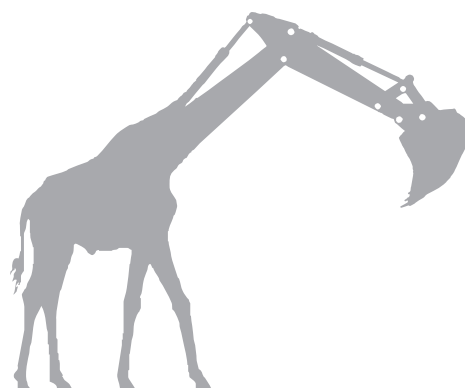




Geometría descriptiva. Sistema diédrico I →
Parte instrumental

Mario Fernández González
Isacó Pérez Sosa



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC



UPCGRAU

Geometría descriptiva. Sistema diédrico I →

Mario Fernández González
Isacó Pérez Sosa

Primera edición: diciembre de 2015

- © Los autores, 2015
- © Iniciativa Digital Politècnica, 2015
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Dipòsit legal: B-21035-2015
ISBN: 978-84-9880-524-6

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley.

Al profesor Francisco Gómez Jiménez

Por habernos transmitido su pasión y su entusiasmo
por la Geometría Descriptiva.





Prólogo

Este libro reúne los contenidos de las asignaturas de Geometría Descriptiva y Técnicas de Representación de los grados de Ingeniería Civil e Ingeniería de la Construcción de la Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals y Ports de Barcelona en la Universitat Politècnica de Catalunya.

La idea del libro nace en 2010, fruto de cuatro años de trabajo y muchos años de docencia, con el objetivo de ayudar a los alumnos en la resolución de problemas geométricos en el espacio y la representación de figuras tridimensionales en el plano. Los alumnos, futuros ingenieros, deberán ser capaces de leer, interpretar y elaborar planos técnicos y proyectos de obra civil mediante la aplicación de la geometría.

Aunque el libro reúne contenidos teóricos, no se trata de un manual de teoría de la geometría, sino que se han incorporado gran cantidad de ejercicios resueltos para facilitar el aprendizaje del alumno y ayudarle, en la medida de lo posible, a desarrollar al máximo la visión espacial.

Con el objetivo de facilitar este aprendizaje, se ha utilizado la representación mediante figuras tridimensionales, dibujos auxiliares y esquemas gráficos ilustrativos que facilitan su lectura y visualización de las proyecciones de los elementos y cuerpos geométricos y sus posiciones en el espacio. Así mismo, muchos de los ejercicios resueltos que se incluyen, además de los conceptos teóricos, vienen acompañados de su correspondiente explicación y resolución.

La obra consta de dos volúmenes de 26 capítulos en total. El volumen I, incluye los temas básicos del sistema diédrico; el punto, la recta, el plano, intersecciones, homología, afinidad, abatimientos, etc.; al final se proponen un recopilatorio de ejercicios fundamentales de los capítulos vistos anteriormente. El volumen II incluye los temas de los cinco poliedros regulares, esferas, superficies radiadas, intersecciones de superficies, superficies de revolución y superficies regladas desarrollables.



Se trata de una obra completa respecto a los temarios de las asignaturas de Geometría Descriptiva y Técnicas de Representación con la que se pretende aumentar bibliografía dedicada al temario de los primeros cursos de ingeniería.

No queremos tampoco olvidarnos de aquellos predecesores en la responsabilidad de enseñar y publicar todo el conocimiento atesorado en el ámbito de la Geometría Descriptiva; Gaspard Monge, Ángel Taibo, F. Izquierdo Asensi, J. del Soto Hidalgo, F.J. Rodríguez de Abajo, J. Palencia, Carlos Cobos, J. Giménez Arribas, A. Rendón Gómez, J.A. Franco Taboada, F. Medina Benavente, M. González Monsalve, L. Martín Morejón, E. Bonet, J.J. Pascual, F. Gómez Jiménez y tantos otros que han querido plasmar todo su conocimiento y su labor docente en diferentes publicaciones, y que ahora nos sirven como referencia inexcusable en nuestro deber como docentes.

Queremos agradecer también a Iniciativa Digital Politécnica su consejo, interés y compromiso en la presente publicación.

Los autores, Mario Fernández, Isacó Pérez



Agradecimientos

Queremos agradecer la colaboración de los profesores Áxel Legares y Carme Estany del Departamento de Infraestructura del Transporte y del Territorio, así como la colaboración de Ingrid Jofre, José Vicente Saura y Sergio Jiménez en el desarrollo de figuras en 2D y 3D, resolución de ejercicios y maquetación de contenidos.

Un agradecimiento muy especial al profesor Francisco Gómez Jiménez, por animarnos a publicar estos volúmenes, así como por toda la dedicación docente realizada en la Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals y Ports de Barcelona durante más de 25 años.





Índice

| | |
|---|----|
| Prólogo | 5 |
| Agradecimientos | 7 |
| Índice | 9 |
| 1. Fundamentos y puntos | 15 |
| 1.1. Definición y elementos del sistema | 16 |
| 1.2. Definición del punto | 17 |
| 1.3. Ejes coordenados. Posicionamiento de un punto P | 18 |
| 1.4. Determinación de un punto por sus coordenadas | 18 |
| 1.5. Diferentes posiciones del punto | 19 |
| 2. La recta | 21 |
| 2.1. Representación de la recta | 22 |
| 2.2. Punto contenido en una recta | 22 |
| 2.3. Trazas de una recta | 23 |
| 2.4. Recta definida por dos puntos | 23 |
| 2.5. Intersección de dos rectas | 24 |
| 2.6. Rectas paralelas | 25 |
| 2.7. Posiciones relativas de la recta | 26 |
| 2.8. Partes vistas y ocultas de una recta | 35 |
| 2.9. Abatimiento y desabatimiento de un plano de perfil | 36 |
| 2.10. Intersección de dos rectas de perfil | 37 |
| 2.11. Por un punto P, recta paralela a una de perfil | 38 |
| 2.12. Intersección de una recta con los planos de proyección | 39 |
| 2.13. Verdadera magnitud de segmentos oblicuos en el sistema diédrico | 40 |

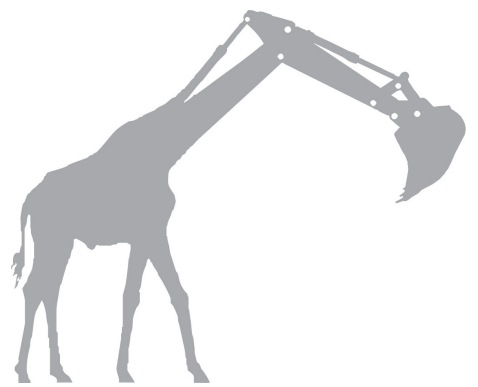


| | |
|---|-----|
| 3. El plano | 43 |
| 3.1. Representación de un plano | 44 |
| 3.2. Punto contenido en un plano | 44 |
| 3.3. Recta contenida en un plano | 45 |
| 3.4. Rectas particulares contenidas en un plano | 46 |
| 3.5. Posiciones particulares del plano | 48 |
| 3.6. Trazas de un plano definido por dos rectas | 52 |
| 3.7. Planos que pasan por una recta | 55 |
| 4. Intersección de planos y rectas | 57 |
| 4.1. Intersección de dos planos | 58 |
| 4.2. Intersección de dos planos. Casos particulares | 60 |
| 4.3. Intersección de una recta con un plano | 66 |
| 4.4. Posición relativa de dos rectas que se cruzan | 69 |
| 4.5. Partes vistas y ocultas de una recta con un plano opaco | 70 |
| 5. Paralelismo y perpendicularidad | 73 |
| 5.1. Planos paralelos | 74 |
| 5.2. Por un punto, plano paralelo a otro | 75 |
| 5.3. Teorema de las tres perpendiculares | 76 |
| 5.4. Por un punto, recta perpendicular a un plano | 77 |
| 5.5. Por un punto P, plano perpendicular a una recta | 79 |
| 5.6. Recta perpendicular a otras dos cuando una de ellas es vertical o de punta | 80 |
| 5.7. Recta perpendicular a otras dos | 81 |
| 5.8. Plano perpendicular a otros dos planos | 83 |
| 5.9. Ejercicios de repaso | 84 |
| 6. Homología | 95 |
| 6.1. Homología principal, elementos y propiedades | 96 |
| 6.2. Elementos para poder definir una homología | 99 |
| 6.3. Transformación homológica de un triángulo en equilátero | 102 |
| 6.4. Transformación homológica de un cuadrilátero en cuadrado | 104 |
| 6.5. Transformación homológica de una circunferencia en elipse | 104 |
| 6.6. Transformación homológica de una circunferencia en parábola | 110 |
| 6.7. Transformación homológica de una circunferencia en hipérbola | 112 |
| 6.8. Problemas de homologías | 114 |
| 7. Afinidad | 119 |
| 7.1. Afinidad en el espacio | 120 |
| 7.2. Afinidad oblicua y razón de afinidad | 120 |
| 7.3. Propiedades de la afinidad | 121 |

| | |
|---|------------|
| 7.4. Reducción de la afinidad en el espacio a la afinidad plana | 123 |
| 7.5. Trapecio afín de otro | 123 |
| 7.6. Figura afín de una circunferencia..... | 124 |
| 7.7. Afinidad aplicada al abatimiento | 126 |
| 7.8. Determinación por afinidad de los ejes de una elipse conocidos sus diámetros conjugados .. | 127 |
| 7.9. Construcción de elipses | 128 |
| 7.10. Tangentes a la elipse desde un punto exterior P..... | 132 |
| 7.11. Tangentes a la elipse paralelas a una dirección dada..... | 133 |
| 8. Abatimiento de planos..... | 135 |
| 8.1. Abatimiento de un plano | 136 |
| 8.2. Aplicación de la afinidad al abatimiento | 140 |
| 8.3. Desabatimiento de una figura plana | 141 |
| 8.4. Abatimiento cualquiera sobre un plano horizontal | 142 |
| 8.5. Abatimiento de un plano vertical | 143 |
| 8.6. Abatimiento de un plano LT, punto A y de una recta r contenida en él | 144 |
| 8.7. Abatimiento del plano paralelo a la LT | 144 |
| 9. Circunferencia y distancias..... | 147 |
| 9.1. Representación de una circunferencia contenida en un plano | 148 |
| 9.2. Distancia entre dos puntos | 150 |
| 9.3. Distancia de un punto a un plano | 151 |
| 9.4. Distancia entre dos planos paralelos | 152 |
| 9.5. Distancia de un punto a una recta | 153 |
| 9.6. Distancia entre dos rectas paralelas | 154 |
| 10. Sombras | 157 |
| 10.1. Conceptos y tipos | 159 |
| 10.2.-Luz focal y luz paralela | 161 |
| 10.3. Sombra arrojada por un punto | 162 |
| 10.4. Sombra arrojada de un segmento | 163 |
| 10.5. Sombra arrojada de una figura plana | 164 |
| 10.6. Sombra arrojada de una recta sobre una pirámide | 165 |
| 10.7. Sombra arrojada de una circunferencia contenida en un plano horizontal | 167 |
| 10.8. Sombra arrojada de una circunferencia contenida en un plano vertical | 170 |
| 10.9. Sombra arrojada de una circunferencia sobre los planos de proyección | 173 |
| 10.10. Sombra arrojada de una figura plana ABCD sobre los planos de proyección | 174 |
| 10.11. Sombra de un cilindro sobre un cono | 175 |
| 10.12. Sombra autoarrojada de una hornacina | 176 |
| 10.13. Sombra propia y arrojada de diferentes cuerpos | 178 |
| 11. Ángulos | 187 |
| 11.1. Ángulos de una recta con los planos de proyección | 188 |



| | |
|--|------------|
| 11.2. Ángulos de una recta con un plano cualquiera | 190 |
| 11.3. Rectas que pasan por un punto y forman un ángulo con un plano | 192 |
| 11.4. Determinación de la recta conocidos los ángulos con los planos de proyección | 193 |
| 11.5. Ángulo de dos rectas (que se cortan o se cruzan) | 194 |
| 11.6. Ángulos de un plano con los planos de proyección | 195 |
| 11.7. Planos que pasan por un punto y forman un ángulo dado con un plano | 196 |
| 11.8. Planos que pasan por una recta y forman un ángulo dado con un plano | 198 |
| 11.9. Determinación de un plano conocidos sus ángulos con los planos de proyección | 199 |
| 11.10. Plano conocido el ángulo entre trazas y el que forma con un plano de proyección | 203 |
| 11.11. Ángulo entre dos planos | 204 |
| 12. Métodos auxiliares | 207 |
| 12.1. Cambios de plano | 208 |
| 12.2. Giros | 216 |
| 13. Triedros | 225 |
| 13.1. Definición, elementos y representación | 226 |
| 13. 2. Construcción de triedros | 226 |
| Ejercicios fundamentales | 237 |



→ 1



Fundamentos y puntos

1.1. DEFINICIÓN Y ELEMENTOS DEL SISTEMA

1.2. DEFINICIÓN DEL PUNTO

1.3. EJES COORDENADOS. POSICIONAMIENTO DE UN PUNTO P

1.4. DETERMINACIÓN DE UN PUNTO POR SUS COORDENADAS

1.5. DIFERENTES POSICIONES DEL PUNTO



1.1. DEFINICIÓN Y ELEMENTOS DEL SISTEMA

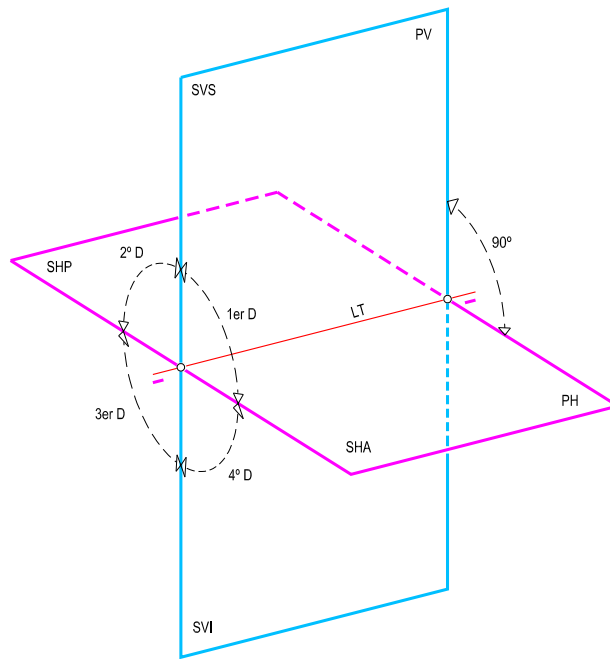


Fig. 1.1.

En el sistema diédrico, la representación sobre papel (2D) de una figura del espacio (3D) consiste en la proyección ortogonal simultánea sobre dos planos de proyección perpendiculares entre sí, siendo estos dos el *plano horizontal (PH)* y el *plano vertical (PV)*, cuya intersección da lugar a la *línea de tierra (LT)*. Los planos se consideran ilimitados y opacos (fig. 1.1).

Para poder representar el conjunto del espacio sobre el papel del dibujo, una vez obtenidas las proyecciones de la figura sobre los planos de proyección, el plano horizontal se abate sobre el vertical en sentido horario, de manera que ambos queden superpuestos.

El espacio queda dividido en cuatro regiones o *diedros*, aunque a efectos de representación de las figuras, el observador se sitúa siempre en el primer diedro. Así mismo, los planos de proyección también quedan divididos por la línea de tierra en cuatro semiplanos: semiplano vertical superior (SVS), semiplano vertical inferior (SVI), semiplano horizontal anterior (SHA) y semiplano horizontal posterior (SVP).

Los *planos bisectores* de los diedros dividen al espacio en ocho diedros de 45°, que podemos llamar "octantes". El plano bisector del primer y del tercer diedro se llama *primer bisector* y el plano bisector del segundo y cuarto diedro se llama *segundo bisector*.

1.2. DEFINICIÓN DEL PUNTO

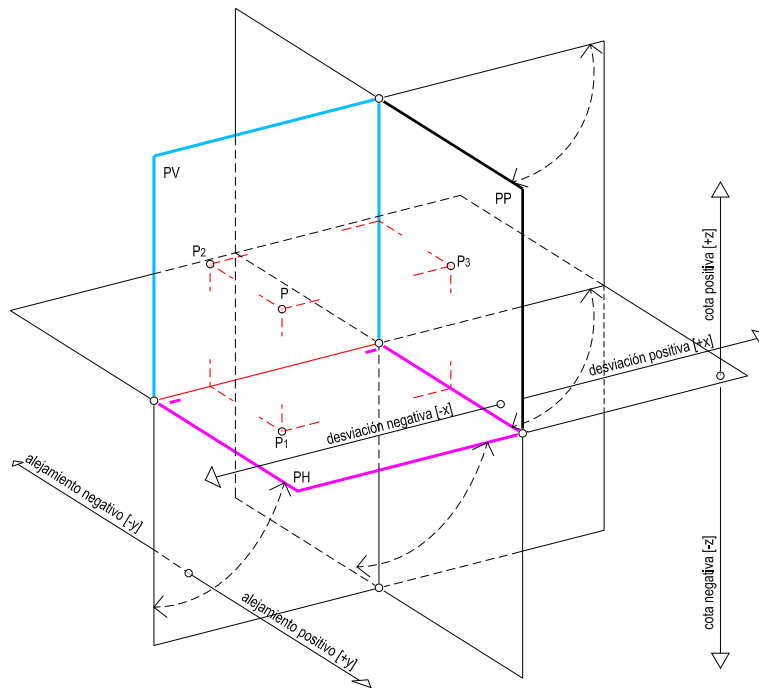


Fig. 1.2.

Un punto situado en el espacio (fig. 1.2) se representa mediante sus dos proyecciones sobre los planos de proyección: proyección horizontal y proyección vertical. Como se puede ver en la figura, el punto P queda definido por las proyecciones P_1 y P_2 .

En la representación de una figura también se utiliza, como plano auxiliar, el denominado *plano de perfil (PP)*, perpendicular a los planos de proyección y que constituye junto con ellos, el triedro trirrectángulo de referencia. De la proyección ortogonal de un punto sobre el plano de perfil resulta la tercera proyección P_3 .

Dado un punto en el espacio, la distancia entre él y el plano de perfil de referencia (el que marca el origen de coordenadas) se denomina *desviación* (x), la distancia entre el punto y su proyección en el plano vertical es el *alejamiento* (y), y la distancia entre el punto y su proyección en el plano horizontal es la *cota* (z).



1.3. EJES COORDENADOS. POSICIONAMIENTO DE UN PUNTO P

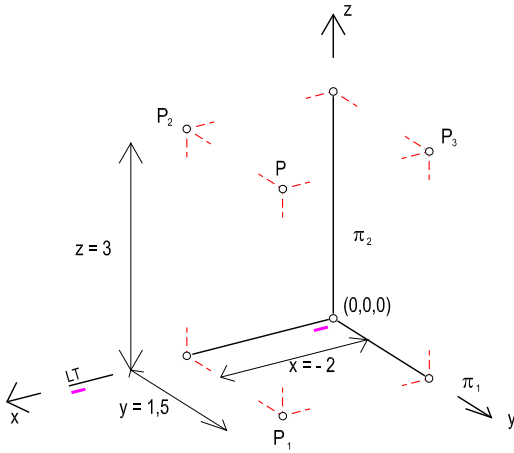


Fig. 1.3.

Partiendo del triángulo de referencia, se adopta como eje x la línea de tierra con sentido positivo hacia la derecha del observador. El plano xy corresponde al plano horizontal de proyección, estando la parte positiva del eje y en el semiplano horizontal anterior (*SHA*); análogamente, el plano xz corresponde al plano vertical de proyección, con sentido positivo del eje z en el semiplano vertical superior (*SVS*).

1.4. DETERMINACIÓN DE UN PUNTO POR SUS COORDENADAS

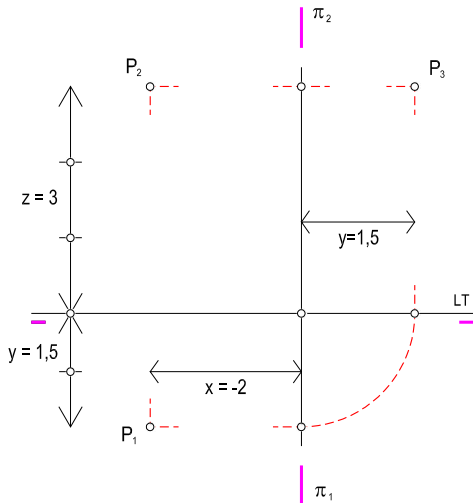


Fig. 1.4.

Dadas las proyecciones de un punto sobre los planos de proyección *PV* y *PH* y sobre el plano de perfil, este plano se abate sobre el vertical y éste, a su vez, sobre el horizontal, quedando la disposición del dibujo como indica la figura.

Al efectuar la coincidencia de ambos planos de proyección en uno solo mediante el giro de uno de ellos, las proyecciones vertical y horizontal pertenecen a una misma perpendicular, que es la línea de referencia del punto.

Si se considera un punto en el espacio, éste queda determinado por las distancias a los tres planos. Sobre el papel del dibujo, la desviación es la distancia entre el origen de coordenadas (punto intersección de los planos *PV*, *PH* y *PP*) y la línea de referencia del punto, el alejamiento corresponde a la distancia entre la *LT* y la proyección horizontal, y la cota corresponde a las distancia entre la *LT* y la proyecciones vertical. A modo de ejemplo, se puede ver en la fig. 1.4 que el punto *P* queda determinado por $P(2, 1.5, 3)$.

1.5 DIFERENTES POSICIONES DEL PUNTO

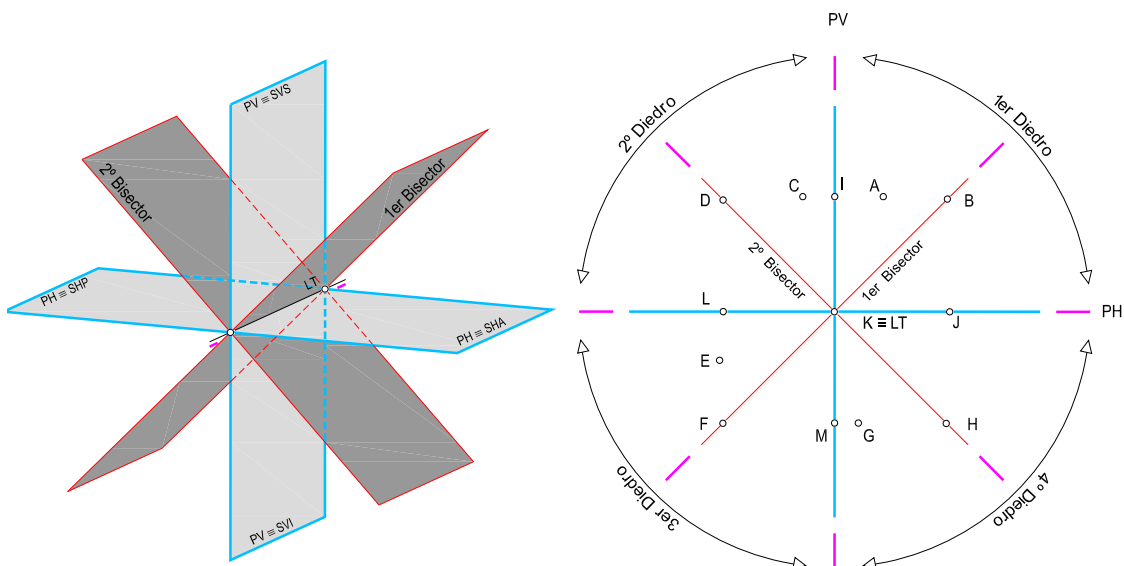


Fig. 1.5.

En el espacio, un punto puede adoptar diversas posiciones con respecto a los planos de referencia. En la fig. 1.5 se muestran las diferentes posiciones de los puntos en una vista de perfil, mientras que en la fig. 1.6 se representan las proyecciones diédricas de cada posición.

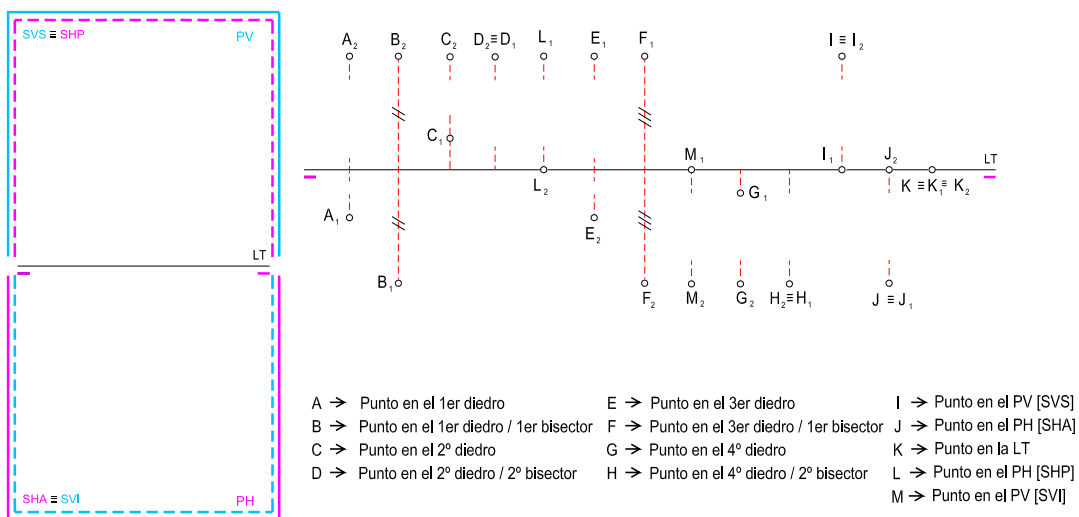


Fig. 1.6.

→ 2



- 2.1. REPRESENTACIÓN DE LA RECTA
- 2.2. PUNTO CONTENIDO EN UNA RECTA
- 2.3. TRAZAS DE UNA RECTA
- 2.4. RECTA DEFINIDA POR DOS PUNTOS
- 2.5. INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS
- 2.6. RECTAS PARALELAS
 - 2.6.1. Por un punto, recta paralela a otra
- 2.7. POSICIONES RELATIVAS DE LA RECTA
 - 2.7.1. Recta horizontal
 - 2.7.2. Recta frontal
 - 2.7.3. Recta paralela a la LT
 - 2.7.4. Recta vertical
 - 2.7.5. Recta de punta
 - 2.7.6. Rectas contenidas en el primer y segundo bisector
 - 2.7.7. Recta de perfil
- 2.8. PARTES VISTAS Y OCULTAS DE UNA RECTA
- 2.9. ABATIMIENTO Y DESABATIMIENTO DE UN PLANO DE PERFIL
- 2.10. INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS DE PERFIL
- 2.11. POR UN PUNTO P , RECTA PARALELA A UNA DE PERFIL
- 2.12. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN
- 2.13. VERDADERA MAGNITUD DE SEGMENTOS OBLICUOS EN EL SISTEMA DIÉDRICO



2.1. REPRESENTACIÓN DE LA RECTA

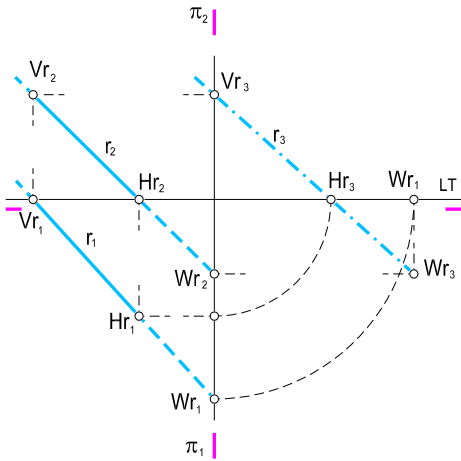


Fig. 2.1.

La proyección de una recta sobre un plano es otra recta formada por las proyecciones de todos sus puntos, por lo que una recta r del espacio queda definida cuando se conocen sus proyecciones ortogonales sobre los dos planos de proyección, r_1 y r_2 (fig. 2.1).

El plano que proyecta la recta r sobre el PH se llama *plano proyectante horizontal* de la recta, y está formado por el triángulo $Vr_2Vr_1Hr_1$. Análogamente, el plano que proyecta la recta r sobre el PV , se llama *plano proyectante vertical* de la recta y está formado por el triángulo $Vr_2Hr_2Hr_1$. En la figura del espacio puede apreciarse que la recta intersección de estos dos planos es la recta r del espacio.

2.2. PUNTO CONTENIDO EN UNA RECTA

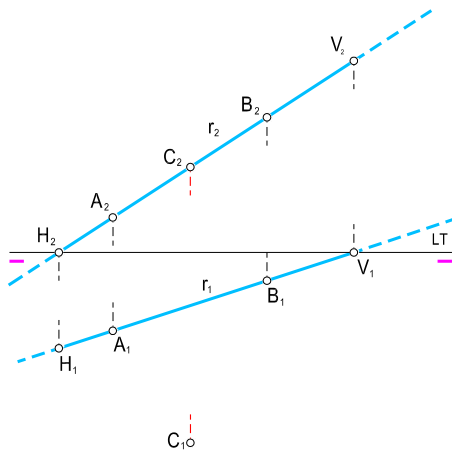


Fig. 2.2.

Tal y como se puede apreciar en la fig. 2.2, un punto cualquiera $A[A_1A_2]$ pertenece a una recta $r[r_1r_2]$ cuando sus proyecciones coinciden con las proyecciones de la recta, es decir, cuando la proyección horizontal del punto A_1 pertenece a la proyección horizontal de la recta r_1 y la proyección vertical del punto A_2 pertenece a la proyección vertical de la recta r_2 .

2.3. TRAZAS DE UNA RECTA

Una recta puede definirse por sus trazas. Las trazas de una recta son los puntos intersección donde la recta corta a los planos de proyección.

Si se conocen las proyecciones horizontal y vertical de una recta, las trazas se determinan por los puntos intersección con la LT, al ser éstos las proyecciones de las trazas. A modo de ejemplo, considérense las dos proyecciones r_1 y r_2 de una recta r (Fig. 2.3); el punto Vr_1 (punto intersección entre la proyección horizontal de la recta y la LT) es la proyección sobre el plano horizontal de la traza vertical de la recta (Vr_2), mientras que el punto Hr_2 (punto intersección entre la proyección vertical de la recta y la LT) es la proyección sobre el plano vertical de la traza horizontal de la recta (Hr_1).

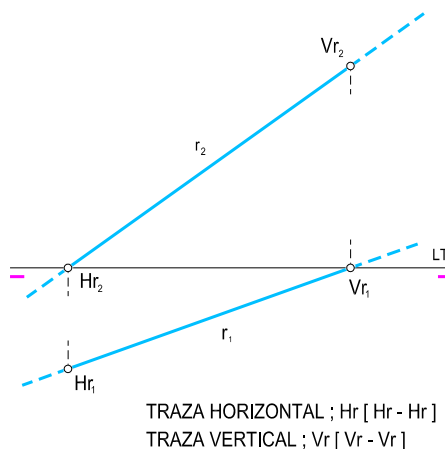


Fig. 2.3.

Existen posiciones especiales en las que las trazas, o bien alguna de ellas, no se encuentran dentro de los límites del dibujo, siendo "puntos impropios" aquellas trazas de las rectas paralelas a alguno de los planos de proyección.

2.4. RECTA DEFINIDA POR DOS PUNTOS

Como las proyecciones de los puntos de una recta están sobre su recta proyección, para definir una recta, basta conocer las proyecciones de dos de sus puntos (Fig. 2.4).

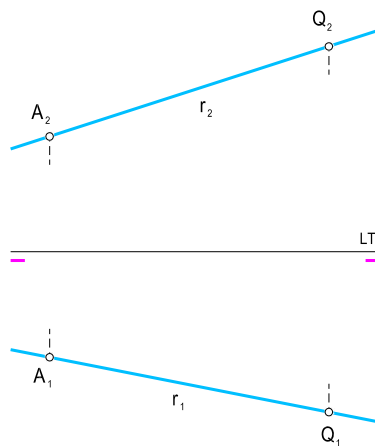


Fig. 2.4.



2.5. INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS

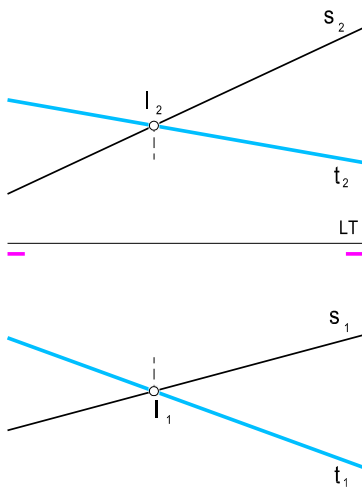


Fig. 2.5.a.

Si dos rectas se cortan tienen un punto común, por lo que dadas dos rectas $s[s_1, s_2]$ y $t[t_1, t_2]$, el punto intersección I_2 entre las dos proyecciones verticales s_2 y t_2 , y el punto intersección I_1 entre las dos proyecciones horizontales s_1 y t_1 están en una misma perpendicular a la LT (fig. 2.5.a); dicho de otra manera, las dos proyecciones del punto $I[I_1, I_2]$ tienen la misma desviación.

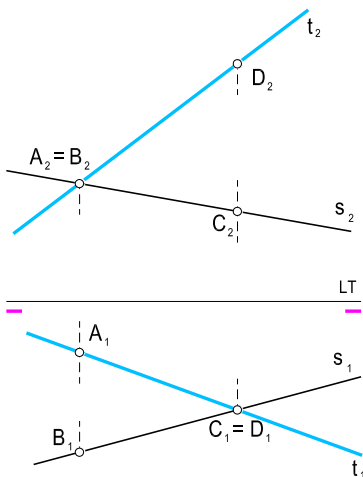


Fig. 2.5.b.

En la fig. 2.5.b, las rectas $s[s_1, s_2]$ y $t[t_1, t_2]$ se cruzan en el espacio, es decir, no se encuentran, ya que las proyecciones horizontales s_1 y t_1 se cortan (aparentemente) en $C_1 \equiv D_1$ y las verticales s_2 y t_2 se cortan (aparentemente) en $A_2 \equiv B_2$, estos puntos no están alineados en una misma perpendicular común a la LT ($C_1 \equiv D_1$ y $A_2 \equiv B_2$ no son las proyecciones de un punto del espacio dado que $C_1 \equiv D_1$ tienen diferente cota y $A_2 \equiv B_2$ diferente alejamiento).

2.6. RECTAS PARALELAS

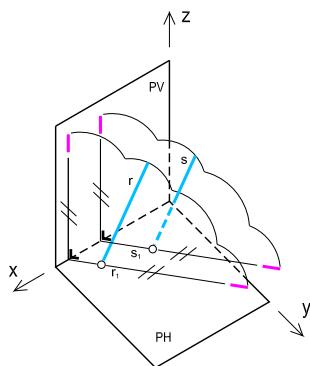


Fig. 2.6.a.

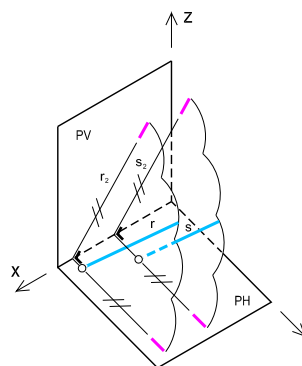


Fig. 2.6.b.

Las proyecciones de dos rectas paralelas quedan definidas por sendos planos proyectantes, tanto los verticales como los horizontales.

Los dos planos proyectantes horizontales de dos rectas paralelas (fig. 2.6.a) son también paralelos, por lo que sus intersecciones con el *PH*, que definen las proyecciones horizontales de las rectas, son paralelas (r_1 , s_1). Análogamente para las mismas dos rectas, los dos planos proyectantes verticales (fig. 2.6.b) son también paralelos, por lo que las dos proyecciones verticales de las dos rectas paralelas, definidas por las intersecciones de los planos proyectantes verticales con el *PV*, son también paralelas (r_2 , s_2).

Así pues, dos rectas paralelas tienen sus proyecciones paralelas (fig. 2.6.c).

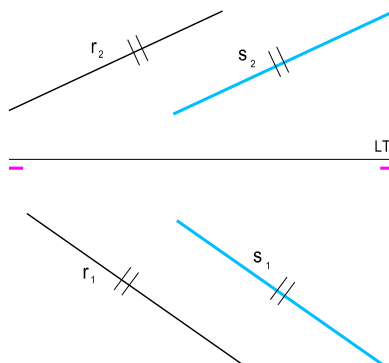


Fig. 2.6.c.



2.6.1. Por un punto, recta paralela a otra

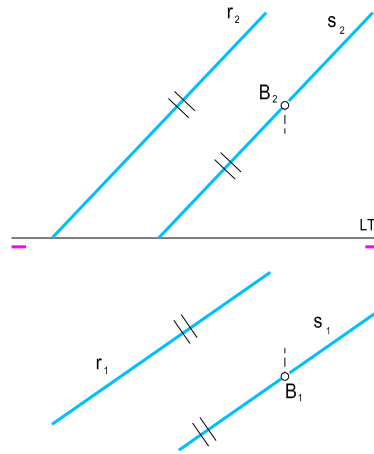


Fig. 2.6.d.

Dada la recta $r[r_1, r_2]$ (fig. 2.6.d), para trazar otra recta paralela a la dada por el punto $B[B_1, B_2]$, basta con trazar dos paralelas a las proyecciones r_1 y r_2 que pasen, respectivamente, por B_1 y B_2 .

2.7. POSICIONES RELATIVAS DE LA RECTA

2.7.1. Recta horizontal

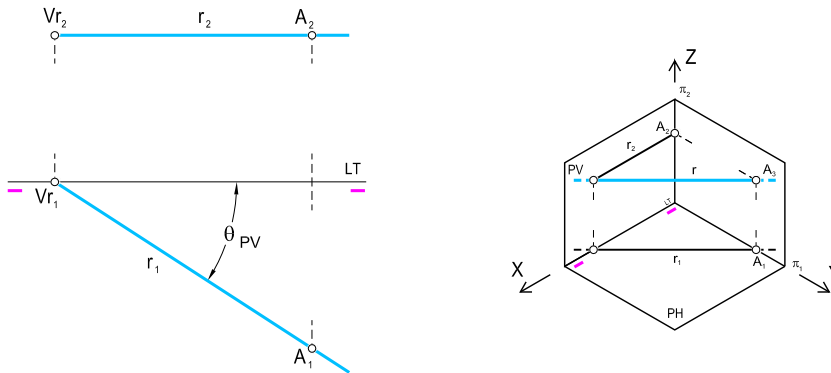


Fig. 2.7.1.

Una recta horizontal es paralela al plano horizontal, por lo que su traza horizontal es un punto impropio. Por tener todos sus puntos de igual cota, su proyección vertical es paralela a la LT (fig. 2.7.1).

2.7.2. Recta frontal

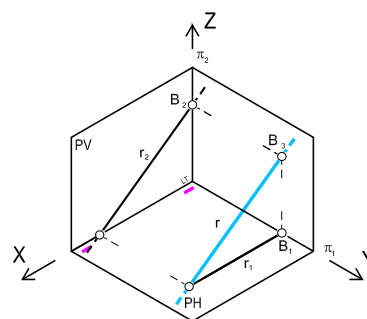
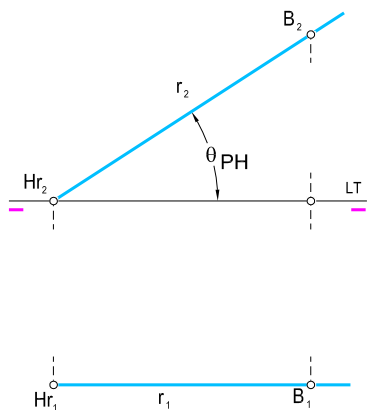


Fig. 2.7.2.

Una recta frontal es paralela al plano vertical, por lo que su traza vertical es un punto impropio, Por tener todos sus puntos de igual alejamiento, su proyección horizontal es paralela a la LT (fig. 2.7.2).

2.7.3. Recta paralela a la LT

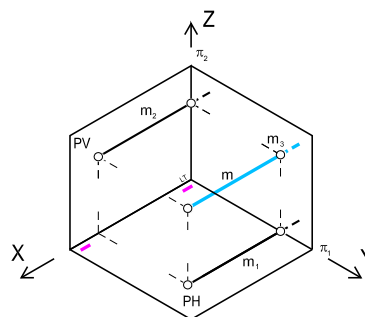
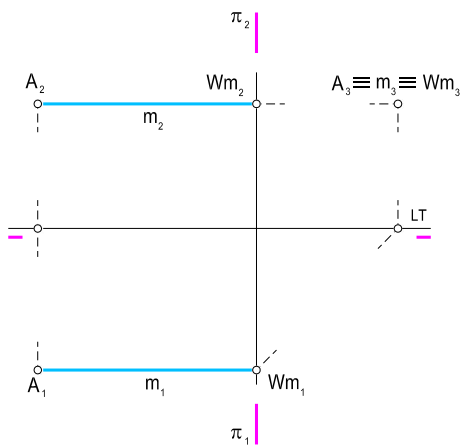


Fig. 2.7.3.

Todos los puntos de una recta paralela a la LT tienen la misma cota y el mismo alejamiento, por lo que sus dos proyecciones son paralelas a la LT. En este caso, las dos trazas de la recta son puntos impropios (fig. 2.7.3). Sólo en los casos en los que la recta paralela a la LT esté contenida en alguno de los planos bisectores, la cota de todos los puntos será igual (en módulo) al alejamiento de los mismos.



2.7.4. Recta vertical

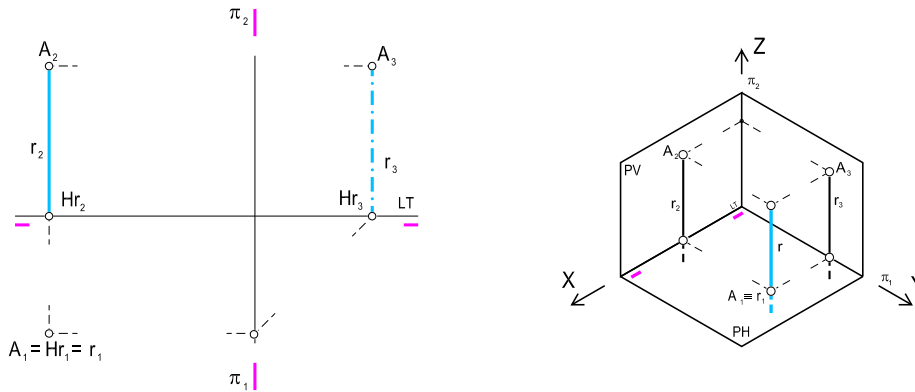


Fig. 2.7.4.

Una recta vertical es perpendicular al plano horizontal, por lo que la traza vertical de la recta es un punto impropio. Su proyección sobre dicho plano es un punto, que coincide con la traza horizontal de la recta. Su proyección vertical es perpendicular a la LT (fig. 2.7.4).

2.7.5. Recta de punta

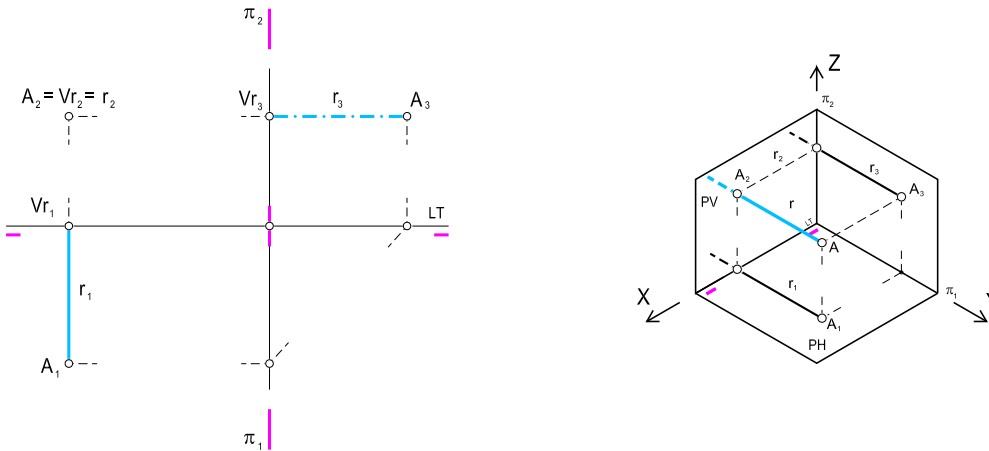


Fig. 2.7.5.

Una recta de punta es perpendicular al plano vertical, por lo que la traza horizontal de la recta es un punto impropio. Su proyección sobre dicho plano es un punto, que coincide con la traza vertical de la recta. Su proyección horizontal es perpendicular a la LT (fig. 2.7.5).

2.7.6. Rectas contenidas en el primer y segundo bisector

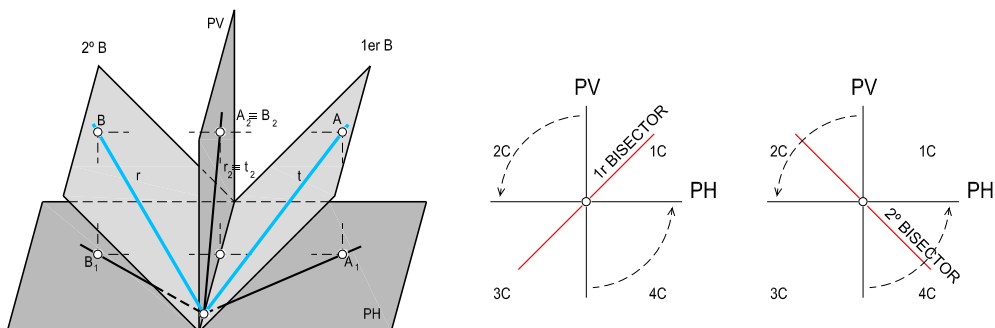


Fig. 2.7.6.a.

Todos los puntos de una recta contenida en el primer bisector tienen igual cota y alejamiento, y como pertenecen al primer o al tercer diedro, sus proyecciones son simétricas respecto a la LT (fig. 2.7.6.b).

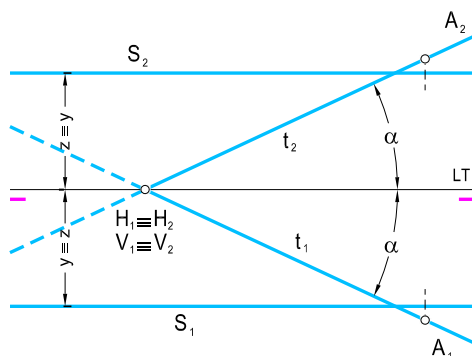


Fig. 2.7.6.b.

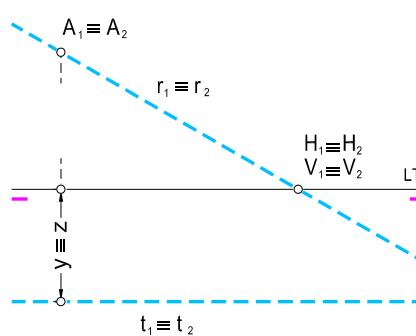


Fig. 2.7.6.c.

Todos los puntos de una recta contenida en el segundo bisector tienen igual cota y alejamiento, y como pertenecen al segundo o cuarto diedro, las proyecciones horizontal y vertical de la recta están superpuestas (fig. 2.7.6.c).

Rectas paralelas al primer y segundo bisector

Si la recta es paralela al primer bisector y oblicua a los planos coordenados, podrá adoptar tres posiciones con respecto a los planos de proyección (fig. 2.7.6.d), según esté encima del plano bisector, contenida en él (fig. 2.7.6.b) o debajo del mismo (fig. 2.7.6.f, 2.7.6.g, 2.7.6.h).

Análogamente, si la recta es paralela al segundo bisector, podrá también adoptar tres posiciones distintas (fig. 2.7.6.e), según esté encima del bisector, contenida en él (fig. 2.7.6.c) o debajo del mismo (fig. 2.7.6.i, 2.7.6.j, 2.7.6.k).

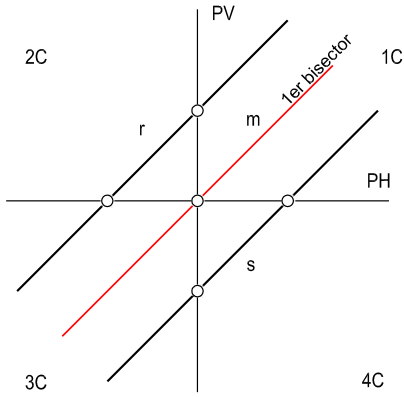


Fig. 2.7.6.d.

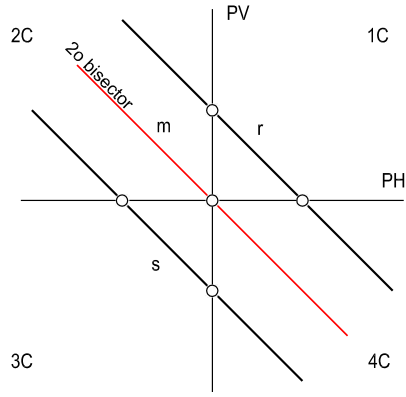


Fig. 2.7.6.e.

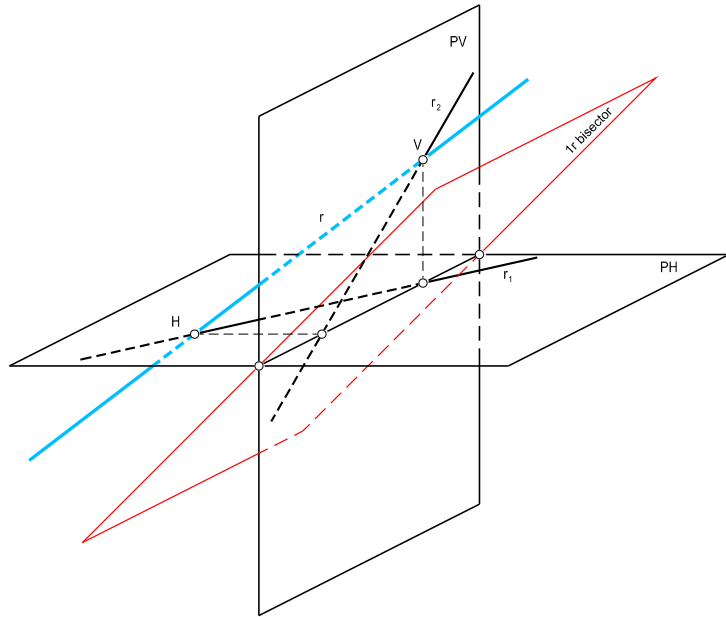
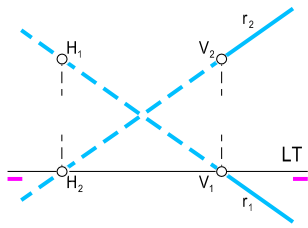


Fig. 2.7.6.f.

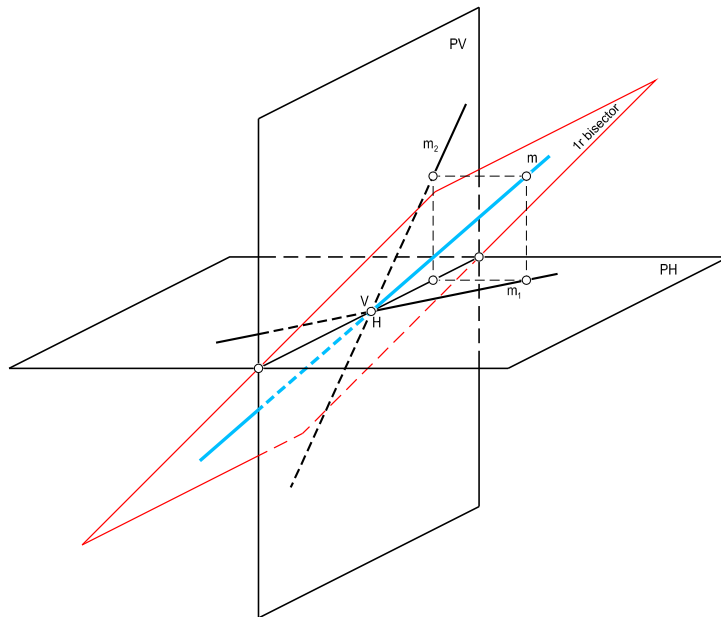
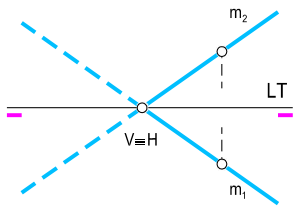


Fig. 2.7.6.g.

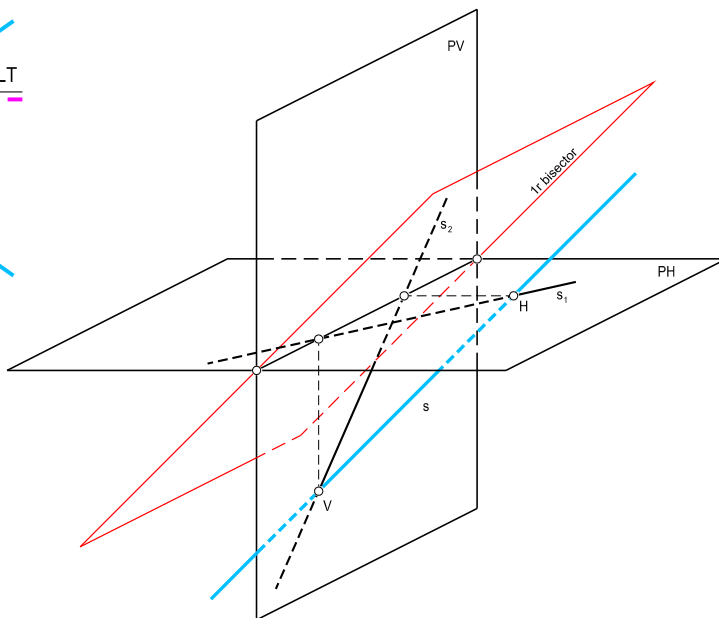
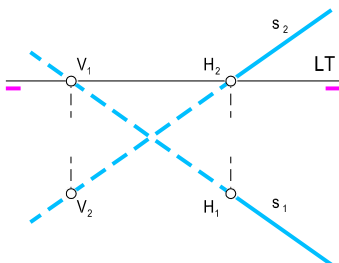


Fig. 2.7.6.h.

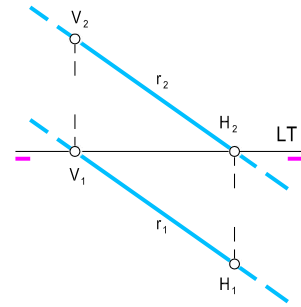
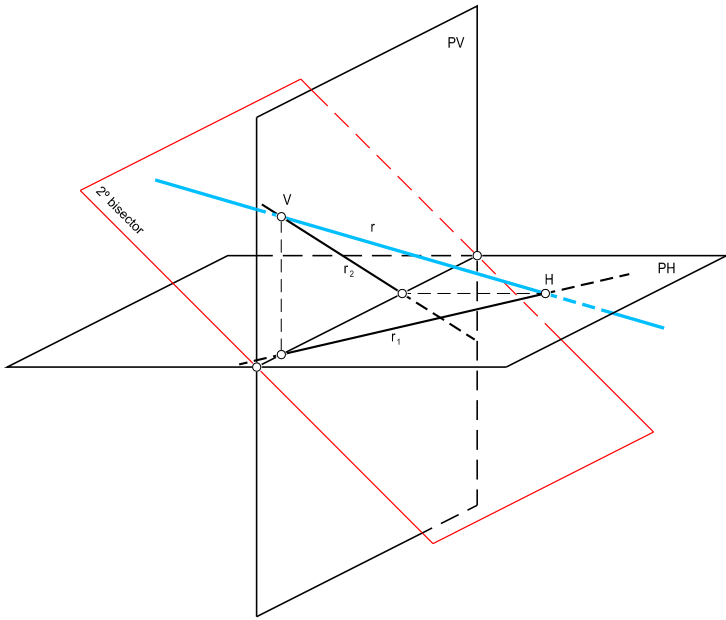


Fig. 2.7.6.i.

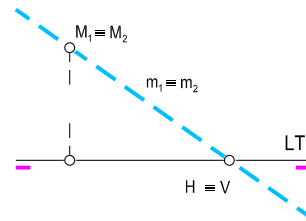
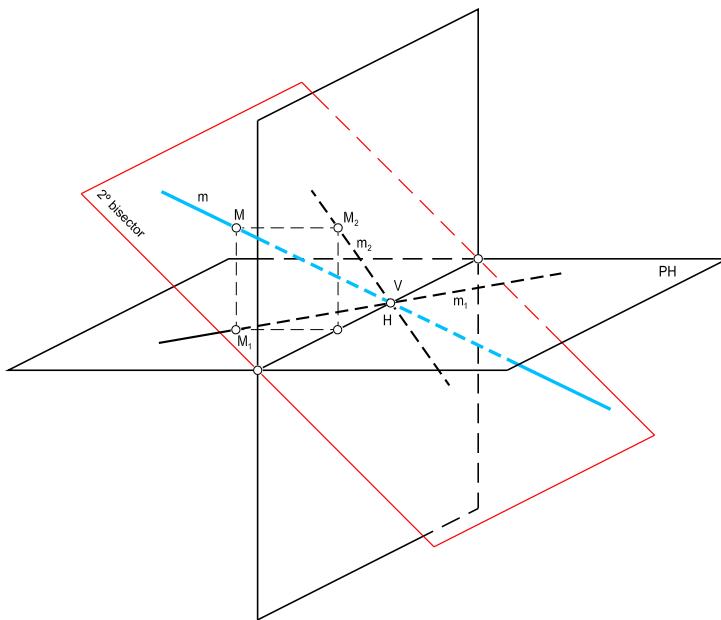


Fig. 2.7.6.j.

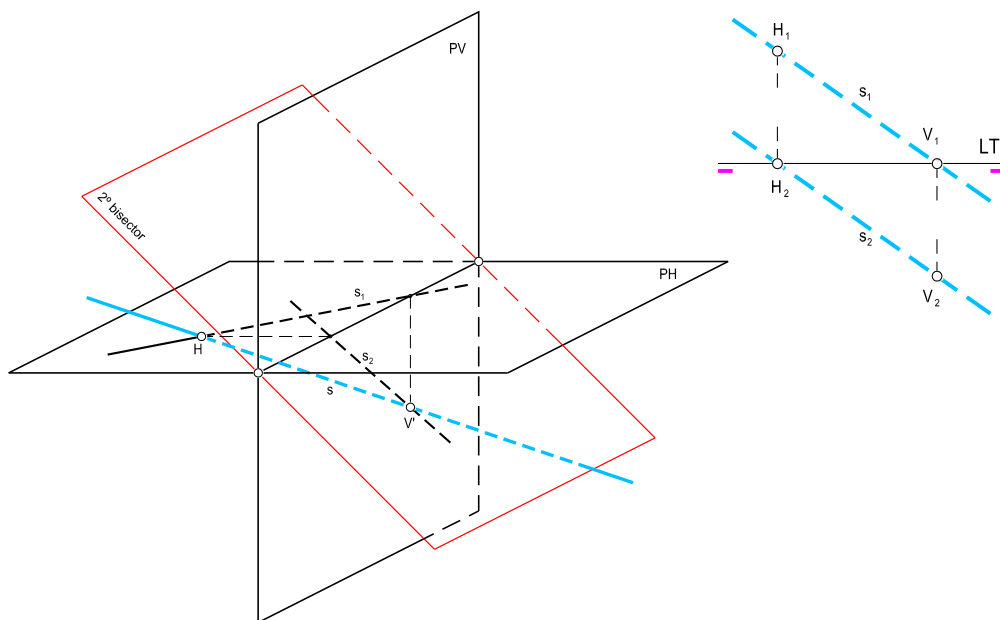


Fig. 2.7.6.k.

2.7.7. Recta de perfil

Una recta de perfil es una recta contenida en un plano perpendicular a la LT, por lo que sus trazas y proyecciones están contenidas en una misma perpendicular a la línea de tierra.

Para resolver los problemas relativos a estas rectas se abate el plano de perfil que las contiene, generalmente alrededor de su recta intersección con el plano vertical, hasta que coincida con él. Como puede verse en las figuras adjuntas este abatimiento se acostumbra a realizar de modo que la parte anterior del plano de perfil quede a la derecha del observador (en apartados posteriores se desarrolla el procedimiento para abatir un plano de perfil).

A modo de ejemplo se muestran los casos particulares para una recta horizontal (fig. 2.7.7a), una recta frontal (fig. 2.7.7b) y de una recta paralela al plano de perfil (fig. 2.7.7c).

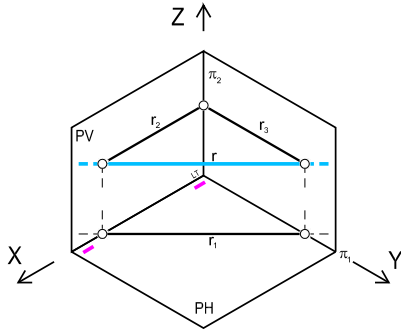


Fig. 2.7.7.a. Recta horizontal

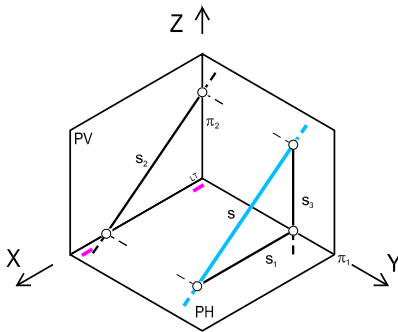
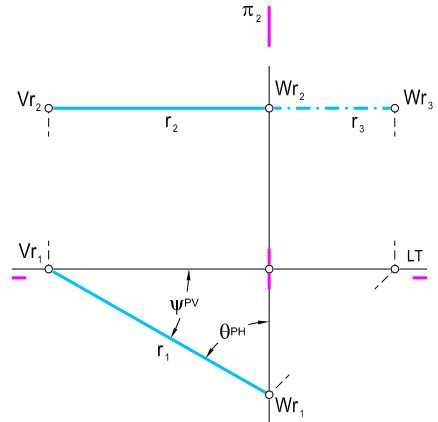


Fig. 2.7.7.b. Recta frontal

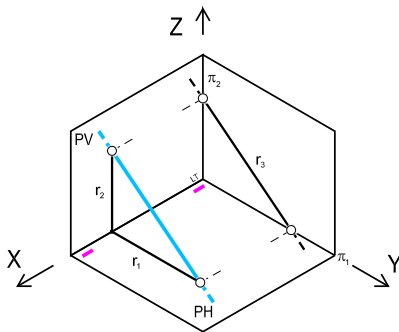
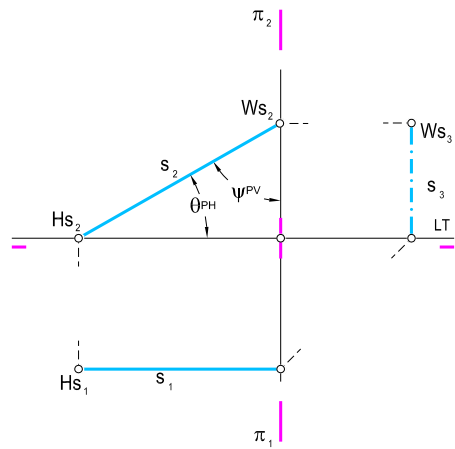
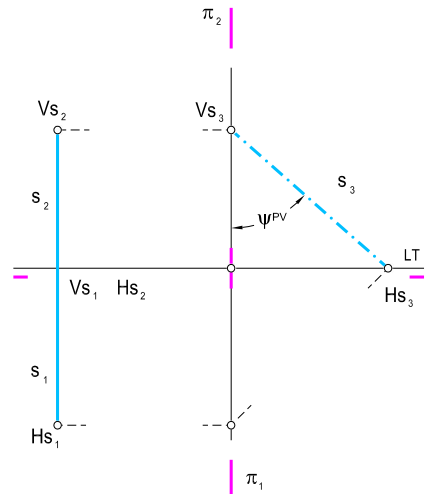


Fig. 2.7.7.c. Recta paralela al plano de perfil



2.8. PARTES VISTAS Y OCULTAS DE UNA RECTA

La determinación de las trazas de una recta es útil para presentar sus partes vistas y ocultas. Es parte vista de la recta el segmento comprendido en el 1.^{er} diedro, la cual se indica con línea continua; la parte restante es oculta, y se representa de forma discontinua (fig. 2.8.a).

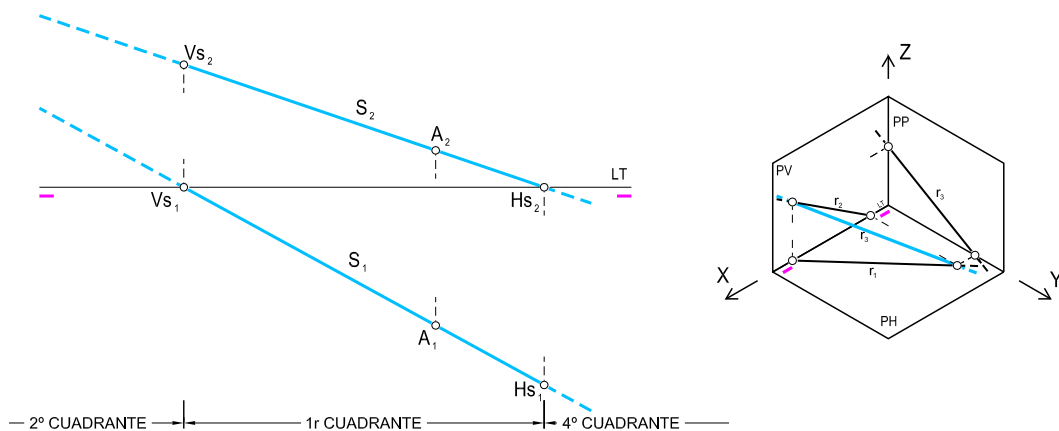


Fig. 2.8.a.

En la fig. 2.8.b se comprueba fácilmente que el segmento entre las trazas de la recta r pertenece al 2.^o diedro, para lo cual basta con tomar un punto cualquiera $B[B_1, B_2]$ y ver que lo verifica. Así mismo, se comprueba con el punto $A[A_1, A_2]$ que los puntos de la recta situados a partir de la traza vertical $V[Vr_1, Vr_2]$ hacia la derecha del observador se encuentran en el 1.^{er} diedro, y con el punto $C[C_1, C_2]$, que los puntos situados a partir de la traza horizontal $H[H_1, H_2]$ hacia la izquierda del observador se encuentran en el 4.^o diedro.

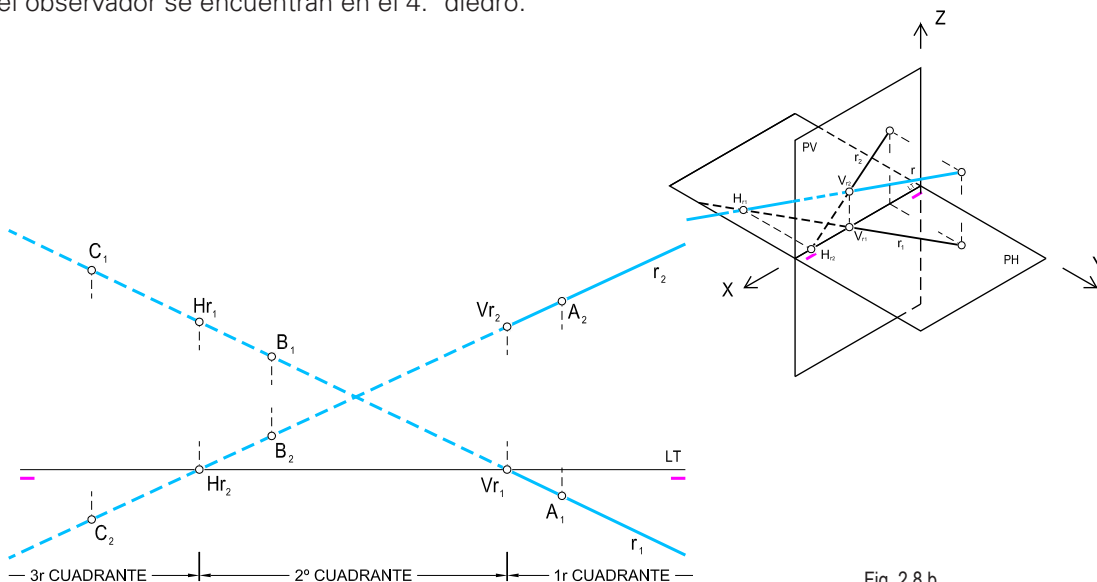


Fig. 2.8.b.



2.9. ABATIMIENTO Y DESABATIMIENTO DE UN PLANO DE PERFIL

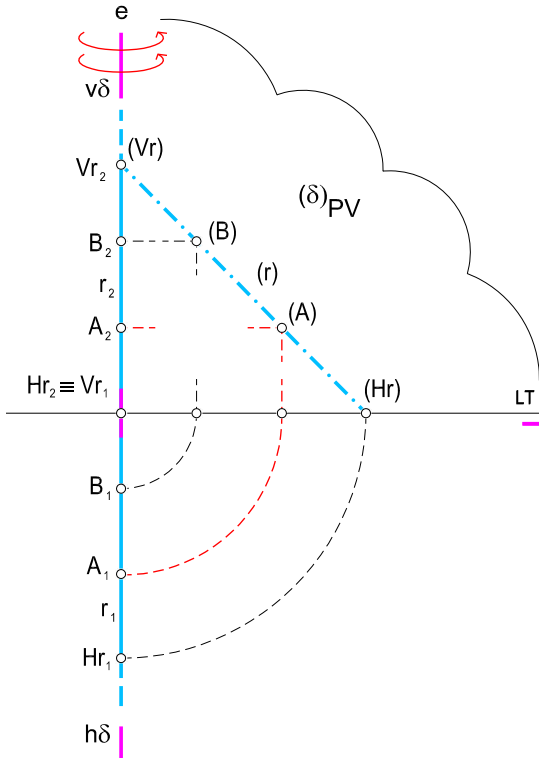


Fig. 2.9.a.

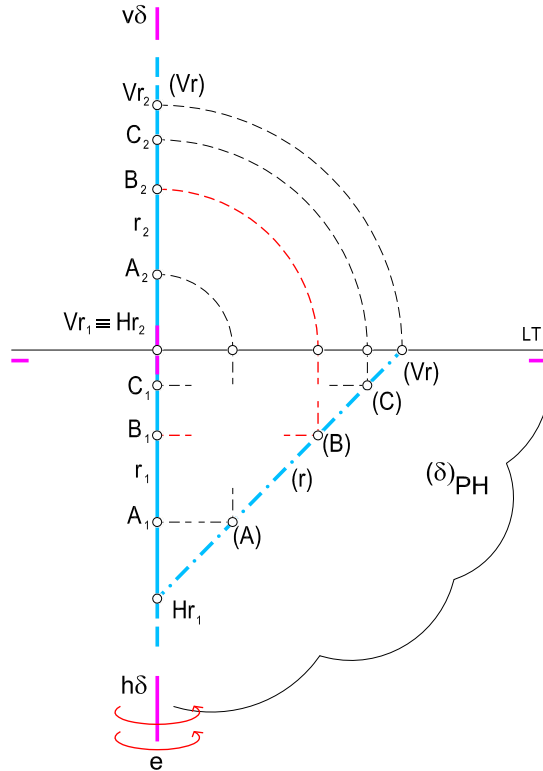


Fig. 2.9.b.

Para abatir sobre el plano vertical un plano de perfil δ que contenga una recta de perfil $r [r_1 r_2]$, bastará con abatir dos de sus puntos, por ejemplo $A[A_1 A_2]$ y $B[B_1 B_2]$. Como se puede observar en la fig. 2.9.a, para obtener el punto A abatido $\rightarrow (A)$, será necesario girar su proyección horizontal A_1 alrededor del $(0,0,0)$ hasta cortar en la LT , por donde se trazará una perpendicular a la misma, que cortará en (A) a la paralela a la LT que pasa por A_2 . Análogamente se encontraría el punto B abatido $\rightarrow (B)$, con lo que el abatimiento de la recta de perfil $r, (r)$, queda totalmente definido.

Aunque lo habitual es abatir los planos de perfil sobre el plano vertical de forma que la parte anterior del plano de perfil, una vez abatido, quede a la derecha del observador, existe la posibilidad de abatir el plano de perfil alrededor de su recta intersección con el plano horizontal, es decir, abatirlo sobre el plano horizontal (fig. 2.9.b). En este caso, el procedimiento es análogo al explicado en el caso anterior.

2.10. INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS DE PERFIL

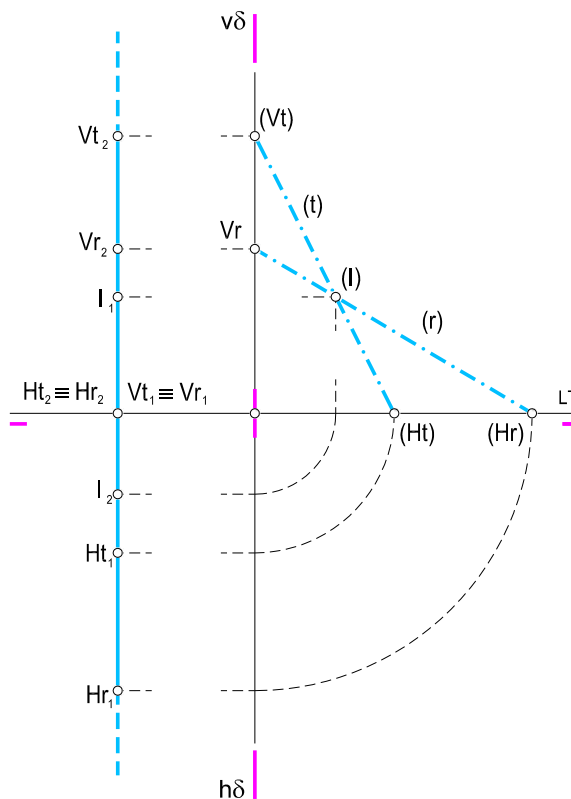


Fig. 2.10.

La intersección de dos rectas es un punto, por lo que para que dos rectas de perfil se intersequen deben estar contenidas en el mismo plano de perfil. Así pues, para determinar la intersección de dos rectas de perfil (fig. 2.10), será necesario abatir las dos rectas, lo que permitirá identificar inmediatamente el punto intersección abatido (I).

Una vez localizado el punto intersección abatido (I), para determinar su proyección vertical I_2 se traza una paralela a la LT desde el punto (I) hasta las proyecciones verticales de las dos rectas. Para hallar la proyección horizontal I_1 , se baja por (I) una perpendicular a la $L.T$ hasta que corte a la misma en (I_1), se gira dicho punto alrededor de $(0,0,0)$ hasta cortar el plano de perfil utilizado para el abatimiento y se traza, a partir de ahí, una paralela a la LT hasta las proyecciones horizontales de las rectas.



2.11. POR UN PUNTO P , RECTA PARALELA A UNA DE PERFIL

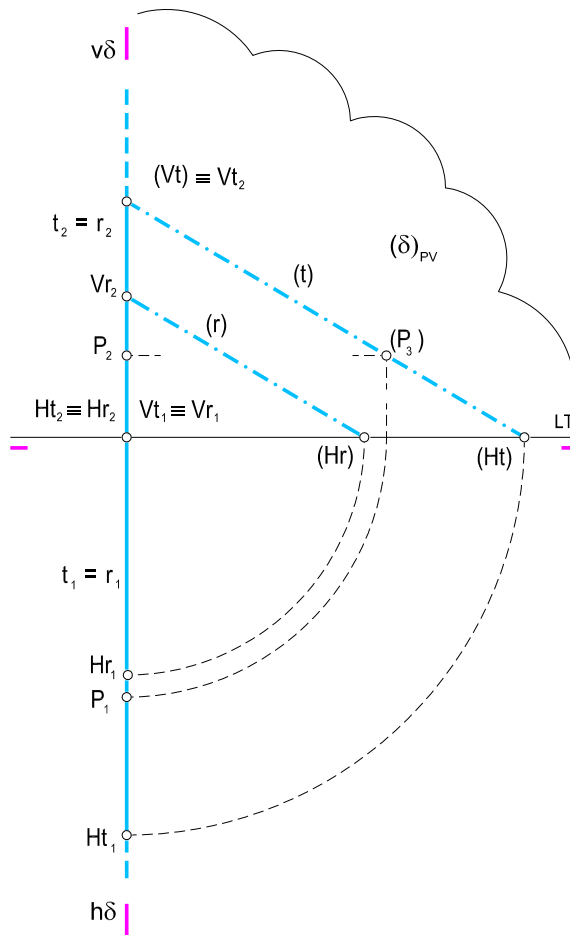


Fig. 2.11.

Dada la recta de perfil $r[r_1, r_2]$ y el punto $P[P_1, P_2]$, para trazar por el punto P una paralela a la recta r basta con representar la tercera proyección de la recta y del punto (fig. 2.11).

2.12. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

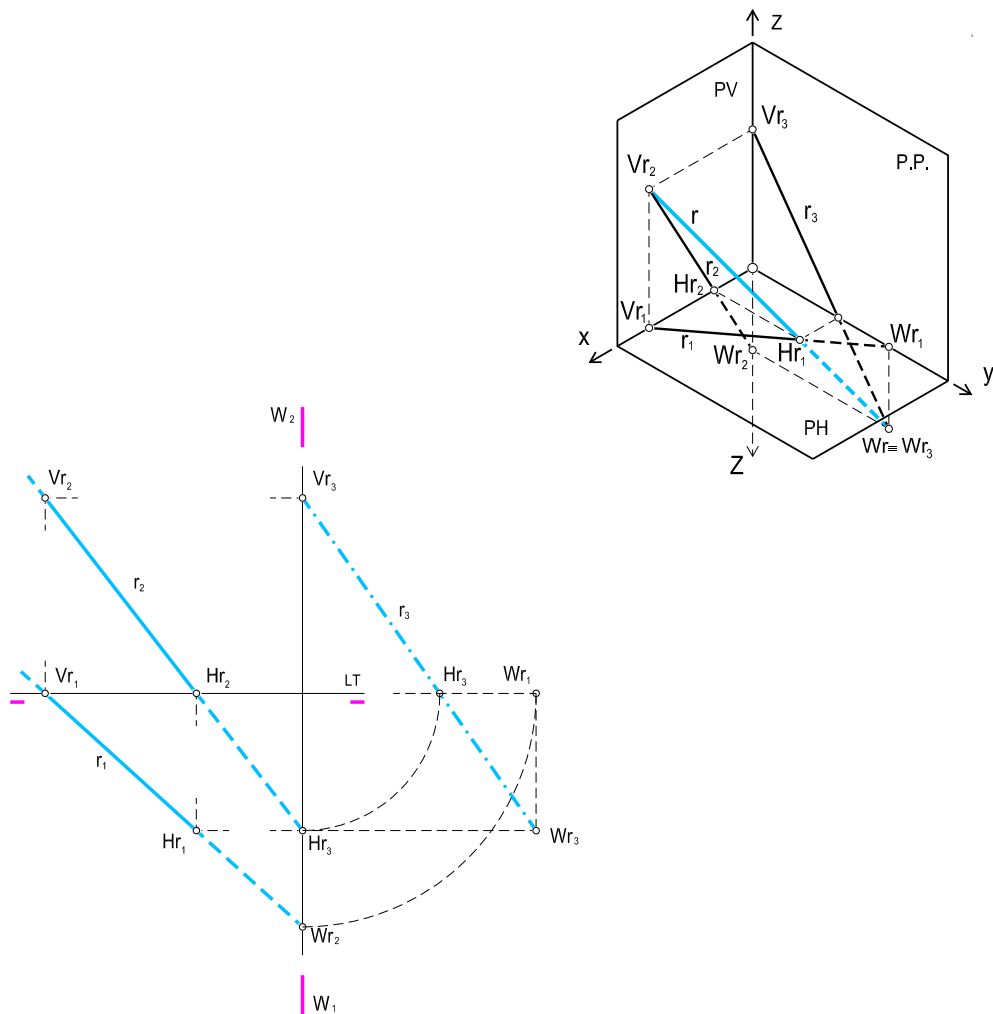


Fig. 2.12.

Tal y como hemos dicho, los puntos de intersección de una recta con los planos de proyección son las trazas de la recta. Como vemos en la fig. 2.12, de la intersección de la recta $r[r_1, r_2]$ con los planos de proyección y con el de perfil se obtienen las trazas Vr_2 , Hr_1 y Wr_3 .



2.13. VERDADERA MAGNITUD DE SEGMENTOS OBLICUOS EN EL SISTEMA DIÉDRICO

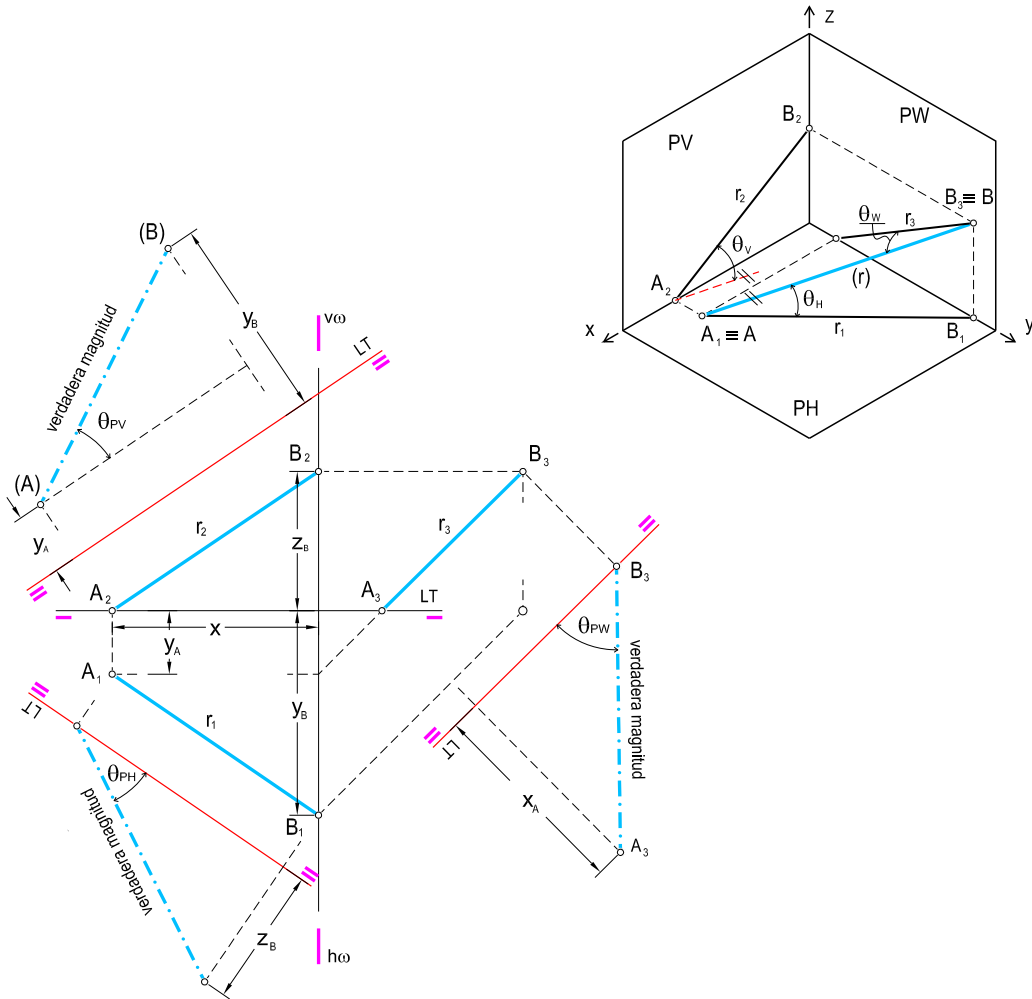
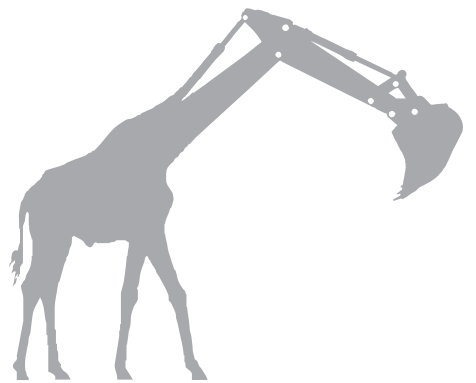


Fig. 2.13.

Para hallar la distancia entre dos puntos $A[A_1A_2]$ y $B[B_1B_2]$ (fig. 2.13) hay que abatir el triángulo rectángulo ABX (siendo el punto $X[X_1X_2]$ un punto contenido en la recta perpendicular al plano sobre el que se abate y que pasa por el punto más alejado de los dos a dicho plano, teniendo, en función del caso, el mismo alejamiento, cota o desviación que el otro punto).

Si por ejemplo se abate sobre el $P.H.$, abatiremos el triángulo rectángulo ABB_1 , que tiene por catetos la proyección horizontal A_1B_1 del segmento dado y la diferencia de cotas entre los dos puntos; la hipotenusa de este triángulo es la magnitud que se busca, VM_{AB} . El eje de abatimiento es el cateto A_1B_1 .



→ 3



El plano

- 3.1. REPRESENTACIÓN DE UN PLANO
- 3.2. PUNTO CONTENIDO EN UN PLANO
- 3.3. RECTA CONTENIDA EN UN PLANO
- 3.4. RECTAS PARTICULARES CONTENIDAS EN UN PLANO
 - 3.4.1. Recta frontal
 - 3.4.2. Recta horizontal
 - 3.4.3. Recta de máxima pendiente y máxima inclinación
- 3.5. POSICIONES PARTICULARES DEL PLANO
 - 3.5.1. Plano vertical
 - 3.5.2. Plano de canto
 - 3.5.3. Plano de perfil
 - 3.5.4. Plano horizontal
 - 3.5.5. Plano frontal
 - 3.5.6. Plano paralelo a la LT
 - 3.5.7. Plano LT - punto A
 - 3.5.8. Plano perpendicular al primer bisector
 - 3.5.9. Plano perpendicular al segundo bisector
- 3.6. TRAZAS DE UN PLANO DEFINIDO POR DOS RECTAS
 - 3.6.1. Dos rectas que se cortan
 - 3.6.2. Dos rectas paralelas
 - 3.6.3. Dos rectas que se cortan con sus trazas fuera del dibujo
- 3.7. PLANOS QUE PASAN POR UNA RECTA



3.1. REPRESENTACIÓN DE UN PLANO

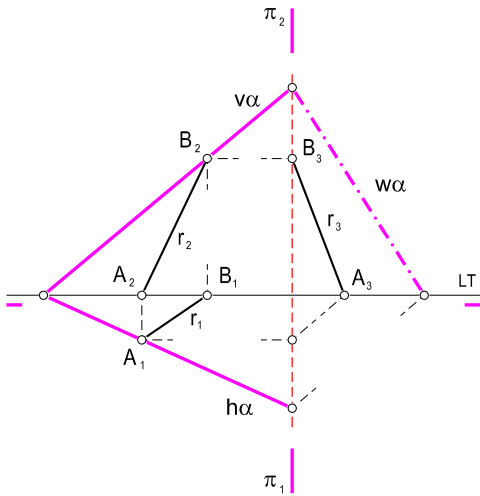


Fig. 3.1.

Generalmente, en geometría descriptiva un plano se representa mediante sus trazas, que son las rectas intersección del plano con cada uno de los planos de proyección. Un plano tiene, pues, dos trazas, la horizontal y la vertical (si se trabaja con el plano de perfil, el plano tendrá una tercera traza), que en el caso más general se cortan en un punto de la LT. Dado el plano α (fig. 3.1), sus trazas son las rectas intersección con los planos de proyección considerados v_α , h_α y w_α .

Un plano puede definirse de alguna de las tres formas siguientes:

- Por tres puntos no alineados; $\alpha(A, B, C)$.
- Por dos rectas que se cortan en un punto propio o impropio (rectas paralelas); $\alpha(r, s)$.
- Una recta y un punto exterior a ella $\alpha(r, A)$.

3.2. PUNTO CONTENIDO EN UN PLANO

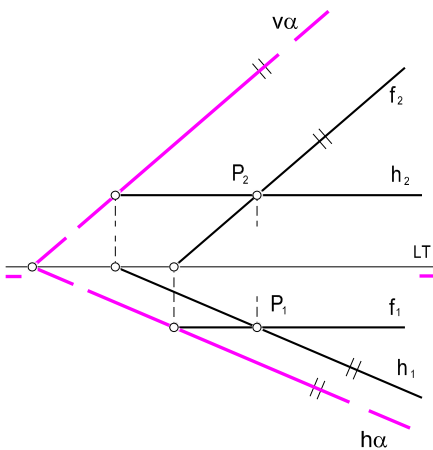


Fig. 3.2.a.

Un punto está situado sobre un plano si está contenido en una recta que, a su vez, esté contenida en el plano; tal y como veremos posteriormente, una recta está contenida en un plano cuando las trazas de la recta están sobre las trazas del plano.

Para comprobar que el punto $P[P_1, P_2]$ está contenido en el plano $\alpha[v_\alpha, h_\alpha]$ (fig. 3.2.a), basta con representar una recta cualquiera contenida en el plano y que pase por el punto y comprobar que, efectivamente, el punto está contenido en la recta; generalmente, esta recta suele tomarse horizontal o frontal por la sencillez que tienen las construcciones a realizar.

Si queremos determinar la proyección horizontal de un punto P situado sobre un plano $\alpha[v_\alpha, h_\alpha]$, conociendo únicamente su proyección vertical

P_2 (fig. 3.2.b), podemos servirnos de una recta horizontal $h[h_1, h_2]$ que pase por dicho punto: la proyección vertical h_2 de la recta es paralela a la LT hasta que corta a la traza vertical v_α del plano en un punto, siendo este mismo la traza vertical de la recta horizontal considerada. La recta $h[h_1, h_2]$, por ser una recta horizontal de plano su proyección horizontal será paralela a la traza horizontal h_α del plano, por lo que la proyección horizontal del punto P (perpendicular a la LT que pasa por P_2) y la proyección horizontal h_1 de la recta horizontal, determina la proyección horizontal P_1 del punto P .

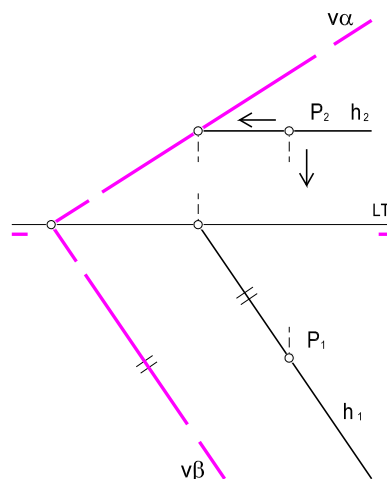


Fig. 3.2.b.

De forma análoga operaríamos si el dato de partida fuera la proyección horizontal P_1 del punto P y se pretendiera hallar la proyección vertical P_2 .

3.3. RECTA CONTENIDA EN UN PLANO

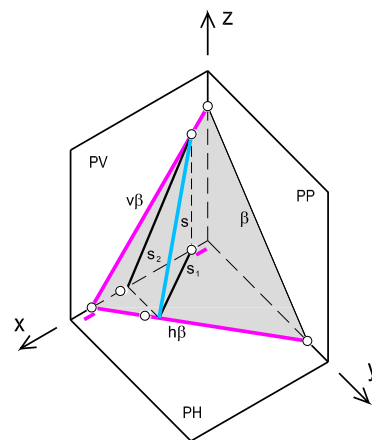
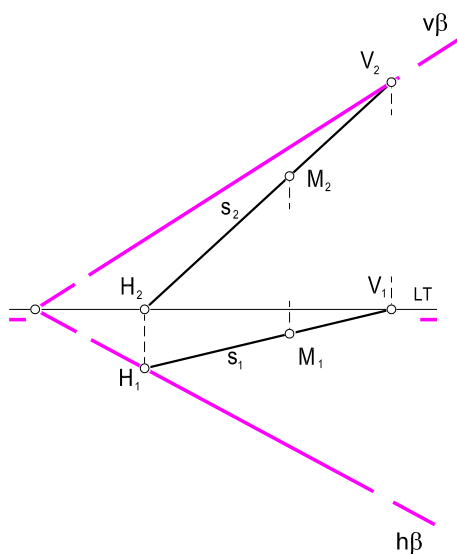


Fig. 3.3.

Una recta está contenida en un plano cuando las trazas de la misma recaen en algún punto sobre las homónimas del plano, es decir, cuando la traza vertical de la recta está contenida en la traza vertical del plano y, simultáneamente, cuando la traza horizontal de la recta está contenida en la traza horizontal del plano. En la fig. 3.3 se aprecia perfectamente como la V y H recaen sobre v_β y h_β respectivamente.



3.4. RECTAS PARTICULARES CONTENIDAS EN UN PLANO

Entre las rectas que pueden estar contenidas en un plano existen varias rectas particulares que, además, nos serán de gran utilidad en todo el estudio de la materia que nos ocupa.

3.4.1. Recta frontal

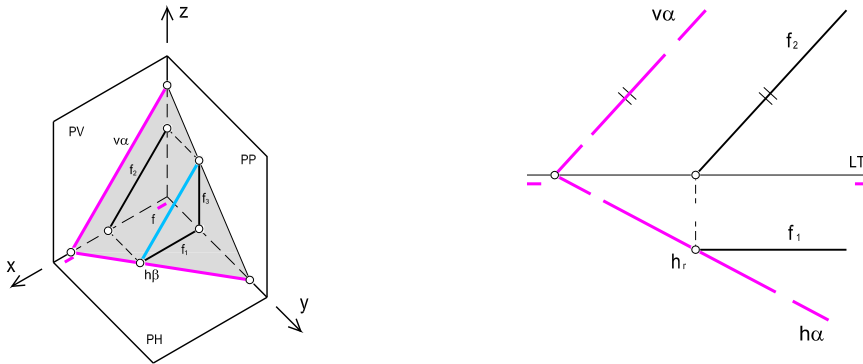


Fig. 3.4.1.

Una recta frontal f contenida en un plano cualquiera α es paralela al PV, por lo que no tendrá más que una traza, la horizontal, situada sobre la traza h_α del plano considerado (fig. 3.4.1). En el sistema diédrico, la proyección horizontal de estas rectas es paralela a la LT, mientras que la proyección vertical es paralela a la traza vertical del plano.

3.4.2. Recta horizontal

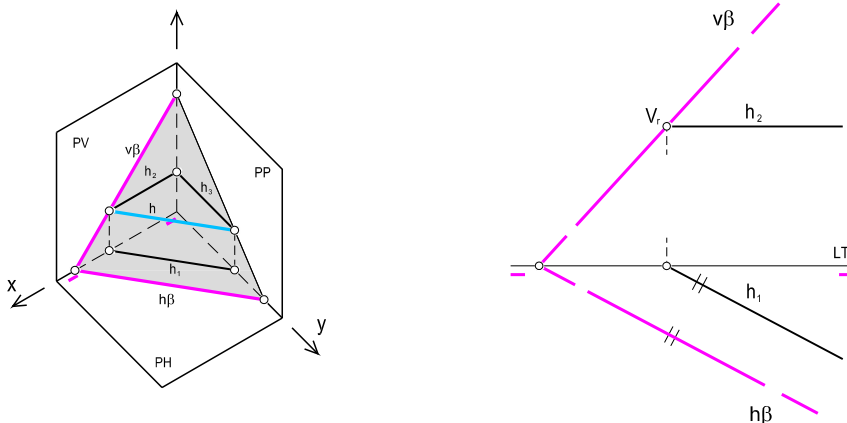


Fig. 3.4.2.

Una recta horizontal h de un plano cualquiera β es paralela al PH de proyección (fig. 3.4.2). En el sistema diédrico, la proyección horizontal de estas rectas es paralela a la traza horizontal del plano y la proyección vertical, paralela a la LT, estando su única traza propia, la vertical, sobre v_β .

3.4.3. Recta de máxima pendiente y máxima inclinación

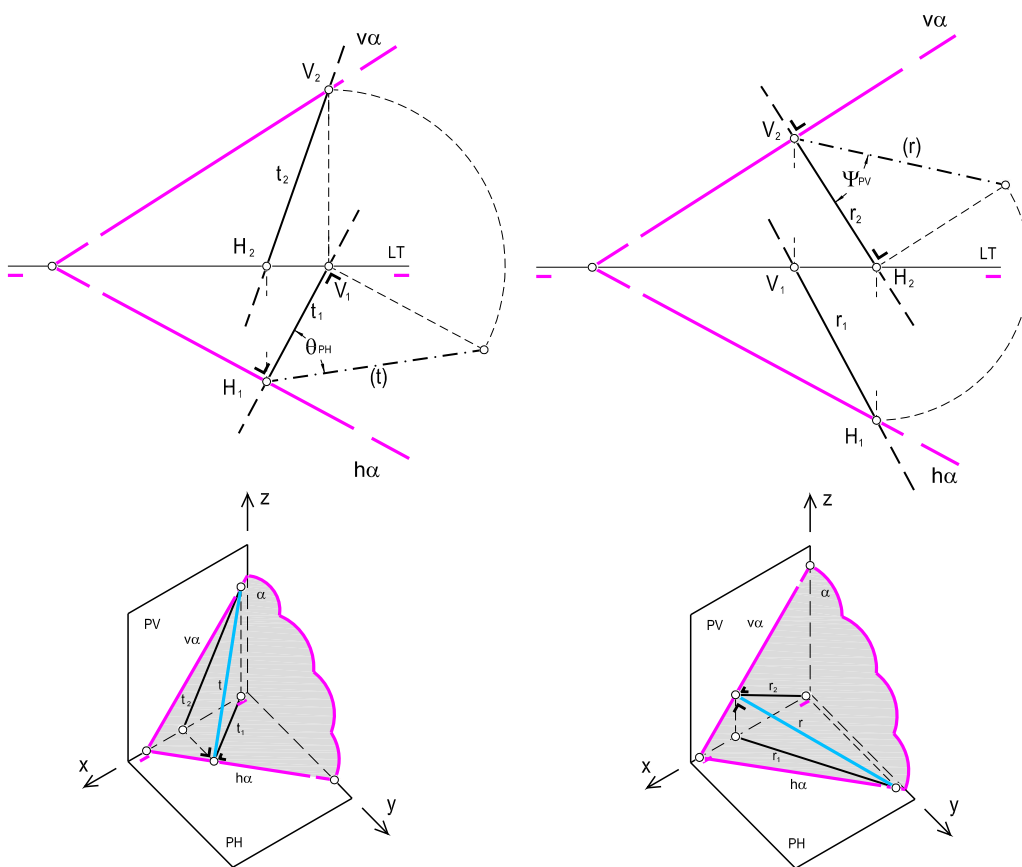


Fig. 3.4.3.a.

Fig. 3.4.3.b.

Se denominan rectas de máxima pendiente de un plano α , con respecto a otro plano de referencia PR, aquellas rectas que perteneciendo a α , forman el mayor ángulo posible con PR. Tal y como se verá, estas rectas son perpendiculares a la recta de intersección de ambos planos, y por el teorema de las tres perpendiculares, su proyección ortogonal sobre el plano PR es perpendicular a dicha intersección.

En el sistema diédrico, se definen las rectas de máxima pendiente de un plano α con respecto a los planos de proyección PH y PV, designándose a las primeras con el nombre de máxima pendiente (fig. 3.4.3.a) y a las segundas como rectas de máxima inclinación (fig. 3.4.3.b).

En el primer caso (fig. 3.4.3.a), la proyección horizontal t_1 de la recta de máxima pendiente es perpendicular a la traza horizontal h_α del plano dado $\alpha[h_\alpha v_\alpha]$. Por el contrario, en el segundo caso (fig. 3.4.3.b), la proyección vertical r_2 de la recta de máxima inclinación es perpendicular a la traza vertical v_α del plano dado $\alpha[h_\alpha v_\alpha]$.



3.5. POSICIONES PARTICULARES DEL PLANO

3.5.1. Plano vertical

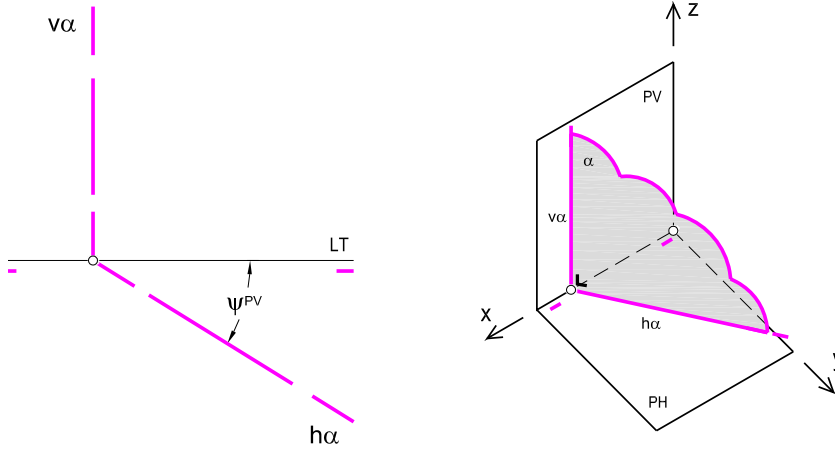


Fig. 3.5.1.

Es todo plano perpendicular al PH, por lo que su traza vertical es perpendicular a la LT (fig. 3.5.1).

3.5.2. Plano de canto

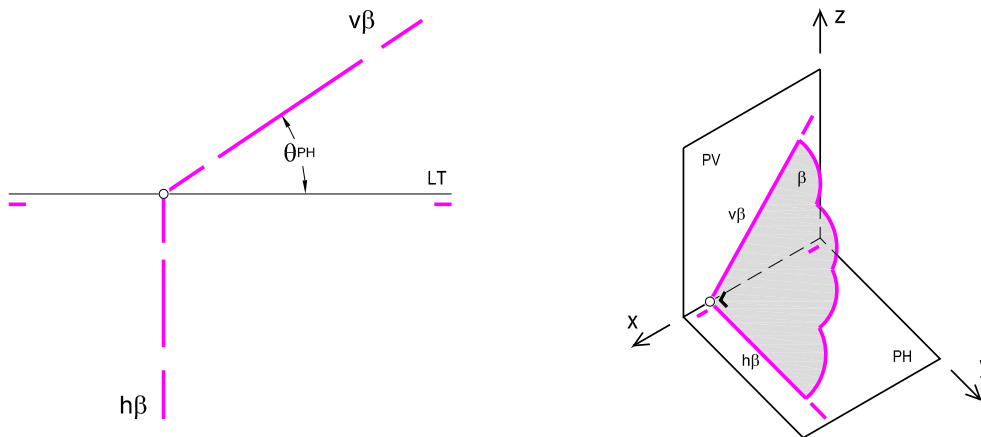


Fig. 3.5.2.

Es todo plano perpendicular al PV. Así pues, su traza horizontal es perpendicular a la LT (fig. 3.5.2).

3.5.3. Plano de perfil

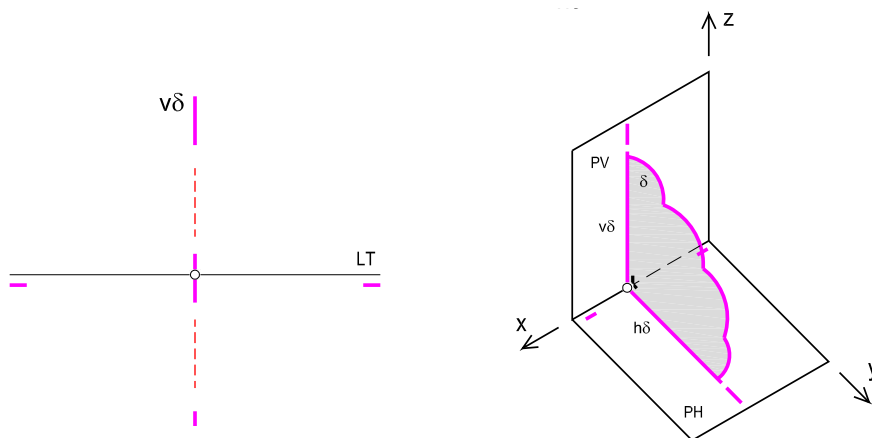


Fig. 3.5.3.

Es todo plano perpendicular a la LT y, por lo tanto, perpendicular al PV y al PH sus trazas horizontal y vertical están en prolongación y son perpendiculares a la LT. Podría definirse como un plano que siendo vertical, es al mismo tiempo de canto (fig. 3.5.3).

3.5.4. Plano horizontal

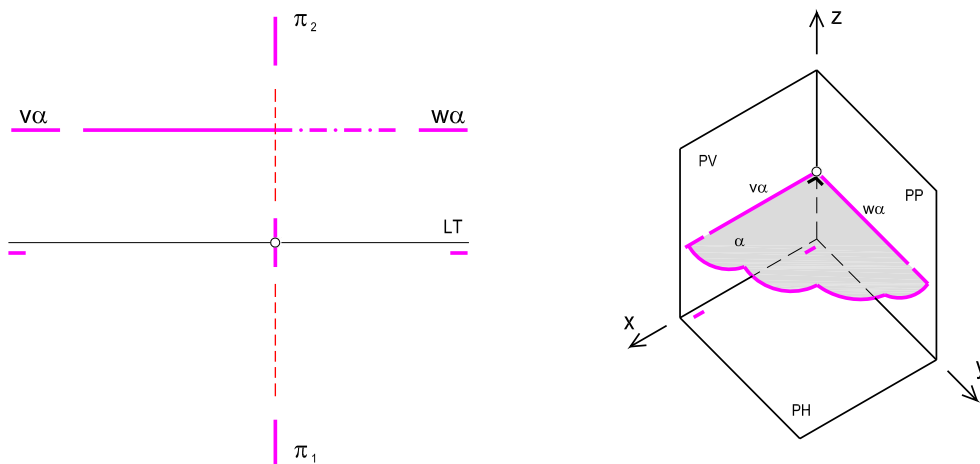


Fig. 3.5.4.

Es todo plano paralelo al PH, su traza horizontal es impropia, mientras que la traza vertical es paralela a la LT (fig. 3.5.4).



3.5.5. Plano frontal

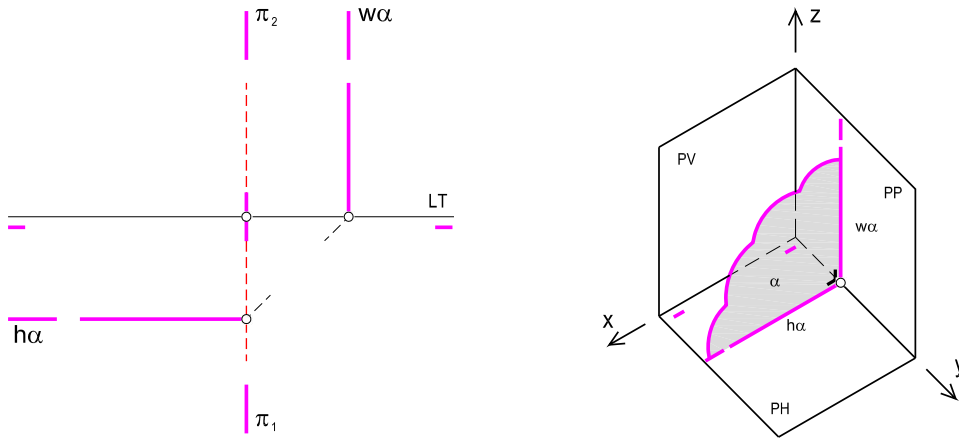


Fig. 3.5.5.

Es todo plano paralelo al PV de proyección, por lo que su traza vertical es impropia, mientras que la traza horizontal es paralela a la LT (fig. 3.5.5).

3.5.6. Plano paralelo a la LT

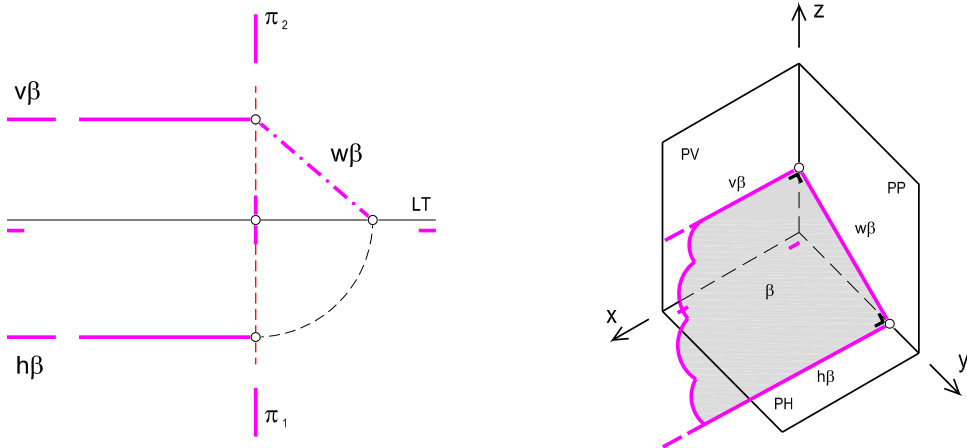


Fig. 3.5.6.

Un plano paralelo a la LT tiene sus trazas paralelas a la misma (fig. 3.5.6).

3.5.7. Plano LT Punto A

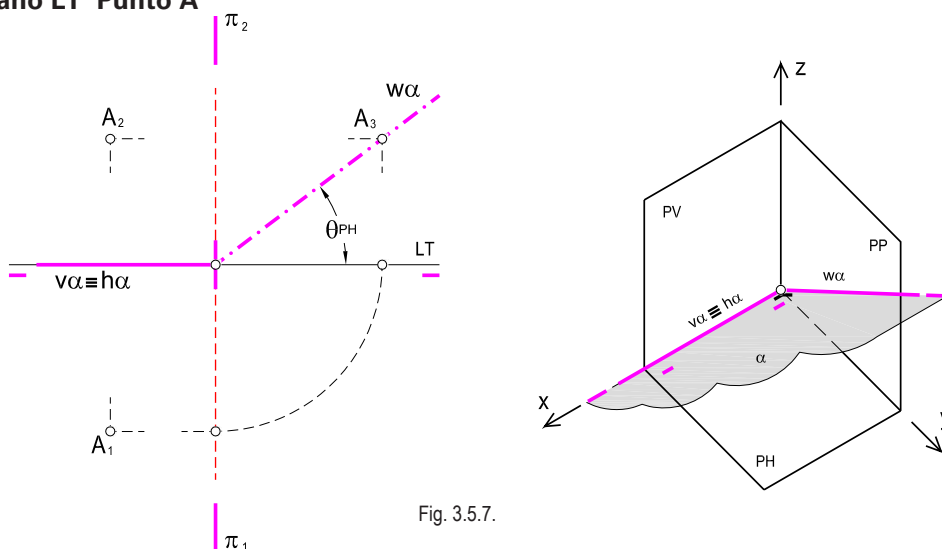


Fig. 3.5.7.

Las trazas de cualquier plano que pase por la LT se confunden con ella, por lo que generalmente la forma de visualizarlo es trabajar con su tercera proyección mediante un plano de perfil cualquiera (fig. 3.5.7). Para definir un plano que pase por la LT, bien necesitamos conocer un punto $A[A_1, A_2]$ por el que pase, o bien el ángulo que forma con alguno de los planos de proyección.

3.5.8. Plano perpendicular al primer bisector

Todo plano perpendicular al primer bisector determina trazas simétricas respecto de la LT con los planos de proyección tal y como puede verse en la fig. 3.5.8.

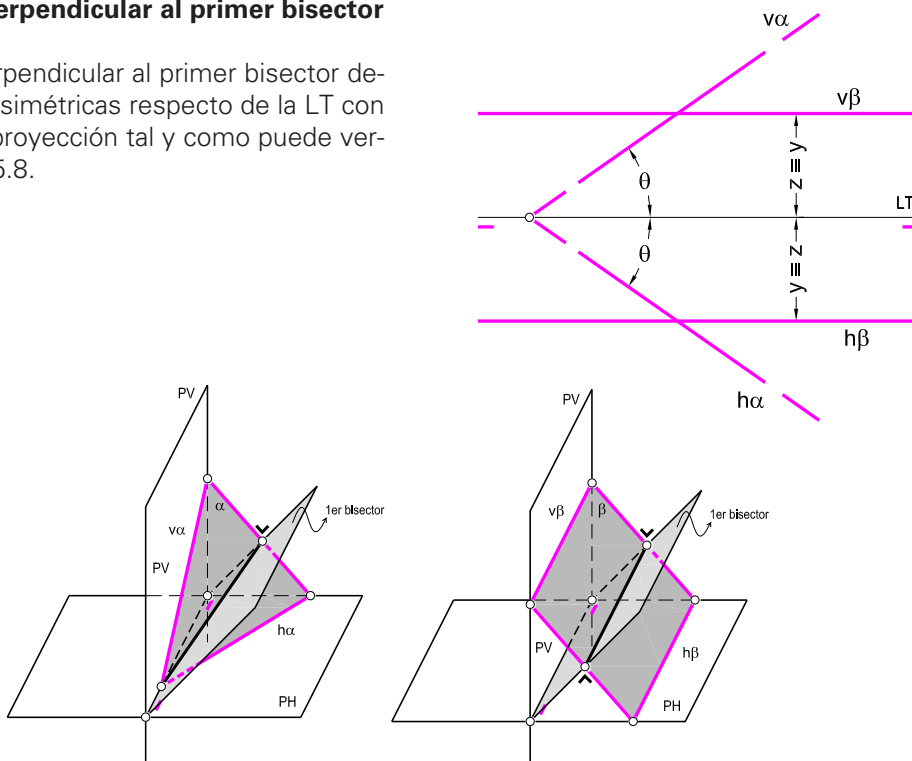


Fig. 3.5.8.



3.5.9. Plano perpendicular al segundo bisector

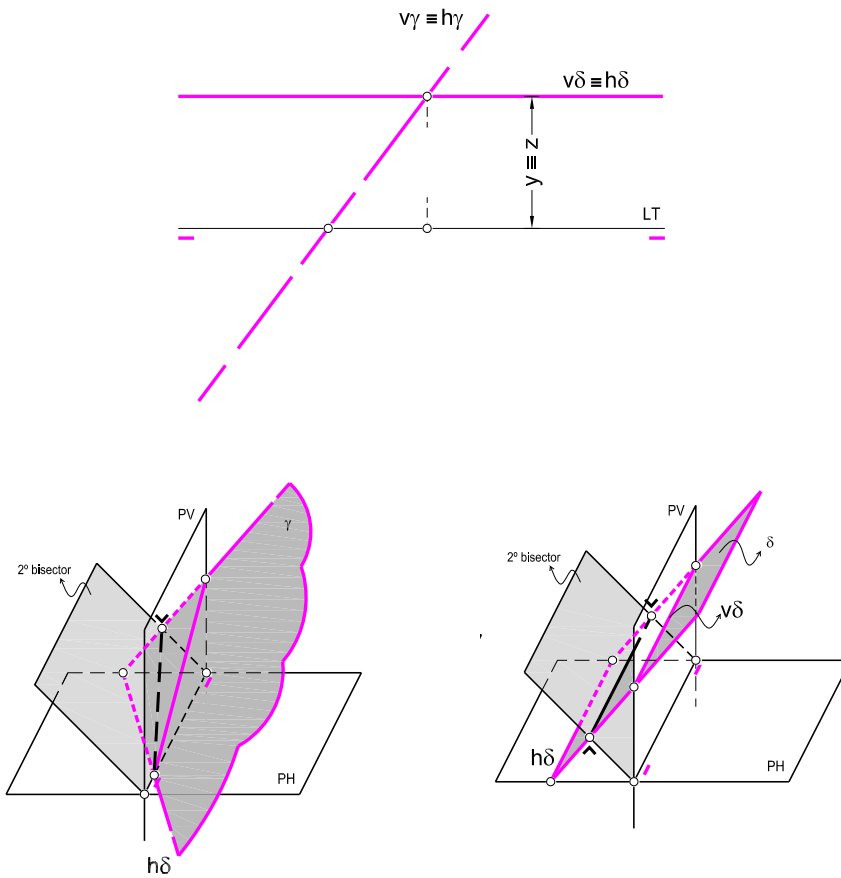


Fig. 3.5.9.

Los planos perpendiculares al segundo bisector tienen sus trazas en prolongación (fig. 3.5.9).

3.6. TRAZAS DE UN PLANO DEFINIDO POR DOS RECTAS

3.6.1. Dos rectas que se cortan

Si se trata de determinar las trazas de un plano definido por dos rectas $r[r_1, r_2]$ y $t[t_1, t_2]$ que se cortan en un punto $l[l_1, l_2]$, basta con determinar las trazas de ambas rectas, y uniendo las del mismo nombre, tendremos las trazas v_a y h_a del plano formado por ellas, que, como comprobación, se puede ver que concurren en un mismo punto sobre la LT.

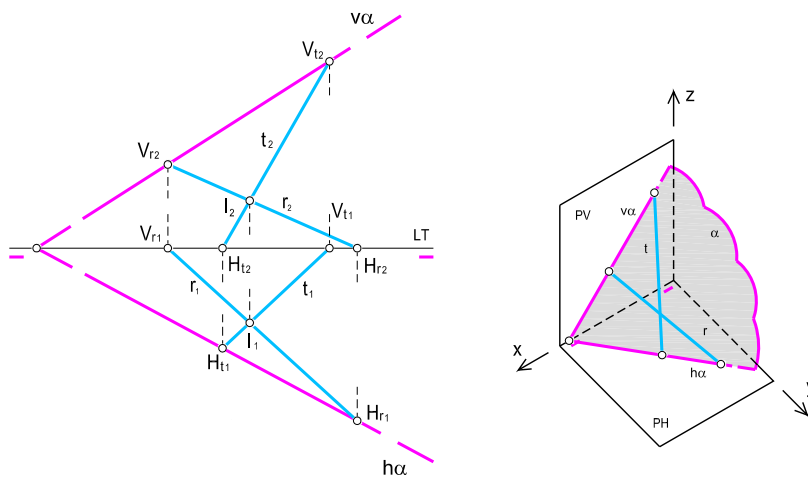


Fig. 3.6.1.

Así, en la fig. 3.6.1 se han determinado las trazas verticales de las rectas, Vr_2 y Vt_2 , que uniéndolas determinan la traza vertical del plano v_α ; del mismo modo, se han determinado las trazas horizontales Hr_1 y Ht_1 , que unidas determinan la traza horizontal del plano h_α . Ambas trazas del plano se cortan en un mismo punto perteneciente a la LT.

3.6.2. Dos rectas paralelas

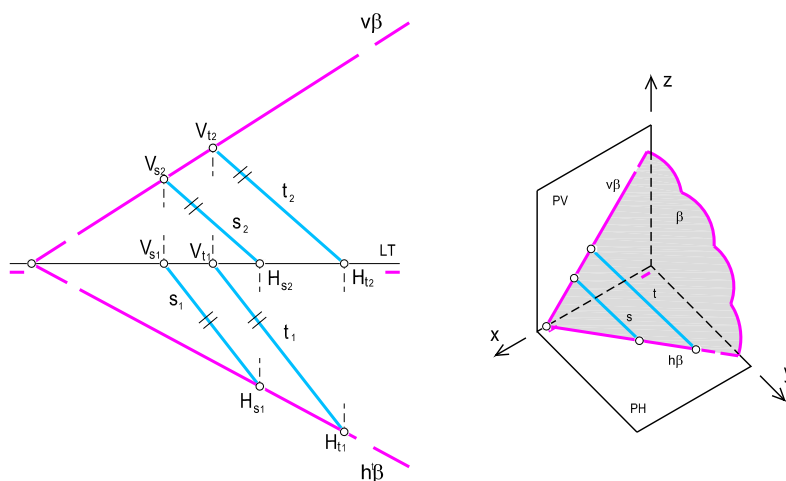


Fig. 3.6.2.

Si el plano está dado por dos rectas paralelas (fig. 3.6.2), podrá seguirse el mismo procedimiento desarrollado en el apartado anterior para determinar las trazas v_α y h_α del plano dado.



3.6.3. Dos rectas que se cortan con sus trazas fuera del dibujo

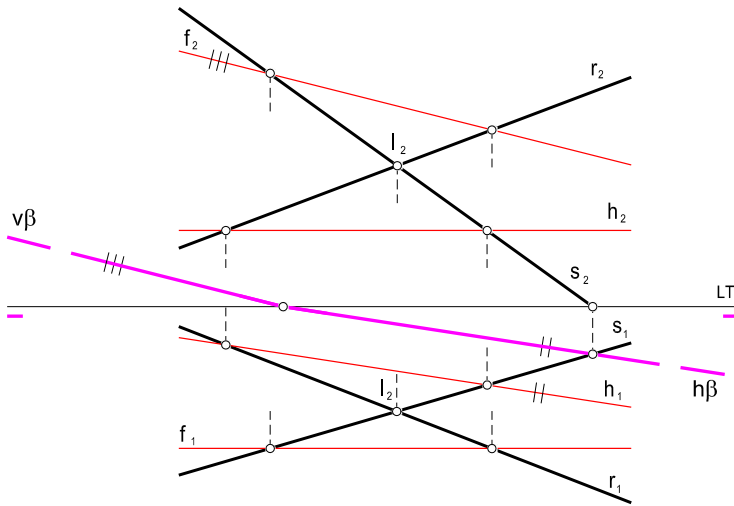


Fig. 3.6.3.

En algunos casos, al tratar de determinar las trazas de un plano, el problema no se puede resolver por encontrarse las trazas de las rectas que lo definen fuera de los límites del dibujo. Aun así, existe la posibilidad de determinar las direcciones de las trazas del plano. Si el plano viene definido por las rectas $r[r_1, r_2]$ y $s[s_1, s_2]$ y queremos determinar dichas direcciones de las trazas del plano, basta obtener las direcciones de las rectas horizontales y frontales del plano (fig. 3.6.3).

En primer lugar trazamos una recta horizontal $h[h_1, h_2]$ que tiene su proyección vertical paralela a la LT y está contenida en el plano dado. La proyección h_2 corta a las proyecciones verticales de las rectas dadas en sendos puntos, a partir de los cuales hallamos sus proyecciones horizontales sobre las rectas dadas, y que uniéndolos, obtendremos la proyección horizontal h_1 , y como consecuencia la dirección de la traza horizontal buscada.

De análoga forma, pero esta vez trabajando con una recta frontal $f[f_1, f_2]$, se puede determinar la dirección de la traza vertical del plano. La proyección horizontal f_1 corta a las proyecciones horizontales de las rectas dadas en sendos puntos, lo que permite hallar sus proyecciones verticales sobre las rectas de partida. Uniendo estas proyecciones verticales se obtiene la proyección vertical f_2 , y, como consecuencia, la dirección de la traza vertical buscada.

Conocidas las dos direcciones de las trazas del plano, si como en nuestro caso (fig. 3.6.3) se conoce aunque sea una de las cuatro trazas de las rectas que definen las trazas del plano, éstas quedan perfectamente definidas. Basta con hacer pasar por la traza horizontal de la recta s una paralela a la dirección h_1 de la recta horizontal de plano; dicha paralela cortará a la LT en un punto, a partir del cual trazaremos otra paralela a la dirección f_2 de la recta frontal de plano, hallando la traza vertical del plano.

3.7. PLANOS QUE PASAN POR UNA RECTA

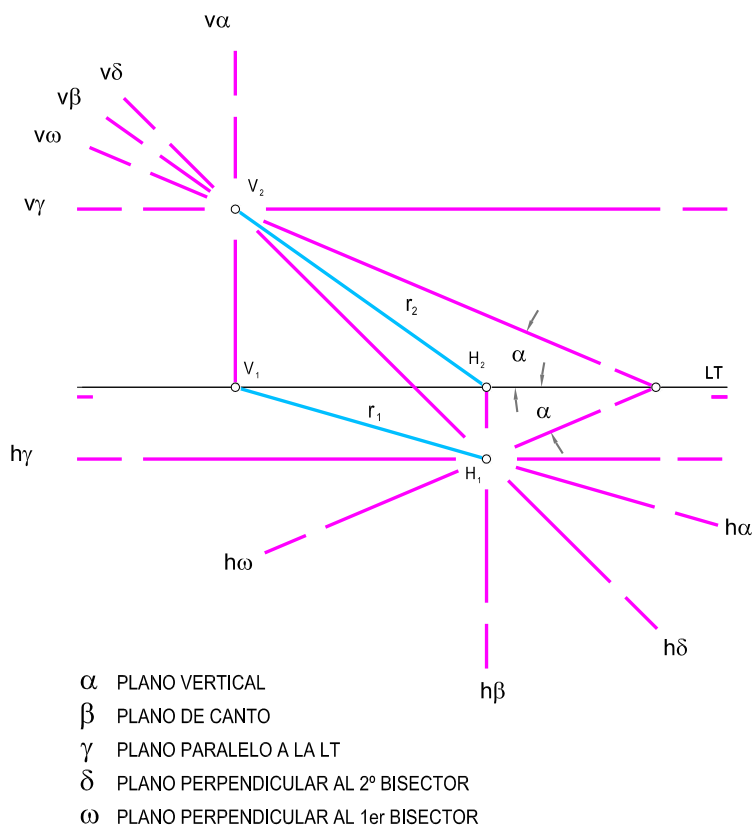


Fig. 3.7.

Hemos visto anteriormente que para que una recta esté contenida en un plano, las trazas de ésta han de estar sobre las trazas homónimas del plano. Recíprocamente, para que un plano pase por una recta, basta que cada traza del plano contenga a la traza del mismo nombre de la recta. El problema admite infinitas soluciones, por lo que además de pasar el plano por la recta, habrá que fijar otra condición para que la solución sea única.

En la fig. 3.7 se representan los casos de planos particulares que contienen a $r[r_1, r_2]$ vistos anteriormente.

→ 4



Intersección de planos y rectas

- 4.1. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS
- 4.2. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS. CASOS PARTICULARES
 - 4.2.1. Planos con las trazas que se cortan fuera del dibujo
 - 4.2.2. Planos sin trazas definidos por dos rectas
 - 4.2.3. Planos con las cuatro trazas coincidentes con la LT
 - 4.2.4. Uno de los planos pasa por la LT
 - 4.2.5. Otros casos particulares
- 4.3. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO
 - 4.3.1. Plano definido por sus trazas
 - 4.3.2. Plano definido por dos rectas
 - 4.3.3. Intersección de una recta con una figura plana
- 4.4. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN
- 4.5. PARTES VISTAS Y OCULTAS DE UNA RECTA CON UN PLANO OPACO



4.1. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS

En geometría descriptiva, la intersección de dos planos es una recta que quedará definida cuando se conozcan dos de sus puntos.

La determinación de estos puntos puede hacerse valiéndose de otros planos auxiliares más sencillos en cuanto a posición, y cuyas intersecciones con los dados sean más evidentes. Generalmente, se usan como planos auxiliares, en primer término, los dos planos de proyección, y en segundo lugar, los planos paralelos a ellos (planos horizontales y frontales).

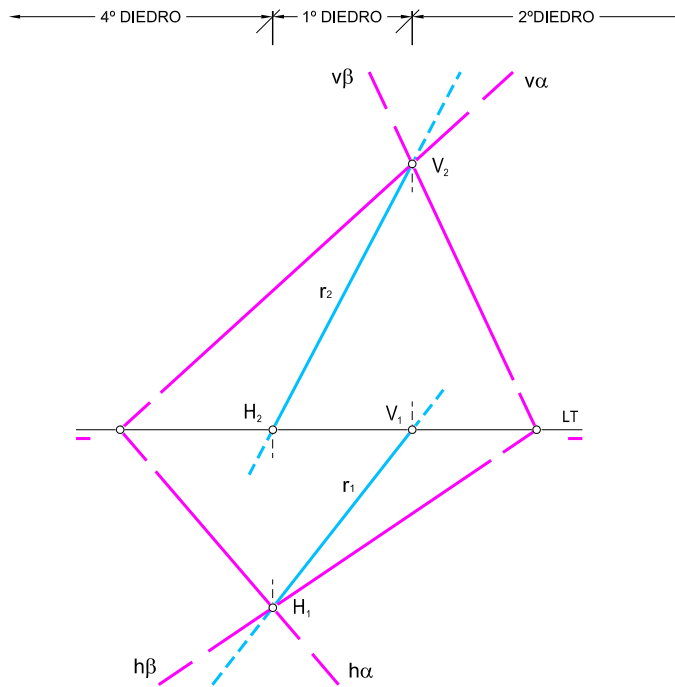


Fig. 4.1.a.

En el caso general, cuando los planos están definidos por sus trazas, resulta inmediata la determinación de la recta intersección, pues el punto común de sus trazas horizontales y el de sus trazas verticales son, respectivamente, la traza horizontal y vertical de la recta intersección. Así, en la fig. 4.1.a, la intersección de las trazas de igual nombre de los planos $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ y $\beta[h_\beta - v_\beta]$ nos determinan las trazas $H[H_1 - H_2]$ y $V[V_1 - V_2]$ de la recta intersección r , y por lo tanto, sus proyecciones r_1 y r_2 .

En las figuras adjuntas, se han representado los casos en los que la recta intersección se encuentre con el segmento entre trazas en el 1.º, 2.º, 3.º y 4.º diedro (fig. 4.1.a, fig. 4.1.b, fig. 4.1.c y fig. 4.1.d respectivamente).

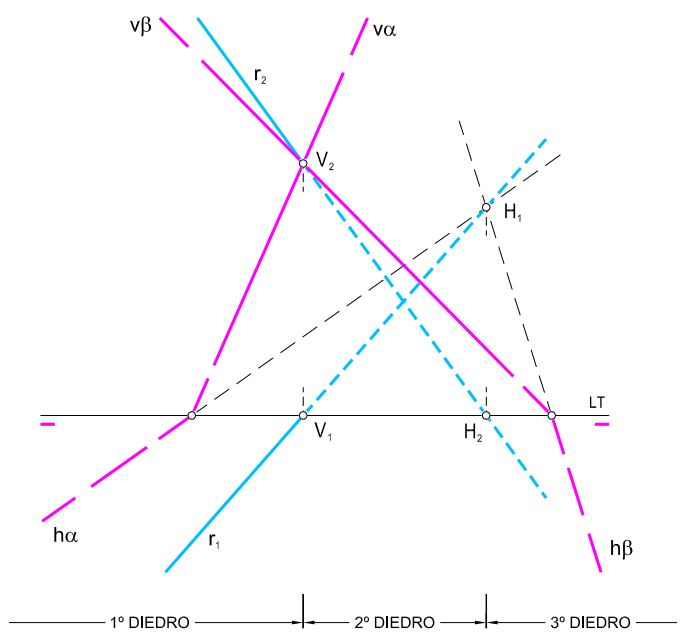


Fig. 4.1.b.

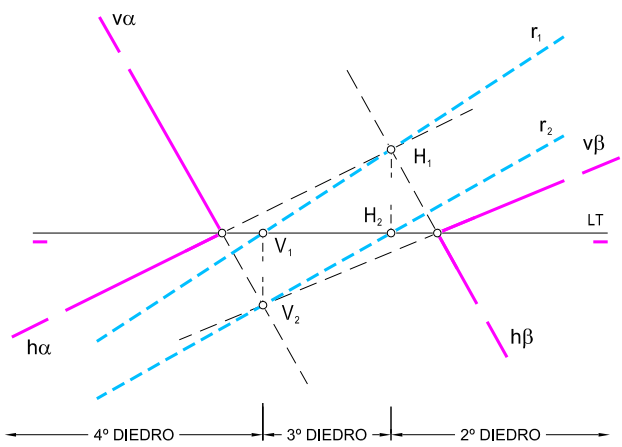


Fig. 4.1.c.

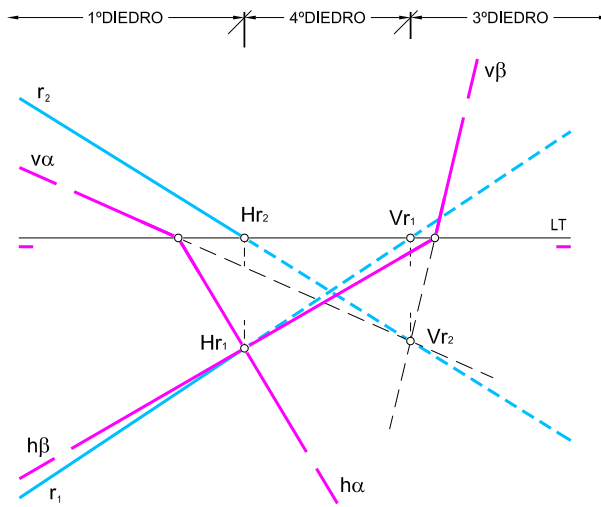


Fig. 4.1.d.

4.2. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS. CASOS PARTICULARES

4.2.1. Planos con trazas que se cortan fuera del dibujo

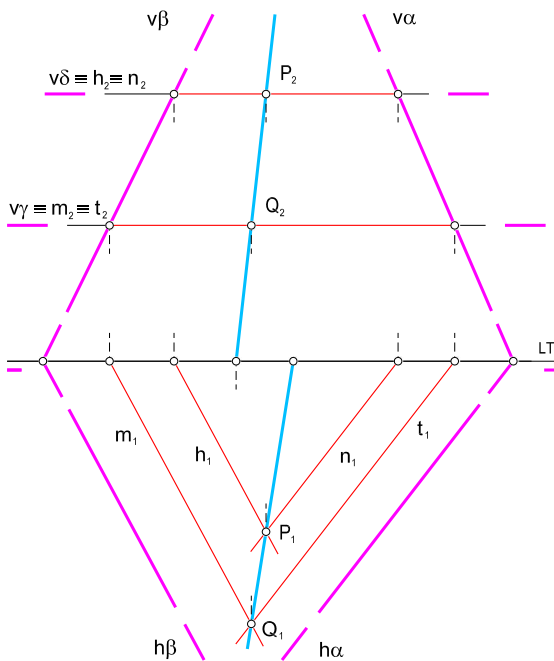


Figura 4.2.1.a.

Si alguna de las trazas homónimas de dos planos dados, $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ y $\beta[h_\beta - v_\beta]$ (fig. 4.2.1.a y fig. 4.2.1.b), no se cortan dentro de los límites del dibujo, es preciso acudir a planos auxiliares, que por comodidad suelen tomarse horizontales o frontales.



La fig. 4.2.1.a muestra el caso en que tanto las trazas verticales como las horizontales se cortan fuera del dibujo. Se han tomado como planos auxiliares los horizontales $\delta[v_\delta]$ y $\gamma[v_\gamma]$, que cortan a los dos planos dados (α y β) según cuatro rectas horizontales: $m[m_1 - m_2]$ y $t[t_1 - t_2]$ en el plano $\delta[v_\delta]$ y $n[n_1 - n_2]$ y $h[h_1 - h_2]$ en el plano por $\gamma[v_\gamma]$. La intersección de cada par de rectas determina, respectivamente, los puntos $Q[Q1 - Q2]$ y $P[P1 - P2]$, que unidos determinan la recta intersección $r[r_1 - r_2]$ buscada.

Análogamente, la fig. 4.2.1.b muestra el mismo procedimiento que el explicado pero trabajando con los planos frontales $\delta[h_\delta]$ y $\gamma[h_\gamma]$.

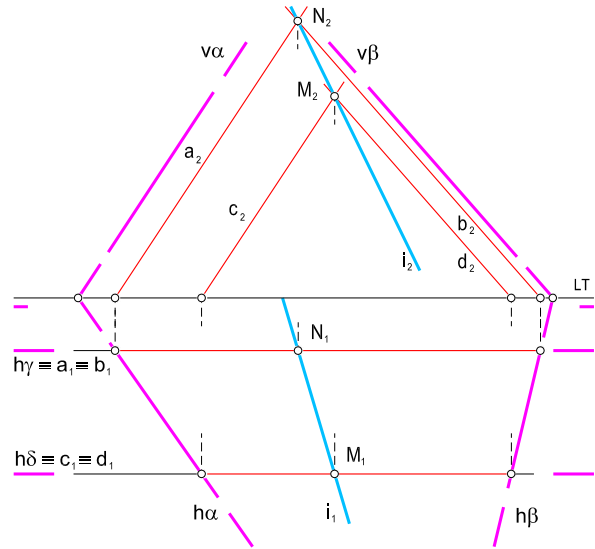


Figura 4.2.1.b.

4.2.2. Planos sin trazas definidos por dos rectas

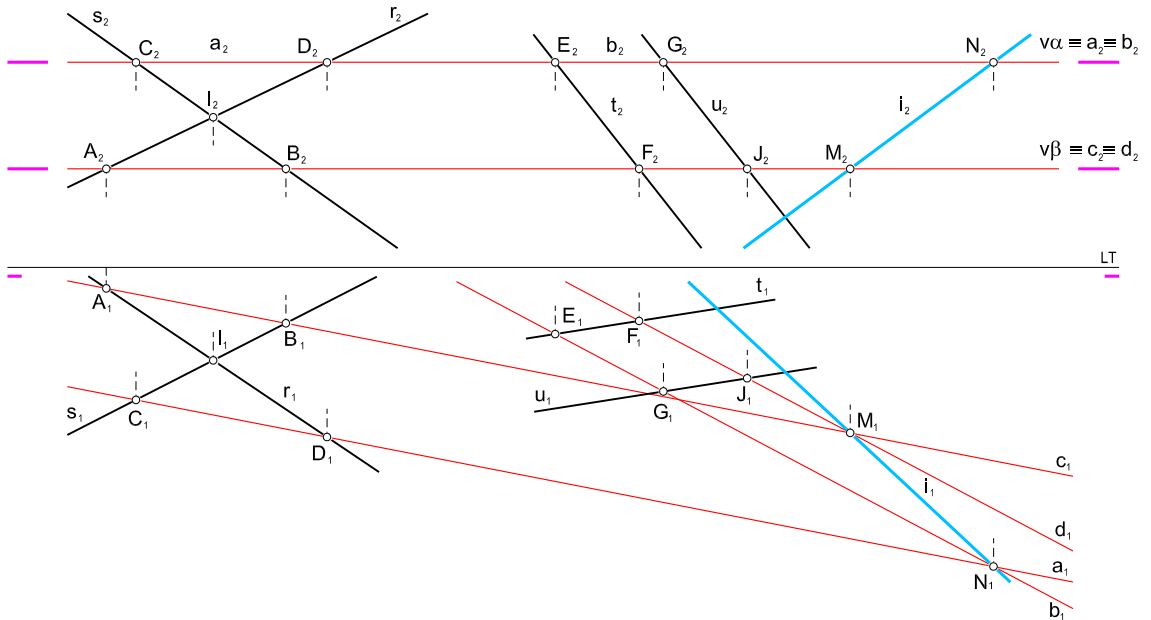


Fig. 4.2.2.



Supongamos (fig. 4.2.2) el plano definido por las rectas que se cortan $r[r_1 - r_2]$ y $s[s_1 - s_2]$ y el definido por las paralelas $t[t_1 - t_2]$ y $u[u_1 - u_2]$. Sin recurrir a las trazas podemos hallar su intersección cortando las rectas con dos planos auxiliares horizontales $\alpha[v_\alpha]$ y $\beta[v_\beta]$, que nos permitirán hallar, por medio de las horizontales correspondientes ($a[a_1 - a_2]$ y $b[b_1 - b_2]$ situadas en el plano α , y $c[c_1 - c_2]$ y $d[d_1 - d_2]$ situadas en el plano β), los puntos $M[M_1 - M_2]$ y $N[N_1 - N_2]$, la cual será pues, la recta que los une.

4.2.3. Planos con las cuatro trazas coincidentes con la LT

Sean los planos $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ y $\beta[h_\beta - v_\beta]$ cuyas trazas coinciden en un mismo punto de la LT. Este punto pertenece a la intersección, por lo que solo será preciso hallar otro punto de la intersección. En la resolución del problema se plantean dos opciones, la primera trabajando con un plano horizontal δ y la segunda mediante un plano de perfil δ .

Mediante un plano horizontal (fig. 4.2.3.a)

Cortamos con un plano auxiliar horizontal $\delta[v_\delta]$, el cual determina con el plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ la recta intersección $m[m_1 - m_2]$, y con el plano $\beta[h_\beta - v_\beta]$ la recta intersección $n[n_1 - n_2]$. De la intersección de las rectas m y n (ambas están en el plano horizontal utilizado), resulta el punto $A[A_1 - A_2]$ buscado, que unido con el punto de la LT donde coinciden las trazas de α y β , determina la recta intersección entre los planos de partida.

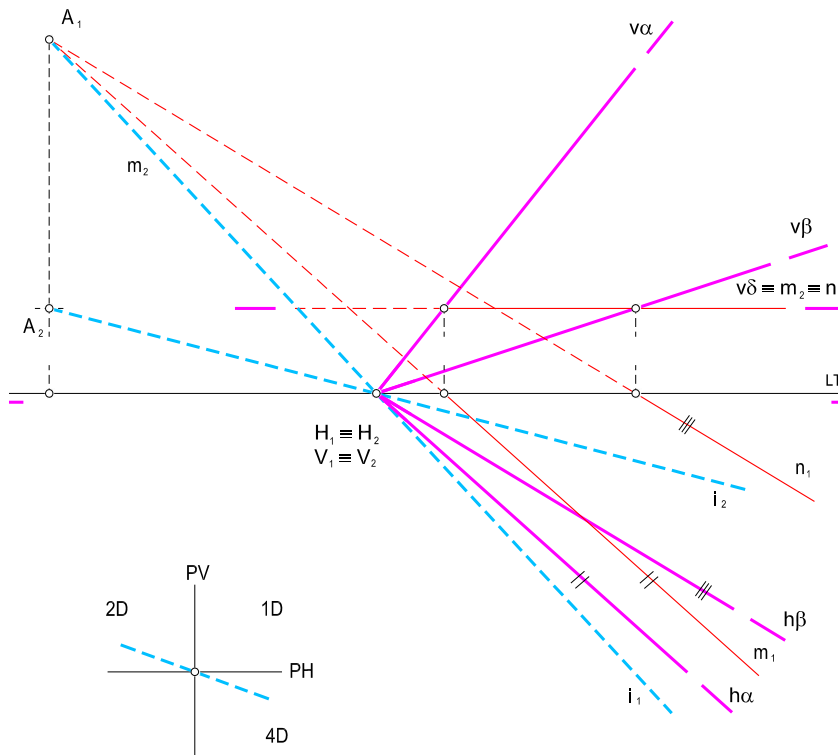


Fig. 4.2.3.a.

Mediante un plano de perfil (fig. 4.2.3.b)

Si abatimos un plano de perfil cualquiera $\delta[h_\delta-v_\delta]$ sobre el *PV* podremos trabajar con la tercera proyección de los planos dados (w_α) y (w_β). Su intersección determina el punto (*l*) buscado, que unido con el punto de la *LT* donde coinciden las trazas de α y β , define la recta intersección entre los planos dados. Para ello, solo hay que desabatir el punto *l* para hallar su proyección horizontal y vertical, l_1-l_2 .

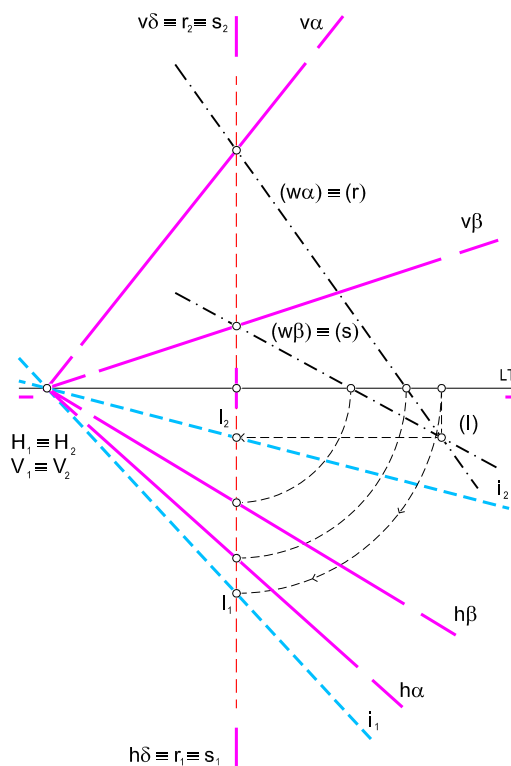
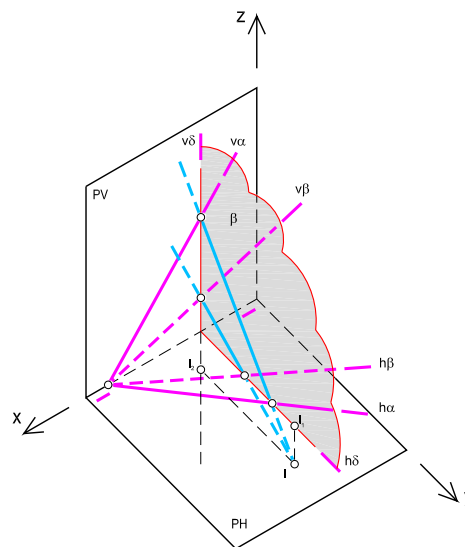


Fig. 4.2.3.b.



4.2.4. Uno de los planos pasa por la LT

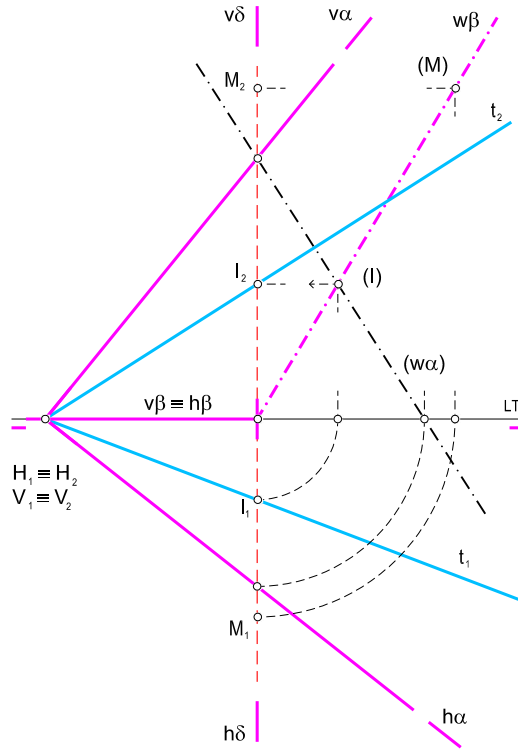


Fig. 4.2.4.

Sea en la fig. 4.2.4, el plano $\beta[h_\beta-v_\beta]$, definido por la LT y por el punto $M[M_1-M_2]$, y un plano cualquiera $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$; el punto en que éste último corta a la LT pertenece a la intersección de los dos planos, por lo que solo hace falta hallar otro punto de la misma. Para ello, utilizaremos un plano de perfil que nos permite encontrar fácilmente el punto abatido (I) de la intersección entre los dos planos, y que define junto con el punto en que el plano α corta a la LT, la recta intersección que buscábamos. Previamente, solo es preciso desabatir el punto (I) , obteniendo las proyecciones l_1-l_2 , que junto con el punto $H_1 \equiv H_2 \equiv V_1 \equiv V_2$ definen la recta solución t_1-t_2 solución.

4.2.5. Otros casos particulares

En los dos primeros casos (fig. 4.2.5.a y fig. 4.2.5.b), el procedimiento de resolución es idéntico al desarrollado en la fig. 4.2.3.a.

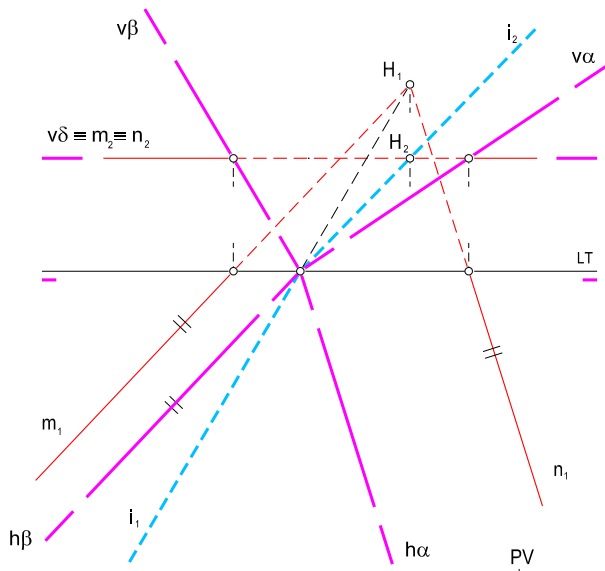


Fig. 4.2.5.a.

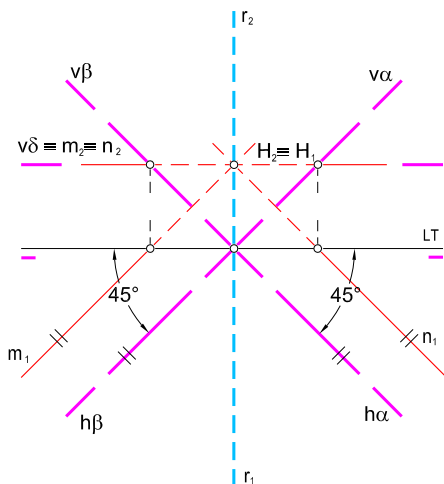
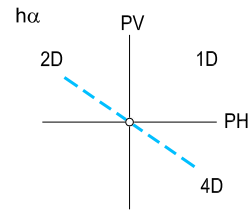
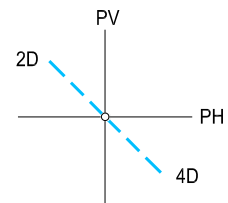


Fig. 4.2.5.b.



En el caso en que dos trazas del mismo nombre sean paralelas (fig. 4.2.5.c), la intersección será una recta horizontal o frontal, según que las trazas paralelas sean las horizontales o las verticales, pues dos planos que pasan por rectas paralelas se cortan según una paralela a estas rectas.

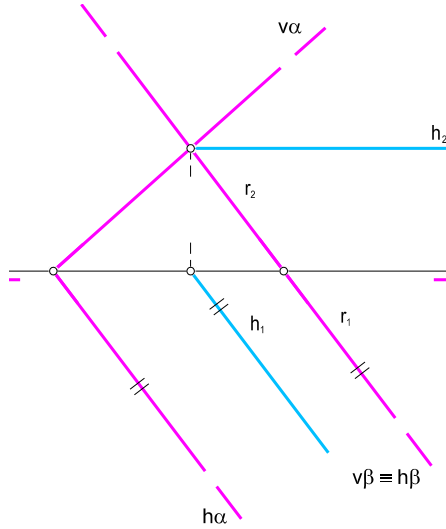


Fig. 4.2.5.c.

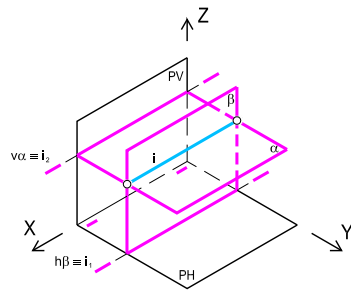
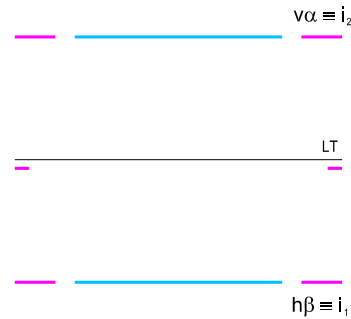


Fig. 4.2.5.d.

Si los dos planos son paralelos a la LT, su intersección lo será igualmente. La intersección entre un plano horizontal, $\alpha[v_\alpha]$, y un plano vertical paralelo al PV, $\beta[h_\beta]$ (fig. 4.2.5.d) es una recta paralela a la LT cuyas proyecciones coinciden con las trazas de los planos dados.

4.3. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO

La intersección de una recta con un plano es un punto. En geometría descriptiva, para la resolución de este problema, se toma un plano auxiliar que pase por la recta; su intersección con el plano dado será una recta que corta a la dada en el punto de intersección buscado.

Este problema se facilita notablemente haciendo que el plano auxiliar que pase por la recta sea uno de sus proyectantes, es decir, uno vertical o uno de canto.

4.3.1. Plano definido por sus trazas

En la fig. 4.3.1.a, para hallar el punto intersección de la recta $a[a_1 - a_2]$ con el plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$, se ha tomado el plano auxiliar vertical $\beta[h_\beta - v_\beta]$ que pasa por la recta y que corta al plano dado según la recta $r[r_1 - r_2]$. El punto $l[l_1 - l_2]$, intersección de las rectas $a[a_1 - a_2]$ y $r[r_1 - r_2]$, es el buscado.

Para hallar la intersección en la fig. 4.3.1.b se toma como plano auxiliar, el plano de canto $\gamma[h_\gamma - v_\gamma]$ que pasa por la recta y corta al plano dado según la recta $s[s_1 - s_2]$. En este caso, el punto $l[l_1 - l_2]$ resulta de la intersección entre las rectas $a[a_1 - a_2]$ y $s[s_1 - s_2]$. Obsérvese como el punto intersección coincide independientemente del plano auxiliar que se tome.

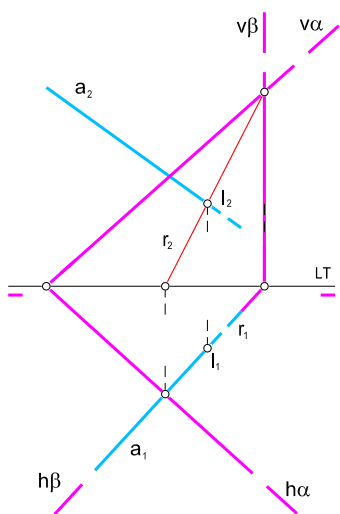


Fig. 4.3.1.a.

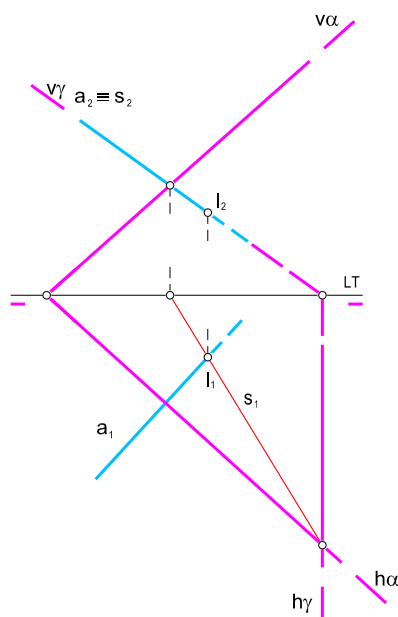


Fig. 4.3.1.b.

4.3.2. Plano definido por dos rectas

Sea el plano $\alpha(s,t)$ definido por dos rectas que se cortan $s[s_1-s_2]$ y $t[t_1-t_2]$, y sea la recta dada $r[r_1-r_2]$ (fig. 4.3.2). Como plano auxiliar tomamos el plano proyectante vertical $\beta[h_\beta-v_\beta]$ de la recta dada. Los puntos intersección de dicho plano con las rectas s y t son los puntos $A[A_1-A_2]$ y $B[B_1-B_2]$ respectivamente, definiendo así la recta $u[u_1-u_2]$ que corta a la dada en el punto $P[P_1-P_2]$ buscado.

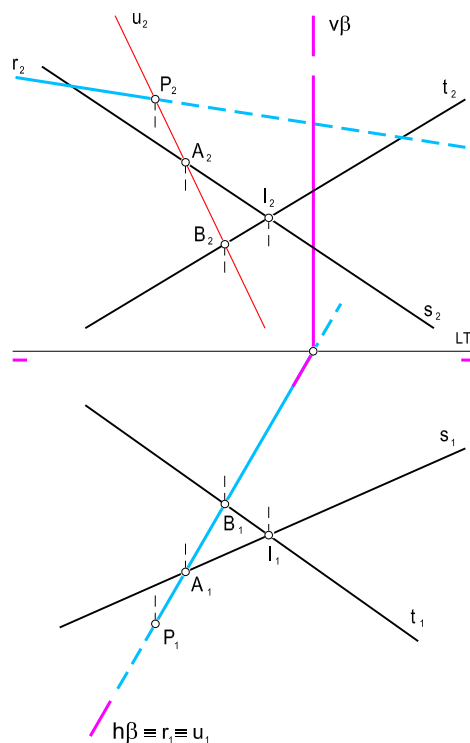


Fig. 4.3.2.



4.3.3. Intersección de una recta con una figura plana

En la fig. 4.3.3.a, para hallar la intersección entre la recta dada $r[r_1 - r_2]$ y la figura plana definida por los puntos $A[A_1 - A_2]$, $B[B_1 - B_2]$ y $C[C_1 - C_2]$ se toma el plano proyectante vertical (de canto) $\beta[h_\beta - v_\beta]$ que contiene a la recta dada. Los puntos intersección de dicho plano con las rectas A_2B_2 y A_2C_2 son los puntos $D[D_1 - D_2]$ y $E[E_1 - E_2]$ respectivamente, que definen la recta $s[s_1 - s_2]$ y que corta a la recta dada en el punto $I[I_1 - I_2]$ buscado.

Otra forma de hallar la intersección entre la recta y la figura plana dada es trabajar con un cambio de plano (fig. 4.3.3.b). La figura plana define un plano $\beta(A, B, C)$, por lo que si conseguimos que dicho plano sea perpendicular a un nuevo PV' , la proyección vertical de la figura será una línea contenida en la traza vertical del plano (que contiene a la figura) y la intersección con la recta dada será inmediata. Para ello, trazamos una recta horizontal $h[h_1 - h_2]$ contenida en el plano β definido por la figura plana, lo que permite hallar la nueva LT (la nueva LT' será perpendicular a la traza horizontal del plano β). Como en un cambio de plano vertical se mantienen las cotas, hallamos la nueva recta $r'(E', D')$ y la nueva figura plana $A'B'C'$, donde podemos ver que la intersección entre ambos es el punto $I'[I'_1 - I'_2]$, correspondiente al punto $I[I_1 - I_2]$ en el plano vertical de partida.

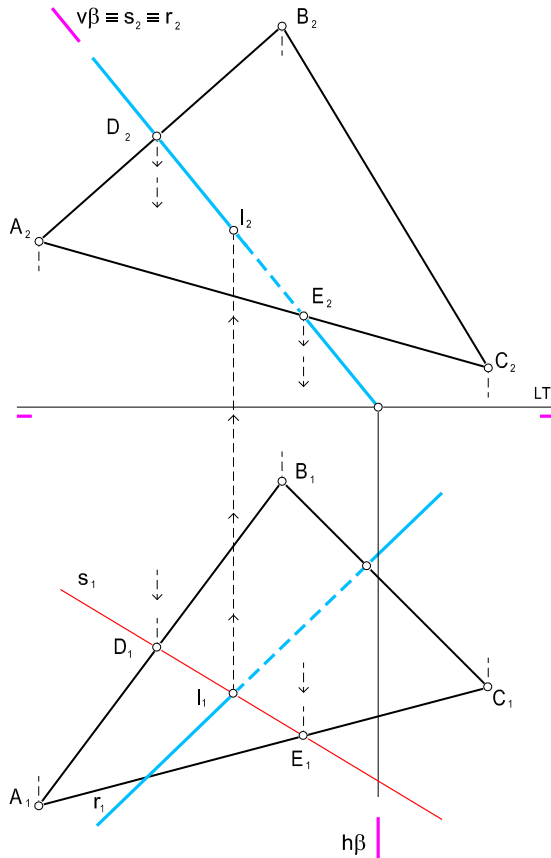


Fig. 4.3.3.a.

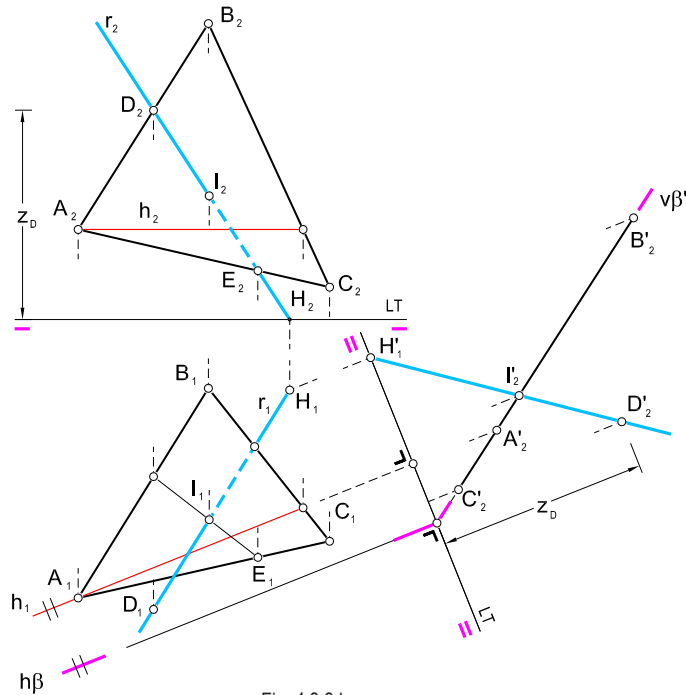


Fig. 4.3.3.b.

4.4. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Para determinar la posición relativa de dos rectas que se cruzan (fig. 4.4) tomaremos los puntos de intersección aparente en el PV, uno de cada recta, que tengan sus proyecciones verticales confundidas (intersección aparente en el PV); sean los puntos $A[A_1 - A_2]$ y $B[B_1 - B_2]$. En proyección horizontal el punto B_1 tiene mayor alejamiento que A_1 , por lo que la recta a la que pertenece, la recta b_1 , en proyección vertical estará por delante de la que contiene el punto A , la recta a_1 .

Análogamente, partiendo de la intersección aparente de las dos rectas en el PH, vemos que la recta que contiene el punto $E[E_1 - E_2]$, la recta b_2 , tiene mayor cota que la que contiene el punto $F[F_1 - F_2]$, la recta a_1 , por lo que la primera estará por encima de la segunda.

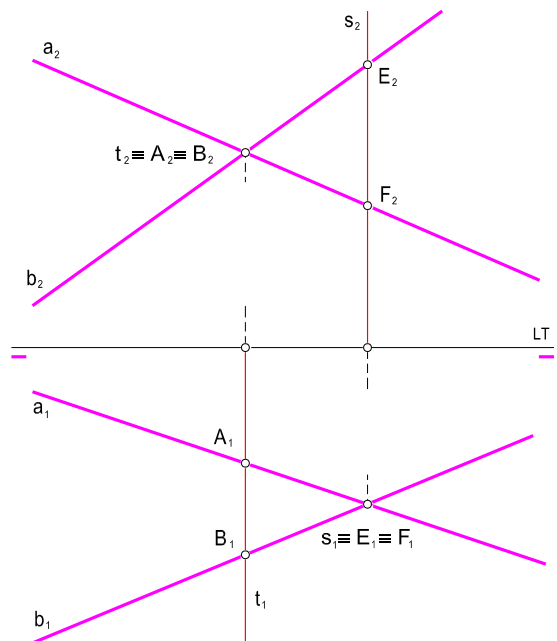


Fig. 4.4.



4.5. PARTES VISTAS Y OCULTAS DE UNA RECTA CON UN PLANO OPACO

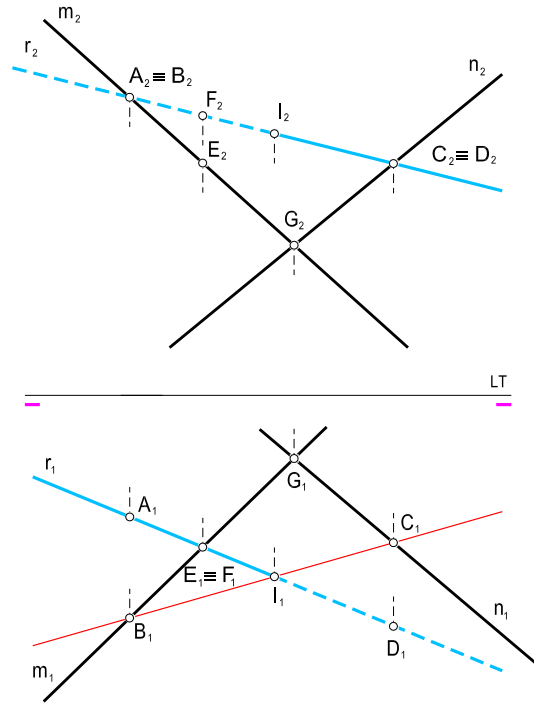
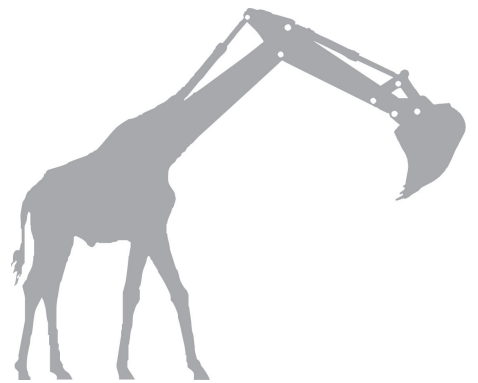


Fig. 4.5.

Para determinar las partes vistas y ocultas de una recta en la intersección con un plano opaco (fig. 4.5) aplicaremos lo visto en el apartado anterior.

Sea el plano $\alpha(m, n)$ definido por las rectas $m[m_1 - m_2]$ y $n[n_1 - n_2]$ y la recta $r[r_1 - r_2]$. Para determinar las partes vistas y ocultas en la proyección horizontal, tomaremos dos puntos, uno de la recta y otro del plano, que tengan sus proyecciones horizontales confundidas (intersección aparente). Sean los puntos $E[E_1 - E_2]$ y $F[F_1 - F_2]$. En proyección vertical el punto F tiene mayor cota, por lo tanto, la recta será vista en proyección horizontal desde el punto de intersección $I[I_1 - I_2]$ hacia la izquierda y oculta hacia la derecha.

Para determinar las partes vistas y ocultas en la proyección vertical, tomaremos asimismo dos puntos, uno de la recta y otro del plano, que tengan sus proyecciones verticales confundidas (intersección aparente). Sean los puntos $A[A_1 - A_2]$ y $B[B_1 - B_2]$. En proyección horizontal, el punto B tiene mayor alejamiento que el C , por lo que la recta será oculta en proyección vertical, desde el punto de intersección $I[I_1 - I_2]$ hacia la izquierda y vista hacia la derecha.



→ 5



Paralelismo y perpendicularidad

- 5.1. PLANOS PARALELOS
- 5.2. POR UN PUNTO, PLANO PARALELO A OTRO
 - 5.2.1. Caso general
 - 5.2.2. Plano paralelo a la LT
- 5.3. TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES
- 5.4. POR UN PUNTO, RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO
 - 5.4.1. Caso general
 - 5.4.2. Por un punto, recta perpendicular a un plano paralelo a la LT
 - 5.4.3. Por un punto M , recta perpendicular a un plano que pasa por la LT y el punto P
- 5.5. POR UN PUNTO P , PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA
- 5.6. RECTA PERPENDICULAR A OTRAS DOS CUANDO UNA DE ELLAS ES VERTICAL O DE PUNTA
- 5.7. RECTA PERPENDICULAR A OTRAS DOS
- 5.8. PLANO PERPENDICULAR A OTROS DOS PLANOS
- 5.9. EJERCICIOS DE REPASO



5.1. PLANOS PARALELOS

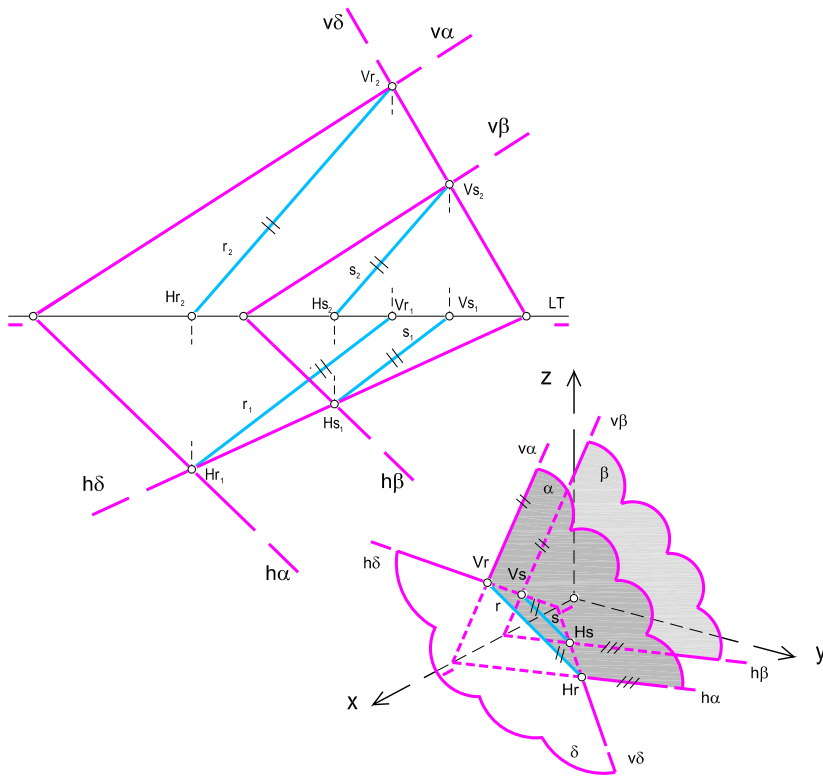


Fig. 5.1.

Dos planos paralelos determinan, al ser cortados por un tercero, intersecciones paralelas; por lo tanto, dos planos serán paralelos cuando tenga sus trazas homónimas paralelas (Fig. 5.1).

Si no se conociesen las trazas de los planos, debería verificarse que la dirección de las horizontales y de las frontales de ambos planos fueran las mismas, pues en ese caso tendrían sus trazas paralelas.

5.2. POR UN PUNTO, PLANO PARALELO A OTRO

5.2.1. Caso general

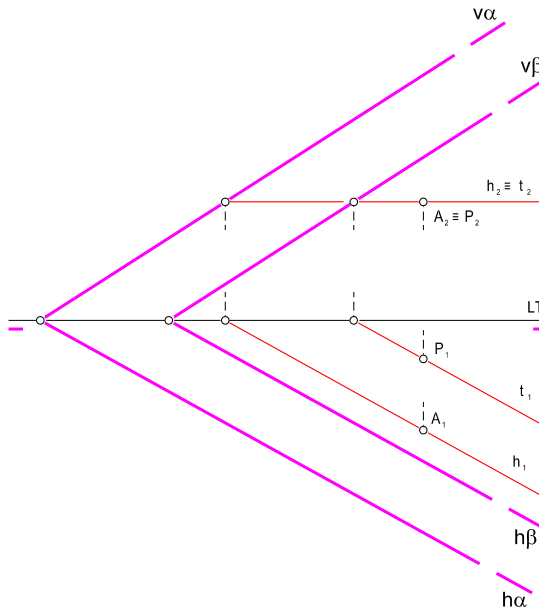


Fig. 5.2.1.

Sea el plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ y el punto $P[P_1 - P_2]$ por el que queremos trazar un plano paralelo al dado. Como sabemos que las trazas han de ser paralelas, bastará determinar un punto de una de ellas. Para ello trazaremos una horizontal $h[h_1 - h_2]$ del plano buscado por el punto dado, y su traza vertical será un punto de la traza vertical del plano (Fig. 5.2.1).

5.2.2. Plano paralelo a la LT

Si el plano α dado es paralelo a la LT (fig. 5.2.2.a) y queremos trazar por $A[A_1 - A_2]$ un plano paralelo a él, utilizaremos un plano de perfil $\varpi[\varpi_1 - \varpi_2]$, que determina en su intersección con el plano dado la recta de perfil w_α que abatiremos sobre el PV. Abatiendo también el punto A, por él podremos trazar la recta w_γ paralela a la anterior. Esta recta es la intersección del plano buscado con el de perfil auxiliar, por lo que al restituir el abatimiento, sus trazas nos determinan los puntos por los que han de pasar las trazas del plano buscado $\gamma[h_\gamma - v_\gamma]$, que como sabemos ha de ser paralelo a la LT

Procedimiento análogo seguiríamos si el plano α dado pasa por la LT. En este caso el plano está definido por la propia LT y por un punto. La fig. 5.2.2.b muestra el procedimiento seguido: $A[A_1 - A_2]$ es el punto por el que hemos trazado el plano paralelo y el punto $M[M_1 - M_2]$ es el que define el plano α junto con la LT.

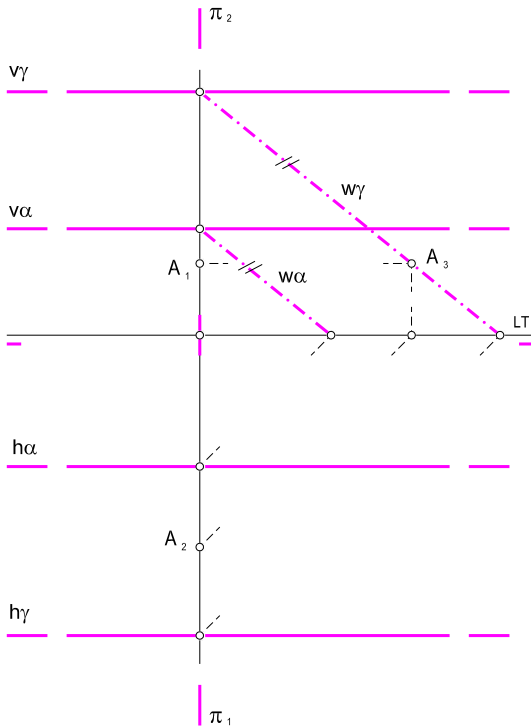


Fig. 5.2.2.a.

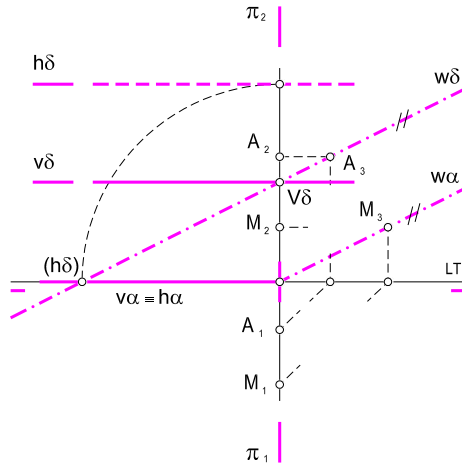


Fig. 5.2.2.b.

5.3. TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

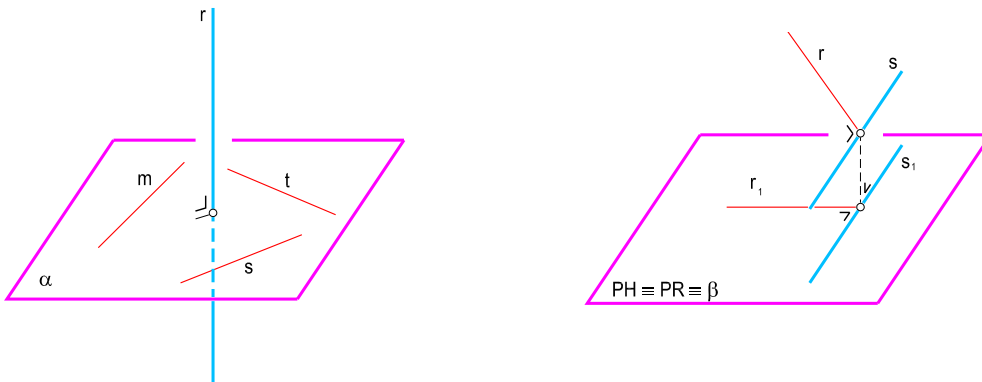


Fig. 5.3.a. y b.

La geometría del espacio nos enseña que una recta es perpendicular a un plano cuando la recta es perpendicular, al menos, a dos rectas del plano. Como este enunciado no tiene aplicación práctica en geometría descriptiva, enunciamos el llamado *teorema de las tres perpendiculares*, en el cual se fundan todos los problemas de perpendicularidad. Dice así:

“...Si dos rectas r y s son perpendiculares en el espacio y una de ellas, la s por ejemplo, es paralela a un plano β , sobre el que se proyectan, las proyecciones de ambas son dos rectas (r_1 y s_1) perpendiculares” (fig. 5.3.a y b).

Por la aplicación inmediata que tiene en geometría descriptiva, se puede enunciar el siguiente teorema:

“...Si una recta r es perpendicular a un plano α , la proyección de la recta sobre un plano y la intersección del plano con el de proyección, son dos rectas perpendiculares” (fig. 5.3.c).

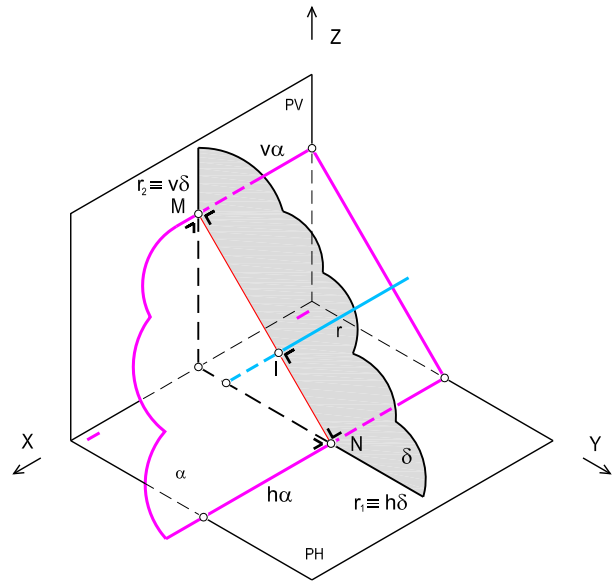


Fig. 5.3.c

5.4. POR UN PUNTO, RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

5.4.1. Caso general

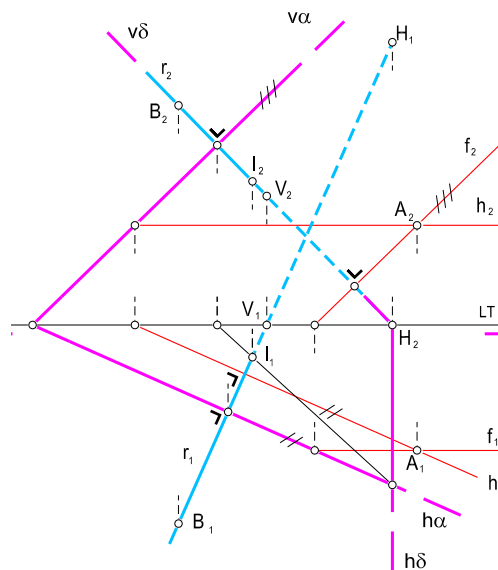


Fig. 5.4.1.



Si queremos trazar en proyección diédrica por un punto $B[B_1-B_2]$ la recta perpendicular a un plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$ (fig. 5.4.1), bastará con trazar por B_1 una recta perpendicular a la traza horizontal del plano, y por B_2 otra perpendicular a la traza vertical. De esta manera obtendremos las proyecciones de la recta buscada, $r[r_1-r_2]$.

Nótese que si se considera una recta horizontal $h[h_1-h_2]$ que pase por el punto $A[A_1-A_2]$ del plano α , como su proyección horizontal es paralela a la traza horizontal del plano, también será perpendicular a la proyección horizontal r_1 de la recta perpendicular al plano hallada anteriormente.

Análogamente, si consideramos una recta frontal $f[f_1-f_2]$ que pase por el punto $A[A_1-A_2]$ del plano α , como su proyección vertical es paralela a la traza vertical del plano, también será perpendicular a la proyección vertical r_2 de la recta perpendicular al plano que hemos trazado anteriormente.

5.4.2. Por un punto, recta perpendicular a un plano paralelo a la LT

Sea el plano $\beta[h_\beta-v_\beta]$ paralelo a la LT y el punto $A[A_1-A_2]$ (fig. 5.4.2). La recta perpendicular al plano que pasa por el punto dado es una recta de perfil, por lo que es preciso efectuar el abatimiento del plano de perfil que contiene al punto, que será también, el que contendrá a la recta buscada. De esta forma, una vez obtenido (A) , trazaremos por él la recta (r) , perpendicular al abatimiento (β) de la intersección del plano de perfil considerado con el plano β dado; ésta será la recta abatida, por lo que sólo bastará restituir el abatimiento.

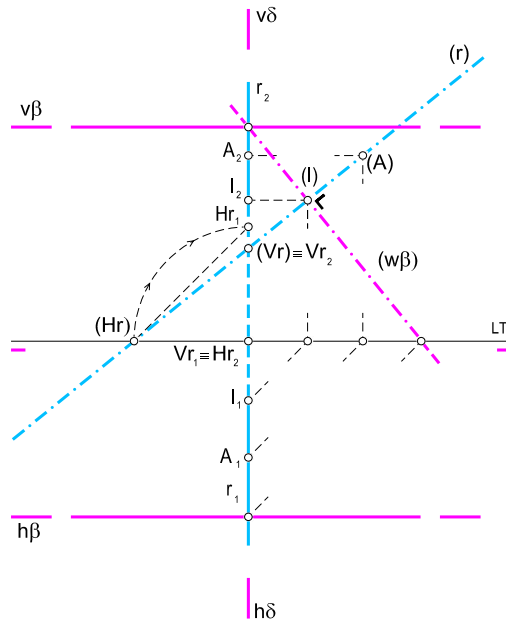


Fig.5.4.2.



5.4.3. Por un punto M , recta perpendicular a un plano que pasa por la LT y el punto P

En la fig. 5.4.3, se ha resuelto el caso en el que la recta debe pasar por el punto $M[M_1-M_2]$ y ser perpendicular al plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$, plano definido por la LT y el punto $P[P_1-P_2]$. El procedimiento es análogo al del caso anterior.

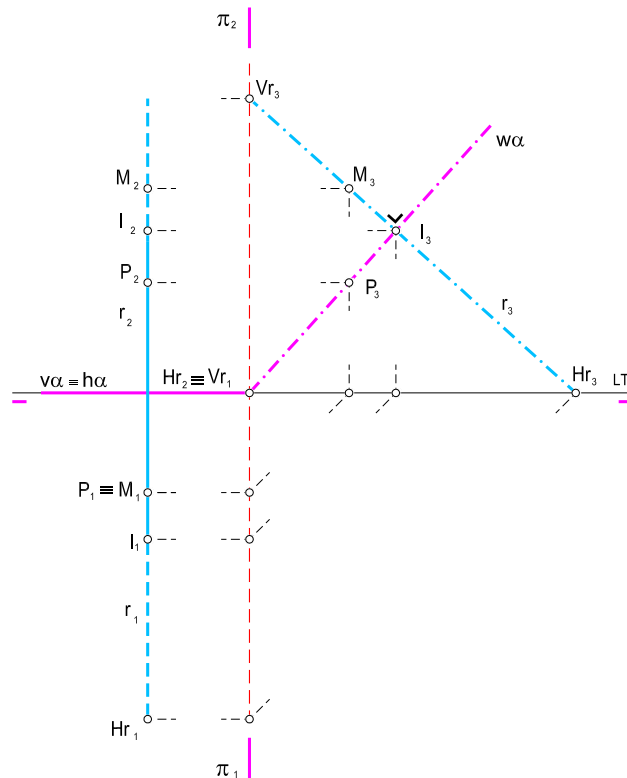


Fig. 5.4.3.

5.5. POR UN PUNTO P , PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA

El problema de trazar un plano perpendicular a una recta dada $r[r_1-r_2]$ por un punto $P[P_1-P_2]$ (fig. 5.5) se resuelve trazando por dicho punto, una horizontal $h[h_1-h_2]$ del plano, cuya proyección horizontal será perpendicular a la proyección horizontal de la recta. Así determinaremos el punto $V[V_1-V_2]$ perteneciente a la traza vertical del plano; por él trazaremos una perpendicular a la proyección vertical de la recta hasta cortar a la LT, punto desde el que dibujaremos una paralela a la recta horizontal considerada, obteniendo así, las trazas del plano deseado $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$.

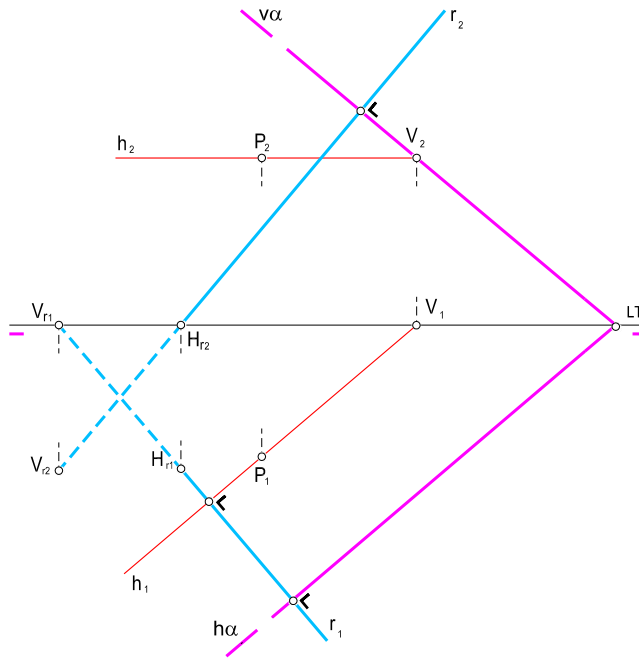


Fig. 5.5.

5.6. RECTA PERPENDICULAR A OTRAS DOS CUANDO UNA DE ELLAS ES VERTICAL O DE PUNTA

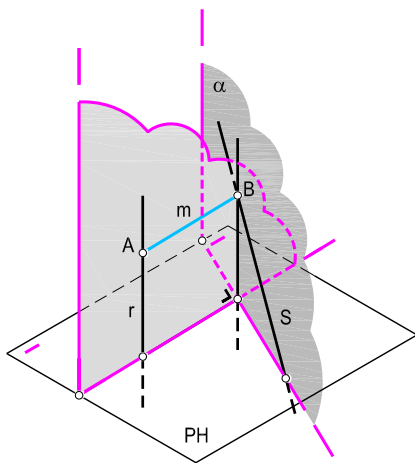


Fig. 5.6.a.

Para hallar la perpendicular común de dos rectas que se cruzan en el caso de que una de ellas sea perpendicular a uno de los planos de proyección (fig. 5.6.a), la mínima distancia se proyecta sobre ese plano en verdadera magnitud y perpendicularmente a la proyección de la otra recta.

Por lo tanto, si las rectas dadas en el sistema diédrico (fig. 5.6.b) son $r[r_1-r_2]$ y $s[s_1-s_2]$, siendo la primera de ellas una recta vertical, para obtener las proyecciones de la mínima distancia trazaremos la proyección horizontal $m_1(A_1, B_1)$, perpendicular desde la traza horizontal de la recta r (A_1) sobre la proyección horizontal s_1 de la otra recta s , y refiriendo B_1 a la proyección vertical B_2 , una paralela $m_2(A_2, B_2)$ a la LT nos dibuja la proyección vertical de la recta buscada.



En el caso de que una de las dos rectas dadas sea una recta de punta (fig. 5.6.c), la forma de hallar la mínima distancia entre ellas es análoga a la anterior.

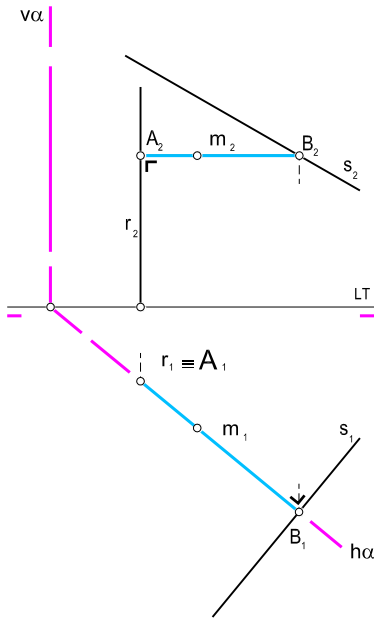


Fig. 5.6.b.

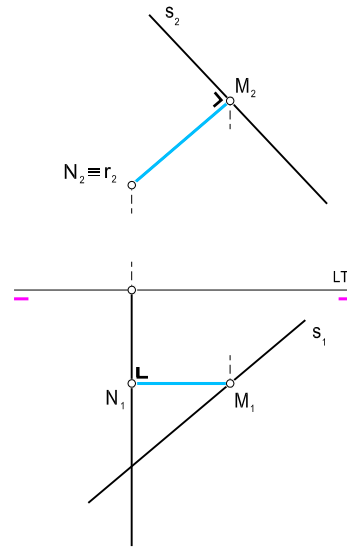


Fig. 5.6.c.

5.7. RECTA PERPENDICULAR A OTRAS DOS. PERPENDICULAR COMÚN DE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Sabemos por geometría que la perpendicular común a otras dos rectas contiene la mínima distancia entre ellas. Si las rectas no ocupan ninguna posición especial en el espacio, para hallar la perpendicular común entre ellas seguiremos el procedimiento general.

Sean las rectas $r[r_1 - r_2]$ y $s[s_1 - s_2]$ (fig. 5.7), por un punto $A[A_1 - A_2]$ de una de ellas (en este caso, de la recta s) trazaremos la recta $t[t_1 - t_2]$ paralela a $r[r_1 - r_2]$, teniendo así definido un plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ que pasa por s y será paralelo a r .

Por un punto $B[B_1 - B_2]$ de la recta $r[r_1 - r_2]$, trazamos una recta $u[u_1 - u_2]$ perpendicular al plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$. Hallamos la intersección de la recta con el plano obteniendo el punto $C[C_1 - C_2]$, por el que trazaremos la recta $p[p_1 - p_2]$ paralela a la recta r ; por ser coplanaria con s , la cortará en un punto $M[M_1 - M_2]$.

Finalmente, por $M[M_1 - M_2]$ trazamos la paralela a la recta $u[u_1 - u_2]$ que cortará a $r[r_1 - r_2]$ en el punto $N[N_1 - N_2]$. La magnitud MN es la mínima distancia entre las rectas r y s .



PASOS

- "r" y "s", rectas dadas
- Por A ∈ "s", ∥ a "r" → t → α
- Por B ⊥ al plano α → "u"
- "u" ∩ α → C
- Por C, ∥ a "r" → p
- p ∩ s → M
- M, MN ⊥ α

BC - MÍNIMA DISTANCIA
 MN - PERPENDICULAR COMÚN
 Y MÍNIMA DISTANCIA

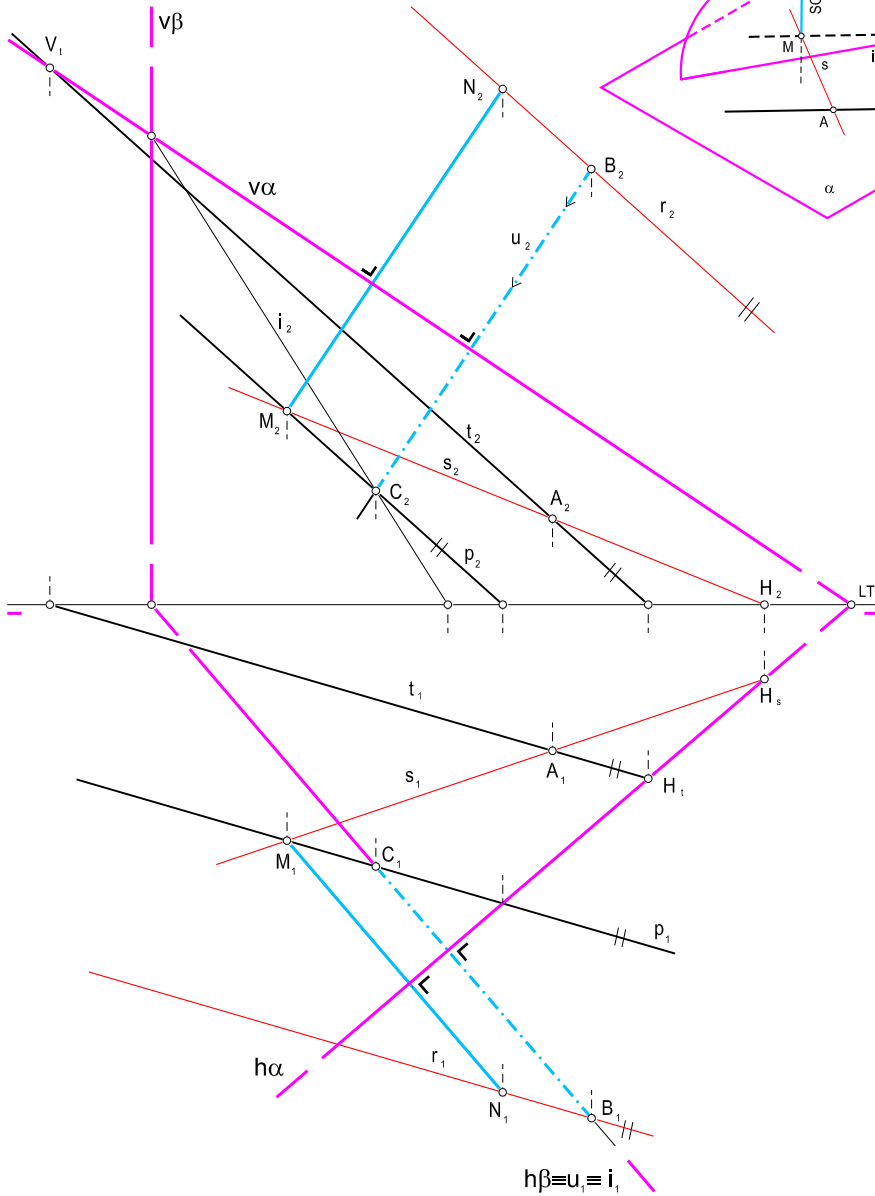
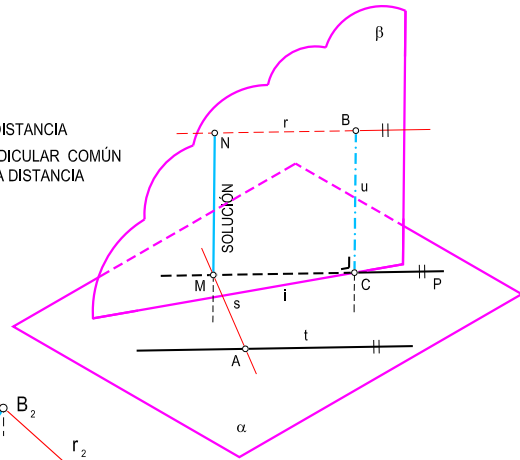


Fig. 5.7.

5.8. PLANO PERPENDICULAR A OTROS DOS PLANOS

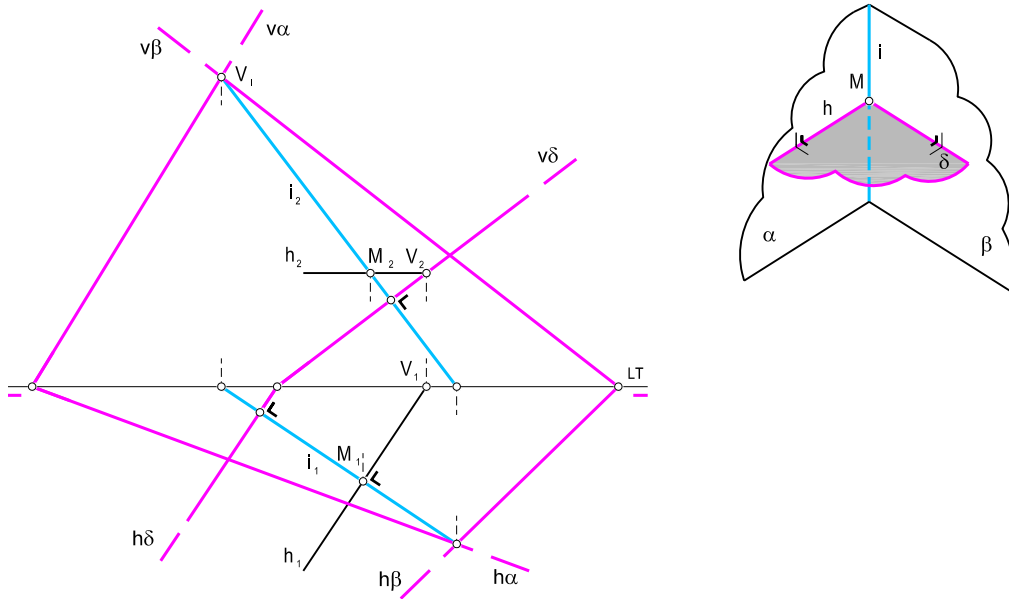


Fig. 5.8.a.

El plano solución deberá ser perpendicular a la intersección de los planos dados. Se determina pues la intersección de los dos planos (fig. 5.8.a), y por un punto $M[M_1 - M_2]$ cualquiera de la misma se traza una recta horizontal $h[h_1 - h_2]$ del nuevo plano. Por su traza vertical (V_2) se dibuja la traza vertical del plano perpendicular a la proyección vertical de la intersección de los dos planos dados, y por el punto donde esta traza corte a la LT se dibuja la traza horizontal del plano buscado perpendicular a la proyección horizontal de la recta intersección entre los dos planos dados.

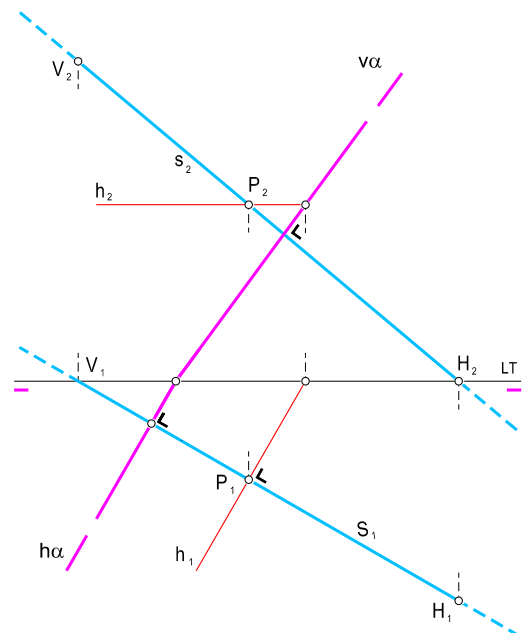


Fig. 5.8.b. Plano perpendicular a una recta.



5.9. EJERCICIOS DE REPASO

1. Proyección de un segmento de recta A-B:

- sobre un plano $\alpha \rightarrow A'$ y B' , y sobre los planos de proyección [PH / PV] $\rightarrow A''$ y B''

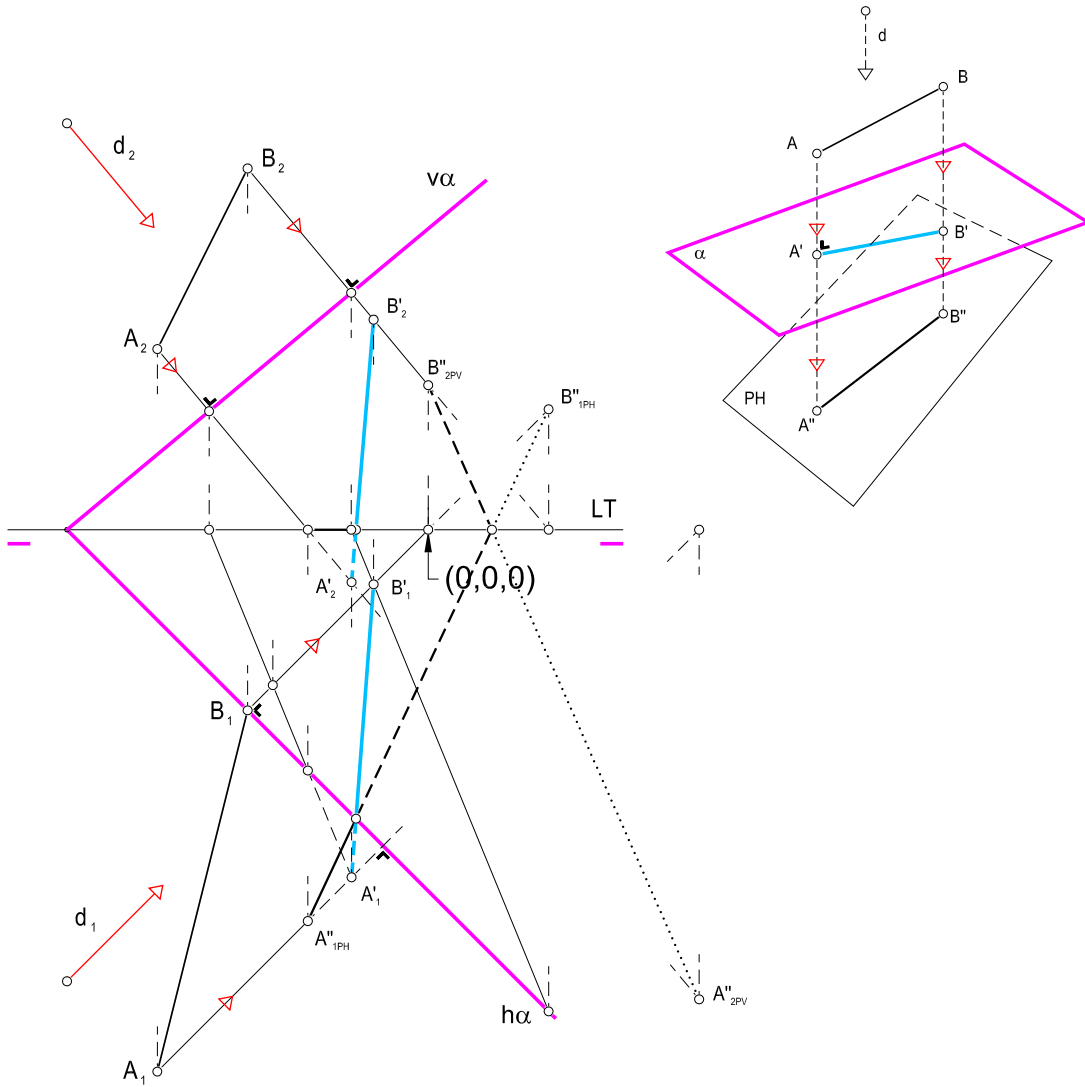


Fig. 5.9.1.

2. Por el punto $A(3,2,4)$ trazar una recta perpendicular a la recta $B(1,0,2) C(5,2,4)$ y que se corte con la recta $D(2,3,3) E(6,2,1)$.

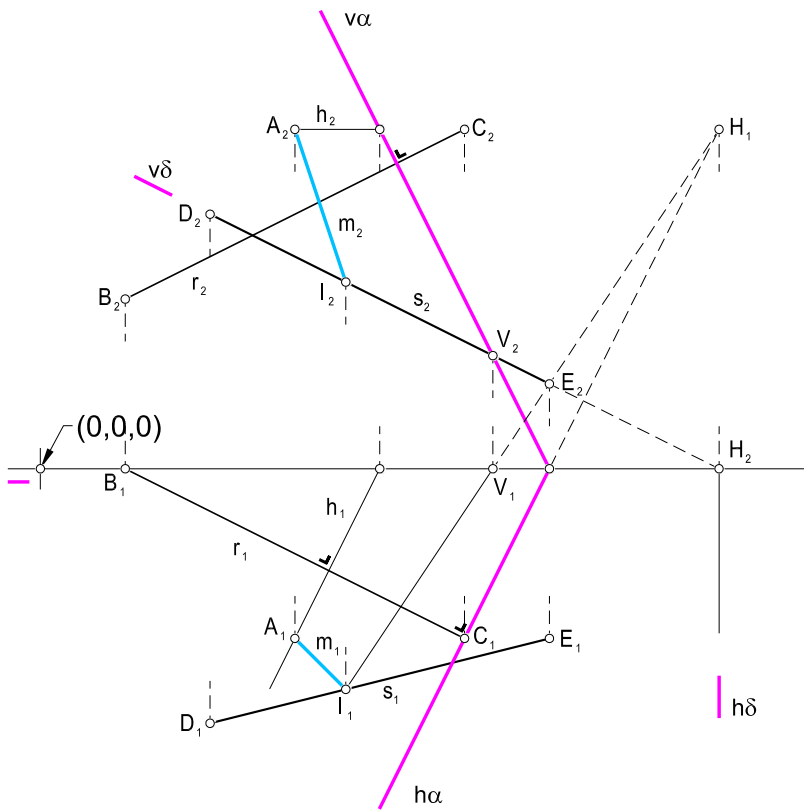
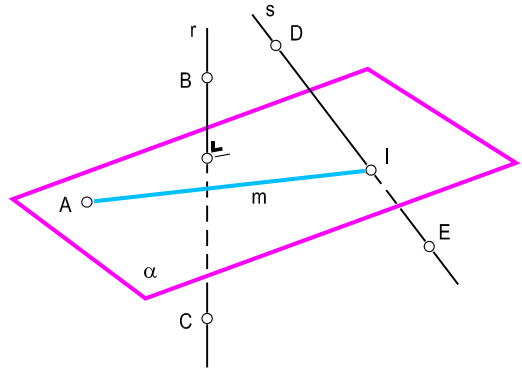


Fig. 5.9.2.



3. Por el punto $O(-7, 5, 5)$ trazar una recta, que se apoye en las rectas AB y CD siendo $A(-5, 0, 3)$, $B(-1, 5, 4)$, $C(-1, 0, 1)$ y $D(2, 3, 4)$.

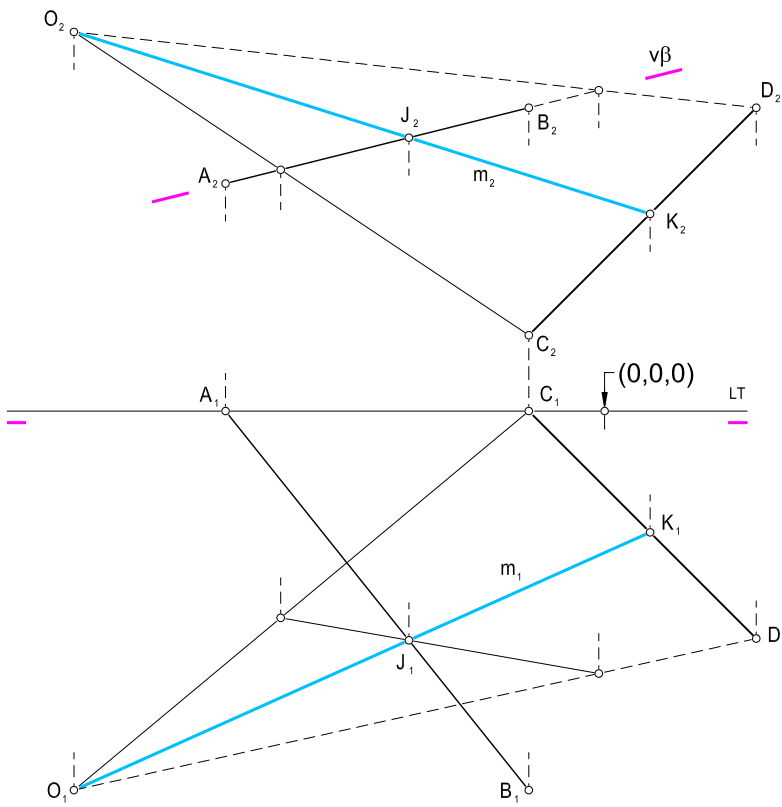
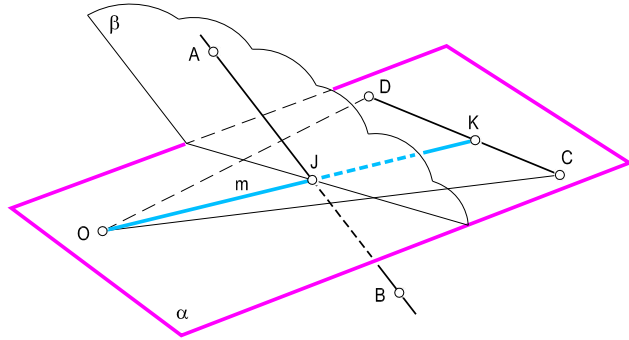


Fig. 5.9.3.

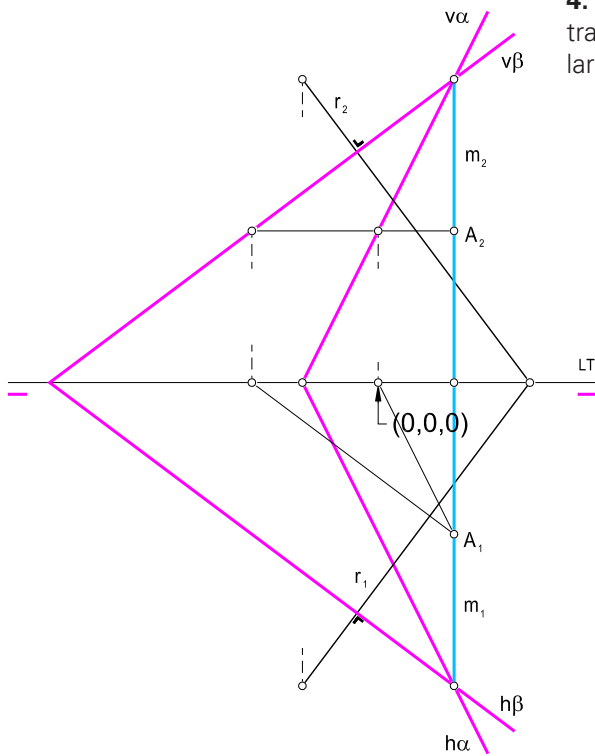
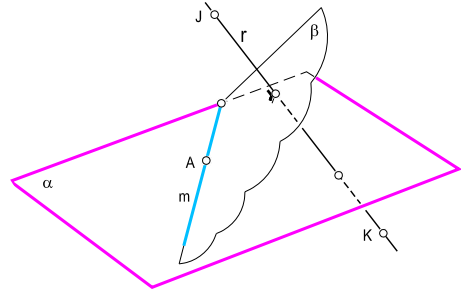


Fig. 5.9.4.

4. Por el punto $A(1, 2, 2)$ de un plano $\alpha(-1, 2, 2)$, trazar una recta m contenida en α , y perpendicular a la recta r (dada).



5. Rectas $[t' / s']$, que pasan por un punto $A(-2, 2, 3)$, y son paralelas a un plano $\alpha(-4, 2, 3)$.

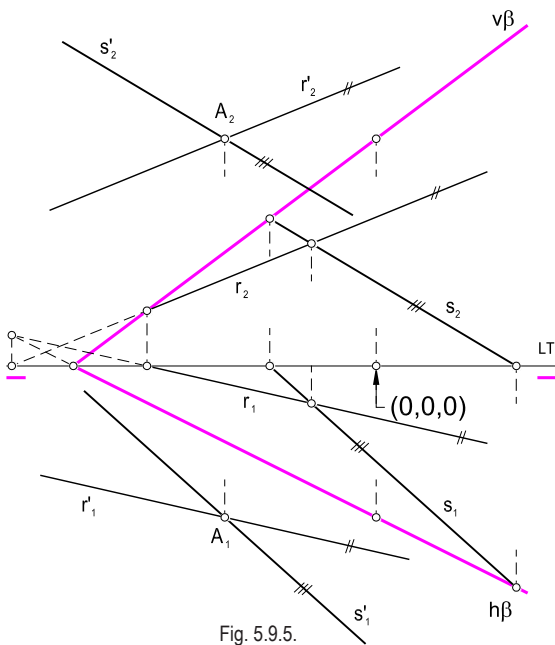
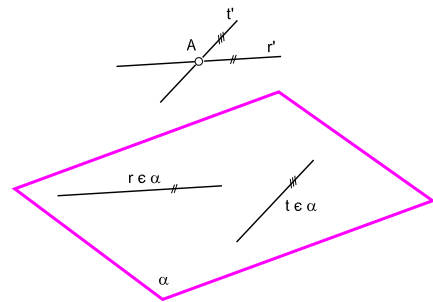


Fig. 5.9.5.





6. Por un punto A (0, 1, 2), trazar un plano β paralelo a dos rectas dadas, [r / s].

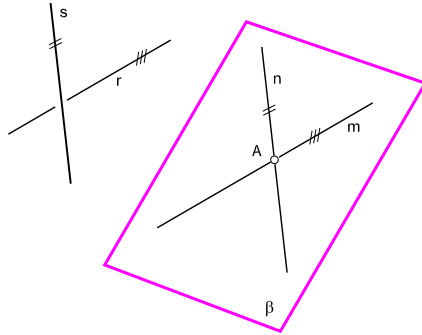


Fig. 5.9.6.

7. Por un punto A (2,1,2), trazar una recta paralela a un plano α (-4,3,4), y que se apoye en otra recta m (dada).

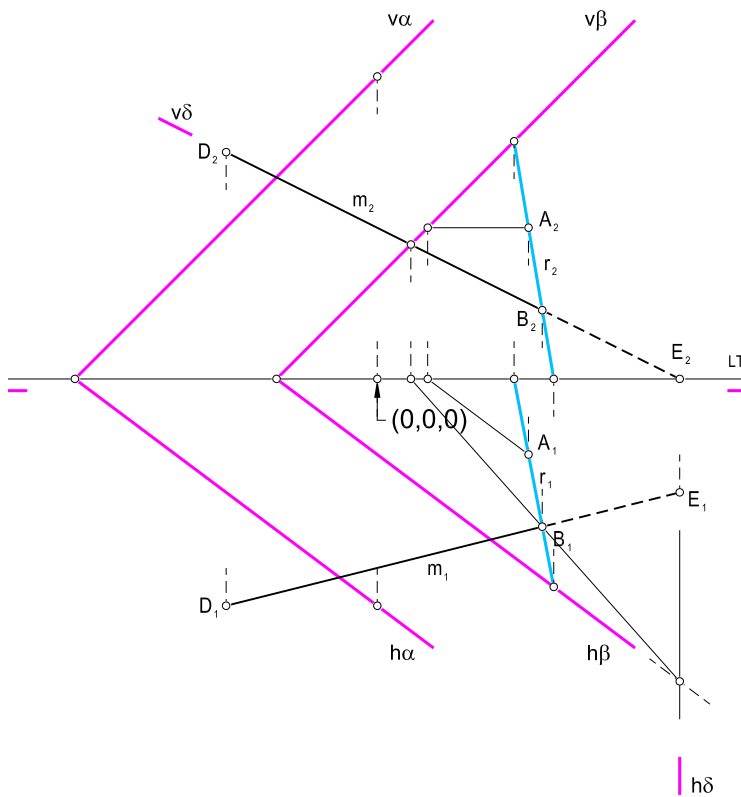
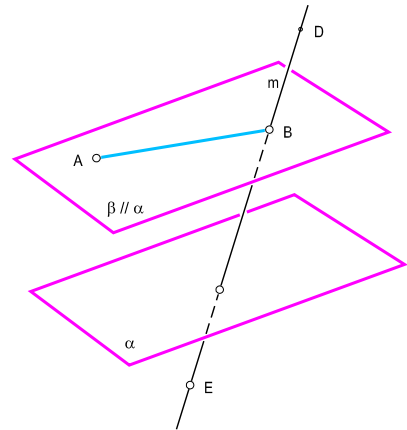


Fig. 5.9.7.



8. Hallar una recta s que se apoya en dos dadas, $[m,n]$ y es paralela a un plano α , dado.

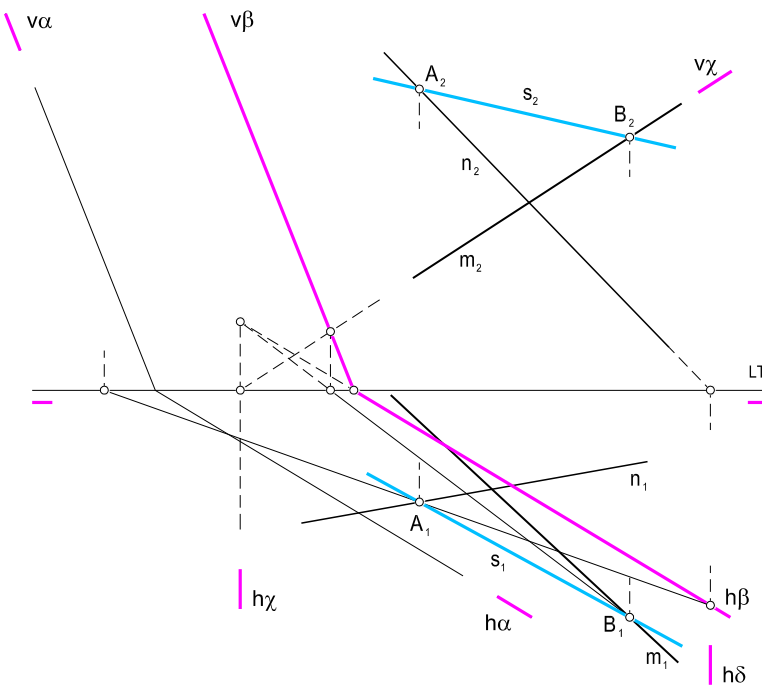
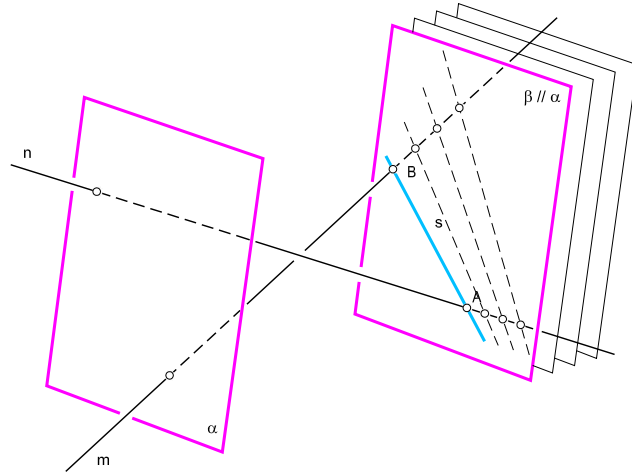


Fig. 5.9.8.

9. Recta m que se apoya en otras dos (r y t), y es paralela a una dirección dada d .

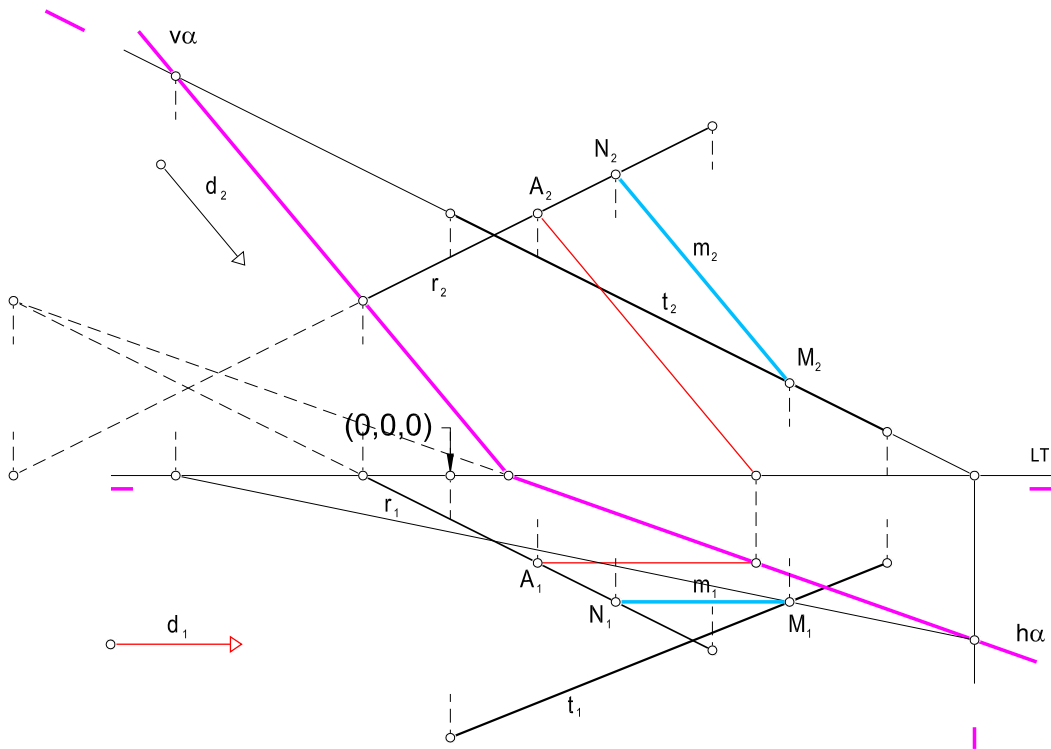
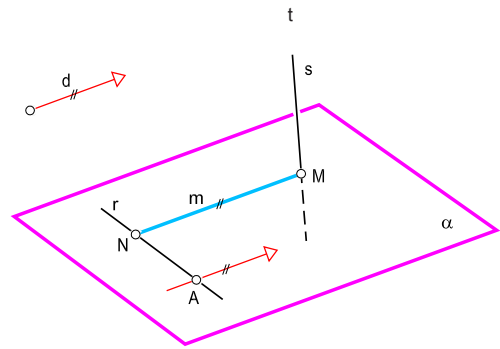


Fig. 5.9.9.



10. Recta m paralela a la LT y que se apoya en otras dos dadas (r y t).

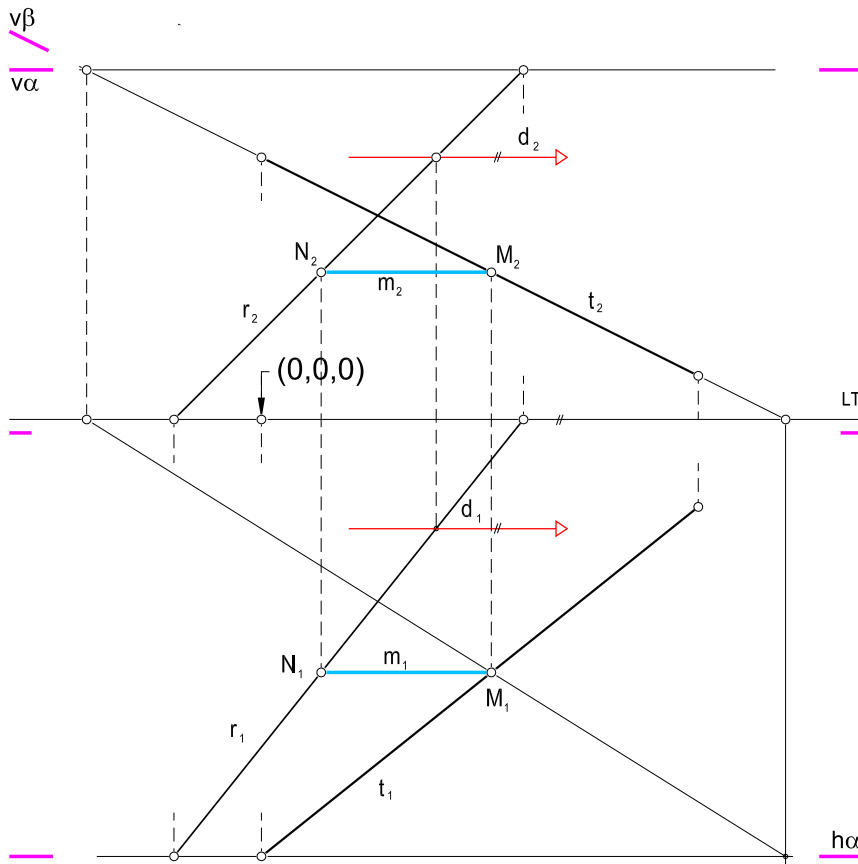
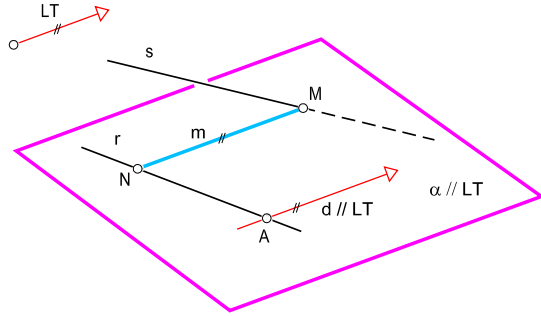


Fig. 5.9.10.

11a. Recta m que se apoya en otras tres dadas (r , t y f). (método_1).

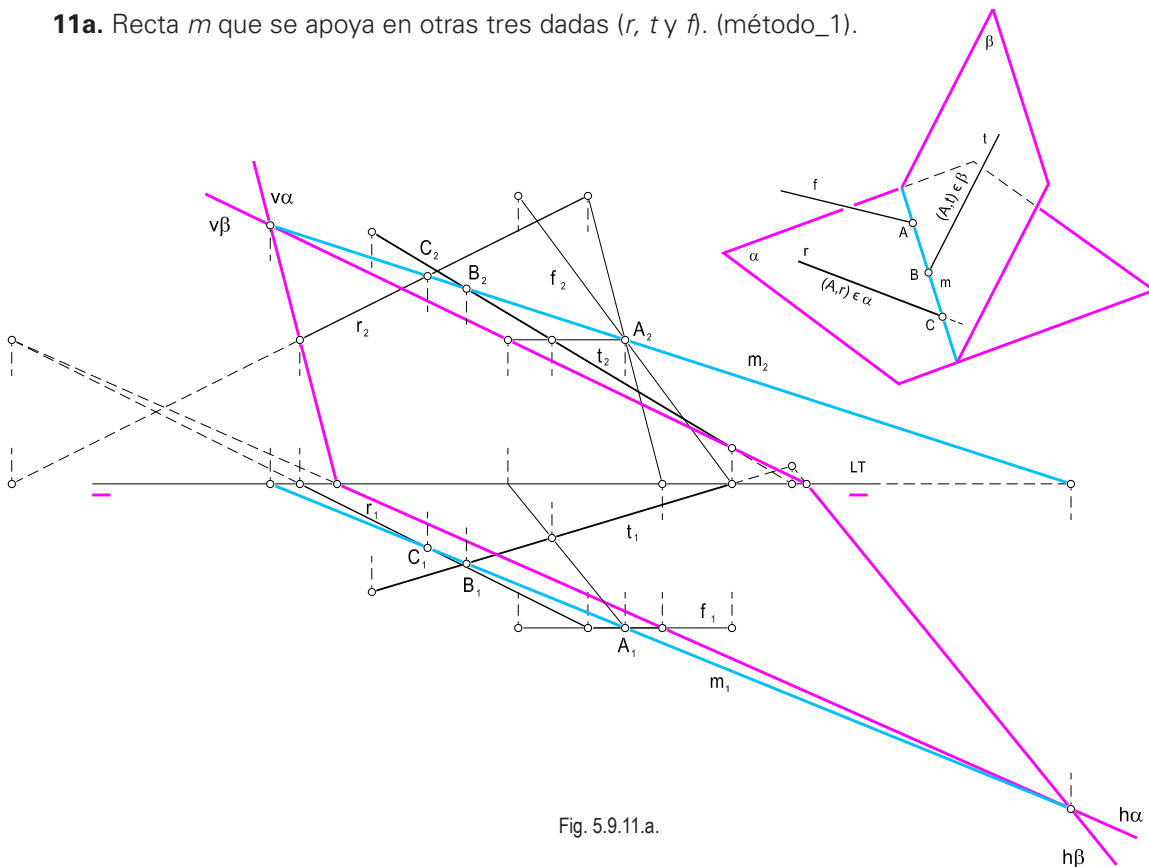


Fig. 5.9.11.a.

11b. Recta m que se apoya en otras tres dadas (r , t y f). (método_2).

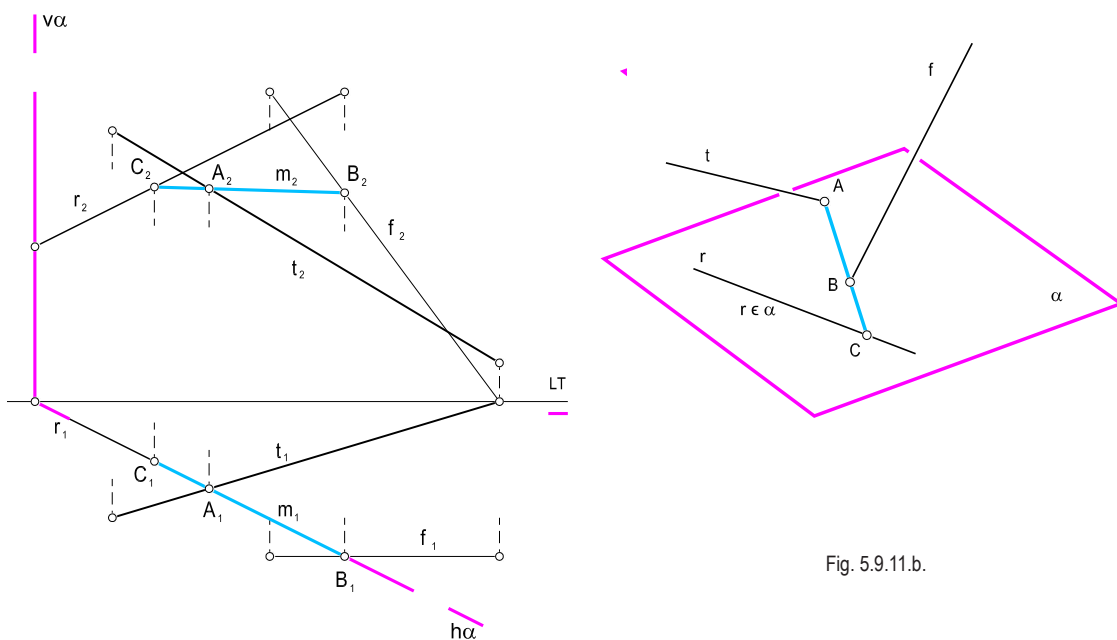


Fig. 5.9.11.b.

→ 6



Homología

- 6.1. HOMOLOGÍA PRINCIPAL, ELEMENTOS Y PROPIEDADES
- 6.2. ELEMENTOS PARA PODER DEFINIR UNA HOMOLOGÍA
 - 6.2.1. Centro, eje de homología y un par de puntos homólogos
 - 6.2.2. Centro, eje de homología y la recta límite $R'L'$
 - 6.2.3. Centro y las rectas límite RL y $R'L'$
 - 6.2.4. Dos pares de puntos homólogos y la dirección del eje
- 6.3. TRANSFORMACIÓN HOMOLÓGICA DE UN TRIÁNGULO EN EQUILÁTERO
- 6.4. TRANSFORMACIÓN HOMOLÓGICA DE UN CUADRILÁTERO EN CUADRADO
- 6.5. TRANSFORMACIÓN HOMOLÓGICA DE UNA CIRCUNFERENCIA EN ELIPSE
 - 6.5.1 Método de los diámetros conjugados.
 - 6.5.2 Método de los ejes de la elipse
- 6.6. TRANSFORMACIÓN HOMOLÓGICA DE UNA CIRCUNFERENCIA EN PARÁBOLA
- 6.7. TRANSFORMACIÓN HOMOLÓGICA DE UNA CIRCUNFERENCIA EN HIPÉRBOLA
- 6.8. PROBLEMAS DE HOMOLOGÍAS



6.1. HOMOLOGÍA PRINCIPAL, ELEMENTOS Y PROPIEDADES

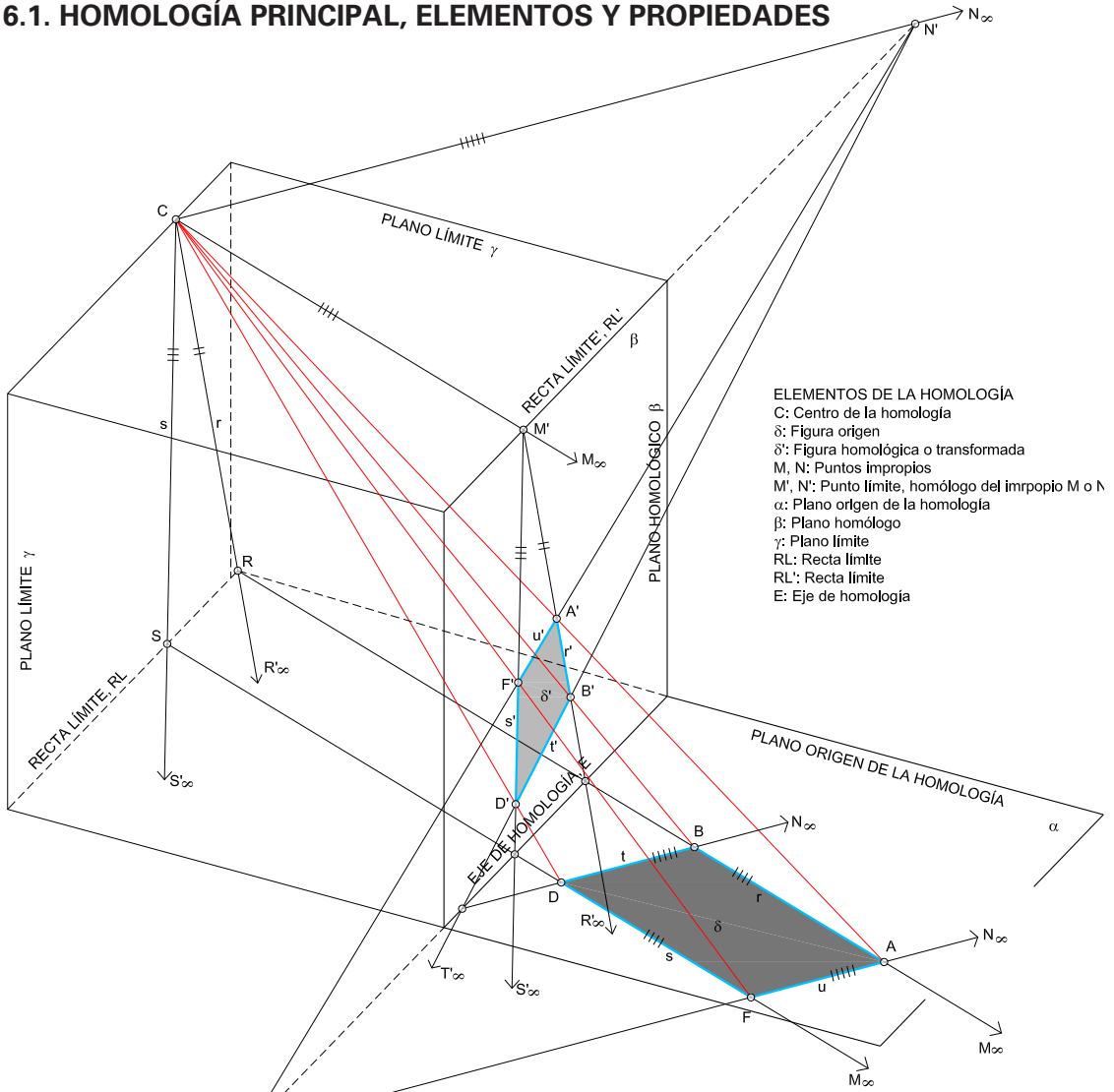


Fig. 6.1.a.

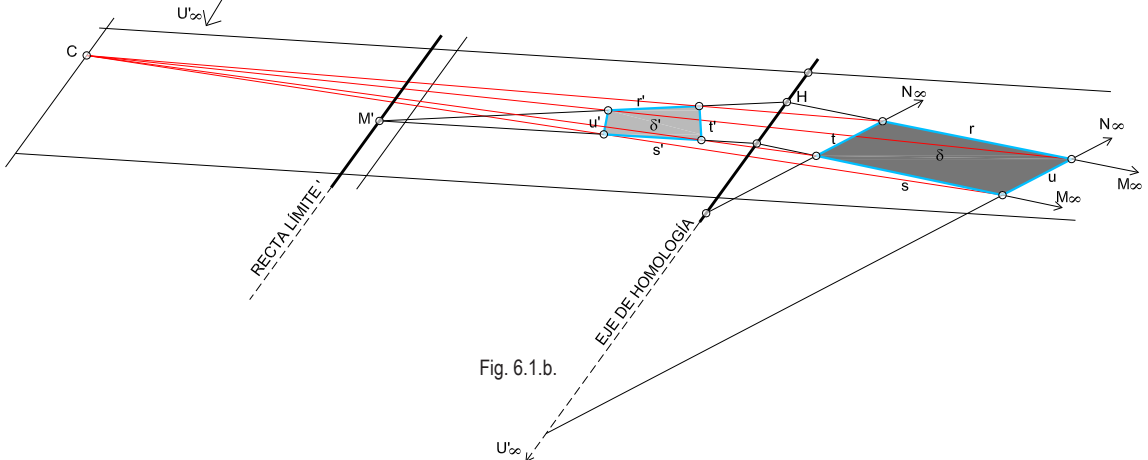


Fig. 6.1.b.

Una homología la podemos definir como la correspondencia existente entre dos figuras (δ y δ') resultantes de seccionar un haz de rectas por dos planos no paralelos α y β , α el plano origen de la homología y β plano homólogo, y cuya intersección es el eje de homología.

Los puntos homólogos están en línea recta con el punto fijo C, que es el centro de homología (punto de donde parte el haz de rectas).

A cada punto de α , le corresponde un punto homólogo de β : A-A', B-B', C-C' y F-F', y a cada recta, le corresponde una recta homóloga: r-r', s-s', t-t' y v-v'

Las rectas homólogas se cortan en el eje de homología (E), que es la recta intersección entre los dos planos α y β . El eje de homología es también el lugar geométrico de los puntos dobles (los puntos que son homólogos de sí mismos).

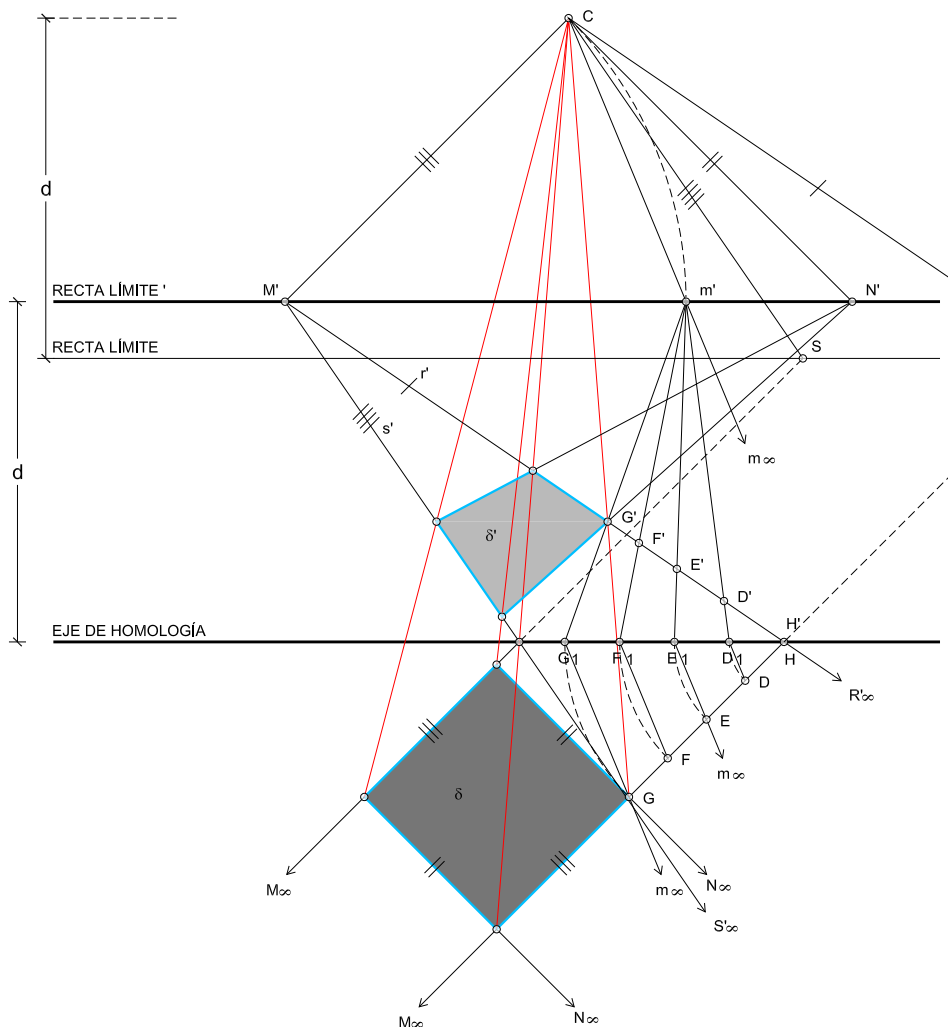


Fig. 6.1.c.



Se llama recta límite (RL / R'L') al lugar geométrico de los puntos homólogos de los del infinito.

A la figura δ situada en el plano origen de la homología y a la figura δ' situada en el plano homológico les corresponde una recta límite. Entonces a los puntos del infinito H_∞ y M_∞ de la fig. δ , le corresponden por homólogos los puntos H' y M' en la R'L'. De la misma manera los puntos del infinito S'_∞ y T'_∞ de la fig. δ' , les corresponden por homólogos los puntos N y S en la RL.

De todo lo anterior podemos ver que las rectas límites (RL / R'L') son paralelas al eje de homología y que la distancia de dicho eje a la R'L' es igual a la distancia de la RL al centro C de homología.

En la fig. 6.1.d se pueden ver claramente dos de las propiedades que hemos visto anteriormente. La primera es que los pares de puntos homólogos AA' , BB' , DD' están en línea con el centro de homología C , y la segunda propiedad es que los pares de rectas homólogas $AD-A'D'$ y $BD-B'D'$ se cortan en los puntos NN' y MM' , puntos dobles que pertenecen el eje de homología (intersección del plano α y β).

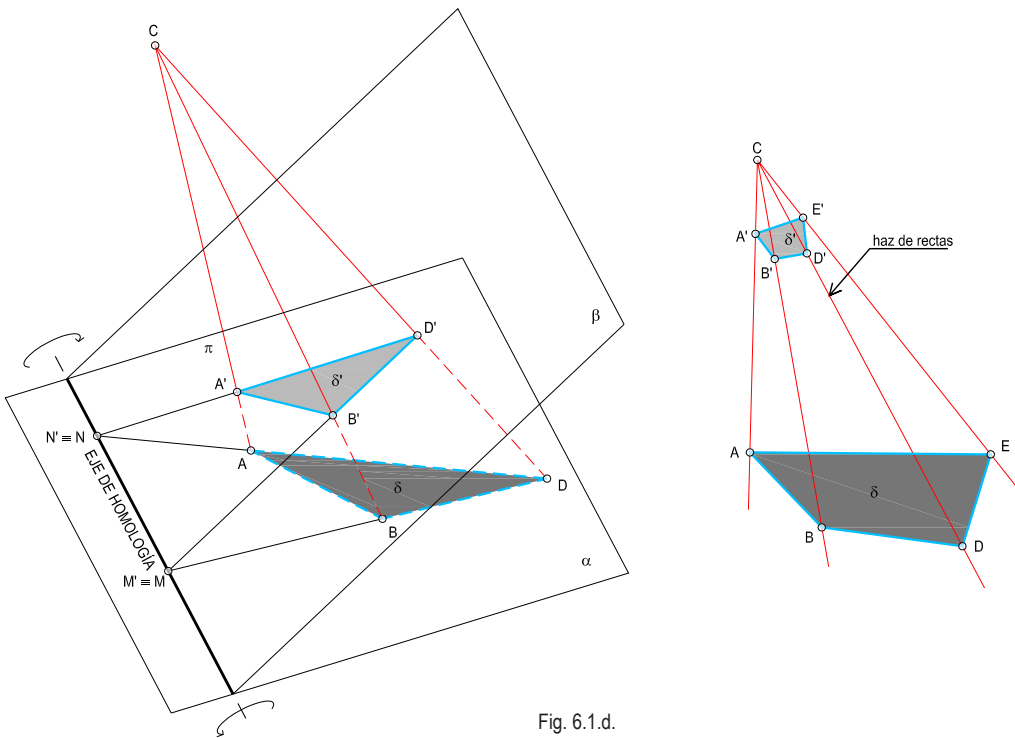


Fig. 6.1.d.

6.2. ELEMENTOS PARA PODER DEFINIR UNA HOMOLOGÍA

6.2.1. Centro, eje de homología y un par de puntos homólogos

DATOS:

- 1.- C → Centro de la homología.
- 2.- Eje → Eje de homología
- 3.- Puntos → A, A'
- 4.- Puntos → A', B', D', E'

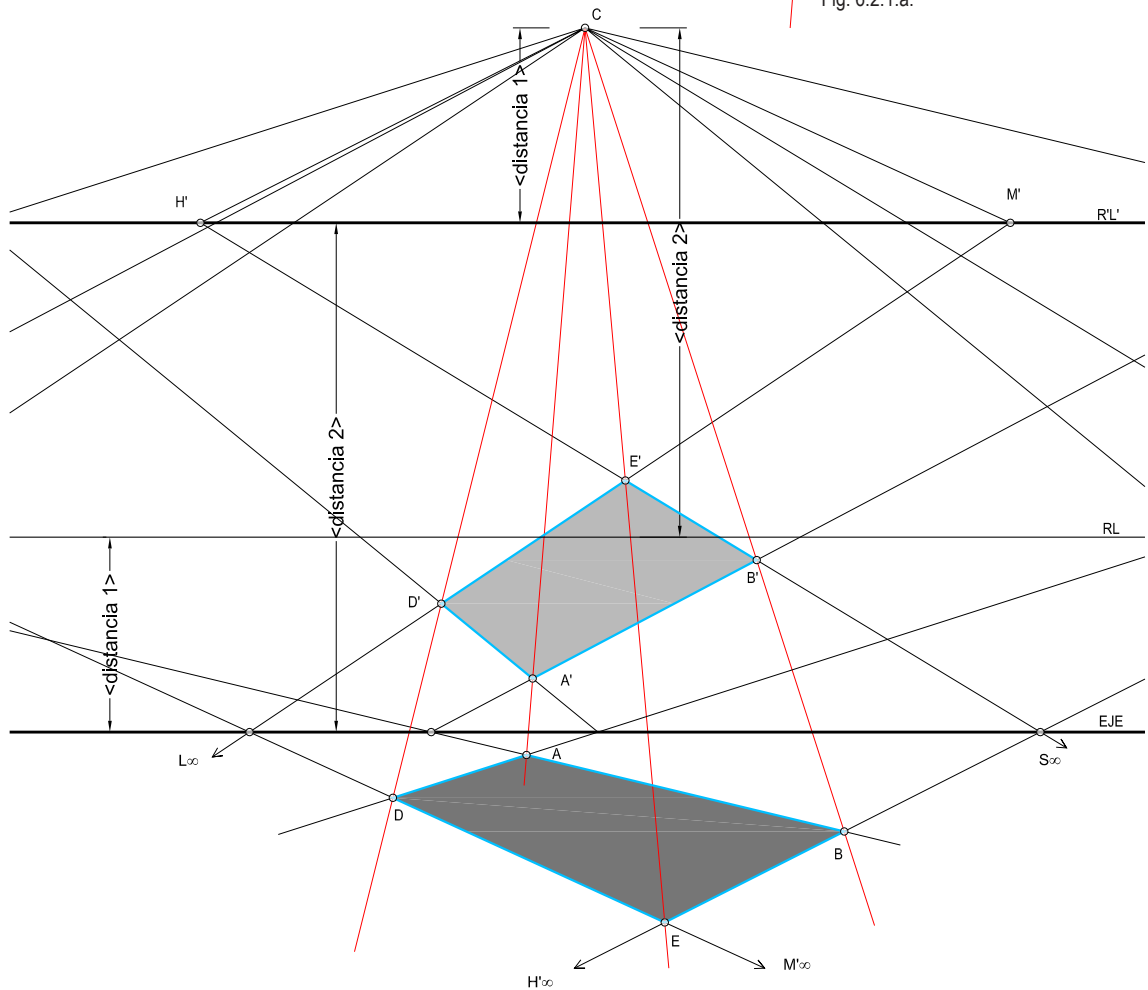
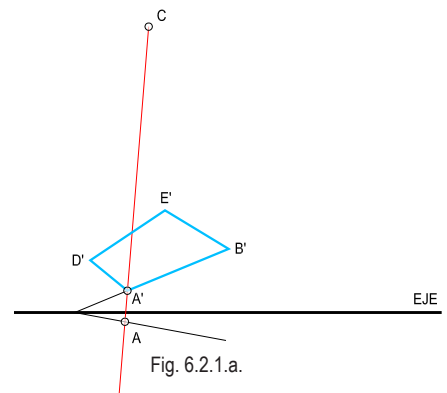


Fig. 6.2.1.b.



6.2.2. Centro, eje de homología y la recta límite R'L'

DATOS:

- 1.- C → Centro de homología.
- 2.- Eje → Eje de homología
- 3.- Puntos → A,B,D,E
- 4.- R'L' → Recta Límite de la figura que se busca.

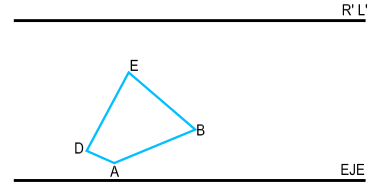


Fig. 6.2.2.a.

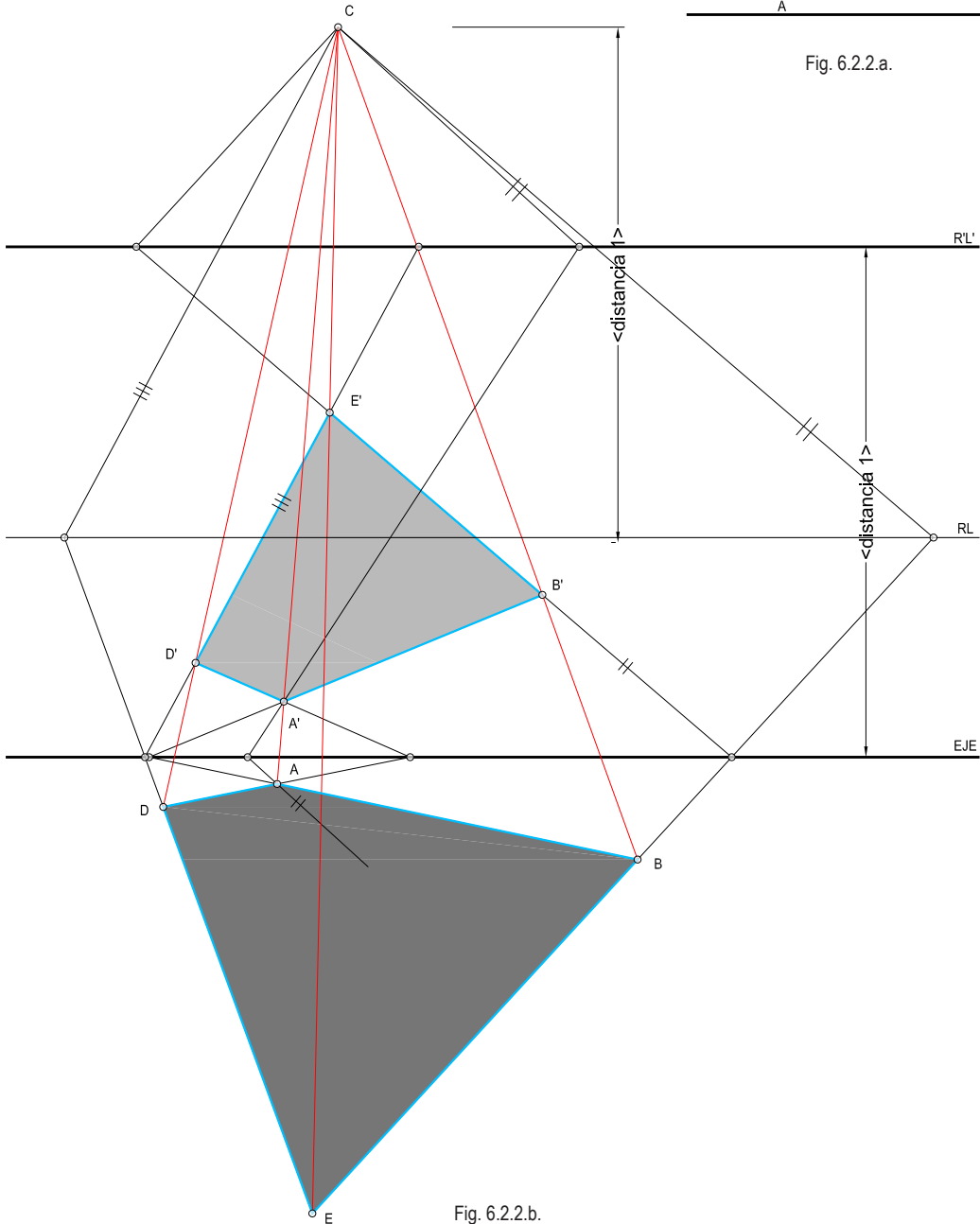


Fig. 6.2.2.b.

6.2.3. Centro y las rectas límite RL y R'L'

DATOS:

- 1.- C → Centro de homología.
- 2.- RL → Recta Límite
- 3.- R'L' → Recta Límite'
- 4.- Hallar → Eje de homología.

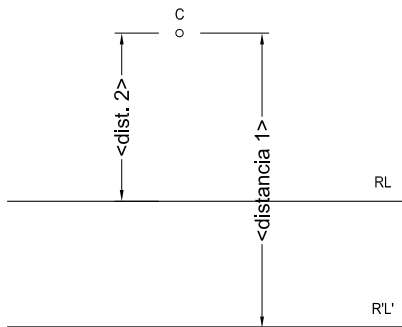


Fig. 6.2.3.a.

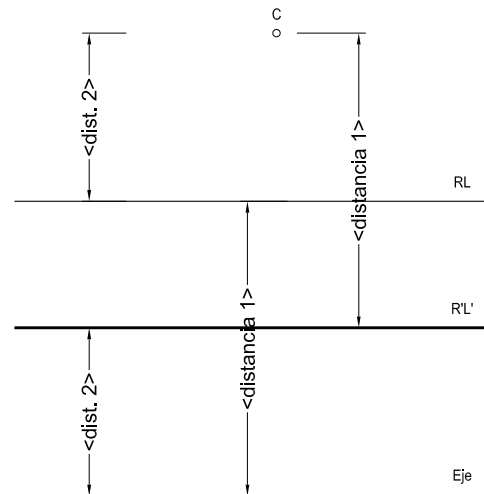


Fig. 6.2.3.b.

6.2.4. Dos pares de puntos homólogos y la dirección del eje

DATOS:

- 1.- A-A', B-B' → dos pares de Ptos. homólogos.
- 2.- d → dirección del Eje de homología.

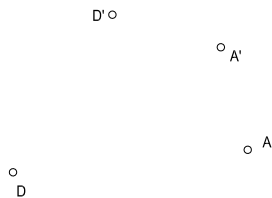


Fig. 6.2.4.a.

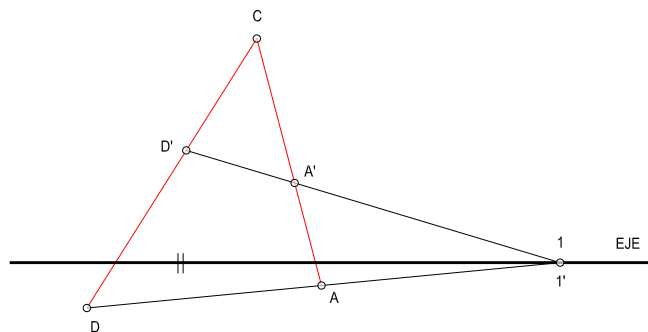


Fig. 6.2.4.b.



6.3. TRANSFORMACIÓN HOMOLÓGICA DE UN TRIÁNGULO EN EQUILÁTERO

Dados el eje y la recta límite, determinar el centro de homología que transforma un triángulo cualquiera en un triángulo equilátero.

Solución:

- Prolongación de los lados del triángulo $A'B'D'$ hasta la recta límite. En la intersección con la recta límite se obtienen los puntos I, J, K.
- En la intersección con el eje de homología, se obtienen los puntos M, N, P.
- Trazar por M paralela a CI y por N paralela a CJ, resultando el ángulo DBA, de 60° . El ángulo ICJ también será de 60° .
- El centro estará sobre el arco capaz de 60° construido sobre el segmento IJ.
- El ángulo JCK será de 60° y el centro deberá estar sobre el arco capaz de 60° construido sobre el segmento JK.
- La intersección de los dos arcos capaces construidos determina el punto C, centro de la homología.

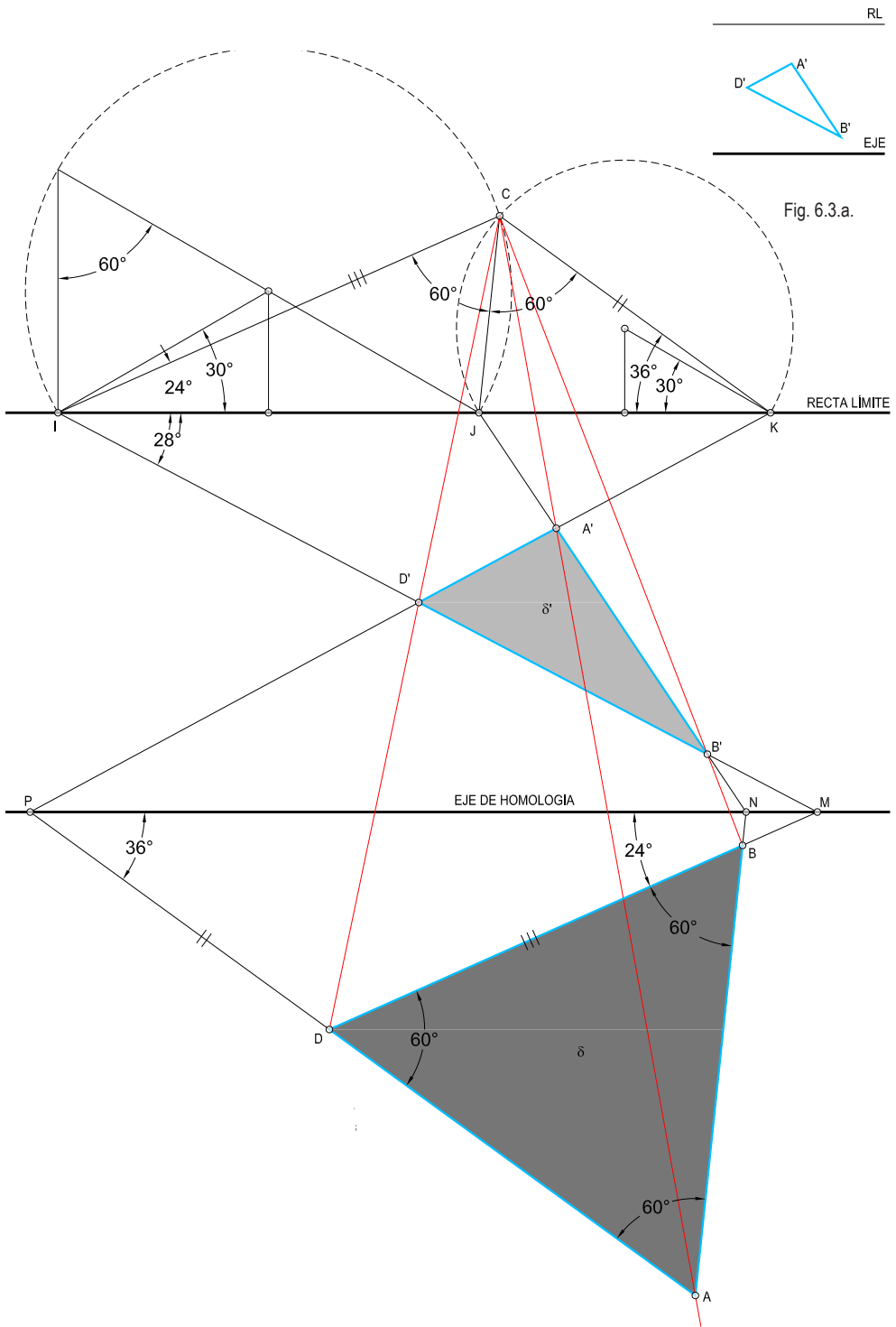


Fig. 6.3.a.

Fig. 6.3.b.



6.4. TRANSFORMACIÓN HOMOLÓGICA DE UN CUADRILÁTERO EN CUADRADO

Dados el eje y el cuadrilátero $A'B'D'E'$, determinar la homología que transforma un cuadrilátero en un cuadrado.

Solución (figuras 6.4.a y 6.4.b);

- Prolongación de los lados del cuadrilátero $A'B'D'E'$ hasta que se corten. Obtendremos los puntos 1 y 2 de la recta límite.
- Prolongando las diagonales, cortan la recta límite en 3 y 4.
- El centro de homología ha de ser un punto desde el cual se vean los segmentos 1-2 y 3-4 bajo ángulos rectos.
- Trazamos los lugares geométricos (semicircunferencias) y obtenemos el punto C, centro de homología.
- Las direcciones C_1 y C_2 serán las de los lados del cuadrado buscado y las C_3 y C_4 las de las diagonales.

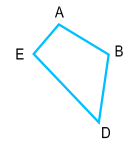
6.5. TRANSFORMACIÓN HOMOLÓGICA DE UNA CIRCUNFERENCIA EN ELIPSE

Dados el eje de homología, la recta límite $R'L'$ y el centro de homología, hallar la elipse resultante.

Procedimiento (figuras 6.5.a y 6.5.b):

1. Por C, trazar una recta cualquiera CN. Por el punto N de la recta límite $R'L'$, se trazan las tangentes a la circunferencia t_1 , t_2 y se obtienen los puntos de tangencia D y E.
2. Prolongando la recta D-E obtenemos el punto M en $R'L'$. Desde M, trazar otras dos rectas tangentes a la circunferencia r_1 y r_2 , cuyos puntos de tangencia son A y B.
3. Unidos A-B, nos dan otra cuerda que pasa por N. Las cuerdas DE y AB son las homólogas de dos diámetros de la elipse, y su punto de intersección O_1 , el homólogo del centro de la elipse.
4. Las tangentes desde N a la circunferencia cortan al eje en 1 y 2. Sus homólogas pasan también por 1 y 2 y serán paralelas a la dirección CN. Así obtenemos t'_1 y t'_2 . Del mismo modo, las tangentes desde M, r_1 y r_2 , cortan al eje en 3 y 4. Sus homólogas pasan también por 3 y 4 y serán paralelas a la dirección CM. Así obtenemos r'_1 y r'_2 .
5. El punto de tangencia D tiene su homólogo en t'_1 y en línea recta con C, es decir, el punto D' . Lo mismo ocurre con los puntos E' , A' y B' , que unidos nos dan los diámetros de la elipse $E'-D'$ y $A'-B'$. Los puntos J y K, en los que el eje corta la circunferencia, son dobles por pertenecer al eje de homología, y por lo tanto también pertenecen a la elipse.

Con estos elementos construimos la elipse.



EJE

Fig. 6.4.a.

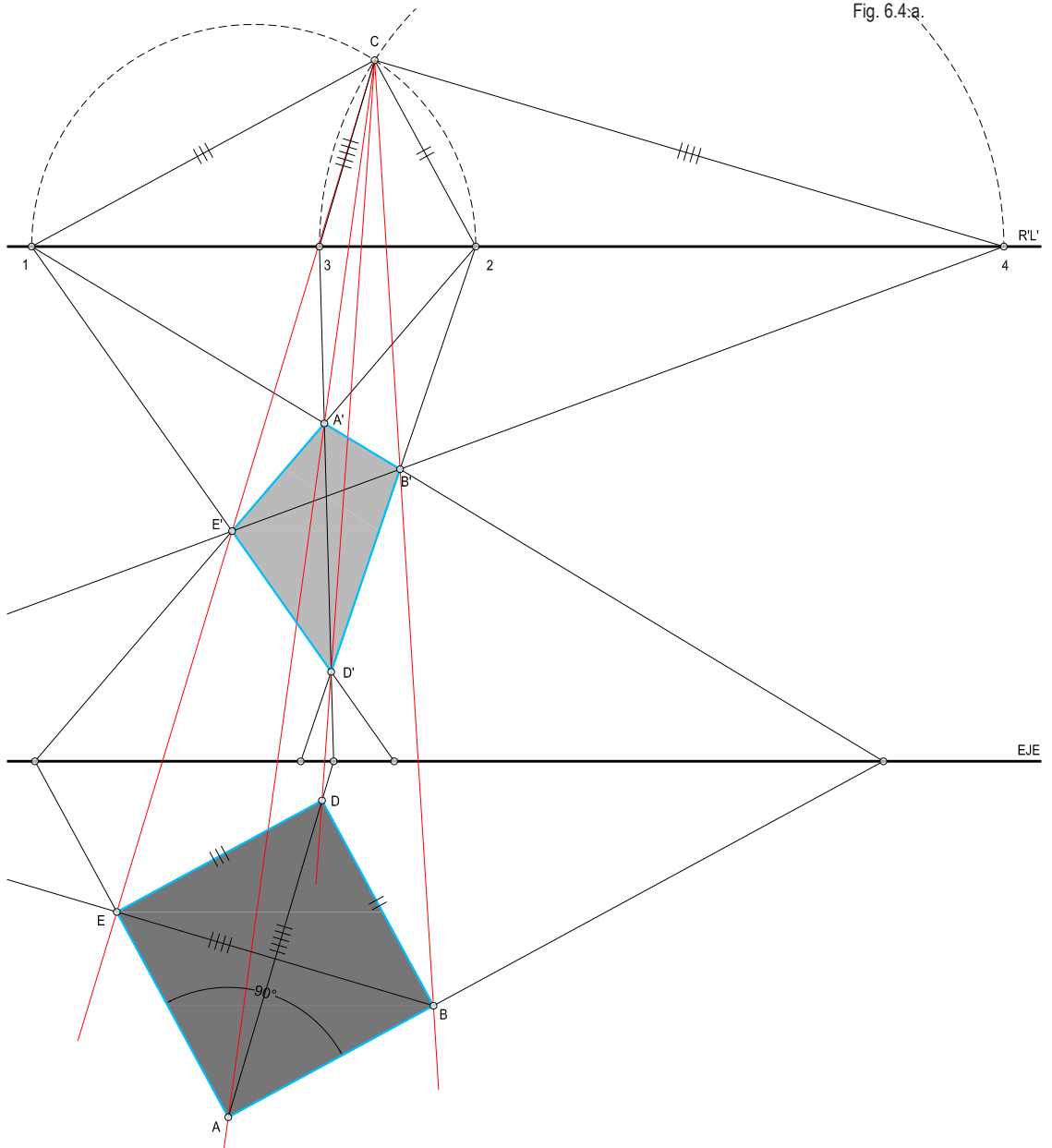


Fig. 6.4.b.

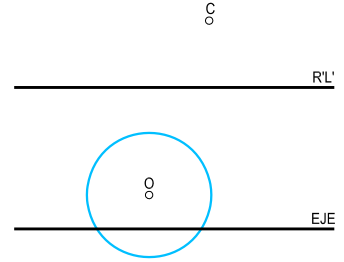


Fig. 6.5.a.

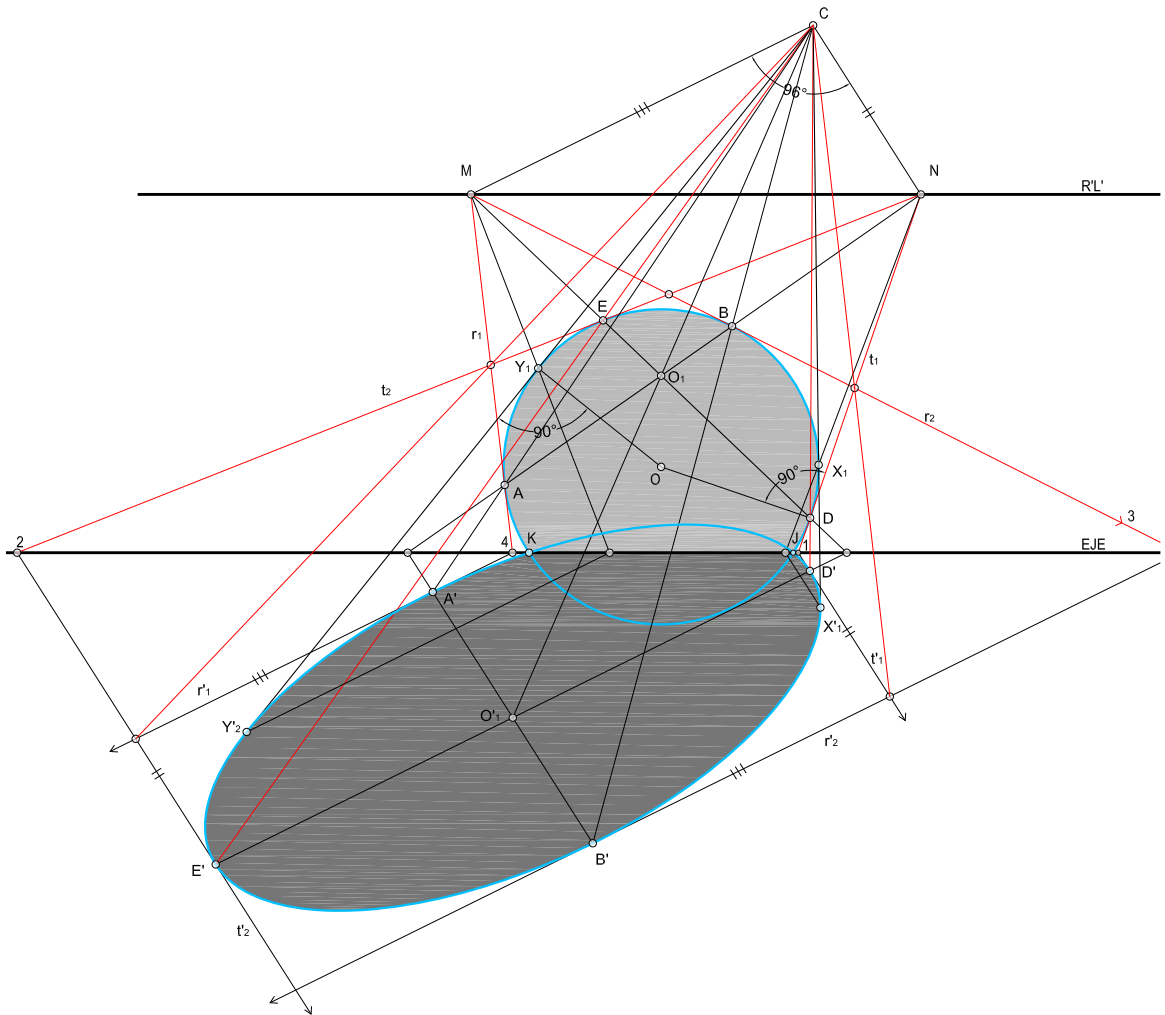


Fig. 6.5.b.

6.5.1. Método de los diámetros conjugados

- 1.- C → centro de la homología.
- 2.- Eje → eje de homología.
- 3.- R'L' → recta de homología.
- 4.- R'L' → no corta a la circunferencia.

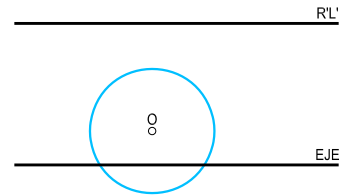


Fig. 6.5.1.a.

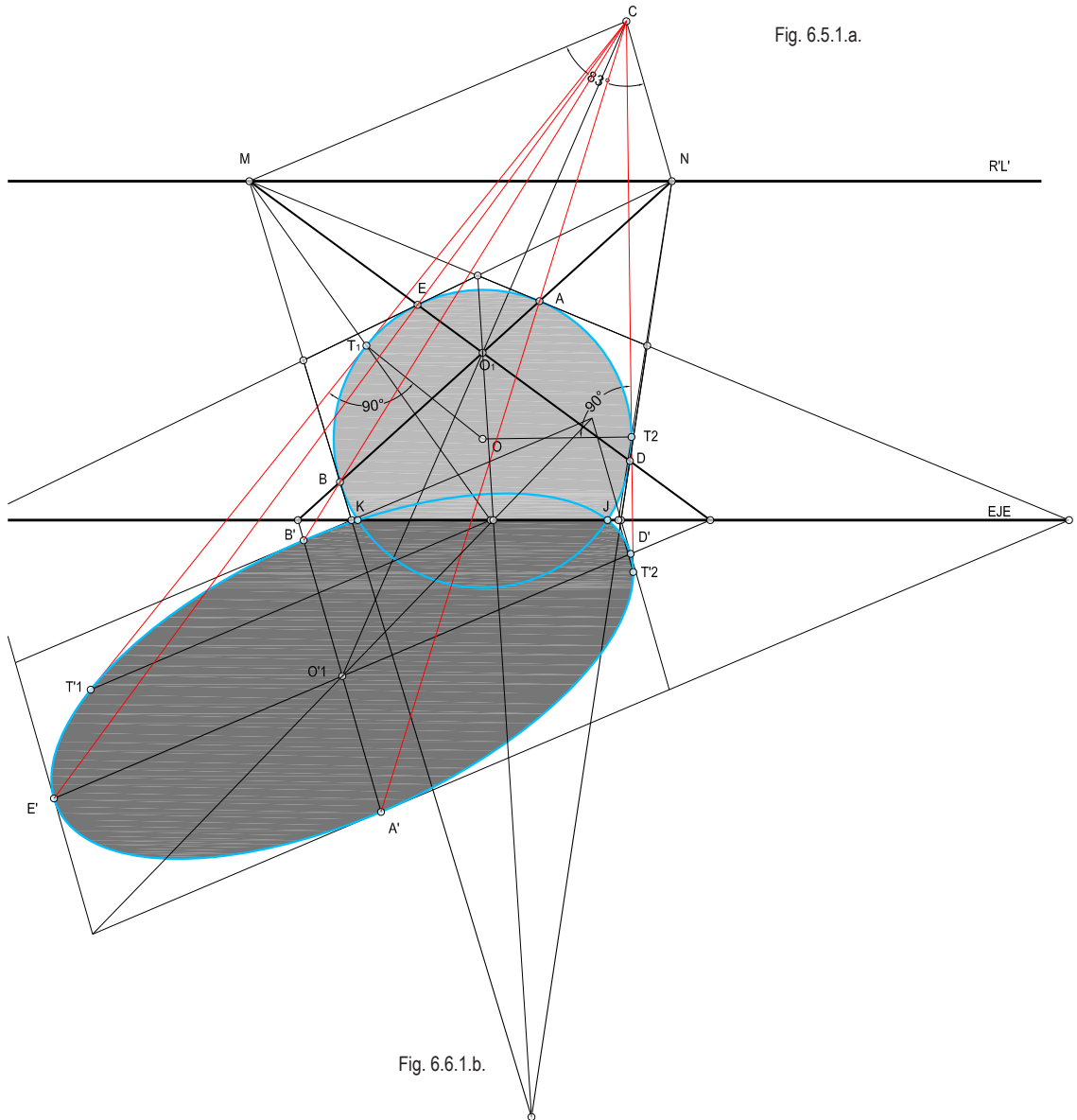


Fig. 6.6.1.b.



6.5.2. Método de los ejes de la elipse

DATOS:

- C → centro de la homología.
- Eje → eje de homología.
- R'L' → recta de homología.
- R'L' → no corta a la circunferencia.

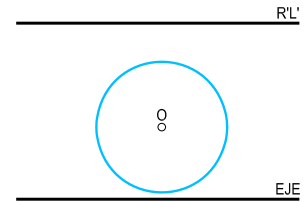


Fig. 6.5.2.a.

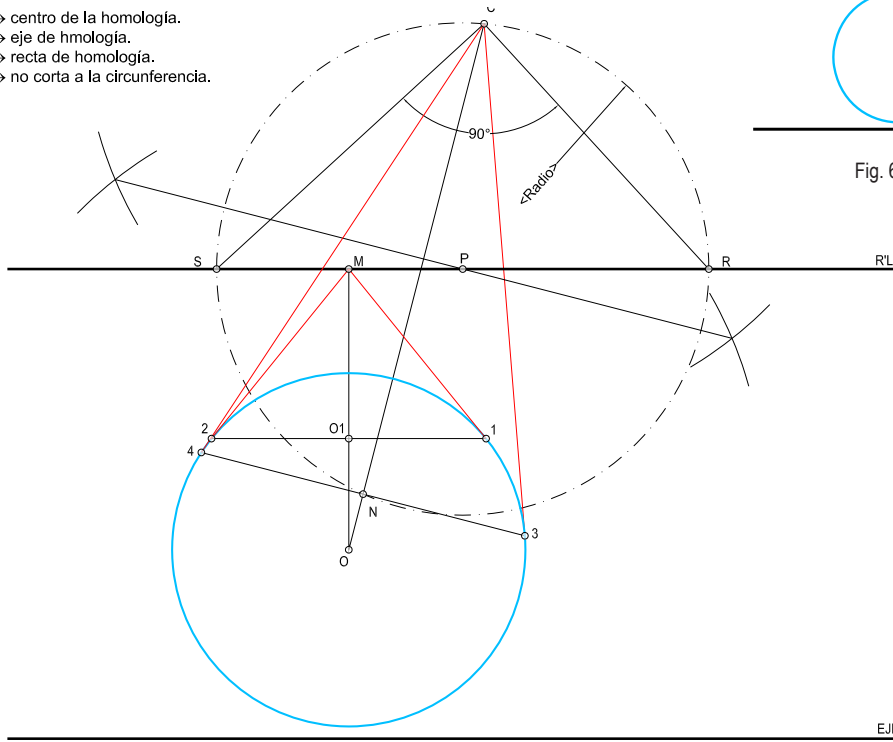
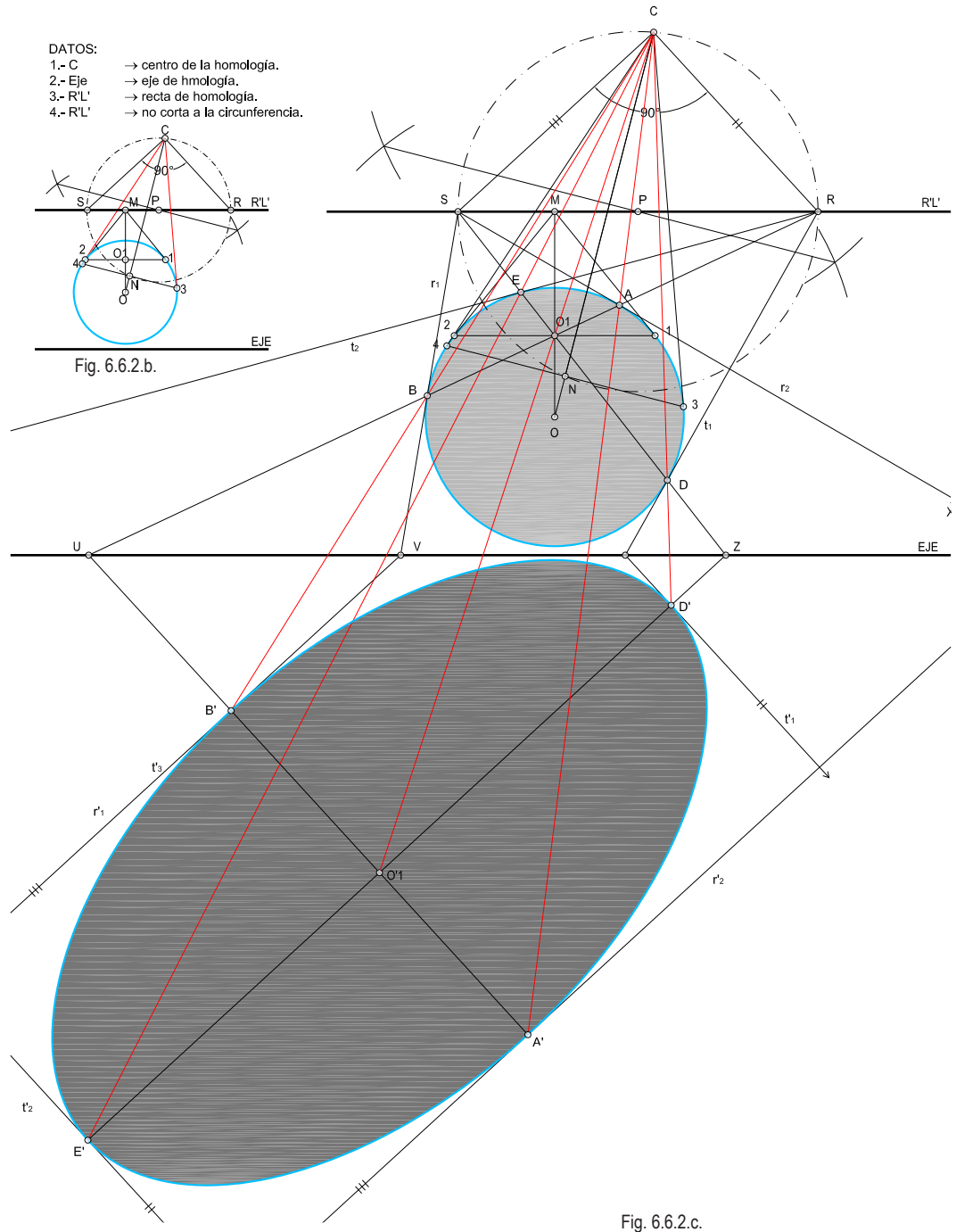


Fig. 6.5.2.b.

Procedimiento:

1. Obtención del punto O1 (homólogo del centro de la elipse respecto de la circunferencia):
 - Trazamos por O, la perpendicular OM a la recta límite. Desde M trazamos las tangentes a la circunferencia, cuyos puntos de contacto son 1 y 2, la cuerda 1-2 corta OM en el punto O₁ buscado.
2. Obtención del conjugado armónico del punto C (centro de homología) respecto de la circunferencia:
 - Trazaremos las tangentes a la circunferencia desde C y unimos los puntos de tangencia 3 y 4. La cuerda 3-4 corta la recta OC en el punto N. El punto N es el conjugado armónico del punto C. Trazaremos la mediatriz del segmento CN que corta en P la recta límite R'L'. Con centro en P, trazamos la circunferencia que pasa por C y por N. Esta circunferencia corta la recta límite R'L' en los puntos R y S, que unidos con C dan dos direcciones perpendiculares, que son las direcciones de los ejes de la elipse que vamos a buscar.
 - Para proceder a la construcción de la elipse, el centro de la elipse O₁' debe de estar en línea recta con O₁ y C. Trazamos las tangentes t₁, t₂, r₁ y r₂ a la circunferencia desde R y S y determinamos por los puntos de tangencia D-E, A-B. Prolongando dichas cuerdas hasta el eje de homología hallamos los puntos Z y U.



- Por los puntos U, Z trazar las paralelas a las direcciones CR y CS. Hallamos los homólogos puntos de los ejes de la elipse D'-E' y A'-B' que son las cuerdas D-E y A-B. El eje D'-E' es perpendicular a la dirección CR, lo mismo ocurre con el eje A'-B' con respecto a CS.



6.6. TRANSFORMACIÓN HOMOLÓGICA DE UNA CIRCUNFERENCIA EN PARÁBOLA

- DATOS A OBTENER:
- 1.- El eje de la parábola.
 - 2.- El vértice.
 - 3.- La tangente en el vértice.
 - 4.- El foco.

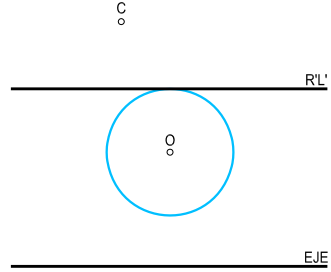


Fig. 6.6.a.

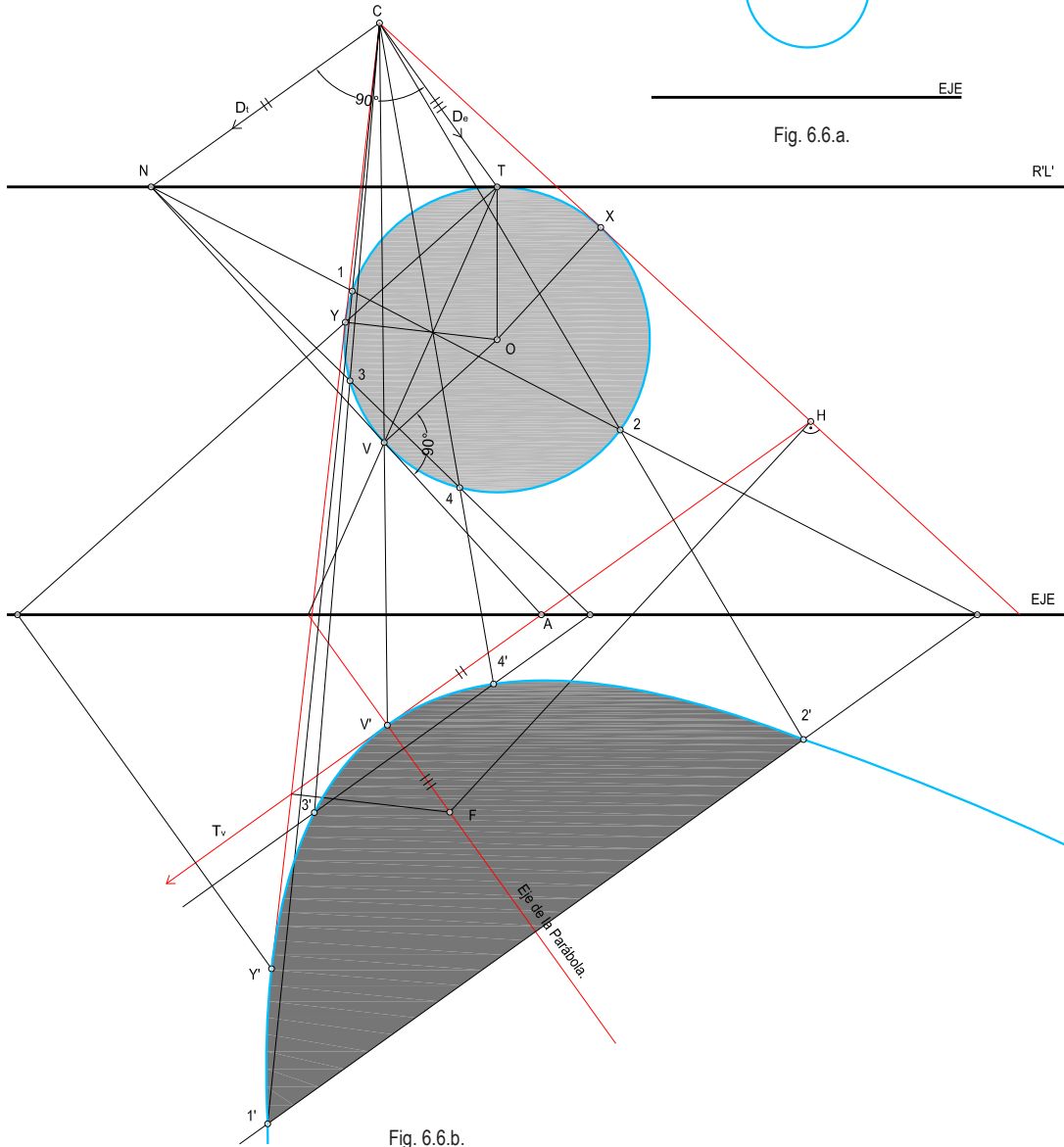


Fig. 6.6.b.

La parábola es la figura homológica de una circunferencia cuando la recta límite $R'L'$ es tangente a ésta (punto T).

Obtendremos los elementos siguientes para el trazado de la parábola: eje, vértice, la tangente en el vértice y el foco.

Procedimiento:

- Unir el centro de homología C con T. Como el homólogo de T está en el infinito, por estar T en la recta límite, la recta CT es la dirección del eje de la curva (De).
- La dirección de la tangente será la recta CN, perpendicular a De.
- Desde N, trazar la tangente a la circunferencia, cuyo punto de tangencia es V. Su homóloga será paralela a CN y pasará por A, que es donde la recta corta al eje de homología.
- El homólogo de V será el vértice V' en línea recta con C.
- Por V' , paralela a CT obtenemos el eje de la parábola.
- El foco se obtiene trazando por H (punto por donde corta la tangente común (CX) desde C a la tangente en el vértice T_v) la perpendicular a CH.
- Las tangentes comunes a las dos curvas (CX y CY) son las trazadas desde el centro de homología. El punto de tangencia Y' es homólogo del Y.



6.7. TRANSFORMACIÓN HOMOLÓGICA DE UNA CIRCUNFERENCIA EN HIPÉRBOLA

- DATOS A OBTENER:
- 1.- El eje de la parábola.
 - 2.- El vértice.
 - 3.- La tangente en el vértice.
 - 4.- El foco.

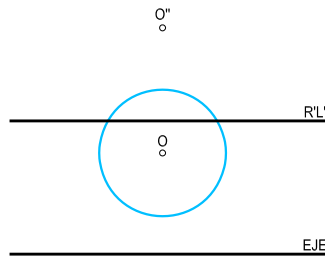


Fig. 6.7.a.

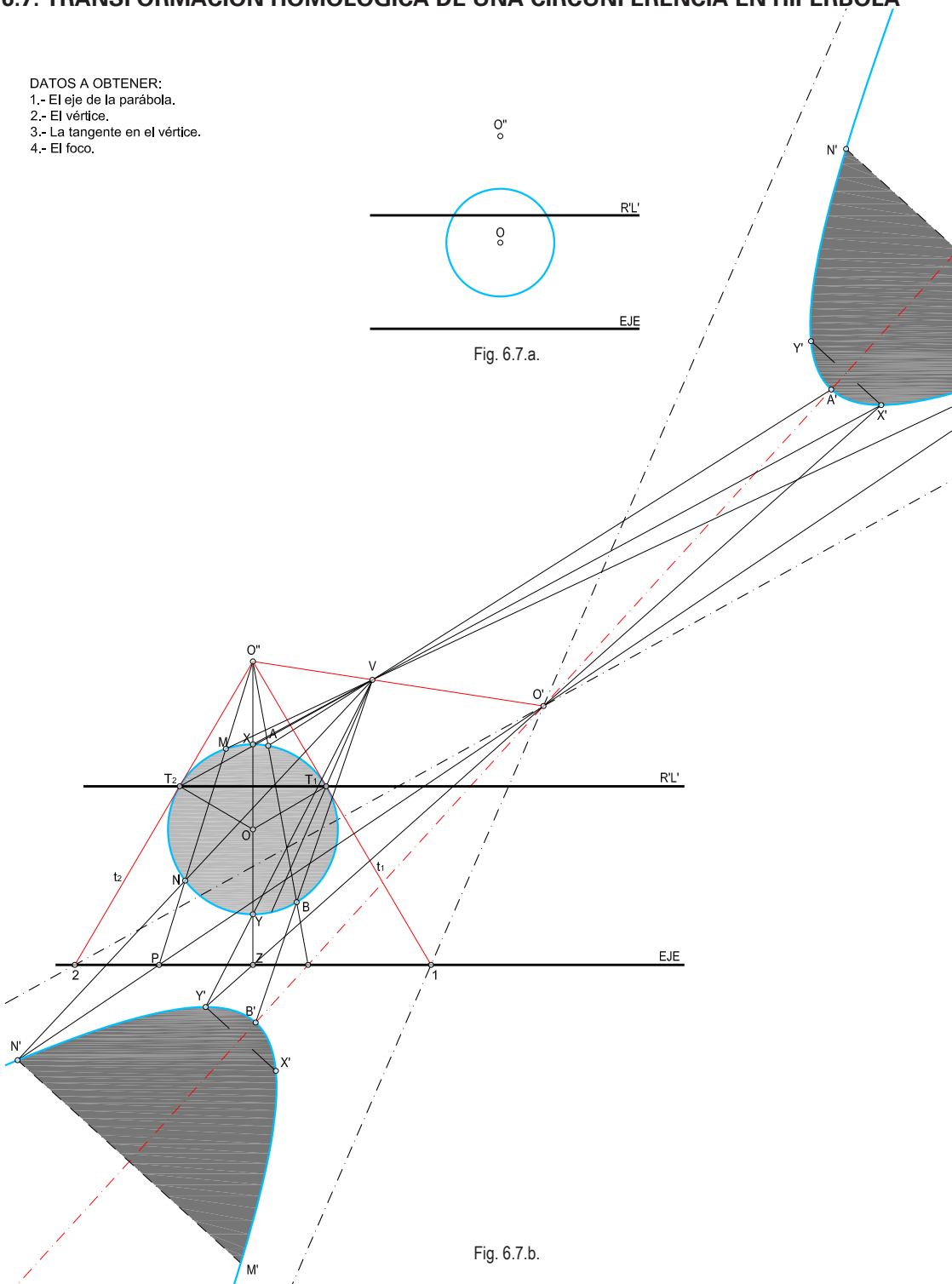


Fig. 6.7.b.

Si la recta límite $R'L'$ corta a la circunferencia, ésta se transforma en hipérbola, ya que los homólogos de los puntos de intersección de la recta límite y la circunferencia estarán en el infinito, y la cónica tiene dos puntos impropios (dos ramas); es la hipérbola.

Procedimiento;

1. Los puntos donde la recta límite corta a la circunferencia son los puntos T_1 y T_2 . Las tangentes en ellos son t_1 y t_2 , que se cortan en O'' .
2. Las homólogas de estas tangentes pasaran por 1 y 2, puntos del eje; y serán las asíntotas.
3. Por los puntos 1 y 2 se trazan paralelas a VT_1 y VT_2 , que se cortan en O' ; centro de la hipérbola.

Como comprobación, los puntos O'' , V y O' están en línea recta, pues O'' es el homólogo de O' .

4. Los ejes son las bisectrices de los ángulos que forman las asíntotas.
5. El eje real corta en 3 al eje de homología. Su homólogo será la recta $3-O''$, que corta a la circunferencia en A y B , cuyos homólogos A' y B' son los vértices del eje real; para ello se unen A y B con V hasta obtener A' y B' .



6.8. PROBLEMAS DE HOMOLOGÍAS

6.8.1. Dada la figura origen de homología A,B,D, hallar su figura homóloga.

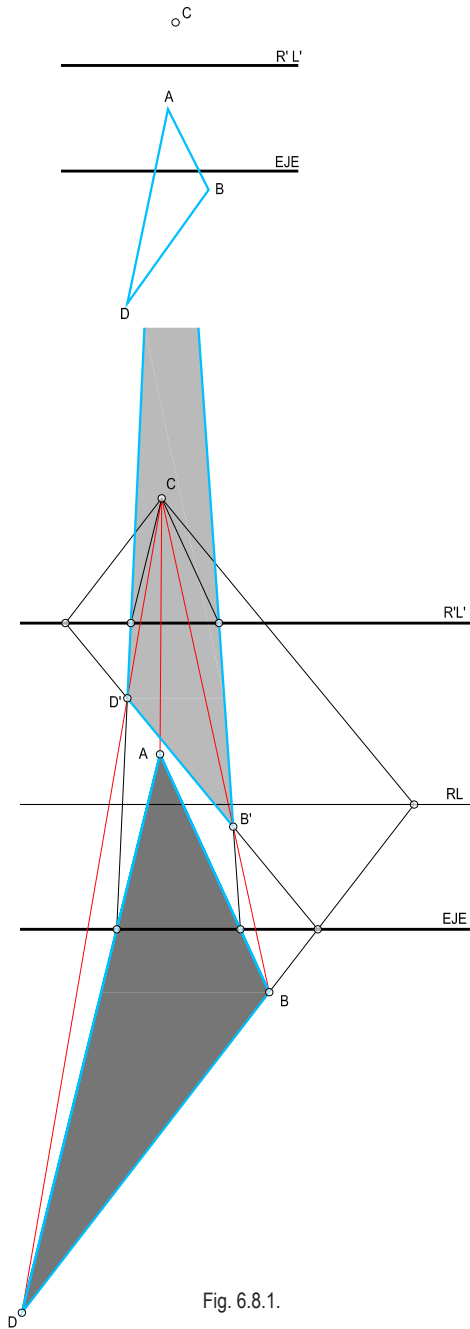


Fig. 6.8.1.

6.8.2. Dada la figura homóloga A',B',D', hallar la figura origen de homología.

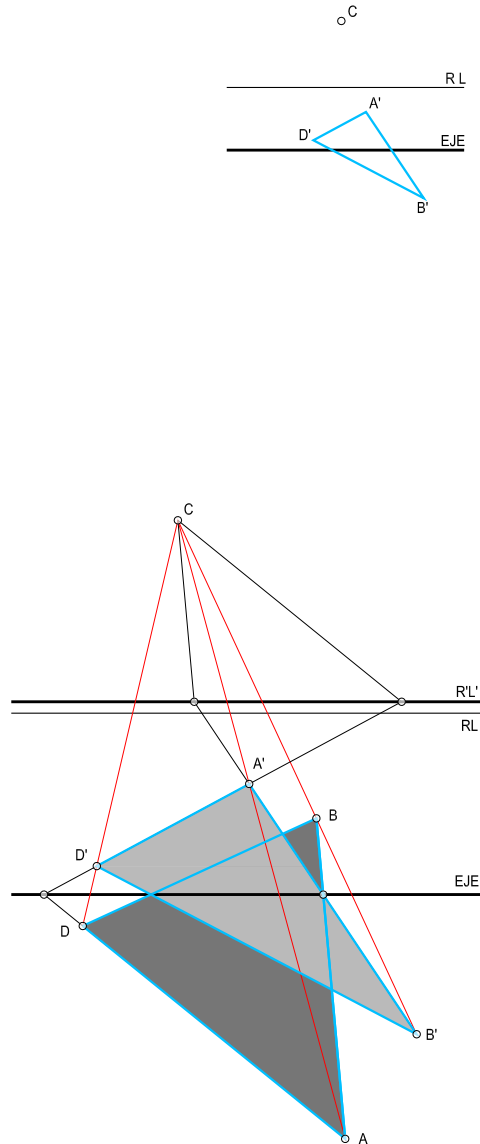


Fig. 6.8.2.

6.8.3. Dada la figura homóloga A', B', D' , hallar la figura origen de homología.

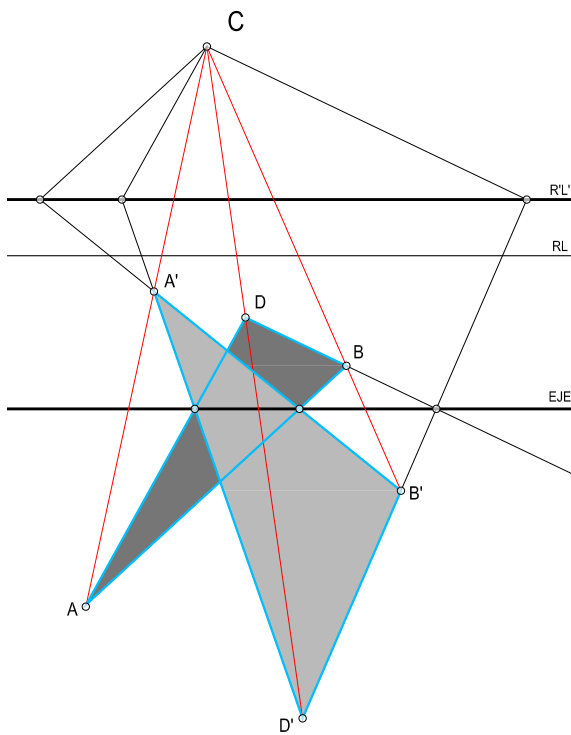
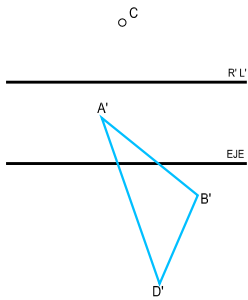


Fig. 6.8.3.

6.8.4. Dada la figura origen de homología A, B, D , hallar su figura homóloga.

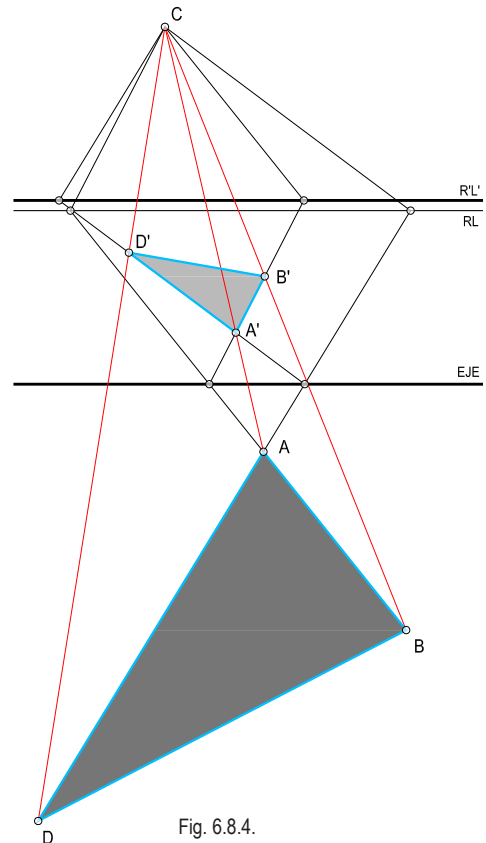
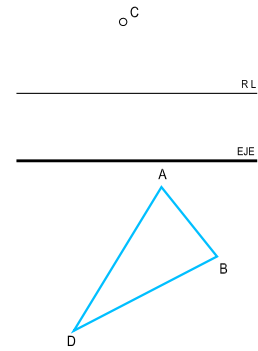


Fig. 6.8.4.



6.8.5. La recta límite $R'L'$ y el eje de homología determinan el plano origen de la homología. El polígono exagonal se halla contenido en dicho plano.

Determinar la imagen transformada. No hay datos directos del plano homológico; no obstante, el vértice C y la recta RL determinan un plano paralelo al homológico.

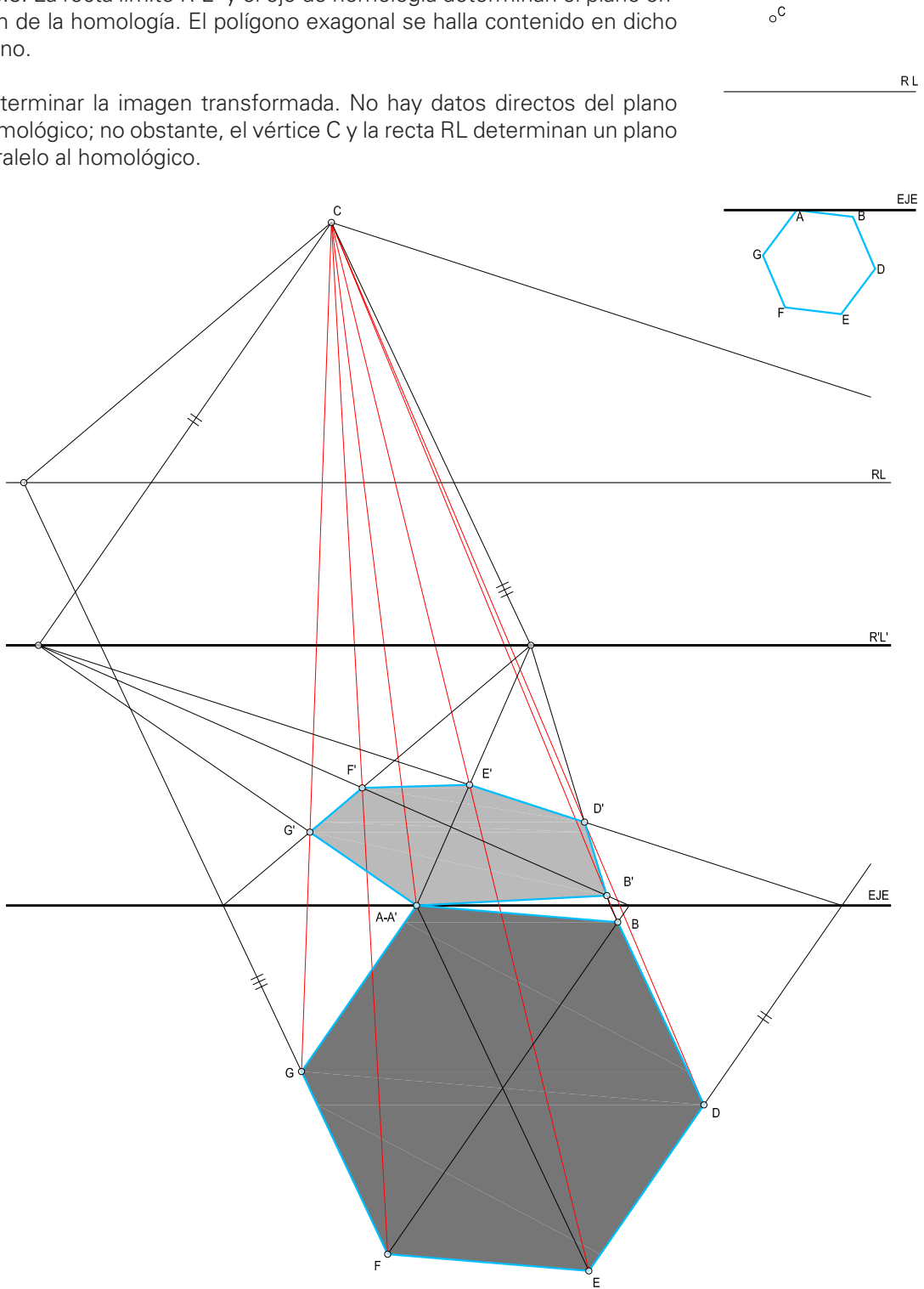
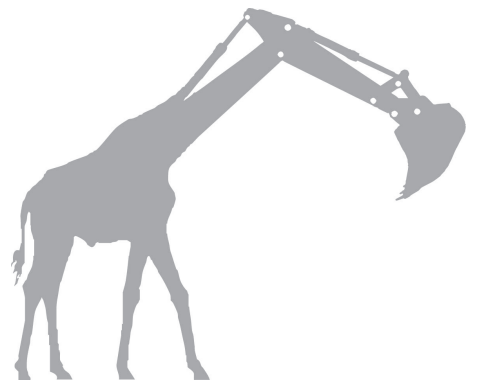


Fig. 6.8.5.



→7



Afinidad

- 7.1. AFINIDAD EN EL ESPACIO
- 7.2. AFINIDAD OBLICUA Y RAZÓN DE AFINIDAD
- 7.3. PROPIEDADES DE LA AFINIDAD
 - 7.3.1. El eje y un par de puntos afines
 - 7.3.2. Dos pares de puntos afines y un punto doble del eje
 - 7.3.3. Tres pares de puntos afines
- 7.4. REDUCCIÓN DE LA AFINIDAD EN EL ESPACIO A LA AFINIDAD PLANA
- 7.5. TRAPECIO AFÍN DE OTRO
- 7.6. FIGURA AFÍN DE UNA CIRCUNFERENCIA
- 7.7. AFINIDAD APLICADA AL ABATIMIENTO
- 7.8. DETERMINACIÓN POR AFINIDAD DE LOS EJES DE UNA ELIPSE CONOCIDOS SUS DIÁMETROS CONJUGADOS
 - 7.8.1. Método de Mannheim
 - 7.8.2. Método de Chasles
- 7.9. CONSTRUCCIÓN DE ELIPSES
 - 7.9.1. Método de la tarjeta
 - 7.9.2. Por afinidad
 - 7.9.3. Método del jardinero
 - 7.9.4. Como envolvente de tangentes
 - 7.9.5. Por haces proyectivos
- 7.10. TANGENTES A LA ELIPSE DESE UN PUNTO EXTERIOR P
- 7.11. TANGENTES A LA ELIPSE PARALELAS A UNA DIRECCIÓN DADA



7.1. AFINIDAD EN EL ESPACIO

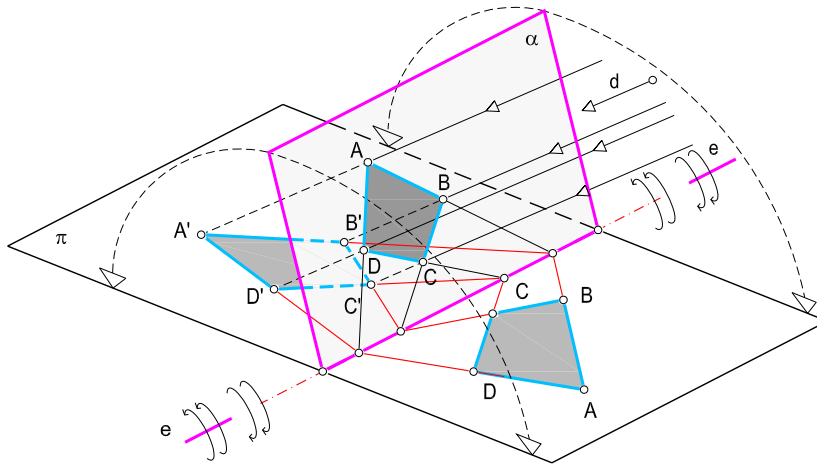


Fig. 7.1.

La afinidad es un caso particular de la homología que se caracteriza por tener el centro de homología en el infinito (centro impropio). La correspondencia de figuras se establece del siguiente modo:

Los puntos que se dicen afines están sobre rectas (afines) convergentes en el centro impropio y son, por lo tanto, paralelas a una dirección fija; dichas rectas se cortan sobre otra recta fija o *eje de afinidad* (lugar geométrico de los puntos dobles o afines a sí mismos). La dirección mencionada anteriormente es la *dirección de afinidad*. Así, en la fig. 7.1, son puntos afines A y A' , B y B' , y C y C' ; y son rectas afines $A'D'-AD$, $A'B'-AB$, $B'C'-BC$, etc.

7.2. AFINIDAD OBLICUA Y RAZÓN DE AFINIDAD

La afinidad oblicua es aquella afinidad en la que la dirección de afinidad es oblicua al eje de afinidad. Este término se utiliza para diferenciarla de la afinidad ortogonal, en cuyo caso la dirección de afinidad es perpendicular al eje.

En la fig. 7.2.a, la relación $OC/OC'' = NB/NB' = MD/MD' = LA/LA'$ se denomina *razón de afinidad* y se representan con la letra K . Análogamente, en la fig. 7.2.b, la razón de afinidad corresponde a la relación $NB/NB' = MA/MA' = OC/OC' = PD/PD'$. La razón de afinidad es constante para cualquier par de puntos afines, pudiendo ser positiva o negativa.

Si la razón de afinidad es negativa (fig. 7.2.a) las dos figuras afines están a distinto lado del eje (K es negativa por ser segmentos de signo contrario), mientras que si la razón de afinidad es positiva (fig. 7.2.b), las dos figuras están en el mismo lado del eje (K positiva por ser segmentos del mismo signo).

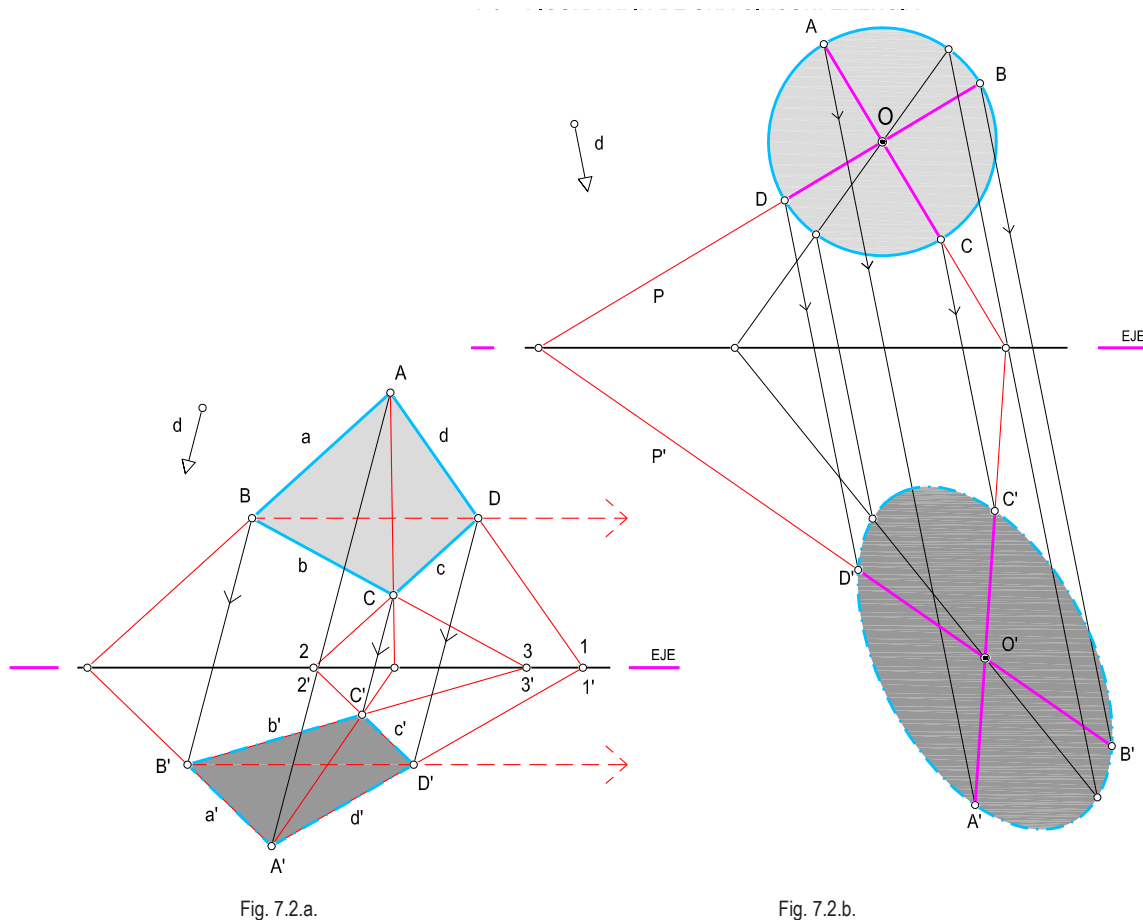


Fig. 7.2.a.

Fig. 7.2.b.

7.3. PROPIEDADES DE LA AFINIDAD

Las propiedades básicas de la afinidad se pueden resumir de la siguiente manera:

1. La afinidad conserva el grado de las curvas.
2. Se conserva el género de las curvas (en homología no).
3. Se conservan los centros, las tangentes y los diámetros conjugados.
4. Se conserva el paralelismo.
5. Se conservan las magnitudes relativas.
6. No se conservan los ejes de las elipses.
7. No se conservan ni los ángulos ni las verdaderas magnitudes.

Una afinidad puede venir determinada por:

- El eje de afinidad y un par de puntos afines.
- Dos pares de puntos afines y un punto doble del eje.
- Tres pares de puntos afines.



7.3.1. El eje y un par de puntos afines

La recta AA' nos da la dirección de afinidad. Para hallar el punto afín de un punto B cualquiera se une A con B (recta r) hasta que corte al eje (punto doble $1 \equiv 1'$); uniendo $1'$ con A' tendremos la recta r' sobre la que estará el punto B' afín del B .

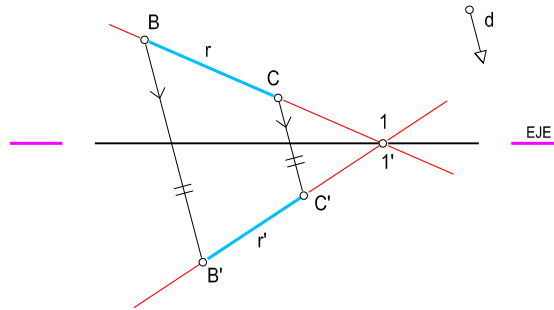


Fig. 7.3.1.

7.3.2. Dos pares de puntos afines y un punto doble del eje

Sean dos pares de puntos homólogos, AA' y BB' . Como ya se ha visto, los dos pares estarán sobre rectas paralelas entre sí definiendo la dirección de afinidad. Así mismo, al igual que en el caso anterior, las rectas AB y $A'B'$ se cortan en un punto doble $2 \equiv 2'$, que junto con el punto doble dado ($1 \equiv 1'$) define el eje de afinidad.

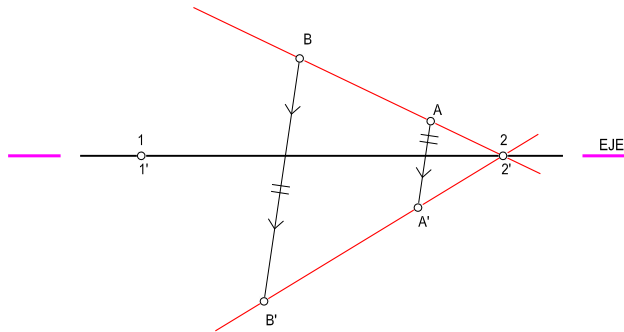


Fig. 7.3.2.

7.3.3. TRES PARES DE PUNTOS AFINES

Sean AA' , BB' y CC' los tres pares de puntos afines, que evidentemente tendrán que estar sobre rectas paralelas entre sí y que nos dan la dirección de afinidad. Las rectas CB y $C'B'$ se cortan en un punto doble $1 \equiv 1'$ que pertenece al eje de afinidad. Análogamente, las rectas AC y $A'C'$ se cortan también en otro punto doble $2 \equiv 2'$ perteneciente al eje. Conocidos dos puntos de eje de afinidad, éste queda perfectamente definido.

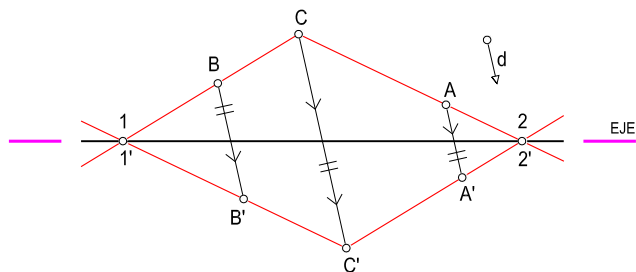


Fig. 7.3.3.

7.4. REDUCCIÓN DE LA AFINIDAD EN EL ESPACIO A LA AFINIDAD PLANA

Dadas dos secciones planas no coplanarias $ABCD$ y $(A)(B)(C)(D)$ de una misma superficie radiada de vértice V (en este caso impropio), homológicas en el espacio, si suponemos fijo uno de los planos, el α' por ejemplo, la relación de homología seguirá subsistiendo entre la figura $ABCD$ y el abatimiento de la $(A)(B)(C)(D)$, siendo la intersección de ambos planos el eje de la homología (fig. 7.4).

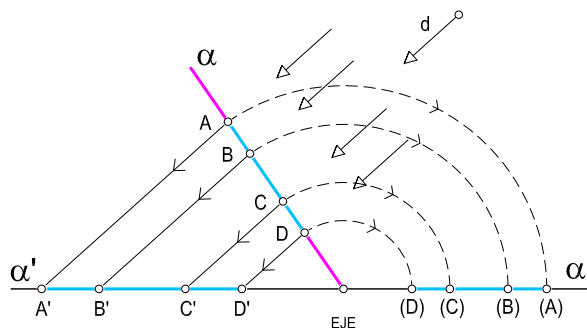


Fig. 7.4.

7.5. TRAPECIO AFÍN DE OTRO

Dado el sistema de afinidad de la fig. 7.5 definido por un par de puntos homólogos $(A-A)$ del polígono dado $ABCD$, el eje y la dirección de afinidad, para trazar el polígono afín $A'B'C'D'$ se procede aplicando las propiedades de la afinidad.

Lanzamos desde cada vértice del polígono una paralela a la dirección de afinidad dada, obteniendo las rectas afines que contendrán los respectivos puntos afines del polígono. Prolongando la recta AD hasta el eje de afinidad hallamos el punto doble $1 \equiv 1'$, que al unirlo con el punto A' , corta a las direcciones DD' y AA' en los puntos D' y A' respectivamente. De forma análoga, prolongamos la recta DC hasta que corte al eje de afinidad en el punto doble $2 \equiv 2'$, punto que al unirlo con el punto D' , cortará a la dirección CC' en el punto C' . Finalmente prolongamos la recta BC hasta el eje de afinidad cortándolo en el punto $3 \equiv 3'$, que unido con el punto C' , corta a la recta BB' en el punto B' , quedando definido el polígono afín $A'B'C'D'$.

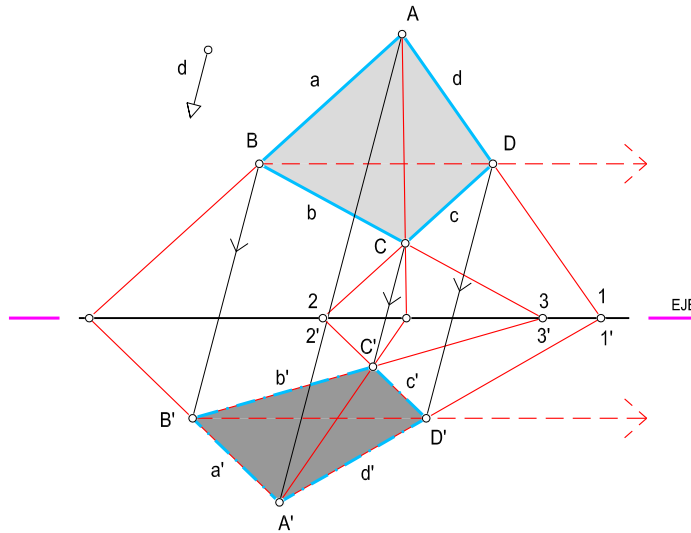


Fig. 7.5.

7.6. FIGURA AFÍN DE UNA CIRCUNFERENCIA

La relación de afinidad que puede establecerse entre una circunferencia y su figura afín, la elipse, tiene aplicación práctica muy importante en geometría descriptiva.

Sea la afinidad definida por el eje y la dirección de afinidad d , y el par de puntos afines $O-O'$. A una pareja cualquiera de diámetros perpendiculares de la circunferencia (fig. 7.6.a), por ejemplo AC y BD , le corresponde una pareja de diámetros conjugados de la elipse, en este caso $A'C'$ y $B'D'$, que hallaremos siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior. Con estos dos diámetros conjugados se puede construir la elipse.

Sin embargo, se puede obtener la elipse directamente por medio de sus ejes afines perpendiculares (fig. 7.6.b). Se parte de los mismos datos que en la figura anterior y se trata de calcular los puntos del eje, F y G , que al unirlos con los centros O y O' de las dos curvas nos den, en ambos casos, la pareja de rectas perpendiculares $AC-BD$ y $A'C'-B'D'$.

Los puntos dobles que se buscan, F y G , son los extremos del diámetro de la circunferencia que pasa por los puntos O y O' y tiene el centro P en el eje de afinidad. Dicho de otro modo, el segmento cuyos extremos son los puntos F y G se ha de ver desde los puntos O y O' bajo ángulos de 90° (arcos capaces). Para esto se traza la mediatriz de $O-O'$ que corta en P al eje.

Los diámetros perpendiculares AC y BD de la circunferencia tienen como afines, respectivamente, el eje menor $A'C'$ y el mayor $B'D'$ de la elipse.

Fig. 7.6.a.

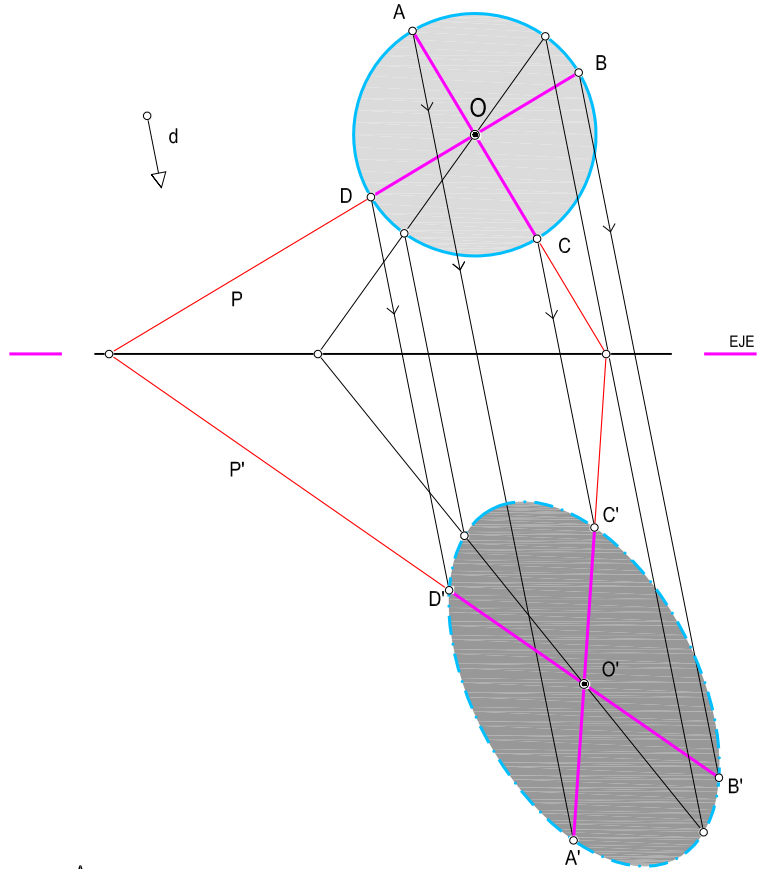
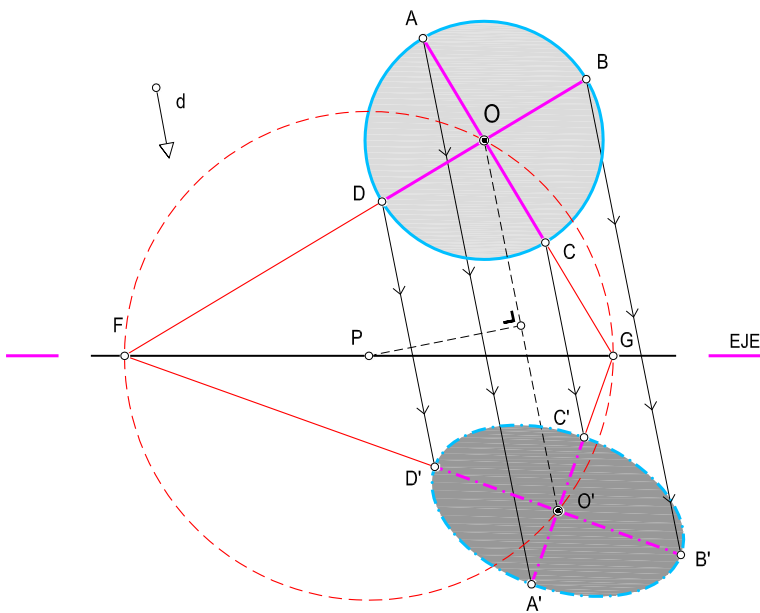


Fig. 7.6.b.



7.7. AFINIDAD APLICADA AL ABATIMIENTO

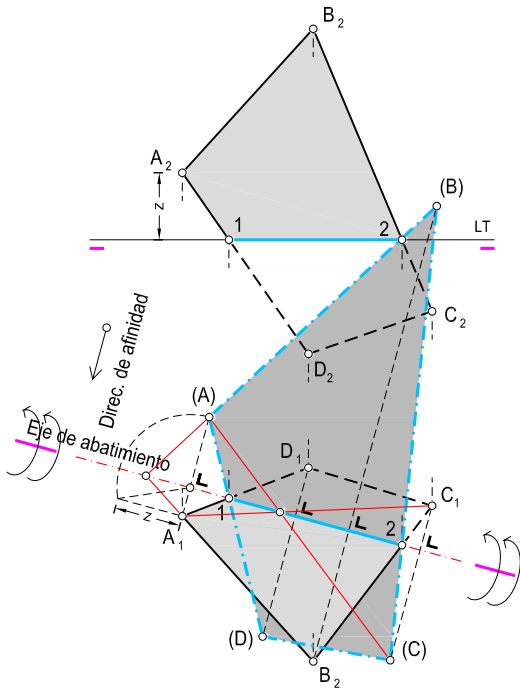


Fig. 7.7.a.

En la proyección horizontal de una figura plana y su abatimiento sobre el plano horizontal, se cumple para cada punto que la proyección horizontal y su abatimiento están sobre rectas perpendiculares al eje de abatimiento, por lo que podemos aplicar, para abatir y deshacer el abatimiento de un plano, la afinidad.

La proyección horizontal de una figura plana y la figura obtenida al abatirla sobre el horizontal de proyección son figuras afines ortogonales (la dirección de afinidad es perpendicular al eje de abatimiento), cuyo eje de afinidad es la recta intersección de la figura con el plano sobre el que queremos abatir la figura, y un par de puntos homólogos son la proyección horizontal de un punto y el resul-

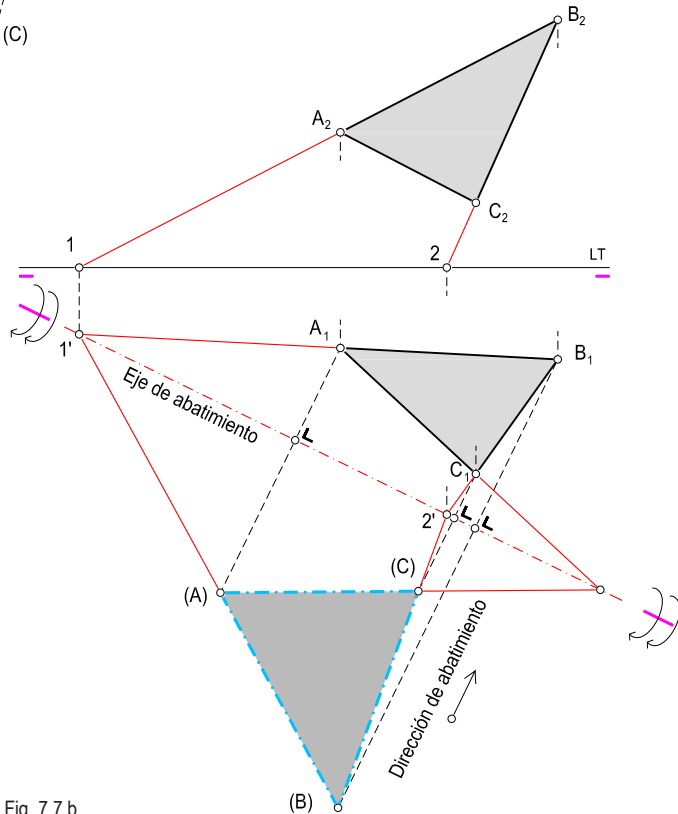


Fig. 7.7.b.

tado de efectuar su abatimiento. Esto evita el tener que efectuar por el procedimiento general el abatimiento de todos los puntos de una figura.

Si el abatimiento se hace sobre un plano horizontal, el eje de afinidad es la horizontal que se toma como eje de giro (fig. 7.7.a y fig. 7.7.b). Consideraciones análogas se pueden hacer para los abatimientos sobre el plano vertical.

7.8. DETERMINACIÓN POR AFINIDAD DE LOS EJES DE UNA ELIPSE CONOCIDOS SUS DIÁMETROS CONJUGADOS

7.8.1. Método de Mannheim

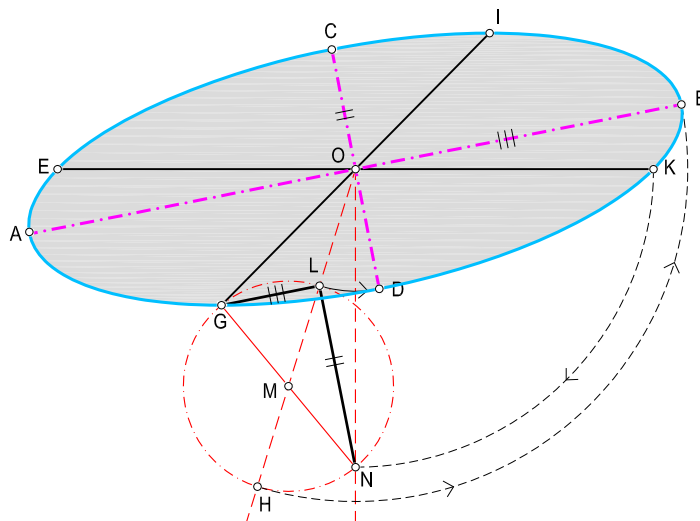


Fig. 7.8.1.

Dados los ejes conjugados de la elipse EK y IG , se traza por O una perpendicular al eje EK . Medimos el semidiámetro OK y se lleva sobre la perpendicular trazada desde O hallando el punto N . Trazamos la circunferencia de centro M y diámetro GN que corta a la recta OM en los puntos L y H . Las cuerdas resultantes GL y LN son rectas paralelas a los diámetros ortogonales de la elipse.



7.8.2. MÉTODO DE CHASLES (fig. 7.8.2)

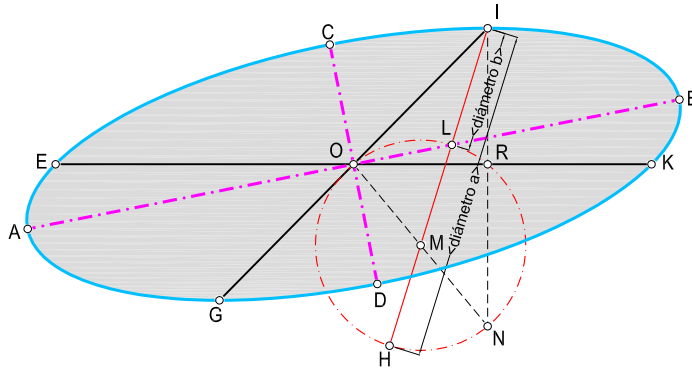


Fig. 7.8.2.

Dados los ejes conjugados de la elipse EK y IG , se traza por I una perpendicular al eje EK de longitud OK , resultando el punto N . Dibujamos la circunferencia de centro M y diámetro ON , que corta a la recta IM en los puntos L y H . Dichos puntos determinan las direcciones OL y OH de los diámetros ortogonales de la elipse, cuyas longitudes son $a = OB = IH$ y $b = OD = IL$.

7.9. CONSTRUCCIÓN DE ELIPSES

7.9.1. Método de la tarjeta

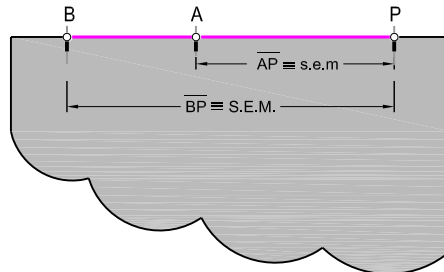


Fig. 7.9.1.a.

Consiste en señalar sobre el borde de una cartulina o tarjeta un punto P y a partir de él, otros dos A y B , distanciados de P las longitudes $PA = b$ (semieje menor) y $PB = a$ (semieje mayor).

A continuación se coloca la tarjeta, con el punto A sobre el semieje mayor, y se mueve, conservando A sobre dicho eje, hasta que B caiga sobre el semieje menor. En esta posición, el punto P coincide con un punto de la elipse, con lo que para hallar otros puntos de la misma, basta con mover la cartulina de forma que el punto A y el B permanezcan siempre a lo largo de los semiejes mayor y menor respectivamente.

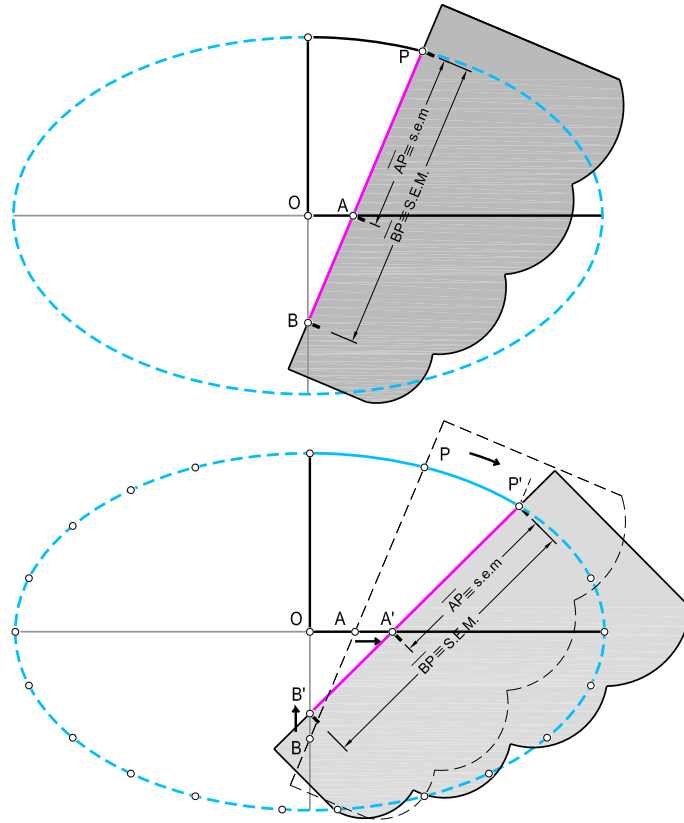


Fig. 7.9.1.b.

7.9.2. Por afinidad

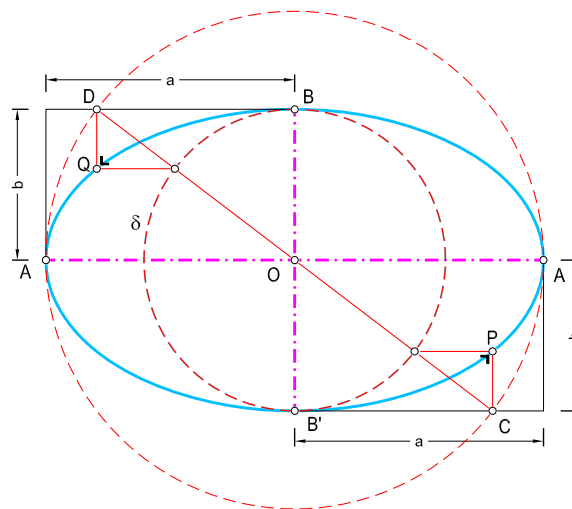


Fig. 7.9.2.



Con centro en O (fig. 7.9.2), trazamos dos circunferencias λ y δ cuyos radios son, respectivamente, $OA = a$ y $OB = b$, y un diámetro cualquiera que las corta en los puntos C, D, E y F . Las paralelas a los ejes de la elipse trazadas por los puntos intersección se cortan en los puntos P y Q de la elipse. De esta forma, trazando tantos diámetros cualesquiera, se pueden obtener tantos puntos como se deseen.

7.9.3. Método del jardinero

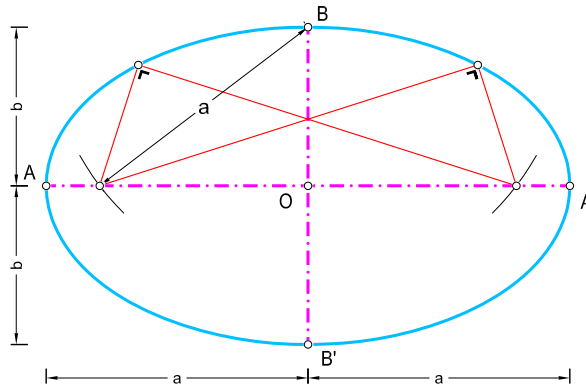


Fig. 7.9.3.

Consiste en clavar en el suelo dos estacas; los puntos en los que se clavan las estacas son los focos F y F' que previamente se han determinado. Se atan los extremos de una cuerda en las estacas, de modo que la semilongitud de la cuerda, a , sea mayor que c .

Posteriormente se tensa la cuerda con una tercera estaca, marcando su posición en el suelo y arrastrándose a lo largo de toda la cuerda, siempre manteniendo tensada la cuerda. La cuerda trazada es una elipse, ya que la suma de las distancias al punto P marcado por la tercera estaca cumple $FP + FP' = 2a$.

7.9.4. Como envolvente de tangentes

Esta construcción se funda en que la circunferencia principal de diámetro $2a$ y centro O es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por cada foco a las tangentes. Las envolventes son, pues, las tangentes.

Por ejemplo, se toman puntos cualesquiera $1, 2, 3, \dots$ de la circunferencia principal (fig. 7.9.4), se unen con F y se trazan las perpendiculares t_1, t_2, t_3, \dots por $1, 2, 3, \dots$ a los segmentos $F1, F2, F3, \dots$. Las distintas rectas t_i son tangentes a la elipse, por lo que si se trabaja con varios puntos, se obtienen una serie de tangentes que van envolviendo la curva.

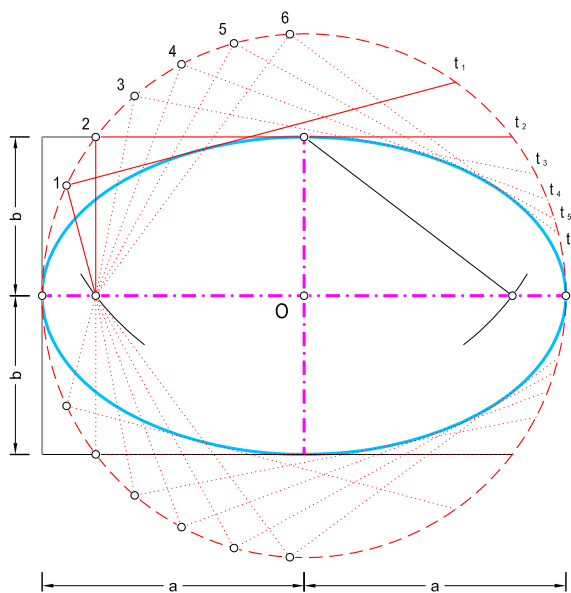


Fig. 7.9.4.

7.9.5. Por haces proyectivos

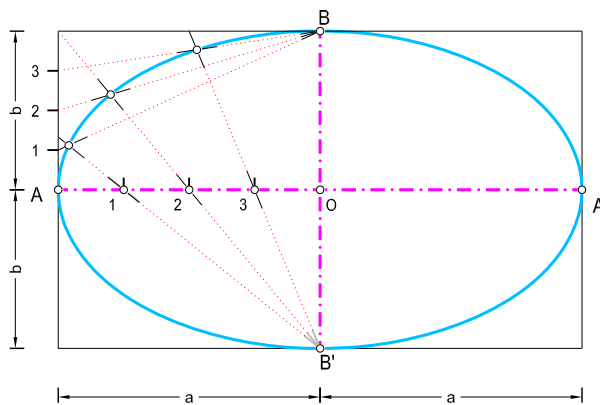


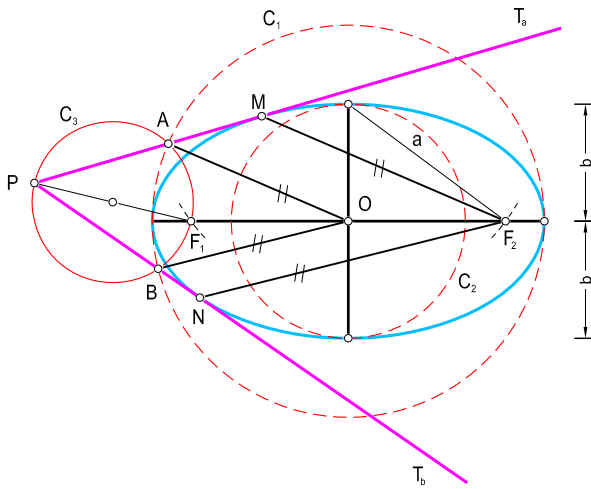
Fig. 7.9.5.

Se construye el rectángulo $OACB$ y se dividen los segmentos OA y AE en el mismo número de partes iguales, cuatro en este caso (fig. 7.9.5). Los rayos $B1$, $B2$ y $B3$ se cortan respectivamente con los rayos $C1$, $C2$ y $C3$ en puntos de la elipse.



7.10. TANGENTES A LA ELIPSE DESDE UN PUNTO EXTERIOR P

Primer método



Con centro en O , trazamos la circunferencia C_1 de radio el semieje mayor de la elipse. Así mismo, dibujamos la circunferencia C_2 cuyo diámetro es el segmento PF_2 . La circunferencia C_2 corta a la C_1 en los puntos A y B , que junto con el punto P dado, definen las tangentes t_a y t_b a la elipse. Los puntos de tangencia M y N se obtienen con las paralelas, trazadas desde F_2 , a las rectas OA y OB .

Fig. 7.10.a.

Segundo método

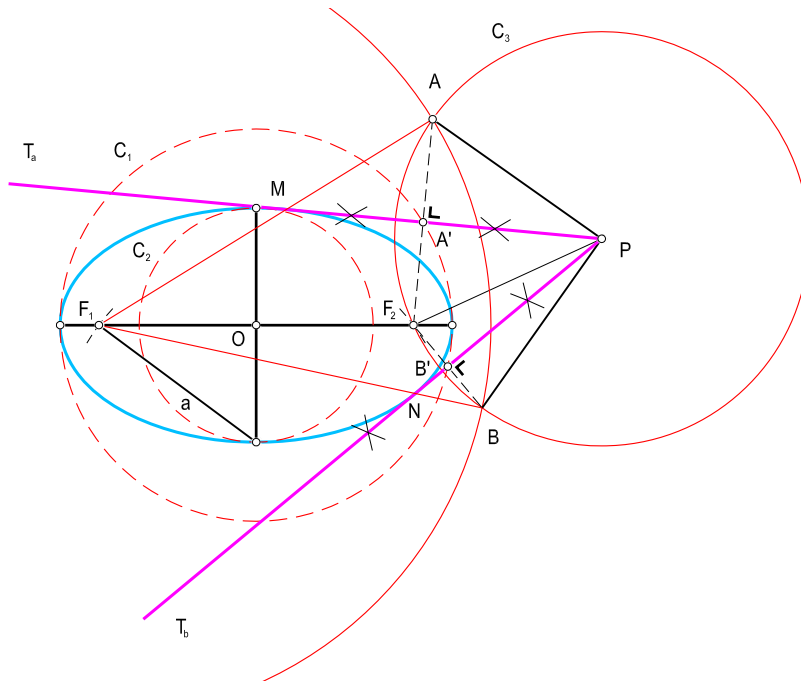


Fig. 7.10.b.

7.11.- TANGENTES A LA ELIPSE PARALELAS A UNA DIRECCIÓN DADA

Primer método (fig. 7.11.a)

Las perpendiculares a la dirección dada trazadas por los focos de la elipse cortan a la circunferencia C_1 de centro O y radio el semieje mayor de la elipse, en los puntos A, B, C y D . Las tangentes t_a y t_b a la elipse están definidas por la unión de los pares de puntos AC y BD . Los puntos de tangencia diametralmente opuestos M y N se obtienen de la intersección de las tangentes a la elipse con las paralelas, trazadas desde uno de los focos (en este caso el F_1), a las rectas OA y OB .

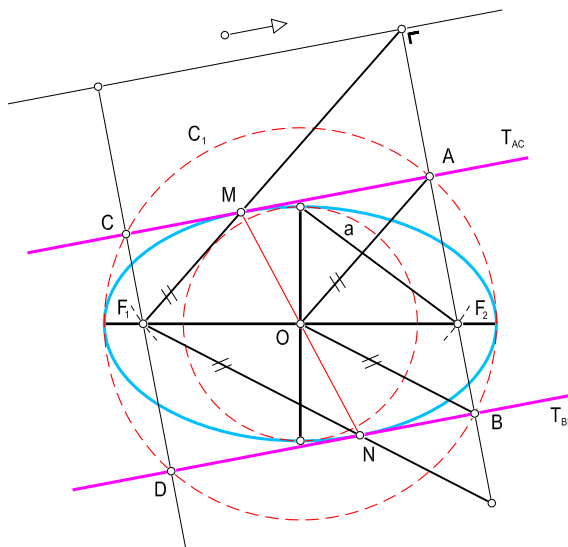


Fig. 7.11.a.

Segundo método (fig. 7.11.b)

Con centro en uno de los focos (el F_1 por ejemplo) y radio $2a$, dibujamos la circunferencia focal C_1 que corta en A y en B a la perpendicular a la dirección dada trazada por el otro foco. Las mediatrices de los segmentos AF_2 y BF_2 son las tangentes a la elipse. Los puntos de tangencia M y N se obtienen de la intersección de las tangentes a la elipse con las rectas F_1A y F_1B respectivamente.

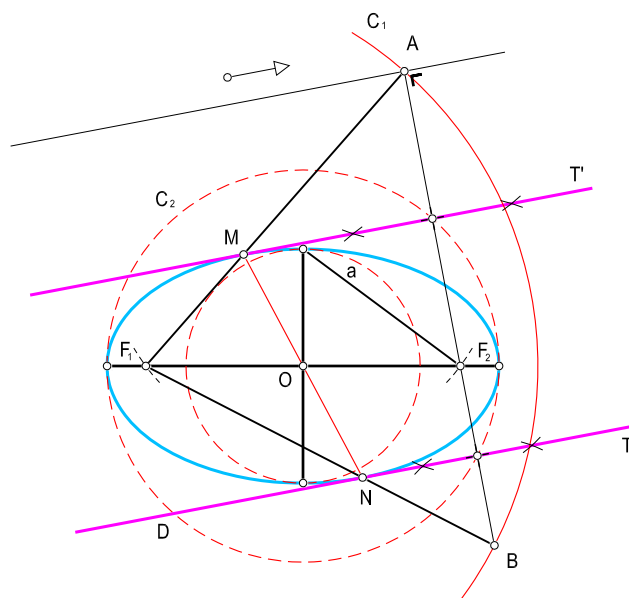


Fig. 7.11.b.

→ 8



Abatimiento de planos

8.1. ABATIMIENTO DE UN PLANO

8.1.1. Abatimiento de un punto P sobre el PH

8.1.2. Abatimiento de un punto P sobre el PV

8.1.3. Abatimiento de una recta sobre el PV

8.1.4. Abatimiento de una figura plana sobre el PH

8.1.5. Abatimiento de la traza vertical (V_{α}) y de una recta horizontal (h) sobre el PH de proyección

8.2. APLICACIÓN DE LA AFINIDAD AL ABATIMIENTO

8.3. DESABATIMIENTO DE UNA FIGURA PLANA

8.4. ABATIMIENTO CUALQUIERA SOBRE UN PLANO HORIZONTAL

8.4.1. Plano α definido por las trazas

8.4.2. Plano definido por dos rectas, $\alpha(r, t)$

8.5. ABATIMIENTO DE UN PLANO VERTICAL

8.6. ABATIMIENTO DE UN PLANO LT, PUNTO "A" Y DE UNA RECTA r , CONTENIDA EN ÉL

8.7. ABATIMIENTO DEL PLANO α PARALELO A LA LT

8.1. ABATIMIENTO DE UN PLANO

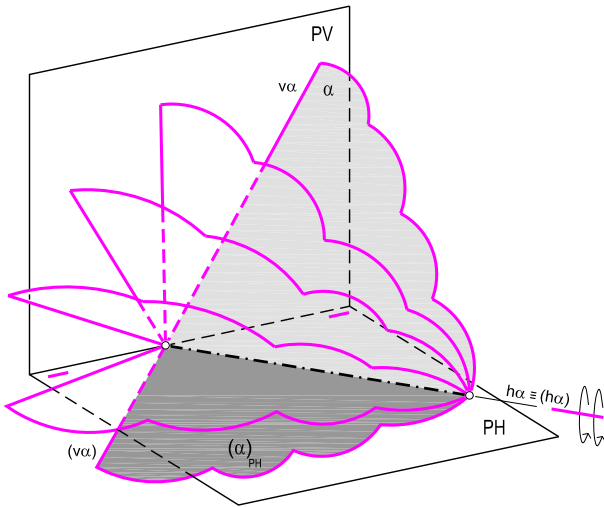


Fig. 8.1.a.

Abatir un plano α sobre otro consiste en girar el plano α alrededor de la recta intersección de los dos planos hasta hacerlos coincidir. A la recta intersección de los planos se le llama *eje de giro* o *charnela* (fig. 8.1.a).

El abatimiento de una recta o un punto sobre un plano se efectúa mediante el abatimiento de un plano cualquiera que contenga a la recta o al punto considerados.

Sea P un punto del plano α , que vamos a abatir sobre el PH alrededor del eje de giro $h_\alpha = ch$ (fig. 8.1.b).

Al girar el plano α alrededor de la charnela h_α , el punto P describe una circunferencia contenida en un plano perpendicular al eje de giro, por lo que siendo (P) la posición del punto P abatido, el segmento $M(P)$ es perpendicular a la charnela y su longitud será $PM = M(P)$.

Por el teorema de las tres perpendiculares, la proyección P_1 se encuentra en la perpendicular MP_1 al eje de giro, por lo que el punto (P) se encuentra sobre la perpendicular a la charnela trazada desde la proyección horizontal P_1 .

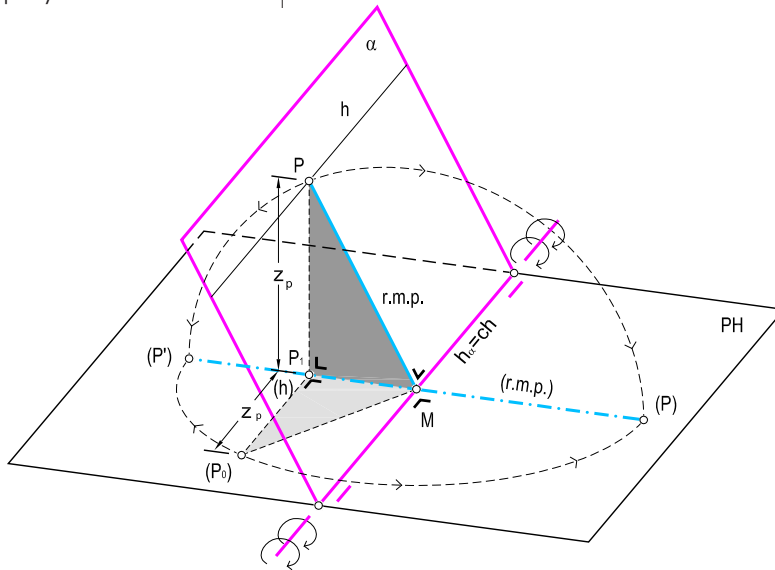


Fig. 8.1.b.

Para determinar la distancia $M(P)$ consideramos que el segmento MP es la hipotenusa del triángulo rectángulo MPP_1 , del cual conocemos sus catetos, ya que MP_1 es la distancia desde la proyección P_1 del punto P a la traza h_α del plano α con el PH. El segmento PP_1 que es el otro cateto, es la cota del punto P sobre el PH.

8.1.1. Abatimiento de un punto P sobre el PH

Los pasos a seguir para abatir en diédrico un punto $P[P_1-P_2]$ del plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$ sobre el PH (fig. 8.1.1) son los que se deducen a continuación:

Trazamos la horizontal de plano $h[h_1-h_2]$ y la recta de máxima pendiente $r[r_1-r_2]$ que contienen al punto $P[P_1-P_2]$. Sobre la proyección horizontal de la recta $h[h_1-h_2]$ y a partir de la proyección horizontal del punto, llevamos un segmento igual a la cota del punto $[z]$, y con centro en H_1 y radio la hipotenusa $H_1(P)$ trazamos un arco de circunferencia que cortará a la proyección horizontal de la recta de máxima pendiente en el punto (P) buscado.

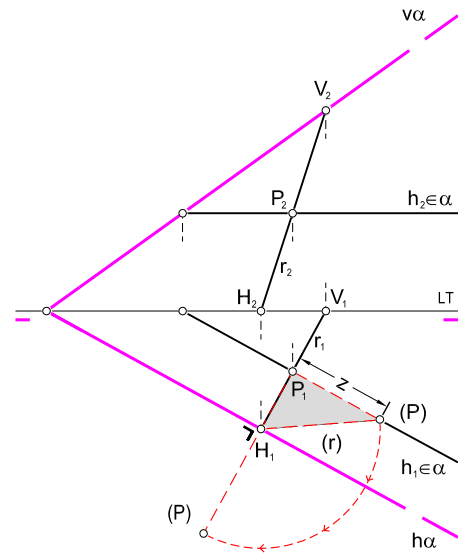


Fig. 8.1.1.

8.1.2.- Abatimiento de un punto P sobre el PV

Para abatir en diédrico un punto sobre el PV se procede de forma análoga a la anterior (fig. 8.1.2).

Trazamos la recta de máxima inclinación $r[r_1-r_2]$ y la recta frontal $f[f_1-f_2]$ que pase por el punto dado $P[P_1-P_2]$. Sobre la proyección vertical de la recta f y a partir de la proyección vertical del punto, llevamos un segmento igual al alejamiento del punto; con centro en V_2 (traza vertical de la recta de máxima pendiente) trazamos un arco de circunferencia que corta a la proyección vertical de la recta abatida en el punto (P) buscado.

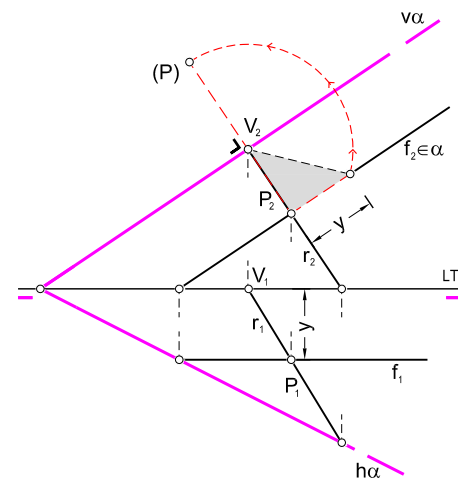


Fig. 8.1.2.



8.1.3.- Abatimiento de una recta sobre el PV

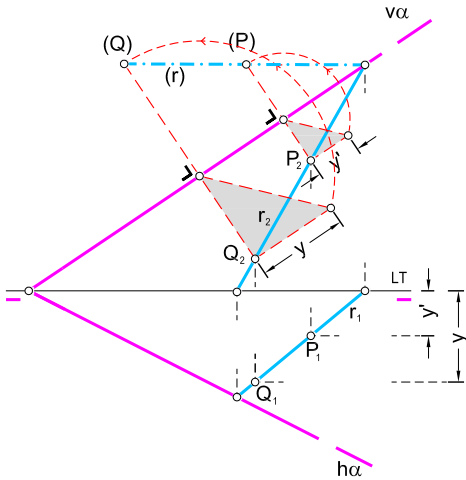


Fig. 8.1.3.

Para abatir una recta sobre cualquiera de los dos planos de proyección, bastará con abatir dos puntos de la misma (fig. 8.1.3).

En este caso, dada la recta $r[r_1 - r_2]$ definida por los puntos $P[P_1 - P_2]$ y $Q[Q_1 - Q_2]$, una vez abatidos estos dos puntos, (P) y (Q) , queda perfectamente definido el abatimiento (r) de la recta dada.

8.1.4.- Abatimiento de una figura plana sobre el PH

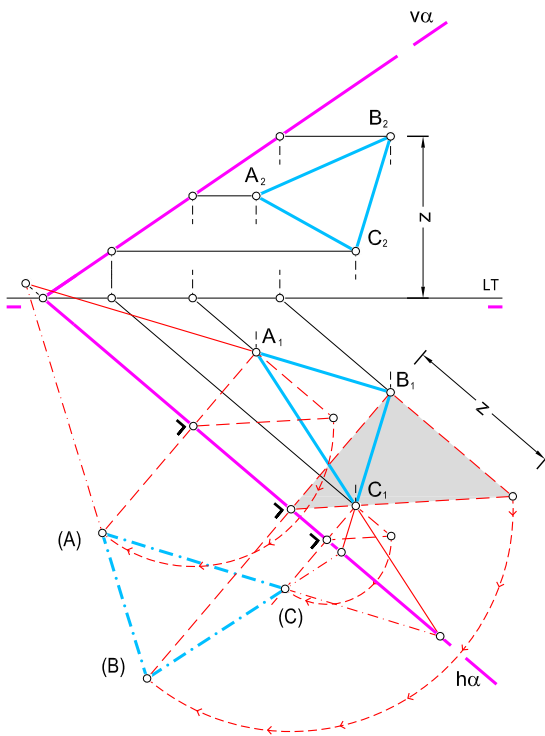


Fig. 8.1.4.

En la práctica, no interesa el abatimiento de un plano, como tal superficie plana, sino el de los elementos geométricos y figuras planas contenidas en él.

Abatir el triángulo definido por los puntos $A[A_1 - A_2]$, $B[B_1 - B_2]$ y $C[C_1 - C_2]$ del plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ sobre el PH (fig. 8.1.4), consiste en abatir los vértices en (A) , (B) y (C) , y unirlos ordenadamente tal y como se ve en la figura.

8.1.5. Abatimiento de la traza vertical (V_α) y de una recta horizontal (h) sobre el PH de proyección

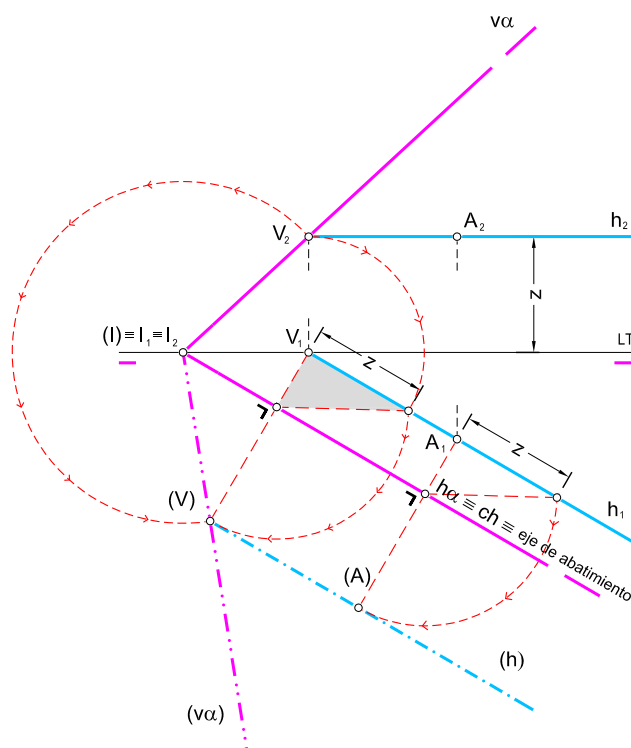


Fig. 8.1.5.

Supongamos que queremos abatir el plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ sobre el horizontal de proyección PH (fig. 8.1.5).

Para abatir una traza de un plano se necesitan abatir dos puntos de la misma; el problema se puede reducir a abatir un solo punto de la traza, ya que el punto intersección entre las trazas del plano $l[l_1 - l_2]$, es un punto doble $l \equiv (l)$ (el punto coincide con su abatido).

En este caso (abatimiento de α sobre el PH), el eje de abatimiento será la traza horizontal del plano, y para abatir un punto de la traza vertical del plano, elegiremos, por su sencillez, la traza vertical V_2 de la recta horizontal que contiene al punto $A[A_1 - A_2]$ del plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$.

Desde la proyección horizontal, V_1 , de la traza vertical de la recta $h[h_1 - h_2]$ trazamos una perpendicular al eje de abatimiento, y con centro en $l[l_1 - l_2]$ trazamos un arco de circunferencia de radio $l - V_2$ hasta que corta a la perpendicular anterior en (V) , punto que define el abatimiento de la traza vertical del plano dado sobre el PH.

El abatimiento del punto V y del punto A también se podría hacer, tal y como refleja la fig. 8.1.5, por el método tradicional mediante la construcción del triángulo de abatimiento.

8.3. DESABATIMIENTO DE UNA FIGURA PLANA

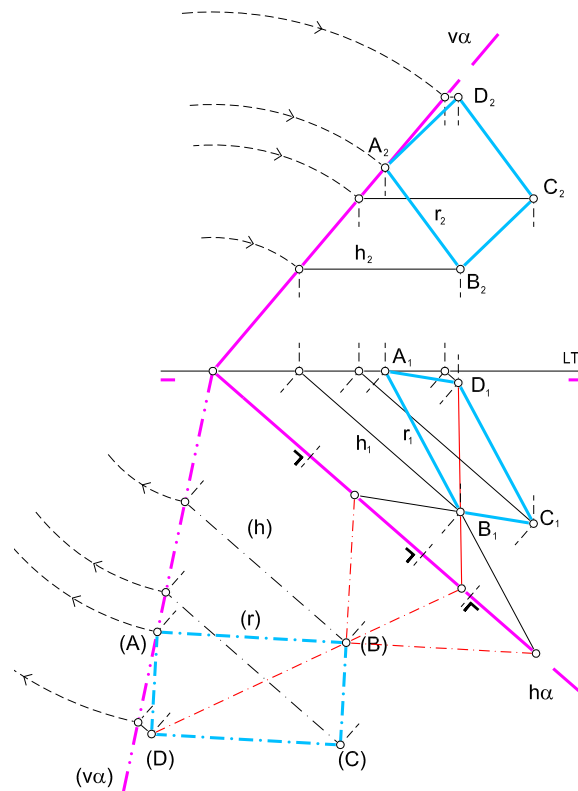


Fig. 8.3.

Si se conoce el abatimiento $(A)(B)(C)(D)$ de un cuadrilátero perteneciente al plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ (fig. 8.3), se pueden hallar fácilmente sus proyecciones por afinidad.

Otra forma de desabatimiento sería contener cada uno de los vértices abatidos en sendas rectas horizontales, deshaciendo el abatimiento de estas últimas para obtener fácilmente tanto la proyección vertical como la horizontal de cada uno de los puntos.

Primero se desabate el punto A directamente ya que se encuentra sobre el PV de proyección (traza vertical A_2) y A_1 en la LT. El resto de puntos $(B), (C)$ y (D) se hace por afinidad para poder encontrar la proyección horizontal, y mediante rectas horizontales de plano para poder hallar su proyección vertical.



8.4. ABATIMIENTO CUALQUIERA SOBRE UN PLANO HORIZONTAL

8.4.1. Plano α definido por las trazas

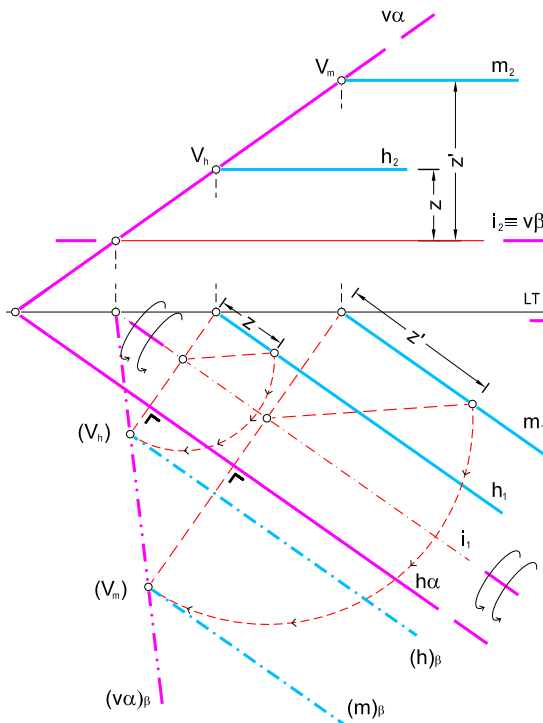
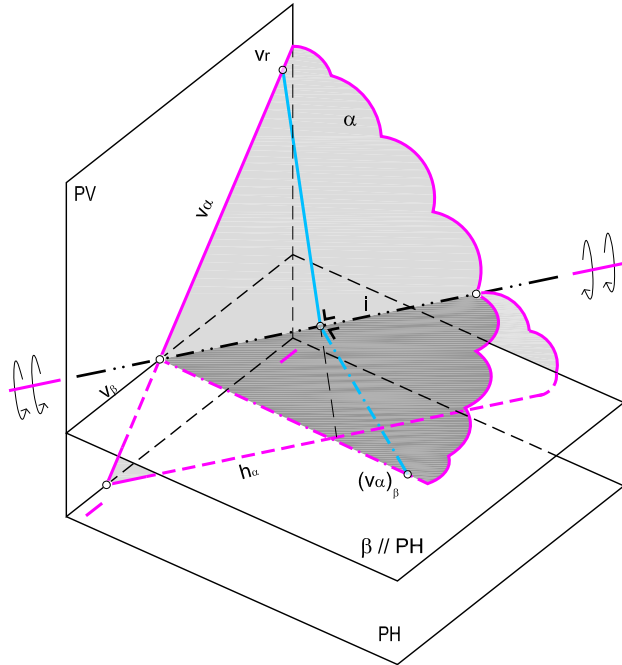


Fig. 8.4.1.

Para abatir el plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ sobre el plano horizontal $\beta[v_\beta]$ (fig. 8.4.1) tomamos uno o dos puntos de la traza vertical del plano α ; en este caso, se toman las trazas verticales de las rectas $h[h_1 - h_2]$ y $m[m_1 - m_2]$. La proyección horizontal de la recta intersección $l[l_1 - l_2]$ entre los dos planos dados α y β es el eje de abatimiento, por lo que obsérvese que la diferencia de cotas que se utiliza queda referida a la cota del plano horizontal sobre el que queremos abatir.

Para abatir el plano $\alpha(r, t)$ sobre el plano horizontal $\delta[v_\delta]$ (fig. 8.4.2), vemos que este último corta a las rectas que definen el plano α en los puntos $A[A_1 - A_2]$ y $B[B_1 - B_2]$. Tomando como eje de giro o abatimiento la recta i , que es la intersección de $\alpha \cap \delta$, definida por estos dos puntos y que son a su vez puntos dobles (coinciden con sus abatimientos). Así pues, con solo abatir el punto $C[C_1 - C_2]$, quedará perfectamente definido el abatimiento del plano $\alpha(r, t)$ dado por las dos rectas. Al igual que en el caso anterior, hay que tener en cuenta la diferencia de cota del punto $C[C_1 - C_2]$ al plano δ que se utiliza para realizar el abatimiento.

8.4.2. Plano definido por dos rectas, $\alpha(r,t)$

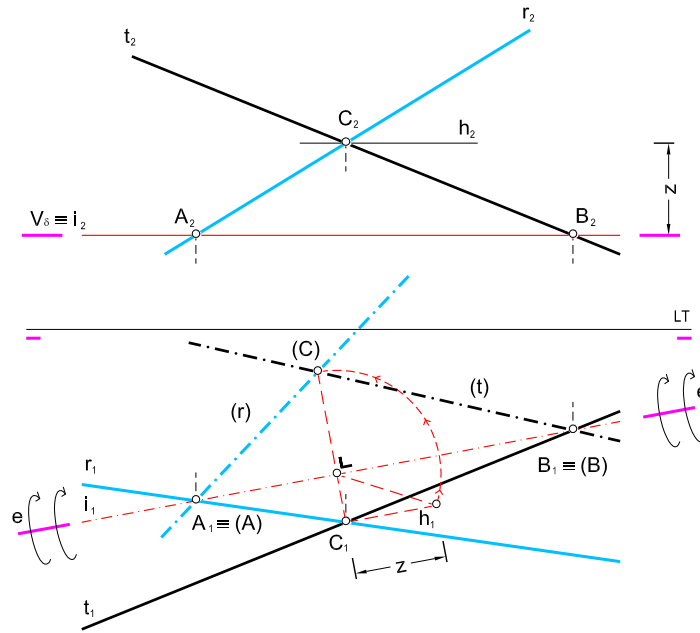
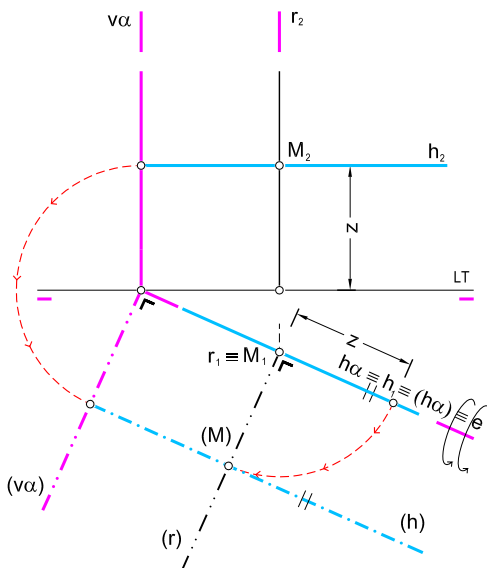


Fig. 8.4.2.

8.5. ABATIMIENTO DE UN PLANO VERTICAL



En el abatimiento de un plano vertical sobre el PH (fig. 8.5), vemos que la traza vertical del plano abatida (v_a) y la recta abatida (r) son perpendiculares a la traza horizontal del plano (h_a), que además coincide con el eje de abatimiento, $h_a \equiv (h_a) \equiv h_1 \equiv e$.

Fig. 8.5.



8.6. ABATIMIENTO DE UN PLANO LT, PUNTO A Y DE UNA RECTA r CONTENIDA EN ÉL

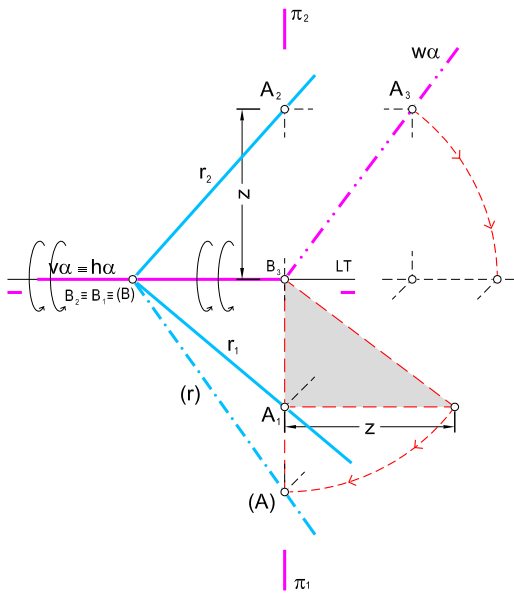


Fig. 8.6.

Como el plano α esta definido por un punto $A[A_1-A_2]$, abatiremos dicho punto. La charnela o eje de abatimiento será la LT La afinidad entre la proyección horizontal de una figura de este plano y su abatimiento queda definido por el par de puntos A_1 y (A) y la dirección de afinidad, que es la perpendicular a dicha LT (fig. 8.6).

El abatimiento se puede realizar por dos caminos diferentes, o bien trabajando en el plano de perfil, o bien por el método general tal y como se ve en la figura representada.

8.7. ABATIMIENTO DEL PLANO α PARALELO A LA LT

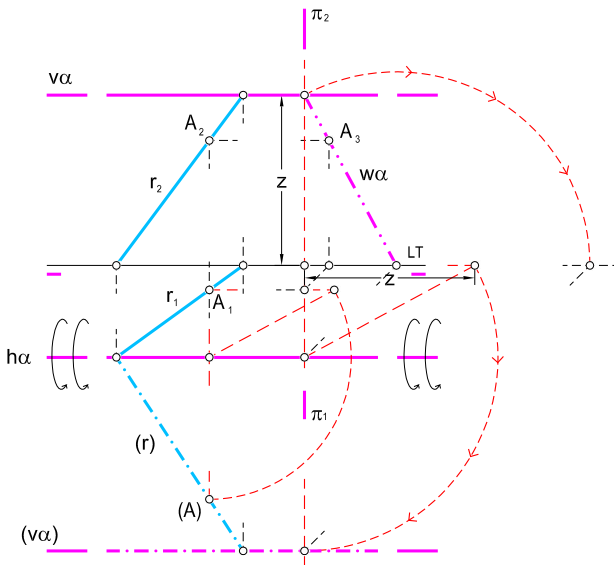
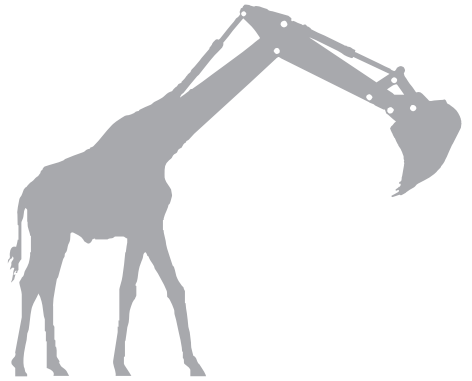


Fig. 8.7.

Como en todos los casos anteriores, el eje de giro será la traza horizontal del plano dado h_α (ya que estamos abatiendo sobre el PH).

Tomamos un punto $A[A_1-A_2]$ de una recta cualquiera $r[r_1-r_2]$ del plano α (fig. 8.7). La traza vertical abatida ($v\alpha$) queda definida de dos formas diferentes: o bien trabajando en el perfil, o bien abatiendo directamente la recta r mediante el punto A .

Se obtiene así la nueva traza abatida ($v\alpha$) que también será paralela a la LT.







Circunferencia y distancias

- 9.1. REPRESENTACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA CONTENIDA EN UN PLANO
 - 9.1.1. Ejes de la elipse en proyección horizontal
 - 9.1.2. Ejes de la elipse en proyección vertical
 - 9.1.3. Puntos de cota máxima y mínima
 - 9.1.4. Puntos de alejamiento máximo y mínimo
 - 9.1.5. Puntos situados más a la izquierda y más a la derecha
- 9.2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS
- 9.3. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO
- 9.4. DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS
- 9.5. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA
- 9.6. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS



9.1. REPRESENTACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA CONTENIDA EN UN PLANO

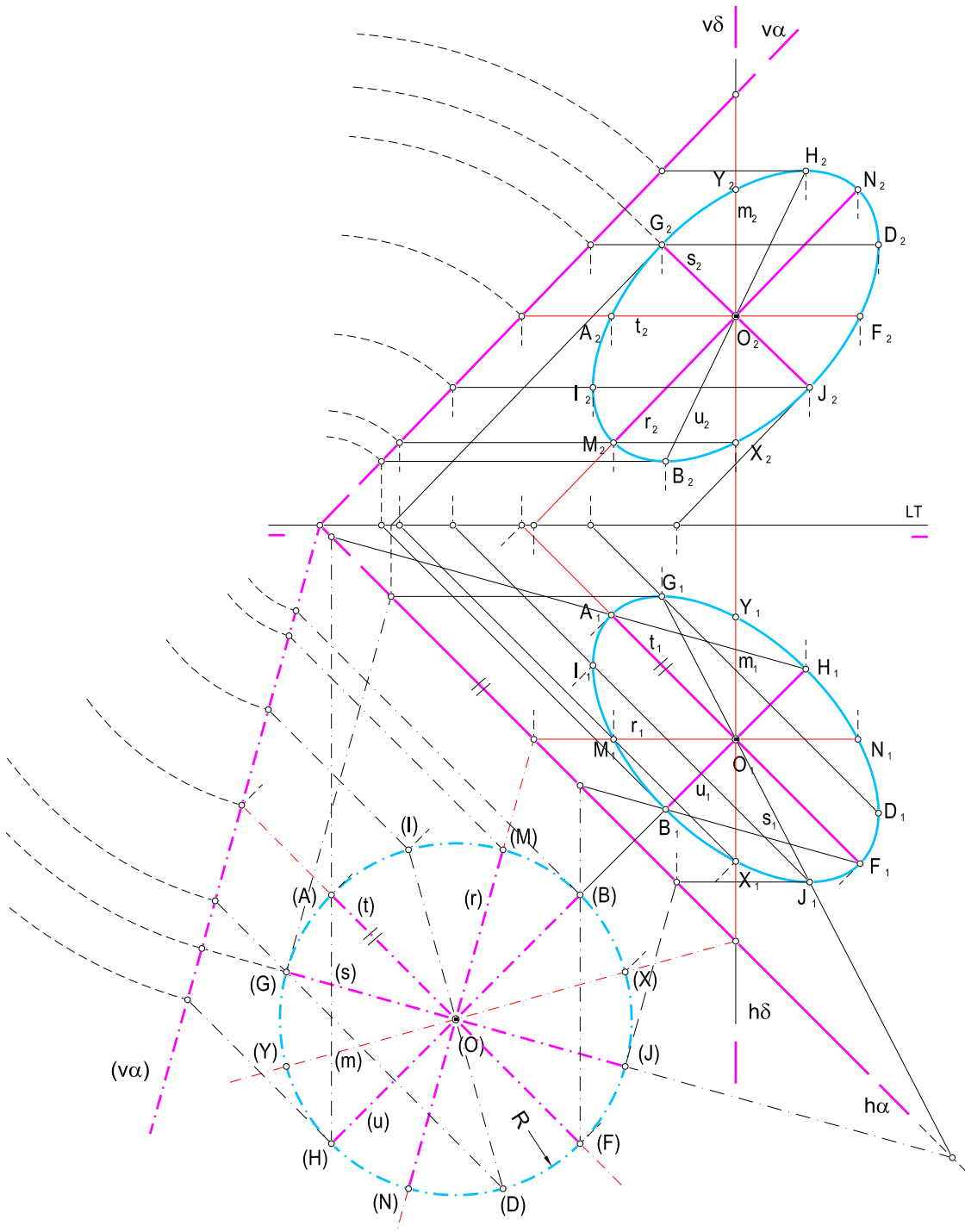


Fig. 9.1.

Dada una circunferencia de centro $O[O_1- O_2]$ y radio R , situada en un plano cualquiera oblicuo $\alpha[h_a- v_a]$, vamos a determinar su representación sobre los planos de proyección.

Como ya se ha indicado, entre el abatimiento y la proyección de una figura sobre un plano existe una afinidad, y por esto la proyección de una circunferencia sobre un plano cualquiera será siempre una elipse, de centro la proyección del punto $O[O_1- O_2]$ de la circunferencia y de ejes aquel par de diámetros conjugados que conserven la perpendicularidad en la proyección, y que serán rectas diferentes según se trate de la proyección vertical o de la proyección horizontal.

En proyección diédrica, una circunferencia quedará definida por el plano que la contiene, su centro $O[O_1- O_2]$ y su radio R . Para dibujar la proyección horizontal, abatiremos por tanto sobre el PH, el plano en que está situada la circunferencia y así, partiendo del punto (O) , podremos representar la circunferencia abatida de radio R conocido (fig. 9.1).

Conociendo la afinidad existente entre la proyección horizontal y el abatimiento de la circunferencia, que queda pues determinada por h_a como eje, dirección perpendicular al eje de afinidad y la pareja de puntos $O_1- (O)$ como par de puntos afines, estamos pues en condiciones de obtener la proyección horizontal de la circunferencia.

9.1.1. Ejes de la elipse en proyección horizontal

Los ejes de la proyección horizontal serán, en el abatimiento, los diámetros de la circunferencia perpendicular y paralelo a la traza horizontal o eje de abatimiento h_a . En la fig. 9.1, trazamos los diámetros $(A)(F)$ y $(B)(H)$ contenidos respectivamente en las rectas (t) y (u) que, una vez restituidos del abatimiento, nos proporcionan como proyecciones horizontales A_1F_1 y B_1H_1 , ejes de la elipse en la proyección horizontal de la circunferencia.

9.1.2. Ejes de la elipse en proyección vertical

Análogamente, los ejes de la proyección vertical serán, en el abatimiento, los diámetros de la circunferencia perpendicular y paralelo a la traza vertical abatida (v_a) . En el dibujo, trazamos los diámetros $(M)(N)$ y $(G)(J)$ contenidos respectivamente en las rectas (r) y (s) que, una vez deshecho el abatimiento, proporcionan M_2N_2 y G_2J_2 , ejes de la elipse en la proyección vertical de la circunferencia dada que corresponderán con la proyección vertical de una recta frontal $r_2(M_2, N_2)$ y con la proyección vertical de una recta de máxima inclinación $s_2(G_2, J_2)$.

9.1.3. Puntos de cota máxima y mínima

Los puntos de cota máxima y mínima los hallamos recurriendo en el abatimiento a dos rectas horizontales tangentes a la circunferencia abatida en los puntos (B) y (H) . Las rectas horizontales que utilizamos en el abatimiento son rectas paralelas a h_a , que al desabatirlas tienen sus proyecciones verticales paralelas a la LT, indicando los puntos de mayor y menor cota.



9.1.4. Puntos de alejamiento máximo y mínimo

Trazaremos dos rectas frontales tangentes a la circunferencia abatida en los puntos (G) y (J) . Dichas rectas frontales en el abatimiento son rectas paralelas a (v_α) , que al desabatirlas tienen sus proyecciones horizontales paralelas a la LT, indicando cuáles son los puntos de mayor y menor alejamiento.

9.1.5. Puntos situados más a la izquierda y más a la derecha

Trazamos un plano de perfil $\delta[h_\delta - v_\delta]$ que pase por el centro de la circunferencia $O[O_1 - O_2]$ y que contendrá a la recta de perfil $m[m_1 - m_2]$ y que abatida sobre el PH es (m) . Trazamos dos rectas de perfil tangentes a la circunferencia abatida en los puntos (I) y (D) , para posteriormente desabatirlas, hallando los puntos buscados en sus proyecciones.

9.2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

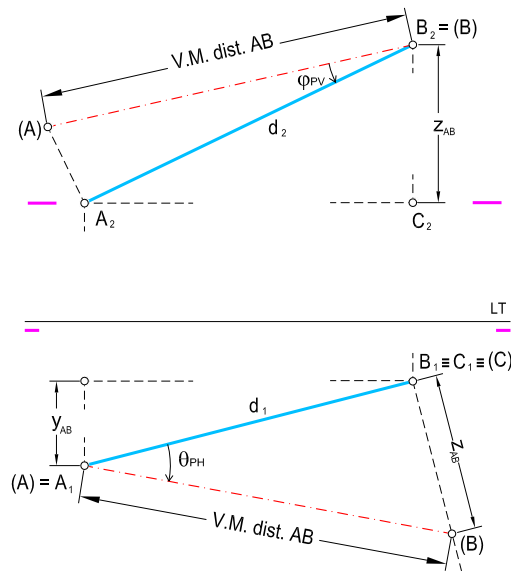


Fig. 9.2.

Para hallar la distancia entre dos puntos $A[A_1 - A_2]$ y $B[B_1 - B_2]$ (fig. 9.2) hay que abatir el triángulo rectángulo ABC (siendo el punto $C[C_1 - C_2]$ un punto contenido en la recta vertical que pasa por el punto B , y cuya cota es igual a la del punto A), que tiene por catetos la proyección horizontal A_1C_1 del segmento dado y la diferencia de cotas entre los dos puntos $B_2 - C_2$; la hipotenusa de este triángulo es la magnitud que se busca, VM_{AB} .

De igual forma se podría trabajar en el plano vertical, pero en este caso, uno de los catetos del triángulo tiene por magnitud la diferencia de alejamientos.

9.3. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

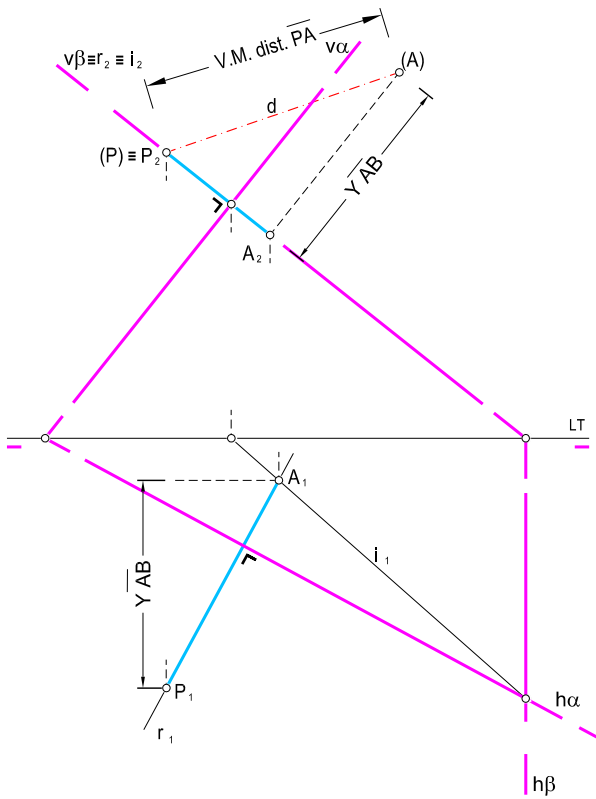
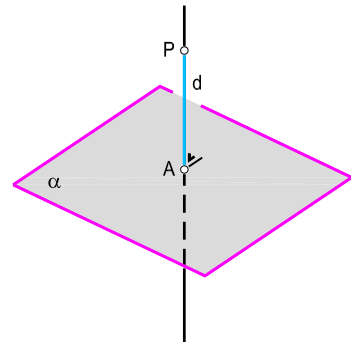


Fig. 9.3.

La distancia d de un punto $P[P_1 - P_2]$ a un plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ (fig. 9.3), se determina trazando la perpendicular $r[r_1 - r_2]$ al plano α que pasa por el punto A . Se halla el punto intersección $A[a_1 - A_2]$ de la recta con el plano, y el segmento AP es la distancia pedida. De esta manera se ha reducido el problema al caso anterior.



9.4. DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

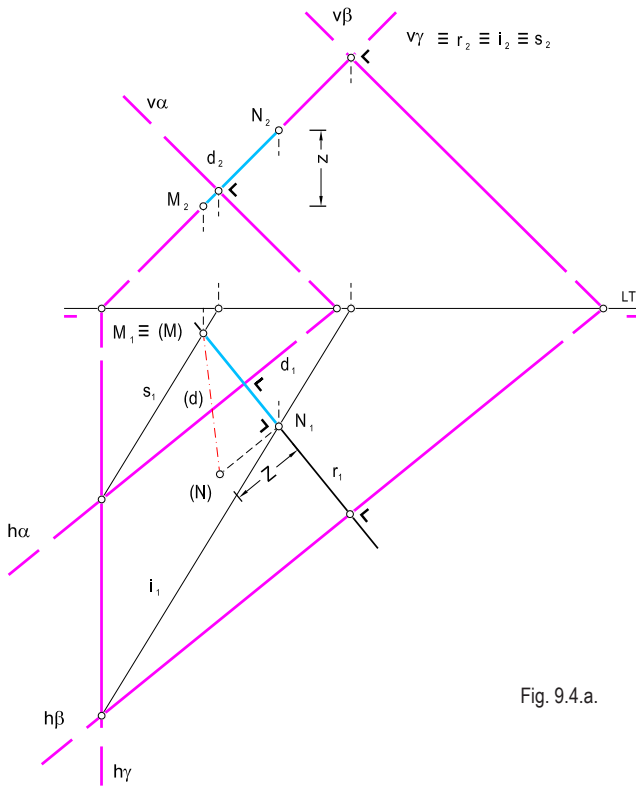


Fig. 9.4.a.

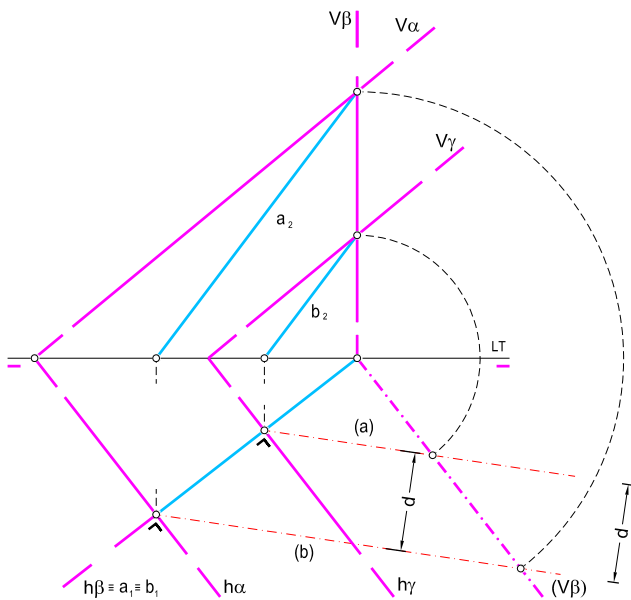
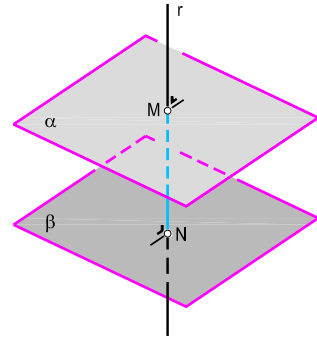
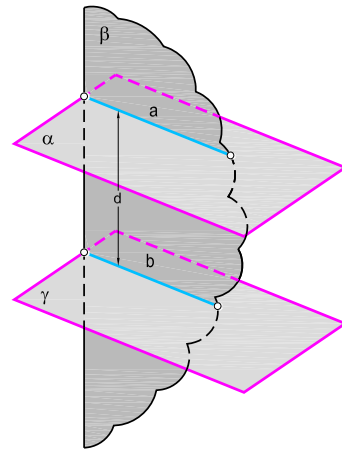


Fig. 9.4.b.





Sea el punto P y la recta r dadas (fig. 9.5). Para hallar la distancia del punto a la recta, por el punto P trazamos el plano α perpendicular a la recta r , a la que corta en el punto I . El segmento $P-I$ es la distancia d del punto a la recta.

Estas operaciones se resuelven en sistema diédrico en la fig. 9.5. Por $P[P_1-P_2]$ se traza el plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$, perpendicular a $r[r_1-r_2]$, por medio de la horizontal de plano $h[h_1-h_2]$, siendo su proyección horizontal perpendicular a la proyección horizontal de la recta dada. El plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$ corta a la recta en el punto $I[I_1-I_2]$, por lo que el problema de hallar la distancia de un punto a una recta se ha reducido a encontrar la distancia entre dos puntos. En el espacio, el segmento $P-I$ es la distancia que buscamos, $d[d_1-d_2]$, por lo que sólo es necesario hallar su verdadera magnitud mediante un abatimiento, obteniendo finalmente (d) .

9.6. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

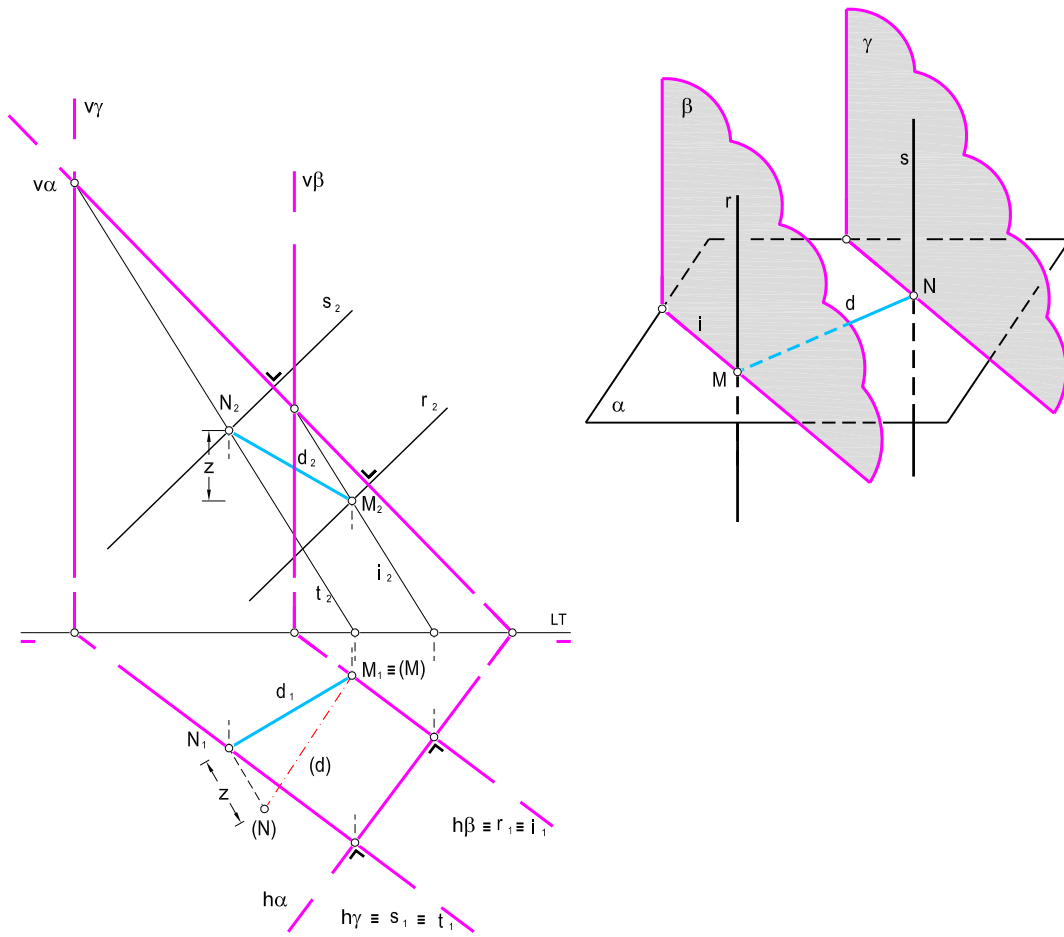


Fig. 9.6.

La distancia d entre dos rectas paralelas r y s (fig. 9.6) se determina trazando un plano α perpendicular a ellas y hallando los puntos M y N de intersección de ambas.

En diédrico partimos de dos rectas paralelas $r[r_1 - r_2]$ y $s[s_1 - s_2]$ (fig. 9.6). Por un punto cualquiera, trazamos el plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ perpendicular a las rectas, que lo cortan en los puntos $M[M_1 - M_2]$ y $N[N_1 - N_2]$, puntos obtenidos por medio de los planos auxiliares $\beta[h_\beta - v_\beta]$ y $\gamma[h_\gamma - v_\gamma]$ (que contienen, respectivamente, a las rectas r y s dadas), cuyas intersecciones con el plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ dan las rectas $i[i_1 - i_2]$ y $t[t_1 - t_2]$ respectivamente. El segmento $M-N$ es la distancia que buscamos, por lo que de nuevo se ha reducido el problema a encontrar la distancia entre dos puntos. Mediante un abatimiento encontramos la verdadera magnitud (d).

→ 10



Sombras

- 10.1. CONCEPTOS Y TIPOS
- 10.2. LUZ FOCAL Y LUZ PARALELA
- 10.3. SOMBRA ARROJADA POR UN PUNTO
 - 10.3.1. Sobre un plano cualquiera
 - 10.3.2. Sobre los planos de proyección
- 10.4. SOMBRA ARROJADA DE UN SEGMENTO
 - 10.4.1. Sobre un plano cualquiera
 - 10.4.2. Sobre los planos de proyección
- 10.5. SOMBRA ARROJADA DE UNA FIGURA PLANA
- 10.6. SOMBRA ARROJADA DE UNA RECTA SOBRE UNA PIRÁMIDE
- 10.7. SOMBRA ARROJADA DE UNA CIRCUNFERENCIA CONTENIDA EN UN PLANO HORIZONTAL
 - 10.7.1. Sobre el PH
 - 10.7.2. Sobre el PV
 - 10.7.3. Sobre el PV (por afinidad)
- 10.8. SOMBRA ARROJADA DE UNA CIRCUNFERENCIA CONTENIDA EN UN PLANO VERTICAL
 - 10.8.1. Sobre el PH
 - 10.8.2. Sobre el PH (por afinidad)
 - 10.8.3. Sobre el PV



- 10.9. SOMBRA ARROJADA DE UNA CIRCUNFERENCIA SOBRE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN
- 10.10. SOMBRA ARROJADA DE UNA FIGURA PLANA $ABCD$ SOBRE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN
- 10.11. SOMBRA DE UN CILINDRO SOBRE UN CONO
- 10.12. SOMBRA AUTOARROJADA DE UNA HORNACINA
- 10.13. SOMBRA PROPIA Y ARROJADA DE DIFERENTES CUERPOS
 - 10.13.1. Esfera
 - 10.13.2. Semiesfera
 - 10.13.3. Cuarto de esfera
 - 10.13.4. Cono recto y oblicuo
 - 10.13.5. Conos truncados
 - 10.13.6. Cilindros y semicilindros huecos
 - 10.13.7. Cilindro. Semiesfera y cilindro. Casquete esférico



- **Sombra:** es la oscuridad producida al oponerse a la luz un cuerpo opaco.
- **Sombra propia:** es la parte sin iluminar de un cuerpo.
- **Sombra arrojada:** es la línea intersección producida por el cono de sombra de dicho cuerpo con otras superficies.
- **Sombra autoarrojada:** es la producida por un cuerpo sobre su misma superficie.
- **Cono de luz:** es la parte de la superficie cónica comprendida entre el foco luminoso y la línea separatriz de luz y sombra.
- **Cono de sombra:** es el resto de la superficie cónica que existe desde la línea separatriz hacia la parte opuesta del foco luminoso y que limita el espacio privado de luz.
- **Penumbra:** es el fenómeno que se produce en un cuerpo iluminado, debido a que el foco no es un punto material sino que tiene una cierta extensión (fig. 10.1.b).

Cuando un cuerpo se encuentra iluminado por un foco con una cierta extensión, las sombras arrojadas determinan tres regiones (fig. 10.1.b). En la primera de ellas, la más oscura, no llegará ningún rayo luminoso en cualquiera de los puntos de luz del foco; esta es la *sombra arrojada pura*. Las dos segundas regiones se denominan *penumbra*.

Para determinar el límite de la sombra arrojada pura, imaginémosnos a todos los rayos luminosos tangentes exteriores al foco y a la superficie opaca iluminada. El lugar geométrico de todos estos rayos forma un cono circunscrito a las dos superficies, cuya intersección con el plano de proyección será el límite de la sombra arrojada pura.

Para determinar el límite de la penumbra, imaginémosnos en este caso a todos los rayos luminosos tangentes interiores a las dos superficies. El lugar geométrico de todos estos rayos forma un cono circunscrito al foco luminoso y al cuerpo opaco, cuya intersección con el plano de proyección delimita la zona de penumbra.

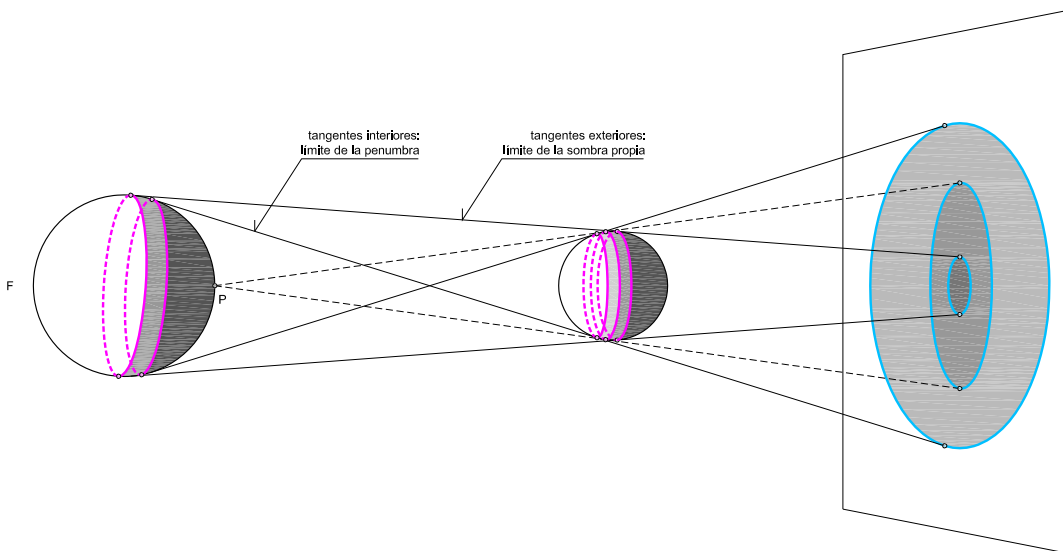


Fig. 10.1.b.

10.2. LUZ FOCAL Y LUZ PARALELA

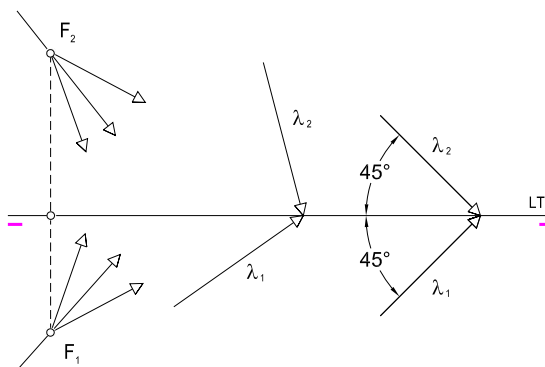


Fig. 10.2.

Si el foco luminoso se encuentra a una distancia finita del objeto, la iluminación se llama *cónica o focal*. Si se traslada al infinito, el foco ya no es un punto y los rayos luminosos son paralelos entre sí; este tipo de iluminación se llama *cilíndrica o paralela*.

10.3. SOMBRA ARROJADA POR UN PUNTO

10.3.1. Sobre un plano cualquiera

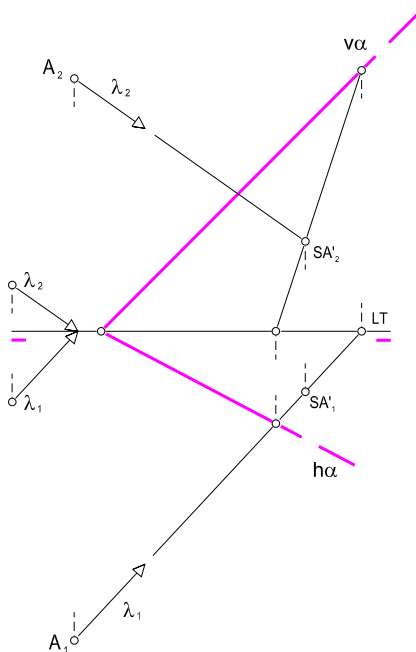


Fig. 10.3.1.

La sombra arrojada por un punto $A[A_1 - A_2]$ sobre un plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ (fig. 10.3.1) es la traza del rayo luminoso que pasa por el punto con la superficie. El rayo luminoso que pasa por $A[A_1 - A_2]$ es la paralela a la dirección $\lambda[\lambda_1 - \lambda_2]$ de la luz y su intersección $SA[SA_1 - SA_2]$ con el plano α es la sombra arrojada del punto A sobre el plano α .



10.3.2. Sobre los planos de proyección

Siendo $\lambda[\lambda_1 - \lambda_2]$ la dirección de la luz y $A[A_1 - A_2]$ el punto, basta con hallar las trazas de la recta que, pasando por el punto A , sea paralela a λ . SA_2 es la sombra arrojada sobre el PV (es la traza vertical de la recta considerada), y el punto SA_1 es la sombra del punto A sobre el PH (fig. 10.3.2).

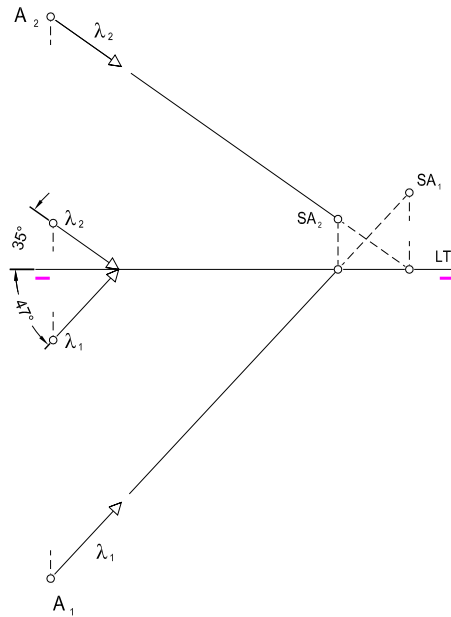


Fig. 10.3.2.

10.4. SOMBRA ARROJADA DE UN SEGMENTO

La sombra arrojada de una recta es el lugar geométrico de las sombras de todos sus puntos, por lo que para hallarla bastará con encontrar la sombra de dos de sus puntos.

10.4.1. Sobre un plano cualquiera

Sea la recta definida por los puntos $A[A_1 - A_2]$ y $B[B_1 - B_2]$ y el plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ (fig. 10.4.2). Por los dos puntos dados de la recta se trazan sendos rayos luminosos paralelos a la dirección $\lambda[\lambda_1 - \lambda_2]$ de la luz dada. La intersección de cada rayo luminoso con el plano $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$ determina las respectivas sombras de los puntos, $SA[SA_1 - SA_2]$ y $SB[SB_1 - SB_2]$.

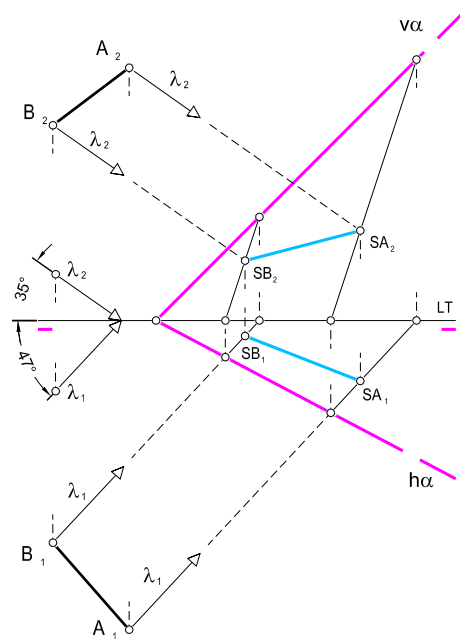


Fig. 10.4.1.

10.4.2. Sobre los planos de proyeccion

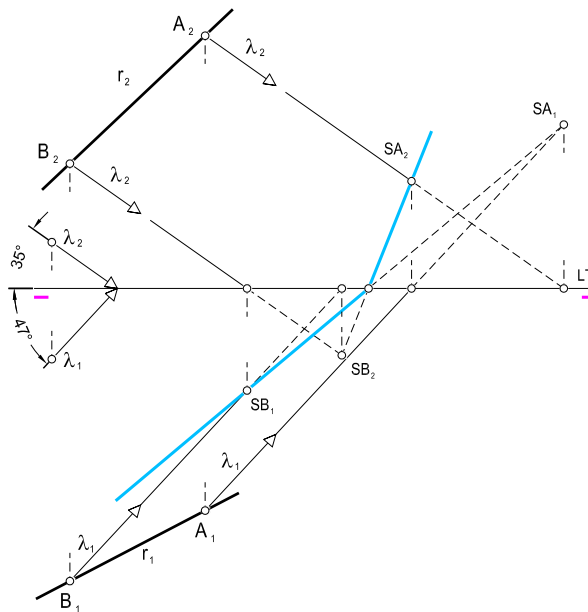


Fig. 10.4.2.

Partimos de la recta $r[r_1 - r_2]$ definida por los puntos $A[A_1 - A_2]$ y $B[B_1 - B_2]$ (fig. 10.4.2). La sombra sobre el PH de los puntos dados son los puntos SA_1 y SB_1 , que también definen la sombra de la recta r ; la parte de la sombra que hay por encima de la LT es la sombra virtual.

De la misma forma, la sombra sobre el PV es la recta $SA_2 - SB_2$, que une los puntos SA_2 y SB_2 , sombras sobre el PV de los puntos $A[A_1 - A_2]$ y $B[B_1 - B_2]$; la parte de la sombra que hay por debajo de la LT es la sombra virtual.

10.5. SOMBRA ARROJADA DE UNA FIGURA PLANA

La sombra arrojada de una figura plana, se puede obtener uniendo las sombras de cada uno de sus puntos. Si tenemos un polígono dado, el conjunto de planos que pasan por sus lados paralelos a la dirección de la luz dada, forman un prisma de sombra; la sombra del polígono con una superficie cualquiera es la intersección con ella del prisma de sombra.

Sea el triángulo definido por los puntos $A[A_1 - A_2]$, $B[B_1 - B_2]$ y $C[C_1 - C_2]$, (fig. 10.5.a). La sombra sobre el PH es el triángulo $SA_1SB_1SC_1$ que se obtiene al unir las sombras sobre el PH de los vértices de dicho triángulo.

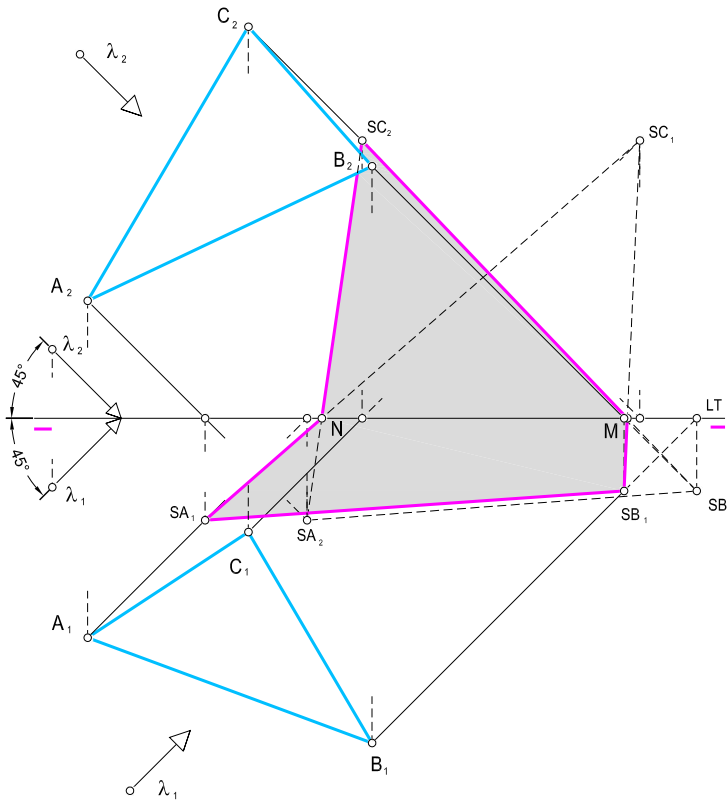


Fig. 10.5.a.

De la misma forma se obtiene la sombra sobre el PV, que es el triángulo $SA_2SB_2SC_2$. Como puede apreciarse, los puntos N y M son comunes a las dos sombras y son los puntos que separan las sombras virtuales: éstas son las partes dibujadas en discontinua, que son las sombras que se verían suponiendo que no existiera el plano de proyección de nombre contrario al de aquél sobre el que se halla la sombra.

En la fig. 10.5.b se determina la sombra sobre el PH de un cuadrado situado en un plano horizontal. Como vemos, se obtiene otro cuadrado igual al proyectado, reduciéndose el problema a una simple traslación.

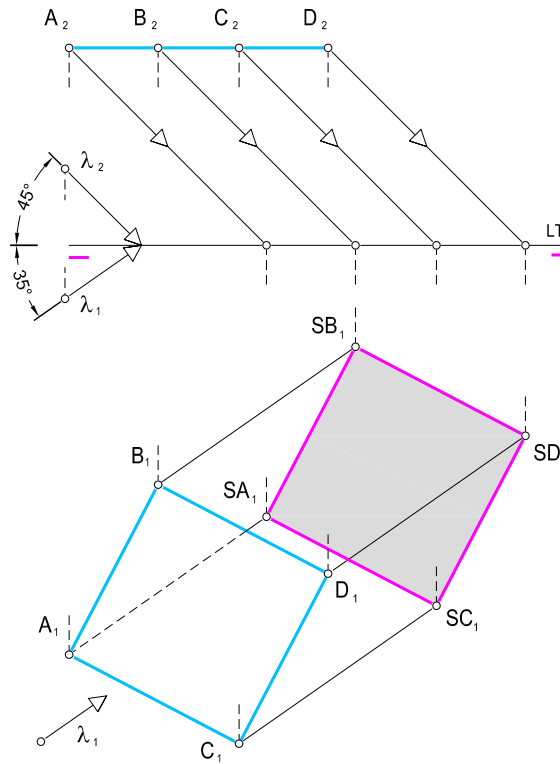


Fig. 10.5.b.

10.6. SOMBRA ARROJADA DE UNA RECTA SOBRE UNA PIRÁMIDE

Sea la pirámide de vértice $V[V_1 - V_2]$ y base el cuadrilátero formado por los puntos $A[A_1 - A_2]$, $B[B_1 - B_2]$, $C[C_1 - C_2]$ y $D[D_1 - D_2]$; sea también la recta $m[m_1 - m_2]$ (fig 10.6). Para hallar la sombra proyectada de la recta sobre la pirámide, se traza por un punto cualquiera de la misma, por ejemplo el $P[P_1 - P_2]$, el rayo luminoso paralelo a la dirección $\lambda[\lambda_1 - \lambda_2]$ dada, obteniéndose las sombras SP_1 y SP_2 sobre el PH y el PV respectivamente. El plano de sombra es, pues, el $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$, que corta a la pirámide según la sección 1-2-3-4. Las rasantes a esta sección y paralelas a la dirección $\lambda[\lambda_1 - \lambda_2]$ dan los puntos 2 y 3, lo que indica que la sombra está formada por dos lados de dicha sección, es decir, 1-2 y 1-3.

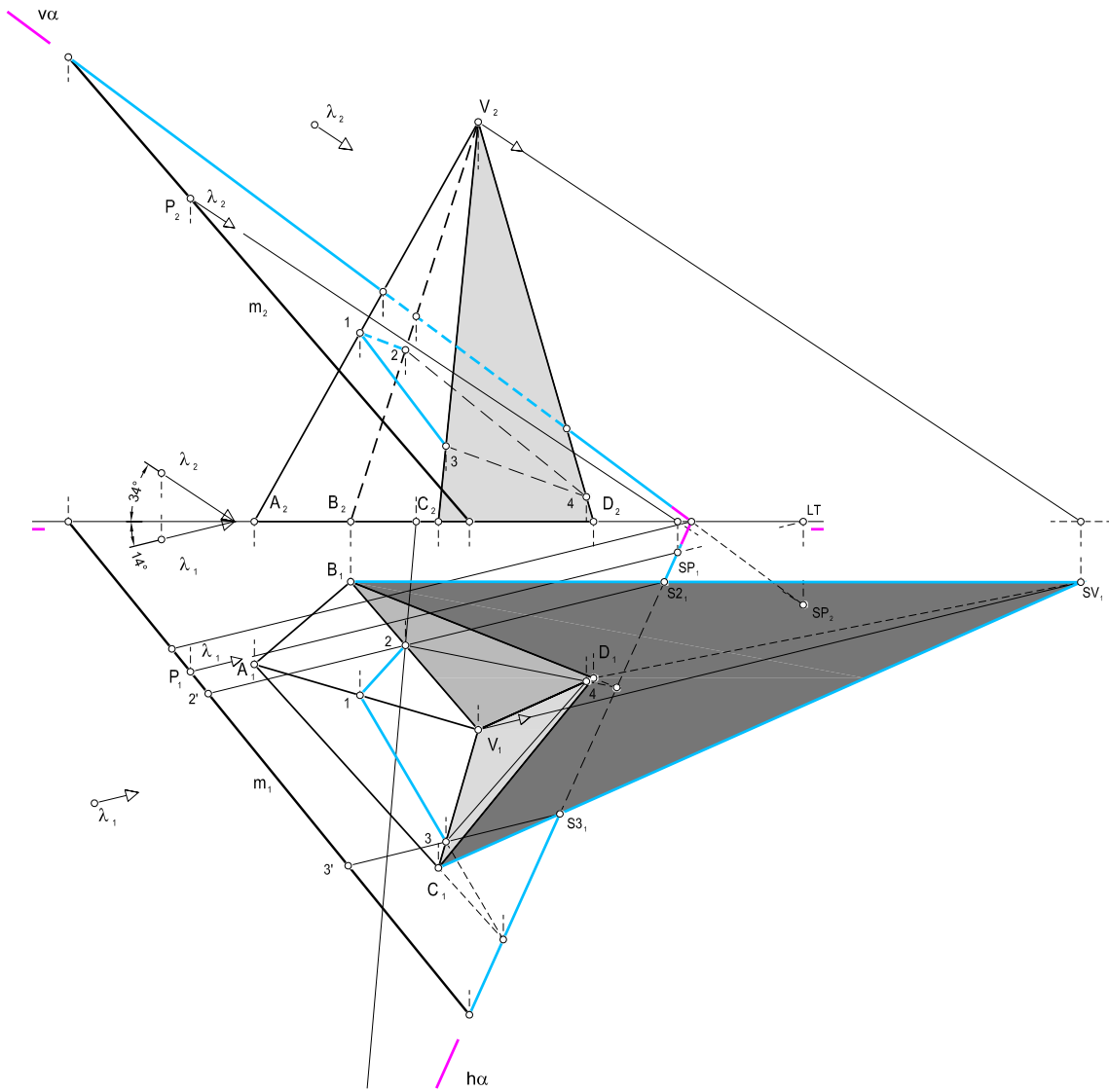


Fig. 10.6.

10.7. SOMBRA ARROJADA DE UNA CIRCUNFERENCIA CONTENIDA EN UN PLANO HORIZONTAL

10.7.1. SOBRE EL PH

Por estar la circunferencia contenida en un plano paralelo al PH, su sombra arrojada es otra circunferencia idéntica a la dada pero con centro en SO_1 ; el problema es una simple translación (fig. 10.7.1).

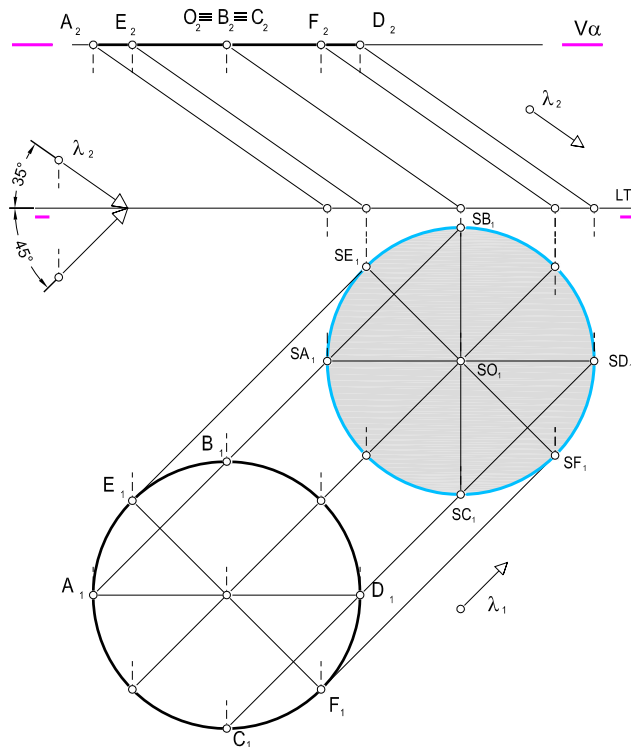


Fig. 10.7.1.



10.7.2 SOBRE EL PV

La sombra de la circunferencia de centro $O[O_1 - O_2]$ situada en el plano horizontal $\alpha[v_\alpha]$ (fig. 10.7.2.a) es la traza vertical del cilindro de sombra que forman los rayos luminosos que pasan por los puntos de la circunferencia que limita el círculo. Este cilindro de sombra corta al PV según la elipse de diámetros conjugados SA_2 - SD_2 y SB_2 - SC_2 , que son las sombras de los diámetros $A-D$ y $B-C$.

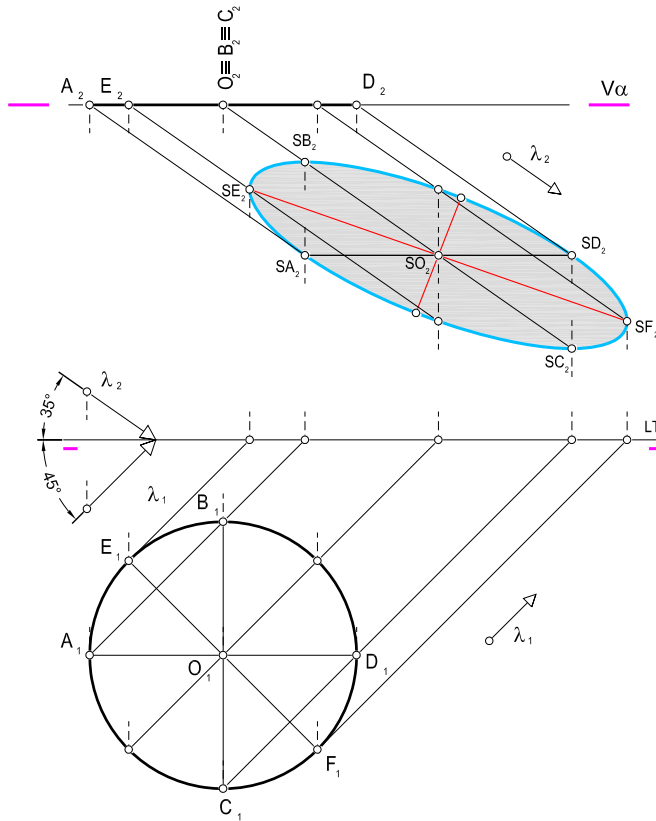


Fig. 10.7.2.a.

La construcción de la elipse en la proyección vertical se realiza aplicando uno de los tres métodos existentes (*Mannheim*, *Chasles* o *Ritz*) para transformar dos ejes conjugados no ortogonales en ejes perpendiculares.

10.7.3. SOBRE EL PV (POR AFINIDAD)

Una forma rápida y sencilla de hallar la sombra de la circunferencia de centro O [$O_1 - O_2$] situada en el plano horizontal α [v_α] (fig. 10.7.2.b) es utilizar el principio de afinidad.

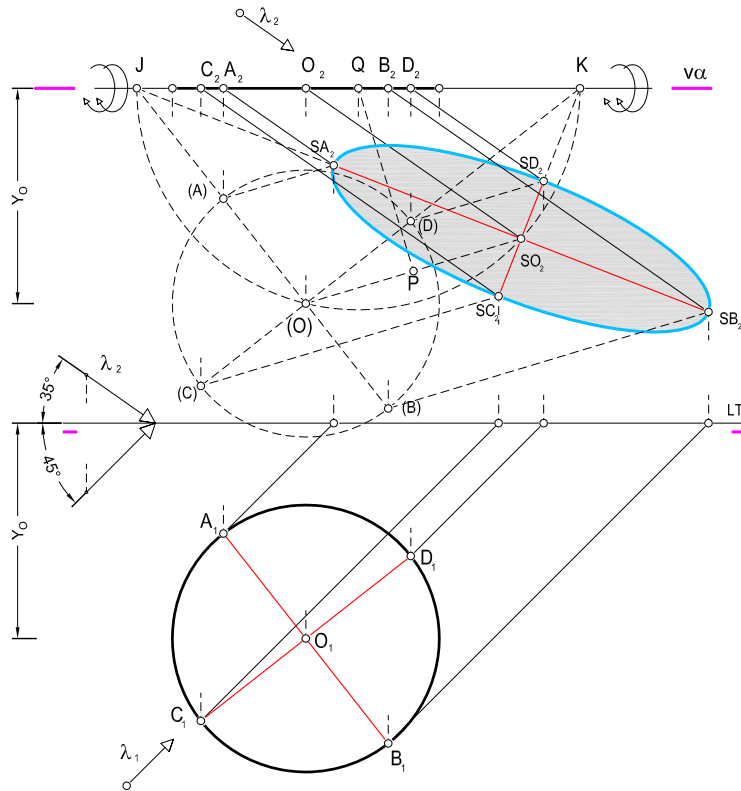


Fig. 10.7.2.b.

Abatimos la circunferencia dada sobre el PV y según las direcciones dadas hallamos la sombra SO_2 del centro de la misma. Trazamos un arco capaz de 90° de centro el punto Q (punto intersección entre v_α y la mediatriz del segmento $(O) - SO_2$ trazada desde P), que corta a v_α en los puntos J y K .

Trazando por (O) dos rectas a partir de los puntos J y K hallaremos los puntos de la circunferencia $(A) - (B)$ y $(C) - (D)$ respectivamente. Por afinidad, las rectas que pasan por el punto SO_2 trazadas desde los puntos J y K , contendrán las sombras de los puntos de la circunferencia antes mencionados. Para ello, sólo tenemos que considerar las direcciones de los rayos de luz dadas.



10.8. SOMBRA ARROJADA DE UNA CIRCUNFERENCIA CONTENIDA EN UN PLANO VERTICAL

10.8.1. SOBRE EL PH

La sombra sobre el PH de la circunferencia de centro O/O_1-O_2 situada en el plano vertical α/h_α es la elipse de centro SO_1 y diámetros conjugados SA_1-SD_1 y SB_1-SC_1 , que son las sombras de los diámetros $A-D$ y $B-C$ respectivamente (Fig. 10.8.1.a).

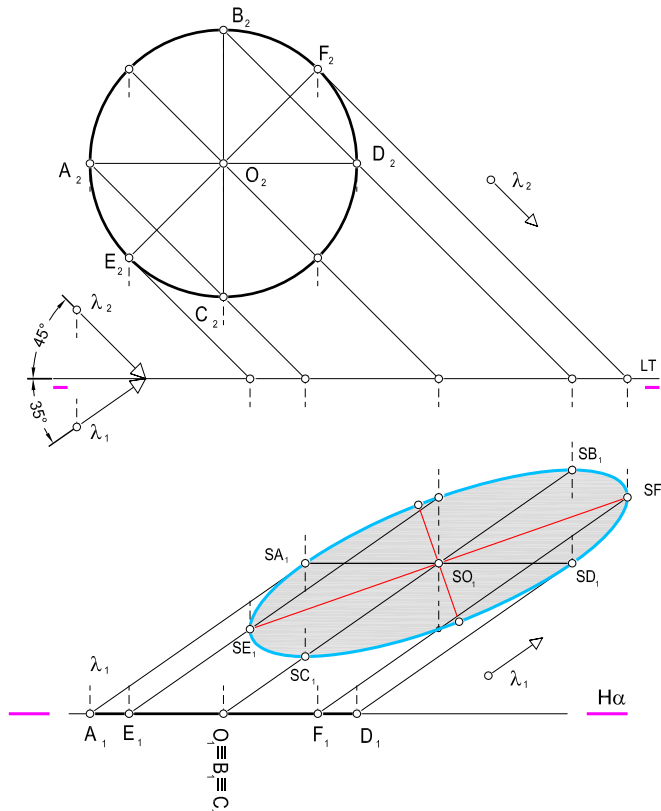


Fig. 10.8.1.

La construcción de la elipse en la proyección horizontal se realiza aplicando uno de los tres métodos existentes (Mannheim, Chasles o Ritz) para transformar dos ejes conjugados no ortogonales en ejes perpendiculares.

10.8.2. SOBRE EL PH (por afinidad)

Al igual que en el apartado 10.8.2, podemos hallar la sombra de la circunferencia de centro $O[O_1 - O_2]$ situada en el plano vertical $\alpha[h\alpha]$ (fig. 10.8.2) mediante el principio de afinidad.

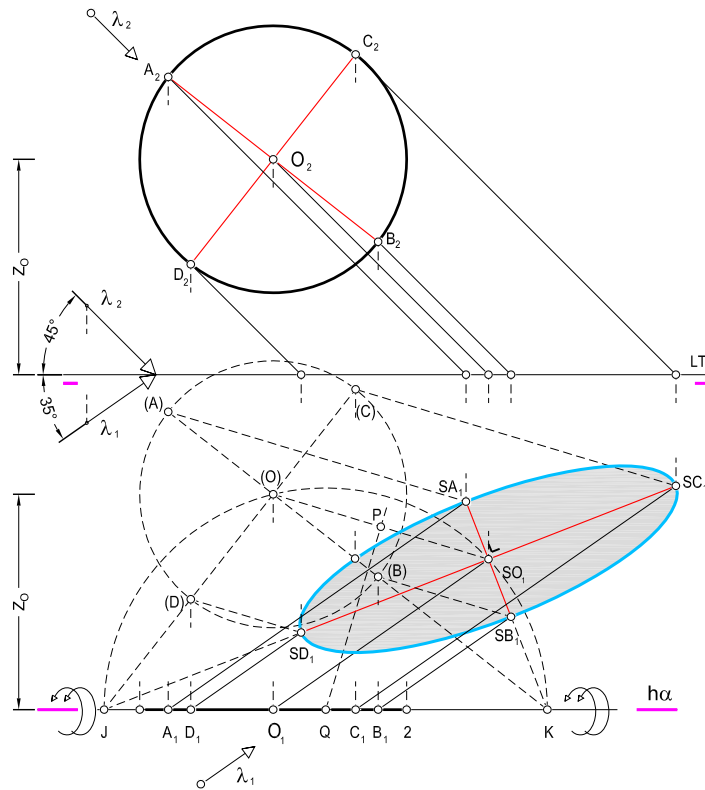


Fig. 10.8.2.

Abatimos la circunferencia dada sobre el PH y, según las direcciones dadas hallamos la sombra SO_1 del centro de la misma. Trazamos un arco capaz de 90° de centro el punto Q (punto intersección entre v_α y la mediatriz del segmento $(O)-SO_2$) que corta a v_α en los puntos J y K .

Trazando por (O) dos rectas a partir de los puntos J y K hallaremos los puntos de la circunferencia $(A) - (B)$ y $(C) - (D)$ respectivamente. Por afinidad, las rectas que pasan por el punto SO_1 trazadas desde los puntos J y K , contendrán las sombras de los puntos de la circunferencia antes mencionados. Para ello, sólo tenemos que considerar las direcciones de los rayos de luz dadas.



10.8.3. SOBRE EL PV

De nuevo, por estar la circunferencia contenida en un plano paralelo al PV, su sombra arrojada es otra circunferencia idéntica a la dada pero con centro en SO_2 ; nuevamente, el problema es una simple traslación (fig. 10.8.3).

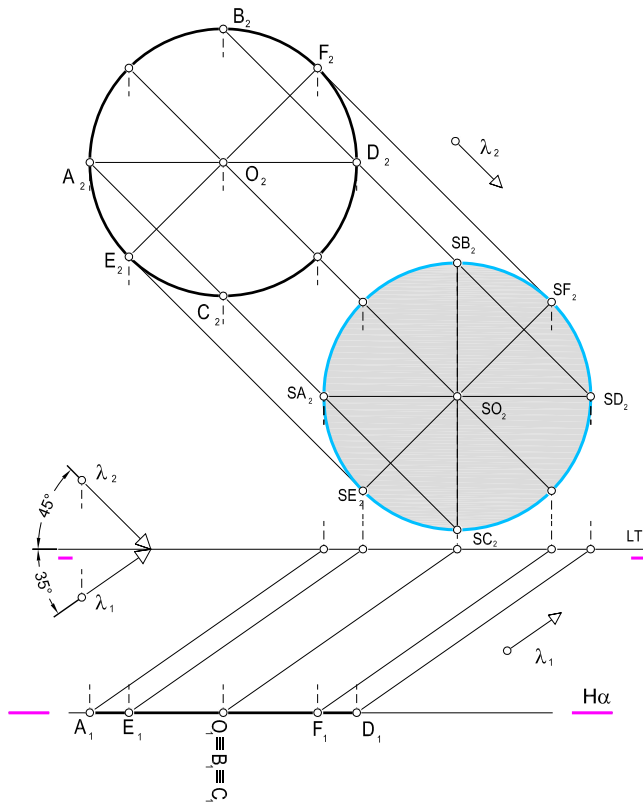


Fig. 10.8.3.

10.9. SOMBRA ARROJADA DE UNA CIRCUNFERENCIA SOBRE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

Para hallar la sombra de la circunferencia de centro $O(O_1 - O_2)$ situada en el plano vertical $\alpha[h_\alpha]$ (fig. 10.9), se hallan previamente las sombras SO_1 y SO_2 del centro O sobre el PV y el PH

El cilindro de sombra de la circunferencia dada corta al PV según el círculo de centro SO_2 y radio $SO_2 - SB_2$ (por ser sus planos paralelos), y al PH según la elipse cuyos diámetros conjugados $SA_1 - SD_1$ y $SC_1 - SB_1$ son las sombras de los diámetros $A - D$ y $C - B$ respectivamente, lo cual permite dibujarla. Como vemos, ambas sombras se cortan en los puntos M y N , situados en la LT, ya que son puntos comunes a las dos sombras.

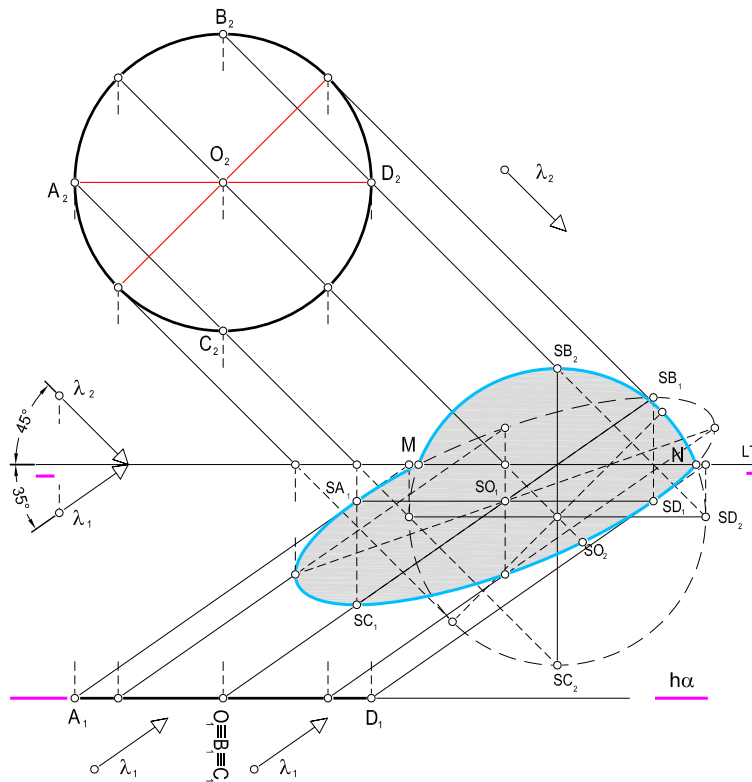


Fig. 10.9.



10.10. SOMBRA ARROJADA DE UNA FIGURA PLANA $ABCD$ SOBRE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

Sea el cuadrilátero definido por los puntos $A[A_1 - A_2]$, $B[B_1 - B_2]$, $C[C_1 - C_2]$ y $D[D_1 - D_2]$ contenido en el plano vertical $\alpha[h_\alpha - v_\alpha]$, (fig. 10.10).

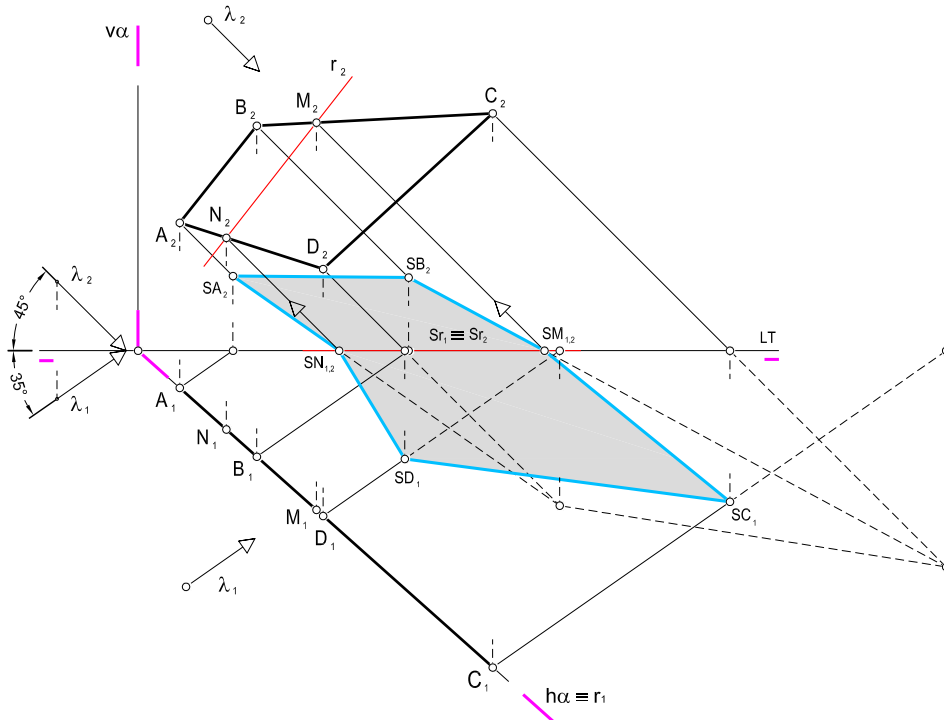


Fig. 10.10

La sombra sobre los planos de proyección resulta ser la definida por los puntos SA_2 , SB_2 , SD_1 , SC_1 y los puntos intersección con la LT, $SN_{1,2}$ y $SM_{1,2}$. Estos dos puntos son los puntos que en el espacio definen la recta que corta al cuadrilátero y que arrojan su sombra sobre la LT.

Para hallar sus proyecciones basta con restituir las sombras, trazando desde $SN_{1,2}$ y $SM_{1,2}$ sendas paralelas a la dirección de la luz dada, que cortan a los polígonos $A_2 - D_2$ y $B_2 - C_2$ en N_2 y M_2 respectivamente.

10.11. SOMBRA DE UN CILINDRO SOBRE UN CONO

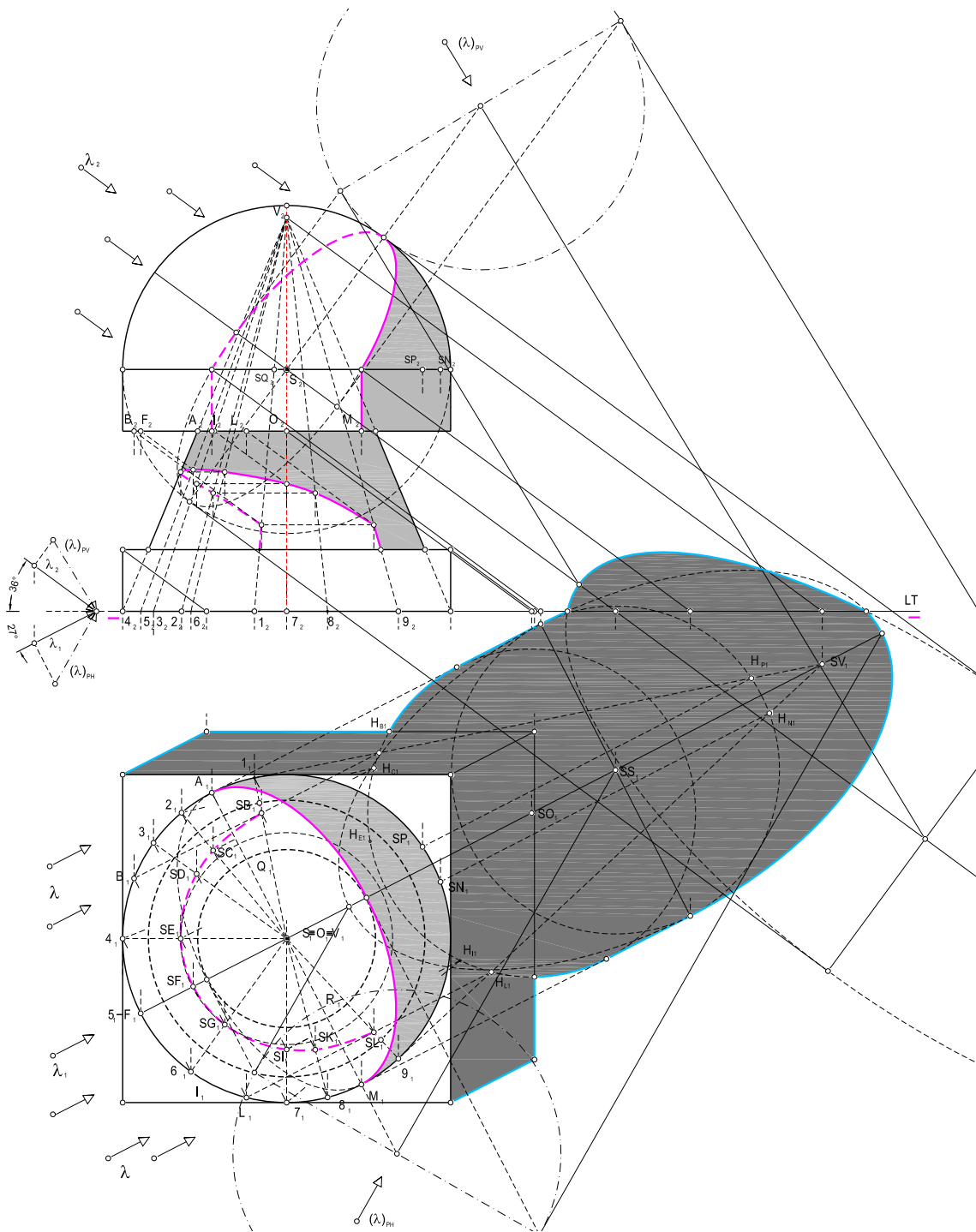


Fig. 10.11.



En la fig. 10.11 se han dibujado las sombras producidas en el cuerpo formado por un cilindro recto de bases circulares, de centros $O/O_1 - O_2$ y $S/S_1 - S_2$, atravesado por un cono de revolución del mismo eje, vértice $V/V_1 - V_2$ y base igual a la del cilindro.

Las sombras SO_1 , SS_1 y SV_1 permiten hallar fácilmente las sombras arrojadas, y a partir de éstas, las sombras propias de cada uno.

Los puntos de corte HB_1 y HL_1 de las sombras arrojadas determinan, por restitución, los extremos $SL[SL_1 - SL_2]$ y $SB[SB_1 - SB_2]$ de la sombra arrojada sobre el cono por el borde BL de la base del cilindro, y los HP_1 y HN_1 , los extremos $SP[SP_1 - SP_2]$ y $SN[SN_1 - SN_2]$ de la arrojada por el cono sobre la base superior del cilindro.

Las sombras de las generatrices $V2$, $V4$ y $V7$ del cono cortan a la de la base inferior del cilindro, en HC_1 , HE_1 y HI_1 . Los rayos de sombra, trazados por estos puntos, cortan a dichas generatrices en los puntos de sombra SC_1 , SE_1 y SI_1 que junto con sus simétricos SK_1 , SG_1 y SD_1 (respecto al plano vertical que contiene el vértice del cono y cuya traza horizontal es paralela a λ_1) permiten dibujar la sombra arrojada sobre el cono.

10.12. SOMBRA AUTOARROJADA DE UNA HORNACINA

El nicho esférico es un hueco u hornacina formado por un semicilindro vertical, circular, rematado por una cuña esférica de 90° , de igual radio que el cilindro (fig. 10.12).

El plano de sombra del borde $K-A$ es vertical y sus trazas con la base y pared del nicho son las sombras SK_2-SN_2 y SN_2-SA_2 , respectivamente.

La sombra del arco AC es la curva $SA-SM-SB-SC$, determinada por las sombras de los puntos aislados M , B y C (posteriormente veremos como se halla el punto C exactamente).

La sombra de la semiesfera se ha hallado por medio de un cambio de plano horizontal, de traza paralela a λ_2 . En la nueva proyección, la sombra $O1'E1'$ es simétrica de $O1'B1'$, respecto a la normal a λ_1' , trazada por $O1'$, y se proyecta, según semielipses e_1 y e_2 de semiejes O_2D_2 y O_2E_2 y diámetros conjugados O_1D_1 y O_1E_1 .

Para hallar la sombra arrojada en el interior de la semiesfera nos valdremos de planos auxiliares verticales paralelos a $\lambda_1' - \lambda_2$. Los planos auxiliares, trazados por los puntos A y B cortan a la semiesfera según círculos cuyas proyecciones son los círculos de centro O_1' y radios $O_1' - A_1'$ y $O_1' - B_1'$ respectivamente.

Los rayos luminosos λ_1' cortan a estos círculos en los puntos I_1' y E_1' . Refiriendo estos puntos a la proyección vertical, vemos que el primero de ellos queda oculto por la sombra del tramo $A-K$, mientras que el segundo, E_2 , determina junto con el punto O_2 uno de los semiejes de la elipse que define la sombra buscada. El otro semieje es el que resulta de trazar el rayo de luz tangente al nicho, es decir, O_2-D_2 ($D_2 \equiv SD_2$).

La sombra del punto C , SC_2 , resulta de la intersección entre la base superior $a[a_1-a_2]$ del cilindro contenida en el plano de canto (respecto al cambio de plano) $\beta[v_\beta]$, y del plano vertical (también respecto al cambio de plano) $\alpha[h_\alpha]$ que contiene al círculo e (envolvente de todas las sombras proyectadas sobre la semiesfera). Con todo, resulta que SC_2 es un punto de la intersección $r[r_1-r_2]$ de ambos planos, de proyecciones $r_1 \equiv h_\alpha'$ y $r_2 \equiv v_\beta$ (por ser α y β planos proyectantes). Si ahora abatimos el semicírculo $e[e_1'-e_2']$ sobre el horizontal en (e) , el abatimiento $(r) \equiv (O)(V_r')$ de r corta a (e) en (SC) . Desahaciendo el abatimiento (SC) y refiriendo este punto a la proyección vertical, encontramos el punto $SC[SC_1-SC_2]$.

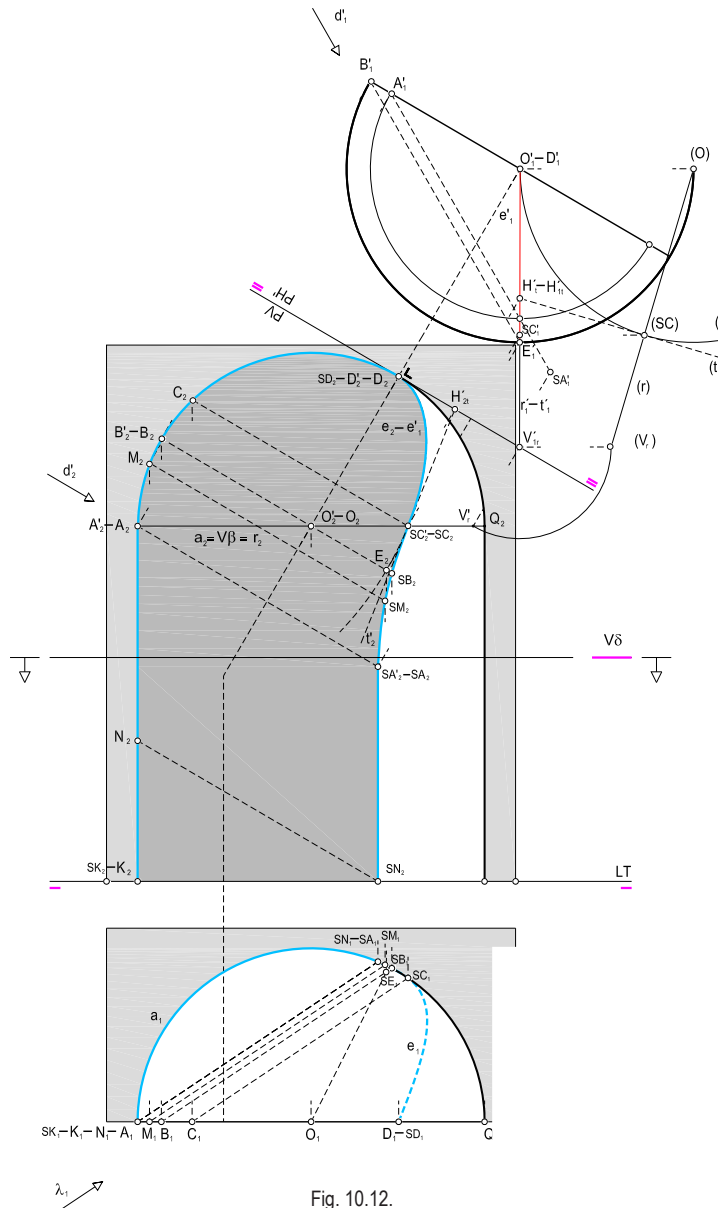


Fig. 10.12.



10.13. SOMBRA PROPIA Y ARROJADA DE DIFERENTES CUERPOS

10.13.1. Esfera

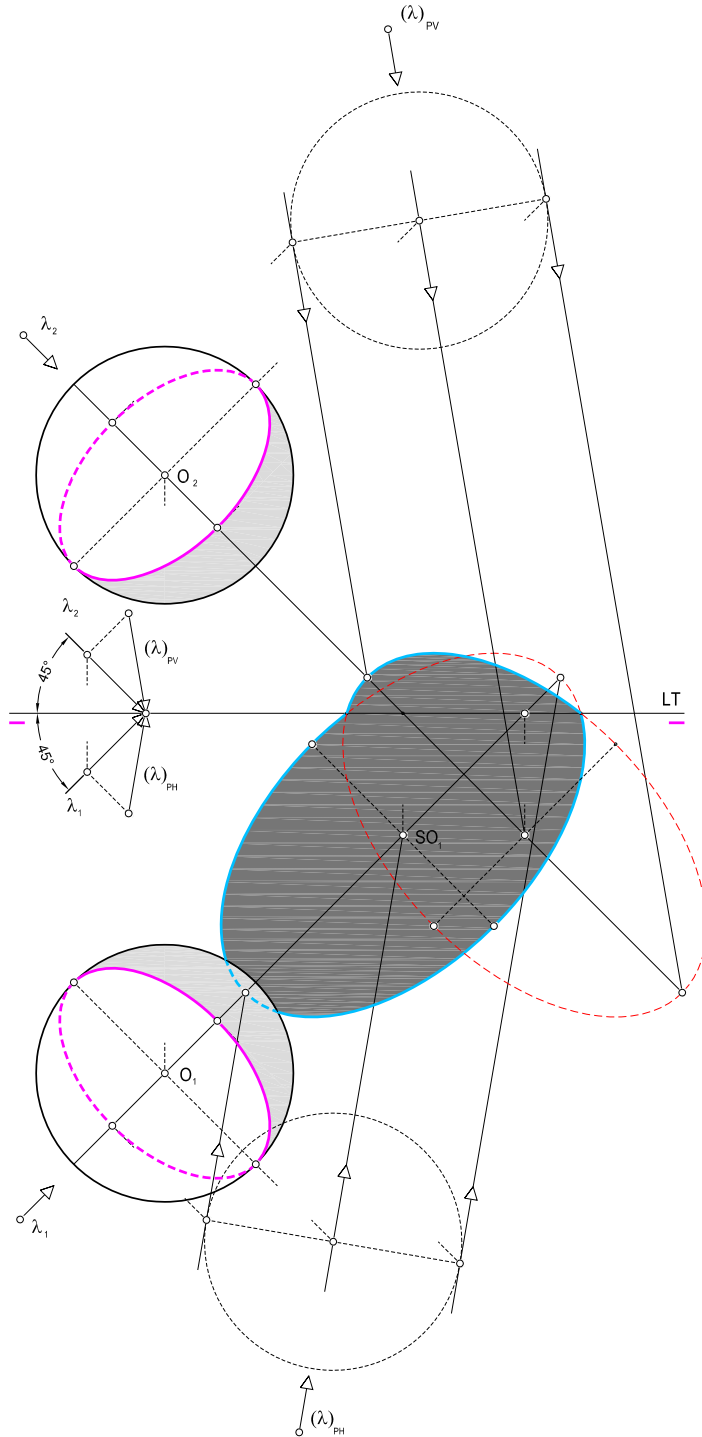


Fig. 10.13.1.

10.13.2.- Semiesfera

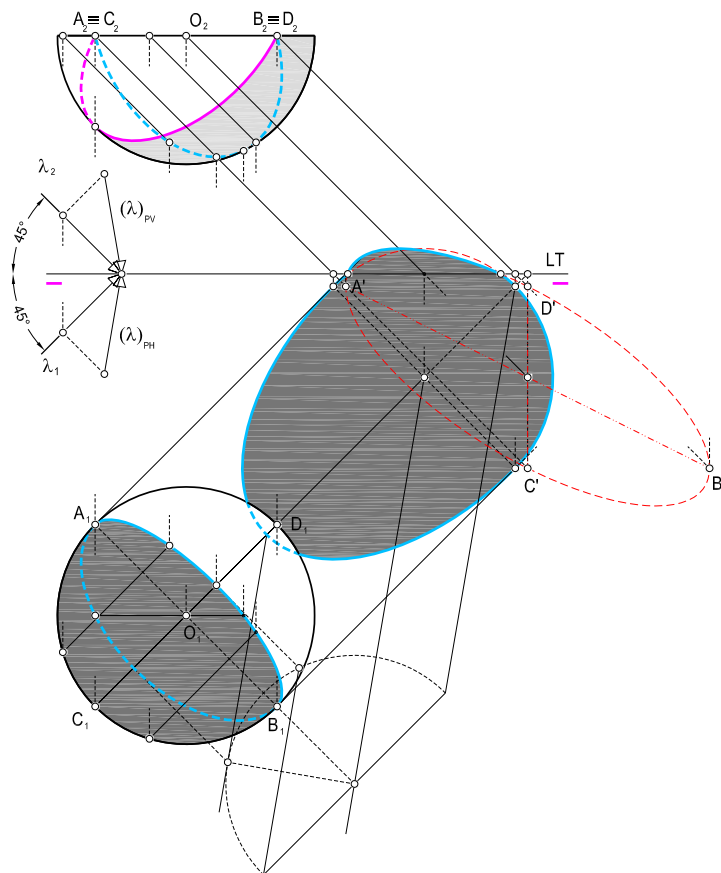


Fig. 10.13.2.



10.13.3. Cuarto de esfera

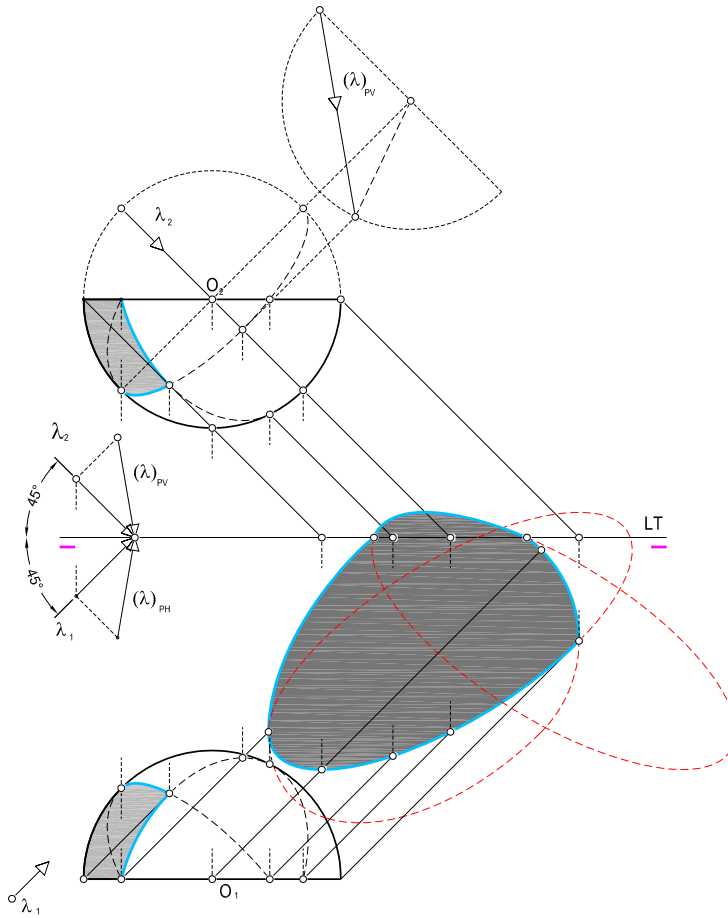


Fig. 10.13.3.

10.13.4. Cono recto y oblicuo

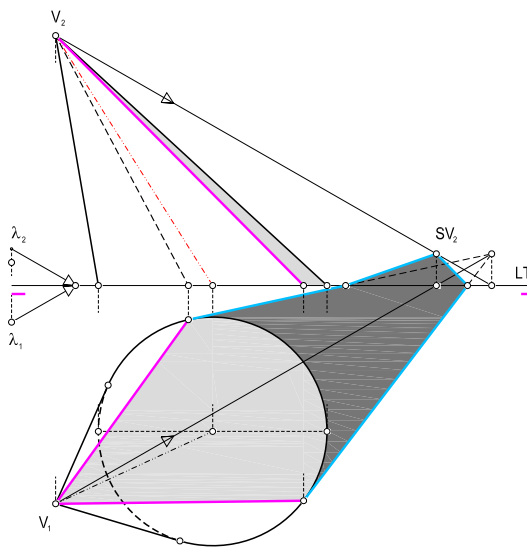


Fig. 10.13.4.a.

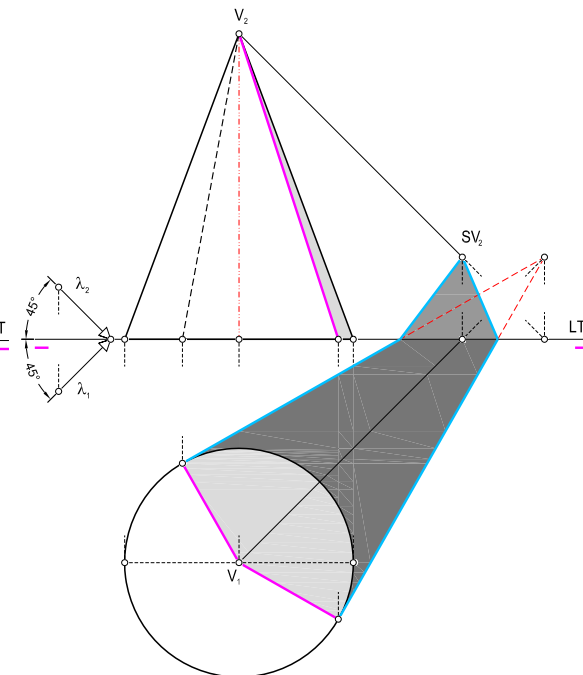


Fig. 10.13.4.b.

10.13.5. Conos truncados

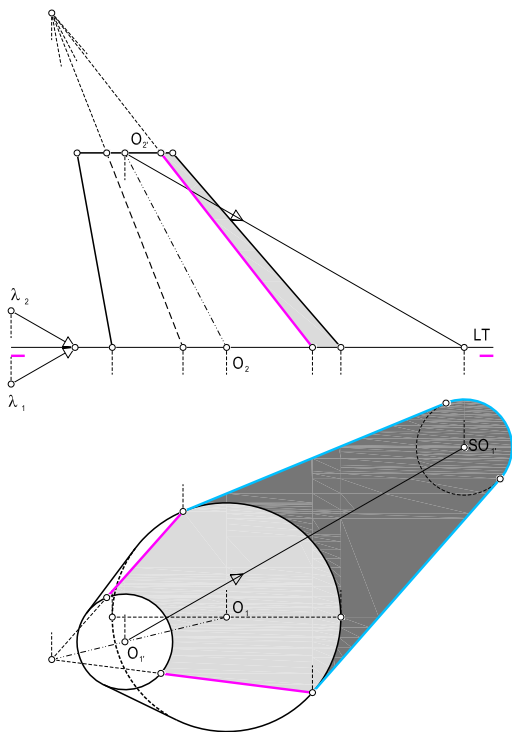


Fig. 10.13.5.a.

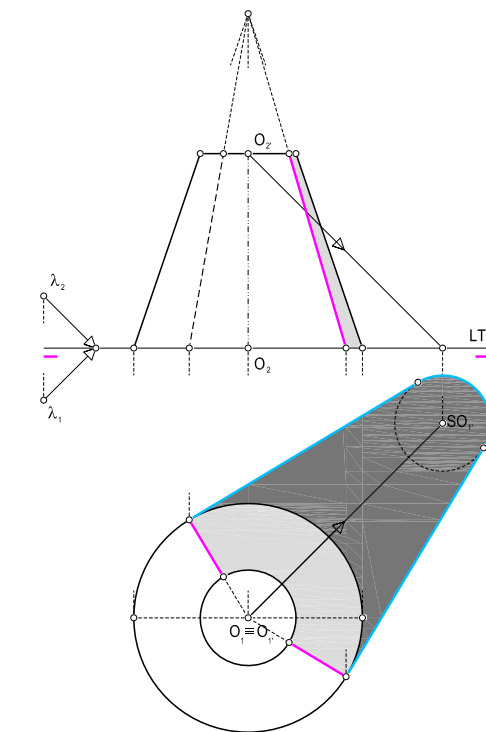


Fig. 10.13.5.b.



10.13.6. Cilindros y semicilindros huecos

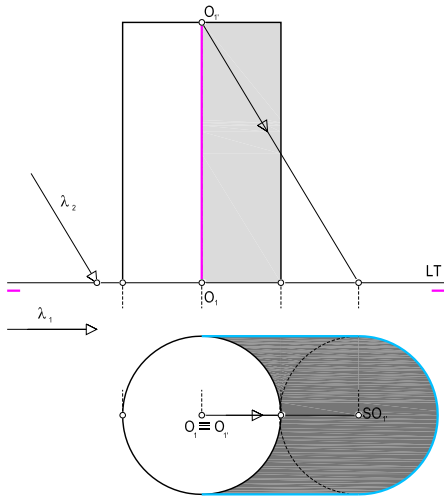


Fig. 10.13.6.a.

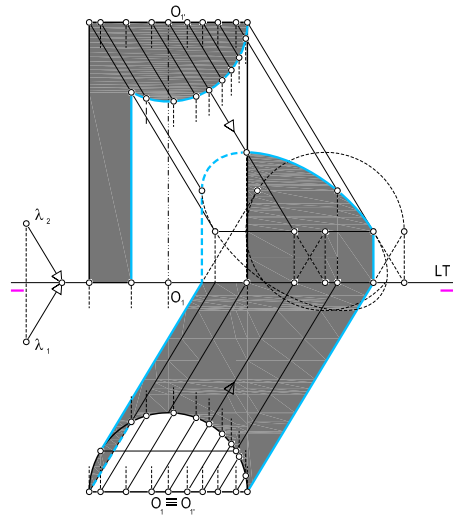


Fig. 10.13.6.b.

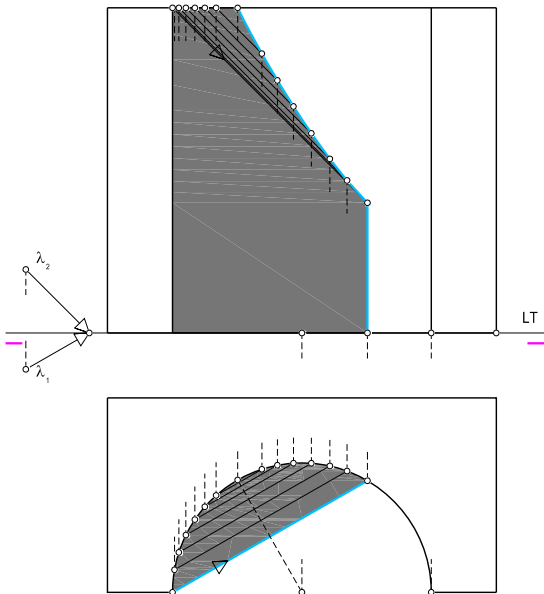


Fig. 10.13.6.c.

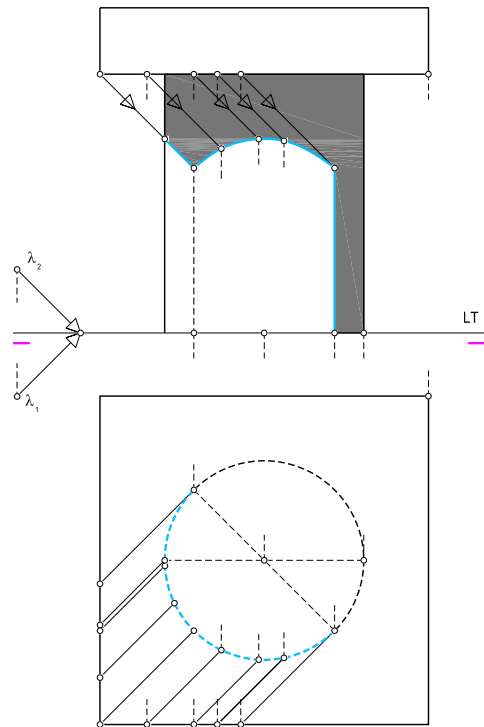


Fig. 10.13.6.d.

10.13.7. Cilindro. Semiesfera y cilindro. Casquete esférico

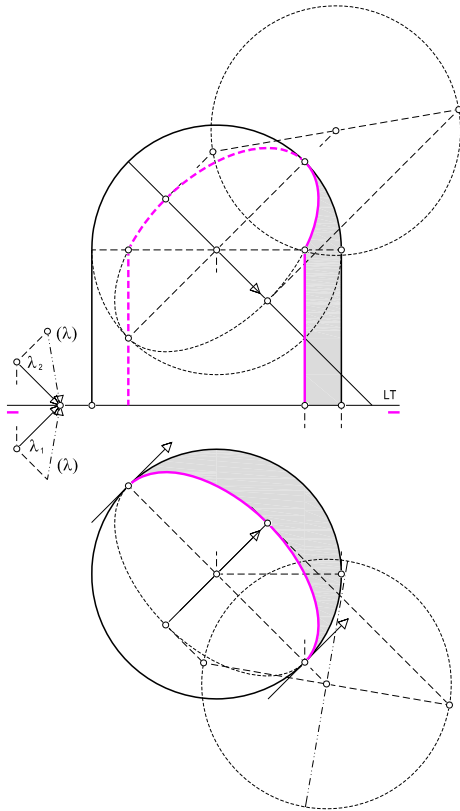


Fig. 10.13.7.a.

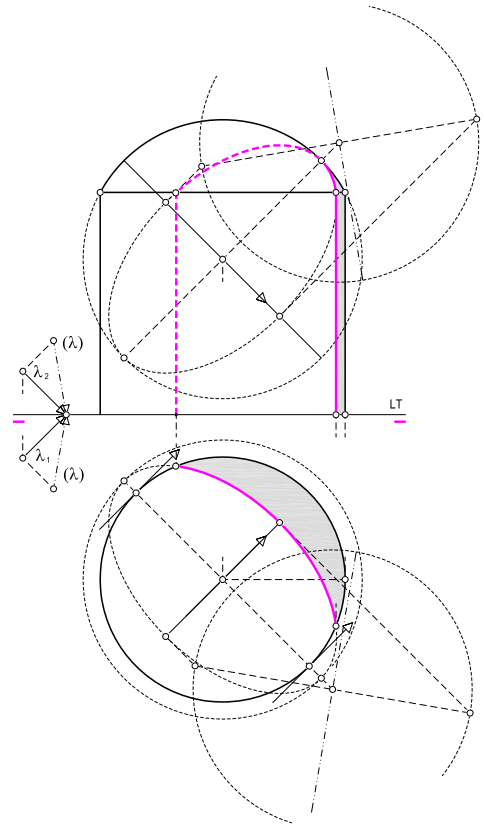


Fig. 10.13.7.b.



10.13.8. Doble nicho esférico

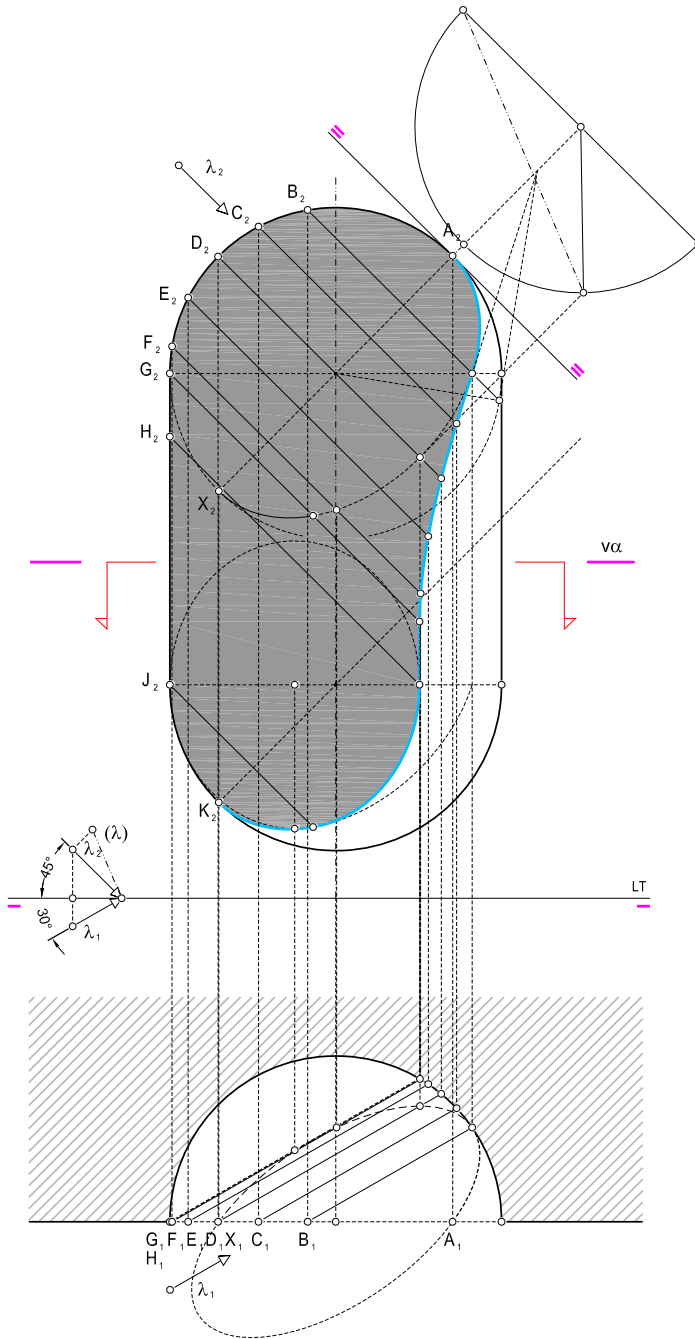


Fig. 10.13.8.

10.13.9. Cuerpo compuesto de varios sólidos

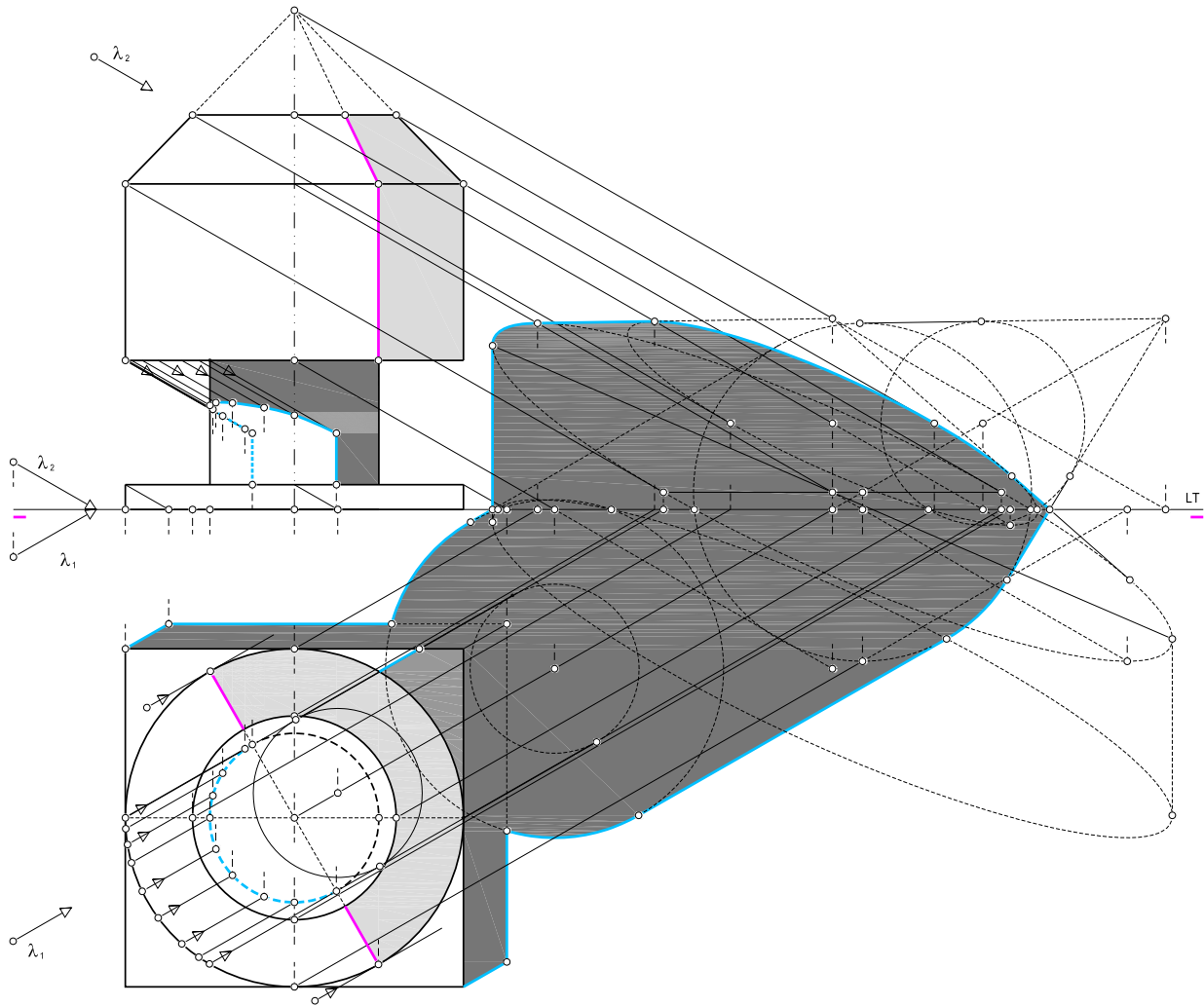


Fig. 10.13.9.

→ 11



Ángulos

- 11.1. ÁNGULOS DE UNA RECTA CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN
 - 11.1.1. Primer procedimiento
 - 11.1.2. Segundo procedimiento
- 11.2. ÁNGULOS DE UNA RECTA CON UN PLANO CUALQUIERA
 - 11.2.1. Primer procedimiento
 - 11.2.2. Segundo procedimiento
- 11.3. RECTAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y FORMAN UN ÁNGULO CON UN PLANO
 - 11.3.1. Plano cualquiera
 - 11.3.2. Plano horizontal de proyección
- 11.4. DETERMINACIÓN DE LA RECTA CONOCIDOS LOS ÁNGULOS CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN
- 11.5. ÁNGULO DE DOS RECTAS (QUE SE CORTAN O SE CRUZAN)
- 11.6. ÁNGULOS DE UN PLANO CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN
- 11.7. PLANOS QUE PASAN POR UN PUNTO Y FORMAN UN ÁNGULO DADO CON UN PLANO
 - 11.7.1. Con un plano cualquiera
 - 11.7.2. Con el PH
- 11.8. PLANOS QUE PASAN POR UNA RECTA Y FORMAN UN ÁNGULO DADO CON UN PLANO
 - 11.8.1. Con un plano cualquiera
 - 11.8.2. Con el PH
- 11.9. DETERMINACIÓN DE UN PLANO CONOCIDOS SUS ÁNGULOS CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN
- 11.10. PLANO CONOCIDO EL ÁNGULO ENTRE TRAZAS Y EL QUE FORMA CON UN PLANO DE PROYECCIÓN
- 11.11. ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS



11.1. ÁNGULOS DE UNA RECTA CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

11.1.1. Primer procedimiento

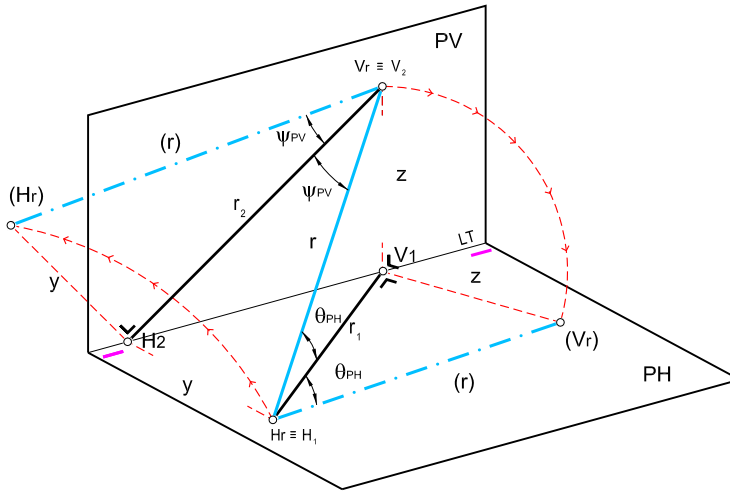


Fig. 11.1.1.a.

En el dibujo del espacio de la fig. 11.1.1.a se ha representado una recta r con sus correspondientes proyecciones r_1 y r_2 , que quedan definidas por las trazas de la recta Vr y Hr . En el plano proyectante de la recta sobre el PH aparece en verdadera magnitud el ángulo θ_{PH} que forma la recta con el PH. Análogamente, en el plano proyectante de la recta sobre el PV queda determinado el ángulo ψ_{PV} que forma la recta r con el PV.

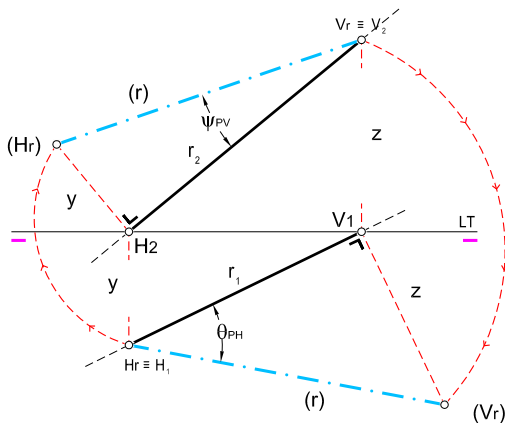


Fig. 11.1.1.b.

Una de las maneras para determinar la verdadera magnitud de estos ángulos es la siguiente (fig. 11.1.1.b): se abate el plano proyectante horizontal de la recta (que contiene θ_{PH}) alrededor de la proyección horizontal de la recta r_1 . Para ello se construye sobre el PH el triángulo rectángulo $V_1H_r(V_r)$ del que se conocen los catetos V_1H_r y $V_1(V_r) = V_1V_r$ con lo que se obtiene el ángulo θ_{PH} en verdadera magnitud.

Análogamente, se obtiene el ángulo ψ_{PV} abatiendo sobre el PV el plano proyectante vertical de la recta, para lo que se construye sobre el PV el triángulo rectángulo $V_rH_2(H_r)$, del que se conocen los catetos V_rH_2 y $H_2(H_r) = H_2H_r$.

11.1.2. Segundo procedimiento

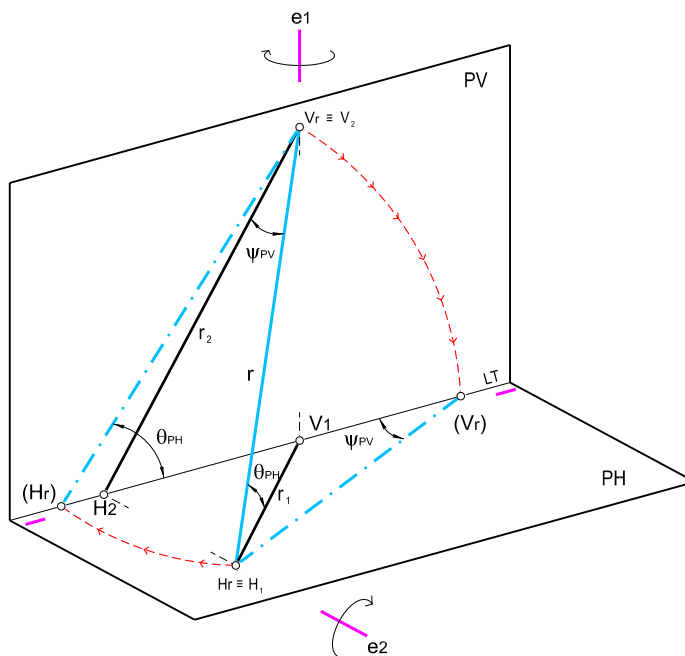


Fig. 11.1.2.a.

Otro procedimiento para hallar los ángulos que forma una recta con los planos de proyección es el que se indica en la fig. 11.1.2.a.

Por giro sobre el PV el plano proyectante horizontal alrededor del eje V_1V_r (giro de la recta r alrededor del eje e_1). En este caso, la traza horizontal de la recta H_r pasa a ocupar la posición (H_r) sobre la LT, quedando determinado en verdadera magnitud el ángulo θ_{PH} .

Asimismo, puede determinarse el ángulo ψ_{PV} abatiendo el plano proyectante vertical sobre el PH alrededor de H_rH_2 (giro de la recta r alrededor del eje e_2). El punto V_1 pasa a ocupar la posición (V_r) sobre la LT, hallándose el ángulo ψ_{PV} en verdadera magnitud.

En diédrico, se resuelve el problema como se presenta a continuación (fig. 11.1.2.b): con centro en V_1 y radio V_1H_r trazamos un arco de circunferencia hasta cortar a la LT, obtenién-

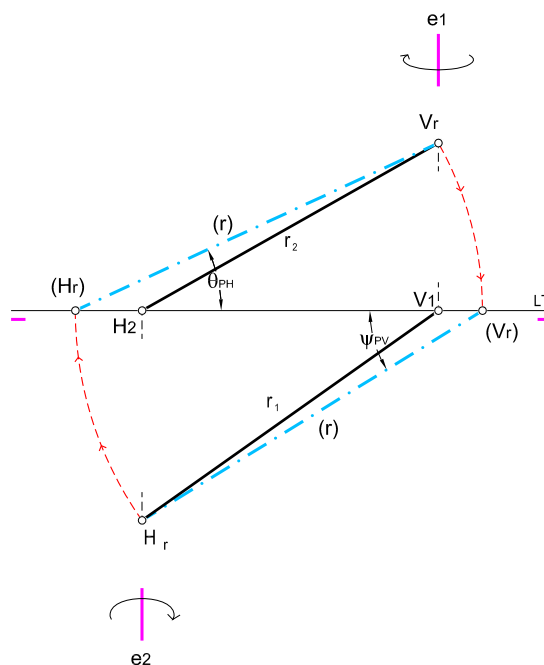


Fig. 11.1.2.b.



dose (H_r) y el ángulo θ_{PH} en verdadera magnitud. Nuevamente, con centro en H_2 y radio H_2V_r se traza un arco de circunferencia hasta su intersección con la LT, obteniéndose (V_r) y por tanto, la verdadera magnitud del ángulo ψ_{PV} .

11.2. ÁNGULOS DE UNA RECTA CON UN PLANO CUALQUIERA

Dada una recta r y un plano α , el ángulo formado por ambos es el determinado por la recta r y su proyección ortogonal sobre el plano α .

11.2.1. Primer procedimiento

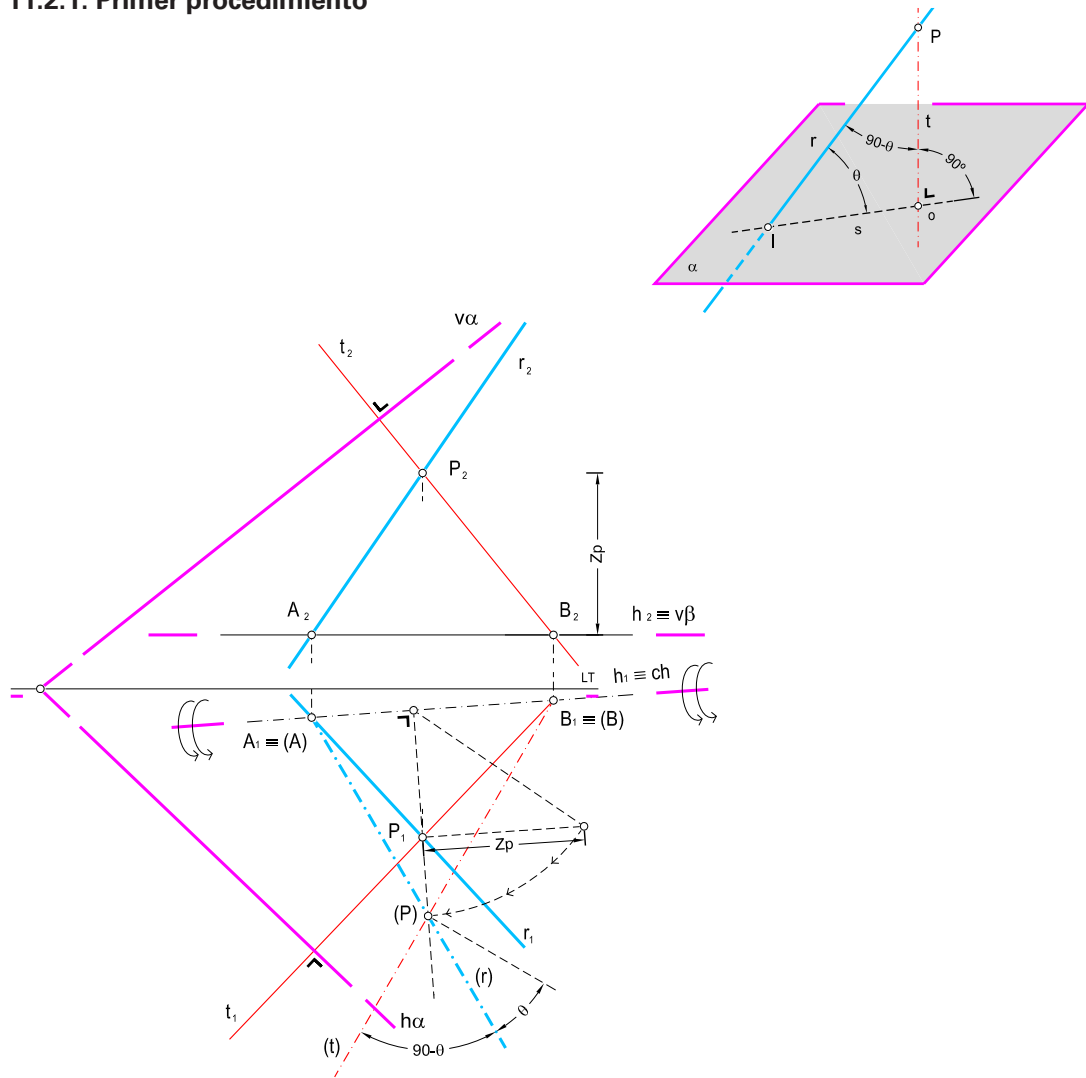


Fig. 11.2.1.

En la perspectiva libre de la fig. 11.2.1, se ha resuelto el problema en el espacio. Dada la recta r y el plano α que se cortan en el punto l , trazamos por un punto P cualquiera de r una perpendicular t a α , cuya intersección con α es el punto O . Se puede observar que el ángulo que forman las rectas r y t es el complementario del ángulo que nos interesa.

En diédrico, se resuelve este procedimiento en la fig. 11.2.1. Sea la recta $r[r_1-r_2]$ y el plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$. Por un punto $P[P_1-P_2]$ de la recta se traza la perpendicular $t[t_1-t_2]$ al plano α . Para hallar el ángulo entre las rectas r y t se cortan con un plano horizontal $\beta[v_\beta]$ obteniendo la horizontal $h[h_1-h_2]$. Si abatimos el triángulo ABP alrededor de la proyección horizontal h_1 , el punto P abatido es (\hat{P}) , el cual, unido con los puntos (A) y (B) del eje de giro, nos da el ángulo entre las rectas r y t . El ángulo complementario al hallado es el ángulo θ , que es el que forman la recta y el plano dados.

11.2.2. Segundo procedimiento

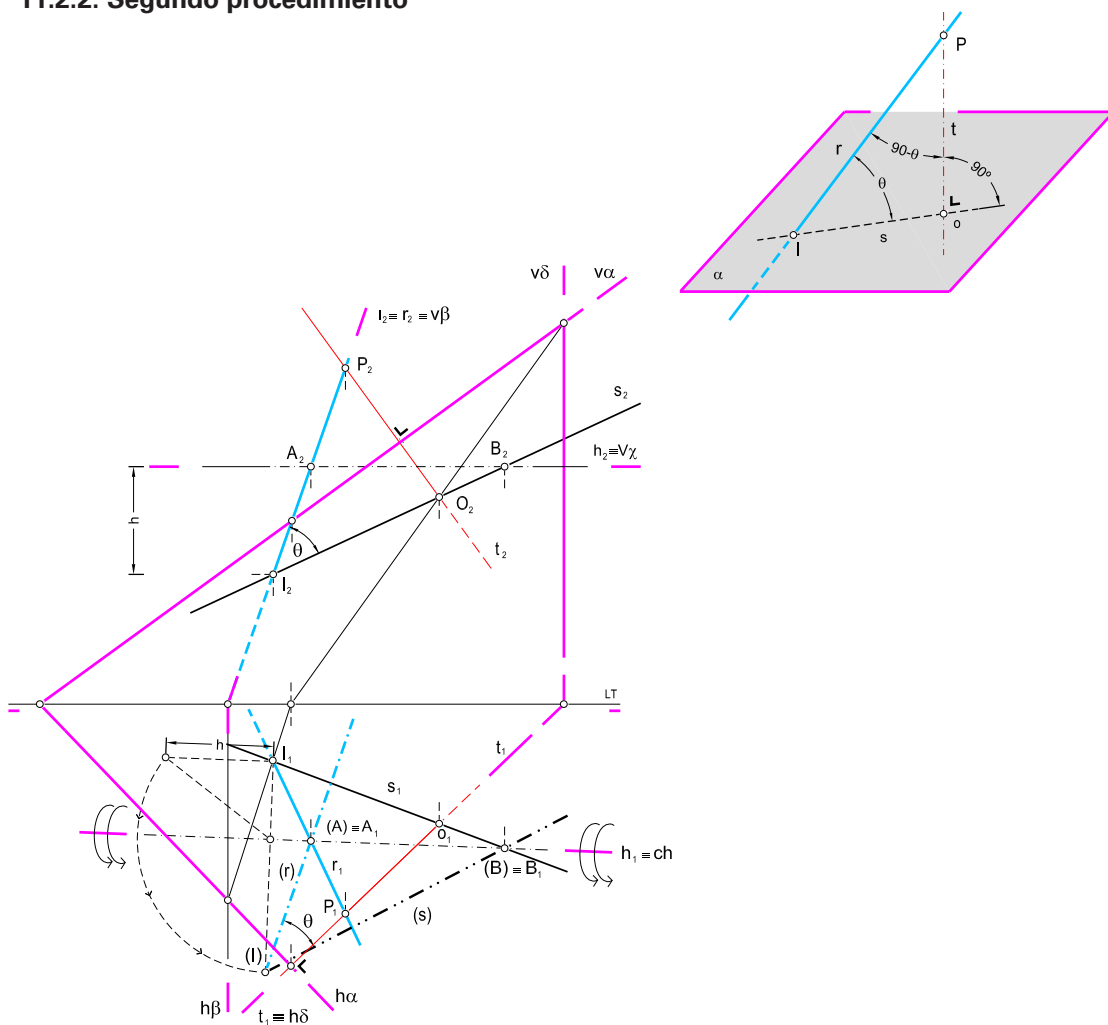


Fig. 11.2.2.



Volviendo al esquema del espacio de la fig. 11.2.2, para hallar en ángulo en posición y magnitud, se determina el punto l de intersección de r y α y el punto de intersección de t y α , punto O . La recta s que une los puntos l y O es la proyección ortogonal de r sobre el plano α , y por lo tanto, el ángulo θ que forman r y s es el ángulo que se pide.

En diédrico, se resuelve este procedimiento en la fig. 11.2.2. Se toma un punto $P[P_1-P_2]$ de la recta r . Por P se traza la perpendicular $t[t_1-t_2]$ al plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$ y se determina el punto $O[O_1-O_2]$ de intersección de t y α con la ayuda del plano proyectante vertical $\delta[h_\delta-v_\delta]$; análogamente se halla el punto intersección $l[l_1-l_2]$ de la recta r con el plano α por medio del plano proyectante vertical $\beta[h_\beta-v_\beta]$. La recta $s[s_1-s_2]$ resulta al unir los puntos l y O . Se halla el ángulo entre las rectas r y s como procede: se corta a las rectas r y s por el plano horizontal $\chi[v_\chi]$ que proporciona la horizontal $h[h_1-h_2]$; se abaten las dos rectas sobre el plano $\chi[v_\chi]$, siendo el eje de giro la proyección horizontal h_1 . El punto l abatido es (l) , que unido con los puntos dobles (A) y (B) nos da las rectas abatidas (r) y (s) . El ángulo que forman estas rectas es el ángulo que, en posición y magnitud, forman la recta r y el plano α .

11.3. RECTAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y FORMAN UN ÁNGULO CON UN PLANO

11.3.1. Plano cualquiera

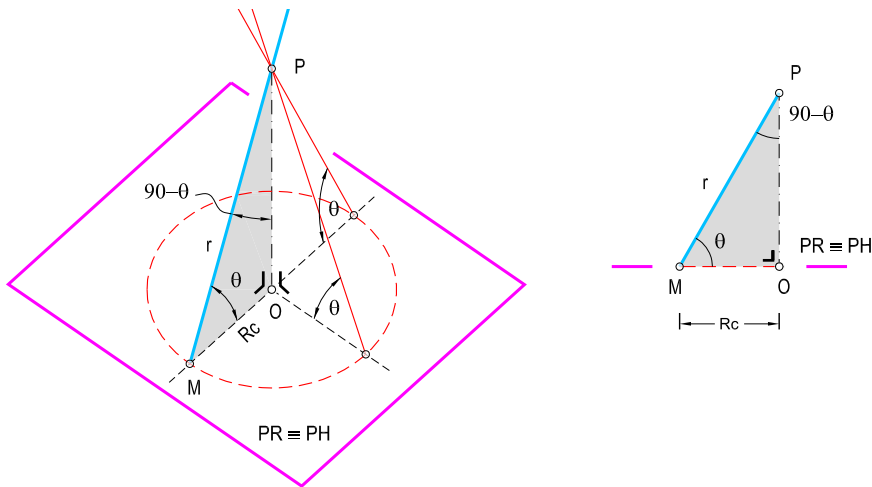


Fig. 11.3.1.

Partiendo de un punto P y un plano α dados (fig. 11.3.1), si construimos un cono de revolución cuyo vértice sea el punto P , su eje sea perpendicular al plano α y sus generatrices formen un ángulo θ con el plano α , el cono que se obtiene es el lugar geométrico de las rectas r que pasan por el punto P y forman un ángulo θ con respecto al plano α .

Se deduce rápidamente que, como el cono de revolución tiene infinitas generatrices, existen infinitas rectas que pasan por el punto P y forman un ángulo θ con el plano α dado.

11.3.2. Plano horizontal de proyección

En la fig. 11.3.2 se han resuelto las construcciones correspondientes en el sistema diédrico, con la consideración de que el plano α sea el PH. En este caso, la construcción del cono de revolución es inmediata, ya que el radio de la base del cono es un cateto del triángulo rectángulo POM , del cual se conoce el ángulo θ y el otro cateto PO , que es la distancia desde P al PH (fig. 11.3.1).

A modo de ejemplo, se plantean cuatro de las infinitas soluciones: las rectas $r[r_1-r_2]$ y $r'[r_1'-r_2']$, contenidas en un plano vertical que pasa por $P[P_1-P_2]$ y es paralelo al PV y las rectas $g[g_1-g_2]$ y $g'[g_1'-g_2']$, ubicadas por delante y por detrás de dicho plano respectivamente.

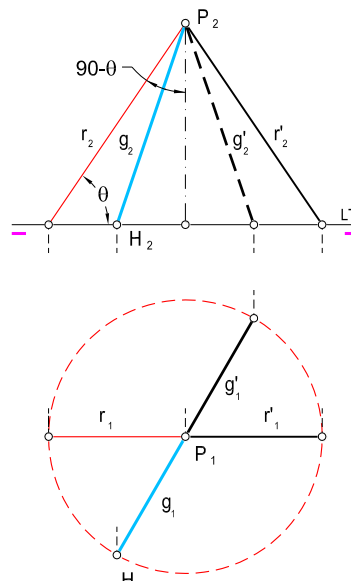


Fig. 11.3.2.

11.4. DETERMINACIÓN DE LA RECTA CONOCIDOS LOS ÁNGULOS CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

Tomamos un punto V_2 del PV cuya proyección horizontal V_1 se encuentre sobre la LT (fig. 11.4.a.). Desde V_2 trazamos $V_2(Hr_1)$ de modo que forme con la LT un ángulo θ_{PH} igual al que ha de formar la recta con el PH. Desde V_2 llevamos un ángulo $(Hr_1)V_2(Hr_2)$ igual al que ha de formar la recta con el PV, ψ_{PV} . Desde (Hr_1) trazamos una perpendicular a $V_2(Hr_2)$ que corta a dicha recta en (Hr_2) . Con centro en V_2 y radio $V_2(Hr_2)$ trazamos un arco de circunferencia hasta cortar a la LT en Hr_2 , que será la proyección vertical de la traza horizontal de la recta; su proyección horizontal ha de encontrarse sobre la línea de referencia trazada por Hr_2 y sobre un arco de circunferencia de centro V_1 y radio $V_1(Hr_1)$. Uniendo las proyecciones horizontales y verticales de las trazas de la recta, obtenemos sus proyecciones r_1 y r_2 .

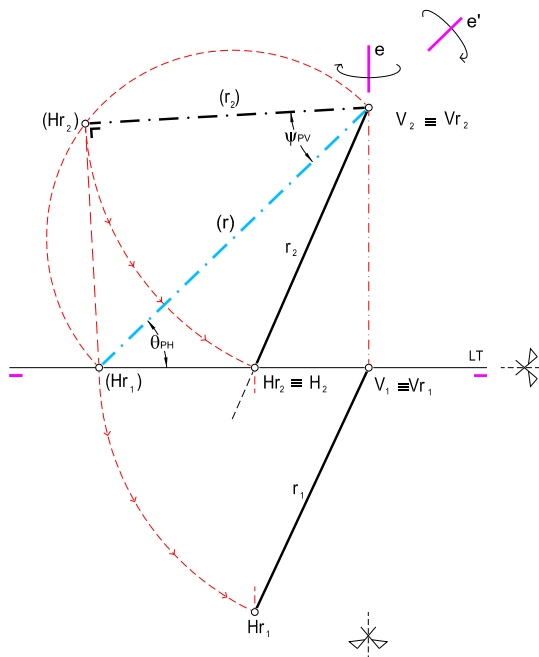


Fig. 11.4.a.

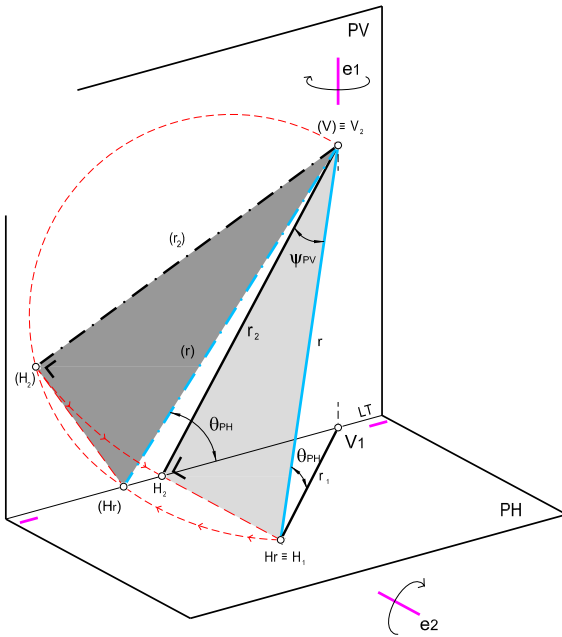


Fig. 11.4.b

Si el problema nos pidiera que la recta pasara por un punto determinado, bastaría con trazar por él una paralela a la recta hallada.

11.5. ÁNGULO DE DOS RECTAS (QUE SE CORTAN O SE CRUZAN)

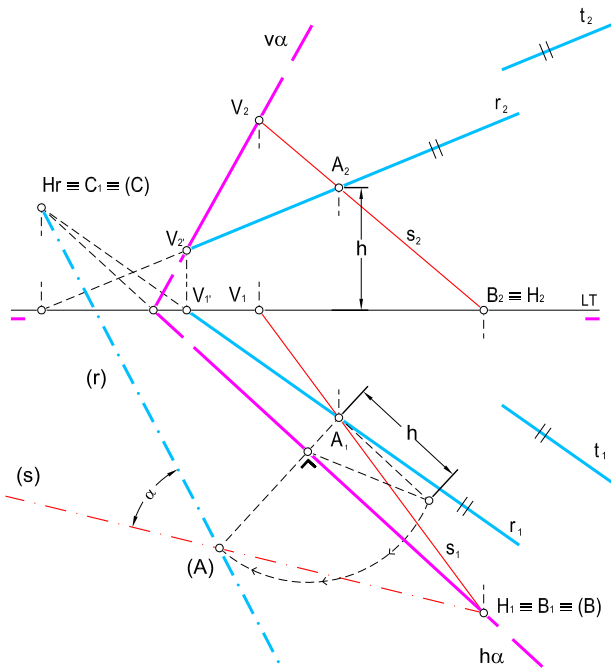


Fig. 11.5.

En la determinación del ángulo que forman dos rectas en el espacio, pueden distinguirse dos casos: que ambas rectas se corten en un punto o bien que ambas rectas se crucen. Este último caso puede reducirse al anterior sin más que trazar por un punto cualquiera de una de las rectas, una paralela a la otra (ver rectas t y r en la fig. 11.5.). El ángulo que formen estas dos será igual al buscado.

Cuando las dos rectas se cortan en un punto, la determinación del valor del ángulo que forman en el espacio se realiza del modo siguiente:

Dadas dos rectas $r[r_1-r_2]$ y $s[s_1-s_2]$ que se cortan en el punto $A[A_1-A_2]$ (fig. 11.5.), las trazas del plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$ que determinan se obtienen uniendo las trazas horizon-

tales y verticales respectivas de las rectas. Abatimos el plano α sobre el PH quedando los abatimientos de las dos rectas, (r) y (s) , determinados. El ángulo formado por ellas aparece en verdadera magnitud en la figura abatida.

Para obtener el ángulo no es necesario determinar las trazas del plano definido por las rectas $r[r_1-r_2]$ y $s[s_1-s_2]$. Se puede simplificar el problema abatiendo el plano alrededor de cualquiera de sus horizontales o frontales para lo cual se abate el punto intersección de ambas rectas.

11.6. ÁNGULOS DE UN PLANO CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

Fig. 11.6.a.

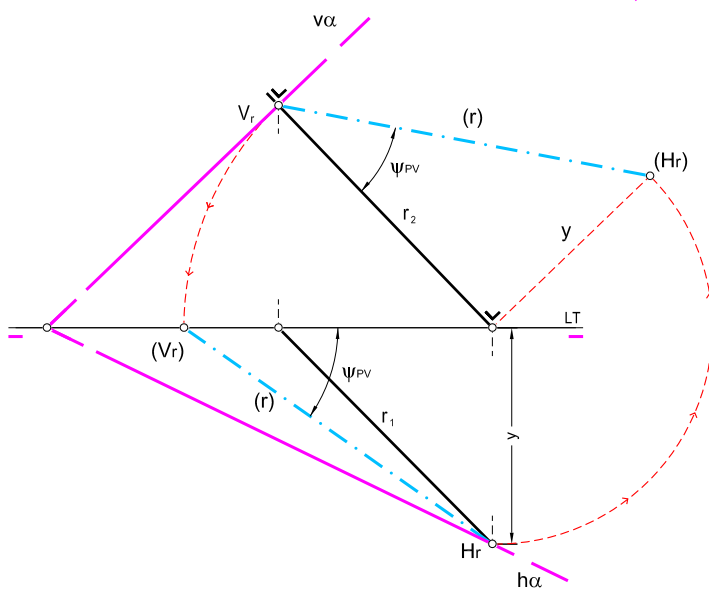
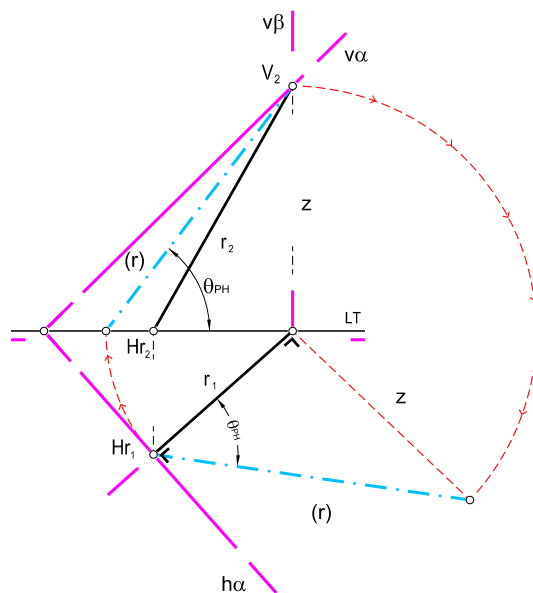


Fig. 11.6.b.



Para hallar el ángulo de un plano oblicuo cualquiera $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$ con el PH se traza un plano vertical perpendicular a h_α por un punto cualquiera; este plano es un plano proyectante horizontal $\beta[h_\beta-v_\beta]$. Se determina la intersección de este plano con el α , resultando la recta $r[r_1-r_2]$, recta de máxima pendiente del plano α . El ángulo θ_{PH} que forma esta recta con el PH es el mismo que forma el plano α con el PH, para lo cual, se abate la recta $r[r_1-r_2]$ sobre el PH o se gira hasta hacerla coincidir con el PV. El procedimiento se puede simplificar omitiendo el plano $\beta[h_\beta-v_\beta]$ y dibujando directamente por un punto cualquiera del plano α una recta de máxima pendiente (fig. 11.6.a).

El ángulo que forma un plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$ con el PV (fig. 11.6.b), se determina de la misma forma: por un punto cualquiera del plano α dado se traza una recta de máxima inclinación. El ángulo ψ_{PV} que forma esta recta con el PV es el mismo que forma el plano α con el PV. Para hallar dicho ángulo en verdadera magnitud, basta con abatir la recta sobre el PV o bien girarla hasta hacerla coincidir con el PH.

11.7. PLANOS QUE PASAN POR UN PUNTO Y FORMAN UN ÁNGULO DADO CON UN PLANO

11.7.1. Con un plano cualquiera

Partiendo de un punto P y un plano π dados (fig. 11.7.1), si construimos un cono de revolución cuyo vértice sea el punto P , su eje sea perpendicular al plano π y sus generatrices formen un ángulo θ con el plano π , el cono que se obtiene es el lugar geométrico de las rectas r de máxima pendiente de los planos α , que pasan por el punto P y forman un ángulo θ con respecto al plano π .

Al igual que antes, como el cono de revolución tiene infinitas generatrices, existen infinitos planos que pasan por el punto P y forman un ángulo θ con el plano π dado.

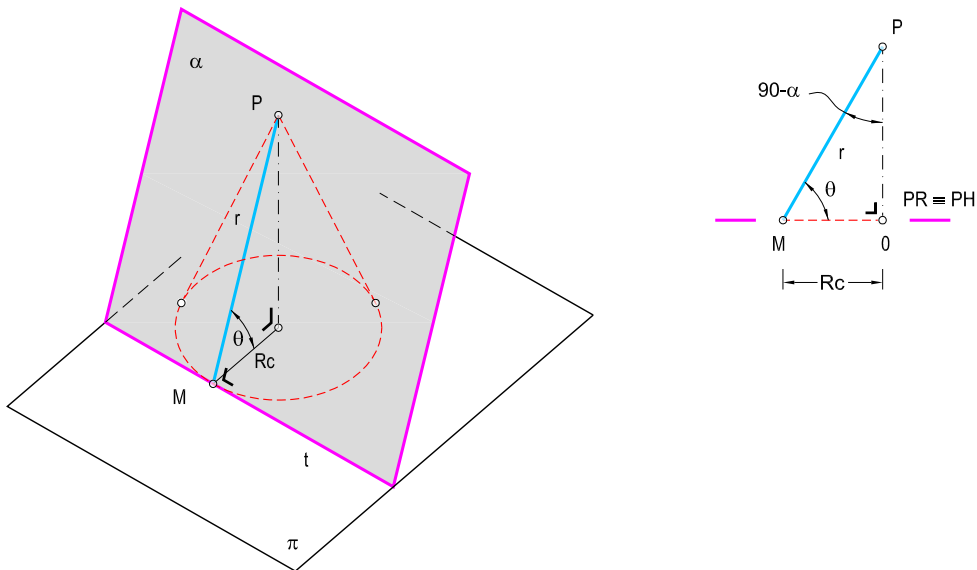


Fig. 11.7.1.

11.7.2. Con el PH

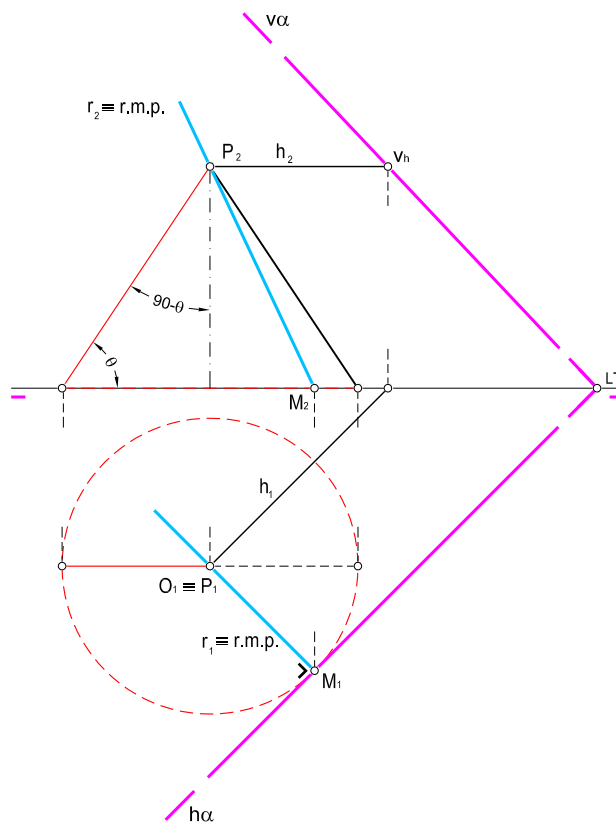


Fig. 11.7.2.

En la fig. 11.7.2 se han resuelto las construcciones correspondientes en el sistema diédrico con la consideración de que el plano π sea el PH.

Construimos el cono de revolución con vértice en el punto P cuyas generatrices formen un ángulo θ con el PH. Si no nos dan ningún dato más, tal y como hemos visto, existen infinitos planos que pasan por el punto P y forman el ángulo θ con el PH.

Consideramos una cualquiera de las rectas de máxima pendiente $r[r_1-r_2]$ del cono construido. Por el punto M_1 (intersección entre r_1 y la base del cono) trazamos la traza horizontal del plano buscado (h_α perpendicular a r_1) y mediante una recta horizontal de plano $h[h_1-h_2]$ hallamos la traza vertical del plano.



11.8. PLANOS QUE PASAN POR UNA RECTA Y FORMAN UN ÁNGULO DADO CON UN PLANO

11.8.1. Con un plano cualquiera

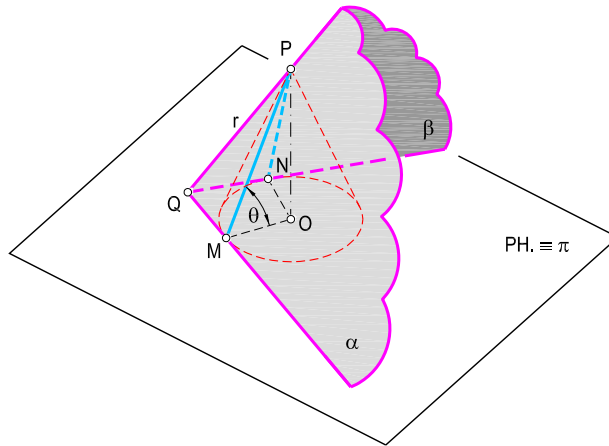


Fig. 11.8.1.

Como aplicación directa de lo anteriormente expuesto se puede trazar por una recta r el plano α que forme un ángulo θ con el plano π (fig. 11.8.1).

Para resolver el problema se construye el cono de revolución con base en el plano π y cuyo vértice es un punto P de la recta r . Trazando desde Q , punto intersección de la recta r con el plano π , la tangente a la base del cono (punto M), el plano que buscamos estará determinado por las rectas $QP \equiv r$ y QM . También es solución el plano definido por las rectas $QP \equiv r$ y QN . El radio de la base del cono es un cateto del triángulo rectángulo POM , del cual se conoce el ángulo θ y el otro cateto PO , que es la distancia desde P al plano π .

Si $OM=OQ$, la tangente por Q a la base del cono es única y hay un solo plano solución. En este caso la recta r es una recta de máxima pendiente del plano obtenido.

11.8.2. Con un PH

En la fig. 11.8.2 se muestran las construcciones realizadas en sistema diédrico para trazar los planos que pasan por la recta dada $r[r_1-r_2]$ y forman un ángulo θ con el PH.

A partir de un punto cualquiera de la recta, en este caso el punto $P[P_1-P_2]$, construimos el cono de revolución cuyas generatrices formen el ángulo θ con el PH. Desde la traza horizontal $H[H_1-$

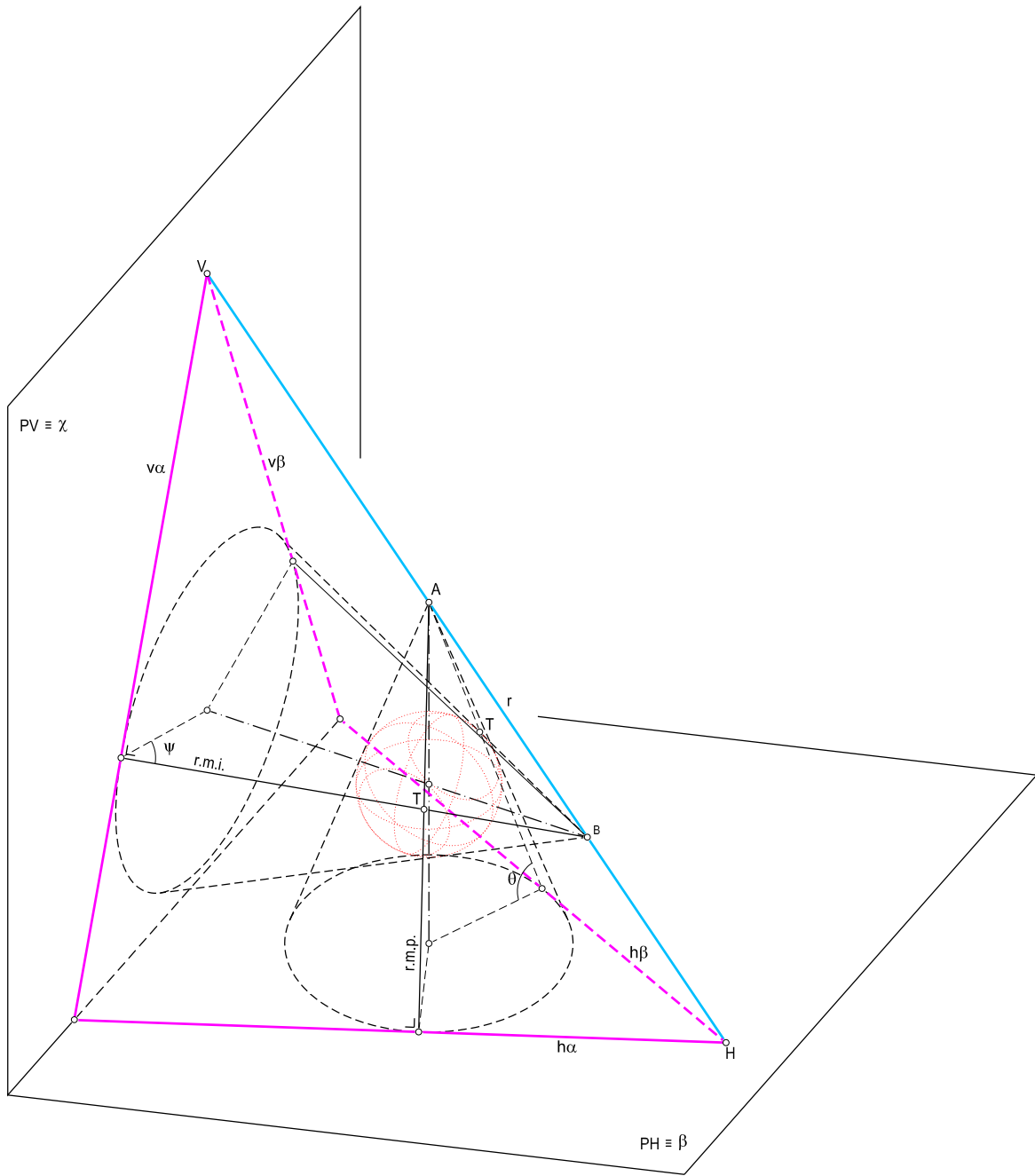


Fig. 11.9.a.

Para ello, se ha construido un cono con el eje en el PV, vértice A_2 y con la base apoyada en el PH (fig. 11.9.b), y otro cono con el eje en el PH, de vértice B_1 y base apoyada en el PV (fig. 11.9.c), de tal forma que las generatrices de ambos conos formen, respectivamente, los ángulos θ y ψ con el PH y PV, siendo ambos conos tangentes a la misma esfera inscrita de centro $A_1 \equiv B_2$.

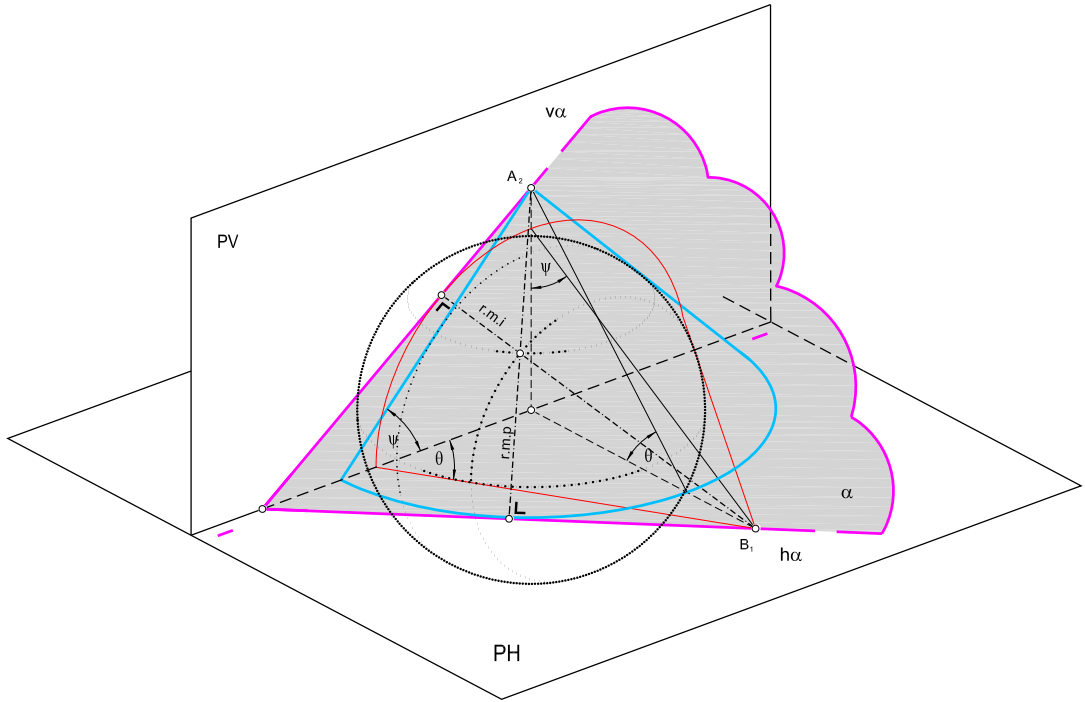


Fig. 11.9.b.

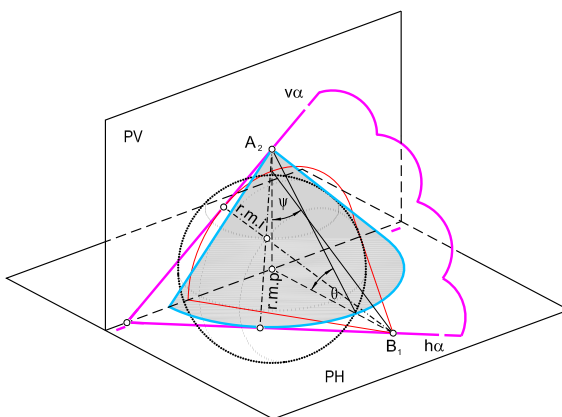


Figura 11.9.c.

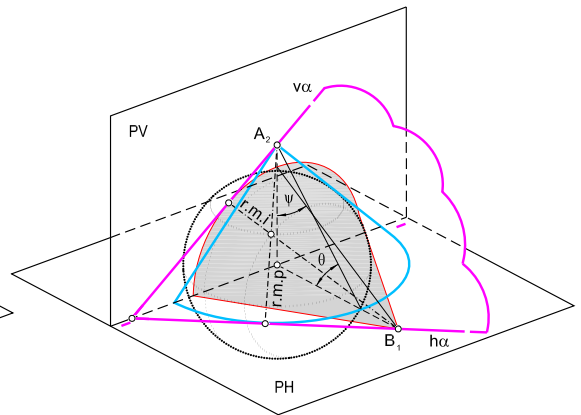


Figura 11.9.d.



La traza h_α pasará por B_1 siendo tangente a la base del cono cuyo vértice es el punto A_2 , mientras que la traza v_α pasará por A_2 y será tangente a la base del cono cuyo vértice es el punto B_1 (Fig. 11.9.a).

En la Fig. 11.9.e. se ha representado en perspectiva, la construcción del plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$, que forma ángulos θ y ψ con el PH y el PV respectivamente.

Sea una circunferencia cualquiera de centro $O \equiv A_1 \equiv B_2$ situada en la LT. Dibujamos la tangente a esta circunferencia por encima de la LT de tal forma que forme con ella un ángulo de 45° ; dicha tangente determina los puntos 1 (intersección con la LT) y A_2 (intersección con la perpendicular a la LT trazada desde O). Con centro en O y radio $O1$ dibujamos la circunferencia C_1 . De forma análoga, trazamos la tangente a la primera circunferencia por debajo de la LT de tal forma que forme con ella un ángulo de 60° ; esta tangente determina los puntos 2 (intersección con la LT) y B_1 (intersección con la perpendicular a la LT trazada desde O). Con centro en O y radio $O2$ dibujamos la circunferencia C_2 .

Las trazas del plano vienen definidas por la tangente a la circunferencia C_1 desde B_1 y la tangente a la circunferencia C_2 desde A_2 .

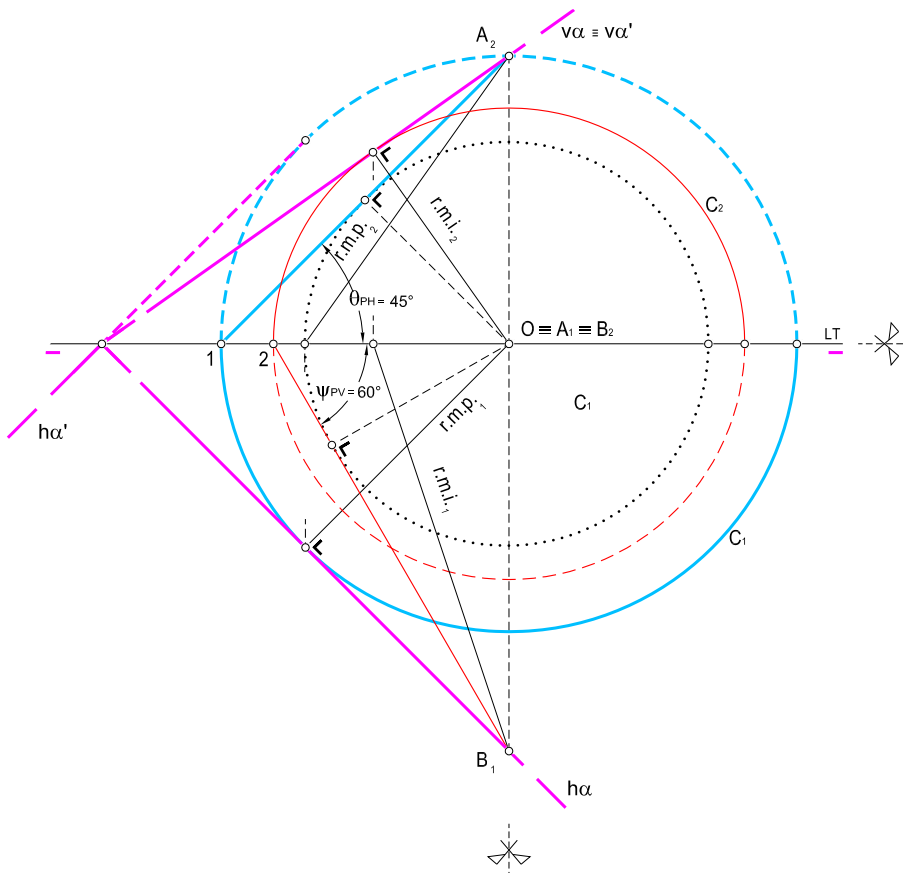


Fig. 11.9.e.

11.10. PLANO CONOCIDO EL ÁNGULO ENTRE TRAZAS Y EL QUE FORMA CON UN PLANO DE PROYECCIÓN

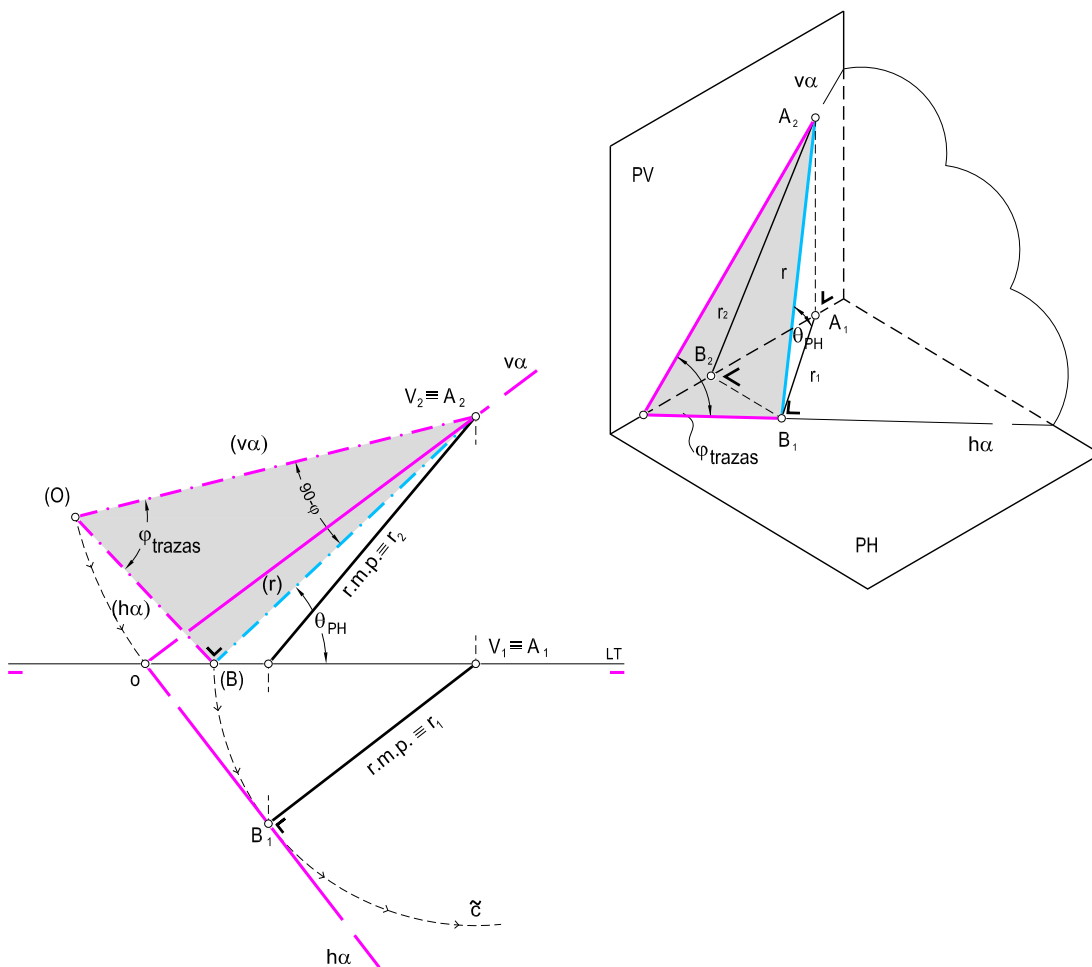


Fig. 11.10.

Los datos de partida para representar el plano son el ángulo entre trazas φ_{TRAZAS} y el ángulo que forma el plano con el PH, θ_{PH} .

Para representar el plano con las condiciones dadas (fig. 11.10), se construye el triángulo rectángulo $A_2(B)(O)$ sabiendo que el cateto $A_2(B)$ tiene que formar con la LT el ángulo θ_{PH} y que el ángulo $(B)(O)A_2$ corresponde con el ángulo entre trazas φ_{TRAZAS} . Con centro en A_2 y radio $A_2(O)$ se traza un arco de circunferencia que corta a la LT en el punto O , desde donde se traza la tangente a la circunferencia de radio $A_1(B)$ y centro A_1 , obteniéndose así la traza horizontal del plano α buscado. La recta B_1A_1 es una recta de máxima pendiente del plano, por lo que su traza vertical pasará por $A_2 \equiv V_2$.



11.11. ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

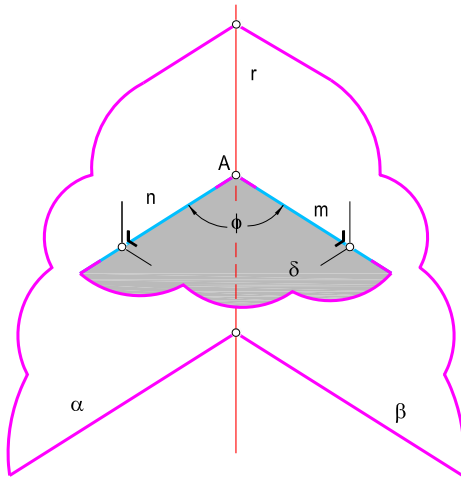


Fig. 11.11.a.

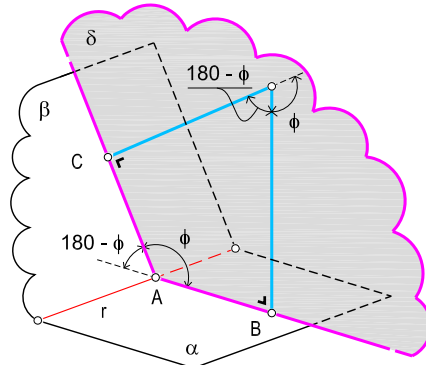


Fig. 11.11.b.

En el espacio (fig. 11.11.a), se halla en primer lugar la intersección r de los dos planos α y β . Tomamos un punto A de ella y por él trazamos el plano δ perpendicular a la intersección r . Este plano corta a los anteriores según dos rectas m y n que se cortan en el punto A . El ángulo de estas dos rectas es el ángulo que forman los dos planos.

Otra forma de resolver el problema es la que se muestra en el espacio en la fig. 11.11.b. En primer lugar se halla la intersección r de los planos α y β . Por un punto cualquiera P que no pertenezca a ninguno de los dos planos se trazan dos rectas perpendiculares a cada uno de ellos, definiéndose sendos puntos de intersección; en este caso, el punto B y el punto C . Las dos rectas definen el plano δ perpendicular a los planos α y β , que corta a la recta intersección r en el punto A . Los puntos A , B y C definen dos rectas cuyo ángulo que forman es el mismo que forman los dos planos dados.

A modo de ejemplo, se representa en sistema diédrico los pasos a seguir en el primero de los dos casos planteados (fig. 11.11.c).

Sean los planos $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$ y $\beta[h_\beta-v_\beta]$. Tomamos un punto $A[A_1-A_2]$ de la recta $r[r_1-r_2]$ intersección de los dos planos dados y se traza por él, el plano $\delta[h_\delta-v_\delta]$ perpendicular a la intersección, para lo que se ha empleado la horizontal de plano $h[h_1-h_2]$. Los planos α y δ se cortan según la recta $n[n_1-n_2]$ que pasa por los puntos $A[A_1-A_2]$ y $B[B_1-B_2]$, mientras que los planos β y δ se cortan según la recta $m[m_1-m_2]$ que pasa por los puntos $A[A_1-A_2]$ y $C[C_1-C_2]$.

Se halla el ángulo que forman las rectas m y n mediante un abatimiento sobre el PH del plano δ . El punto A , abatido, es (A) y éste, unido con B_1 y C_1 (puntos dobles) obtenemos, respectivamente, las rectas m y n abatidas, (m) y (n) . El ángulo que forman estas dos rectas es el ángulo que se buscaba.

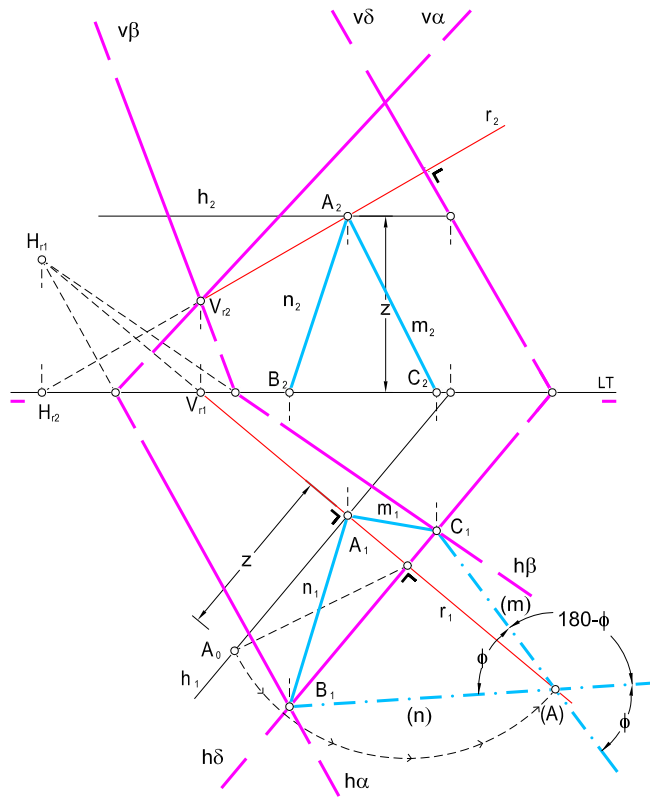


Fig. 11.11.c.

→12



Métodos auxiliares

12.1. CAMBIOS DE PLANO

- 12.1.1. Cambios de plano en un punto
- 12.1.2. Sucesivos cambios de plano
- 12.1.3. Cambios de plano en una recta
- 12.1.4. Cambios de plano en un plano
- 12.1.5. Aplicación de los cambios de plano

12.2. GIROS

- 12.2.1. Giro de un punto mediante un eje vertical
- 12.2.2. Giro de una recta
- 12.2.3. Transformación de una recta cualquiera en una horizontal
- 12.2.4. Transformación de una recta cualquiera en una frontal
- 12.2.5. Transformación de una recta horizontal en una recta de punta (mediante un eje vertical)
- 12.2.6. Transformación de una recta frontal en una recta vertical (mediante un eje de punta)
- 12.2.7. Transformación de una recta cualquiera en una recta de perfil
- 12.2.8. Giro de un plano



12.1. CAMBIOS DE PLANO

Un cambio de plano consiste en adoptar un nuevo plano de proyección, horizontal o vertical, según convenga, de modo que los elementos a proyectar presenten una posición más favorable respecto a los nuevos planos. Esta posición más favorable podrá ser de paralelismo o de perpendicularidad con relación a los planos.

Con este método, los que cambian son los planos de proyección, quedando fijos en el espacio los elementos a proyectar.

Es de hacer notar que los planos se cambian uno por uno y no los dos a la vez. Se cambia, por ejemplo, el PH y se determina la nueva proyección sobre éste, quedando fija la proyección vertical que no cambia; seguidamente, si es necesario, se cambia el PV y se halla la nueva proyección vertical, quedando así definido el nuevo sistema de proyecciones diédricas.

Como es natural, sólo consideraremos los casos en los que los nuevos planos de proyección sean perpendiculares a los planos que se conservan. Así pues, si se cambia el PH, éste debe seguir siendo perpendicular al PV y si se cambia el PV, éste debe seguir siendo perpendicular al nuevo PH elegido.

Si cambiamos el PV por otro PV', la nueva LT se señalará con dos trazos en cada extremo, colocados al lado contrario del que quede el nuevo plano vertical superior. Estas consideraciones son análogas para el caso en que el plano cambiado sea el PH.

12.1.1. Cambios de plano en un punto

CAMBIO DEL PV (fig. 12.1.1.a)

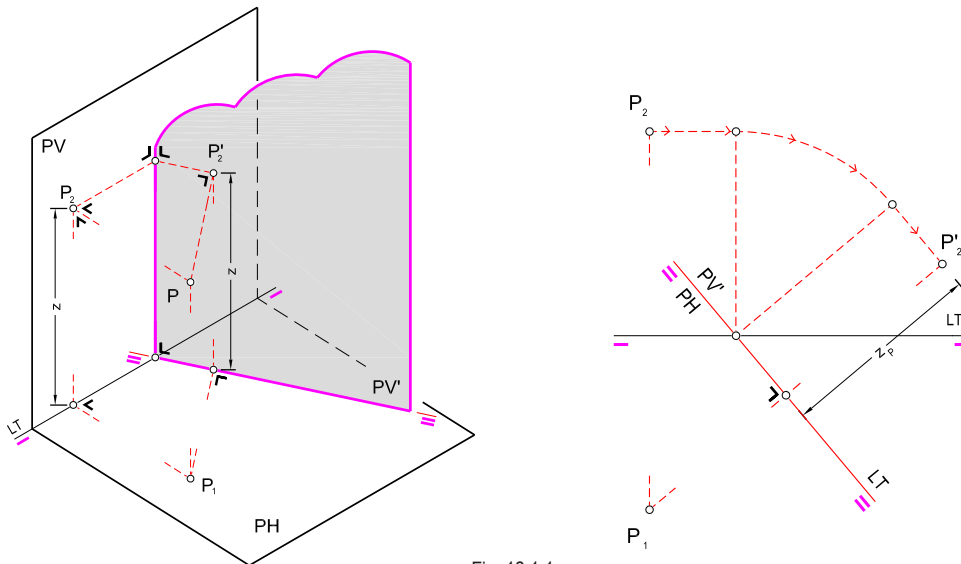


Fig. 12.1.1.a.

En un cambio del PV la proyección P_1 de un punto P no varía; la nueva proyección vertical P_2' del punto se encontrará situada en la perpendicular a la nueva LT trazada por P_1 y su cota o distancia a la nueva LT será la misma que la de la proyección P_2 .

CAMBIO DEL PH (fig. 12.1.1.b)

En un cambio del PH, la proyección vertical A_2 del punto A no cambia y la nueva proyección horizontal del punto estará en la perpendicular a la nueva LT trazado por A_2 , siendo su alejamiento o distancia a la nueva LT el mismo que el de la proyección A_1 .

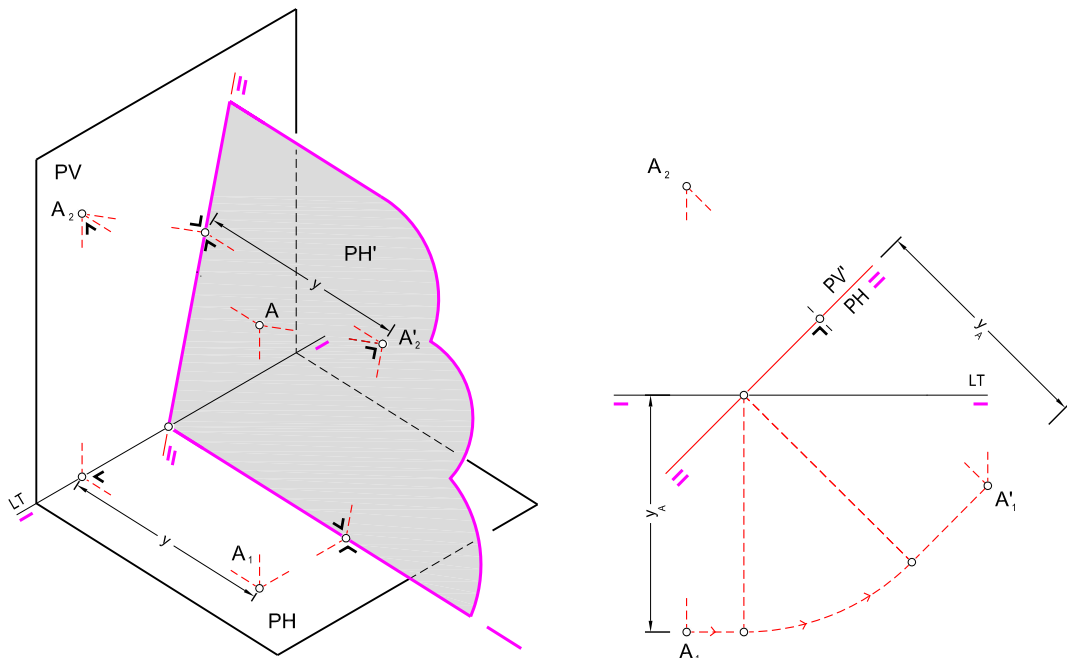


Fig. 12.1.1.b.

12.1.2. Sucesivos cambios de plano

No hay más que aplicar repetidamente lo expuesto anteriormente. De todo lo dicho se deduce que al efectuar un cambio de plano de proyección se conserva la proyección del punto de nombre contrario al plano que se cambia. Para obtener la nueva proyección correspondiente, se traza la perpendicular a la nueva LT por la proyección conservada y se lleva a partir de la nueva LT la cota o alejamiento primitivos según se trate de un cambio de plano vertical u horizontal, respectivamente.

En la fig. 12.1.2 se han efectuado dos cambios de plano sucesivos. Primeramente se ha cambiado el PV (se conserva B_1 y la cota z_b) y después, el P.H (se conserva B_2' y el alejamiento y_b).

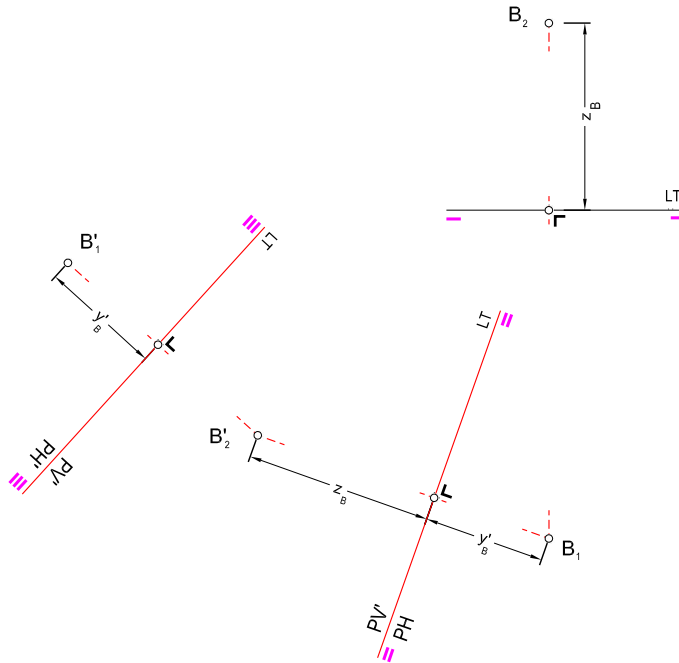


Fig. 12.1.2.

12.1.3. Cambios de plano en una recta

En un cambio de plano de proyección, las nuevas proyecciones de una recta $r[r_1-r_2]$ que venga definida por dos puntos, $r(H,V)$, se obtienen efectuando el cambio correspondiente de dos de sus puntos. En la fig. 12.1.3.a, se ha cambiado el PV, por lo que se conserva la proyección horizontal $r_1(H_1, V_1)$ de la recta y se obtiene como proyección vertical la $r_2'(H_1', V_1')$.

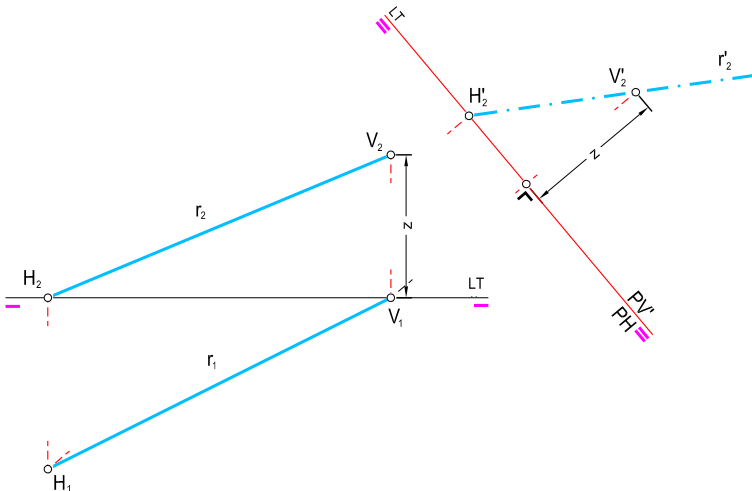


Fig. 12.1.3.a.

Con un cambio de plano, una recta oblicua se puede poner horizontal o frontal, cambiando el PH y el PV respectivamente (fig. 12.1.3.b). Así mismo, independientemente de cual sea el plano de proyección que cambiemos, una recta cualquiera también puede transformarse en una recta de perfil siempre y cuando la nueva LT sea perpendicular a la proyección de la recta que se conserve (fig. 12.1.3.b).

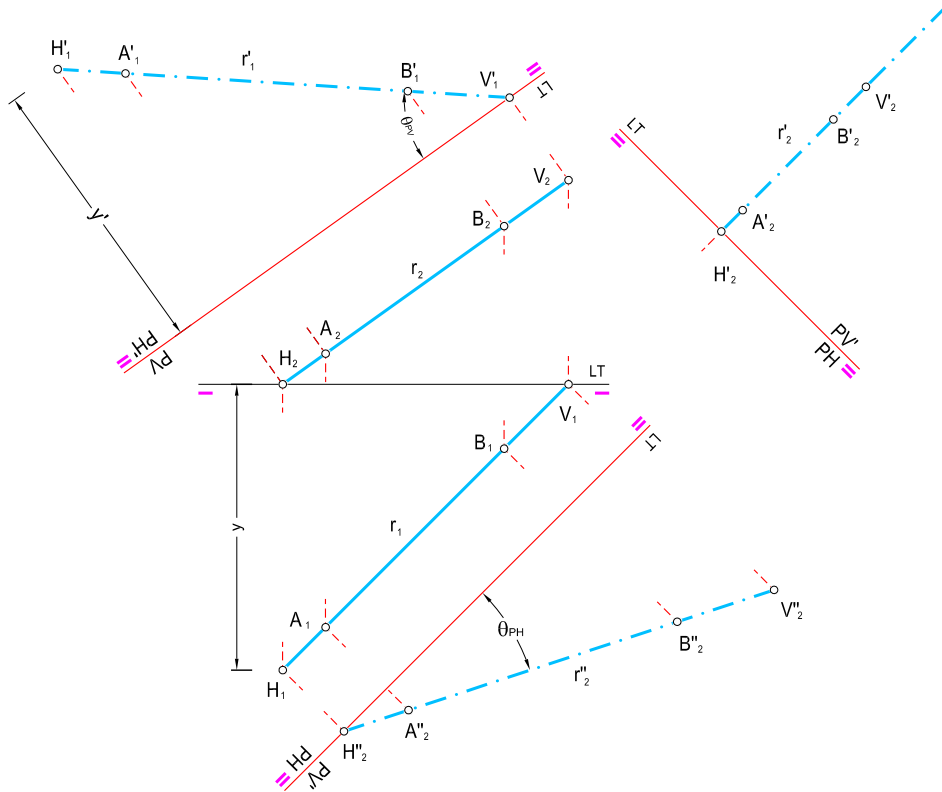


Fig. 12.1.3.b.

12.1.4. Cambios de plano en un plano

Las nuevas trazas de un plano cualquiera tras realizar un cambio de plano de proyección, se podrían obtener cambiando dos rectas del plano, tres puntos, etc. Sin embargo, el procedimiento más sencillo y rápido (fig. 12.1.4.a) consiste en tener en cuenta que el punto $B[B_1-B_2]$ pertenece a las dos trazas antigua v_a y nueva v_a' , con lo que basta considerar la nueva proyección vertical B_2' , que junto con el punto A_1 determina la nueva traza v_a' .

Una de las aplicaciones más útiles de los cambios de plano es la de convertir un plano cualquiera en un plano proyectante.

Si el plano ha de quedar de canto, se cambia el PV de modo que sea perpendicular al plano dado, con lo cual su traza horizontal no cambia, pero después del cambio quedará perpendicular a la nueva LT (fig. 12.1.4.a). Si el plano ha de quedar vertical, se cambia el PH, de modo

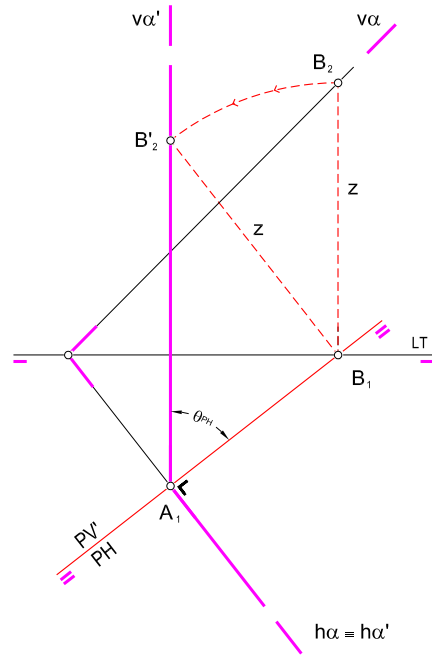
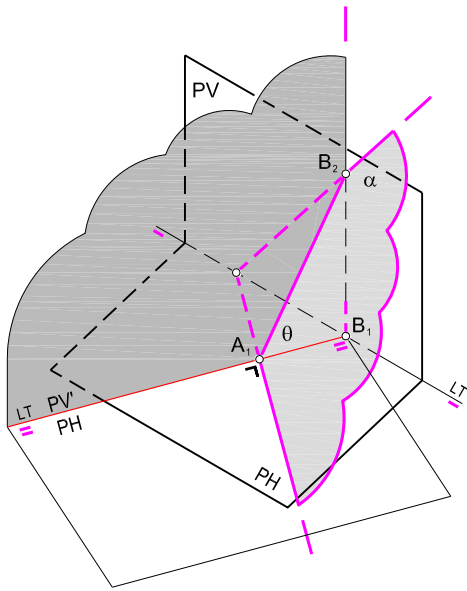


Fig. 12.1.4.a.

que sea perpendicular al plano dado, con lo cual su traza vertical no cambia, pero después del cambio quedará perpendicular a la nueva LT (fig. 12.1.4.b).

Por lo tanto, en ambos casos, se tomará una nueva LT perpendicular a la traza que no varía y se hará el cambio de plano sobre el cual se encuentra la otra traza.

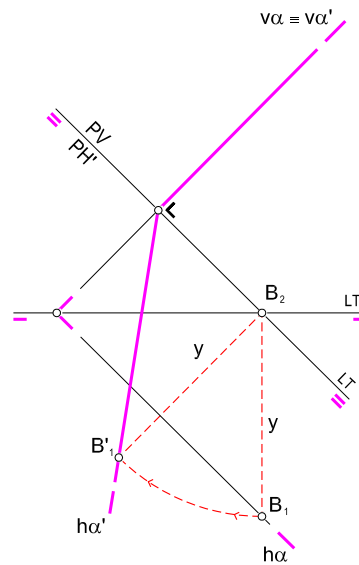


Fig. 12.1.4.b.

12.1.5. Aplicación de los cambios de plano

TRANSFORMACIÓN DE UNA RECTA CUALQUIERA EN UNA RECTA VERTICAL (fig. 12.1.5.a)

Dada una recta cualquiera $r[r_1-r_2]$, mediante un cambio de PV se transforma en una recta frontal $r[r_1-r_2']$ colocando la nueva LT paralela a r_1 . A continuación, mediante un cambio de PH', y al situarlo en posición perpendicular a la proyección vertical de la nueva recta frontal, la recta ya queda en posición vertical $r[H_1' \equiv r_1'-r_2']$.

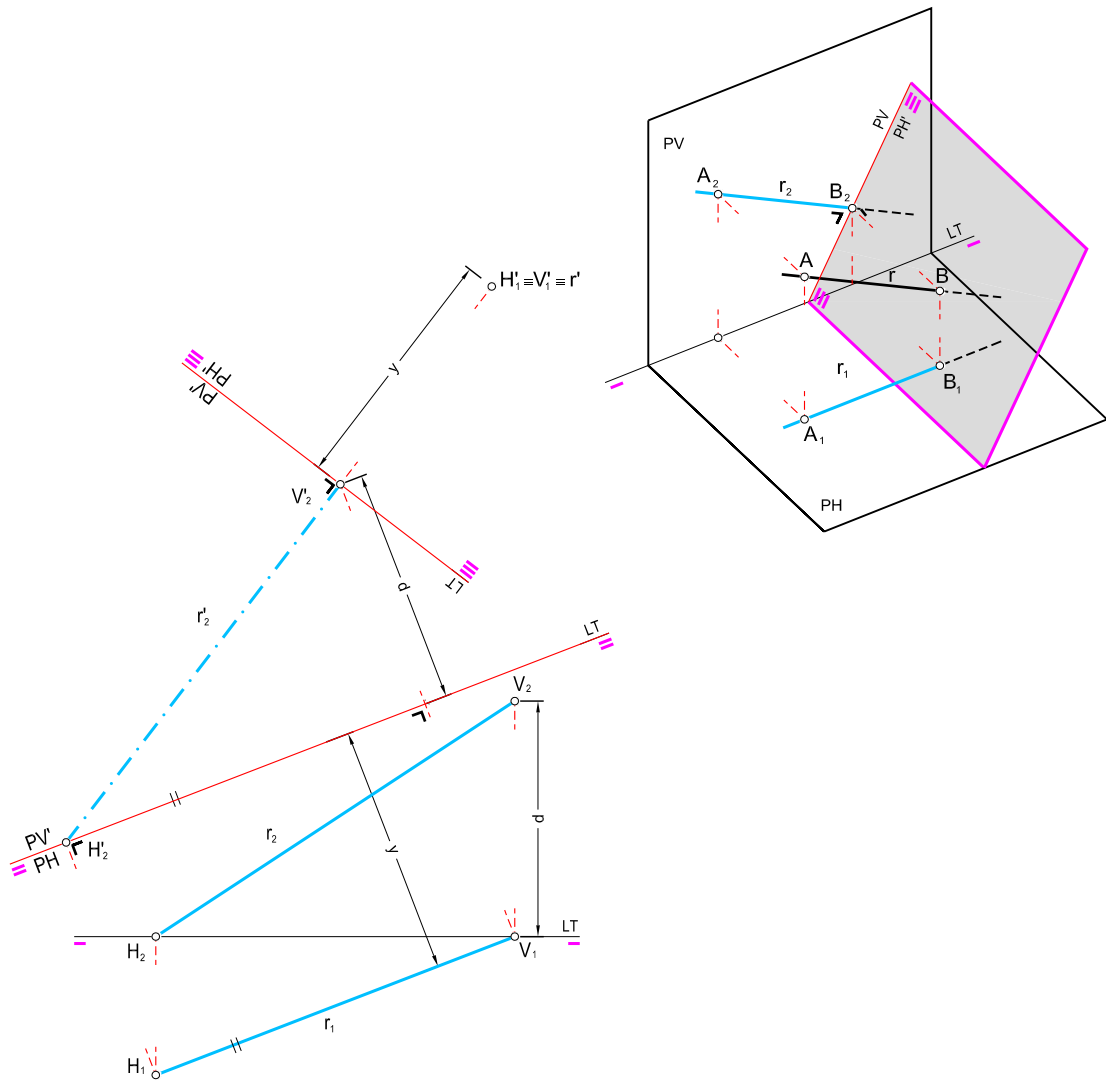


Fig. 12.1.5.a.



TRANSFORMACIÓN DE UNA RECTA CUALQUIERA EN UNA RECTA DE PUNTA (fig. 12.1.5.b)

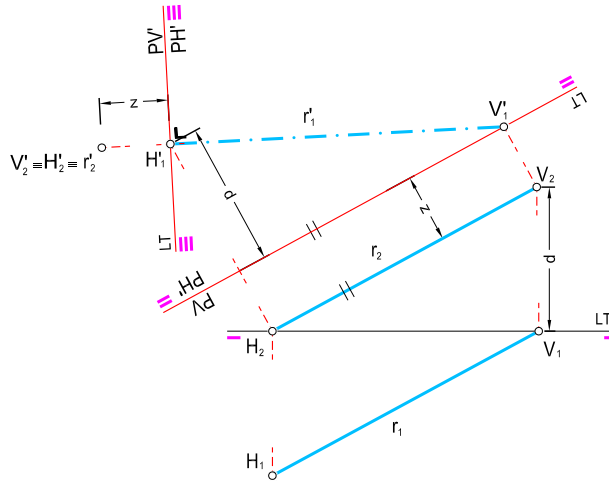


Fig. 12.1.5.b

Este caso es análogo al anterior. Dada una recta cualquiera $r[r_1-r_2]$, por un primer cambio de PH se transforma en una recta horizontal $r[r_1'-r_2']$ (colocamos la nueva LT paralela a r_2). A continuación cambiamos el PV, y al situarlo en posición perpendicular a la proyección horizontal de la nueva recta horizontal, la recta ya queda la recta en posición de punta $r[r_1'-r_2' \equiv V_2']$.

MÍNIMA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

Tal y como se explicó en el apartado 5.7. (recta perpendicular a otras dos cuando una de ellas es vertical o de punta), la mínima distancia entre dos rectas que se cruzan cuando una de ellas es perpendicular a uno de los planos de proyección, se proyecta sobre ese plano en verdadera magnitud y perpendicularmente a la proyección de la otra recta.

Así pues, si tenemos dos rectas cualquiera, $r[r_1-r_2]$ y $s[s_1-s_2]$, que se cruzan en el espacio (fig. 12.1.5.c), bastará con colocar una de ellas perpendicular a uno de los planos de proyección mediante sucesivos cambios de plano. Mediante un cambio del PV situamos la recta $s[s_1-s_2']$ en posición frontal para situarla, seguidamente y mediante otro cambio del PH, en posición vertical, $s[s_1'-s_2']$. La mínima distancia entre las dos rectas dadas es la perpendicular a r_1' trazada desde s_1' .



12.2. GIROS

Los giros permiten colocar puntos, rectas, planos y cuerpos en una posición más favorable, respecto a los planos de proyección, que la posición inicial.

La diferencia fundamental de los giros con relación a los cambios de planos es que en los giros los que cambian son los elementos a proyectar, permaneciendo fijos los planos de proyección.

En general, al hablar de giros, se considera el giro circular. Los giros se hacen tomando como ejes de giro o de rotación, rectas perpendiculares a los planos de proyección. Según esto, cada punto del elemento que gira describe una circunferencia que está en un plano perpendicular al eje de giro y cuyo centro está en la intersección del eje con el plano de la circunferencia, siendo, pues, el radio la distancia del punto al eje.

En los problemas de giros, lo primero que se ha de hacer es elegir el eje de giro apropiado para conseguir el resultado que se busca. Si se estudia el espacio detenidamente, se puede ver que con un eje de giro vertical una recta oblicua se puede colocar frontal y, si el eje es perpendicular al PV, una recta oblicua se consigue poner horizontal de plano.

12.2.1. Giro de un punto mediante un eje vertical

Sea $P[P_1-P_2]$ el punto dado y $e[e_1-e_2]$ el eje de giro vertical. El punto describirá en el espacio un arco de circunferencia, de centro $M[M_1-M_2]$, contenida en el plano horizontal $\alpha[v_\alpha]$, (fig. 12.2.1.a), por lo cual se proyectará horizontalmente según otra circunferencia del mismo radio y centro M_1 , intersección del eje con el PH, y verticalmente sobre una recta paralela a la LT que es la traza vertical del plano α , sobre la cual se mueve el punto P en su giro.

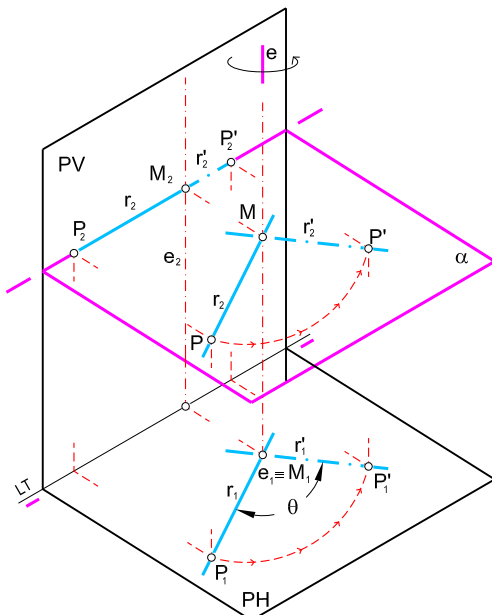


Fig. 12.2.1.a.

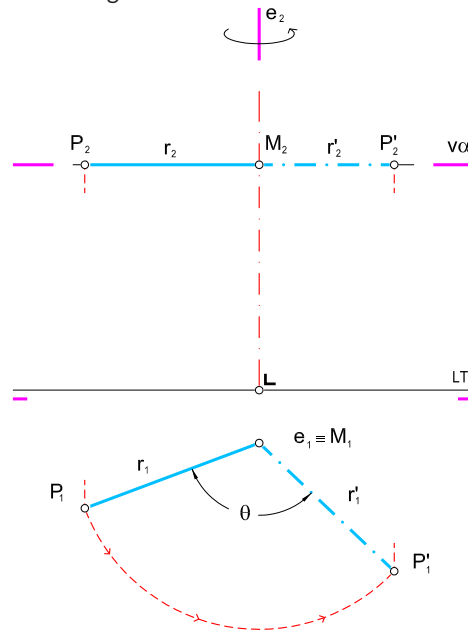


Fig. 12.2.1.b.

En proyección diédrica (fig. 12.2.1.b), bastará, pues, girar la proyección horizontal P_1 el ángulo θ deseado, alrededor de la traza del eje de giro y trasladar la proyección vertical P_2 paralelamente a la LT para así obtener en P' [$P_1'-P_2'$] las nuevas proyecciones del punto dado.

De manera análoga se operaría en el caso de ser el eje de giro una recta de punta.

12.2.2. Giro de una recta

Al girar una recta $r[r_1-r_2]$ un ángulo θ alrededor de un eje $e[e_1-e_2]$, puede suceder que la recta corte al eje o que la recta se cruce con el eje, es decir, que no lo corte.

Si la recta corta al eje de giro (fig. 12.2.2.a), el punto de intersección $I[I_1-I_2]$ permanecerá invariable, por lo que bastará girar otro punto cualquiera $B[B_1-B_2]$ de la recta y unirlo con el anterior.

En el caso más general de cruzarse con el eje, el procedimiento consistirá en girar dos puntos cualesquiera y unirlos una vez girados, con lo que se obtendrá la recta en su nueva posición. No obstante, el problema se simplifica si giramos el punto perteneciente a la recta que esté más próximo al eje, cuyo radio de giro medirá la mínima distancia entre las dos rectas, y que por ser el eje vertical (fig. 12.2.2.b) se proyectará según P_1O_1, P_2O_2 . Como esta mínima distancia per-

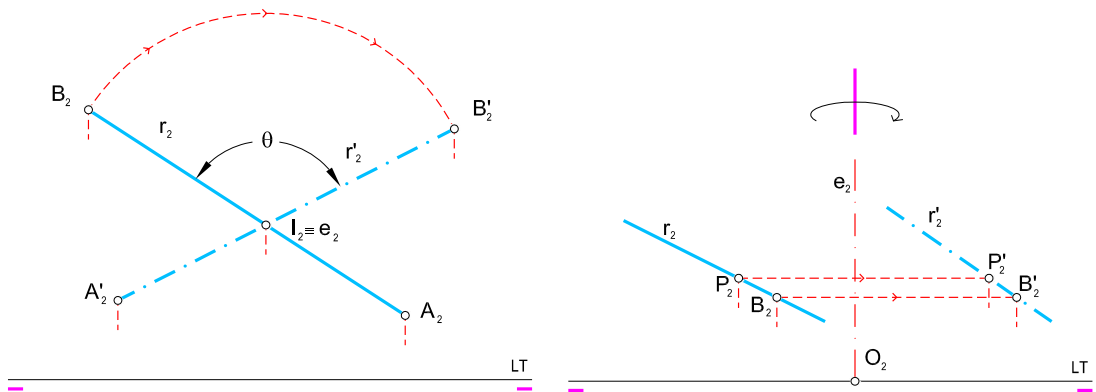


Fig. 12.2.2.a.

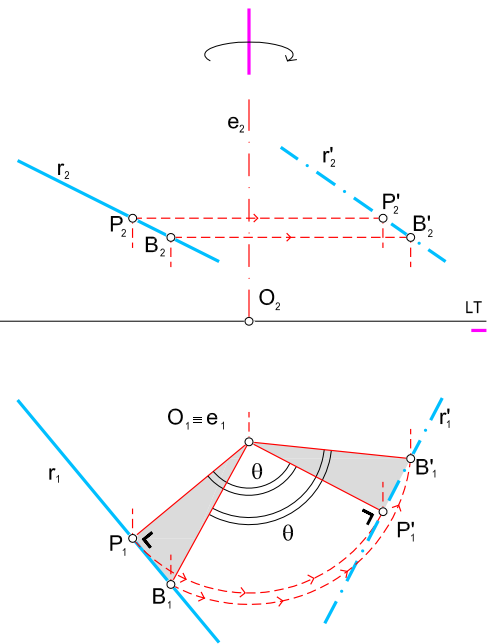


Fig. 12.2.2.b.



manece invariable durante el giro y dado que la proyección horizontal de la recta durante el giro siempre será tangente a la circunferencia descrita por P_1 , bastará describir un arco de centro O_1 y radio P_1O_1 y tomar sobre él un arco de ángulo θ , que nos determinará el punto P_1' . Por dicho punto, trazaremos una perpendicular al radio O_1P_1' para obtener la proyección horizontal r_1' de la recta después del giro. Para completar la proyección vertical de dicha recta, de la cual sólo conocemos el punto P_2' , tomaremos otro punto $B[B_1-B_2]$ cualquiera de ella y describiremos el arco de centro O_1 y radio O_1B_1 hasta cortar a r_1' en B_1' . Por B_2 trazaremos una paralela a la LT y refiriendo B_1' obtendremos la nueva proyección vertical B_2' del punto B. La recta girada quedará así determinada en ambas proyecciones.

12.2.3. Transformación de una recta cualquiera en una horizontal

Sea una recta cualquiera $r[r_1-r_2]$ cuyo giro vamos a efectuar alrededor de un eje de punta $e[e_1-e_2]$ para transformarla en una recta horizontal.

QUE EL EJE DE GIRO CORTE A LA RECTA QUE EL EJE DE GIRO NO CORTE CON LA RECTA

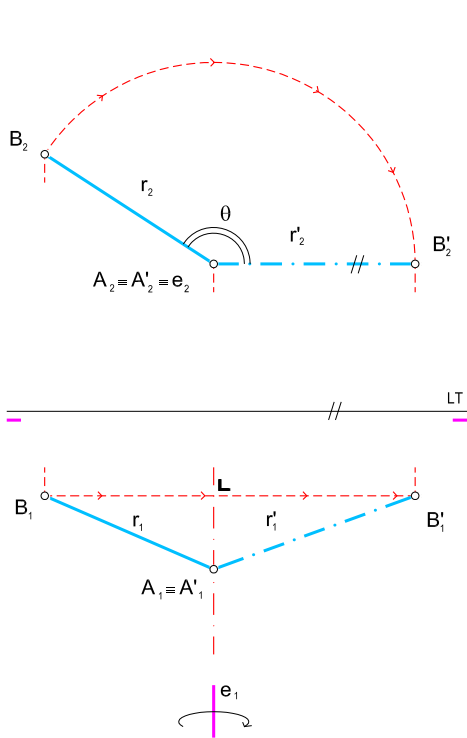


Fig. 12.2.3.a.

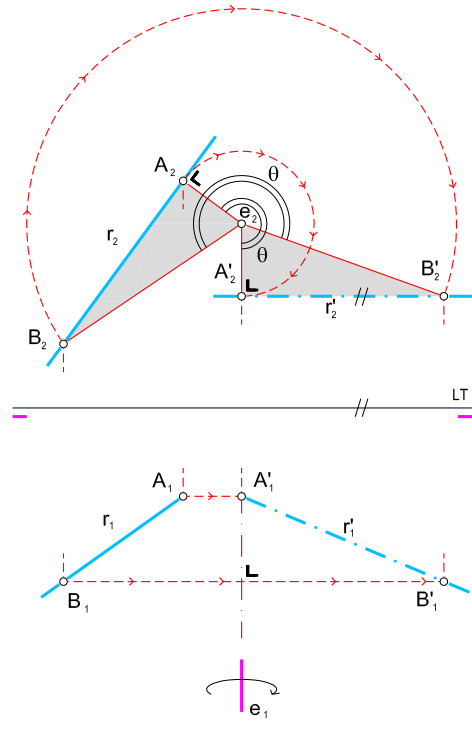


Fig. 12.2.3.b.

Si el eje de giro corta a la recta en el punto $A[A_1-A_2]$ (fig. 12.2.3.a), bastará con girar un segundo punto de la recta, el $B[B_1-B_2]$, un ángulo θ hasta que la proyección vertical de la recta quede paralela a la LT; trasladando en proyección horizontal la proyección B_1 hasta que corresponda con B_2' , obtendremos la nueva proyección B_1' y quedarán determinadas las nuevas proyecciones de la recta.

En el caso en que el eje de giro no corte a la recta (fig. 12.2.3.b), giraremos la proyección vertical de recta a partir del punto más cercano al eje de giro, el punto $A[A_1-A_2]$, un ángulo θ hasta que quede paralela a la LT. Obtenida la nueva proyección vertical de la recta r_2' , para completar la nueva proyección horizontal, de la cual sólo se conoce el punto A_1' , tomaremos otro punto $B[B_1-B_2]$ cualquiera de la recta inicial, y lo giraremos en mismo ángulo θ con el que se ha girado la proyección vertical inicial; de esta forma obtendremos el punto B_1' , que junto con el A_1' , define la nueva proyección horizontal de la recta.

12.2.4. Transformación de una recta cualquiera en una frontal

Es un caso análogo al anteriormente descrito de situar una recta cualquiera en posición horizontal. En este caso, el eje de giro con el que se trabaja deberá ser un eje vertical. En la fig. 12.2.4.a se muestra el caso en que el eje de giro corte a la recta, mientras que en la fig. 12.2.4.b se representa el caso en que el eje de giro no corte con la recta.

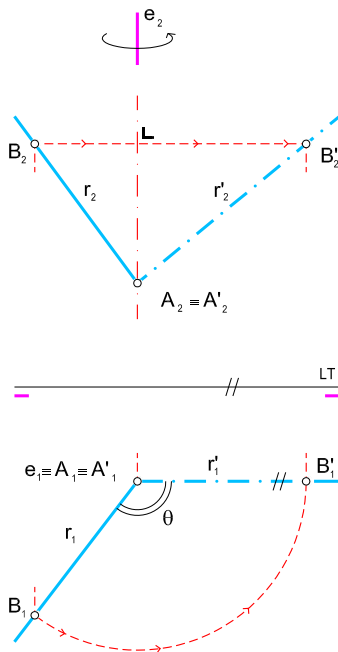


Fig. 12.2.4.a.

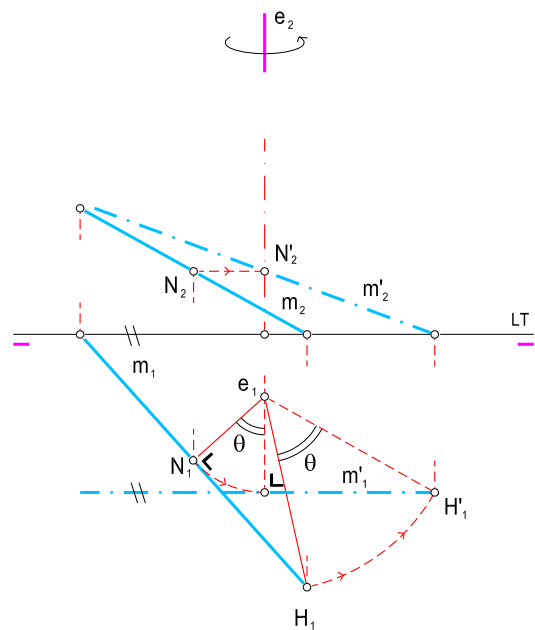


Fig. 12.2.4.b.

12.2.5. Transformación de una recta horizontal en una recta de punta (mediante un eje vertical)

Para transformar una recta horizontal en una recta de punta mediante un giro utilizaremos un eje $e[e_1-e_2]$ perpendicular al PH (fig. 12.2.5). Giramos la recta $r[r_1-r_2]$ a partir del punto $A[A_1-A_2]$, punto más cercano al eje de giro, un ángulo θ hasta que la proyección horizontal de la recta quede perpendicular a la LT, y trasladamos la proyección vertical del punto A hasta que corresponda con la horizontal. De esta manera quedan determinadas las nuevas proyecciones de la recta.

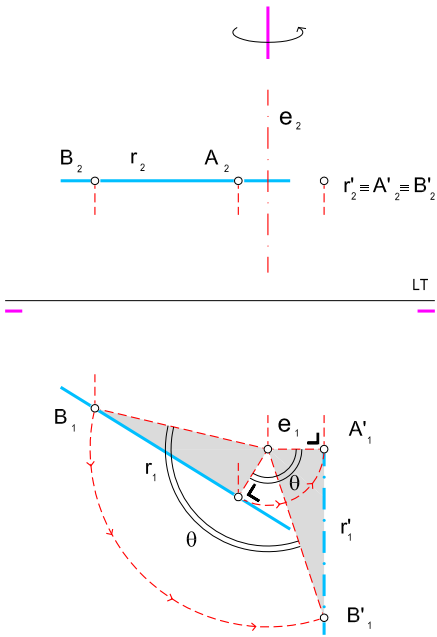


Fig. 12.2.5.

12.2.6. Transformación de una recta frontal en una recta vertical (mediante un eje de punta)

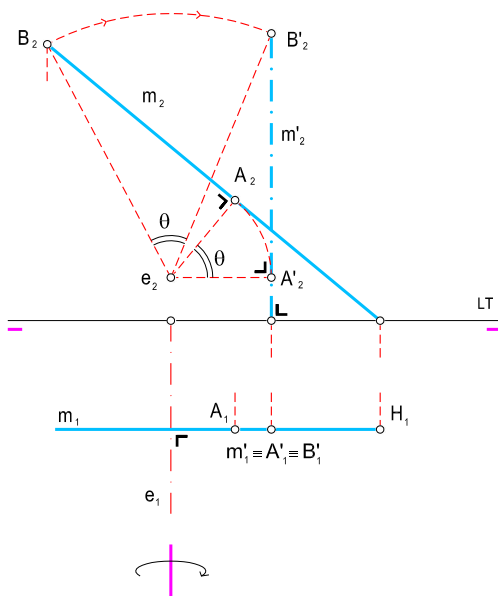


Fig. 12.2.6.

Si la recta dada fuera una recta cualquiera, para transformarla en una recta de punta se necesitaría efectuar dos giros. El primero, alrededor de un eje de punta, la convertiría en una recta horizontal, y el segundo giro, siguiendo los pasos explicados anteriormente, la convertiría en una recta de punta.

En este caso, para transformar una recta frontal en una recta vertical se utiliza un eje $e[e_1-e_2]$ perpendicular al PV (fig. 12.2.5). De forma análoga al caso anterior, giramos la recta $m[m_1-m_2]$ a partir del punto $A[A_1-A_2]$, punto más cercano al eje de giro, un ángulo θ hasta que la proyección vertical de la recta quede perpendicular a la LT, y trasladamos la proyección horizontal del punto A hasta que corresponda con la vertical. La recta girada quedará así determinada en ambas proyecciones.

Si la recta dada fuera una recta cualquiera, para transformarla en una recta vertical se necesitaría efectuar dos giros. Por el primero colocaríamos la recta en posición frontal, y por medio de un segundo giro, tal y como se acaba de explicar, la situaríamos en la posición deseada.

12.2.7. Transformación de una recta cualquiera en una recta de perfil

Basta un solo giro alrededor de un eje vertical o de punta. En la fig. 12.2.6 se ha elegido el eje vertical $e[e_1-e_2]$ y se ha girado la proyección horizontal hasta quedar perpendicular a la LT. Los dos puntos $V[V_1-V_2]$ y $H[H_1-H_2]$ de la recta primitiva determinan en sus nuevas posiciones $V'[V'_1-V'_2]$ y $H'[H'_1-H'_2]$ la nueva recta.

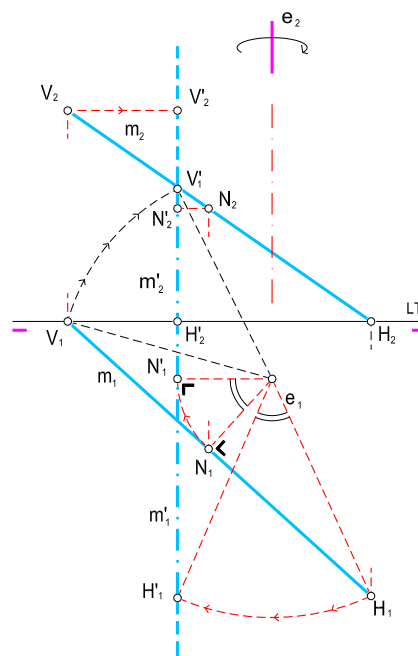


Fig. 12.2.7.

12.2.8. Giro de un plano

Para girar un plano, bastará girar los elementos determinativos del mismo cualesquiera que sean, pero se verifica con preferencia el giro de la traza horizontal o el de la vertical, y de una recta de máxima pendiente o de máxima inclinación respectivamente; se toma una recta de máxima pendiente cuando el eje sea vertical, y una de máxima inclinación cuando el eje sea de punta.

TRANSFORMACIÓN DE UN PLANO CUALQUIERA MEDIANTE UN GIRO DE 90°

En la fig. 12.2.8.a se tiene un plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$ y vamos a girarlo alrededor del eje vertical $e[e_1-e_2]$, un ángulo de 90°. Se determina primero el punto $A[A_1-A_2]$ de intersección del eje con el plano; en la figura se ha obtenido este punto con la ayuda de la recta de máxima pendiente $m[m_1-m_2]$, (que es la recta que utilizaremos al ser el eje vertical para girar el plano). Este punto $A[A_1-A_2]$ permanece fijo en el giro por pertenecer eje de giro. Se gira la traza horizontal h_α del plano, que seguirá siendo traza horizontal después de realizar el giro; para ello, giramos la recta de máxima pendiente a partir de e_1 un ángulo de 90°, quedando definida la nueva traza horizontal del plano h'_α , ya que después del giro, continuará siendo perpendicular a la proyección horizontal de la nueva recta de máxima pendiente girada $m'[m'_1-m'_2]$.

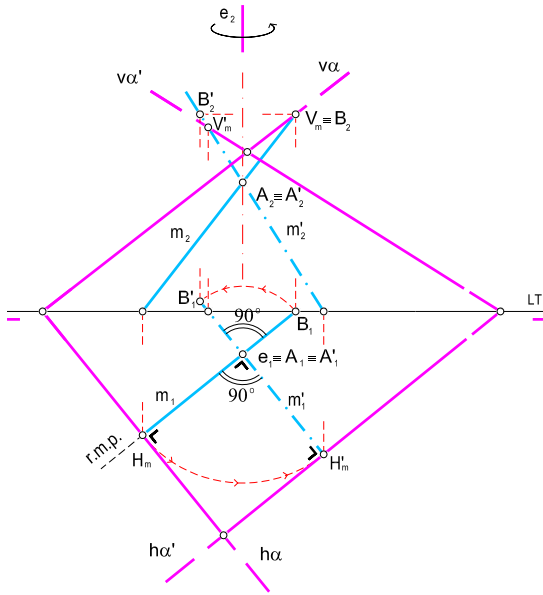


Fig. 12.2.8.a.

El plano girado α' [$h_{\alpha}'-v_{\alpha}'$] ya queda definido, pues conocemos su traza horizontal h_{α}' y sabemos que el punto $A[A_1-A_2] \equiv A'[A_1'-A_2']$ está contenido en él; dibujando la proyección vertical de la recta de máxima pendiente girada, m_2' , hallaremos la nueva traza vertical V_m' , quedando definida la traza vertical del plano girado v_{α}' .

Obsérvese que en el giro, la traza vertical de la recta no se conserva. El punto intersección de la recta girada con el PV, V_m' , es distinto al punto intersección de la recta inicial con el PV, V_m ; esto se puede apreciar fácilmente viendo que las dos trazas tienen diferente cota: $z_{vm} \neq z_{vm'}$. Si tratamos la traza V_m de la recta como un punto, punto $B[B_1-B_2]$, vemos que después del giro, la proyección vertical del mismo, B_2' , sí que tiene la misma cota que B_2 .

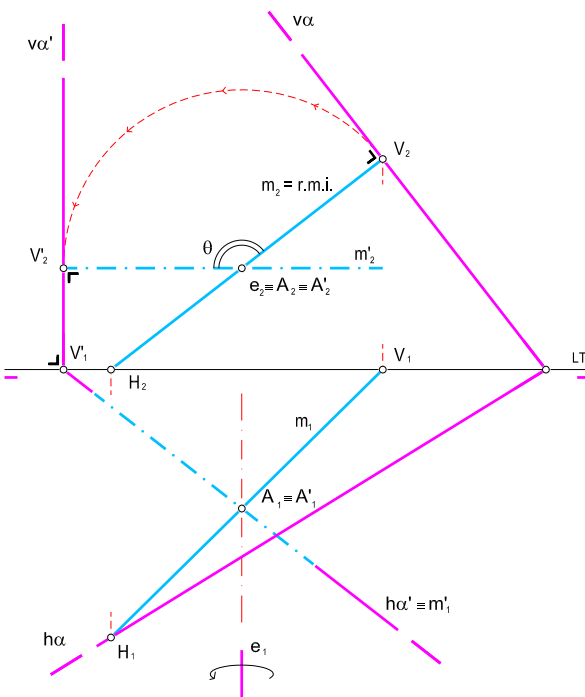


Fig. 12.2.8.b.

TRANSFORMACIÓN DE UN PLANO OBLICUO EN UN PLANO VERTICAL (PLANO PROYECTANTE HORIZONTAL)

Dado el plano $\alpha[h_{\alpha}-v_{\alpha}]$, utilizaremos un eje de punta $e[e_1-e_2]$ para transformarlo en un plano vertical (fig. 12.2.8.b). Para ello trabajaremos con la recta de máxima inclinación $m[m_1-m_2]$ que corta al eje en el punto $A[A_1-A_2]$; este punto permanece fijo durante el giro por pertenecer del eje. Si queremos transformar el plano dado en un plano vertical, giraremos la recta de máxima inclinación el ángulo θ necesario para que quede paralela a la LT, obteniendo $m'[m_1'-m_2']$; de esta forma, la traza v_{α}' , que sigue siendo perpendicular a la recta de máxima inclinación, se colocará perpendicular a la LT. La nueva traza horizontal del plano girado h_{α}' pasa por V_1' y por el punto A_1' por tratarse de un plano proyectante horizontal.

TRANSFORMACIÓN DE UN PLANO OBLICUO EN UN PLANO DE CANTO (PLANO PROYECTANTE VERTICAL)

Dado el plano $\alpha[h_\alpha-v_\alpha]$, utilizaremos un eje vertical $e[e_1-e_2]$ para transformarlo en un plano de canto (fig. 12.2.8.c). Para ello trabajaremos con la recta de máxima pendiente $m[m_1-m_2]$ que corta al eje en el punto $A[A_1-A_2]$; este punto permanece fijo durante el giro por pertenecer del eje. Si queremos transformar el plano dado en un plano proyectante vertical, giraremos la recta de máxima pendiente el ángulo θ necesario para que quede paralela a la LT, obteniendo $m[m'_1-m'_2]$; de esta forma, la traza h_α' que sigue siendo perpendicular a la recta de máxima inclinación, se colocará perpendicular a la LT. La nueva traza vertical del plano girado v_α' pasa por H_2' y por el punto A_2' por tratarse de un plano proyectante vertical.

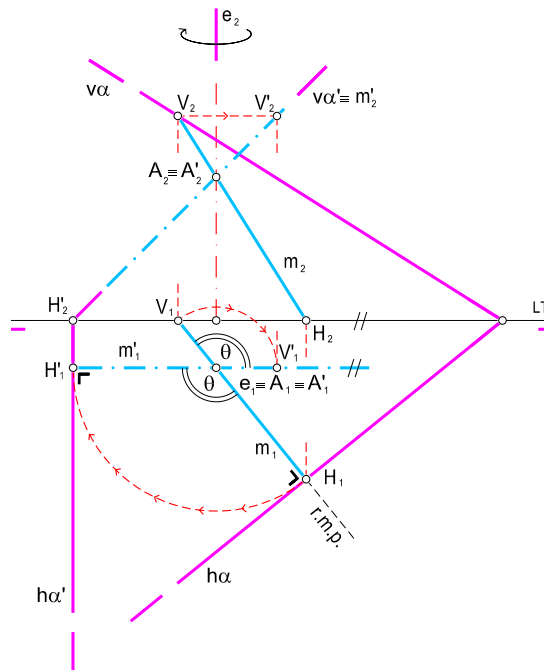


Fig. 12.2.8.c.

→ 13



Triedros

13.1. DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y REPRESENTACIÓN

13.2. CONSTRUCCIÓN DE TRIEDROS

- 13.2.1. Construcción de un triedro del que se conoce la amplitud de sus tres caras, α , β , γ
- 13.2.2. Construcción de un triedro conocida la amplitud de dos caras, α , β , y el ángulo diedro comprendido
- 13.2.3. Construcción de un triedro del que se conocen dos caras de amplitudes α , β , y el ángulo diedro opuesto a una de ellas
- 13.2.4. Construcción de un triedro del que se conoce una cara de amplitud, el diedro opuesto y su adyacente
- 13.2.5. Construcción de un triedro del que se conoce una cara de amplitud y dos diedros adyacentes
- 13.2.6. Construcción de un triedro del que se conocen los tres ángulos diedros



13.1. DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y REPRESENTACIÓN

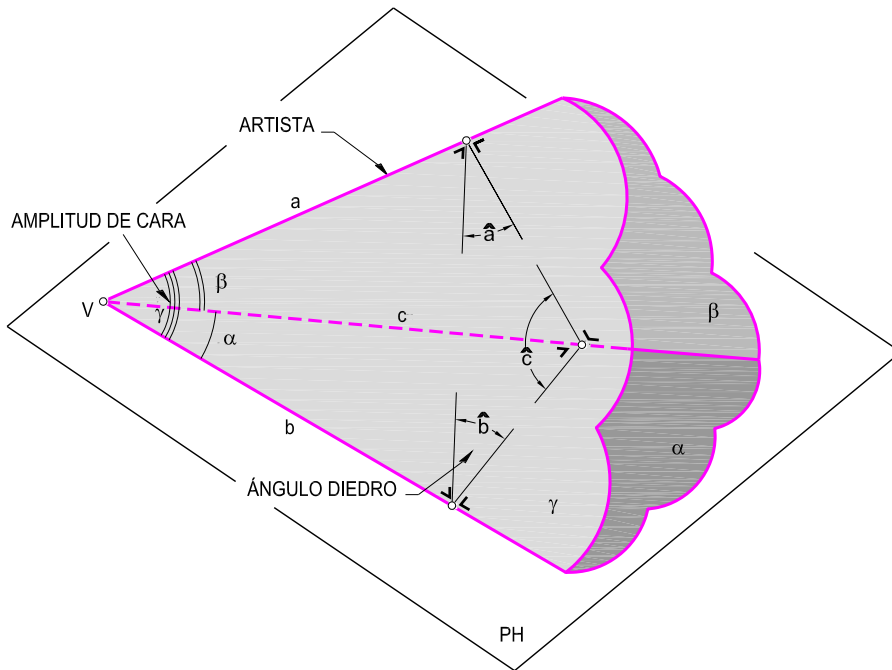


Fig. 13.1.

Un trihedro es un ángulo poliedro formado por tres planos que se cortan en un mismo punto, llamado vértice del trihedro (fig. 13.1).

El trihedro tiene tres caras que designaremos por su amplitud angular α , β y γ . Estas caras se cortan dos a dos según tres aristas que designaremos por a , b y c , opuestas respectivamente a las caras α , β y γ . Cada dos caras forman un ángulo diedro, y los tres diedros los nombraremos por \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} que tienen por aristas respectivas las a , b y c .

En los triedros se verifican las siguientes propiedades:

- Una cara cualquiera es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.
- La suma de sus tres caras (amplitudes angulares) tiene que ser menor que 360° (4 rectas).
- La suma de los tres ángulos diedros está comprendida entre 180° (2 rectas) y 540° (6 rectas).

13.2. CONSTRUCCIÓN DE TRIEDROS

Un trihedro queda determinado por tres de sus elementos, a partir de los cuales se obtienen los restantes. Según elijamos unos u otros, se presentan los seis casos posibles de construcción. Realizaremos seis construcciones tipo, que permitirán obtener la representación de cualquier

triedro del que se conozcamos tres de sus elementos. Como norma general, para todos los casos colocaremos una cara apoyada en el PH de proyección.

Como el triedro que se va a construir tiene una cara sobre el plano de proyección, será suficiente determinar posteriormente la cota de un punto de la tercera arista no contenida en el plano; este punto y el vértice del triedro nos determinarán la tercera arista, que nos permite obtener la proyección vertical en el sistema diédrico, y la determinación del problema en los otros sistemas.

Los seis posibles casos que se pueden dar en la construcción de un triedro según sus tres elementos de partida, se resumen en la tabla adjunta:

| CONSTRUCCIÓN DE TRIEDROS | | DATOS | | |
|--------------------------|--|-----------|-----------|-----------|
| 1° | Tres caras | α | β | γ |
| 2° | Dos caras y el diedro comprendido | α | β | \hat{c} |
| 3° | Dos caras y el diedro opuesto a una de ellas | α | β | \hat{b} |
| 4° | Una cara y dos diedros contiguos | α | \hat{b} | \hat{c} |
| 5° | Una cara, un diedro contiguo y uno opuesto | β | \hat{b} | \hat{c} |
| 6° | Tres diedros | \hat{a} | \hat{b} | \hat{c} |

Tabla 13.1.

13.2.1. Construcción de un triedro del que se conoce la amplitud de sus tres caras, α , β , γ

La cara α se considera sobre el PH, colocada de tal manera que la proyección horizontal de una de las aristas que la conforman (en la fig. 13.2.1, arista c) quede perpendicular a la LT.

Se consideran abatidas las caras β y γ sobre el PH; la cara β hacia la izquierda tomando como charnela c_1 , y la cara γ hacia la derecha tomando como charnela b_1 . Las rectas (a) son los abatimientos de la arista a del espacio considerando las charnelas anteriores en las caras β y γ .

Se toman a igual distancia de V_1 y sobre las rectas (a), los puntos (A), intersección de la recta (a) con la LT y correspondientes a los abatimientos de la traza vertical de la arista a con el PV. Trazando las perpendiculares por los puntos (A) de las rectas (a) a las respectivas charnelas b_1 y c_1 , obtendremos el punto A_1 , proyección horizontal del punto A. La proyección A_2 se encuentra en el desabatimiento de (A) como la intersección de la circunferencia de centro C_2 radio $C_2(A)$ con la vertical trazada desde A_1 . La arista a tiene por proyección sobre el PH la recta a_1 , que pasa por V_1 y A_1 . La cota del punto A es la distancia $A_1-(A_2)$, obtenida tal y como se indica en la figura, al resolver el problema inverso del abatimiento.

La proyección vertical a_2 pasa por V_2 y por el punto A_2 . Obtenida la traza vertical de la recta $a[a_1-a_2]$, ya podemos determinar las trazas verticales de los planos β y γ .

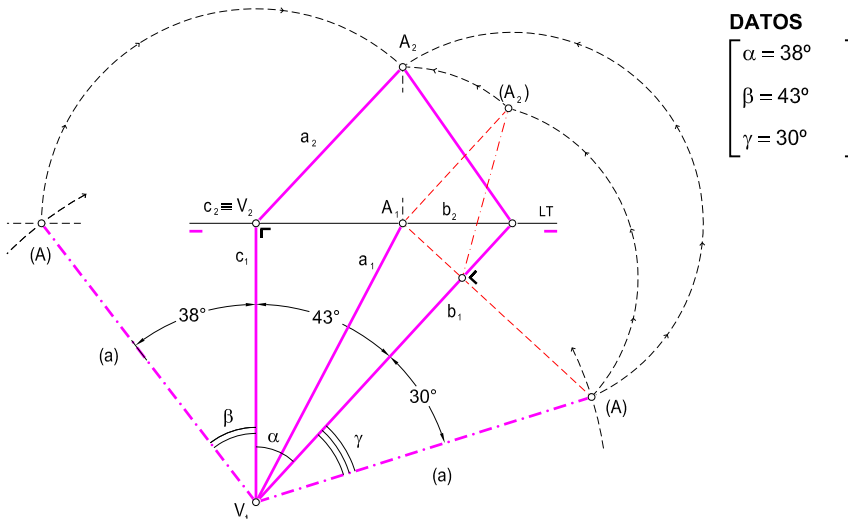


Fig. 13.2.1.

13.2.2. Construcción de un triedro conocida la amplitud de dos caras, α , β , y el ángulo diedro comprendido

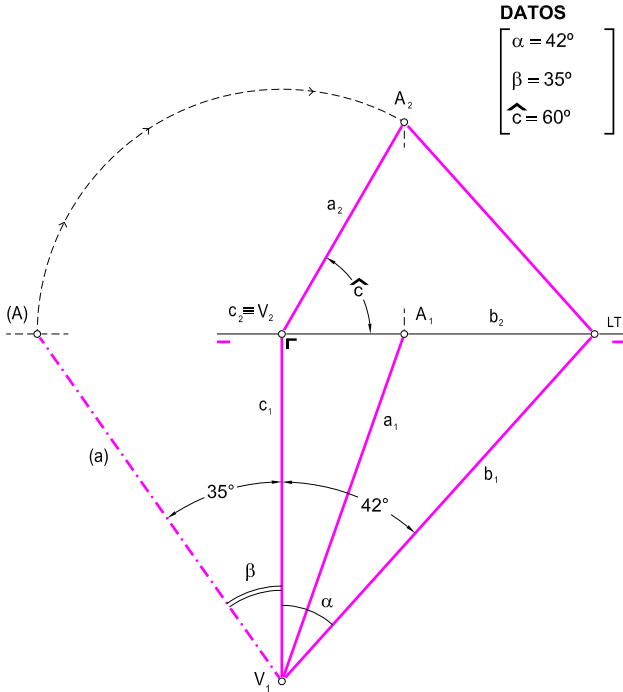


Fig. 13.2.2.

Se dibujan las caras α , β y su ángulo diedro \hat{c} , todos en verdadera magnitud, y la arista c (en diédrico c_1) perpendicular a la LT, estando la cara α contenida en el PH. Tomamos el punto (A), punto intersección de la arista abatida (a) con la LT, y con centro en V_2 y radio $V_2(A)$, trazamos un arco de circunferencia hasta cortar la proyección vertical a_2 en A_2' , y queda totalmente definido el triedro.

13.2.3. Construcción de un triedro del que se conocen dos caras de amplitudes α , β , y el ángulo diedro opuesto a una de ellas, \hat{c}

RESOLUCIÓN MEDIANTE GIROS (fig. 13.2.3.a)

Supongamos la cara α del triedro apoyada en el PH con la arista $c[c_1-c_2]$ perpendicular a la LT. La cara β , abatida alrededor de c_1 , nos da (a), que corta a la LT en el punto (A). Conocemos el diedro \hat{b} opuesto a la cara β , que es el ángulo que forma la cara γ con la cara α , es decir, con el PH. Considerando un eje vertical que pasa por la proyección V_2 , giramos la recta de máxima pendiente del plano γ y que pasa por dicho eje; para ello, con centro en V_2 y radio V_2-1 , trazamos un arco de circunferencia que corta a la LT en (1), punto desde el que representaremos la recta de máxima pendiente girada sobre el PV con la ayuda de \hat{b} . Esta recta corta al eje de giro en el punto $Q[Q_1-Q_2]$, vértice del cono cuyas generatrices forman un ángulo \hat{b} con el PH y cuya base es tangente a b_1 . Si unimos Q_2 con el punto en el que b_1 corta a la LT, se obtiene la traza vertical de la cara γ , sobre la que se encontrará la intersección de la arista a con el PV. Para hallarla, trazamos un arco de circunferencia de centro V_2 radio $V_2(A)$, que corta a la traza vertical de la cara γ en dos puntos, es decir, el problema tiene dos soluciones. En este caso, y a modo de ejemplo, se ha representado la solución en la que la traza vertical de la arista a tiene mayor cota, punto A_2 .

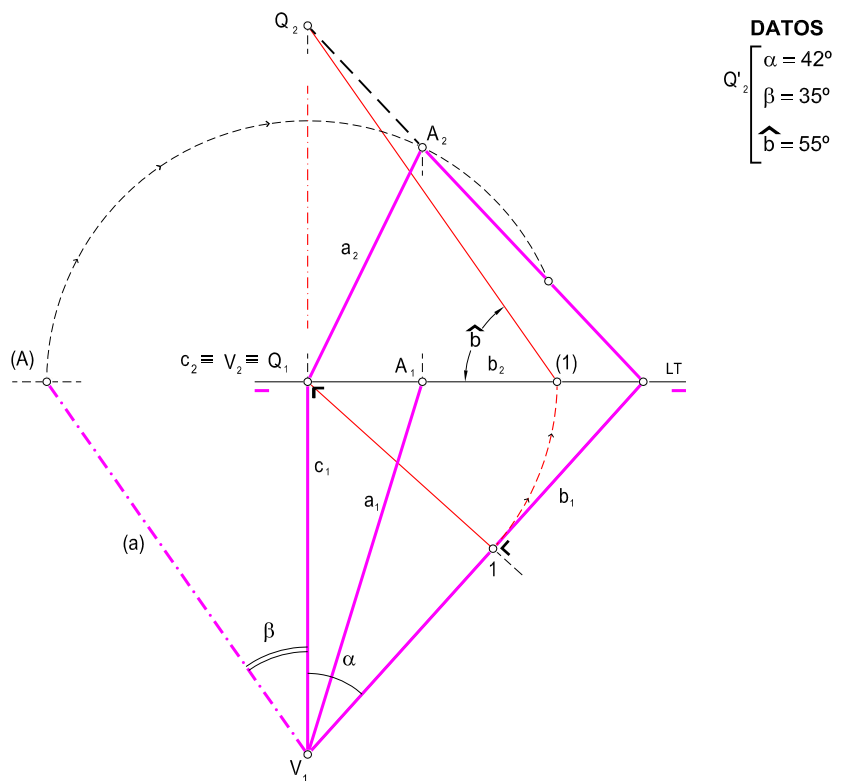


Fig. 13.2.3.a.



RESOLUCIÓN MEDIANTE CAMBIOS DE PLANO (fig. 13.2.3.b)

Al igual que antes, supongamos la cara α del triedro apoyada en el P.H con la arista $c[c_1-c_2]$ perpendicular a la LT. De nuevo, el abatimiento de la cara β alrededor de c_1 nos da (a), que corta a la LT en el punto (A). Si hacemos un cambio de PV' de tal forma que la nueva LT quede perpendicular a b_1 , el diedro \hat{b} quedará en verdadera magnitud. Obsérvese que se ha hecho pasar la nueva LT por V_2 , que aunque no es necesario, es el punto más sencillo por el que hacer pasar el cambio de plano. Con la ayuda de \hat{b} dibujamos la traza vertical de la cara γ sobre el PV', que corta a la perpendicular a la LT' trazada por V_2 en el punto Q[Q₁-Q₂']. Como el punto Q es común a PV y a PV', hallamos Q₂ sobre el primero. Una vez hallado este punto, el problema se resuelve como en el caso anterior, aunque en este caso, la solución representada de las dos existentes es aquella en la que la traza vertical de la arista a tiene menor cota, punto (A₂).

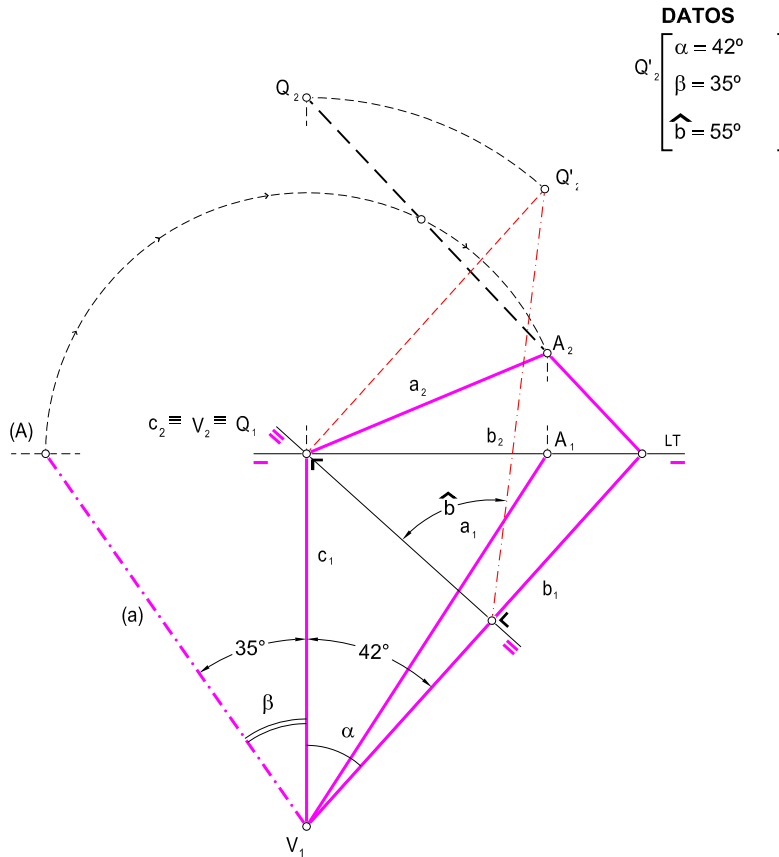


Fig. 13.2.3.b.



13.2.5. Construcción de un triedro del que se conoce una cara de amplitud y dos diedros adyacentes

RESOLUCIÓN MEDIANTE GIROS (fig. 13.2.5.a)

Situamos la cara α en el PH quedando definidas las proyecciones de las aristas $c[c_1-c_2]$ y $b[b_1-b_2]$. La cara α se coloca de tal forma que la arista $c[c_1-c_2]$ quede perpendicular a la LT, ya que al conocer el ángulo diedro \hat{c} , la proyección vertical de la arista a queda determinada, a_2 . Mediante un giro de la recta de máxima pendiente de la cara γ y que pasa por el eje de giro vertical, que a su vez pasa por el punto V_2 , hallamos el vértice del cono de revolución $Q[Q_1-Q_2]$ cuyas generatrices forman un ángulo \hat{b} con el PH y cuya base sea tangente a la proyección b_1 . Uniendo el punto Q_2 con el punto en el que b_1 corta a la LT obtenemos el punto A_2 , quedando totalmente definido el triedro.

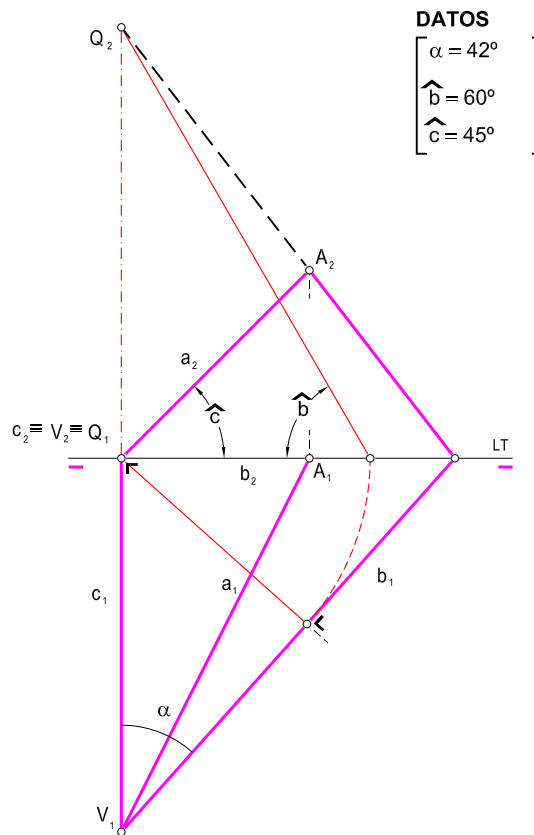


Fig. 13.2.5.a.

RESOLUCIÓN MEDIANTE CAMBIOS DE PLANO (fig. 13.2.5.b)

Situamos la cara α en el PH de tal forma que la arista $c[c_1-c_2]$ quede perpendicular a la LT, con lo que obtenemos las proyecciones de $c[c_1-c_2]$, $b[b_1-b_2]$ y a_2 . En este caso, realizamos un cambio de PV' de forma que la nueva LT' quede perpendicular a b_1 y pase por V_2 , con lo que el ángulo \hat{b} se proyecta sobre el nuevo PV' en verdadera magnitud. Esto nos permite hallar la traza vertical sobre el PV' de la cara γ y un punto común a PV y PV' por el que pasa dicha traza, el punto Q[Q₁-Q₂']. Refiriendo Q₂' al PV hallamos Q₂, que unido con el punto en el que b_1 corta a la LT obtenemos el punto A₂, que permite definir el triedro.

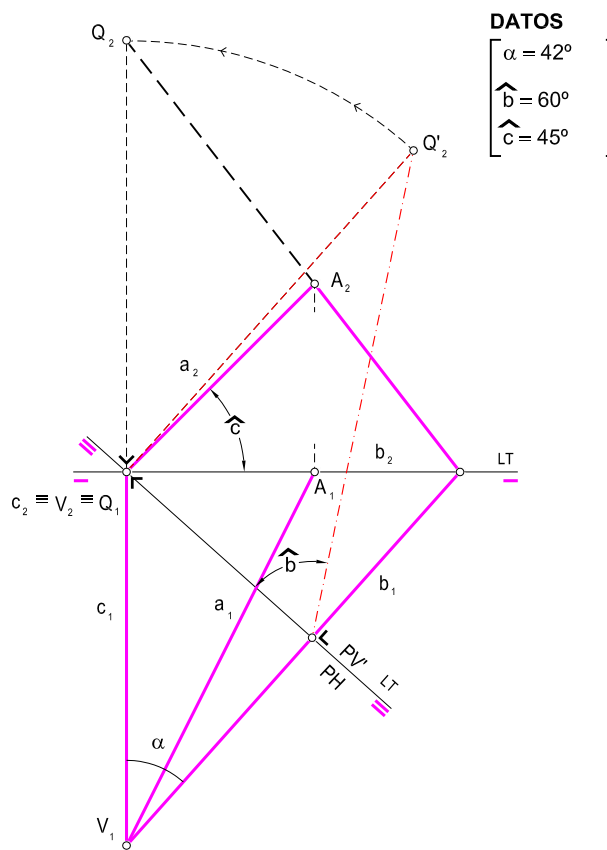


Fig. 13.2.5.b.



13.2.6. Construcción de un triedro del que se conocen los tres ángulo diedros

Si a una esfera se circunscriben dos conos de revolución, existen dos planos tangentes comunes a los conos y a la esfera (véase apartado 11.9.).

Definimos el plano proyectante vertical $\delta[h_\delta-v_\delta]$ que forma el ángulo \hat{c} con el PH y que contiene la cara β del triedro y la arista a , por lo que $v_\delta \equiv a_2$. Automáticamente, la arista c queda definida por sus proyecciones $c[c_1-c_2]$. Dibujamos una esfera de radio cualquiera y de centro un punto cualquiera de la LT, por ejemplo el A_1 , a la que se circunscribe un cono; las generatrices del mismo forman el ángulo \hat{a} dado con el PH, y el vértice A_2 está contenido en la traza vertical del plano inicial considerado. Pasando por A_1 y perpendicular a v_δ , se traza el eje del segundo cono de revolución para después trazar la generatriz tangente a la esfera y que forma ángulo \hat{a} con v_α , obteniéndose el vértice H_2 , situado en el SVI. La recta contenida en el PV y que pasa por H_2-A_2 define el punto F y, por consiguiente, la traza vertical $F-A_2$ de la cara γ del triedro. La traza horizontal, correspondiente a la proyección horizontal de la arista b , y el vértice $V[V_1-V_2]$ del triedro se determinan por la tangente a la base del primer cono considerado desde el punto F . De esta manera queda definido el triedro.

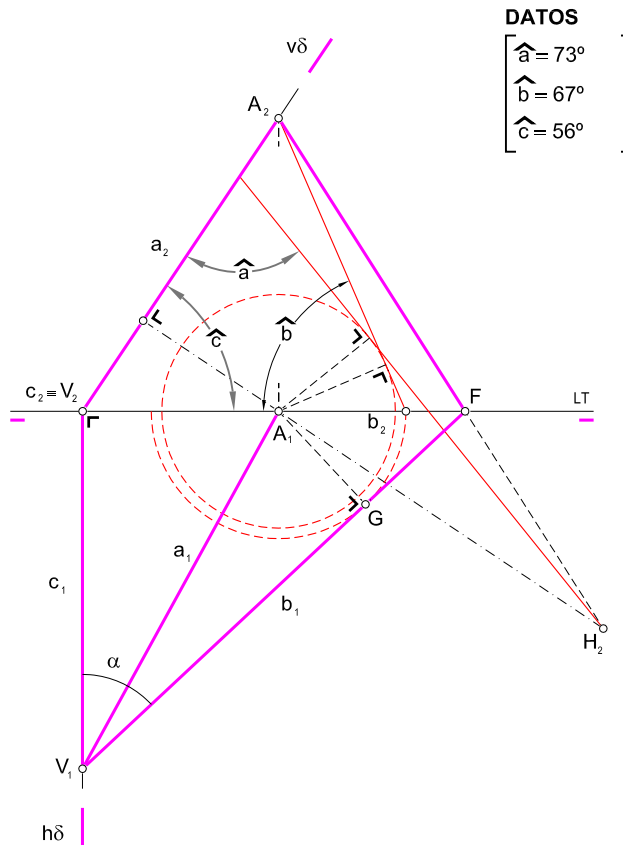
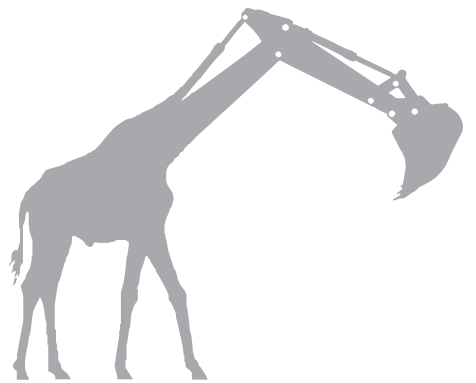


Fig. 13.2.6.







Ejercicios fundamentales



EF_01

Por el punto $A(3, 3, 4)$, trazar la recta r que se corte con la línea de tierra y forme 60° con la misma, trazas a la izquierda. Hallar el ángulo que forma la recta r con el plano $\alpha(5, 8, 5)$ y trazar las dos bisectrices.

Solución

- Abatimiento del punto A sobre el plano horizontal de proyección (utilizar la línea de tierra como charnela).
- Hallar la recta (r) que forma 60° con la línea de tierra y pasa por el punto A abatido, teniendo en cuenta que las trazas de r están a la izquierda.
- Desabatimiento de la recta r .
- Determinar la intersección entre la recta r y el plano α . Punto I .
- Hallar la intersección entre el plano α y la recta s (recta perpendicular al plano α que pasa por A). Punto I' .
- Trazar la recta t que resulta de unir los puntos de intersección I e I' .
- Dibujar una recta horizontal que pase por A y corte a t (corta t en el punto B). Recta horizontal h .
- Abatimiento, utilizando la recta h como charnela, del punto I y de las rectas r y t sobre el plano horizontal δ que pasa por A .
- Determinar el ángulo que forma la recta (r) con la recta (t). Ángulo entre la recta r y plano α igual a 79° .
- Trazar las bisectrices (m) y (n) del ángulo anterior.
- Desabatimiento de las rectas m y n .

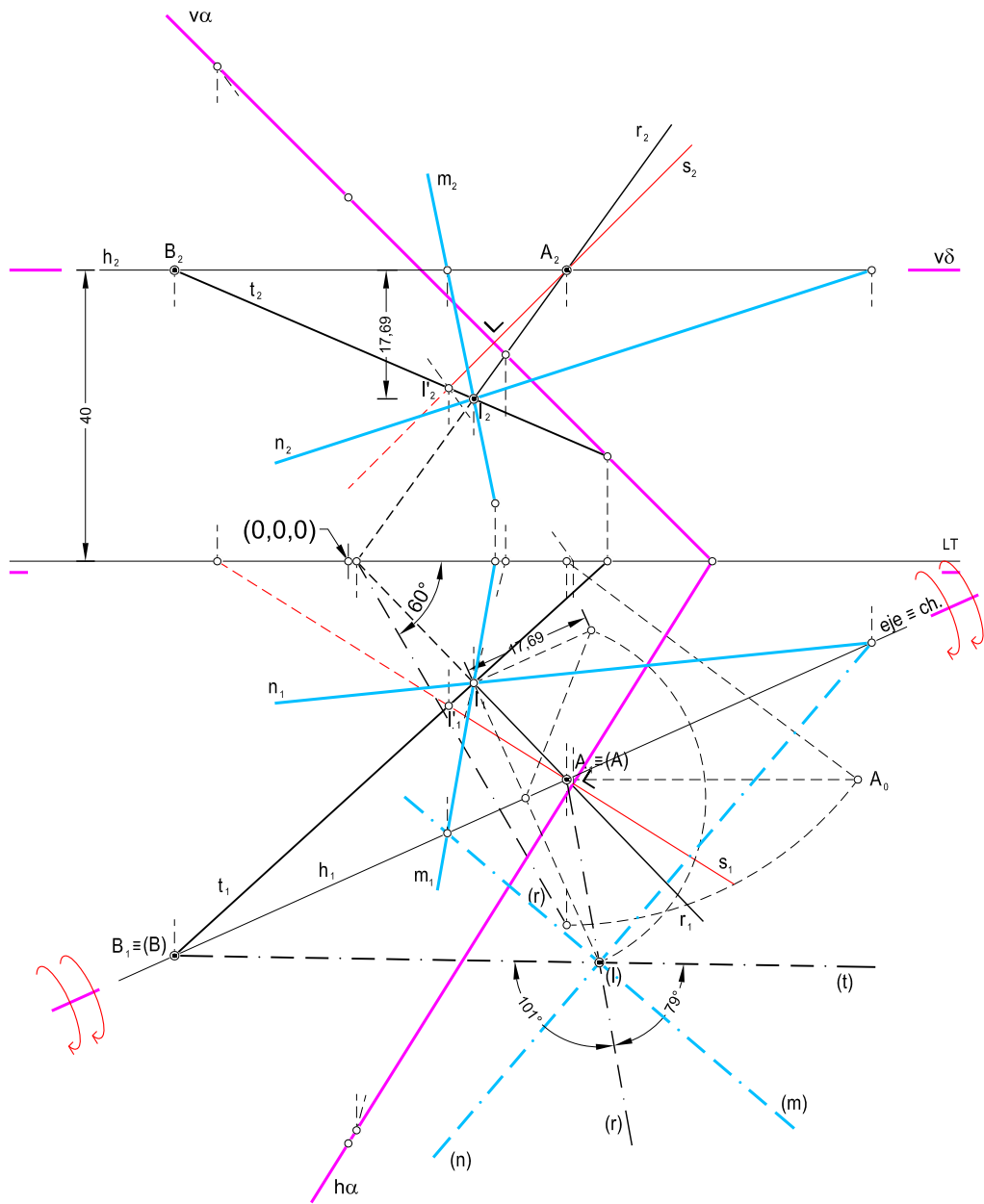
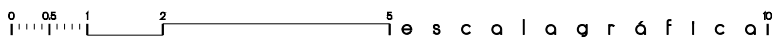


Fig. EF_01





EF_02

Dado el plano $(5, 4, 5)$ y las rectas r y s contenidas en el plano α , y definidas las rectas por los puntos $B(2, Y, 2)$ y $C(X, 6, 0)$ y la recta s por los puntos $D(X, 0, 5)$ y $E(3, 1, Z)$, se pide hallar los puntos del plano que equidistan de las rectas r y s y que tengan de cota 4 cm.

Solución

- Hallar la proyección horizontal del punto B mediante una recta horizontal contenida en el plano α que pase por B_2 .
- Hallar la proyección vertical del punto E mediante una recta horizontal contenida en el plano α que pase por E_1 .
- Dado que el alejamiento de C es de 6 cm y su cota es 0, C_1 puede determinarse mediante la intersección entre la traza horizontal del plano h_α y una recta paralela a la LT a 6 cm de ésta. C_2 se encuentra en la LT ya que la cota de C es nula.
- Puesto que el alejamiento de D es de 0 cm y su cota es 5 cm, D_2 puede determinarse mediante la intersección entre la traza vertical del plano $v\alpha$ y una recta paralela a la LT a 4 cm de ésta. D_1 se encuentra en la LT ya que el alejamiento de D es nulo.
- Unir los puntos B y C para obtener las trazas de la recta r . Uniendo D y E se determinan las trazas de la recta s .
- Hallar el punto de intersección entre las dos rectas. Punto A .
- Abatimiento del punto A , de las rectas r y s y del plano α sobre el plano horizontal de proyección.
- Trazar las bisectrices de los ángulos que forman las rectas (r) y (s) desde (A) ya que la bisectriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas que forman un ángulo. Bisectrices (m) y (n) .
- Dibujar una recta horizontal h de cota 4 cm que esté contenida en el plano α .
- Abatir la recta h y hallar la intersección entre (h) y las rectas (m) y (n) . Puntos (I) y (I') .
- Desabatimiento de los puntos I e I' .

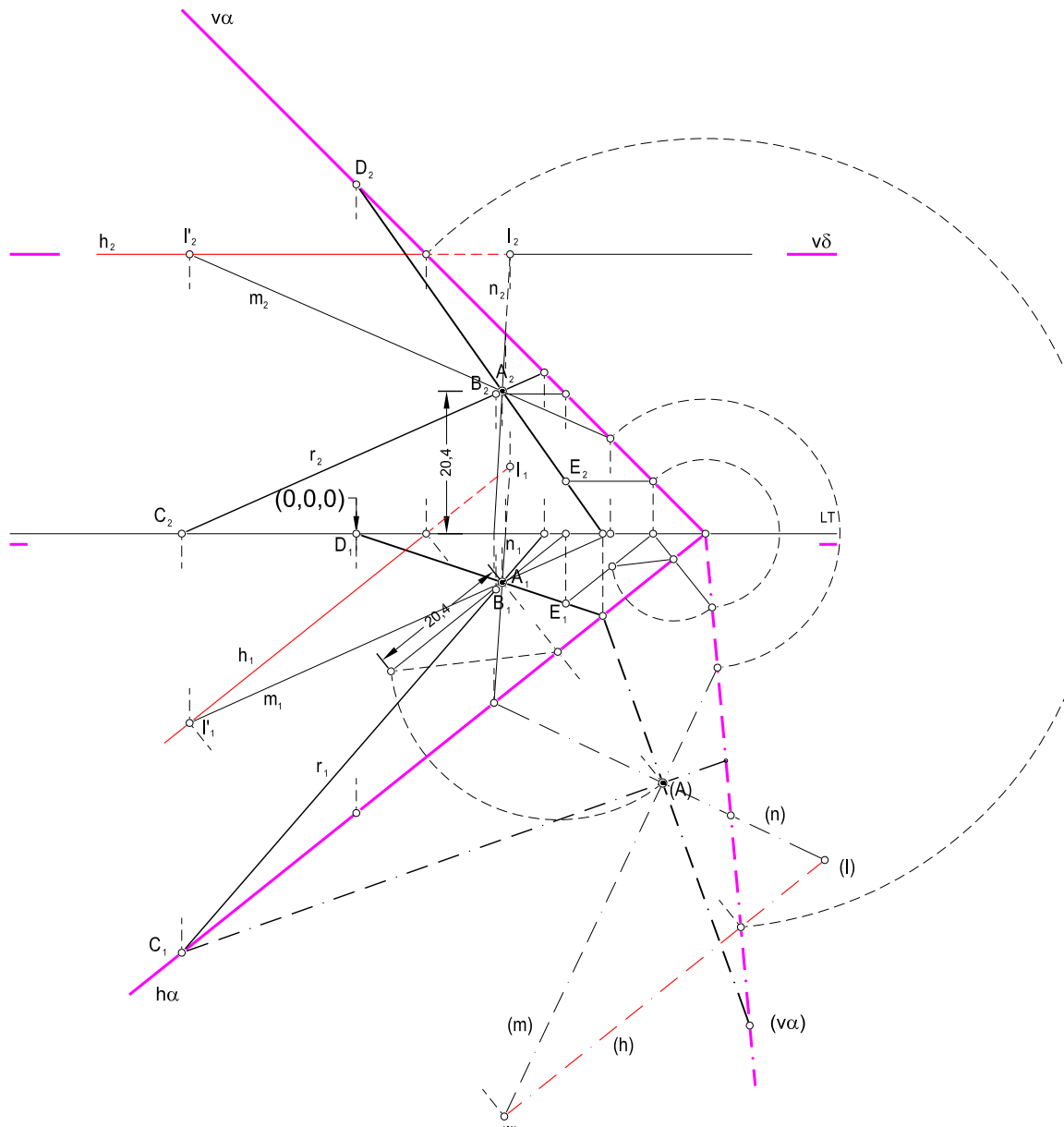


Fig. EF_02

0 0.5 1 2 5 e s c a l a g r á f i c a 0



EF_03

Hallar la mínima distancia y la perpendicular común entre las rectas AB y CD siendo: A(-4,3,4), B(0,4,6) y C(0,8,3), D(5,2,8). La resolución del ejercicio debe de hacerse mediante GIROS, a partir de un eje vertical que pasa por B y de un eje de punta que pasa por el punto C.

Solución

- Transformar la recta CD en una recta frontal mediante un giro alrededor del eje vertical que pasa por B. Para hacerlo es necesario girar la proyección horizontal de la recta a partir del punto más cercano al eje de giro (punto E) un ángulo θ hasta que la recta C'D' quede paralela a la LT. En este caso resulta que θ es igual a 50° en el sentido de las agujas de reloj. Para obtener la proyección vertical de la recta C'D' es suficiente con subir los puntos C' y D' puesto que C' y D' mantienen su cota después del giro.
- Girar la recta AB un ángulo de 50° . Recta A'B'.
- Transformar la recta frontal C'D' en una recta vertical mediante un giro alrededor del eje de punta que pasa por C. Para hacerlo es necesario girar la recta C'D' a partir del punto F' (punto más cercano al eje de giro) un ángulo φ hasta que la proyección vertical de la recta quede perpendicular a la LT. En este caso resulta que φ es igual a 123° en el sentido de las agujas de reloj. Finalmente trasladamos el punto F' en la proyección horizontal donde las proyecciones C''₁, F''₁, E''₁ y D''₁ coinciden por ser C''D'' una recta vertical.
- Girar la recta A'B' un ángulo de 123° . Recta A''B''.
- En proyección horizontal puede determinarse la mínima distancia entre la recta vertical C''D'' y la recta A''B''. Segmento horizontal M''N'' cuya verdadera magnitud es de 13,4 mm.
- Para determinar la perpendicular común es necesario deshacer los dos giros anteriores sobre los puntos M'' y N''. Segmento MN que es la perpendicular común entre las rectas AB y CD.



EF_04

Dado el plano α , definido por los puntos $A(0,0,5)$, $B(-5,4,0)$ y $C(-7,0,0)$ y el plano β , perpendicular al segundo bisector que pasa por A y B , trazar otro plano γ , que contenga los puntos $D(0,3,2)$ y $E(5,1,0)$, de modo que los tres se corten según tres rectas paralelas.

Señalar la porción del prisma, con partes vistas y ocultas, que forman los tres planos en el primer cuadrante.

Solución

- Dibujar las trazas del plano α uniendo los puntos A_2 y B_1 con el punto C .
- El plano β es perpendicular al segundo bisector y por tanto tiene sus trazas en prolongación, las cuales se obtienen uniendo A_1 y B_1 .
- Determinar la recta de intersección entre los planos α y β . Recta r .
- Hallar la intersección entre el plano α y la recta DE (recta s). Punto F .
- Hallar la intersección entre el plano β y la recta s . Punto G .
- Por los puntos F y G se trazan las rectas u y t respectivamente, que son paralelas a la recta r .
- Estas dos rectas son paralelas entre si y definen el plano γ .
- Una vez definidas las trazas del plano γ se señalan las partes vistas y ocultas del prisma constituido por los tres planos.

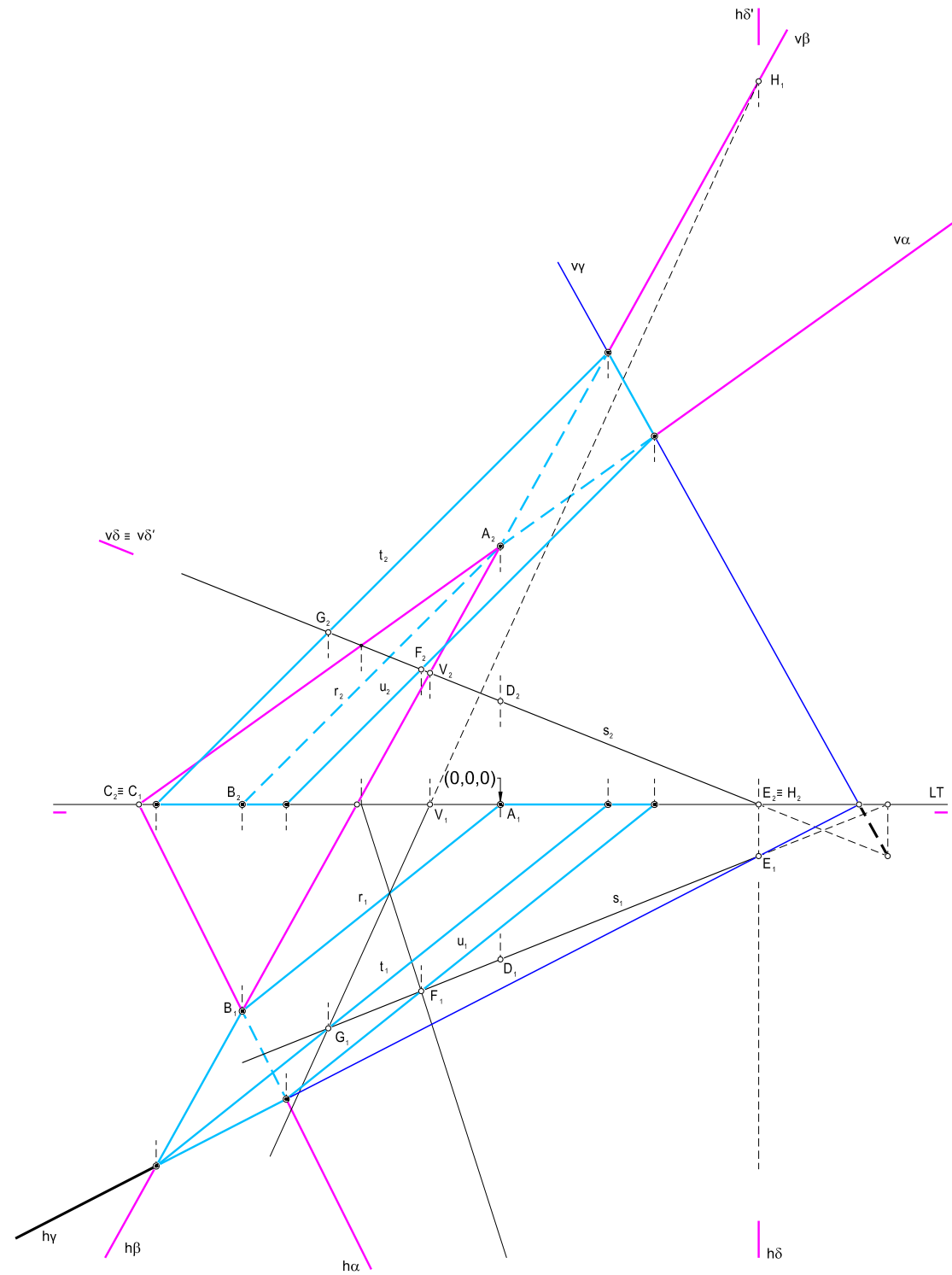


Fig. EF_04

0 0,5 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 **escala gráfica**



EF_05

El plano α viene definido por la línea de tierra y el punto $A(-2,2,5)$, y el plano γ , siendo perpendicular al 1.º bisector, contiene la recta s que pasa por los puntos $B(-4,1,0)$ y $C(1,0,4)$. Hallar la recta t de intersección entre ambos planos y trazar por el punto M contenido en la recta t y de alejamiento 3 Uds, otra recta r de modo que sea perpendicular a t y que se corte con la LT.

Solución

- Dibujar las trazas del plano α . Las trazas vertical y horizontal del plano α coinciden con la LT.
- Determinar el plano γ . Al ser γ perpendicular al primer bisector sus trazas son simétricas respecto de la LT y pueden dibujarse sabiendo que pasan por los puntos B_1 y C_2 .
- Determinar la intersección entre el plano γ y el plano α mediante un plano de perfil. De la intersección entre (w_α) i (w_γ) resulta el punto (D) . Desabatando el punto D y uniéndolo con el punto de la LT donde coinciden las trazas de los planos α y γ se halla la recta t (intersección entre α y γ).
- Determinar el punto M sobre la recta t sabiendo que éste tiene un alejamiento de -3 unidades.
- Hallar el plano β que contiene M y es perpendicular a t mediante una recta horizontal h que pase por M y sea perpendicular a t .
- Trazar una recta r que pase por el punto M y el punto de la LT donde coinciden las trazas del plano β .

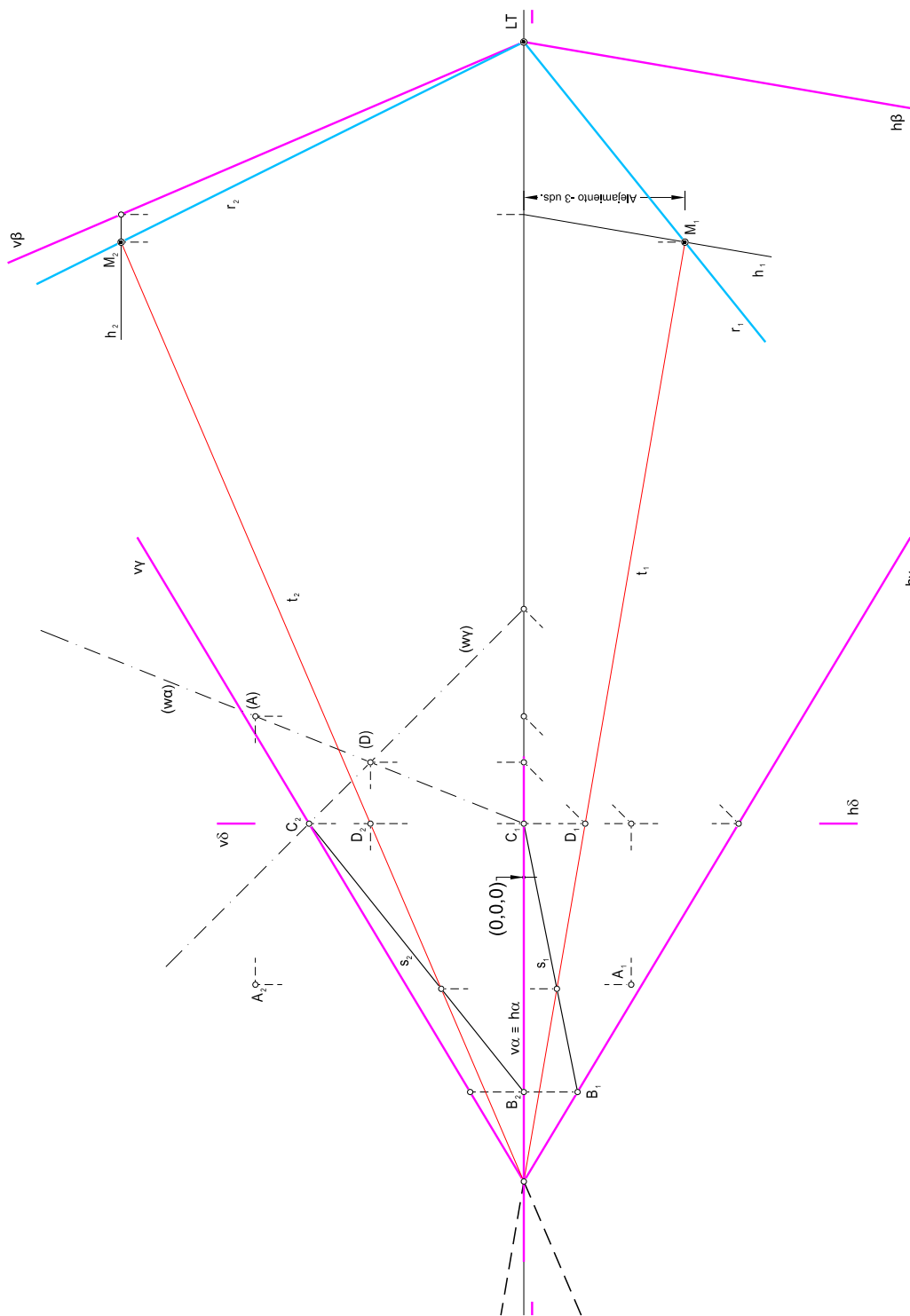


Fig. EF_05



EF_06

Dados los puntos $A(-3,3,3)$, $B(0,6,6)$ y $C(2,4,1)$, se pide:

- Representar las proyecciones diédricas del punto I , de modo que perteneciendo al plano vertical de proyección, equidiste de los puntos dados.
- Hallar la verdadera magnitud de la mínima distancia entre el punto I hallado y el plano definido por A , B y C .

Solución

- Determinar un plano α que contenga el punto medio del segmento AB (punto D) y sea perpendicular al segmento AB . Para hacerlo se utiliza una recta horizontal h que pase por D y sea perpendicular a AB .
- Por el punto E (punto medio del segmento BC) determinar un plano β perpendicular al segmento BC . Para hacerlo se utiliza una recta horizontal h' que pase por E y sea perpendicular a BC .
- Hallar la intersección entre los planos α y β . Recta r .
- Determinar el punto intersección entre el plano vertical de proyección y la recta r . Punto I .
- Hallar la intersección entre la recta r y el plano definido por los puntos A , B y C . Punto O .
- Abatimiento de un plano δ vertical que contenga la recta r sobre el plano horizontal de proyección. Abatir también la recta r y los puntos I y O .
- Determinar la distancia del segmento (IO) que es la verdadera magnitud de la mínima distancia entre I y el plano definido por A , B y C .

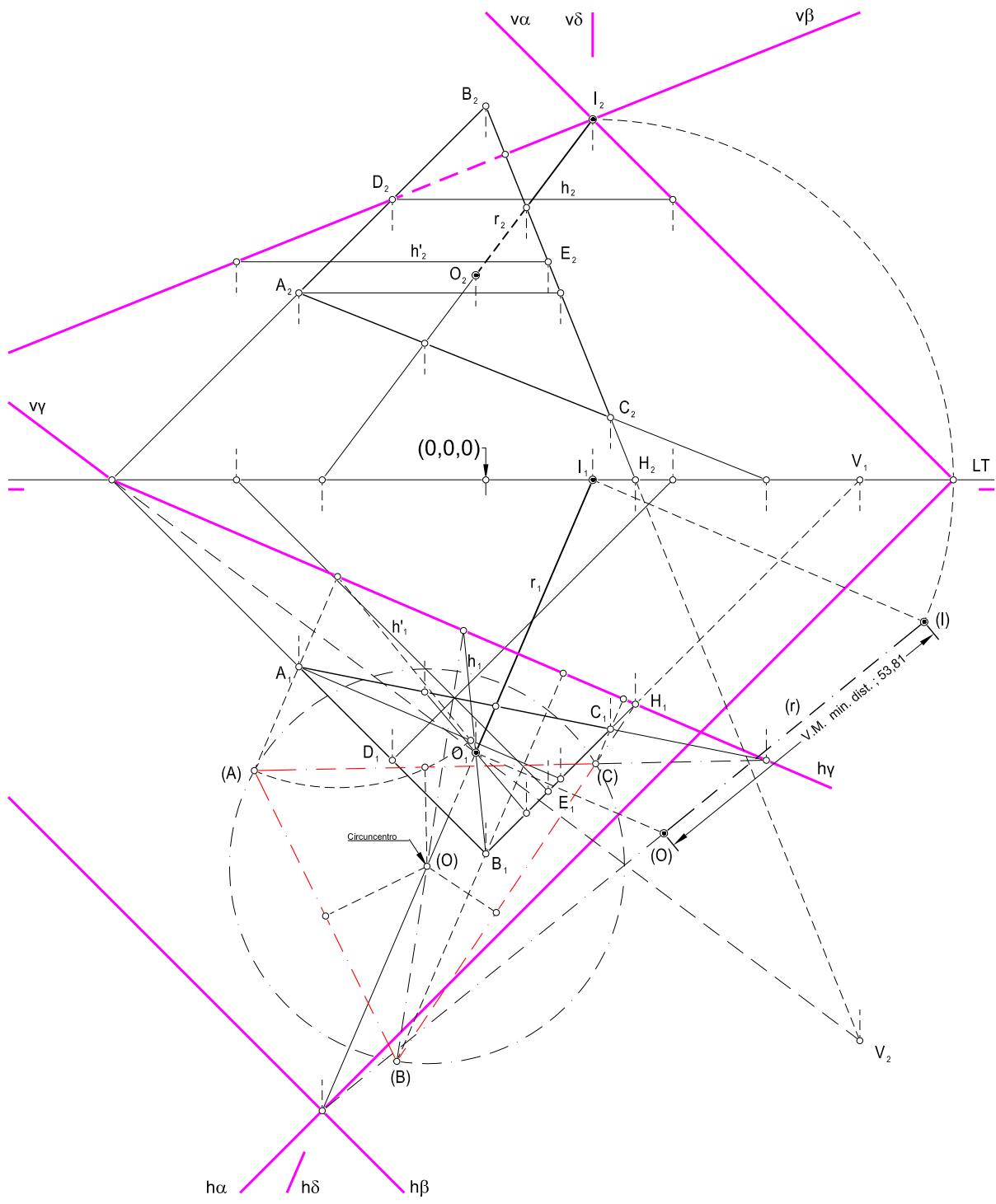
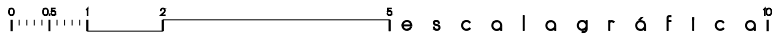


Fig. EF_06



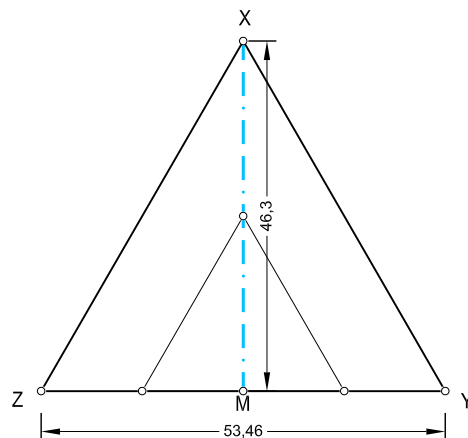


EF_07

Dibujar un triángulo equilátero XYZ mínimo cuyo vértice X esté sobre la recta s , el lado opuesto YZ esté situado sobre la recta r , definida por A(0, 6, 6) y B(-6, 4, 0), y s ; C(4, 0, 6), D(0, 3, 0)

Solución

- En primer lugar es necesario determinar la perpendicular común entre las dos rectas puesto que ésta será la altura del triángulo mínimo.
- Por un punto cualquiera (punto C en el dibujo) de la recta s , trazar una recta m paralela a r .
- Las rectas s y t definen un plano α que es paralelo a r .
- Por un punto cualquiera (punto A en el dibujo) de la recta r , trazar una recta perpendicular al plano α y hallar su intersección. Punto E.
- Trazar una recta paralela a r que pase por E y hallar su intersección con la recta s . Punto X.
- Trazar por X una paralela al segmento AE que cortará la recta r en el punto M.
- El segmento MX es la perpendicular común y su verdadera magnitud (46,3 mm) es la mínima distancia entre las rectas r y s .
- Conocida la mínima distancia y sabiendo que ésta coincide con la altura del triángulo equilátero, es posible hallar la magnitud de las aristas de dicho triángulo mediante una construcción auxiliar (aristas de 53,46 mm).
- Sabiendo la magnitud de la arista y que M es el punto medio de una arista, colocar los puntos Y y Z sobre la recta r .



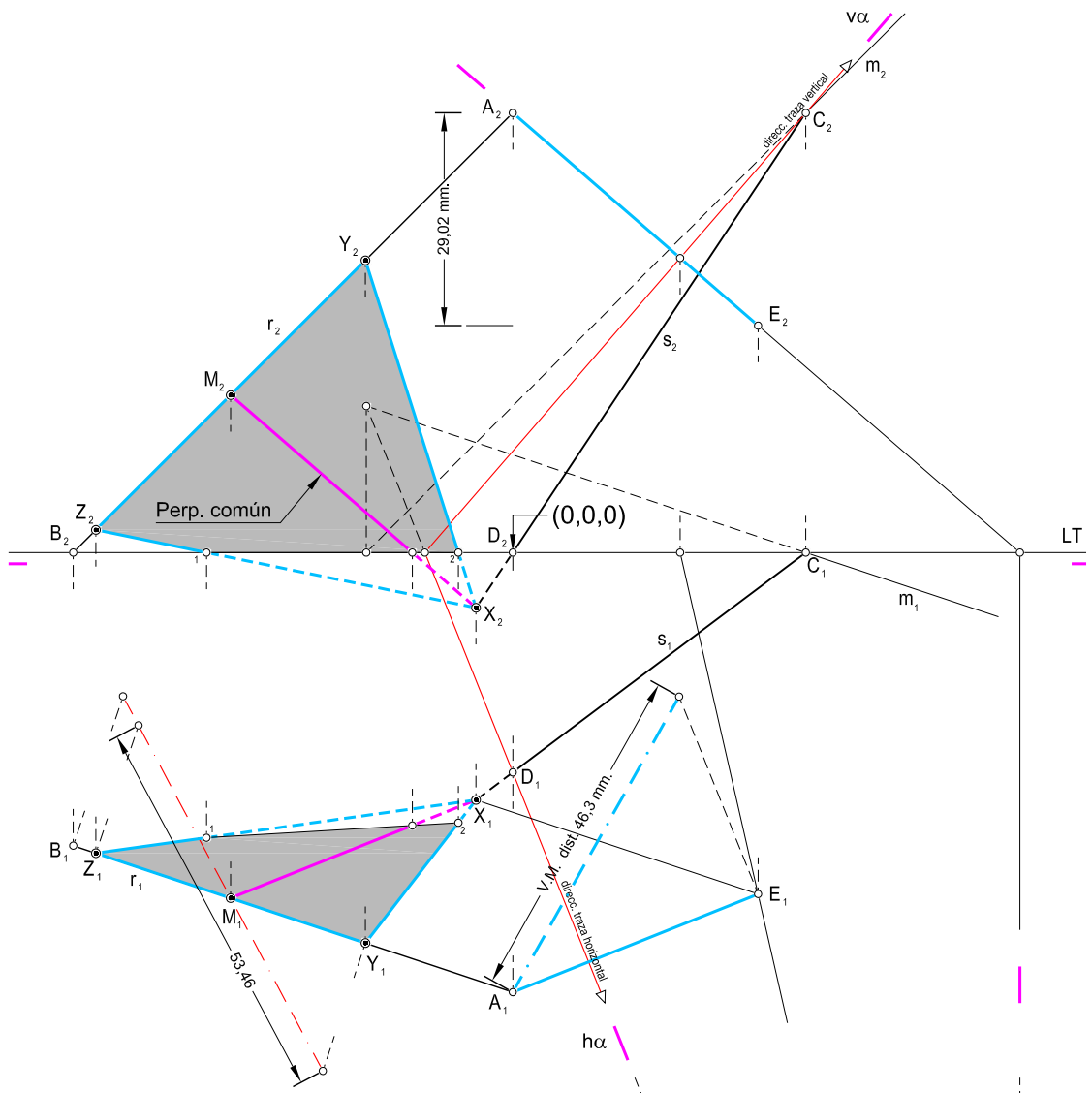
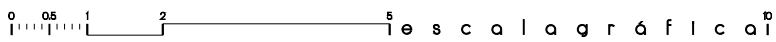


Fig. EF_07





EF_08

Por el punto A (-5, 3, 4) trazar rectas que formen 30° con la LT, de tal manera que el punto A sea el punto medio del segmento de recta entre trazas (traza vertical y horizontal).

Dibujar las proyecciones de un paralelogramo (contenido en el mismo plano que las rectas halladas en el apartado anterior que pasan por A), de tal manera que los lados formen un ángulo de 60° con la traza horizontal de dicho plano y sean tangentes a un círculo de centro A y de radio 20 mm.

Solución

- Dibujar una recta h paralela a la LT
- Dibujar un cono de eje la recta h , vértice el punto A y que sus generatrices formen 60° con el plano de perfil. De este modo, las generatrices del cono formaran 30° con la LT.
- Dibujar un plano α paralelo a la LT que contenga el punto A de tal manera que cualquier recta contenida en el plano α y que pase por A, tenga el punto A como punto medio del segmento de recta entre trazas. Para encontrar el plano α nos apoyamos en un plano de perfil y se realiza una simetría vertical y horizontal respecto el punto A de los planos de proyección. A partir de la intersección entre simétricos y planos de proyección se pueden determinar las trazas del plano α .
- A partir de la intersección entre el plano α y la base del cono mediante un plano de perfil se hallan los puntos (B) y (C).
- Desabatimos y unimos los puntos B y C con el punto A formando las rectas r y t respectivamente. Estas dos rectas forman 30° con la LT por ser generatrices del cono y tendrán el punto A como punto medio del segmento de recta entre trazas puesto que r y t están contenidas en el plano α .
- Para hallar el paralelogramo contenido en α cuyos lados formen 60° con la traza horizontal del plano α y que sean tangentes a un círculo de centro A y radio 20 mm es necesario abatir el plano α y el punto A sobre el plano horizontal de proyección.
- Dibujar el círculo abatido con centro (A).
- Construir un paralelogramo abatido de modo que las tangentes al círculo formen 60° con la traza horizontal.
- Desabatir el paralelogramo.

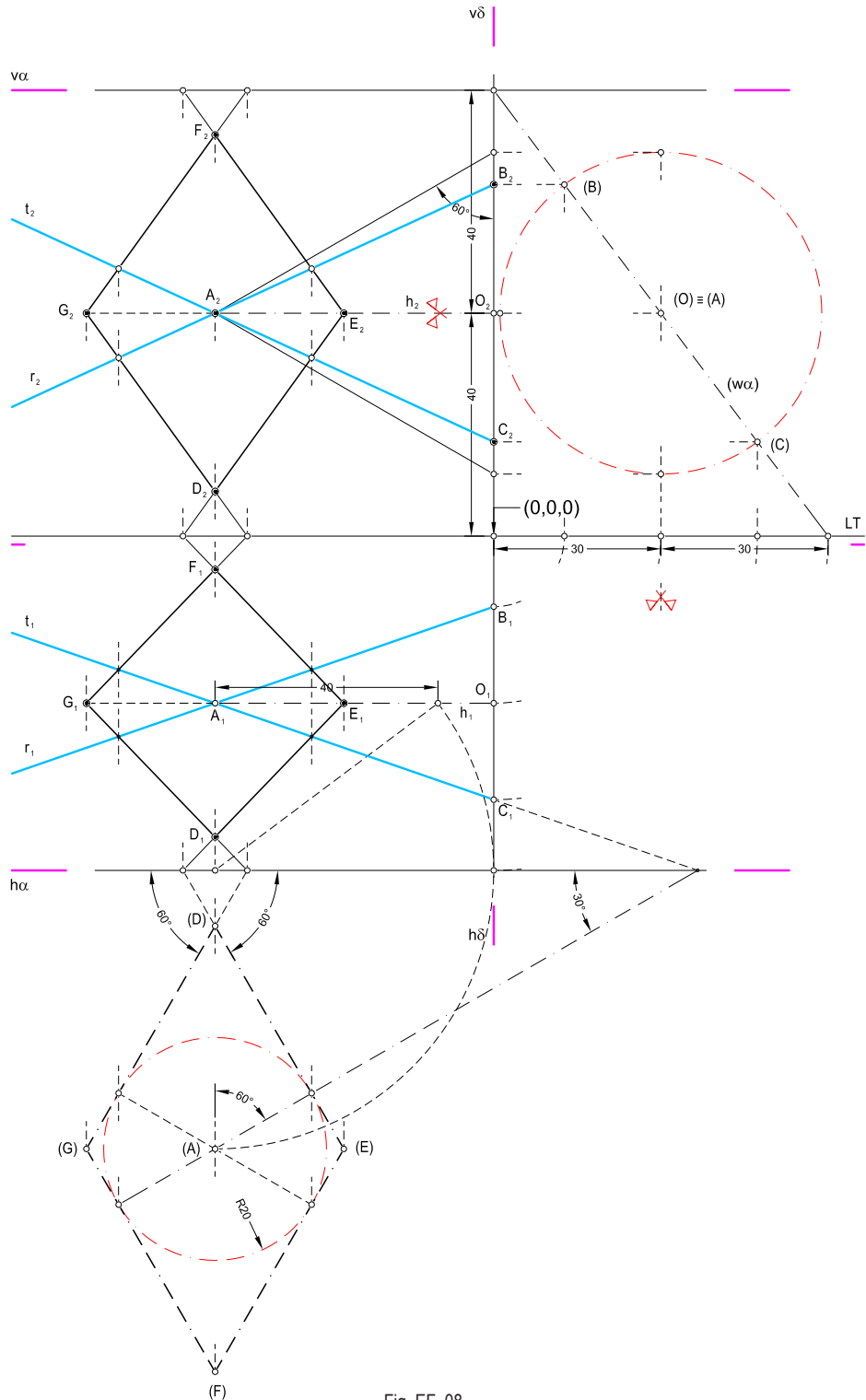


Fig. EF_08

0 0,5 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 escala gráfica



EF_09

Trazar por el punto A (4,0,0), los planos que contengan a la línea de tierra y formen 60° con el plano $\alpha(-4,6,4)$.

Solución

- Por el punto A trazar una perpendicular al plano α . Se halla el punto O intersección de la perpendicular con el plano α .
- Hallar la verdadera magnitud $AO = 51,17$ mm.
- Dibujar un cono auxiliar de vértice A, centro de la base O y eje de 51,17 mm. Radio del cono = 29,54 mm.
- Abatir el plano α , el punto O y la base del cono de radio 29,54 mm sobre el plano horizontal de proyección.
- Dibujar las tangentes a la base del cono abatida desde el punto donde coinciden las trazas de α con la LT (punto B). Se obtienen las rectas tangentes (t) y (r) y los puntos de tangencia de la base del cono abatida (M) y (N).
- Desabatir los puntos M y N y unirlos con los puntos A y B. Se obtienen las siguientes rectas: $BM \equiv r$, $BN \equiv t$, $AN \equiv g$ y $AM \equiv g'$.
- Los planos que forman las rectas t y g , y las rectas r y g' son aquellos planos que contienen a la LT y forman 60° con el plano α .

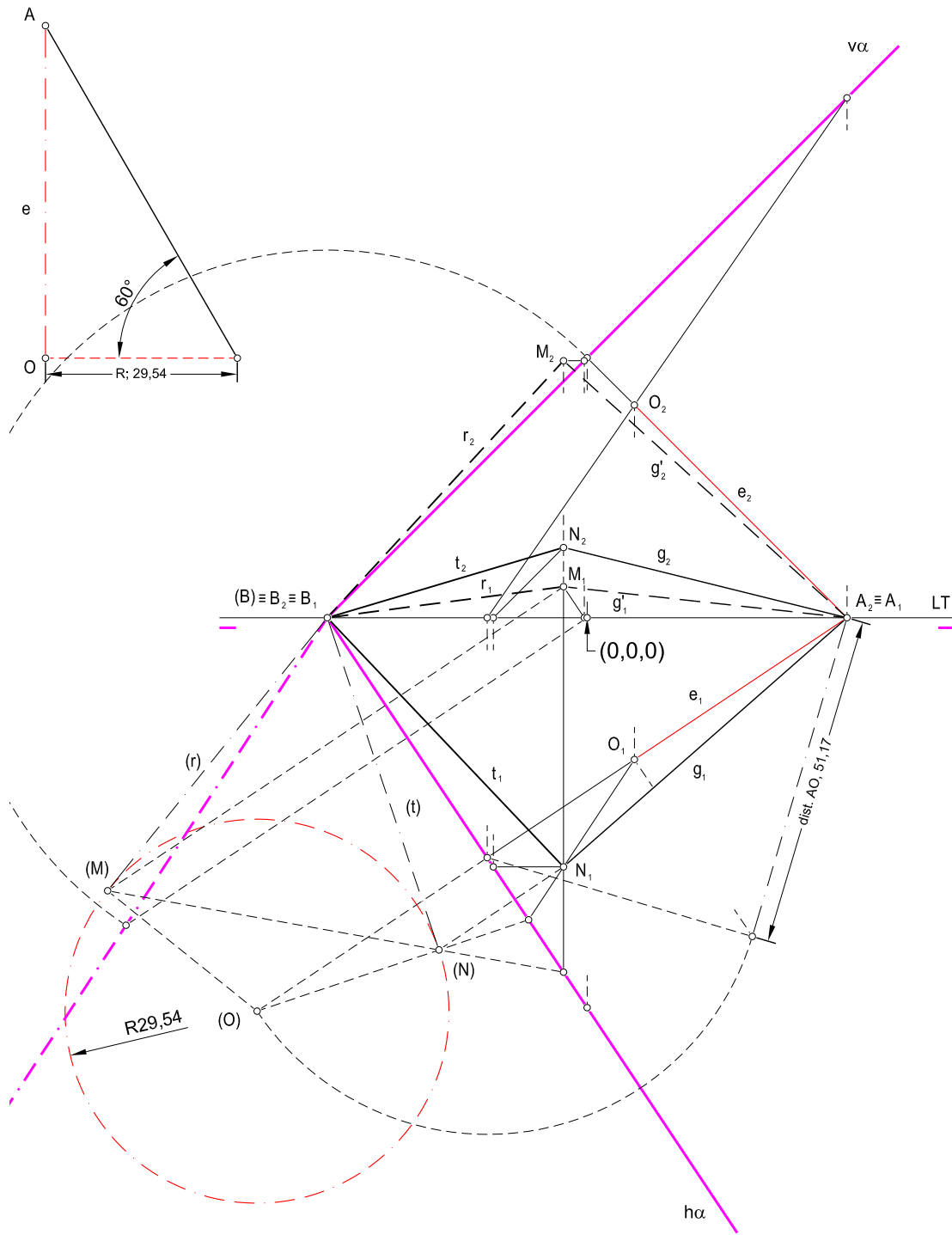


Fig. EF_09

0 0,05 1 2 5 e s c a l a g r á f i c a 0



EF_10

Determinar las proyecciones del triángulo equilátero de vértices $A(-5, 4, 3)$, $B(0, 7, 7)$ y $C(X, Y, 4)$. Dibujar todas las soluciones posibles y hallar la sombra arrojada sobre los planos de proyección de la superficie formada por las dos soluciones con luz paralela a 45° viniendo de la derecha.

Solución

- Hallar la verdadera magnitud de $AB = 70,71$ mm.
- Construcción de un plano α perpendicular al segmento AB que pase por el punto medio (punto M) de AB .
- Construcción de un plano δ paralelo al plano horizontal de proyección con una cota de 40 mm.
- Hallar la intersección entre los planos α y δ . Se obtiene la recta m . Sobre esta recta se situarán las dos posibles soluciones.
- Construir un triángulo equilátero auxiliar sabiendo que los lados de éste son de 70,71 mm. Se obtiene la altura del triángulo equilátero = 61,24 mm.
- Puesto que la diferencia de cotas entre el punto M y el plano δ es de 10 mm, es posible construir un triángulo rectángulo auxiliar cuyo cateto menor sea de 10 mm e hipotenusa de 61,24 mm (altura del triángulo rectángulo). Se obtiene el cateto mayor de valor 60,42 mm.
- Determinar los puntos C y D en proyección horizontal mediante la intersección de la recta m y un arco de circunferencia de radio 60,42 mm. La proyección vertical de estos puntos se encuentra sobre el plano δ .
- Hallar la sombra arrojada de los dos triángulos sobre los planos de proyección.

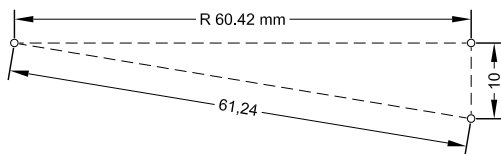
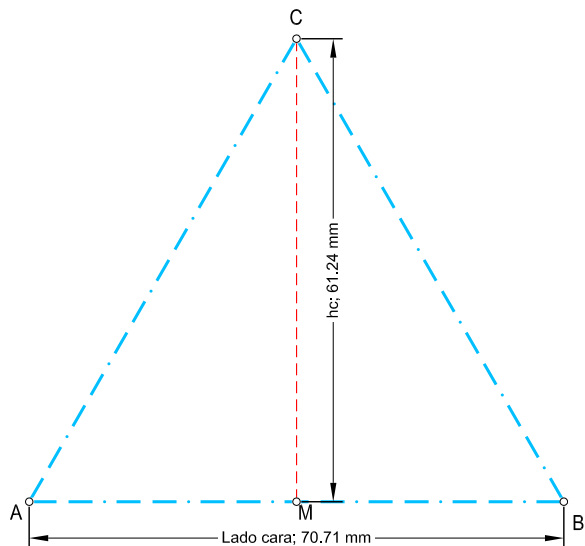


Fig. EF_10.a.



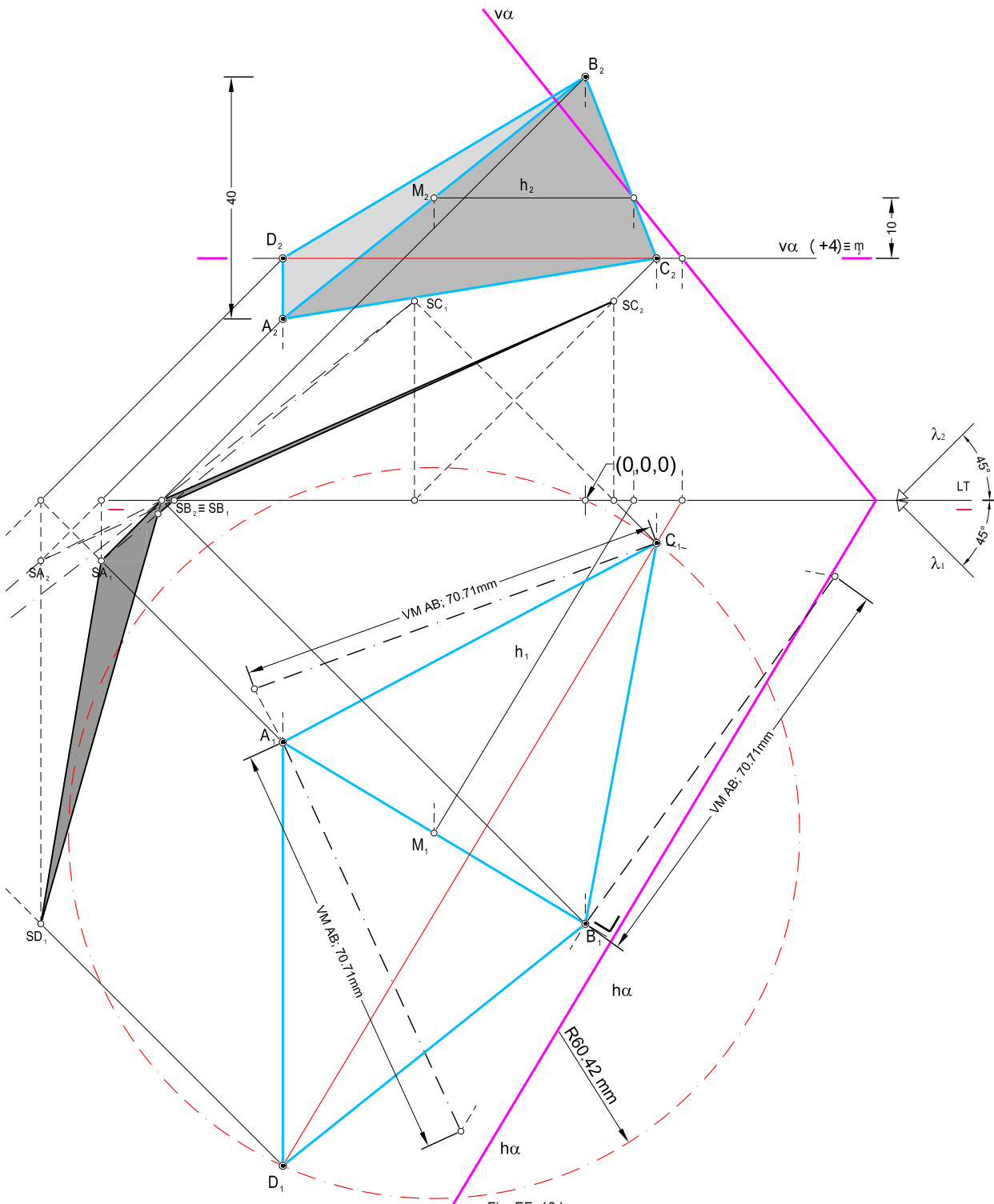


Fig. EF_10.b.



EF_11

De los cuadrados planos ABCD y CDEF se conocen los puntos A(-6,4,4) y B(-2,8,6), que representan a los vértices contiguos del mismo nombre, y el vértice D opuesto al B está situado en el plano horizontal de proyección, y lo más cerca posible del vertical.

El cuadrado CDEF es perpendicular al ABCD, el lado CD pertenece a la vez a ambos cuadrados y el lado EF tiene la máxima cota posible. Se pide:

- Dibujar las proyecciones de ambos cuadrados con partes vistas y ocultas sabiendo que tanto los planos de proyección como las superficies de ambos cuadrados son opacos.
- Hallar la sombra arrojada del conjunto formado por ambos cuadrados sobre los planos de proyección y la arrojada de uno sobre el otro. Dirección de la luz paralela a 30° bajando de la izquierda.

Solución

- Por el punto A determinar un plano α perpendicular al segmento AB. Para hacerlo se utiliza una recta horizontal h que pase por A y sea perpendicular a AB.
- Hallar la verdadera magnitud del segmento AB (60 mm).
- Abatimiento del plano α y el punto A sobre el plano horizontal de proyección.
- Determinar el punto (D). D sabiendo que éste se encuentra sobre la traza h_α y a 60 mm del punto (A).
- Hallar el punto C a partir de la intersección entre una recta paralela a AB que pase por D y una recta paralela a AD que pase por B.
- Determinar una recta perpendicular al cuadrado plano ABCD que pase por D mediante una recta frontal f y una recta horizontal h' .
- Determinar el punto F sobre la recta anterior sabiendo que las aristas del cuadrado miden 60 mm.
- Hallar el punto E a partir de la intersección entre una recta paralela a CD que pase por F y una recta paralela a DF que pase por C.
- Dibujar las partes vistas y ocultas de los cuadrados planos ABCD y CDEF sabiendo que tanto los planos de proyección como las superficies de ambos cuadrados son opacos.
- Para determinar la sombra arrojada sobre los planos de proyección es necesario dibujar rectas paralelas a la dirección de la luz λ que pasen por los vértices de los cuadrados y hallar las trazas de dichas rectas sobre los planos de proyección. La sombra arrojada sobre los planos de proyección se obtiene uniendo convenientemente las sombras de los cuadrados SA-SB-SC-SD y SC-SD-SE-SF.

- Para determinar la sombra arrojada de un cuadrado sobre el otro es necesario dibujar rectas paralelas a la dirección de la luz λ que pasen por los vértices de los cuadrados y hallar la intersección de dichas rectas con el plano definido por el otro cuadrado.

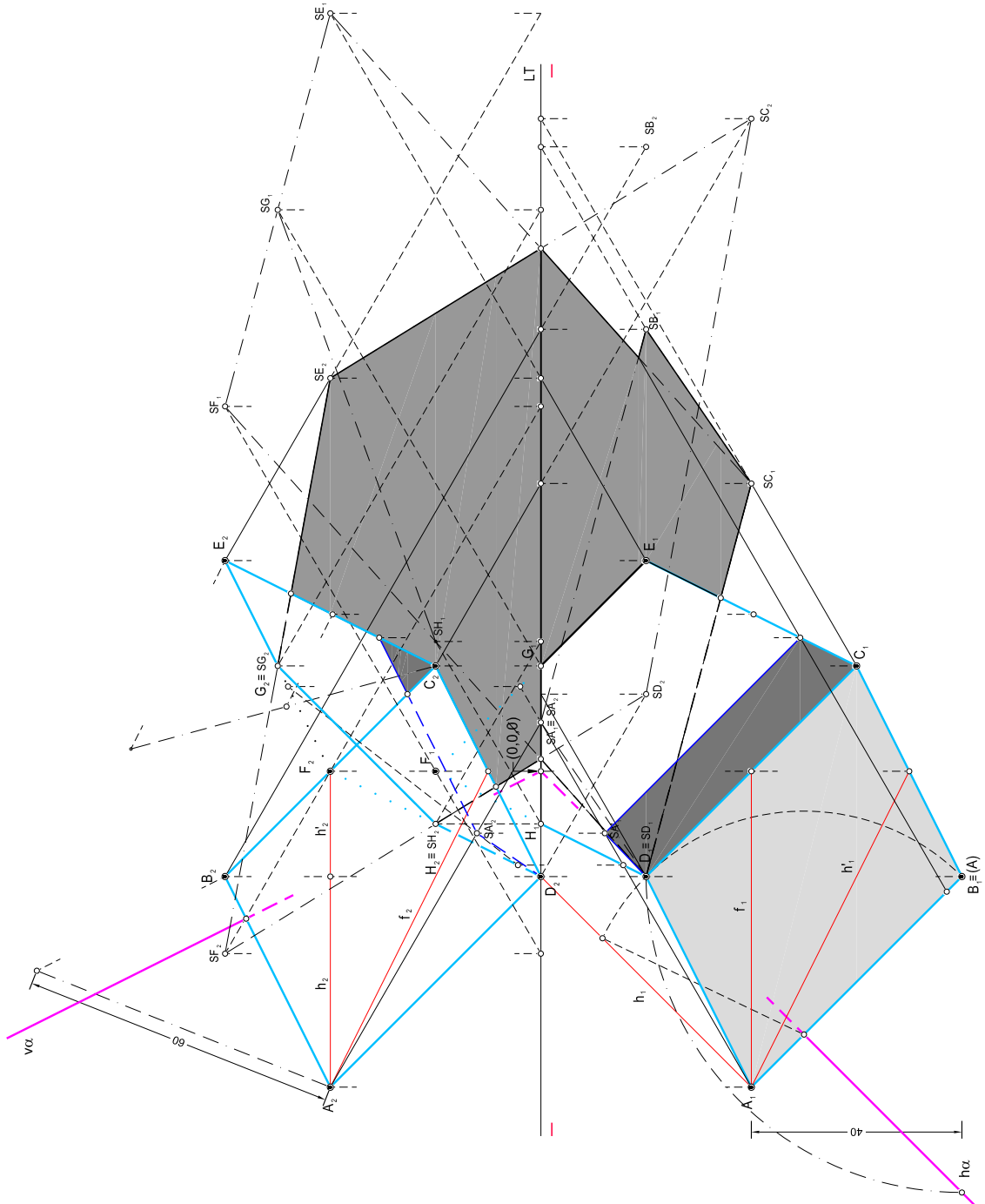


Fig. EF_11

e s c a l a g r á f i c a



EF_12

Hallar la intersección de los rectángulos ABCD - EFGH, la sombra propia y la sombra arrojada de un rectángulo sobre el otro y sobre los planos de proyección, con luz paralela a 45° bajando de la izquierda, siendo A(-8,2,2), B(0,0,9), C(3,4,7), D(-5,6,0) - E(-8,4,5), F(-6,0,9), G(4,1,4), H(2,5,0).

Solución

- Para hallar la intersección entre los dos rectángulos bajar los puntos de intersección de la recta E_2H_2 con las rectas A_2B_2 y C_2D_2 sobre la rectas en proyección horizontal A_1B_1 y C_1D_1 ; la unión de estos puntos interseca con la recta E_1H_1 en el punto 2.
- Bajar los puntos de intersección de la recta F_2G_2 con las rectas A_2B_2 y C_2D_2 sobre la rectas en proyección horizontal A_1B_1 y C_1D_1 . La unión de estos puntos interseca con la recta F_1G_1 en un punto que debe unirse con el punto 2 hallado anteriormente, este segmento interseca con la recta A_1B_1 en el punto 1. El segmento 1-2 es la intersección entre los rectángulos.
- Para determinar la sombra arrojada sobre los planos de proyección es necesario dibujar rectas paralelas a la dirección de la luz λ que pasen por los vértices de los rectángulos y hallar las trazas de dichas rectas sobre los planos de proyección. La sombra arrojada sobre los planos de proyección se obtiene uniendo convenientemente las sombras de los rectángulos SA-SB-SC-SD y SE-SF-SG-SH.
- Para determinar la sombra arrojada de un rectángulo sobre el otro es necesario dibujar rectas paralelas a la dirección de la luz λ que pasen por los vértices de los rectángulos y hallar la intersección de dichas rectas con el plano definido por el otro rectángulo. Del rayo que pasa por E se obtiene el punto 3 y por F se encuentra el punto 4. Uniendo los puntos 1-2-3-4 se obtiene la sombra arrojada por el rectángulo EFGH sobre el rectángulo ABCD. La sombra arrojada por el rectángulo ABCD sobre el rectángulo EFGH se halla encontrando la sombra (5 y 6) de dos puntos cualesquiera (5' y 6') de la recta DC sobre el rectángulo EFGH. Uniéndolos se obtiene la sombra arrojada por el rectángulo ABCD sobre el rectángulo EFGH.



EF_13

El segmento AB representa una de las diagonales de un rombo, que tiene sus otros dos vértices CD en el PV y en el PH respectivamente. Se pide;

- Representar las proyecciones diédricas de dicho paralelogramo.
- Girar la figura representada 45° en sentido horario, tomando como eje de giro una recta de punta que pasa por O.
- Hallar la intersección de las dos figuras.
- Sombra propia, arrojada y auto-arrojada, de una figura sobre la otra y sobre los planos de proyección.

Solución

- Construcción un plano α que es perpendicular al segmento AB y pasa por su punto medio (punto O).
- Abatir el punto O y la traza vertical (v_α).
- Determinar el punto C abatido que resulta de la intersección entre la traza vertical abatida (v_α) con la paralela a la traza horizontal h_α situada a 2 veces la distancia de (O) a la traza h_α (es decir, $2 \times \text{dist } 1$).
- Determinar (D). D1 como resultado de la intersección de la recta (OC) con la traza horizontal h_α .
- Desabatir C y D y construir el paralelogramo.
- Girar el paralelogramo 45° en sentido horario alrededor de una recta de punta que pasa por el punto O. En proyección vertical se giran los vértices 45° cogiendo como centro de rotación el punto O, en proyección horizontal los vértices se hallan teniendo en cuenta la nueva posición determinada en proyección vertical y que el alejamiento de los vértices es el mismo que el de la figura original. Paralelogramo A'B'C'D'.
- Hallar la intersección entre los dos cuerpos. Segmento 1-2.
- Hallar la sombra propia, arrojada y auto-arrojada de una figura sobre la otra y sobre los planos de proyección sabiendo cuál es la dirección de la luz.

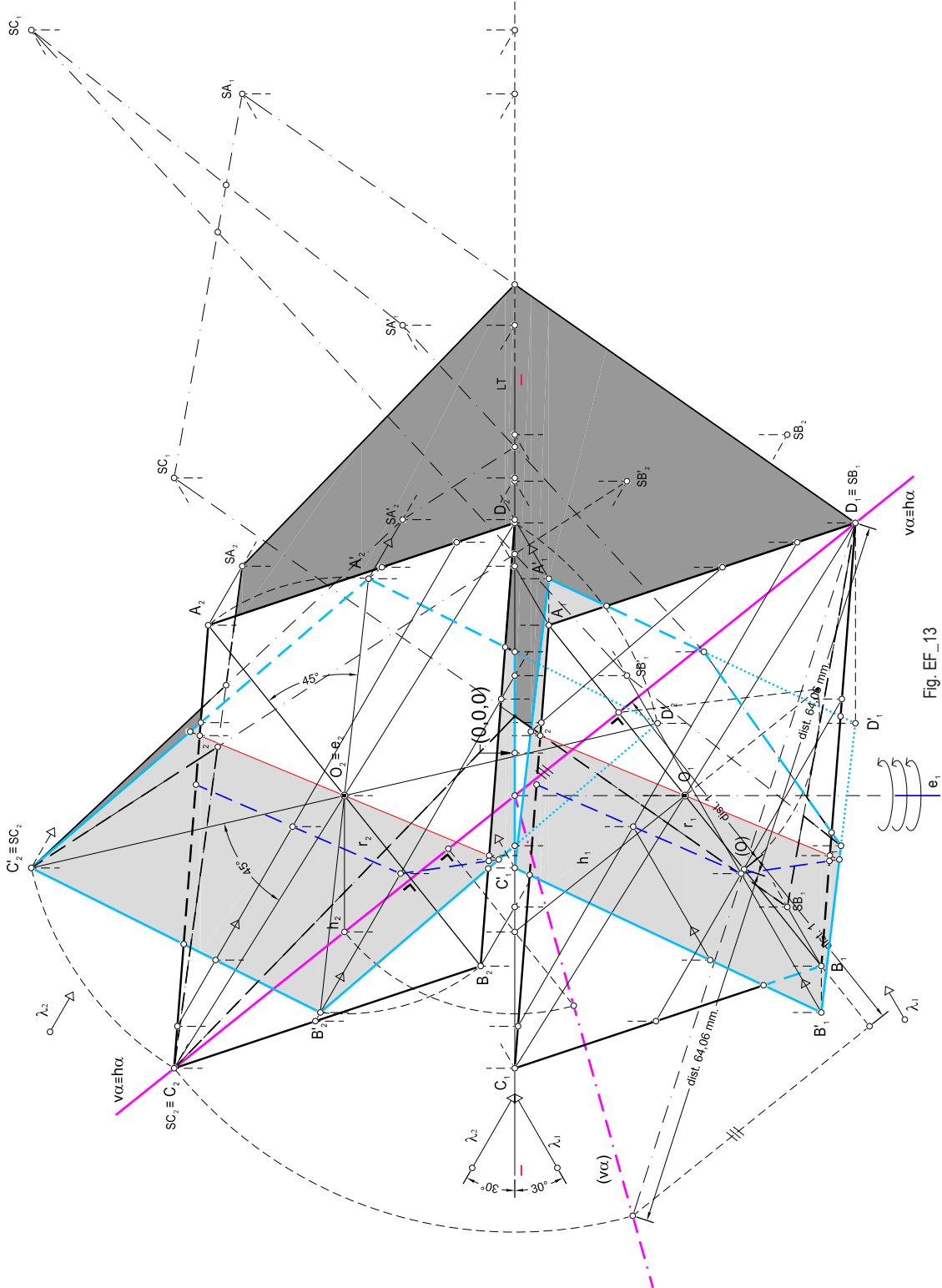


Fig. EF_13



EF_14

- a) Hallar la intersección de los planos α y β . El plano α contiene a la recta AB y es perpendicular al 2.º bisector, siendo A (-6,0,2) y B (0,6,0). El plano β pasa por la LT y el punto C (2,4,2). Origen y LT en el centro.

Solución

- El plano α es perpendicular al segundo bisector y por tanto tiene sus trazas en prolongación, las cuales se obtienen uniendo A_2 y B_1 , por estar estos puntos en los planos de proyección.
- Construir el plano β sabiendo que pasa por la LT y el punto C mediante un plano de perfil.
- Hallar la intersección entre (r) y (w_β) mediante el plano de perfil \rightarrow Punto (M).
- Determinar las proyecciones de M sobre la recta AB y unir M con N (punto donde coinciden las trazas del plano α) \rightarrow Recta s intersección entre los planos α y β .

- b) Hallar la distancia del punto A (4,0,0) al plano definido por las rectas MN y MP sin hallar las trazas del plano, siendo M(-2,1,5), N(4,6,1) y P(-5,2,2). Origen y LT en el centro.

Solución

- Trazar una recta frontal (recta f) y una recta horizontal (recta h) que pasen por P y estén contenidas en el triángulo definido por los puntos M, N y P.
- Determinar una recta que pase por A, cuya traza vertical sea perpendicular a f_2 y su traza horizontal sea perpendicular a h_1 . Esta recta pasa por A y es perpendicular al plano definido por las rectas MN y MP.
- Determinar los puntos de intersección entre las rectas MN y MP y un plano de canto que contiene la recta perpendicular anteriormente hallada. La unión de estos puntos en proyección horizontal define una recta que corta a la recta perpendicular en B. Este punto es la intersección de la recta perpendicular con el plano definido por las rectas MN y MP.
- Para hallar la verdadera magnitud entre A y B hay que abatir el triángulo rectángulo definido por los puntos A y B y la altura del punto B, siendo AB la hipotenusa del triángulo \rightarrow Distancia AB = 52,57 mm.



EF_15

- a) Hallar la proyección del segmento AB, $A(-3,6,1)$ y $B(-2,2,3)$ sobre los planos de proyección y el plano $\alpha(-4,4,2)$, siendo la dirección de proyección paralela a la recta que une el origen de coordenadas con el punto $C(-5,5,6)$. Origen y LT en el centro.

Solución

- Hallar las trazas sobre los planos de proyección de las rectas paralelas a la dirección λ que pasan por A y B. SA_1 y SB_1 son las proyecciones de los puntos sobre el plano horizontal. SA_2 y SB_2 son las proyecciones de los puntos sobre el plano vertical.
- Unir el punto SA_1 con el punto SB_1 y el punto SA_2 con el punto SB_2 para hallar las proyecciones del segmento AB sobre los planos de proyección.
- Para determinar la proyección sobre el plano α es necesario trazar rectas paralelas a λ que pasen por A y B, y hallar su intersección con el plano $\alpha \rightarrow$ Puntos SA' y SB' .
- Unir el punto SA_1' con el punto SB_1' y el punto SA_2' con el punto SB_2' para hallar las proyecciones del segmento AB sobre el plano α .
- Marcar las partes vistas y ocultas de las proyecciones de los segmentos.

- b) Hallar la mínima distancia y la perpendicular común a las rectas r y s . La recta r está definida por los puntos $A(0,2,0)$ y $B(2,0,4)$ y la recta s por los puntos $C(-1,-7,0)$ y $D(4,0,3)$. Origen y LT en el centro. Lámina vertical dividida en dos partes iguales.

Solución

- Por un punto cualquiera (punto A en el dibujo) de la recta r , trazar una recta t paralela a s .
- Las rectas r y t definen un plano α que es paralelo a s .
- Por un punto cualquiera (punto D en el dibujo) de la recta s , trazar una recta perpendicular al plano α y hallar su intersección \rightarrow Punto E.
- Trazar una recta paralela a s que pase por E y hallar su intersección con la recta $r \rightarrow$ Punto F.
- Trazar por F una paralela al segmento DE que cortará la recta s en el punto G.
- El segmento FG es la perpendicular común y su verdadera magnitud (20,95 mm) es la mínima distancia entre las rectas r y s .

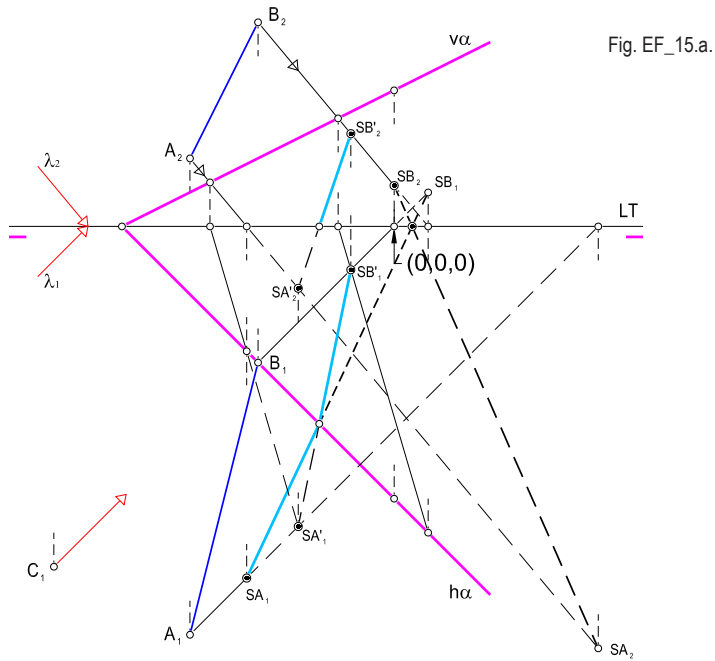


Fig. EF_15.a.

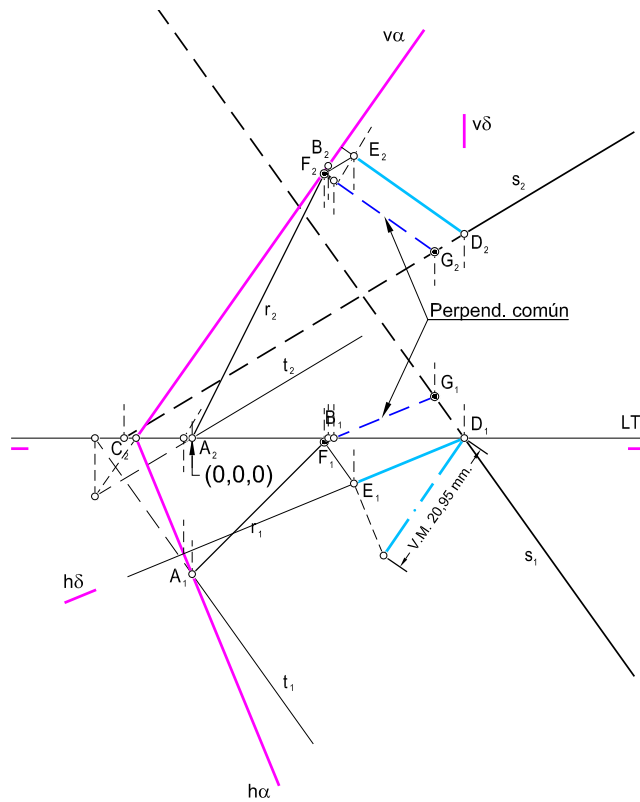
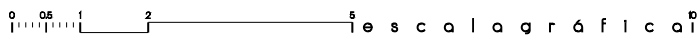


Fig. EF_15.b.





EF_16

- a) Hallar las trazas del plano que pasa por el punto $M(-4, 2, 3)$ y es paralelo al definido por los puntos $A(-6, 2, 5)$, $B(-4, 6, 1)$ y $C(-2, 2, 3)$. Origen y LT en el centro. Girar el plano resultante alrededor de un eje (vertical u horizontal, según proceda), que pase por el origen de coordenadas $(0,0,0)$, y en sentido horario, hasta convertirlo en un plano de canto.

Solución

- Trazar una recta frontal y una recta horizontal apoyadas en el triángulo ABC. En la resolución gráfica, la recta frontal pasa por los puntos A y C, y la recta horizontal pasa por C y un punto de la recta AB.
 - Para determinar las trazas del plano α que pasa por M y es paralelo al plano definido por los puntos ABC, es necesario apoyarse en rectas auxiliares que pasen por M y sean paralelas a las rectas frontal y horizontal halladas anteriormente.
 - Para transformar el plano α en un plano de canto se utiliza un eje vertical que pasa por el origen de coordenadas. Desde e_1 (que coincide con el origen de coordenadas) trazar una perpendicular a $h\alpha$ (línea de máxima pendiente) y girar la línea de máxima pendiente hasta que ésta sea paralela a la LT (en este caso es coincidente con la LT).
 - De esta forma, la traza h'_α que seguirá siendo perpendicular a la línea de máxima pendiente será también perpendicular a la LT. La nueva traza vertical del plano girado $v\alpha'$ pasa por el punto intersección entre h'_α y LT, y el punto intersección entre v_α y e_2 .
- b) Por el punto $A(0, 3, 4)$ trazar una recta que corte a la recta r definida por los puntos $B(0, 4, 3)$ y $D(4, 0, 1)$ y sea paralela al plano determinado por la LT y el punto $C(-4, 2, 4)$. Origen y LT en el centro.

Solución

- Hallar la recta que resulta de la intersección entre los planos α y β → Recta i .
- Trazar una recta paralela a la recta i que pase por el punto A → Recta s .
- Determinar la intersección entre la recta s y el plano χ (plano definido por la LT y el punto B) mediante un plano de perfil → Punto M.
- Marcar las partes vistas y ocultas suponiendo que los planos de proyección y el plano χ son opacos.

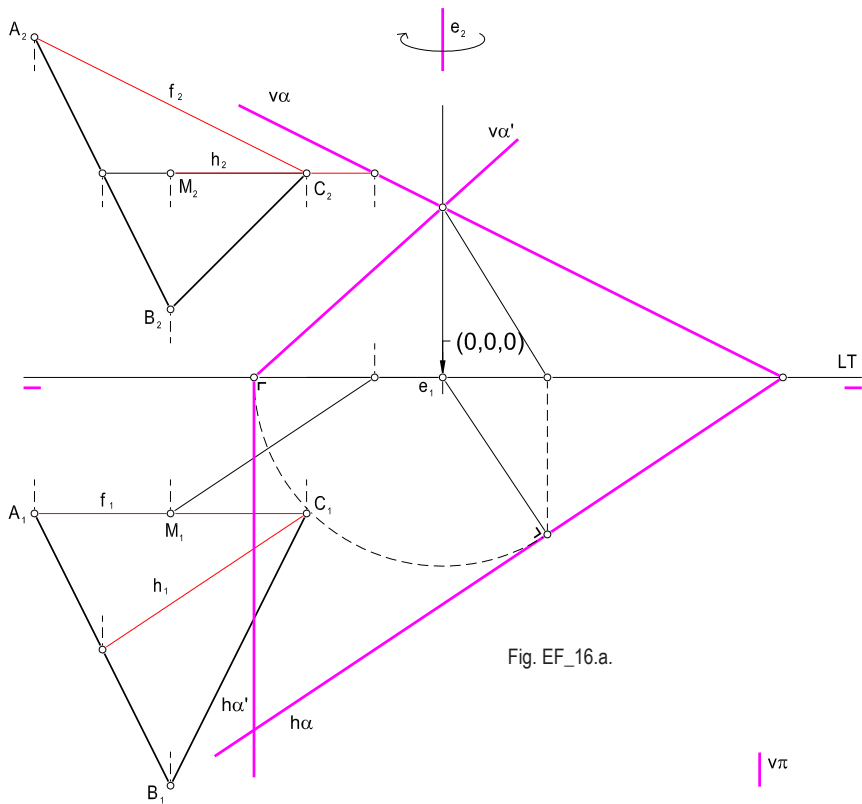


Fig. EF_16.a.

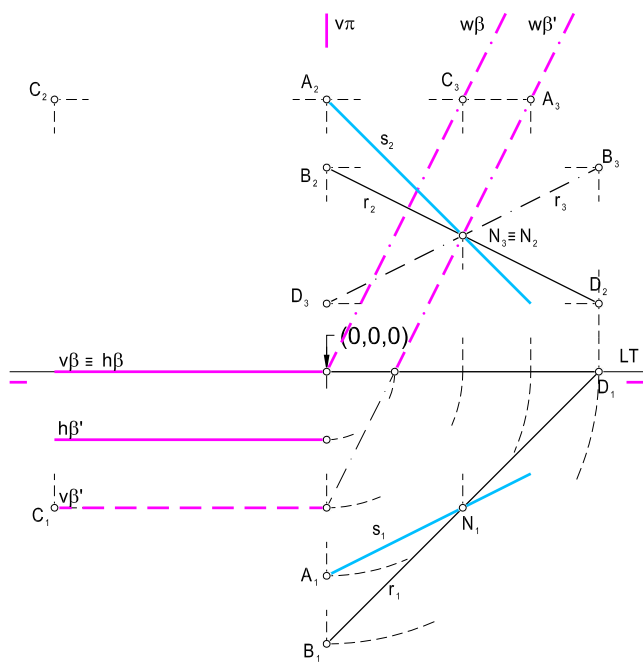


Fig. EF_16.b.

0 0.05 1 2 5 e s c a l a g r á f i c a 0



EF_17

- a) Por el punto $A(-3, 2, 0)$ trazar una recta paralela a los planos $\alpha(-4, 3, 4.5)$ y $\beta(2, 4, -4)$. Hallar la intersección de dicha recta con el plano definido por la LT y el punto $B(0, 5, 3)$ y dibujarla con partes vitas y ocultas suponiendo que los planos de proyección y el plano LT punto B son opacos. Origen y LT en el centro.

Solución

- Dibujar la recta r , el punto A y el plano β (plano definido por la LT y el punto C) en un plano de perfil.
- Trazar un plano paralelo al plano β que pase por A \rightarrow Trazar w_β' que pase por A3.
- Hallar la intersección que resulta entre w_β' y $r_3 \rightarrow$ Punto N_3 .
- Desabatir el punto N para obtener sus proyecciones en vertical y horizontal.
- Unir el punto A con el punto N \rightarrow Recta s que corta a la recta r y es paralela al plano β .

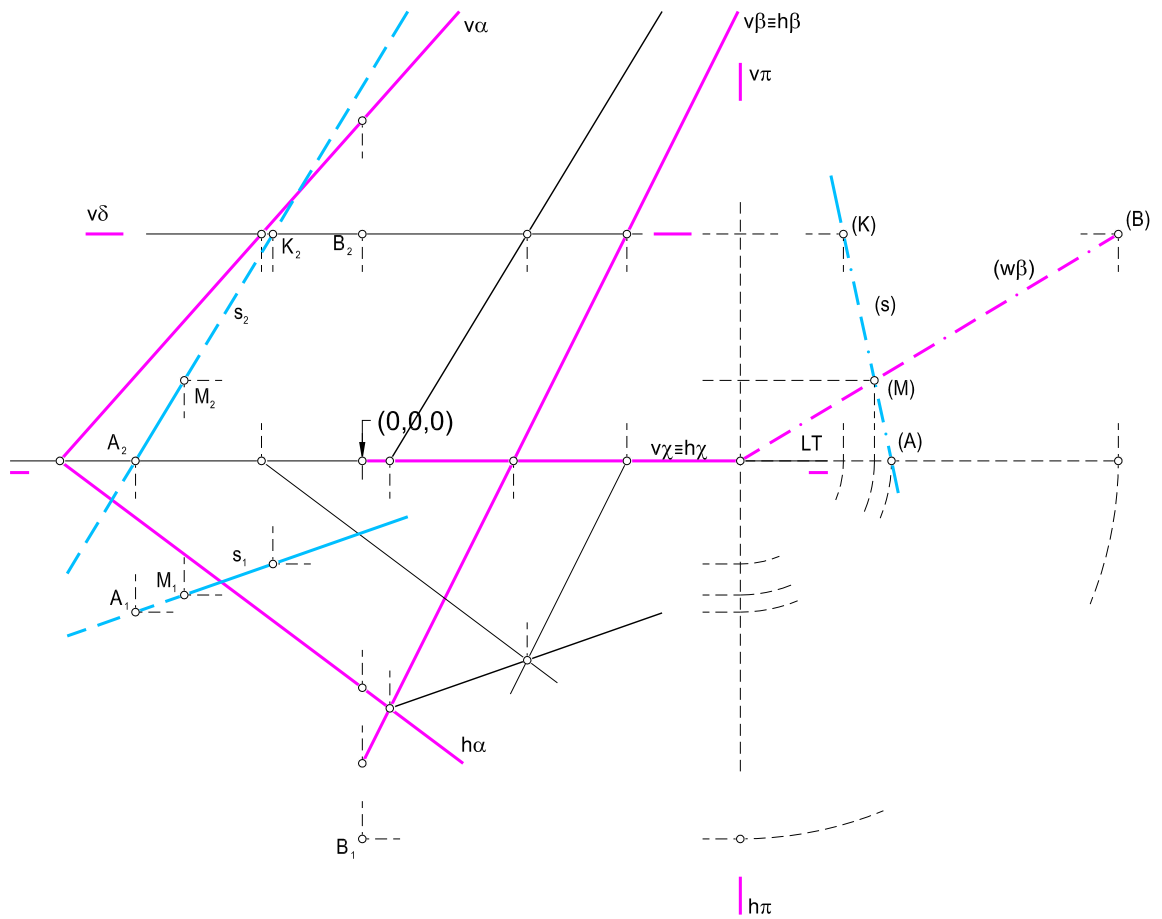


Fig. EF_17



EF_18

Dados los puntos $A(0, 6, 5)$, $B(-5, 2, 1)$ y $C(5, 4, -1)$, hallar el punto situado en el primer bisector que equidiste de los tres puntos y hallar la distancia de equidistancia. Origen y LT en el centro.

Solución 1.º procedimiento

- Hallar la traza horizontal del plano definido por los puntos A, B y C.
- Abatir el triángulo ABC sobre el plano horizontal.
- Hallar el circuncentro del triángulo abatido (ABC) puesto que este punto equidista de los tres vértices. El circuncentro (O) puede hallarse a partir de la intersección de las mediatrices de los lados del triángulo (ABC).
- Desabatir del circuncentro (O).
- Determinar una recta que pase por O y sea perpendicular al plano definido por los puntos A, B y C mediante una recta frontal y una recta horizontal.
- Hallar la intersección entre la recta perpendicular y el primer bisector \rightarrow Punto M.
- Determinar la verdadera magnitud entre el punto M y los vértices del triángulo (la verdadera magnitud es de 56,45 mm).

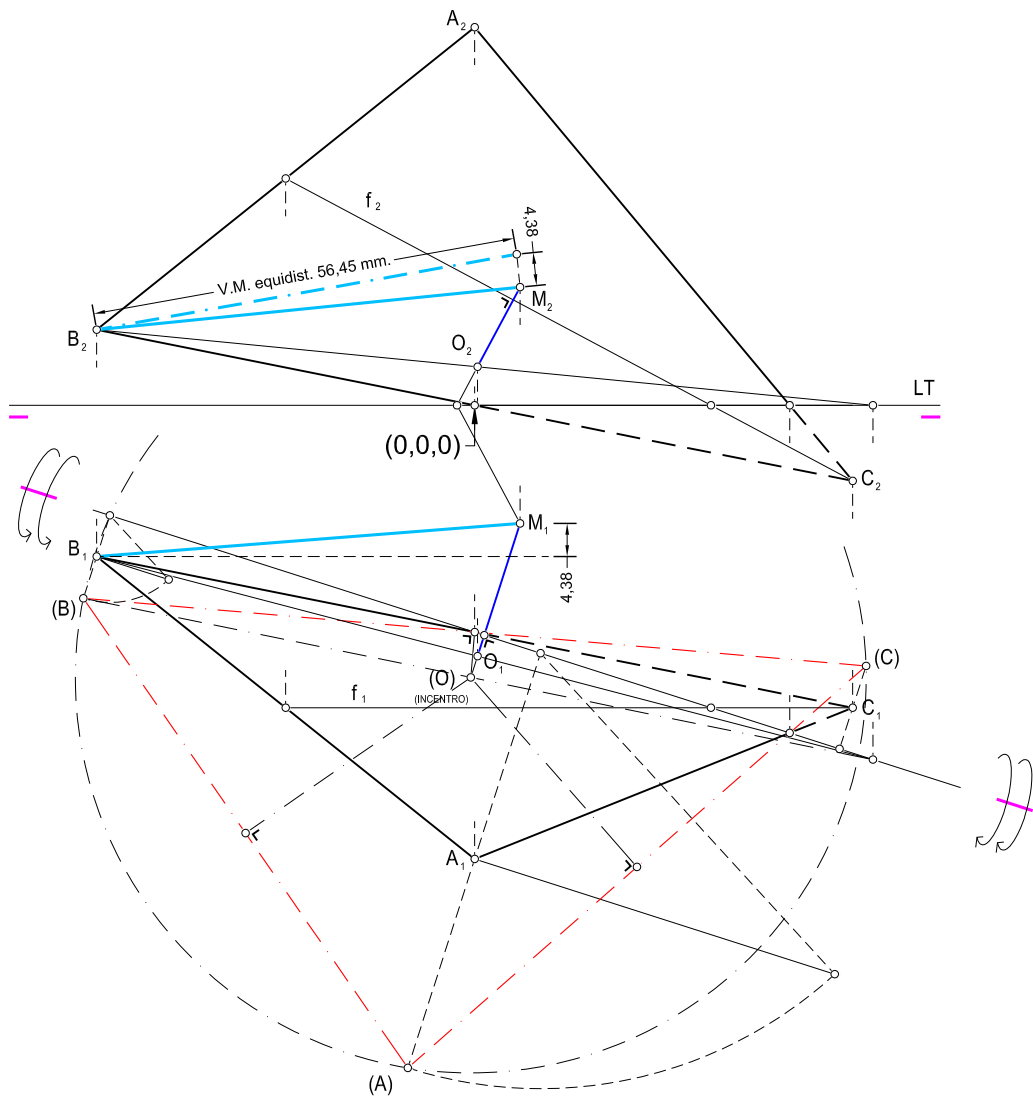


Fig. EF_18

0 0.5 1 2 5 | e s c a l a g r á f i c a | 10



EF_19

Dados los puntos A(0, 6, 5), B(-5, 2, 1) y C(5, 4, -1), hallar el punto situado en el primer bisector que equidiste de los tres puntos y hallar la distancia de equidistancia. Origen y LT en el centro.

Solución 2.º procedimiento

- M punto medio de AB y N punto medio de AC.
- Por M, plano α [v_α , h_α] perpendicular AB.
- Por N, plano β [v_β , h_β] perpendicular AC.
- Recta intersección de los planos α y $\beta \rightarrow r$.
- Intersección del plano ABC con la recta $r \rightarrow$ Pto. O [O_1 , O_2].
- Intersección del 1.º bisector con la recta $r \rightarrow$ Pto. M [M_1 , M_2].
- Determinar la verdadera magnitud entre el punto M y un vértice del plano ABC (la verdadera magnitud es de 56,45 mm entre BM).

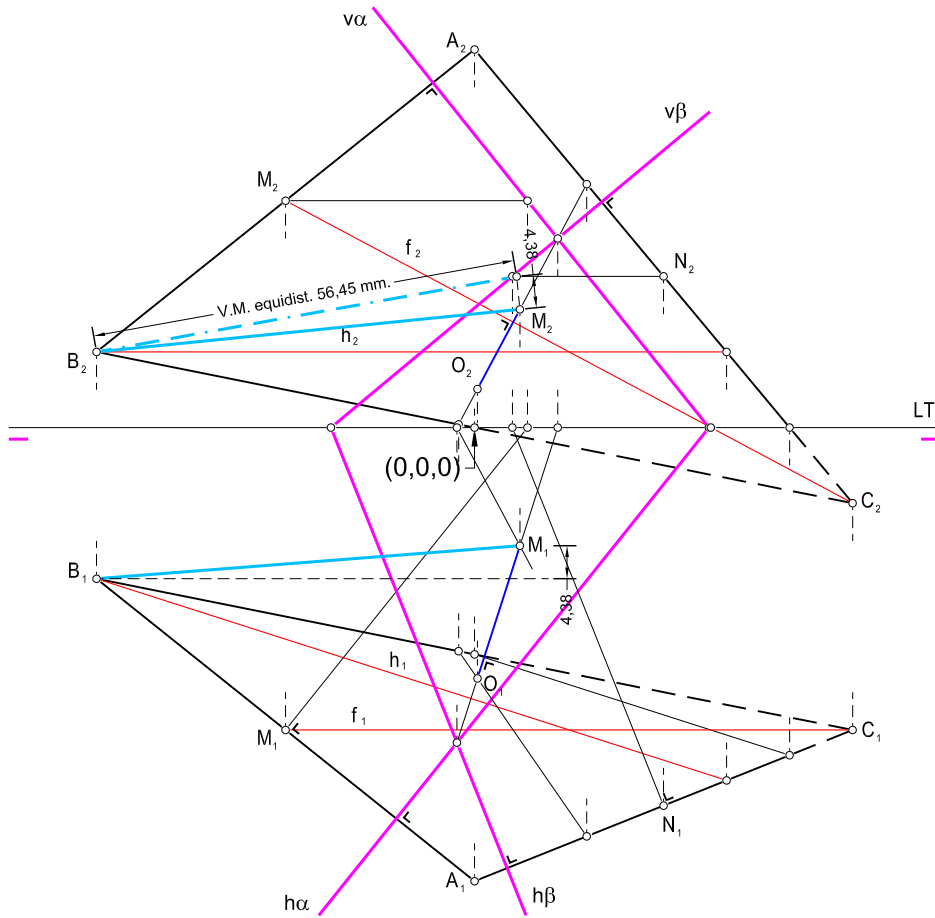
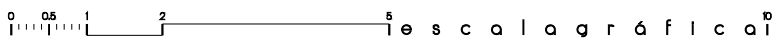


Fig. EF_19





EF_20

- a) Mediante dos giros, transformar la recta $A(0, 5, 0)$, $B(-5, 0, 8)$ en una recta de punta, a partir de ejes que pasen por el punto $C(-3, 0, 0)$.

Solución

- Para transformar la recta AB en una recta de punta es necesario transformar la recta AB en una recta horizontal y posteriormente transformarla en una recta de punta. Primero se llevará a cabo un giro alrededor del eje de punta e_1 que pasa por C . Para hacerlo es necesario girar la proyección vertical de la recta a partir del punto más cercano al eje de giro un ángulo θ hasta que la recta $A'B'$ quede paralela a la LT . En este caso resulta que θ es igual a 58° en el sentido contrario al de las agujas de reloj. Para obtener la proyección horizontal de la recta $A'B'$ es suficiente con bajar los puntos A'_2 y B'_2 puesto que A'_1 y B'_1 mantienen su alejamiento después del giro.
- Para transformar la recta horizontal $A'B'$ en una recta de punta debe realizarse un giro alrededor del eje vertical e_2 que pasa por C . Para hacerlo es necesario girar la recta $A'B'$ a partir del punto más cercano al eje de giro un ángulo φ hasta que la proyección horizontal de la recta quede perpendicular a la LT . En este caso resulta que φ es igual a 62° en el sentido de las agujas de reloj. Observamos que en proyección vertical las trazas de A y B coinciden ($A''_2 \equiv B''_2$) por ser $A''B''$ una recta de punta.

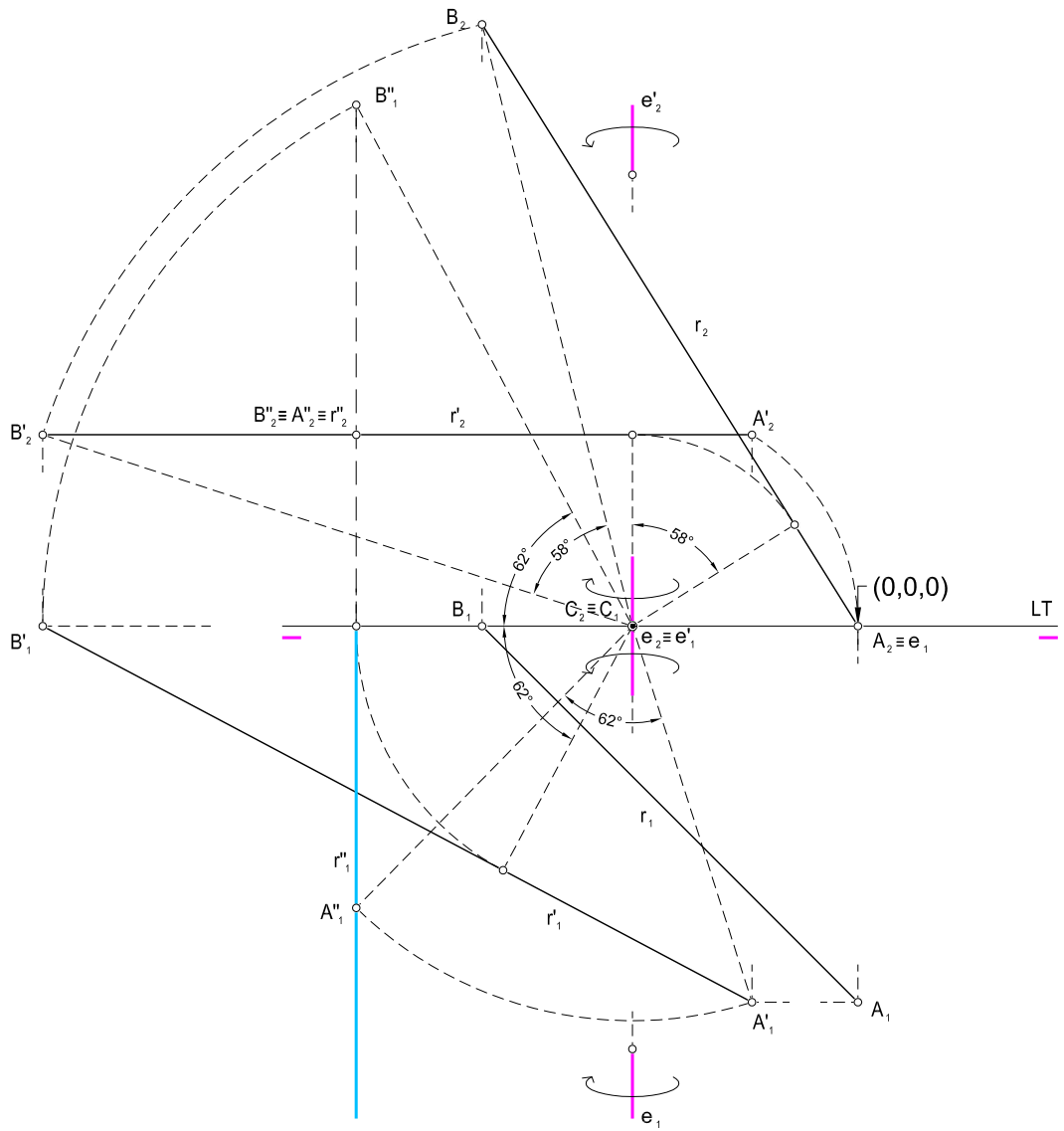


Fig. EF_20.a.

0 0.5 1 2 5 10 e s c a l a g r á f i c a



- b) Hallar mediante cambios de planos, la distancia en posición y en magnitud desde la recta $A(0, 4, 4) - B(2, 0, 2)$ a la recta, $C(-2, 3, 2) - D(4, 2, 1)$. Para realizar los cambios de planos, las nuevas líneas de tierra hacerlas pasar por el origen de coordenadas.

Solución

- En el segundo apartado, debemos transformar la recta CD en una recta vertical mediante cambios de plano para hallar la distancia entre las rectas AB y CD. En primer lugar cambiamos el plano vertical colocando la nueva LT paralela a la recta CD y que pase por el origen de coordenadas. En este cambio de plano, la proyección de C_1D_1 no varía y las proyecciones verticales de los puntos C' y D' se encuentran situadas en las perpendiculares a la nueva LT trazadas por C_1 y D_1 y sus cotas o distancias a la nueva LT serán las mismas que las de las proyecciones C_2 y D_2 . Con este cambio de plano conseguimos que la recta $C'D'$ pase a ser una recta horizontal. A continuación se halla la proyección vertical de la recta AB utilizando la misma LT.
- Realizar un segundo cambio de plano, en este caso se tratará de un cambio de plano horizontal y la nueva LT deberá pasar por el centro de coordenadas y situarse en posición perpendicular a la proyección vertical de la nueva recta horizontal $C'D'$. En este cambio de plano, la proyección de $C'_2D'_2$ no varía y las proyecciones horizontales de los puntos C' y D' se encuentran situadas en las perpendiculares a la nueva LT trazadas por C'_2 y D'_2 y sus alejamientos o distancias a la nueva LT serán las mismas que las de las proyecciones C_1 y D_1 . Con este cambio de plano conseguimos que la recta $C'D'$ pase a ser una recta vertical, y por consiguiente, $C'_1 \equiv B'_1$. A continuación se halla la proyección horizontal de la recta AB utilizando la misma LT.
- Determinar la verdadera magnitud entre las rectas AB y CD trazando una perpendicular a $A'_1B'_1$ desde $C'_1 \equiv B'_1$. El segmento MN es la perpendicular entre las dos rectas \rightarrow Verdadera magnitud $M'_1N'_1 = 15,67$ mm.
- Deshacer los cambios de plano realizados anteriormente para hallar los puntos M y N sobre los planos de proyección originales.
- Unir M y N \rightarrow MN es la perpendicular común a las rectas AB y CD.

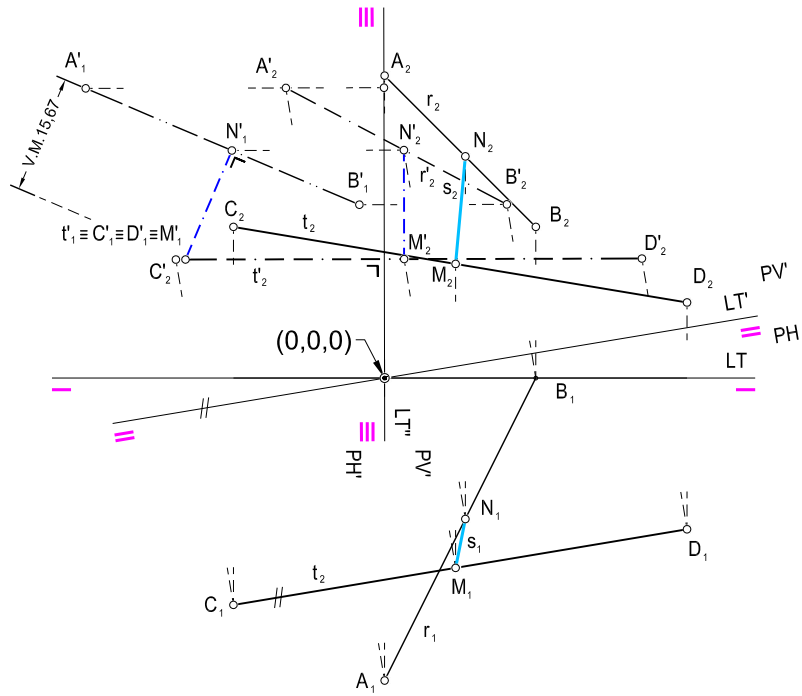


Fig. EF_20.b.



EF_21

Por el punto $A(-2,7,6)$ trazar dos rectas paralelas al plano $\alpha(5,4,9)$ y que formen 60° con el plano $\beta(-4,6,4)$.

Solución

- Determinar la intersección entre el plano β y una recta perpendicular al plano β que pasa por el punto $A \rightarrow$ Punto O .
- Hallar la verdadera magnitud del segmento AO (55,43 mm).
- Dibujar un cono auxiliar de vértice A , altura el segmento AO y base contenida en el plano β . Además, el radio de la base será aquel que permita que las generatrices formen 60° con el plano $\beta \rightarrow$ Radio igual a 32 mm. Sabiendo que todas las rectas contenidas en el cono que pasen por A forman 60° con el plano β es necesario encontrar las dos rectas que además son paralelas al plano α .
- Dibujar las trazas de un plano χ que sea paralelo al plano α y contenga el punto A (para hallar sus trazas es necesario apoyarse en una recta horizontal h que pase por A y sea paralela a la traza h_a).
- Determinar la intersección entre el plano β y el plano $\chi \rightarrow$ Recta m .
- Abatimiento del plano β , la recta m , la base del cono y el punto O sobre el plano horizontal de proyección.
- A partir de la intersección de la recta abatida (m) y la base del cono abatida se obtienen los puntos (B) y (C).
- Desabatir los puntos B y C.
- Unir los puntos B y C con el vértice del cono, es decir, el punto A . De esta manera se obtienen las rectas r y s que son paralelas al plano α y forman 60° con el plano β .

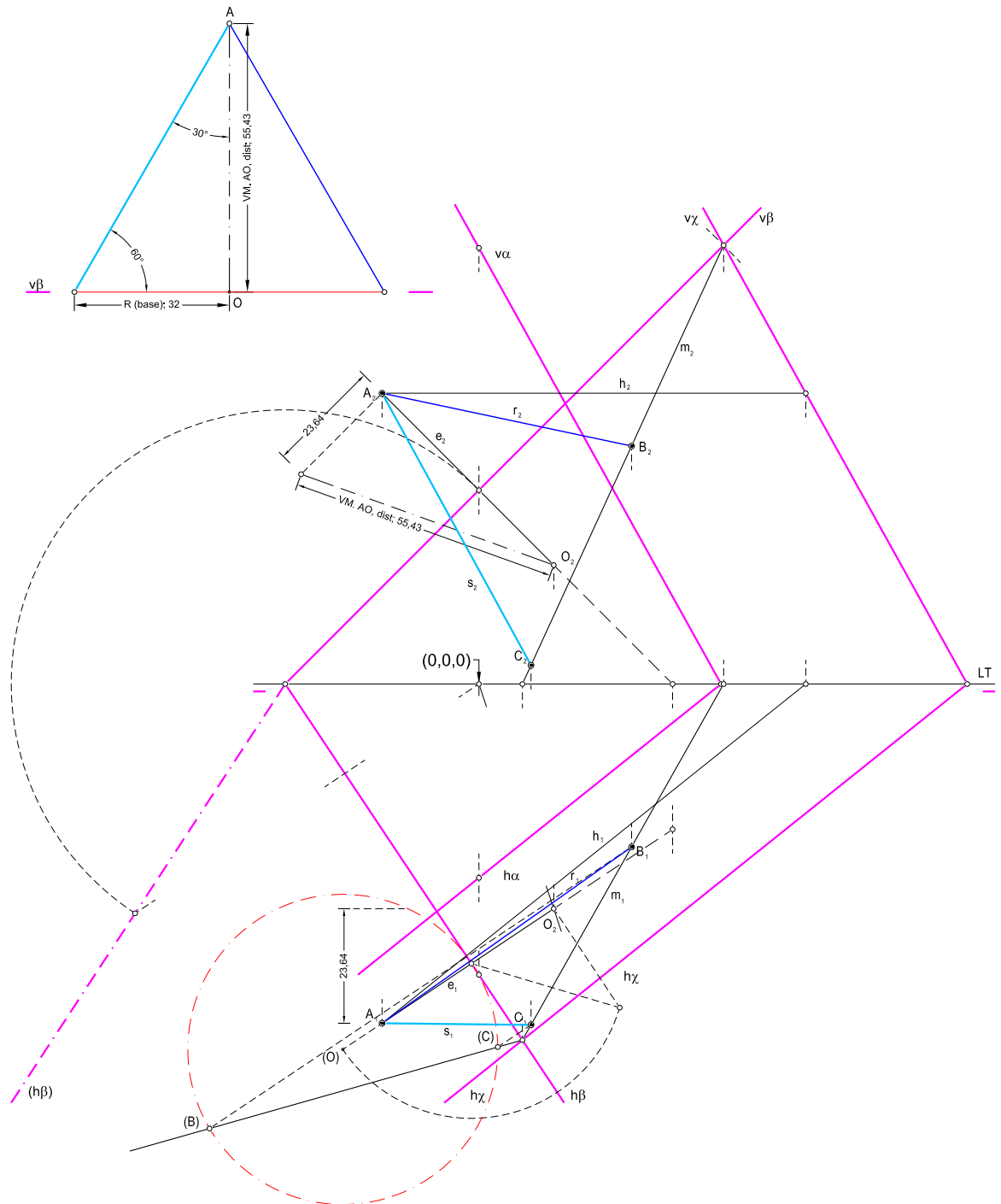
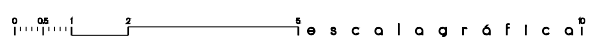


Fig. EF_21





EF_22

Determinar los ángulos que forman los planos γ (-6,8,5) y δ (5,4,10) y hallar las trazas de los dos planos bisectores.

Solución

- Determinar la intersección entre el plano χ y el plano $\delta \rightarrow$ Recta r .
- Tomamos un punto cualquiera (punto A) de la recta r y por él trazamos el plano α perpendicular a la intersección r .
- El plano α corta a los planos χ y δ según dos rectas t y s respectivamente que se cortan en el punto A.
- Abatimiento del plano α , las rectas t y s y el punto A sobre el plano horizontal de proyección.
- Determinar los ángulos que forman la recta (t) con la recta (s) $\rightarrow 71^\circ$ y 109° .
- Dibujar las bisectrices de las rectas (t) y (s) \rightarrow Bisectrices (m) y (n).
- Desabatir las rectas m y n .
- Uniendo las trazas de m y r se obtienen las trazas del plano bisector φ . Del mismo modo, uniendo las trazas de n y r se obtienen las trazas del plano bisector ε .

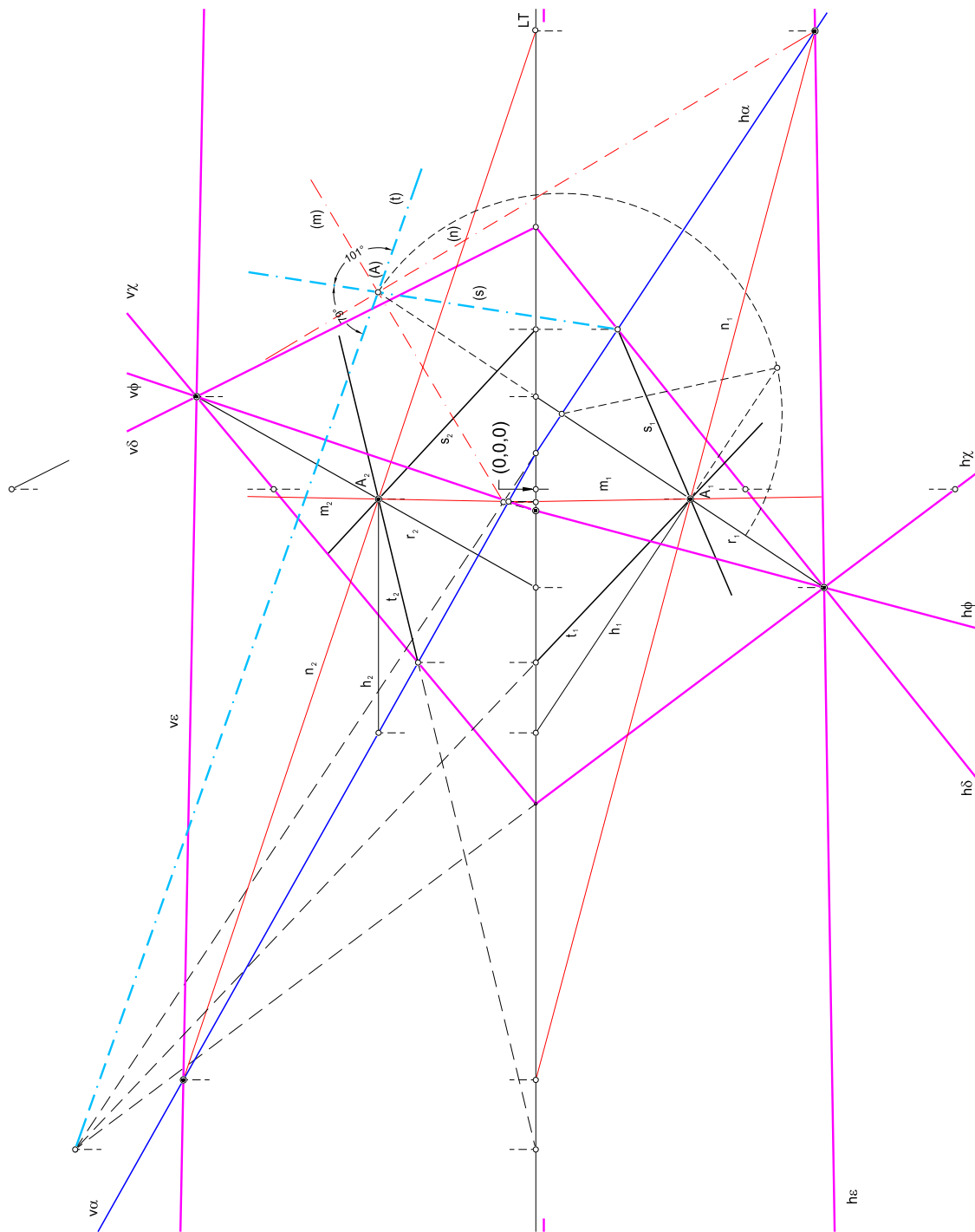


Fig. EF_22

