punt a un altre. No obstant això, si el cabal varia amb el temps, apareix també el terme de variació local de la velocitat en un punt fix de l'espai.



Es defineix l'operador derivada material de la manera següent:

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial\bullet}{\partial x_i}$$

En forma desenvolupada: $\frac{D\bullet}{Dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + v_1 \frac{\partial\bullet}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial\bullet}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial\bullet}{\partial x_3} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \vec{v} \times \text{grad } \bullet$

Es defineix el **règim estacionari** com aquell en què s'anul·la la part local de la derivada material, és a dir:

$$\frac{\partial P(\bar{x}, t)}{\partial t} = 0$$



2.5. Vector desplaçament

2.5.1. Concepte de desplaçament

En molts problemes de la mecànica del medi continu l'interès se centra en l'estudi de la transformació geomètrica existent entre dues configuracions definides, i no en el procés continu en el temps que ha portat des d'una fins l'altra. Per a aquests processos és especialment útil l'estudi a partir del concepte de desplaçament que s'exposa en aquest apartat.

Suposem que la transformació del medi és contínua i del tipus un a un. Cada punt P del cos experimentarà un desplaçament \bar{u} , de components (u_1, u_2, u_3) , des de la seva posició inicial \bar{X} abans de la transformació, fins a la seva posició final \bar{x} després de la transformació. Aquest desplaçament, definit per la diferència

$$\bar{u} = \bar{x} - \bar{X}$$

s'anomena **vector desplaçament**. El conjunt dels desplaçaments dels infinits punts materials del medi formen un camp vectorial. Els components del vector desplaçament són funcions contínues i derivables.

El vector desplaçament es pot expressar en coordenades lagrangianes:

$$\bar{u} = \bar{u}(\bar{X}, t) = \bar{x}(\bar{X}, t) - \bar{X}$$

o coordenades eulerianes:

$$\bar{u} = \bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{x} - \bar{X}(\bar{x}, t)$$

El significat físic de totes dues expressions és diferent. En el primer cas, s'expressa el vector desplaçament de la partícula que inicialment està en la posició \bar{X} de la configuració de referència, mentre que en el segon s'expressa el vector desplaçament de qual-sevol partícula material que en l'instant t ocupa la posició espacial donada per les coordenades \bar{x} en la configuració actual.

Com sigui que el concepte de desplaçament és especialment útil per a l'anàlisi de la mecànica de medis sòlids deformables, i en aquest cas la descripció lagrangiana és més adequada, la resta de l'explicació se cenyirà a aquest enfocament.

2.5.2. Anàlisi de desplaçaments en l'entorn d'un punt

Imaginem-nos un altre punt material Q , infinitament pròxim i distant de P un $d\bar{X}$. Tal punt experimentarà un desplaçament $\bar{u} + d\bar{u}$. En virtut de la deformabilitat del medi,

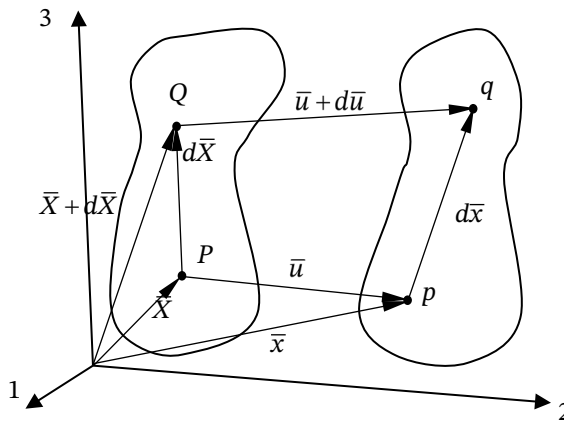


i a diferència del que ocorreria en un sòlid rígid, la distància entre P i Q , $d\bar{x}$ després de la transformació pot ser diferent de l'existent abans d'aquesta.

NOTA: S'utilitza la nomenclatura $d\bar{x}$ fins i tot quan no es correspon amb el concepte de diferencial total en el sentit matemàtic, ja que s'avalua sobre una mateixa configuració, corresponent a un instant de temps fix, i fa variar solament les coordenades materials. En un sentit estricte, s'hauria d'escriure:

$$d\bar{x} = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} dt \text{ pero como } t = \text{cte. } dt = 0 \text{ y } d\bar{x}]_t = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial X_i} dX_i$$

Els vectors $d\bar{x}$ i $d\bar{X}$ estan relacionats geomètricament de la manera següent:



Per geometria:

$$d\bar{X} + \bar{u} + d\bar{u} = \bar{u} + d\bar{x}$$

Si simplifiquem:

$$d\bar{X} + d\bar{u} = d\bar{x}$$

en què $d\bar{u} = [M] d\bar{X}$; Sent $[M]$ el gradient de \bar{u} en P

$$P = \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial X_1 & \partial u_1 / \partial X_2 & \partial u_1 / \partial X_3 \\ \partial u_2 / \partial X_1 & \partial u_2 / \partial X_2 & \partial u_2 / \partial X_3 \\ \partial u_3 / \partial X_1 & \partial u_3 / \partial X_2 & \partial u_3 / \partial X_3 \end{bmatrix} = [\text{grad } \bar{u}]$$

Si substituïm i traiem factor comú $d\bar{X}$:

$$d\bar{x} = \left([I] + [M]_x \right) d\bar{X} = [F] d\bar{X}$$



Si $[M]_X = 0$ en tot punt del medi, la transformació correspon a una translació de sòlid rígid.

La matriu $[F]$ s'anomena *tensor gradient de deformació*.

$$[F] = \begin{bmatrix} (1 + \partial u_1 / \partial X_1) & \partial u_1 / \partial X_2 & \partial u_1 / \partial X_3 \\ \partial u_2 / \partial X_1 & (1 + \partial u_2 / \partial X_2) & \partial u_2 / \partial X_3 \\ \partial u_3 / \partial X_1 & \partial u_3 / \partial X_2 & (1 + \partial u_3 / \partial X_3) \end{bmatrix}$$

Evidentment, $[F]$ també es pot escriure a partir de la relació existent entre les variables lagrangianes i eulerianes.

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial X_1 & \partial x_1 / \partial X_2 & \partial x_1 / \partial X_3 \\ \partial x_2 / \partial X_1 & \partial x_2 / \partial X_2 & \partial x_2 / \partial X_3 \\ \partial x_3 / \partial X_1 & \partial x_3 / \partial X_2 & \partial x_3 / \partial X_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{Bmatrix}$$

Aquesta expressió posa de manifest que el tensor gradient de deformació és igual a la matriu jacobiana de la transformació i, per tant:

$$[F] = [J] \quad \Rightarrow \quad J = \det[F]$$

En virtut del que s'ha dit anteriorment, perquè la transformació sigui invertible, el determinant jacobinà de $[F]$ ha de ser diferent de 0. A més a més, ha de ser > 0 . En efecte, es pot demostrar que $\det[F] = dV/dV_0$, on dV_0 i dV són, respectivament, el diferencial de volum abans i després de la transformació.

$$dV_0 = (d\bar{X}_1 \wedge d\bar{X}_2) \times d\bar{X}_3 \quad dV = (d\bar{x}_1 \wedge d\bar{x}_2) \times d\bar{x}_3$$

Al principi del procés de deformació $dV = dV_0$, amb què $\det[F] = 1$. Com que $\det[F]$ ha de ser $\neq 0$ durant tot el procés, se'n segueix que $\det[F] > 0$. Qualsevol camp de desplaçaments ha de complir aquesta condició per ser físicament possible.

2.6. Vector velocitat

2.6.1. Concepte de velocitat

En molts altres problemes de la mecànica del medi continu, la velocitat de canvi de la geometria durant el procés de transformació és el factor dominant. En aquests casos l'anàlisi atemporal entre dues configuracions efectuada a partir dels desplaçaments esdevé insuficient i és necessari fer una anàlisi instantània. Un concepte bàsic és aleshores el de velocitat.



La velocitat d'una partícula és la derivada material del seu vector de posició, $\bar{v} = \frac{D\bar{x}}{Dt}$, si s'escriu aquest en funció de les coordenades inicials, i del vector desplaçament en cada instant se n'obté:

$$\bar{x} = \bar{X} + \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{D\bar{X}}{Dt} + \frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{D\bar{u}}{Dt} \quad (\text{per } \frac{D\bar{X}}{Dt} = 0)$$

atès que la posició inicial és fixa i independent del temps.

Si el vector desplaçament s'expressa en forma lagrangiana, aleshores el vector velocitat s'obté també en forma lagrangiana:

$$\bar{v}(\bar{X}, t) = \frac{D\bar{u}(\bar{X}, t)}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}(\bar{X}, t)}{\partial t}$$

De la mateixa manera, utilitzant un enfocament eulerià s'obté:

$$\bar{v}(\bar{x}, t) = \frac{D\bar{u}(\bar{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}(\bar{x}, t)}{\partial t} + \sum_i v_i(\bar{x}, t) \frac{\partial \bar{u}(\bar{x}, t)}{\partial x_i}$$

que també es pot escriure de manera més compacta com a:

$$\bar{v}(\bar{x}, t) = \frac{\partial \bar{u}(\bar{x}, t)}{\partial t} + [M]_x \bar{v}(\bar{x}, t)$$

2.6.2. Camp de velocitats

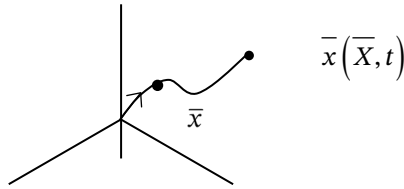
En l'enfocament eulerià resulta especialment útil, per a l'anàlisi de fluxos, associar a cada punt de l'espai el vector velocitat de la partícula que l'ocupa instantàniament, la qual cosa dona lloc a un camp vectorial de velocitats. Si el flux és estacionari, aquest camp serà constant en el temps, mentre que no ho serà si existeix variació local de la velocitat.

Es defineix la **línia de corrent** com aquella línia traçada a l'interior del flux i que és tangent en cada punt als vectors velocitat. Excepte en punts singulars, per cada punt de l'espai passa una sola línia de corrent, i per això aquestes no s'intersequen entre elles. Si $d\bar{\ell}$ és l'element infinitesimal de longitud d'una línia de corrent, al llarg d'aquesta es compleix:

$$\frac{d\ell_1}{v_1} = \frac{d\ell_2}{v_2} = \frac{d\ell_3}{v_3}$$

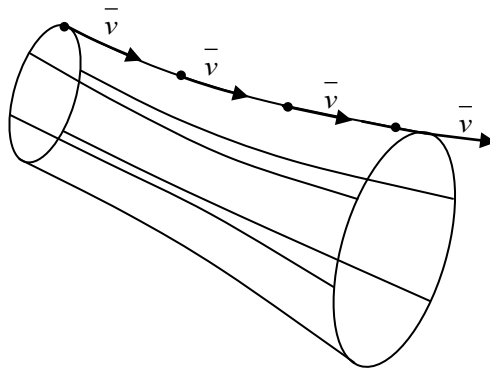


S'ha de diferenciar la línia de corrent de la **trajectòria** d'una partícula, definida com el lloc geomètric de les successives posicions de la partícula,



de la **línia d'emissió**, o **traça**, que és el lloc geomètric de les posicions que en un instant donat ocupen totes les partícules que han passat per un cert punt de l'espai.

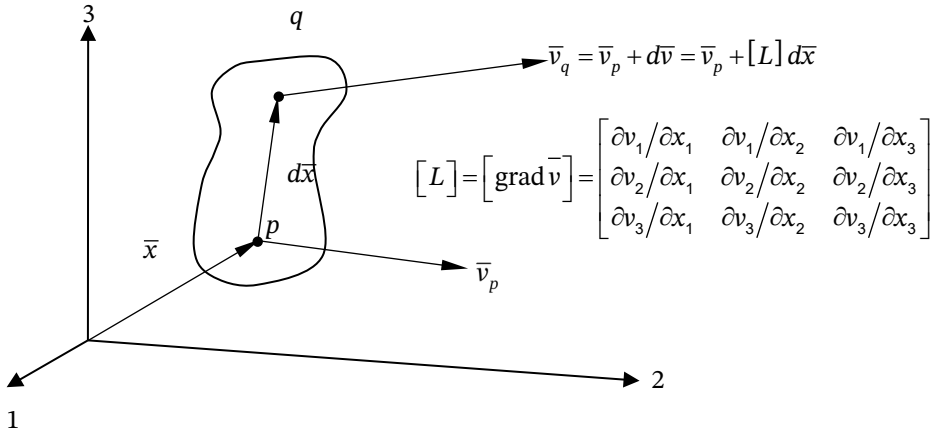
S'anomena **superfície de corrent** una superfície engendrada per línies de corrent. S'anomena **tub de corrent** el volum delimitat per una superfície de corrent, engendrada per una corba tancada no coincident amb una línia de corrent i totes les línies de corrent que s'hi intersequen.



Com sigui que el concepte de velocitat és especialment útil per a l'anàlisi de la mecànica de fluids, i en aquest cas la descripció euleriana és més apropiada, la resta de l'explicació se cenyirà a aquest enfocament.

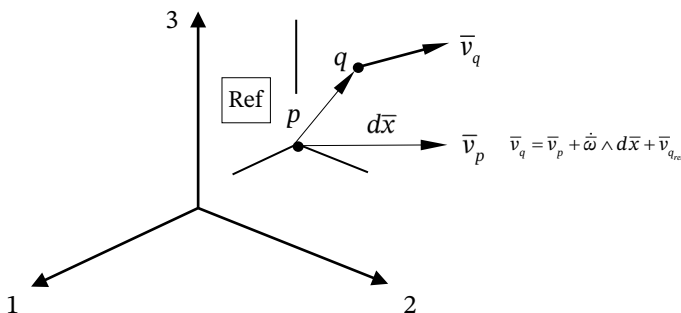
2.6.3. Anàlisi de velocitats a l'entorn d'un punt

És interessant fer una anàlisi detallada del camp de velocitats a l'entorn d'una partícula, semblant al que s'ha fet anteriorment amb el camp de desplaçaments. Així doncs, considereu una determinada configuració en el temps t . Sigui p una partícula que en aquest instant es mou amb una velocitat \bar{v}_p . Sigui q una altra partícula situada a una distància infinitesimal de p . En virtut de la continuïtat, la velocitat de q , \bar{v}_q , diferirà solament en una magnitud infinitesimal de la velocitat de p . Per la teoria de les funcions contínues, totes dues velocitats es relacionen matemàticament de la manera següent:



on $[L]$ és el gradient de velocitat. Si $[L]=0$ en tot punt del medi, el camp de velocitats correspon al d'una translació de sòlid rígid.

Podem elaborar paral·lelament un raonament de tipus físic per relacionar \bar{v}_p i \bar{v}_q . Per fer-ho, ens imaginem una referència relativa solidària a l'entorn immediat del punt p . La velocitat absoluta del punt q , basant-nos en l'esquema habitual de composició de velocitats, es pot considerar com una velocitat d'arrossegament formada per la velocitat absoluta de p , més una velocitat de gir de q entorn de p que resultaria d'imaginar q fix respecte a la referència solidària a p , més una velocitat relativa de q respecte a p en la referència solidària a p . Aquest últim terme resulta evidentment del fet que el medi continu es pot deformar. En un sòlid rígid tal terme no existiria.



El gradient de velocitat $[L]$ es pot descompondre en una part simètrica i una altra anti-simètrica de la manera següent:

$$[L] = \frac{1}{2} \left([L] + [L]^T \right) + \frac{1}{2} \left([L] - [L]^T \right) = [D] + [W]$$



En components:

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = D_{ij} + W_{ij}$$

en què $[D]$ és un tensor simètric ($D_{ij} = D_{ji}$) i $[W]$ un tensor antisimètric ($W_{ij} = -W_{ji}$).

L'expressió de la velocitat de q queda aleshores de la manera següent:

$$\bar{v}_q = \bar{v}_p + [W]d\bar{x} + [D]d\bar{x}$$

expressió que ha de ser equivalent a l'anterior:

$$\bar{v}_q = \bar{v}_p + \dot{\omega} \wedge d\bar{x} + \bar{v}_{q,rel}$$

Vorticitat

Identificant aquesta última expressió amb la resultant de la interpretació física efectuada anteriorment, s'observa que el terme antisimètric es correspon amb l'operador velocitat angular de l'entorn de p -producte vectorial. Per aquest motiu s'anomena el tensor $[W]$ **tensor vorticitat**. En efecte:

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

És fàcil comprovar que: $[W]d\bar{x} = \dot{\omega} \wedge d\bar{x}$, amb $\dot{\omega} = \begin{Bmatrix} -W_{23} \\ W_{13} \\ -W_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v} = \frac{1}{2} \bar{q}$

S'anomena el vector \bar{q} **vector vorticitat** o **vector remolí**, mentre que, degut a la seva interpretació física, s'anomena el vector $\dot{\omega}$ **vector velocitat de rotació**.

Es diu que el camp de velocitats és **irrotacional** si el tensor vorticitat s'anul·la en qual-sevol punt: $[W]=0$.

En l'enfocament eulerià, per a l'anàlisi de fluxos, també resulta útil associar a cada punt de l'espai el vector remolí de la partícula que l'ocupa instantàniament, cosa que dona lloc a un camp vectorial de vorticitats, també conegut com a camp de remolins.



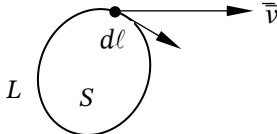
Es defineix la *línia vorticosa* com aquella línia traçada a l'interior del flux i que és tangent en cada punt als vectors vorticitat. Excepte en punts singulars, per cada punt de l'espai passa una sola línia vorticosa, per la qual cosa aquestes no s'intersequen entre elles.

S'anomena *superfície vorticosa* una superfície engendrada per línies vorticoses. Es denomina *tub vorticós* el volum delimitat per una superfície vorticosa engendrada per una corba tancada no coincident amb una línia vorticosa i totes les línies vorticoses que s'hi intersequen.

Es defineix la intensitat H d'un tub vorticós com a: $H = \int_S \text{rot } \bar{v} \times \bar{n} ds$

on S és una secció transversal qualsevol del tub. H és independent de l'elecció que es faci de S .

A partir del teorema de Stokes, és immediat veure que la circulació del vector velocitat sobre la línia tancada que defineix el contorn de S és igual a la intensitat H .

$$H = \oint_L \bar{v} d\ell$$


Velocitat de deformació

El terme simètric resultant de la descomposició de $[L]$ es relaciona amb la velocitat relativa de q respecte a p i és, per tant, el component de velocitat no atribuïble a un moviment de sòlid rigid, associat a la velocitat de deformació del medi.

$$\bar{v}_{q_{rel}} = [D] d\bar{x} \quad \text{con} \quad [D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \text{(amb)} & & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

El tensor $[D]$ rep el nom de **tensor velocitat de deformació** i, com es veurà més endavant, és una mesura del canvi de forma i/o de volum per unitat de temps que experimenta el medi a l'entorn del punt p . És un tensor simètric de segon ordre i té totes les propietats matemàtiques d'aquesta mena de tensors.



Si $[D]=0$ en tots els punts, el medi presenta un camp de velocitats de sòlid rígid.

Si dividim tots dos membres de l'expressió que dona la velocitat relativa de q respecte a p pel mòdul de \overline{dx} , s'obté una manera més útil de mesurar la velocitat de deformació del medi a l'entorn de p , perquè el resultat que s'obté és independent de la magnitud de \overline{dx} i depèn solament de la direcció \overline{pq} al voltant de p definida mitjançant un vector \overline{n} . En efecte, es defineix el **vector velocitat de deformació** associat a la direcció \overline{pq} de la manera següent:

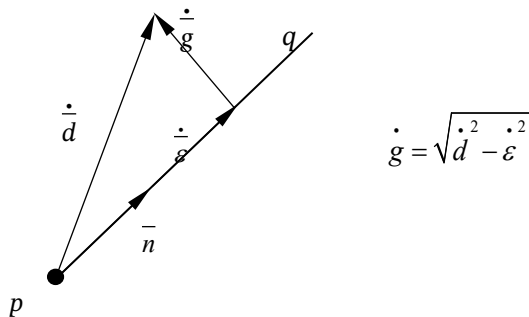
$$\overline{dx} = d\ell \overline{n} \Rightarrow \frac{\overline{v}_{q,rel}}{d\ell} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocitat de canvi } \overline{dx} \\ \text{per unitat de temps} \\ \text{i per unitat de longitud} \\ \text{associada a la deformació} \end{array} \right\} = [D] \overline{n} = \dot{\overline{d}}$$

Donat \overline{n} , un vector unitari (versor) en la direcció \overline{pq} i $d\ell = \|\overline{dx}\|$

si es projecta el vector velocitat de deformació sobre la mateixa direcció \overline{pq} , s'obté una mesura de la velocitat de deformació longitudinal en la direcció \overline{pq} :

$$\dot{\varepsilon} = \overline{n}^T \times \dot{\overline{d}} = \overline{n}^T [D] \overline{n} \qquad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} \overline{n}$$

Es pot definir també el vector velocitat de deformació transversal com el component del vector velocitat de deformació perpendicular a la direcció de \overline{pq} :



A partir d'aquesta expressió és fàcil veure que els components de la diagonal de $[D]$ són les velocitats de deformació longitudinal en les direccions definides pels versors de la base. En efecte:



$$(1, 0, 0)[D] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = D_{11} \quad (0, 1, 0)[D] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = D_{22} \quad (0, 0, 1)[D] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = D_{33}$$

Els components no diagonals de $[D]$ són proporcionals a les velocitats de variació (o distorsió) dels angles formats per cada parella de versors de la base. Aquesta interpretació es justificarà més endavant.

El tensor velocitat de deformació pot ser descompost com a suma de dos tensors que aïllen els fenòmens de canvi de forma i canvi de volum de la manera següent:

$$[D] = [D_0] + [d] = \begin{bmatrix} D_0 & 0 & 0 \\ 0 & D_0 & 0 \\ 0 & 0 & D_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} - D_0 & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} - D_0 & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} - D_0 \end{bmatrix} \quad \text{en què}$$

$$D_0 = \frac{t_r [D]}{3}$$

on $[D_0]$ s'anomena *part esfèrica* i dona compte de la velocitat de deformació per canvi de volum, mentre que $[d]$ s'anomena *part desviadora* i caracteritza la velocitat de deformació per canvi de forma. Més endavant es justificarà el significat físic d'aquesta descomposició.

2.7. Vector acceleració

2.7.1. Concepte d'acceleració

Es defineix l'acceleració d'una partícula material com la derivada material del seu vector velocitat. En el sentit clàssic de la mecànica, es tracta d'una mesura de la variació per unitat de temps del vector velocitat.

Utilitzant l'enfocament lagrangà, tenim:

$$\bar{a}(\bar{X}, t) = \frac{D\bar{v}(\bar{X}, t)}{Dt} = \frac{\partial \bar{v}(\bar{X}, t)}{\partial t}$$

Alternativament, a partir de l'enfocament eulerià tenim:

$$\bar{a}(\bar{x}, t) = \frac{D\bar{v}(\bar{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \bar{v}(\bar{x}, t)}{\partial t} + \sum_i v_i(\bar{x}, t) \frac{\partial \bar{v}(\bar{x}, t)}{\partial x_i}$$

Aquesta expressió es pot reescriure com a:



$$\bar{a}(\bar{x}, t) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + [L] \bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + [W] \bar{v} + [D] \bar{v}$$

d'on, operant, s'obté una altra manera d'expressar l'acceleració utilitzada habitualment en mecànica de fluids:

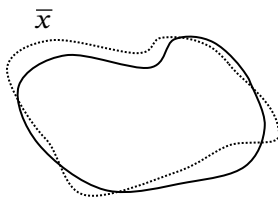
$$\bar{a}(\bar{x}, t) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + 2\dot{\omega} \wedge \bar{v} + \frac{1}{2} \overline{\text{grad } v^2}$$

Aquesta expressió, deguda a Lagrange, admet la interpretació física següent:

- El terme $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$ és l'acceleració local mitjana en un punt espacial fix.
- El terme $\frac{\overline{\text{grad } v^2}}{2}$ és l'acceleració convectiva deguda al canvi en el mòdul de la velocitat en passar d'un punt a un altre.
- El terme $2\dot{\omega} \wedge \bar{v}$ és l'acceleració convectiva deguda al canvi de direcció del vector velocitat en passar d'un punt a un altre.

2.8. Transformacions infinitesimals

En la mecànica de sòlids deformables hi ha una classe àmplia de problemes en què, a causa de la naturalesa física dels materials utilitzats, existeix realment molt poca diferència geomètrica entre la configuració inicial (o sense deformar) i la configuració actual o deformada. En aquesta mena de problemes és habitual admetre, com a hipòtesi simplificativa addicional, que els desplaçaments i les seves derivades respecte a les coordenades són quantitats infinitesimals, amb les implicacions que això comporta en el seu tractament matemàtic.



$$\begin{aligned} |u_i| &\lll 1 \\ |\partial u_i / \partial X_i| &\lll 1 \end{aligned}$$

Aquesta mena de transformacions s'anomenen *transformacions infinitesimals*, i en elles és possible confondre les formulacions lagrangiana i euleriana en una de sola. En



aquestes condicions, les derivades de qualsevol propietat respecte a les coordenades lagrangianes i eulerianes són gairebé iguals. En efecte, sigui una propietat P qualsevol. Aleshores, i a títol d'exemple:

$$\frac{\partial P}{\partial X_1} = \frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_1}$$

però: $x_i = X_i + u_i$

$$\text{i, per tant: } \frac{\partial x_1}{\partial X_1} = 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \approx 1 \quad ; \quad \frac{\partial x_2}{\partial X_1} = \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \ll 1 \quad ; \quad \frac{\partial x_3}{\partial X_1} = \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \ll 1$$

amb què, i en virtut de la hipòtesi establerta:

$$\frac{\partial P}{\partial X_1} = \frac{\partial P}{\partial x_1} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial P}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \approx \frac{\partial P}{\partial x_1}$$

en negligir tots els infinítesims d'ordre superior.

2.8.1. Camp de desplaçaments infinítesimals

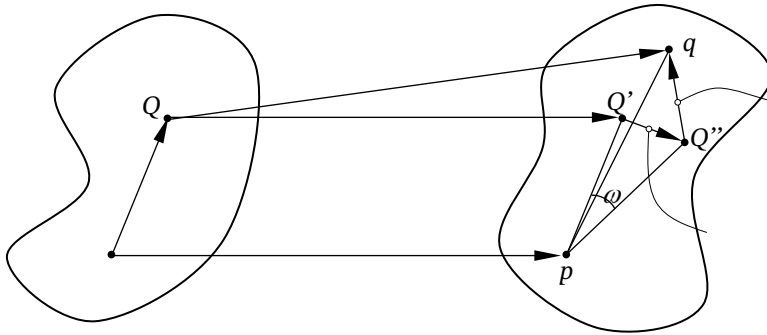
En una transformació infinítesimal, el camp de desplaçaments és anàleg al camp de velocitats. En efecte, sigui P la posició inicial d'una partícula i \bar{v}_p la seva velocitat inicial. La velocitat d'una altra partícula Q infinítesimament pròxima l'obtenim de l'estudi de composició de velocitats:

$$\bar{v}_Q = \bar{v}_P + \dot{\bar{\omega}} \wedge d\bar{X} + \bar{v}_{Q,rel}$$

Val la pena observar que en aquesta anàlisi centrem l'estudi en la configuració inicial (formulació lagrangiana). Per tractar-se d'una transformació infinítesimal, podem obtenir l'estudi del camp de desplaçaments simplement multiplicant aquesta igualtat per Δt , que és expressió del temps necessari per passar de la configuració inicial a la final, i suposant que les velocitats es mantenen constants durant aquest interval de temps:

$$\times \Delta t \Rightarrow \bar{u}_Q = \bar{u}_P + \bar{\omega} \wedge d\bar{X} + \bar{u}_{Q,rel}$$

En aquesta expressió, \bar{u}_P és el desplaçament del punt P , $\bar{\omega}$ és una rotació de sòlid rígid i \bar{u}_Q és el desplaçament relatiu de q respecte a p a causa de la deformació del medi tal com es dedueix de la construcció geomètrica següent:



Matemàticament, es pot obtenir una expressió anàloga a l'obtinguda abas per a l'anàlisi de velocitats, descomponent el tensor gradient de desplaçament en una part simètrica i una altra antisimètrica:

$$[M] = \frac{1}{2}([M] + [M]^T) + \frac{1}{2}([M] - [M]^T) = [\varepsilon] + [\Omega]$$

En components: $M_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \varepsilon_{ij} + \Omega_{ij}$

en què $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ y $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ i, per tant:

$$\bar{u}_Q = \bar{u}_P + [M] d\bar{X} = \bar{u}_P + [\Omega] d\bar{X} + [\varepsilon] d\bar{X}$$

Identificant termes, s'obté el significat físic d'aquesta descomposició per a una transformació infinitesimal.

Component antisimètric:	Component simètric:
rotació de sòlid rígid de l'entorn de P.	desplaçament relatiu degut a la deformació del medi.
$[\Omega] d\bar{X} = \bar{\omega} \wedge d\bar{X}$	$[\varepsilon] d\bar{X} = \bar{u}_{Q,rel}$

Cal observar, malgrat tot, que, encara que la descomposició matemàtica en part simètrica i antisimètrica de $[M]$ és possible sempre, la seva interpretació física solament té sentit en una transformació infinitesimal.

A conseqüència d'aquesta interpretació física, s'anomena el tensor $[\Omega]$ **tensor rotació**, i el vector $\bar{\omega}$, **vector rotació infinitesimal**.



$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega] d\bar{X} = \bar{\omega} \wedge d\bar{X} \quad \text{amb} \quad \bar{\omega} = \begin{Bmatrix} -\Omega_{23} \\ \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{u}$$

El tensor $[\varepsilon]$ rep el nom de **tensor deformació** (més exactament, *tensor de deformació lineal lagrangiana*, per distingir-lo d'altres desenvolupaments més elaborats).

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ (sim) & & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Les relacions que determinen els components de $[\varepsilon]$ en funció dels components de \bar{u} són conegudes com a *relacions cinemàtiques*.

2.8.2. Anàlisi de deformacions infinitesimals

El tensor deformació definit així conté tota la informació referent a la deformació del medi, i per això resulta especialment interessant estudiar-lo detallament. El camp tensorial format pels tensors deformació en cada punt defineix l'estat de deformació del medi continu.

Vector deformació unitària

Es defineix el vector deformació unitària com el desplaçament relatiu per unitat de longitud:

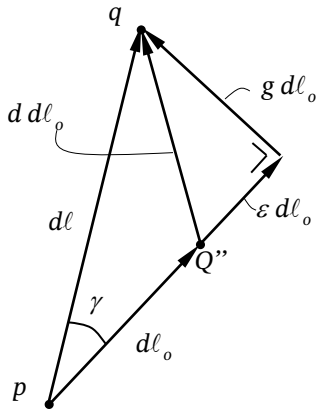
$$\bar{d} = \frac{\bar{u}_{Q_{rel}}}{d\ell_0} = [\varepsilon] \frac{d\bar{X}}{d\ell_0} = [\varepsilon] \bar{N} \quad \text{amb} \quad d\ell_0 = \|d\bar{X}\|$$



El conjunt de tots els vectors deformació unitària a l'entorn d'un punt defineix l'estat de deformació per a aquest punt. Queda evidenciat, doncs, que el tensor deformació conté tota la informació referent a l'estat de deformació en el punt d'estudi.

El vector deformació unitària pot ser descompost de manera natural en dos components anomenats *components intrínsecs*. Un, $(\bar{\varepsilon})$, dona una mesura segons la direcció \overline{pq} , i un altre, (\bar{g}) , la dona en la direcció perpendicular a \overline{pq} de la manera següent:

A fi de simplificar la notació, anomenarem $d\ell = \|d\bar{x}\|$ i $d\ell_0 = \|d\bar{X}\|$



$$\begin{cases} \bar{d} \times d\ell_0 = \bar{u}_{Q_{rot}} \\ \bar{d} = \bar{\varepsilon} + \bar{g} \end{cases}$$

$$\varepsilon d\ell_0 = \Delta(d\ell_0) \Rightarrow \varepsilon = \frac{d\ell - d\ell_0}{d\ell_0}$$

$$d\ell = d\ell_0 + \Delta(d\ell_0) = (1 + \varepsilon) d\ell_0$$

$$tg\gamma \approx \gamma = \frac{g d\ell_0}{d\ell_0 + \Delta(d\ell_0)} \approx g$$

Analíticament es pot obtenir $\bar{\varepsilon}$ projectant \bar{d} sobre \bar{N} . Observeu que, procedint d'aquesta manera, es negligeix l'efecte de la rotació infinitesimal de sòlid rígid:

$$\varepsilon = \bar{N}^T \times \bar{d} = \bar{N}^T [\varepsilon] \bar{N} \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \times \bar{N}$$

Aleshores \bar{g} pot ser avaluat com a: $\bar{g} = \bar{d} - \bar{\varepsilon}$ $g = \sqrt{d^2 - \varepsilon^2}$

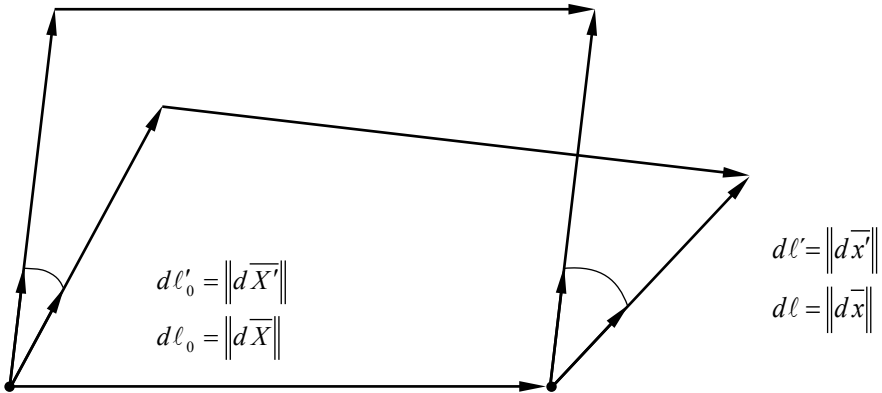
El significat físic d' ε i g es posa manifest a partir de la figura i de les expressions exposades:

- ε s'anomena *deformació longitudinal unitària* i és una mesura de la variació del mòdul de $d\bar{X}$ (positiva quan el mòdul augmenta i negativa en cas contrari).
- $\bar{\varepsilon}$ és l'anomenat *vector deformació longitudinal unitària*.
- g s'anomena *deformació transversal unitària* i és una mesura de la variació de l'orientació de $d\bar{X}$ no atribuïble al moviment de sòlid rígid.
- \bar{g} és l'anomenat *vector deformació transversal unitària*.



Deformació angular

A vegades resulta d'interès avaluar el canvi de l'angle definit entre dues direccions arbitràries al voltant d'un punt. Per fer-ho, considereu el següent: Sigui P el punt d'estudi i siguin Q i Q' dos punts infinitament pròxims que defineixen les dues direccions que determinen l'angle d'interès. La transformació donarà lloc als canvis que es mostren en la figura:



L'angle final entre les direccions de referència es pot avaluar a partir del producte escalar $d\bar{x}' \times d\bar{x}$ de dues maneres diferents:

A partir del significat físic del producte escalar i tenint en compte la transformació dels mòduls de $d\bar{X}$ i $d\bar{X}'$:

$$\left. \begin{aligned} d\bar{x}' \times d\bar{x} &= dl' \times dl \cos(\theta + d\theta) \\ dl' &= (1 + \varepsilon') dl'_0 \\ dl &= (1 + \varepsilon) dl_0 \end{aligned} \right\} d\bar{x}' \times d\bar{x} = (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon') dl_0 dl'_0 \cos(\theta + d\theta)$$

A partir del tensor gradient de deformació:

$$\left. \begin{aligned} d\bar{x}' &= [F] d\bar{X}' \\ d\bar{x} &= [F] d\bar{X} \end{aligned} \right\} d\bar{x}' \times d\bar{x} = ([F] d\bar{X}')^T ([F] d\bar{X}) = d\bar{X}'^T [F]^T [F] d\bar{X}$$

on el producte $[F]^T [F]$ es redueix, una vegada eliminats tots els infinitedsimos d'ordre superior resultants de la hipòtesi de petitesa de les derivades dels desplaçaments, a l'expressió:

$$[F]^T [F] = [I] + 2[\varepsilon]$$



NOTA: Una demostració alternativa d'aquesta expressió és la següent:

$$\frac{d\ell^2 - d\ell_0^2}{d\ell_0^2} = \frac{d\ell - d\ell_0}{d\ell_0} \frac{d\ell + d\ell_0}{d\ell_0} \approx \varepsilon \times 2 = 2\bar{N}^T [\varepsilon] \bar{N}$$

$$d\ell^2 = d\bar{X}^T [F]^T [F] d\bar{X} = d\ell_0^2 \bar{N}^T [F]^T [F] \bar{N} \Rightarrow \frac{d\ell^2 - d\ell_0^2}{d\ell_0^2} = \bar{N}^T [F]^T [F] \bar{N} - 1$$

$$2\bar{N}^T [\varepsilon] \bar{N} \approx \bar{N}^T [F]^T [F] \bar{N} - \bar{N}^T [I] \bar{N} \Rightarrow [F]^T [F] \approx [I] + 2[\varepsilon]$$

Igualant les dues expressions del producte escalar i dividint tots dos membres pel producte de mòduls:

$$(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon') \cos(\theta + d\theta) \approx \bar{N}'^T ([I] + 2[\varepsilon]) \bar{N} = \cos\theta + 2\bar{N}'^T [\varepsilon] \bar{N}$$

Finalment, introduint la relació trigonomètrica següent:

$$\cos(\theta + d\theta) = \cos\theta - d\theta \operatorname{sen}\theta$$

s'obté:

$$d\theta \cdot \operatorname{sen}\theta = (\varepsilon + \varepsilon') \cos\theta - 2\bar{N}'^T [\varepsilon] \bar{N}$$

Significat físic dels components de ε

Si es calculen les deformacions longitudinals unitàries per a les direccions dels versors de la base de referència, es posa de manifest que els elements de la diagonal del tensor deformació no són altra cosa que aquestes deformacions. En efecte:

$$(1, 0, 0)[\varepsilon] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{11} \quad (0, 1, 0)[\varepsilon] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{22} \quad (0, 0, 1)[\varepsilon] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_{33}$$

D'altra banda, si s'avalua el canvi de l'angle recte format entre les respectives parelles de versors de la base, s'obté:

$\theta_{12} = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \operatorname{sen}\theta = 1 \end{cases} \quad d\theta_{12} = -\bar{N}'^T [\varepsilon] \bar{N}$$

$\gamma > 0$
 $d\theta < 0$

Per conveni



$$d\theta_{12} = -\gamma_{12} = -2(1, 0, 0) [\varepsilon] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\varepsilon_{12} \Rightarrow \varepsilon_{12} = -\frac{1}{2}d\theta_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12}$$

En general: $\varepsilon_{ij} = -\frac{1}{2}d\theta_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$

amb què tenim que els components fora de la diagonal del tensor deformació són la meitat de les variacions angulars de les direccions dels eixos de la base canviades de signe.

Canvi de base. Deformacions i direccions principals

La informació continguda en el tensor deformació, com a entitat física que és, no depèn de la base vectorial escollida. No obstant això, la matriu que el representa sí que presenta components diferents en funció de la base triada. Per tant, la matriu del tensor deformació canvia amb un canvi de base; en efecte:

sigui \bar{e}_i la base en què s'expressa per $[\varepsilon]$,

sigui \bar{e}'_i la base en què s'expressa per $[\varepsilon']$,

sigui $[R]$ la matriu de canvi de base definida de la manera següent:

$$[R] = \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 & \bar{e}'_2 & \bar{e}'_3 \end{bmatrix}_{e_i} \quad ; \quad [R]^T = [R]^{-1} \quad \det [R] = 1$$

Un vector qualsevol es transforma en canviar de base de la manera següent:

$$\bar{V}_{e'_i} = [R]^T \bar{V}_{e_i}$$

En particular, el vector deformació unitària es transforma així:

$$\bar{d}_{e'_i} = [R]^T \bar{d}_{e_i} \quad \text{i} \quad \bar{d}_{e_i} = [R] \bar{d}_{e'_i}$$

En funció dels tensors deformació, queda:

$$\bar{d}_{e'_i} = [\varepsilon'] \bar{N}_{e'_i} \quad \Rightarrow \quad [R]^T \bar{d}_{e_i} = [R]^T [\varepsilon] \bar{N}_{e_i}$$

Amb què, finalment:

$$\bar{d}_{e'_i} = [R]^T [\varepsilon] [R] \bar{N}_{e'_i} \quad \Rightarrow \quad [\varepsilon'] = [R]^T [\varepsilon] [R]$$



Es pot demostrar que sempre existeix una base en què el tensor deformació es diagonalitza, és a dir, una base els eixos de la qual són ortogonals abans i després de la deformació en ser nuls els components fora de la diagonal i, per tant, nul·les les variacions dels angles formats pels eixos de la base. Els elements de la diagonal del tensor en aquesta base s'anomenen **deformacions principals**, i les direccions dels versors de la base, **direccions principals**.

En efecte, plantegem el problema de trobar totes aquelles direccions en què el vector deformació sigui col·lineal amb elles mateixes. Es tracta, per tant, de trobar aquelles direccions en què solament existeixi deformació longitudinal, és a dir:

$$\bar{d} = \bar{\varepsilon} \mathbf{i}, \text{ per tant, } \bar{g} = 0$$

Perquè tals direccions existeixin, el sistema d'equacions definit per

$$\bar{d} = [\varepsilon] \bar{N} = \varepsilon \bar{N} = \bar{\varepsilon} \bar{N} \Rightarrow ([\varepsilon] - \varepsilon [I]) \bar{N} = 0$$

ha de tenir una solució diferent de la trivial ($\bar{N} = 0$) i, perquè això sigui possible, el determinant del sistema s'ha d'anul·lar:

$$\det([\varepsilon] - \varepsilon [I]) = 0$$

Aquesta equació s'anomena *equació característica* i, desenvolupada, pren la forma següent:

$$-\varepsilon^3 + I_1' \varepsilon^2 - I_2' \varepsilon + I_3' = 0$$

on el primer membre és l'anomenat *polinomi característic*, ja que els seus coeficients són quantitats invariants davant de canvis de base.

Invariant lineal: $I_1' = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = t_r [\varepsilon]$

Invariant quadràtic: $I_2' = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)$

Invariant cúbic: $I_3' = \det [\varepsilon]$

Es pot demostrar que, pel fet de ser la matriu de $\bar{\varepsilon}$ simètrica, l'equació característica té sempre solucions reals. Aquestes solucions són les deformacions principals $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (el vector deformació coincideix amb el component intrínsec $\bar{\varepsilon}$). En termes matemàtics, són els valors propis de $[\varepsilon]$.

Els vectors associats al compliment d'aquesta condició seran els que satisfacin:

$$([\varepsilon] - \varepsilon_i [I]) \bar{N}_i = 0$$



Les direccions d'aquests vectors són les direccions principals de deformació; en termes matemàtics, són els vectors propis de $[\varepsilon]$, i es pot demostrar que són ortogonals entre si.

En efecte, si $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{N}_j^T ([\varepsilon] - \varepsilon_i [I]) \overline{N}_i = \overline{0} \\ \overline{N}_j^T ([\varepsilon] - \varepsilon_j [I]) \overline{N}_j = \overline{0} \end{array} \right\} \text{restando } (\varepsilon_i - \varepsilon_j) \overline{N}_j^T [I] \overline{N}_i = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \overline{N}_j \perp \overline{N}_i$$

Una vegada normalitzats i escollits els sentits apropiats per formar un triedre directe, es pot construir a partir d'ells la base ortonormal en què el tensor de deformació es diagonalitza. D'ara endavant, la base formada per les direccions principals es denotarà com a $(\overline{N}_{1^*}, \overline{N}_{2^*}, \overline{N}_{3^*})$. En aquesta base, el tensor de deformació és diagonal i adquireix la forma següent:

$$[\varepsilon]_{1^*, 2^*, 3^*} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

en què ε_1 , ε_2 , i ε_3 són les deformacions principals.

El problema físic plantejat és, per tant, des del punt de vista matemàtic, un simple problema de diagonalització de la matriu de l'endomorfisme definit per $[\varepsilon]$.

$$\overline{N} \in R^3 \xrightarrow{[\varepsilon]} \overline{d} \in R^3$$

Deformació volumètrica

Una altra mesura important de la deformació d'un medi continu la constitueix la **deformació volumètrica unitària** definida de la manera següent:

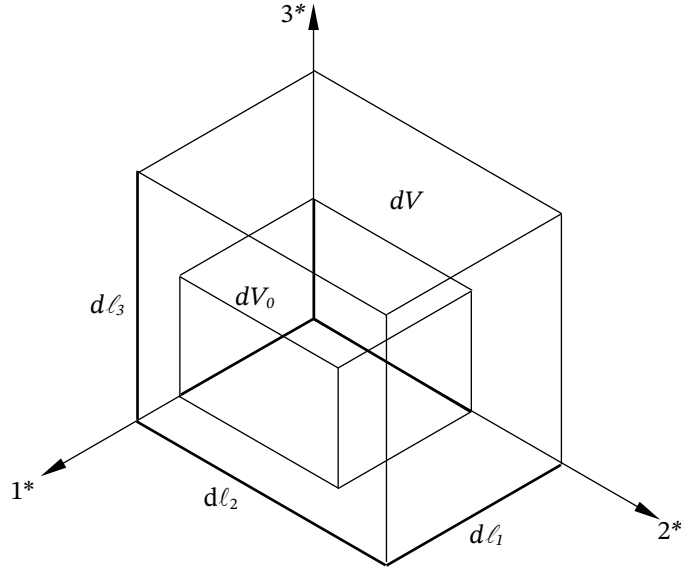
$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$$

Aquest paràmetre de l'estat de deformació és intrínsec al punt en què s'avalua i no depèn, per tant, de la base escollida per referir-hi el tensor. Per aquest motiu, i per simplificar el desenvolupament, es referirà el tensor als eixos principals.

Un element infinitesimal de volum amb cares paral·leles als eixos principals es deforma sense alterar-ne els angles, ja que en les direccions principals no es produeixen variacions angulars, pel fet de ser nuls els elements fora de la diagonal del tensor. Tal com



pot veure's en la figura, resulta immediat avaluar els volums abans i després de la deformació:



$$d\ell_1 = d\ell_{0_1} (1 + \varepsilon_1)$$

$$d\ell_2 = d\ell_{0_2} (1 + \varepsilon_2)$$

$$d\ell_3 = d\ell_{0_3} (1 + \varepsilon_3)$$

$$dV_0 = d\ell_{10} d\ell_{20} d\ell_{30}$$

$$dV = d\ell_1 d\ell_2 d\ell_3 = dV_0 (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)$$

Operant i eliminant infinitedsimos d'ordre superior, tenim:

$$dV = dV_0 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \Rightarrow \varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = t_r [\varepsilon] = \text{div } \bar{u}$$

d'on es dedueix que la deformació volumètrica és igual a la traça del tensor deformació (la independència d'aquest resultat de la base utilitzada és clara, ja que la traça és invariant davant de canvis de base).

S'arriba al mateix resultat avaluant el determinant de la matriu del tensor gradient de deformació si s'eliminen els infinitedsimos d'ordre superior:

$$\frac{dV}{dV_0} = \det [F] \approx 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = 1 + \varepsilon_V$$

(*) Tal com s'ha vist anteriorment, la primera igualtat és vàlida per a qualsevol tipus de transformació.

Descomposició del tensor deformació en tensor esfèric i desviador

Aprofitant aquest concepte, és possible descompondre el tensor deformació en dos tensors amb significats físics ben diferents. En efecte, el tensor deformació es pot escriure com a:



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_0 \end{bmatrix} = [\varepsilon_0] + [e]$$

$$\text{en què } \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_V}{3} = \frac{t_r [\varepsilon]}{3}$$

on el component diagonal s'anomena *part esfèrica del tensor* i té com a característica que la deformació que representa és purament volumètrica i de valor igual al del tensor de deformació complet (no hi ha distorsió de forma, en no alterar-se els angles en cap direcció, ja que, pel fet de ser les tres deformacions principals iguals, totes les direccions són direccions principals). Aquest tensor esfèric aïlla, per tant, la part de deformació deguda al canvi de volum.

El component no diagonal s'anomena *part desviadora* i té la característica de presentar una deformació volumètrica nul·la, és a dir, correspon a una deformació purament de canvi de forma. Aquest tensor desviador aïlla, per tant, la part de deformació deguda al canvi de forma.

Pel que fa als invariants de $[e]$ i la seva relació amb els invariants de $[\varepsilon]$, els invariants de $[e]$ compleixen les relacions següents:

$$\begin{aligned} J_1' &= 0 \\ J_2' &= I_2' - \frac{1}{3} I_1'^2 && \text{en que } I_1', I_2', I_3' \text{ són els invariants de } [\varepsilon] \\ J_3' &= I_3' - \frac{I_2' I_1'}{3} + 2 \frac{I_1'^3}{27} \end{aligned}$$

Relació entre els tensors $[\varepsilon]$ i $[D]$

En una transformació infinitesimal, les formulacions lagrangiana i euleriana es confonen, i en conseqüència és possible escriure:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{du_i}{dt} \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \approx \frac{d}{dt} \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

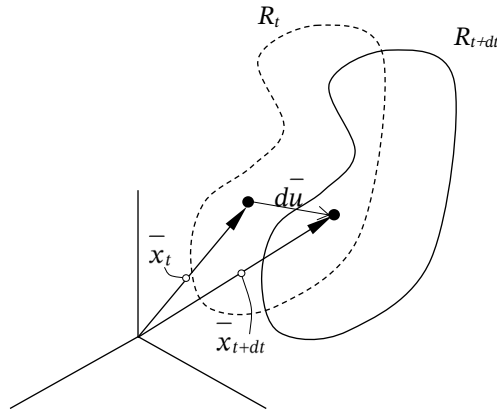
Per tant, en una transformació infinitesimal, els tensors de deformació i de velocitat de deformació es relacionen de la manera següent:

$$[\dot{\varepsilon}] = [D]$$



Tensor d'increments de deformació natural

En qualsevol transformació geomètrica del medi continu, finita o infinitesimal, és possible imaginar que el desplaçament total es genera com a suma d'increments de desplaçament de magnitud infinitesimal $\bar{d}\bar{u}$. Aleshores, cada increment de desplaçament defineix per ell mateix una transformació infinitesimal entre les configuracions del medi continu corresponents als instants t i $t + dt$.



En aquest cas, la configuració en l'instant t actua com a configuració inicial, mentre que la corresponent a l'instant $t + dt$ actua com a configuració final. És possible, aleshores, definir un increment de deformació infinitesimal entre totes dues configuracions, prenent com a camp de desplaçaments infinitesimals el definit per $\bar{d}\bar{u}$. El tensor de deformació resultant s'anomena *tensor d'increments de deformació natural* i, expressat en forma euleriana, és:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial du_i}{\partial x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial x_i} \right] ; [d\varepsilon] = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} & d\varepsilon_{12} & d\varepsilon_{13} \\ d\varepsilon_{12} & d\varepsilon_{22} & d\varepsilon_{23} \\ d\varepsilon_{13} & d\varepsilon_{23} & d\varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

A partir d'aquesta definició, és immediat comprovar que: $D_{ij} = d\varepsilon_{ij} dt$

En efecte:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{du_j}{dt} \right] = \frac{1}{dt} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial du_i}{\partial x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial x_i} \right] = \frac{1}{dt} d\varepsilon_{ij}$$

El tensor d'increments de deformació natural és molt útil en la descripció de fenòmens que depenen de la història cinemàtica de la transformació del medi.



Aquest tensor es pot descompondre en part esfèrica i part desviadora, corresponents a l'increment de deformació volumètrica i a l'increment de deformació distorsional respectivament:

$$[d\varepsilon] = [d\varepsilon_0] + [de]$$

Dividint els dos membres d'aquesta expressió per dt , s'obté:

$$\frac{1}{dt} [d\varepsilon] = [D] = \frac{1}{dt} [[d\varepsilon_0] + [de]]$$

que no és més que la descomposició del tensor velocitat de deformació en les seves parts esfèrica i desviadora:

$$\frac{1}{dt} [d\varepsilon_0] = [D_0] \quad \text{i} \quad \frac{1}{dt} [de] = [d]$$

D'aquest raonament es desprèn que la part esfèrica de la descomposició del tensor velocitat de deformació té el significat físic de velocitat de deformació volumètrica, mentre que la part desviadora el té de velocitat de deformació distorsional, o de canvi de forma. Aquesta descomposició del tensor velocitat de deformació i el seu significat físic és, per tant, vàlida per a qualsevol tipus de transformació.

D'això es deriva un altre resultat important. La velocitat de deformació volumètrica unitària:

$$\dot{\theta} = \frac{\left(\frac{D}{Dt} (dV) \right)}{dV} = \frac{d\varepsilon_V}{dt} = 3 \frac{d\varepsilon_0}{dt} = 3D_0$$

que es pot expressar per: $\frac{d\varepsilon_V}{dt} = \frac{\partial du_1}{\partial x_1 dt} + \frac{\partial du_2}{\partial x_2 dt} + \frac{\partial du_3}{\partial x_3 dt} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \text{div } \bar{v}$

i, en conseqüència, la derivada material del dV en cada instant és:

$$\frac{D}{Dt} (dV) = dV \text{div } \bar{v}$$

Integració del camp de desplaçaments

Les sis funcions que defineixen el tensor deformació no poden ser independents entre elles, ja que deriven de les tres úniques funcions u_1, u_2, u_3 que defineixen el camp de desplaçaments. En aquest apartat s'analitzen les interrelacions existents entre elles i es presenta el procediment per a la determinació del camp de desplaçaments.



Relacions de compatibilitat

Pel fet de ser, per hipòtesi, les funcions u_1, u_2, u_3 que defineixen el desplaçament contínues i derivables fins a qualsevol ordre, l'ordre de derivació no ha d'afectar el resultat, i per tant, podem establir relacions entre el components del tensor de deformació de la manera següent:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_1 \partial X_2^2} ; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial X_2 \partial X_1^2} ; \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_2^2 \partial X_1} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial X_1^2 \partial X_2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2}$$

De manera similar:

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial X_1 \partial X_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} \end{cases}$$

Unes altres tres relacions es poden construir de la manera següent:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_1 \partial X_2 \partial X_3} ; \quad 2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1 \partial X_3}$$

$$2 \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_3 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1 \partial X_2} ; \quad 2 \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_3 \partial X_1} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_2 \partial X_1}$$

Per procediments anàlegs s'arriba a les expressions següents:

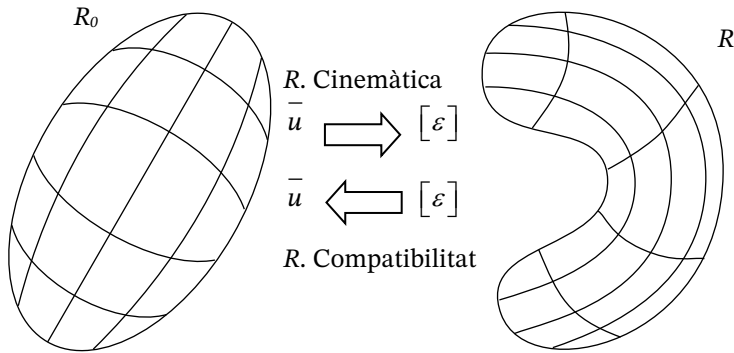
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} \right)$$

i de la mateixa manera s'obtenen:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_2} \left(+\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_3} \left(+\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} \right) \end{cases}$$

El significat físic d'aquestes relacions, anomenades *relacions de compatibilitat*, és que, a causa de la continuïtat de la transformació, els elements de volum contigus es deformen de manera compatible, és a dir, encaixen perfectament abans i després de la deformació, sense superposar-se ni deixar buits que creïn discontinuïtats.



El compliment de les condicions de compatibilitat garanteix l'existència de les funcions que defineixen el camp de desplaçaments, però no la seva unicitat. El tensor de deformació determina els desplaçaments relatius, però deixa el desplaçament total indeterminat en relació amb els moviments de translació i de rotació de sòlid rígid, ja que aquests no modifiquen l'estat de deformació.

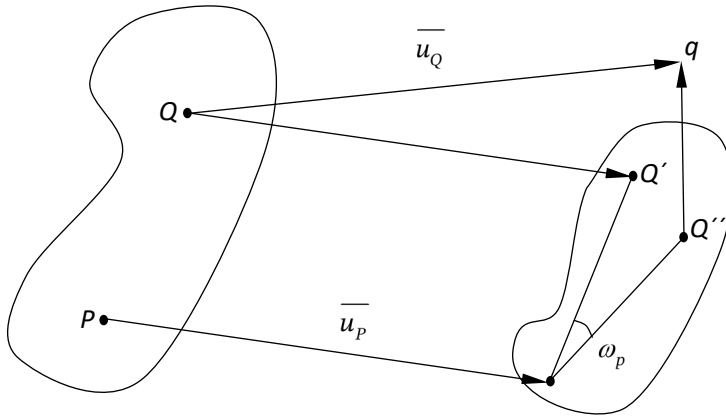
De manera anàloga, es poden escriure les equacions de compatibilitat per als components del tensor velocitat de deformació.

Procés d'integració del camp de desplaçaments

En moltes aplicacions pràctiques, la incògnita del problema cinemàtic plantejat és el vector desplaçament, en què les dades de partida són el tensor de deformació en cada punt del medi i el moviment de sòlid rígid associat a un dels seus punts (translació i rotació): $\bar{u}_p, \bar{\omega}_p$

Per a una geometria simplement connexa, el càlcul del camp de desplaçament s'efectua mitjançant una doble integració segons l'esquema següent:

1. S'escriuen les equacions diferencials de $\bar{d}\bar{\omega}$ en funció de $[\varepsilon]$. La integrabilitat queda garantida pel compliment de les condicions de compatibilitat, que coincideixen amb les d'integrabilitat en un recinte simplement connex. El coneixement de la rotació de sòlid rígid del punt de referència s'utilitza com a condició de contorn en aquesta primera integració.
2. S'escriuen les equacions diferencials de $\bar{d}\bar{u}$ en funció dels components de $[\varepsilon]$ i de les rotacions. El coneixement de la translació de sòlid rígid del punt de referència s'utilitza com a condició de contorn en aquesta segona integració.



NOTA: El procediment es pot aplicar a un recinte múltiplement connex dividint-lo en parts simplement connexes i obligant la compatibilitat de desplaçaments a les fronteres entre les parts.

2.9. Transformacions finites

L'estudi de les transformacions infinitesimals té moltes aplicacions pràctiques i és la base de la mecànica lineal del medi sòlid deformable. No obstant això, hi ha una gran quantitat d'aplicacions en què les hipòtesis efectuades abans per a aquesta mena de transformacions ja no són admissibles, totalment o parcialment. Per resoldre aquests problemes, s'ha desenvolupat la teoria de les transformacions finites, en què no és necessari admetre cap hipòtesi a part de les pròpies de la idealització del continu.

Els problemes que impliquen transformacions finites es poden agrupar en tres famílies:

- Problemes en què intervenen el temps i el camí seguit per arribar de la configuració inicial a la final. Per exemple, la deformació viscoplàstica de materials sòlids.
- Problemes en què el temps no intervé en la física del problema, però en què el camí seguit per arribar de la configuració inicial a la final sí que és important. Per exemple, els problemes de la deformació plàstica de materials sòlids.
- Problemes en què solament intervenen les configuracions inicial i final. Per exemple, problemes de grans deformacions en components hiperelàstics o problemes en què hi ha rotacions de sòlid rígid no infinitesimals entre dues configuracions.

Els problemes dels tipus a) i b) han de ser resolts de manera incremental, considerant una successió contínua de transformacions infinitesimals entre configuracions consecutives, i no són objecte d'aquest capítol, que se centrarà en el tipus de mesura de deformació més característic del tercer tipus de problemes.



2.9.1. La ràtio d'extensió

En contraposició a la definició de sòlid rígida que dona la mecànica racional, es defineix el sòlid deformable com aquell que no manté fixa la distància entre els seus punts. Per tant, una mesura natural de la deformació del sòlid s'obté comparant la longitud dels vectors $d\bar{X}$ i $d\bar{x}$, abans i després de la deformació, respectivament, a través de l'anomenada *ràtio d'extensió*, definida de la manera següent:

Siguin:

$$d\bar{X} = d\ell_0 \times \bar{N} \quad \text{amb } d\ell_0 = \|d\bar{X}\| \text{ i } \bar{N}, \text{ el versor en la direcció de } d\bar{X}$$

$$d\bar{x} = d\ell \times \bar{n} \quad \text{amb } d\ell = \|d\bar{x}\| \text{ i } \bar{n}, \text{ el versor en la direcció de } d\bar{x}$$

Aleshores es defineix la ràtio d'extensió com el quocient:

$$\lambda = d\ell/d\ell_0$$

Si expressem els productes escalars de tots dos vectors per si mateixos abans i després de la deformació i establim el seu quocient, obtenim el quadrat de la ràtio d'extensió:

$$\frac{d\bar{x} \times d\bar{x}}{d\bar{X} \times d\bar{X}} = \frac{d\ell^2}{d\ell_0^2} = \lambda^2$$

Hi ha materials, com el cautxú, que poden arribar a presentar ràtios d'extensió de 4 o 5, mentre que uns altres, com per exemple els materials metàl·lics en règim elàstic, presenten variacions de longitud inferiors a l'1%. D'altra banda, la ràtio d'extensió no s'anul·la quan no hi ha deformació, sinó que aleshores pren un valor unitari. Aquests i altres motius fan que sovint la ràtio d'extensió no sigui una mesura de deformació apropiada, per la qual cosa s'usen també definicions alternatives per mesurar la deformació, depenent de la naturalesa del problema a tractar. Qualsevol funció monòtona creixent de la ràtio d'extensió $\varepsilon = f(\lambda)$ pot ser utilitzada com a mesura alternativa de la deformació experimentada pel sòlid. A continuació se'n presenten algunes.

Deformació de Biot:

Es defineix com a
$$\varepsilon = \frac{d\ell - d\ell_0}{d\ell_0} = \lambda - 1$$

Aquesta mesura de deformació és la utilitzada anteriorment per a l'anàlisi de problemes linealitzats. Fora d'aquest context, la seva utilització esdevé complexa.

Deformació de Green:

Es defineix com a
$$\varepsilon_g = \frac{d\ell^2 - d\ell_0^2}{2d\ell_0^2} = 1/2(\lambda^2 - 1)$$



Aquesta mesura de deformació s'utilitza en problemes que impliquen transformacions geomètriques importants (finites) però que poden ser tractades sense parar atenció a les situacions intermèdies.

Deformació logarítmica:

Es defineix com a:

$$\varepsilon_L = \int_{\ell_0}^{\ell} d\ell/\ell = \text{Ln}(\lambda)$$

Aquesta mesura de deformació s'utilitza en problemes que impliquen transformacions geomètriques importants (finites) que per la seva naturalesa han de ser tractades de manera incremental.

Quan les deformacions són petites, aquestes tres definicions condueixen a valors semblants.

2.9.2. El tensor deformació de Cauchy-Green (Iagrangià)

Expressant ara $d\bar{x}$ en funció de $d\bar{X}$ a través de la matriu gradient de deformació, obtenim:

$$d\ell^2 = d\bar{x}^T \times d\bar{x} = ([F] d\bar{X})^T ([F] d\bar{X}) = d\bar{X} [F]^T [F] d\bar{X} = d\ell_0^2 \bar{N}^T [F]^T [F] \bar{N}$$

I, dividint tots dos membres per $d\ell_0^2$ obtenim l'expressió general del quadrat de la ràtio d'extensió en qualsevol direcció al voltant d'un punt en funció del versor en la direcció d'estudi, referida a la geometria inicial, i de l'anomenat *tensor deformació de Cauchy-Green*, [C].

$$[C] = [F]^T [F] \quad (d\ell/d\ell_0)^2 = \lambda^2 = \bar{N}^T [C] \bar{N}$$

[C] és un tensor simètric de segon ordre els components del qual, en funció de les derivades dels components del vector desplaçament, són:

$$\begin{aligned} C_{11} &= (1 + \partial u_1 / \partial X_1)^2 + (\partial u_2 / \partial X_1)^2 + (\partial u_3 / \partial X_1)^2 \\ C_{22} &= (1 + \partial u_2 / \partial X_2)^2 + (\partial u_3 / \partial X_2)^2 + (\partial u_1 / \partial X_2)^2 \\ C_{33} &= (1 + \partial u_3 / \partial X_3)^2 + (\partial u_1 / \partial X_3)^2 + (\partial u_2 / \partial X_3)^2 \end{aligned}$$

$$C_{12} = (1 + \partial u_1 / \partial X_1) \times \partial u_1 / \partial X_2 + \partial u_2 / \partial X_1 \times (1 + \partial u_2 / \partial X_2) + \partial u_3 / \partial X_1 \times \partial u_3 / \partial X_2$$

$$C_{23} = (1 + \partial u_2 / \partial X_2) \times \partial u_2 / \partial X_3 + \partial u_3 / \partial X_2 \times (1 + \partial u_3 / \partial X_3) + \partial u_1 / \partial X_2 \times \partial u_1 / \partial X_3$$

$$C_{13} = (1 + \partial u_3 / \partial X_3) \times \partial u_3 / \partial X_1 + \partial u_1 / \partial X_3 \times (1 + \partial u_1 / \partial X_1) + \partial u_2 / \partial X_3 \times \partial u_2 / \partial X_1$$



Quan el tensor $[C]$ és igual al tensor identitat en tot el sòlid, tot vector $d\bar{X}$ conserva el seu mòdul. La ràtio d'extensió és igual a la unitat i, per tant, no hi ha deformació. Es tracta, doncs, d'una transformació de sòlid rígid.

2.9.3. El tensor de deformacions finites lagrangiana

El tensor de deformació de Cauchy-Green es pot expressar de la manera següent:

$$[C] = [I] + 2[E] \quad [E] = \frac{1}{2}([C] - [I])$$

on $[E]$ és també un tensor simètric de segon ordre anomenat *tensor de deformacions finites lagrangiana* (o *de Green*), els components del qual, en funció de les derivades del vector desplaçament, són:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \partial u_1 / \partial X_1 + \frac{1}{2} \left[(\partial u_1 / \partial X_1)^2 + (\partial u_2 / \partial X_1)^2 + (\partial u_3 / \partial X_1)^2 \right] \\ E_{22} &= \partial u_2 / \partial X_2 + \frac{1}{2} \left[(\partial u_2 / \partial X_2)^2 + (\partial u_3 / \partial X_2)^2 + (\partial u_1 / \partial X_2)^2 \right] \\ E_{33} &= \partial u_3 / \partial X_3 + \frac{1}{2} \left[(\partial u_3 / \partial X_3)^2 + (\partial u_1 / \partial X_3)^2 + (\partial u_2 / \partial X_3)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{12} &= \frac{1}{2} \left[\partial u_1 / \partial X_2 + \partial u_2 / \partial X_1 + (\partial u_1 / \partial X_1 \times \partial u_1 / \partial X_2 + \partial u_2 / \partial X_1 \times \partial u_2 / \partial X_2 + \partial u_3 / \partial X_1 \times \partial u_3 / \partial X_2) \right] \\ E_{23} &= \frac{1}{2} \left[\partial u_2 / \partial X_3 + \partial u_3 / \partial X_2 + (\partial u_2 / \partial X_2 \times \partial u_2 / \partial X_3 + \partial u_3 / \partial X_2 \times \partial u_3 / \partial X_3 + \partial u_1 / \partial X_2 \times \partial u_1 / \partial X_3) \right] \\ E_{13} &= \frac{1}{2} \left[\partial u_3 / \partial X_1 + \partial u_1 / \partial X_3 + (\partial u_3 / \partial X_3 \times \partial u_3 / \partial X_1 + \partial u_1 / \partial X_3 \times \partial u_1 / \partial X_1 + \partial u_2 / \partial X_3 \times \partial u_2 / \partial X_1) \right] \end{aligned}$$

Quan el tensor $[E]$ és nul en tot el sòlid, no hi ha deformació i la ràtio d'extensió és igual a la unitat. Es tracta, doncs, d'una transformació de sòlid rígid.

2.9.4. Deformació longitudinal unitària de Green

El tensor de deformació de Green permet calcular la deformació existent en un punt i en una direcció, referida a la configuració inicial, de la manera següent:

$$d\ell^2 = d\ell_0^2 \bar{N}^T ([I] + 2[E]) \bar{N} = d\ell_0^2 \left(1 + \bar{N}^T 2[E] \bar{N} \right)$$

$$\bar{N}^T [E] \bar{N} = \frac{d\ell^2 - d\ell_0^2}{2d\ell_0^2} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$$



2.9.5. Deformació longitudinal unitària de Biot

La mesura de deformació més utilitzada en enginyeria és la deformació de Biot definida com a:

$$\varepsilon = \frac{d\ell^2 - d\ell_0^2}{d\ell_0^2} = \lambda - 1$$

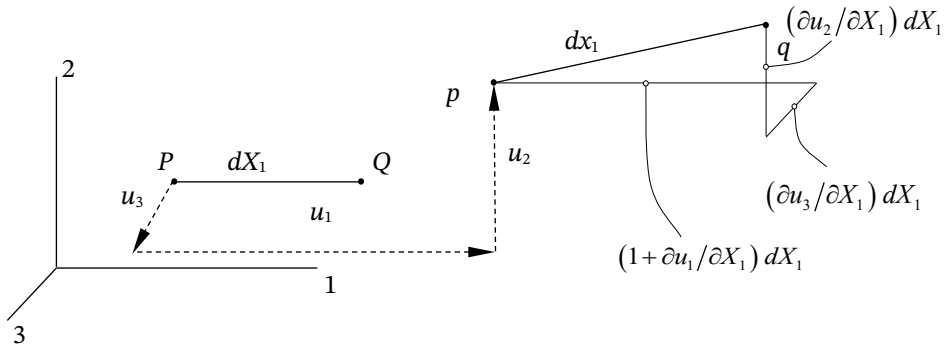
La deformació de Biot es pot calcular a partir dels tensors de deformació de Cauchy-Green i de Green de la manera següent:

$$\varepsilon = \sqrt{\bar{N}^T [C] \bar{N}} - 1 = \sqrt{2\bar{N}^T [E] \bar{N}} + 1 - 1$$

Així doncs, les deformacions longitudinals unitàries de Biot en les direccions dels eixos de referència són, aplicant aquesta expressió als versors en les direccions dels eixos de referència:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \sqrt{1 + 2\partial u_1 / \partial X_1 + (\partial u_1 / \partial X_1)^2 + (\partial u_2 / \partial X_1)^2 + (\partial u_3 / \partial X_1)^2} - 1 \\ \varepsilon_{22} &= \sqrt{1 + 2\partial u_2 / \partial X_2 + (\partial u_2 / \partial X_2)^2 + (\partial u_3 / \partial X_2)^2 + (\partial u_1 / \partial X_2)^2} - 1 \\ \varepsilon_{33} &= \sqrt{1 + 2\partial u_3 / \partial X_3 + (\partial u_3 / \partial X_3)^2 + (\partial u_1 / \partial X_3)^2 + (\partial u_2 / \partial X_3)^2} - 1 \end{aligned}$$

Aquestes expressions es poden interpretar físicament a partir de la figura següent, tracada per al cas de ε_{11} :



Aïllant ε_{11} en aquesta última expressió, obtenim:

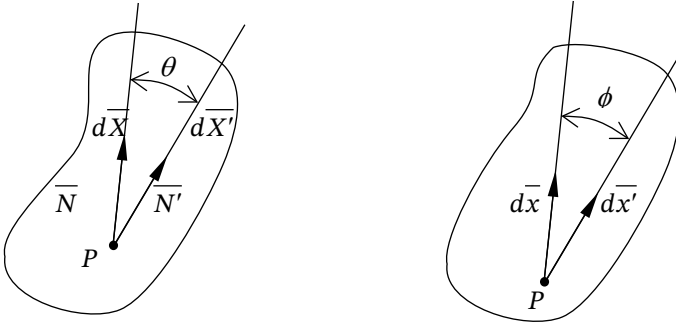
$$dx_1 = (1 + \varepsilon_{11}) dX_1 \Rightarrow (1 + \varepsilon_{11})^2 dX_1^2 = dx_1^2 = \left[\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] dX_1^2$$

$$\varepsilon_{11} = \sqrt{1 + 2\partial u_1 / \partial X_1 + (\partial u_1 / \partial X_1)^2 + (\partial u_2 / \partial X_1)^2 + (\partial u_3 / \partial X_1)^2} - 1$$



2.9.6. Deformacions angulars

Quan un sòlid es deforma, l'angle format per dues direccions arbitràries abans de la deformació pot variar després de la deformació. Per establir una mesura d'aquesta variació, n'hi ha prou d'expressar el producte escalar de dos vectors infinitesimals $d\bar{X}$ i $d\bar{X}'$ en les direccions d'estudi definides pels versors \bar{N} i \bar{N}' abans de la deformació, amb el dels seus transformats $d\bar{x}$ i $d\bar{x}'$. Aquests vectors sofriran una deformació longitudinal unitària ε i ε' , respectivament. Amb això, els productes escalars abans i després de la deformació estaran relacionats de la manera següent:



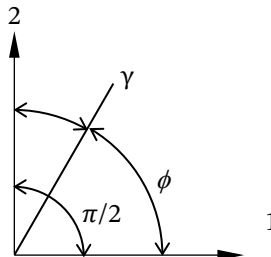
$$d\bar{X}'^T \times d\bar{X} = d\ell_0 d\ell'_0 \cos(\theta) = d\ell_0 d\ell'_0 \bar{N}^T [I] \bar{N}'$$

$$d\bar{x}'^T \times d\bar{x} = d\ell d\ell' \cos(\phi) = (1+\varepsilon)(1+\varepsilon') d\ell_0 d\ell'_0 \cos(\phi) = d\ell_0 d\ell'_0 \bar{N}^T [C] \bar{N}'$$

$$\text{d'on: } \cos(\theta) = \bar{N}^T [I] \bar{N}' \quad \text{i} \quad \cos(\phi) = \frac{\bar{N}^T [C] \bar{N}'}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon')}$$

on θ i ϕ són els angles formats pels dos vectors abans i després de la deformació respectivament.

Les variacions angulars dels eixos de referència es poden calcular a partir d'aquest resultat, prenent com a versors els dirigits segons els eixos de referència, de la manera següent:





De la figura es dedueix que $\gamma = \pi/2 - f$ i, en conseqüència,

$$\text{sen}(\gamma) = \text{sen}(\pi/2 - f) = \cos(f)$$

Per tant:

$$\gamma_{12} = \arcsen\left(\frac{\partial u_1/\partial X_2 + \partial u_2/\partial X_1 + \theta_{12}}{(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})}\right)$$

on $\theta_{12} = \partial u_1/\partial X_1 \times \partial u_1/\partial X_2 + \partial u_2/\partial X_1 \times \partial u_2/\partial X_2 + \partial u_3/\partial X_1 \times \partial u_3/\partial X_2$

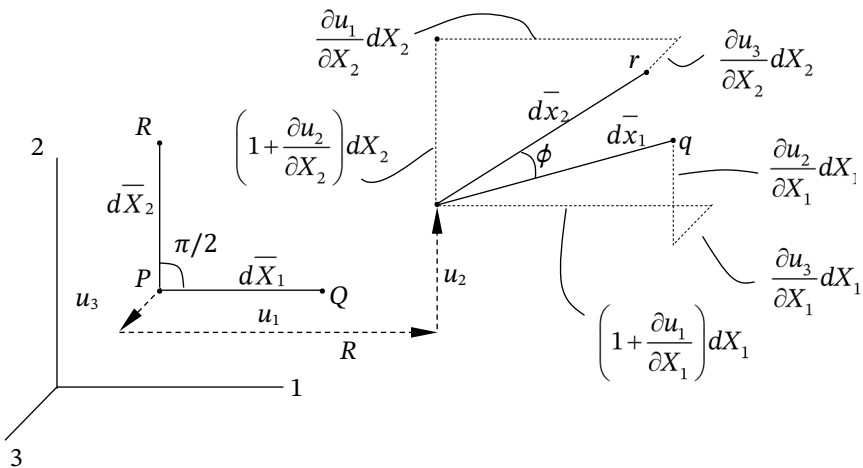
$$\gamma_{23} = \arcsen\left(\frac{\partial u_2/\partial X_3 + \partial u_3/\partial X_2 + \theta_{23}}{(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33})}\right)$$

on $\theta_{23} = \partial u_2/\partial X_2 \times \partial u_2/\partial X_3 + \partial u_3/\partial X_2 \times \partial u_3/\partial X_3 + \partial u_1/\partial X_2 \times \partial u_1/\partial X_3$

$$\gamma_{13} = \arcsen\left(\frac{\partial u_3/\partial X_1 + \partial u_1/\partial X_3 + \theta_{13}}{(1 + \varepsilon_{33})(1 + \varepsilon_{11})}\right)$$

on $\theta_{13} = \partial u_3/\partial X_3 \times \partial u_3/\partial X_1 + \partial u_1/\partial X_3 \times \partial u_1/\partial X_1 + \partial u_2/\partial X_3 \times \partial u_2/\partial X_1$

Aquestes expressions es poden justificar físicament a partir de la figura següent, traçada per al cas de la variació angular dels eixos 1, 2:





$$dx_1 dx_2 \cos \phi = \left[\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) dX_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} dX_2 \right) + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) dX_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} dX_1 \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} dX_1 \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} dX_2 \right) \right] = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = \text{sen} \gamma_{12}$$

Passant dx_1 i dx_2 a l'altre membre i tenint en compte que:

$$\frac{dX_1}{dx_1} = \frac{dX_1}{(1 + \varepsilon_{11}) dX_1} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}}$$

$$\frac{dX_2}{dx_2} = \frac{dX_2}{(1 + \varepsilon_{22}) dX_2} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{22}}$$

queda:

$$\gamma_{12} = \arcsen \left(\frac{\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2}}{(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})} \right)$$

2.9.7. Hipòtesis simplificatives

En el desenvolupament fet fins ara no s'ha introduït cap hipòtesi sobre la petitesa dels desplaçaments, les rotacions o les deformacions, per la qual cosa els resultats obtinguts són aplicables a qualsevol situació de deformació finita, amb l'única suposició que la longitud del segment de referència és infinitament petita. No obstant això, hi ha moltes situacions pràctiques en què és possible elaborar certes hipòtesis simplificatives.

Deformacions petites

Per exemple, si les deformacions són petites, la deformació de Green és aproximadament igual a la deformació de Biot. En efecte:

$$\frac{d\ell^2 - d\ell_0^2}{2 d\ell_0^2} = \frac{(1 + \varepsilon)^2 d\ell_0^2 - d\ell_0^2}{2 d\ell_0^2} = \frac{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon - 1}{2} \approx \varepsilon$$

i, d'altra banda: $\text{sen}(\gamma) \approx \gamma$

En aquestes condicions, els elements de la diagonal del tensor de Green són les deformacions longitudinals unitàries en les direccions dels eixos de referència, mentre que els elements fora de la diagonal són el doble de les variacions angulars d'aquests eixos.



Rotacions petites. El tensor de deformació lineal de Lagrange

Si a aquesta hipòtesi s'hi afegeix la que estableix que les derivades dels desplaçaments són prou petites per ser considerades infinitesimals de primer ordre, és possible prescindir de tots els productes i quadrats d'aquestes derivades, amb què s'obté el tensor de deformació lineal de Lagrange $[\varepsilon]$, introduït anteriorment per a l'anàlisi de deformacions en transformacions infinitesimals, els components de les quals són:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \varepsilon_{12} &= \frac{\gamma_{12}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \varepsilon_{23} &= \frac{\gamma_{23}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} & \varepsilon_{13} &= \frac{\gamma_{13}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)\end{aligned}$$

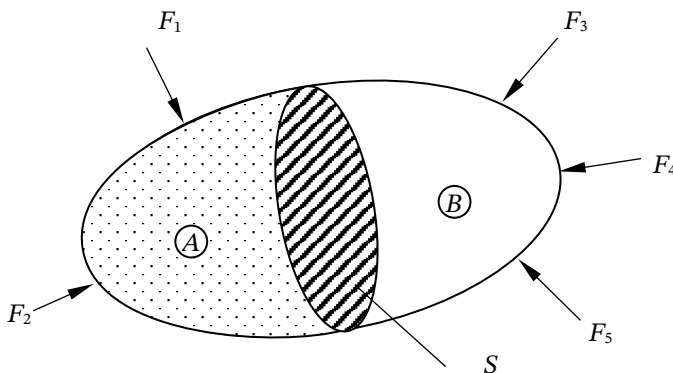
3.1. Introducció

Tal com s'ha explicat en el capítol 1, les forces aplicades a un medi continu es transmeten a través d'ell en forma de forces d'interacció entre partícules. Aquestes forces d'interacció es caracteritzen a nivell macroscòpic de manera intensiva a partir de la força transmesa per unitat d'àrea a través de qualsevol superfície imaginària interior al medi. Aquesta mena de força intensiva interior s'anomena *tensió* \bar{t} . El postulat d'Euler-Cauchy admet que les tensions definides així són suficients per establir les lleis de la dinàmica per a qualsevol subdivisió arbitrària del medi continu.

En aquest capítol es fa una anàlisi detallada del concepte de tensió o, de manera més general, de l'estat de tensió en un medi continu.

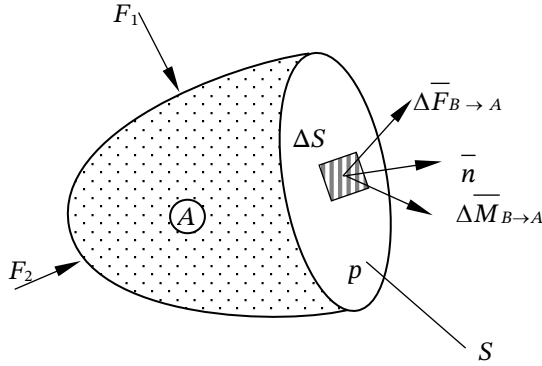
3.2. El vector tensió

Les accions internes es transmeten a través de qualsevol secció interior imaginària del medi continu. Així, per exemple, si el medi de la figura, en la seva configuració actual, es divideix en dues parts *A* i *B* per una secció plana arbitrària *S*, la part *A* estarà sota l'efecte de les accions directes i les accions internes que es transmeten a través de *S*.

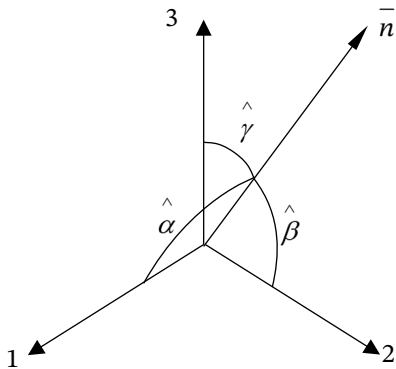




Aquestes accions internes s'han de matematitzar, ara, dins del context de la mecànica del medi continu. Per fer-ho, considerem un element de superfície S en un punt interior p situat sobre el pla de tall S .



L'orientació d'aquest element de superfície en la configuració actual del medi s'efectua, per conveni, assignant-li un versor \bar{n} perpendicular al mateix element i dirigit segons la normal exterior al material de la part de medi continu considerada, en aquest cas la part A . Els components del versor esmentat (n_1, n_2, n_3) són els cosinus directors associats a la seva direcció:



$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} \cos \hat{\alpha} \\ \cos \hat{\beta} \\ \cos \hat{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

A través d'aquest element de superfície es transmet una força $\Delta \bar{F}$ i un moment $\Delta \bar{M}$, resultant de la interacció entre les partícules a un costat i l'altre de ΔS . El principi de tensió de Cauchy estableix que, en tendir la superfície ΔS a zero, es compleix que:

el límit $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta S} = \frac{d\bar{F}}{dS} = \bar{t}(\bar{n})$ existeix i és finit (a)

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{M}}{\Delta S} = \bar{0} \quad (\text{b})$$

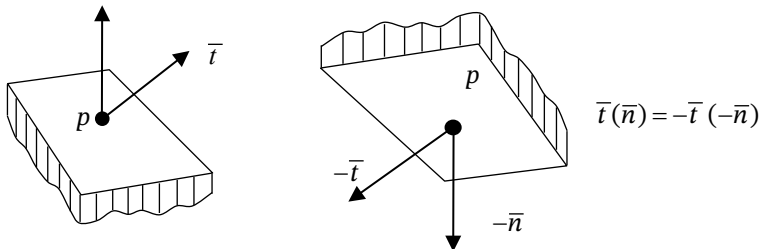
L'expressió (a) defineix el concepte de vector tensió \bar{t} de manera semblant a com es definia el concepte de força de superfície, solament que en aquest cas es tracta de força sobre una secció interior imaginària.

El vector tensió definit així representa la força per unitat de superfície que la part B fa sobre la part A en el punt O, a través de l'element infinitesimal de superfície dS orientat per \bar{n} .

NOTA: És important insistir que l'element infinitesimal de superfície implicat en la definició de \bar{t} correspon a la geometria actual del medi i no a la seva geometria inicial. Aquesta distinció pot resultar important quan la variació de la geometria entre la configuració inicial i la configuració actual sigui significativa.

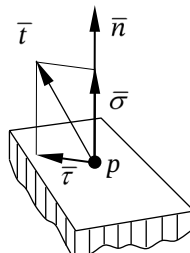
Si en lloc de considerar les accions de la part B sobre la part A en el punt p es consideren les de la part A sobre la part B, n'hi ha prou de definir en aquest punt un dS , orientat per $-\bar{n}$, a través del qual es transmet la força per unitat de superfície que A fa sobre B. Noteu que el dS vist des de A o vist des de B és el mateix, però la seva orientació és contrària, ja que aquesta sempre es defineix segons la normal exterior al \bar{n} material.

Aplicant el principi d'acció i reacció es dedueix una propietat important del vector tensió:



3.3. Components intrínsecs del vector tensió

El vector tensió es pot descompondre de manera natural en dos components intrínsecs, un corresponent a la seva projecció sobre la direcció del versor i l'altre corresponent a la seva projecció sobre el pla perpendicular a aquest. El primer s'anomena *tensió normal* $\bar{\sigma}$, i el segon, *tensió tangencial*, o tallant $\bar{\tau}$.

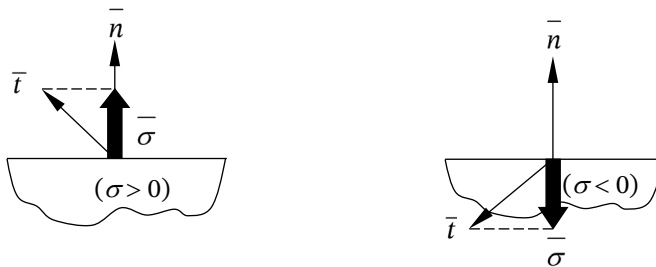




Aquesta descomposició té una gran importància física, ja que el paper que juguen tots dos components intrínsecs en la mecànica del medi continu és essencialment diferent.

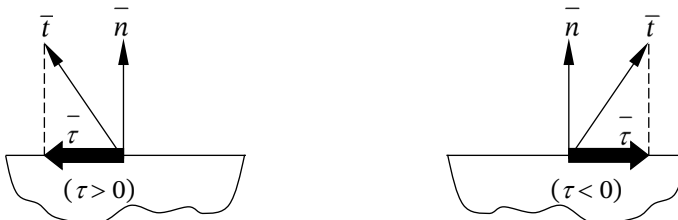
La tensió normal és aquella que tendeix a ajuntar o a separar dos plans contigus dins del material. En el primer cas, es diu que és de compressió, i en el segon, que és de tracció.

El conveni de signes acceptat és el de considerar les traccions positives i les compressions negatives, segons es mostra en la figura següent:



Les tensions normals de tracció són les responsables de la descohesió interna dels materials sòlids. Quan aquestes superen un cert valor límit, que depèn de les característiques del material, es produeix el fenomen del trencament fràgil. Per aquest motiu, en els sòlids les tensions normals de tracció són en general més perilloses que les de compressió, ja que, contràriament a les primeres, tendeixen a compactar el material. Els líquids i els gasos en repòs no admeten tensions normals de tracció, sinó solament de compressió, concepte que es correspon amb el de pressió a l'interior d'un fluid, encara que per simplicitat en aquest cas se sol definir la pressió com a positiva.

Les tensions tallants tendeixen a fer lliscar plans contigus a l'interior del material. Aquí el conveni de signes és purament operatiu, ja que el fenomen de lliscament no presenta la "polaritat abans esmentada per a les tensions normals. S'accepta com a criteri el que es mostra en la figura següent, en què el pla del paper correspon al definit per \bar{n} i \bar{t} , i el signe correspon al del gir, des de \bar{n} cap a \bar{t} considerant la normal positiva a aquest pla orientada cap al lector.



Les tensions tallants són les responsables dels fenòmens de lliscament intern en el material. En els medis sòlids, i si la tensió tallant supera uns certs valors límit característics



per a cada material, aquest lliscament condueix primer a deformacions permanents i posteriorment a la fractura dúctil. En els fluids viscosos, les tensions tallants estan associades amb els gradients espacials de velocitat.

Es defineix la tensió normal σ com el producte escalar de \vec{t} per \vec{n} . El signe resultant és consistent amb el signe atribuït a σ en funció de la seva naturalesa física (tracció +, compressió -).

$$\sigma = \vec{t} \cdot \vec{n}$$

El vector tensió i els seus components intrínsecs guarden les relacions matemàtiques següents:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma \vec{n} \\ \vec{t} &= \sigma \vec{n} + \vec{\tau} \\ t^2 &= \sigma^2 + \tau^2 \\ \vec{\tau} &= \vec{n} \wedge (\vec{t} \wedge \vec{n})\end{aligned}$$

3.4. El tensor tensió

El concepte de vector tensió, encara que fonamental des d'un punt de vista físic, constitueix una mala descripció de l'estat de tensió existent en un punt interior d'un medi continu. Això és així perquè el vector tensió està associat a un element infinitesimal de superfície orientat per un versor \vec{n} , i existeix un nombre infinit de tals elements infinitesimals de superfície en cada punt, i, per tant, també un nombre infinit de vectors tensió.

De fet, l'estat de tensió en un punt p solament queda definit totalment si es coneix la infinitat de valors possibles de \vec{t} en funció de \vec{n} , d'una manera anàloga al que succeeix amb l'estat de deformació. Aquest problema es pot resoldre convenientment si es defineix l'estat de tensió d'una manera alternativa a partir de la relació existent entre \vec{n} i \vec{t} , i no a partir dels seus valors concrets.

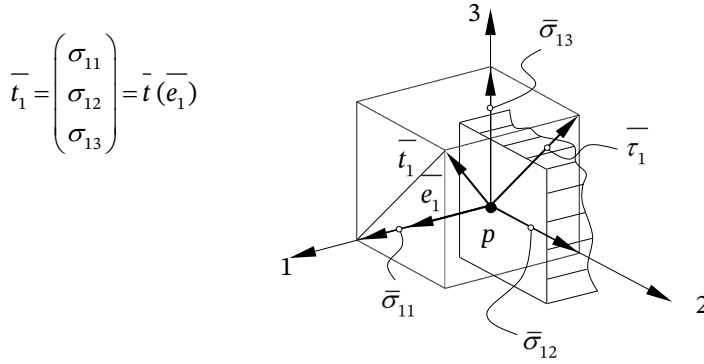
3.4.1. Expressió matemàtica del tensor tensió

A continuació, es mostra com tal relació queda definida totalment si es coneixen tres vectors tensió actuants sobre tres elements infinitesimals de superfície. Per comoditat, s'escullen tres elements infinitesimals amb els seus versors orientats formant una base ortonormal.

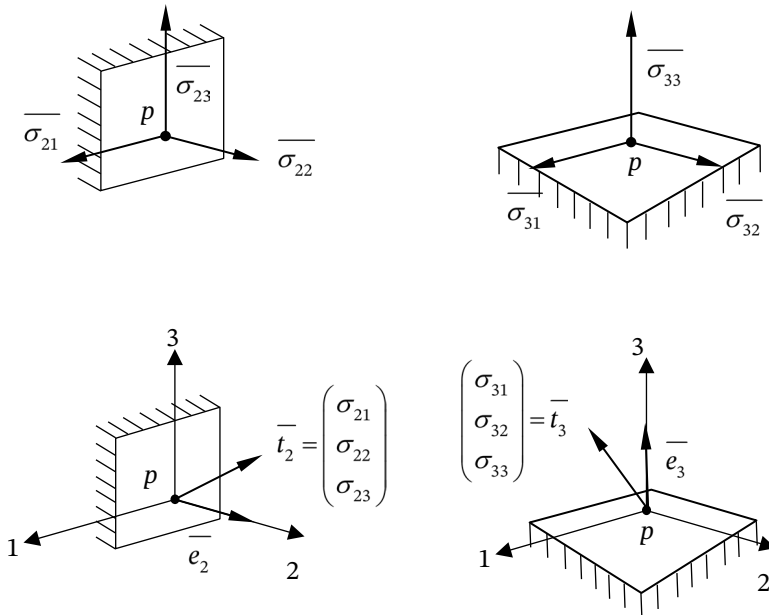
En efecte, anomenem \vec{e}_1, \vec{e}_2 i \vec{e}_3 els versors que orienten elements infinitesimals de superfície perpendiculars als eixos 1, 2, 3, respectivament. Siguin \vec{t}_1, \vec{t}_2 i \vec{t}_3 els vectors tensió que actuen sobre ells: en els eixos 1, 2, 3 cada vector tensió tindrà tres components.



Així, per exemple, \bar{t}_1 es projecta sobre l'eix 1 i dona lloc a un component $\bar{\sigma}_{11}$ que es correspon amb el concepte de tensió normal, per tractar-se de la projecció de \bar{t}_1 sobre el versor normal a l'element infinitesimal de superfície sobre el qual actua. D'altra banda, \bar{t}_1 es projecta també sobre el pla 12 i dona lloc al component de tensió tallant. Aquesta, al seu torn, es projecta sobre els eixos 2 i 3 de la base i dona lloc als components $\bar{\sigma}_{12}$ i $\bar{\sigma}_{13}$, respectivament, que són els dos components de la tensió tallant sobre aquest pla.



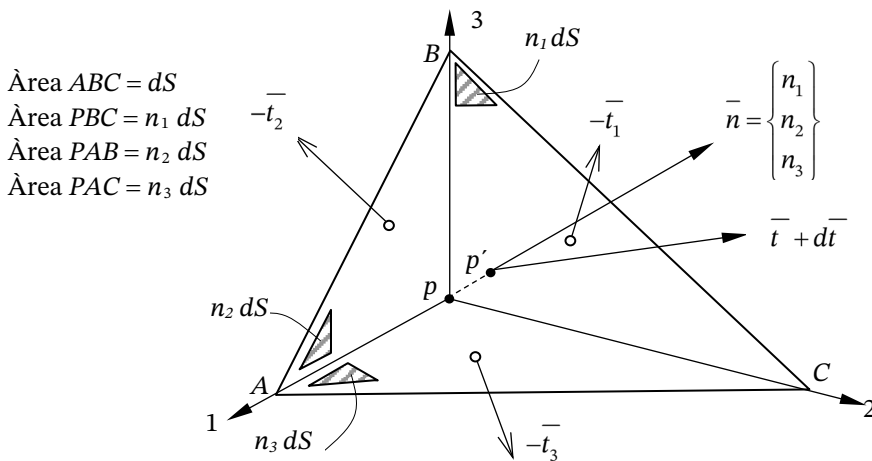
El mateix raonament s'aplica a \bar{t}_2 i a \bar{t}_3 . Cadascun d'aquests vectors tensió es projecta sobre els versors de la base i dona lloc a un component de tensió normal i dos components de tensió tallant, tal com es mostra en les figures següents:





Vegem a continuació com és possible expressar el vector tensió que actua en un pla orientat de manera arbitrària respecte als eixos 1, 2, 3 en funció de \bar{t}_1 , \bar{t}_2 i \bar{t}_3 , sense considerar altra cosa que el principi de la quantitat de moviment (segona llei de Newton) sobre un element de volum infinitesimal definit de la manera següent.

Suposem en un punt p d'estudi un dS orientat de manera arbitrària a través del seu corresponent versor \bar{n} . Sobre l'esmentat dS actua un cert vector tensió \bar{t} que es desitja expressar en funció de \bar{t}_1 , \bar{t}_2 i \bar{t}_3 . Per fer-ho ens imaginem un pla paral·lel a dS desplaçat de p una distància infinitesimal fins al punt p' . Aquest pla s'intersecta amb els plans coordenats formant un tetraedre material $ABCP$ de magnitud infinitesimal.



Sobre la cara ABC d'aquest tetraedre actuarà un vector tensió, que se suposarà que és uniforme sobre ella per tractar-se d'un triangle infinitesimal. De la mateixa manera, sobre les cares contingudes en els plans coordenats actuaran $-\bar{t}_1$, $-\bar{t}_2$ i $-\bar{t}_3$, respectivament, ja que la normal exterior a cadascuna d'aquestes cares està dirigida segons el sentit negatiu dels eixos.

NOTA: Cal recordar que, per exemple, \bar{t}_1 segons s'ha definit anteriorment, actua en un dS orientat en la direcció positiva de l'eix 1; en conseqüència, i aplicant la propietat del vector tensió que $\bar{t}(\bar{n}) = -\bar{t}(-\bar{n})$, si el versor s'orienta en el sentit negatiu de l'eix 1, actuarà sobre ell $-\bar{t}_1$. El mateix succeeix amb \bar{t}_2 i amb \bar{t}_3 .

En virtut del postulat d'Euler-Cauchy, la segona llei de Newton pot ser aplicada al tetraedre infinitesimal, avaluant les forces actuants sobre les seves cares a partir de les tensions, i solament d'aquestes, pel fet de tractar-se d'un element de material totalment interior. Per tant, les forces exteriors al tetraedre són:



- Forces sobre les cares, conseqüència de les tensions internes transmeses a través de cadascuna d'aquestes. El seu valor és igual al producte del vector tensió corresponent a cada cara per la seva àrea.
- Forces de volum, iguals al producte de la força unitària pel volum del tetraedre.

En virtut de la segona llei de Newton:

$$-\bar{t}_1 n_1 dS - \bar{t}_2 n_2 dS - \bar{t}_3 n_3 dS + (\bar{t} + d\bar{t}) dS + \bar{b} dV = \rho \bar{a}_G dV$$

En aquesta equació hi apareixen tres quantitats: $d\bar{t} dS$, $\bar{b} dV$, $\rho \bar{a}_G dV$, que són infinítesims d'ordre superior respecte als altres sumands i que, per tant, poden ser eliminats, de què finalment en resulta l'expressió:

$$\bar{t} = \bar{t}_1 n_1 + \bar{t}_2 n_2 + \bar{t}_3 n_3$$

NOTA: En un enfocament d'equilibri dinàmic de D'Alembert podem suposar la força d'inèrcia inclosa en les forces de volum.

Com es pot observar, \bar{t} queda expressat en funció de \bar{t}_1 , \bar{t}_2 i \bar{t}_3 , així com de la direcció del versor que orienta el dS sobre el qual actua. Escrivint tots els components, s'obté:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} n_1 + \begin{Bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} n_2 + \begin{Bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} n_3$$

expressió que matricialment es pot expressar per:

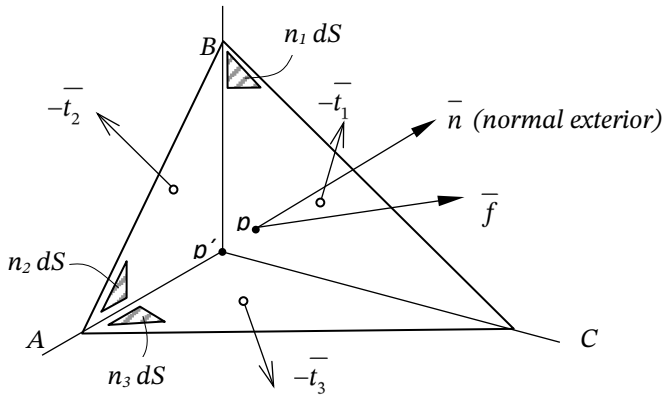
$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \bar{t} = [\sigma]^T \bar{n}$$

on $[\sigma]$ és una entitat física que descriu totalment l'estat de tensió al voltant de p , ja que, coneguda la matriu que el representa, és possible determinar el vector tensió associat a qualsevol direcció al voltant d'aquest punt. És el que es coneix com a *tensor tensió* i, com es veurà a continuació, és un tensor simètric de segon ordre.

3.4.2. Condicions de contorn

El mateix plantejament fet sobre un tetraedre infinitesimal interior per introduir el tensor tensió es pot aplicar a la superfície exterior del medi continu sense considerar altra

cosa que el fet que la cara triangular ABC es troba sobre la superfície lliure i sobre ella actua la força exterior de superfície \bar{f} :



Plantejant el principi de la quantitat de moviment a aquest tetraedre, tenim:

$$-\bar{t}_1 n_1 dS - \bar{t}_2 n_2 dS - \bar{t}_3 n_3 dS + \bar{f} dS + \bar{b} dV = \rho \bar{a}_G dV$$

d'on, eliminant infinitedsimos d'ordre superior, s'obté finalment la condició de contorn per a les tensions:

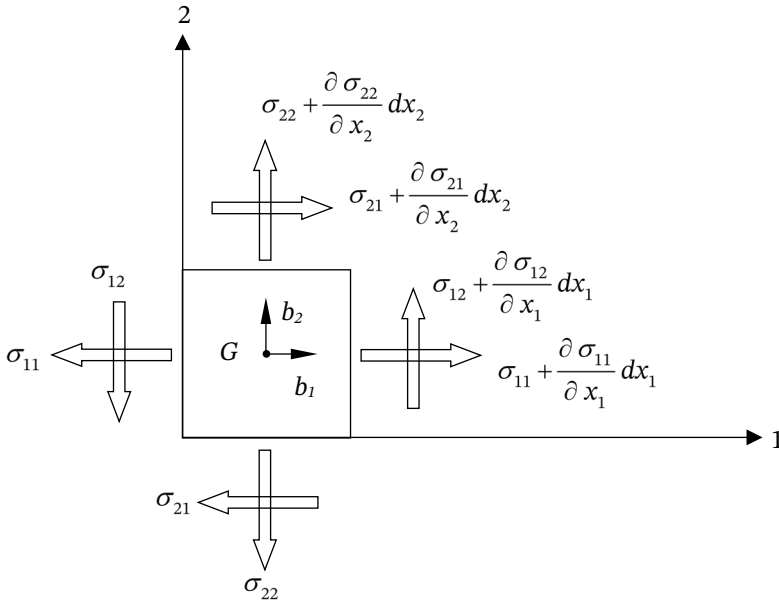
$$\begin{aligned} \bar{t}_1 n_1 + \bar{t}_2 n_2 + \bar{t}_3 n_3 &= \bar{f} \\ \bar{f} &= [\sigma]^T \bar{n} \end{aligned}$$

NOTA: En aquest cas, les variacions dels vectors tensió, en passar de p a p' , donen lloc a infinitedsimos d'ordre superior que no s'han reflectit en la deducció.

3.4.3. Reciprocitat de les tensions tallants

A l'apartat 0 s'ha utilitzat el principi de la quantitat de moviment per expressar \bar{t} en funció de \bar{t}_1, \bar{t}_2 i \bar{t}_3 . Aplicant el teorema del moment cinètic, es justifica, a més, que la matriu del tensor tensió ha de ser simètrica.

Per simplificar, considerem solament la suma de moments respecte a un eix paral·lel a l'eix 3 de les forces que actuen sobre un diferencial de volum en forma de cub d'aresta $dx \approx dx_1 \approx dx_2 \approx dx_3$. A la figura següent solament s'han dibuixat els components de tensió que donen moments respecte a l'eix 3. Cal considerar que en cada cara actuarà una força igual al producte de la tensió per l'àrea de la cara i aplicada en el centre d'aquesta. També hi actuarà una força volumètrica igual al producte de la força de volum pel volum de l'element infinitesimal de volum i aplicada en el centre de gravetat d'aquest.



Prenent moments respecte a l'eix paral·lel a 3 que passa per G, tenim una de les tres equacions escalars del teorema del moment cinètic:

$$\begin{aligned} \sum M_{G_3} &= \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} + \sigma_{12} \frac{dx_1}{2} dx_2 dx_3 - \\ &\quad - \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_3 dx_1 \frac{dx_2}{2} - \sigma_{21} \frac{dx_2}{2} dx_1 dx_3 \cong \\ &\cong I_{G_3} \ddot{\omega}_{3\text{med}} = \frac{1}{12} \rho dx_1 dx_2 dx_3 (dx_1^2 + dx_2^2) \ddot{\omega}_{3\text{med}} \quad (\text{si } dx_1 \approx dx_2 \approx dx_3) \end{aligned}$$

En aquesta expressió, el primer membre és la suma de moments de les accions exteriors respecte a l'eix 3 (les tensions normals i la força de volum no donen moments, perquè tallen en l'eix 3; els moments generats per les variacions de tensió en passar d'una cara a una altra són infinitesimals d'ordre superior), mentre que el segon membre és una aproximació a la derivada temporal del moment cinètic respecte a G en una referència que es trasllada amb G, obtinguda considerant l'element infinitesimal de volum com un sòlid rígid. Tot i que aquesta aproximació no és rigorosa des del punt de vista matemàtic, és suficient per posar en relleu que el segon membre és un infinitèsim d'ordre superior respecte als termes del primer membre i, per tant, és lícit escriure:

$$2\sigma_{12} \frac{dx_1}{2} dx_2 dx_3 - 2\sigma_{21} dx_1 \frac{dx_2}{2} dx_3 = 0$$

D'on $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Procedint de la mateixa manera amb les altres dues equacions, es pot demostrar que $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ i $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, de la qual cosa es desprèn que la matriu de $[\sigma]$ és simètrica i d'ara endavant s'escriurà com a:

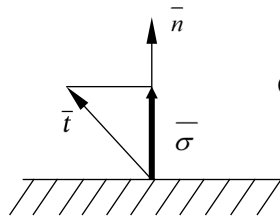
$$\bar{t} [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ amb } [\sigma] = [\sigma]^T \text{ i, per tant: } \bar{t} = [\sigma] \bar{n} \text{ i } \bar{f} = [\sigma] \bar{n}$$

En conseqüència, l'estat de tensió queda definit en una base donada per sis quantitats independents: tres tensions normals, σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , i tres tensions tallants, σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} .

3.4.4. Els components intrínsecs en funció del tensor tensió

Els components intrínsecs de t es poden calcular directament a partir de σ de la manera següent:

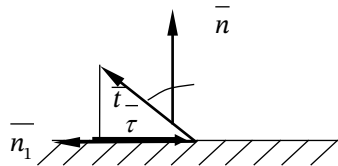
$$\sigma = \bar{n}^T [\sigma] \bar{n}$$



Component normal:

Com que σ és simètrica, es tracta d'una forma quadràtica:

$$\tau = \bar{n}_1^T [\sigma] \bar{n}_1$$



Component tallant:

en què \bar{n}_1 és perpendicular a \bar{n} i està contingut en el pla definit per \bar{n} i \bar{t} (en direcció antihorària de \bar{n} cap a \bar{t}).

Com que $[\sigma]$ és simètrica, es tracta d'una forma bilineal simètrica.

3.5. Canvi de base. Direccions i tensions principals

3.5.1. Canvi de base

L'expressió matemàtica del tensor tensió s'ha vinculat al coneixement dels vectors tensió actuants en elements de superfície infinitesimals orientats segons els sentits positius dels tres eixos ortogonals de referència. Això equival a expressar el tensor en la base



vectorial associada als versors que orienten aquests eixos. Des del punt de vista purament matemàtic, el tensor tensió defineix una aplicació lineal entre el conjunt dels versors i el conjunt dels vectors tensió. Aquesta aplicació lineal pot expressar-se en qualsevol base vectorial que es desitgi sense fer altra cosa que el corresponent canvi de base. Evidentment, el fet de canviar la base no altera el significat físic del tensor tensió, sinó solament la seva representació matemàtica.

Sigui \bar{e}_i la base en què s'expressa $[\sigma]$.

Sigui \bar{e}'_i la base en què s'expressa $[\sigma']$.

Aleshores $[\sigma]$ i $[\sigma']$ es relacionen de la manera següent: $[\sigma'] = [R]^T [\sigma] [R]$, on $[R]$ és la matriu de canvi de base tal com s'ha definit a l'apartat 2.8.2.4 del tema 2.

3.5.2. Tensions i direccions principals

A partir de raonaments purament matemàtics, és possible deduir que, pel fet de ser $[\sigma]$ una aplicació lineal simètrica, la seva matriu és sempre diagonalitzable amb valors propis reals. Els valors propis des $[\sigma]$ s'anomenen *tensions principals*, i els vectors propis associats (base vectorial en què l'expressió de $[\sigma]$ es diagonalitza) *direccions principals*.

En aquest apartat es dona una interpretació física d'aquest resultat de l'àlgebra.

Plantegem el problema següent: Donat un estat de tensió representat per un cert tensor tensió $[\sigma]$ expressat en una base arbitrària associada a uns eixos 1, 2, 3, es desitja determinar les direccions en què \bar{n} i \bar{t} resultin col·lineals, és a dir, aquelles en què el vector tensió té solament un component normal, i en què el component tangencial és nul.

$$\bar{t} = \bar{\sigma} \quad \text{i} \quad \bar{\tau} = 0$$

Per tant:

$$\bar{t} = [\sigma] \bar{n} = \sigma \bar{n}$$

Perquè tals direccions existeixin, el sistema

$$([\sigma] - \sigma [I]) \bar{n} = \bar{0}$$

ha de tenir una solució diferent de la trivial. En conseqüència, el determinant del sistema ha de ser nul, això és:

$$\det | [\sigma] - \sigma [I] | = 0$$

La qual cosa condueix a l'equació característica: $-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0$



on I_1, I_2, I_3 són els invariants definits per:

$$\text{Invariant lineal: } I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = t_r[\sigma]$$

$$\text{Invariant quadràtic: } I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)$$

$$\text{Invariant cúbic: } I_3 = \det[\sigma]$$

Es pot demostrar que l'equació característica en aquest cas sempre presenta solucions reals. Aquestes solucions són, en termes matemàtics, els valors propis de l'aplicació. En termes físics, són les tensions normals que actuen en els plans en què \bar{l} i \bar{n} són col·lineals. Aquests plans queden determinats pels vectors que compleixen la condició:

$$([\sigma] - \sigma_i [I]) \bar{n}_i = \bar{0}$$

Les direccions d'aquests vectors són ortogonals i s'anomenen *direccions principals*. En termes matemàtics són els vectors propis de $[\sigma]$. La matriu de $[\sigma]$ expressada en la base orientada segons les direccions principals, definida pels versors $\bar{n}_{1^*}, \bar{n}_{2^*}, \bar{n}_{3^*}$, resulta diagonal, ja que les tensions tangencials sobre els plans orientats per aquestes direccions són nul·les.

$$[\sigma]_{1^*, 2^*, 3^*} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Per conveniència, d'ara endavant s'estableix la notació següent:

Tensions principals sense ordenar: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Tensions principals ordenades: $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ $\begin{cases} \sigma_I = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ \sigma_{III} = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \end{cases}$

3.5.3. Valors característics dels components intrínsecs

Valors extrems

Com sigui que la capacitat dels materials reals de suportar tensions normals i/o tallants és limitada, resulta de gran interès l'acotació de tots els possibles valors d'aquestes tensions a l'entorn d'un punt.

L'acotació dels valors possibles de la tensió normal es pot efectuar a partir de l'anàlisi d'extrems de l'expressió que la defineix. Expressant σ en direccions principals:



$$\sigma = \bar{n}^T [\sigma] \bar{n} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

Expressió condicionada al fet que els cosinus directors han de complir la relació $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

La resolució d'aquest problema d'extremes condicionats condueix a les solucions següents:

n_1	n_2	n_3
± 1	0	0
0	± 1	0
0	0	± 1

i, per tant, els valors extrems de la tensió normal σ es produeixen en les direccions principals, això és:

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

De manera semblant, es poden trobar els valors extrems per a la tensió tallant, obtinguda a partir del teorema de Pitàgores:

$$\tau^2 = t^2 - \sigma^2 \quad \begin{cases} t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \\ \sigma^2 = (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \end{cases}$$

$$\tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$$

amb la mateixa condició d'abans entre els components de \bar{n} . Com que τ apareix elevada al quadrat, en aquest cas s'obtenen dos jocs de solucions. El primer correspon a la solució trivial $t^2 = 0$, associada a les direccions principals. La solució no trivial ve donada per:

n_1	n_2	n_3	
0	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\implies \tau = \left \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right $
$\pm 1/\sqrt{2}$	0	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\implies \tau = \left \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right $
$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0	$\implies \tau = \left \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right $

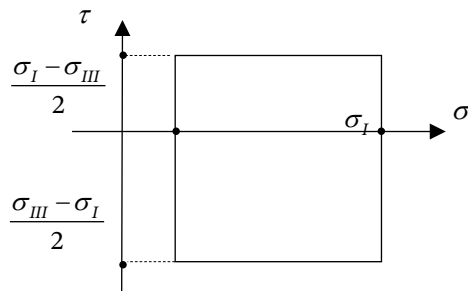
la qual cosa denota que existeixen tres valors extrems, entre els quals hi ha el màxim absolut, definit per:

$$|\tau_{\max}| = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

Cal observar que en els plans en què les tensions tallants són extremes, les tensions normals no són nul·les i estan donades per les expressions següents:

$$\begin{aligned} |\tau| = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} &\Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \\ |\tau| = \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} &\Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \\ |\tau| = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} &\Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \end{aligned}$$

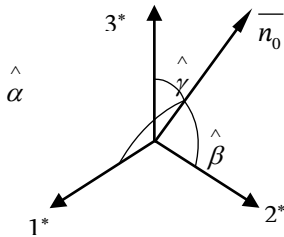
Si es representen en un mateix pla el lloc geomètric dels valors possibles dels components intrínsecs del vector tensió, aquest haurà de quedar inclòs necessàriament en un quadrat de costat $(\sigma_I - \sigma_{III})$, tal com es mostra en la figura següent:



No obstant això, tal com veurem més endavant, no tots els punts de l'interior d'aquest quadrat representen parelles σ, τ possibles.

Valors octaèdrics

Altres valors característics importants dels components intrínsecs són els corresponents als denominats plans octaèdrics. Aquests plans es defineixen com aquells les normals dels quals formen angles iguals amb els eixos principals, això és:



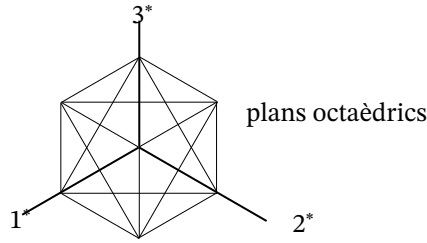
$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} \Rightarrow n_{0_1}^2 + n_{0_2}^2 + n_{0_3}^2 = 1 \Rightarrow \bar{n}_0 = \begin{Bmatrix} \pm 1/\sqrt{3} \\ \pm 1/\sqrt{3} \\ \pm 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

(8 versors)



i, per tant:

$$\bar{t}_0 = \begin{cases} \sigma_1 / \pm\sqrt{3} \\ \sigma_2 / \pm\sqrt{3} \\ \sigma_3 / \pm\sqrt{3} \end{cases}$$



Aleshores es defineix la tensió normal octaèdrica com a:

$$\sigma_0 = \bar{n}_0^T [\sigma] \bar{n}_0 = \sigma_1 n_{0_1}^2 + \sigma_2 n_{0_2}^2 + \sigma_3 n_{0_3}^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

i la tensió tangencial octaèdrica com a:

$$\tau_0 = \sqrt{t_0^2 - \sigma_0^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

3.6. Descomposició del tensor tensió en tensor esfèric i desviador

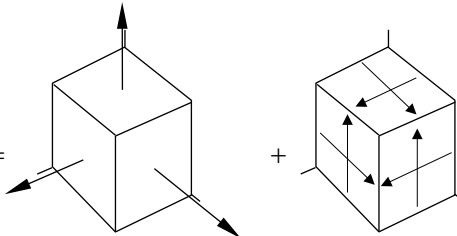
El mateix tipus de descomposició utilitzat en el tensor deformació pot ser aplicat al tensor tensió. En efecte, el tensor tensió pot escriure's com a:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{bmatrix} \quad \text{amb } \sigma_0 = \frac{t_r[\sigma]}{3}$$

En forma compacta: $[\sigma] = \sigma_0 [I] + [s]$

on el component diagonal s'anomena *part esfèrica del tensor* i presenta la característica que correspon a un estat de tensió hidroestàtica pura (no hi ha tensions tallants en cap direcció, ja que, pel fet de ser les tres tensions principals iguals, totes les direccions són direccions principals). Els components de la diagonal es corresponen amb la tensió octaèdrica definida abans. Per aquest motiu, rep també el nom de *tensió hidroestàtica*. Resulta evident que la tensió normal octaèdrica de la part esfèrica és igual a la del tensor tensió complet.

El component no diagonal s'anomena *part desviadora* i representa la diferència entre l'estat de tensió total i el seu component hidroestàtic. Correspon a un estat de cisallament pur, entenent-se per aquest aquell per al qual hi ha una base vectorial en què tots els termes diagonals s'anul·len, és a dir, en què el vector tensió actuant sobre els elements infinitesimals de superfície situats sobre els plans coordenats té solament components tallants. En aquesta base:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix} =$$


La tensió tangencial octaèdrica de la part desviadora és igual a la del tensor tensió complet, i les seves direccions principals coincideixen amb les d'aquest.

Les tensions principals de $[s]$ es relacionen amb les de $[\sigma]$ de la manera següent: $s_i = \sigma_i - \sigma_0$. D'altra banda, els invariants de $[s]$ compleixen les relacions següents:

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = I_2 - \frac{1}{3} I_1^2 = -\frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad \text{y} \quad \tau_0 = \sqrt{-\frac{2}{3} J_2}$$

$$J_3 = I_3 - \frac{I_1 I_2}{3} + 2 \frac{I_1^3}{27}$$

3.7. Representació gràfica de l'estat de tensió

3.7.1. El·lipsoide de Lamé

És interessant observar que la superfície definida pel lloc geomètric dels extrems dels vectors tensió al voltant d'un punt és un el·lipsoide conegut per el·lipsoide de Lamé. En efecte, en eixos principals tenim:

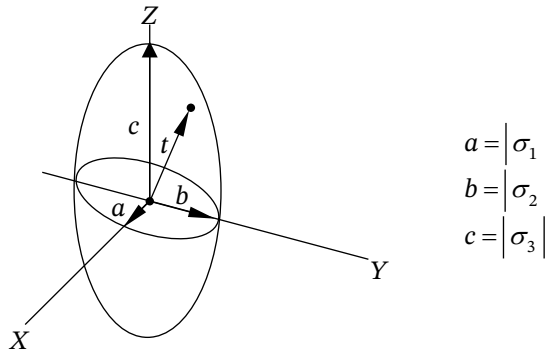
$$\bar{t} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$$

Per tant: $n_1 = \frac{t_1}{\sigma_1}$, $n_2 = \frac{t_2}{\sigma_2}$, $n_3 = \frac{t_3}{\sigma_3}$, en què $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

Si anomenem X, Y, Z les coordenades dels extrems de t en un espai tridimensional, tenim:

$$\frac{X^2}{\sigma_1^2} + \frac{Y^2}{\sigma_2^2} + \frac{Z^2}{\sigma_3^2} = 1$$

que és l'equació de l'el·lipsoide de Lamé.

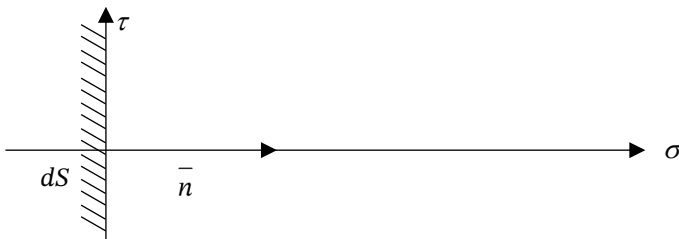


d'on resulta evident que:

$$\max(a, b, c) \geq \|\bar{t}\| \geq \min(a, b, c)$$

3.7.2. Cercles de Mohr

Una forma gràfica molt il·lustrativa de representar l'estat de tensió en un punt consisteix a determinar totes les parelles possibles dels components intrínsecs σ , τ dels seus corresponents vectors tensió. Aquestes parelles es representen després en un gràfic, τ obtingut abatent tots els versors dels elements infinitesimals de superfície al voltant del punt, sobre una mateixa direcció. Més amunt s'ha demostrat que el lloc geomètric d'aquestes parelles ha d'estar inscrit dins d'un quadrat de costat $\sigma_I - \sigma_{III}$. Seguidament es veurà que, a més, queda definit per tres cercles característics denominats cercles de Mohr. En efecte, abatent tots els dS de manera que els seus versors quedin superposats, s'obté el pla σ , τ :



Expressant els components intrínsecs en els eixos principals:

$$t^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2$$

$$\sigma = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

$$\tau^2 = t^2 - \sigma^2$$



i, tenint en compte la relació existent entre els cosinus directors, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, queda un sistema de 4 equacions amb 6 incògnites $(t, \sigma, \tau, \bar{n})$, que defineixen les parelles \bar{t}, \bar{n} associades a $[\sigma]$.

Eliminant d'aquestes equacions successivament (t^2, n_1^2, n_2^2) , (t^2, n_1^2, n_3^2) i (t^2, n_2^2, n_3^2) , s'obtenen les equacions de tres famílies de cercles en el pla σ, τ parametritzades pel component de \bar{n} no eliminat en cada cas (n_1, n_2 o n_3). Aquestes famílies són:

– Cercles c_1 de paràmetre n_1 :

Resulten d'eliminar t^2, n_2^2, n_3^2 en les equacions anteriors. Són una família de cercles concèntrics parametritzada per n_1 , d'equació general:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 + n_1^2 (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III}) = r_1^2$$

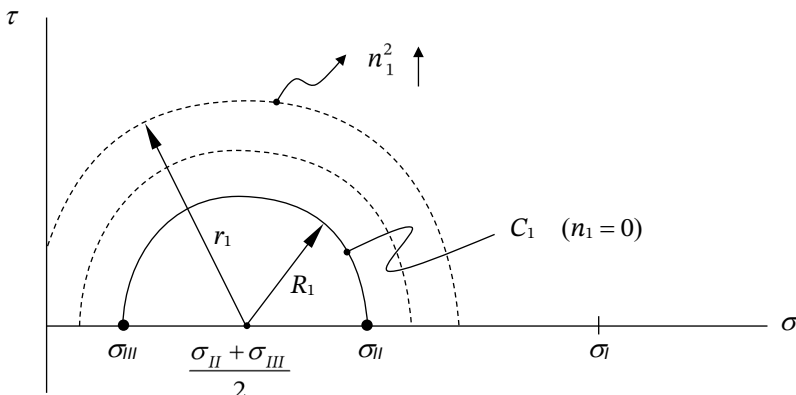
Per tant, el seu centre és al punt:
$$\begin{cases} \tau_C = 0 \\ \sigma_C = \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \end{cases}$$

i el seu radi és:

$$r_1 = \left[\left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 + n_1^2 (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III}) \right]^{1/2}$$

Tots els cercles de la família són exteriors al cercle base de la família (C_1) definit per $n_1 = 0$, l'equació del qual és:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 = R_1^2$$





– Cercles c_2 de paràmetre n_2 :

Resulten d'eliminar t^2, n_1^2, n_3^2 en les equacions anteriors. Són una família de cercles concèntrics parametritzada per n_2 , d'equació general:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2 - n_2^2 (\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_I - \sigma_{II}) = r_2^2$$

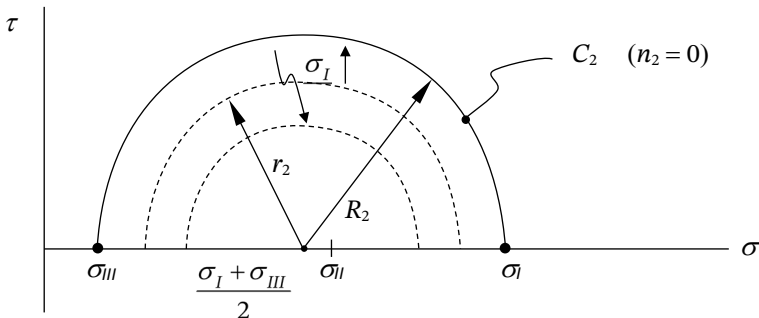
Per tant, el seu centre és al punt:
$$\begin{cases} \tau_C = 0 \\ \sigma_C = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \end{cases}$$

i el seu radi és:

$$r_2 = \left[\left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2 - n_2^2 (\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_I - \sigma_{II}) \right]^{1/2}$$

Tots els cercles de la família són interiors al cercle base de la família (C_2), definit per $n_2 = 0$, l'equació del qual és:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2 = R_2^2$$



– Cercles c_3 de paràmetre n_3 :

Resulten d'eliminar t^2, n_1^2, n_2^2 en les equacions anteriors. Són una família de cercles concèntrics parametritzada per n_3 , d'equació general:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2 + n_3^2 (\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_{III}) = r_3^2$$

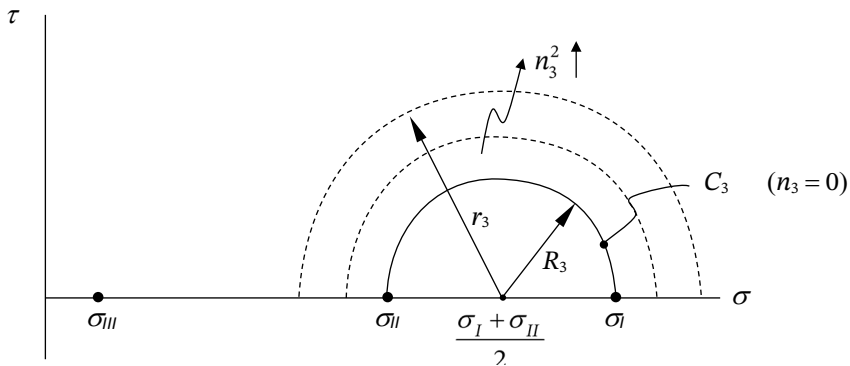
Per tant, el seu centre és al punt:
$$\begin{cases} \tau_C = 0 \\ \sigma_C = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \end{cases}$$

i el seu radi és:

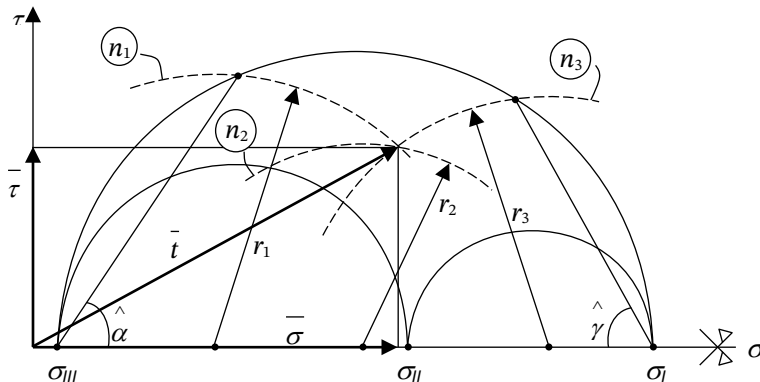
$$r_3 = \left[\left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 + n_3^2 (\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \right]^{1/2}$$

Tots els cercles de la família són exteriors al cercle base de la família (C_3), definit per $n_3 = 0$, l'equació del qual és:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 = R_3^2$$



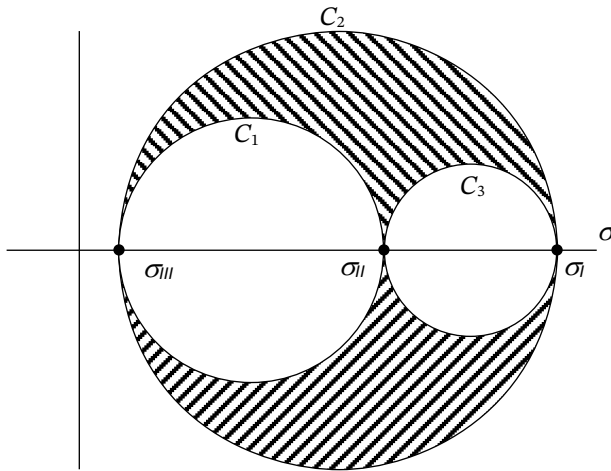
Donat un vector tensió, físicament possible per a l'estat de tensió analitzat, els seus components intrínsecs σ i τ hauran de verificar simultàniament les equacions dels tres cercles de Mohr, un de cada família, els paràmetres dels quals, n_1 , n_2 i n_3 , són els components del versor que orienta l'element infinitesimal de superfície sobre el qual actuen. L'únic punt que verifica aquesta condició és la intersecció d'aquests cercles.





El vector tensió es pot representar per composició vectorial de σ i τ . Es pot demostrar que els angles α i γ queden determinats en veritable magnitud a partir de la construcció geomètrica de la figura.

Per consegüent, qualsevol valor possible de les parelles σ , τ s'ha de correspondre amb una intersecció d'un cercle de cada família. Pel fet de ser les famílies c_1 i c_3 concèntriques exteriors als cercles base C_1 i C_3 , i ser la família c_2 concèntrica interior al cercle C_2 , tals interseccions solament són possibles en els triangles curvilinis delimitats pels cercles base:



És fàcil veure que els cercles base són els llocs geomètrics dels extrems dels vectors tensió que actuen sobre elements infinitesimals de superfície, els versors dels quals estan continguts en un dels plans coordenats principals:

- Cercle C_1 : versors sobre el pla definit per les direccions principals II i III ($n_1 = 0$).
- Cercle C_2 : versors sobre el pla definit per les direccions principals I i III ($n_2 = 0$).
- Cercle C_3 : versors sobre el pla definit per les direccions principals I i II ($n_3 = 0$).

En aquesta representació resulten evidents els resultats següents:

La tensió normal està acotada entre:

$$\sigma_I \geq \sigma \geq \sigma_{III}$$

La tensió tallant està acotada entre:

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \geq \tau \geq \frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2}$$

Per tant,

$$|\tau_{\max}| = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad \text{per a} \quad \sigma = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}$$

i existeixen dos extrems locals de la tensió tallant definits per:

$$\begin{aligned} \tau &= \pm \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} && \left(\sigma = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right) \\ \tau &= \pm \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} && \left(\sigma = \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \right) \end{aligned}$$

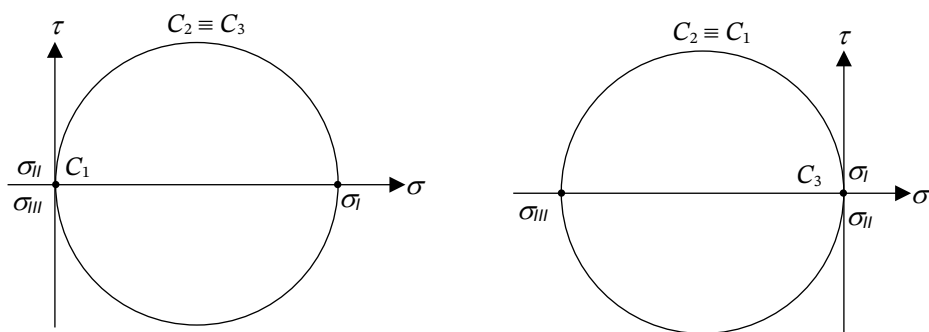
Si dues tensions principals són iguals, el cercle de Mohr bàsic corresponent degenera en un punt.

En un estat de tensions hidroestàtic (esfèric), els tres cercles, igual que els triangles curvilinis, degeneren en un punt. En conseqüència, no hi ha tensions tallants en cap direcció; totes les direccions són principals. El vector tensió sempre coincideix amb el vector tensió normal. L'el·lipsoide de Lamé es transforma en una esfera.

Si a les tres tensions principals s'hi suma un mateix valor constant, és a dir, un estat de tensió hidroestàtic, els tres cercles es desplacen sobre l'eix σ sense modificar les seves dimensions. En conseqüència, els cercles de Mohr del tensor tensió i els de la seva part desviadora són idèntics, i els segons estan desplaçats una quantitat igual a la tensió hidroestàtica.

En les figures següents es recullen els cercles de Mohr per a alguns estats de tensió singulars:

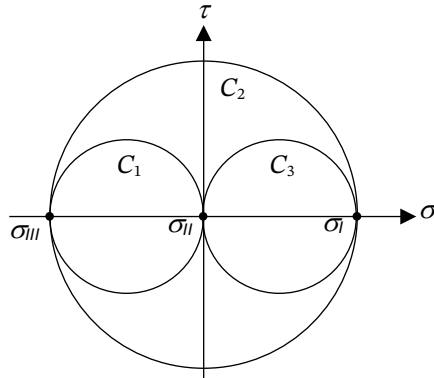
a) Tracció i compressió pures:



- Tracció: El cercle C_1 degenera en un punt i els cercles C_2 i C_3 estan superposats. El triangle curvilini es transforma en el cercle exterior.
- Compressió: El cercle C_3 degenera en un punt i els cercles C_1 i C_2 estan superposats. El triangle curvilini es transforma en el cercle exterior.



b) Cisallament pur:



Les tensions principals màxima i mínima són iguals i de signe contrari. La tensió principal intermèdia és nul·la ($I_1 = 0$). El cercle C_2 està centrat i els cercles C_1 i C_3 són simètrics.

NOTA: La tècnica gràfica dels cercles de Mohr pot ser utilitzada com a eina per a l'anàlisi genèrica de qualsevol tensor simètric de segon ordre i , per tant, també és aplicable a l'anàlisi de deformacions. A més de posar de manifest importants propietats físiques, permet fer canvis de base i determinar les tensions i direccions principals.

3.8. Anàlisi bidimensional de tensions

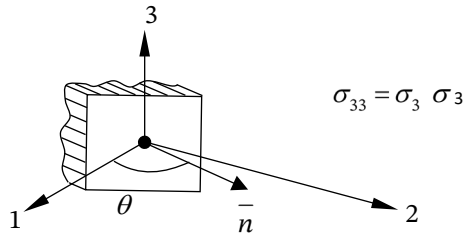
És relativament freqüent tenir el tensor tensió expressat en una base tal que una de les seves direccions és una direcció principal (en les pàgines que segueixen suposarem que la direcció 3 és la principal). Això és especialment cert en els denominats estats plans de tensió (tensió i deformació plana), en què una de les direccions principals queda determinada *a priori* per un simple raonament físic.

En aquest cas, i si l'anàlisi de tensions se centra solament en els elements infinitesimals de superfície que tenen el seu versor sobre el pla 1, 2, aquesta anàlisi pot ser reduïda a solament dues dimensions.

3.8.1. Vector tensió

Sigui $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ i sigui \bar{n} un versor en el pla 1, 2:

$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$



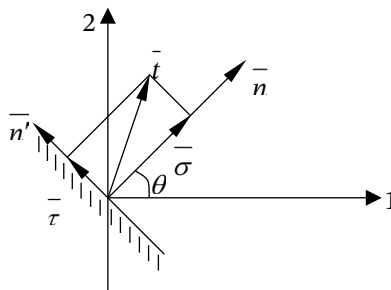
Aleshores el vector tensió està també contingut en el pla 1, 2:

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 \\ \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En el cas particular que $\sigma_3 = 0$ (tensió plana), el vector tensió està contingut en el pla 1, 2 per a qualsevol element infinitesimal de superfície. En efecte:

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En conseqüència, quan el tensor tensió està expressat en una base orientada segons una direcció principal i solament són objecte d'anàlisi els elements infinitesimals de superfície els versors dels quals se situen sobre el pla perpendicular a aquesta direcció principal, el problema es pot reduir a dues dimensions.



$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\theta \end{Bmatrix} \quad \bar{n}' (\perp \bar{n}) = \begin{Bmatrix} -\text{sen}\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \cos\theta + \sigma_{12} \text{sen}\theta \\ \sigma_{12} \cos\theta + \sigma_{22} \text{sen}\theta \end{Bmatrix}$$

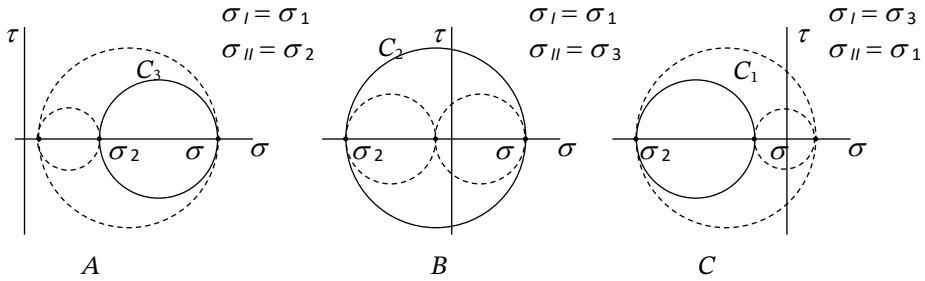


Els components intrínsecs per als elements infinitesimals de superfície els versors dels quals se situen sobre el pla 1, 2 són:

$$\sigma = (\cos \theta, \sin \theta) \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau = (-\sin \theta, \cos \theta) \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta$$

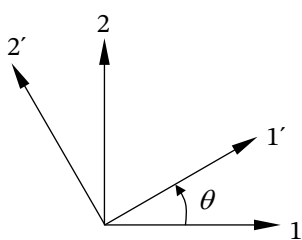
És important observar que aquestes expressions no aporten tots els valors possibles dels components intrínsecs σ i τ per a l'estat de tensió donat, sinó només els corresponents als plans analitzats ($n_3 = 0$). En el pla σ, τ això correspon a punts sobre el cercle base associat a ($n_3 = 0$), que serà un dels tres cercles base (C_1, C_2 o C_3) dependent de la relació d'ordre existent entre σ_3 i les altres dues tensions principals contingudes en el pla 1, 2 σ_1 i σ_2 .



Per tant, existeixen altres parells de valors σ, τ , però no són objecte de l'anàlisi bidimensional plantejada. No obstant això, poden ser determinants des d'un punt de vista físic. Per exemple, en la figura anterior els casos A i C presenten tensions tallants màximes superiors a la tensió tallant màxima en el pla 1, 2.

3.8.2. Canvi de base. Tensions i direccions principals

En l'anàlisi bidimensional, els canvis de base solen limitar-se a rotacions al voltant de l'eix 3. Les expressions especialitzades per a aquest cas són les següents:



$$\bar{e}'_1 = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}_{1,2} \quad \bar{e}'_2 = \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix}_{1,2}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

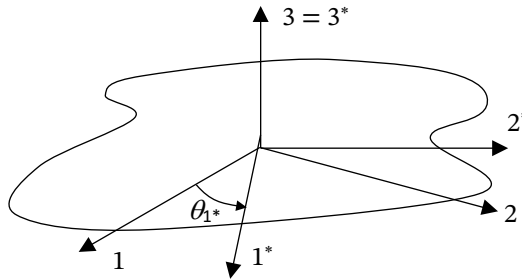
$$[\sigma']_{1',2'} = [R]^T [\sigma]_{1,2} [R]$$

$$\begin{cases} \sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \\ \sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta \\ \sigma'_{12} = \sigma_{12} \cos 2\theta - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

La determinació de les tensions i direccions principals es pot reduir també al pla 1, 2, donat que la direcció 3 ja és principal. La diagonalització de la submatriu:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

s'aconsegueix per un simple gir respecte a l'eix 3:



La formulació analítica del problema de valors i vectors propis queda molt simplificada, i s'obtenen les expressions especialitzades següents:

– Tensions principals en el pla:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 - \sigma(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = 0$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} \pm \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)}}{2}$$

o bé $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$

Prenem $\sigma_1 > \sigma_2$ (independentment de σ_3).



– Direccions principals en el pla:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta_{1^*} \\ \sin \theta_{1^*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \sigma_{12} \cos \theta_{1^*} + (\sigma_{22} - \sigma_1) \sin \theta_{1^*} = 0$$

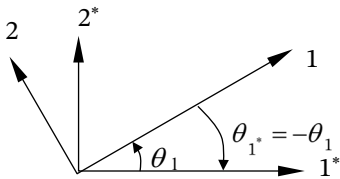
$$\operatorname{tg} \theta_{1^*} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 - \sigma_{22}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_2}$$

ja que:

$$I_1 = \text{cte.} \quad \text{i} \quad \sigma_3 = \sigma_{33} \Rightarrow \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_{22} = \sigma_{11} - \sigma_2$$

3.8.3. Representació gràfica de l'estat de tensió en el pla

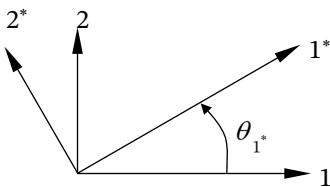
Si es particularitzen les expressions de canvi de base al cas particular que una de les bases correspon a les direccions principals, tenim:



$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta_1 \\ \sigma_{22} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta_1 \\ \sigma_{12} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\theta_1 \end{cases}$$

$$\text{si } \theta_1 > 0 \text{ i } \sigma_2 < \sigma_1 \Rightarrow \sigma_{12} < 0$$

O, alternativament:

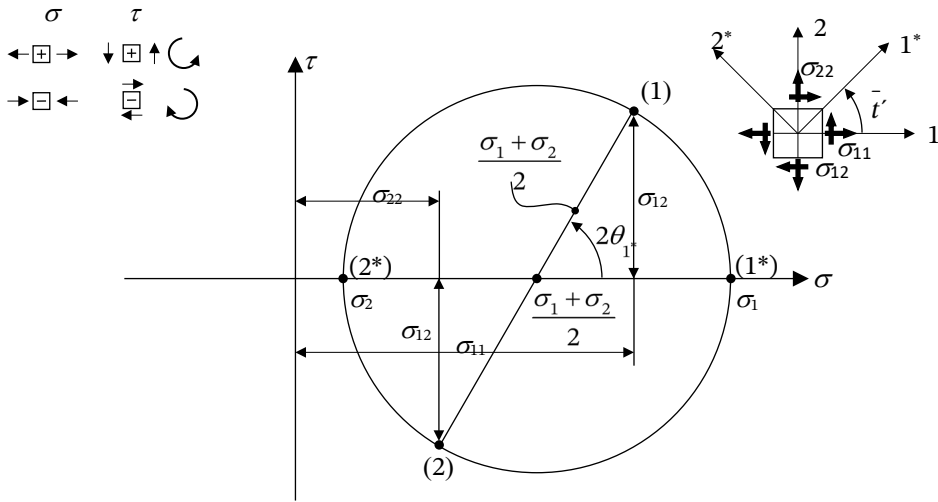


$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta_{1^*} \\ \sigma_{22} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta_{1^*} \\ \sigma_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta_{1^*} \end{cases}$$

$$\text{si } \theta_{1^*} > 0 \text{ i } \sigma_2 < \sigma_1 \Rightarrow \sigma_{12} > 0$$

Aquestes equacions es poden representar gràficament, cosa que dona lloc al cercle de Mohr bàsic rellevant per a l'anàlisi efectuada. En efecte:

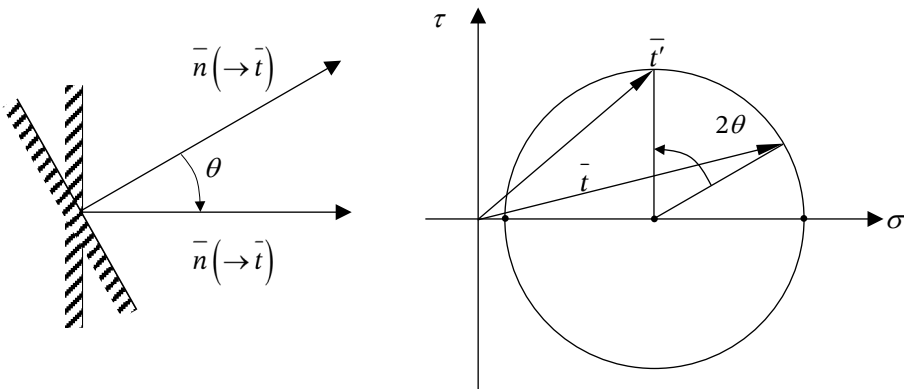
Conveni de signes:



En aquesta figura destaca el següent:

- El conveni de signes quant a les tensions normals és l'habitual.
- El conveni de signes quant a les tensions tallants es referencia en el sentit de gir que imprimeixen en l'element infinitesimal de volum (positiu en sentit contrari a les agulles del rellotge).
- En angle girat al voltant del centre del cercle per passar del punt (1), que representa l'extrem del vector tensió que actua en element infinitesimal de superfície orientat segons la direcció 1, fins al punt (1*), que representa l'extrem del vector tensió associat a la direcció principal 1*, és doble i de sentit contrari a l'angle que formen aquestes direccions en la realitat.

Aquest últim resultat és genèric i es pot aplicar a qualsevol parell de direccions, tal com es mostra en la figura següent:



Dinàmica del medi continu

4.1. Introducció

Una vegada introduïts els conceptes fonamentals necessaris per descriure la cinemàtica i les forces actuant sobre qualsevol part del medi continu, i en virtut del postulat d'Euler-Cauchy, es disposa de les eines necessàries per formular les lleis de la dinàmica. Aquestes lleis són anàlogues a les que es puguin establir per a un sistema de partícules, i prenen la forma dels coneguts teoremes vectorials de la mecànica racional. Són, per tant, lleis aplicables a qualsevol medi continu amb independència de la constitució interna de la matèria que el formi.

Es presentaran també en aquest capítol els teoremes i principis relacionats amb l'energia aplicats al medi continu. Per a un sistema totalment mecànic s'establirà el teorema de les forces vives, a partir del qual s'introduirà el concepte d'energia de deformació. Posteriorment, i per a problemes més complexos de tipus termomecànic, s'introduirà una formulació completa del principi de conservació de l'energia, o primer principi de la termodinàmica. També en aquest cas les lleis resultants són aplicables a qualsevol medi continu amb independència de la constitució interna de la matèria que el formi.

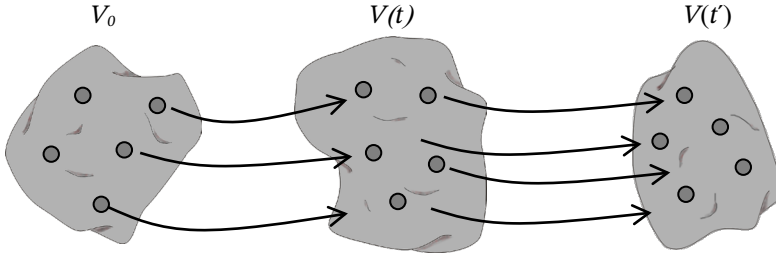
En el capítol següent s'introduirà un altre conjunt de lleis, conegudes com a equacions constitutives, que afegiran la informació necessària referent a la constitució interna de cada material en particular.

4.2. Concepte de volum de control

Com se sap, la mecànica del medi continu no veu les partícules com a entitats aïllades, per la qual cosa els teoremes vectorials i energètics s'han d'establir sobre un volum d'estudi, o *volum de control*. Es defineix el volum de control com una zona de l'espai delimitada per una superfície tancada, o *superfície de control*. Es tracta d'una definició purament geomètrica i independent de les partícules del medi continu. Existeixen diverses maneres de seleccionar el volum de control, i tal selecció depèn de la naturalesa del problema a resoldre. En les pàgines següents, l'explicació es referirà als dos casos particulars més importants des d'un punt de vista conceptual.

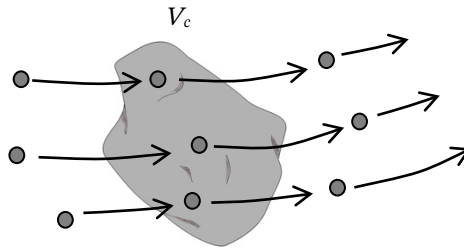


Es diu que el volum de control és material (o lagrangiana) si s'escull de manera que tanqui en cada instant una mateixa quantitat de matèria. El volum de control material es mou amb el mitjà. Aquest tipus de volum de control rep també el nom de *sistema*.



Tots els volums utilitzats fins ara en els desenvolupaments precedents han estat de tipus material. Per aquest motiu, es mantindrà la nomenclatura V , S quan ens referim a aquesta mena de volum de control.

Es diu que el volum de control és espacial (o euleriana) si s'escull fix en l'espai. En aquest cas el medi flueix a través del volum de control.



Per distingir aquest volum de control de l'anterior s'hi assignarà el subíndex c .

Les lleis de la dinàmica es poden escriure per a qualsevol dels dos tipus de volum de control i en forma diferencial o integral, depenent del fet que s'apliquin a un volum de control infinitesimal o finit, respectivament. Existeixen, doncs, quatre formes possibles de cadascuna d'aquestes lleis. La utilització de l'una o l'altra depèn de la naturalesa concreta del problema plantejat.

Quan les lleis de la dinàmica s'escriuen per a un volum de control fix (euleriana), prenen la forma de balanços (lleis de conservació). En cas contrari, no.

El model de volum de control material és especialment útil en l'anàlisi de medis continus sòlids, on el volum de control queda determinat per la geometria pròpia del sòlid. El model de volum de control espacial és apropiat per a l'anàlisi de medis continus fluids, en què l'interès se centra en el flux de les partícules més que en el seu comportament individualitzat.



4.3. Derivada material d'una integral de volum

És freqüent que una propietat mecànica extensiva s'expressi en forma d'una integral de volum; per exemple, la massa total de la matèria continguda en un volum de control material s'expressa per:

$$M = \int_V \rho dV$$

Per aquest motiu, és interessant analitzar la forma matemàtica que pren la derivada material d'una propietat definida d'aquesta manera.

En general, si $P(t)$ és una propietat extensiva definida per una integral de volum de la corresponent propietat intensiva $p(\bar{x}, t)$, sobre un volum material que tanca una quantitat fixa de matèria, tenim:

$$P(t) = \int_V p(\bar{x}, t) dV$$

La seva derivada material ve donada per:

$$\frac{D}{Dt} P(t) = \frac{D}{Dt} \int_V p(\bar{x}, t) dV$$

La derivació respecte al temps no es pot intercanviar *a priori* per la integral de volum, ja que el volum de control material és al seu torn funció del temps. No obstant això, fent un canvi de variable, i passant a la formulació lagrangiana, el volum d'integració passa a ser independent del temps, pel fet d'estar referit a la configuració de referència, amb què es pot introduir la derivada respecte al temps dins de la integral. Tenint això en compte:

$$\frac{D}{Dt} \int_V p(\bar{x}, t) dV = \frac{D}{Dt} \int_{V_0} p(\bar{X}, t) \cdot J dV_0 = \int_{V_0} \frac{D}{Dt} (p(\bar{X}, t) \cdot J) dV_0$$

Recordant les relacions següents:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dV_0} &= \det [F] = J \\ \frac{D}{Dt} (dV) &= dV \operatorname{div} \bar{v} \end{aligned} \right\} \frac{DJ}{Dt} = J \operatorname{div} \bar{v}$$

tenim:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \frac{D}{Dt} (p(\bar{X}, t) \cdot J) dV_0 &= \int_{V_0} \left(J \cdot \frac{D}{Dt} p(\bar{X}, t) + p(\bar{X}, t) \frac{DJ}{Dt} \right) dV_0 = \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{D}{Dt} p(\bar{X}, t) + p(\bar{X}, t) \operatorname{div} \bar{v} \right) \cdot J dV_0 \end{aligned}$$



Desfent el canvi de variable i tornant a la formulació euleriana, queda finalment l'expressió:

$$\frac{D}{Dt} \int_V p(\bar{x}, t) dV = \int_V \left(\frac{D}{Dt} p(\bar{x}, t) + p(\bar{x}, t) \operatorname{div} \bar{v} \right) dV$$

Introduint llavors l'expressió euleriana de la derivada material, tenim:

$$\frac{D}{Dt} p(\bar{x}, t) = \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{v}^{-T} \times \overline{\operatorname{grad} p}$$

i recordant l'expressió següent del càlcul vectorial,

$$\bar{v}^{-T} \times \overline{\operatorname{grad} p} + p \operatorname{div} \bar{v} = \operatorname{div} (p \bar{v})$$

tenim l'expressió alternativa:

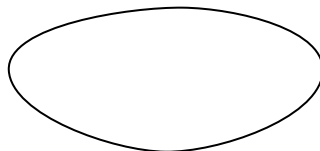
$$\frac{D}{Dt} \int_V p(\bar{x}, t) dV = \int_V \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{v}^{-T} \times \overline{\operatorname{grad} p} + p \operatorname{div} \bar{v} \right) dV = \int_V \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} (p \bar{v}) \right) dV$$

4.4. Teorema del transport de Reynolds

El desenvolupament anterior és apropiat per a un volum de control material. Malgrat tot, en molts casos resulta més pràctic avaluar les variacions d'una certa propietat a partir de l'anàlisi efectuada sobre un volum fix en l'espai a través del qual flueix el medi. Per fer-ho, s'ha de relacionar la variació de la propietat del volum de control material amb la variació de la propietat a l'interior del volum de control espacial. Això és el que fa el teorema del transport de Reynolds que es presenta a continuació.

Considerem un volum de control espacial fix V_c i sigui V el volum de control material que en l'instant t coincideix amb V_c . Sigui $P(t)$ la quantitat total d'una certa propietat en el sistema material i sigui $P_c(t)$ la quantitat total d'aquesta propietat tancada per V_c també en aquest instant.

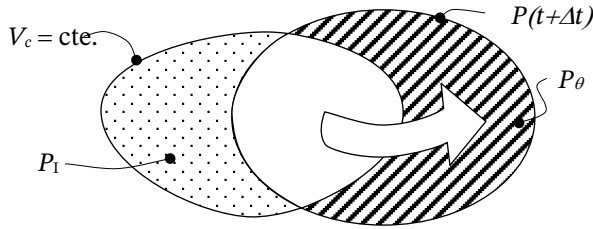
En l'instant t tots dos volums de control coincideixen i, per tant:



$$V_c = V(t)$$

$$P(t) = P_c(t)$$

No obstant això, un instant Δt després V s'ha desplaçat, mentre que V_c roman fix:



Si anomenem P_θ la quantitat de propietat pertanyent a V que ha sortit de V_c i P_I la quantitat de propietat no pertanyent a V que ha entrat en V_c , tenim el balanç següent per a l'instant $t + \Delta t$:

$$P(t + \Delta t) = P_\theta + P_c(t + \Delta t) - P_I$$

d'on, restant $P(t)$ als dos membres i tenint en compte que $P(t) = P_c(t)$, queda:

$$P(t + \Delta t) - P(t) = P_\theta + P_c(t + \Delta t) - P_c(t) - P_I$$

Dividint per Δt i passant al límit, tenim:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_c(t + \Delta t) - P_c(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_\theta - P_I}{\Delta t}$$

d'on:

$$\frac{D}{Dt} P(t) = \frac{d}{dt} P_c(t) + \varphi_P$$

El primer membre d'aquesta igualtat és la derivada material de la propietat definida sobre el volum material.

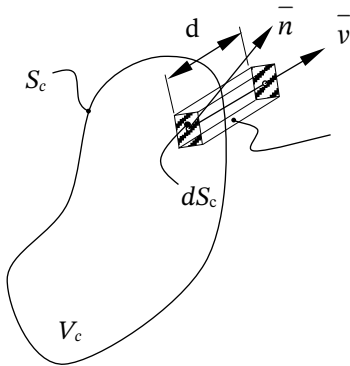
$$\frac{D}{Dt} P(t) = \frac{D}{Dt} \int_V p(\bar{x}, t) dV$$

El primer terme del segon membre és la derivada temporal de la quantitat de propietat a l'interior del volum de control espacial. Com que V_c és un volum fix en l'espai, es pot permutar la derivada per la integral, i, com que la variació temporal de la propietat es mesura en el volum de control, a $\bar{x} = cte.$, la derivada temporal és una derivada parcial respecte al temps.

$$\frac{d}{dt} P_c(t) = \frac{d}{dt} \int_{V_c} p(\bar{x}, t) dV_c = \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} p(\bar{x}, t) dV_c$$

El segon terme del segon membre és el flux net sortint de la propietat a través de la superfície de control.

En efecte:



$$\delta \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_\theta - P_I}{\Delta t} \right) = \frac{p(\bar{x}, t) dV_n}{dt} = \delta \varphi_p$$

$$dV_n = dS_c dl = dS_c \bar{n}^T \times \bar{v} dt$$

$$\delta \varphi_p = p(\bar{x}, t) (\bar{v}^T \times \bar{n}) dS_c$$

$$\varphi_p = \int_{S_c} p(\bar{x}, t) (\bar{v}^T \times \bar{n}) dS_c$$

I, per tant, es pot escriure:

$$\frac{D}{Dt} \int_V p(\bar{x}, t) dV = \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} p(\bar{x}, t) dV_c + \int_{S_c} p(\bar{x}, t) (\bar{v}^T \times \bar{n}) dS_c$$

Aquest últim resultat es coneix com a teorema del transport de Reynolds.

El mateix resultat es pot obtenir, de manera menys intuïtiva, introduint el teorema de la divergència de Gauss en l'expressió final de la derivada material d'una integral de volum presentada en l'apartat anterior. En efecte:

$$\frac{D}{Dt} \int_V p(\bar{x}, t) dV = \int_V \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(p \bar{v}) \right) dV$$

Però, segons el teorema de la divergència:

$$\int_V \text{div}(p \bar{v}) dV = \int_S p (\bar{v}^T \times \bar{n}) dS$$

$$\text{Amb què: } \frac{D}{Dt} \int_V p(\bar{x}, t) dV = \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV + \int_S p (\bar{v}^T \times \bar{n}) dS$$

Expressió equivalent al teorema de Reynolds, ja que les integrals del segon membre es poden interpretar com a avaluades sobre un volum fix que en l'instant donat coincideix amb el volum material mòbil. El teorema del transport de Reynolds es pot enunciar de la manera següent:

“El ritme de creixement de la propietat $P(\hat{t})$ en aquella part del medi continu que ocupa instantàniament el volum V és igual a la suma de la quantitat de propietat creada dins de V per unitat de temps més el flux net sortint a través de la superfície de V .”

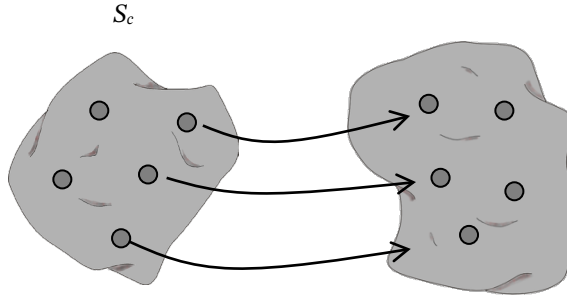


4.5. Principi de conservació de la massa

En la mecànica de medi continu s'admet, com a hipòtesi de partida fonamental, que en qualsevol transformació del medi es conserva la massa.

$$M = \int_V \rho(\bar{x}, t) dV = cte.$$

O, de manera equivalent:



$$\int_{V_0} \rho_0(\bar{x}, t_0) dV_0 = \int_V \rho(\bar{x}, t) dV$$

Aquesta hipòtesi és vàlida per a la gran majoria de problemes pràctics d'enginyeria, encara que resulta inapropiada per a fenòmens físics que impliquin intercanvis entre massa i energia. El principi de conservació de la massa pren diverses formes matemàtiques, conegudes amb el nom genèric d'*equació de continuïtat*.

4.5.1. Equació de continuïtat per a un volum de control material

Enfocament lagrangà

En un enfocament lagrangà, i considerant un volum de control material, la conservació de la massa s'expressa de la manera següent:

En la configuració inicial: $\rho_0 = \frac{dM_0}{dV_0}$

En la configuració actual: atès que $\rho = \frac{dM_0}{dV} = \rho(\bar{x}(\bar{X}, t), t)$ $dM = dM_0$

i, per tant:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{dV}{dV_0} = J \Rightarrow \rho_0 = \rho J$$



Expressió aquesta última que estableix el principi de conservació de la massa a nivell diferencial. Com que ρ_0 és un valor fix independent del temps, també es pot escriure:

$$\frac{D\rho_0}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{D}{Dt}(\rho J) = 0$$

Enfocament Eulerià

En un enfocament eulerià tenim, per a un volum de control material:

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{D}{Dt} \int_V \rho(\bar{x}, t) dV = \int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} \right) dV = 0$$

que és l'expressió integral de l'equació de continuïtat per a un volum de control material.

Com que aquesta expressió ha de ser vàlida per a qualsevol volum de control material triat, s'ha de complir també que:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0$$

que és l'expressió diferencial de l'equació de continuïtat per a un element infinitesimal de volum material. En forma desenvolupada:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = 0$$

Aquesta equació es pot obtenir directament de la manera següent: $dM = \rho dV$

d'on, pel fet de ser M constant: $\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt}(\rho dV) = \frac{D\rho}{Dt} dV + \rho \frac{D}{Dt}(dV) = 0$

Però, com que: $\frac{D}{Dt}(dV) = dV \cdot \operatorname{div} \bar{v}$

tenim: $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0$

4.5.2. Equació de continuïtat per a un volum de control espacial (enfocament eulerià)

Aplicant a la massa el teorema del transport de Reynolds:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_c + \int_{S_c} \rho (\bar{v}^T \times \bar{n}) dS_c = 0$$



que és l'expressió integral de l'equació de continuïtat per a un volum de control espacial.

Intercanviant integral per derivada i introduint el teorema de la divergència, tal com s'ha fet anteriorment, obtenim:

$$0 = \int_{V_c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) \right) dV_c$$

Equació que s'ha de complir per a qualsevol volum de control espacial. Per tant, la formulació diferencial per a un element infinitesimal de volum fix en l'espai és:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) = 0$$

que és l'expressió diferencial de l'equació de continuïtat per a un element infinitesimal de volum espacial. En forma desenvolupada:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} = 0$$

4.5.3. Conseqüències del principi de conservació de la massa.

Medi incompressible

Es defineix el medi incompressible com aquell en què el volum es manté constant. La condició cinemàtica corresponent és:

$$\frac{D}{Dt}(dV) = 0 = \text{div} \bar{v} \cdot dV$$

i, per tant:

$$\text{div} \bar{v} = 0$$

D'altra banda:

$$\det[F] = J = \frac{dV}{dV_0} = 1$$

Si el volum es manté constant i la massa es conserva, aleshores en un mitjà incompressible la densitat es manté constant:

$$\rho = \frac{dM}{dV} = \frac{dM_0}{dV_0} = \rho_0$$



Cas particular de la derivada material d'una integral de volum

De l'equació de continuïtat es deriva un cas particular important en l'avaluació de derivades materials d'integrals de volum, corresponent a propietats que poden ser expressades per unitat de massa. En efecte, sigui:

$$P(t) = \int_V q(\bar{x}, t) \rho dV$$

és a dir: $p(\bar{x}, t) = q(\bar{x}, t) \rho$. Aleshores:

$$\frac{D}{Dt} \int_V q \rho dV = \frac{D}{Dt} \int_{V_0} q \rho J dV_0 = \int_{V_0} \frac{D}{Dt} (q \rho J) dV_0 = \int_{V_0} \left(\frac{Dq}{Dt} \rho J + q \frac{D}{Dt} (\rho J) \right) dV_0$$

Però, per continuïtat:

$$\frac{D}{Dt} (\rho J) = 0$$

amb què:

$$\frac{D}{Dt} \int_V q \rho dV = \int_V \frac{Dq}{Dt} \rho dV$$

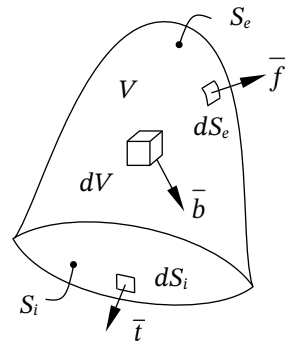
4.6. Principi de la quantitat de moviment

Un dels principis bàsics de la mecànica clàssica és el de la quantitat de moviment (segona llei de Newton per a un sistema de massa constant). En aquest apartat es formula el principi de la quantitat de moviment, en el seu enfocament eulerià, per a un volum de control material i per a un volum de control espacial.

4.6.1. Principi de la quantitat de moviment per a un volum de control material

Sigui un fragment de medi continu delimitat per una superfície exterior S_e i una altra d'interior S_i , frontera amb una altra part de medi continu limítrof. Sobre el volum de control material definit pel fragment considerat actuen:

- Les forces de volum.
- Les forces de superfície exteriors a través de S_e .
- Les tensions internes a través de S_i .



La resultant de forces exteriors és, doncs:

$$\bar{R} = \int_V \bar{b} dV + \int_{S_e} \bar{f} dS_e + \int_{S_i} \bar{t} dS_i$$

D'altra banda, cada element infinitesimal de volum posseeix una quantitat de moviment donada per:

$$dc.m. = \bar{v} dM = \bar{v} \rho dV$$

La quantitat de moviment total per al fragment de medi considerat serà:

$$c.m. = \int_V \bar{v} \rho dV$$

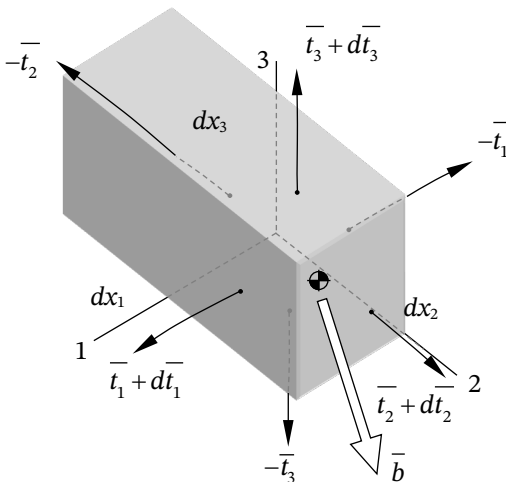
El principi de la quantitat de moviment per al sistema tancat en el volum de control material postula que:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \bar{v} \rho dV = \int_V \bar{a} \rho dV = \int_V \bar{b} dV + \int_{S_e} \bar{f} dS_e + \int_{S_i} \bar{t} dS_i = \bar{R}$$

equació que constitueix la forma integral del principi de la quantitat de moviment per a un volum de control material.

La forma diferencial del principi de la quantitat de moviment es troba aplicant el principi de la quantitat de moviment directament a un element infinitesimal de volum material de dimensions dx_1 , dx_2 i dx_3 .

A més de les forces que resulten d'aquestes accions sobre la superfície de dV , s'ha de considerar la possible existència de forces de volum \bar{b} , la resultant de la qual s'aplica al centre de gravetat de dV .



$$\bar{dt}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_i} dx_i \\ \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_i} dx_i \\ \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_i} dx_i \end{array} \right\} = \frac{\partial \bar{t}_i}{\partial x_i} dx_i$$



Plantejant la segona llei de Newton a l'element infinitesimal de volum, tenim:

$$\begin{aligned} & \left(\bar{t}_1 + d\bar{t}_1 \right) dx_2 dx_3 + \left(\bar{t}_2 + d\bar{t}_2 \right) dx_1 dx_3 + \left(\bar{t}_3 + d\bar{t}_3 \right) dx_1 dx_2 + \\ & + \bar{b} dx_1 dx_2 dx_3 - \left(\bar{t}_1 dx_2 dx_3 + \bar{t}_2 dx_1 dx_3 + \bar{t}_3 dx_1 dx_2 \right) = \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

Simplificant:

$$d\bar{t}_1 dx_2 dx_3 + d\bar{t}_2 dx_1 dx_3 + d\bar{t}_3 dx_1 dx_2 + \bar{b} dx_1 dx_2 dx_3 = \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} dx_1 dx_2 dx_3$$

d'on:

$$\frac{\partial \bar{t}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{t}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{t}_3}{\partial x_3} + \bar{b} = \rho \frac{D\bar{v}}{Dt}$$

en què:

$$\sum_1^3 \frac{\partial \bar{t}_i}{\partial x_i} = \text{div} [\sigma]$$

i, per tant:

$$\text{div} [\sigma] + \bar{b} = \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \rho \bar{a}$$

expressió que constitueix la forma diferencial del principi de la quantitat de moviment per a un element infinitesimal de volum material, que en forma desenvolupada és:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 &= \rho \frac{Dv_1}{Dt} = \rho a_1 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 &= \rho \frac{Dv_2}{Dt} = \rho a_2 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= \rho \frac{Dv_3}{Dt} = \rho a_3 \end{aligned}$$

Aquest mateix resultat es pot obtenir per aplicació del teorema de la divergència a les integrals de superfície de la forma integral del principi de la quantitat de moviment per a un volum material.

En efecte, tenim que:

$$\begin{aligned} \bar{t} = [\sigma] \bar{n} \text{ en } S_i &\quad \rightarrow \quad \int_{S_i} \bar{t} dS_i = \int_{S_i} [\sigma] \bar{n} dS_i \\ \bar{f} = [\sigma] \bar{n} \text{ en } S_e &\quad \rightarrow \quad \int_{S_e} \bar{f} dS_e = \int_{S_e} [\sigma] \bar{n} dS_e \end{aligned}$$

per a tota la superfície:



$$\int_{S_i} [\sigma] \bar{n} dS_i + \int_{S_e} [\sigma] \bar{n} dS_e = \int_S [\sigma] \bar{n} dS$$

i, aplicant el teorema de la divergència:

$$\int_S [\sigma] \bar{n} dS = \int_V \text{div} [\sigma] dV$$

Llavors, agrupant totes les integrals de volum:

$$\int_V \bar{b} dV + \int_V \text{div} [\sigma] dV = \int_V (\text{div} [\sigma] + \bar{b}) dV = \int_V \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} dV$$

i, com que aquesta equació ha de ser vàlida per a tot volum, tenim que:

$$\text{div} [\sigma] + \bar{b} = \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \rho \bar{a}$$

4.6.2. Principi de la quantitat de moviment per a un volum de control espacial

Per aplicar el principi de la quantitat de moviment a un volum de control finit fix, n'hi ha prou de transformar, mitjançant el teorema de Reynolds, la derivada material de la integral de volum del segon membre de la forma integral del principi de la quantitat de moviment.

$$\int_{V_c} (\text{div} [\sigma] + \bar{b}) dV = \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}) dV + \int_{S_c} \rho \bar{v} (\bar{v}^T \times \bar{n}) dS_c$$

Aquesta equació constitueix la forma integral del principi de la quantitat de moviment per a un volum de control espacial.

Aplicant igual que abans el teorema de la divergència, és possible transformar totes les integrals de superfície en integrals de volum. Si transformem i agrupem, tenim:

$$\int_{V_c} (\text{div} [\sigma] + \bar{b}) dV = \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}) dV + \int_{V_c} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\rho v_1 \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho v_2 \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho v_3 \bar{v}) \right] dV$$

Expressió que ha de ser vàlida per a qualsevol volum de control espacial. Si simplifiquem, obtenim finalment:

$$\text{div} [\sigma] + \bar{b} = \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + [L] \bar{v} \right) = \rho \bar{a}$$

que és la forma diferencial del principi de la quantitat de moviment per a un element infinitesimal de volum de control fix en l'espai. Val la pena observar que aquesta equació és equivalent a l'obtinguda per a un element infinitesimal de volum material sense



fer altra cosa que identificar l'expressió euleriana de la derivada material del vector velocitat. En forma desenvolupada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 &= \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 &= \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= \rho \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

Si l'acceleració \bar{a} descompon en els seus termes intrínsecs, obtenim l'expressió alternativa: $\text{div}[\bar{\sigma}] + \bar{b} = \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + 2\omega \wedge \bar{v} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 \right)$

4.7. Teorema del moment cinètic

El teorema del moment cinètic es deriva directament del principi de la quantitat de moviment i no constitueix, en conseqüència, un postulat bàsic de la mecànica. S'inclou aquí perquè resulta útil en alguns problemes de la mecànica de fluids i perquè se'n desprèn la simetria del tensor tensió, tal com s'ha apuntat en introduir aquest tensor al capítol 3.

En aquest apartat es formula el teorema del moment cinètic, en el seu enfocament eulerià, per a un volum de control material i per a un volum de control espacial. Per simplicitat, s'ha triat la versió del teorema respecte a un punt fix en la referència d'estudi, i havent pres com a tal l'origen de coordenades.

4.7.1. Teorema del moment cinètic per a un volum de control material

Per enunciar aquest teorema basta considerar els mateixos termes del principi de la quantitat de moviment i prendre, per a cadascun, moments respecte a l'origen:

$$\int_V \bar{x} \wedge \bar{b} dV + \int_{S_i} \bar{x} \wedge \bar{t} dS_i + \int_{S_e} \bar{x} \wedge \bar{f} dS_e = \frac{D}{Dt} \int_V \bar{x} \wedge \bar{v} \rho dV$$

expressió que constitueix la forma integral del teorema del moment cinètic. La forma diferencial d'aquest teorema es redueix a la condició de reciprocitat de les tensions tallants ja presentada en justificar la simetria del tensor tensió. En efecte:

$$\int_{S_i} \bar{x} \wedge \bar{t} dS_i + \int_{S_e} \bar{x} \wedge \bar{f} dS_e = \int_S \bar{x} \wedge [\bar{\sigma}] \bar{n} dS$$



on

$$\bar{x} \wedge [\sigma] \equiv [\bar{x} \wedge \bar{t}_1, \bar{x} \wedge \bar{t}_2, \bar{x} \wedge \bar{t}_3]$$

Aplicant el teorema de la divergència, es pot transformar aquesta integral de volum en una altra de superfície:

$$\int_S \bar{x} \wedge [\sigma] \bar{n} dS = \int_V \operatorname{div}(\bar{x} \wedge [\sigma]) dV$$

on

$$\operatorname{div}(\bar{x} \wedge [\sigma]) = \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{x} \wedge \bar{t}_i) = \sum_1^3 \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} \wedge \bar{t}_i + \sum_1^3 \bar{x} \wedge \frac{\partial \bar{t}_i}{\partial x_i} = \sum_1^3 \bar{e}_i \wedge \bar{t}_i + \bar{x} \wedge \operatorname{div}[\sigma]$$

Si substituïm en el teorema del moment cinètic:

$$\int_V \bar{x} \wedge \bar{b} dV + \int_V \bar{x} \wedge \operatorname{div}[\sigma] dV + \int_V \sum_1^3 \bar{e}_i \wedge \bar{t}_i dV = \frac{D}{Dt} \int_V \bar{x} \wedge \bar{v} \rho dV$$

$$\bar{v} \wedge \bar{v} = 0$$

D'altra banda:
$$\frac{D}{Dt} \int_V \bar{x} \wedge \bar{v} \rho dV = \int_V \left(\frac{D\bar{x}}{Dt} \wedge \bar{v} + \bar{x} \wedge \frac{D\bar{v}}{Dt} \right) \rho dV$$

amb què, agrupant termes, queda:

$$\int_V \bar{x} \wedge (\bar{b} + \operatorname{div}[\sigma]) dV + \int_V \sum_1^3 \bar{e}_i \wedge \bar{t}_i dV = \int_V \bar{x} \wedge \frac{D\bar{v}}{Dt} \rho dV$$

Com que $\bar{b} + \operatorname{div}[\sigma] = \rho \frac{D\bar{v}}{Dt}$, se'n segueix que s'ha de complir $\sum_1^3 \bar{e}_i \wedge \bar{t}_i = \bar{0}$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

↙ c.q.d.

4.7.2. Teorema del moment cinètic per a un volum de control espacial

També, en aquest cas, en moltes aplicacions pràctiques resulta més convenient treballar sobre un volum de control fix en l'espai. Per fer-ho, s'ha de transformar el segon membre de la forma integral per aplicació del teorema de Reynolds:

$$\int_{V_c} \bar{x} \wedge \bar{b} dV + \int_{S_{c_e}} \bar{x} \wedge \bar{f} dS_e + \int_{S_{c_i}} \bar{x} \wedge \bar{t} dS_i = \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{x} \wedge \bar{v} \rho) dV_c + \int_{S_c} \bar{x} \wedge \bar{v} \rho (\bar{v}^T \times \bar{n}) dS_c$$



Així mateix, les integrals del primer membre s'avaluen sobre el volum de control fix, ja que en l'instant analitzat aquest coincideix amb el volum de control material de referència. Aquesta és la forma integral del teorema de moment cinètic per a un volum de control espacial.

4.8. Condicions d'equilibri per a un medi continu

L'equilibri d'un sistema és un cas particular de la dinàmica per al qual no existeix moviment. En el capítol 1 s'ha definit l'equilibri en una referència d'estudi com l'estat de repòs mantingut en aquesta referència. La condició necessària i suficient d'equilibri per a un sistema de partícules era que cadascuna de les partícules estigués en equilibri.

També s'ha vist que la condició de suma de forces i suma de moments exteriors nul·les era necessària i suficient d'equilibri solament per a un sòlid rígid, i que és condició necessària però no suficient per a un sistema de partícules, i, per tant, també per a un medi continu.

La condició necessària i suficient d'equilibri per a un medi continu, de manera semblant al que succeeix en un sistema de partícules, consisteix a garantir l'equilibri de tots i cadascun dels seus elements infinitesimals de volum. A continuació, s'estableix aquesta condició per als punts interiors i perifèrics del medi continu.

4.8.1. Condicions d'equilibri per a un punt interior

La condició d'equilibri de forces per a un punt interior és un cas particular del principi de la quantitat de moviment que correspon al cas d'acceleració nul·la. En conseqüència, la condició d'equilibri per a un punt interior és:

$$\operatorname{div}[\sigma] + \bar{b} = 0$$

La simetria del tensor tensió, per la seva banda, garanteix l'equilibri de moments sobre l'element infinitesimal de volum.

4.8.2. Condicions d'equilibri per a un punt del contorn

En estudiar les condicions de contorn de les tensions, s'ha aplicat el principi de la quantitat de moviment a un tetraedre infinitesimal situat en la superfície. L'equilibri d'aquest tetraedre s'obté d'anul·lar el terme d'acceleracions; no obstant això, aquest no intervé en el resultat final pel fet de tractar-se d'un infinitèsim d'ordre superior. Per tant, la condició d'equilibri per a un punt del contorn coincideix amb la condició de contorn mateixa:

$$[\sigma] \bar{n} = \bar{f}$$



La simetria del tensor tensió, per la seva banda, garanteix l'equilibri de moments sobre l'element infinitesimal de volum.

4.9. Treball i potència de les forces exteriors

Atenent-nos a la definició clàssica de treball d'una força, el treball efectuat per les forces exteriors sobre el medi continu es pot avaluar a nivell infinitesimal com el producte escalar de la força per un increment de desplaçament de magnitud infinitesimal.

Així doncs, les forces intensives de superfície, aplicades sobre dS , faran un treball infinitesimal donat per:

$$\delta \tau_{\bar{f}} = \bar{d}\mathbf{u}^T \times \bar{f} dS$$

mentre que les forces intensives de volum, aplicades sobre dV , faran un treball infinitesimal donat per:

$$\delta \tau_{\bar{b}} = \bar{d}\mathbf{u}^T \times \bar{b} dV$$

El treball infinitesimal total efectuat sobre el medi continu per les forces exteriors en un increment del camp de desplaçaments vindrà donat per la suma de tots els treballs efectuats sobre cada dS i cada dV :

$$d\tau = \int_{S_e} \bar{d}\mathbf{u}^T \times \bar{f} dS + \int_{S_i} \bar{d}\mathbf{u}^T \times \bar{t} dS_i + \int_V \bar{d}\mathbf{u}^T \times \bar{b} dV$$

En aquesta expressió, i a l'efecte d'obtenir una expressió més general, s'ha afegit el treball efectuat per les tensions sobre una hipotètica superfície frontera entre el fragment de medi continu analitzat i la resta del medi que hi confronta.

El treball infinitesimal no té per què ser la diferencial exacta de cap funció, ja que és sabut, a partir de la física elemental, que el treball finit fet per una força en desplaçar-se el seu punt d'aplicació entre dos punts en l'espai depèn del camí seguit en el desplaçament. Per aquest motiu, i pel fet de treballar amb quantitats finites en lloc de magnituds infinitesimals, s'introdueix el concepte de potència.

Atenent-nos a la definició clàssica de potència instantània d'una força, la potència de les forces exteriors sobre el medi continu es pot avaluar com el treball efectuat per unitat de temps, quan la potència sigui una quantitat finita. Així doncs, les forces intensives de superfície, aplicades sobre dS , efectuaran una potència donada per:

$$\delta P_{\bar{f}} = \bar{v}^T \times \bar{f} dS$$

mentre que les forces intensives de volum, aplicades sobre dV , efectuaran una potència donada per:

$$\delta P_{\bar{b}} = \bar{v}^T \times \bar{b} dV$$



La potència total efectuada sobre el medi continu per les forces exteriors en un instant donat és la suma de totes les potències efectuadaes sobre cada dS i cada dV en aquest instant:

$$P_{ext} = \int_{S_e} \bar{v}^T \times \bar{f} dS_e + \int_{S_i} \bar{v}^T \times \bar{t} dS_i + \int_V \bar{v}^T \times \bar{b} dV$$

En aquesta expressió, i a l'efecte d'obtenir una expressió més general, s'ha afegit també la potència efectuada per les tensions sobre una hipotètica superfície frontera entre el fragment de medi continu analitzat i la resta del medi que hi confronta.

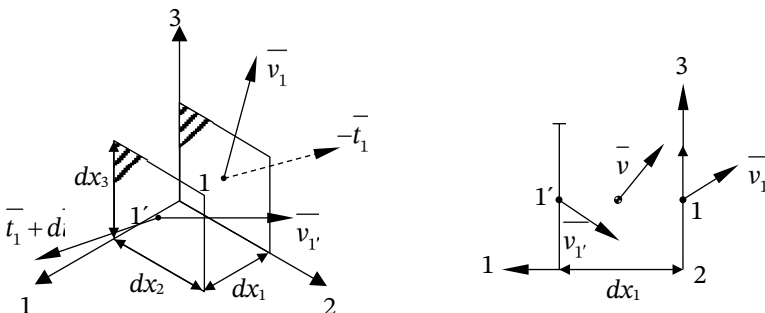
4.10. Teorema de les forces vives. Energia de deformació

4.10.1. Forma diferencial del teorema de les forces vives

Com s'ha vist al capítol 1, el medi continu purament mecànic és una forma límit d'un sistema de partícules que interaccionen, i també hi és aplicable el teorema de les forces vives. Per tant, el treball de les forces exteriors més el treball de les interiors, efectuat en un interval de temps donat, ha de ser igual a l'increment en l'energia cinètica del medi en aquest interval. Enunciat en forma instantània, el teorema de les forces vives estableix que, en qualsevol instant, la suma de la potència de les forces exteriors més la potència de les forces interiors és igual a la velocitat de variació de l'energia cinètica del sistema en aquest instant.

És interessant analitzar la forma diferencial del teorema de les forces vives, aplicat a un element infinitesimal de volum material totalment interior al volum de control, ja que d'aquest desenvolupament en sorgeix una expressió per a la potència i el treball efectuat per les forces interiors.

Les forces actuant sobre l'element infinitesimal de volum són les associades a les tensions internes actuant sobre cadascuna de les seves cares més les forces de volum actuant sobre el centre de gravetat de dV (vegeu l'apartat 5.6.1). La potència total desenvolupada sobre l'element s'obté sumant la potència associada a cada terme. Per obtenir-la, resulta útil considerar les cares de l'element per parells orientats segons cadascun dels eixos de referència. Per exemple, si prenem les cares perpendiculars a l'eix 1, tenim:





$$\delta P_{11'} = \bar{v}_{1'}^T \times (\bar{t}_1 + d\bar{t}_1) dx_2 dx_3 - \bar{v}_1^T \times \bar{t}_1 dx_2 dx_3$$

Si reordenem:

$$\delta P_{11'} = \bar{v}_{1'}^T \times d\bar{t}_1 dx_2 dx_3 + (\bar{v}_{1'} - \bar{v}_1)^T \times \bar{t}_1 dx_2 dx_3$$

però:

$$\bar{v}_{1'} = \bar{v} + \frac{d\bar{v}}{2}$$

amb què, eliminant infinitèsims d'ordre superior:

$$\bar{v}_{1'}^T \times d\bar{t}_1 dx_2 dx_3 = \bar{v}^T \times d\bar{t}_1 dx_2 dx_3 = \bar{v}^T \times d\bar{t}_1 dS_1$$

A més, en ser 1 i 1' dos punts infinitament pròxims, les seves velocitats es relacionen de la manera següent:

$$\bar{v}_{1'} - \bar{v}_1 = \dot{\bar{\omega}} \wedge d\bar{x}_1 + [D] d\bar{x}_1 = \left(\dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{e}_1 + [D] \bar{e}_1 \right) dx_1$$

Aplicant aquests resultats a tots els parells de cares i sumant la potència de les forces de volum, obtenim l'expressió de la potència de les forces exteriors actuant sobre l'element infinitesimal de volum:

$$\begin{aligned} \delta P_{ext} &= \bar{v}^T \times \bar{b} dV + \sum_1^3 \bar{v}^T \times d\bar{t}_i dS_i + \sum_1^3 \left(\dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{e}_i + [D] \bar{e}_i \right)^T \times \bar{t}_i dV = \\ &= \left[\bar{v}^T \times (\text{div}[\sigma] + \bar{b}) + \sum_1^3 \left(\dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{e}_i + [D] \bar{e}_i \right)^T \times \bar{t}_i \right] dV \end{aligned}$$

i, d'altra banda, és fàcil comprovar que:

$$\left(\dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{e}_1 \right)^T \times \bar{t}_1 = -\sigma_{12} W_{12} - \sigma_{13} W_{13}; \quad \left(\dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{e}_2 \right)^T \times \bar{t}_2 = \sigma_{12} W_{12} - \sigma_{23} W_{23}$$

$$\left(\dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{e}_3 \right)^T \times \bar{t}_3 = \sigma_{13} W_{13} + \sigma_{23} W_{23}$$

i, en conseqüència, $\sum_1^3 \left(\dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{e}_i \right)^T \times \bar{t}_i = 0$ o, de manera equivalent, $t_r \left([W]^T [\sigma] \right) = 0$

El terme $\sum_1^3 \left([D] \bar{e}_i \right)^T \times \bar{t}_i$ és igual a $t_r \left([D][\sigma] \right) \equiv [\sigma] : [D]$

Amb què finalment s'arriba a la expressió següent per a la potència de les forces exteriors a l'element infinitesimal de volum:



$$\delta P_{ext} = \left[\bar{\mathbf{v}}^T \times (\text{div}[\boldsymbol{\sigma}] + \bar{\mathbf{b}}) + [\boldsymbol{\sigma}] : [\mathbf{D}] \right] dV$$

D'altra banda, l'energia cinètica per a l'element infinitesimal de volum és:

$$\delta E_C = \frac{1}{2} dM v^2 = \frac{1}{2} \rho v^2 dV$$

La seva derivada material es pot escriure com a: $\frac{D}{Dt}(\delta E_C) = \bar{\mathbf{v}}^T \times \rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} dV$

ja que, pel fet de ser dM constant: $\rho dV = \text{cte}$. i $\frac{D}{Dt}(\rho dV) = 0$

Del principi de la quantitat de moviment, es n'extreu: $\text{div}[\boldsymbol{\sigma}] + \bar{\mathbf{b}} = \rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt}$

Multiplant tots dos membres per la velocitat i operant en el segon membre:

$$\bar{\mathbf{v}}^T \times (\text{div}[\boldsymbol{\sigma}] + \bar{\mathbf{b}}) = \bar{\mathbf{v}}^T \times \rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} = \frac{1}{dV} \frac{D}{Dt}(\delta E_C)$$

Per tant, la potència de les variacions de les forces de superfície en passar d'una cara a una altra més la potència de les forces de volum és igual a la velocitat de variació de l'energia cinètica.

En aplicar aquests resultats en la formulació del teorema de les forces vives per a un element infinitesimal de volum, tenim finalment:

$$\delta P_{int} + \bar{\mathbf{v}}^T \times (\cancel{\text{div}[\boldsymbol{\sigma}] + \bar{\mathbf{b}}}) dV + [\boldsymbol{\sigma}] : [\mathbf{D}] dV = \cancel{\frac{D}{Dt}(\delta E_C)}$$

És a dir, la potència deguda a les forces de volum i a les variacions de les tensions s'empra a modificar l'energia cinètica de l'element infinitesimal de volum, mentre que la potència desenvolupada per la part autoequilibrada de les tensions és igual (i canviada de signe) a la potència desenvolupada per les forces interiors.

4.10.2. Potència de tensió

Es defineix la potència de tensió com la potència de les forces interiors canviada de signe (la potència de tensió és una potència entregada al medi, mentre que la potència de les forces interiors és entregada pel medi). La potència de tensió es pot avaluar a partir de les tensions i del camp de velocitats de deformació de la manera següent:

$$\delta P_\sigma = [\boldsymbol{\sigma}] : [\mathbf{D}] dV = -\delta P_{int}$$



En forma desenvolupada, la potència de tensió per unitat de volum és:

$$[\sigma]:[D] = \sigma_{11}D_{11} + \sigma_{22}D_{22} + \sigma_{33}D_{33} + 2(\sigma_{12}D_{12} + \sigma_{13}D_{13} + \sigma_{23}D_{23}) = \frac{\delta P_\sigma}{dV} = P_\sigma^*$$

La potència de tensió sobre un fragment finit del medi continu resulta d'integrar aquest resultat a tot el seu volum:

$$P_\sigma = \int_V [\sigma]:[D] dV$$

És interessant observar que, si es descomponen $[\sigma]$ i $[D]$ en els seus components esfèric i desviador, i tenint en compte que les traces dels components desviadors són nul·les, es pot expressar la potència de tensió com a suma de dos termes.

$$P_\sigma = \int_V [\sigma_0]:[D_0] dV + \int_V [s]:[d] dV$$

on el primer terme està associat a la potència de canvi de volum del medi, i el segon, a la potència de canvi de forma.

4.10.3. Forma integral del teorema de les forces vives

L'energia cinètica del medi continu és igual a la suma de les energies cinètiques de cadascun dels seus elements infinitesimals de volum, per la qual cosa es pot escriure:

$$\delta E_C = \frac{1}{2} \rho v^2 dV \quad \Rightarrow \quad E_C = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV$$

En conseqüència, la forma integral de la versió instantània del teorema de les forces vives per a un volum de control material es pot expressar com a:

$$P_{int} + P_{ext} = -\int_V [\sigma]:[D] dV + \int_{S_i} \bar{v}^T \times \bar{t} dS_i + \int_{S_e} \bar{v}^T \times \bar{f} dS_e + \int_V \bar{v}^T \times \bar{b} dV = \frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV$$

NOTA: Aquesta expressió es pot deduir directament a partir del principi de la quantitat de moviment simplement multiplicant tots dos membres per \bar{v} , integrant-los sobre un volum de control material V i efectuant una sèrie d'operacions matemàtiques.

Transformant la derivada material per aplicació del teorema de Reynolds, obtenim la forma integral d'aquest teorema per a un volum de control espacial:

$$P_{int} + P_{ext} = \int_{V_c} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v^2) dV + \int_{S_c} \frac{1}{2} \rho v^2 (\bar{v}^T \times \bar{n}) dS_c$$



4.10.4. Energia de deformació

Es defineix l'energia de deformació com el treball efectuat contra les forces interiors entre dues configuracions del medi continu. De manera anàloga, el treball infinitesimal fet contra les forces interiors entre dues configuracions infinitament pròximes rep el nom d'*increment d'energia de deformació*. L'increment d'energia de deformació no depèn dels desplaçaments absoluts, sinó solament dels desplaçaments relatius entre partícules, raó per la qual es pot expressar en funció dels tensors de tensió i d'increments de deformació. Per fer-ho, n'hi ha prou de multiplicar per dt l'expressió trobada anteriorment per a la potència de tensió, ja que, com s'ha vist al capítol 2:

$$d\varepsilon_{ij} = D_{ij} dt$$

En forma desenvolupada, l'increment d'energia de deformació per unitat de volum, o densitat d'energia de deformació, és:

$$dE_{\varepsilon}^* = \frac{\delta dE_{\varepsilon}}{dV} = \sigma_{11} d\varepsilon_{11} + \sigma_{22} d\varepsilon_{22} + \sigma_{33} d\varepsilon_{33} + 2(\sigma_{12} d\varepsilon_{12} + \sigma_{13} d\varepsilon_{13} + \sigma_{23} d\varepsilon_{23})$$

L'increment de densitat d'energia de deformació se sol escriure abreujadament com a:

$$dE_{\varepsilon}^* = tr([\sigma][d\varepsilon]) = [\sigma]:[d\varepsilon]$$

L'increment d'energia de deformació sobre un fragment finit del medi continu resulta d'integrar aquest resultat a tot el seu volum:

$$dE_{\varepsilon} = \int_V [\sigma]:[d\varepsilon] dV$$

Igual que en el cas de la potència de tensió, l'increment d'energia de deformació es pot descompondre en un terme d'energia de canvi de volum i un altre d'energia de canvi de forma:

$$dE_{\varepsilon} = \int_V [\sigma_0]:[d\varepsilon_0] dV + \int_V [s]:[de] dV$$

on $dE_{\varepsilon}^* = [\sigma_0]:[d\varepsilon_0]$ és l'increment de densitat d'energia de canvi de volum i

$dE_{\varepsilon}^* = [s]:[de]$ és l'increment de densitat d'energia de distorsió, o de canvi de forma.

4.11. Teorema de les potències virtuals

La potència de les forces exteriors per a un volum de control material V s'expressa per:

$$P_{ext} = \int_V \bar{\mathbf{v}}^T \times (\text{div}[\sigma] + \bar{\mathbf{b}}) + [\sigma]:[D] dV = \int_{S_i} \bar{\mathbf{v}}^T \times \bar{\mathbf{t}} dS_i + \int_{S_e} \bar{\mathbf{v}}^T \times \bar{\mathbf{f}} dS_e + \int_V \bar{\mathbf{v}}^T \times \bar{\mathbf{b}} dV$$



A partir d'això, introduint el principi de la quantitat de moviment, es pot avaluar la potència de tensió així:

$$\int_V [\sigma] : [D] dV = \int_{S_i} \bar{v}^T \times \bar{t} dS_i + \int_{S_e} \bar{v}^T \times \bar{f} dS_e + \int_V \bar{v}^T \times \bar{b} dV - \int_V \bar{v}^T \times \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} dV$$

on l'última integral del segon membre es pot interpretar com la potència generada per les forces fictícies d'inèrcia. Aquesta expressió és vàlida per a qualsevol camp virtual de velocitats físiques,

en què $[D^*]$ és el tensor velocitat de deformació associat al camp de velocitats virtuals.

Evidentment, si el medi continu està en equilibri, el terme associat a les forces d'inèrcia desapareix.

Aquesta mateixa expressió multiplicada per dt dona lloc al teorema dels treballs virtuals, sense fer altra cosa que substituir les velocitats virtuals per desplaçaments infinitesimals virtuals:

$$\int_V [\sigma] : [d\varepsilon^*] dV = \int_{S_i} \overline{du^*}^T \times \bar{t} dS_i + \int_{S_e} \overline{du^*}^T \times \bar{f} dS_e + \int_V \overline{du^*}^T \times \bar{b} dV - \int_V \overline{du^*}^T \times \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} dV$$

on el primer membre és l'increment virtual d'energia de deformació associat al camp de desplaçaments virtuals imposats.

4.12. Primer principi de la termodinàmica

El teorema de les forces vives estableix el principi de conservació de l'energia, o primer principi de la termodinàmica, per a un sistema totalment mecànic. L'expressió deduïda abans per a la versió instantània d'aquest teorema,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int_V [\sigma] : [D] dV = \int_{S_i} \bar{v}^T \times \bar{t} dS_i + \int_{S_e} \bar{v}^T \times \bar{f} dS_e + \int_V \bar{v}^T \times \bar{b} dV$$

es pot expressar de manera compacta de la manera següent:

$$\frac{DE_c}{Dt} + \frac{DU}{Dt} = P_{ext}$$

on U és l'energia mecànica interna associada al procés deformacional:

$$\frac{DU}{Dt} = P_\sigma$$



En aquest enunciat del teorema de la conservació de l'energia es preveu solament l'existència d'energia mecànica. Aquest plantejament resulta limitador per a l'estudi de medis continus en què també estigui present energia en forma de calor i en què existeixi una quantitat significativa d'energia a conseqüència de la cinètica molecular (moviments microscòpics de les partícules entorn dels seus moviments mitjans). També són d'importància casos més generals en què s'aporta al sistema energia d'altres tipus, com són l'energia deguda a camps electromagnètics, deguda a reaccions químiques o nuclears, etc.). En tots aquests casos, el primer principi de la termodinàmica ha de ser generalitzat perquè incorpori altres formes d'energia diferents de la mecànica.

En el cas d'un medi termomecànic, aquesta generalització es porta a terme incloent en U l'energia derivada de la cinètica molecular i considerant l'energia aportada en forma de calor. L'expressió instantània del primer principi de la termodinàmica pren aleshores la forma següent:

$$\frac{DE_c}{Dt} + \frac{DU}{Dt} = P_{ext} + \frac{\bar{d}Q}{dt}$$

Es defineix l'energia interna específica u a partir de l'expressió

$$U = \int_V \rho u dV$$

i la calor aportada al medi per unitat de temps amb

$$\frac{\bar{d}Q}{dt}$$

Es considera com la suma de dos components:

- Calor generada en el volum, caracteritzada per la funció que expressa la generació de calor per unitat de massa i temps:

$$\int_V \rho \dot{z} dV$$

- Calor sortint a través de la superfície exterior del medi, caracteritzada pel vector de flux de calor per unitat d'àrea i temps:

$$-\int_S \dot{\vec{q}}^T \times \bar{\vec{n}} dS$$

Introduint aquests conceptes en l'expressió del primer principi de la termodinàmica per a un volum de control material, tenim:



$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV + \frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV = \\ & = \int_{S_i} \bar{\mathbf{v}}^T \times \bar{\mathbf{t}} dS_i + \int_{S_e} \bar{\mathbf{v}}^T \times \bar{\mathbf{f}} dS_e + \int_V \bar{\mathbf{v}}^T \times \bar{\mathbf{b}} dV + \int_V \rho \dot{z} dV - \int_S \dot{\bar{\mathbf{q}}} \times \bar{\mathbf{n}} dS \end{aligned}$$

o, de manera equivalent, tenint en compte l'expressió deduïda a 0 per a δP_{ext} i transformant la integral de superfície,

$$\int_S \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \times \bar{\mathbf{n}} dS$$

en una integral de volum per aplicació del teorema de Gauss:

$$\begin{aligned} & \int_V \bar{\mathbf{v}}^T \times \rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} dV + \int_V \rho \frac{Du}{Dt} dV = \\ & = \int_V \left[\bar{\mathbf{v}}^T \times (\bar{\mathbf{b}} + \text{div}[\boldsymbol{\sigma}]) + [\boldsymbol{\sigma}] : [D] \right] dV + \int_V (\rho \dot{z} - \text{div} \dot{\bar{\mathbf{q}}}) dV \end{aligned}$$

Aleshores, considerant el principi de la quantitat de moviment, queda:

$$\int_V \rho \frac{Du}{Dt} dV = \int_V [\boldsymbol{\sigma}] : [D] dV + \int_V (\rho \dot{z} - \text{div} \dot{\bar{\mathbf{q}}}) dV$$

expressió que ha de ser vàlida per a qualsevol volum de control material, per la qual cosa:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = [\boldsymbol{\sigma}] : [D] + \rho \dot{z} - \text{div} \dot{\bar{\mathbf{q}}}$$

i que, per a un volum de control espacial, pren la forma:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \bar{\mathbf{v}}) = [\boldsymbol{\sigma}] : [D] + \rho \dot{z} - \text{div} \dot{\bar{\mathbf{q}}}$$

NOTA: Vegeu l'apartat 4.3 per a la transformació del primer membre d'aquesta igualtat.

Models constitutius materials

5.1. Introducció

Al capítol anterior s'ha presentat una sèrie d'equacions fonamentals la formulació de les quals és genèrica i única per a qualsevol medi continu. En aquest capítol s'introdueixen les equacions constitutives que complementen les anteriors en la descripció fisico-matemàtica del medi, i que permeten diferenciar un medi continu d'un altre. Les equacions constitutives expressen, a escala macroscòpica, els comportaments derivats de la naturalesa interna de la matèria.

Existeixen diversos tipus d'equacions constitutives: les que descriuen la conducció de la calor, com la llei de Fourier; les que usa la termodinàmica per descriure l'estat del medi, o equacions d'estat, que relacionen les variacions de pressió, volum i temperatura; les que descriuen el comportament tensodeformacional a temperatura constant, i altres de més especialitzades, com per exemple les que mesuren el deteriorament intern del material a conseqüència d'un procés de deformació o fatiga, etc.

La gran varietat de comportaments possibles en els materials reals fa que no sigui possible, ni tan sols desitjable, escriure equacions constitutives genèriques. És molt més convenient escriure en cada cas equacions que descriguin de manera apropiada els comportaments d'interès, fins a un nivell suficient per a l'aplicació.

La classe d'equacions constitutives més important des del punt de vista purament mecànic és la formada per les equacions de comportament material, l'objectiu de les quals és caracteritzar macroscòpicament la relació existent entre les forces internes d'interacció entre les partícules i la cinemàtica deformacional del medi. Aquest capítol es dedica bàsicament a aquesta última categoria d'equacions constitutives.

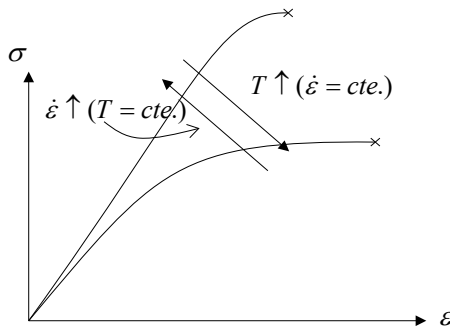
5.2. Models constitutius materials elementals

Els models constitutius materials reflecteixen les relacions existents entre tensions, deformacions i velocitats de deformació, i expressen les característiques internes del material en forma de propietats macroscòpiques que intervenen en aquestes relacions. Aquestes equacions poden resultar tremendament complexes si es pretén abastar tots els detalls del comportament mecànic i termodinàmic del medi. Per això se n'han

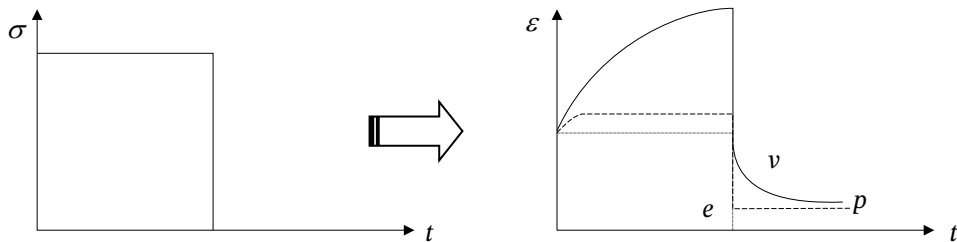


desenvolupat diverses versions simplificades que descriuen solament els comportaments d'interès en cada cas, fins a un grau d'aproximació que es considera suficient per a l'objectiu de l'anàlisi. En aquest sentit, cal destacar que una excessiva simplificació pot ocultar efectes d'interès, mentre que una complicació excessiva comporta un esforç d'anàlisi inútil. Així doncs, cal trobar el punt d'equilibri.

La representació gràfica més simple d'una equació constitutiva és el clàssic resultat d'un assaig de tracció. Com es pot veure a la figura, fins i tot en aquest cas s'aprecia ja l'efecte de les variacions de temperatura i de velocitat de deformació.



L'efecte del temps és important i es pot exemplificar analitzant el comportament d'un material sotmès a un nivell de tensió constant durant un temps limitat, tal com es mostra a la figura següent:



Un material perfectament elàstic (corba *e* de la figura) respon de forma pràcticament instantània a l'aplicació de la tensió i, si aquesta es manté constant, la deformació també ho fa. Quan la tensió desapareix, el material recupera totalment la seva forma inicial, i la deformació permanent acaba sent nul·la. Es tracta d'un procés reversible.

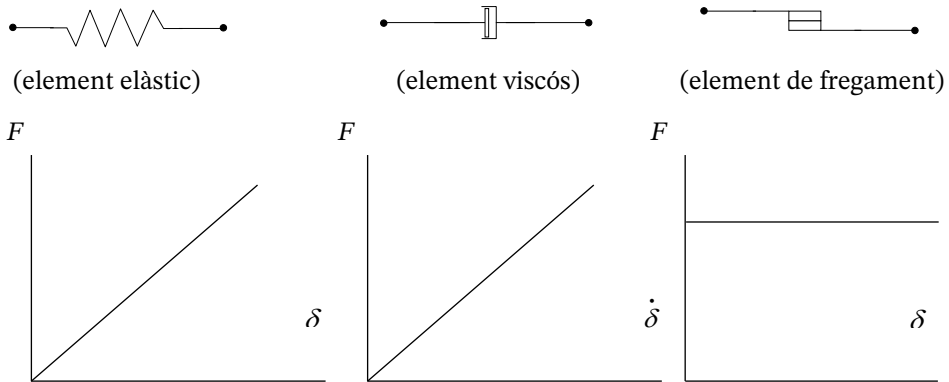
Si el material presenta un comportament elastoplàstic (corba *p* de la figura), la deformació augmenta de manera relativament ràpida, fins i tot mantenint la tensió constant, fins a aconseguir-se un valor de saturació en què aquest augment s'atura. En desaparèixer la tensió, la part elàstica de la deformació es recupera de manera pràcticament



instantània, però el material no recupera la seva forma inicial, i per tant queda una deformació plàstica permanent. Es tracta d'un procés parcialment reversible.

Un material viscoelàstic (corba v de la figura) presenta, a més de la deformació elàstica gairebé instantània, un augment sostingut de la deformació en el temps a tensió constant. En desaparèixer la tensió, la part elàstica de la deformació es recupera de manera gairebé instantània, però el material no recupera la seva forma inicial fins al cap d'un cert temps, durant el qual es produeix la relaxació de la deformació romanent. Aquesta recuperació pot ser total o no, i en aquest cas es diu que el comportament és viscoelastoplàstic.

Aquest últim comportament és el més general, ja que incorpora tots els anteriors. No obstant això, en la pràctica, i per les raons argumentades anteriorment, s'opera amb aproximacions independents per a cada tipus de comportament. Aquestes aproximacions es construeixen a partir de tres comportaments bàsics, simbolitzats pels tres elements mecànics discrets de la figura següent:

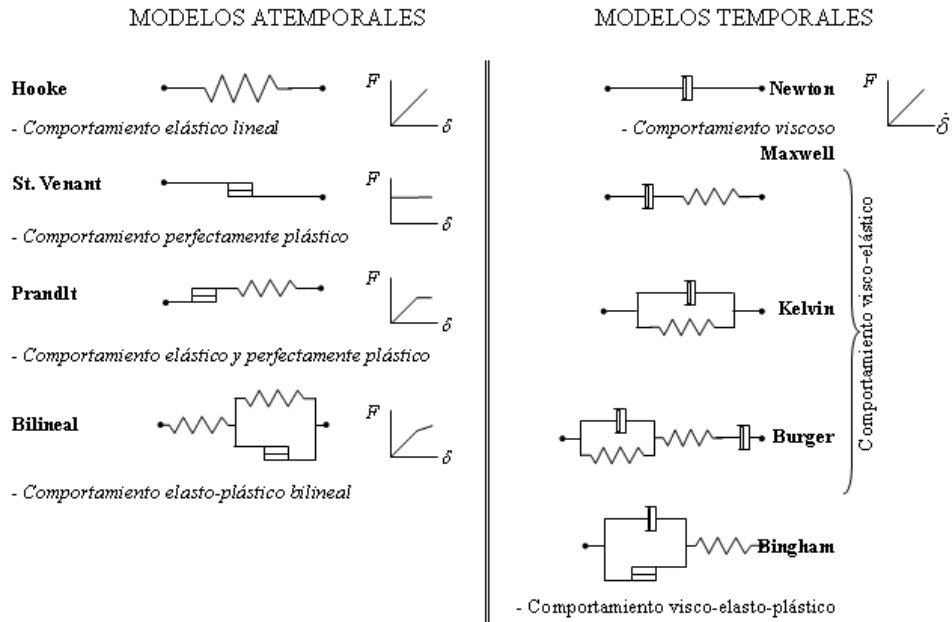


La molla representa les forces interiors conservatives, dependents de la distància entre les partícules del medi. L'amortidor viscos representa les forces dissipatives internes que són funció de la velocitat relativa entre partícules. Finalment, l'element fregament representa les forces internes necessàries per generar lliscaments irreversibles en l'estructura del material.

Les equacions constitutives resultants es poden agrupar en dues grans famílies en funció de la influència o no de la variable temps en el comportament del medi. Dins de cadascuna d'aquestes famílies es poden efectuar al seu torn dues subdivisions: la primera, en funció de si el comportament és isòtrop (iguals propietats mecàniques en qualsevol direcció al voltant d'un punt) o anisòtrop (no isòtrop); la segona, sobre la base de la linealitat o no de les relacions resultants entre els paràmetres que defineixen el model.



Tots aquests models constitutius unidimensionals poden ser generalitzats als corresponents comportaments tridimensionals.



5.3. Postulats bàsics de les equacions constitutives materials

S'admet que qualsevol equació constitutiva utilitzada per a la descripció del comportament material ha de verificar els criteris següents:

- Principi de determinisme de l'estat de tensió: L'estat de tensió en un medi continu queda determinat per la història temporal de la seva cinemàtica.
 En el cas particular dels medis sòlids elàstics i dels fluids, es relaxa aquest principi per admetre que l'estat de tensió depèn solament de la cinemàtica instantània, amb què desapareix qualsevol incidència de la seva història anterior.
- Principi de l'acció local: L'estat de tensió en un punt depèn solament de la cinemàtica a l'entorn d'aquest.
- Principi d'indiferència davant de canvis de referència: Les equacions constitutives han de ser invariants davant de canvis de referència.
- Principi d'admissibilitat física: Les equacions constitutives han de ser compatibles amb els principis primer i segon de la termodinàmica.

Aquests postulats purament mecànics es complementen amb altres que deriven de consideracions termodinàmiques, útils per a l'estudi de medis continus sòlids.



5.4. Models constitutius materials sòlids

En aquest capítol es presenten de manera detallada alguns dels models constitutius materials més importants, fent especial èmfasi en el sòlid elàstic lineal.

5.4.1. Sòlid elàstic

En un medi elàstic s'admet, per raó de la definició d'elasticitat, que el procés tenso-deformacional és totalment reversible. Es pot demostrar que, sent així, i per a una transformació adiabàtica i isoterma, l'energia interna és purament mecànica i igual a l'energia de deformació. Pel fet de ser l'energia interna funció d'estat, a cada estat de tensió li correspon un estat de deformació i només un, independentment del camí de càrrega. En el model purament elàstic, les forces d'interacció depenen solament de la variació de la distància entre partícules, això és, de l'estat de deformació, i no de la velocitat de deformació.

La funció densitat d'energia de deformació es podrà expressar en funció de les deformacions i el seu diferencial serà:

$$dE_{\varepsilon}^* = \sum \frac{\partial E_{\varepsilon}^*}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}$$

Comparant aquesta expressió amb la corresponent a l'increment d'energia de deformació, es conclou que les derivades parcials de l'energia de deformació coincideixen amb les tensions.

$$dE_{\varepsilon}^* = \sum \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial E_{\varepsilon}^*}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

D'altra banda, les derivades parcials segones seran independents de l'ordre de derivació, amb què tenim:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Sòlid elàstic lineal

El que s'ha vist fins aquí és vàlid per a un sòlid elàstic en general. No obstant això, s'observa en molts materials sòlids que el comportament elàstic és, almenys per a les deformacions d'interès pràctic, també un fenomen lineal. D'aquí sorgeix el model d'elasticitat lineal, en què es considera solament el rang de deformacions infinitesimals.

El medi continu sòlid elàstic lineal constitueix un dels models més simples de comportament, i alhora un dels més útils. En aquest apartat s'estudia detalladament aquest tipus de model, primer per al cas isoterm (sense variació de temperatura) i després per



al cas no isoterm (amb variació de temperatura), que acaben donant lloc al model de sòlid termoelàstic.

El model constitutiu elàstic lineal es pot generalitzar a partir del comportament uniaxial considerant, en el cas isoterm, que la relació entre tots els components del tensor tensió i tots els components del tensor deformació es pot expressar en forma d'una aplicació lineal.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] D \left[\begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{array} \right]$$

$[D]$ és un tensor de quart ordre representat per una matriu de constants elàstiques que defineix una aplicació lineal de \mathbb{R}^6 en \mathbb{R}^6 . L'expressió de les tensions en funció de les deformacions rep el nom d'*equació de Lamé*, mentre que la de les deformacions en funció de les tensions es coneix per *lleï de Hooke*:

$$\{\bar{\sigma}\} = [D] \{\bar{\varepsilon}\}$$

Equació de Lamé

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [C] \{\bar{\sigma}\}$$

Llei de Hooke

on, evidentement: $[D] = [C]^{-1}$

L'existència d'una funció energia de deformació permet assegurar que les matrius $[D]$ i $[C]$ són simètriques. En efecte, per exemple:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= D_{11}\varepsilon_{11} + D_{12}\varepsilon_{22} + D_{13}\varepsilon_{33} + D_{14}\varepsilon_{12} + D_{15}\varepsilon_{13} + D_{16}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{22} &= D_{21}\varepsilon_{11} + D_{22}\varepsilon_{22} + D_{23}\varepsilon_{33} + D_{24}\varepsilon_{12} + D_{25}\varepsilon_{13} + D_{26}\varepsilon_{23} \end{aligned}$$

Si derivem i tenim en compte la igualtat de les derivades creuades de l'energia de deformació, tenim:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{22}} = D_{12} = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \varepsilon_{11}} = D_{21}$$

resultat que és generalitzable a la resta de components fora de la diagonal.

Per tant, el cas més general conté solament 21 constants independents. L'expressió més general de $[D]$ correspon a sòlids anisòtrops amb característiques elàstiques dependents de la direcció al voltant d'un punt. No obstant això, és freqüent que els materials presentin algun tipus de simetria interna que permeti reduir ostensiblement el nombre



de constants independents. El cas que s'estudiarà a continuació és la situació més simple possible corresponent al comportament isòtrop, és a dir, independent de la direcció.

En imposar la condició d'isotropia, la relació entre tensions i deformacions ha de resultar invariant respecte a una rotació arbitrària de la base d'estudi. Es pot demostrar que tal condició condueix al fet que la matriu $[D]$ prengui la forma següent:

$$[D] = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & d_2 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

on els termes no nuls d_1 , d_2 i d_3 queden definits per solament dues constants independents. D'aquest resultat es desprèn que:

- La caracterització macroscòpica del comportament elàstic lineal isòtrop es pot efectuar mitjançant solament dues propietats característiques del material.
- Observant l'estructura de la matriu $[D]$ és immediat veure que, sigui com sigui la base d'estudi, els components diagonals dels tensors tensió i deformació es relacionen entre si, amb independència dels components fora de la diagonal, i viceversa. Dit d'una altra manera, la relació entre tensions normals i deformacions longitudinals està totalment desacoblada de la relació existent entre les tensions tallants i les deformacions angulars.
- Com a conseqüència immediata del que s'acaba de dir, les direccions principals de tensions i deformacions coincideixen.

Un tipus important de comportament elàstic correspon als anomenats sòlids ortòtrops. Aquests materials no són isòtrops, però presenten tres plans de simetria ortogonals entre si. En aquest cas la matriu $[D]$ té 9 components independents.

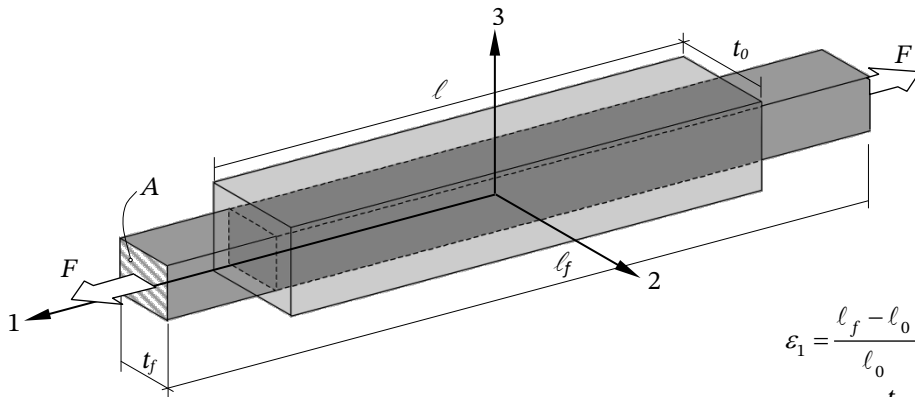
Llei de Hooke generalitzada

Com s'ha comentat anteriorment, en un sòlid isòtrop les matrius $[C]$ i $[D]$ són invariants davant de rotacions. Per aquest motiu, és vàlid establir els components raonant sobre els eixos principals, comuns a tensions i deformacions. El resultat obtingut serà, aleshores, també vàlid per a qualsevol altra direcció.

D'altra banda, pel fet de suposar un comportament lineal, i en l'àmbit de les petites deformacions, també és vàlid el principi de superposició, amb la qual cosa es podrà derivar el comportament multiaxial a partir del comportament uniaxial que s'estudia a continuació.



Per a una única tensió normal aplicada en la direcció 1, la llei de Hooke elemental estableix els següents dos resultats de l'observació experimental:



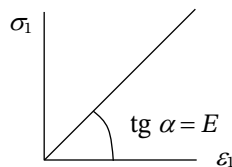
$$\varepsilon_1 = \frac{l_f - l_0}{l_0}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{t_f - t_0}{t_0}$$

$$\sigma_1 = F/A$$

- a) La tensió aplicada és proporcional a la deformació longitudinal resultant. La relació de proporcionalitat entre totes dues E és una constant característica del material denominada *mòdul de Young* o *mòdul elàstic*. E és una quantitat dimensional que s'expressa en unitats de tensió, pel fet de ser la deformació una magnitud adimensional.

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1$$



- b) La deformació en la direcció longitudinal porta associada una deformació transversal. Totes dues deformacions mantenen també una relació de proporcionalitat caracteritzada per una constant característica del material ν denominada *coeficient de Poisson*. ν és una quantitat adimensional, ja que relaciona dues magnituds que també ho són.

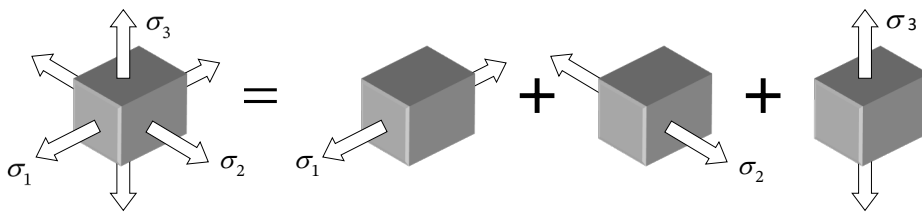
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \varepsilon_1$$

El signe $-$ s'introdueix en l'equació pel fet que en gairebé la totalitat de casos pràctics les deformacions longitudinal i transversal són de signe contrari, i d'aquesta manera ν resulta una quantitat positiva. No obstant això, com es veurà posteriorment, fins i tot amb aquesta definició, alguns materials presenten coeficients de Poisson negatius.

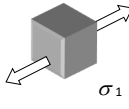
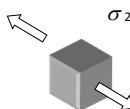
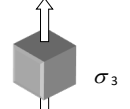
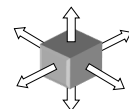
Alguns valors típics de E i ν es recullen en la taula següent:

Material	E (MPa)	ν
Acer	206.000	0.29
Alumini	71.000	0.32
Plom	17.000	0.44
Formigó	20.000	0.20
Goma	1 a 3	0.48

Imaginem-nos ara un estat de tensió arbitrari expressat en els seus eixos principals. Es pot suposar aquest estat de tensió com el resultat de la superposició de l'efecte de tres estats de tensió uniaxials ortogonals aplicats segons cadascuna de les tres direccions principals.



En aplicar separatament sobre el material les corresponents sol·licitacions uniaxials segons cadascun dels eixos principals, s'originaran les deformacions que s'indiquen en les tres primeres columnes de taula següent:

				
ε_1	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\frac{\nu}{E}\sigma_2$	$-\frac{\nu}{E}\sigma_3$	$\frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))$
ε_2	$-\frac{\nu}{E}\sigma_1$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\frac{\nu}{E}\sigma_3$	$\frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3))$
ε_3	$-\frac{\nu}{E}\sigma_1$	$-\frac{\nu}{E}\sigma_2$	$\frac{\sigma_3}{E}$	$\frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))$



Com s'ha dit, la situació real resulta de la superposició d'aquests tres casos, de manera que la deformació total en una direcció qualsevol serà igual a la suma de les aportacions de cadascun a la deformació en aquesta direcció. El resultat de la superposició es recull a la quarta columna de la taula o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

Els resultats de la quarta columna de la taula anterior es poden escriure de manera més convenient per a la seva generalització així:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{-\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{-\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 \\ \varepsilon_3 &= \frac{-\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 \end{aligned}$$

Aplicant la notació habitual per a l'escriptura dels corresponents tensors de tensió i deformació, tenim:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Però, tractant-se d'un sòlid isòtrop, aquesta relació és invariant, per la qual cosa en general s'ha de complir:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

En forma compacta, recordant que:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

$$\boxed{[\varepsilon] = -\frac{3\nu}{E} [\sigma_0] + \frac{1+\nu}{E} [\sigma]}$$

o bé, en components:



$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} \left(\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right) & \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} \left(\sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \right) & \varepsilon_{13} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} \left(\sigma_{33} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{11}) \right) & \varepsilon_{23} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23}\end{aligned}$$

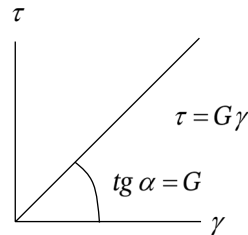
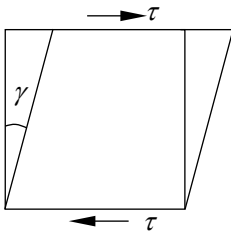
Aquestes equacions posen de manifest el fet que en un sòlid elàstic lineal isòtrop les relacions entre tensions i deformacions queden definides mitjançant solament dues constants elàstiques, en aquest cas E i ν . No obstant això, hi ha altres definicions possibles de les constants elàstiques basades en fenòmens físics diferents de la deformació sota l'assaig de tracció, encara que en conjunt continua sent cert que solament dues resulten independents.

Mòdul d'elasticitat transversal i mòdul de compressibilitat

A continuació es defineixen unes altres dues constants elàstiques de gran importància pel seu significat físic.

a) Mòdul d'elasticitat transversal G :

Si se sotmet un bloc paral·lelepèdric de material elàstic lineal a un assaig de cisallament pur i es relaciona la tensió tallant aplicada amb la variació angular corresponent, ambdues resulten proporcionals amb una relació de proporcionalitat G denominada mòdul d'elasticitat transversal o mòdul tallant.



G és una quantitat que s'expressa en unitats de tensió pel fet de ser la variació angular una magnitud adimensional.

Observant les relacions donades per la llei de Hooke i recordant el significat físic dels components fora de la diagonal dels tensors de tensió i deformació, és immediat observar que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{ij} \frac{E}{2(1+\nu)} = \sigma_{ij}$$

i, per tant, G es relaciona amb E i amb ν de la manera següent:



$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

b) Mòdul de compressibilitat.

El mòdul de compressibilitat a temperatura constant K expressa la relació de proporcionalitat existent entre la deformació volumètrica unitària ε_v i la tensió hidroestàtica. En efecte, si expressem la llei de Hooke en eixos principals, tenim:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu (\sigma_1 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2))$$

Sumant aquestes tres expressions membre a membre, s'obté finalment:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_0$$

El primer membre té un significat físic immediat, ja que és la deformació volumètrica unitària associada a l'estat de deformació. En el segon membre s'observa que aquesta resulta proporcional a la tensió hidroestàtica aplicada. Es defineix el mòdul de compressibilitat K a partir d'aquest resultat de la manera següent:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

L'equació:

$$K \varepsilon_v = \sigma_0$$

és la forma que pren l'equació d'estat d'un sòlid elàstic lineal en el cas isoterm.

K és una quantitat dimensional que s'expressa en unitats de tensió pel fet de ser la deformació volumètrica unitària una magnitud adimensional.

Equacions de Lamé

La llei de Hooke generalitzada expressa les deformacions en funció de les tensions. Les equacions de Lamé resulten d'invertir aquestes relacions a fi d'expressar les tensions en funció de les deformacions. Per fer-ho s'introdueixen dues noves constants elàstiques conegudes com a coeficients de Lamé, definides de la manera següent:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



La primera constant de Lamé no té un significat físic concret i la seva introducció és purament operativa amb vista a simplificar les expressions resultants. La segona constant de Lamé és el mòdul d'elasticitat transversal G , ja definit.

Les equacions de Lamé són, en forma desenvolupada:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_{11} & \sigma_{12} &= 2\mu \varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_{22} & \sigma_{13} &= 2\mu \varepsilon_{13} \\ \sigma_{33} &= \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_{33} & \sigma_{23} &= 2\mu \varepsilon_{23}\end{aligned}$$

i, en forma compacta,

$$\boxed{[\sigma] = \lambda \varepsilon_v [I] + 2\mu [\varepsilon]}$$

Relacions entre les constants elàstiques

Com ja s'ha dit, en un sòlid elàstic lineal existeixen solament dues constants independents. En conseqüència, se'n poden prendre dues com a fonamentals i expressar les altres en funció d'aquestes.

Prenent E i ν com a fonamentals, tenim les expressions ja conegudes:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Prenent λ y μ com a fonamentals, tenim les formes alternatives següents:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Finalment, prenent K i G com a fonamentals, tenim:

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad E = \frac{9GK}{3K + G} \quad \lambda = K - \frac{2G}{3}$$

Evidentment, es poden escriure altres relacions prenent qualsevol parella de constants com a fonamental.

Camp d'existència de les constants elàstiques fonamentals

El fet que un model material elàstic lineal isòtrop sigui físicament possible estableix límits als valors de les constants elàstiques que el defineixen. Així, per exemple, per



raonaments de tipus energètic, es troba que K i G s'han de situar en el rang $0 < K, G \leq \infty$.

D'altra banda, perquè el material sigui estable, ha de complir-se que $E > 0$. Aquestes condicions fixen el camp de variació possible per als valors del coeficient de Poisson. En efecte:

$$\left. \begin{array}{l} G > 0 \\ E > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1+\nu) > 0 \Rightarrow -1 < \nu$$

$$\left. \begin{array}{l} K > 0 \\ E > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(1-2\nu) > 0 \Rightarrow \nu < 0.5$$

$$-1 < \nu < 0.5$$

Per a $\nu = 0.5$, K es fa infinit. Es tracta d'un sòlid incompressible en què la tensió hidrostàtica pot prendre qualsevol valor, ja que:

$$\varepsilon_V = \frac{\sigma_0}{K} = 0, \text{ en què } \sigma_0 \text{ és qualsevol valor finit.}$$

Existeixen diversos materials que s'aproximen a la condició d'incompressibles, com per exemple les gomes.

Per a $\nu = -1$, G es fa infinit. Es tractaria d'un sòlid compressible però indistorsionable. Encara que un tal comportament és compatible amb la física, és molt estrany en la pràctica. De fet, en els materials habituals el coeficient de Poisson no baixa per sota de 0 (encara que existeixen materials amb coeficients de Poisson negatius), per la qual cosa en alguns textos s'estableix com a límits al coeficient de Poisson els següents:

$$0 < \nu \leq 0.5$$

Relacions entre parts esfèriques i desviadores

En un sòlid elàstic lineal, la part esfèrica del tensor tensió resulta proporcional a la part esfèrica del tensor deformació amb un factor de proporcionalitat igual a $3K$, mentre que la part desviadora de tensió ho és a la part desviadora de deformació amb un factor de proporcionalitat $2G$. En efecte:

$$\sigma_0 = K\varepsilon_V \text{ i, per tant,}$$

$$[\sigma_0] = K\varepsilon_V [I] = 3K[\varepsilon_0]$$

D'altra banda,

$$[S] = [\sigma] - [\sigma_0] = 3\lambda[\varepsilon_0] + 2\mu[\varepsilon] - 3K[\varepsilon_0] = 3(\lambda - K)[\varepsilon_0] + 2\mu[\varepsilon]$$



i, tenint en compte que $\lambda - K = \lambda - \lambda - \frac{2}{3}\mu = -\frac{2}{3}\mu$

resulta finalment una relació entre les parts desviadores dels tensors tensió i deformació:

$$[S] = -2\mu[\varepsilon_0] + 2\mu[\varepsilon] = 2\mu[e] = 2G[e]$$

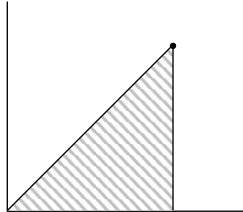
amb què $[\sigma] = 3K[\varepsilon_0] + 2G[e]$ i, en forma inversa: $[\varepsilon] = \frac{[\sigma_0]}{3K} + \frac{[S]}{2G}$

Per aquest motiu, K i G reben també els noms de *mòdul elàstic isotròpic* i *mòdul elàstic distorsional*, respectivament, i són considerades com les característiques elàstiques més fonamentals des del punt de vista físic.

Energia de deformació

A causa del caràcter lineal de la relació entre $[\sigma]$ i $[\varepsilon]$ i a la independència del valor final de la densitat d'energia de deformació respecte al camí de càrrega (condició que defineix el caràcter elàstic del material), el seu càlcul resulta molt simple.

En efecte, considerant el cas uniaxial, tenim:



$$E_\varepsilon^* = \int \sigma d\varepsilon = \int E\varepsilon d\varepsilon = \frac{E}{2}\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

De la mateixa manera, en el cas multiaxial tenim: $E_\varepsilon^* = \int [\sigma]:[d\varepsilon] = \frac{1}{2}[\sigma]:[\varepsilon]$

$$\text{NOTA: } \frac{1}{2}[\sigma]:[\varepsilon] = \frac{1}{2}\text{Tr}([\sigma][\varepsilon]) \text{ (doble producte escalar)}$$

E_ε^* es pot expressar solament en funció de les deformacions introduint les equacions de Lamé.

En efecte:

$$[\sigma] = 3\lambda[\varepsilon_0] + 2\mu[\varepsilon]$$

amb què

$$E_\varepsilon^* = \frac{3}{2}\lambda[\varepsilon_0]:[\varepsilon] + \mu[\varepsilon]:[\varepsilon] = \frac{\lambda}{2}\varepsilon_v^2 + \mu[\varepsilon]:[\varepsilon]$$



Alternativament E_ε^* es pot expressar solament en funció de les tensions aplicant la llei de Hooke:

$$[\varepsilon] = -\frac{3\nu}{E}[\sigma_0] + \frac{1+\nu}{E}[\sigma]$$

amb què

$$\begin{aligned} E_\varepsilon^* &= -\frac{3\nu}{2E}[\sigma]:[\sigma_0] + \mu\frac{1+\nu}{2E}[\sigma]:[\sigma] = \frac{1}{2E}(-9\nu\sigma_0^2 + (1+\nu)[\sigma]:[\sigma]) = \\ &= \frac{1}{2E}\left[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + 2(1+\nu)(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{I_1^2}{E} - \frac{I_2}{G}\right] \end{aligned}$$

La densitat d'energia de deformació es pot descompondre com a suma de les energies de canvi de forma i volum sense fer altra cosa que considerar:

$$E_V^* = \int[\sigma_0]:[d\varepsilon_0] = \frac{1}{2}[\sigma_0]:[\varepsilon_0] = \frac{1}{6K}[\sigma_0]:[\sigma_0] = \frac{\sigma_0^2}{2K} = \frac{I_1^2}{18K}$$

$$E_d^* = \int[S]:[de] = \frac{1}{2}[S]:[e] = \frac{1}{4G}[S]:[S] = -\frac{J_2}{2G} = \frac{3\tau_0^2}{4G}$$

Comportament elàstic lineal isòtrop no isoterm

El que s'ha vist fins aquí correspon a un comportament isoterm, és a dir, sense variacions de temperatura durant el procés de transformació geomètrica del medi continu. No obstant això, en moltes aplicacions pràctiques de l'enginyeria, les deformacions d'origen mecànic, produïdes per les tensions, s'acompanyen de dilatacions i contraccions tèrmiques originades per variacions de temperatura.

És conegut de la física elemental que, entre uns certs límits, el volum d'un cos lliure de coaccions varia proporcionalment amb la temperatura. La relació entre totes dues magnituds físiques es caracteritza mitjançant una constant del material denominada *coeficient de dilatació tèrmica*, definit en el cas uniaxial per l'expressió següent:

$$\Delta\ell = \alpha \Delta T \ell_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \frac{1}{\Delta T} = \frac{\varepsilon}{\Delta T}$$

El coeficient de dilatació tèrmica és, per tant, una quantitat dimensionalment inversa a una temperatura.



La generalització d'aquesta expressió al cas multiaxial se segueix de l'observació empírica que la dilatació tèrmica és isotròpica, és a dir, igual en totes direccions, i en conseqüència es pot escriure:

$$[\varepsilon_{\Delta T}] = \alpha \Delta T [I] = \begin{pmatrix} \alpha \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \Delta T \end{pmatrix}$$

Per tant, en presència de variacions de temperatura, l'estat de deformació total que experimenta un sòlid resulta de la superposició de la deformació tèrmica amb la deformació mecànica originada per les tensions. La consideració d'aquestes dues aportacions condueix a les equacions constitutives del comportament sòlid termoelàstic lineal.

A continuació s'introdueix l'efecte de les variacions de temperatura en cadascuna de les equacions vistes anteriorment per a les transformacions isoterms. Cal destacar, no obstant això, que en aquest cas les constants elàstiques del material, així com el coeficient de dilatació tèrmica, poden ser funció de la temperatura, factor que en moltes ocasions s'ha de tenir en compte.

En les equacions següents, $\bar{\varepsilon}$ és la deformació total (mecànica + tèrmica):

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \{\bar{\varepsilon}_m\} + \{\varepsilon_{\Delta T}\}$$

en què

$$\{\bar{\sigma}\} = [D] \{\bar{\varepsilon}_m\} = [D] (\{\bar{\varepsilon}\} - \{\varepsilon_{\Delta T}\}) \quad (\text{Lamé})$$

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [C] \{\bar{\sigma}\} + \{\varepsilon_{\Delta T}\} \quad (\text{Hooke})$$

a) Equació d'estat:

$$[\sigma_0] = 3K([\varepsilon_0] - \alpha \Delta T [I])$$

b) Llei de Hooke generalitzada no isoterma (relacions de Duhamel-Neumann):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} \left(\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right) + \alpha \Delta T & \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} \left(\sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \right) + \alpha \Delta T & \varepsilon_{13} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} \left(\sigma_{33} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{11}) \right) + \alpha \Delta T & \varepsilon_{23} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \end{aligned}$$

$$\boxed{[\varepsilon] = \left(\alpha \Delta T - \frac{3\nu}{E} \sigma_0 \right) [I] + \frac{1+\nu}{E} [\sigma]}$$



Equacions de Lamé:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_{11} - 3K\alpha \Delta T & \sigma_{12} &= 2\mu \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} &= \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_{22} - 3K\alpha \Delta T & \sigma_{13} &= 2\mu \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{33} &= \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_{33} - 3K\alpha \Delta T & \sigma_{23} &= 2\mu \varepsilon_{23}\end{aligned}$$

$$\boxed{[\sigma] = (\lambda \varepsilon_v - 3K\alpha \Delta T) [I] + 2\mu [\varepsilon]}$$

d) Relacions $[\sigma]$, $[\varepsilon]$ en termes dels components esfèrics i desviadors:

$$[\sigma] = 3K (\varepsilon_0 - \alpha \Delta T) [I] + 2G [e]$$

$$[\varepsilon] = \left(\alpha \Delta T + \frac{\sigma_0}{3K} \right) [I] + \frac{[S]}{2G}$$

És important notar que en aquestes equacions les constants elàstiques i el coeficient tèrmic α són en realitat variables amb la temperatura, per la qual cosa s'han de considerar valors mitjans en l'interval de temperatures especificat.

Teoria de la fallada

La capacitat d'un material sòlid per mantenir un comportament elàstic (reversible) no és infinita. Quan se supera un cert límit en termes de tensió o de deformació, apareixen deformacions irreversibles que persisteixen fins i tot en absència de les accions que les han ocasionat.

En aquest apartat es presenten una sèrie de criteris que permeten establir el límit del comportament elàstic. L'aplicabilitat d'aquests criteris transcendeix la hipòtesi de linealitat i fins i tot en alguns casos l'aplicabilitat va més enllà del límit elàstic.

Introducció al mecanisme físic estàtic de la fallada

Quan un material és traccionat mantenint la tensió per sota d'un cert límit, la deformació resultant és temporal, i la forma inicial es recupera en desaparèixer l'esforç. Si aquest límit és superat, apareixen deformacions irreversibles, i si la sol·licitació externa perdura, es pot arribar al trencament final.

A nivell atòmic, els materials metàl·lics poden sofrir tres tipus diferents d'alteracions de la seva xarxa cristal·lina sota l'acció de les tensions internes. Aquestes alteracions són el lliscament, el maclatge i el clivatge. Hi ha un valor crític de la tensió tallant perquè comenci el lliscament, valor que disminueix amb la temperatura. Així mateix, hi ha un valor crític de la tensió tallant perquè tingui lloc el maclatge, valor que depèn del nivell de deformació prèvia. Finalment, hi ha un valor crític de la tensió normal per

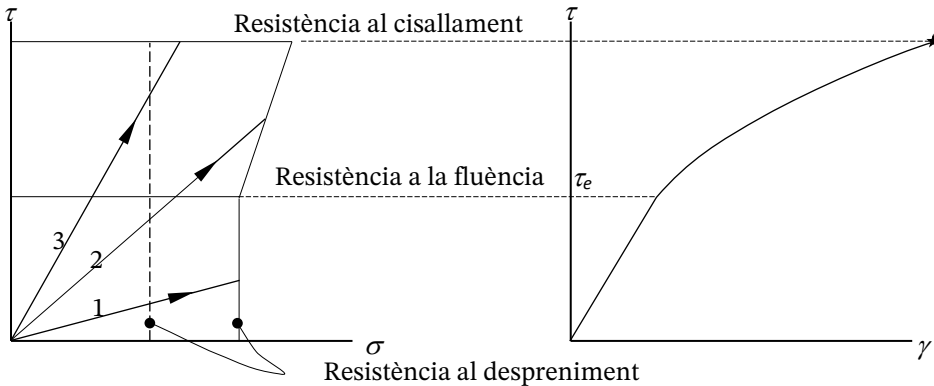


començar el clivatge sobre un pla en particular, no sensible a la deformació prèvia ni a la temperatura.

El procés de fallada que té lloc finalment depèn de la tensió crítica que se supera primer. En el cas que es produeixi un lliscament o un maclatge, el metall presentarà deformació plàstica i posteriorment un trencament dúctil. Si la tensió crítica que se supera primer és la de clivatge, es produirà el trencament fràgil per separació de dos plans cristal·lins.

A la figura següent es representa un esquema, anomenat *diagrama d'estat mecànic*, que permet visualitzar la varietat de fallada que pot tenir lloc. La situació està una mica simplificada, ja que es considera un sol valor crític per als mecanismes de fallada associats a les tensions tallants. El diagrama es construeix partint del fet que, en funció del tipus d'estat tensional, els materials poden fallar a conseqüència de les tensions normals de tracció, per desprendiment, o de les tensions tallants, per cisallament. Segons això, es representen els valors crítics corresponents a cada concepte en forma de fronteres sobre el gràfic. Aquestes fronteres es consideren característiques del material.

Sobre el mateix gràfic s'han representat les fronteres corresponents a dos tipus de material, un en línia contínua i l'altre en línia discontinua. Així mateix, s'han representat tres línies que corresponen a l'evolució de tres estats tensionals diferents durant un procés de càrrega proporcional.



Si considerem el comportament del primer material (fronteres en línia contínua), observem que, en el primer cas, línia 1, es produirà la fallada per desprendiment abans que la deformació plàstica, cosa que donarà lloc a un comportament fràgil. En el segon cas, línia 2, es posarà en marxa una fallada per fluència i un posterior trencament per desprendiment. Finalment, en el cas representat per la línia 3, es posarà en marxa una fallada per fluència plàstica i un posterior trencament per cisallament. En aquests dos



últims casos el comportament serà més aviat dúctil. Si considerem ara el comportament del segon material (fronteres en línies discontinues), observem que en tots els processos de càrrega la fallada final es produeix de manera fràgil, per desprendiment, sense que arribi a produir-se fluència plàstica en els casos 1 i 2.

Per tant, el comportament dúctil o fràgil del material depèn de la seva constitució física (en els metalls el comportament es considera fràgil quan l'allargament a trencament en l'assaig de tracció és inferior al 5%), però també de l'estat tensional a què es veu sotmès.

L'aparició de qualsevol d'aquests fenòmens, trencament o fluència, comportarà o bé la fallada del material o bé l'aparició de deformacions irreversibles. Per aquest motiu, resulta de gran importància establir criteris que fixin la frontera per sobre de la qual es presentarà cada tipus de fallada.

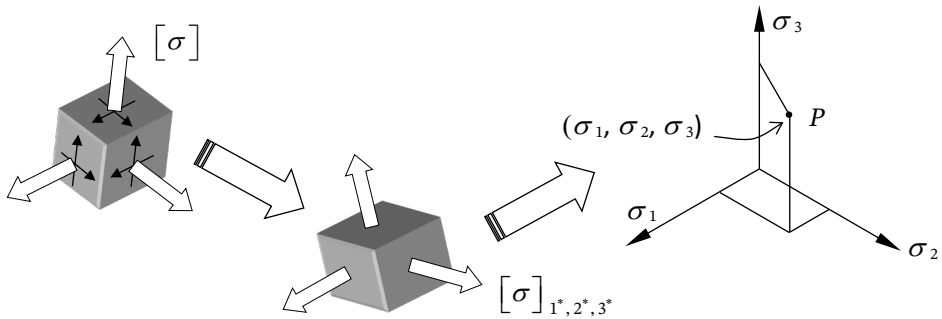
En les situacions simples de tracció, compressió i tall purs és relativament fàcil establir experimentalment aquest límit. No obstant això, el problema resulta molt més complex quan l'estat tensional és multiaxial. En les pàgines que segueixen s'exposen diversos enfocaments per resoldre aquesta qüestió.

La superfície límit en l'espai de les tensions principals

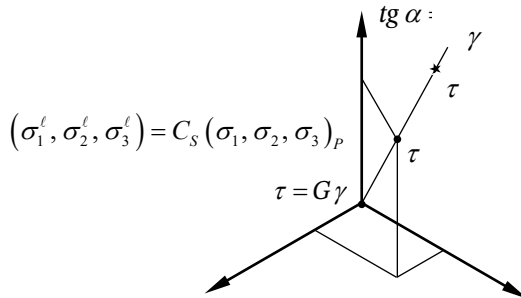
La mecànica del medi continu permet donar una solució al problema de valorar la fallada d'un material determinat sota tensió. Per fer-ho, s'introdueix el concepte de superfície límit, que es descriu a continuació, i que és vàlid per predir la fallada en un material isòtrop tant si aquest consisteix en inici de deformacions irreversibles com si consisteix en el trencament.

Sigui $[\sigma]$ el tensor tensió que actua sobre un punt d'un material isòtrop. Com és sabut, aquest tensor queda definit per sis quantitats independents: 3 tensions normals i 3 tensions tallants. Si s'expressa el tensor en els seus eixos principals, aquestes 6 variables són substituïdes per les 3 tensions principals i els 3 angles que orienten les direccions principals. No obstant això, si el material és isòtrop des d'un punt de vista resistent, l'orientació de les tensions principals no pot incidir en l'avaluació de la condició de fallada, per la qual cosa l'estat de tensió ha de quedar totalment caracteritzat des d'aquest punt de vista, solament amb la terna de valors corresponents a les tensions principals.

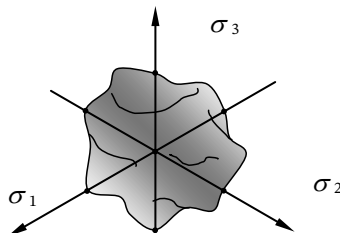
Així doncs, es pot considerar que en un sòlid isòtrop cada possible tensor tensió queda representat per un punt en un espai tridimensional, les coordenades del qual són les tensions principals. Aquest espai s'anomena *espai de Haigh-Westergaard*.



Donat un estat de tensió arbitrari, els seus components es poden escalar mitjançant un factor k que variï entre 0 i qualsevol valor. D'aquesta manera ens podem imaginar un experiment ideal consistent a anar incrementant l'estat de tensió, partint de l'origen, proporcionalment, fins a aconseguir la situació límit més enllà de la qual apareix la fallada (trencament o deformació irreversible). El valor de K per a aquest instant representa el número pel qual cal multiplicar l'estat de tensió donat per aconseguir la condició límit. En termes d'enginyeria, aquest valor rep el nom de *coeficient de seguretat*.



Evidentment, el procés de càrrega així definit queda representat mitjançant un segment de recta en l'espai de les tensions principals que parteix de l'origen i acaba en un punt que representa l'estat límit. Si per a un material donat, i per al mecanisme de fallada analitzada, es repeteix aquest experiment en totes les possibles orientacions al voltant de l'origen, s'obtindrà finalment una superfície, lloc geomètric de tots els punts representatius d'estats límit així obtinguts, coneguda com a *superfície límit*.





La superfície límit és una característica del material que defineix la seva resistència respecte a un mode de fallada determinat. Un estat de tensió donat és “segur” si el coeficient de seguretat és més gran que la unitat, és a dir, si el punt representatiu de l'estat de tensió queda dins de la superfície límit.

Per al cas particular habitual de tensió plana, en què una de les tensions principals és nul·la, el domini de seguretat queda definit per una corba tancada, intersecció de la superfície límit amb un dels plans coordenats.

Per a un mateix material poden existir diverses superfícies límit, cadascuna de les quals associada a un mode de fallada diferent. El mode de fallada que es produeix primer depèn de la superfície límit que s'aconsegueix en primer lloc durant el procés de càrrega. La “fallada” en un sentit genèric queda definida llavors per l'envolupant interior de totes les possibles superfícies límit.

Aquest enfocament és teòricament correcte, però presenta un inconvenient pràctic greu; la determinació de la superfície límit pel camí assenyalat resultaria tremendament laboriosa i el seu cost inassumible. Per aquest motiu s'han desenvolupat diverses teories de fallada, consistentes a establir algun tipus d'aproximació contínua a la superfície límit. Aquestes aproximacions han estat o bé de tipus purament matemàtic, postulant una equació genèrica de la superfície límit i ajustant-ne els coeficients a les dades experimentals disponibles, o bé de tipus físic, postulant paràmetres definidors de la fallada (tensions, deformacions o energia de deformació) i utilitzant el valor d'aquests paràmetres per correlacionar qualsevol estat tensional genèric amb els resultats dels assajos tecnològics disponibles, generalment tracció, compressió o cisallament simples.

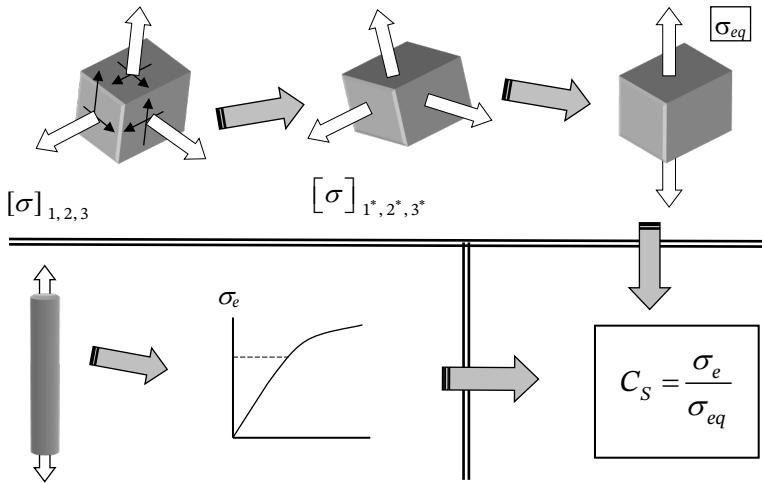
Concepte de tensió equivalent

L'últim enfocament exposat per a l'estimació de la superfície límit porta generalment associat el fet que la informació disponible sol ser únicament la corresponent a l'assaig de tracció uniaxial, i en aquest cas resulta especialment útil el concepte de tensió equivalent, que es defineix a continuació.

La tensió equivalent a un estat de tensió multiaxial, i per a un mode de fallada donat, és aquella tensió que en l'assaig de tracció uniaxial causaria el mateix “efecte” que l'estat multiaxial analitzat.

Cal interpretar aquí que “causar el mateix efecte” és sinònim del fet que cert paràmetre físic, considerat determinant de la fallada, prengui el mateix valor en l'estat uniaxial equivalent que en l'estat multiaxial representat pel paràmetre.

Cal destacar que existeixen materials amb diferent valor de resistència a tracció que a compressió; aquests materials s'anomenen asimètrics. Per a aquests es poden definir dues tensions equivalents (una per a tracció i una altra per a compressió) o bé una única tensió equivalent definida a tracció.



A continuació, es presenten les principals teories de fallada existents en funció del paràmetre de correlació considerat, la superfície límit a què donen lloc, així com l'expressió de la corresponent tensió equivalent associada.

Teories simples de fallada

S'inclouen sota aquest títol sis teories que es fonamenten en l'elecció de solament un dels molts factors que influeixen sobre la resistència del material.

Teoria de la tensió normal màxima (Rankine)

La teoria de la tensió normal màxima postula que, per a un estat de tensió arbitrari, la fallada del material comença quan una de les tensions principals extremes aconseguix un valor igual al valor límit d'aquest paràmetre associat a la fallada a tracció o a compressió en els assajos de tracció i compressió simples.

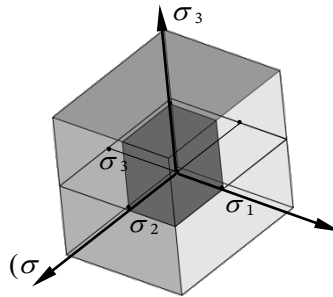
En conseqüència, la tensió normal s'ha de mantenir delimitada entre els valors:

$$-\sigma_{e^-} \leq \sigma \leq \sigma_{e^+}$$

La condició límit, expressada en funció de les tensions principals ordenades, és:

$$|\sigma_{III}|_C = \sigma_{e^-} \quad |\sigma_I|_T = \sigma_{e^+}$$

És fàcil comprovar que aquestes condicions corresponen a un cub en l'espai de les tensions principals. Aquest cub queda desplaçat de l'origen si el material és asimètric.

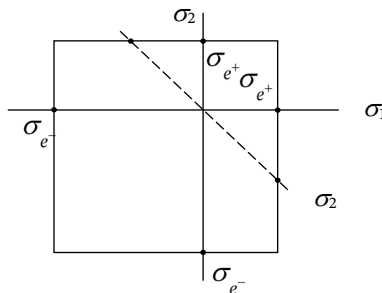


La tensió equivalent pren dos valors possibles segons que es tracti de comparar-la amb la tensió límit a tracció o a compressió.

$$\sigma_{eq}^+ = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)_T \quad \sigma_{eq}^- = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)_C$$

Cal destacar que aquest criteri prediu una resistència finita tant a la tracció com a la compressió hidroestàtiques. Encara que la primera resistència finita sigui congruent amb les observacions experimentals, no sembla que pugui fixar-se un límit a la resistència a la compressió hidroestàtica.

Per al cas habitual de tensió plana, s'obté un quadrat.



En aquest mateix gràfic és immediat veure que en un cas de cisallament pur, on les tensions principals són iguals i de signes contraris i iguals en valor absolut a la tensió tallant màxima, aquest criteri prediu que la fallada es produeix per a tensions tallants de valor igual a la resistència a la tracció. Aquest resultat és aproximadament cert per a materials fràgils amb baixa resistència al despreniment, però no per a materials dúctils quan la fallada es produeix per lliscament.

Experimentalment, s'ha verificat que el criteri de la tensió normal màxima és segur en els quadrants 1r i 3r, però pot resultar insegur en els quadrants 2n i 4t, especialment quan s'utilitza per analitzar materials dúctils.

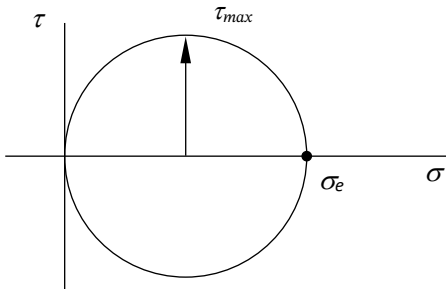


Criteri de la tensió tallant màxima (Tresca-Guest)

La teoria de la tensió tallant màxima postula que, per a un estat de tensió arbitrari, la fallada del material comença quan la tensió tallant màxima aconseguix un valor igual al valor límit d'aquest paràmetre associat a la fallada en l'assaig de tracció simple.

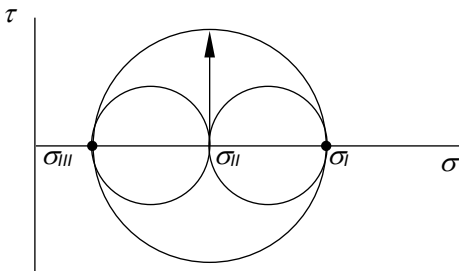
Pel fet d'estar la deformació plàstica lligada a la presència de tensions tallants, aquest criteri és especialment útil per predir l'inici de la fluència plàstica en materials dúctils.

La tensió tallant màxima en aconseguir-se la fallada en l'assaig de tracció és igual al radi del cercle de Mohr corresponent, i, per tant:



$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_e}{2}$$

En l'estat multiaxial de tensió s'ha vist anteriorment que la tensió tallant màxima és:



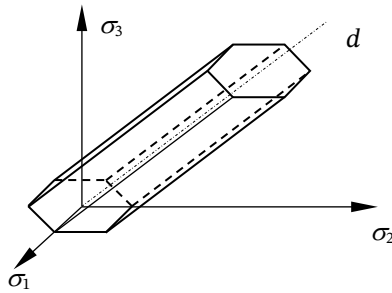
$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

amb què la condició límit per a aquest criteri es pot formular de la manera següent:

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{\sigma_e}{2}$$

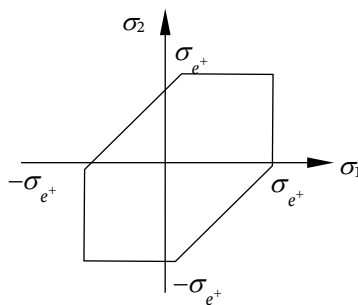
o bé, en termes d'una tensió uniaxial equivalent: $\sigma_{eq} = \sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_e$

És fàcil comprovar que aquesta condició correspon, en l'espai de les tensions principals, a un prisma hexagonal regular la directriu del qual coincideix amb la bisectriu del primer octant.



Tant l'expressió analítica del criteri com la seva representació gràfica posen de manifest que un estat de tensions pròxim o igual a una tensió hidroestàtica, de tracció o de compressió, no produirien fallada per fluència. Tanmateix, això no vol dir que el material no pogués fallar per despreniment fràgil com a causa de les tensions normals de tracció. Per verificar aquest punt, s'hauria d'utilitzar un altre criteri, per exemple, el de la tensió normal màxima exposat abans. També val la pena observar que el criteri de la tensió tallant màxima no permet tractar materials amb desigual resistència a tracció que a compressió, i, per tant, la seva aplicació queda limitada a materials simètrics.

Per al cas habitual de tensió plana s'obté un hexàgon irregular. En aquest mateix gràfic és immediat veure que en un cas de cisallament pur, on les tensions principals són iguals i canviades de signe i iguals en valor absolut a la tensió tallant màxima, aquest criteri prediu que la fallada es produeix per a tensions tallants de valor igual a la meitat de la resistència a la tracció. Aquest resultat és aproximadament cert quan el criteri s'utilitza per predir l'inici de la fluència en materials dúctils, especialment si es tracta de cristalls purs; en materials policristal·lins el valor crític predit per a la tensió tallant és de l'ordre d'un 15% inferior al que s'observa experimentalment.



Criteri de la màxima deformació longitudinal unitària

La teoria de la màxima deformació longitudinal unitària postula que, per a un estat de tensió arbitrari, la fallada del material comença quan la deformació longitudinal unitària aconsegueix un valor igual al valor límit d'aquest paràmetre associat a la fallada en l'assaig de tracció simple.



La deformació longitudinal màxima en el moment d'assolir-se la fallada en l'assaig de tracció és, aplicant la llei de Hooke elemental:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E}$$

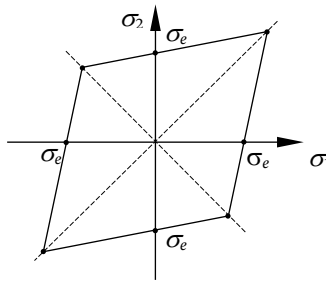
mentre que en l'estat multiaxial de tensió tenim: $\varepsilon_I = \frac{1}{E} [\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III})]$

Així doncs, la condició límit per a aquest criteri es pot formular de la manera següent:

$$\frac{1}{E} [\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III})] = \frac{\sigma_e}{E}$$

o bé, en termes d'una tensió uniaxial equivalent: $\sigma_{eq} = \sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III}) = \sigma_e$

Per al cas habitual de tensió plana s'obté un rombe:



En un cas de cisallament pur, on les tensions principals són iguals i de signe contrari i iguals en valor absolut a la tensió tallant màxima, aquest criteri prediu que la fallada es produeix per a tensions tallants de valor igual a:

$$\tau = \frac{\sigma_e}{1 + \nu}$$

Aquesta teoria és aplicable a materials simètrics amb igual resistència a tracció que a compressió i quan la fallada s'origina per descohesió entre diversos components d'un material compost a conseqüència de la seva deformabilitat desigual. També s'ha utilitzat extensament per a l'anàlisi de la resistència a la fatiga. En la resta de casos no s'aconseixa fer-ne ús.

Teoria de l'energia de deformació

La teoria de l'energia de deformació postula que, per a un estat de tensió arbitrari, la fallada del material comença quan l'energia de deformació absorbida per unitat de volum aconsegueix un valor igual al valor límit d'aquest paràmetre associat a la fallada en l'assaig de tracció simple.



La densitat d'energia de deformació en el moment d'assolir-se la fallada en l'assaig de tracció és igual a:

$$E_{\epsilon}^* = \frac{\sigma_e^2}{2E}$$

En l'estat multiaxial de tensió s'ha vist anteriorment que la densitat d'energia de deformació és:

$$E_{\epsilon}^* = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3))$$

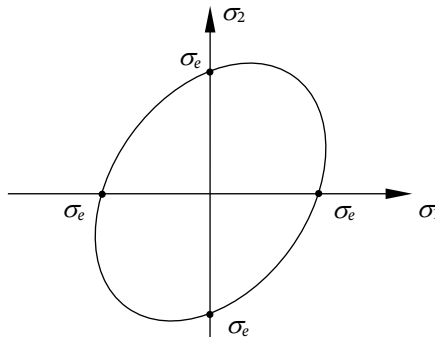
Per tant, la condició límit per a aquest criteri es pot formular de la manera següent:

$$\frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)) = \frac{\sigma_e^2}{2E}$$

o bé, en termes d'una tensió uniaxial equivalent:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} = \sigma_e$$

Per al cas habitual de tensió plana, s'obté una figura el·líptica:



A partir de l'expressió analítica de la condició de fallada, és immediat veure que en un cas de cisallament pur, on les tensions principals són iguals i de signe contrari i iguals en valor absolut a la tensió tallant màxima, aquest criteri prediu que la fallada es produeix per a tensions tallants de valor igual a:

$$\tau = \frac{\sigma_e}{\sqrt{2(1+\nu)}}$$

Aquest criteri és aplicable solament a materials amb igual resistència a tracció que a compressió. No obstant això, fins i tot en aquest cas els resultats no són satisfactoris, ja que resulten conservadors en els quadrants 1r i 3r però excessivament optimistes en els quadrants 2n i 4t.



Teoria de l'energia de distorsió (Von Mises)

Aquesta teoria és una evolució de l'anterior en què es pretén predir la fallada per fluència, observant que aquesta està associada a l'energia de canvi de forma, o de distorsió, però no a la de canvi de volum, ja que aquest últim és un fenomen essencialment elàstic.

La teoria de l'energia de distorsió postula que, per a un estat de tensió arbitrari, la fallada del material comença quan l'energia de distorsió absorbida per unitat de volum assoleix un valor igual al valor límit d'aquest paràmetre associat a la fallada en l'assaig de tracció simple.

En l'estat multiaxial de tensió s'ha vist anteriorment que la densitat d'energia de distorsió és:

$$E_d^* = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

La densitat d'energia de distorsió en assolir-se la fallada en l'assaig de tracció és igual a:

$$E_d^* = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_e^2$$

amb què la condició límit per a aquest criteri es pot formular de la manera següent:

$$\frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_e^2$$

o bé, en termes d'una tensió uniaxial equivalent:

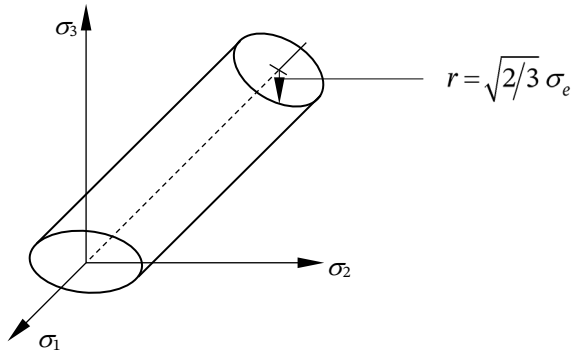
$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_e$$

Igual que succeeix amb el criteri de la tensió tallant màxima, tant l'expressió analítica del criteri com la seva representació gràfica posen de manifest que un estat de tensions pròxim o igual a una tensió hidroestàtica, de tracció o de compressió, no produiria fallada per fluència. Tanmateix, això no vol dir que el material no pogués fallar per despeniment fràgil com a causa de les tensions normals de tracció. Per verificar aquest punt s'hauria d'utilitzar un altre criteri, per exemple el de la tensió normal màxima exposat abans.

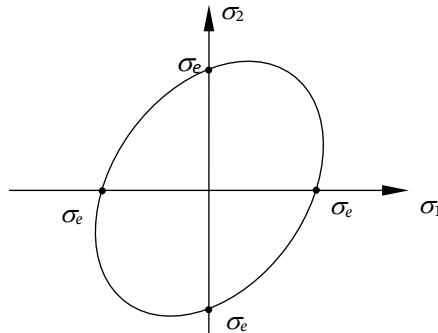
També convé observar que el criteri de l'energia de distorsió no permet tractar materials asimètrics amb desigual resistència a tracció que a compressió.



El criteri de l'energia de distorsió correspon, en l'espai de les tensions principals, a un cilindre de radi $r = \sqrt{2/3} \sigma_e$, la directriu del qual coincideix amb la bisectriu del primer octant, i que inscriu el prisma hexagonal resultant del criteri de la tensió tallant màxima.



Per al cas habitual de tensió plana s'obté una el·lipse:



Pel que fa a l'expressió analítica del criteri immediat, cal tenir en compte que en un cas de cisallament pur, on les tensions principals són iguals i de signe contrari i iguals en valor absolut a la tensió tallant màxima, aquest criteri prediu que la fallada es produeix per a tensions tallants de valor igual a:

$$\tau = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$$

Aquest resultat és molt ajustat als resultats experimentals quan el criteri s'utilitza per predir l'inici de la fluència.

El criteri de l'energia de distorsió presenta la limitació de ser aplicable solament a materials simètrics amb igual resistència a tracció que a compressió.



Existeix un enfocament alternatiu que condueix exactament al mateix resultat que el criteri de l'energia de distorsió i que consisteix a prendre com a paràmetre definidor de la fallada la tensió tallant que actua en els plans octaèdrics. D'aquesta manera s'estén el camp de validesa d'aquest criteri més enllà del camp aparentment imposat per la seva deducció anterior a partir de la teoria de l'elasticitat lineal. En efecte, la tensió tangencial octaèdrica en el cas general és:

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

i, en aconseguir el límit elàstic en l'assaig de tracció, pren el valor:

$$\tau_{0_e} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_e$$

Si igualem ambdós resultats:

$$\frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_e$$

i, operant:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \sigma_e$$

resultat coincident amb l'anterior.

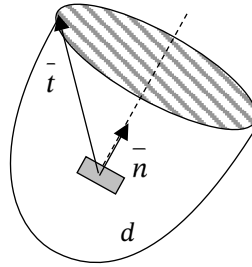
Altres teories

A part de les teories exposades, n'hi ha moltes d'altres que intenten donar una solució més general al problema de la fallada estàtica dels materials, i que resolen algunes de les seves limitacions. A continuació se'n presenten unes quantes.

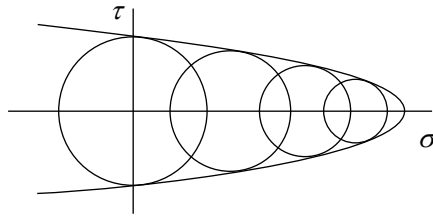
Teoria de la corba intrínseca

En aquest enfocament es postula que existeix una relació de causa-efecte entre el vector tensió i la fallada del material en un determinat pla. Per tant, la fallada resulta de la interacció entre tensions normals i tallants, i no solament d'una d'elles.

Per visualitzar-ho, imaginem-nos que s'augmenta la sol·licitació de mode progressiu i homotètic (càrrega proporcional), fins que comenci la fallada en un pla determinat. Es diu llavors que el vector tensió corresponent ha aconseguit l'estat límit en aquest pla. Els extrems de tots els vectors tensió corresponents a estats límit sobre aquest pla així obtinguts defineixen una superfície anomenada *superfície intrínseca*.



A causa de la isotropia del material, aquesta superfície és de revolució, i independent del pla de referència considerat, i defineix la capacitat resistent del material davant d'accions combinades. Pot ser, per tant, determinada a partir de la seva corba generatriu, anomenada *corba intrínseca*. Atès que la superfície intrínseca és única, la seva intersecció amb el pla σ - τ haurà de coincidir amb l'envolupant de tots els cercles de Mohr corresponents a estats límit de tensió. La forma d'aquesta envolupant es considera que és una característica mecànica del material que depèn de les propietats físiques d'aquest, especialment de la seva resistència al desprendiment i al lliscament.



Finalment, convé observar que, en conseqüència, s'admet que la fallada queda determinada solament per les tensions principals extremes, però no per la tensió principal intermèdia.

S'han proposat diverses aproximacions per estimar la corba intrínseca. A continuació se n'exposen dues.

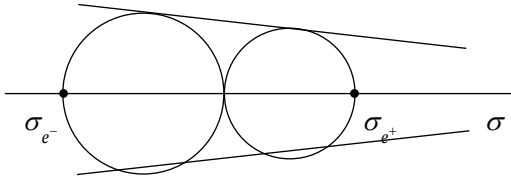
Teoria de Coulomb-Mohr

En aquesta teoria es postula que el valor límit de les tensions tallants necessari perquè comenci el lliscament entre plans confrontants queda condicionat pel fregament intern entre ells, i que aquest al seu torn és una funció lineal de les tensions normals. Així doncs, una tensió normal de tracció afavoreix el lliscament intern, mentre que una altra de compressió el dificulta, cosa que dona com a resultat un comportament asimètric.

Això equival a aproximar la corba intrínseca en el pla σ - τ mitjançant dues rectes. Aquestes rectes es poden obtenir traçant les tangents als cercles de Mohr corresponents



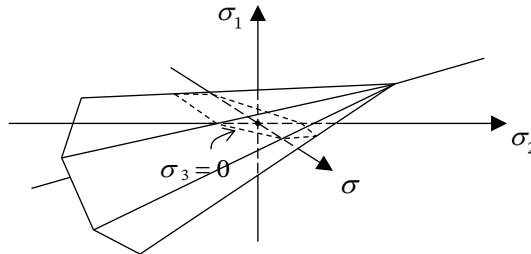
als assajos de tracció i compressió simples. Una construcció geomètrica simple permet llavors establir l'expressió analítica corresponent:



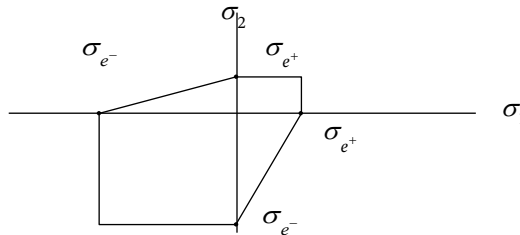
condició límite: $\sigma_I - \kappa \sigma_{III} = \sigma_{e^+}$

amb $\kappa = \frac{\sigma_{e^+}}{\sigma_{e^-}}$

La superfície límit resultant en l'espai de les tensions principals és una piràmide hexagonal, de la qual es deriva una resistència finita a la tracció hidroestàtica i una resistència infinita a la compressió hidroestàtica.



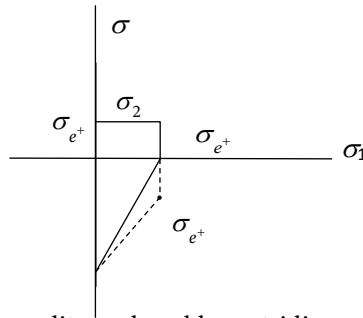
La representació gràfica per a l'estat de tensió plana és un hexàgon irregular:



El valor de tensió tallant límit per a l'assaig de tall resulta ser:

$$\tau = \frac{\sigma_{e^+}}{1 + \kappa}$$

Es pot considerar la teoria de Coulomb-Mohr com una generalització de la teoria de la tensió tallant màxima per al cas en què les resistències a tracció i a compressió resulten diferents. Quan s'utilitza per a materials fràgils asimètrics, dona resultats excessivament conservadors en els quadrants 2n i 4t. Per aquest motiu, se n'ha proposat una variant coneguda com a *teoria de Coulomb-Mohr modificada*, consistent a modificar gràficament la forma de la corba límit en els dos quadrants esmentats.

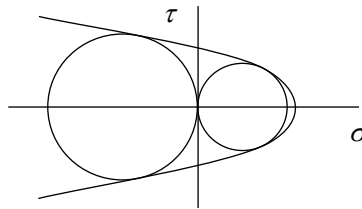


Aquest resultat es pot generalitzar al problema tridimensional, de què en resulta una superfície complexa el detall de la qual no es descriu aquí.

Teoria de la corba intrínseca parabòlica

Una altra alternativa al mateix problema consisteix a utilitzar una aproximació parabòlica de la corba intrínseca del tipus:

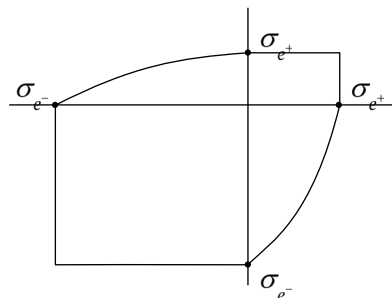
$$\sigma = A\tau^2 + B$$



on A i B són constants que es calculen a partir de les condicions de tangència amb els cercles de Mohr corresponents als assajos de tracció i compressió simples. En funció de les tensions principals extremes σ_I i σ_{III} , el criteri s'expressa analíticament com a:

$$(\sigma_I - \sigma_{III})^2 - (\sigma_{e^+} - \sigma_{e^-})(\sigma_I + \sigma_{III}) = \sigma_{e^+} \cdot \sigma_{e^-}$$

Per al cas habitual de tensió plana, la corba límit resultant té l'aspecte següent:





La tensió tallant límit, predita per al cas de cisallament pur, és:

$$\tau = \frac{\sqrt{\sigma_{e^+} \cdot \sigma_{e^-}}}{2}$$

Quan la resistència a tracció i compressió resulten iguals, aquest criteri coincideix amb el de la tensió tallant màxima. Per a materials fràgils, l'aproximació en els quadrants 2n i 4t resulta notablement millorada.

Teories derivades de l'enfocament de Von Mises per a materials asimètrics

Com ja s'ha vist, el criteri de fallada de Von Mises és molt apropiat per predir el començament de la fluència plàstica en materials simètrics. No obstant això, hi ha nombrosos materials que, encara que qualitativament presentin comportaments semblants a les prediccions del criteri de Von Mises, són malgrat tot asimètrics. Per a aquests casos s'han desenvolupat versions modificades d'aquest criteri que permeten incorporar comportaments asimètrics a partir de l'ajust dels coeficients del model analític als resultats dels assajos de tracció i compressió simples, o fins i tot també als de l'assaig de cisallament.

Teoria de Balandín-Stassi

Aquesta teoria postula que la fallada es produeix a conseqüència de l'efecte combinat de les tensions normal i tangencial octaèdriques, i que l'efecte de la primera és de tipus lineal. L'expressió analítica corresponent per a la condició límit és:

$$3(1-\kappa)\sigma_0 \cdot \sigma_{e^-} + \sigma_{VM}^2 = \sigma_{e^+} \cdot \sigma_{e^-}$$

$$\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

La correlació entre les tensions límit en els assajos de tracció i compressió simples i la tensió límit en l'assaig de cisallament resulta especialment ben ajustada als resultats experimentals:

$$\tau = \sqrt{\frac{\sigma_{e^+} \cdot \sigma_{e^-}}{3}}$$

Aquesta expressió s'ha aplicat amb èxit a materials lleugerament asimètrics, com certs polímers.



Teoria de Yagn-Buginski

Aquesta teoria constitueix una generalització de l'anterior que permet incloure els resultats de l'assaig de cisallament. En aquest cas, se suposa que l'efecte de la tensió normal octaèdrica és de tipus quadràtic, cosa que dona lloc a una expressió per a la condició límit del tipus:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + B(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = C$$

Es tracta d'una funció polinòmica de segon grau simètrica respecte a les tres tensions principals. Les constants A , B i C del model es determinen de manera que la superfície resultant verifiqui els resultats dels assajos de tracció, compressió i cisallament simples. En funció dels resultats d'aquests assajos, $\tau_e, \sigma_{e^+}, \sigma_{e^-}$, les constants A , B y C prenen els valors següents:

$$A = \frac{6\tau_e^2 - 2\sigma_{e^+}\sigma_{e^-}}{\sigma_{e^+}\sigma_{e^-}} \quad B = \frac{6\tau_e^2(\sigma_{e^-} - \sigma_{e^+})}{\sigma_{e^+}\sigma_{e^-}} \quad C = 6\tau_e^2$$

En el cas particular que $\tau = \sqrt{\frac{\sigma_{e^+}\sigma_{e^-}}{3}}$, aquesta teoria coincideix amb l'anterior.

Conclusió

El gran nombre de teories desenvolupades amb vista a predir la fallada mecànica, per fluència o per trencament, d'un component o estructura en servei, dona compte de la complexitat del fenomen. Cap no és prou general per ser utilitzada en tots els casos. Encara més: amb tota probabilitat, les superfícies límit apropiades per definir el començament de la fluència són diferents de les apropiades per determinar el trencament final, i aquestes al seu torn es poden duplicar depenent de si la fallada es produeix per despreniment o per cisallament. Queda sota la responsabilitat de l'enginyer decidir quin o quins dels enfocaments proposats ha d'aplicar a cada cas particular.

Aquest autor ha proposat unificar una gran part dels enfocaments anteriors a partir d'una única expressió universal per a la condició límit donada per un polinomi de segon grau simètric respecte a les tensions principals ordenades:

$$C_1(\sigma_I + A\sigma_{II} + \sigma_{III}) + C_2(\sigma_I^2 + A\sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) + C_3(A\sigma_{II}(\sigma_I + \sigma_{III}) + \sigma_I\sigma_{III}) = 1$$

Els coeficients C_1 , C_2 i C_3 s'han de determinar a partir dels assajos de tracció, compressió i cisallament simples. El coeficient A determina la intervenció o no de la tensió principal intermèdia en el mecanisme de fallada.



$$C_1 = \frac{\sigma_{e^-} - \sigma_{e^+}}{\sigma_{e^+} \sigma_{e^-}} \quad C_2 = \frac{1}{\sigma_{e^+} \sigma_{e^-}} \quad C_3 = 2C_2 - 1/\tau_e^2$$

Quan els coeficients C_i s'ajusten a partir dels límits de fluència en cada assaig, s'aconseïa prendre $A = 1$, i la superfície resultant prediu llavors el començament de la fluència plàstica per a una situació multiaxial qualsevol. Quan els coeficients C_i s'ajusten als valors de trencament en cada assaig, s'aconseïa prendre $A = 0$, i la superfície resultant prediu llavors el començament del trencament per a una situació multiaxial qualsevol. En aquest cas, malgrat tot, s'han de considerar les diferències existents entre les tensions reals de trencament i els valors d'enginyeria generalment reportats com a resultats dels assajos.

En cada cas en particular es recomana determinar les dues superfícies i explorar quina de les dues condicions de fallada, fluència o trencament resulta més crítica per a l'estat de tensions donat.

5.5. Comportaments constitutius materials fluids

En aquest apartat s'introdueixen les equacions constitutives materials més simples per a un medi continu fluid (gasos i líquids) i, com en les anàlisis anteriors, se suposarà un comportament isotròpic.

5.5.1. Fluids ideals

Es defineix com a fluid ideal, o no viscos, aquell que per la seva naturalesa no pot transmetre cap mena de tensió tallant. Aquesta idealització és vàlida per a molts problemes pràctics.

Com sigui que en general un fluid no pot suportar tensions normals de tracció (solament els líquids en estat pur ho poden fer; els líquids reals generen bombolles de vapor quan la pressió aconsegueix la seva pressió de vapor i es produeixen discontinuïtats en el medi; aquest fenomen s'anomena *cavitació*) és costum expressar les tensions normals de compressió com a pressions, definides com a positives i, per tant, de signe contrari a les tensions. En conseqüència, el tensor tensió associat ha de ser necessàriament esfèric pel fet de ser nul·la la seva part desviadora. En forma matricial:

$$\left[\sigma \right] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \text{ en què } p = -\sigma_0$$

En general la pressió p en aquesta mena de medis es relaciona amb la densitat i amb la temperatura a través de l'equació d'estat. Per a un gas ideal, aquesta pren la forma següent:



$$\frac{p}{\rho} = RT$$

mentre que, per a un gas real o un líquid, s'estableixen equacions d'estat del tipus més genèric següent:

$$f(p, \rho, T) = 0$$

Un cas especial d'aquest comportament correspon al d'un fluid incompressible, situació en què la pressió ja no es regeix per l'equació d'estat, sinó que pot adquirir un valor arbitrari, sempre que sigui compatible amb les equacions del moviment i amb les condicions de contorn del problema.

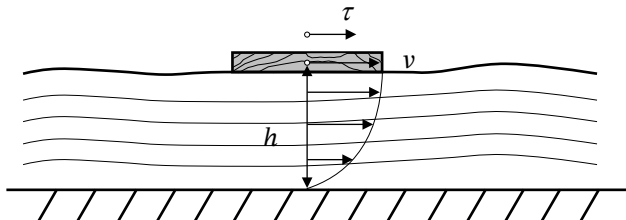
5.5.2. Fluids viscosos

L'estat de tensió interna en qualsevol fluid en repòs és purament esfèric, o hidroestàtic, i no existeixen, per tant, tensions tallants en cap direcció. No obstant això, quan un fluid real es posa en moviment, apareixen tensions addicionals originades pel lliscament mutu entre les diverses capes de fluid. Aquesta oposició al lliscament persisteix mentre hi ha moviment, però desapareix quan aquest cessa.

L'efecte d'aquestes tensions no sempre és negligible. La viscositat d'un fluid és la característica física macroscòpica que permet establir la relació existent entre elles i la causa que les origina, que és la velocitat de deformació.

Viscositat

En efecte, considereu el cas simple d'un tauló que sura sobre un corrent fluid prop d'una paret fixa. Les partícules de fluid que estan situades a prop de la paret fixa s'adhereixen a aquesta i romanen en repòs, mentre que les que hi ha a prop de la taula es mouen solidàriament amb aquesta. La velocitat de les partícules intermèdies evoluciona segons un cert perfil de velocitats.



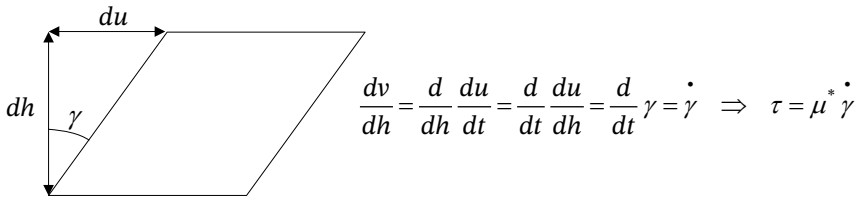
Per vèncer el fregament entre les partícules fluides que llisquen les unes sobre les altres i poder moure el tauló, cal fer una força que es transforma en tensions tallants entre les capes fluides. La viscositat és una mesura d'aquesta resistència. Newton va establir la



hipòtesi que l'increment de velocitat entre dues capes fluides és directament proporcional a la tensió aplicada i a la distància entre elles, i inversament proporcional a la viscositat; aquesta és una característica pròpia del material que mesura la resistència al lliscament en el si del fluid.

$$\Delta v = \frac{\tau \times \Delta h}{\mu^*}$$

Mitjançant una construcció geomètrica simple es pot relacionar aquesta expressió amb la velocitat de deformació angular:

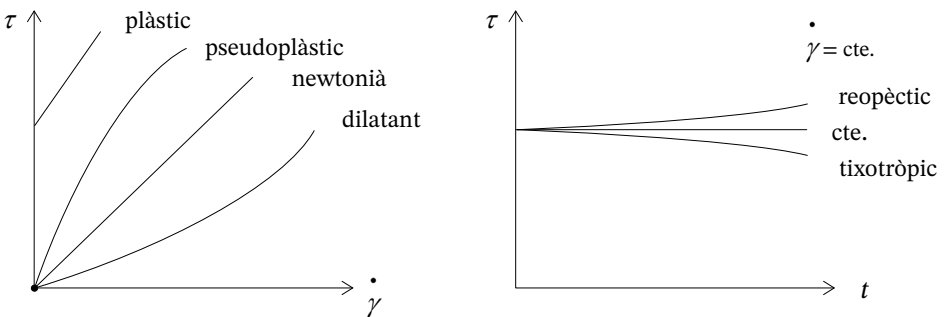


La viscositat μ^* definida així rep el nom de *viscositat dinàmica* i té dimensions $FL^{-2}t$. En molts problemes de la dinàmica de fluids apareix el quocient següent:

$$\frac{\mu^*}{\rho}$$

que rep el nom de *viscositat cinemàtica*, les dimensions de la qual són L^2t^{-1} . En contrapartida, μ^* rep el nom de *viscositat dinàmica*. És molt important no confondre aquests dos conceptes.

Newton va considerar la viscositat com una constant característica del material; no obstant això, la viscositat pot canviar amb la velocitat de deformació i/o amb el temps per a una velocitat de deformació donada. Aquests comportaments s'anomenen *no-newtonians*. Les diverses tipologies possibles es representen en la figura següent:





5.5.3. Fluids newtonians

La generalització de l'expressió que Newton va donar per al concepte mateix de viscositat condueix a l'equació constitutiva material d'un fluid viscos newtonià:

$$[\sigma] = [-p] + [\tau]$$

on el primer terme del segon membre correspon a la pressió hidroestàtica que tindria el fluid si estigués en repòs i el segon correspon a les tensions viscoses originades pel moviment del fluid. La pressió estàtica p , també coneguda com a *pressió termodinàmica*, és una variable controlada per l'equació d'estat que la relaciona amb la densitat i la temperatura.

Les tensions viscoses es consideren funció del tensor velocitat de deformació. Si aquesta funció és lineal, es pot escriure:

$$\{\tau\} = [V] \{D\}$$

El tensor $[V]$ és l'anomenat *tensor de coeficients viscous* del material, que en un fluid newtonià poden dependre de la temperatura, però no de la tensió ni de la velocitat de deformació. Si a més el fluid és isòtrop, el tensor de tensions viscoses es pot expressar, de manera anàloga a les equacions de Lamé vistes anteriorment per al tensor de tensions elàstiques, a partir de solament dues constants que caracteritzen completament el comportament viscos del fluid:

$$[\sigma] = [-p] + 3\lambda^* [D_0] + 2\mu^* [D]$$

on λ^* i μ^* són els coeficients de viscositat del fluid.

Es defineix la viscositat volumètrica com la característica del fluid que relaciona la velocitat de deformació volumètrica amb la part esfèrica del tensor de tensions viscoses. De manera anàloga al coeficient de compressibilitat d'un sòlid elàstic, tenim:

$$\sigma_0 = -p + (3\lambda^* + 2\mu^*) D_0 = -p + K^* \dot{\theta}$$

en què

$$K^* = \lambda^* + \frac{2}{3} \mu^* \text{ és la viscositat volumètrica, i}$$

$$\dot{\theta} = 3D_0 \text{ és la velocitat de deformació volumètrica unitària, definida ja al capítol 2.}$$

Es defineix una classe especial de fluids, anomenats *stokesians*, com aquells que presenten una viscositat volumètrica nul·la i, per tant:

$$K^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*$$



En aquest cas la pressió p es defineix com la mitjana de les tensions normals.

L'equació constitutiva d'un fluid newtonià es pot escriure també descomponent $[\sigma]$ i $[\tau]$ en part esfèrica i desviadora, de la manera següent:

$$[\sigma_0] + [s] = [-p] + 3K^* [D_0] + 2\mu^* [d]$$

d'on

$$\begin{cases} [\sigma_0] = [-p] + 3K^* [D_0] \\ [s] = 2\mu^* [d] \end{cases}$$

Fluids incompressibles

En un fluid incompressible, $[D_0] = 0$ i, per tant, $[\sigma_0] = [-p]$ en què, en aquest cas, la pressió és una variable determinada no per l'equació d'estat, sinó per les equacions de moviment i les condicions de contorn, igual que succeeix en un fluid stokesià.

L'efecte de la variació de temperatura en un fluid incompressible es té en compte mitjançant l'aproximació de Boussinesq, consistent a suposar que la densitat del fluid és variable amb la temperatura en funció del coeficient de dilatació tèrmica del material segons la relació:

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0))$$

en què ρ_0 és la densitat en T_0 .

5.5.4. Potència de tensió

En un fluid newtonià, la potència de tensió P_σ ve donada per:

$$P_\sigma = [\sigma]:[D] = [-p]:[D] + 3K^*[D_0]:[D] + 2\mu^*[d]:[D] = -p\varepsilon_v + K^*\varepsilon_v^2 + 2\mu^*[d]:[d]$$

Descomponent la potència de tensió com a suma de canvi de volum i potència de canvi de forma, tenim:

$$\begin{cases} P_{\sigma_v} = [\sigma_0]:[D_0] = [-p]:[D_0] + 3K^*[D_0]:[D_0] = -p\varepsilon_v + K^*\varepsilon_v^2 \\ P_{\sigma_d} = [s]:[d] = 2\mu^*[d]:[d] \end{cases}$$

En aquestes expressions, els termes relacionats amb la viscositat són dissipatius i estan associats, per tant, a l'energia no recuperable.

Introducció a l'elasticitat lineal

6.1. Introducció

La mecànica del medi continu té multitud d'aplicacions dins del camp de la mecànica dels sòlids deformables. Entre totes aquestes destaca la teoria de l'elasticitat lineal, que, fins i tot sent relativament simple, permet abordar amb prou aproximació una gran quantitat de problemes d'interès pràctic en enginyeria.

En aquest capítol es fa una introducció a la teoria de l'elasticitat lineal aplicada a problemes estàtics i isoterms, és a dir, aquells en què l'aplicació de càrregues és prou lenta perquè resultin negligibles els efectes dinàmics, i en què la variació de la temperatura no és significativa. Aquesta part de la teoria de l'elasticitat rep el nom d'*elastoestàtica isoterma*. És el model més simple dels disponibles per a l'anàlisi de sòlids deformables. S'admet, com a hipòtesi de partida, la linealitat i reversibilitat del comportament constitutiu material elàstic presentat al capítol 4, així com el caràcter infinitesimal de la transformació geomètrica associada. Aquesta última característica, al costat de la condició d'enllaços constants, constitueix el que es coneix com a *linealitat geomètrica*.

Les hipòtesis plantejades, elasticitat lineal i linealitat geomètrica, permeten centrar l'estudi en solament dues configuracions geomètriques del medi, inicial i final, sense que calgui considerar el camí seguit durant la transformació, ja que l'estat final resulta independent d'aquest.

El model plantejat així restringeix el camp d'aplicació de la teoria a l'àmbit de les estructures o components relativament rígids, construïts a partir de materials elàstics lineals (peces metàl·liques en general amb tensions per sota del límit de proporcionalitat). Com s'ha dit anteriorment, malgrat aquesta aparent limitació, un gran nombre de problemes pràctics d'enginyeria poden ser resolts de manera eficaç amb aquest model de comportament sòlid.



6.2. El problema elàstic

En el camp de l'enginyeria mecànica i d'estructures és habitual tenir la necessitat de comprovar que les tensions de treball induïdes en les peces no superin valors admissibles per al material, o que una rigidesa insuficient no impedeixi un compliment adequat de la seva funció. Per fer-ho, es parteix de la geometria definida a través dels plans de disseny, del material especificat i de les condicions d'utilització de la peça. Aquestes, al seu torn, poden ser expressades en forma de condicions de càrrega i condicions d'enllaç amb l'exterior.

La situació pràctica plantejada es coneix en l'àmbit de la teoria de l'elasticitat com la resolució del problema elàstic. Així doncs, el problema elàstic (estàtic i isoterm) pot plantejar-se en els termes següents:

Donades les dades següents:

- La geometria del sòlid (configuració inicial).
- Les característiques elàstiques del material.
- El camp de forces de volum.
- Les condicions de contorn del problema en forma de:
 - Forces de superfície (condicions de contorn estàtiques).
 - Condicions d'enllaç (condicions de contorn cinemàtiques).

Cal determinar:

- El camp vectorial de desplaçaments donats per: \bar{u} .
- El camp tensorial de deformacions donat per: $[\varepsilon]$.
- El camp tensorial de tensions donat per: $[\sigma]$.

NOTA: En un problema dinàmic s'haurien d'incloure també com a dades de partida les condicions inicials de velocitat i les característiques màssiques, mentre que en un problema no isoterm s'haurien d'especificar les variacions de temperatura entre la configuració actual i la de referència.

Val la pena observar que el caràcter estàtic del problema comporta que no hi intervingui cap paràmetre relacionat amb la variable temps.

De fet, el problema pràctic real no acabaria aquí, ja que a partir d'aquests valors l'enginyer encara ha de decidir si el disseny és apropiat o no, per exemple, utilitzant les teories de fallada presentades al capítol 5. Aquest capítol es limita l'estudi al plantejament i resolució del problema elàstic des del punt de vista físicomatemàtic.



6.3. Formulació matemàtica del problema elàstic

6.3.1. Introducció

Per resoldre qualsevol problema fisicomatemàtic, cal disposar de tantes equacions com incògnites sigui necessari determinar. En el cas del problema elàstic, les incògnites són les funcions que determinen el camp vectorial dels desplaçaments (3 funcions escalars que defineixen el vector desplaçament en cada punt), el camp tensorial de les deformacions (6 funcions escalars que defineixen el tensor de deformació en cada punt) i el camp tensorial de les tensions (6 funcions escalars que defineixen el tensor de tensió en cada punt), és a dir, un total de 15 funcions incògnites. Les equacions disponibles per formular el sistema es poden agrupar en les tres famílies següents:

- Per al tensor de tensió:
 - Les condicions d'equilibri en els punts del contorn (3 equacions).
 - Les equacions d'equilibri en els punts interiors (3 equacions).
- Per al tensor de deformació i el camp de desplaçaments:
 - Les relacions cinemàtiques (6 equacions).
 - Les equacions de compatibilitat (6 equacions).
- Per al comportament constitutiu material:
 - La llei de Hooke (6 equacions).
 - Les equacions de Lamé (6 equacions).

Per a cada punt del sòlid, es pot triar solament una equació de cada família, ja que les primeres depenen del fet que el punt sigui interior o exterior, i les restants són interdependents dins de cada família. No obstant això, sempre és possible disposar d'un total de 15 equacions independents (3+6+6), per la qual cosa el problema elàstic pot ser plantejat a través d'un sistema de 15 equacions diferencials amb 15 funcions incògnites, en què cal observar el següent:

- Es poden establir diverses estratègies de solució, adaptades a les característiques dels diversos tipus de problema, segons les equacions escollides. Aquestes estratègies seran presentades detalladament en els apartats següents.
- En principi, les tensions a què fan referència les equacions són les tensions reals o de Cauchy, que estan referides a la configuració final d'equilibri (formulació euleriana), o deformada, mentre que les deformacions ho estan a la configuració inicial (formulació lagrangiana). No obstant això, pel fet de tractar-se de transformacions infinitesimals, aquesta diferència pot ser negligida, tal com s'ha apuntat al capítol 2.



6.3.2. Tipus de problema elàstic en funció de les condicions de contorn

Les condicions de contorn del problema elàstic poden ser de tipus cinemàtic (desplaçaments prescrits) o estàtic (forces de superfície prescrites).

NOTA: *Quan sobre la superfície lliure del medi no s'imposa cap força ni desplaçament, això equival a imposar una força de superfície nul·la.*

Les condicions de contorn cinemàtiques i estàtiques són mútuament excloents. No es pot imposar els dos tipus de restricció en un mateix punt i direcció. Això és degut al fet que, si es fixa el desplaçament d'un punt en una direcció donada, la força que ha de garantir aquesta condició de restricció (reacció) queda ja determinada per la resolució mateixa del problema elàstic i no és independent. I viceversa, si es fixa la força, el desplaçament queda també determinat i no pot ser especificat de manera independent.

Això dona lloc a diverses combinacions possibles, que veiem a continuació.

Problema de Dirichlet

Només es fixen condicions de desplaçament prescrit en la superfície exterior del sòlid:

$$\bar{u}(S) = \text{dada}$$

La solució del problema elàstic queda totalment definida en termes de desplaçaments, deformacions i tensions.

Problema de Neuman

Només es fixen condicions de forces de superfície prescrites en el contorn exterior del sòlid:

$$\bar{f}(S) = \text{dada}$$

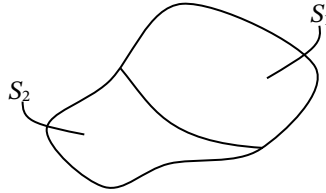
La solució del problema elàstic queda totalment definida en termes de deformacions i tensions, però el camp de desplaçaments queda indeterminat en un moviment de sòlid rígid.

Problemes mixtos

S'especifiquen condicions de contorn cinemàtiques sobre una part de la superfície del medi i estàtiques sobre la resta. La solució del problema elàstic queda totalment definida si es restringeixen els sis graus de llibertat del moviment de sòlid rígid. En cas contrari, el camp de desplaçaments queda indeterminat.



- Desplaçaments prescrits sobre S_1 : $\bar{u}(S_1) = \text{dada}$
- Forces de superfície prescrites sobre S_2 : $\bar{f}(S_2) = \text{dada}$



Problemes mixtos combinats

S'especifiquen condicions de contorn cinemàtiques i estàtiques simultàniament sobre les mateixes zones de la superfície del medi. No obstant això, cal verificar que no s'imposin els dos tipus de condició en el mateix punt i direcció, ja que són mútuament excloents.

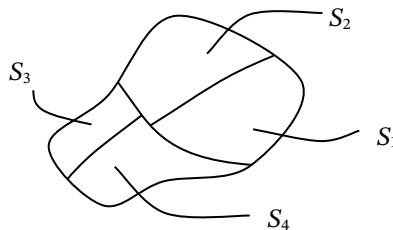
- Desplaçaments prescrits sobre S_1 : $\bar{u}(S_1) = \text{dada}$
- Forces de superfície prescrites sobre S_2 : $\bar{f}(S_2) = \text{dada}$
- Condicions mixtes sobre \bar{S}_3 i \bar{S}_4 :

Component normal del desplaçament i tangencial de la força prescrites sobre S_3 :

$$\begin{aligned}\bar{u}_n(S_3) &= \text{dada} \\ \bar{f}_t(S_3) &= \text{dada}\end{aligned}$$

Component normal de la força i tangencial del desplaçament prescrites sobre S_4 :

$$\begin{aligned}\bar{u}_t(S_4) &= \text{dada} \\ \bar{f}_n(S_4) &= \text{dada}\end{aligned}$$



La major part dels problemes reals d'enginyeria són del tipus mixt, o mixt combinat, ja que gairebé tots els components a analitzar estan subjectes a altres components per zones determinades (condicions de contorn en desplaçaments) i sotmesos a càrregues en altres (condicions en forces).



6.4. Unicitat de la solució del problema elàstic

La solució del problema elàstic existeix i és única. Aquesta última afirmació constitueix el teorema de la unicitat de Kirchoff, la demostració de la qual es recull a continuació.

Suposem que, donades unes forces de volum i de superfície \bar{b} i \bar{f} , existeixen dues solucions diferents al problema elàstic definides pels tensors:

$$1a \text{ solució} \Rightarrow [\sigma], [\varepsilon]$$

$$2a \text{ solució} \Rightarrow [\sigma'], [\varepsilon']$$

Si aquests tensors són solució, han de satisfer les condicions d'equilibri en els punts interiors i exteriors. Per tant:

$$\begin{cases} \operatorname{div}[\sigma] + \bar{b} = 0 \\ [\sigma]\bar{n} = \bar{f} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}[\sigma'] + \bar{b} = 0 \\ [\sigma']\bar{n} = \bar{f} \end{cases}$$

Restant aquestes equacions entre si, s'obtenen les expressions següents:

$$\operatorname{div}[\sigma - \sigma'] + 0 = 0 \quad [\sigma - \sigma']\bar{n} = 0$$

que són al seu torn les condicions d'equilibri per a l'estat de tensions $[\sigma - \sigma'] = [\sigma^*]$, corresponent al problema elàstic que és la diferència entre les dues solucions, al qual corresponen forces de volum i superfície nul·les.

Com que les forces exteriors són nul·les, se segueix que el treball efectuat per aquestes forces és nul, i per això també ho ha de ser la densitat d'energia de deformació associada:

$$E_{\varepsilon}^*(\sigma_{ij}^*) = 0$$

I això solament és possible si totes les diferències entre tensions σ_{ij}^* són nul·les, és a dir, els dos camps de tensions són idèntics. Si això és així, i en virtut de la llei de Hooke, també seran idèntics els camps de deformacions, amb què la solució del problema elàstic ha de ser única.

Val la pena observar que, dependent de les condicions de contorn en desplaçaments, poden existir problemes elàstics amb solucions idèntiques en tensions i deformacions, que difereixin solament en el component de moviment de sòlid rígid associat al camp de desplaçaments.



6.5. Mètodes de resolució del problema elàstic

El problema elàstic i la seva resolució tenen una gran transcendència pràctica per al món de l'enginyeria, ja que sense aquest no seria possible abordar de manera racional el projecte de nous components i estructures. Per aquest motiu, històricament, la resolució del problema elàstic s'ha dut a terme de diverses maneres, depenent dels coneixements i tecnologies disponibles a cada moment. De fet, el començament de l'aplicació del problema elàstic és molt anterior a la teoria mateixa de la mecànica del medi continu i data de l'època de Galileu. Aquests primers intents de resolució van anar desembocant amb el temps en una ciència paral·lela de marcat caràcter enginyer anomenada **resistència de materials**. La resistència de materials dona molts resultats i molt interessants, però queda limitada a l'anàlisi de sòlids amb geometries molt específiques, per la qual cosa manca de la generalitat de l'enfocament a partir de les lleis bàsiques de la mecànica que aporta la mecànica del medi continu.

L'elasticitat lineal va ser una de les primeres aplicacions de la mecànica del medi continu i va aportar solucions molt més detallades a partir de la resolució analítica de les equacions resultants. Això va permetre validar d'una manera molt més fonamental gran part dels resultats de la resistència de materials. No obstant això, aquest enfocament presenta la dificultat inherent a la resolució analítica del sistema d'equacions diferencials en derivades parcials resultant. Aquestes equacions solament han pogut ser resoltes per a geometries relativament simples, distants de les geometries complexes que presenten molts components d'enginyeria. Es pot afirmar que gairebé totes les solucions d'interès que és possible trobar per aquesta via ja han estat explorades.

Durant molt de temps s'han salvat les limitacions de tots dos enfocaments mitjançant les tècniques de la **mecànica experimental**, aplicant la teoria de models i la mesura directa de l'estat de deformació i dels desplaçaments sobre prototips físics. No obstant això, el desenvolupament de la informàtica tècnica, en els seus dos aspectes de maquinari i programari, ha suposat un canvi radical en els últims cinquanta anys, en què s'ha revifat l'interès per l'enfocament de la mecànica del medi continu. Les equacions resultants poden ara ser resoltes de manera aproximada, però molt efectiva utilitzant les tècniques del càlcul numèric, i aquesta és la base d'una part molt important del que es coneix com a **simulació numèrica**.

La simulació numèrica és el resultat de la sinergia entre els plantejaments fonamentals de la mecànica del medi continu, el càlcul numèric, el programari gràfic avançat i un maquinari cada vegada més potent.

6.5.1. Mètodes analítics de resolució del problema elàstic

Mètode directe o dels desplaçaments

En aquest mètode es prenen els desplaçaments com a incògnites primàries i s'eliminen les altres variables del problema elàstic de la manera següent:



- Aplicant les condicions cinemàtiques, s'expressen els components de tensor de deformació en funció de les derivades parcials dels desplaçaments:

$$[\varepsilon] = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

- Se substitueix aquest resultat en les equacions de Lamé i s'obtenen les tensions expressades en funció de les derivades parcials dels desplaçaments:

$$[\sigma] = \lambda \varepsilon_v [I] + 2\mu [\varepsilon]$$

- Les tensions expressades així s'introdueixen en les equacions diferencials d'equilibri per als punts interiors i de la superfície:

$$\operatorname{div} [\sigma] + \bar{b} = 0 \quad \text{i} \quad \bar{f} = [\sigma] \bar{n}$$

amb què s'obtenen les equacions d'equilibri en desplaçaments següents:

- Punts interiors:

$$\operatorname{div} (\lambda \varepsilon_v [I] + 2\mu [\varepsilon]) + \bar{b} = 0, \text{ o de manera més desenvolupada,}$$

$$\begin{cases} \left(\lambda + \mu \right) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_1} + \mu \Delta u_1 + b_1 = 0 \\ \left(\lambda + \mu \right) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_2} + \mu \Delta u_2 + b_2 = 0 \\ \left(\lambda + \mu \right) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_3} + \mu \Delta u_3 + b_3 = 0 \end{cases}$$

Aquestes equacions de govern per als punts interiors es coneixen com a **equacions de Navier-Cauchy** i en forma compacta s'escriuen així:

$$(\lambda + \mu) \overline{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \bar{u}) + \mu \Delta \bar{u} + \bar{b} = 0$$

- Punts de la superfície del medi continu:

$$\bar{f} = (\lambda \varepsilon_v [I] + 2\mu [\varepsilon]) \bar{n} \quad \text{o} \quad u(s) = \text{Dato}$$

Aquestes equacions constitueixen les condicions de contorn del problema.

Les tres equacions del problema elàstic plantejat així condueixen directament al camp de desplaçaments. Una vegada determinat aquest, s'obté el camp tensorial de deformacions per aplicació de les relacions cinemàtiques, i posteriorment el camp tensorial de tensions a través de les equacions de Lamé.



$$\bar{u} \rightarrow [\varepsilon] \rightarrow [\sigma]$$

Aquest mètode admet una solució analítica en uns pocs casos d'interès tecnològic. No obstant això, és de gran importància, ja que la seva resolució aproximada resulta fàcilment abordable mitjançant mètodes numèrics.

Mètode semiinvers o de les tensions

En aquest mètode es prenen les tensions com a incògnites primàries i s'eliminen les altres variables del problema elàstic de la manera següent:

– Utilitzant la llei de Hooke generalitzada, s'expressen les deformacions en funció de les tensions.

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [C] \{\bar{\sigma}\}$$

– El resultat anterior s'introdueix en les equacions que descriuen les condicions de compatibilitat del tensor deformació.

– Finalment, s'introdueixen les relacions que descriuen les condicions d'equilibri en els punts interiors, amb què s'obtenen les sis equacions de govern conegudes com a equacions de Michell, donades per:

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_1^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta I_1 = -2 \frac{\partial b_1}{\partial x_1} \\ \Delta\sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_2^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta I_1 = -2 \frac{\partial b_2}{\partial x_2} \\ \Delta\sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_3^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta I_1 = -2 \frac{\partial b_3}{\partial x_3} \end{cases}$$

Aquestes tres equacions es resolten independentement i s'obtenen: σ_{11} , σ_{22} i σ_{33} .

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial b_2}{\partial x_3} + \frac{\partial b_3}{\partial x_2} = 0 \\ \Delta\sigma_{13} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial b_1}{\partial x_3} + \frac{\partial b_3}{\partial x_1} = 0 \\ \Delta\sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial b_1}{\partial x_2} + \frac{\partial b_2}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

Una vegada determinat I_1 a l'aparat anterior, es resolten aquestes equacions i s'obtenen: σ_{12} , σ_{13} i σ_{23} .

Aquesta formulació és adequada per a sòlids elàstics la geometria dels quals sigui un volum simplement connex (un sol contorn) i quan les condicions de contorn són del tipus estàtic (problema de Neumann). Això és, quan solament s'especifiquen forces de superfície en el contorn o quan les restriccions cinemàtiques són de tipus isostàtic o, dit d'una



altra manera, quan les reaccions en els enllaços es poden calcular *a priori* utilitzant les equacions de l'estàtica, de manera que el problema es pugui plantejar totalment en forces. En cas contrari, l'aplicació d'aquest mètode es complica enormement.

Les equacions de Michell es resolen de manera desacoblada com a dos sistemes de tres equacions amb tres incògnites. La resolució del primer permet trobar les tres tensions normals σ_{11} , σ_{22} i σ_{33} ; una vegada disponible aquest resultat, substituint en el segon joc d'equacions, és possible determinar les tres tensions tallants σ_{12} , σ_{13} i σ_{23} . Amb això el camp tensorial de tensions queda totalment determinat.

A partir de les tensions, i aplicant la llei de Hooke generalitzada, es determina el camp tensorial de deformacions. A partir d'aquest, i mitjançant una doble integració, es pot obtenir el camp de desplaçaments relatius ($\bar{u}_{q_{rel}}$).

$$[\sigma] \rightarrow [\varepsilon] \quad \int \int \rightarrow \bar{u}$$

La possibilitat de fer aquesta integració queda garantida pel compliment de les equacions de compatibilitat, que són alhora les condicions d'integrabilitat de les formes diferencials resultants, en un recinte simplement connex. En conseqüència, el camp de desplaçaments complet s'ha d'obtenir completant el camp de desplaçaments relatius amb el moviment de sòlid rígid associat a un dels seus punts, a fi d'obtenir una solució totalment determinada (vegeu l'apartat 0).

Convé observar que les equacions de Michell no depenen del mòdul de Young (E), sinó només del coeficient de Poisson (ν), del qual es desprèn que, en un sòlid simplement connex i amb igualtat de les condicions de contorn, la distribució de tensions depèn solament de ν . Aquest resultat, al costat de la petita variabilitat pròpia del coeficient de Poisson, facilita enormement l'anàlisi experimental de tensions utilitzant la teoria de models.

A més a més, un resultat intermedi important d'aquest desenvolupament condueix a l'expressió:

$$\text{div } \bar{b} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \Delta I_1 = 0$$

que, en el cas freqüent de forces de volum constants, nul·les o negligibles, condueix al seu torn a un altre resultat important:

$$\Delta I_1 = \Delta (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0$$

Independentment de les constants elàstiques del material, aquest resultat s'aplica en l'anàlisi experimental de tensions mitjançant models físics.

Les equacions de Michell particularitzades a aquest últim cas es coneixen com a equacions de Beltrami.



Mètode invers

El mètode invers constitueix una aproximació per serendipitat a la resolució del problema elàstic i consisteix a assajar una solució en tensions, postulada *a priori*.

Com sigui que la solució al problema elàstic és única, si la solució postulada compleix les condicions d'equilibri en els punts interiors i exteriors, així com les condicions de compatibilitat del tensor de deformació, aleshores ha de ser necessàriament la solució buscada.

Aquest mètode és útil pel fet que es coneix *a priori* la forma de la solució de diversos problemes elementals i al fet que, en l'àmbit de les transformacions infinitesimals, es verifica l'anomenat *principi de superposició*.

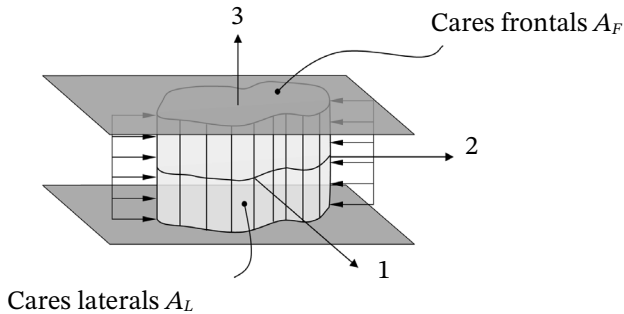
Segons aquest principi, si un problema complex es pot descompondre com a suma d'una sèrie de problemes simples, la solució al problema original es pot obtenir com a suma de les solucions a cadascun d'aquests problemes simples. La forma de les solucions elementals està definida excepte en una sèrie de coeficients, que es poden ajustar forçant el compliment de les equacions de contorn.

Un altre factor que ajuda a l'aplicació del mètode invers és la robustesa del problema elàstic, que s'expressa a través de l'anomenat **principi de Saint Venant**. Segons aquest principi, lluny dels punts d'aplicació de les accions exteriors, la distribució de tensions depèn solament de la força resultant i el moment resultant d'aquestes accions, i no del detall de com estan distribuïdes sobre el sòlid. En altres paraules, les condicions de contorn poden no complir-se detalladament, o es pot violar localment la hipòtesi d'elasticitat lineal, si l'interès de l'anàlisi apunta a l'estat de tensions en punts allunyats dels punts d'aplicació de les accions.

El problema elàstic bidimensional

Existeix una quantitat significativa de problemes que, admetent unes certes simplificacions, es poden estudiar en només dues dimensions pel fet que el que succeeix en la tercera dimensió queda totalment determinat pel que succeeix en el pla d'estudi. Aquests problemes responen a la tipologia següent:

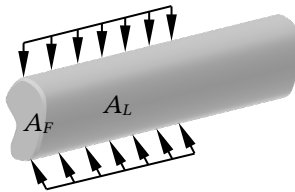
- a) Sòlids prismàtics continguts entre dos plans paral·lels, denominats *frontals*, carregats de manera gairebé uniforme en tot el seu gruix per forces de superfície i/o de volum paral·leles a aquests plans. En aquest cas l'anàlisi es pot efectuar sobre qualsevol secció paral·lela a aquests plans, ja que totes són equivalents. La solució queda totalment definida en la direcció perpendicular al pla d'estudi.



Dins d'aquesta categoria es poden distingir al seu torn dos casos extrems.

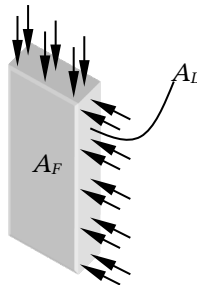
a.1.) Deformació plana:

Correspon a situacions en què la cara lateral és molt més gran a les cares frontals, i el desplaçament en la direcció perpendicular a aquestes últimes roman constant en tot el sòlid.

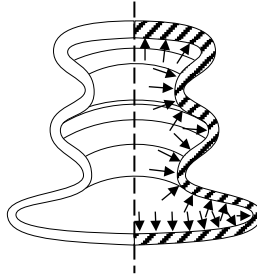


a.2.) Tensió plana:

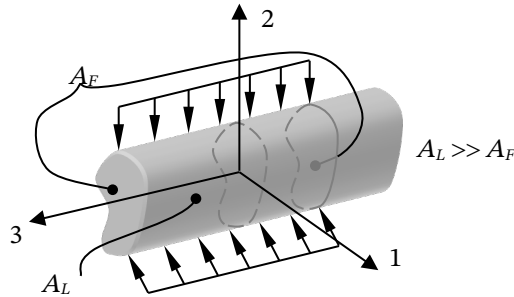
Correspon a situacions en què la cara lateral és molt més petita que les cares frontals i aquestes últimes estan lliures de forces de superfície. És per exemple el cas d'una placa de poc gruix carregada en el seu pla.



b) Sòlids amb simetria de revolució (axisimètrics) carregats també amb simetria de revolució. En aquest cas es pot estudiar qualsevol secció diametral, ja que totes són equivalents. La solució queda totalment determinada en la direcció circumferencial.



Deformació plana:



En el cas de la deformació plana, s'admeten les hipòtesis de partida següents:

- u_1 i u_2 són independents de x_3 .
- u_3 és constant (igual a zero si s'impedeix la translació de sòlid rígida).

En conseqüència, s'ha de verificar que:

$$\left[\varepsilon \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \Omega_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \varepsilon_{33} = 0 \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \Omega_{13} = \Omega_{23} = 0 \end{array} \right.$$

$$\bar{d} \text{ és paral·lel al pla } 1, 2 : \bar{d} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Llei de Hooke: $\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \end{cases}$$

Equacions de Lamé:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + 0 \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \lambda \varepsilon_v + 2 \mu \varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} = \lambda \varepsilon_v + 2 \mu \varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} = \lambda \varepsilon_v \\ \sigma_{12} = 2 \mu \varepsilon_{12} \end{cases} \quad \leftarrow \text{en general pot ser } \neq 0$$

Condicions d'equilibri:
per als punts interiors

$$\begin{cases} b_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ b_2 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \\ b_3 = 0 \end{cases}$$

Això comporta que

$$\begin{cases} \bar{b} \text{ és paral·lela al pla 1, 2.} \\ \bar{b} \text{ no depèn de } x_3 \text{ (és uniforme segons } x_3\text{), ja que, com } u_1, \\ u_2, \text{ no depèn de } x_3 \Rightarrow [\varepsilon] \text{ no depèn de } x_3 \Rightarrow [\sigma] \text{ no depèn de } \\ x_3 \Rightarrow \bar{b} \text{ no depèn de } x_3. \end{cases}$$

Condicions de contorn:

$$\begin{cases} f_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 \\ f_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 \\ f_3 = \sigma_{33} n_3 \end{cases}$$

$f_3 = \sigma_{33} n_3$

$$\begin{cases} \text{En les cares laterals } (A_L) (n_3 = 0) \Rightarrow f_3 = 0 \Rightarrow \bar{f} \text{ és paral·lela al} \\ \text{pla 1, 2.} \\ \text{En les cares frontals } (A_F) (n_3 = \pm 1, n_1 = 0, n_2 = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_3 = \pm \sigma_3, \bar{f} \text{ té la direcció 3.} \\ \text{Si } [\sigma] \text{ no depèn de } x_3, \text{ aleshores } \bar{f} \text{ no depèn de } x_3. \end{cases}$$



Condicions de compatibilitat:

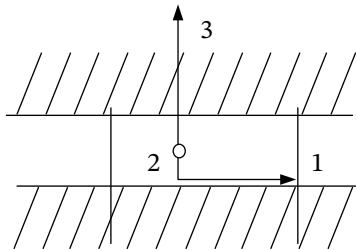
5 identitats del tipus: $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$

1 sola equació no trivial: $2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2}$

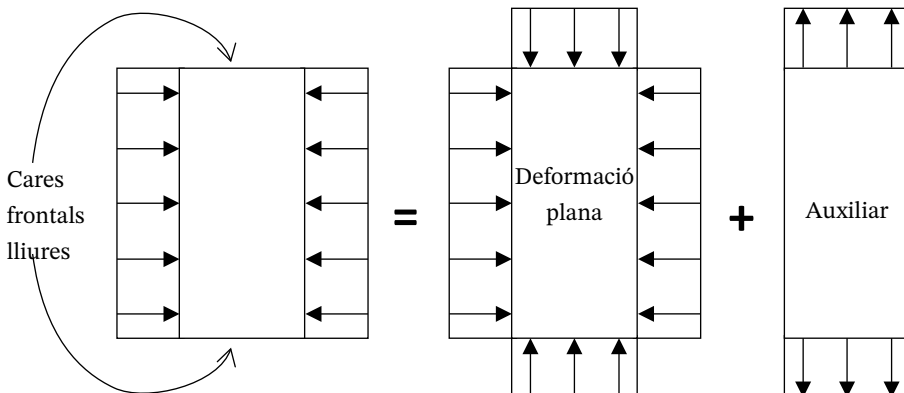
(expressada en tensions: $\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{1-\nu} \text{div } \bar{b}$)

Limitacions del model de deformació plana:

La condició de contorn en les cares frontals $f_3 = \pm \sigma_3$ es compleix solament si aquestes cares estan perfectament constretes entre plans infinitament rígids que mantenen fixa la seva distància relativa.



Si la condició de contorn frontal no correspon a aquest cas, per exemple quan les cares frontals estan lliures, encara és possible utilitzar el model de deformació plana afegint-hi un cas de càrrega auxiliar que, superposat a aquest, reconstitueixi el problema original. En l'exemple de cares frontals lliures, el problema auxiliar consistiria a aplicar al sòlid en les seves cares frontals una distribució de forces de superfície $f_3' = -f_3$, de manera que la superposició dels dos problemes donés lloc a la condició de contorn requerida.

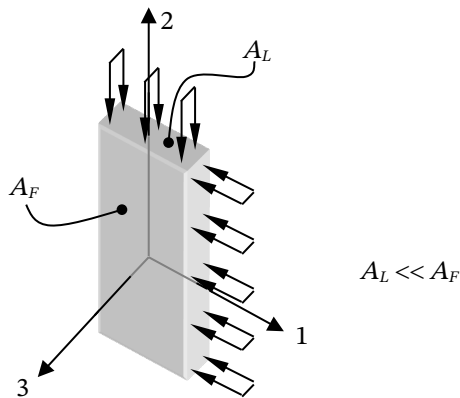




En general, mitjançant aquest procediment és possible trobar solucions aproximades del problema elàstic, vàlides per als punts interiors en virtut del principi de Saint Venant quan el problema auxiliar s'escull amb unes condicions de contorn que són estàticament equivalents a les requerides.

Per tant, el model de deformació plana és útil per a l'anàlisi aproximada de sòlids de gran gruix i en zones allunyades de les cares frontals, excepte quan les condicions de contorn es compleixin exactament, i en aquest cas la solució també és exacta.

Tensió plana



En el cas de tensió plana s'admeten les hipòtesis de partida següents:

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, i \sigma_{12} \text{ no depenen de } x_3$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} \approx 0$$

En conseqüència, s'ha de verificar que:

$$[\sigma] \text{ té la forma: } \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{t} \text{ és paral·lel al pla } 1, 2 : \bar{t} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Llei de Hooke:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \end{array} \right\} \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

↑
en general pot ser $\neq 0$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Equacions de Lamé: $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \lambda \varepsilon_v + 2 \mu \varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} = \lambda \varepsilon_v + 2 \mu \varepsilon_{22} \\ \sigma_{12} = 2 \mu \varepsilon_{12} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) \end{array} \right.$

Condicions d'equilibri: $\left\{ \begin{array}{l} b_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ b_2 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \\ b_3 = 0 \end{array} \right.$

Això comporta que $\left\{ \begin{array}{l} - \bar{b} \text{ és paral·lela al pla } 1, 2. \\ - \text{ Si } \sigma_{11}, \sigma_{22} \text{ i } \sigma_{12}, \text{ no depenen de } x_3, \text{ se'n segueix que } \bar{b} \text{ no depèn de } x_3 \text{ (és uniforme segons } x_3). \end{array} \right.$

Condicions de contorn:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 \\ f_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 \\ f_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} - \text{ En les cares laterals } (A_L) \Rightarrow \bar{f} \text{ és paral·lela al pla } 1,2 \\ - \text{ En les cares frontals } (A_F) \Rightarrow (n_1 = 0, n_2 = 0 \Rightarrow \bar{f} = \bar{0}) \\ - \text{ Si } \sigma_{11}, \sigma_{22} \text{ i } \sigma_{12} \text{ no depen de } x_3 \text{ se'n segueix que } \bar{f} \text{ no depèn de } x_3 \end{array} \right.$$

Condicions de compatibilitat:



$$\text{Són de dos tipus } \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \\ \text{en tensions: } \Delta (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu) \operatorname{div} \bar{b} \\ (2) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \end{array} \right.$$

La condició ① s'ha de complir estrictament. L'incompliment de les condicions ② és admissible per a gruixos petits (solució aproximada).

Limitacions del model de tensió plana

En general, les condicions de compatibilitat ② solament es compleixen en el cas particular que la deformació ε_{33} , en la direcció perpendicular al pla, sigui una funció lineal en x_1 i x_2 , és a dir, del tipus $\varepsilon_{33} = Ax_1 + Bx_2 + C$. Com que en tensió plana $\varepsilon_{33} = -\nu / (1 - \nu) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$, això no té per què ser així.

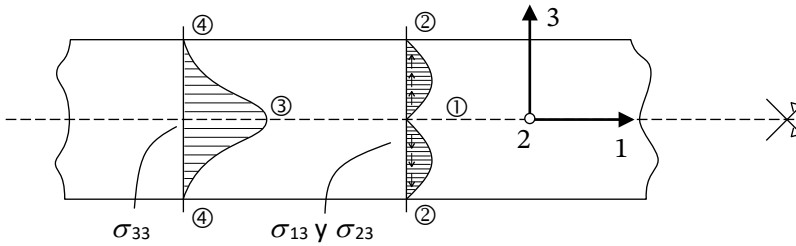
Com a conseqüència d'això, es pot demostrar que σ_{11} , σ_{22} i σ_{12} presenten un component que varia quadràticament amb x_3 , segons relacions del tipus:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11_0}(x_1, x_2) + x_3^2 \sigma_{11}^*(x_1, x_2) \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22_0}(x_1, x_2) + x_3^2 \sigma_{22}^*(x_1, x_2) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12_0}(x_1, x_2) + x_3^2 \sigma_{12}^*(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Amb què la condició que \bar{f} sigui constant en el gruix és, en principi, incompatible amb el compliment de les condicions de contorn suposades per a la cara lateral. No obstant això, el problema es pot resoldre aproximadament si:

- El gruix és molt petit i el terme en x resulta negligible.
- Mitjançant la introducció de problemes auxiliars que restaurin la compatibilitat.
- Tractant amb els valors mitjans en el gruix de les funcions que defineixen el problema elàstic. En aquest cas, la solució és correcta “de mitjana”. Aquest enfocament s'anomena *tensió plana generalitzada* i, per poder aplicar-lo, el problema ha de ser simètric respecte al pla intermedi paral·lel a les cares frontals.

D'altra banda, la hipòtesi que els components de tensió σ_{33} , σ_{13} i σ_{23} són nuls queda justificada en un sòlid de poc gruix amb cares frontals lliures i carregat simètricament respecte al seu pla intermedi a través de l'anàlisi següent:



La condició que les cares frontals estiguin lliures implica que $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ en el contorn (punts ② i ④).

La condició d'equilibri en la direcció 3 estableix que si

$$b_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

en els punts ④

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \\ \text{ja que } \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \text{ per contorn, i per tant} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right.$$

i en els punts ① i ③ per simetria

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} \text{ presenta un extrem} \end{array} \right.$$

En conclusió, el model de tensió plana és aplicable a sòlids de poc gruix amb les seves cares frontals lliures, carregats gairebé uniformement en el gruix per forces simètriques respecte al seu pla intermedi.

6.5.2. Mètodes numèrics de resolució del problema elàstic

Tal com s'ha comentat anteriorment, el problema elàstic solament admet solució analítica en comptades ocasions. Per sort per als enginyers, els avenços fets en les tècniques de càlcul numèric, així com en el programari i maquinari disponible, han fet possible eliminar aquesta limitació.

Actualment, existeixen diversos mètodes i aplicacions que permeten resoldre rutinàriament els problemes complexos associats no solament a la teoria de l'elasticitat, sinó



també a tots els aspectes de la mecànica del medi continu. Aquests mètodes constitueixen el que es coneix com a *simulació numèrica*, eina sobre la base de la qual és possible valorar el comportament futur d'un producte abans que existeixi. El desenvolupament de models numèrics permet disposar de veritables prototips virtuals sobre els quals efectuar tot tipus de proves, fins i tot aquelles que no seria possible fer sobre prototips físics.

El més antic dels mètodes numèrics per resoldre problemes expressats en forma d'equacions diferencials és el de les diferències finites. Les diferències finites han estat utilitzades especialment en problemes relacionats amb la mecànica de fluids i la transferència de calor. El seu principal desavantatge és l'adaptació difícil a problemes geomètricament complexos.

A mitjan segle xx es va començar a desenvolupar un mètode alternatiu en el camp de la mecànica de sòlids. Aquest mètode es coneix avui com a *mètode dels elements finits* (MEF) i s'ha generalitzat fins a convertir-se en un mètode per resoldre qualsevol problema que es pugui formular en forma d'un sistema d'equacions diferencials, és a dir, qualsevol problema de la mecànica del medi continu. El MEF s'adapta a la resolució de geometries complexes i és avui dia el mètode més estès en les aplicacions pràctiques d'enginyeria.

En els últims anys, estan sorgint mètodes alternatius, encara més potents que el MEF, però l'aplicació del qual encara està limitada a problemes específics (elements de contorn).

El MEF serà, per la seva importància pràctica i nivell d'implantació industrial, l'únic que presentarem en aquest apartat. El principi del mètode consisteix a reduir el problema continu, amb infinits graus de llibertat, a un problema discret en què intervingui un nombre finit de variables associades a uns certs punts característics (nodes). Amb això s'aconsegueix transformar el sistema d'equacions original, en què les incògnites a determinar són funcions, en un altre en què les incògnites a determinar són els valors numèrics d'aquestes funcions en els punts d'anàlisi. En general, el problema es planteja en desplaçaments i les incògnites a determinar són els desplaçaments d'un nombre finit de partícules.

Per fer-ho, es descompon el sòlid en petits subdominis o *elements finits*. Se suposa aleshores que el comportament mecànic de cada *element* de la subdivisió queda determinat per un nombre finit de paràmetres (o graus de llibertat) associats als punts, en què aquest element s'uneix a la resta dels elements del seu entorn (denominats nodes). En el cas del problema elàstic, aquests paràmetres són els desplaçaments dels nodes. Per establir el comportament a l'interior de cada element se suposa que, dins d'aquest, tot queda perfectament definit a partir del que succeeix en els nodes i una funció d'interpolació apropiada.



Com es pot apreciar del que s'ha dit, aquí són essencials els conceptes de *discretització*, o acció de transformar la realitat de naturalesa contínua en un model discret aproximat, i d'*interpolació*, o acció d'aproximar valors d'una funció a partir del seu coneixement en un nombre discret de punts. Per tant, el MEF és un **mètode aproximat** des de múltiples perspectives.

- Discretització.
- Interpolació.
- Valoració de certs paràmetres per integració numèrica.

Per manejar el mètode amb èxit en les aplicacions pràctiques d'enginyeria resulta, doncs, necessari conèixer la naturalesa, abast i limitacions d'aquesta aproximació. Aquest és el propòsit del present apartat.

***NOTES:** En el mètode dels elements finits es maneja gran quantitat de matrius i vectors de dimensions diverses. Per aquest motiu, i amb la finalitat de fer més explícita la naturalesa de cada matriu i vector, s'ha optat per una notació més detallada. Així doncs, els vectors es presenten sempre claudàtors i es manegen vectors de vectors (vectors els components dels quals són al seu torn vectors) i matrius de matrius.*

Els tensors tensió i deformació s'expressen també en forma de vectors de dimensió apropiada, tal com s'ha fet al començament de l'apartat 5.4. En la bibliografia sobre el MEF és costum utilitzar la notació alternativa $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ per als elements de fora de la diagonal del tensor deformació, ja que això simplifica algunes expressions notables.

Interpolació

Com ja s'ha dit, un dels conceptes bàsics del MEF és la interpolació. És a través de la interpolació que s'aconsegueix reduir el problema continu amb graus infinits de llibertat a un altre de discret consistent a determinar els desplaçaments dels nodes.

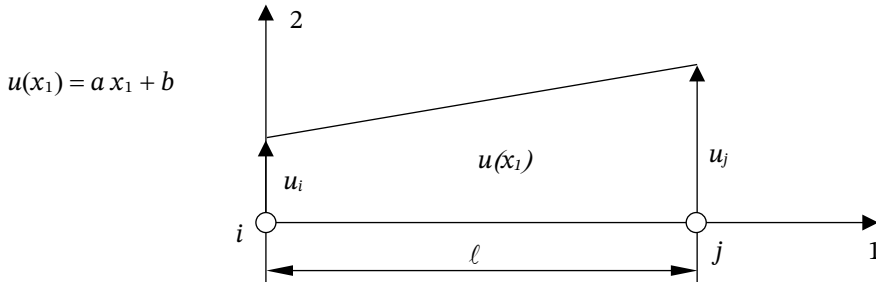
El procediment d'interpolació ha de ser capaç de donar valors prou aproximats dels desplaçaments en qualsevol punt de l'element, en funció dels desplaçaments dels nodes. Queda clar, doncs, que aquest procediment no pot ser escollit de forma totalment arbitrària, i que l'exactitud de la solució final dependrà en gran manera de l'encert a l'hora d'especificar-lo.

No obstant això, i com sigui que qualsevol funció pot ser representada a l'entorn d'un punt per un desenvolupament polinòmic (sèrie de Taylor), sembla lògic i apropiat emprar per a la interpolació funcions polinòmiques del grau suficient.

Prenguem com a exemple l'element que representa una barra unidimensional i suposem coneguts els desplaçaments u_1 i u_2 dels seus extrems en la direcció de la mateixa



barra. Si admetem que en qualsevol punt interior el desplaçament $u(x_1)$ es pot aproximar mitjançant una funció lineal de x , tindrem el següent:



Els coeficients a i b es poden determinar a partir dels valors coneguts en els extrems u_i i u_j .

- Per a $x_1 = 0$ $u(0) = u_i$
- Per a $x_1 = \ell$ $u(\ell) = u_j$

Amb això s'obté que $b = u_i$ i $a = (u_j - u_i)/\ell$ i finalment resulta que $u(x_1) = (u_j - u_i)/\ell \times x_1 + u_i$.

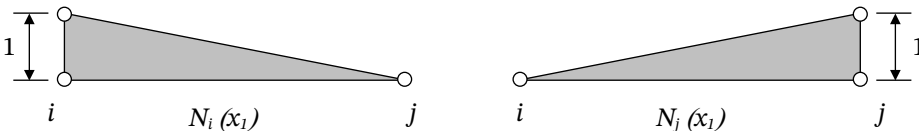
Aquesta expressió es pot reagrupar d'una manera molt més útil introduint el concepte de funció d'interpolació. Les funcions d'interpolació són, excepte en casos excepcionals, polinomis associats a cada node, de manera que prenen el valor 1 en aquest node i 0 en la resta. Per exemple, en el cas de l'element barra, el desplaçament $u(x_1)$ es pot escriure de la manera següent:

$$u(x_1) = \left(1 - \frac{x_1}{\ell}\right) u_i + \frac{x_1}{\ell} u_j = N_i(x_1) u_i + N_j(x_1) u_j$$

$$N_i(x_1) = \left(1 - \frac{x_1}{\ell}\right) \quad \text{y} \quad N_j(x_1) = \frac{x_1}{\ell}$$

Observeu que en el node 1 $x_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} N_i(x_1) = 1 \\ N_j(x_1) = 0 \end{cases}$

mientre que en el node 2 $x_1 = \ell \Rightarrow \begin{cases} N_i(x_1) = 0 \\ N_j(x_1) = 1 \end{cases}$



L'expressió final es pot expressar de manera compacta de la manera següent:



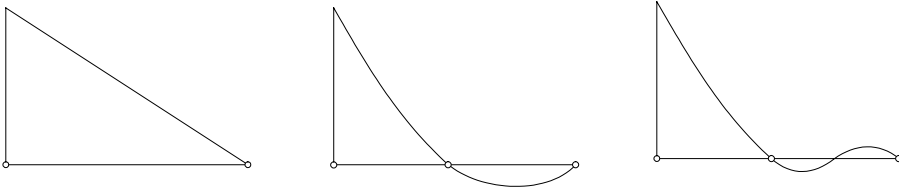
$$u(x_1)_{\ell=i,j} = \sum N_\ell(x_1) \times u_\ell$$

En aquest cas particular, la interpolació dona els valors exactes del desplaçament en cada punt. Evidentment, això no seria així si, per exemple, la variació real fos parabòlica i s'utilitzessin funcions d'interpolació lineals.

Això té una importància doble en l'exactitud dels resultats. D'una banda, i tal com es veurà després, si la variació suposada dins de l'element no és correcta, llavors no ho seran tampoc els desplaçaments calculats en els nodes. D'altra banda, en interpolar per determinar els valors a l'interior de l'element a partir dels valors nodals, es tornarà a incórrer en l'error d'interpolació.

Cal fer notar que, si la solució exacta és polinòmica de grau igual al de les funcions d'interpolació utilitzades, aleshores els resultats trobats també són exactes.

Les funcions d'interpolació són generalment lineals, quadràtiques o cúbiques,



i solen referir-se a unes coordenades intrínseques a l'element (coordenades naturals) a fi d'estandarditzar-ne la formulació i independitzar-la de les dimensions reals de l'element. Després s'apliquen els corresponents canvis de variable.

$$\zeta = -1 \quad \zeta = 0 \quad \zeta = 1 \quad \text{es compleix que } \sum N_\ell(\zeta) = 1$$

Sobre aquest aspecte tornarem posteriorment.

Les funcions d'interpolació no poden ser escollides arbitràriament, sinó que han de complir unes certes condicions a fi de garantir la convergència a la solució real. Aquestes condicions són:

- Tota funció d'interpolació ha d'impedir deformacions dins d'un element quan els desplaçaments nodals es deguin a un desplaçament del conjunt com a sòlid rígid.
- Tota funció d'interpolació ha de complir que, si els desplaçaments nodals són compatibles amb un estat de deformació constant, aleshores s'obtingui realment aquest estat de deformació constant. Aquesta condició inclou l'anterior considerant una deformació constant nul·la.
- En els problemes d'elasticitat, les funcions d'interpolació s'han d'escollir de manera que existeixi continuïtat interelemental en els desplaçaments.



Els elements les funcions d'interpolació dels quals compleixen aquestes condicions s'anomenen *conformes*. No obstant això, la tercera condició pot, amb unes certes restriccions que s'apunten a continuació, ser transgredida i això donar origen als anomenats elements *no conformes*. Aquestes condicions són:

- Un estat de deformació constant ha d'assegurar automàticament la continuïtat dels desplaçaments.
- S'ha de satisfer el segon criteri: compatibilitat amb un estat de deformació constant.

Com ja s'ha dit, la interpolació polinòmica introdueix un error associat al grau del polinomi (punt de truncament de la sèrie de Taylor corresponent) i a la mida de l'element. Aquesta mida queda fixada en el procés de discretització, que s'analitza a continuació.

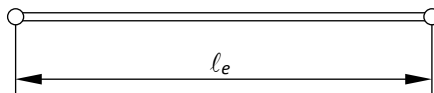
Discretització

Un altre dels components fonamentals del mètode dels elements finits és la discretització. La subdivisió del continu en parts ha de ser tal que, en el límit, quan la mida de cada element tendeixi a zero, el comportament del sistema discret s'aproximi, o convergeixi, al comportament real del sistema continu. Addicionalment s'hauria d'exigir que la solució aproximada fos contínua en passar d'un element a un altre a través de qualsevol de les seves fronteres. Observeu que, en principi, el fet que les solucions coincideixin en els nodes no implica que coincideixin a les fronteres interelementals.

No hi ha un mètode definit per delimitar el grau d'exactitud aconseguit per la utilització d'una discretització donada, ja que en general no es disposa de la solució exacta, i en aquest cas el càlcul aproximat no seria necessari. No obstant això, la solució exacta pot estimar-se a partir d'aproximacions successives.

En teoria, s'haurien d'utilitzar sempre almenys dues discretitzacions i algun mètode per a l'extrapolació de la solució exacta.

Per exemple, si en una barra de longitud ℓ_e



aproximem el desplaçament $u(x_1)$ per un polinomi de grau P , aleshores:

$$u_{\text{exacta}} = u_{\text{aproximada}} + \theta \left(\ell_e^{P+1} \right)$$

on l'error $\varepsilon_\ell = \theta \left(\ell_e^{P+1} \right)$ és de l'ordre de ℓ_e^{P+1} , com es desprèn de l'obtenció del desenvolupament en sèrie de Taylor, de $u(x_1)$, que se suposa que està truncat en el grau P :



$$u(x_1) = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)_i (x_1 - x_{1i}) + \dots$$

Per a una longitud de l'element n vegades menor, tindrem:

$$\varepsilon_{\ell/n} = \theta \left(\left(\frac{\ell_e}{n} \right)^{P+1} \right) = \frac{\theta (\ell_e^{P+1})}{n^{P+1}} = \frac{\varepsilon_\ell}{n^{P+1}}$$

Aleshores es pot estimar la solució exacta com a: $u \approx \frac{n^{P+1} u_{\ell/n} - u_\ell}{n^{P+1} - 1}$

Perquè aquest enfocament sigui vàlid, l'afinament de la malla ha de complir les condicions següents:

- La malla de discretització més basta ha d'estar inclosa en la malla més fina.
- Les funcions d'interpolació utilitzades han de ser les mateixes.

Plantejament general del mètode

En aquest apartat s'aborda l'aplicació del mètode dels elements finits al problema elàstic bidimensional.

A fi de simplificar al màxim l'exposició, es farà a partir de l'element bidimensional més simple, el triangle lineal.

No obstant això, i malgrat aquestes dues restriccions importants, els resultats obtinguts són aplicables a problemes molt més generals.

Estratègia de la formulació directa del mètode

L'estratègia seguida en la formulació directa del mètode dels elements finits consisteix a construir un sistema d'equacions algebraiques a partir del plantejament de l'equilibri de cadascun dels nodes de la discretització. Les incògnites del sistema resultant són de dos tipus: desplaçaments dels nodes lliures i reaccions en els nodes restringits.

Els nodes són entitats sense dimensió, assimilables a partícules. La condició d'equilibri d'un node es limita, doncs, al fet que la suma de les forces actuant sobre ell sigui nul·la. Les accions sobre els nodes són de dos tipus. D'una banda, hi ha les forces exercides sobre el node pels diversos elements que hi conflueixen i s'hi interconnecten; per una altra, hi pot haver una força puntual externa, directament aplicada sobre el node.

En conseqüència, un pas previ al plantejament de l'equilibri nodal consisteix a determinar les forces que els elements exerceixen sobre els nodes. Per fer-ho, s'estudia

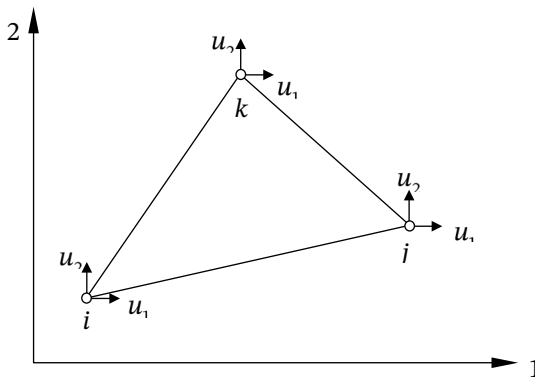


l'equilibri de l'element, un dels components del qual és precisament la força exercida pel node sobre l'element, igual i contrària a l'exercida per l'element sobre el node. Sobre l'element poden actuar, a més, altres forces aplicades directament, en la seva superfície o en el seu volum.

En els apartats següents s'exposa, pas a pas, tot el procés per a l'anàlisi de problemes d'elasticitat plana.

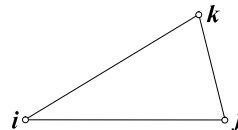
Interpolació en l'element triangle lineal

L'element triangle lineal és una porció plana de material de forma triangular amb un node en cadascun dels seus vèrtexs. Pel fet de tractar-se d'un element bidimensional, cada node té dues possibilitats de moviment (graus de llibertat) corresponents als desplaçaments u_1 i u_2 en les direccions globals 1 i 2, respectivament. Als tres nodes de l'element triangle els assignarem una denominació local com a nodes i , j i k , respectivament.



Per interpoliar els desplaçaments a l'interior de l'element a partir dels desplaçaments nodals, que es consideren coneguts, se suposa que dins de l'element és vàlida l'aproximació següent:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2 \\ a_4 + a_5 x_1 + a_6 x_2 \end{Bmatrix}$$



on les a_i són coeficients a determinar a partir dels desplaçaments nodals. L'equació anterior es pot expressar també com a:



$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [P] \{A\}$$

Suposant que són coneguts els desplaçaments en els nodes i, j i k , es pot plantejar el sistema següent a fi de determinar els coeficients a_i :

$$\{u_e\} = \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{1j} \\ u_{2j} \\ u_{1k} \\ u_{2k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [C] \{A\}$$

d'on: $\{A\} = [C]^{-1} \{u_e\}$, i, per tant: $\{u\} = [P] \{A\} = [P] [C]^{-1} \{u_e\}$

Assimilant aquesta expressió a la del mètode de les funcions d'interpolació, és fàcil observar que:

$$[P] [C]^{-1} \{u_e\} = [N] \{u_e\}$$

Aleshores: $[P] [C]^{-1} = [N_i [I], N_j [I], N_k [I]]$

en què:

$$N_i(x_1, x_2) = (a_i + b_i x_1 + c_i x_2) / 2A$$

$$N_j(x_1, x_2) = (a_j + b_j x_1 + c_j x_2) / 2A$$

$$N_k(x_1, x_2) = (a_k + b_k x_1 + c_k x_2) / 2A$$



$$\text{Amb } 2A = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix} = 2 \times \text{Àrea del triangle i} \quad \begin{aligned} a_i &= x_{1j}x_{2k} - x_{1k}x_{2j} \\ b_i &= x_{1j} - x_{2k} \\ c_i &= x_{1k} - x_{2j} \end{aligned}$$

NOTA: Ídem permutant índexs per a j i k .

L'expressió anterior, desenvolupada, pren la forma següent:

$$\begin{aligned} \{u\} &= [N] \{u_e\} \\ \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [N_i^1 & 0] & [N_j^1 & 0] & [N_k^1 & 0] \\ [0 & N_i^2] & [0 & N_j^2] & [0 & N_k^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_i \\ \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_j \\ \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_k \end{Bmatrix} \\ &\quad \underbrace{\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ [N_i] & [N_j] & [N_k] \end{matrix}}_{[N]} \end{aligned}$$

La matriu d'interpolació $[N]$ és una matriu fila formada per tantes submatrius com nodes tingui l'element. Cadascuna d'aquestes submatrius té dimensió $m \times m$, en què m és el nombre de graus de llibertat de cada node. En el cas analitzat, existeixen 3 nodes (i, j, k) amb dos graus de llibertat per node (u_1, u_2). Si tots els graus de llibertat d'un node s'interpolen de la mateixa manera, com succeeix en l'element triangle, tenim:

$$\begin{aligned} [N_i] &= N_i(x_1, x_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [N_j] &= N_j(x_1, x_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [N_k] &= N_k(x_1, x_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cal observar que la funció d'interpolació associada a un node val 1 quan s'aplica a les coordenades del node i val 0 quan s'aplica a les coordenades d'un altre node. Així doncs, aquestes expressions són anàlogues a les trobades per a l'element barra.

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= N_i(x_1, x_2) \times u_{1i} + N_j(x_1, x_2) \times u_{1j} + N_k(x_1, x_2) \times u_{1k} \\ u_2(x_1, x_2) &= N_i(x_1, x_2) \times u_{2i} + N_j(x_1, x_2) \times u_{2j} + N_k(x_1, x_2) \times u_{2k} \end{aligned}$$

Només ocorre que en aquest cas la utilització d'una expressió matricial facilita la manipulació compacta i sistemàtica de les expressions.



Discretització de les equacions de l'elasticitat 2D

El problema elàstic bidimensional queda resolt quan es coneix el camp de desplaçaments en el pla. A partir d'aquest, i per derivació, s'obtenen els components del tensor de deformació en el pla. Les tensions corresponents es calculen a partir d'aquests últims mitjançant les relacions entre tensions i deformacions. Finalment, es poden calcular les tensions i deformacions en la direcció perpendicular al pla d'anàlisi, atès el tipus d'idealització efectuada: tensió plana ($\sigma = 0$ en la direcció perpendicular al pla) o deformació plana ($\varepsilon = 0$ en la direcció perpendicular al pla).

Segons la mecànica del medi continu, l'estat de deformació a l'interior de l'element es pot expressar a partir dels desplaçaments, de la manera següent:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 \\ \partial u_2 / \partial x_2 \\ \partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \partial / \partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial / \partial x_2 \\ \partial / \partial x_2 & \partial / \partial x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [\mathcal{L}] \{u\}$$

on $[\mathcal{L}]$ és un operador diferencial que actua multiplicant formalment el vector de desplaçaments.

La discretització s'introdueix de la manera següent:

$$\{\varepsilon\} = \underbrace{[\mathcal{L}] \{u\}}_{\text{continu}} \approx \underbrace{[\mathcal{L}] [N] \{u_e\}}_{\text{discret}} = [B] \{u_e\}$$

on $[B]$ és una matriu de deformació, i resulta d'aplicar l'operador $[\mathcal{L}]$ a la matriu d'interpolació $[N]$. Això és així perquè les funcions d'interpolació depenen de les coordenades espacials, no com els desplaçaments nodals, que se suposa que són constants.

$[B]$ és una matriu fila formada per n submatrius de 3×2 en el cas pla.

Per exemple, en el cas d'un element amb tres nodes (i, j, k), tenim:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}] \{u\} &\approx [\mathcal{L}] \left[\begin{matrix} [N_i] & [N_j] & [N_k] \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} \{u_e\}_i \\ \{u_e\}_j \\ \{u_e\}_k \end{Bmatrix} = \\ &= \left[\begin{matrix} [\mathcal{L}] [N_i] & [\mathcal{L}] [N_j] & [\mathcal{L}] [N_k] \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} \{u_e\}_i \\ \{u_e\}_j \\ \{u_e\}_k \end{Bmatrix} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{[B_i]} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{[B_j]} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{[B_k]} \end{aligned}$$



on
$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial x_2 \\ \partial N_i/\partial x_2 & \partial N_i/\partial x_1 \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

D'altra banda, en el cas elàstic lineal, la relació existent entre tensions i deformacions es pot expressar com a: $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$.

on la matriu d'elasticitat $[D]$ té diferents expressions segons el tipus de model suposat: tensió o deformació plana.

En el cas de tensió plana:
$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

En el cas de deformació plana:
$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

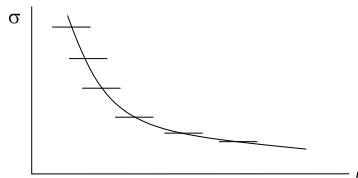
Aleshores les tensions dins de l'element es poden expressar en funció dels desplaçaments nodals de la manera següent:

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{u_e\} = [S] \{u_e\} \text{ en què } [S] \text{ és la matriu de tensions de l'element.}$$

D'aquestes expressions es dedueix que, coneguts els desplaçaments dels punts nodals, la solució del problema elàstic queda totalment definida a l'interior de l'element. En efecte, conegut $\{u_e\}$, tenim:

$$\{u\} = [N] \{u_e\} \quad \{\varepsilon\} = [B] \{u_e\} \quad \{\sigma\} = [S] \{u_e\}$$

Cal fer notar que, en l'element triangle lineal, la deformació (derivada primera dels desplaçaments) roman constant en tot l'element. Això fa que la distribució de tensions sigui al seu torn una distribució discontinua a salts. El valor de tensió resultant del càlcul se suposa que està associat al centroide del triangle per raons que s'exposaran més endavant.

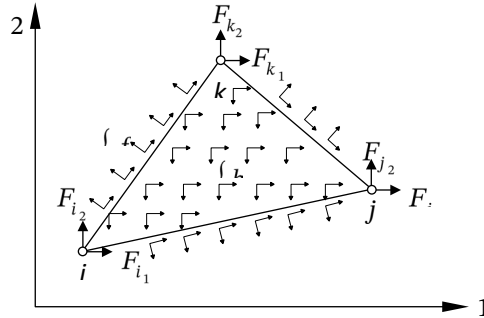


El fet que la distribució de tensions no presenti, en general, continuïtat entre elements, és congruent amb l'aproximació feta en la definició de les funcions d'interpolació dels desplaçaments, ja que no se'ls ha exigint continuïtat en les seves derivades.



Equilibri de l'element

Considerem l'element triangle com un tros de material en equilibri que aïllem momentàniament del seu entorn. En fer-ho, i per no alterar aquest estat d'equilibri, hem de substituir totes les accions exercides sobre ell per forces equivalents. Així doncs, l'element romandrà en equilibri sota l'acció de:



- Les forces de volum actuant. Aquestes estan distribuïdes en tota la seva massa i s'apliquen sobre cadascuna de les partícules que podem imaginar que formen el material de l'element. La força actuant sobre el diferencial de volum de l'element és $\{b\} \times dV$.
- Les forces de superfície actuant. Aquestes, al seu torn, poden ser de dos tipus si l'element està en la perifèria del sòlid: forces exteriors de superfície que actuen sobre la part exterior del contorn i forces de superfície provinents de la interacció amb els elements veïns a través de la part interior del contorn de l'element. La força actuant sobre el diferencial de superfície de l'element és $\{f\} \times dA$.
- Les forces puntuals que els nodes col·locats en els vèrtexs exerceixen sobre ell. Aquestes interaccions són puntuals perquè es produeixen entre el node, que no té dimensions, i la partícula situada en el vèrtex de l'element. Cadascuna d'aquestes forces té un component segons cada grau de llibertat de moviment del node sobre el qual actua.

L'element ha d'estar en equilibri sota l'efecte de totes aquestes accions i, en conseqüència, el treball virtual efectuat per aquestes accions ha de ser igual a la variació virtual de l'energia de deformació. En efecte:

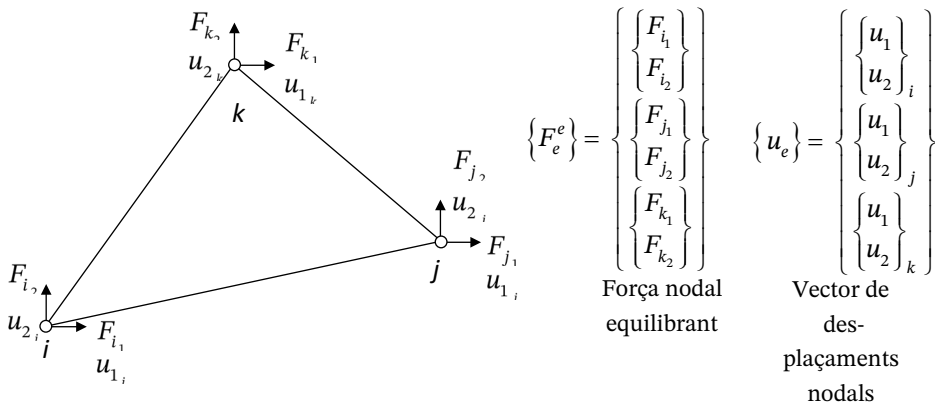
$$\sum_i \{F_i\} \{u_i^*\} + \int_{A_e} \{f\} \{u^*\} dA + \int_{V_e} \{b\} \{u^*\} dV = \int_{V_e} [\sigma] : [\varepsilon^*] dV$$

on $\{u^*\}$ és el camp de desplaçaments virtual i ε_{ij}^* són les deformacions virtuals associades a aquest camp.



NOTA: A fi de simplificar l'explicació, s'ha prescindit de la possible existència de tensions i/o deformacions inicials; s'ha suposat que l'estat inicial es correspon amb l'estat neutre del material, lliure de tensió i deformació.

Per facilitar la discretització d'aquesta expressió, s'introdueix el concepte de força nodal equilibrant. La força nodal equilibrant és un vector format per tants subvectors com nodes té l'element. Cadascun dels subvectors correspon a la força actuant en un node. De la mateixa manera s'introdueix el vector de desplaçaments nodals de l'element. El vector de desplaçaments nodals és un vector format per tants subvectors com nodes té l'element. Cadascun dels subvectors correspon als desplaçaments possibles del node.



Perquè les expressions siguin coherents, forces i desplaçaments s'han de correspondre de manera que la força actuant sobre un grau de llibertat tingui la mateixa direcció que el desplaçament associat a aquest grau de llibertat. Això s'aconsegueix expressant tots els vectors en un sistema d'eixos comú.

Vector de forces i vector de desplaçaments

Amb aquesta nova notació, el principi dels treballs virtuals s'expressa de la manera següent:

$$\{u_e^*\}^T \{F_e^e\} + \int_{V_e} \{u^*\}^T \{b\} dV + \int_{A_e} \{u^*\}^T \{f\} dA = \int_{V_e} [\sigma] : [\varepsilon^*] dV$$

Introduint les funcions d'interpolació sobre els desplaçaments virtuals, tenim:

$$\begin{aligned} \{u_e^*\}^T \{F_e^e\} + \int_{V_e} \left[[N] \{u_e^*\} \right]^T \{b\} dV + \int_{A_e} \left[[N] \{u_e^*\} \right]^T \{f\} dA = \\ = \int_{V_e} \left[[B] \{u_e^*\} \right]^T \{\sigma\} dV = \end{aligned}$$



Si el sòlid és elàstic i lineal, llavors: $\{\sigma\} = [D] [B] \{u_e\}$

amb què: $\{F_e^*\} = \{u_e^*\}^T \left(\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{u_e\}$

Eliminant $\{u_e^*\}^T$ s'obté finalment l'equació d'equilibri de l'element:

$$\{F_e^e\} + \int_{V_e} [N]^T \{b\} dV + \int_{A_e} [N]^T \{f\} dA = \left(\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{u_e\}$$

Aquesta expressió es pot reorganitzar de la manera següent:

$$\{F_e^e\} = \left(\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{u_e\} - \int_{V_e} [N]^T \{b\} dV - \int_{A_e} [N]^T \{f\} dA$$

Si ens imaginem que els nodes actuen com a “suports” de l'element, les forces nodals sobre l'element es poden interpretar, aleshores, com les reaccions que es generen en aquests suports. Aquestes reaccions equilibren cadascun dels components del segon membre de la igualtat, la interpretació física del qual és la següent:

$$\left(\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{u_e\}$$

Són les reaccions en els nodes a les forces elàstiques generades per desplaçaments dels nodes no compatibles amb un moviment de sòlid rígid. Aquest terme rep el nom de *forces nodals elàstiques*.

En aquesta expressió apareix el terme:

$$\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = [K_e]$$

el significat físic del qual consisteix a ser la matriu de rigidesa de l'element. Es pot demostrar que és una matriu simètrica i definida positiva. Les seves dimensions són $(n \times m)^2$, en què n el nombre de nodes de l'element i m el nombre de graus de llibertat per node.

$$-\int_{V_e} [N]^T \{b\} dV = -\{F_e^b\}$$

són les reaccions en els nodes a les forces de volum distribuïdes sobre l'element quan es fixen tots els desplaçaments nodals. Aquest terme rep el nom de *forces nodals equivalents a les forces distribuïdes de volum*.

$$-\int_{A_e} [N]^T \{f\} dA = -\{F_e^f\}$$

són les reaccions en els nodes a les forces de superfície distribuïdes sobre l'element quan es fixen tots els desplaçaments nodals. Aquest terme rep el nom de *forces nodals*



equivalents a les forces distribuïdes de superfície. Com es veurà més endavant, aquest terme solament cal calcular-lo en cas que l'element pertanyi al contorn exterior del cos i sobre ell actui una força també exterior. Les forces associades a les accions internes entre elements, encara que existeixen, no incideixen en el resultat final perquè estan globalment autoequilibrades.

Finalment, queda:
$$\{F_e^e\} = [K_e] \{u_e\} - \{F_e^b\} - \{F_e^f\}$$

expressió que, detallada per components en el cas de l'element triangle lineal, és:

$$\begin{Bmatrix} \{F_e^e\}_i \\ \{F_e^e\}_j \\ \{F_e^e\}_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] & [K_{ik}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] & [K_{jk}] \\ [K_{ki}] & [K_{kj}] & [K_{kk}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_e\}_i \\ \{u_e\}_j \\ \{u_e\}_k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{F_e^b\}_i \\ \{F_e^b\}_j \\ \{F_e^b\}_k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{F_e^f\}_i \\ \{F_e^f\}_j \\ \{F_e^f\}_k \end{Bmatrix}$$

A continuació s'exposa el càlcul de la matriu de rigidesa per a dos casos simples, l'element barra unidimensional i l'element triangle de deformació constant bidimensional.

Element barra

L'element barra en el pla, i referit als seus eixos locals, té un sol grau de llibertat per node. Les funcions d'interpolació són:

$$N_i(x_1) = 1 - x_1/\ell$$

$$N_j(x_1) = x_1/\ell$$

A partir d'això, tenim:

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \frac{du}{dx_1} \right\} = \left[\frac{d}{dx_1} \right] \{u\} = \left[\frac{d}{dx_1} \right] \underbrace{\begin{bmatrix} 1-x_1 \\ \ell \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ \ell \end{bmatrix}}_{[N]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}}_{\{u_e\}} = \frac{1}{\ell} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[B]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}}_{\{u_e\}}$$

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = \int_e \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ [D]}}{E} \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} A dx$$

$$= \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Element triangle lineal

La matriu $[B]$ en aquest cas està formada per les tres submatrius:

$$[B_i] = [\mathcal{L}] [N_i] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}$$

$$[B_j] = [\mathcal{L}] [N_j] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix}$$

$$[B_k] = [\mathcal{L}] [N_k] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix}$$

La matriu de rigidesa elemental $[K_e]$ tindrà una dimensió 6×6 i la seva expressió és fàcilment calculable a partir de l'expressió general següent:

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV$$

Observeu que $dV = t \, dx_1 \, dx_2$, en què t és el gruix, i que tots els coeficients que resulten del producte de matrius són constants.

Per tant:

$$\begin{aligned} [K_e] &= \int_{A_e} \begin{bmatrix} [B_i]^T \\ [B_j]^T \\ [B_k]^T \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} [B_i] & [B_j] & [B_k] \end{bmatrix} t \, dA = \\ &= \int_{A_e} \begin{bmatrix} [B_i]^T [D] [B_i] & [B_i]^T [D] [B_j] & [B_i]^T [D] [B_k] \\ [B_j]^T [D] [B_j] & [B_j]^T [D] [B_k] & [B_k]^T [D] [B_k] \end{bmatrix} t \, dA = \\ &\quad (sim) \\ &= \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] & [K_{ik}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] & [K_{jk}] \\ (sim) & [K_{kj}] & [K_{kk}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

amb



$$\begin{aligned}
 [K_{ij}] &= \int_{A_e} [B_i]^T [D] [B_j] t \, dA = \\
 &= \int_{A_e} \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix} t \, dA = \\
 &= \frac{t}{4A_e} \begin{bmatrix} b_i b_j d_{11} + c_i c_j d_{33} & b_i c_j d_{12} + b_j c_i d_{33} \\ c_i b_j d_{21} + b_i c_j d_{33} & b_i c_j d_{33} + c_i c_j d_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Les forces nodals equivalents a les distribuïdes sobre el volum es calculen aplicant les expressions següents:

$$\begin{aligned}
 \{F_e^b\} &= \int_{V_e} [N]^T \{b\} \, dV = \int_{A_e} \begin{bmatrix} [N_i]^T \\ [N_j]^T \\ [N_k]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{b_{11}\} \\ \{b_{22}\} \end{bmatrix} t \, dA = \begin{Bmatrix} \{F_e^b\}_i \\ \{F_e^b\}_j \\ \{F_e^b\}_k \end{Bmatrix} \\
 \text{amb } \{F_e^b\}_i &= \int_{A_e} [N_i]^T \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} t \, dA = \frac{A_e t}{3} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

De la mateixa manera s'obtenen les forces nodals equivalents a les distribuïdes sobre la superfície:

$$\begin{aligned}
 \{F_e^f\} &= \int_{A_e} [N]^T \{f\} \, dA = \int_{\ell_e} \begin{bmatrix} [N_i]^T \\ [N_j]^T \\ [N_k]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{f_1\} \\ \{f_2\} \end{bmatrix} t \, dl = \begin{Bmatrix} \{F_e^f\}_i \\ \{F_e^f\}_j \\ \{F_e^f\}_k \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

amb $\{F_e^f\}_i = \int_{\ell_e} [N_i]^T \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} t \, dl$ etc.

NOTA: La integral que defineix $\{F_e^f\}$ s'avalua sobre el contorn del triangle, és a dir, sobre cadascun dels seus tres costats (ℓ_{ij} , ℓ_{ik} i ℓ_{jk}).

$$\begin{aligned}
 \{F_e^f\} &= \frac{\ell_{ij} t}{2} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\text{sobre } \ell_{ij}} + \frac{\ell_{ik} t}{2} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \\ f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{\text{sobre } \ell_{ik}} + \frac{\ell_{jk} t}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{\text{sobre } \ell_{jk}}
 \end{aligned}$$



En conseqüència, les forces de superfície, que se suposa que són constants sobre cada costat, es reparteixen equitativament entre els nodes del costat.

Plantejament de l'equilibri nodal

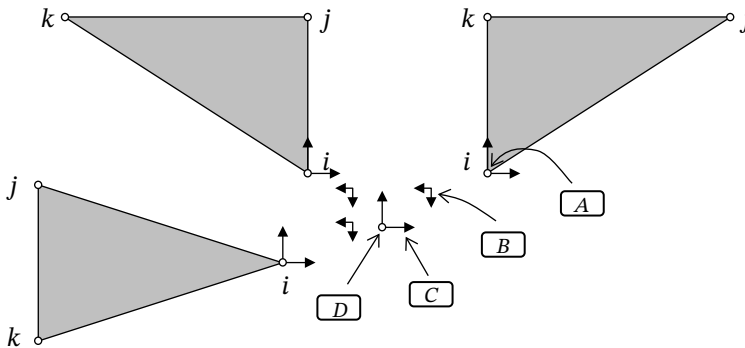
Durant el plantejament de l'equilibri d'un element, apareix el concepte de forces nodals equilibrants. Aquestes forces són exercides pels nodes sobre l'element a fi de garantir-ne l'equilibri, i pel principi d'acció i reacció són iguals en magnitud i de signe oposat a les exercides pels elements sobre els nodes.

Arribats a aquest punt, és possible plantejar l'equilibri d'un node genèric. Aquest equilibri, en el cas de l'elasticitat plana, pren la forma d'un simple equilibri de forces. Considerem un node genèric i . En aquest node conflueixen m elements, cadascun dels quals exerceix una força sobre el node. A més, pot haver-hi una força exterior P_i directament aplicada sobre el node.

La força exercida sobre el node i per l' m -èsim element que hi concorre és: $-\{F_e^e\}_i^m$

La força puntual exterior directament aplicada sobre el node i és: $\{P_i\}$

Per tant, l'equació d'equilibri del node i queda com a: $\{P_i\} - \sum_m \{F_e^e\}_i^m = 0$, on la suma s'estén a tots els elements concurrents en el node i .



On:

- A : és la força del node sobre l'element.
- B : és la força de l'element sobre el node.
- C : és la força exterior sobre el node.
- D : és el node i aïllat.



L'equació desenvolupada per a l'element triangle lineal és:

$$\{P_i\} + \sum_m \{F_e^b\}_i^m + \sum_m \{F_e^f\}_i^m = \sum_m \left([K_{ii}]^m \{u_e\}_i^m + [K_{ij}] \{u_e\}_j^m + [K_{ik}] \{u_e\}_k^m \right)$$

Aquesta equació vectorial és equivalent a dues equacions escalars (suma de forces segons la direcció 1 igual a zero i suma de forces segons la direcció 2 igual 0) corresponents als dos graus de llibertat del node.

En plantejar l'equilibri nodal s'observa que les forces nodals corresponents a accions internes entre elements confrontants se suprimeixen per formar parelles del tipus acció-reacció que s'apliquen a dos elements confluents sobre un mateix node. Per aquest motiu, l'anàlisi de les forces de superfície, ja des d'un principi, es pot reduir solament a les aplicades exteriorment.

Si suposem que els nodes implicats en aquesta equació són lliures en el seu moviment, totes les dades de forces que apareixen en l'equació seran conegudes, mentre que tots els desplaçaments dels nodes implicats seran incògnites. Si algun dels nodes té restriccions en el moviment segons algun grau de llibertat, la força exterior aplicada en aquest node i en la direcció del grau de llibertat impedit tindrà caràcter de reacció d'enllaç, mentre que aleshores el component de desplaçament corresponent serà conegut.

En l'equació resultant cal destacar algunes peculiaritats importants:

- Quan sobre un node i segons un dels seus graus de llibertat actua més d'un element, les rigideses corresponents se sumen, de manera semblant a com se sumen les rigideses de molles actuant en paral·lel.
- Totes les forces exteriors actuants sobre el node, procedents dels elements o directament aplicades, se sumen formant un únic vector de forces que iguala la resultant de les forces elàstiques sobre el node.
- El nombre de nodes que intervenen en l'equació és, en principi, molt limitat perquè aquesta només implica els elements adjacents al node.

Es poden escriure k equacions vectorials d'aquest tipus, on k és el nombre total de nodes. Evidentment, s'obtenen tantes equacions com incògnites, ja que a cada grau de llibertat s'hi associa una sola incògnita, sigui el desplaçament si és lliure, sigui la reacció d'enllaç si aquest està impedit. El sistema d'equacions resultant, format per $k \times m$ equacions escalars, on m és el nombre de graus de llibertat per node, expressa l'equilibri global de tot el sòlid.

A conseqüència de la naturalesa de les equacions, la matriu del sistema, així com el vector de càrregues nodals, es pot obtenir de manera sistemàtica a partir de les matrius de rigidesa dels elements, de les forces nodals elementals i de les forces nodals aplicades directament, per un simple procés de suma denominat *acoblament*. Al mateix temps, aquesta matriu és dispersa i conté molts zeros, atès el caràcter local de l'equilibri nodal.



Aquestes dues característiques, unides al fet que la matriu del sistema es pot demostrar que és simètrica, en facilita enormement la resolució automatitzada mitjançant mètodes numèrics.

Resolució del sistema resultant

El sistema resultant presenta el mateix caràcter dual que s'ha exposat per al cas d'un sistema de barres. Aquí també apareixen dues famílies d'incògnites: els desplaçaments segons els graus de llibertat lliures, en què les forces actuant són conegudes, i les reaccions incògnites en els graus de llibertat restringits. Aquesta situació es pot generalitzar de la manera següent.

Suposem que es reorganitzen les equacions del sistema de manera que sigui possible escriure'l en la forma següent:

Equilibri nodal amb

$$\begin{aligned} \{u_s\} &= \text{Desplaçaments prescrits.} & \{u_k\} &= \text{Desplaçaments lliures.} \\ \{P_s\} &= \text{Reaccions incògnites.} & \{P_k\} &= \text{Forces aplicades.} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} P_k \\ P_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{kk} & K_{ks} \\ K_{sk} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k \\ u_s \end{Bmatrix}$$

Aleshores és possible desacoblar la determinació de les dues famílies d'incògnites (desplaçaments lliures i reaccions). Aquesta operació s'anomena *reducció del sistema*.

En efecte, en una primera etapa es resol el sistema reduït que determina el valor dels desplaçaments nodals incògnits:

$$\begin{aligned} \text{Càlcul dels desplaçaments incògnits:} & \begin{cases} \{P_k\} = [K_{kk}] \{u_k\} + [K_{ks}] \{u_s\} \\ \{u_k\} = [K_{kk}]^{-1} \left[\{P_k\} - [K_{ks}] \{u_s\} \right] \end{cases} \end{aligned}$$

Una vegada determinats aquests, es pot procedir a calcular les reaccions incògnites:

$$\text{Càlcul de les reaccions incògnites: } \{P_s\} = [K_{sk}] \{u_k\} + [K_{ss}] \{u_s\}$$

La resolució completa del problema elàstic comporta el càlcul final de les tensions i deformacions en cada element, que es pot efectuar de la manera següent:

$$\{\sigma\} = [S] \{u_e\} \qquad \{\varepsilon\} = [B] \{u_e\}$$

encara que en moltes ocasions s'utilitzen tècniques més sofisticades amb vista a obtenir millors aproximacions.



Esquema operatiu per a l'aplicació del MEF

El procés general per resoldre el problema elàstic mitjançant el MEF presenta, conceptualment, l'esquema següent.

Cada element queda caracteritzat per la seva matriu de rigidesa elemental $[K]$, composta per $n \times n$ submatrius de dimensió $m \times m$, en què n és el nombre de nodes de l'element i m el nombre de graus de llibertat de cada node (en l'exemple, $n = 3$, $m = 2$). Les càrregues sobre els elements són reduïdes a càrregues nodals equivalents. Els vectors de forces nodals estan formats per n subvectors de dimensió m ; tenen, per tant, tants components com graus de llibertat té l'element.

El plantejament de l'equilibri de tots i cadascun dels nodes de l'estructura en uns eixos globals condueix a la construcció per acoblament de la matriu global de l'estructura $[K]$, de dimensió $(m \times k)^2$, en què k és el nombre de nodes de l'estructura en el seu conjunt. Al mateix temps s'acobla el vector de forces nodals, de dimensió $k \times m$.

Una vegada determinats els desplaçaments nodals incògnites, es procedeix a calcular les reaccions incògnites, i així queda el problema totalment resolt.

En forma reduïda, els passos a seguir són els següents:

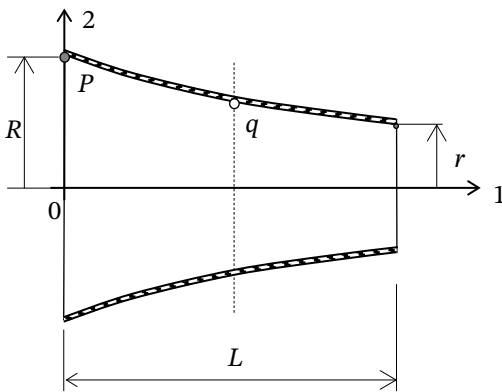
1. Definició del problema:
 - Geometria.
 - Materials.
 - Condicions de càrrega.
 - Condicions d'enllaç.
2. Divisió en elements i elecció de les funcions d'interpolació.
3. Càlcul de les propietats elementals ($[K_e]$ $\{u_e\}$, etc.).
4. Assemblatge del conjunt.
5. Resolució del sistema.
6. Postanàlisi (calcul de reaccions, tensions, deformacions, etc.).

En la pràctica, molts d'aquests passos els efectua el programa sense una excessiva intervenció de l'usuari. No obstant això, no per això es considera mancat d'interès conèixer-los per poder fer un ús òptim d'aquesta tecnologia.

Problemes

Problema 1

Les equacions següents descriuen el moviment d'extrusió d'un medi continu per l'interior d'una tovera de secció circular de radi R i r d'entrada i sortida, respectivament, tal com s'il·lustra a la figura.



$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 + B \cdot t \\x_2 &= X_2 \cdot e^{-At/2L} \\x_3 &= X_3 \cdot e^{-At/2L}\end{aligned}$$

Unitats:
longitud: cm
temps: s
(A, B constants)

$$\begin{aligned}R &= 8 \text{ cm} \\R &= 4 \text{ cm} \\L &= 10 \text{ cm} \\\rho_0 &= 800 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

La transformació *no* es pot considerar infinitesimal.

El medi continu flueix ocupant tot l'espai interior de la tovera, sense crear buits.

La densitat del material a l'entrada de la tovera és sempre ρ_0 .

Es demana:

1. ¿Per a quins valors de A, B, \vec{X} i t és físicament possible la transformació? Determineu la descripció euleriana del moviment $\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$ i el camp de velocitats en totes dues descripcions. Raoneu si es tracta d'un règim estacionari o transitori.
2. Trobeu els valors de A i B corresponents a una velocitat d'extrusió (velocitat horitzontal d'avanç del material) d'1 cm/s i un radi final de la tovera de r .



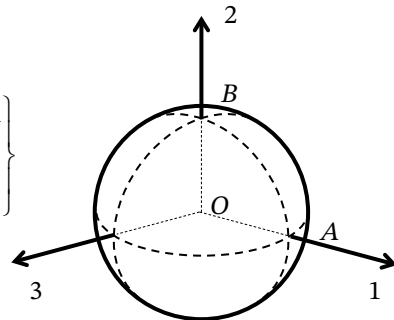
3. Quant temps triga la *partícula P* a lliscar per la paret de la tovera des de la seva posició inicial, a l'entrada, fins a la sortida? Quant val la seva densitat a la sortida? I la seva deformació volumètrica unitària $\varepsilon_v = (dV - dV_0)/dV_0$?
4. Calculeu el vector velocitat de les partícules que passen pel punt *q* de la secció central.
5. Determineu el tensor velocitat de deformació. Quant val la màxima velocitat de deformació?

Problema 2

El medi continu esfèric de radi unitari representat a la figura experimenta una transformació geomètrica *lineal*. La partícula $O(0,0,0)$, centre de l'esfera, no es desplaça. Les partícules d'intersecció de la seva superfície exterior amb els eixos de referència (*A*, *B* i *C*) passen a ocupar les posicions \vec{x}_a , \vec{x}_b i \vec{x}_c .

$$\vec{X}_A = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{X}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{X}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{x}_a = \begin{Bmatrix} 1,001 \\ 0,002 \\ 0,001 \end{Bmatrix} \quad \vec{x}_b = \begin{Bmatrix} 0,002 \\ 0,998 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{x}_c = \begin{Bmatrix} -0,001 \\ 0 \\ 1,003 \end{Bmatrix}$$



Es demana:

1. Determineu l'expressió lagrangiana del camp de desplaçaments $\vec{u} = \vec{u}(\vec{X})$ sabent que són funcions lineals i que el punt O no es desplaça.
2. Determineu la matriu gradient de desplaçaments i avalueu la possibilitat física de la transformació. Calculeu el volum final de l'esfera i la deformació volumètrica unitària.

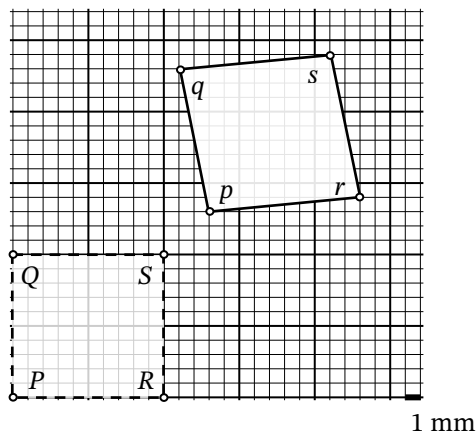
Admetent la hipòtesi de petitesa dels desplaçaments:

3. Calculeu ara la deformació volumètrica unitària i el volum final de l'esfera.
4. Determineu el gir de sòlid rígida que experimenta l'esfera (en radians) i la direcció de l'eix de gir. Dibuixeu el vector rotació sobre l'esfera abans de deformar.

5. Calculeu les longituds finals dels diàmetres de l'esfera definits pels eixos de referència i els angles finals que formen entre ells.
6. Identifiqueu els diàmetres de l'esfera que, una vegada deformada aquesta, aconseguixen la màxima longitud i la mínima, i dibuixeu-los sobre l'esfera abans de la transformació. Calculeu aquestes longituds finals. Quins angles formen entre ells després de la transformació? Quin moviment fan?

Problema 3

En l'anàlisi del moviment d'un medi continu elàstic, lineal i isòtrop, s'utilitza una quadrícula de referència, fixa en l'espai, per mesurar els desplaçaments (no infinitesimals) de les seves partícules. Tots els punts del medi es mouen paral·lelament al pla de la quadrícula.



Suposant que el camp de desplaçaments és *lineal* respecte a X_1 i X_2 , es demana:

1. L'expressió lagrangiana del camp de desplaçaments.
2. La transformació, és invertible?, és físicament possible?
3. Raoneu les diferències entre les dues condicions anteriors.
4. La deformació volumètrica unitària en funció de \vec{X} i la superfície final del quadre $p-q-r-s$.
5. Determineu geomètricament les longituds finals exactes de les rectes $p-q$ i $p-r$.
6. Determineu geomètricament el valor exacte de l'angle final $q-p-r$.

Suposant ara que es tracta d'una transformació infinitesimal, determineu novament les magnituds següents mitjançant el tensor de deformacions i *raoneu les causes de l'error que es comet*.



7. La deformació volumètrica unitària i la superfície final del quadre $p-q-r-s$.
8. Les longituds finals de les rectes $p-q$ i $p-r$.
9. L'angle final $q-p-r$.
10. Raoneu i dibuixeu en quina orientació es troba el quadre inscrit en $P-Q-R-S$, que no presentaria distorsió angular.

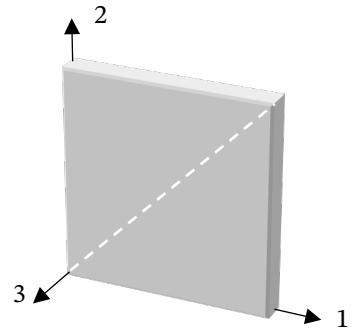
Problema 4

La placa quadrada d'1 mm de gruix i 1 m de costat representada a la figura presenta el camp lagrangià de desplaçaments següent (\vec{u} , \vec{X} en mm, t en s):

$$\begin{cases} u_1 = X_1 X_2 t \\ u_2 = X_2 X_1 t \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Material:

Densitat inicial ρ_0	=	3.000	kg/m ³
Mòdul elàstic E	=	70.000	N/mm ²
Coef. de Poisson ν	=	0,3	
Límit elàstic σ_e	=	300	N/mm ²



Es demana:

1. Avalueu la possibilitat física de la transformació.
2. Calculeu l'evolució de la densitat ρ en funció del temps i de les coordenades materials \vec{X} . ¿Quant val la densitat de la partícula central de la placa per a $t=10^{-6}$ s?
3. Determineu el camp lagrangià de velocitats i calculeu les velocitats de les cantonades de la placa. Dibuixeu aquests vectors sobre la placa deformada per a $t = 10^{-6}$ s.

Per a $t = 10^{-6}$ s i a partir de la hipòtesi de petits desplaçaments:

4. Calculeu la longitud final de la diagonal indicada a la figura en línia discontinua.
5. Quin és el coeficient de seguretat a límit elàstic de la placa en aquest instant, si se suposa un comportament fràgil?

Problema 5

El següent camp *eulerià* de desplaçaments descriu el moviment (no infinitesimal) d'un medi continu elàstic.

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1(1 - e^{-t}) \\ u_2 &= x_2(1 - e^{-t}) \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad x_i \text{ en mm, } t \text{ en segons}$$

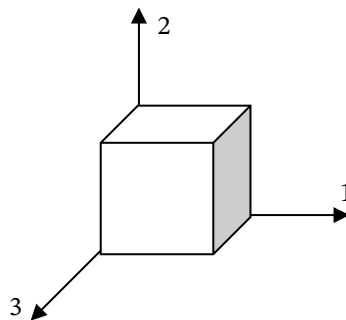
Es demana:

1. Deduïu les descripcions lagrangiana $\bar{x} = \bar{x}(\bar{X}, t)$ i euleriana $\bar{X} = \bar{X}(\bar{x}, t)$ del moviment.
2. Raoneu la possibilitat física de la transformació.
3. Determineu el tensor velocitat de deformació $[D]$ i expliqueu el significat físic dels seus termes.
4. Calculeu el tensor de deformacions finites de Cauchy-Green $[C]$ i determineu la màxima distorsió angular i les direccions que l'experimenten.

Per a $t = 0,1$ s:

5. Representeu gràficament i raoneu la transformació del cub il·lustrat ($1 \times 1 \times 1$ mm), determinant les longituds finals dels costats, els angles finals i el volum final.

$$E = 1.000 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0,3$$



Per a $t = 0,1$ s i a partir de la hipòtesi de transformació infinitesimal i elasticitat lineal:

6. Determineu i dibuixeu la distribució de tensions en les cares i forces de volum.
7. Determineu la tensió tangencial màxima i dibuixeu-la sobre el cub.



Problema 6

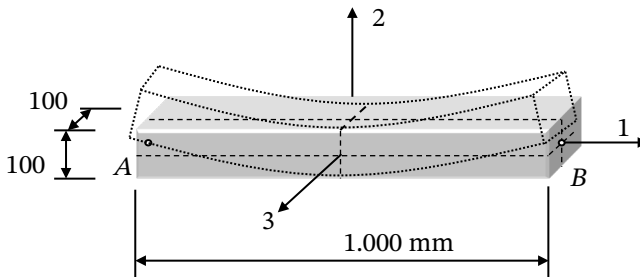
El camp de desplaçaments infinitesimals per a la flexió d'una biga és:

$$u_1 = -\frac{1}{10^4} X_1 X_2$$

$$u_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^4} X_1^2 + \frac{\nu}{2 \cdot 10^4} (X_2^2 - X_3^2)$$

$$u_3 = \frac{\nu}{10^4} X_2 X_3$$

Material $E = 2 \cdot 10^4$ Mpa $\nu = 0.2$



L'eix de la biga (directriu) està situat inicialment sobre l'eix 1. L'origen de coordenades està situat al centre de la biga.

Es demana:

1. Tensor deformació $[\varepsilon]$.
2. La deformació transversal màxima g_{\max} .
3. Senyaleu els punts de la biga on es produeix g_{\max} .
4. El tensor tensió $[\sigma]$.
5. Les tensions normals màximes (tracció) i mínimes (compressió) de tota la biga.
6. Senyaleu els punts de la biga on es produeixen.
7. El vector rotació $\{\omega\}$.
8. Senyaleu els punts de la biga que tenen components de rotació màxims.
9. El gir de les seccions extremes de la biga en el seu punt central (punts A i B sobre l'eix directriu).
10. Si $\sigma_e = 260$ MPa, trobeu el coeficient de seguretat, segons el criteri de Von Mises.

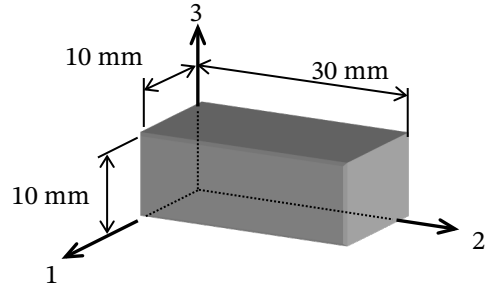
Problema 7

La peça prismàtica de la figura experimenta una transformació geomètrica representada mitjançant les equacions lagrangianes $\bar{x} = \bar{x}(\bar{X}, t)$ següents:

$$x_1 = X_1 + aX_1 + 400 \cdot 10^{-6} X_3$$

$$x_2 = (1 - 900 \cdot 10^{-6}) X_2$$

$$x_3 = X_3(1 + c) + bX_2 - d \cdot 200 \cdot 10^{-6} X_1$$



Sabent que:

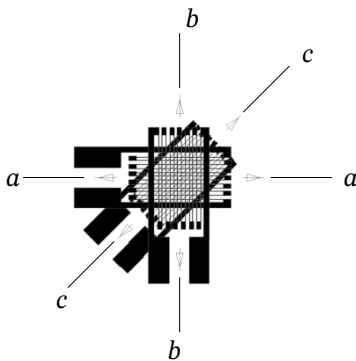
- la transformació no canvia el volum del prisma;
- hi ha, en tot el prisma, un estat pla de deformació (pla 1-2);
- el material és fràgil, de resistència $\sigma_r = 200 \text{ N/mm}^2$;
- les propietats elàstiques són $E = 200.000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,12$;
- es pot admetre la hipòtesi de transformació infinitesimal;

es demana que determineu:

1. Les constants a , b , c i d .
2. L'estat final del prisma: longituds dels costats, volum i rotació de sòlid rígida $\bar{\omega}$, il·lustrant gràficament l'estat de deformació (no és necessari il·lustrar els moviments de sòlid rígida).
3. La tensió tangencial màxima, i dibuixeu el pla sobre el qual actua i el vector tensió.
4. El coeficient de seguretat γ_s . Representeu la superfície de trencament i el punt de funcionament en el pla de tensions principals (pla de Westergaard). Compareu aquest resultat amb el que s'obté si el material fos dúctil.

Problema 8

Una roseta de galgues és un dispositiu constituït per tres galgues extensomètriques superposades les lectures de les quals proporcionen les tres deformacions longitudinals unitàries corresponents a dues direccions perpendiculars i la seva bisectriu. S'han enganxat rosetes en determinats punts de la superfície lliure de la dent d'una pala excavadora per avaluar les causes del seu trencament.



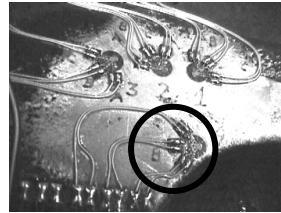
$$\varepsilon_a = 887,50 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_b = -720,83 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_c = 547,62 \cdot 10^{-6}$$

$$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$



Si les lectures d'una de les rosetes i les propietats del material són les indicades, es demana, per a aquest punt:

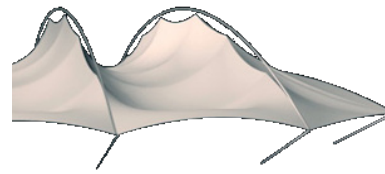
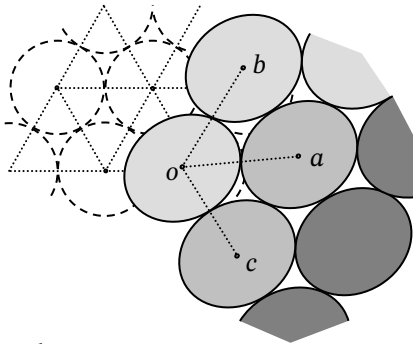
1. Les deformacions transversals g de les direccions a i b .
2. Les components intrínseques, normal σ i tangencial τ , dels vectors tensió que actuen sobre els plans de normal a i b .
3. Les components intrínseques del vector tensió amb component tangencial màxima $\tau_{\text{màx}}$. Representeu gràficament aquest vector tensió i el pla sobre el qual actua, situant-lo respecte a les direccions a , b i c de referència.
4. Sabent que es tracta d'un material dúctil, determineu la tensió normal de límit elàstic σ_e mínima necessària perquè el coeficient de seguretat a límit elàstic sigui 1,5. Representeu aquest apartat gràficament en el pla de tensions principals.

Problema 9

Sobre la *superfície exterior lliure de càrrega* d'una lona de material tèxtil recoberta amb tefló, destinada a la construcció d'una coberta, s'imprimeix una imatge composta per petits píxels circulars de 10 mm de diàmetre, en diferents tonalitats de gris, disposats

com s'indica a la figura (les línies discontinües corresponen a la posició sense deformar). Es vol aprofitar aquest fet per determinar l'estat tensional i deformacional del material, quan està en funcionament, en determinats punts de la coberta que puguin ser conflictius a causa de la presència de línies de sutura, unions, reforços, etc.

Així, en situació de càrrega màxima, es mesuren les distàncies entre els centres de les circumferències (ara el·lipses), en una zona prou reduïda per poder considerar que *l'estat de deformació és constant*, i la superfície, plana. El resultat és l'indicat a la taula adjunta.



$l_{oa} = 10,25 \text{ mm}$
$l_{ob} = 10,25 \text{ mm}$
$l_{oc} = 10,1 \text{ mm}$

Material:

$$E = 10 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

Suposant que el material és homogeni, isòtrop, en el camp elàstic i lineal, i suposant que *la transformació és infinitesimal*, es demana:

1. Les partícules experimenten un moviment absolut del qual no es donen dades; *raoneu* per què no és necessari conèixer aquest moviment per estudiar l'estat de deformació d'una partícula.
2. Prenent $oa \equiv$ eix 1, i la perpendicular al dibuix \equiv eix 3, determineu el tensor de deformació i descriviu el significat físic dels seus components.
3. Calculeu el percentatge de canvi de gruix de la lona en aquesta zona.
4. Deduïu l'orientació dels eixos de les el·lipses respecte a la direcció \overline{oa} . Dibuixeu-los.
5. Representeu els cercles de Mohr de tensions i identifiqueu els vectors de tensió que actuen a través dels plans normals oa , ob i oc .
6. Deduïu quins plans experimenten les màximes tensions tangencials en el pla del dibuix (1-2). Calculeu i dibuixeu aquestes tensions tangencials, i la distorsió angular que experimenten els plans on actuen.

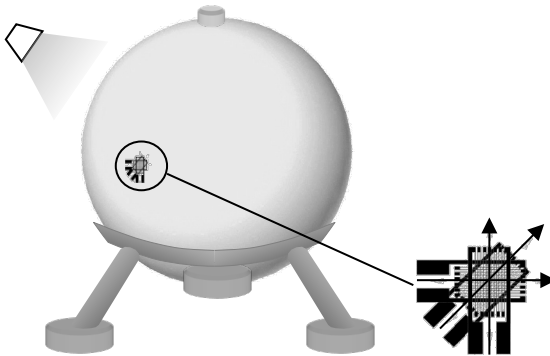


7. Assumint que la fallada es produirà per esquinçament, a causa de la *fragilització* del teixit sota els efectes dels raigs ultraviolats, *raoneu* quines són les tensions que provocaran aquest esquinçament, calculeu-les i dibuixeu-les. Dibuixeu també l'esquinçament en la seva correcta orientació.
8. Determineu la resistència mínima que hauria de tenir el material per suportar aquest estat de tensió amb un coeficient de seguretat de valor 1,5.

Problema 10

Un dipòsit esfèric de paret prima es construeix amb una certa resina reforçada amb fibra de vidre curta, orientada en direccions aleatòries, de manera que el material pot considerar-se homogeni i isòtrop. S'analitza el comportament del material, en el punt crític de la superfície externa del dipòsit (lliure de càrrega), adherint una roseta de galgues extensomètriques –dispositiu que mesura les deformacions longitudinals unitàries en dues direccions perpendiculars i la seva bisectriu (v. figura).

El dipòsit se sotmet a càrrega (pressió interna) i es mesuren les tres lectures de la roseta de galgues. Les tres lectures resulten idèntiques, de valor $3.000 \mu\epsilon$. Es demana:



Propietats elàstiques:

$$E = 20.000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,4$$

Gruix de paret:

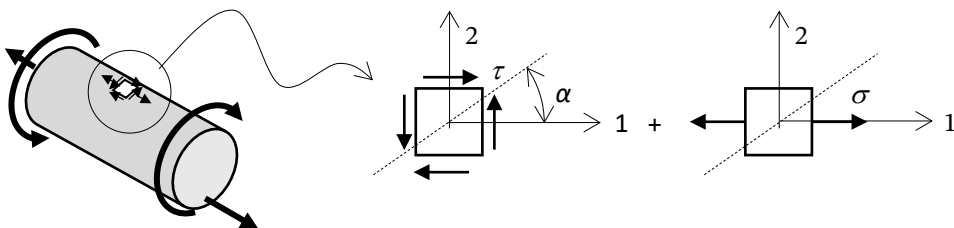
$$10 \text{ mm}$$

1. Dibuixeu els cercles de Mohr de tensions i de deformacions.
2. Què és l'el·lipsoide de Lamé, o de tensions? Descriviu-lo i dibuixeu-lo en aquest cas.
3. Suposant que l'estat de tensió és, aproximadament, el mateix a tot el gruix de la paret del dipòsit, calculeu la variació de gruix en aquest punt.
4. Determineu el valor màxim de tensió normal σ_1 . Raoneu i identifiqueu els plans on actua.

5. Determineu el valor màxim de tensió tangencial τ_{\max} . Raoneu i identifiqueu els plans on actua.
6. Expliqueu les causes i els mecanismes de fallada per als criteris de Rankine (σ_1), Tresca (τ_{\max}) i Von Mises.
7. Raoneu quin criteri és l'apropiat si, en condicions normals, la fallada es produeix per lliscament entre la fibra i la resina. Determineu el límit elàstic necessari si el coeficient de seguretat és $\gamma_s = 2$.
8. Després de 52 hores en les mateixes condicions de càrrega, en una cambra d'envelliment accelerat (fadeòmetre) per l'acció de raigs UV i humitat elevada, la matriu de resina es *fragilitza* i fissura. Es demana:
 - a. Raoneu quin criteri de fallada és l'apropiat i determineu el límit elàstic del material envellit.
 - b. Il·lustreu la modificació de la corba de fallada en el pla de tensions principals (Westergaard) indicant el punt de funcionament.
 - c. Raoneu i il·lustreu gràficament en quines direccions es produiran les fissures.

Problema 11

Un element resistent, elaborat amb una resina dúctil, s'ha de sotmetre a un esforç de torsió que provoca un estat tensional de cisallament pur amb valors extrems de $\tau = 100 \text{ N/mm}^2$ als punts de la superfície externa lliure de càrrega i superposat a un estat uniaxial de tracció de valor $\sigma = 200 \text{ N/mm}^2$.



Malgrat tenir un comportament inicialment dúctil, la resina es pot fragilitzar amb el temps per efecte dels raigs UV i, per evitar el clivatge que es produiria, es vol reforçar la superfície amb una capa finíssima de fibres d'un material fràgil, que no altera les propietats elàstiques del conjunt.

Suposant que l'estat de tensions és l'indicat, es demana:



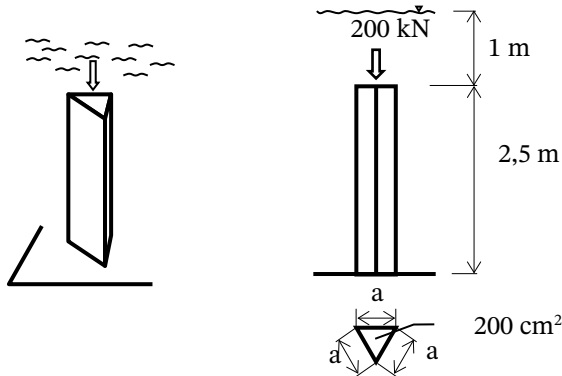
1. En quina direcció òptima α s'han d'orientar les fibres respecte als eixos 1-2 per evitar el clivatge superficial de la resina? Raoneu i deduiu gràficament la resposta a través dels cercles de Mohr i dibuixeu els plans de clivatge o fissures sobre el material.
2. Determineu les propietats resistents mínimes necessàries dels materials i de la interfície fibra-resina si es vol tenir un coeficient global de seguretat d'1,5:
 - tensió de límit elàstic de la resina (dúctil)
 - tensió de ruptura de les fibres
 - resistències mínimes al lliscament i a la separació entre fibra i resina

Si, una vegada fabricada la peça amb les fibres orientades segons la α calculada, se sotmet exclusivament a l'estat de cisallament pur (sense l'estat de tracció uniaxial):

3. Quines de les anteriors propietats mínimes necessàries dels materials i de la interfície fibra-resina haurien de millorar per mantenir un coeficient de seguretat d'1,5?

Problema 12

Tenim una columna de material elàstic lineal, totalment submergida en un fluid ideal en repòs i recolzada verticalment sobre la superfície inferior sense fregament. La superfície superior de la columna està situada a 1 m de profunditat, suportant una càrrega vertical addicional de 200 kN, que se suposa que està distribuïda uniformement sobre aquesta superfície.



Es demana:

1. Determineu raonadament les sol·licitacions a què està sotmesa la columna.
2. Determineu i raoneu les expressions dels tensors tensió i deformació per a un punt qualsevol de la columna.

3. Calculeu les variacions geomètriques que es produeixen en una secció transversal qualsevol de la columna (angles i longituds dels costats) i determineu-les numèricament per a les seccions extremes de la columna (superior i inferior).
4. Calculeu l'altura final de la columna una vegada deformada.
5. Si la columna és de formigó (fràgil), quant val el coeficient de seguretat?

Dades:

Densitat del fluid: $\rho_f = 2.000 \text{ kg/m}^3$; $g \approx 10 \text{ m/s}^2$

Propietats del material elàstic de la columna:

$\rho_c = 2.500 \text{ kg/m}^3$; $E_c = 20.000 \text{ N/mm}^2$; $\nu_c = 0,2$; $\sigma_{\text{ruptura a compressió}} = -25 \text{ N/mm}^2$

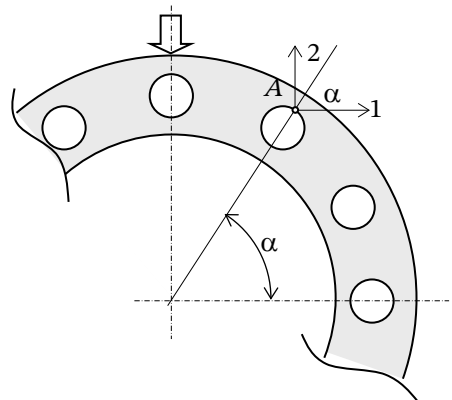
Problema 13

La figura adjunta mostra la secció transversal d'una canonada circular refrigerada de gran longitud, la deformació axial de la qual (perpendicular a la figura) està impedita.

Quan és sotmesa a càrrega mecànica estàtica, es produeix un trencament fràgil en propagar-se una fissura iniciada en el punt A.

Material:

Mòdul elàstic	$E = 200.000 \text{ N/mm}^2$
Coef. de Poisson	$\nu = 0,3$
Tensió límit	$\sigma_e = 800 \text{ N/mm}^2$
	$\alpha = 60^\circ$



Es demana, per al punt A i just en l'instant previ a la ruptura:

1. Determineu les tensions principals σ_1 , σ_2 i σ_3 , i identifiqueu sobre el dibuix les seves direccions principals associades. Identifiqueu les direccions I, II i III.
2. Determineu les deformacions principals ε_1 , ε_2 i ε_3 i calculeu el tensor deformació segons els eixos 1-2-3.
3. Determineu la variació de l'angle α en el punt A.



4. Determineu gràficament (cercles de Mohr) els vectors tensió \vec{t}_1 , \vec{t}_2 i \vec{t}_3 , i dibuixeu-los sobre el punt A.
5. Què succeiria si es fabricués la canonada amb un material d'identica σ_e però molt dúctil?

Problema 14

Una xapa d'acer d'1 mm de gruix i forma hexagonal experimenta un estat tensional pla i constant en tots els seus punts, provocat per unes certes forces de superfície aplicades a cadascun dels seus costats. Sabent que:

- sobre un costat, la component normal de la força de superfície és nul·la i la tangencial és 100 N/mm^2 ;
- sobre un altre, actua la component tangencial màxima;

es demana:

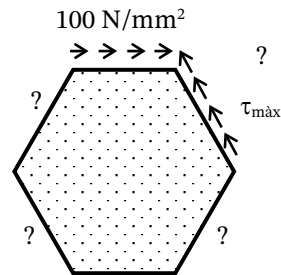
1. Representeu els tres cercles de Mohr de tensió, grafiant sobre ells els vectors tensió que actuen en les sis cares de l'hexàgon.
2. Calculeu les tensions i direccions principals, i dibuixeu-les sobre la peça identificant els plans on actuen.
3. Determineu l'expressió del tensor tensió en la base formada per la direcció horitzontal, la direcció vertical i la normal a ambdues.
4. Calculeu i representeu gràficament les forces de superfície normals i tangencials sobre totes i cadascuna de les cares de l'hexàgon.

Material:

Mòdul elàstic $E = 200.000 \text{ N/mm}^2$

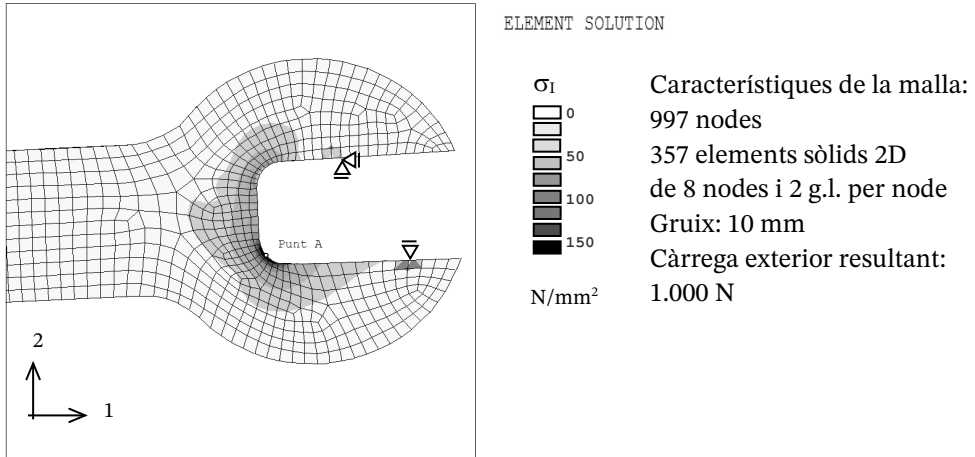
Coef. de Poisson $\nu = 0,3$

Límit elàstic $\sigma_e = 800 \text{ N/mm}^2$



Problema 15

L'estudi tensional (elàstic i lineal) d'una clau fixa, mitjançant el mètode dels elements finits, dona el mapa de tensions principals màximes (σ_I) de la figura. El valor més intens es produeix en el punt A indicat.



No hi ha accions externes perpendiculars al pla de la peça.

Del mateix model d'elements finits s'obté que la tensió tangencial σ_{12} és de -225 N/mm^2 per al mateix punt A. Es demana, per al punt A:

1. Raoneu i representeu gràficament sobre la peça en quins plans, direcció i sentit actua la tensió il·lustrada de 450 N/mm^2 .
2. Expresses el tensor tensió en les direccions principals. Descriviu les particularitats de les direccions i tensions principals.
3. Determineu gràficament (Mohr) l'angle que forma la direcció normal a la superfície en A amb els eixos 1-2.
4. Deduïu l'expressió del tensor tensió a la base 1-2-3. Dibuixeu-ne tots els components i interpreteu-ne el significat físic.
5. Si el material falla de manera dúctil, raoneu en quin pla començarà la plastificació.
6. Si el material fallés de manera fràgil, raoneu en quin pla començaria la ruptura.
7. Determineu la tensió equivalent segons els criteris de fallada de Rankine, Tresca i Von Mises, i raoneu el motiu de les discrepàncies i/o coincidències entre aquests.
8. Determineu la tensió de límit elàstic mínima necessària per a obtenir un coeficient de seguretat $\geq 1,2$ amb cadascun dels criteris de fallada; compareu els resultats en el pla de tensions principals (Westergaard).
9. Si la tensió de límit elàstic del material escollit finalment és de 900 N/mm^2 , determineu quina càrrega exterior resultant màxima podem aplicar sense que disminueixi la seguretat.
10. Segons les característiques de la malla i els enllaços indicats, raoneu quina seria la dimensió de la matriu de rigidesa reduïda.



Problema 16

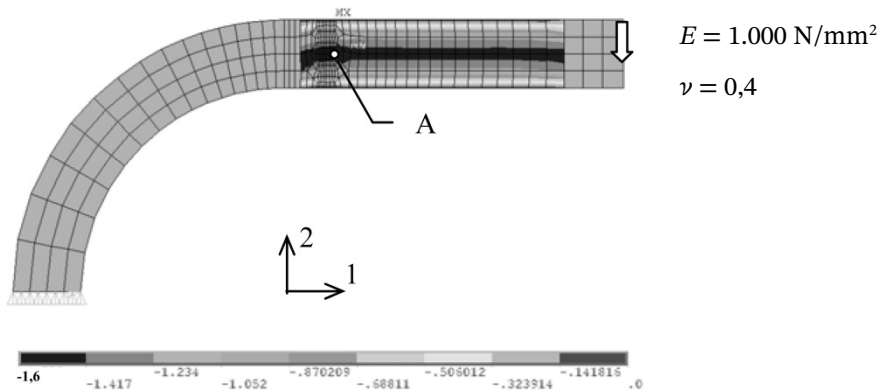
S'analitza l'estat tensional pla d'un element elàstic de 10 mm de gruix mitjançant un model d'elements finits bidimensional. La càrrega exterior és una força aplicada en l'extrem dret de la peça, continguda en el pla del model. No hi ha càrregues exteriors perpendiculars al pla.

La figura mostra el mapa de tensions tangencials σ_{12} en el tram central del braç de la peça.

Sabent que, en el punt central A :

- $\sigma_{12} = -1,6 \text{ N/mm}^2$;
- la tensió normal σ_{11} és nul·la;
- la tensió principal mínima σ_{III} és igual a σ_{12} ;

Material:



es demana, per a aquest punt A :

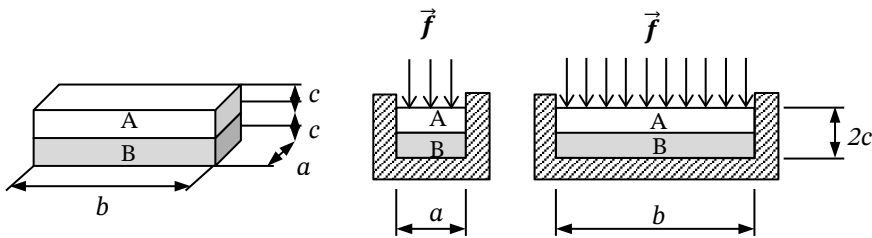
1. Determineu i dibuixeu els vectors tensió que actuen sobre els plans de referència.
2. El tensor tensió, és sempre simètric? Raoneu per què.
3. Determineu i dibuixeu les tensions i direccions principals.
4. Quines particularitats tenen les tensions i direccions principals? Expressen-les matemàticament.
5. Calculeu la variació de gruix de la peça en aquest punt.
6. Calculeu les tensions equivalents de Rankine, Tresca i Von Mises, i exposeu el significat físic dels tres criteris de fallada.

7. Determineu, per a cadascun d'aquests tres criteris, quin seria el límit elàstic del material si es produís la fallada elàstica en aquest punt, i representeu el resultat en el pla de tensions principals (Haigh-Westergaard).
8. Raoneu quant valen les tensions σ_{12} al llarg del contorn del tram horitzontal de la peça.

Problema 17

Es pretén dissenyar una junta d'estanquitat utilitzant conjuntament dos materials, A i B.

Es preveu fer un experiment consistent a situar el conjunt format per dos prismes d'igual geometria ($a \times b \times c$), fabricats amb cada material, a l'interior d'una cavitat amb les mateixes dimensions de llarg i ample $a \times b$, mecanitzada sobre un material molt més rígid, de manera que l'única cara lliure és la superior. S'aplica una pressió uniforme sobre aquesta cara lliure, de valor f (N/mm²).



$E_A =$	1.000	N/mm ²	$f =$	100	N/mm ²
$\nu_A =$	0,40		$a =$	20	mm
$E_B =$	2.000	N/mm ²	$b =$	100	mm
$\nu_B =$	0,30		$c =$	10	mm

Suposant que no hi ha fricció en cap superfície, per a tots dos materials:

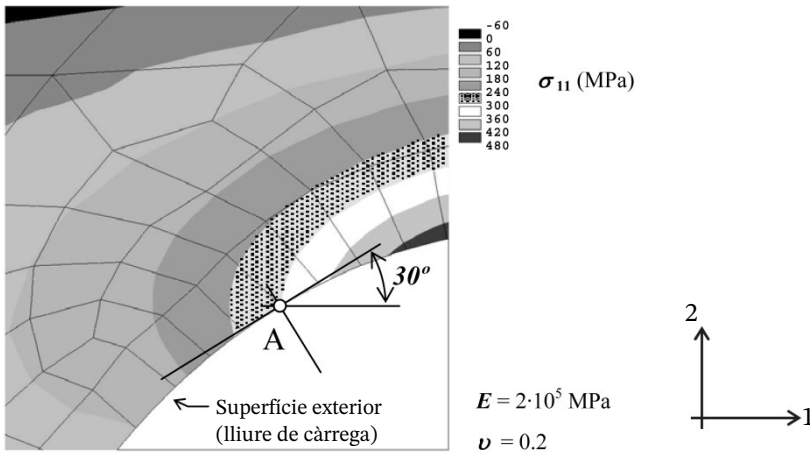
1. Determineu la distribució de pressions en les parets. Dibuixeu-les.
2. Dibuixeu els cercles de Mohr de tensions i deformacions.
3. Determineu el descens de la superfície superior.
4. Identifiqueu les màximes tensions tangencials i dibuixeu-les.
5. Determineu la tensió equivalent de Von Mises.



6. Quina tensió de límit elàstic seria necessària per garantir el funcionament amb un coeficient de seguretat d'1,5?
7. Il·lustreu la superfície de fallada i l'estat de tensions en l'espai de tensions principals o de Haigh-Westergaard.

Problema 18

Per resoldre el problema elàstic en el punt A , situat sobre una superfície exterior lliure de càrrega d'un sòlid elàstic i lineal, s'aplica el mètode dels elements finits i s'obté el mapa següent de tensions normals σ_{11} :

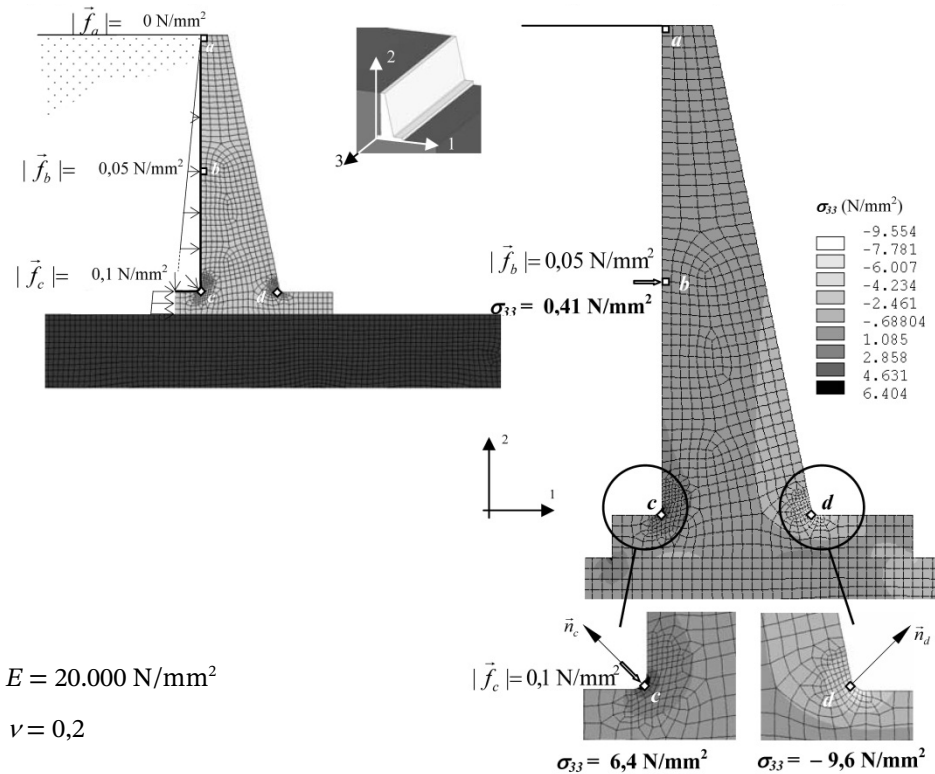


Sabent que, en el pla 1-2, hi ha *deformació plana*, es demana:

1. Calculeu tots els components dels tensors tensió $[\sigma]$ i deformació $[\varepsilon]$, expressats en els eixos 1,2,3.
2. Dibuixeu els tres cercles de Mohr de tensions, i representeu sobre ells els vectors tensió \vec{t}_1 , \vec{t}_2 i \vec{t}_3 associats a les direccions 1, 2 i 3, respectivament.
3.
 - a) Calculeu la tensió tangencial màxima i la seva deformació angular associada.
 - b) Dibuixeu la tensió tangencial màxima i els plans sobre els quals actua.
 - c) Utilitzant el criteri de Tresca (τ_{\max}), calculeu el límit elàstic σ_e que ha de tenir el material com a mínim, per garantir un coeficient de seguretat $\geq 1,5$.

Problema 19

S'analitza el mur de contenció esquematitzat amb el mètode dels elements finits, admetent comportament elàstic, lineal i isòtrop del material, i suposant nul·la la dilatació longitudinal del mur (*deformació plana*). Sobre la línia de contacte del mur amb el terreny, s'aplica una força de superfície \vec{f} , sempre normal a la superfície exterior i proporcional a la profunditat, de valor 0,05 i 0,1 N/mm² en els punts *b* i *c*, respectivament. S'adjunta el mapa de tensions σ_{33} perpendiculars al pla 1-2 amb els valors numèrics corresponents als punts *a*, *b*, *c* i *d*.



La superfície exterior en els punts *C* i *D* forma 45° amb els eixos 1 i 2.

Es demana, per als punts *a*, *b*, *c* i *d*:

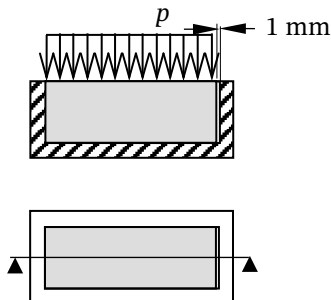
1. Raoneu quines són les direccions i tensions principals.
2. Expresses els tensors tensió en les respectives direccions principals.
3. Expliqueu el significat físic dels seus components i dibuixeu-los sobre els quatre punts.



4. Expresseu els tensors tensió en les direccions 1-2-3.
5. Expliqueu el significat físic dels seus components i dibuixeu-los sobre els quatre punts.
6. Determineu les tensions tangencials màximes i dibuixeu-les (en direcció i sentit) sobre els plans on actuen (en cadascun dels quatre punts).
7. Per al punt c , dibuixeu els cercles de Mohr i identifiqueu els vectors tensió dels eixos 1-2-3.
8. Si el material falla a *tracció* de manera *fràgil*, raoneu en quin punt es produirà la ruptura.
9. Raoneu i representeu gràficament en quin pla es produirà la fissura.
10. Determineu la tensió de límit elàstic necessària per obtenir un coeficient de seguretat $\geq 1,5$.

Problema 20

Es vol analitzar el comportament del dispositiu il·lustrat a la figura, constituït per un prisma rectangular de $20 \times 20 \times 50$ mm, de plàstic elastòmer amb pes propi negligible, ajustat en una cavitat de parets rígides amb fricció nul·la. Totes les cares del bloc estan en contacte amb la cavitat rígida, excepte la cara superior i un lateral, on es disposa d'un espai lliure d'1 mm.



Sobre la cara superior, s'exerceix una pressió vertical p que provoca la deformació del material. En funció de la intensitat de p es pot arribar a dues situacions:

- a) El bloc es deforma sense que es produeixi contacte amb la paret lateral (< 1 mm).
- b) El bloc es deforma fins a tocar la paret lateral, i la cara superior queda com a única superfície lliure.

Les constants elàstiques del material són:

$$E = 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,4$$

Es demana, per al cas *a*):

1. Descriviu raonadament les condicions de contorn, i reflectiu-les en els tensors tensió i deformació.
2. Expresses els tensors tensió i deformació en funció de la pressió p , exclusivament.
3. Calculeu la pressió p_c d'inici de contacte amb el lateral. Calculeu el descens de la cara superior.

Per al cas *b*):

4. Descriviu raonadament les condicions de contorn i reflectiu-les en els tensors tensió i deformació.
5. Determineu el descens de la cara superior per a $p = 2 \cdot p_c$.

Es vol modelitzar el cas *a* mitjançant el mètode dels elements finits. Es demana raonar i il·lustrar gràficament com és el model més senzill possible que reproduïxi els resultats amb exactitud total. En particular:

6. Definiu el grau mínim necessari de les funcions d'interpolació, el nombre de graus de llibertat per node i el tipus de problema elàstic (tensió plana, deformació plana, 3D...).
7. Dibuixeu la malla i les condicions de contorn.
8. Escriviu, sense calcular valors numèrics, el sistema general d'equacions d'equilibri i el sistema reduït, numerant els graus de llibertat i indicant la dimensió de vectors i matrius.
9. Identifiqueu els termes nuls dels vectors de càrregues i desplaçaments.
10. Per què és necessari plantejar un sistema reduït per resoldre el sistema general?



Problema 21

Sota l'acció d'un sistema de forces exteriors, el cub de medi continu elàstic definit per $0 \leq X_1; X_2; X_3 \leq 10$ mm experimenta l'evolució següent del camp de desplaçaments, considerats infinitesimals, en funció del paràmetre a :

$$u_1 = 2a \cdot 10^{-6} X_1 - a \cdot 10^{-6} X_2$$

$$u_2 = 3a \cdot 10^{-6} X_1 - 2a \cdot 10^{-6} X_2$$

$$u_3 = 0$$

Propietats elàstiques del medi: $E = 200.000 \text{ N/mm}^2$ $\nu = 0,25$

Sabent que el material falla quan la tensió tangencial màxima supera el valor límit de $53,7 \text{ N/mm}^2$, es demana:

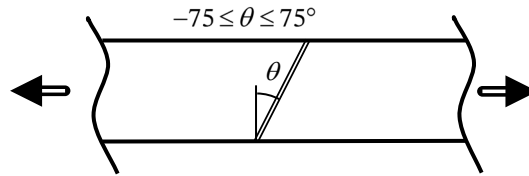
1. Comproveu si es compleixen les condicions de compatibilitat de deformacions.
2. Determineu per a quin valor del paràmetre a i en quines partícules del cub hi ha un coeficient de seguretat de $\gamma_s = 1,5$.

Per al valor de a corresponent a la fallada elàstica ($\gamma_s = 1$):

3. Determineu i dibuixeu les accions exteriors que actuen sobre aquest cub.
4. Determineu i dibuixeu la tensió tangencial màxima i el pla on actua.
5. Determineu i dibuixeu les direccions i tensions principals.
6. Esquematzieu el model d'elements finits més senzill possible per analitzar aquest problema elàstic amb total exactitud, i indiqueu els elements següents:
 - a) el tipus d'element finit i funció d'interpolació
 - b) la malla
 - c) els enllaços
 - d) les forces exteriors
 - e) la dimensió de les matrius de rigidesa general i reduïda

Problema 22

Se sotmet un element elàstic de gran longitud i 100 mm^2 de secció transversal a un esforç uniaxial de valor $F = 6.000 \text{ N}$. Es construeix unint múltiples peces d'1 m de longitud, tallades de biaix, encolant-les en els seus extrems amb una finíssima capa adhesiva. Conegudes les característiques resistents de la superfície adhesiva, es vol estudiar la influència de l'angle de biaix en la seguretat de la unió.



Característiques resistents de la superfície adhesiva:

$$\sigma_{adm} = 52 \text{ MPa} \quad \tau_{adm} = 28 \text{ MPa}$$

Es demana:

1. Deduïu les expressions dels components intrínsecs de tensió que actuen sobre el pla encolat en funció de θ i representeu-lo gràficament, donant valors numèrics a intervals de 15° .
2. Utilitzeu els cercles de Mohr per deduir el rang de valors de θ permesos si s'ha de complir el següent:
 - a) únicament $\sigma \leq \sigma_{adm}$
 - b) únicament $\tau \leq \tau_{adm}$
 - c) simultàniament $\sigma \leq \sigma_{adm}$ i $\tau \leq \tau_{adm}$
3. Utilitzeu els cercles de Mohr per determinar la càrrega F màxima admissible i el valor òptim de θ per als casos a , b i c definits més amunt.

Problema 23

S'analitza el comportament elàstic lineal d'una peça plana de gruix petit, carregada en el seu propi pla, mitjançant el mètode dels elements finits.

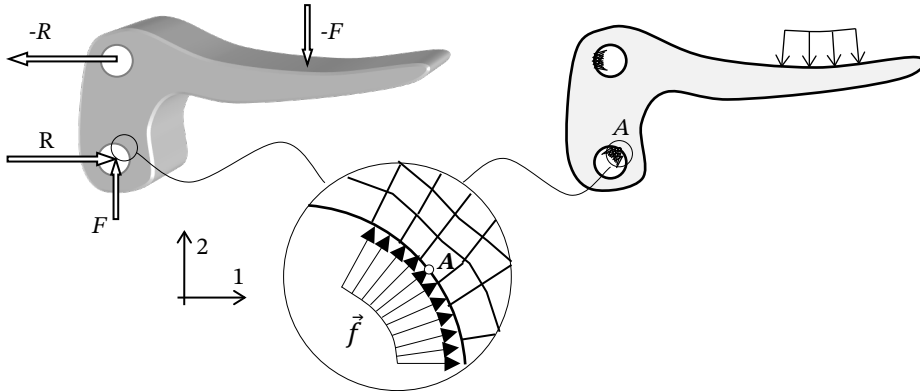
El punt A està situat en la zona superior dreta del forat inferior. Aquesta zona està sotmesa a una força de superfície \vec{f} uniforme i perpendicular al contorn, que equival a la resultant deguda al contacte amb un eix passant.

La intensitat de \vec{f} , que depèn de l'extensió de la superfície de contacte definida per l'analista, val 25 N/mm^2 .

En aquest punt A , la normal al contorn forma 45° amb els eixos de referència i s'obté, del model d'elements finits, un valor $\sigma_{11} = 50 \text{ N/mm}^2$.

La peça està fabricada amb un aliatge d'alumini de les característiques següents:

$$E = 70.000 \text{ MPa} \quad \nu = 0,36 \quad \sigma_e = 240 \text{ MPa}$$



Es demana, per al punt A:

1. Determineu i dibuixeu els vectors tensió principal màxima i mínima.
2. Determineu i dibuixeu els vectors tensió associats als eixos de referència, sobre la peça i en els cercles de Mohr.
3. Determineu i dibuixeu sobre la peça els vectors tensió que contenen la tensió tangencial màxima.
4. Determineu el coeficient de seguretat respecte a la fallada elàstica i il·lustreu-lo en l'espai de tensions principals o de Haigh-Westergaard.
5. Repetiu la pregunta anterior suposant que el material fos fràgil.

Si les condicions de contorn del model d'elements finits s'imposessin únicament en termes de forces de superfície, tal com s'indica en el dibuix:

6. Es requereixen condicions de contorn addicionals? Per què? En cas afirmatiu, proposeu-ne exemples.
7. Raoneu com canviaria l'estat tensional del punt A si el mòdul d'elasticitat E es duplicués. I si es duplicués el límit elàstic?

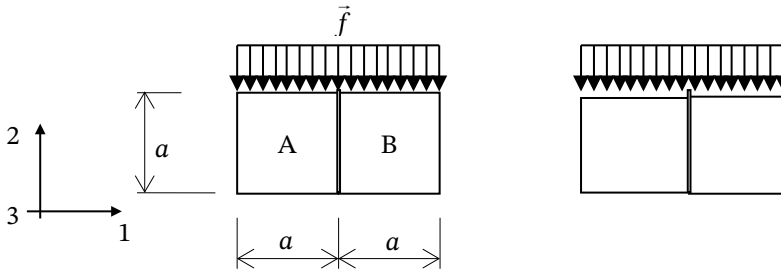
Problema 24

Per dissenyar un producte compost per dos materials diferents, A i B, s'efectua l'estudi elàstic que s'il·lustra a continuació.

Inicialment, tots dos materials tenen forma cúbica de costat $a = 10 \text{ mm}$ i se situen paral·lelament separats per una làmina mòbil d'efecte negligible dins d'un canal de dimensions transversals $2a \times a$, construït amb un altre material molt més rígid, tal com s'indica a la figura.

Les cares frontal i posterior dels cubs són lliures. No hi ha fricció entre superfícies de contacte. Tots dos materials es poden deformar independentment, però en la direcció 1, la dimensió total $2a$ és inalterable.

El conjunt se sotmet a una pressió externa distribuïda uniformement sobre la cara superior, de valor $f = 112,5 \text{ N/mm}^2$.



Les característiques dels materials són:

$E_A = 30.000 \text{ MPa}$	$\nu_A = 0,3$	$\sigma_{eA} = 300 \text{ MPa}$
$E_B = 60.000 \text{ MPa}$	$\nu_B = 0,2$	$\sigma_{eB} = 150 \text{ MPa}$

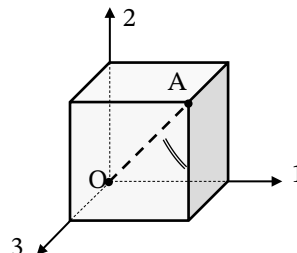
Suposant que els canvis geomètrics són prou petits per considerar-los infinitesimals, es demana:

1. Determineu i dibuixeu les reaccions en totes les parets de la cavitat.
2. Determineu i dibuixeu la configuració geomètrica final de tots dos materials i la posició final de la làmina mòbil.
3. Determineu el coeficient de seguretat del conjunt sabent que A és fràgil i B és dúctil (tots dos tenen límits elàstics simètrics de tracció-compressió). Representeu-ho en l'espai de tensions principals o de Haigh-Westergaard.
4. Posicionant l'origen de coordenades on es consideri oportú, determineu una possible expressió del camp de desplaçaments \vec{u} .

Problema 25

Un cub de costat $d \text{ mm}$, fabricat amb un material dúctil i sotmès a una càrrega exterior, presenta el tensor tensió següent:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= x_1 & 0 \leq x_1 \leq a \\ \sigma_{22} &= 3x_1 - 2x_2 & 0 \leq x_2 \leq a \\ \sigma_{33} &= -x_3 & 0 \leq x_3 \leq a \\ \sigma_{12} &= 2x_1 - x_2 & \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0 & \end{aligned}$$





Les característiques dels materials són:

$$E = 10.000 \text{ MPa} \quad \nu = 0,3$$

4. Demostreu succintament que la matriu del tensor tensió és sempre simètrica.
5. Calculeu la longitud final de la línia OA .
6. Calculeu l'angle final que formen la línia OA i la direcció de l'eix 2, en el punt A .

Problema 26

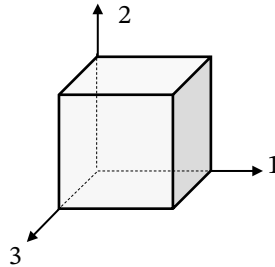
Un cub de costat a mm, fabricat amb un material dúctil i sotmès a una càrrega exterior, presenta el següent tensor tensió en situació d'equilibri estàtic:

$$0 \leq x_1 \leq a$$

$$0 \leq x_2 \leq a$$

$$0 \leq x_3 \leq a$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} x_1 & 2x_1 - x_2 & 0 \\ 2x_1 - x_2 & 3x_1 - 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$



Les característiques dels materials són:

$$E = 10.000 \text{ MPa} \quad \nu = 0,3$$

1. Raoneu si hi ha d'haver forces exteriors de volum. Què succeiria si les forces exteriors de volum fossin nul·les?
2. Determineu i dibuixeu de manera clara i esquemàtica les forces exteriors a què està sotmès el cub.
3. Dibueixeu els cercles de Mohr per a cadascun dels 8 vèrtexs del cub.
4. Indiqueu quin és el punt crític de la peça i calculeu el límit elàstic mínim necessari del material per tenir un coeficient de seguretat $\gamma_{\text{seg}} \geq 1,5$ segons el criteri de Tresca-Guest.
5. Respondeu de nou a la pregunta 4 considerant que el material falla fràgilment a tracció. Dibueixeu sobre el cub la fissura que es produiria en cas de fallada fràgil.

Problema 27

Després d'un moviment sísmic important, es porta a terme una revisió dimensional de les marques d'una pista de bàsquet per decidir si cal repintar-les. A aquest efecte, el personal tècnic del pavelló esportiu comença la comprovació de les distàncies entre el punt O (projecció vertical del centre de la cistella) i una sèrie de punts marcats cada 45° sobre la semicircumferència inicial de $R_0 = 6,25$ m (punts a, b, c, d i e), i també la posició dels tirs lliures f .

Després d'obtenir una variació nul·la de la longitud de les dues primeres mesures (a i b), es decideix finalitzar la comprovació i no repintar la pista.

Vosaltres, que haureu de disputar aviat un partit allà mateix, decidiu aprofitar les nombroses hores que heu dedicat a l'estudi de la mecànica del medi continu per prendre ràpidament una nova mesura, que astutament correspon al punt g (equidistant entre a i b) amb el valor que s'indica a la taula.

Amb aquestes dades, i en els 90 minuts que falten perquè comenci el partit, heu d'elaborar els raonaments i càlculs oportuns per informar el vostre entrenador que és probable que hi hagi posicions més favorables que unes altres per al llançament de triples, ja que la semicircumferència que delimita els $R_0 = 6,25$ m des del centre de la cistella està deformada.

Propietats de la capa exterior del paviment (dúctil):

$$E = 10.000 \text{ N/mm}^2$$

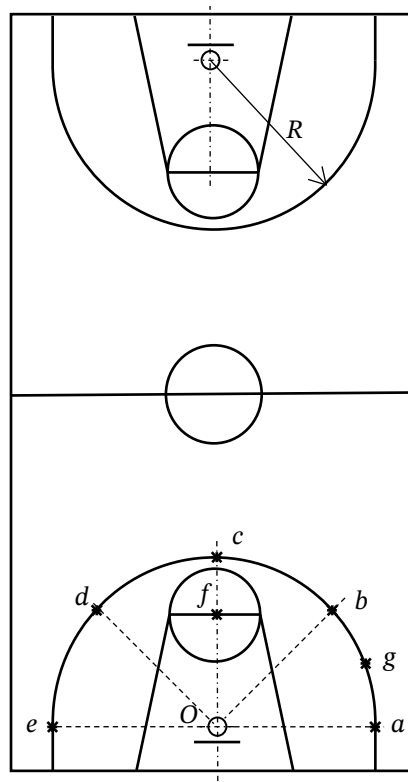
$$\nu = 0,4$$

$$\sigma_c = 110 \text{ N/mm}^2$$

Punt f , de tirs lliures, inicialment a $4,225$ m del centre de la cistella (a $5,8$ m del fons)

Punt	Distància final (m)
a	6,25
b	6,25
c	-
d	-
e	-
f	-

g	6,24
-----	------





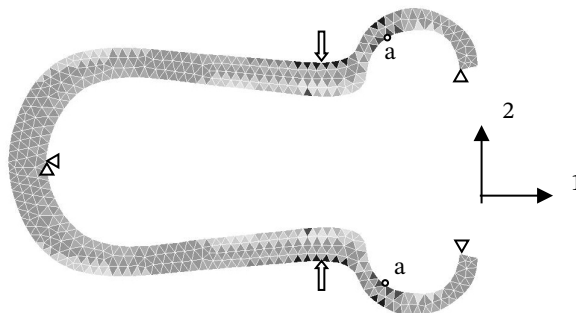
Assumint que la pista està deformada de manera homogènia, es demana:

1. Completeu la taula prevista pels tècnics del pavelló.
2. Determineu les posicions més pròximes i les posicions més allunyades de la cistella.
3. Dibuixeu qualitativament la deformada de la semicircumferència sobre les dues meitats de la pista i identifiqueu les posicions extremes.
4. Avalueu, mitjançant els cercles de Mohr, la pèrdua de perpendicularitat entre la vertical dels tirs lliures ($O - f$) i la línia de fons. Il·lustreu-ho gràficament sobre la pista.
5. Determineu l'estat tensional que està experimentant el paviment i representeu-ne els cercles de Mohr. Quant val el coeficient de seguretat?
6. Estudieu com influeix en el coeficient de seguretat la superposició de la pressió de la maquinària de manteniment, avaluada com un estat uniaxial de 10 kN repartits sobre una petjada de $100 \times 100 \text{ mm}^2$.
7. Quin indicatiu us ha portat a mesurar el punt intermedi entre a i b ? Es podria haver informat l'entrenador sense necessitat d'efectuar cap càlcul?

Problema 28

S'analitza l'estat de tensions d'una pinça de gruix petit i uniforme, carregada en el seu propi pla (sense càrregues perpendiculars al pla), de braços i càrregues simètriques, mitjançant un programa elemental de simulació que implementa l'element finit sòlid triangular de tres nodes i funcions d'interpolació polinòmiques de primer grau. S'obtenen els valors de tensió normal corresponents a les direccions 1 i 2 de referència en qualsevol punt de la peça; els valors d'aquestes tensions al punt a són de 30 i 10 N/mm^2 , respectivament.

El punt a està situat en el contorn exterior de la peça i sense càrrega externa directament aplicada.





Es demana per a aquest punt *a*:

1. Dibuixeu sobre la peça les seves direccions principals.
2. Determineu l'orientació de les direccions principals respecte als eixos de referència.
3. Dibuixeu els cercles de Mohr de tensions.
4. Determineu la tensió tangencial màxima i dibuixeu-la sobre la peça.
5. Elaboreu una crítica del model d'elements finits il·lustrant, en particular:
 - a) Per què la solució tensional dins de cada element finit és uniforme?
 - b) És apropiat el tipus d'element finit utilitzat? Feu una proposta raonada de dues alternatives.
 - c) És apropiada la mida dels elements? Per què?
 - d) Si es tracta d'una pinça de metacrilat per manipular petites bales de cotó sanitari, són apropiats els límits del model i les condicions del contorn? Per què? En qualsevol cas, proposeu raonadament una alternativa.
 - e) La malla té 762 elements i 500 nodes. Quina dimensió té la matriu de rigidesa reduïda?
 - f) Expliqueu (qualitativament, sense valors) l'aspecte del vector total de les càrregues exteriors.

Problema 29

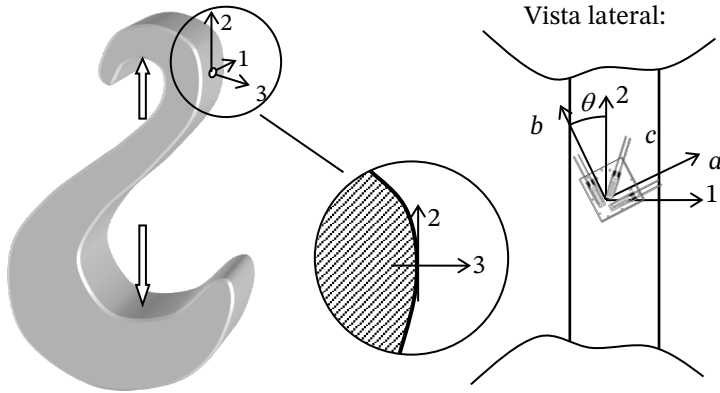
En un punt crític del contorn exterior lliure de càrrega d'una peça plana de petit gruix i carregada en el seu propi pla, es prenen mesures de deformació mitjançant una roseta convencional de tres galgues extensomètriques (dues disposades a 90° i la tercera segons la bisectriu c) tal com s'indica a la il·lustració. Les galgues extensomètriques mesuren les deformacions longitudinals unitàries de la direcció en què es disposen. L'orientació de la roseta és arbitrària, θ .

Una de les galgues (c) dona lectures errònies per un defecte en la fixació.

La peça està fabricada amb acer de les característiques següents:

$$E = 210.000 \text{ MPa} \quad \nu = 0,3 \quad \sigma_e = 500 \text{ MPa}$$

$$\text{Lectures:} \quad \varepsilon_a = 690 \mu\varepsilon \quad \varepsilon_b = -2.357 \mu\varepsilon \quad \varepsilon_c = \text{failed}$$



Lectures: $\varepsilon_a = 690 \mu\varepsilon$ $\varepsilon_b = -2.357 \mu\varepsilon$ $\varepsilon_c = \text{failed}$

Es demana:

1. Descriu qualitativament i raonadament l'estat de tensió i deformació d'aquest punt.
2. Calculeu les deformacions màxima i mínima i identifiqueu sobre la peça les direccions que la presenten.
3. Calculeu què hauria de mesurar la galga defectuosa c i representeu-ho en els cercles de Mohr.
4. Calculeu la distorsió angular màxima i identifiqueu sobre la peça les direccions que la presenten.
5. Calculeu l'estat tensional d'aquest punt i determineu-ne el coeficient de seguretat.

Si s'afegís una pressió externa en direcció 1, perpendicular al pla de la peça, mantenint les tensions contingudes en aquest pla:

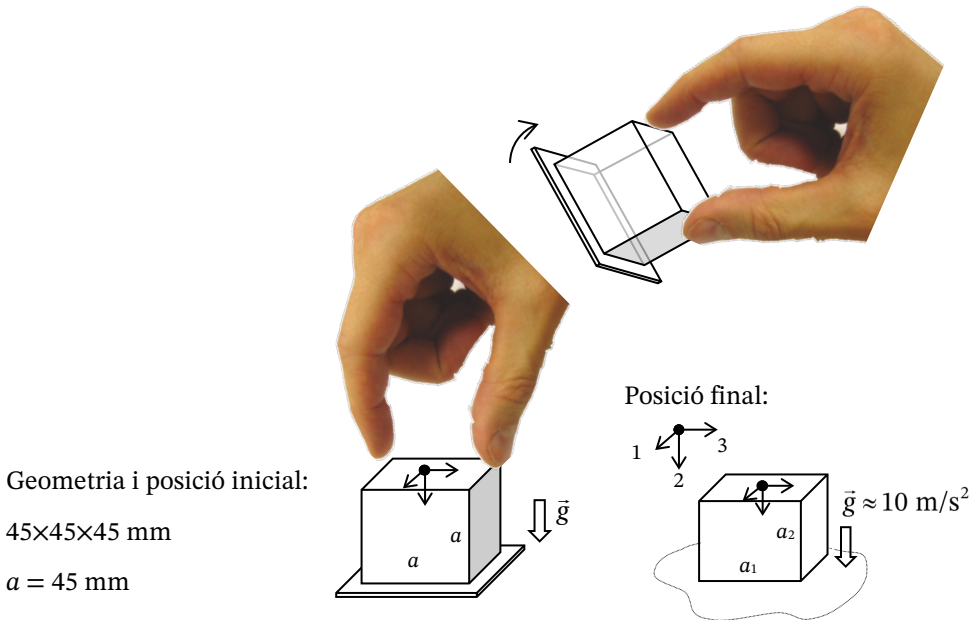
6. Es podria augmentar el coeficient de seguretat de la peça en aquest punt? Amb quin criteri de fallada? Il·lustreu-ho gràficament en l'espai de tensions principals (Haigh-Westergaard).
7. Calculeu el màxim coeficient de seguretat que es podria obtenir amb aquesta estratègia.
8. I si s'afegís pressió externa també perpendicularment a la roseta de galgues? Raoneu quant valdria el màxim coeficient de seguretat possible.

Problema 30

Després d'una dura jornada d'estudi, decidiu recuperar forces ingerint unes petites racions de mató (el típic formatge fresc del país), en aquest cas envasat en forma cúbica de costat a .

Després de desemmotllar el primer mató, i mentre gaudiu de la seva textura suau i gelatinosa, no podeu evitar pensar que també és una textura bastant homogènia, i fins i tot isòtropa, i arribeu a la conclusió que podria tractar-se matemàticament com els medis continus que heu estat estudiant.

Abans d'ingerir el segon mató, us assalten una sèrie de preguntes. Per exemple: Com canvia la forma del mató en ser desemmotllat? Quin mòdul d'elasticitat té? I el coeficient de Poisson?



Per respondre aquestes preguntes, decidiu aplicar el que heu après en tantes hores d'estudi, seguint el procediment següent:

Hipòtesis de partida:

- El formatge pren consistència en la geometria i posició inicial, dins del motlle cúbic de costat a , i s'accepta que conserva l'estat tensional hidroestàtic propi d'un fluid sotmès exclusivament a l'acció gravitatòria.
- S'assumeix que la transformació geomètrica és molt petita.
- En totes dues situacions, el sèrum lacti acumulat a la base exerceix una pressió normal uniforme.



Mesuraments:

- a) Peseu el mató amb una bàscula de cuina i obteniu un valor de 98,9 g.
- b) Amb un peu de rei, mesureu la dimensió final del costat de la base i el costat vertical (a_1 i a_2), i obteniu uns valors de 45,13 mm i 44,91 mm, respectivament.

Es demana:

1. Determineu totes les accions externes, de superfície i de volum, de la posició inicial.
2. Determineu totes les accions externes, de superfície i de volum, de l'estat final.
3. Establiu la relació entre els paràmetres elàstics (E , ν) i les variacions longitudinals dels costats que es produeixen d'un estat a un altre en desemmotllar la peça (aprofitant el principi de superposició, plantejant unes accions externes que representin la diferència entre tots dos estats) i calculeu els valors del mòdul d'elasticitat i del coeficient de Poisson.
4. Esquematitzeu i descriu el model d'elements finits més senzill possible per simular aquesta transformació amb la màxima exactitud, concretant totes les sol·licitacions i els enllaços. Indiqueu les dimensions de les matrius de rigidesa global i reduïda.

Problema 31

El següent camp *eulerià* de desplaçaments descriu el moviment (no infinitesimal) d'un medi continu elàstic.

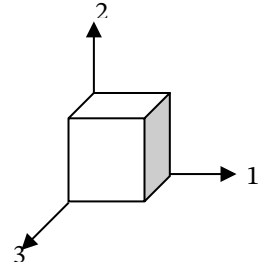
$$\begin{aligned}u_1 &= x_1(1 - e^{-t}) \\u_2 &= x_2(1 - e^{-t}) \quad x_i, \text{ en mm; } t, \text{ en segons} \\u_3 &= 0\end{aligned}$$

1. Deduïu les descripcions lagrangiana $\bar{x} = \bar{x}(\bar{X}, t)$ i euleriana $\bar{X} = \bar{X}(\bar{x}, t)$ del moviment.
2. Raoneu la possibilitat física de la transformació.
3. Determineu el tensor velocitat de deformació $[D]$ i expliqueu el significat físic dels seus termes.
4. Calculeu el tensor de deformacions finites de Cauchy-Green $[C]$ i determineu la màxima distorsió angular i les direccions que l'experimenten.

Per a $t = 0,1$ s:

5. Representeu gràficament i raoneu la transformació del cub il·lustrat ($1 \times 1 \times 1$ mm), i determineu les longituds finals dels costats, els angles finals i el volum final.

$$E = 1.000 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0,1$$

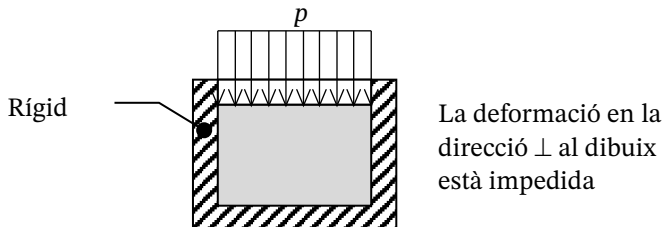


Per a $t = 0,1$ s, i sota la hipòtesi de transformació infinitesimal i elasticitat lineal:

6. Determineu i dibuixeu la distribució de tensions en les cares i les forces de volum.
7. Determineu la tensió tangencial màxima i dibuixeu-la sobre el cub.

Problema 32

Es desitja triar el material més adequat per fabricar una junta elàstica de secció transversal rectangular $a \times b$ i de longitud molt gran (∞).



S'han de complir tres especificacions:

- la pressió lateral ha de ser, com a mínim, el 90% de la pressió vertical de tancament p .
- el descens de la cara superior quan s'aplica p_{nom} no pot superar el 5% de la dimensió original (la transformació es pot considerar infinitesimal).
- ha de poder suportar una pressió nominal $p_{nom} = 10 \text{ N/mm}^2$, amb un coeficient de seguretat $\gamma_s = 2$ (admetent com a vàlid el criteri de Tresca).

Suposant que no hi ha fricció en cap superfície, es demana:

1. Definiu el model d'elements finits més senzill possible per analitzar amb la màxima exactitud aquest cas, explicitant:



- El tipus d'element finit: 3D / 2D (tens. plana/def. plana) i el tipus de funció d'interpolació.
 - El nombre de nodes i elements.
 - El nombre de graus de llibertat del sistema general.
 - Les condicions de contorn (enllaços i vector de càrregues nodals equivalents).
 - El nombre de graus de llibertat del sistema reduït.
2. Determineu el valor de les constants elàstiques (E , ν) i resistents (σ_e) del material per garantir les tres condicions especificades.

Problema 33

Es coneix l'expressió analítica lagrangiana d'un moviment infinitesimal de torsió alterna d'una barra cilíndrica massissa de ràdio R .

$$u_1 = -2AX_2X_3 \cdot \text{sent}$$
$$u_2 = 2AX_1X_3 \cdot \text{sent}$$
$$u_3 = 0$$

Amb $t \geq 0$
 $-R < X_1, X_2 < R$
 $0 < X_3 < L$

Material:
 $E = 10.000 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0,3$

Es demana:

- Determineu si aquesta transformació és físicament possible.
- Determineu el mòdul de l'acceleració màxima i en quines partícules, instant i direcció es produeixen. Dibuixeu el vector acceleració sobre els punts corresponents de la peça.
- Determineu el tensor deformació. Deduiu per a quins valors de t es presentaran les màximes deformacions.

Per als instants t de màximes deformacions i per a $X_2 = 0$:

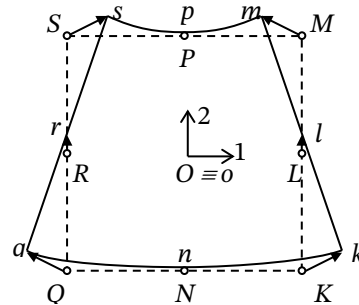
4. Determineu les tensions principals i dibuixeu-les sobre la peça en els punts on són màximes.
5. Determineu la màxima tensió tangencial i dibuixeu-la sobre la peça.
6. Depenent de si el material es comporta de manera dúctil o fràgil, determineu, en cada cas, el límit elàstic mínim necessari si es vol un coeficient de seguretat d'1,5. Il·lustreu-ho en l'espai de tensions principals o de Haigh-Westergaard.

Problema 34

La figura següent mostra (de manera exagerada) els desplaçaments que es produeixen en diversos punts d'un sòlid elàstic quadrat, de 2 mm de costat, sotmès a una certa transformació infinitesimal de "flexió pura". No hi ha forces exteriors de superfície ni de volum aplicades en la direcció 3.

$$E = 400 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,1$$



Donat el caràcter curvilini de la transformació, l'expressió lagrangiana del camp de desplaçaments infinitesimals ha de prendre la forma quadràtica general:

$$u_1 = AX_1 + BX_2 + CX_1X_2 + DX_1^2 + EX_2^2$$

$$u_2 = FX_1 + GX_2 + HX_1X_2 + IX_1^2 + JX_2^2$$

Els vectors de desplaçament dels punts indicats són (en mm):

Punt	X_1	X_2	u_1	u_2	Punt	X_1	X_2	u_1	u_2
K	1	-1	0,1	0,07	P	0	1	0	0,02
L	1	0	0	0,05	Q	-1	-1	-0,1	0,07
M	1	1	-0,1	0,07	R	-1	0	0	0,05
N	0	-1	0	0,02	S	-1	1	0,1	0,07
O	0	0	0	0					



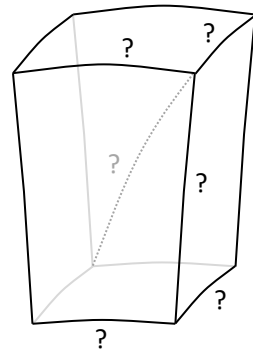
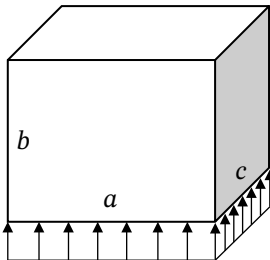
1. Calculeu l'estat de deformació d'un punt genèric (X_1, X_2) i les longituds finals dels costats.
2. Determineu i dibuixeu sobre la peça la distribució de les forces exteriors aplicades \vec{f} i \vec{b} .
3. Si el material és fràgil, amb unes tensions de ruptura de 40 N/mm^2 i -60 N/mm^2 , determineu el coeficient de seguretat del conjunt de la peça i il·lustreu quin seria el pla de fallada.
4. Il·lustreu el criteri de fallada en el pla de Haigh-Westergaard i en el pla de Mohr, mostrant la situació de tots els punts $K, L, M \dots S$.
5. Definiu el model d'elements finits més senzill possible per reproduir amb exactitud aquesta transformació, indicant:
 - el tipus d'element finit,
 - la malla,
 - les condicions de contorn (enllaç i càrregues),
 - les dimensions del sistema d'equacions elàstiques general i reduït.

Problema 35

Es dissenya una peça per introduir-la en un satèl·lit artificial. Es fabrica de manera que té una forma paral·lelepèdica de dimensions $a \times b \times c$ quan està recolzada sobre un pla horitzontal sota l'acció gravitatòria. El pla horitzontal li transmet una pressió distribuïda uniformement.

$$\begin{aligned} \rho &= 400 \text{ kg/m}^3 & a &= 10 \text{ mm} \\ E &= 100 \text{ N/mm}^2 & b &= 20 \text{ mm} \\ \nu &= 0,4 & c &= 30 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$g \approx 10 \text{ m/s}^2$$



(Dibuixat de manera arbitrària)

Suposant que la transformació és infinitesimal ($x_i \approx X_i$), es demana:

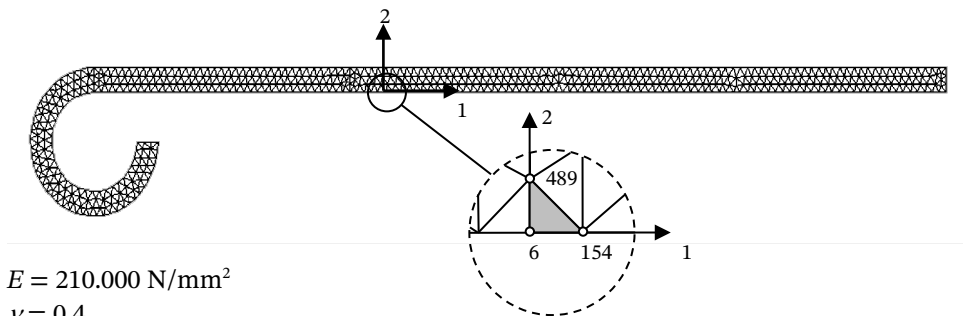
1. Enuncieu el principi de superposició.
2. Determineu quines seran la seva forma i les seves dimensions en situació d'ingravitació.
3. Raoneu si els costats es mantindran rectes i dibuixeu la peça deformada de manera qualitativa.
4. Calculeu la longitud de la diagonal indicada en la figura.
5. Especifiquen raonadament com seria el model d'elements finits més senzill possible, apropiat per resoldre aquest cas.
 - Tipus d'element finit, grau de la funció d'interpolació.
 - Geometria, malla i límits del model.
 - Condicions d'enllaç i sol·licitacions.

Problema 36

De l'anàlisi lineal elàstica bidimensional d'un obridor de taps-corona, mitjançant el mètode dels elements finits, se n'obté la solució del problema elàstic en termes de desplaçaments nodals.

L'amplada de la peça, perpendicular al pla 1-2, és uniforme i de 10 mm. No hi ha càrregues perpendiculars al pla 1-2.

Es vol analitzar el comportament d'un element pròxim al contacte amb el tap, on s'inicia la fluència del material.



$$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,4$$

$$\sigma_e = 150 \text{ N/mm}^2$$

Per limitacions en el programari, s'ha utilitzat una malla uniforme amb el tipus d'element triangular de primer ordre (*constant strain element*) de funcions d'interpolació lineals, i s'han obtingut els desplaçaments nodals següents:



$$\begin{cases} u_1 = A + BX_1 + CX_2 \\ u_2 = D + EX_1 + FX_2 \end{cases}$$

Node	X_1	X_2	u_1	u_2
6	0,1	0,0	0,000 000	0,000 000
154	1,0	0,0	-0,000 150	-0,003 000
489	0,0	1,0	0,002 000	-0,000 100

Es demana:

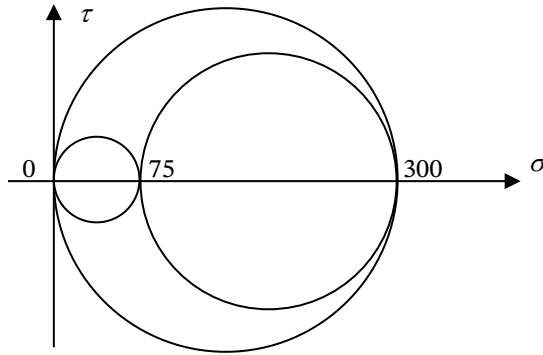
1. La matriu de rigidesa general d'una malla d'elements finits és singular. Exposeu les conseqüències matemàtiques i el significat físic que això té en la resolució del problema elàstic.
2. Determineu l'expressió del camp de desplaçaments per a qualsevol punt de l'element i calculeu el valor de desplaçament i el gir rígid en el baricentre (o centre geomètric) de l'element.
3. Determineu l'estat de deformació per a un punt qualsevol d'aquest element finit.
4. Rebateu raonadament la frase següent: "En general, en les zones on els desplaçaments són màxims es produeixen les tensions màximes."
5. Determineu l'estat de tensió en els eixos 1-2-3; calculeu les tensions i direccions principals, i dibuixeu-les al baricentre de l'element. Raoneu sobre la coherència del resultat.
6. Suposant que l'element estudiat se situa en la zona crítica d'inici de fluència, calculeu el coeficient de seguretat i representeu-lo en el pla de tensions principals (Haigh-Westergaard).

Problema 37

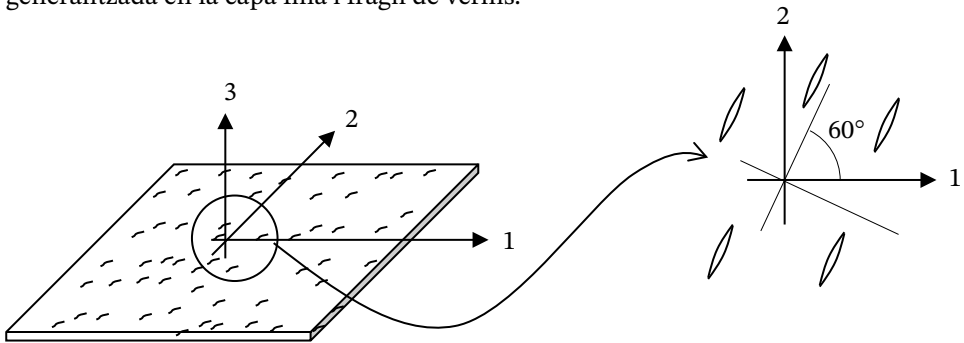
Tenim una làmina quadrada d'acer de $100 \times 100 \times 5$ mm recoberta amb una capa fina de vernís adherida perfectament a la seva superfície; per tant, tots dos materials es deformen conjuntament. Totes les càrregues exteriors estan contingudes en el mateix pla de la làmina (no hi ha càrregues externes perpendiculars a la làmina).

S'ha determinat l'estat de deformació del conjunt (uniforme en tots els punts de la làmina) mitjançant una roseta de galgues extensomètriques que mesuren les deformacions longitudinals unitàries de dues direccions perpendiculars i la seva bisectriu.

La informació es dona en forma gràfica a través dels cercles de Mohr de tensió en l'acer.



En aquest mateix moment, s'observa l'inici d'un fenomen de fissuració superficial generalitzada en la capa fina i fràgil de vernís.



$$E_{\text{acer}} = 210.000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu_{\text{acer}} = 0,28$$

$$\sigma_e = 200 \text{ N/mm}^2$$

$$E_{\text{vernís}} = 10.000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu_{\text{vernís}} = 0,4$$

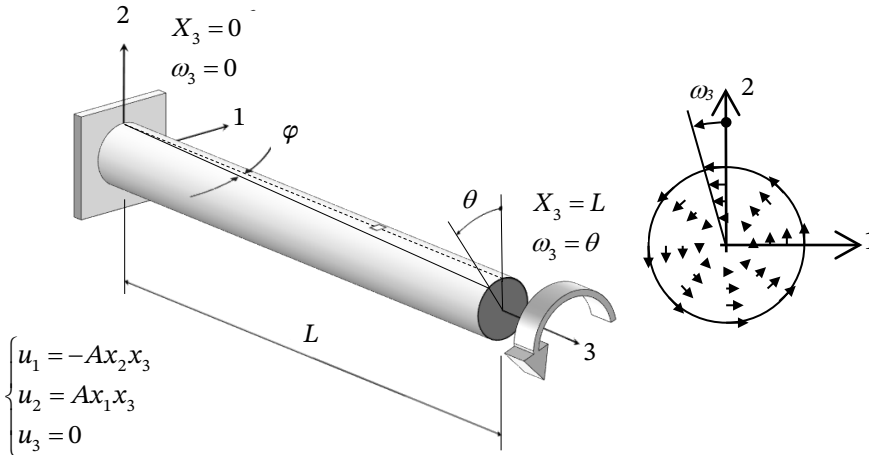
Es demana:

1. Calculeu el coeficient de seguretat de l'acer de la làmina.
2. Determineu i dibuixeu la distribució de forces de superfície a què està sotmesa la làmina d'acer. Il·lustreu-ho sobre els cercles de Mohr.
3. Calculeu les tres lectures de la roseta de galgues, si està orientada en les direccions dels eixos 1-2.
4. Quines són la forma i les dimensions de la làmina deformada?
5. Quina és la tensió de ruptura del vernís?



Problema 38

En la torsió uniforme i infinitesimal d'un cilindre circular massís de radi R , es pot suposar que les seccions transversals del cilindre experimenten un gir rígid respecte a la directriu del cilindre (ω_3), linealment variable, i es mantenen planes i paral·leles. El camp de desplaçaments resultant seria el següent:



Es demana, en funció dels paràmetres elàstics del material (G) i de θ , L , R :

1. Determineu l'expressió general del vector rotació de qualsevol punt.
2. Determineu el valor de A . En quines unitats es mesura? Descriviu-ne el significat físic.
3. Determineu l'angle φ .

Per als punts del pla diametral 2-3 ($X_1 = 0$):

4. Descriviu l'estat tensional de què es tracta i dibuixeu els cercles de Mohr.
5. Raoneu i deduiu en quin punt del pla 2-3 es produiran les màximes tensions tangencials i normals i dibuixeu-les sobre el punt de la peça.

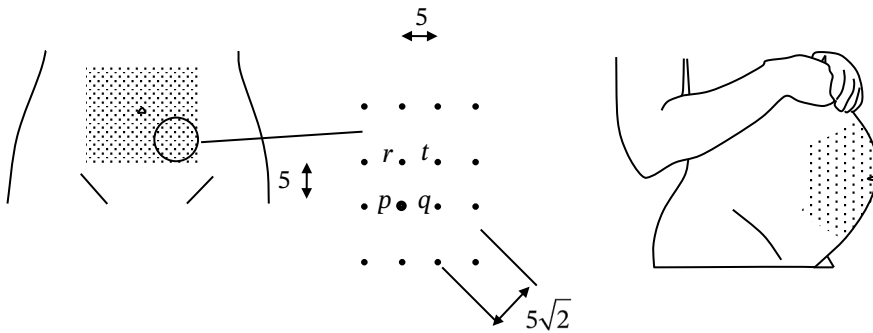
Un cilindre circular de $L = 100$ mm i radi $R = 4$ mm, fabricat amb un material fràgil, se sotmet a aquesta mena de sol·licitació. Quan el gir de la secció extrema val $\theta = 5,7^\circ$, la peça es trenca per fissuració. Si la resistència és $\sigma_e = \sigma_r = 10$ N/mm²:

6. Determineu el mòdul d'elasticitat transversal.
7. Descriviu i dibuixeu com s'hauria d'iniciar la fissura.

Problema 39

Una de les manifestacions cutànies més freqüents durant l'embaràs, especialment en casos d'augment de pes descontrolat, és l'aparició de les denominades *estries disteses o gravidiques*, principalment a l'abdomen. Són degudes a ruptures del teixit subcutani per una deformació longitudinal excessiva. Amb la finalitat de millorar-ne la previsió, un equip especialista en biomecànica vol estudiar l'evolució temporal de l'extensió de l'epidermis en un grup de pacients voluntàries, i determinar en quin nivell mitjà d'extensió comencen a produir-se les estries i en quines direccions preferents.

S'ha dissenyat un procediment que consisteix a dibuixar, amb un tint de permanència suficient i sobre una extensió prou gran de la pell abdominal, una graella regular ortogonal de punts, separats inicialment uns 5 mm, distància prou petita per considerar que qualsevol punt p i els seus entorns immediats són coplanaris.



Es vol dissenyar també un algorisme que, per a un punt qualsevol p de la graella, determini la deformació longitudinal màxima i la direcció en què es produeix, en funció de les distàncies actuals respecte a tres punts veïns q , r i t : l_{pq} , l_{pt} , l_{pr} (treballant en 2D).

En una de les pacients del grup, a les 35 setmanes de gestació, les longituds l_{pq} , l_{pt} , l_{pr} en el punt més desfavorable són:

$$l_{pq} = 8,68 \text{ mm}, \quad l_{pr} = 7,05 \text{ mm}, \quad l_{pt} = 13,98 \text{ mm}$$

Es demana:

1. Raoneu sobre la idoneïtat de les teories de transformacions finites o infinitesimals i *procediu en conseqüència*.
2. Determineu les deformacions principals màxima i mínima, expressades en %.
3. Determineu la direcció en què es produeix l'allargament màxim i dibuixeu-la, així com la seva possible estria, sobre la quadrícula original (sense deformar).



4. Determineu l'angle final que defineixen els punts pqr .

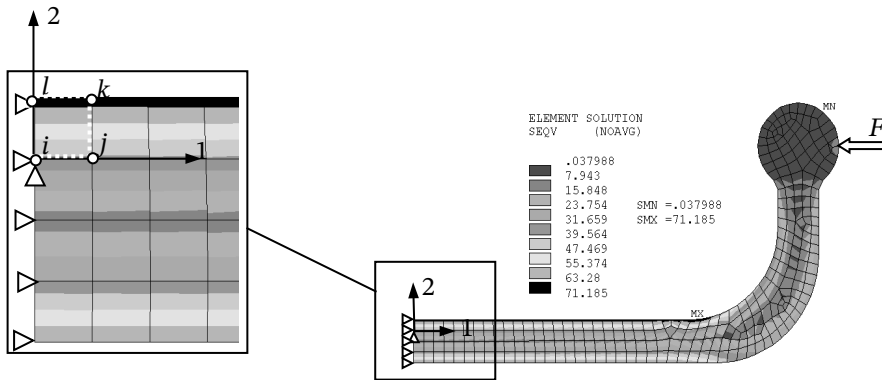
5.6.7. Resoleu els apartats 2, 3 i 4 novament, però canviant la decisió presa en l'apartat 1.

Raoneu sobre les causes de les diferències o coincidències observades entre totes dues hipòtesis.

Problema 40

A partir de l'anàlisi bidimensional, elàstica i lineal, d'un objecte determinat mitjançant el mètode dels elements finits, es disposa de la informació següent:

a) Mapa de tensions equivalents de Von Mises (N/mm^2) i valors extrems:



b) Coordenades nodals i vectors de desplaçament dels nodes $i-j-k-l$ (tot en mm):

Node	X_1	X_2	Vector u	u_1	u_2
i	0,0000	0,0000		0,000 000	0,000 000
j	5,0000	0,0000		-0,000 800	0,000 400
k	5,0000	5,0000		-0,001 500	0,000 750
l	0,0000	5,0000		0,000 000	0,000 350

c) Resultats elementals de la deformació (element $i-j-k-l$) en el node j :

Node	ϵ_{11}	ϵ_{22}	ϵ_{33}	ϵ_{12}	ϵ_{23}	ϵ_{13}
j	-160E-6	70E-6	60E-6	-30E-6	0,0	0,0



d) Les funcions d'interpolació simplificades per a l'element sòlid en 2D de 4 nodes són del tipus següent:

$$\begin{cases} u_1 = A + BX_1 + CX_2 + DX_1X_2 \\ u_2 = E + FX_1 + GX_2 + HX_1X_2 \end{cases}$$

e) El mòdul elàstic introduït per caracteritzar el material és $E = 200.000 \text{ MPa}$.

A partir d'aquestes dades, es demana:

1. Determineu l'expressió del camp de desplaçaments per a l'element $i-j-k-l$.
2. Determineu el vector rotació d'un punt genèric $p (X_1, X_2)$ de l'interior de l'element $i-j-k-l$. Quant val en i ?
3. Enuncieu el principi de superposició. Deduïu la llei de Hooke en tensió plana a partir del cas uniaxial.
4. Sabent que la formulació de l'element finit correspon al cas de tensió plana, calculeu el valor del coeficient de Poisson introduït per caracteritzar el material.
5. Determineu el tensor de deformació per a un punt genèric $p (X_1, X_2)$ de l'interior de l'element $i-j-k-l$. Quant val en el centre de l'element? Calculeu-ne i dibuixeu-ne les deformacions i direccions principals.
6. Calculeu la tensió equivalent de Von Mises en el centre de l'element $i-j-k-l$.
7. Raoneu i determineu la tensió de límit elàstic mínima necessària per obtenir, per al conjunt de la peça, un coeficient de seguretat $\gamma_s = 1,5$ segons el criteri de Von Mises. Representeu-ho gràficament en el pla de tensions principals (Haigh-Westergaard).
8. Descriu esquemàticament l'operativa que utilitza el mètode dels elements finits per resoldre el problema elàstic.

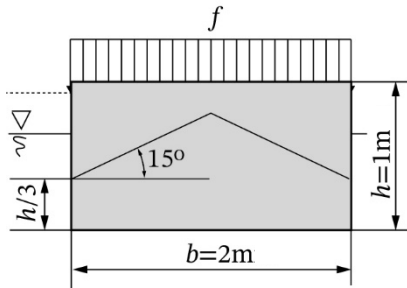
Problema 41

Per construir una passarel·la aquàtica, es pretén utilitzar un bloc flotador prismàtic de dimensions $2 \times 1 \times 1 \text{ m}$, fet d'una escuma de cel·la tancada amb densitat $\rho = 15 \text{ kg/m}^3$, $E = 400 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,1$.

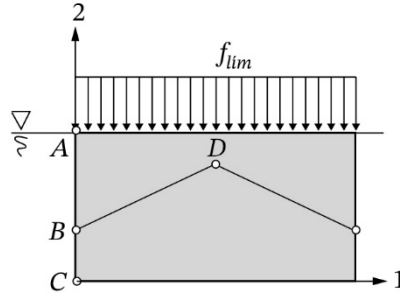
Per qüestions de muntatge, el flotador es construeix encaixant dues peces tallades en forma de falca.



a) Flotació general



b) Flotació límit



Per establir el nombre de flotadors necessaris, per avaluar la càrrega màxima admissible i per determinar el marge de seguretat de la passarel·la i del bloc mateix, es demana, per a la situació límit *b*, i suposant que no es produeixen lliscaments en els plans d'unió:

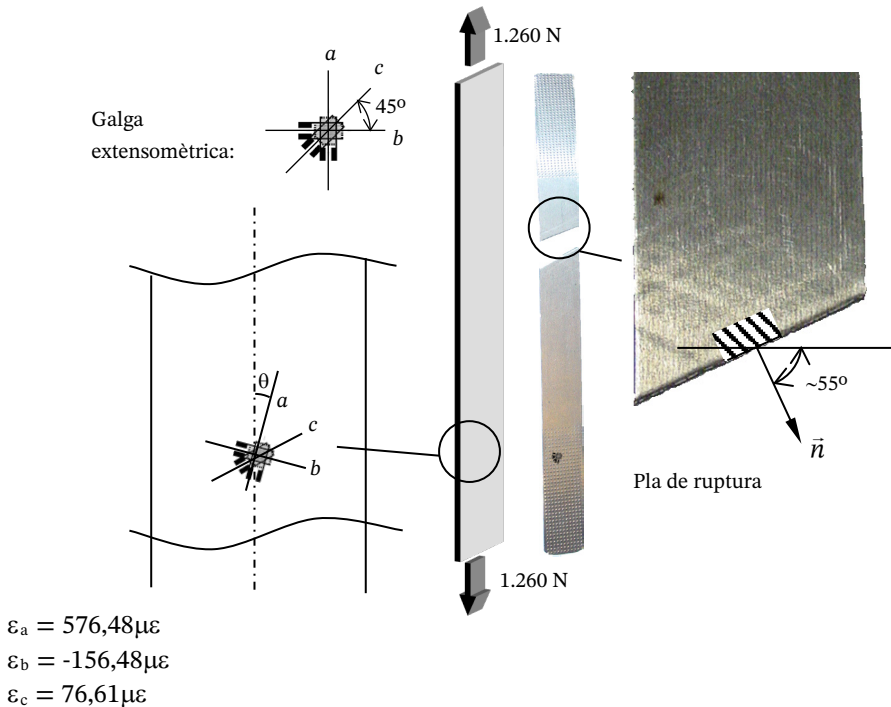
1. Calculeu la força superficial límit f_{lim} necessària per submergir el bloc i les altres sol·licitacions exteriors a què està sotmès.
2. Calculeu l'expressió general del tensor tensió per a un punt qualsevol. Raoneu si és factible menysprear el pes propi del flotador i procediu en conseqüència.
3. Dibuixeu els cercles de Mohr de tensió per als punts *A*, *B*, *C* i *D* (dibuixeu-los solapats sobre uns mateixos eixos σ - τ).
4. El bloc s'ha constituït encaixant dues peces tallades en forma de falca a 30° . Calculeu l'expressió de la tensió tangencial que actua sobre el pla d'unió. En quin punt és més elevada?
5. Calculeu el coeficient de fricció mínim μ perquè no calgui aplicar adhesius (sabent que la tensió tangencial límit que pot proporcionar la fricció és $\tau = \mu \cdot \sigma$).
6. Per a l'estudi, s'utilitza un model d'elements finits. Es demana que raoneu i il·lustreu gràficament com seria el model més senzill possible que reproduís els resultats amb la màxima exactitud. Determineu la dimensió de la matriu de rigidesa i la dimensió de la matriu de rigidesa reduïda per al cas anterior.
7. Si el material fos dúctil, determineu la tensió màxima que hauria de poder suportar per garantir un coeficient de seguretat d'1,5. Quin seria el punt crític? I si fos fràgil? Raoneu la diferència gràficament en el pla de Mohr (σ - τ).

Problema 42

Per determinar les constants elàstiques d'un determinat aliatge d'acer, s'ha elaborat una proveta a partir d'una xapa de dimensions $20 \times 0,5 \times 200$ mm.

Sobre una de les cares d'aquest fleix, s'ha adherit una roseta de galgues extensomètriques (dispositiu que mesura les deformacions longitudinals unitàries en tres direccions coplanàries: dues direccions perpendiculars $a - b$ i la seva bisectriu c).

Es coneixen les lectures de deformació quan la proveta està sotmesa a una càrrega de 1.260 N en un assaig de tracció uniaxial.



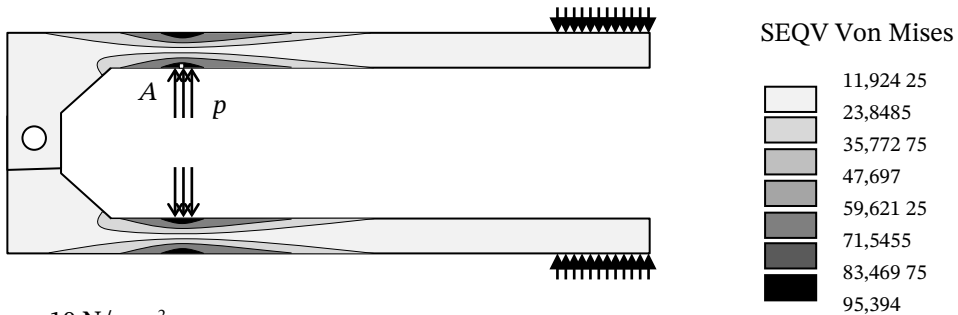
Es demana:

1. En quina direcció θ , respecte a l'eix de tracció, s'ha orientat la roseta de galgues?
2. Les deformacions i direccions principals.
3. Les constants elàstiques del material E i ν .
4. Els components intrínsecs de tensió en el pla de trencament.
5. Raoneu per què es produeix la fallada en el pla indicat.



Problema 43

De l'anàlisi tensional pla d'un trencaous mitjançant el mètode dels elements finits, se n'obté el mapa de tensions equivalents de Von Mises (en N/mm^2). El punt crític (A) correspon a la superfície exterior en contacte amb la nou, on s'aplica una pressió externa de valor p .



$$p = 10 \text{ N/mm}^2$$

Material:

$$E = 98.020 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,198$$

$$\sigma_e = 100 \text{ N/mm}^2$$

Sabent que el gruix del trencaous augmenta en aquest punt A per efecte de les deformacions, es demana:

1. Calculeu raonadament el valor de les principals tensions i deformacions.
2. Dibuixeu els cercles de Mohr de tensions i deformacions.
3. Representeu sobre els cercles de Mohr els vectors tensió que continguin la component tangencial màxima. Representeu-los també sobre el trencaous.
4. Determineu la variació de gruix en aquest punt, expressada en %.
5. Quin seria el coeficient de seguretat segons el criteri de Tresca? Representeu tots dos criteris en el pla de tensions principal i comenteu el resultat.

Problema 1

1) És físicament possible si $|J| > 0$:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-At/2L} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-At/2L} \end{vmatrix} = e^{-At/L} > 0 \quad \forall \bar{X}, A, B \text{ i } t$$

$$X_1 = x_1 - B \cdot t$$

La descripció euleriana s'obté invertint el sistema: $X_2 = x_2 \cdot e^{At/2L}$

$$X_3 = x_3 \cdot e^{At/2L}$$

El camp de velocitats, en descripció lagrangiana, s'obté derivant les posicions instantànies respecte al temps:

$$\vec{v} = \frac{D\vec{x}}{Dt} = \begin{Bmatrix} B \\ -X_2 A \cdot e^{-At/2L} / 2L \\ -X_3 A \cdot e^{-At/2L} / 2L \end{Bmatrix}$$

Podem obtenir l'expressió euleriana substituint les \bar{X} de l'expressió lagrangiana per la seva expressió euleriana $\bar{X} = \bar{X}(\bar{x}, t)$; així, tenim:

$$\vec{v}(\bar{x}, t) = \begin{Bmatrix} B \\ -x_2 A / 2L \\ -x_3 A / 2L \end{Bmatrix} \quad \left(\text{o bé } \vec{v}(\bar{x}, t) = \frac{D\bar{u}(\bar{x}, t)}{Dt} \right)$$

Observant l'expressió euleriana de la velocitat, veiem que la velocitat de les partícules que passen per un punt fix qualsevol de l'espai és constant en el temps. Es tracta d'un moviment estacionari.

2) Si la velocitat d'extrusió (v_1) és 1 cm/s $\Rightarrow B = 1$. La constant A és la que relaciona \bar{X} (posició inicial) amb \bar{x} (posició actual) a través de la funció exponencial.



Una partícula inicialment a l'entrada en posició $X_2 = R$ (punt P) llisca per la superfície de la tovera fins a la posició final $x_2 = r$. Si la velocitat d'extrusió és constant d'1 cm/s (v_1), trigarà 10 segons a recórrer 10 cm (passar de R a r).

$$R = r \cdot e^{At/2L} = r \cdot e^{A \cdot 10 / 2 \cdot 10} \Rightarrow \ln(R/r) = A/2 \Rightarrow A = 2 \ln(R/r) = 2 \cdot \ln 2 = 1,386$$

3) 10 segons (la velocitat és constant d'1 cm/s i ha de recórrer 10 cm).

$$J = e^{-At/L} = e^{-0,1386 \cdot t} = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{J} = \rho_0 \cdot e^{0,1386 \cdot t} = 800 \cdot e^{0,1386 \cdot 10} =$$

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = J - 1 = e^{-0,1386 \cdot 10} - 1 = -0,75 (-75\%)$$

4) Tenim l'expressió euleriana de la velocitat $\vec{v}(\vec{x}, t) = \begin{Bmatrix} B \\ -x_2 A / 2L \\ -x_3 A / 2L \end{Bmatrix}$, en què s'ha d'in-

troduir la coordenada x_2 del punt q . El punt q és la posició que ocuparà la partícula P , inicialment en $X = (0, R, 0)$, quan $x_1 = 5$ cm ($L/2$) i, per tant, per a $t = 5$ s.

Així, de l'expressió lagrangiana de l'enunciat, tenim:

$$x_2 = X_2 \cdot e^{-At/2L} = R \cdot e^{-1,386 \cdot 5 / 2 \cdot 10} = 8 \cdot 0,707 = 5,656 \text{ cm}$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \begin{Bmatrix} B \\ -x_2 A / 2L \\ -x_3 A / 2L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5,656 \cdot 1,386 / 2 \cdot 10 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,392 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ cm/s}$$

$$5) [D] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A/2L & 0 \\ 0 & 0 & -A/2L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0693 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0693 \end{bmatrix} \text{ s}^{-1}$$

$$D_{\max} = -0,0693 \text{ s}^{-1}$$

Problema 2

1)

$\vec{u} = \vec{u}(\vec{X})$?	Punt A	Punt B	Punt C
$u_1 = x_1 - X_1 = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$	} 1,001 - 1 = 0,001 = c_1	} 0,002 = c_2	} -0,001 = c_3
$u_2 = x_2 - X_2 = c_4 X_1 + c_5 X_2 + c_6 X_3$			
$u_3 = x_3 - X_3 = c_7 X_1 + c_8 X_2 + c_9 X_3$			
	0,002 = c_4	-0,002 = c_5	0 = c_6
	0,001 = c_7	0 = c_8	0,003 = c_9

$$u_1 = 0,001X_1 + 0,002X_2 - 0,001X_3$$

$$u_2 = 0,002X_1 - 0,002X_2$$

$$u_3 = 0,001X_1 + 0,003X_3$$

2)

$$[M] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,002 & -0,001 \\ 0,002 & -0,002 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0,003 \end{bmatrix}$$

És físicament possible si $\det[J] > 0$

$$\det[J] = \det[F] = \det[[M] + [I]] = \det \begin{bmatrix} 1,001 & 0,002 & -0,001 \\ 0,002 & 0,998 & 0 \\ 0,001 & 0 & 1,003 \end{bmatrix} = 1,001992 > 0 \quad \text{OK}$$

$$\det [J] = dV/dV_0 \quad \Rightarrow$$

$$V_f = V_0 \times 1,00199198 = \frac{4}{3}\pi 1^3 \times 1,00199198 = 4,197134$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = 0,001992$$

3)

$$[M] = [\Omega] + [\varepsilon] = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,001 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,001 & 0,002 & 0 \\ 0,002 & -0,002 & 0 \\ 0 & 0 & 0,003 \end{bmatrix}$$

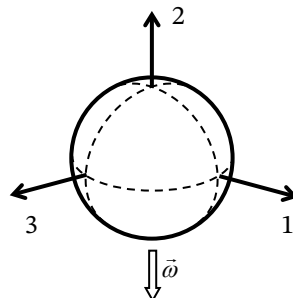
$$\varepsilon_V = \text{tr} [\varepsilon] = 0,002$$

$$V_f = V_0 (1 + \varepsilon_V) = 4,197 168$$

4)

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,001 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ rad}$$

La direcció de rotació és l'eix 2 ($-0,057^\circ$).





5)

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,002 & 0 \\ 0,002 & -0,002 & 0 \\ 0 & 0 & 0,003 \end{bmatrix}$$

$$L_{1f} = 2R \cdot (1 + \varepsilon_{11}) = 2 \cdot (1 + 0,001) = 2,002 \quad \theta_{12f} = \theta_{12i} - 2\varepsilon_{12} = \pi / 2 - 2 \cdot 0,002 = 1,56679 = 89,77^\circ$$

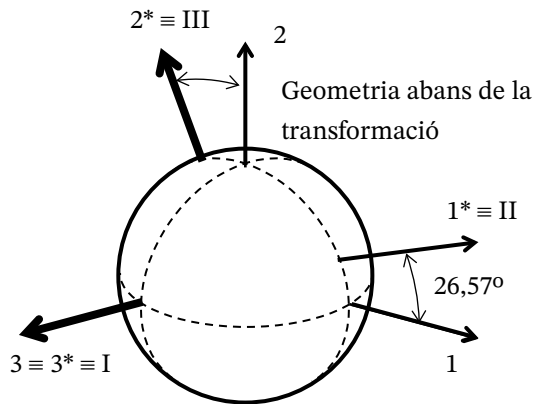
$$L_{2f} = 2R \cdot (1 + \varepsilon_{22}) = 2 \cdot (1 - 0,002) = 1,996 \quad \theta_{13f} = \theta_{13i} - 2\varepsilon_{13} = \pi / 2 = 90^\circ$$

$$L_{3f} = 2R \cdot (1 + \varepsilon_{33}) = 2 \cdot (1 + 0,003) = 2,006 \quad \theta_{23f} = \theta_{23i} - 2\varepsilon_{23} = \pi / 2 = 90^\circ$$

6) La direcció 3 és principal. Diagonalitzant $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,002 \\ 0,002 & -0,002 \end{bmatrix}$ (o amb les fórmules simplificades)

$$\varepsilon_{1^*,2^*} = \frac{0,001 - 0,002}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0,001 + 0,002}{2}\right)^2 + 0,002^2} = -0,0005 \pm 0,0025 = \begin{cases} \varepsilon_{1^*} = 0,002 = \varepsilon_{II} \\ \varepsilon_{2^*} = -0,003 = \varepsilon_{III} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{3^*} = 0,003 = \varepsilon_I \quad \tan \theta_{1-1^*} = \frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{2^*}} = \frac{0,002}{0,001 + 0,003} = 0,5 \quad \theta_{1-1^*} = 26,57^\circ$$



Longituds finals:

$$L_{1^*f} = 2R \cdot (1 + \varepsilon_{1^*}) = 2 \cdot (1 + 0,002) = 2,004$$

$$L_{2^*f} = 2R \cdot (1 + \varepsilon_{2^*}) = 2 \cdot (1 - 0,003) = 1,994 = \text{longitud mínima}$$

$$L_{3^*f} = 2R \cdot (1 + \varepsilon_{3^*}) = 2 \cdot (1 + 0,003) = 2,006 = \text{longitud màxima}$$

Per ser direccions principals, aquestes direccions no experimenten deformació transversal; els angles finals que formen entre elles es mantenen en 90° .

L'únic moviment que experimenten és la rotació de $-0,001$ rad al voltant de l'eix 2.

Problema 3

1) Si se suposen unes funcions lineals de desplaçament (deformació plana)

$\bar{u}(\bar{X}) = \begin{Bmatrix} A + BX_1 + CX_2 \\ D + EX_1 + FX_2 \end{Bmatrix}$, es determinen les 6 constants a partir dels desplaçaments de

3 punts:

– punt P (0,0) $\bar{u}(0,0) = \begin{Bmatrix} A \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13 \\ 13 \end{Bmatrix} \text{ mm}$

– punt R (10,0) $\bar{u}(10,0) = \begin{Bmatrix} A + 10B \\ D + 10E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13 \\ 14 \end{Bmatrix} \text{ mm} \Rightarrow \begin{matrix} B = 0 \\ E = 1/10 \end{matrix} \text{ m}$

– punt Q (0,10) $\bar{u}(0,10) = \begin{Bmatrix} A + 10C \\ D + 10F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 13 \end{Bmatrix} \text{ mm} \Rightarrow \begin{matrix} C = -2/10 \\ F = 0 \end{matrix}$

Per tant, el camp de desplaçaments és: $\bar{u}(\bar{X}) = \begin{Bmatrix} 13 - 0,2X_2 \\ 13 + 0,1X_1 \end{Bmatrix}$

2) La transformació és invertible si:

$$J = \det[F] = \det[[M] + [I]] = \begin{vmatrix} 0+1 & -0,2 & 0 \\ 0,1 & 0+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0+1 \end{vmatrix} = 1,02 \neq 0 \quad \text{OK}$$

La transformació és físicament possible si: $J = \det[F] = \det[[M] + [I]] = 1,02 > 0 \quad \text{OK}$

3) La condició matemàtica d'invertibilitat d'un sistema és que el jacobià no s'anul·li. D'altra banda, es demostra que el jacobià de la transformació és igual a la relació de volums final i inicial de cada dV , pel principi de conservació de la massa, igual a la

relació inversa de densitats: $J = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho}$. Aquesta magnitud ha de ser positiva, per-

què no poden existir densitats, masses o volums negatius.

4) La deformació volumètrica unitària és:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1 = |J| - 1 = |F| - 1 = |[M] + [I]| - 1 = \begin{vmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ 0,1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 = \\ &= (1 + 0,02) - 1 = 0,02 \end{aligned}$$

El volum augmenta un 2 %, independentment de la partícula considerada.



No existeix moviment en direcció 3. Per tant, les variacions de superfície són proporcionals a les variacions de volum.

Així, la superfície final del quadrat p - q - r - s és un 2 % superior a la superfície inicial:

$$S_{final} = S_{inicial}(1 + 0,02) = 102 \text{ mm}^2$$

5) Les longituds finals dels costats són:

$$\overline{pq} = \sqrt{10^2 + 2^2} = 10,198 \text{ mm}$$

$$\overline{pr} = \sqrt{10^2 + 1^2} = 10,050 \text{ mm}$$

6) L'angle final

$$\hat{pqr} = 90^\circ + \arctan\left(\frac{2}{10}\right) - \arctan\left(\frac{1}{10}\right) = 90 + 11,3 - 5,71 = 95,59^\circ = 1,668 \text{ rad}$$

Si suposem una transformació infinitesimal:

$$7) \quad \varepsilon_V = \text{tr}[\varepsilon] = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = 0 + 0 + 0 = 0. \text{ No hi ha canvi de volum.}$$

$$8) \quad \overline{pr} = \overline{PR} \cdot (1 + \varepsilon_{11}) = 10 \cdot (1 + 0) = 10$$

$$\overline{pq} = \overline{PQ} \cdot (1 + \varepsilon_{22}) = 10 \cdot (1 + 0) = 10. \text{ No hi ha variació de longituds.}$$

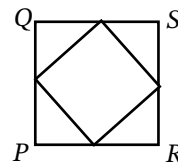
$$9) \quad \hat{pqr} = \hat{PQR} - 2 \cdot \varepsilon_{12} = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) = \frac{\pi}{2} - (-0,2 + 0,1) = 1,67 \text{ rad} = 95,73^\circ$$

10) Les direccions principals són les que no experimenten distorsió angular.

L'error que es comet prové del fet que el tensor de deformació, definit a partir de la hipòtesi de transformació infinitesimal, comporta que les rotacions són infinitament petites i, per tant, aproxima les variacions de longitud a les variacions projectades sobre la direcció considerada

$\frac{\partial u_i}{\partial X_i}$ i aproxima a les seves tangents $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ les

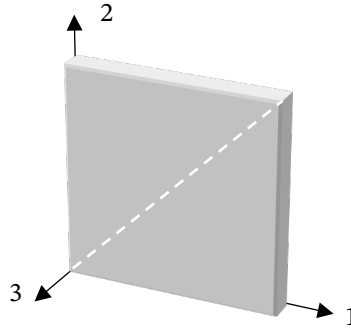
variacions d'orientació relativa.



Les deformacions longitudinals dels eixos 1 i 2 són iguals; per tant, les direccions principals estan a 45° d'1 i 2. El quadrat inscrit en $PQRT$ ha d'estar a 45° .

Problema 4

$$\begin{cases} u_1 = X_1 X_2 t \\ u_2 = X_2 X_1 t \\ u_k = 0 \end{cases}$$



1) La transformació és físicament possible si $J > 0$:

$$J = \det[J] = \det[F] = \begin{vmatrix} 1 + X_2 t & X_1 t & 0 \\ X_2 t & 1 + X_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (X_1 + X_2)t > 0$$

per a qualsevol partícula

(X_1 i $X_2 > 0$) i per a qualsevol instant de temps ($t > 0$).

2) El jacobià de la transformació és $J = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho}$; así, $\rho = \frac{\rho_0}{J} = \frac{\rho_0}{1 + (X_1 + X_2)t}$ per al punt central ($X_1 = X_2 = 500$ mm) i, per a $t = 10^{-6}$ s, tenim $J = 1,001$

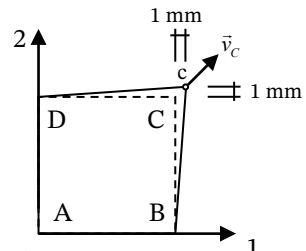
$$\rho = \frac{\rho_0}{J} = \frac{3.000 \text{ kg/m}^3}{1,001} = 2.997 \text{ kg/m}^3$$

3) $\vec{v}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{u}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \begin{Bmatrix} X_1 X_2 \\ X_2 X_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ no depèn del temps ni de X_3 . Les partícules es mouen

a velocitat constant i paral·lelament al pla 1-2.

Per a $t = 10^{-6}$ s, tenim $\vec{u}_C = \begin{Bmatrix} X_1 X_2 \\ X_2 X_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ mm, i

$$\vec{v}_C = \begin{Bmatrix} X_1 X_2 \\ X_2 X_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^6 \\ 10^6 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ mm/s, } (\vec{u}_A = \vec{u}_B = \vec{u}_D = \vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_D = \vec{0})$$





4) Com que les funcions de desplaçament són lineals, la diagonal continuarà sent una recta. Per tant, en podem deduir geomètricament la longitud final a partir de les posicions finals dels seus extrems (el punt A no es desplaça, el punt C es desplaça 1 mm en les direccions 1 i 2; per tant, la longitud final és $1.001\sqrt{2}$ mm).

Alternativament, integrant la deformació longitudinal unitària:

$$l_f = l_0 + \Delta l = 1.000\sqrt{2} + \int_A^C \varepsilon_{AC} dl_{AC}$$

$$\varepsilon_{11} = X_2 t, \quad \varepsilon_{22} = X_1 t, \quad \varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)t, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{AC} = \{n_{AC}\}^T [\varepsilon] \{n_{AC}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right\} \begin{bmatrix} X_2 t & (X_1 + X_2)t/2 & 0 \\ (X_1 + X_2)t/2 & X_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= (X_1 + X_2)t$$

Com que la diagonal AC és la recta, $X_1 = X_2$, i per a $t = 10^{-6}$ s tenim $\varepsilon_{AC} = 2X_1 \cdot 10^{-6}$.

Finalment, amb $dl_{AC} = \sqrt{2}dX_1$:

$$l_f = l_0 + \Delta l = 1.000\sqrt{2} + \int_{X_1=0}^{X_1=1000} (2X_1 \cdot 10^{-6}) \cdot \sqrt{2}dX_1 = 1.000\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} \frac{1.000^2}{2} =$$

$$= 1.001\sqrt{2} = 1.415,6 \text{ mm}$$

5) Calculem el tensor tensió a partir del tensor deformació i les equacions de Lamé:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 40.385 \text{ N/mm}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 26.923 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{11} = \lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_{11} = (\lambda(X_2 + X_1) + 2GX_2)t$$

$$\sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12} = G(X_1 + X_2)t$$

$$\sigma_{22} = \lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_{22} = (\lambda(X_2 + X_1) + 2GX_1)t$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

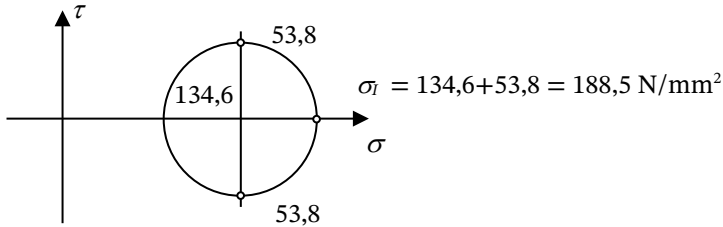
$$\sigma_{33} = \lambda \varepsilon_V = \lambda(X_2 + X_1)t$$

Com que totes les funcions de tensió són linealment creixents amb les X (sempre positives), la tensió normal màxima σ_1 (material fràgil) augmenta amb les X .

Així, el punt de la placa on les tensions són més elevades és C ($X_1 = X_2 = 1.000$ mm).

Per a $t = 10^{-6}$ s:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 134,6 & 53,8 & 0 \\ 53,8 & 134,6 & 0 \\ 0 & 0 & 80,8 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$



La tensió principal màxima és $\sigma_I = 188,5 \text{ N/mm}^2$. El coeficient de seguretat és

$$\gamma = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_e}{\sigma_I} = \frac{300}{188,5} = 1,6$$

Problema 5

$$\begin{aligned} 1) \quad & \bar{x} = \bar{x}(\bar{X}, t) & \bar{X} = \bar{X}(\bar{x}, t) \\ & u_1 = x_1(1 - e^{-t}) = x_1 - X_1 & X_1 = x_1 e^{-t} \rightarrow x_1 = X_1 e^t \\ & u_2 = x_2(1 - e^{-t}) = x_2 - X_2 & X_2 = x_2 e^t \rightarrow x_2 = X_2 e^{-t} \\ & u_3 = 0 = x_3 - X_3 & X_3 = x_3 \rightarrow x_3 = X_3 \end{aligned}$$

$$2) \quad \det[F] = \begin{vmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \text{ sempre és físicament possible}$$

$$3) \quad \bar{v}(\bar{X}, t) = \begin{Bmatrix} X_1 e^t \\ -X_2 e^{-t} \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \bar{v}(\bar{x}, t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow [D] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ s}^{-1}$$

La velocitat de deformació longitudinal de les direccions de referència en qualsevol punt de l'espai és de $\pm 100\%$ per segon (*dir1*: allargament, *dir2*: escurçament) i la velocitat de deformació transversal és nul·la.



$$4) [C] = [F]^T [F] = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

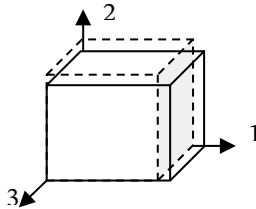
Les direccions de referència no es distorsionen, són principals; per tant, la distorsió màxima l'experimentaran les seves bisectrius ($1'$ i $2'$). El valor de l'angle final

$$\phi: \cos(\phi) = \frac{\vec{N}_{1'} [C] \vec{N}_{2'}}{\lambda_1 \lambda_2}, \text{ on } \vec{N}_{1'} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \vec{N}_{2'} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(\phi) = \frac{\frac{-e^{2t} + e^{-2t}}{2}}{\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}} = \frac{e^{-2t} - e^{2t}}{e^{-2t} + e^{2t}}$$

La distorsió angular serà, en radians: $\phi - \frac{\pi}{2}$

5) Per a $t = 0,1$ s les ràtios d'extensió dels eixos són $\lambda_1 = e^{0,1} = 1,1$ i $\lambda_2 = e^{-0,1} = 0,9$. Per tant, les longituds finals dels costats són 1,1 mm i 0,9 mm. Els angles es mantenen recetes i el volum es conserva perquè el determinant del jacobini és sempre 1. La deformació



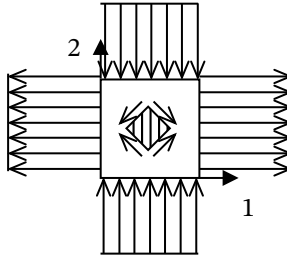
$$6) \vec{u}(\vec{X}, t) = \begin{Bmatrix} X_1(e^t - 1) \\ X_2(e^{-t} - 1) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\varepsilon] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right] = \begin{bmatrix} e^t - 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i, amb les equacions de Lamé, $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 96,7 & 0 & 0 \\ 0 & -85,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1,14 \end{bmatrix}$$

Les forces de volum són nul·les $\nabla[\sigma] + \bar{b} = 0$

7) $\tau_{\max} = 91 \text{ N/mm}^2$

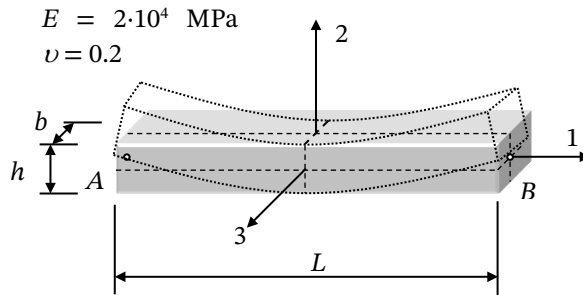


Problema 6

$$u_1 = -\frac{1}{R} X_1 X_2$$

$$u_2 = \frac{1}{2R} X_1^2 + \frac{\nu}{2R} (X_2^2 - X_3^2)$$

$$u_3 = \frac{\nu}{R} X_2 X_3$$



Dades:

R	h	b	L
10^4	100	100	1.000

1) Tensor deformació

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = -\frac{1}{R} X_2 \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{R} X_1 + \frac{1}{R} X_1 \right) = 0$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} = \frac{\nu}{R} X_2 \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) = 0$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \frac{\nu}{R} X_2 \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\nu}{R} X_3 + \frac{\nu}{R} X_3 \right) = 0$$



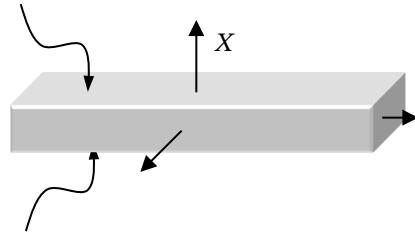
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} -\frac{X_2}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu X_2}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu X_2}{R} \end{bmatrix}$$

2) Deformació transversal màxima:

$$g_{m\acute{a}x} = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{III}}{2} = \frac{X_2}{2R}(1 + \nu) = \frac{h}{4R}(1 + \nu) = 0.003$$

3) Lloc geomètric on es produeix $g_{m\acute{a}x}$:

Cares superior i inferior,
on X_2 és màxima i mínima:
 $X_2 = h/2$ i $X_2 = -h/2$



4) Tensor tensió:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{11} = \lambda\varepsilon_{11}(1 - 2\nu) + 2G\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}E \\ \sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{22} = \lambda\varepsilon_{11}(1 - 2\nu) - 2G\nu\varepsilon_{11} = 0 \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{33} = \lambda\varepsilon_{11}(1 - 2\nu) - 2G\nu\varepsilon_{11} = 0 \end{aligned}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -E\frac{X_2}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5) Tensions màximes de tracció i de compressió:

Tracció (>0) màxima quan X_2 és màxima i negativa:

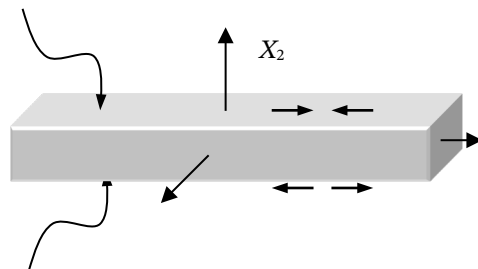
$$X_2 = -h/2 \quad \sigma_I = Eh/2R = 100 \text{ MPa}$$

Compressió (<0) màxima quan X_2 és màxima i positiva:

$$X_2 = h/2 \quad \sigma_{III} = -Eh/2R = -100 \text{ MPa}$$

6) Lloc geomètric on es produeixen:

Cares superior (compressió)
i inferior (tracció)



7) El vector rotació:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{R} X_3 + \frac{\nu}{R} X_3 \right) = \frac{\nu X_3}{R}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) = 0$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} X_1 + \frac{1}{R} X_1 \right) = \frac{X_1}{R}$$

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \nu X_3 / R \\ 0 \\ X_1 / R \end{Bmatrix}$$

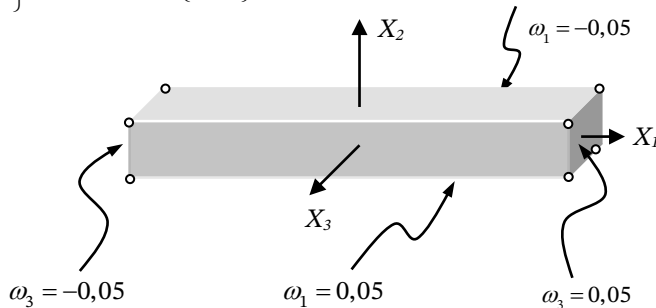
8) Lloc geomètric on es donen els màxims components de rotació:

$$\omega_{1\text{màx}} = \frac{\nu X_{3\text{màx}}}{R} = \frac{\pm \nu b}{2R} = \pm 0,001 \text{ rad (per a } X_3 = \pm b)$$

$$\omega_{3\text{màx}} = \frac{X_{1\text{màx}}}{R} = \frac{\pm L}{2R} = \pm 0,05 \text{ rad (per a } X_L = \pm L)$$

9) Gir dels punts $A(L,0,0)$ i $B(L,0,0)$

$$\vec{\omega}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,05 \end{Bmatrix} \text{ rad} \quad \vec{\omega}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,05 \end{Bmatrix} \text{ rad}$$



10) Coeficient de seguretat:

$$\gamma_s = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{260}{EX_{2\text{màx}} / R} = \frac{260}{Eh / 2R} = \frac{260}{100} = 2,6$$

(per als valors extrems de $X_2 = \pm h/2$)



Problema 7

$$1) \quad \begin{cases} u_1 = aX_1 + 400 \cdot 10^{-6} X_3 \\ u_2 = -900 \cdot 10^{-6} X_2 \\ u_3 = X_3 c + bX_2 - d \cdot 200 \cdot 10^{-6} X_1 \end{cases}$$

Deformació plana (pla 1-2):

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = c = 0 \quad \varepsilon_{13} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) = (400 \cdot 10^{-6} - d \cdot 200 \cdot 10^{-6}) = 0 \quad d = 2$$

$$\varepsilon_{23} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) = b = 0$$

No hi ha deformació volumètrica:

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = a - 900 \cdot 10^{-6} + c = 0 \quad a = 900 \cdot 10^{-6}$$

2)

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 \\ -400 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

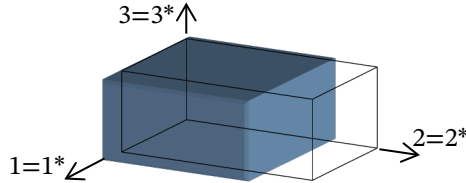
$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ id & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ id & id & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 & 0 & 0 \\ 0 & -900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mu\varepsilon$$

Per tant:

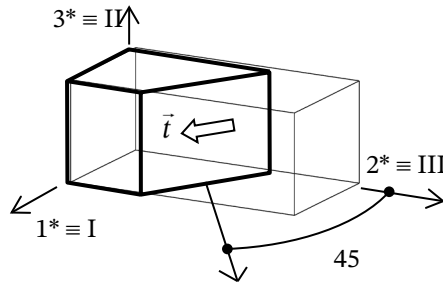
$$l_{1\text{final}} = l_{10} \cdot (1 + \varepsilon_{11}) = 1,0009 \cdot l_{10} \quad l_{2\text{final}} = l_{20} \cdot (1 + \varepsilon_{22}) = 0,9991 \cdot l_{20} \quad l_{3\text{final}} = l_{30}$$

Com a condició imposada en l'enunciat, el volum final ha de ser igual a l'inicial.



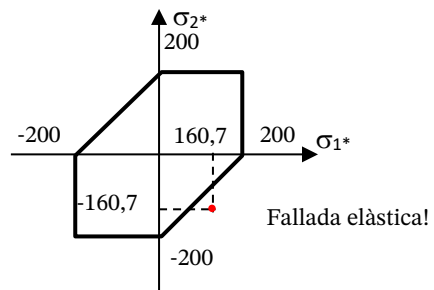
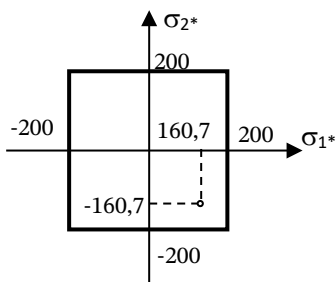
$$3) \quad [\sigma] = \lambda \varepsilon_V [I] + \frac{E}{1+\nu} [\varepsilon] \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{160,7 + 160,7}{2} = 160,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1^*} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{1^*} = 160,7 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{2^*} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{2^*} = -160,7 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{3^*} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{3^*} = 0 \end{aligned} \right\} \vec{\tau} = [\sigma] \vec{n} = \begin{bmatrix} 160,7 & 0 & 0 \\ 0 & -160,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 160,7/\sqrt{2} \\ -160,7/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$4) \quad \sigma_{eq} = \max(|\sigma_{i^*}|) = 160,7 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_{eq} = 2\tau_{\max} = \sigma_I - \sigma_{III} = 321,4 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_S = \frac{200}{160,7} = 1,24 \quad \gamma_S = \frac{200}{321,4} = 0,62 \text{ ! Fallada elàstica!}$$





Problema 8

Superfície exterior lliure de càrrega: tensió plana.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_a & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_b & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_{11} = \varepsilon_a$
 $\varepsilon_{22} = \varepsilon_b$

1) Deformacions transversals g de les direccions a i b :

De ε_c obtenim ε_{12} ($g_a = g_b = \varepsilon_{12}$):

$$\varepsilon_c = \vec{n}_c \cdot \vec{d}_c = \vec{n}_c^T [\varepsilon] \vec{n}_c = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_a & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_b & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_a / \sqrt{2} + \varepsilon_{12} / \sqrt{2} \\ \varepsilon_{12} / \sqrt{2} + \varepsilon_b / \sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} + \varepsilon_{12} \Rightarrow \varepsilon_{12} = \varepsilon_c - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} = 464,29 \cdot 10^{-6}$$

2) Components intrínseques normal σ i tangencial τ , dels vectors tensió \vec{t}_a, \vec{t}_b (N/mm^2).

Segons la llei de Hooke:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11})$$

$$\sigma_{11} = \sigma_a = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) = 154,90 \text{ N}/\text{mm}^2$$

d'on:

$$\sigma_{22} = \sigma_b = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) = -104,90 \text{ N}/\text{mm}^2$$

i $\sigma_{12} = \tau_a = \tau_b = 2G \cdot \varepsilon_{12} = 75 \text{ N}/\text{mm}^2$

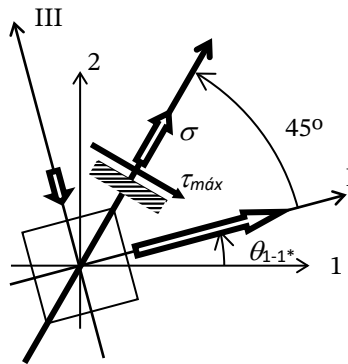
3) Components intrínsecs del vector tensió amb:

$$\tau_{\max} \left(= \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right) \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

$$\sigma_{1^*,2^*} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \begin{cases} \sigma_I \\ \sigma_{III} \end{cases} \Rightarrow \tau_{\max} = 150,00$$

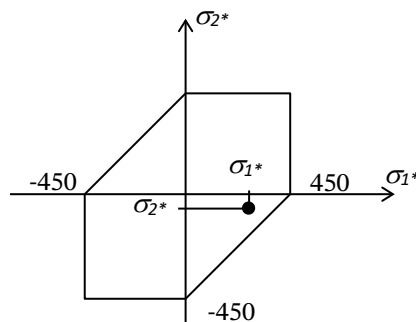
$$\sigma = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = 25 \text{ N/mm}^2 \text{ (centre del cercle de Mohr)}$$

$$\tan \theta_{1-1^*} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{2^*}} \Rightarrow \theta_{1-1^*} = 15^\circ$$



4) Tensió normal de límit elàstic σ_e (N/mm²) necessària per a $\gamma_s = 1,5$.

Criteri de Tresca (τ_{\max}) $\sigma_e = \gamma_s \cdot \sigma_{eq} = \gamma_s \cdot 2\tau_{\max} = 1,5 \cdot 2 \cdot 150 = 450,00$





Problema 9

1) L'estat de deformació d'una partícula només depèn dels moviments relatius entre la partícula i les del seu entorn. No depèn dels moviments absoluts de translació i rotació.

2) "Superfície exterior lliure de càrrega" \Rightarrow la direcció normal al pla de la lona és principal 3* amb $\sigma_{3^*} = 0$ (tensió plana).

$$\varepsilon_{oa} = \varepsilon_{ob} = \frac{l_{ob} - 10}{10}; \varepsilon_{oc} = \frac{l_{oc} - 10}{10} \text{ ho podem resoldre analíticament o gràficament.}$$

Analíticament:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{oa} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3^*} \end{bmatrix}$$

ε_{ii} és la deformació longitudinal unitària de la direcció i , variació de longitud en tant per un.

$\varepsilon_{ij} \equiv \varepsilon_{ji}$ són les deformacions transversals unitàries dels eixos i i j en el pla $i-j$.

$$\varepsilon_{ob} = \vec{N}_{ob}^T [\varepsilon] \vec{N}_{ob} = \begin{pmatrix} \cos 60 & \sin 60 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{oa} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3^*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 60 \\ \sin 60 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\varepsilon_{oa}}{4} + \varepsilon_{12} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\varepsilon_{22}}{4} = \varepsilon_{ob}$$

$$\varepsilon_{oc} = \vec{N}_{oc}^T [\varepsilon] \vec{N}_{oc} = \begin{pmatrix} \cos 60 & -\sin 60 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{oa} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3^*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 60 \\ -\sin 60 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\varepsilon_{oa}}{4} - \varepsilon_{12} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\varepsilon_{22}}{4} = \varepsilon_{oc}$$

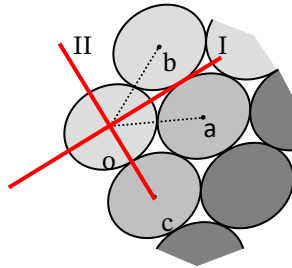
$$\text{D'aquí: } \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_{ob} - \varepsilon_{oc}}{\sqrt{3}} \quad \varepsilon_{22} = \frac{2(\varepsilon_{ob} + \varepsilon_{oc}) - \varepsilon_{oa}}{3} = \frac{\varepsilon_{oa} + 2\varepsilon_{oc}}{3}$$

3) $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \rightarrow \varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$, ho expressem en tant per cent multiplicant per 100.

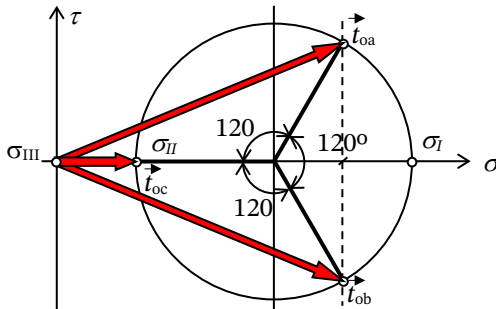
$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11})$$

4) Els eixos de les el·lipses corresponen als diàmetres extrems, és a dir, deformacions extremes (deformacions principals). Les direccions dels eixos de les el·lipses corresponen a les direccions principals (VEP del tensor deformació).

Al cercle de Mohr es veu clarament que la direcció oc és principal i, per tant, la seva perpendicular. Pel que fa a oa , formen 3° i 60° .

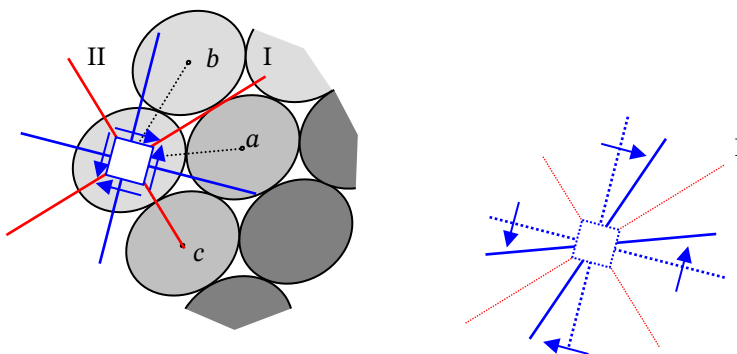


5) Mitjançant les equacions de Lamé (o Hooke) quantifiquem l'estat de tensió.



$$\begin{aligned}\sigma_I &= \lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_I \\ \sigma_{II} &= \lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_{II} = \sigma_{oc} \\ \sigma_{III} &= 0\end{aligned}$$

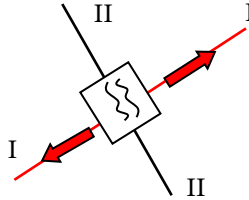
6) En el pla del dibuix (pla $I-II$) la $\tau_{\max} = (\sigma_I - \sigma_{II})/2$. Actuen sobre els plans amb normals a 45° d' I i II . La distorsió angular associada és, segons la llei de Hooke, $g_{\max} = \tau_{\max} (1+\nu)/E$ (o bé $g_{\max} = (\varepsilon_I - \varepsilon_{II})/2$). La distorsió angular és del doble d'aquest valor: $\Delta\theta = (\varepsilon_I - \varepsilon_{II})$.





7) La ruptura per fragilització es produeix en el pla on actua la *tensió principal màxima*:
(ja calculada a l'apartat 5).

8) $\sigma_e = 1,5 \sigma_{eq} = 1,5 \sigma_I$



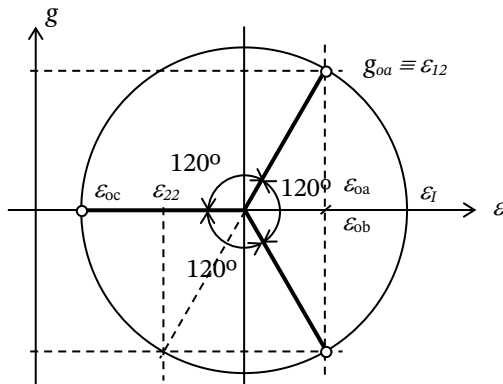
Nota: L'apartat 2 també es pot resoldre gràficament, de la manera següent:

Les direccions oa , ob i oc formen inicialment 60° . Per tant, les components intrínseques de deformació formaran 120° dins del cercle de Mohr: dues de les deformacions longitudinals són iguals ($\epsilon_{oa} = \epsilon_{ob}$); per tant, del dibuix es dedueix que la tercera és principal. El radi del cercle és:

$$\epsilon_{oc} + R + R\cos 60 = \epsilon_{oa} = \epsilon_{11} ; \text{ per tant, } R = 2 \frac{\epsilon_{oa} - \epsilon_{oc}}{3}$$

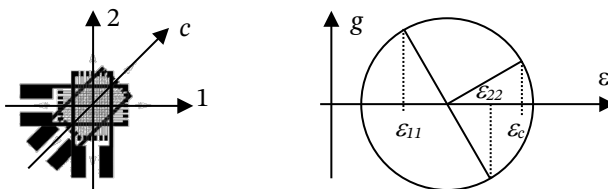
$$\epsilon_{12} = R\sin 60 = \frac{\epsilon_{oa} - \epsilon_{oc}}{\sqrt{3}}$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{oa} - 2R\cos 60 = \frac{\epsilon_{oa} + 2\epsilon_{oc}}{3} \quad [\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^* \end{bmatrix}$$



Problema 10

1) Gràficament:



Si les deformacions longitudinals de tres direccions contingudes en un pla són iguals, també són iguals totes les del mateix pla. El cercle de Mohr és un punt (tensor circular).

Analíticament:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 3.000 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 3.000 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3^*} \end{bmatrix} \mu\varepsilon \quad \varepsilon_c = 3.000 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3.000 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 3.000 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3^*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

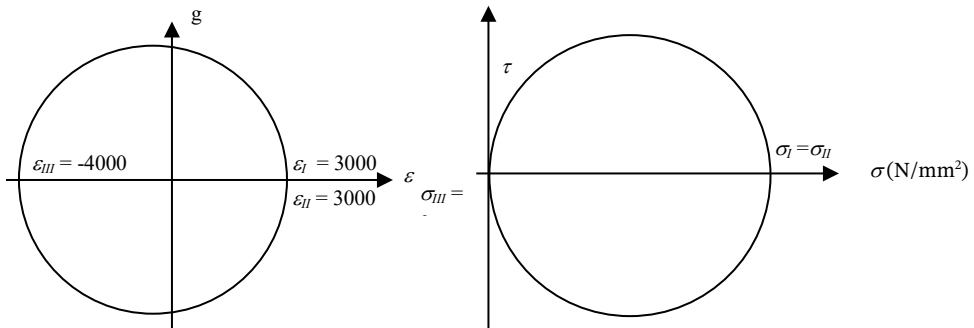
↓
 $\varepsilon_{12} = 0$

Per trobar ε_{33} i el tensor tensió, s'aplica la llei de Hooke (superfície lliure de càrrega → tensió plana):

$$\left. \begin{aligned} 3.000 \cdot 10^{-6} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) \\ 3.000 \cdot 10^{-6} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

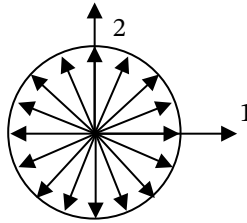
$$\Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_I = \sigma_{II} = \frac{E \cdot 3.000 \cdot 10^{-6}}{(1 - \nu)} = E \cdot 5.000 \cdot 10^{-6} = 100 \text{ N/mm}^2$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{-2\nu}{1 - \nu} 3.000 \cdot 10^{-6} = -4.000 \mu\varepsilon$$



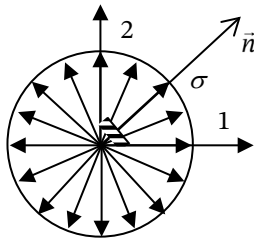
2) És l'el·lipsoide definit pels extrems de tots els vectors tensió possibles, que actuen a través de tots els diferencials de superfície possibles, al voltant d'un punt determinat.

En aquest cas, l'el·lipsoide està degenerat a una circumferència en el pla 1-2.

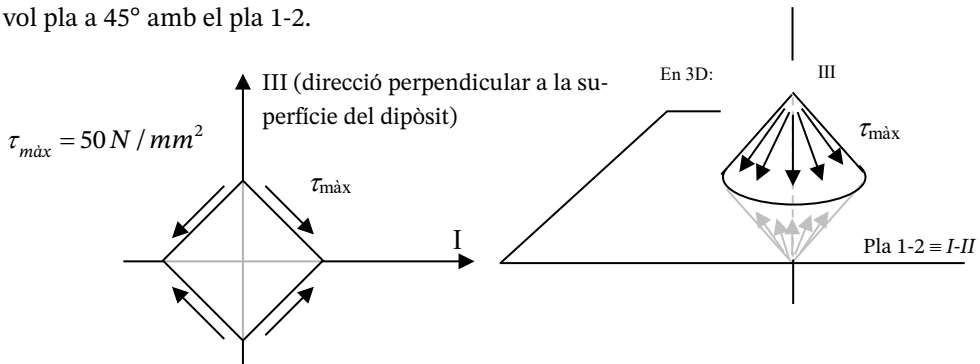


3) $\Delta gruix = gruix_0 \cdot \varepsilon_{33} = 10 \cdot (-4.000 \cdot 10^{-6}) = -0,04 \text{ mm}$

4) $\sigma_{\bar{n}} = \sigma_{11}$ actua sobre qualsevol pla de normal \bar{n} continguda en el pla 1-2.



5) $\tau_{m\grave{a}x} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$, actuant en els plans que formen 45° amb I i III; per tant, en qualsevol pla a 45° amb el pla 1-2.



6) Rankine: descohesió del material, separació entre les partícules per tensió normal excessiva.

Tresca: lliscament de partícules causat per tensions tangencials excessives.

Von Mises: lliscament de partícules pels plans octaèdrics a causa d'una energia de distorsió excessiva.

7) Si la fallada es produeix per lliscament entre la fibra i la resina, com que les fibres estan orientades en totes direccions, aquest lliscament es produirà en les que estiguin sotmeses a la tensió tangencial màxima, és a dir, a 45° de III.

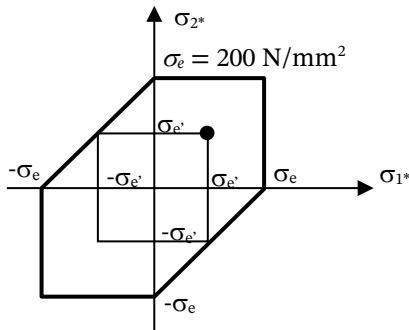
$$\gamma_s = 2 = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_e}{\sigma_I - \sigma_{III}} = \frac{\sigma_e}{\sigma_I} \quad \rightarrow \quad \sigma_e = 2 \cdot \sigma_I = 200 \text{ N/mm}^2$$

8) Fragilització del material \rightarrow *ruptura* per causa de $\sigma_I \rightarrow$

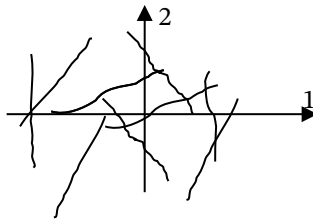
$$\sigma_{eq} = \sigma'_e = \sigma_I = 100 \text{ N/mm}^2$$

El límit elàstic del material envellit σ'_e s'ha reduït a la meitat.

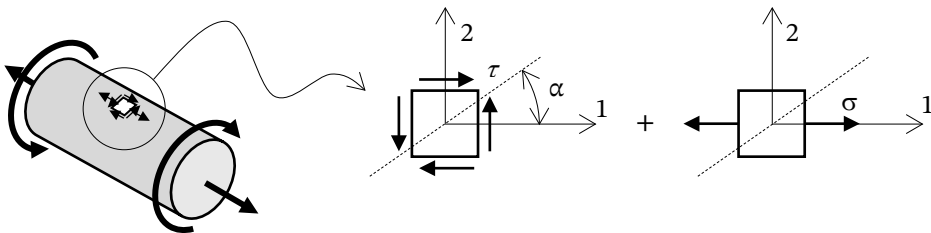
9)



10) La tensió normal màxima σ_I actua en qualsevol direcció del pla 1-2; per tant, les fissures es produiran en direccions arbitràries dins d'aquest pla.



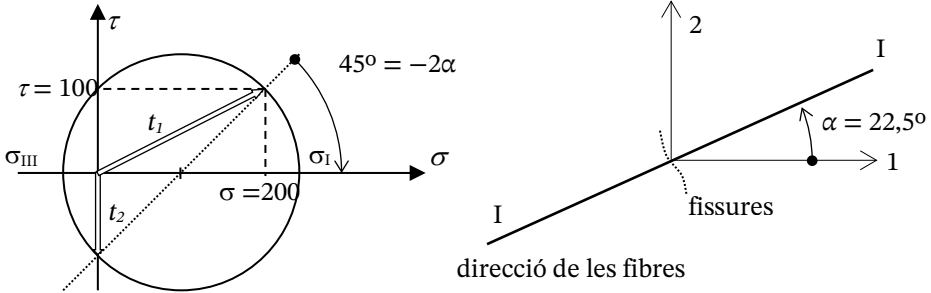
Problema 11





1) S'han d'orientar en la direcció I principal de màxima tracció.

$$\sigma = 2\tau; \text{ per tant:}$$



2) Tensió de límit elàstic de la resina (dúctil).

Criteri de Tresca:

$$\gamma_s = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_e}{\sigma_I - \sigma_{III}} = \frac{\sigma_e}{2 \cdot \tau \sqrt{2}} = 1,5$$

$$\text{Per tant: } \sigma_e = 3\tau\sqrt{2} = 424 \text{ N/mm}^2$$

3) Tensió de ruptura de les fibres.

Criteri de Rankine:

$$\gamma_s = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_e}{\sigma_I} = \frac{\sigma_e}{\tau + \tau\sqrt{2}} = 1,5$$

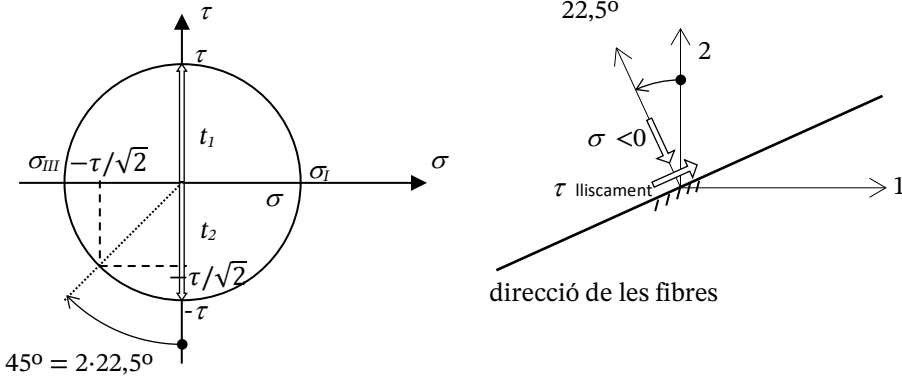
$$\text{Per tant: } \sigma_e = 1,5\tau(1 + \sqrt{2}) = 362 \text{ N/mm}^2$$

4) Resistències mínimes al lliscament i a la separació entre la fibra i la resina.

Pel fet d'estar les fibres orientades en una direcció principal, *no suporten esforç de lliscament*.

Pel fet de ser les tensions normals perpendiculars a les fibres $\sigma_{II} = 0$ i $\sigma_{III} < 0$ (compressió), les fibres *no suporten esforç de separació*.

5)



Fibres: la tensió normal que experimenten és ara $-\tau / \sqrt{2} = 70,7 \text{ N/mm}^2$, menor que la requerida anteriorment.

Resina: les tensions normal i tangencial màximes valen 100 N/mm^2 , menors que les anteriors.

Lliscament/separació fibra-resina: la tensió normal perpendicular a les fibres continua sent de compressió; per tant, no se separen.

La tensió associada al lliscament és $\tau / \sqrt{2} = 70,7 \text{ N/mm}^2$. Per mantenir el coeficient de seguretat en 1,5 és necessària una resistència al lliscament de $1,5 \cdot \tau / \sqrt{2} = 106 \text{ N/mm}^2$.

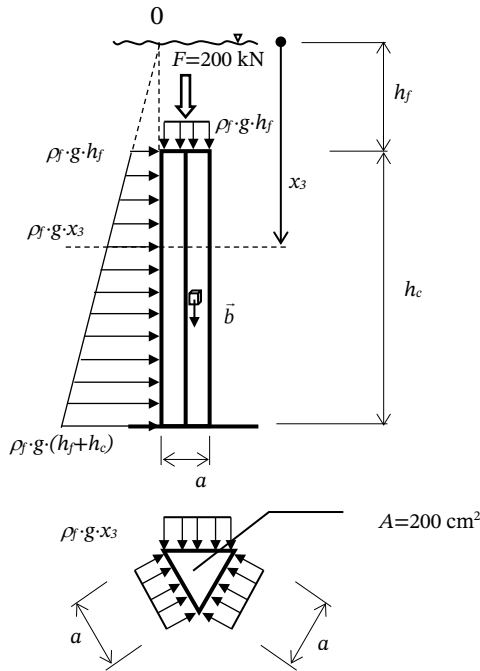
Problema 12

1) En totes les superfícies en contacte amb el fluid, actua una pressió en direcció normal a la superfície i de valor proporcional a la profunditat:

A la cara superior, actua la pressió del fluid més la pressió deguda a la força F distribuïda uniformement $\rho_f \cdot g \cdot h_f + F / A$.

A causa de l'acció gravitatòria, tots els punts de la columna estan sotmesos a una força de volum en direcció vertical 3, de valor:

$$\vec{b} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \rho_c g \end{array} \right\} \text{ N/m}^3$$



Imposant l'equilibri de forces verticals, a la cara inferior hi ha d'actuar una pressió vertical cap amunt de valor igual i en sentit contrari a la que actua en la cara superior més la pressió uniforme deguda al pes mateix de la columna:

$$\rho_f \cdot g \cdot h_f + F/A + \rho_c \cdot g \cdot h_c.$$

2) No hi ha forces de volum en les direccions 1 i 2. Les components tangencials de les forces de superfície són nul·les en totes les superfícies exteriors i a l'interior.

Existeix força constant de volum en direcció 3 i les forces de superfície depenen linealment de x_3 ; per tant, les funcions de tensió podran dependre linealment de x_3 .

Així, de les condicions de contorn, les tensions tangencials han de ser nul·les en qual-sevol punt.

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

En el pla 1-2, tenim una compressió de valor constant, amb independència de l'orientació de les cares (hidroestàtica). Així, de les condicions de contorn:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\rho_f \cdot g \cdot x_3$$

En direcció 3, tenim una compressió creixent a causa de la força de volum (pes propi de la columna).

Així, de les condicions de contorn:

$$\sigma_{33} = -\rho_f \cdot g \cdot h_f - F / A - \rho_c \cdot g \cdot (x_3 - h_f)$$

En resum, el tensor tensió és:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -\rho_f g x_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_f g x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_f g h_f - F / A - \rho_c g (x_3 - h_f) \end{bmatrix}$$

Per la llei de Hooke, el tensor deformació és el següent:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_c} [\sigma_{11} - \nu_c (\sigma_{22} - \sigma_{33})] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_c} [\sigma_{22} - \nu_c (\sigma_{11} - \sigma_{33})] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E_c} [\sigma_{33} - \nu_c (\sigma_{11} - \sigma_{22})] \end{bmatrix}$$

3) Totes les direccions del pla 1-2 són principals; per tant, no es produeixen variacions angulars. Qualsevol longitud continguda en el pla 1-2 (costats del triangle que defineix la secció transversal) es modifica en la magnitud ($\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$).

$$\Delta l = l_0 \cdot \varepsilon_{11} = a \cdot \varepsilon_{11}, \quad \text{on } a = \sqrt{\frac{2A}{\cos 30}}$$

4) La variació d'altura és:

$$\Delta l = \int_{h_f}^{h_f+h_c} \varepsilon_{33} dx_3$$

5) Coeficient de seguretat. Criteri de Rankine (fràgil):

$$\sigma_{eq} = \max(|\sigma_I|, |\sigma_{III}|) = |\sigma_{33}|, \quad \text{per a } x_3 = h_f + h_c$$

$$\sigma_{eq} = |-\rho_f \cdot g \cdot h_f - F/A - \rho_c \cdot g \cdot h_c|$$

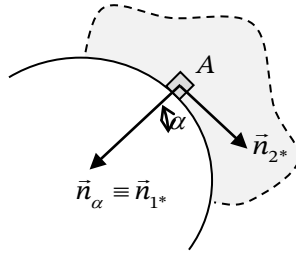
$$\gamma_{seg} = \frac{\sigma_{rot}}{\sigma_{eq}}$$



Problema 13

$\alpha = 60^\circ$

1)



- Les forces de superfície sobre el pla de normal \vec{n}_α són $\vec{f}_\alpha = \vec{0}$, perquè es tracta d'una superfície exterior lliure de càrrega. La direcció α , per tant, és principal.
- La direcció 3 és també principal (deformació plana en el pla 1-2).
- L'altra direcció principal és, doncs, la perpendicular a \vec{n}_α i a 3.

L'expressió del tensor tensió en la base de direccions principals 1*, 2* i 3* és:

$$[\sigma]_{1^*,2^*,3^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2^*} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3^*} \end{bmatrix}; \text{ com que es tracta d'un cas de deformació plana en 1-2, tenim:}$$

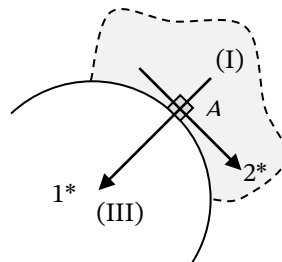
nim:

$$\varepsilon_{3^*} = 0 = \frac{1}{E}(\sigma_{3^*} - \nu\sigma_{2^*}); \text{ per tant, } \sigma_{3^*} = 0,3\sigma_{2^*} \Rightarrow [\sigma]_{1^*,2^*,3^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2^*} & 0 \\ 0 & 0 & \nu\sigma_{2^*} \end{bmatrix}$$

Així, les direccions principals ordenades són I \equiv 2*, II \equiv 3*, III \equiv 1*.

Com que és un material fràgil, just en l'instant previ a la fallada, la tensió normal màxima és $\sigma_I = \sigma_{2^*} = 800 \text{ N/mm}^2$. Així:

$$[\sigma]_{1^*,2^*,3^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 240 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$



2)

$$\varepsilon_{1^*} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{2^*} + \sigma_{3^*}) = -0,00156 \quad \varepsilon_{2^*} = \frac{1}{E}(\sigma_{2^*} - \nu\sigma_{3^*}) = 0,00364 \quad \varepsilon_{3^*} = 0$$

$$[\varepsilon]_{1^*,2^*,3^*} = \begin{bmatrix} -1.560 & 0 & 0 \\ 0 & 3.640 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mu\varepsilon$$

$$[\varepsilon]_{1,2,3} = [R]^T [\varepsilon]_{1^*,2^*,3^*} [R] = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.560 & 0 & 0 \\ 0 & 3.640 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.340 & -2.252 & 0 \\ -2.252 & -260 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mu\varepsilon$$

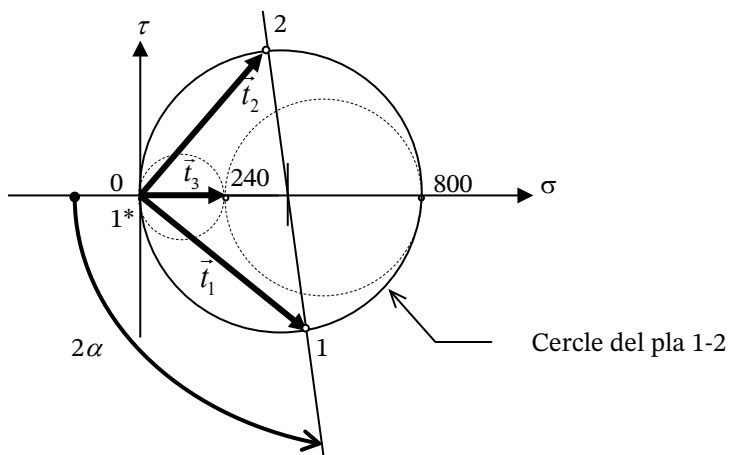
3) L'angle $\alpha' = 30^\circ$ el formen les direccions -1^* i 2 .

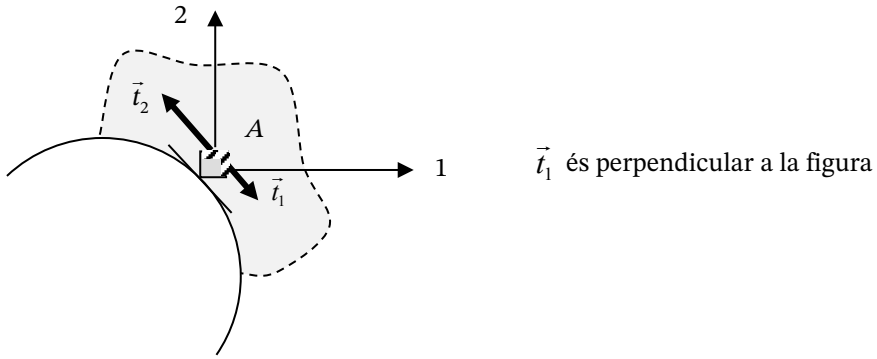
$$\Delta\alpha'_A \cdot \sin \alpha' = (\varepsilon_{1^*} + \varepsilon_{22}) \cos \alpha' - 2 \{-n_{1^*}\}^T [\varepsilon] \{n_2\}$$

$$\Delta\alpha'_A \cdot \sin 30 = (-1.560 - 260) \cdot 10^{-6} \cos 30 - 2 \{-1 \ 0 \ 0\} \begin{bmatrix} -1.560 & 0 & 0 \\ 0 & 3.640 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \begin{Bmatrix} -\cos 30 \\ -\sin 30 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1,125 \cdot 10^6$$

$$\Delta\alpha'_A = 2.250 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,129^\circ$$

4) Les direccions $1^* \rightarrow 1$ formen un angle α (sentit horari); per tant, en el cercle de Mohr, els extrems dels vectors tensió formen un angle 2α (sentit antihorari) des del centre del cercle:





5) El criteri de fallada elàstica podria ser el de Tresca (τ_{\max}).

$$\sigma_{eq} = |\sigma_I - \sigma_{III}| = |800 - 0| = 800 \text{ N/mm}^2$$

(En un estat de tensió uniaxial, totes les tensions equivalents coincideixen.)

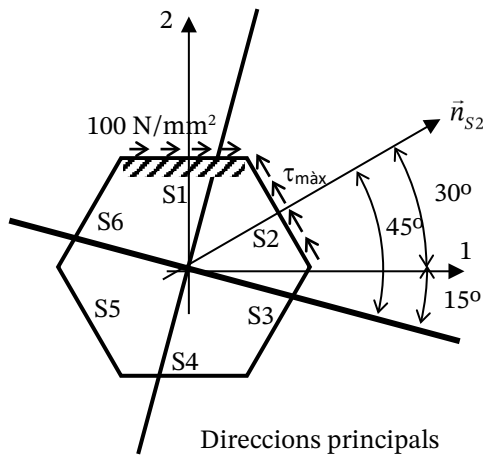
Per tant, en el punt A , la ruptura es produiria en el mateix instant.

(Per a l'anàlisi global del tub, s'hauria de comprovar si el punt crític continua sent efectivament A quan es canvia de criteri de fallada.)

Problema 14

Resolució analítica

1, 2 i 3)



Tensor tensió en la base 1,2,3:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Les direccions principals sempre formen 45° respecte a la normal en el pla on actua τ_{\max} .

En aquesta base, el tensor és diagonal. La matriu canvi d'eixos respecte a 1,2,3 és:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{1^*} & 0 \\ 0 & \sigma_{2^*} \end{bmatrix} = [R]^T \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 100 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} [R]$$

Dels termes de fora de la diagonal n'obtenim σ_{11} :

$$0 = \sigma_{11} \sin 15 \cos 15 - 100 \sin^2 15 + 100 \cos^2 15 \Rightarrow$$

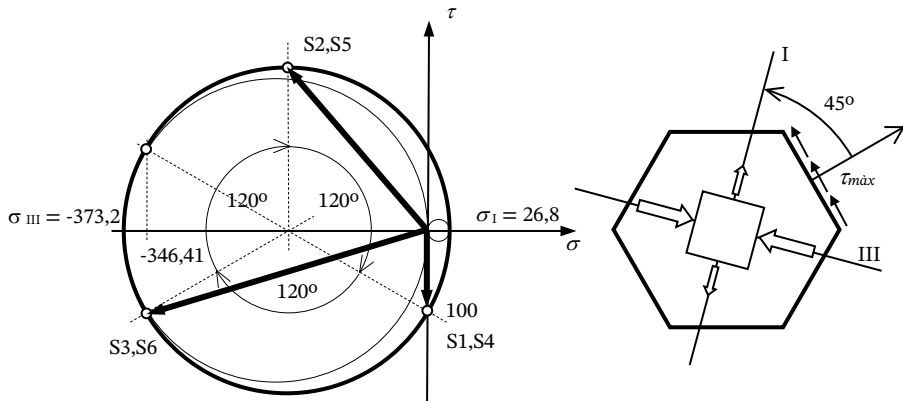
$$\sigma_{11} = \frac{100(\sin^2 15 - \cos^2 15)}{\sin 15 \cos 15} = -346,41 \text{ N/mm}^2$$

Els termes de la diagonal (de la mateixa expressió o bé amb les fórmules simplificades de tensió plana) són:

$$\sigma_I = 26,8 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{III} = -373,2 \text{ N/mm}^2$$

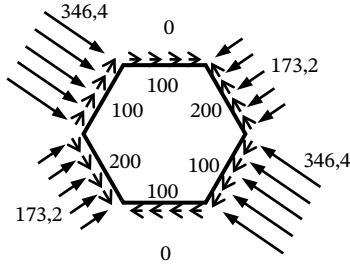
$$(\sigma_{II} = 0)$$



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -346,4 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

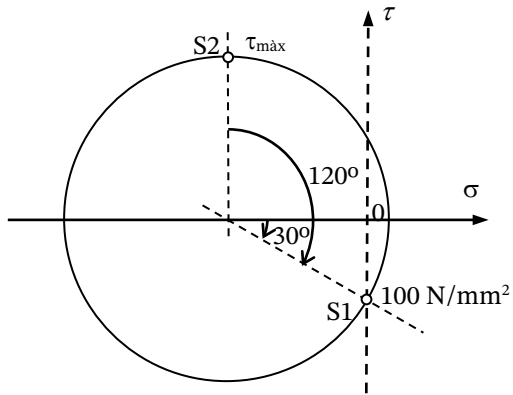
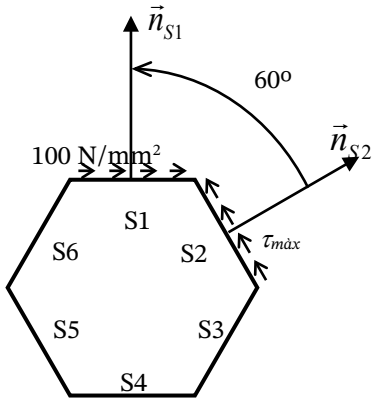


4) Els vectors dibuixats en els cercles de Mohr:



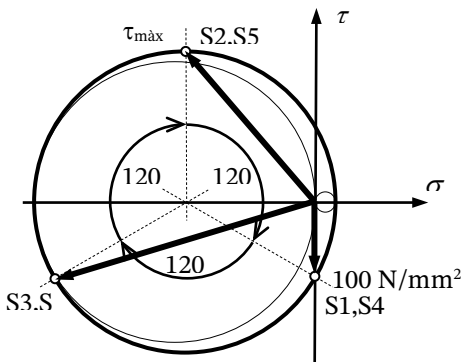
Resolució gràfica

1 i 2)



$$|\tau_{m\grave{a}x}| = \text{radio del c\`{i}rculo} = \frac{100}{\sin 30^\circ} 200 \text{ N/mm}^2$$

centre del cercle: $|\sigma| = \frac{100}{\tan 30^\circ} = 173,2 \text{ N/mm}^2$ (tensió normal associada a $\tau_{m\grave{a}x}$)

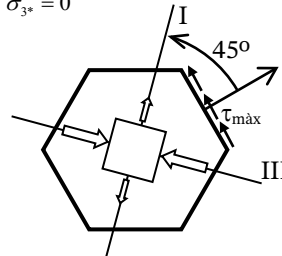


Tensions principals:

$$\sigma_{1^*} = -173,2 + 200 = 26,8 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{2^*} = -173 - 200 = -373,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{3^*} = 0$$



3) El vector tensió associat a la direcció vertical (2) és el que correspon a la superfície S1:

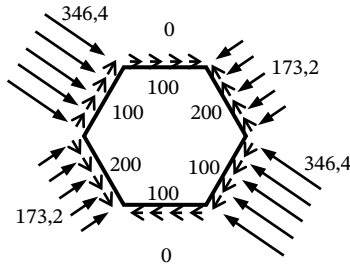
$$|\tau| = |\sigma_{12}| = 100 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_{22} = 0 \quad (\text{de l'enunciat})$$

El vector tensió associat a la direcció horitzontal (1) és el diametralment oposat a (2) en el cercle de Mohr, és a dir:

$$|\tau| = |\sigma_{12}| = 100 \text{ N/mm}^2 \quad |\sigma_{11}| = |2 \cdot \sigma_{\text{central}}| = 346,4 \text{ N/mm}^2$$

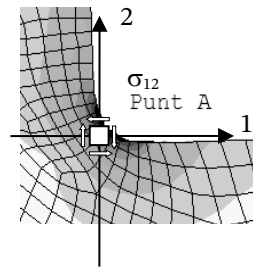
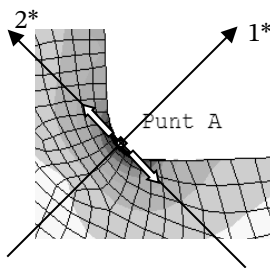
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -346,4 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

4) Dels vectors dibuixats en els cercles de Mohr de l'apartat 1:



Problema 15

1)



La peça és plana i no hi ha accions externes perpendiculars al pla de la peça ($\sigma_{33} = 0$).

⇒ La direcció 3, normal al pla, és principal. $3 \equiv 3^*$ amb $\sigma_{3^*} = 0$.

La direcció 1* indicada és la normal a una superfície exterior lliure de càrrega.

Les tensions tangencials σ_{12} actuen tangencialment als plans definits pels eixos 1-2. Per condició d'equilibri de moments, han d'actuar de manera recíproca en plans perpendiculars.

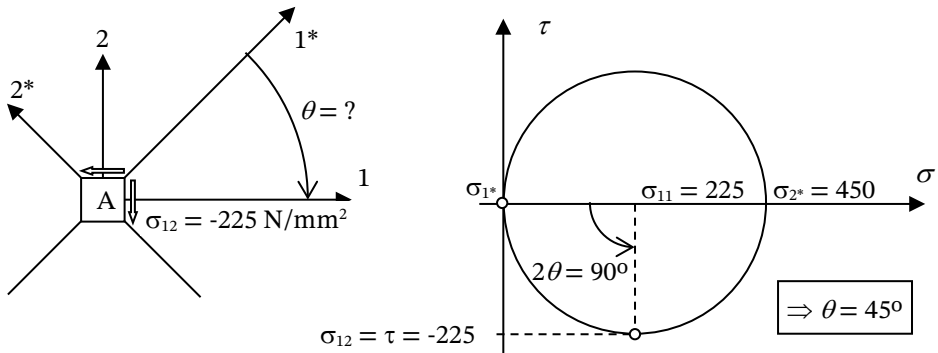


$$2) [\sigma]_{1^*2^*3^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Les direccions principals (de tensió) són les normals als plans on la tensió tangencial és nul·la $\tau = 0$. Per tant, les tensions principals només tenen component normal; els vectors tensió són perpendiculars als plans on actuen. Sempre n'hi ha tres i són perpendiculars entre si. Dues de les tensions principals corresponen a les tensions normals extremes (màxima i mínima).

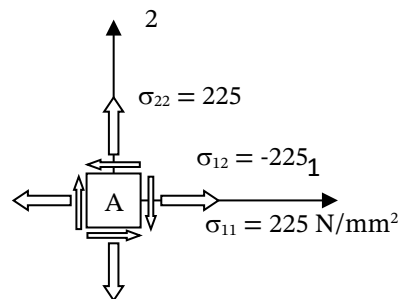
Corresponen als vectors i valors propis de la matriu del tensor tensió.

3)



4) Del cercle de Mohr es dedueix que les tensions normals associades als eixos 1 i 2 són $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 225 \text{ N/mm}^2$; per tant:

$$[\sigma]_{123} = \begin{bmatrix} 225 & -225 & 0 \\ -225 & 225 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$



Les tensions normals σ_{11} , σ_{22} traccionen al material en les direccions 1 i 2, respectivament, i tendeixen a provocar que les partícules se separin en aquestes direccions.

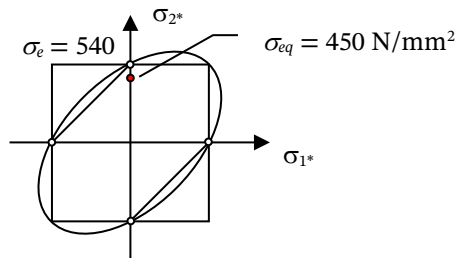
Les tensions σ_{12} actuen tangencialment als plans de referència i tendeixen a provocar lliscaments, a distorsionar-los angularment; en aquest cas, tendeixen a augmentar l'angle 1-2.

5) Si el material és dúctil, la fallada elàstica és deguda al lliscament entre partícules, causat bé per la tensió tangencial màxima (criteri de Tresca) o bé per la tangencial octaèdrica (criteri de Von Mises). La fallada començarà en els plans on actuïn aquestes tensions; en el nostre cas, les tensions tangencials màximes actuen sobre els plans de referència definits pels eixos 1-2.

6) En materials fràgils, la fallada elàstica es deu a la separació entre partícules causada per la tensió normal màxima (criteri de Rankine); per tant, la fallada començaria allà on actuï aquesta tensió; en el nostre cas, el pla perpendicular a 2*.

7) $\sigma_{eq} = 450 \text{ N/mm}^2$ per a tots els criteris, perquè es tracta d'un estat de tensió uniaxial i, per tant, la comparació amb l'assaig uniaxial és sempre directa, sigui com sigui el criteri.

8) $\sigma_e = \sigma_{eq} \cdot \gamma_S = 450 \cdot 1,2 = 540 \text{ N/mm}^2$



9) $\sigma_{eq} = \sigma_e / \gamma_S = 900 / 1,2 = 750 \text{ N/mm}^2$

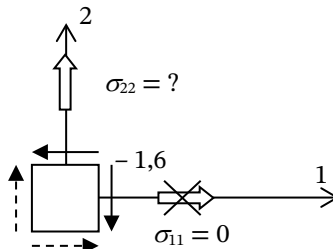
1,67 vegades més gran; per tant, $F = 1,67 \cdot 1.000 \text{ N} = 1.667 \text{ N}$

10) $997 \text{ nodes} \times 2 \text{ g.l. /node} = 1.994 \text{ g.l.}$ de la matriu de rigidesa general. La reduïda s'obté eliminant els g.l. restringits (3); per tant, $1.994 - 3 = 1.991 \text{ g.l.}$

Problema 16

$\sigma_{12} = -1,6 \text{ N/mm}^2$

Tensió plana ($\sigma_{33} = 0$) $\sigma_{11} = 0$ $\sigma_{III} = -1,6 \text{ N/mm}^2$

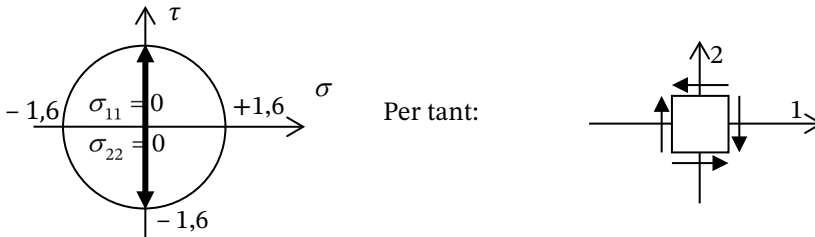




1) $[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & -1,6 \\ -1,6 & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ N/mm² en direccions principals: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & -1,6 \end{bmatrix}$ N/mm². Te-

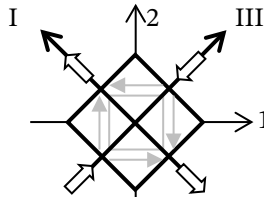
nint en compte que $\det[\sigma] = -1,6^2$ és un invariant, s'observa que $\sigma_I = 1,6$ N/mm², per la qual cosa el traçament, també invariant, és nul i, per tant, $\sigma_{22} = 0$.

També es poden deduir aquests valors de manera immediata a partir del cercle de Mohr o desenvolupant la diagonalització del tensor.



2) El tensor tensió és simètric sempre, perquè els components de tots dos costats de la diagonal corresponen a tensions tangencials de plans perpendiculars que han d'estar en equilibri de moments.

3) Dels cercles de Mohr se n'extreu que les direccions principals estan a 45° dels plans de referència; per tant:



4) Les tensions principals són aquelles tensions que no tenen component tangencial, és a dir, aquelles on el vector tensió és normal al pla on actua. Per tant, matemàticament, \vec{t} té la direcció de \vec{n} : $\vec{t} = [\sigma] \vec{n} = \lambda \vec{n}$, que és el problema de valors i vectors propis de la matriu $[\sigma]$. Són perpendiculars entre si. Corresponen als eixos de l'el·lipsoide de tensions i als valors extrems de tensió.

5) $\epsilon_{33} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$; per tant, el gruix no varia.

Criteri de Rankine:

$\sigma_{eq} = 1,6$ N/mm². Falla per separació dels plans on actua el màxim esforç normal.

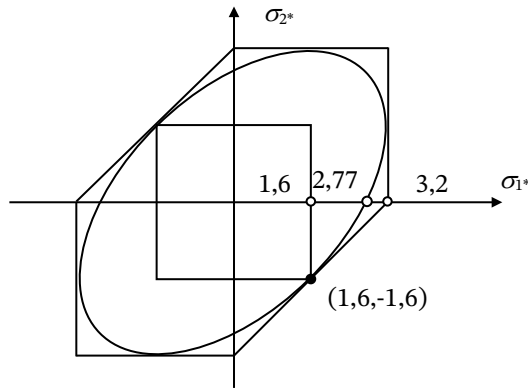
Criteri de Tresca:

$\sigma_{eq} = 3,2 \text{ N/mm}^2$. Falla per lliscament dels plans on actua la màxima tensió tangencial.

Criteri de Von Mises:

$\sigma_{eq} = \sqrt{3} \cdot 1,6 = 2,77 \text{ N/mm}^2$. Falla quan s'aconsegueix la màxima energia de distorsió.

6)



7) Les tensions σ_{12} són nul·les en els punts del contorn, perquè no hi ha forces de superfície que les equilibrin.

Problema 17

1) No hi ha fricció en les cares ni forces de volum; per tant, per equilibri de forces verticals, la tensió vertical és uniforme en tot el conjunt i de valor $\sigma_{33} = \sigma_3^* = -100 \text{ N/mm}^2$.

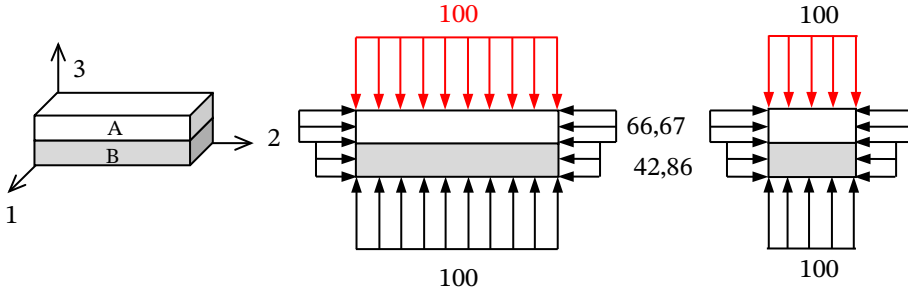
El tensor tensió per a cada material serà:

$$[\sigma_A] = \begin{bmatrix} \sigma_{1A}^* & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2A}^* & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2 \quad [\sigma_B] = \begin{bmatrix} \sigma_{1B}^* & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2B}^* & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}$$



$$[\varepsilon_A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3A}^* \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3B}^* \end{bmatrix}$$



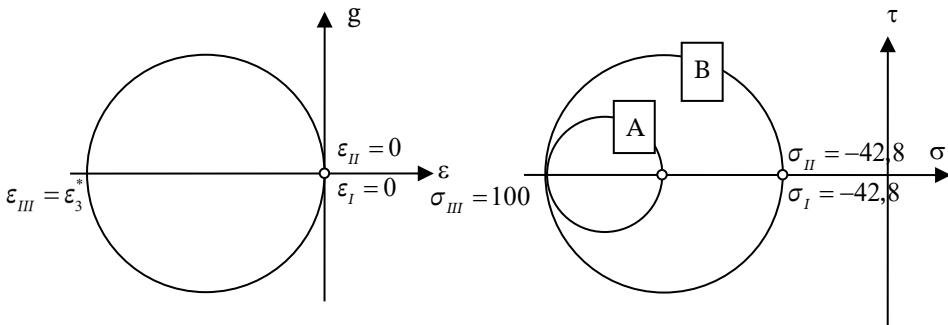
Aplicant la llei de Hooke a cada material:

$$\sigma_{1A}^* = \sigma_{2A}^* = 100 \frac{\nu_A}{\nu_A - 1} = -66,67 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{1B}^* = \sigma_{2B}^* = 100 \frac{\nu_B}{\nu_B - 1} = -42,86 \text{ N/mm}^2$$

$$2) \varepsilon_{3A}^* = \frac{\sigma_{3A}^*}{E_A} - \frac{\nu_A}{E_A} 2\sigma_{1A}^* = \frac{-100}{E_A} + \frac{0,4}{E_A} 2 \cdot 66,67 = -0,047$$

$$\varepsilon_{3B}^* = \frac{\sigma_{3B}^*}{E_B} - \frac{\nu_B}{E_B} 2\sigma_{1B}^* = \frac{-100}{E_B} + \frac{0,4}{E_B} 2 \cdot 42,86 = -0,037$$



$$3) \Delta h = c \cdot \varepsilon_{33A} + c \cdot \varepsilon_{33B} = -0,84 \text{ mm}$$

$$4) \tau_{m\acute{a}x A} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{-66,67 + 100}{2} = 16,67 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{m\acute{a}x B} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{-42,86 + 100}{2} = 28,57 \text{ N/mm}^2$$



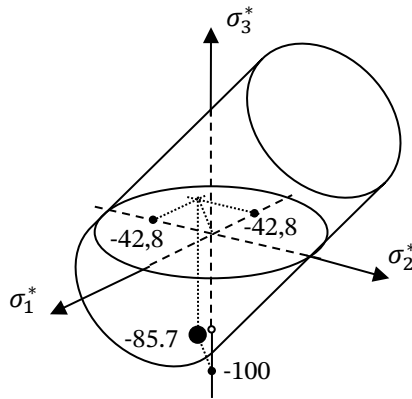
$$5) \sigma_{eq A} = 33,33 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{eq B} = 57,14 \text{ N/mm}^2$$

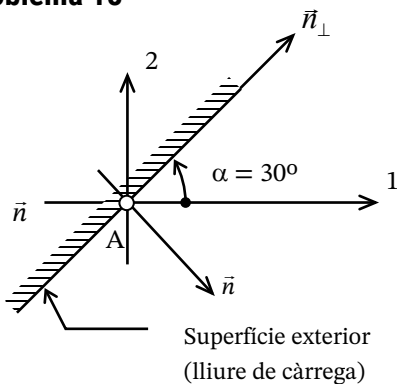
$$6) \sigma_{e A} = 1,5 \cdot 33,33 = 50 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{e B} = 1,5 \cdot 57,14 = 85,71 \text{ N/mm}^2$$

7)



Problema 18



Del gràfic $\Rightarrow \sigma_{11} = 300 \text{ N/mm}^2$

\vec{n} i \vec{n}_\perp direccions principals

$\vec{f} = \vec{0}$

Deformació plana en el pla 1-2 $\Rightarrow \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0 \Rightarrow$ 3 direcció principal 3*.



1) Els tensors tensió i deformació:

$$[\sigma]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2 \quad [\varepsilon]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al punt A, punt de la superfície exterior: $\{f\} = [\sigma]\{n\} = \{0\}$

$$\{f\} = \begin{bmatrix} 300 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin 30 \\ -\cos 30 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \sin 30 - \sigma_{12} \cos 30 \\ \sigma_{12} \sin 30 - \sigma_{22} \cos 30 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\sigma_{12} = \frac{300}{\sqrt{3}} = 173 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_{22} = 100 \text{ N/mm}^2$$

Llei de Hooke:

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - 0,2 \cdot (300 + 100)) = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = 80 \text{ N/mm}^2$$

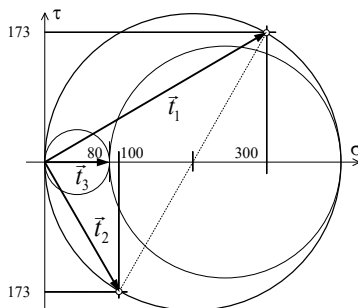
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (100 - 0,2 \cdot (300 + 80)) = 120 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (300 - 0,2 \cdot (100 + 80)) = 1,320 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} = \frac{1,2 \cdot 300}{2 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{3}} = 1,039 \cdot 10^{-6}$$

$$[\sigma]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} 300 & 173 & 0 \\ 173 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2 \quad [\varepsilon]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} 1,320 & 1,039 & 0 \\ 1,039 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mu\varepsilon$$

2) Cercles de Mohr de tensions:

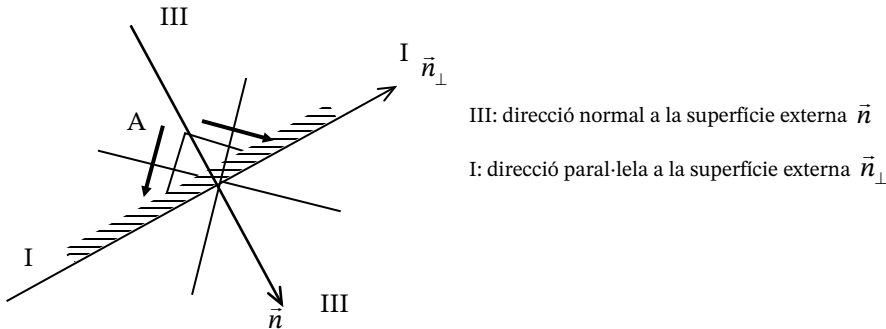


$$3) \quad a) \quad \tau_{m\acute{a}x} = \pm \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \pm \frac{400 - 0}{2} = \pm 200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1^*} = \sigma_I = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = 400 \text{ MPa}$$

$$\Delta\theta = -2g = -2 \frac{(1+\nu)}{E} \tau = -2 \frac{(1+0,2)}{2 \cdot 10^5} (\pm 200) = \mp 0,0024 \text{ rad}$$

b) $\tau_{m\acute{a}x}$ actua sempre a 45° d'I i de III.



c) Criteri de Tresca:

$$\gamma_{seg} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} \geq 1,5 \quad \Rightarrow \quad \sigma_e \geq 1,5 \cdot 2\tau_{m\acute{a}x} = 1,5 \cdot 2 \cdot 200 = 600 \text{ MPa}$$

Problema 19

1) Els punts *a*, *b*, *c* i *d* pertanyen a la superfície exterior del mur i no hi ha forces de superfície tangents; per tant, la direcció normal a la superfície, en cada punt, és principal.

També ho és la direcció 3 (=3*) perquè es tracta de deformació plana i, en conseqüència, també ho és la perpendicular a ambdues.

La tensió principal en la direcció 3* és el valor de σ_{33} en cada punt, donada a l'enunciat.

La tensió principal en la direcció normal a la superfície exterior (2*) és el mòdul de la força de superfície \vec{f} en cada punt, donada en l'enunciat.

Finalment, el valor de la tensió principal en la direcció tangent a la superfície exterior (1*) la deduïm de la llei de Hooke, imposant la condició de deformació plana:



$$\varepsilon_{3*} = 0 = \frac{1}{E}(\sigma_{3*} - \nu(\sigma_{1*} + \sigma_{2*})) \Rightarrow \sigma_{3*} = \nu(\sigma_{1*} + \sigma_{2*}) \Rightarrow \sigma_{1*} = \frac{\sigma_{3*}}{\nu} - \sigma_{2*}$$

2)

$$[\sigma]_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma]_b = \begin{bmatrix} 2,1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0,41 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

$$[\sigma]_c = \begin{bmatrix} 32,1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 6,4 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2 \quad [\sigma]_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & -9,6 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

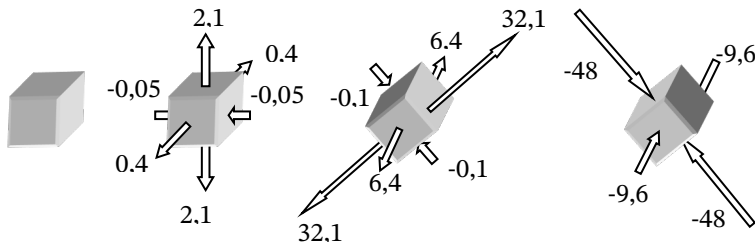
3) Els components del tensor tensió corresponen a les tensions normal i tangencial que actuen sobre els plans de referència. En el cas dels plans principals, les tensions tangencials són nul·les i les normals són les extremes (N/mm²):

punt *a* (no hi ha tensió)

punt *b*

punt *c*

punt *d*



4) El tensor tensió del punt *a* és nul. El del punt *b* ja està expressat en els eixos 1-2-3, només reordenant-los:

$$[\sigma]_b = \begin{bmatrix} -0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 2,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,41 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Els tensors dels punts *c* i *d* s'han de canviar d'eix. Es tracta d'eixos a 45° de les principals I i III; per tant, les components tangencials són els màximes i les normals són iguals i de valor la mitjana de les principals:

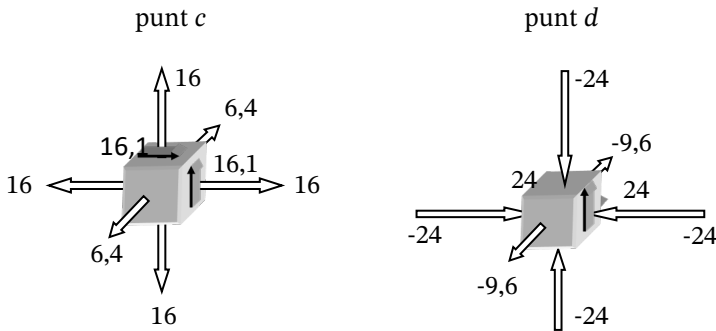
$$[\sigma]_c = \begin{bmatrix} 16 & 16,1 & 0 \\ 16,1 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 6,4 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{32,1 - (-0,1)}{2} = 16,1 \text{ N/mm}^2; \sigma = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{32,1 + (-0,1)}{2} = 16 \text{ N/mm}^2$$

$$[\sigma]_d = \begin{bmatrix} -24 & 24 & 0 \\ 24 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -9,6 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{0 - (-48)}{2} = 24 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma = \frac{0 + (-48)}{2} = -24 \text{ N/mm}^2$$

5) Els punts *a* i *b* ja estan exposats més amunt. Els punts *c* i *d*, en els eixos 1-2-3, presenten components tangencials que, pel fet d'estar a 45° dels principals, corresponen a les màximes.

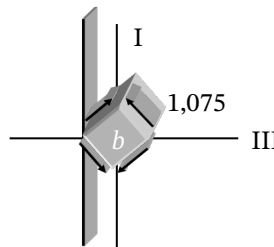


6) En el cas dels punts *c* i *d*, ja s'ha respost en l'apartat anterior.

Per al punt *b*:

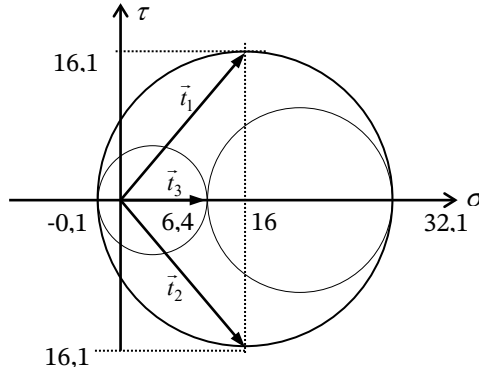
$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{2,1 - (-0,05)}{2} = 1,075 \text{ N/mm}^2$$

La $\tau_{m\acute{a}x}$ sempre té el sentit de III cap a I.





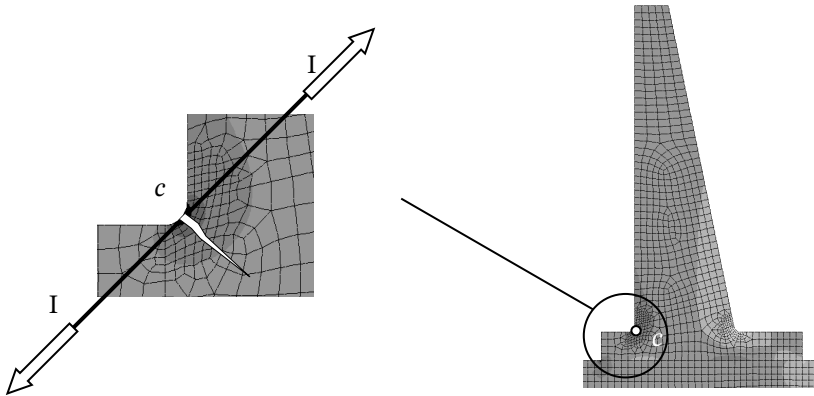
7) Punt *c*



8) Si el material falla fràgilment a tracció, serà degut a la màxima tensió normal; per tant,

$$\sigma_I = 32,1 \text{ N/mm}^2 \text{ en el punt } c.$$

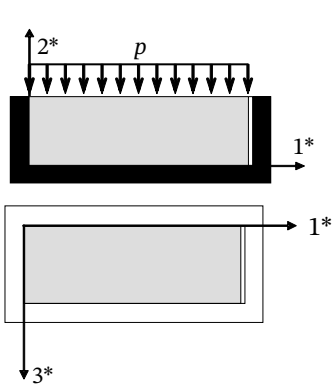
9) El material fallarà per separació (despreniment) dels plans on actua la tensió normal σ_I (en el punt *c*):



$$10) \gamma_S = 1,5 \leq \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_e}{\sigma_I} = \frac{\sigma_e}{32,1} \Rightarrow \sigma_e \geq 1,5 \cdot 32,1 = 48,15 \text{ N/mm}^2$$

Problema 20

1) Fricció nul·la; per tant, no hi ha tensions tangencials. Les arestes del prisma són direccions principals. No hi ha forces de volum; per tant, l'estat de tensió és constant. Les parets de la cavitat són rígides; per tant, la deformació és nul·la en aquelles direccions en què s'impedeixi totalment el moviment (direcció 1). Les tensions seran nul·les en les direccions normals a les superfícies lliures de càrrega (direcció 1).



$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1^*} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3^*} \end{bmatrix}$$

2) Llei de Hooke:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1^*} &= \frac{-\nu}{E}(-p + \sigma_{3^*}) & \varepsilon_{1^*} &= \frac{-\nu}{E}(-p - \nu p) = \frac{p}{E}\nu(1 + \nu) \\ \varepsilon_{2^*} &= \frac{1}{E}(-p - \nu\sigma_{3^*}) & \varepsilon_{2^*} &= \frac{1}{E}(-p + \nu^2 p) = \frac{p}{E}(\nu^2 - 1) \\ 0 &= \frac{1}{E}(\sigma_{3^*} - \nu(-p)) \rightarrow \sigma_{3^*} = -\nu p \end{aligned} \right\}$$

$$[\varepsilon] = \frac{p}{E} \begin{bmatrix} \nu(1 + \nu) & 0 & 0 \\ 0 & (\nu^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma] = p \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

3) Si hi ha contacte $\varepsilon_{1^*} = \frac{1}{50} = 0,02$; per tant,

$$p_c = \frac{E\varepsilon_{1^*}}{\nu(1 + \nu)} = \frac{E \cdot 0,02}{0,4(1 + 0,4)} = \frac{E}{28} = 17,86 \text{ N/mm}^2$$

El descens de la cara superior és $\Delta h = h_0 \cdot \varepsilon_{2^*} = h_0 \cdot \frac{p_c}{E}(\nu^2 - 1) = 20 \cdot (-0,03) = 0,6 \text{ mm}$

4) Per a $p > p_c$ la deformació $\varepsilon_{1^*} = 0,02$. Així, tenim:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{1^*} & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3^*} \end{bmatrix}$$



5) Substituint $p = 2 \cdot p_c$ i aplicant la llei de Hooke:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1^*} &= 0,02 = \frac{1}{E}(\sigma_{1^*} - \nu(2p_c + \sigma_{3^*})) \\ \varepsilon_{2^*} &= \frac{1}{E}(-2p_c - \nu(\sigma_{1^*} + \sigma_{3^*})) \\ \varepsilon_{2^*} &= \frac{1}{E}(-2p_c(1-\nu^2) - \nu\sigma_{1^*}(1+\nu)) = -0,0467 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sigma_{1^*} &= \frac{0,02E - \nu 2p_c(1+\nu)}{1-\nu^2} \\ 0 &= \sigma_{3^*} - \nu(-2p_c + \sigma_{1^*}) \rightarrow \sigma_{3^*} = \nu(\sigma_{1^*} - 2p_c) \end{aligned}$$

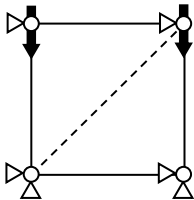
$$\Delta h = h_0 \cdot \varepsilon_{2^*} = -0,933 \text{ mm}$$

6) El tensor de deformació és constant per a tot el prisma; per tant, n'hi ha prou que les funcions d'interpolació (de desplaçaments) siguin lineals.

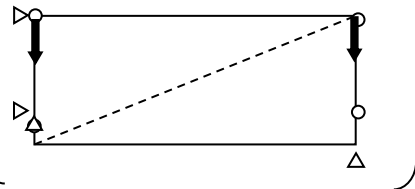
Element sòlid pla (2D) de tres o de quatre nodes, amb dos graus de llibertat per node.

Es pot modelar el pla 2*-3* en tensió plana, o bé el pla 1*-3* en deformació plana.

7) Opció 1: pla 2*-3* (tensió plana) un element rectangular (o dos de triangulars)



Opció 2: pla 1*-3* (deformació plana) un element rectangular (o dos de triangulars)



8 i 9) Sistema general: $\{P_{EG}\} = [K_{EG}]\{u_{EG}\}$, vuit graus de llibertat

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & & & & & \\ & k_{22} & & & & & & \\ & & \dots & & & & & \\ & & & K_{EG} & & & & \\ & & & & \dots & & & \\ & & & & & \dots & & \\ & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & k_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix}$$



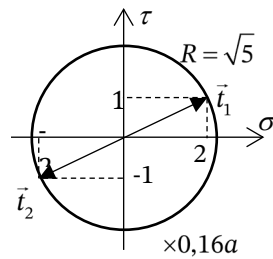
Troblem l'estat de tensió a través de les relacions elàstiques de Lamé $[\sigma] = \lambda \varepsilon_v [I] + 2G[\varepsilon]$, on

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 \text{ y } G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80.000 \text{ N/mm}^2$$

$$[\sigma] = 2G[\varepsilon] = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 0,16a \rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 0,16a$$

per la qual cosa $\tau_{\max} = 0,16a\sqrt{5} = \tau_{\text{lim}} / \gamma_S$

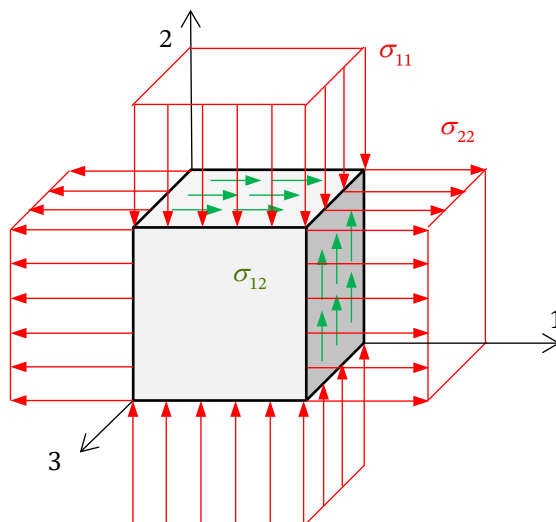
$$a = \frac{\tau_{\text{lim}}}{\gamma_S \cdot 0,16\sqrt{5}} = 100$$



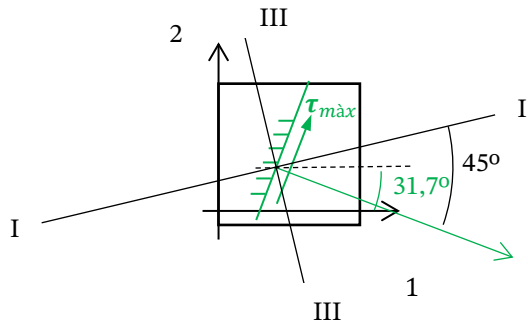
per a qualsevol partícula del medi, perquè l'estat de tensió és uniforme.

3) Per a $\gamma_S = 1 \rightarrow \tau_{\max} = \tau_{\text{lim}} \rightarrow a = 150$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 24$$

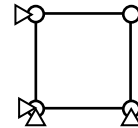


- 4) Dels cercles de Mohr, la τ_{\max} positiva actua en el pla de normal formant un angle $\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} 2 = 31,7^\circ$ en sentit horari respecte a l'eix 1.



- 5) Les direccions I i III sempre estan a 45° de la normal en el pla on actua τ_{\max} .

- 6) Elasticitat plana \rightarrow 2D.
 Deformació uniforme \rightarrow 1 únic element de grau 1.
 Enllaços d'estabilitat per no tenir moviments rígids (o doble simetria).
 Forces de superfície il·lustrades en 3.
 $\dim[K_{EG}] = 8$
 $\dim[K_E] = 8 - 4 = 4$



Problema 22

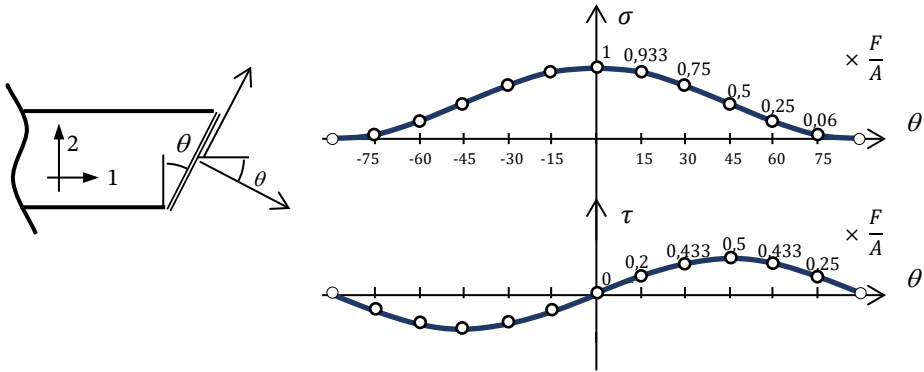
- 1) Es tracta d'un esforç de tracció uniaxial; per tant:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} F/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2 \rightarrow \text{les components intrínseques:}$$

$$\sigma = \vec{n}^T [\sigma] \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{F}{A} \cos^2 \theta$$

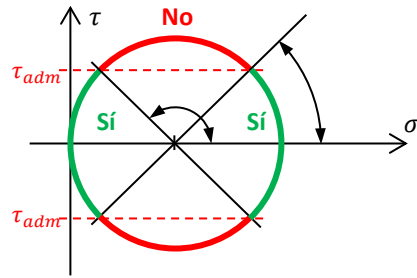
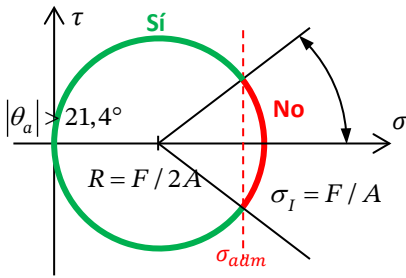
$$\tau = \vec{n}_\perp^T [\sigma] \vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{F}{A} \cos \theta \sin \theta$$

$$\vec{n}_\perp = \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$



2) Condició a) $\sigma \leq \sigma_{adm}$

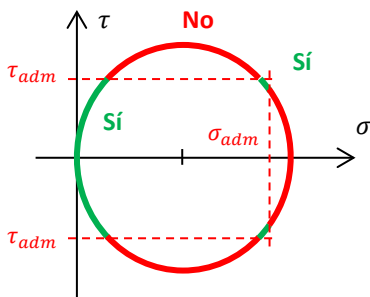
Condició b) $\tau \leq \tau_{adm}$



$$|2\theta_a| > a \cos\left(\frac{\sigma_{adm} - R}{R}\right)$$

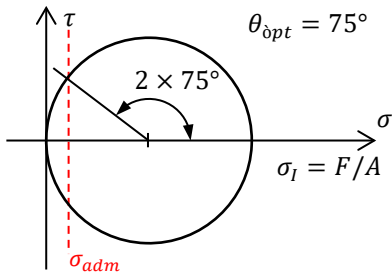
$$|2\theta_b| < a \sin\left(\frac{\tau_{adm}}{R}\right) \text{ o } |2\theta_b| > 180^\circ - a \sin\left(\frac{\tau_{adm}}{R}\right)$$

Condició c) $\sigma \leq \sigma_{adm}$ y $\tau \leq \tau_{adm}$



$$21,4^\circ < |\theta_b| < 34,5^\circ \text{ o } |\theta_b| > 55,5^\circ$$

3) Condició a) $\sigma \leq \sigma_{adm}$

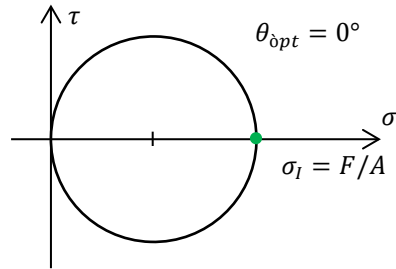


$$\sigma_I = \sigma_{adm} / \cos^2 75^\circ$$

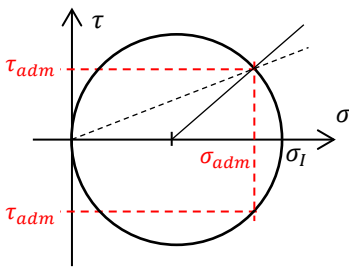
$$F = \sigma_I \cdot A = 77,6 \text{ kN}$$

Condició b) $\tau \leq \tau_{adm}$

Per a $\theta_{opt} = 0^\circ$ la τ val sempre 0.
La força podria valer ∞ .



Condició c) $\sigma \leq \sigma_{adm}$ y $\tau \leq \tau_{adm}$

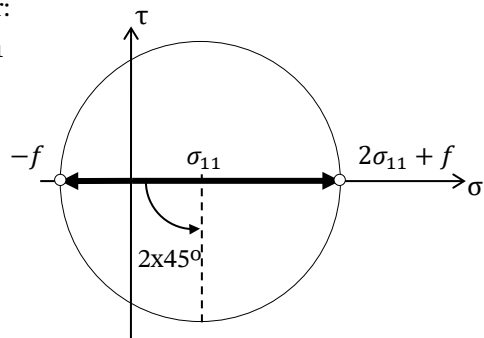
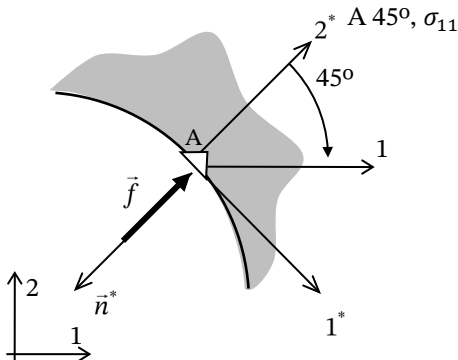


$$|\theta_{opt}| = \tan^{-1} \frac{\tau_{adm}}{\sigma_{adm}} = 28,3^\circ$$

$$\sigma_I = \sigma_{adm} / \cos^2 28,3^\circ$$

Problema 23

1) Gràficament, amb els cercles de Mohr:



El radi del cercle és: $R = \sigma_{11} + f$

Les tensions principals són:

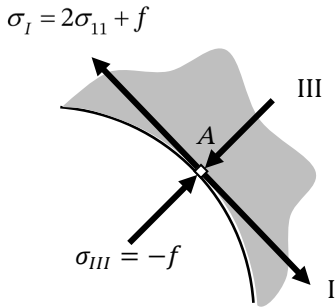
$$\sigma_I = \sigma_{1^*} = 2\sigma_{11} + f$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{3^*} = 0$$

$$\sigma_{III} = \sigma_{2^*} = -f$$

(Tensió plana \rightarrow

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{3^*} = 0)$$



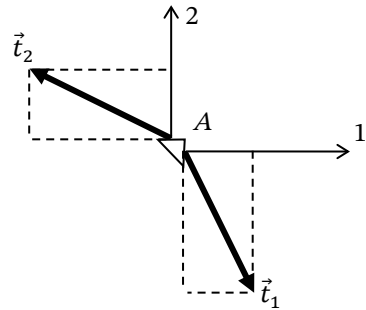
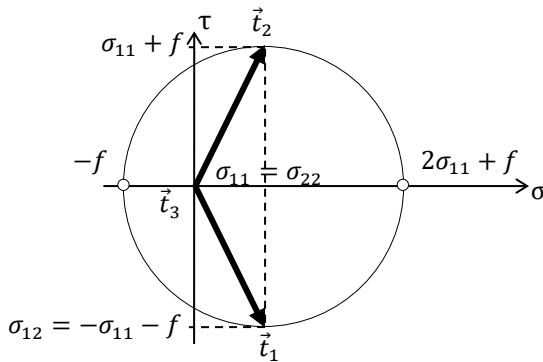
O, analíticament, a la base 1*, 2*, 3*:

$$\sigma_{11} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right\} \begin{bmatrix} \sigma_{1^*} & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\sigma_{1^*} - f}{2} \rightarrow \sigma_{1^*} = 2\sigma_{11} + f = 125 \text{ N/mm}^2$$

2) Dels cercles de Mohr se n'extreu que

$$\sigma_{22} = \sigma_{11} \text{ i}$$

$$\sigma_{12} = -\text{radi} = -\sigma_{11} - f = \tau_{\text{màx}}$$



O, analíticament,

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f/\sqrt{2} \\ f/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_{12} = -\sigma_{11} - f = -75 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_{22} = \sigma_{11}$$



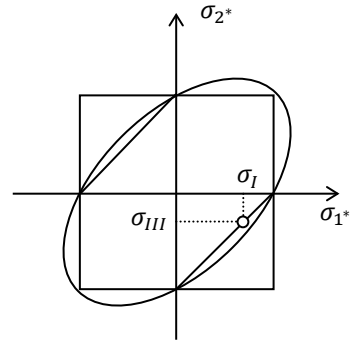
- 3) Els vectors que contenen la τ_{\max} són els mateixos \vec{t}_1 i \vec{t}_2 , perquè actuen sobre els plans a 45° d'I i III.

- 4) Utilitzant el criteri de Tresca-Guest:

$$\gamma_{seg} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_e}{2\sigma_{11} + 2f} = 1$$

Utilitzant el criteri de Von Mises:

$$\gamma_{seg} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_e \sqrt{2}}{\sqrt{(2\sigma_{11} + 2f)^2 + (2\sigma_{11} + f)^2 + f^2}} = 1,08$$



- 5) Utilitzant el criteri de Rankine:

$$\gamma_{seg} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_e}{2\sigma_{11} + f} = 1,2$$

- 6) Sí, perquè cal eliminar els moviments de sòlid rígid amb l'objectiu que el sistema tingui una solució única.

Per exemple, caldria fixar un node qualsevol en les dues direccions del pla 1-2 i un segon node de manera que evitis la rotació del conjunt respecte a aquest primer punt fix.

- 7) El mòdul d'elasticitat és homogeni en tota la peça; així, el seu valor només té efecte sobre la magnitud dels desplaçaments i de les deformacions; no té cap efecte sobre la distribució de les tensions, que només depèn de les càrregues exteriors.

Si es doblés el límit elàstic, l'estat tensional de tota la peça seria idèntic, perquè les condicions de contorn no han canviat. Solament es modificaria el coeficient de seguretat, que també es doblaria.

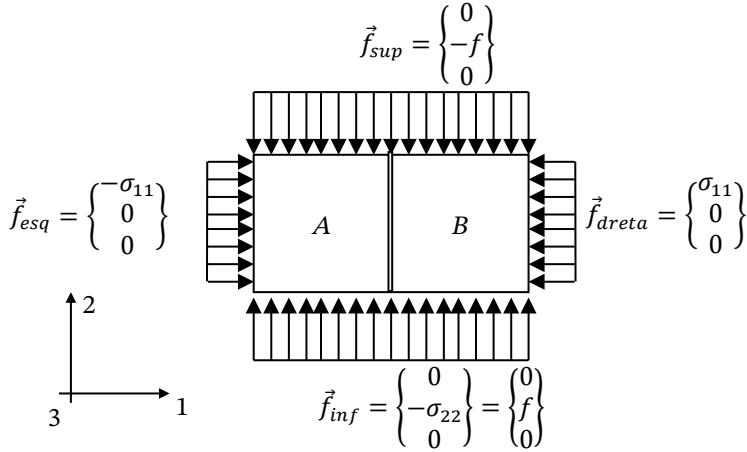
Problema 24

- 1) No hi ha fricció a les parets; d'aquesta manera, les direccions 1, 2 i 3 són principals de tensió.

Com que no hi ha forces de volum, per equilibri, les tensions principals són uniformes en les pròpies direccions i les reaccions a les cares oposades han de ser iguals i en sentit contrari. Les cares frontal i posterior són lliures, de manera que no reben cap restricció $\sigma_{33} = \sigma_{3^*} = 0$.

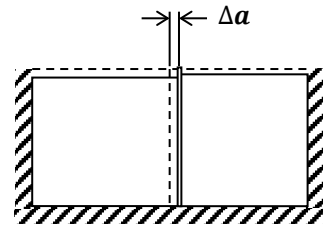


$$[\sigma]_A = [\sigma]_B = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



La pressió lateral apareix per efecte de Poisson; el seu valor σ_{11} s'ha de determinar imposant la condició de deformabilitat en la direcció 1 imposada per les parets laterals. La dimensió total $2a$ no varia; per tant, l'allargament de A de ser igual a l'escurçament de B. Suposant que la làmina es desplaça cap a la dreta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11A} &= \frac{\Delta a}{a} = -\varepsilon_{11B} \\ \frac{\sigma_{11}}{E_A} - \frac{\nu_A}{E_A}(-f) &= -\frac{\sigma_{11}}{E_B} + \frac{\nu_B}{E_B}(-f) \\ \sigma_{11} &= -f \frac{\left(\frac{\nu_A + \nu_B}{E_A + E_B} \right)}{\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B} \right)} = -30 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$



2)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11A} &= \frac{\sigma_{11}}{E_A} + \frac{\nu_A}{E_A} f = 125 \cdot 10^{-6} & \varepsilon_{22A} &= \frac{-f}{E_A} - \frac{\nu_A}{E_A} \sigma_{11} = -3.450 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_{33A} &= -\frac{\nu_A}{E_A} (\sigma_{11} - f) = 1.425 \cdot 10^{-6} & \varepsilon_{11B} &= \dots = -125 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_{22B} &= \frac{-f}{E_B} - \frac{\nu_B}{E_B} \sigma_{11} = 1.775 \cdot 10^{-6} & \varepsilon_{33B} &= -\frac{\nu_B}{E_B} (\sigma_{11} - f) = 475 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$



$$a_1^A = a \cdot (1 + \varepsilon_{11A}) = 10,00125 \text{ mm}$$

$$a_1^B = a \cdot (1 + \varepsilon_{11B}) = 9,99875 \text{ mm}$$

$$a_2^A = a \cdot (1 + \varepsilon_{22A}) = 9,99655 \text{ mm}$$

$$a_2^B = a \cdot (1 + \varepsilon_{11B}) = 9,98225 \text{ mm}$$

$$a_3^A = a \cdot (1 + \varepsilon_{33A}) = 10,01425 \text{ mm}$$

$$a_3^B = a \cdot (1 + \varepsilon_{11B}) = 10,00475 \text{ mm}$$

La làmina mòbil es desplaça:

$$\Delta a = a \cdot \varepsilon_{11A} = a \left(\frac{\sigma_{11}}{E_A} + \frac{\nu_A}{E_A} f \right) = 10 \cdot 0,000125 = 0,00125 \text{ mm}$$

3) $\gamma_S = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}}$

Material A (fràgil): criteri de Rankine

Material B (dúctil): criteri de Tresca o Von Mises

$$\sigma_{eqA} = |\sigma_{III}| = f$$

$$\gamma_{SA} = \frac{\sigma_e^c}{\sigma_{eqA}} = \frac{\sigma_{eA}}{f} = 2,67$$

$$\sigma_{eqB} = |\sigma_I - \sigma_{III}| = f$$

$$\gamma_{SB} = \frac{\sigma_e^t}{\sigma_{eqB}} = \frac{\sigma_{eB}}{f} = 1,33 \text{ o}$$

$$\sigma_{eqB} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[f^2 + \sigma_{11}^2 + (f - \sigma_{11})^2 \right]}$$

$$\gamma_{SB} = 1,49$$

- 6) Amb deformacions uniformes, els desplaçaments varien linealment: (origen de coordenades en l'extrem inferior esquerre del material A)

$$u_1^A = \varepsilon_{11A} \cdot x_1 = 0,000125 \cdot x_1$$

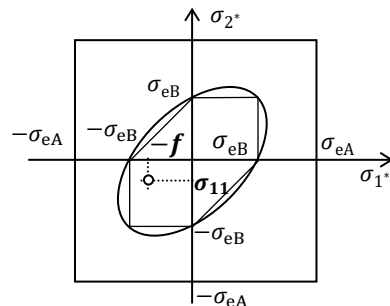
$$u_1^B = -\varepsilon_{11B} \cdot 2a + \varepsilon_{11B} \cdot x_1 = 0,00250 - 0,000125 \cdot x_1$$

$$u_2^A = \varepsilon_{22A} \cdot x_2 = -0,00345 \cdot x_2$$

$$u_2^B = \varepsilon_{22B} \cdot x_2 = 0,001775 \cdot x_2$$

$$u_3^A = \varepsilon_{33A} \cdot x_3 = 0,001425 \cdot x_3$$

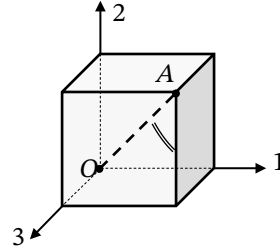
$$u_3^B = \varepsilon_{33B} \cdot x_3 = 0,000475 \cdot x_3$$





Problema 25

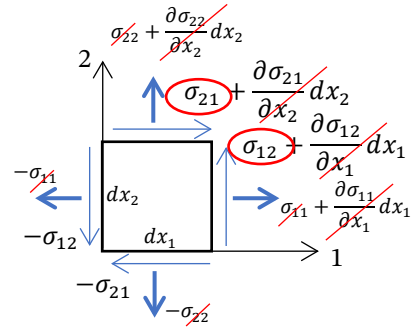
$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= x_1 & 0 \leq x_1 \leq a \\ \sigma_{22} &= 3x_1 - 2x_2 & 0 \leq x_2 \leq a \\ \sigma_{33} &= -x_3 & 0 \leq x_3 \leq a \\ \sigma_{12} &= 2x_1 - x_2 & \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0 & \end{aligned}$$



- 1) La matriu del tensor tensió és sempre simètrica perquè s'ha de complir l'equilibri de moments (o el teorema del moment cinètic) aplicat a qualsevol dV . Prenent un dV paral·lelepípedic orientat segons els eixos de referència, tenim, per a la suma de moments resultants respecte a l'origen en direcció 3, que els termes σ_{ii} estan equilibrats, i, eliminant els diferencials d'ordre superior, queda:

$$dx_1 \cdot \sigma_{12} \cdot (dx_2 dx_3) - dx_2 \cdot \sigma_{21} \cdot (dx_1 dx_3) = 0$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$



- 2) La variació de longitud de la línia OA la trobem integrant les variacions infinitesimals

$$\Delta l_{OA} = \int_0^A \varepsilon_{OA} dl_{OA}, \text{ on } \varepsilon_{OA} = \bar{N}_{OA}^T [\varepsilon] \bar{N}_{OA}$$

Aplicant la llei de Hooke i tenint en compte que en la línia OA :

$$x_1 = x_2 = x_3 \rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & 0 \\ x_1 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 \end{bmatrix}, \text{ tenim que el tensor deformació és el següent:}$$

$$[\varepsilon] = \frac{x_1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 1+\nu & 0 \\ 1+\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-2\nu \end{bmatrix}$$

D'altra banda, $\vec{N}_{OA} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} / \sqrt{3}$ $\varepsilon_{OA} = \frac{x_1}{3E} (1,1,1) [\varepsilon] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{x_1}{E}$

Així, com que $dx_1 = dl_{OA} / \sqrt{3} \rightarrow dl_{OA} = \sqrt{3} dx_1$

$$\Delta l_{OA} = \int_0^a \varepsilon_{OA} \sqrt{3} dx_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2 E}$$

La longitud final és, doncs: $l_f = l_0 + \Delta l_{OA} = \sqrt{3}a + \Delta l_{OA} = \sqrt{3}a \left(1 + \frac{a}{2E} \right)$

3) La variació de l'angle indicat $\Delta\theta$ es troba mitjançant l'expressió:

$$\sin\theta \cdot \Delta\theta = (\varepsilon_{OA} + \varepsilon_{22}) \cos\theta - 2\vec{N}_{OA}^T [\varepsilon] \vec{N}_2$$

$$\sqrt{2/3} \cdot \Delta\theta = \left(\frac{a}{E} + \frac{a}{E} \right) 1 / \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} (1,1,1) \frac{a}{E} [\varepsilon] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

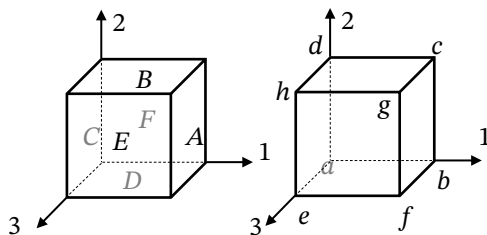
$$\Delta\theta = -\frac{a\sqrt{2}}{E} (1 + \nu)$$

Problema 26

Dimensió del cub $a \times a \times a$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} x_1 & 2x_1 - x_2 & 0 \\ 2x_1 - x_2 & 3x_1 - 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 \end{bmatrix}$$

N/mm²



1) Atès que, per la condició d'equilibri, $\nabla[\sigma] + \vec{b} = 0$, hi ha d'haver necessàriament forces de volum. Si les forces de volum fossin nul·les, no hi podria haver equilibri i les partícules experimentarien una acceleració proporcional a $\nabla[\sigma]$, o bé el tensor donat no seria possible.

2)

Forces de volum $\vec{b} = -\nabla[\sigma] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ N/mm}^3$



Forces de superfície $\vec{f} = [\sigma] \vec{n}$ (N/mm²)

Cara A: $\vec{n} = (1, 0, 0)$ $x_1 = a$ $\vec{f}_A = \begin{Bmatrix} a \\ 2a - x_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

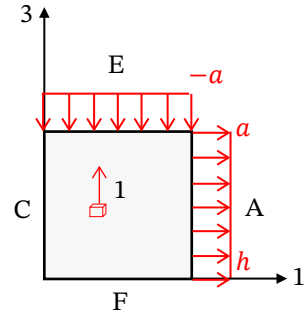
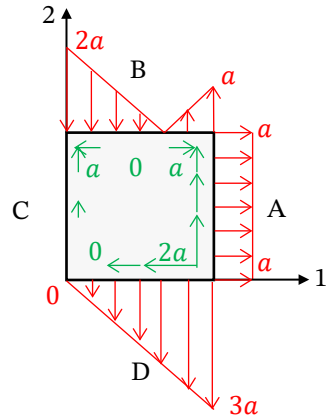
Cara B: $\vec{n} = (0, 1, 0)$ $x_2 = a$ $\vec{f}_B = \begin{Bmatrix} 2x_1 - a \\ 3x_1 - 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$

Cara C: $\vec{n} = (-1, 0, 0)$ $x_1 = 0$ $\vec{f}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Cara D: $\vec{n} = (0, -1, 0)$ $x_2 = 0$ $\vec{f}_D = \begin{Bmatrix} -2x_1 \\ -3x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Cara E: $\vec{n} = (0, 0, 1)$ $x_3 = a$ $\vec{f}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{Bmatrix}$

Cara F: $\vec{n} = (0, 0, -1)$ $x_3 = 0$ $\vec{f}_F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

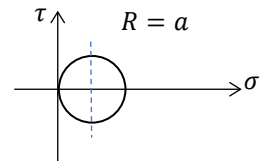


3)

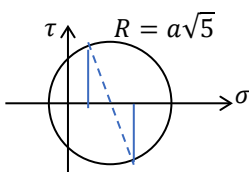
Arestes del pla $x_3 = 0$:

a) (tensió nul·la)

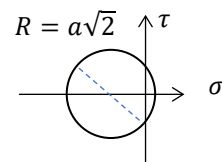
c)



b)



d)





$$[\sigma_a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \quad [\sigma_b] = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ 2a & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma_c] = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma_d] = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -a & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les arestes del pla $x_3 = a$: e, f, g i h tenen els mateixos cercles, però incorporen la tensió principal $\sigma_{33} = -a$:

$$[\sigma_e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \quad [\sigma_f] = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ 2a & 3a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \quad [\sigma_g] = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \quad [\sigma_h] = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -a & -2a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

4) A la vista dels cercles, la τ_{\max} es produirà en el punt f :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{a(2 + \sqrt{5}) - (-a)}{2} = 2,62a$$

$$\sigma_e = 1,5 \cdot 2\tau_{\max} = 7,86a$$

3) Fallaria amb la mateixa probabilitat en qualsevol punt de l'aresta $b-f$, on

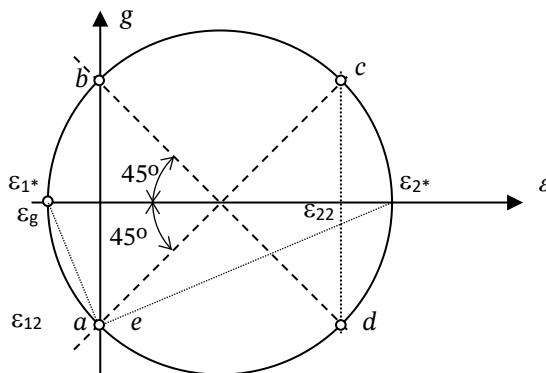
$$\sigma_I = a(2 + \sqrt{5}) = 4,24h$$

$$\sigma_e = 1,5 \cdot \sigma_I = 1,5 \cdot a(2 + \sqrt{5}) = 6,35h$$

Problema 27

1) (Opció 1: gràficament)

Del cercle de Mohr de deformacions: $\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_{12}} = \tan 22,5 \rightarrow \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_g}{\tan 22,5}$ y $\varepsilon_{22} = 2\varepsilon_{12}$



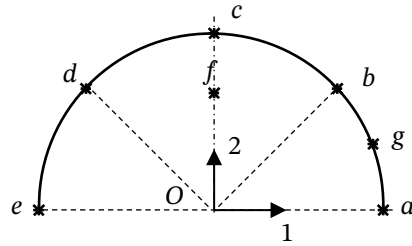


(Opció 2: analíticament)

Prenent els eixos de referència

indicats, tenim $\varepsilon_{11} = 0$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$



$$\varepsilon_b = \vec{N}_b^T [\varepsilon] \vec{N}_b = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \varepsilon_{12} + \frac{\varepsilon_{22}}{2} = 0 \rightarrow \varepsilon_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{2}$$

$$\varepsilon_g = \vec{N}_g^T [\varepsilon] \vec{N}_g = \begin{pmatrix} \cos 22,5 & \sin 22,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & -2\varepsilon_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 22,5 \\ \sin 22,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{6,24 - 6,25}{6,25}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_g \sin 22,5 (\sin 22,5 - \cos 22,5) = -3.863 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_{22} = 7.725 \cdot 10^{-6}$$

Punt	Distància a final (m)
a	6,25
b	6,25
c	-
d	-
e	-
f	-
g	6,24

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{22}$$

$$\varepsilon_d = \vec{N}_d^T [\varepsilon] \vec{N}_d = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \varepsilon_{22}$$

$$\rightarrow l_c = l_d = 6,25 \cdot (1 + \varepsilon_{22}) = 6,298 \text{ m}$$

$$\varepsilon_e = 0 \rightarrow l_e = 6,25 \text{ m}$$

$$\rightarrow l_f = 6,25 \cdot (1 + \varepsilon_{22}) = 4,258 \text{ m}$$

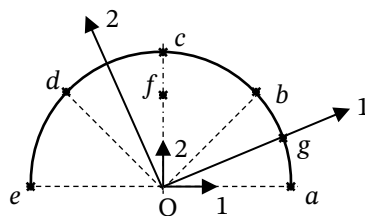
(Opció 1: gràficament)

Dels cercles de Mohr dibuixats anteriorment se n'extreu que

$$\varepsilon_{1^*} = \varepsilon_g$$

i

$$\varepsilon_{2^*} = \varepsilon_{22} - \varepsilon_g = 9.325 \cdot 10^{-6}$$



Les posicions extremes corresponen a la g i a la seva perpendicular 2^* , i les longituds extremes són:

$$l_{1^*} = l_g = 6,24 \text{ m}$$

$$l_{2^*} = 6,25 \cdot (1 + \varepsilon_{2^*}) = 6,308 \text{ m}$$

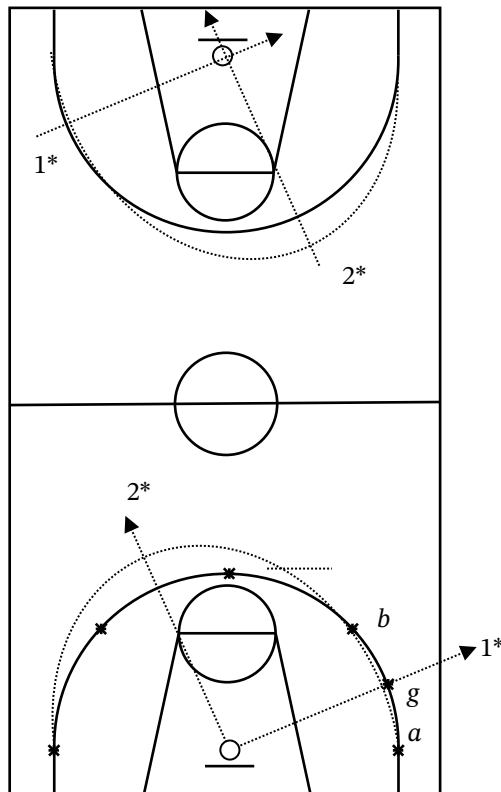
(Opció 2: analíticament)

Troba els valors propis de $[\varepsilon] : [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1^*} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2^*} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$ s'obtenen els valors

anteriors.

3) i 4) La pèrdua de perpendicularitat entre 1 és ($^{\circ}$), havent obtingut ε_{12} dels cercles de Mohr:

$$\Delta\theta_{12} = -2\varepsilon_{12} \text{ (rad)} \times 180/\pi = 0,44^{\circ}$$





- 5) Com que es tracta d'un cas evident de tensió plana (la pista és una superfície exterior lliure de càrregues),

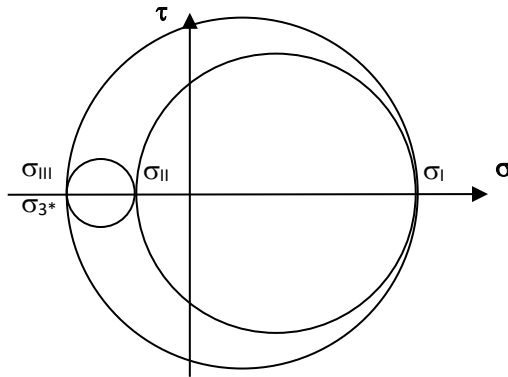
$$\sigma_{3^*} = 0.$$

$$\varepsilon_1 E = \sigma_{1^*} - \nu \sigma_{2^*}$$

$$\rightarrow \sigma_{1^*} = 25,4 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_2 E = \sigma_{2^*} - \nu \sigma_{1^*}$$

$$\rightarrow \sigma_{2^*} = 103 \text{ MPa}$$



Utilitzant el criteri de Tresca, la tensió equivalent és igual a:

$$\sigma_{eq} = \sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_I = 103 \text{ MPa}$$

$$\gamma_S = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = 1,06 \quad \text{No s'han produït deformacions permanents.}$$

- 6) Afegint un estat uniaxial de compressió en direcció 3* $\sigma_{3^*} = -1 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_{eq} = \sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_I = 104 \text{ MPa}$$

$$\gamma_S = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = 1,05$$

La petjada de la maquinària de manteniment no altera significativament la situació.

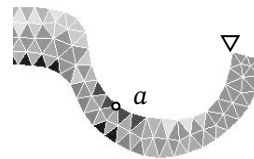
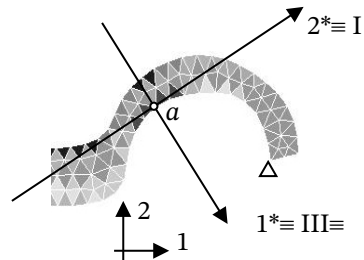
- 7) Com que les deformacions longitudinals de les direccions **a** i **b** són iguals, **la seva bisectriu és principal** i, per tant, també ho és la seva perpendicular. Així, les direccions principals ja són conegudes, sense necessitat d'efectuar cap mesurament ni cap càlcul. Si, a més, mesurem el valor de deformació d'aquestes bisectrius, sabem automàticament quina correspon a la més pròxima i quina a la més llunyana, perquè les deformacions principals han de tenir signes oposats necessàriament (v. cercles de Mohr).

Així, podem informar l'entrenador que **la posició g** és la més pròxima a la cistella, i la seva perpendicular és la més allunyada.

Problema 28

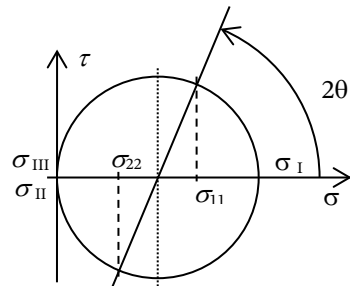
a) Com que és una peça plana de poc gruix i carregada en el seu propi pla, es tracta d'un cas de tensió plana. A més, com que és un punt de contorn lliure (sense càrrega) de la peça, no hi ha cap component de tensió en direcció normal al contorn i, per aquest motiu, l'estat de tensió és uniaxial. Les direccions principals són:

- 1*: direcció perpendicular al contorn, perquè té tensió nul·la.
- 3*: direcció perpendicular al pla del dibuix, per ser un cas de tensió plana.
- 2*: direcció perpendicular a 1* i 3*, és a dir, la tangent al contorn.
- Nota: Les numeracions 1*, 2* i 3* són arbitràries.



b) i 3) (Opció 1: gràficament)

En un estat uniaxial de tracció (tensions positives), el cercle de Mohr és del tipus següent:



Se'n dedueix gràficament que:

$$\sigma_I = 2 \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \sigma_{11} + \sigma_{22} = 40 \text{ N/mm}^2$$

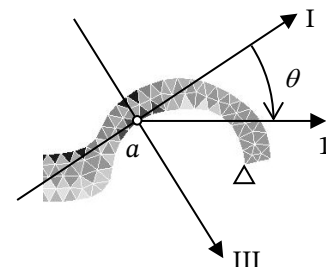
$$\cos 2\theta = \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2}{(\sigma_{11} + \sigma_{22})/2} = 0,5$$

$$\theta = 30^\circ$$

(Opció 1: analíticament)

$$[\sigma]_{1,2} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma]_{1^*,2^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2^*} \end{bmatrix}$$



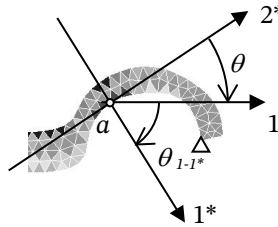


Sabent, per exemple, que el determinant i la traça dels tensors 2×2 són invariables:

$$\sigma_{12} = \sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} = 17,3 \text{ N/mm}^2 \quad \text{y} \quad \sigma_{2^*} = \sigma_{11} + \sigma_{22} = 40 \text{ N/mm}^2$$

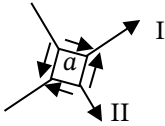
$$\text{Així: } \tan \theta_{1-1^*} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{2^*}} = -1,732$$

$$\theta = -60^\circ$$



4)

En el pla 1-2:



$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{40 - 0}{2} = 20 \text{ N/mm}^2$$

5)

a) Per què la solució tensional dins de cada element finit és uniforme?

Perquè la funció d'interpolació de desplaçaments és un polinomi de grau 1; per tant, quan es deriva respecte a qualsevol direcció per trobar la deformació, dona una constant. La tensió també serà constant, ja que també en depèn linealment.

b) És apropiat el tipus d'element finit utilitzat? Feu una proposta raonada de dues alternatives.

El tipus d'element finit "triangular de 3 nodes" no és gaire precís, com es dedueix de la resposta anterior. Les alternatives poden consistir a augmentar l'ordre de la funció d'interpolació, per exemple, utilitzant l'element triangular de 6 nodes o el quadrilàter de 8.

D'altra banda, com que els elements aproximen la geometria del contorn amb la mateixa funció, les funcions parabòliques ajustarien la geometria corba de la peça amb més precisió.

c) És apropiada la grandària dels elements? Per què?

A la vista de la il·lustració, s'intueix que la mida no és apropiada. Els elements són massa grans, perquè s'aprecia una gran diferència entre el resultat d'un element i el dels seus adjacents. La solució probablement no es mantindria estable en un refinament. En principi, s'hauria de refinar la malla en els punts d'interès (no singulars) fins a assegurar l'estabilitat numèrica de la solució.



- d) No. La restricció de moviment en les puntes de la pinça equival a tenir un objecte pinçat infinitament rígid. Si no és així, caldria incorporar les característiques de l'objecte pinçat en el model.

En el cas ideal que el cotó fos infinitament deformable, no oposaria resistència en comparació amb la força que es requereix per deformar la pinça i n'hi hauria prou d'eliminar la restricció de les puntes.

D'altra banda, l'enunciat assenyala que la pinça és simètrica en geometria i càrrega; per tant, es podria haver simplificat el problema modelant-ne només una de les meitats, incorporant les condicions cinemàtiques de simetria als nodes situats en el pla de simetria.

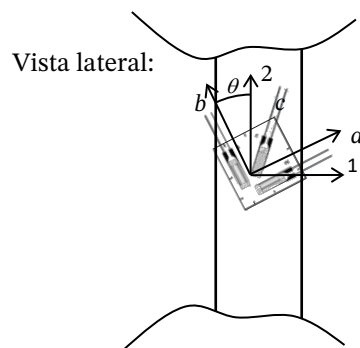
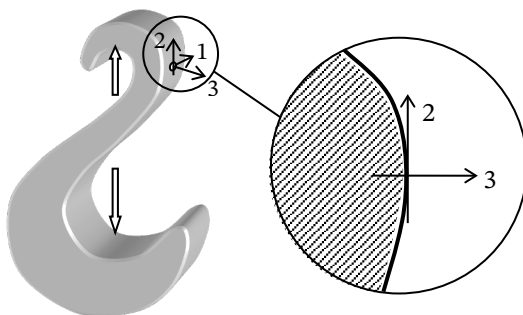
- e) $500 \text{ nodes} \times 2 \text{ graus de llibertat/node} - 4 \text{ restriccions} = 1.000 - 4 = 996$

- f) El vector de càrregues exteriors té 1.000 components, 994 dels quals són exactament zero, pel fet de no tenir cap càrrega externa aplicada (ni accions ni reaccions).

Amb els 2 graus de llibertat corresponents a les forces d'accionament, hi hauria aquestes dues forces en sentit oposat, respectivament.

Amb els 4 graus de llibertat restringits, apareixerien les corresponents reaccions, de les quals, les dels nodes de les puntes corresponen a les reaccions de pinçament; en el node del pla de simetria (a l'esquerra), la reacció vertical ha de resultar nul·la (donada la simetria del problema) i, com que no hi ha cap força horitzontal, la reacció horitzontal hauria de resultar també nul·la.

Problema 29



Dades: ε_a ε_b ($\varepsilon_c = \text{failed}$)



- 1) Es tracta d'una peça plana de poc gruix, carregada en el seu propi pla; per tant, la tensió perpendicular al pla és $\sigma_{11} = 0$.

D'altra banda, el punt d'estudi està situat en la superfície del contorn exterior de la peça, lliure de càrrega; per tant, la tensió perpendicular a la superfície és $\sigma_{33} = 0$.

Així, es tracta d'un cas de tensió uniaxial en direcció 2.

- 2) Si expressem la matriu del tensor tensió en la base 1-2-3, tenim:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} -\nu\varepsilon_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

A partir d'aquí, les lectures de les galgues es relacionen amb aquests tensors amb dues equacions:

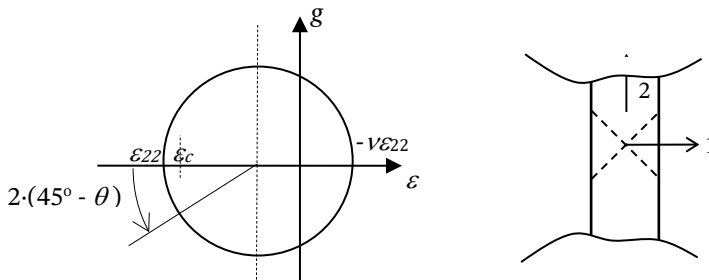
$$\varepsilon_a = (\cos\theta \quad \sin\theta \quad 0) \begin{bmatrix} -\nu\varepsilon_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_b = (-\sin\theta \quad \cos\theta \quad 0) \begin{bmatrix} -\nu\varepsilon_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

on només tenim dues incògnites, θ i ε_{22} . Les deformacions màxima i mínima són ε_{22} i $-\nu\varepsilon_{22}$

o bé, amb els invariants: $\varepsilon_{22} - \nu\varepsilon_{22} = \varepsilon_a + \varepsilon_b \rightarrow \varepsilon_{22} = (\varepsilon_a + \varepsilon_b) / (1 - \nu)$

- 3)

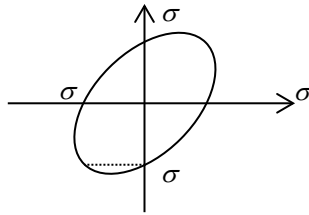


- 4) $\Delta\varphi_{m\acute{a}x} = \pm 2g_{m\acute{a}x} = \pm 2 \frac{-\nu\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}}{2} = \mp \varepsilon_{22}(1 + \nu)$; la presenta qualsevol parella de direccions perpendiculars entre si que estiguin ambdues a 45° de l'eix 2; per exemple, les línies de traç discontinu marcades a la figura anterior.

5)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E\varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ el coeficient de seguretat dona } \gamma_S = \frac{\sigma_e}{\sigma_{22}} = 1.$$

6) Augmentant la tensió σ_{11} ($= \sigma_{1^*}$) (a compressió), obtenim coeficients de seguretat > 1 amb el criteri de Von Mises (punts de la línia discontinua):



7) El màxim coeficient de seguretat es dona quan la tensió equivalent és mínima:

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(0 - \sigma_{II})^2 + (0 - \sigma_e)^2 + (\sigma_{II} - \sigma_e)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_{II}^2 + \sigma_e^2 + (\sigma_{II} - \sigma_e)^2 \right]} = \\ &= \sqrt{\sigma_{II}^2 + \sigma_e^2 - \sigma_{II}\sigma_e} \end{aligned}$$

Si derivem respecte a σ_{II} ($= \sigma_{1^*}$) i igulem a zero:

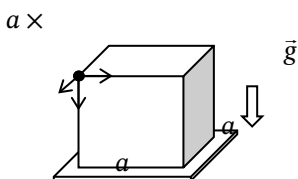
$$\sigma_{eq}' = \frac{2\sigma_{II} - \sigma_e}{2\sqrt{\sigma_{II}^2 + \sigma_e^2 - \sigma_{II}\sigma_e}} = 0$$

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_e}{2} \rightarrow \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_e^2 - \sigma_e^2/4} = \sigma_e\sqrt{3}/2 \rightarrow \gamma_S = \frac{\sigma_e}{\sigma_e\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

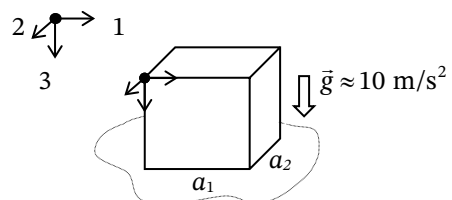
8) En aquest cas, es podria arribar a un estat de compressió hidroestàtica; per tant, $\sigma_{eq} = 0$ i $\gamma_S = \infty$.

Problema 30

Geometria i posició inicial



posició final:





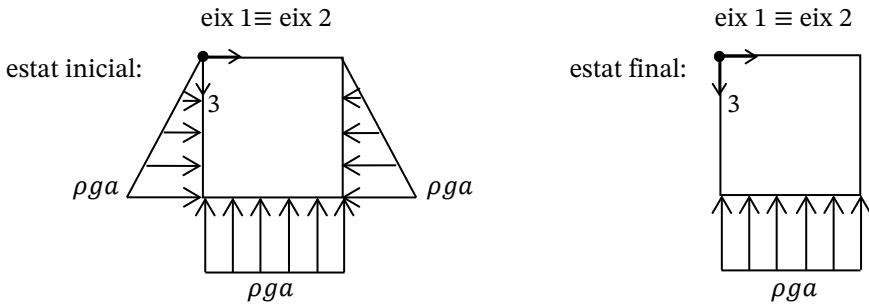
- 1) En la posició inicial, tenim l'estat de tensió hidroestàtica a causa de l'acció gravitatòria:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -\rho g x_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho g x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho g x_3 \end{bmatrix} \quad \text{on} \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3}$$

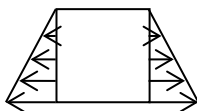
Per tant, les accions externes són $\{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{Bmatrix}$ N/mm³ i les pressions en les cares laterals i en el fons:

lateral i en el fons:

$\vec{f} = [\sigma] \vec{n}$, segons la figura



- 2) L'acció gravitatòria és la mateixa; per tant, les forces de volum també ho són. A la cara inferior, continua havent-hi la mateixa pressió, a equilibrar amb l'acció gravitatòria, però desapareixen les pressions de les parts laterals.
- 3) Les variacions de longitud entre l'estat inicial i el final les podem determinar imposant unes accions que representin la diferència entre tots dos estats, és a dir:



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \rho g x_3 & 0 & 0 \\ 0 & \rho g x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ amb la llei de Hooke, tenim:}$$

$$[\varepsilon] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} (1-\nu)\rho g x_3 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\nu)\rho g x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu\rho g x_3 \end{bmatrix}$$

Les variacions de longitud són:

$$a_1 - a = \int_0^a \varepsilon_{11} dx_1 = \frac{1-\nu}{E} \rho g a^2$$

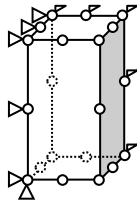
$$a_2 - a = \int_0^a \varepsilon_{33} dx_3 = \int_0^a -2\nu\rho g x_3 dx_3 = \frac{-2\nu}{E} \rho g \frac{a^2}{2}$$

de la segona: $E = \frac{-\nu\rho g a^2}{a_2 - a}$ i, substituint en la primera: $\nu = \frac{a_2 - a}{a_2 - a_1} = 0,4 \rightarrow$

$$E = 0,1 \text{ N/mm}^2$$

- 4) El camp de deformacions és lineal respecte a x_3 ; per tant, el camp de desplaçament serà parabòlic. Prendrem un element de funcions d'interpolació parabòliques. L'estat de tensió canvia en la direcció 3 i hi ha tensió en les direccions 1 i 2; per tant, no es pot simplificar en 2D \rightarrow element 3D.

Característiques: Dos plans de simetria vertical (1-3 i 2-3). Forces de superfície indicades en l'apartat 3. Enllaços de simetria en els plans 1-3 (8 enllaços en la direcció 2) i 2-3 (8 enllaços en la direcció 1) + 1 enllaç d'estabilitat en la direcció 3.



$$\dim[K_{EG}] = 20 \text{ nodes} \times 3 \text{ g. l./node} = 60$$

$$\dim[K_E] = 60 - (8 \times 2 + 1) \text{ enllaços} = 43$$

Problema 31

- 1)
- $$\bar{x} = \bar{x}(\bar{X}, t) \qquad \bar{X} = \bar{X}(\bar{x}, t)$$
- $$u_1 = x_1(1 - e^{-t}) = x_1 - X_1 \quad \rightarrow \quad X_1 = x_1 e^{-t} \quad \rightarrow \quad x_1 = X_1 e^t$$
- $$u_2 = x_2(1 - e^{-t}) = x_2 - X_2 \quad \rightarrow \quad X_2 = x_2 e^t \quad \rightarrow \quad x_2 = X_2 e^{-t}$$
- $$u_3 = 0 \qquad = x_3 - X_3 \quad \rightarrow \quad X_3 = x_3 \quad \rightarrow \quad x_3 = X_3$$

2) $\det[F] = \begin{vmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, sempre és físicament possible

3) $\bar{v}(\bar{X}, t) = \begin{Bmatrix} X_1 e^t \\ -X_2 e^{-t} \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \bar{v}(\bar{x}, t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow [D] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ s}^{-1}$

La velocitat de deformació longitudinal en les direccions de referència de qualsevol punt de l'espai és del $\pm 100\%$ per segon (*dir1*, allargament; *dir2*, escurçament) i la velocitat de deformació transversal és nul·la.



$$4) \quad [C] = [F]^T [F] = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

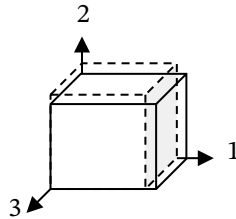
En les direccions de referència no hi ha distorsió angular; són principals. Per tant, la màxima distorsió l'experimentaran les bisectrius ($1'$ i $2'$) de les direccions de referència (1 i 2).

$$\text{Valor l'angle final } f: \cos(f) = \frac{\bar{N}_{1'} [C] \bar{N}_{2'}}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{-e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \frac{e^{-2t} - e^{2t}}{e^{-2t} + e^{2t}}$$

$$\text{on } \bar{N}_{1'} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \bar{N}_{2'} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

La distorsió angular serà, en radians: $f - \frac{\pi}{2}$.

- 5) Per a $t = 0,1$ s, les ràtios d'extensió dels eixos són $\lambda_1 = e^{0,1}$ i $\lambda_2 = e^{-0,1} = 0,9$. Per tant, les longituds finals dels costats són 1,1 mm i 0,9 mm. Els angles es mantenen rectes. i el volum es conserva perquè el determinant jacobini és sempre 1.1.



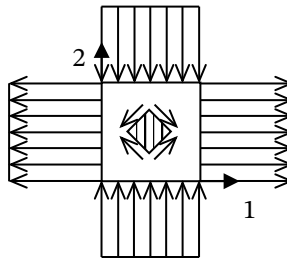
$$6) \quad \bar{u}(\bar{X}, t) = \begin{Bmatrix} X_1(e^t - 1) \\ X_2(e^{-t} - 1) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\varepsilon] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right] = \begin{bmatrix} e^t - 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I, amb les equacions de Lamé: $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}$ $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 96,7 & 0 & 0 \\ 0 & -85,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1,14 \end{bmatrix}$$

Les forces de volum són nul·les: $\nabla[\sigma] + \bar{b} = 0$

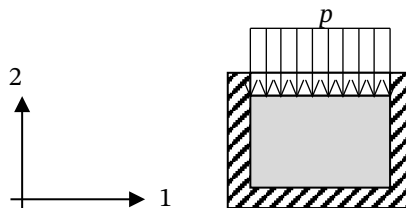
6) $\tau_{\max} = 91 \text{ N/mm}^2$



Problema 32

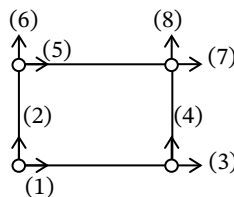
1) Model d'elements finits:

Atès que es tracta d'un cas de **deformació plana**, es pot tractar el problema bidimensionalment amb un element sòlid en 2D, amb 2 graus de llibertat per node (u_1 i u_2).



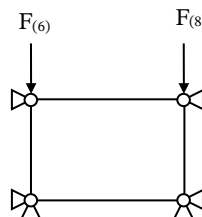
Com que l'estat de tensió/deformació és uniforme en tot el material, n'hi ha prou d'utilitzar **1 únic element d'ordre 1**, és a dir, funcions d'interpolació polinòmiques de grau 1.

Per tant: 1 element, 4 nodes.
El sistema general té
 $4 \times 2 = 8$ graus de llibertat.



Condicions de contorn:
El vector de càrreges nodals té
solament els components
6 i 8 diferents de zero.

Hi ha sis graus de llibertat restringits;
el sistema reduït té $8 - 6 = 2$ graus
de llibertat, concretament el 6 i el 8.



$$\{P_{EG}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{(6)} \\ 0 \\ F_{(8)} \end{Bmatrix}$$



2)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{1^*} & 0 & 0 \\ & -p & 0 \\ & & \sigma_{3^*} \end{bmatrix} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \varepsilon_{2^*} & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\sigma_{1^*}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{3^*} - p) \\ \varepsilon_{2^*} E = -p - \nu(\sigma_{1^*} + \sigma_{3^*}) \\ 0 = \frac{\sigma_{3^*}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{1^*} - p) \end{cases}$$

de les equacions 1 i 3:

$$\sigma_{1^*} = \nu(\sigma_{3^*} - p) \quad \nu\sigma_{1^*} = \nu^2(\sigma_{3^*} - p)$$

$$\sigma_{3^*} = \nu(\sigma_{1^*} - p) \quad \sigma_{3^*} = \nu(\sigma_{1^*} - p)$$

$$\sigma_{3^*}(1 - \nu^2) = -\nu p(1 + \nu)$$

$$\sigma_{1^*} = \sigma_{3^*} = -p \frac{\nu}{1 - \nu}$$

Si σ_{3^*} ha de ser, com a mínim, el 90 % de p , aleshores $\frac{\nu}{1 - \nu} > 0,9 \rightarrow \nu > 0,474$

Si el descens ha de ser inferior al 5 % $|\varepsilon_{2^*}| < 0,05$ (escurçament)

$$-0,05E > -p_{nom} - \nu(\sigma_{1^*} + \sigma_{3^*}) = -p_{nom} \left(1 - 2 \frac{\nu^2}{1 - \nu} \right)$$

$$E > \frac{10}{0,05} \left(1 - 2 \frac{\nu^2}{1 - \nu} \right) = 29,5 \text{ N/mm}^2$$

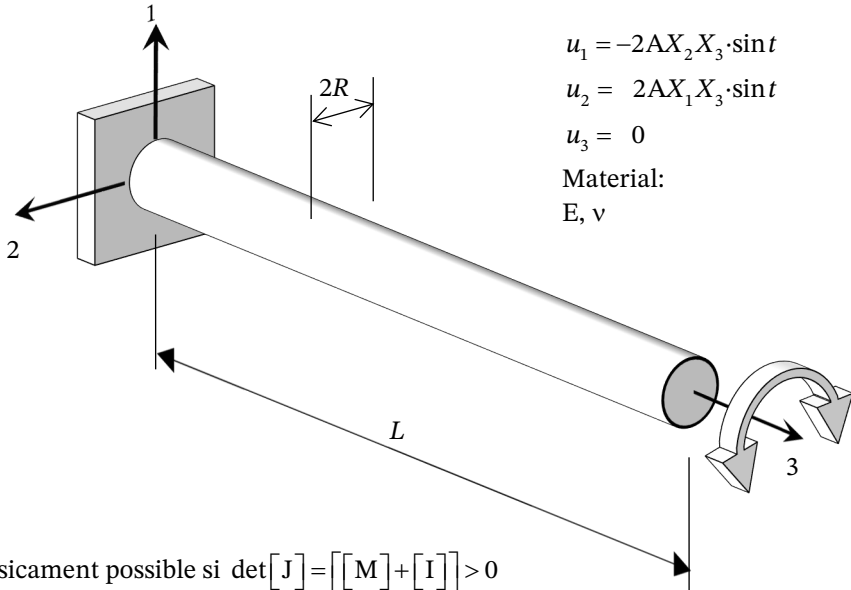
A una pressió $p_{nom} = 10 \text{ N/mm}^2$, les tensions principals valen:

$$\sigma_{1^*} = \sigma_{3^*} = -p \frac{\nu}{1 - \nu} = -9 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_{2^*} = -10 \text{ N/mm}^2$$

La tensió equivalent de Tresca val:

$$\sigma_I - \sigma_{III} = 2 \cdot \sigma_{\max} = 1 \text{ N/mm}^2 > \frac{\sigma_e}{\gamma_s} \quad \sigma_e > 2 \text{ N/mm}^2$$

Problema 33



$$\begin{aligned}
 u_1 &= -2AX_2X_3 \cdot \sin t \\
 u_2 &= 2AX_1X_3 \cdot \sin t \\
 u_3 &= 0 \\
 \text{Material:} \\
 E, \nu
 \end{aligned}$$

- 1) És físicament possible si $\det[\mathbf{J}] = [[\mathbf{M}] + [\mathbf{I}]] > 0$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2AX_3 \sin t & -2AX_2 \sin t \\ 2AX_3 \sin t & 1 & 2AX_1 \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 + 4A^2X_3^2 \sin^2 t > 0$$

- 2) En la descripció lagrangiana, la derivació material es redueix a la derivació parcial respecte a t :

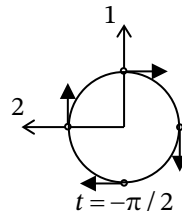
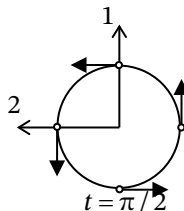
$$\vec{v} = \begin{Bmatrix} -2AX_2X_3 \cdot \cos t \\ 2AX_1X_3 \cdot \cos t \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{a} = \begin{Bmatrix} 2AX_2X_3 \cdot \sin t \\ -2AX_1X_3 \cdot \sin t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$|\vec{a}| = 2AL \sin t \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = 2AX_3 r \sin t$$

on r és la distància del punt al centre de la secció. $|\vec{a}|$ és màxim si X_3 i r són màxims:

$$\begin{aligned}
 r &= \pm R \\
 X_3 &= L \\
 \sin t &= \pm 1
 \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} 2ARL \\ -2ARL \\ 0 \end{Bmatrix}$$





i tenen direcció tangencial.

3)

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2}([\mathbf{M}] + [\mathbf{M}]^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -AX_2 \sin t \\ 0 & 0 & AX_1 \sin t \\ -AX_2 \sin t & AX_1 \sin t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -AX_2 \\ 0 & 0 & AX_1 \\ -AX_2 & AX_1 & 0 \end{bmatrix}$$

les màximes deformacions es produiran quan $\sin t = \pm 1$, és a dir, $t = \pi/2$.

4) Per a $X_2=0$ i $\sin t = +1$:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AX_1 \\ 0 & AX_1 & 0 \end{bmatrix}$$

i, de la llei de Hooke:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2GAX_1 \\ 0 & 2GAX_1 & 0 \end{bmatrix},$$

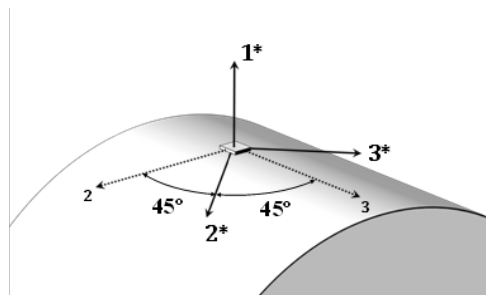
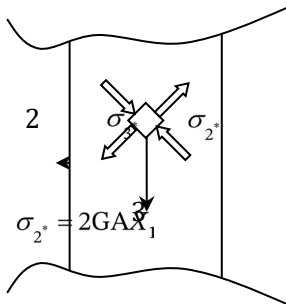
on:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Les tensions principals són $\sigma_{2^*,3^*} = \sigma_{I,III} = \pm 2GAX_1$ i $\sigma_{II} = 0 = \sigma_{1^*} = \sigma_{11}$

$$[\sigma]_{1^*,2^*,3^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2GAX_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2GAX_1 \end{bmatrix}$$

Els valors màxims es donen quan $X_1 = R$, que, per a $\sin t = +1$:

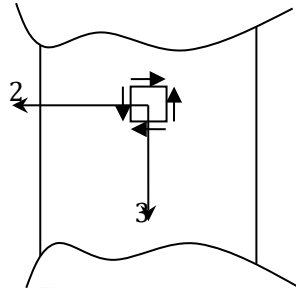


5)

$$|\tau_{m\acute{a}x}| = 2GAR$$

per a $X_1=R$ i

$$\sin t = +1$$



6) Si és fràgil:

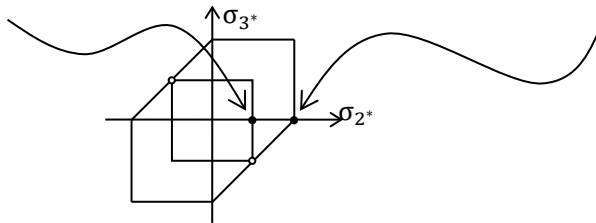
Si és dúctil, segons el criteri de Tresca:

$$\sigma_{eq} = \sigma_I = 2GAR$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_I - \sigma_{III} = 4GAR$$

$$\sigma_e \geq 1,5 \cdot 2GAR = 3GAR$$

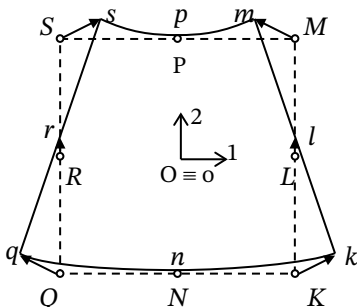
$$\sigma_e \geq 1,5 \cdot 4GAR = 6GAR$$



Problema 34

E (N/mm²)

ν



Punt	X_1	X_2	u_1	u_2
K	1	-1	a	b
L	1	0	0	c
M	1	1	$-a$	b
N	0	-1	0	d
O	0	0	0	0
P	0	1	0	d
Q	-1	-1	$-a$	b
R	-1	0	0	c
S	-1	1	a	b

$$u_1 = AX_1 + BX_2 + CX_1X_2 + DX_1^2 + EX_2^2$$

$$u_2 = FX_1 + GX_2 + HX_1X_2 + IX_1^2 + JX_2^2$$



1) Substituint els valors de desplaçament en les equacions:

$$A=B=D=E=F=G=H=0; \quad C=-a; \quad I=c; \quad J=d; \quad \text{per tant: } \begin{cases} u_1 = -aX_1X_2 \\ u_2 = cX_1^2 + dX_2^2 \end{cases}$$

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right] = \begin{bmatrix} -aX_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2X_2d & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Pel fet de tractar-se d'un cas de tensió plana, $\varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$, donat

$$\varepsilon_{33} = 2X_2d$$

Variacions de longitud dels costats paral·lels a l'eix i :

$$\Delta l = \int_{-1}^1 \varepsilon_{ii} dX_i$$

$$l_{fQK} = 2 + 2a$$

$$l_{fSM} = 2 - 2a$$

$$l_{fQS} = 2 + 0$$

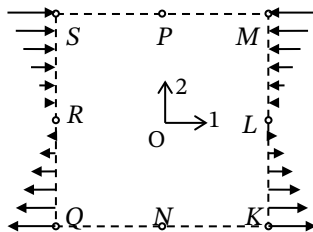
$$l_{fKM} = 2 + 0$$

2) Aplicant la llei de Hooke (o les equacions de Lamé), tenim:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -aEX_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2 \text{ (} E, \text{ mòdul de Young)}$$

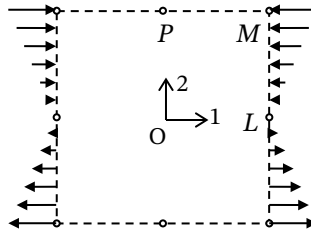
Només hi ha forces de superfície $\vec{f} = [\sigma] \vec{n}$ en els costats verticals QS i KM, variant linealment amb X_2 .

De l'equació d'equilibri, $\vec{b} = -\nabla[\sigma] = 0$

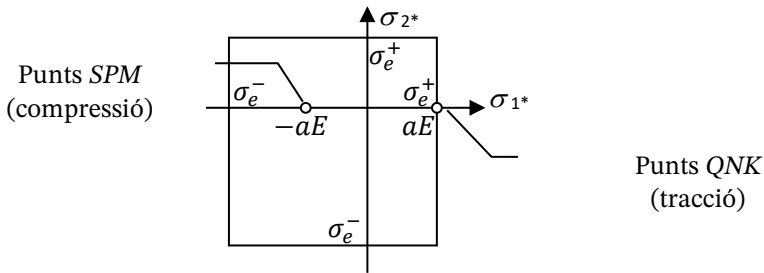


3) Les tensions màximes es produeixen en els punts de X_2 màxims, $\sigma I = aE$ (punts QNK) i $\sigma III = -aE$ (punts SPM). La ruptura es produirà abans a tracció en els punts QNK.

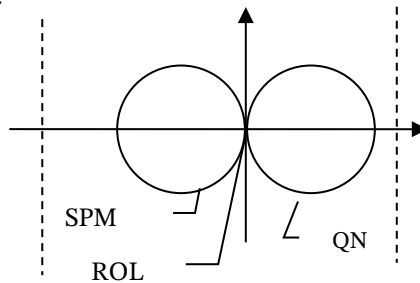
$\gamma_s = \frac{\sigma_e^+}{aE} = 1$; per tant, es produeix la ruptura perpendicularment a 1.



4) Pla de Haigh-Westergaard:

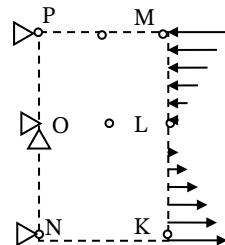


Pla de Mohr:



5) Les funcions de desplaçament són de segon ordre; per tant, s'utilitzarà un element amb nodes intermedis. Simulació 2D en tensió plana. Com que la funció d'interpolació s'ajusta exactament a la solució, només es necessita un element. Es pot utilitzar la simplificació de simetria.

La dimensió del sistema general és de 16×16 , i la del reduït, de 12×12 .

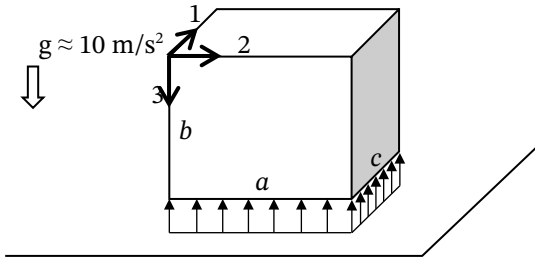




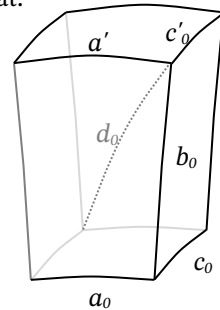
Problema 35

- 1) L'efecte d'un conjunt d'accions sobre un medi elàstic-lineal es pot determinar com la superposició dels efectes de cada acció individual.
- 2) Donada la posició d'equilibri, cal trobar la forma sense càrrega (sense gravetat).

Actuant la gravetat:



Sense gravetat:



La càrrega és exclusivament el pes propi, és a dir, una força de volum en direcció 3: $b_3 = \rho g$.

Donades les condicions de contorn, l'estat de tensió és uniaxial i el tensor tensió queda:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho g x_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{tensor } [\varepsilon] \text{ infinitesimal } X \approx x \rightarrow$$

$$[\varepsilon] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \nu \rho g x_3 & 0 & 0 \\ 0 & \nu \rho g x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho g x_3 \end{bmatrix}$$

Per a $x_3 = 0$ (cara superior), no hi ha deformació; per tant, les longituds a'_0 i c'_0 són iguals a a i c .

Per a $x_3 = b$ (cara inferior), la deformació és uniforme; per tant:

$$\begin{aligned} a &= a_0(1 + \varepsilon_{22}) \rightarrow a_0 = a / (1 + \nu \rho g b / E) & a_0 &= a - 3,2 \cdot 10^{-6} & c_0 &= c - 9,6 \cdot 10^{-6} \\ c &= c_0(1 + \varepsilon_{11}) \rightarrow c_0 = c / (1 + \nu \rho g b / E) \end{aligned}$$

La deformació en la direcció 3 no és uniforme; per tant, el costat b :

$$b = b_0 + \int_0^{b_0} \varepsilon_{33} dx_3 = b_0 - \rho g \frac{b_0^2}{2E} \rightarrow b_0$$

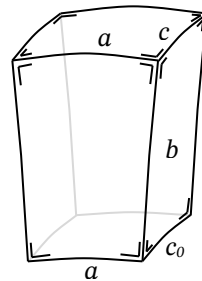
(Com que $X \approx x$, els límits de la integral també podrien ser 0 i b .)

$$b = b_0 - \rho g \frac{b^2}{2E} \rightarrow b_0 = b + \rho g \frac{b^2}{2E} \quad b_0 = b + 8 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$$

- 3) Els costats deixaran de ser rectes perquè, pel fet de ser les deformacions linealment dependents de x_3 , el camp de desplaçament serà quadràtic.

En la peça deformada:

- els costats es corben
- els costats es mantenen perpendiculars entre si, perquè són direccions principals
- la cara superior manté les longituds
- la cara inferior es fa més petita
- l'altura augmenta



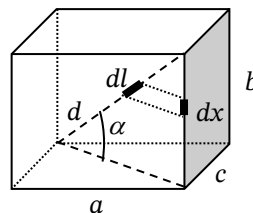
4)

$$\Delta d = \int_0^d \varepsilon_d dl = \int_0^d \vec{N}_d^T [\varepsilon] \vec{N}_d dl = \int_0^b \vec{N}_d^T [\varepsilon] \vec{N}_d \frac{dx_3}{\sin \alpha} = \int_0^b \vec{N}_d^T [\varepsilon] \vec{N}_d \frac{d}{b} dx_3 =$$

$$= \frac{\rho g}{Ebd} \int_0^b \left[\nu (a^2 + c^2) - b^2 \right] x_3 dx_3 \quad \rightarrow \quad \Delta d = \frac{\rho g b}{2Ed} \left[\nu (c^2 + a^2) - b^2 \right]$$

$$\vec{N}_d = \begin{Bmatrix} c \\ a \\ b \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \begin{Bmatrix} c \\ a \\ b \end{Bmatrix} \frac{1}{d}$$

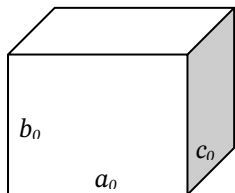
$$d_0 = d$$



NOTA: Mètode 2

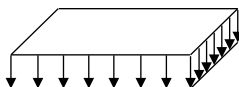
Les preguntes 2, 3 i 4 es podrien resoldre aplicant el principi de superposició. La situació d'ingravitació es podria aconseguir imposant a la forma inicial del paral·lelepípede una acció gravitatòria invertida.

geometria "inicial":

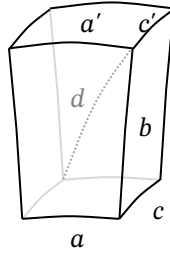


càrregues:

$$g \uparrow \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g x_3 \end{bmatrix}$$



geometria "final":

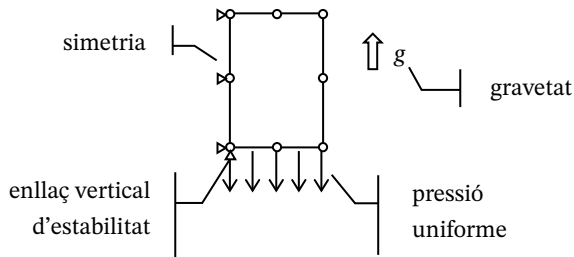


5) Hem de dibuixar la geometria coneguda (paral·lelepípede); per tant, és imprescindible procedir segons el mètode 2. Amb el principi de superposició, determinem la geometria original invertint la càrrega.

5.1) El camp de deformacions varia linealment; amb funcions d'interpolació de desplaçaments quadràtiques (elements amb nodes intermedis) només caldrà “mallar” amb 1 element.

5.2) La tensió és plana en qualsevol pla vertical; per tant, podem fer un model 2D amb la simplificació de simetria respecte al pla vertical.

5.3) Enllaços de simetria, pressió uniforme en la base, força de volum gravitacional i enllaç d'estabilitat vertical en un node qualsevol.



Problema 36

1) Matriu de rigidesa general $[K_{EG}]$. Sistema general $\{P_{EG}\} = [K_{EG}]\{u_{EG}\}$

- Té el determinant zero i, per tant, no admet inversa.
- No es podrien determinar les incògnites $\{u_{EG}\}$. El sistema general és compatible indeterminat.
- Existeixen infinites solucions que corresponen a qualsevol moviment global de translació i/o rotació rígida afegida a la deformació.
- Per trobar la solució del problema elàstic, cal imposar, com a mínim, les restriccions de moviment necessàries per tenir un sistema isostàtic (sense possibilitat de moviment global de sòlid rígida).



- 2) Imposant els desplaçaments dels nodes i, j, k donats en l'enunciat, obtenim els diferents valors de A, B, C, D, E, F:

$$u_1 = u_1^i + u_1^j X_1 + u_1^k X_2$$

$$u_2 = u_2^i + u_2^j X_1 + u_2^k X_2$$

El desplaçament del baricentre (1/3, 1/3) mm:

$$u_1 = u_1^j \frac{1}{3} + u_1^k \frac{1}{3}$$

$$u_2 = u_2^j \frac{1}{3} + u_2^k \frac{1}{3}$$

$$\text{La rotació } \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) = \frac{1}{2} (E - C) = \frac{u_2^j - u_1^k}{2} \text{ rad}$$

- 3) No hi ha càrregues perpendiculars al pla 1-2. És un cas de tensió plana.

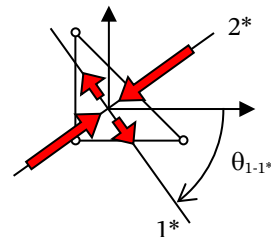
$$\text{Tensor deformació } \varepsilon = \begin{bmatrix} B & (C+E)/2 & 0 \\ (C+E)/2 & F & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu}{(1-\nu)}(B+F) \end{bmatrix}$$

- 4) Les tensions màximes estan relacionades amb les deformacions segons la llei de Hooke generalitzada i, al seu torn, les deformacions depenen del *gradient de desplaçaments* (part simètrica); *no* estan relacionades amb els desplaçaments absoluts.
- 5) De les equacions de Lamé n'obtenim el tensor tensió:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \lambda \varepsilon_v + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{11} & \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{12} & 0 \\ \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{12} & \lambda \varepsilon_v + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Diagonalitzant (fórmules simplificades 2D):

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1^*} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





$$\tan \theta_{1-1^*} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{2^*}}$$

σ_{1^*} (prenem la positiva) σ_{2^*} (prenem la negativa)

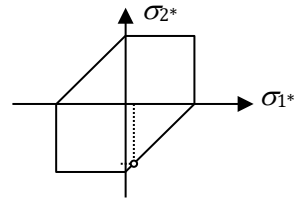
Les direccions principals als punts del contorn de la peça haurien de ser paral·leles al contorn. El resultat obtingut amb aquest element (uniforme en tot el triangle) seria incoherent en aquests punts (línia inferior).

Adoptant el criteri de Tresca ($\tau_{\max.}$),

s'obté un coeficient $\gamma = \frac{\sigma_{1^*} - \sigma_{2^*}}{\sigma_e} \approx 1$;

per tant, som davant una fallada elàstica imminent.

Amb el criteri de Von Mises, s'obté un valor lleugerament superior ($\approx 1,1$).



Problema 37

1) $\gamma_{seg} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_I^2)}}$, les tensions principals de l'acer són les que

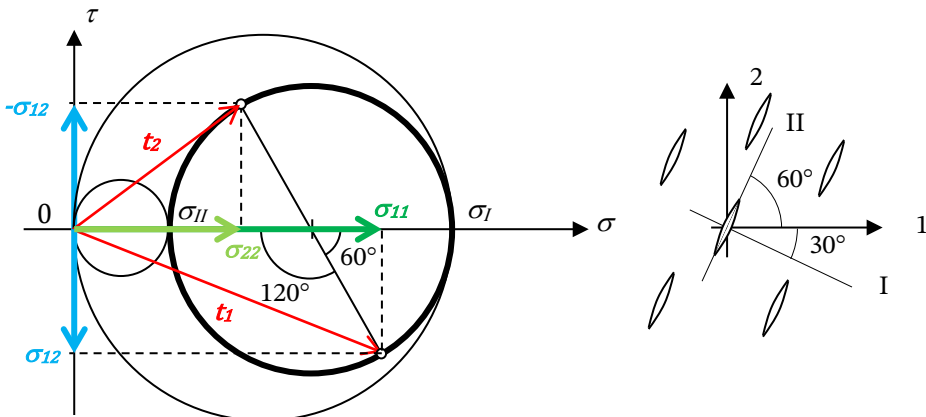
s'indiquen en els cercles de Mohr.

2) Condició de contorn $\vec{f} = [\sigma] \vec{n}$ en cada superfície exterior.

La tensió és plana en el pla de la làmina (pla 1-2); per tant, $\sigma_{33} = 0 = \sigma_{III}$.

El vernís es deforma juntament amb l'acer i es fissura a causa de la màxima tracció (σ_I).

Gràficament:



En el contorn lateral de la làmina, actuen les forces de superfície:

Gràficament:

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos(60^\circ)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} - \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos(60^\circ)$$

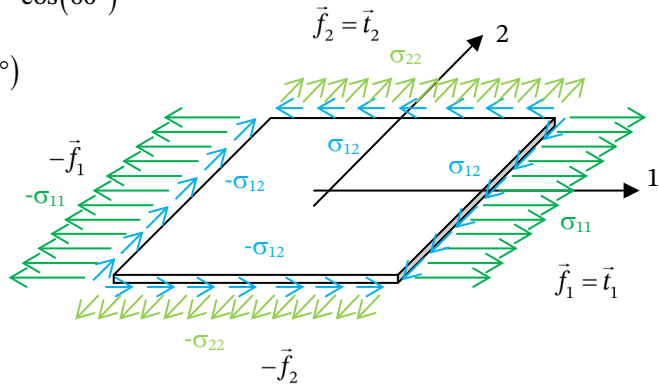
$$\sigma_{12} = -\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin(60^\circ)$$

O bé amb:

$$\sigma_{11} = \vec{n}_1^T [\sigma] \vec{n}_1$$

$$\sigma_{22} = \vec{n}_2^T [\sigma] \vec{n}_2$$

$$\sigma_{12} = \vec{n}_1^T [\sigma] \vec{n}_2$$



treballant en la base de direccions principals I-II.

$$3) \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{llei de Hooke:}$$

$$[\varepsilon] = \frac{1}{E_{acero}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \nu_{acer} \sigma_{22} & \sigma_{12} (1 + \nu_{acer}) & 0 \\ \sigma_{12} (1 + \nu_{acer}) & \sigma_{22} - \nu_{acer} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{acer} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{bmatrix}$$

Les dues galgues perpendiculars de la roseta mesuren ε_{11} i ε_{22} .

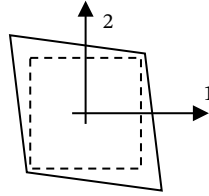
La galga orientada a la bisectriu dels eixos mesura:

$$\varepsilon = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right\} [\varepsilon] \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \varepsilon_{12}$$

- 4) Les dimensions finals dels costats són $100 \cdot (1 + \varepsilon_{11})$ i $100 \cdot (1 + \varepsilon_{22})$.

El gruix final és $5 \cdot (1 + \varepsilon_{33})$.

Els angles rectes varien en una magnitud $2 \cdot \varepsilon_{12}$ rad, i disminueixen o augmenten segons la figura:

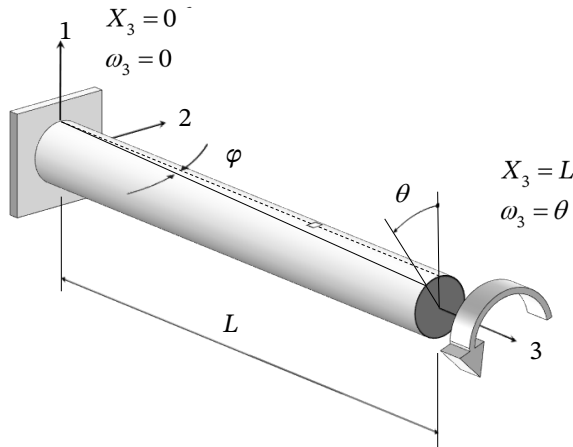


- 5) La tensió principal màxima que experimenta el vernís és la que li provoquen les fissures; la deformació de l'acer i el vernís en el pla 1-2 és la mateixa, atès que es deformen conjuntament. De les equacions de Lamé:

$$\sigma_I^{\text{vernís}} = \lambda \varepsilon_v + 2G \varepsilon_I = \frac{E_{\text{vernís}} \nu_{\text{vernís}}}{(1 + \nu_{\text{vernís}})(1 - 2\nu_{\text{vernís}})} \text{tr}[\varepsilon] + \frac{E_{\text{vernís}}}{1 + \nu_{\text{vernís}}} \varepsilon_I$$

Problema 38

$$\begin{cases} u_1 = -AX_2 X_3 \\ u_2 = AX_1 X_3 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$



$$1) \quad [\Omega] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -AX_3 & -AX_2/2 \\ AX_3 & 0 & AX_1/2 \\ AX_2/2 & -AX_1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \{\omega\} = \begin{Bmatrix} -AX_1/2 \\ -AX_2/2 \\ AX_3 \end{Bmatrix}$$

- 2) Per a $X_3 = L \rightarrow \omega_3 = \theta$. Per tant, $A = \frac{\theta}{L}$ rad/m és l'angle que gira respecte a l'eix 3 per unitat de longitud $\left(\frac{\partial \omega_3}{\partial X_3} \right)$.

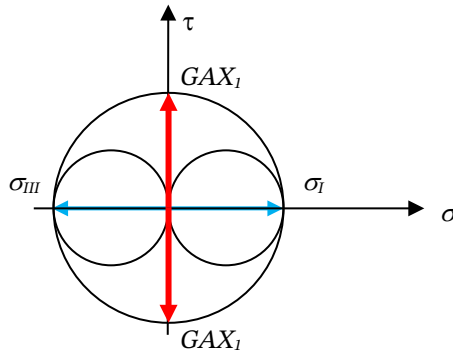
- 3) Atès que la transformació és infinitesimal: $\theta R = \phi L \rightarrow \phi = \theta R / L$

4) El tensor de deformació $[\varepsilon] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -AX_2/2 \\ 0 & 0 & AX_1/2 \\ -AX_2/2 & AX_1/2 & 0 \end{bmatrix}$,

si $X_2=0$ $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AX_1/2 \\ 0 & AX_1/2 & 0 \end{bmatrix}$

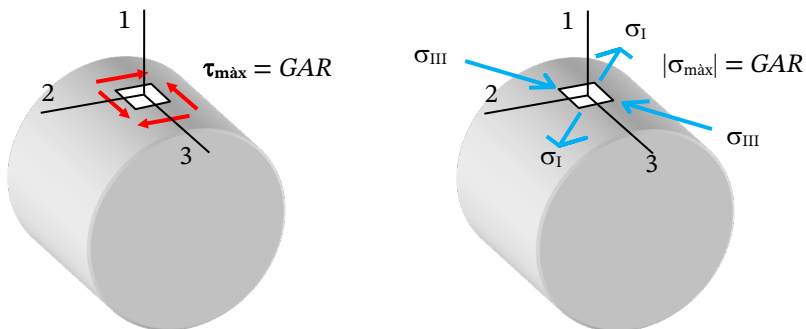
Per tant, el tensor tensió és:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GAX_1 \\ 0 & GAX_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GAX_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -GAX_1 \end{bmatrix}_{I,II,III}$$



És un estat de cisallament pur.

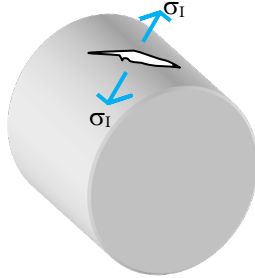
- 5) Tot l'estat de tensions és proporcional a X_1 . Les tensions màximes es produiran quan X_1 sigui màxima: $\pm R$, així, se situa sobre la línia superior (i inferior) paral·lela a l'eix del cilindre:





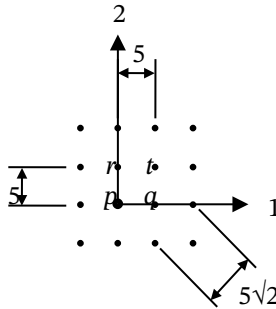
6) Quan trenqui $\sigma_I = 10 \text{ N/mm}^2 = GAX_1 = GAR \rightarrow$
 $G = \sigma_I / RA = 10 \cdot 100 / 4(5,73 \cdot /180) = 2.500 \text{ N/mm}^2$

7) La fissura comença per separació dels plans on actua la σ_I :



Problema 39

$l_{pq} = 8,68 \text{ mm}$
 $l_{pr} = 7,05 \text{ mm}$
 $l_{pt} = 13,98 \text{ mm}$



1) Les deformacions longitudinals unitàries són:
 $\epsilon_{pq} = 0,736$ $\epsilon_{pr} = 0,41$ $\epsilon_{pt} = 0,977$

Les ràtios d'extensió:

$\lambda_{pq} = 1,736$ $\lambda_{pr} = 1,41$ $\lambda_{pt} = 1,977$

Les deformacions longitudinals arriben gairebé al 100% (ràtios d'extensió ≈ 2). No es poden considerar infinitesimals.

2) Utilitzant el tensor de deformacions finites $[C]$ (també es pot utilitzar $[E]$):

$\lambda_{pq}^2 = 3,014$ $\lambda_{pr}^2 = 1,988$ $\lambda_{pt}^2 = 3,909$

$\lambda_{pq}^2 = 3,014 = \vec{N}_{pq} [C] \vec{N}_{pq} = C_{11}$

$\lambda_{pr}^2 = 1,988 = \vec{N}_{pr} [C] \vec{N}_{pr} = C_{22}$

$$[C] = \begin{bmatrix} 3,014 & 1,408 \\ 1,408 & 1,988 \end{bmatrix}$$



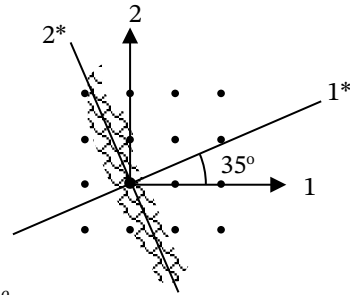
$$\lambda_{pt}^2 = 3,909 = \bar{N}_{pt} [C] \bar{N}_{pt} = \frac{C_{11} + C_{22}}{2} + C_{12} \quad C_{12} = 1,408$$

Les ràtios màximes d'extensió i, per tant, les deformacions longitudinals màximes es produiran en les direccions dels VEP de $[C]$. Els VAP seran els quadrats de les ràtios d'extensió extremes. Podem utilitzar les fórmules simplificades en 2D per diagonalitzar i trobar l'angle que formen amb els eixos.

$$[C] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{m\acute{a}x} = 4 \rightarrow \lambda_{m\acute{a}x} = 2 \rightarrow \varepsilon_{m\acute{a}x} = 1 \rightarrow 100\%$$

$$C_{m\acute{i}n} = 1 \rightarrow \lambda_{m\acute{i}n} = 1 \rightarrow \varepsilon_{m\acute{i}n} = 0 \rightarrow 0\%$$



$$3) \quad \operatorname{tg} \theta_{1-1^*} = \frac{C_{12}}{C_{11} - C_{2^*}} = \frac{1,408}{3,014 - 1} = 0,7 \rightarrow \theta_{1-1^*} = 35^\circ$$

$$4) \quad \cos \varphi_{pqr} = \frac{N_{pq} [C] N_{pr}}{\lambda_{pq} \cdot \lambda_{pr}} = 0,575 \rightarrow \varphi = 54,9^\circ$$

5) Transformació infinitesimal

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} pq & 12 \\ 12 & pr \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{pt} = \bar{N}_{pt} \begin{bmatrix} 0,736 & 12 \\ 12 & 0,410 \end{bmatrix} \bar{N}_{pt} = 0,977 \quad \varepsilon_{12} = 0,404$$

$$\text{Diagonalitzant} \rightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 1,01 & 0 \\ 0 & 0,137 \end{bmatrix} \rightarrow 101\% \text{ i } 13,7\%$$

$$6) \quad \operatorname{tg} \theta_{1-1^*} = \frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{2^*}} = \frac{0,404}{0,736 - 0,137} = 0,675 \rightarrow \theta_{1-1^*} = 34^\circ$$

$$7) \quad \varphi_{\text{final}} = \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon_{12} = 0,763 \text{ rad} = 43,7^\circ$$

Alternativament, les preguntes 2, 3 i 4 també es podrien resoldre:

2) Utilitzant el tensor de deformacions finites $[E]$:

$$\varepsilon_{pq} = \sqrt{2\bar{N}_{pq} [E] \bar{N}_{pq} + 1} - 1 = \sqrt{2E_{11} + 1} - 1 = 0,736 \quad E_{11} = 1,007$$

$$\varepsilon_{pr} = \sqrt{2\bar{N}_{pr} [E] \bar{N}_{pr} + 1} - 1 = \sqrt{2E_{22} + 1} - 1 = 0,41 \quad E_{22} = 0,494$$

$$\varepsilon_{pr} = \sqrt{2\bar{N}_{pt} [E] \bar{N}_{pt} + 1} - 1 = \sqrt{E_{11} + E_{22} + 2 \cdot E_{12} + 1} - 1 = 0,9771 \quad E_{12} = 0,704$$



(o con la deformació de Green $\varepsilon_g = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \bar{N}[E]\bar{N}$)

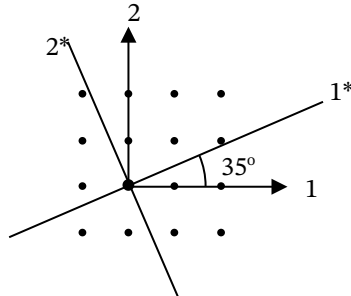
$$[E] = \begin{bmatrix} 1,007 & 0,704 \\ 0,704 & 0,494 \end{bmatrix}$$

Els valors màxims i mínims de deformació longitudinal es relacionen amb els VAP de $[E]$ i es donaran en les direccions definides pels seus VEP. Podem utilitzar les fórmules simplificades per diagonalitzar i trobar l'angle que formen amb els eixos.

$$[E] = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \varepsilon_{m\acute{a}x} = \sqrt{2E_{11} + 1} - 1 = 1 \text{ (100\%)} \quad \varepsilon_{m\acute{i}n} = \sqrt{2E_{22} + 1} - 1 = 0 \text{ (0\%)}$$

$$3) \operatorname{tg}\theta_{1-1^*} = \frac{E_{12}}{E_{11} - E_{2^*}} = \frac{0,704}{1,007 - 0} = 0,7 \rightarrow \theta_{1-1^*} = 35^\circ$$

$$4) \cos\varphi_{pqr} = \frac{N_{pq}[C]N_{pr}}{(1 + \varepsilon_{pq})(1 + \varepsilon_{pr})} = \frac{N_{pq}[2[E] + [I]]N_{pr}}{(1 + \varepsilon_{pq})(1 + \varepsilon_{pr})} = 0,575 \rightarrow \varphi = 54,9^\circ$$

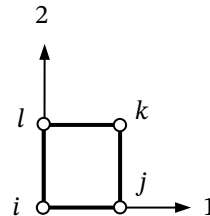


Problema 40

$$1) \begin{cases} u_1 = A + BX_1 + CX_2 + DX_1X_2 \\ u_2 = E + FX_1 + GX_2 + HX_1X_2 \end{cases}$$

Substituint els valors de desplaçament i les coordenades nodals del punt:

$i (0,0):$	$A = 0$	$E = 0$
$j (5,0):$	$B = -160 \cdot 10^{-6}$	$F = 80 \cdot 10^{-6}$
$l (0,5):$	$C = 0$	$G = 70 \cdot 10^{-6}$
$k (5,5):$	$D = -28 \cdot 10^{-6}$	$H = 0$





$$\begin{cases} u_1 = -160 \cdot 10^{-6} X_1 - 28 \cdot 10^{-6} X_1 X_2 \\ u_2 = 80 \cdot 10^{-6} X_1 + 70 \cdot 10^{-6} X_2 \end{cases}$$

$$2) \quad \bar{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{2} + \frac{H}{2} X_2 - \frac{C}{2} - \frac{D}{2} X_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 + 14 \cdot X_1 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\text{Al node } i \ (0, 0) \quad \bar{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

- 3) “L’efecte d’un conjunt d’accions que actuen simultàniament sobre un medi continu és igual a la suma d’efectes de cadascuna de les accions actuant individualment.”

La llei de Hooke generalitzada, que relaciona un estat qualsevol de tensió i deformació, es pot imaginar com la superposició de tres estats uniaxials en les direccions principals:

$$\text{Direcció 1}^*: \quad \varepsilon_{1^*} = \frac{\sigma_{1^*}}{E} \quad \varepsilon_{2^*} = -\nu \frac{\sigma_{1^*}}{E} \quad \varepsilon_{3^*} = -\nu \frac{\sigma_{1^*}}{E}$$

$$\text{Direcció 2}^*: \quad \varepsilon_{1^*} = -\nu \frac{\sigma_{2^*}}{E} \quad \varepsilon_{2^*} = \frac{\sigma_{2^*}}{E} \quad \varepsilon_{3^*} = -\nu \frac{\sigma_{2^*}}{E}$$

$$\text{Direcció 3}^*: \quad \varepsilon_{1^*} = -\nu \frac{\sigma_{3^*}}{E} \quad \varepsilon_{2^*} = -\nu \frac{\sigma_{3^*}}{E} \quad \varepsilon_{3^*} = \frac{\sigma_{3^*}}{E}$$

$$\varepsilon_{1^*} = \frac{\sigma_{1^*}}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_{2^*}}{E} + \frac{\sigma_{3^*}}{E} \right) \quad \varepsilon_{2^*} = \frac{\sigma_{2^*}}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_{1^*}}{E} + \frac{\sigma_{3^*}}{E} \right) \quad \varepsilon_{3^*} = \frac{\sigma_{3^*}}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_{1^*}}{E} + \frac{\sigma_{2^*}}{E} \right)$$

$$\text{O bé:} \quad \varepsilon_{1^*} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{1^*} + \sigma_{2^*} + \sigma_{3^*}) - \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{1^*})$$

$$\varepsilon_{2^*} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{1^*} + \sigma_{2^*} + \sigma_{3^*}) - \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{2^*})$$

$$\varepsilon_{3^*} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{1^*} + \sigma_{2^*} + \sigma_{3^*}) - \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{3^*})$$

Matricialment: $[\varepsilon] = \frac{-\nu}{E} 3[\sigma_0] - \frac{1+\nu}{E} [\sigma]$, donada la independència entre components normals i tangencials en materials homogenis i isòtrops.



- 4) Tensió plana $\Rightarrow \varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{(1-\nu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$. A partir de l'enunciat, coneixem l'estat de deformació en el node i :

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{(1-\nu)}(-160 \cdot 10^{-6} + 70 \cdot 10^{-6}) \quad \text{Per tant: } \nu = \frac{1}{\left(\frac{90 \cdot 10^{-3}}{\varepsilon_{33}} + 1\right)} = 0,1$$

- 5) De l'expressió del camp de desplaçaments:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right] = \begin{bmatrix} B + DX_2 & \frac{1}{2}(F + DX_1) & 0 \\ \frac{1}{2}(F + DX_1) & G & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu}{(1-\nu)}(B + DX_2 + G) \end{bmatrix} =$$

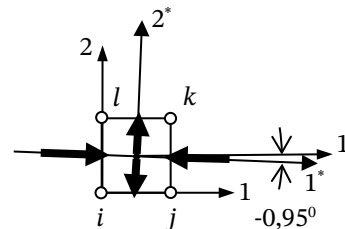
$$= \begin{bmatrix} -160 - 28X_2 & 40 - 14X_1 & 0 \\ 40 - 14X_1 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu}{(1-\nu)}(90 + 28X_2) \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Al centre ($X_1 = 2,5$; $X_2 = 2,5$):

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right] = \begin{bmatrix} -230 & 5 & 0 \\ 5 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu}{(1-\nu)} 160 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Si diagonalitzem:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} -230,1 & 0 & 0 \\ 0 & 70,083 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu}{(1-\nu)} 160 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$



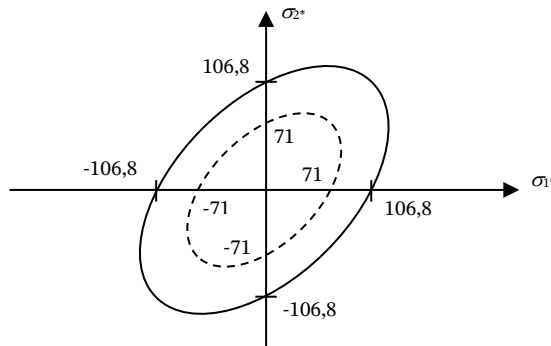
les direccions principals 1^* i 2^* estan desviades un angle de $-0,95^\circ$ respecte als eixos 1 i 2 .

- 6) Aplicant les relacions de Lamé, s'obtenen les tensions principals i , finalment:



$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{1*}^2 + \sigma_{2*}^2 + (\sigma_{1*} - \sigma_{2*})^2)} = 50,49 \text{ N/mm}^2$$

- 7) Per al conjunt de la peça, la tensió màxima de Von Mises és de 71,285 N/mm²; per tant, la tensió de límit elàstic ha de ser $\sigma_e = 1,5 \cdot 71,285 = 106,8 \text{ N/mm}^2$.



- 8) Preprocés:

- Idear la geometria, el comportament del material, les condicions dels enllaços i les sol·licitacions.
- Triar un tipus d'element finit (funcions d'interpolació).
- Discretitzar la geometria (mallatge) atenent a la precisió desitjada en cada regió.

Resolucions:

- Determinar, per a cada element, les matrius $[N]$, $[B]$ i $[K_e]$.
- Construir el sistema general d'equacions $[K_{EG}], \{P_{EG}\}, \{u_{EG}\}$.
- Obtenir el sistema reduït, eliminant els graus de llibertat restringits $[K_E], \{P_E\}, \{u_E\}$.
- Resoldre el sistema reduït, invertint la matriu $[K_E]: \{u_E\} = [K_E]^{-1} \{P_E\}$.
- Trobar les reaccions $\{P_S\} = [K_{SE}] \cdot \{u_E\}$.

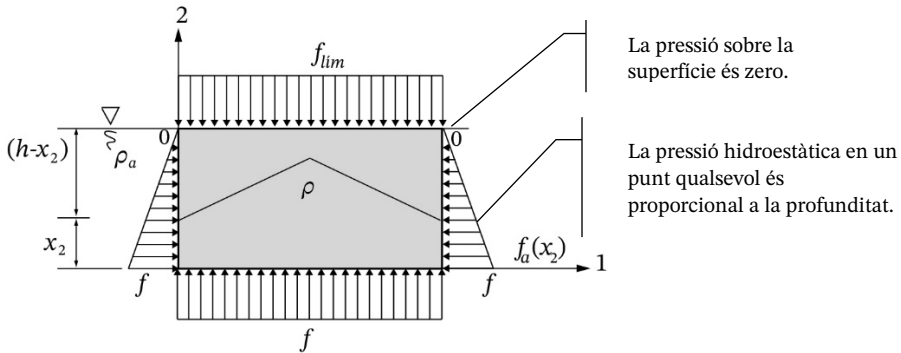
Postprocés:

- i) Determinar els estats de tensió i les deformacions per a cada element:

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{u_e\} \qquad \{\sigma\} = [S] \cdot \{u_e\}$$



Problema 41



- 1) Plantejant l'equilibri de forces verticals:
- $$f \cdot A = f_{lim} \cdot A + \rho g h \cdot A$$
- $$f = f_{lim} + \rho g h$$

Això també es pot plantejar per a una secció qualsevol en x_2 . Cada punt suporta una pressió f_{lim} , més la del pes del flotador que té damunt.

$$\sigma_{22} = -f_{lim} - \rho g (h - x_2) \text{ (compressió)}$$

(Es podria deduir també de l'equació d'equilibri per a un punt interior del flotador, amb $b_2 = -\rho g$ i condicions de contorn.)

Igualment, la pressió hidroestàtica de l'aigua a una profunditat qualsevol correspon al pes de la columna d'aigua:

$$f_a = \rho_a g (h - x_2)$$

(Es podria deduir també de l'equació d'equilibri per a un punt interior de l'aigua, amb $b_2 = -\rho_a g$ i condicions de contorn.)

A la cara inferior del flotador ($x_2 = 0$) $f = \rho_a g h = 9.810 \text{ N/m}^2$ i, per tant:

$$f_{lim} = \rho_a g h - \rho g h = g h (\rho_a - \rho) = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\text{m} \cdot \frac{(1.000 - 15)\text{kg}}{\text{m}^3} = 9.663 \text{ N/m}^2$$

- 2) Al no haver-hi tensions tangencials en les cares del flotador, les direccions 1-2 i 3 són principals (1*-2* i 3*). La distribució de pressions depèn de x_2 , no de x_1 ni de x_3 . En les direccions 1 i 3, hi ha únicament la pressió de l'aigua:



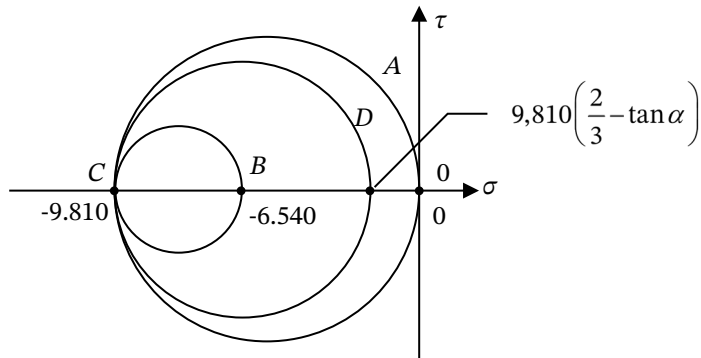
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -\rho_a g(h-x_2) & 0 & 0 \\ 0 & \rho g x_2 - \rho_a g h & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_a g(h-x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.810(1-x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 147x_2 - 9810 & 0 \\ 0 & 0 & -9.810(1-x_2) \end{bmatrix} \text{ N/m}^2$$

El terme degut al pes propi del flotador ($147x_2$) val, com a màxim, l'1,5 % del total (per a $x_2 = h$); per tant, és irrellevant (la relació de densitats entre l'aigua i l'escuma és de 1.000 a 15).

3) A partir d'ara:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -9.810(1-x_2) & 0 & 0 \\ 0 & -9.810 & 0 \\ 0 & 0 & -9.810(1-x_2) \end{bmatrix}$$

Per als punts A(0,1), B(0,1/3), C(0,0) i D(1,1/3+tan(α)), substituint x_2 :

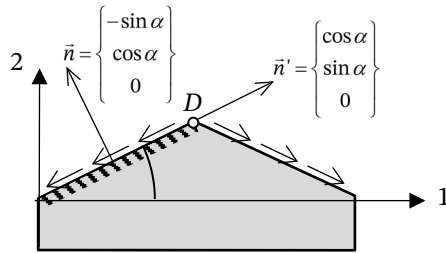


4)

$$\tau = \vec{n}' [\sigma] \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (\sigma_{22} - \sigma_{11}) = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot 9.810 x_2$$

El valor màxim es dona en el punt

$$D(x_2 = 1/3 + \tan(\alpha)) = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot 9.810 \cdot (1/3 + \tan \alpha)$$



(El pla de la dreta és simètric.)

5)

$$\sigma = \bar{n} [\sigma] \bar{n} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \sigma_{11} \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cdot \cos^2 \alpha$$

El coeficient mínim de fricció és el que garanteix que es podrà proporcionar el valor de tensió tangencial $\tau = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot 9.810x_2$ a partir de la tensió normal

$$\sigma = \sigma_{11} \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cdot \cos^2 \alpha .$$

$$\mu_{min} = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot 9.810x_2}{\sigma_{11} \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cdot \sin^2 \alpha} \text{ (en valors absoluts)}$$

La relació més desfavorable entre σ i τ serà sempre el punt D (v. cercles de Mohr).

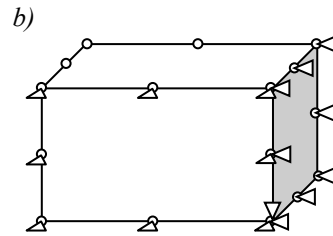
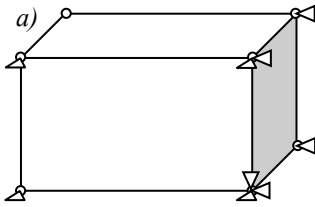
$$\mu_{min} = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot 9.810(1/3 + \tan \alpha)}{\sigma_{11} \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cdot \sin^2 \alpha}$$

6) No és tensió plana, ni deformació plana. Per tant, no es pot fer un estudi pla; el model ha de ser en 3D.

Pel que fa al grau de l'element, com que tenim variacions lineals (respecte a x_2) en els resultats de la tensió i la deformació, es donaran per vàlides dues solucions:

- a) Element sòlid en 3D de 8 nodes (funcions d'interpolació polinòmiques amb productes creuats de coordenades).
- b) Element sòlid en 3D de segon ordre, amb 20 nodes (funcions d'interpolació polinòmiques de segon grau).

El mòdul més senzill possible seria un element únic sòlid en 3D (es pot aprofitar la doble simetria del problema per introduir les condicions d'enllaç). Amb 3 graus de llibertat per node.



Enllaços: pla frontal i pla lateral amb desplaçaments 3 i 1 impeditos, respectivament, i 1 node qualsevol impedit en 2 per evitar el moviment rígid en aquesta direcció (també són correctes altres condicions d'enllaç, sempre que impedeixin els moviments rígids i siguin compatibles amb la deformació).

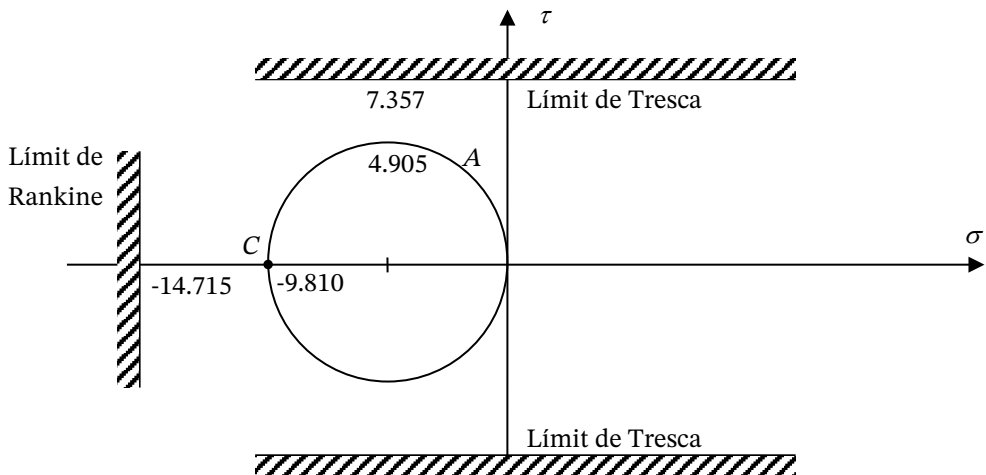
Càrregues: les forces de superfície segueixen el mateix tipus d'interpolació que els desplaçaments $\int_A [N]^T \{f\} dA$; per tant, podem reproduir una variació lineal en un element. Faria falta una pressió uniforme a les cares superior i inferior i una variació lineal de pressió als laterals.

La dimensió de la matriu de rigidesa és: a) 24×24 (8×3) b) 60×60 (20×3)

La dimensió de la matriu reduïda és: a) 15×15 ($24 - 9$) b) 43×43 ($60 - 17$)

- 7) Dúctil; per tant, podem utilitzar el criteri de Tresca (o de tensió tangencial màxima), segons el qual la tensió equivalent és $\sigma_{eqv} = \sigma_I - \sigma_{III}$. El punt crític (v. cercles de Mohr) és A: $\sigma_{eqv} = 9810 \text{ N/m}^2$; per tant, per tenir un coeficient de seguretat 1,5, la tensió que hauria de poder suportar el material seria de $9810 \times 1,5 = 14.715 \text{ N/m}^2 = 0,0147 \text{ MPa}$.

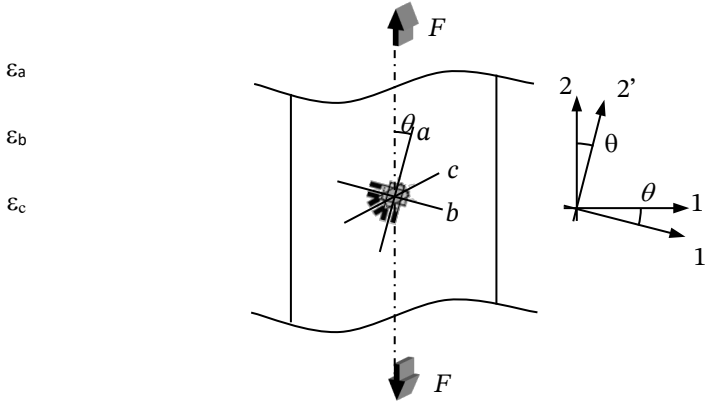
Si fos fràgil, la tensió equivalent seria la tensió normal màxima (o mínima). El punt més desfavorable seria C i el resultat seria el mateix: 14.715 N/m^2 .





Problema 42

Secció $0,5 \times 20 = 10 \text{ mm}^2$



1) Analíticament:

Plantegem el tensor de deformació en els eixos de la roseta 1'-2':

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_b & \varepsilon_{1'2'} & 0 \\ \varepsilon_{1'2'} & \varepsilon_a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Determinem $\varepsilon_{1'2'}$ a partir de ε_c :

$$\varepsilon_c = \vec{n}_c [\varepsilon] \vec{n}_c = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right) \begin{bmatrix} \varepsilon_b & \varepsilon_{1'2'} & 0 \\ \varepsilon_{1'2'} & \varepsilon_a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \varepsilon_{1'2'} + \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{1'2'} = \varepsilon_c - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} = -133,4 \mu\varepsilon$$

les deformacions principals, a través de les fórmules simplificades en el pla:

$$\varepsilon_{22,11} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_b}{2} + \varepsilon_{1'2'}^2} = 600; -180 \quad \tan \theta = \frac{\varepsilon_{1'2'}}{\varepsilon_a - \varepsilon_{11}} = -0,176 \quad \theta = -10^\circ$$

2) Les deformacions principals són les que s'han calculat anteriorment i $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{11}$, per tractar-se d'un assaig uniaxial.

Les direccions principals són, ordenades, 2-1-3 (I-II-III).

3) Les constants elàstiques del material les obtenim de

$$E = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}} = \frac{F/A}{\varepsilon_{22}} = 210.000 \text{ N/mm}^2 \text{ i de } \varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = -\nu \cdot \varepsilon_{22} \Rightarrow \nu = -\varepsilon_{11} / \varepsilon_{22} = 0,3$$



4)

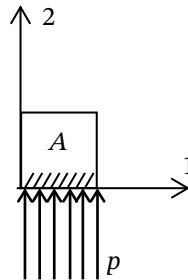
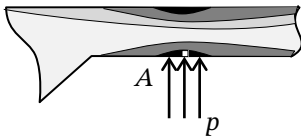
$$\sigma = \vec{n}_{ruptura} [\sigma] \vec{n}_{ruptura} = (\cos 55 \quad -\sin 55 \quad 0) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F/A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 55 \\ -\sin 55 \\ 0 \end{Bmatrix} = 84,55 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = \vec{n}_{\perp ruptura} [\sigma] \vec{n}_{ruptura} = (\sin 55 \quad \cos 55 \quad 0) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F/A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 55 \\ -\sin 55 \\ 0 \end{Bmatrix} = -59,20 \text{ N/mm}^2$$

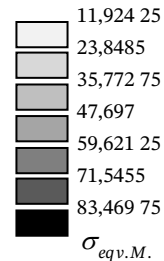
- 5) Segons el criteri de Von Mises, els materials dúctils, com l'acer, fallen a causa de la tensió tangencial octaèdrica (angles iguals amb les direccions principals):

$$\vec{n}_o = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow \alpha = \arccos(1/\sqrt{3}) = 54,7^\circ$$

Problema 43



SEQV Von Mises



- 1) És un cas de tensió plana; per tant, la direcció 3 és principal i $\sigma_3^* = 0$. El punt A és a la superfície exterior; l'única força exterior de superfície aplicada és perpendicular i de valor p : $\vec{f} = [\sigma] \vec{n}$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \sigma_{12} = 0 \Rightarrow \sigma_{22} = \sigma_2^* = -p \Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1^* & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinant el valor de la tensió σ_1^* , sabent que la tensió equivalent de Von Mises val:



$$\sigma_{eq\ v.M.} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{1^*} + p)^2 + \sigma_{1^*}^2 + p^2]} \quad \rightarrow \quad \sigma_{1^*}^2 + p\sigma_{1^*} + p^2 - \sigma_{eq\ v.M.}^2 = 0$$

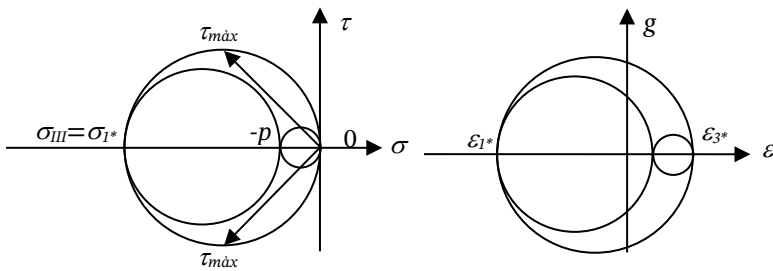
D'aquesta expressió se n'obtenen dos valors possibles de σ_{1^*} :

$$\sigma_{1^*} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4(p^2 - \sigma_{eq\ v.M.}^2)}}{2} = -100; 90 \text{ N/mm}^2$$

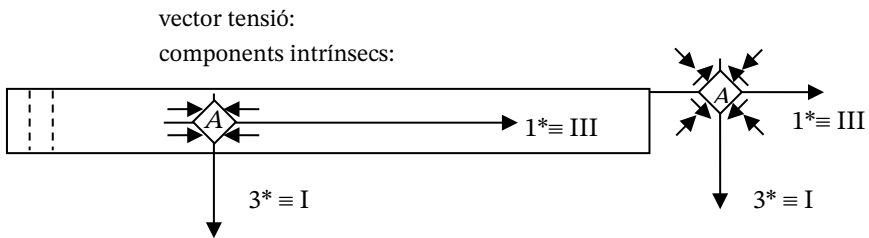
El valor a triar és el negatiu, ja que la deformació en la direcció 3* ha de ser positiva (el gruix ha d'augmentar). Amb la llei de Hooke:

$$\varepsilon_{3^*} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{1^*} - p) > 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{3^*} = 222 \text{ } \mu\varepsilon$$

$$\varepsilon_{1^*} = \frac{1}{E}[\sigma_{1^*} + \nu p] = -1.000 \text{ } \mu\varepsilon \quad \varepsilon_{2^*} = \frac{1}{E}[-p - \nu\sigma_{1^*}] = 100 \text{ } \mu\varepsilon$$



La tensió tangencial màxima actua en els plans normals a 45° d'I i III; per tant, mirant el trencanous des de la direcció 2:



4) La variació de gruix del punt A en % és de $\varepsilon_{3^*} \times 100 = 0,022 \text{ } \%$

$$5) \gamma_{seg\ Tresca} = \frac{\sigma_e}{\sigma_I - \sigma_{III}} = \frac{\sigma_e}{-\sigma_{1^*}} = 1$$

