

## Introducción

El tratamiento de las observaciones topográficas destinadas a cálculos altimétricos o de coordenadas mediante procedimientos como las triangulaciones o los itinerarios, ha sido, tradicionalmente, objeto de estudio. Los manuales clásicos de topografía están dedicados, en gran parte, a describir sistemas, más o menos ingeniosos, para analizar, compensar y corregir los errores en las observaciones.

Estos métodos, si bien tienen el mérito de sacar consecuencias de la experiencia y articularlas en forma de protocolos sistematizados, no son, en general, rigurosos en el análisis de la transmisión del error de las observaciones a los resultados calculados a partir de estas observaciones.

En nuestros días no hay duda de que el enfoque adecuado consiste en considerar las observaciones como variables aleatorias y aplicar el análisis estadístico a la propagación del error. Los métodos basados en el criterio de los mínimos cuadrados permiten articular una teoría coherente en torno a este problema, y la prevención que han suscitado en otra época, a causa que se traducen en muchas operaciones matriciales, actualmente ha desaparecido gracias a los modernos sistemas de cálculo automatizado.

Este manual es el fruto de la experiencia docente en los estudios de Ingeniería Técnica en Topografía de la Escuela Universitaria Politécnica de Barcelona, donde la formación matemática tiene dos vertientes. Una de matemáticas generales, donde se introducen los temas imprescindibles de álgebra y cálculo, prácticamente comunes a cualquier ingeniería, y otra, donde se enmarca el ajuste de observaciones, dedicada a la introducción de conceptos matemáticos propios de la topografía la geodesia, la cartografía o la fotogrametría. En este sentido, el temario está diseñado de acuerdo con la utilización específica en estas materias.

A causa de la escasez de literatura que trate el ajuste de observaciones para métodos de mínimos cuadrados aplicados a la topografía en lengua castellana y dado que las referencias más corrientes en este ámbito no son muy asequibles, se han ido elaborando unos apuntes, cada año más completos, que han desembocado en el presente manual. Está pensado como la continuación natural de un curso (imprescindible) de fundamentos de estadística para estudiantes de materias relacionadas con la topografía y, en este sentido, puede ser de utilizado por estudiantes de cualquier ingeniería que incluya estas materias en sus programas.

El enfoque que se ha dado es el de la inclusión secuencial de conceptos siguiendo la metodología de la mayoría de tratados en la materia como, por ejemplo, [LAU83] y [LIN63]. Los dos primeros capítulos sirven para hacer la conexión entre los métodos estadísticos y el método de los mínimos cuadrados, y para introducir los conceptos de observación ponderada y de matriz de covariancia. En los capítulos tercero y cuarto, dedicados a observaciones indirectas, se estudia la aplicación del método de los mínimos cuadrados a problemas como la compensación de nivelaciones y de redes GPS, el cálculo de coordenadas mediante triangulaciones o la estimación de los parámetros de una

transformación de semejanza. La distinción, aparentemente innecesaria, entre observaciones ponderadas y equiprobables es útil para ilustrar diferentes formas de incluir pesos en las ecuaciones. El capítulo quinto está dedicado al ajuste de observaciones mediante ecuaciones de condición y tiene como principal aplicación, en el ámbito de la topografía, la compensación de itinerarios. En este caso ya no se hace la distinción entre observaciones ponderadas y equiprobables.

En todos capítulos se ha procurado mantener el equilibrio entre el rigor formal propio de un texto de matemáticas y el punto de vista práctico, enfocado a las aplicaciones, de un texto de topografía, ya que este manual no pretende ser ni una cosa ni la otra, pero sí recoger ciertas características de ambas.

En el aspecto matemático, la finalidad principal es la de explicar el significado analítico (de mínimo local condicionado o no), probabilístico (de máxima verosimilitud) y estadístico (de estimación paramétrica) del criterio de los mínimos cuadrados, así como la utilidad del análisis estadístico para el estudio de la propagación del error. Por otra parte, desde el punto de vista formal, se ha puesto especial interés en que la exposición sea clara y las ideas que se introducen sean fácilmente identificables en forma de definiciones o enunciados de proposiciones, a parte de los comentarios en forma de observaciones. En cuanto a las demostraciones, sólo se hacen aquellas que son sencillas y no suponen conceptos matemáticos alejados del ámbito de los temas tratados. En otros casos se sustituyen por justificaciones más o menos intuitivas o se obvian porque se trata de enunciados suficientemente conocidos de la estadística o porque, en algún punto anterior del libro, se ha demostrado un resultado análogo.

En el aspecto práctico, se ha puesto especial énfasis en la utilidad de los conceptos matemáticos introducidos, y en el hecho de que cada una de las posibles aplicaciones esté ilustrada con ejemplos. En un material docente de las características de este manual, para no perder credibilidad en las aplicaciones concretas, es importante que, tanto como sea posible, los datos provengan de casos reales. Por ello, en general están sacados de libros y, en estos casos, se da la referencia. Los cálculos y algunas representaciones gráficas que salen en estos ejemplos, aunque sean académicos, serían imposibles de hacer sin la utilización de algún asistente informático. Se ha escogido MAPLE porque, además de su alto nivel de prestaciones, es el programa para el cual la UPC tiene licencia de Campus y, por tanto, está disponible en la mayoría de salas de cálculo a que tienen acceso los estudiantes de esta Universidad. Se han mantenido las sentencias del lenguaje MAPLE, evidenciadas mediante un cambio de formato de letra, para incentivar a los estudiantes a que utilicen este tipo de programas, sin los cuales difícilmente podrán practicar los ejercicios propuestos.

## Índice

### 1 Error en las observaciones. Matriz de varianza-covarianza

1.1	Introducción.....	11
1.2	Matriz de varianza-covarianza.....	12
1.2.1	Propagación de la matriz de varianza-covarianza en expresiones lineales.....	13
1.2.2	Propagación de la matriz de varianza-covarianza en expresiones no lineales.....	15
1.3	Ejercicios.....	18

### 2 Observaciones directas

2.1	Medidas directas de igual precisión.....	19
2.1.1	Mínimos cuadrados y máxima verosimilitud.....	19
2.1.2	Precisión en la estimación por mínimos cuadrados.....	21
2.1.3	Estimación por intervalos.....	23
2.2	Observaciones ponderadas.....	26
2.2.1	Mínimos cuadrados y máxima verosimilitud.....	27
2.2.2	Precisión en la estimación por mínimos cuadrados.....	29
2.3	Ejercicios.....	34

### 3 Observaciones indirectas. Modelo lineal

3.1	Introducción.....	37
3.2	Solución de un sistema lineal sobredeterminado de ecuaciones de observación.....	40
3.2.1	Mínimos cuadrados y máxima verosimilitud.....	40
3.2.2	Solución mínimo-cuadrática.....	41
3.3	Precisión en la estimación por mínimos cuadrados.....	45
3.3.1	Errores asociados al estimador por mínimos cuadrados.....	46
3.3.2	El error en las observaciones. Varianza de referencia a posteriori.....	47
3.3.3	Estimación por intervalos.....	49
3.4	Observaciones ponderadas.....	51
3.4.1	Mínimos cuadrados y máxima verosimilitud.....	52
3.4.2	Solución mínimo-cuadrática.....	52
3.5	Precisión en la estimación por mínimos cuadrados con observaciones ponderadas.....	54
3.5.1	Errores asociados al estimador por mínimos cuadrados.....	54
3.5.2	El error en las observaciones. Varianza de referencia a posteriori.....	55
3.5.3	Estimación por intervalos.....	55
3.6	Análisis de los residuos.....	57
3.6.1	Test de bondad del ajuste.....	58

3.6.2	Observaciones ajustadas.....	58
3.6.3	Números de redundancia.....	59
3.6.4	Detección de errores groseros.....	60
3.7	Resumen.....	62
3.8	Transformación de semejanza.....	68
3.8.1	Transformación de semejanza bidimensional.....	69
3.8.2	Transformación de semejanza tridimensional.....	73
3.9	Redes GPS.....	74
3.10	Ejercicios.....	81

#### **4 Observaciones indirectas. Modelo no lineal**

4.1	Linealización.....	85
4.1.1	Iteración.....	86
4.1.2	Resumen.....	87
4.2	Elipse de error.....	92
4.3	Triangulación. Ecuaciones de ángulo.....	97
4.4	Trilateración. Ecuaciones de distancia.....	108
4.5	Utilización de ecuaciones de ángulo y de distancia conjuntamente.....	113
4.6	Transformación de semejanza tridimensional.....	121
4.7	Ejercicios.....	130

#### **5 Observaciones condicionadas**

5.1	Introducción.....	135
5.2	Estimación de parámetros mediante ecuaciones de condición en un modelo lineal.....	136
5.3	Mínimos cuadrados y máxima verosimilitud.....	138
5.3.1	El problema de extremos condicionados.....	139
5.4	Precisión en la estimación por mínimos cuadrados.....	143
5.4.1	Errores asociados al estimador por mínimos cuadrados.....	143
5.4.2	El error en las observaciones. Varianza de referencia a posteriori.....	144
5.4.3	Estimación por intervalos.....	145
5.5	Ecuaciones de condición no lineales.....	148
5.6	Cálculo de coordenadas por el método del itinerario.....	151
5.6.1	La verdadera naturaleza del problema: el ajuste estadístico de las observaciones.....	153
5.6.2	Compensación de itinerarios por el método de los mínimos cuadrados.....	154
5.6.3	Evaluación del error en las coordenadas.....	156
5.7	Ejercicios.....	160

<b>Bibliografía.....</b>	<b>165</b>
--------------------------	------------

<b>Índice alfabético.....</b>	<b>167</b>
-------------------------------	------------

## 1 Error en las observaciones. Matriz de varianza-covarianza

### 1.1 Introducción

Sea  $\mu$  el valor de una magnitud física desconocida que queremos medir. Por ejemplo, una distancia. Supongamos que hacemos  $n$  medidas  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de esta magnitud. Evidentemente, si no se quiere una buena precisión y se redondean las medidas a una unidad grande, como por ejemplo el metro, los  $n$  valores resultarán iguales. Pero si buscamos una buena precisión y redondeamos al milímetro obtendremos, en general,  $n$  valores diferentes.

Esto es debido a que toda observación está sometida a error. Aunque se hayan eliminado los errores sistemáticos debidos, por ejemplo, a la temperatura ambiente o a las características del aparato utilizado, siempre hay multitud de factores imponderables que contribuyen a la existencia de fluctuaciones estadísticas en el resultado de la medida y que hacen que dos medidas diferentes de la misma magnitud, hechas por la misma persona en las mismas circunstancias, den resultados diferentes.

Debemos distinguir, pues, entre una magnitud *observable*  $x$ , el *verdadero valor* de la cual  $\mu$ , que es intrínsecamente desconocido, y las *observaciones*  $u_i$ , que son conocidas pero que sólo son aproximaciones puntuales del verdadero valor  $\mu$  que queremos medir.

La forma precisa de expresar esta idea de aproximación al verdadero valor la proporciona el lenguaje estadístico. Toda magnitud observable  $x$  es una variable aleatoria cuyo verdadero valor es su esperanza matemática,  $\mu = E(x)$ , y las observaciones  $u_i$  son realizaciones de esta variable aleatoria que se distribuyen alrededor de su valor medio  $\mu$ , con una cierta desviación tipo  $\sigma$ . Además, como el carácter aleatorio de las observaciones es debido a multitud de pequeñas contribuciones, se acepta universalmente la hipótesis de que siguen la ley normal. Resumiendo, aceptaremos que toda magnitud observable  $x$  es una variable aleatoria  $N(\mu, \sigma)$ .

Dado un conjunto de  $n$  medidas observacionales  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , las consideraremos como realizaciones de  $n$  variables aleatorias  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , cada una de ellas siguiendo una ley normal  $N(\mu_i, \sigma_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Si se trata de  $n$  observaciones de una misma magnitud, entonces  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$ . Si, independientemente de si se observan una o varias magnitudes diferentes, todas las observaciones tienen la misma precisión, entonces  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n$ . Las observaciones más precisas tendrán menor desviación tipo y, lógicamente, deberán contribuir con mayor peso relativo a los cálculos que se efectúen con ellas. De esta idea surgen las siguientes definiciones.

**Definición 1** *Peso de una observación. Varianza de referencia*

Dado un conjunto de  $n$  medidas observacionales  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , con desviaciones tipo  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  respectivamente, llamaremos *peso*  $p_i$  de una observación  $u_i$  a la inversa de su varianza

$$p_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} \quad (1.1)$$

multiplicada por la varianza  $\sigma^2$  correspondiente a las observaciones de peso unidad, llamada también *varianza de referencia*.

La varianza de referencia es un factor de escala, en principio arbitrario, que puede coincidir o no con la varianza de alguna de las observaciones. Si es así, la observación correspondiente tiene peso unidad. Por ello, es frecuente que reciba el nombre de *varianza de peso unidad*. Obsérvese, además, que si  $\sigma^2$  y  $\sigma_i^2$  corresponden a mediciones de magnitudes físicas de la misma dimensión (dos ángulos o dos distancias) el peso es adimensional y no depende de las unidades de medida. En caso contrario, por ejemplo si  $\sigma^2$  corresponde a un ángulo y  $\sigma_i^2$  a una distancia, el peso no es adimensional y depende de las unidades de medida.

En general, las observaciones son variables aleatorias independientes. Pero puede suceder, por ejemplo si los resultados de un ajuste se toman como datos en un ajuste posterior, que los datos observacionales estén correlacionados, en cuyo caso habrá que considerar, además de su varianza individual  $\sigma_i^2$ , las correspondientes covarianzas  $\sigma_{ij}$ .

Uno de los principales problemas que se deben resolver al utilizar medidas observacionales en cálculos posteriores (por ejemplo, al utilizar observaciones angulares y de distancia para el cálculo de coordenadas en un levantamiento topográfico) es el de evaluar la propagación de la varianza, y en su caso también la covarianza, a través de dichos cálculos. Es decir, estudiar cómo se propaga el error en las observaciones al valor de las variables que calculamos a partir de ellas.

## 1.2 Matriz de varianza-covarianza

Todo vector aleatorio  $n$ -dimensional  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , como por ejemplo un vector de  $n$  observaciones, tiene asociado el correspondiente vector de desviaciones tipo  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  y, fijada la varianza de referencia  $\sigma^2$ , el correspondiente vector de varianzas normalizadas  $(\sigma_1^2/\sigma^2, \sigma_2^2/\sigma^2, \dots, \sigma_n^2/\sigma^2)$  y el correspondiente vector de pesos formado por los respectivos valores inversos de las varianzas normalizadas  $(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\sigma^2/\sigma_1^2, \sigma^2/\sigma_2^2, \dots, \sigma^2/\sigma_n^2)$ . Pero si las variables aleatorias  $u_i$  no son independientes, es preciso considerar también las correspondientes covarianzas, cosa que da lugar a la definición siguiente:

**Definición 2** *Matrices de varianza-covarianza, cofactor y peso*

Toda variable aleatoria  $n$ -dimensional  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  tiene asociada una *matriz de varianza-covarianza* :

$$\Sigma_u = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

donde el elemento  $ij$  es la covarianza de las variables  $u_i, u_j$  y el elemento  $i$ -ésimo de la diagonal es la varianza de la variable  $u_i$ .

Llamamos *matriz cofactor* a la matriz de varianza-covarianza con la varianza de referencia:

$$Q_u = \frac{1}{\sigma^2} \Sigma_u \tag{1.3}$$

Y matriz peso a la inversa de la matriz cofactor

$$W_u = Q_u^{-1} = \sigma^2 \Sigma_u^{-1} \tag{1.4}$$

**Observaciones**

- Los errores o desviaciones tipo asociados a una variable aleatoria  $n$ -dimensional  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  están determinados por su matriz de varianza-covarianza  $\Sigma_u$ . Conocida la matriz cofactor, para calcular estos errores sólo tenemos que multiplicarla por la varianza de referencia:

$$\Sigma_u = \sigma^2 Q \tag{1.5}$$

- Si las variables  $u_1, u_2, \dots, u_n$  son independientes, entonces estas matrices son diagonales. En particular, la matriz peso  $W_u$  coincidirá con la matriz diagonal  $P$  de pesos:

$$W_u = P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

**1.2.1 Propagación de la matriz de varianza-covarianza en expresiones lineales**

Por la estadística sabemos que la esperanza matemática es un operador lineal, es decir que, dadas dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$ , se satisface

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

mientras que la varianza no lo es y se tiene

$$VAR(aX + bY) = a^2 VAR(X) + b^2 VAR(Y) + 2ab COV(X, Y)$$

Este resultado se generaliza, en términos de la matriz de varianza-covarianza o de la matriz cofactor, según la siguiente proposición, una demostración de la cual se puede encontrar, por ejemplo, en [MIG81].

**Proposición 1**

Si  $u$  es una variable aleatoria  $n$ -dimensional representada matricialmente por la columna

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

y  $w$  es una variable aleatoria  $h$ -dimensional que se obtiene de  $u$  mediante la relación matricial

$$w = Au + b \quad (1.7)$$

donde  $A$  es una matriz  $n \times h$  y  $b$  es una matriz columna de  $h$  elementos, ambas de constantes, entonces el vector esperanza matemática de  $w$  está relacionado con el vector esperanza matemática de  $u$  según la ecuación matricial

$$E(w) = AE(u) + b \quad (1.8)$$

La matriz cofactor de  $w$  está relacionada con la matriz cofactor de  $u$  según la ecuación matricial

$$Q_w = AQ_uA^T \quad (1.9)$$

y, análogamente, con la matriz de varianza-covarianza

$$\Sigma_w = A\Sigma_uA^T \quad (1.10)$$

Las expresiones (1.9) y (1.10) se conocen como *ley de propagación de la matriz cofactor* y *ley de propagación de la matriz de varianza-covarianza*, respectivamente.

### **Ejemplo 1** Propagación de la matriz de varianza-covarianza en expresiones lineales

Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos medidas longitudinales de campo independientes, con desviaciones típicas  $\sigma_{x_1} = 0,01$  y  $\sigma_{x_2} = 0,02$  m respectivamente. Calcular las desviaciones típicas de la suma y la diferencia:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

así como la covarianza de las dos variables  $y_1$  e  $y_2$ .

La relación matricial del tipo (1.7) que relaciona las variables  $y_1, y_2$  con las medidas  $x_1, x_2$  es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Aplicando (1.10), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1y_2} \\ \sigma_{y_1y_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} \\ \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1y_2} \\ \sigma_{y_1y_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,01^2 & 0 \\ 0 & 0,02^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Haciendo las operaciones, encontramos

$$\begin{pmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1y_2} \\ \sigma_{y_1y_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,01^2 + 0,02^2 & 0,01^2 - 0,02^2 \\ 0,01^2 - 0,02^2 & 0,01^2 + 0,02^2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las desviaciones típicas de la suma y la diferencia son

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sqrt{0,0005} = 0,022 \text{ m}$$

y su covarianza es

$$\sigma_{y1y2} = -0,0003 \text{ m}^2$$

Observemos que, aunque las variables  $x_1$  y  $x_2$  sean estadísticamente independientes, la suma  $y_1$  y la diferencia  $y_2$  no lo son, ya que su covarianza es no nula. Esto es así porque, tanto para calcular  $y_1$  como para calcular  $y_2$  intervienen las dos variables  $x_1$  y  $x_2$ . Para medir el grado de dependencia es más adecuado el coeficiente de correlación, que es adimensional y no depende de las unidades empleadas:

$$\rho = \frac{\sigma_{y1y2}}{\sigma_{y1}\sigma_{y2}} = -0,6$$

### 1.2.2 Propagación de la matriz de varianza-covarianza en expresiones no lineales

Sean  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  una variable aleatoria  $n$ -dimensional y  $w$  una variable aleatoria  $h$ -dimensional que se obtiene de  $u$  mediante la relación

$$w = F(u) \tag{1.11}$$

donde  $F$  es una función vectorial de componentes:

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ w_2 &= f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &\dots \\ w_h &= f_h(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{aligned} \tag{1.12}$$

y donde las  $h$  funciones  $f_i$  son *no lineales*.

Para poder aplicar las leyes (1.9) y (1.10) de propagación de las matrices cofactor y de varianza-covarianza, deberemos *linealizar* el sistema desarrollando por Taylor las  $h$  funciones  $f_i$ , hasta primer orden, en el entorno de un punto  $u^0 = (u^0_1, u^0_2, \dots, u^0_n)$ .

Llamando

$$\begin{aligned} w^0_i &= f_i(u^0) \\ \Delta u_i &= u_i - u^0_i \\ \Delta w_i &= w_i - w^0_i \end{aligned}$$

y haciendo los desarrollos, se obtienen las expresiones *lineales en los incrementos*:

$$\begin{aligned} \Delta w_1 &\cong \frac{\mathcal{F}_1(u^0)}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\mathcal{F}_1(u^0)}{\partial u_2} \Delta u_2 + \dots + \frac{\mathcal{F}_1(u^0)}{\partial u_n} \Delta u_n \\ \Delta w_2 &\cong \frac{\mathcal{F}_2(u^0)}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\mathcal{F}_2(u^0)}{\partial u_2} \Delta u_2 + \dots + \frac{\mathcal{F}_2(u^0)}{\partial u_n} \Delta u_n \\ &\dots \\ \Delta w_h &\cong \frac{\mathcal{F}_h(u^0)}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\mathcal{F}_h(u^0)}{\partial u_2} \Delta u_2 + \dots + \frac{\mathcal{F}_h(u^0)}{\partial u_n} \Delta u_n \end{aligned} \tag{1.13}$$

Presuponiendo que los incrementos  $\Delta u_i$  son pequeños y, por tanto, despreciando los términos de orden

superior, matricialmente escribiremos

$$\Delta w = dF_{u^0} \Delta u \quad (1.14)$$

que es una expresión análoga a (1.7) cambiando  $w$  por  $\Delta w$ ,  $u$  por  $\Delta u$  y  $A$  por  $dF_{u^0}$ . Aplicando las leyes (1.9) y (1.10) a la expresión (1.14) para  $\Delta u$  y  $\Delta w$ , dentro de la aproximación que supone la linealización de la función  $F$ , se obtiene

$$Q_{\Delta w} = dF_{u^0} Q_{\Delta u} dF_{u^0}^T$$

Y, análogamente con la matriz de varianza-covarianza,

$$\Sigma_{\Delta w} = dF_{u^0} \Sigma_{\Delta u} dF_{u^0}^T$$

Teniendo en cuenta que la dispersión del incremento  $\Delta u$  es igual a la de la variable  $u$ , y análogamente con  $w$ , podemos escribir las mismas leyes para las matrices cofactor:

$$Q_w = dF_{u^0} Q_u dF_{u^0}^T \quad (1.15)$$

y de varianza-covarianza:

$$\Sigma_w = dF_{u^0} \Sigma_u dF_{u^0}^T \quad (1.16)$$

de  $w$  y de  $u$ .

### Observación

Atendiendo a las expresiones (1.10) y (1.16) de la propagación de la matriz de varianza-covarianza en expresiones lineales  $w = Au$  y no lineales  $w = F(u)$  respectivamente, observamos que, en el caso lineal, la matriz de varianza-covarianza  $\Sigma_w$  de  $w$  no depende de los valores concretos que tome la variable  $u$ , mientras que en el caso no lineal sí. Ello es debido a que la variación de  $w$  respecto a las componentes de  $u$  es independiente de los valores de éstas en el caso lineal, mientras que ello no ocurre, en general, en el caso no lineal.

### Ejemplo 2 Propagación de la matriz de varianza-covarianza en expresiones no lineales

Se miden la hipotenusa  $a$  y un cateto  $b$  de un triángulo rectángulo con los resultados

$$\begin{aligned} a &= 380,143 \text{ m} \\ b &= 215,030 \text{ m} \end{aligned}$$

y con desviaciones tipo

$$\begin{aligned} \sigma_a &= 0,015 \text{ m} \\ \sigma_b &= 0,010 \text{ m} \end{aligned}$$

respectivamente.

Se quiere calcular el cateto  $c$  y el ángulo  $B$  opuesto al cateto  $b$ , su desviación tipo y la correlación entre ambos.

La relación entre las observaciones  $a$  y  $b$  y las incógnitas  $c$  y  $B$  viene dada por las funciones no lineales

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$B = \arcsen \frac{b}{a}$$

Haciendo los cálculos, obtenemos

$$c = 313,482 \text{ m}$$

y

$$B = 0,6012279956 \text{ rad} = 34^\circ 26' 52'',18$$

Para encontrar las desviaciones tipo  $\sigma_c$  y  $\sigma_B$  calcularemos la matriz de varianza-covarianza

$$\Sigma_w = \begin{pmatrix} \sigma_c^2 & \sigma_{cB} \\ \sigma_{cB} & \sigma_B^2 \end{pmatrix}$$

de las variables  $c$  y  $B$  aplicando la relación (1.16), donde

$$\Sigma_u = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,25 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 1,00 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

y

$$dF_{u^0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial a} & \frac{\partial c}{\partial b} \\ \frac{\partial B}{\partial a} & \frac{\partial B}{\partial b} \end{pmatrix}_{u^0} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} & \frac{-b}{c} \\ \frac{-b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}_{u^0} = \begin{pmatrix} 1,213 & -0,686 \\ 1,804 \times 10^{-3} & 3,190 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de varianza-covarianza de  $c$  y  $B$  será

$$\Sigma_w = dF_{u^0} \Sigma_u dF_{u^0}^T = \begin{pmatrix} 3,779 \times 10^{-4} & -7,111 \times 10^{-7} \\ -7,111 \times 10^{-7} & 1,750 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

Así, las desviaciones tipo de  $c$  y  $B$  son

$$\sigma_c = \sqrt{3,779 \times 10^{-4}} = 0,019 \text{ m}$$

y

$$\sigma_B = \sqrt{1,750 \times 10^{-9}} = 4,1835 \times 10^{-5} \text{ rad} = 8'',63$$

respectivamente, mientras que el coeficiente de correlación entre ambas variables es la magnitud adimensional:

$$\rho = \frac{\sigma_{cB}}{\sigma_c \sigma_B} = -0,874$$

Observemos que, aunque los observables  $a$  y  $b$  son estadísticamente independientes, las magnitudes calculadas  $c$  y  $B$  están fuertemente correlacionadas. Esto es debido a que, tanto en el cálculo de  $c$  como en el de  $B$ , intervienen las mismas dos variables  $a$  y  $b$ .

### 1.3 Ejercicios

1. Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos medidas longitudinales de campo independientes con desviación típica de 3 y 5 cm respectivamente. Calcular la matriz de varianza-covarianza, las desviaciones típicas de las magnitudes

$$\begin{aligned}y_1 &= 2x_1 + x_2 \\y_2 &= 3x_1 + 5x_2 \\z &= 2y_1 + 3y_2\end{aligned}$$

¿Son  $y_1$  e  $y_2$  estadísticamente independientes? ¿Están fuertemente o débilmente correlacionadas?

2. Calcular, aplicando la ley de propagación de la matriz de varianza-covarianza en expresiones lineales, la desviación tipo de la media aritmética de  $n$  medidas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  m, con desviaciones tipo respectivas  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ .
3. Se miden los dos catetos  $b$  y  $c$  de un triángulo rectángulo con los resultados

$$\begin{aligned}b &= 124,501 \text{ m} \\c &= 210,314 \text{ m}\end{aligned}$$

y con las desviaciones tipo

$$\begin{aligned}\sigma_b &= 0,006 \text{ m} \\ \sigma_c &= 0,015 \text{ m}\end{aligned}$$

respectivamente.

Calcular la hipotenusa  $a$  y el ángulo  $B$  opuesto al cateto  $b$ , así como su desviación tipo y la correlación entre las dos magnitudes.

Calcular, aplicando la ley de propagación de la matriz de varianza-covarianza en expresiones no lineales, la desviación tipo de la media geométrica de 3 medidas:

$$x_1 = 10 \text{ m}, x_2 = 20 \text{ m}, x_3 = 30 \text{ m}$$

con desviaciones tipo

$$\sigma_1 = 0,01 \text{ m}, \sigma_2 = 0,02 \text{ m}, \sigma_3 = 0,03 \text{ m}$$

respectivamente.

## 2 Observaciones directas

### 2.1 Medidas directas de igual precisión

Sean  $n$  medidas *independientes*  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de una cierta magnitud física  $\mu$ . Desde el punto de vista estadístico, si todas las medidas tienen igual precisión, se puede considerar una variable aleatoria  $U$  normal de media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$ ,  $U \sim N(\mu, \sigma)$ , consistente en el conjunto de las infinitas medidas posibles de la magnitud de *verdadero valor*  $\mu$ , de la cual el conjunto de observaciones  $u_1, u_2, \dots, u_n$  es una muestra de tamaño  $n$ . Pero también se pueden considerar realizaciones de  $n$  variables aleatorias independientes  $U_1, U_2, \dots, U_n$  normales, todas con media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$ ,  $U_i \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , con función de densidad

$$f(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u_i - \mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.1)$$

respectivamente. Se trata de establecer un criterio para estimar el parámetro  $\mu$  a partir de la muestra  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Como las  $n$  variables  $U_1, U_2, \dots, U_n$  son independientes, la función de densidad conjunta del vector aleatorio normal  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  es el producto de las funciones de densidad

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n f(u_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (u_i - \mu)^2} \quad (2.2)$$

Esta función también recibe el nombre de *función de verosimilitud* de la muestra y depende de los dos parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ .

#### 2.1.1 Mínimos cuadrados y máxima verosimilitud

Un criterio estadístico de estimación paramétrica es el llamado *criterio de máxima verosimilitud*, que consiste, dada una muestra  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de  $n$  observaciones independientes, en tomar, como estimadores de los parámetros poblacionales, aquellos valores que hagan máxima la función de verosimilitud (2.2).

En nuestro caso es inmediato que, para cualquier valor  $\sigma$  de la desviación típica, el máximo de la función de verosimilitud corresponderá a aquel valor del parámetro  $\mu$  que haga mínimo el sumatorio del exponente:

$$\sum_{i=1}^n (u_i - \mu)^2 \quad (2.3)$$

Vemos, pues, cómo el criterio de máxima verosimilitud para la estimación de  $\mu$  coincide con el

llamado *criterio de mínimos cuadrados*, que consiste en, dada una muestra  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de  $n$  medidas independientes, tomar, como estimador del parámetro  $\mu$ , aquel valor  $m$  que haga mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones respecto de las observaciones. Este criterio nos indica, como veremos en la siguiente proposición, el camino para encontrar el estimador correspondiente.

### Proposición 1

El estimador mínimo-cuadrático de una magnitud  $\mu$ , de la cual se dispone de una muestra  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de  $n$  medidas directas independientes y de igual precisión, es la media mostral:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n} \quad (2.4)$$

#### Demostración

Consideremos la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones  $u_i$  respecto de un cierto estimador  $m$  como una función de  $m$ :

$$f(m) = \sum_{i=1}^n (u_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 - 2m \sum_{i=1}^n u_i + nm^2$$

Anulando la derivada respecto de  $m$ , obtenemos

$$f'(m) = -2 \sum_{i=1}^n u_i + 2nm = 0 \Rightarrow m = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}$$

Es inmediato que la derivada segunda  $f''(m) = 2n$  es positiva y que, por tanto, se trata de un mínimo.

#### Observación

Hemos visto que la estimación de una magnitud física, a partir de una muestra de observaciones directas, por el criterio de los mínimos cuadrados, ha conducido a una operación común en la estadística inductiva: estimar una media poblacional  $\mu$  por una media mostral  $m$ , y por la estadística sabemos que éste es un estimador no sesgado y consistente, como establece la proposición siguiente:

### Proposición 2

La esperanza matemática de la media mostral es la media poblacional

$$E(m) = \mu \quad (2.5)$$

y su varianza es la poblacional dividida por el tamaño de la muestra:

$$VAR(m) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Precisión en la estimación por mínimos cuadrados

#### Definición 1 Errores absolutos y residuos

Llamaremos *errores absolutos* a las diferencias entre la magnitud  $\mu$  y sus observaciones  $u_i$ :

$$\varepsilon_i = \mu - u_i$$

Evidentemente, teniendo en cuenta que el verdadero valor  $\mu$  de la magnitud que queremos calcular se mantiene siempre desconocido, estas correcciones o errores absolutos no se podrán calcular nunca. Por eso definimos las *correcciones aparentes* o *residuos*  $v_i$  como las diferencias entre el estimador  $m$  y las observaciones:

$$v_i = m - u_i \quad (2.7)$$

Los residuos son, pues, de las correcciones que hay que hacer a las observaciones para que den el valor estimado  $m$  del verdadero valor  $\mu$ :

$$u_i + v_i = m$$

#### Observación

De su definición se deduce que la suma de los residuos es nula:

$$\sum_{i=1}^n v_i = 0 \quad (2.8)$$

Efectivamente,

$$\sum_{i=1}^n (m - u_i) = nm - \sum_{i=1}^n u_i = 0$$

Este resultado es intuitivamente inmediato, ya que si la distribución de las observaciones  $u_i$  está centrada en  $m$ , al hacer la corrección  $v_i = m - u_i$  la distribución correspondiente estará centrada en el origen. Dicho de otro modo, la media de las correcciones es cero. Por otra parte, esto nos indica que el sistema de  $n$  residuos tiene  $n - 1$  grados de libertad, ya que están sometidos a la ligadura (2.8).

Para tener una medida de la desviación de las observaciones respecto del estimador  $m$ , podemos utilizar la suma de los valores absolutos  $\sum_{i=1}^n |v_i|$  o bien la suma de los cuadrados  $\sum_{i=1}^n v_i^2$ .

#### Definición 2 Error estadístico asociado a una operación de medida

Se define el *error estadístico* asociado a una medida  $u_i$  de la magnitud  $\mu$  como la desviación típica  $\sigma$  de la variable aleatoria  $U$  que representa las medidas de su valor.

Se define el *error estadístico* asociado al estimador media mostral  $m$  como su desviación típica

$$\sigma_m = \sigma / \sqrt{n}$$

En general, la desviación típica  $\sigma$  de la variable aleatoria  $U$  es un parámetro poblacional desconocido y lo estimaremos mediante la desviación típica mostral corregida:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (u_i - m)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \quad (2.9)$$

Por la estadística sabemos que  $S$  es un estimador no sesgado de  $\sigma$ .

### Proposición 3

La esperanza de la desviación típica mostral  $S$  es la desviación típica poblacional  $\sigma$ .

$$E(S) = \sigma \quad (2.10)$$

La desviación típica  $\sigma_m$  del estimador media mostral  $m$  la estimaremos, a su vez, mediante el estadístico

$$S_m = S / \sqrt{n} \quad (2.11)$$

### Observación

No debe confundirse este error estadístico  $S$ , que en muchos contextos se llama *error medio cuadrático*, con el error absoluto  $\varepsilon = \mu - u_i$  cometido al medir la magnitud  $\mu$ . Por otra parte, teniendo en cuenta que su cuadrado está relacionado con la suma de residuos al cuadrado según

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}$$

o, equivalentemente,

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 \quad (2.12)$$

la magnitud  $m$  que hace mínima la suma de los cuadrados de los residuos también hace mínima la variancia  $S^2$  o, lo que es lo mismo, hace mínimo el error  $S$ .

Hay una infinidad de conjuntos de residuos  $v_i$  que llevan a diferentes estimadores

$$e_i = u_i + v_i$$

Hemos visto que el criterio que se usará para escoger los residuos adecuados es que la magnitud

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

sea mínima.

### Ejemplo 1 Medidas directas de igual precisión

Consideremos los siguientes resultados en la medida de un ángulo  $\theta$ .

Obs. $u_i$	Valor medido	Media $m$	Residuo $v_i$	$v_i^2$	$S$	$S/\sqrt{n}$
$u_1$	50° 15' 30",3		1",47	2",16		
$u_2$	50° 15' 33",5		-1",73	2",99		
$u_3$	50° 15' 35",1		-3",33	11",01		
$u_4$	50° 15' 28",6		3",17	10",05		
$u_5$	50° 15' 32",4		-0",63	0",40		
$u_6$	50° 15' 34",2		-2",43	5",90		
$u_7$	50° 15' 29",7		2",07	4",28		
$u_8$	50° 15' 31",8		-0",03	0",00		
$u_9$	50° 15' 30",9		0",87	0",76		
$u_{10}$	50° 15' 31",2		0",57	0",32		
		50° 15' 31",77	Suma=0",00	Suma=37",87	2",05	0",65

Tabla 2.1

Si, como estimador del *verdadero valor* del ángulo, tomamos una medida cualquiera,  $\theta = 50^\circ 15' 29",7$ , el error estadístico correspondiente es  $S = 2"$ , mientras que si tomamos la media  $\theta = 50^\circ 15' 31",8$ , entonces el error estadístico correspondiente es  $S/\sqrt{n} = 0",6$ . Con los cálculos precedentes podemos decir, pues, que el ángulo medido vale  $\theta = 50^\circ 15' 31",8 \pm 0",6$ .

Sin embargo, desde el punto de vista estadístico nos podemos hacer la siguiente pregunta: ¿qué probabilidad hay de que el *verdadero valor* del ángulo esté dentro de este intervalo, es decir, qué probabilidad hay de que  $50^\circ 15' 31",2 < \theta < 50^\circ 15' 32",4$ ?

### 2.1.3 Estimación por intervalos

Hasta ahora hemos hecho una estimación puntual de la media poblacional  $\mu$  de una variable aleatoria  $U$  por la media muestral  $m$ , y de la desviación típica poblacional  $\sigma$  por la desviación típica muestral  $S$ . Podemos hacer una estimación por intervalos de confianza de estos parámetros poblacionales teniendo en cuenta que  $U$  es  $N(\mu, \sigma)$  y los resultados estadísticos enunciados en la proposición siguiente:

#### Proposición 4

La variable aleatoria

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - m)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{\sigma^2}$$

sigue una ley  $\chi^2$  con  $n-1$  grados de libertad, mientras que la variable aleatoria

$$t = \frac{m - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

sigue una ley  $t$  de Student con  $n-1$  grados de libertad.

a) *Intervalo de confianza para la media poblacional  $\mu$  o verdadero valor de la magnitud medida*

Con un nivel de significación  $\alpha$  o coeficiente de confianza  $1-\alpha$

$$m - t_{n-1,\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < m + t_{n-1,\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

o bien

$$\mu = m \pm t_{n-1,\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (2.13)$$

donde  $t_{n-1,\alpha}$  es el valor de la variable  $t$  de Student con  $n-1$  grados de libertad tal que

$$P(-t_{n-1,\alpha} < t < t_{n-1,\alpha}) = 1 - \alpha$$

Si  $n$  es suficientemente grande (en la práctica se acostumbra a considerar  $n \geq 30$ ), entonces la variable  $t$  de Student con  $n-1$  grados de libertad se confunde con una normal tipificada y la variable aleatoria

$$Z = \frac{m - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

sigue una ley normal estándar  $N(0,1)$ . Por tanto, con un nivel de significación  $\alpha$  o coeficiente de confianza  $1-\alpha$ , tenemos

$$m - Z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < m + Z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$$

o bien

$$\mu = m \pm Z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (2.14)$$

donde  $Z_\alpha$  es el valor de la variable  $Z N(0,1)$  tal que

$$P(-Z_\alpha < Z < Z_\alpha) = 1 - \alpha$$

b) *Intervalo de confianza para la desviación típica poblacional  $\sigma$  o verdadero valor del error*

Con un nivel de significación  $\alpha$  o coeficiente de confianza  $1-\alpha$ , tenemos

$$\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_a^2}} \quad (2.15)$$

donde  $\chi_a^2$  y  $\chi_b^2$  son los valores de la variable  $\chi^2$ , con  $n-1$  grados de libertad, tales que

$$P(\chi^2 > \chi_b^2) = \alpha/2 \quad \text{y} \quad P(\chi^2 > \chi_a^2) = 1 - \alpha/2$$

### **Ejemplo 2** *Estimación por intervalos en medidas directas de igual precisión*

Hagamos una estimación por intervalos del ángulo calculado en el ejemplo 1 y de su error, con un nivel de significación del 1%, o nivel de confianza del 99%. Para establecer los límites de confianza correspondientes, hemos de buscar los siguientes valores:

$t_{9,0.01}$  = valor de la variable  $t$  de Student con 9 grados de libertad que deja el 1% del área bajo la función de densidad en las dos colas juntas = 3,25.

$\chi^2_{9,a}$  = valor de la variable  $\chi^2$  con 9 grados de libertad que deja a la derecha el 99,5% del área bajo la función de densidad = 1,73.

$\chi^2_{9,b}$  = valor de la variable  $\chi^2$  con 9 grados de libertad que deja a la derecha el 0,5% del área bajo la función de densidad = 23,6.

El intervalo del 99% de confianza para el verdadero valor del ángulo es

$$\mu = m \pm t_{9,0,01} \frac{S}{\sqrt{n}} = 50^\circ 15' 31",8 \pm 2",1$$

### Observación

Cuando, en el ejemplo 1, hemos hecho la estimación puntual del verdadero valor del ángulo por  $m$  y del error por  $S/\sqrt{n}$  y hemos escrito

$$\mu = m \pm \frac{S}{\sqrt{n}} = 50^\circ 15' 31",8 \pm 0",6$$

nos hemos preguntado qué probabilidad hay de que el *verdadero valor* del ángulo esté entre  $50^\circ 15' 31",2$  y  $50^\circ 15' 32",4$ . Observemos que, al escribir *verdadero valor* = *media*  $\pm$  *error*, estamos estableciendo el intervalo de confianza del tipo (2.13) correspondiente a  $t_{9,\alpha} = 1$ . Consultando las tablas de la  $t$  de Student con 9 grados de libertad, se encuentra que la probabilidad de que  $-1 < t_9 < 1$  es del 65,66%. Este es el correspondiente nivel de confianza.

El intervalo del 99% de confianza para el verdadero valor del error es

$$\frac{\sqrt{9}S}{\sqrt{\chi^2_{9,b}}} < \sigma < \frac{\sqrt{9}S}{\sqrt{\chi^2_{9,a}}}$$

Haciendo los cálculos se obtiene

$$1",3 < \sigma < 4",7$$

### Ejemplo 3 Estimación por intervalos en medidas directas de igual precisión (2)

Se trata de estimar, con un nivel de significación del 5%, o nivel de confianza del 95%, la altura  $H$  y su desviación típica  $\sigma_H$  de una estación que, medida desde tres puntos diferentes, ha dado los resultados siguientes:

$$h_1 = 495,751 \text{ m}$$

$$h_2 = 495,714 \text{ m}$$

$$h_3 = 495,701 \text{ m}$$

Los estimadores puntuales de las magnitudes  $H$  y  $\sigma_H$  son, respectivamente,

$$m = \frac{\sum_1^3 h_i}{3} = \frac{495,751 + 495,714 + 495,701}{3} = 495,722 \text{ m}$$

y

$$S = \sqrt{\frac{\sum_1^3 (h_i - m)^2}{2}} = \sqrt{\frac{0,029^2 + 0,008^2 + 0,021^2}{2}} \cong 26 \text{ mm}$$

Para establecer los límites de confianza del 95% hemos de buscar los valores siguientes:

$t_{2,0,05}$  = valor de la variable  $t$  de Student con 2 grados de libertad que deja el 5% del área bajo la función de densidad en las dos colas juntas = 4,3027.

$\chi^2_{2,a}$  = valor de la variable  $\chi^2$  con 2 grados de libertad que deja a la derecha el 97,5% del área bajo la función de densidad = 0,0507.

$\chi^2_{2,b}$  = valor de la variable  $\chi^2$  con 2 grados de libertad que deja a la derecha el 2,5% del área bajo la función de densidad = 7,3790.

Sabemos que

$$m - t_{2,0,05} \frac{S}{\sqrt{3}} < H < m + t_{2,0,05} \frac{S}{\sqrt{3}}$$

y, sustituyendo, obtenemos

$$495,658 \text{ m} < H < 495,786 \text{ m}$$

con un nivel de confianza del 95%. Por otra parte, para la desviación típica tenemos el intervalo

$$\frac{\sqrt{2}S}{\sqrt{\chi^2_{2,b}}} < \sigma < \frac{\sqrt{2}S}{\sqrt{\chi^2_{2,a}}}$$

Sustituyendo, obtenemos

$$14 \text{ mm} < \sigma_H < 163 \text{ mm}$$

con un nivel de confianza del 95%.

## 2.2 Observaciones ponderadas

En el apartado anterior, al considerar  $n$  medidas de una magnitud  $\mu$ , hemos supuesto que todas estaban hechas en las mismas circunstancias. Ello nos permitía tratarlas como  $n$  observaciones *independientes*  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de una variable aleatoria  $U \sim N(\mu, \sigma)$  o, equivalentemente, como  $n$  observaciones de  $n$  variables aleatorias *independientes*  $U_i, i = 1, 2, \dots, n$ , todas siguiendo la misma ley de distribución de probabilidad  $N(\mu, \sigma)$ . En estos casos se puede decir que todas las observaciones tienen el mismo peso (=1) y que, dadas dos cualquiera, no podemos decir que una sea más fiable que la otra.

Sin embargo, puede ocurrir que las  $n$  medidas  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de una magnitud  $\mu$  se hagan en circunstancias diferentes, por personas diferentes i/o con aparatos diferentes. En este caso, hemos de suponer que se trata de  $n$  observaciones de  $n$  variables aleatorias *independientes*  $U_i$  siguiendo leyes de distribución de probabilidad  $N(\mu, \sigma_i), i = 1, 2, \dots, n$ , respectivamente, todas con la misma media  $\mu$  pero con desviaciones típicas diferentes  $\sigma_i$ . Evidentemente, son más fiables las medidas con desviación típica más pequeña.

### 2.2.1 Mínimos cuadrados y máxima verosimilitud

Igual que en el caso de observaciones no ponderadas, se trata de establecer un criterio para estimar el parámetro  $\mu$  a partir de la muestra  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Como las  $n$  variables  $U_1, U_2, \dots, U_n$  son independientes con media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma_i$  que, en función de la desviación típica de referencia y el peso correspondiente, se puede escribir

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{p_i}} \quad (2.16)$$

la función de densidad conjunta del vector aleatorio normal  $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$  es el producto de funciones de densidad que, en este caso, se escribe

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n f(u_i) = \frac{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n p_i (u_i - \mu)^2} \quad (2.17)$$

Esta es la *función de verosimilitud* de la muestra y depende de los dos parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . Para cualquier valor  $\sigma$  de la desviación típica de referencia, el máximo corresponderá a aquel valor del parámetro  $\mu$  que haga mínimo el sumatorio del exponente:

$$\sum_{i=1}^n p_i (u_i - \mu)^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{u_i - \mu}{\sigma_i} \right)^2 \quad (2.18)$$

En el caso de observaciones ponderadas, el criterio de máxima verosimilitud para la estimación de  $\mu$  vuelve a coincidir con el *criterio de los mínimos cuadrados*, que, en este caso, lleva a tomar como estimador del parámetro  $\mu$  aquel valor  $m$  que haga mínima la suma *ponderada* de los cuadrados de las desviaciones respecto de las observaciones. En este caso, el estimador correspondiente es la media *ponderada* de las observaciones.

#### Proposición 6

El estimador mínimo-cuadrático de una magnitud  $\mu$ , de la cual se dispone de una muestra  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de  $n$  medidas directas con pesos  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , respectivamente, es la media *ponderada*

$$m_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i u_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad (2.19)$$

#### Demostración

Es análoga a la de la proposición 1. Consideremos la suma *ponderada* de los cuadrados de las correcciones de las observaciones  $u_i$  respecto de un cierto estimador  $m_p$  como una función de  $m_p$ :

$$f(m_p) = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n p_i (u_i - m_p)^2 = \sum_{i=1}^n p_i u_i^2 - 2m_p \sum_{i=1}^n p_i u_i + m_p^2 \sum_{i=1}^n p_i$$

Anulando la derivada respecto del estimador  $m_p$ , obtenemos

$$f'(m_p) = -2 \sum_{i=1}^n p_i u_i + 2m_p \sum_{i=1}^n p_i = 0 \Rightarrow m_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i u_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

Es inmediato que la derivada segunda  $f''(m_p)$  es positiva y que, por tanto, se trata de un mínimo.

### Proposición 7

La media ponderada  $m_p$  es un estimador no sesgado y consistente del verdadero valor  $\mu$  de la magnitud que queremos calcular. Su esperanza matemática es

$$E(m_p) = \mu \quad (2.20)$$

y tiene por varianza

$$VAR(m_p) = \sigma_{mp}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum p_i} \quad (2.21)$$

o, lo que es equivalente,

$$\sigma_{mp} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum p_i}}$$

### Demostración

Para demostrar la primera afirmación basta aplicar la linealidad de la esperanza.

$$E\left(\frac{\sum p_i u_i}{\sum p_i}\right) = \frac{\sum p_i E(u_i)}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i \mu}{\sum p_i} = \mu$$

mientras que para calcular la expresión de  $VAR(m_p)$ , aplicaremos la ley (1.10) de propagación de la matriz de varianza-covarianza.

La media ponderada  $m_p$  se obtiene a partir del vector  $u$  de observaciones según la ecuación matricial

$$m_p = Au$$

donde  $A$  es la matriz fila:

$$A = \left( \frac{p_1}{\sum p_i} \quad \frac{p_2}{\sum p_i} \quad \dots \quad \frac{p_n}{\sum p_i} \right)$$

Es decir,

$$m_p = \left( \frac{p_1}{\sum p_i} \quad \frac{p_2}{\sum p_i} \quad \dots \quad \frac{p_n}{\sum p_i} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{\sum p_i u_i}{\sum p_i}$$

La media ponderada  $m_p$  es un número real. Por tanto, su matriz de variancia-covariancia  $\Sigma_{mp}$  tiene una sola fila y una sola columna:  $\Sigma_{mp} = (\sigma_{mp}^2)$ .

Las observaciones  $u_i$  son independientes y, por tanto, la matriz de variancia-covariancia es la matriz diagonal que contiene las varianzas respectivas.

$$\Sigma_u = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma^2}{p_n} \end{pmatrix}$$

Según la ley (1.10) de propagación de la matriz de variancia-covariancia,

$$\Sigma_{mp} = A\Sigma_u A^T$$

Por tanto,

$$\sigma_{mp}^2 = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{\sum p_i} & \frac{p_2}{\sum p_i} & \dots & \frac{p_n}{\sum p_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma^2}{p_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_1}{\sum p_i} \\ \frac{p_2}{\sum p_i} \\ \dots \\ \frac{p_n}{\sum p_i} \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2 \sum p_i}{(\sum p_i)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum p_i}$$

### Observación

Los resultados (2.19) y (2.21) coinciden con los correspondientes a observaciones no ponderadas, (2.4) y (2.6), haciendo todos los pesos iguales a 1 y, por tanto,  $\sum p_i = n$ .

### 2.2.2 Precisión en la estimación por mínimos cuadrados

#### Definición 4 Errores absolutos y residuos con observaciones ponderadas

Igual que en el caso de observaciones no ponderadas, llamaremos *correcciones verdaderas* a los *errores absolutos*, es decir, a las diferencias entre la magnitud  $\mu$  y sus observaciones  $u_i$ :  $\varepsilon_i = \mu - u_i$ , y *correcciones aparentes* o *residuos* a las diferencias entre el estimador  $m$  y las observaciones

$$v_i = m_p - u_i \quad (2.22)$$

Es decir, las correcciones que hay que hacer a las observaciones para que den el valor estimado  $m_p$  del verdadero valor  $\mu$ :

$$u_i + v_i = m_p$$

#### Observación

De su definición, se deduce que la suma ponderada de los residuos es nula:

$$\sum_{i=1}^n p_i v_i = 0 \quad (2.23)$$

Efectivamente,

$$\sum_{i=1}^n p_i (m_p - u_i) = m_p \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n p_i u_i = 0$$

Para tener una medida de la desviación de las observaciones respecto del estimador media ponderada  $m_p$ , tomaremos la suma ponderada de los cuadrados:  $\sum_{i=1}^n p_i v_i^2$ .

**Definición 5** *Error estadístico asociado a la media ponderada*

Se define el *error estadístico* asociado a la estimación de una magnitud por la media ponderada  $m_p$  como su desviación típica:

$$\sigma_{mp} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum p_i}} \quad (2.24)$$

Si la desviación típica de referencia  $\sigma$  es desconocida, deberemos estimarla a partir de un estadístico mostral. Para ello definimos el *error medio cuadrático* de un conjunto de observaciones ponderadas como la desviación típica mostral ponderada:

$$S_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i (u_i - m_p)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i v_i^2}{n-1}} \quad (2.25)$$

**Proposición 8**

La varianza mostral ponderada  $S_p^2$  es un estimador no sesgado de la varianza de referencia  $\sigma^2$ :

$$E(S_p^2) = \sigma^2 \quad (2.26)$$

*Demostración*

Partimos de la igualdad siguiente:

$$\begin{aligned} \sum p_i (u_i - \mu)^2 &= \sum p_i \{(u_i - m_p) + (m_p - \mu)\}^2 = \\ &= \sum p_i (u_i - m_p)^2 + 2(m_p - \mu) \sum p_i (u_i - m_p) + (m_p - \mu)^2 \sum p_i \end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2.23) y la linealidad de la esperanza, se puede escribir

$$E\left(\frac{1}{n-1} \sum p_i (u_i - m_p)^2\right) = \frac{1}{n-1} \sum p_i E(u_i - \mu)^2 - \frac{\sum p_i}{n-1} E(m_p - \mu)^2$$

o bien

$$E(S_p^2) = \frac{1}{n-1} \sum p_i \text{VAR}(u_i) - \frac{\sum p_i}{n-1} \text{VAR}(m_p) =$$

de acuerdo con (2.16) y (2.21):

$$E(S_p^2) = \frac{1}{n-1} \sum \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} \sigma_i^2 - \frac{\sum p_i}{n-1} \frac{\sigma^2}{\sum p_i} = \sigma^2$$

### Observación

Si  $\sigma$  es desconocida y la estimamos por  $S_p$ , el error  $\sigma_{mp}$  asociado a la media ponderada lo estimaremos por

$$S_{mp} = \frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}} \quad (2.27)$$

Por otra parte, dado que

$$(n-1)S_p^2 = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2 \quad (2.28)$$

la magnitud  $m_p$  que hace mínima la suma ponderada de los cuadrados de las correcciones también hace mínima la varianza  $S_p^2$  o, lo que es lo mismo, hace mínimo el error  $S_p$ .

### Ejemplo 5 Observaciones ponderadas

Se quiere determinar la altura de una estación  $E$  desde 4 estaciones  $A, B, C, D$ , de altura conocida. Los resultados de las mediciones son

$$\begin{aligned} u_1 &= 1946,535 \text{ m} & \text{con peso } p_1 &= 1,433 \\ u_2 &= 1946,560 \text{ m} & \text{con peso } p_2 &= 0,470 \\ u_3 &= 1946,447 \text{ m} & \text{con peso } p_3 &= 3,050 \\ u_4 &= 1946,459 \text{ m} & \text{con peso } p_4 &= 14,409 \end{aligned}$$

El estimador puntual de la altura de la estación  $E$  y el correspondiente error son, respectivamente,

$$m_p = \frac{\sum p_i u_i}{\sum p_i} = 1946,465 \text{ m}$$

y

$$S_{mp} = \frac{S_p}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i (u_i - m_p)^2}{n-1}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i}} = \frac{0,065}{\sqrt{19,362}} = 0,015 \text{ m}$$

### 2.2.3 Estimación por intervalos

Hasta ahora hemos hecho una estimación puntual del verdadero valor  $\mu$  de una magnitud medida repetidamente, por la media ponderada  $m_p$ , y de la desviación típica de referencia  $\sigma$ , por la desviación típica mostral ponderada  $S_p$ . Para hacer una estimación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  por intervalos de confianza, debemos tener en cuenta que cada medida  $u_i$  es una realización de una variable aleatoria  $U_i$  normal  $N(\mu, \sigma)$ , y el resultado presentado en la proposición siguiente, análogo al de la proposición 4 bien conocida en estadística, que enunciaremos sin demostración (una demostración se puede encontrar en [LIN63], Teorema 5.3.1, p. 130).

#### Proposición 9

La variable aleatoria

$$Y = \frac{(n-1)S_p^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i (u_i - m_p)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i v_i^2}{\sigma^2}$$

sigue una ley  $\chi^2$  con  $n-1$  grados de libertad. Como consecuencia, la variable aleatoria

$$t = \frac{m_p - \mu}{S_{mp}} = \frac{m_p - \mu}{S_p / \sqrt{\sum p_i}}$$

sigue una ley  $t$  de Student con  $n-1$  grados de libertad.

a) *Intervalo de confianza para el verdadero valor  $\mu$  de la magnitud medida*

Con un nivel de significación  $\alpha$  o coeficiente de confianza  $1-\alpha$

$$m_p - t_{n-1, \alpha} \frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}} < \mu < m_p + t_{n-1, \alpha} \frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}}$$

o bien

$$\mu = m_p \pm t_{n-1, \alpha} \frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}} \quad (2.29)$$

donde  $t_{n-1, \alpha}$  es el valor de la variable  $t$  de Student con  $n-1$  grados de libertad tal que

$$P(-t_{n-1, \alpha} < t < t_{n-1, \alpha}) = 1 - \alpha$$

Si  $n$  es grande (en la práctica se acostumbra a considerar  $n \geq 30$ ), entonces la variable  $t$  de Student con  $n-1$  grados de libertad se confunde con una normal tipificada y la variable aleatoria

$$Z = \frac{m_p - \mu}{S_p / \sqrt{\sum p_i}}$$

sigue una ley normal estándar  $N(0,1)$ . Por tanto, con un nivel de significación  $\alpha$  o coeficiente de

confianza  $1-\alpha$ ,

$$m_p - Z_\alpha \frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}} < \mu < m_p + Z_\alpha \frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}}$$

o bien

$$\mu = m_p \pm Z_\alpha \frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}} \quad (2.30)$$

donde  $Z_\alpha$  es el valor de la variable  $Z N(0,1)$  tal que

$$P(-Z_\alpha < Z < Z_\alpha) = 1-\alpha$$

b) *Intervalo de confianza para la desviación típica poblacional  $\sigma$  o verdadero valor del error*

Con un nivel de significación  $\alpha$  o coeficiente de confianza  $1-\alpha$ , tenemos

$$\frac{\sqrt{n-1}S_p}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}S_p}{\sqrt{\chi_a^2}} \quad (2.31)$$

donde  $\chi_a^2$  y  $\chi_b^2$  son los valores de la variable  $\chi^2$ , con  $n-1$  grados de libertad, tales que

$$P(\chi^2 > \chi_b^2) = \alpha/2 \quad \text{y} \quad P(\chi^2 > \chi_a^2) = 1-\alpha/2$$

### **Ejemplo 6** *Estimación por intervalos con observaciones ponderadas*

Los intervalos de confianza, con coeficiente del 95%, para los verdaderos valores de la altura y el error del ejemplo 3, calculados según los criterios expresados arriba, son

$$1946,465 - t_{0,065} / \sqrt{19,362} < \mu < 1946,465 + t_{0,065} / \sqrt{19,362}$$

La  $t$  de Student con 3 grados de libertad y nivel de significación del 5% vale  $t = 3,1824$ . Por tanto, se tiene

$$1946,418 < \mu < 1946,512$$

En cuanto al error,

$$(\sqrt{3} / \sqrt{\chi_b^2}) 0,065 < \sigma < (\sqrt{3} / \sqrt{\chi_a^2}) 0,065$$

Los valores de  $\chi_a^2$  y  $\chi_b^2$ , para un nivel de significación del 5%, son respectivamente 0,2158 y 9,3484. Sustituyendo, obtenemos el intervalo

$$0,037 < \sigma < 0,242$$

La tabla siguiente permite la visión comparada de las diferentes magnitudes que intervienen cuando las observaciones son equiprecisas o ponderadas.

Observaciones equiprecisas	Observaciones ponderadas
$u_1, u_2, \dots, u_n \rightarrow N(\mu, \sigma)$	$u_i \rightarrow N(\mu, \sigma_i); P_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}, i=1, 2, \dots, n$
$v^T v = \sum_{i=1}^n (u_i - m)^2$	$v^T P v = \sum_{i=1}^n p_i (u_i - m_p)^2$
$m = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}; E(m) = \mu$	$m_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i u_i}{\sum_{i=1}^n p_i}; E(m_p) = \mu$
$S = \sqrt{\frac{v^T v}{n-1}}; E(S) = \sigma$	$S_p = \sqrt{\frac{v^T P v}{n-1}}; E(S_p) = \sigma$
$S_m = S / \sqrt{n} \rightarrow \sigma_m = \sigma / \sqrt{n}$	$S_{mp} = \frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}} \rightarrow \sigma_{mp} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum p_i}}$
$\mu = m \pm t_{n-1, \alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\mu = m_p \pm t_{n-1, \alpha} \frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}}$
$\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_a^2}}$	$\frac{\sqrt{n-1}S_p}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}S_p}{\sqrt{\chi_a^2}}$

Tabla 2.2

### 2.3 Ejercicios

1. Se mide una distancia 4 veces con los resultados siguientes:

$$50,348, 50,352, 50,354 \text{ y } 50,349 \text{ m}$$

Dar una estimación puntual del verdadero valor de esta distancia y del error medio cuadrático de estas medidas y una estimación por intervalos del 95% de confianza de estos dos parámetros.

2. Se mide un ángulo 6 veces con los resultados siguientes:

$$25^\circ 15' 3",36, 25^\circ 15' 5",99, 25^\circ 15' 10",52 \\ 25^\circ 15' 7",25, 25^\circ 15' 6",98 \text{ i } 25^\circ 15' 8",04$$

Dar una estimación puntual del verdadero valor de este ángulo y del error medio cuadrático de estas medidas y una estimación por intervalos del 99% de confianza de estos dos parámetros.

3. Se consideran tres medidas  $A_1, A_2$  i  $A_3$  de una cierta magnitud  $A$ . Se supone que  $A_1$  se ha calculado como la media de 3 observaciones,  $A_2$  como la media de 5 observaciones y  $A_3$  como la media de 7 observaciones. Supongamos, además, que todas las observaciones están hechas con el mismo aparato y bajo las mismas condiciones. ¿Cuáles son los pesos  $P_i$  correspondientes a las medidas  $A_i$ ?

4. Seis personas diferentes miden un azimut con el mismo aparato y en circunstancias similares. Los resultados son

15' 13",51 como media de 7 medidas  
15' 12",23 como media de 3 medidas  
15' 13",87 como media de 6 medidas  
15' 13",01 como media de 4 medidas  
15' 14",22 como media de 2 medidas  
15' 13",32 como media de 5 medidas

Dar una estimación puntual del verdadero valor de este azimut y de la varianza de referencia de estas medidas angulares y una estimación por intervalos del 99% de confianza de estos dos parámetros.

5. A continuación se dan los resultados, expresados en metros, de la medida de la altura de un punto por diferentes medios, acompañados de los pesos correspondientes:

15,617	1,0
15,592	0,3
15,620	2,5
15,650	0,2
15,630	0,6

Dar una estimación puntual del verdadero valor de esta altura y de la varianza de referencia de estas medidas y una estimación por intervalos del 99% de confianza de estos dos parámetros.





$$\begin{cases} x_1 & & & = & Ha + d_1 \\ & x_2 & & = & Hb + d_2 \\ & & x_3 & = & Hc + d_3 \\ -x_1 & + x_2 & & = & d_4 \\ & x_2 & - x_3 & = & d_5 \\ -x_1 & & + x_3 & = & d_6 \end{cases}$$

La discusión de este tipo de sistemas se hará según las hipótesis siguientes:

1. El número de observaciones es superior al número de incógnitas que se quieren determinar:  $n > h$ . Por tanto, el sistema, que matricialmente escribiremos

$$Ax = u \quad (3.2)$$

tiene más ecuaciones que incógnitas y será, en general, incompatible, a causa del carácter aleatorio de las variables observacionales. Supondremos, además, que la matriz  $A$  es de rango máximo  $h$  y que, por tanto, si las observaciones fuesen exactas, entonces  $n - h$  de las ecuaciones se podrían expresar en función de las  $h$  independientes y el sistema sería determinado. Es precisamente a causa de la inexactitud de las observaciones que se hacen más de las  $h$  estrictamente necesarias para encontrar los valores de las incógnitas  $x_i$ . La relación (3.2), que expresa las observaciones  $u$  en función de las incógnitas  $x$ , recibe el nombre de *modelo matemático* del problema de observaciones indirectas. La matriz  $A$  recibe el nombre de *matriz de diseño*.

2. Mientras no se especifique lo contrario, todas las observaciones son independientes y están distribuidas normalmente. O lo que es lo mismo, se trata de  $n$  realizaciones de  $n$  variables aleatorias  $u_i$  independientes que siguen leyes  $N(\mu_i, \sigma_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivamente.  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  es, por tanto, un vector aleatorio normal de dimensión  $n$  con esperanza  $E(u) = \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ . Dar la desviación típica  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , de cada observación supone establecer el llamado *modelo estocástico* del problema de observaciones indirectas.

Por otra parte, llamaremos  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h)$  a los verdaderos valores de los parámetros que queremos estimar (las incógnitas del sistema), de forma que  $Ax = \mu$  sería un sistema determinado con solución única  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h)$ . Dicho de otra manera, supondremos que se satisface la igualdad  $A\zeta = \mu$  pero que  $\zeta$  y  $\mu$  son vectores desconocidos.

Los verdaderos valores  $\mu$  de las magnitudes observables están estimados mediante observación directa y dando  $u$  como valor aproximado, y los verdaderos valores  $\zeta$  de las incógnitas se estimarán mediante el método de los mínimos cuadrados que se desarrollará en este capítulo.

**Ejemplo 2** [LAU83] *Determinación de la altura sobre el nivel del mar de tres estaciones a partir de la observación de desniveles. (Nivelación II)*

El verdadero valor  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  de las alturas es intrínsecamente desconocido. Sólo lo podríamos determinar si las observaciones fuesen exactas ( $d_i = \mu_i$ ), con lo cual el problema quedaría resuelto con las 3 primeras ecuaciones:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= Ha + \mu_1 \\ \zeta_2 &= Hb + \mu_2 \\ \zeta_3 &= Hc + \mu_3 \end{aligned}$$

Las 3 restantes serían combinaciones lineales suyas. Pero, a causa de la inexactitud de las observaciones, este sistema es incompatible. Matricialmente, lo escribiremos  $Ax = u$ , donde la matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el vector de incógnitas y el de términos independientes, que contiene las observaciones, son, respectivamente,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ha + d_1 \\ Hb + d_2 \\ Hc + d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{pmatrix}$$

Muchas veces, además de la inevitable fluctuación estadística del error en las observaciones, en la incompatibilidad del sistema interviene el hecho de que las relaciones lineales

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ih}x_h = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

entre las observaciones  $u_1, u_2, \dots, u_n$  y las incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_h$  son *modelos que aproximan* una realidad demasiado compleja para ser expresada matemáticamente de una forma operativa.

El siguiente ejemplo ilustra este hecho y cómo la aplicación del método de mínimos cuadrados abarca campos muy diversos.

### **Ejemplo 3** [LIN63] *Ajuste de coeficientes en un modelo parabólico*

La calidad de una producción de trigo se determinada por el contenido en proteínas ( $p$ ) y en “globoides” ( $g$ ) del grano. Se ha estimado empíricamente que hay una relación entre estos dos contenidos que se ajusta bastante bien por una función parabólica de la forma

$$g = x_1 + x_2p + x_3p^2$$

Los valores de los 3 parámetros  $x_1, x_2$  y  $x_3$  se determinan haciendo  $n$  (más de 3) observaciones del contenido  $g$  en  $n$  gramos de contenido  $p$  conocido, cosa que da lugar a un sistema de  $n$  ecuaciones en estas 3 incógnitas (modelo matemático):

$$\begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_1^2 \\ 1 & p_2 & p_2^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & p_n & p_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible tanto por la aleatoriedad en la imprecisión de las observaciones  $g_i$  como por el hecho de que la función parabólica que relaciona las dos variables no expresa la *relación real exactamente* sino que es un modelo matemático que la simplifica, pero que es útil operativamente.

En este capítulo estableceremos en qué consiste la solución de este tipo de sistemas sobredeterminados “en el sentido mínimo-cuadrático”, así como el error que asociaremos a esta solución tanto en el caso en que todas las observaciones tengan el mismo peso como en el caso de observaciones ponderadas.

Consideraremos únicamente los casos en que, como en el ejemplo 1, la matriz  $A$  de coeficientes es bien conocida y sólo están sometidas a error las observaciones contenidas en el vector de términos independientes  $u$ .

### 3.2 Solución de un sistema sobredeterminado de ecuaciones de observación

Sea el sistema incompatible  $Ax = u$  de  $n$  ecuaciones con  $h$  incógnitas donde  $n > h$ . La matriz  $A$  y el vector  $u$  son constantes y no existe ningún vector  $x$  que verifique esta igualdad matricial. Pero siempre podremos encontrar unas *correcciones*  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  al vector  $u$  de observaciones tales que el sistema

$$Ax = u + v \quad (3.3)$$

tenga solución  $m = (m_1, m_2, \dots, m_h)$ .

#### Definición 1 Vector de correcciones o residuos

Dado el sistema incompatible  $Ax = u$  de  $n$  ecuaciones con  $h$  incógnitas, donde  $n > h$ , llamaremos *vector de correcciones* o *vector de residuos* al vector  $v$  definido por

$$v = Ax - u \quad (3.4)$$

#### 3.2.1 Mínimos cuadrados y máxima verosimilitud

El vector  $v$  depende de  $x$  en el sentido de que para a cada vector  $x$  hay un vector  $v$  dado por la definición 1. Hay, pues, una infinidad de parejas  $\{x, v\}$  que satisfacen la expresión (3.3). Se trata de establecer un criterio para escoger una de estas parejas como solución del sistema. Veamos cómo el criterio de máxima verosimilitud de las observaciones conduce, igual que en el caso de observaciones directas tratado en el capítulo anterior, al criterio de mínimos cuadrados para los residuos.

Teniendo en cuenta que las observaciones  $u_i$  son normales, independientes, de media

$$\mu_i = \sum_{j=1}^h a_{ij} x_j$$

y suponiendo que todas tienen la misma desviación tipo  $\sigma$ , entonces la función de verosimilitud del conjunto de observaciones es el producto de funciones de densidad normales

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n f(u_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (u_i - \sum_{j=1}^h a_{ij} x_j)^2} \quad (3.5)$$

Y será máxima cuando el sumatorio del exponente

$$\sum_{i=1}^n \left( u_i - \sum_{j=1}^h a_{ij} x_j \right)^2$$

que es la suma  $v^T v$  de los residuos al cuadrado, sea mínima.

### 3.2.2 Solución mínimo-cuadrática

**Definición 2** *Estimador por mínimos cuadrados*

Llamaremos *estimador por mínimos cuadrados* de los verdaderos valores  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h)$  de los parámetros al vector  $m = (m_1, m_2, \dots, m_h)$  solución del sistema  $Ax = u + v$  que haga mínima la suma de los cuadrados de los residuos, es decir, que haga mínima la magnitud  $v^T v$  con  $v = Ax - u$ .

**Proposición 1**

El vector  $m = (m_1, m_2, \dots, m_h)$  solución del sistema  $Ax = u + v$ , que hace mínima la magnitud  $v^T v$ , está determinado por la expresión:

$$m = (A^T A)^{-1} A^T u \quad (3.6)$$

*Demostración*

La magnitud

$$v^T v = (Ax - u)^T (Ax - u)$$

es función del vector  $x$ , ya que  $A$  y  $u$  son constantes:

$$v^T v = f(x_1, x_2, \dots, x_h)$$

Condición necesaria para que la magnitud  $v^T v$  tenga un mínimo relativo para un valor de  $x$  es que se anulen sus derivadas parciales en este punto. Haciendo uso de resultados de cálculo matricial,

$$\frac{\partial v^T v}{\partial x_i} = 2v^T \frac{\partial v}{\partial x_i} = 2v^T A \frac{\partial x}{\partial x_i} = 0$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = (1, 0, \dots, 0)^T, \frac{\partial x}{\partial x_2} = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, \frac{\partial x}{\partial x_h} = (0, 0, \dots, 1)^T$$

resulta

$$v^T A = (0, 0, \dots, 0)$$

o bien

$$A^T v = (0, 0, \dots, 0)^T = \mathbf{0}$$

Y por la definición de  $v$ :

$$A^T (Ax - u) = \mathbf{0} \Rightarrow A^T Ax = A^T u$$

### Observación

En la anterior demostración sólo se ve que los *candidatos* a extremos son las soluciones del sistema de ecuaciones  $A^T Ax = A^T u$ . Como hemos supuesto que  $A$  es de rango máximo y, por tanto, la matriz  $N = A^T A$  es no singular, el candidato es único y dado por la expresión (3.6).

Parece razonable pensar que un máximo de  $v^T v$  no tiene demasiado sentido, pues siempre podremos encontrar vectores  $x$  tales que  $Ax$  se aleje de  $u$  tanto como queramos y que, en cambio, de todos los casos posibles sí que debe haber uno mínimo cuadrático, que deberá ser el único candidato que tenemos. De todas maneras, se puede ver que el candidato es un mínimo comparando ([LIN63] p. 146) el valor de  $v^T v$  calculado a partir de esta solución con cualquier otro posible valor.

### Definición 3 Sistema de ecuaciones normales

Dado el sistema incompatible sobredeterminado  $Ax = u$ , se llama *sistema de ecuaciones normales* al sistema compatible determinado

$$Nx = A^T u \quad (3.7)$$

donde  $N = A^T A$ .

Las propiedades estadísticas del estimador  $m$  se resumen en la siguiente proposición

### Proposición 2

La solución mínimo-cuadrática  $m$  del sistema sobredeterminado  $Ax = u$ , es un vector aleatorio normal de dimensión  $h$ , estimador no sesgado de los parámetros  $\zeta$ .

#### Demostración

Para ver que  $m$  es un vector aleatorio normal de dimensión  $h$  sólo es preciso tener en cuenta que  $u$  es un vector aleatorio normal de dimensión  $n$  y que  $m = Hu$ , donde

$$H = N^{-1} A^T$$

es una matriz  $h \times n$  de rango  $h$ .

Para demostrar que es un estimador no sesgado de los parámetros  $\zeta$  recordaremos que, al principio del capítulo, hemos establecido las convenciones:  $E(u) = \mu$  y  $A\zeta = \mu$ . Como la matriz  $H$  es constante, tenemos

$$E(m) = E(Hu) = HE(u) = H\mu = (A^T A)^{-1} A^T A \zeta = \zeta$$

**Ejemplo 4** *Determinación de la altura sobre el nivel del mar de tres estaciones, a partir de la observación de desniveles. (Nivelación III)*

Solucionemos el problema planteado en el ejemplo 1 dando datos numéricos.

Las alturas conocidas son

$$\begin{aligned} Ha &= 746.239 \text{ m} \\ Hb &= 789.417 \text{ m} \\ Hc &= 754.219 \text{ m} \end{aligned}$$

y los desniveles observados

$$\begin{aligned}d_1 &= 12,005 \text{ m} \\d_2 &= 8,205 \text{ m} \\d_3 &= 30,004 \text{ m} \\d_4 &= 39,413 \text{ m} \\d_5 &= 13,398 \text{ m} \\d_6 &= 26,026 \text{ m}\end{aligned}$$

Con estos datos, el sistema de ecuaciones de observación  $Ax = u$  se escribe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 758,244 \\ 797,622 \\ 784,223 \\ 39,413 \\ 13,398 \\ 26,026 \end{pmatrix}$$

Si las observaciones fuesen exactas, las tres primeras ecuaciones darían la solución

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 758,244 \\ 797,622 \\ 784,223 \end{pmatrix}$$

Veamos cómo el resto de observaciones modifican esta solución aproximada. El sistema de ecuaciones normales  $Nx = A^T u$  es

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 692,805 \\ 850,433 \\ 796,851 \end{pmatrix}$$

Invirtiendo la matriz de este sistema

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

podemos calcular la solución:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 692,805 \\ 850,433 \\ 796,851 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 758,223 \\ 797,630 \\ 784,235 \end{pmatrix}$$

Observamos que, en este caso, el método de mínimos cuadrados introduce modificaciones del orden de los centímetros.

### Ejemplo 5 Recta de regresión

Vamos a ver, a partir de un ejemplo cualquiera, que el problema clásico de encontrar la recta de regresión lineal de una nube de puntos es un caso particular del problema de observaciones indirectas.

Sea  $y$  la cantidad, en gramos, de una cierta substancia que se disuelve en un litro de agua a temperatura  $x$ . Se observa que, al aumentar la temperatura, aumenta la cantidad de substancia que podemos disolver:

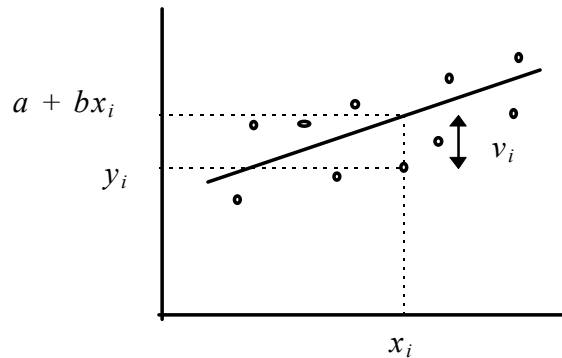


Fig. 3.2 Recta de regresión

Para dar una ley sencilla que relacione estas dos variables, consideremos  $n$  parejas de valores observados  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  que dan lugar a una nube de puntos (fig. 3.2) de la cual queremos deducir la recta de ecuación

$$y = a + bx$$

tal que la suma cuadrática

$$v^T v = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2$$

sea mínima.

En términos del problema de observaciones indirectas, tenemos el sistema de  $n$  ecuaciones

$$\begin{aligned} a + x_1 b &= y_1 \\ a + x_2 b &= y_2 \\ &\dots \\ a + x_n b &= y_n \end{aligned}$$

con las 2 incógnitas  $a$  y  $b$ . Matricialmente se escribe

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema y el vector de observaciones son, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Haciendo las operaciones matriciales, el sistema de ecuaciones normales  $A^T A x = A^T u$  queda

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

la solución del cual es

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

donde

$$N^{-1} = (A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{x^2}}{nS_x^2} & -\frac{\overline{x}}{nS_x^2} \\ -\frac{\overline{x}}{nS_x^2} & \frac{1}{nS_x^2} \end{pmatrix}$$

Haciendo los cálculos,

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$$

$$a = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\overline{y x^2} - \overline{x} \overline{xy}}{S_x^2}$$

donde  $S_x^2$  y  $S_{xy}$  son la varianza y la covarianza muestrales, respectivamente, mientras que la barra indica la media muestral de la variable correspondiente.

### 3.3 Precisión en la estimación por mínimos cuadrados

En esta sección supondremos que todas las observaciones están afectadas por el mismo error. Es decir, supondremos que cada observación  $u_i$  es una realización de una variable aleatoria  $u_i$  y que todas las variables aleatorias  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , son independientes y con la misma desviación tipo  $\sigma$ . Dicho de otra manera, la matriz de varianza-covarianza (modelo estocástico) del vector aleatorio  $u$  de observaciones es

$$\Sigma_u = \sigma^2 I \quad (3.8)$$

donde  $I$  es la identidad de orden  $n$  y, por tanto, las matrices cofactor y peso son la propia identidad, como es natural, ya que todas las observaciones tienen peso unidad. Si bien el parámetro poblacional  $\sigma$  es, en general, desconocido, siempre podremos calcular (veremos cómo hacerlo) el correspondiente estimador  $S$  y escribiremos

$$\begin{aligned} \Sigma_u &\sim S^2 I \\ Q_u = W_u &= I \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.3.1 Errores asociados al estimador por mínimos cuadrados

Se trata de determinar los errores  $\sigma_m$  asociados al estimador  $m$  calculado a partir de la proposición 1, como consecuencia de la propagación del error  $\sigma$  de las observaciones.

#### Proposición 3

Si las observaciones  $u_i$  son independientes y tienen el mismo peso, entonces la matriz cofactor del vector aleatorio  $m$ , solución mínima cuadrática del sistema  $Ax = u$ , es la inversa de la matriz del sistema de ecuaciones normales:

$$Q_m = N^{-1} = (A^T A)^{-1} \quad (3.10)$$

*Demostración*

Apliquemos la ley de propagación de la matriz cofactor al proceso que permite calcular el estimador  $m$  a partir de las observaciones  $u$  ( $m = N^{-1} A^T u$ ).

Primero se calcula el vector

$$t = A^T u \Rightarrow Q_t = A^T Q_u (A^T)^T = A^T A = N$$

Después  $m$

$$m = N^{-1} t \Rightarrow Q_m = N^{-1} Q_t (N^{-1})^T = N^{-1} N (N^{-1})^T = N^{-1}$$

donde hemos hecho uso de que  $N^{-1}$  es simétrica por serlo  $N$ .

Como consecuencia directa de la proposición 3 tenemos la siguiente

#### Proposición 4

La matriz de varianza-covarianza  $\Sigma_m$  de la solución mínimo-cuadrática  $m$  se calcula a partir de la desviación tipo  $\sigma$  de las observaciones  $u_i$  según la relación

$$\Sigma_m = \sigma^2 Q_m \quad (3.11)$$

y, en particular,

$$\sigma_{m_i}^2 = \sigma^2 Q_{m_{ii}}$$

donde  $Q_{m_{ii}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$ , son los elementos de la diagonal principal de la inversa de la matriz del sistema de ecuaciones normales.

#### Ejemplo 6 Error en los parámetros de la recta de regresión lineal

En el cálculo de los parámetros de la recta de regresión lineal, hemos visto que la matriz cofactor es

$$Q_m = N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{x^2}}{nS_x^2} & -\frac{\overline{x}}{nS_x^2} \\ -\frac{\overline{x}}{nS_x^2} & \frac{1}{nS_x^2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, si llamamos  $\sigma$  al error de cada una de las observaciones  $y_i$ , según la proposición 4 tenemos que el error de la ordenada en el origen es

$$S_a = \sqrt{\frac{\overline{x^2}}{nS_x^2}}\sigma$$

y que el error de la pendiente es

$$S_b = \sqrt{\frac{1}{nS_x^2}}\sigma$$

### 3.3.2 El error en las observaciones. Varianza de referencia a posteriori

Existe la posibilidad de que se conozca, por experiencia previa, el valor del error  $\sigma$  asociado a las observaciones  $u_i$ . En este caso se dice que se conoce la *desviación tipo de referencia a priori*. Pero también puede ocurrir que este dato sea desconocido y su cálculo forme parte del proceso de estimación de la precisión de los resultados.

Hay una forma muy sencilla de estimar la varianza de las observaciones de peso unidad, o varianza de referencia, a partir de los resultados de la estimación. Está basada en el comportamiento estadístico de los residuos, resumido en la proposición siguiente.

#### Proposición 5

La magnitud

$$Y = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_1^n v_i^2$$

es una variable aleatoria que sigue una ley  $\chi^2_{n-h}$  con  $n-h$  grados de libertad.

#### Demostración

La demostración formal de este resultado ([LIN63] p. 155) es bastante larga y complicada. Hay que ver que  $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$  se puede escribir como suma de los cuadrados de  $n-h$  variables aleatorias independientes y normales  $N(0, \sigma)$ , para lo cual hay que hacer, además de muchos cálculos, un estudio completo de las características del vector aleatorio  $\mathbf{v}$ . Todo ello nos haría desviar demasiado de los objetivos fijados. Nos limitaremos a dar una justificación intuitiva.

La magnitud  $Y$  se puede escribir

$$Y = \sum_1^n \frac{v_i^2}{\sigma^2} = \sum_1^n \left( \frac{u_i - (Am)_i}{\sigma} \right)^2$$

Por otra parte, la magnitud

$$\bar{Y} = \sum_1^n \left( \frac{u_i - \mu_i}{\sigma} \right)^2 = \sum_1^n \left( \frac{u_i - A\zeta_i}{\sigma} \right)^2$$

es, por definición,  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad. En estadística, y en contextos parecidos, se demuestra que, al sustituir la media  $\mu_i$  por un estimador, se mantiene el carácter  $\chi^2$  de la variable aleatoria, pero disminuyen los grados de libertad.

En cuanto al número de grados de libertad, también parece razonable considerar que es igual al exceso de observaciones  $n-h$ . Si se hiciera el mismo número de observaciones  $u_i$  que incógnitas  $x_i$  se tienen, entonces el sistema  $Ax = u$  sería determinado y los residuos  $v$  nulos, con lo cual la magnitud  $v^T v$  no sería una variable aleatoria sino una constante nula. Por tanto, se puede decir que la magnitud  $v^T v$  es una variable aleatoria en la medida que hay exceso de observaciones y que los grados de libertad serán, precisamente, este exceso.

Como consecuencia inmediata de este resultado se deduce la siguiente proposición

### Proposición 6

La magnitud

$$S = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-h}} \quad (3.12)$$

es un estimador puntual no sesgado de la desviación tipo de referencia a priori  $\sigma$ .

#### Demostración

Teniendo en cuenta que la esperanza matemática de una variable  $\chi^2$  es el número de grados de libertad y la proposición anterior, se obtiene

$$E\left(\frac{v^T v}{\sigma^2}\right) = n-h \Leftrightarrow E\left(\frac{v^T v}{n-h}\right) = \sigma^2$$

Hay que esperar, pues, que

$$S^2 = \left(\frac{v^T v}{n-h}\right)$$

tome valores próximos a la varianza de referencia  $\sigma^2$ .

### Observación

La desviación tipo  $S$  de las observaciones, como estimador del parámetro  $\sigma$ , recibe el nombre de *desviación tipo de referencia a posteriori*.

La matriz de varianza-covarianza  $\Sigma_m$  de la solución mínimo-cuadrática  $m$  se estimará mediante la relación

$$\Sigma_m \sim S^2 Q_m \quad (3.13)$$

y, en particular,

$$\sigma_{mi}^2 \sim S^2 Q_{m ii} = S_{mi}^2$$

donde  $Q_{m ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$ , son los elementos de la diagonal principal de la inversa de la matriz del sistema de ecuaciones normales.

**Ejemplo 7** Determinación de la altura sobre el nivel del mar de tres estaciones a partir de la observación de desniveles. (Nivelación IV)

Calculemos el error en las alturas obtenidas en el ejemplo 5. Como no conocemos la desviación tipo de referencia  $\sigma$ , aplicaremos los resultados (3.12) y (3.13).

En primer lugar tenemos que encontrar el vector de residuos  $v = Am - u$  a partir de las observaciones  $u$ , la matriz  $A$  y el resultado de la estimación por mínimos cuadrados  $m$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 758,223 \\ 797,630 \\ 784,235 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 758,244 \\ 797,622 \\ 784,223 \\ 39,413 \\ 13,398 \\ 26,026 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,021 \\ 0,008 \\ 0,012 \\ -0,006 \\ -0,003 \\ -0,014 \end{pmatrix}$$

El número de grados de libertad es  $n-h = 6-3 = 3$ . Aplicando (3.12) se obtiene

$$S = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-h}} = \sqrt{\frac{0,00089}{3}} = 0,017 \text{ m}$$

Y aplicando (3.13):

$$\sigma_{m_i} \sim S \sqrt{Q_{m_{ii}}} = 0,017\sqrt{0.5} = 0,12 \text{ m}$$

### 3.3.3 Estimación por intervalos

Recordemos que cada componente  $m_i$  de la solución mínimo-cuadrática  $m$  es un estimador puntual del parámetro correspondiente  $\zeta_i$  y que el error en las observaciones  $S$  es un estimador puntual de la desviación tipo poblacional  $\sigma$ .

Como consecuencia de la proposición 5, podemos afirmar directamente que, fijado un nivel de significación  $\alpha$ , el intervalo de confianza para el verdadero valor de  $\sigma$  es

$$\frac{\sqrt{v^T v}}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \frac{\sqrt{v^T v}}{\sqrt{\chi_a^2}} \quad (3.14)$$

donde  $\chi_a^2$  y  $\chi_b^2$  son los valores de la distribución  $\chi^2$  con  $n-h$  grados de libertad, con el significado habitual para el correspondiente valor de  $\alpha$ .

Por ejemplo, si el nivel de significación es del 5%, es decir, el nivel de confianza del 95%, entonces  $\chi_a^2$  y  $\chi_b^2$  son los valores de la distribución  $\chi^2$  con  $n-h$  grados de libertad tales que  $P(\chi^2 < \chi_a^2) = P(\chi^2 > \chi_b^2) = 0,025$ .

En cuanto a la estimación por intervalos del verdadero valor de los parámetros  $\zeta_i$  a partir de los resultados  $m_i$ , se puede aplicar la proposición siguiente.

**Proposición 7**

La variable

$$t_i = \frac{m_i - \zeta_i}{S\sqrt{Q_{mii}}}$$

sigue una ley  $t$  de Student con  $n-h$  grados de libertad.

*Demostración*

Según las proposiciones 2 y 4, la magnitud

$$Z_i = \frac{m_i - \zeta_i}{\sigma\sqrt{Q_{mii}}}$$

es  $N(0,1)$ , y la magnitud

$$Y = \frac{v^T v}{\sigma^2}$$

sigue una ley  $\chi^2$  con  $n-h$  grados de libertad. Por tanto, la magnitud

$$t_i = \sqrt{n-h} \frac{Z_i}{\sqrt{Y}}$$

seguirá una ley  $t$  de Student con  $n-h$  grados de libertad.

Ahora estamos en condiciones de afirmar que, fijado un nivel de significación  $\alpha$ , el intervalo de confianza para la estimación de los parámetros  $\zeta_i$  es

$$m_i - t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} < \zeta_i < m_i + t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} \quad (3.15)$$

$i = 1, 2, \dots, h$ , donde  $t_\alpha$  es el valor de la variable  $t$  de Student con  $n-h$  grados de libertad tal que

$$P(-t_\alpha < t_{n-h} < t_\alpha) = 1-\alpha$$

**Ejemplo 8** *Determinación de la altura sobre el nivel del mar de tres estaciones a partir de la observación de desniveles. (Nivelación V)*

Calculemos, en este caso, los intervalos del 95% de confianza para las tres alturas y para el error en las observaciones.

Con tres grados de libertad y un nivel de significación  $\alpha = 0,05$  (95% de confianza), tenemos  $t_\alpha = 3,1824$ . Recordemos que  $Q_{mii} = 0,5$ ,  $i = 1, 2, 3$  y  $S = 0,0172$  m. Por tanto,

$$m_i - 3,1824 \times 0,0172\sqrt{0,5} < \zeta_i < m_i + 3,1824 \times 0,0172\sqrt{0,5}$$

o bien

$$\zeta_i = m_i \pm 0,039 \text{ m}$$

Haciendo los cálculos, obtendremos

$$\begin{aligned} 758,185 < \zeta_1 < 758,262 \\ 797,592 < \zeta_2 < 759,669 \\ 784,196 < \zeta_3 < 784,274 \end{aligned}$$

Observemos la mayor precisión de la estimación por intervalos. Sin el concepto de intervalo de confianza sólo podíamos decir que, por ejemplo, la estación D se encuentra a una altura de “aproximadamente” 758,223 m sobre el nivel del mar. Ahora podemos decir que, con una probabilidad del 95%, la estación D se encuentra a una altura sobre el nivel del mar de entre 758,185 y 758,262 m.

Calculemos, ahora, el intervalo de confianza para el verdadero valor del error en las observaciones  $\sigma$ . Con 3 grados de libertad y nivel de significación  $\alpha = 0,05$ , tenemos  $\chi^2_a = 0,2158$  y  $\chi^2_b = 9,3562$ . Por tanto, recordando que  $v^T v = 0,00089$  podemos decir, con un 95% de confianza, que

$$\sqrt{\frac{0,00089}{9,3562}} < \sigma < \sqrt{\frac{0,00089}{0,2158}}$$

o bien que

$$0,01 < \sigma < 0,064$$

### 3.4 Observaciones ponderadas

Supongamos que tenemos el mismo *sistema sobredeterminado*  $Ax = u$  del apartado anterior, con la misma definición de *correcciones* o *residuos*  $v = Ax - u$ , pero que, ahora, no todas las observaciones están hechas en las mismas circunstancias y que, por tanto, se han de ponderar de manera diferente.

Esto equivale a considerar que el vector aleatorio  $n$ -dimensional  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  tiene asociado un vector de desviaciones tipo  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , de componentes  $\sigma_i$  no necesariamente iguales. Fijada la varianza de referencia  $\sigma^2$ , al vector de observaciones le corresponde un vector de varianzas normalizadas  $(\sigma_1^2/\sigma^2, \sigma_2^2/\sigma^2, \dots, \sigma_n^2/\sigma^2)$  y un vector de pesos formado por los respectivos valores inversos de las varianzas normalizadas:

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\sigma^2/\sigma_1^2, \sigma^2/\sigma_2^2, \dots, \sigma^2/\sigma_n^2).$$

Como suponemos que las observaciones  $u_1, u_2, \dots, u_n$  son independientes, la *matriz de varianza-covarianza* (modelo estocástico) será diagonal:

$$\Sigma_u = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

La *matriz cofactor* será

$$Q_u = \frac{1}{\sigma^2} \Sigma_u \quad (3.17)$$

Y la *matriz peso*

$$W_u = Q^{-1}_u = \sigma^2 \Sigma^{-1}_u$$

será la matriz diagonal

$$W_u = P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

### 3.4.1 Mínimos cuadrados y máxima verosimilitud

Análogamente a como se hizo en el apartado 3.2.1, se deduce el criterio de los mínimos cuadrados a partir del de máxima verosimilitud, correspondiente al caso de observaciones ponderadas sin más que considerar, en la expresión (3.5) de la función de verosimilitud, que cada observación  $u_i$  tiene varianza

$$\sigma_i^2 = \sigma^2/p_i$$

Así, se obtiene

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n f(u_i) = \frac{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n p_i (u_i - \sum a_{ij} x_j)^2} \quad (3.19)$$

que será máxima cuando el sumatorio del exponente

$$v^T P v = \sum_{i=1}^n p_i \left( u_i - \sum_{j=1}^h a_{ij} x_j \right)^2$$

que es la suma ponderada de los residuos al cuadrado, sea mínimo.

Con una demostración análoga a la de la proposición 1 se establece la siguiente proposición para el caso correspondiente a observaciones ponderadas.

### 3.4.2 Solución mínimo-cuadrática

#### Proposición 8

El vector  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  solución del sistema  $Ax = u + v$  que hace mínima la magnitud  $v^T P v$ , está determinado por la expresión

$$m = N^{-1} A^T P u \quad (3.20)$$

donde

$$N = A^T P A \quad (3.21)$$

#### Definición 4 Sistema de ecuaciones normales para observaciones indirectas ponderadas

Dado el sistema incompatible sobredeterminado  $Ax = u$ , donde las observaciones del vector  $u$  son ponderadas con matriz de pesos  $P$ , se llama *sistema de ecuaciones normales* al sistema compatible determinado

$$N x = A^T P u \quad (3.22)$$



errores, a la solución  $m$  por mínimos cuadrados dada por la proposición 8.

Las demostraciones de las siguientes proposiciones son análogas a las correspondientes a observaciones no ponderadas, una vez multiplicada cada ecuación por la raíz del peso correspondiente.

### Proposición 9

La solución mínimo-cuadrática  $m$  del sistema sobredeterminado  $Ax = u$  es un vector aleatorio normal de dimensión  $h$ , estimador no sesgado del verdadero valor  $\zeta$  de las incógnitas:

$$E(m) = \zeta \quad (3.26)$$

## 3.5 Precisión en la estimación por mínimos cuadrados con observaciones ponderadas

Enunciaremos los resultados análogos a los establecidos en el apartado 3.3 pero correspondientes al caso de observaciones ponderadas.

### 3.5.1 Errores asociados al estimador por mínimos cuadrados

Se trata de determinar los errores  $\sigma_m$  asociados al estimador  $m$  calculado a partir de la proposición 8 como consecuencia de la propagación del error  $\sigma$  de las observaciones.

### Proposición 10

Si la matriz cofactor de las observaciones  $u$  es  $Qu = P^{-1}$ , entonces la matriz cofactor  $Q_m$  de la solución por mínimos cuadrados ( $m = N^{-1}A^T P u$ ) del problema de observaciones indirectas dada por la proposición 8 es

$$Q_m = N^{-1} = (A^T P A)^{-1} \quad (3.26)$$

Como consecuencia, se tiene la siguiente proposición

### Proposición 11

La matriz de varianza-covarianza de la solución  $m$  será

$$\Sigma_m = \sigma^2 Q_m = \sigma^2 N^{-1} = \sigma^2 (A^T P A)^{-1}$$

donde  $\sigma^2$  es la varianza de referencia a priori.

Notemos que, aunque la matriz de varianza-covarianza  $\Sigma_u$  de las observaciones  $u_i$  sea diagonal, en general la matriz de varianza-covarianza  $\Sigma_m$  de los resultados  $m_i$  no lo será. Esto quiere decir que, aunque las observaciones  $u_i$  sean independientes, en general los resultados  $m_i$  no lo serán. Ello es consecuencia inmediata de que, para calcular cada  $m_i$ , intervienen todas las observaciones  $u_i$ .

La desviación tipo  $\sigma_{mi}$  de cada componente  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$ , del estimador mínimo-cuadrático  $m$  está relacionada con la desviación tipo  $\sigma$  de referencia de la forma

$$\sigma_{mi}^2 = \sigma^2 Q_{m \ ii} \quad (3.27)$$

donde  $Q_{m\ ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$ , son los elementos de la diagonal principal de la inversa de la matriz del sistema de ecuaciones normales.

### 3.5.2 El error en las observaciones. Varianza de referencia a posteriori

Si la varianza de referencia a priori  $\sigma^2$  es desconocida se deberá estimar a partir de magnitudes observables, lo cual se podrá hacer a partir la proposición siguiente:

#### Proposición 12

La magnitud

$$Y = \frac{\mathbf{v}^T P \mathbf{v}}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_1^n p_i v_i^2$$

es una variable aleatoria que sigue una ley  $\chi^2_{n-h}$  con  $n-h$  grados de libertad.

Como consecuencia de este resultado, y atendiendo a que la media o esperanza matemática de una variable  $\chi^2_{n-h}$  es el número  $n-h$  de grados de libertad, se deduce la proposición siguiente.

#### Proposición 13

La magnitud

$$S = \sqrt{\frac{\sum p_i v_i^2}{n-h}} \quad (3.28)$$

es un estimador puntual no sesgado de la desviación tipo de referencia  $\sigma$ . Recibe el nombre de *desviación tipo de referencia a posteriori*.

#### Observación

La matriz de varianza-covarianza  $\Sigma_m$  de la solución mínimo-cuadrática  $m$  se estima a partir de la desviación tipo  $S$  de las observaciones  $u_i$  según la relación

$$\Sigma_m \sim S^2 Q_m \quad (3.29)$$

y, en particular,

$$\sigma_{mi}^2 \sim S_{mi}^2 = S^2 Q_{m\ ii}$$

donde  $Q_{m\ ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$ , son los elementos de la diagonal principal de la inversa de la matriz del sistema de ecuaciones normales.

### 3.5.3 Estimación por intervalos

Como consecuencia de la proposición 12, podemos afirmar directamente que, fijado un nivel de significación  $\alpha$ , el intervalo de confianza para el verdadero valor de  $\sigma$  es

$$\frac{\sqrt{\mathbf{v}^T P \mathbf{v}}}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \frac{\sqrt{\mathbf{v}^T P \mathbf{v}}}{\sqrt{\chi_a^2}} \quad (3.30)$$

donde  $\chi^2_a$  y  $\chi^2_b$  son los valores de la distribución  $\chi^2$  con  $n-h$  grados de libertad, con el significado habitual para el correspondiente valor de  $\alpha$ .

Por ejemplo, si el nivel de significación es del 5%, es decir, el nivel de confianza del 95%, entonces  $\chi^2_a$  y  $\chi^2_b$  son los valores de la distribución  $\chi^2$  con  $n-h$  grados de libertad tales que  $P(\chi^2 < \chi^2_a) = P(\chi^2 > \chi^2_b) = 0,025$ .

En cuanto a la estimación por intervalos del verdadero valor  $\zeta_i$  de las incógnitas a partir de los resultados  $m_i$ , se puede hacer a partir de la proposición siguiente.

#### Proposición 14

La variable

$$t_i = \frac{m_i - \zeta_i}{S\sqrt{Q_{mii}}}$$

sigue una ley  $t$  de Student con  $n-h$  grados de libertad.

Ahora estamos en condiciones de afirmar que, fijado un nivel de significación  $\alpha$ , el intervalo de confianza para la estimación de los parámetros  $\zeta_i$  es

$$m_i - t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} < \zeta_i < m_i + t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} \quad (3.31)$$

$i = 1, 2, \dots, h$ , donde  $t_\alpha$  es el valor de la variable  $t$  de Student con  $n-h$  grados de libertad tal que

$$P(-t_\alpha < t_{n-h} < t_\alpha) = 1 - \alpha.$$

#### Ejemplo 9 Caso particular de observaciones directas

Supongamos que observamos  $n$  veces una cierta magnitud  $x$  con resultados  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Podemos plantear el problema de encontrar el mejor estimador por mínimos cuadrados en los mismos términos que lo hemos hecho para observaciones indirectas, considerando que tenemos el sistema de  $n$  ecuaciones con 1 incógnita

$$\begin{aligned} x &= u_1 \\ x &= u_2 \\ &\dots \\ x &= u_n \end{aligned}$$

que, matricialmente, se escribe

$$Ax = u$$

donde  $A$  y  $u$  son las matrices columna

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

En este caso tenemos

$$A^T A = n,$$

$$(A^T A)^{-1} = 1/n$$

y

$$A^T u = \sum u_i$$

Por tanto, aplicando la proposición 1, la solución por mínimos cuadrados del sistema es la media aritmética

$$m = (A^T A)^{-1} A^T u = (\sum u_i)/n$$

Para observaciones ponderadas, considerando la matriz de pesos

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

tenemos

$$A^T P A = \sum P_i,$$

$$(A^T P A)^{-1} = 1/\sum P_i$$

y

$$A^T P u = \sum P_i u_i$$

Por tanto, en este caso, aplicando la proposición 8, la solución por mínimos cuadrados es la media ponderada

$$m_p = (A^T P A)^{-1} A^T P u = (\sum P_i u_i) / \sum P_i$$

Además, aplicando la proposición 11, tomando  $Q = (A^T P A)^{-1} = 1/\sum P_i$  se obtiene la varianza de la media ponderada

$$\sigma_{m_p}^2 = \sigma^2 / \sum P_i$$

que, en caso de observaciones no ponderadas ( $P_i=1$ ), se escribe

$$\sigma_m^2 = \sigma^2 / n$$

### 3.6 Análisis de los residuos

Los residuos se obtienen a partir de las variables aleatorias  $u$  y  $m$ . Por tanto, son a su vez variables aleatorias. En este apartado estudiaremos su comportamiento estadístico y veremos su utilidad para analizar el resultado del ajuste.

#### Proposición 15

La esperanza matemática de los residuos es cero:

$$E(v) = 0 \tag{3.32}$$

*Demostración*

$$v = Am - u \Rightarrow E(v) = A E(m) - E(u) = A(\zeta) - \mu = \mu - \mu = 0$$

Por lo tanto, cabe esperar que los residuos sean pequeños y de distintos signos. Un comportamiento diferente puede ser síntoma de anomalías en el proceso de ajuste o en las propias observaciones.

### 3.6.1 Test de bondad del ajuste

La proposición 12 permite establecer, a partir de los residuos, una comparación estadística entre las varianzas de referencia a priori  $\sigma^2$  y a posteriori  $S^2$  que constituye un test de la bondad del ajuste efectuado. Efectivamente, la variable

$$Y = \frac{v^T P v}{\sigma^2} = (n-h) \frac{S^2}{\sigma^2}$$

tiene una distribución  $\chi^2$  con  $n-h$  grados de libertad. Por lo tanto, fijado un nivel de significación  $\alpha$ , este estadístico nos permite contrastar la hipótesis de bondad del ajuste fijando un intervalo de aceptación entre los valores  $\chi_a^2$  y  $\chi_b^2$  que dejan una probabilidad  $\alpha/2$  en cada cola (fig. 3.3):

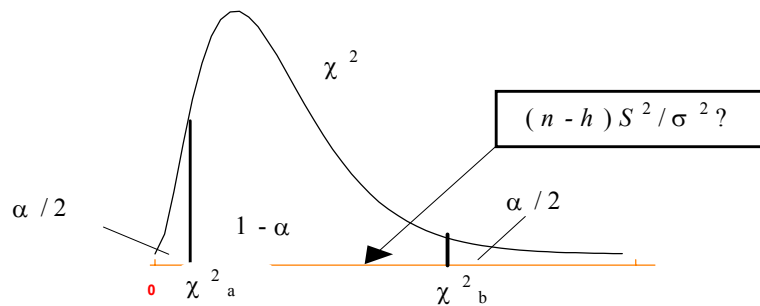


Fig. 3.3 Test  $\chi^2$

### 3.6.2 Observaciones ajustadas

Los residuos son correcciones a las observaciones. Al resolver un sistema sobredeterminado de ecuaciones de observación obtenemos unos valores ajustados de las observaciones

$$\hat{u} = u + v = Am \quad (3.33)$$

La siguiente proposición relaciona la matriz cofactor de los residuos con las de las observaciones ajustadas y sin ajustar.

#### Proposición 16

$$Q_v = P^{-1} - AN^{-1}A^T \quad (3.34)$$

*Demostración*

$$v = Am - u = AN^{-1}A^T P u - u = (AN^{-1}A^T P - I)u$$

Aplicando (1.9)

$$\begin{aligned} Q_v &= (AN^{-1}A^T P - I)Q_u(AN^{-1}A^T P - I)^T = \\ &= (AN^{-1}A^T P - I)P^{-1}(PAN^{-1}A^T - I) = \\ &= (AN^{-1}A^T P - I)(AN^{-1}A^T - P^{-1}) = \\ &= AN^{-1}A^T P AN^{-1}A^T - AN^{-1}A^T - AN^{-1}A^T + P^{-1} = \\ &= P^{-1} - AN^{-1}A^T \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$Q_u = P^{-1} \text{ y } Q_{\hat{u}} = A Q_u A^T = AN^{-1}A^T \quad (3.35)$$

Como consecuencia, se tiene

$$Q_{\hat{u}} = Q_u - Q_v \quad (3.36)$$

de donde se deduce que el error en las observaciones ajustadas es inferior al de las observaciones sin ajustar.

### 3.6.3 Números de redundancia

De la matriz cofactor de los residuos  $Q_v$  podemos obtener más información para el análisis cualitativo del ajuste.

#### Definición 5 Números de redundancia

Se llaman números de redundancia de un ajuste los elementos de la diagonal de la matriz  $Q_v P$ :

$$r_i = (Q_v P)_{ii} \quad (3.37)$$

Si la matriz de pesos es diagonal, como corresponde a un conjunto de observaciones independientes, entonces los números de redundancia se escriben

$$r_i = p_i q_i \quad (3.38)$$

donde  $p_i = \sigma^2 / \sigma_{ui}^2$  y  $q_i = \sigma_{vi}^2 / \sigma^2$  son los elementos diagonales de las matrices  $P$  y  $Q_v$ , respectivamente. Por tanto, también se puede escribir

$$r_i = \frac{\sigma_{vi}^2}{\sigma_{ui}^2} \quad (3.39)$$

#### Proposición 17

La suma los números de redundancia es igual al número de grados de libertad del sistema:

$$\sum_{i=1}^n r_i = n - h \quad (3.40)$$

Si las observaciones son independientes, entonces los números de redundancia toman valores entre 0 y 1:

$$0 < r_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.41)$$

#### Demostración

Según la expresión (3.34) de  $Q_v$  se tiene

$$\text{Tr}(Q_v P) = \text{Tr}(I - AN^{-1}A^T P) = \text{Tr}(I) - \text{Tr}(AN^{-1}A^T P) = n - \text{Tr}(AN^{-1}A^T P)$$

Pero  $AN^{-1}A^T P$  es una matriz idempotente. Efectivamente,

$$(AN^{-1}A^T P)(AN^{-1}A^T P) = AN^{-1}(A^T P A)N^{-1}A^T P = AN^{-1}NN^{-1}A^T P = AN^{-1}A^T P$$

Ahora sólo hace falta tener en cuenta que la traza de una matriz idempotente es igual a su rango y que, como hemos supuesto  $A$  de rango máximo  $= h$ , el rango de  $AN^{-1}A^T P$  es también igual a  $h$ .

De (3.34) se deduce que  $Q_{vii} < P^{-1}_{ii}$ . Si las observaciones son independientes y, por tanto,  $P$  y  $P^{-1}$  son diagonales, entonces

$$0 < q_i < \frac{1}{p_i}$$

Ahora basta multiplicar por  $p_i$  para obtener (3.41).

### Observación

De (3.40) se puede deducir que cada observación  $u_i$  contribuye en una cantidad  $r_i$  a los grados de libertad o redundancia del sistema. De ahí su denominación como números de redundancia. Por otra parte, el grado de satisfacción de la relación (3.40) es también un indicador de la bondad del ajuste. Además, de (3.36) y (3.39) se deduce que

- Si  $r_i \approx 1$ , entonces se puede decir que el ajuste ha reducido apreciablemente el error de la observación  $u_i$ .
- Si  $r_i \approx 0$ , entonces se puede decir que el ajuste no ha reducido apreciablemente el error de la observación  $u_i$ .

### 3.6.4 Detección de errores groseros

El test  $\chi^2$  de comparación de  $S^2$  y  $\sigma^2$  o la relación (3.40) sirven para detectar errores en el proceso general de cálculos de la compensación, pero no para detectar errores groseros en las observaciones, ya que éstos pueden quedar disimulados, por ejemplo, por un bajo peso relativo.

Hay métodos para detectar errores groseros antes y después del ajuste. Los métodos a priori se basan en el chequeo cuidadoso de la coherencia de los resultados observacionales. Los métodos a posteriori se basan en el análisis estadístico de los residuos. A continuación describiremos los llamados test de Baarda y  $\tau$  respectivamente para la detección de errores groseros en las observaciones.

*Test de Baarda.* Corresponde al modelo estocástico a): se conocen los errores en las observaciones y se dispone de la varianza de referencia a priori  $\sigma^2$ . El test se basa en el supuesto de que la variable aleatoria

$$z_i = \frac{v_i}{\sigma_{vi}} = \frac{v_i}{\sigma\sqrt{q_i}} \quad (3.42)$$

es normal tipificada. Por tanto, fijado un nivel de significación  $\alpha$ , se trata de comprobar si el valor que toma el estadístico  $z_i$ , para cada observación, cae dentro del correspondiente intervalo de aceptación (fig. 3.4).

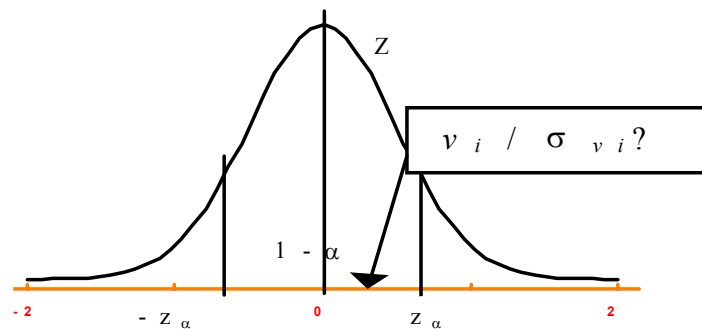


Fig. 3.4 Test de Baarda

Obsérvese que el estadístico  $z_i$  no depende de los grados de libertad del sistema ni, por tanto, del número de observaciones. Por ejemplo, para un nivel de significación del 5%, el valor crítico es 1.96 independientemente de la redundancia.

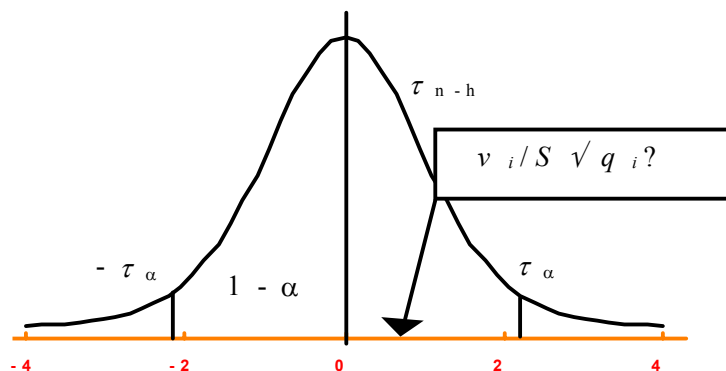
*Test  $\tau$ .* Corresponde al modelo estocástico b): se dan los pesos de las observaciones y no se dispone de la varianza de referencia a priori  $\sigma^2$ . El test se basa en el supuesto de que la variable aleatoria

$$\tau_i = \frac{v_i}{S\sqrt{q_i}} \approx \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \quad (3.43)$$

sigue una distribución  $\tau$  con  $n-h$  grados de libertad, donde

$$\tau_{n-h} = \frac{\sqrt{n-h} t_{n-h-1}}{\sqrt{n-h-1 + t_{n-h-1}^2}} \quad (3.44)$$

y donde  $t_{n-h-1}$  es  $t$  de Student con  $n-h-1$  grados de libertad. Por tanto, fijado un nivel de significación  $\alpha$ , se trata de proceder, con el estadístico  $\tau_i$ , de manera análoga al caso anterior (Fig. 3.5).

Fig. 3.5 Test  $\tau$ 

El tamaño de los residuos puede sugerir errores groseros en las correspondientes observaciones, pero no los identifica necesariamente. Un error grosero en una observación puede afectar los residuos de las restantes observaciones.



$$W_u = P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

y

$$Q_u = P^{-1}$$

- Se conocen los pesos de las observaciones, es decir la matriz  $P$ , pero no sus errores  $\sigma_{ui}$  ni la varianza de referencia a priori  $\sigma^2$ .

## 4. Sistema de ecuaciones normales

$$Nx = T$$

con

$$N = A^T P A$$

y

$$T = A^T P u$$

## 5. Cálculo de la matriz inversa

$$Q_m = N^{-1}$$

y de la solución

$$m = Q_m T$$

## 6. Residuos

$$v = Am - u$$

varianza de referencia a posteriori

$$S^2 = v^T P v / gdl$$

y observaciones ajustadas

$$\hat{u} = u + v = Am$$

## 7. Test de bondad de ajuste y detección de errores groseros, en su caso.

## 8. Errores en la solución

$$\Sigma_m = \sigma^2 Q_m \rightarrow \sigma_{mi} = \sigma \sqrt{Q_{mii}} \approx S \sqrt{Q_{mii}}$$

## 9. Estimación por intervalos de confianza

$$\zeta_i = m_i \pm t_{\alpha, gdl} \sigma_{mi}$$

**Ejemplo 10** [MIG81] Nivelación con observaciones ponderadas

Se quieren calcular los niveles  $H_b$ ,  $H_c$  y  $H_d$  de tres puntos  $B$ ,  $C$  y  $D$ , respectivamente, conocido el nivel  $H_a = 281,130$  m de un punto  $A$  de referencia y observados los desniveles siguientes (fig. 3.6):

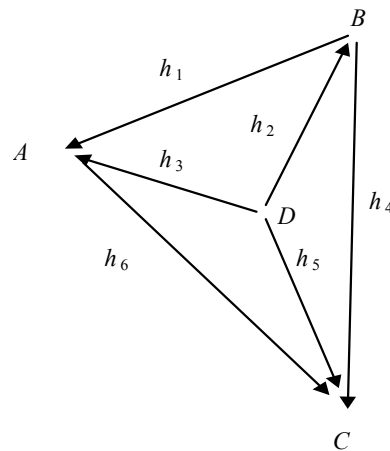


Fig. 3.6 Nivelación

Desde el punto más bajo	Hasta el punto más alto	Desnivel observado	Distancia entre los puntos	Peso de la observación
<i>B</i>	<i>A</i>	$h_1 = 11,973$	20	1,400
<i>D</i>	<i>B</i>	$h_2 = 10,940$	12	2,333
<i>D</i>	<i>A</i>	$h_3 = 22,932$	15	1,867
<i>B</i>	<i>C</i>	$h_4 = 21,040$	28	1,000
<i>D</i>	<i>C</i>	$h_5 = 31,891$	20	1,400
<i>A</i>	<i>C</i>	$h_6 = 8,983$	26	1,077

Tabla 3.1

Los pesos se han puesto de forma que resulten inversamente proporcionales a la distancia entre los puntos correspondientes al desnivel respectivo. Escribiendo los datos en forma de sistema de ecuaciones, tenemos

$$\begin{aligned}
 H_a - H_b &= h_1 \\
 H_b - H_d &= h_2 \\
 H_a - H_d &= h_3 \\
 -H_b + H_c &= h_4 \\
 H_c - H_d &= h_5 \\
 -H_a + H_c &= h_6
 \end{aligned}$$

Pero, como  $H_a$  es conocida, el sistema es de 6 ecuaciones con 3 incógnitas, y se escribe

$$\begin{aligned}
 H_b &= H_a - h_1 \\
 H_b - H_d &= h_2 \\
 H_d &= H_a - h_3 \\
 -H_b + H_c &= h_4 \\
 H_c - H_d &= h_5 \\
 H_c &= H_a + h_6
 \end{aligned}$$

La resolución de este ejemplo está hecha con el programa MAPLE, con los paquetes de álgebra lineal y estadística.

Número de observaciones y de incógnitas y grados de libertad del sistema:

```
> n:=6:h:=3:gdl:=6-3:
```

Matriz de coeficientes del sistema sobredeterminado de observaciones indirectas:

```
> A:=matrix(n,h,[1,0,0,1,0,-1,0,0,1,-1,1,0,0,1,-1,0,1,0]);
> At:=transpose(a):
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vector de términos independientes que contiene las observaciones:

```
> u:=vector(n,[269.157,10.94,258.198,21.04,31.891,290.113]);
```

$$u := [269.157, 10.94, 258.198, 21.04, 31.891, 290.113]$$

Matriz de pesos:

```
> P:=diag(1.400,2.333,1.867,1.000,1.400,1.077);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1.400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.867 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.077 \end{bmatrix}$$

Matriz del sistema de ecuaciones normales:

```
> N:=evalm(&*(At,P,A));
```

$$N := \begin{bmatrix} 4.733 & -1.000 & -2.333 \\ -1.000 & 3.477 & -1.400 \\ -2.333 & -1.400 & 5.600 \end{bmatrix}$$

Términos independientes del sistema de ecuaciones normales:

```
> atpu:=evalm(&*(At,P,u));
```

$$atpu := [381.302820, 378.139101, 411.885246]$$

Matriz cofactor de  $m =$  inversa de  $N$ :

```
> Qm:=inverse(N);
```

$$Qm := \begin{bmatrix} .3379 & .1710 & .1835 \\ .1710 & .4064 & .1728 \\ .1835 & .1728 & .2982 \end{bmatrix}$$

Estimador mínimo-cuadrático de los niveles = solución del sistema de ecuaciones normales:

```
> m:=evalm(&*(Qm,atpu));
```

$$m := [269.136, 290.125, 258.206]$$

Observaciones compensadas y residuos:

```
> un:=evalm(&*(A,m)):v:=evalm(un-u);
```

$$v := [-.0204, -.0098, .0084, -.0515, .0275, .0120]$$

No hay ningún residuo que destaque como especialmente grande y obviaremos la detección de errores groseros.

Estimación de la varianza de referencia:

```
> vpv:=evalm(&*(v,p,v)):vref:=vpv/gdl;
```

$$vref := .0016$$

Matriz de varianza-covarianza del vector  $m$ :

```
> sigm:=evalm(vref*Qm);
```

$$Sigm := \begin{bmatrix} .00054 & .00027 & .00029 \\ .00027 & .00065 & .00027 \\ .00029 & .00027 & .00047 \end{bmatrix}$$

Desviaciones tipo de la solución  $m$ :

```
> sm1:=sqrt(sigm[1,1]);
```

```
> sm2:=sqrt(sigm[2,2]);
```

```
> sm3:=sqrt(sigm[3,3]);
```

$$sm1 := .023$$

$$sm2 := .025$$

$$sm3 := .022$$

Estimación por intervalos del 95% confianza o nivel de significación 0.05. Radios de los intervalos:

```
> t:=sdadevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
```

$$t := 3.182446$$

```
> d1:=sm1*t;
```

```
> d2:=sm2*t;
```

```
> d3:=sm3*t;
```

$$d1 := .07$$

$$d2 := .08$$

$$d3 := .07$$

Los niveles de los puntos  $B$ ,  $C$  y  $D$  con un 95% de confianza son

$$\begin{aligned}H_b &= 269.14 \pm 0.07 \text{ m} \\H_c &= 290.12 \pm 0.08 \text{ m} \\H_d &= 258.21 \pm 0.07 \text{ m}\end{aligned}$$

Observamos que, si el error es del orden de los centímetros, no tiene sentido dar los niveles con más precisión.

Veamos ahora qué ocurre si introducimos un error grosero en la primera observación. Si introducimos el vector de observaciones

$$u := [169.157, 10.94, 258.198, 21.04, 31.891, 290.113]$$

donde hemos cometido un error de 100 m al introducir el primer desnivel, se obtiene (obsérvese que las matrices  $A$ ,  $P$ ,  $N$  y  $Q_m$  no varían):

$$m := [221.8301694, 266.1730184, 232.5102245]$$

Observaciones ajustadas y residuos:

```
> ua:=evalm(&*(A,m)):v:=evalm(ua-u);
```

$$v := [52.6731694, -21.6200551, -25.6877755, 23.3028490, 1.7717939, -23.9399816]$$

Vemos que un error grosero en la primera observación ha afectado a prácticamente todos los residuos. Este resultado confirma que un residuo grande no implica necesariamente un error grosero en la correspondiente observación. Para su detección comenzaremos por calcular la varianza de referencia a posteriori:

```
> vpv:=evalm(&*(v,P,v)):> S2pos:=vpv/gdl;
```

$$S2pos := 2457.129154$$

Observamos que unos residuos grandes dan lugar a una varianza de referencia a posteriori también grande, lo cual la invalida para ser utilizada en el test de Baarda. Calculemos ahora las matrices cofactor de los residuos y de las observaciones ajustadas, y los errores asociados a éstas últimas:

```
> Qv:=evalm(Qu-&*(A,Qm,At)):Qua:=evalm(Qu-Qv):
> for i from 1 to n do
> sqrt(S2pos*Qua[i,i])
> od;
```

$$\begin{aligned}28.81442105 \\25.71272512 \\27.07132445 \\31.43461962 \\29.69683668 \\31.60100034\end{aligned}$$

Estos errores indican claramente la existencia de alguna anomalía. Veamos qué ocurre con los números de redundancia:

```
> suma:=0:
> for i from 1 to n do
> r[i]:=P[i,i]*Qv[i,i];
> suma:=suma+%
> od;
```

```
r[1] := .5269360575
r[2] := .3722554253
r[3] := .4431536965
r[4] := .5978496656
r[5] := .4975180892
r[6] := .5622870663
suma := 3.000000000
```

Observamos que los números de redundancia no son especialmente pequeños y su suma es igual a los grados de libertad del sistema. Por lo tanto, no indican la existencia de ninguna anomalía. Procedamos al test  $\tau$ .

```
> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl-1]](0.975):
> tau:=evalf((sqrt(gdl)*t)/sqrt(gdl-1+t^2));
> for i from 1 to n do
> abs(v[i])/sqrt(S2pos*Qv[i,i])
> od;
```

```
tau := 1.645
1.732
1.092
1.064
0.608
0.060
0.668
```

La primera observación no ha pasado el test.

### 3.8 Transformación de semejanza

En geodesia, para cambiar, por ejemplo, de un sistema de referencia global a un sistema de referencia local; en topografía y cartografía, para cambiar, por ejemplo, de coordenadas en un sistema local de trabajo a coordenadas UTM; o en fotogrametría, para cambiar, por ejemplo, de coordenadas instrumentales en el sistema interno del aparato a coordenadas en el sistema externo del terreno, se usan transformaciones de semejanza, bidimensionales o tridimensionales, compuestas de una rotación de ejes, una homotecia o cambio de escala y una traslación.

El problema que se presenta, en general, en todos estos ámbitos, y que se resuelve aplicando el criterio de los mínimos cuadrados a la solución de sistemas sobredeterminados de observaciones indirectas, es el de determinar los parámetros de la transformación a partir de las coordenadas, en ambos sistemas de referencia, de unos cuantos puntos de control.

Aunque, conceptualmente, se trata del mismo problema, la técnica de resolución varía sustancialmente según se trate de transformaciones bi o tridimensionales.

### 3.8.1 Transformación de semejanza bidimensional

La expresión de una transformación de semejanza bidimensional compuesta de una rotación de ejes de ángulo  $\alpha$ , una homotecia de razón  $\lambda$  y una traslación de vector  $t = (tx, ty)$  es

$$\lambda \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Para cada punto de control de coordenadas  $(x, y)$ , del cual conocemos las coordenadas  $(x', y')$  del punto transformado, tenemos las dos ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} x \lambda \cos \alpha + y \lambda \sin \alpha + tx &= x' \\ y \lambda \cos \alpha - x \lambda \sin \alpha + ty &= y' \end{aligned} \quad (3.46)$$

en las 4 incógnitas  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $tx$  y  $ty$ . En este caso no es preciso linealizar estas expresiones mediante un desarrollo de Taylor de orden 1 porque, llamando

$$\begin{aligned} a &= \lambda \cos \alpha \\ b &= \lambda \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.47)$$

el sistema (3.46) se transforma en el sistema lineal de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} xa + yb + tx &= x' \\ ya - xb + ty &= y' \end{aligned} \quad (3.48)$$

en las 4 incógnitas  $a$ ,  $b$ ,  $tx$  y  $ty$  que, matricialmente, se escribe

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 & 0 \\ y & -x & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ tx \\ ty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Con dos puntos de control obtendríamos un sistema lineal determinado de 4 ecuaciones y 4 incógnitas. Pero, para compensar los errores en las observaciones y los cálculos que llevan a la evaluación de las coordenadas  $(x', y')$  del punto transformado (las coordenadas  $(x, y)$  del punto de control se suponen sin error), conviene tomar más de dos puntos y trabajar con un sistema sobredeterminado.

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & -x_1 & 0 & 1 \\ \dots & & & \\ x_k & y_k & 1 & 0 \\ y_k & -x_k & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ tx \\ ty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ \dots \\ x'_k \\ y'_k \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $tx$  y  $ty$  y la desviación tipo correspondiente se estimarán, mediante el criterio de los mínimos cuadrados. Los parámetros  $\alpha$  y  $\lambda$  se evalúan invirtiendo la expresión (3.47):

$$\begin{aligned}\lambda &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\end{aligned}\tag{3.51}$$

Para estimar las varianzas  $S_\alpha^2$  y  $S_\lambda^2$  de  $\alpha$  y  $\lambda$ , respectivamente, y su covarianza  $S_{\alpha\lambda}$ , deberemos aplicar la ley de propagación de la matriz de varianza-covarianza en expresiones no lineales a (3.51):

$$\begin{pmatrix} S_\alpha^2 & S_{\alpha\lambda} \\ S_{\alpha\lambda} & S_\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ \lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_a^2 & S_{ab} \\ S_{ab} & S_b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \\ \lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}^T$$

### Observación

Por la particular distribución de ceros en la matriz del sistema (3.50), resulta que  $S_{ab} = 0$  siempre (ver un caso concreto a continuación, en el ejemplo 11).

En particular,

$$\begin{aligned}S_\alpha^2 &= \left(\frac{b}{\lambda^2}\right)^2 S_a^2 + \left(\frac{a}{\lambda^2}\right)^2 S_b^2 \\ S_\lambda^2 &= \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 S_a^2 + \left(\frac{b}{\lambda}\right)^2 S_b^2\end{aligned}\tag{3.52}$$

### Ejemplo 11 Parámetros de una transformación de semejanza bidimensional

Se trata de determinar los 4 parámetros  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $t_x$  y  $t_y$  de una transformación de semejanza bidimensional a partir de las coordenadas de 5 puntos de control.

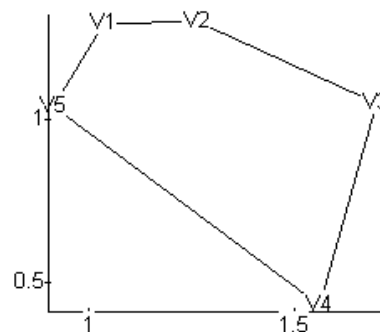


Fig. 3.7 Polígono de puntos de control

Coordenadas  $v_i$  de los 5 puntos en el sistema inicial:

$$\begin{aligned}v1 &[1.036, 1.301] \\ v2 &[1.265, 1.305] \\ v3 &[1.703, 1.054] \\ v4 &[1.561, 0.427] \\ v5 &[0.915, 1.040]\end{aligned}$$

Coordenadas  $vt_i$  de los 5 puntos en el sistema transformado:

```
vt1[14995.345, 39995.261]
vt2[14994.434, 39995.343]
vt3[14992.773, 39996.520]
vt4[14993.621, 39998.962]
vt5[14995.933, 39996.251]
```

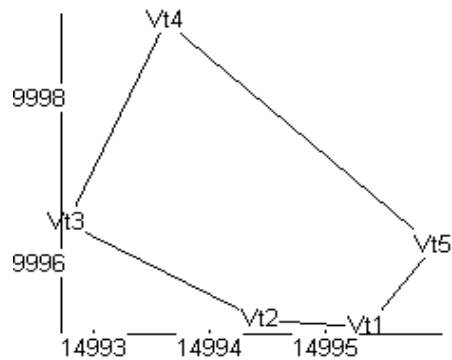


Fig. 3.8 Polígono de puntos de control transformados

Matriz de diseño  $A$  y traspuesta  $At$ :

```
> A:=matrix(10,4,[v1[1],v1[2],1,0,v1[2],-v1[1],0,1,
v2[1],v2[2],1,0,v2[2],-v2[1],0,1,
v3[1],v3[2],1,0,v3[2],-v3[1],0,1,
v4[1],v4[2],1,0,v4[2],-v4[1],0,1,
v5[1],v5[2],1,0,v5[2],-v5[1],0,1]);
```

$At:=$ transpose( $A$ ):

```
[1.036  1.301  1  0]
[1.301 -1.036  0  1]
[1.703  1.054  1  0]
[1.054 -1.703  0  1]
[1.561  .427  1  0]
A :=
[.427 -1.561  0  1]
[.915  1.040  1  0]
[1.040 -.915  0  1]
[1.265  1.305  1  0]
[1.305 -1.265  0  1]
```

Vector  $u$  de términos independientes del sistema sobredeterminado:

```
> u:=vector(10,[vt1[1],vt1[2],
vt2[1],vt2[2],
vt3[1],vt3[2],
vt4[1],vt4[2],
vt5[1],vt5[2]]):
```

Matriz del sistema normal e inversa, cofactor de la solución:

```
> N:=evalm(At&*A);Qm:=inverse(N);
```

$$N := \begin{bmatrix} 14.618 & 0 & 6.480 & 5.127 \\ 0 & 14.618 & 5.127 & -6.480 \\ 6.480 & 5.127 & 5 & 0 \\ 5.127 & -6.480 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Qm := \begin{bmatrix} 1.038 & 0 & -1.346 & -1.065 \\ 0 & 1.038 & -1.065 & 1.346 \\ -1.346 & -1.065 & 3.036 & 0 \\ -1.065 & 1.346 & 0 & 3.036 \end{bmatrix}$$

Solución  $m$  del sistema normal:

```
> m:=evalm(&*(Qm,At,u));
```

$$m := [-3.988, -4.167, 15000.018, 40000.016]$$

Vector de traslación  $t$ :

```
> t[1]:=m[3];t[2]:=m[4];
```

$$\begin{aligned} t[1] &:= 15000.018 \\ t[2] &:= 40000.016 \end{aligned}$$

Ángulo  $\alpha$  de rotación:

```
> alpha:=evalf(arctan(m[2]/m[1])+Pi);
```

$$\alpha := 3.245687395 \text{ radianes} = 185^\circ 57' 51.''08$$

Factor de escala  $\lambda$ :

```
> lam2:=m[1]^2+m[2]^2;
```

```
> lambda:=sqrt(lam2);
```

$$\lambda := 4.010$$

Evaluación de l error. Residuos:

```
> v:=evalm(A&*m-u);vt:=transpose(v);
```

$$v := [-.001, -.002, .013, .002, -.007, .002, .002, -.001, -.005, -.004]$$

Varianza de referencia:

```
> gdl:=10-4;
```

```
> s02:=evalm(vt&*v)/gdl;
```

$$s02 := .000049$$

Matriz de varianza-covarianza de los parámetros  $\Sigma$ :

```
> Sigma:=evalm(s02*Qm);
```

$$\Sigma := \begin{bmatrix} .00005 & 0 & -.00006 & -.00005 \\ 0 & .00005 & -.00005 & .00006 \\ [-.00006 & .00005 & .00015 & 0 \\ [-.00005 & .00006 & 0 & .00015 \end{bmatrix}$$

Observamos que los parámetros  $a$  y  $b$  son independientes entre sí, así como los parámetros  $tx$  y  $ty$ .

Desviación tipo  $st$  del vector de traslación:

```
> st[1]:=sqrt(Sigma[3,3]); st[2]:=sqrt(Sigma[4,4]);
```

$$\begin{aligned} st[1] &:= .012 \\ st[2] &:= .012 \end{aligned}$$

Desviación tipo  $sl$  del factor de escala  $\lambda$ :

```
> l2:=(m[1]/lambda)^2*Sigma[1,1]+(m[2]/lambda)^2*Sigma[2,2]:
> sl:=sqrt(sl2);
```

$$sl := .007$$

Desviación tipo  $sal$  del ángulo de giro  $\alpha$ :

```
> sal2:=(m[2]/lam2)^2*Sigma[1,1]+(m[1]/lam2)^2*Sigma[2,2]:
> sal:=sqrt(sal2);
```

$$sal := .001778333876 \text{ radianes} = 6' 6.''8$$

### 3.8.2 Transformación de semejanza tridimensional

La expresión de una transformación de semejanza tridimensional compuesta de tres rotaciones de ángulos  $\omega$ ,  $\varphi$  y  $\kappa$  respecto de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, una homotecia de razón  $\lambda$  y una traslación de vector  $t = (tx, ty, tz)$  es

$$\lambda \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa & \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa \\ -\cos \varphi \sin \kappa & \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa & \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa \\ \sin \varphi & -\sin \omega \cos \varphi & \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

que también escribiremos

$$\lambda R X + t = X'$$

Para cada punto de control  $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ , del cual conocemos las coordenadas  $X'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$  del punto transformado, tenemos las tres ecuaciones no lineales (3.53):

$$\begin{aligned} x_i \lambda \cos \varphi \cos \kappa + y_i \lambda \cos \omega \sin \kappa + z_i \lambda \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa + z_i \lambda \sin \omega \sin \kappa - z_i \lambda \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa + tx &= x'_i \\ -x_i \lambda \cos \varphi \sin \kappa + y_i \lambda \cos \omega \cos \kappa - y_i \lambda \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa + z_i \lambda \sin \omega \cos \kappa + z_i \lambda \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa + ty &= y'_i \\ x_i \lambda \sin \varphi - y_i \lambda \sin \omega \cos \varphi + z_i \lambda \cos \omega \cos \varphi + tz &= z'_i \end{aligned} \quad (3.53)$$

en las 7 incógnitas  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$ ,  $tx$ ,  $ty$ ,  $tz$  y  $\lambda$ .

Si  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa \approx 0$  y  $\lambda = 1 + \varepsilon$ , con  $\varepsilon \approx 0$ , se obtiene el sistema de tres ecuaciones lineales con 7 incógnitas

$$\begin{aligned}x_i \lambda + y_i \kappa - z_i \varphi + tx &= x_i' \\ -x_i \kappa + y_i \lambda + z_i \omega + ty &= y_i' \\ x_i \varphi - y_i \omega + z_i \lambda + tz &= z_i'\end{aligned}$$

que, matricialmente, se escribe

$$\begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i & 1 & 0 & 0 & x_i \\ z_i & 0 & -x_i & 0 & 1 & 0 & y_i \\ -y_i & x_i & 0 & 0 & 0 & 1 & z_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \varphi \\ \kappa \\ tx \\ ty \\ tz \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

El número mínimo de puntos de control necesarios para la determinación de los parámetros es 3 ( $i = 1, 2, \dots, m \geq 3$ ), que da lugar a un sistema sobredeterminado de, como mínimo, 9 ecuaciones con 7 incógnitas (con 2 puntos tendríamos 6 ecuaciones y, por tanto, un sistema indeterminado).

Los parámetros  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$ ,  $tx$ ,  $ty$ ,  $tz$  y  $\lambda$  y la desviación tipo correspondiente se estimarán, mediante el criterio de los mínimos cuadrados.

Como el sistema sobredeterminado del tipo (3.54) es una aproximación del verdadero sistema (3.53), la estimación mínimo-cuadrática de los parámetros será, en principio, sólo una aproximación tanto mejor cuanto más ajustada a la realidad sea la suposición  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa \approx 0$  y  $\lambda = 1 + \varepsilon$ , con  $\varepsilon \approx 0$ .

### 3.9 Redes GPS

En los trabajos de posicionamiento mediante técnicas de GPS diferencial, los resultados observacionales son (fig. 3.9) las componentes de una serie de vectores tridimensionales que unen los diferentes puntos de la red, así como las correspondientes matrices de varianza-covarianza. Estas componentes vectoriales son el resultado del procesamiento previo de otros datos observacionales (pseudorangos y fases de las ondas portadoras). Como consecuencia, no son independientes entre sí y sus matrices de varianza-covarianza, cofactor y peso no son diagonales.

El escenario en la compensación de una red de  $n + l$  puntos es el siguiente:

#### *Incógnitas*

Las  $3n$  componentes de  $n$  puntos  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$

#### *Observaciones*

Las  $3m$  componentes, con  $m > n$ , de  $m$  vectores GPS  $V_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ :

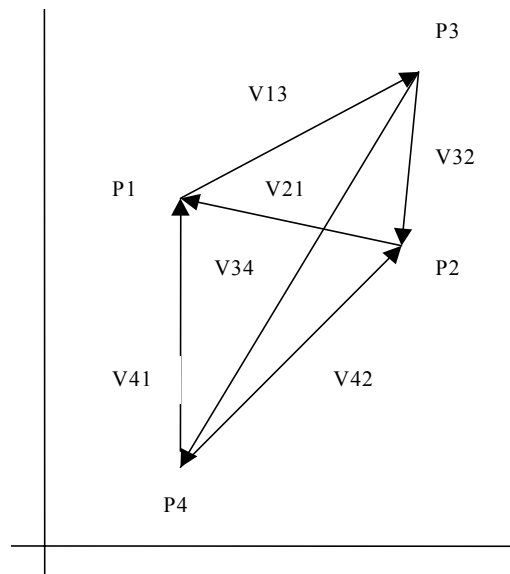


Fig. 3.9 Polígono de vectores GPS

*Datos*

Las  $3l$  componentes de  $l$  puntos de apoyo  $P_k = (x_k, y_k, z_k)$  de coordenadas conocidas.

Para cada vector GPS  $V_{ij}$  observado, obtenemos 3 ecuaciones de observación:

$$\begin{aligned}x_j - x_i &= x_{ij} \\y_j - y_i &= y_{ij} \\z_j - z_i &= z_{ij}\end{aligned}$$

Un mínimo de un punto de apoyo es necesario para definir el sistema de coordenadas. Desde un punto de vista estrictamente algebraico, justificaremos esta necesidad con el siguiente ejemplo de tres puntos:

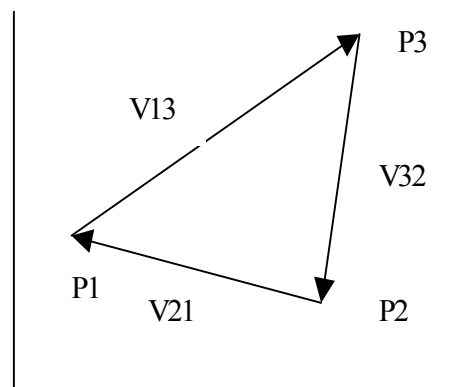


Fig. 3.10 Polígono de 3 vectores GPS

¿Qué pasa si no conocemos ningún punto?

Tenemos 3 vectores y, por tanto, 9 ecuaciones con 9 incógnitas:

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_2 &= x_{21} \\
 y_1 - y_2 &= y_{21} \\
 z_1 - z_2 &= z_{21} \\
 x_3 - x_1 &= x_{13} \\
 y_3 - y_1 &= y_{13} \\
 z_3 - z_1 &= z_{13} \\
 x_2 - x_3 &= x_{32} \\
 y_2 - y_3 &= y_{32} \\
 z_2 - z_3 &= z_{32}
 \end{aligned}$$

Por las características de este tipo de sistemas, la matriz está compuesta por bloques  $3 \times 3$  consistentes en la matriz nula, la identidad y ésta cambiada de signo. Para este ejemplo concreto, se tiene la expresión matricial:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_1 \\
 y_1 \\
 z_1 \\
 x_2 \\
 y_2 \\
 z_2 \\
 x_3 \\
 y_3 \\
 z_3
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 x_{21} \\
 y_{21} \\
 z_{21} \\
 x_{13} \\
 y_{13} \\
 z_{13} \\
 x_{32} \\
 y_{32} \\
 z_{32}
 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz es 6 y el sistema es indeterminado! Si fijamos las coordenadas de  $P_3$  queda:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_1 \\
 y_1 \\
 z_1 \\
 x_2 \\
 y_2 \\
 z_2
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 x_{21} \\
 y_{21} \\
 z_{21} \\
 x_{13} - x_3 \\
 y_{13} - y_3 \\
 z_{13} - z_3 \\
 x_{32} + x_3 \\
 y_{32} + y_3 \\
 z_{32} + z_3
 \end{pmatrix}$$

El sistema es sobredeterminado. Las incógnitas se deberán estimar mediante mínimos cuadrados.

En cuanto a la matriz de varianza-covarianza, para cada vector  $V_{ij}$  observado se tiene la submatriz

$$\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xij}^2 & \sigma_{xyij} & \sigma_{xzij} \\ \sigma_{xyij} & \sigma_{yij}^2 & \sigma_{yzij} \\ \sigma_{xzij} & \sigma_{yzij} & \sigma_{zij}^2 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

y para el conjunto de vectores:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xij}^2 & \sigma_{xyij} & \sigma_{xzij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xyij} & \sigma_{yij}^2 & \sigma_{yzij} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xzij} & \sigma_{yzij} & \sigma_{zij}^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{xkl}^2 & \sigma_{xykl} & \sigma_{xzkl} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{xykl} & \sigma_{ykl}^2 & \sigma_{yzkl} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{xzkl} & \sigma_{yzkl} & \sigma_{zij}^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{xrs}^2 & \sigma_{xyrs} & \sigma_{xzrs} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{xyrs} & \sigma_{yrs}^2 & \sigma_{yzrs} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{xzrs} & \sigma_{yzrs} & \sigma_{zrs}^2 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

### Ejemplo 12 Redes GPS

En una red de 4 puntos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  se conocen las coordenadas de  $P_1$  (en metros):

$$P_1 = (150, 650, 40)$$

y se quieren calcular las coordenadas de los otros tres mediante las observaciones de los siguientes vectores GPS (fig. 3.11):

$$\begin{aligned} V_{41} &:= (-50.01, 549.99, 20.008) \\ V_{42} &:= (300.012, 500.006, 9.98) \\ V_{34} &:= (-250.005, -650.008, -29.991) \\ V_{32} &:= (49.99, -150.01, -19.992) \\ V_{21} &:= (-349.995, 50.015, 9.99) \\ V_{13} &:= (300.012, 99.98, 10.005) \end{aligned}$$

donde cada vector tiene la matriz de varianza-covarianza

$$\Sigma_V = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0.000012 & 0.000011 \\ 0.000012 & 0.000225 & 0.000014 \\ 0.000011 & 0.000014 & 0.000144 \end{pmatrix}$$

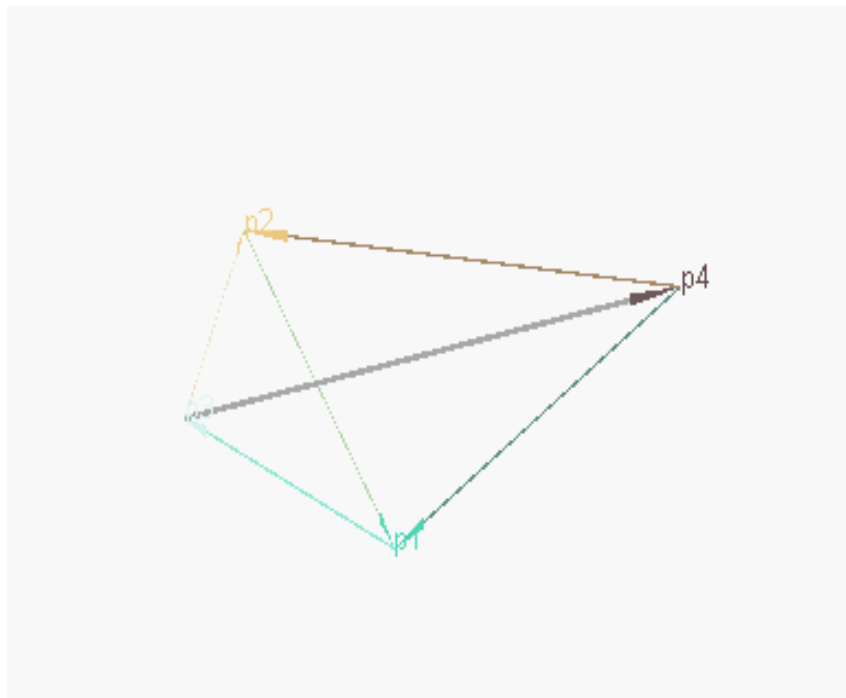


Fig. 3.11 Vectores GPS

Resolución con MAPLE:

```
with(linalg):with(plots):with(plottools):
```

Datos: punto de apoyo

```
> P1:=[150,650,40]:
```

Observaciones: vectores GPS

```
> V41:=vector(3,[-50.01,549.99,20.008]):
> V42:=vector(3,[300.012,500.006,9.98]):
> V34:=vector(3,[-250.005,-650.008,-29.991]):
> V32:=vector(3,[49.99,-150.01,-19.992]):
> V21:=vector(3,[-349.995,50.015,9.99]):
> V13:=vector(3,[300.012,99.98,10.005]):
```

Modelo matemático. Matriz de diseño:

```
> m0:=matrix(3,3,0): i3:=diag(1,1,1): mi3:=evalm(-i3):
> A:=blockmatrix(6,3,[
> m0,m0,mi3,
> i3,m0,mi3,
> m0,mi3,i3,
> i3,mi3,m0,
> mi3,m0,m0,
> m0,i3,m0]);
> At:=transpose(A):
```

```

      [0 0 0 0 0 0 -1 0 0]
      [0 0 0 0 0 0 0 -1 0]
      [0 0 0 0 0 0 0 0 -1]
      [1 0 0 0 0 0 -1 0 0]
      [0 1 0 0 0 0 0 -1 0]
      [0 0 1 0 0 0 0 0 -1]
      [0 0 0 -1 0 0 1 0 0]
      [0 0 0 0 -1 0 0 1 0]
      [0 0 0 0 0 -1 0 0 1]
A :=
      [1 0 0 -1 0 0 0 0 0]
      [0 1 0 0 -1 0 0 0 0]
      [0 0 1 0 0 -1 0 0 0]
      [-1 0 0 0 0 0 0 0 0]
      [0 -1 0 0 0 0 0 0 0]
      [0 0 -1 0 0 0 0 0 0]
      [0 0 0 1 0 0 0 0 0]
      [0 0 0 0 1 0 0 0 0]
      [0 0 0 0 0 1 0 0 0]

```

Vector de observaciones y grados de libertad:

```

> u:=convert(stackmatrix(
      V41-P1,V42,V34,V32,V21-P1,V13+P1),vector);
> gdl:=(6*3-3*3);

```

```

u := [-200.01, -100.01, -19.992, 300.012, 500.006, 9.98, -250.005, -650.008, -29.991,
      49.99, -150.01, -19.992, -499.995, -599.985, -30.01, 450.012, 749.98, 50.005]

```

```

gdl := 9

```

Modelo estocástico. Tomamos varianza de referencia unidad:

```

> mvcv:=matrix(3,3,[.01^2,.000012,.000011,.000012,.015^2,
      .000014,.000011,.000014,.012^2]);
> mvc:=blockmatrix(6,6,[
> mvcv,m0,m0,m0,m0,m0,
> m0,mvcv,m0,m0,m0,m0,
> m0,m0,mvcv,m0,m0,m0,
> m0,m0,m0,mvcv,m0,m0,
> m0,m0,m0,m0,mvcv,m0,
> m0,m0,m0,m0,m0,mvcv
> ]);
> P:=inverse(mvc);

```



$Sm[1] := .008$   
 $Sm[2] := .012$   
 $Sm[3] := .009$   
 $Sm[4] := .008$   
 $Sm[5] := .011$   
 $Sm[6] := .009$   
 $Sm[7] := .008$   
 $Sm[8] := .011$   
 $Sm[9] := .009$

### 3.10 Ejercicios

1. [MIG81] En una observación del paso del sol por el meridiano superior con un teodolito, se han obtenido los resultados que se muestran en la tabla 3.2:

Hora	Altura del Sol
$T_1 = 11^h 40^{\text{min}} 45.5^s$	$h_1 = 51^\circ 51' 09''$
$T_2 = 11^h 46^{\text{min}} 18.5^s$	$h_2 = 51^\circ 56' 42''$
$T_3 = 11^h 50^{\text{min}} 03.0^s$	$h_3 = 52^\circ 00' 30''$
$T_4 = 11^h 56^{\text{min}} 53.0^s$	$h_4 = 52^\circ 02' 24''$
$T_5 = 12^h 05^{\text{min}} 34.5^s$	$h_5 = 52^\circ 01' 06''$
$T_6 = 12^h 12^{\text{min}} 12.0^s$	$h_6 = 51^\circ 55' 45''$
$T_7 = 12^h 16^{\text{min}} 04.5^s$	$h_7 = 51^\circ 51' 30''$

Tabla 3.2

Para el pequeño intervalo de tiempo empleado en hacer estas observaciones se puede considerar que la altura  $h$  es una función parabólica del tiempo horario  $T$ :  $h = aT^2 + bT + c$

a) Suponiendo que los tiempos  $T_i$  son exactos y que sólo las alturas  $h_i$  tienen error, estimar, con un intervalo de confianza del 95%, el valor de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

b) Calcular cuál es la altura máxima en este intervalo de tiempo y a qué hora se da.

*Nota:* Considerar un sistema de coordenadas cartesianas con el origen en  $T_0 = 12^h 00^{\text{min}} 00^s$  y  $h_0 = 51^\circ 50' 00''$ . Haciendo este cambio de origen, los datos de la tabla 3., expresados en segundos horarios y segundos de arco, respectivamente, se convierten en los que se muestran en la tabla 3.

Hora	Altitud observada
$T_1 = -1154.5^s$	$h_1 = 69''$
$T_2 = -821.5^s$	$h_2 = 402''$
$T_3 = -597.0^s$	$h_3 = 630''$
$T_4 = -187.0^s$	$h_4 = 744''$
$T_5 = 334.5^s$	$h_5 = 666''$
$T_6 = 732.0^s$	$h_6 = 345''$
$T_7 = 964.5^s$	$h_7 = 90''$

Tabla 3.3

2. Se quiere ajustar la trayectoria de un móvil a una parábola

$$y = ax^2 + bx + c$$

midiendo la coordenada  $y$  correspondiente a los valores de  $x = 0, 3, 6$  y  $9$  m con los resultados  $y = 2.81, 5.03, 4.75$  y  $3.01$  m, respectivamente.

- Estimar los valores de los parámetros  $a, b$  y  $c$  con un 95% de confianza.
- ¿Cuál es el valor máximo de  $y$  y para qué valor de  $x$ ?

3. Determinar, con un nivel de significación  $\alpha = 0.05$ , los parámetros de una transformación de semejanza compuesta de rotación de ejes, traslación y factor de escala, dadas las coordenadas (en metros) de 4 puntos de control  $v_i$  y las transformadas correspondientes  $vt_i$ .

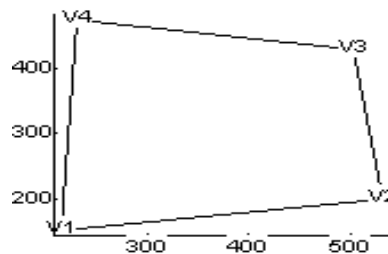


Fig. 3.12 Puntos objeto de la transformación

$v_1 [215,36, 150,44]$ ,  $vt_1 [1654,32, 2056,51]$   
 $v_2 [531,21, 200,15]$ ,  $vt_2 [2400,29, 1769,32]$   
 $v_3 [501,10, 430,21]$ ,  $vt_3 [2622,67, 2305,06]$   
 $v_4 [230,57, 475,18]$ ,  $vt_4 [2093,17, 2740,58]$

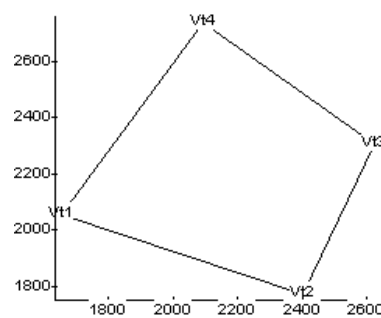


Fig. 3.13 Puntos transformados

4. Estimar, con un 95% de confianza, el verdadero valor de los tres ángulos  $A, B$  y  $C$  (fig. 3.) a partir de las medidas

$A = 100^\circ 21' 36''$   
 $B = 115^\circ 35' 14''$   
 $C = 144^\circ 5' 12''$   
 $D = 259^\circ 40' 30''$

con pesos 1, 1, 1 y 2, respectivamente.

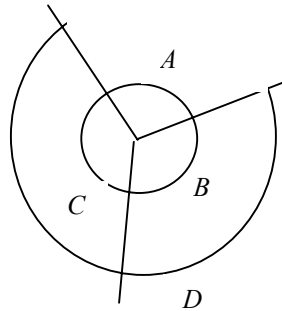


Fig. 3.14 Medidas angulares

5. Estimar, con un 95% de confianza, los parámetros de la transformación de semejanza tridimensional que transforma coordenadas en el sistema WGS84 a coordenadas en el sistema ED50, a partir de los puntos de control siguientes:

x (WGS84)	y (WGS84)	z (WGS84)	x (ED50)	y (ED50)	z (ED50)
4789399,0	176724,7	4194551,7	4789480,69	176824,01	4194672,30
4789104,1	176577,3	4194924,0	4789185,80	176676,61	4195044,60
4788980,0	176756,1	4195057,4	4789061,70	176855,41	4195177,99

Tabla 3.4

7. En una red de 5 puntos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y  $P_5$  se conocen las coordenadas de  $P_3$  (en metros):

$$P_3 = (525,783,425)$$

y se quieren calcular las coordenadas de los otros tres mediante las observaciones de los siguientes vectores GPS (fig. 3.15):

$$\begin{aligned} V_{12} &:= [ 153.226, 200.002, 4.216] \\ V_{13} &:= [ 309.977, 26.735, 8.642] \\ V_{15} &:= [ 83.519, -181.612, -1.113] \\ V_{25} &:= [ -69.707, -381.614, -5.329] \\ V_{24} &:= [ 89.992, -387.726, .973] \\ V_{23} &:= [ 156.751, -173.267, 4.426] \\ V_{35} &:= [ -226.458, -208.347, -9.755] \\ V_{34} &:= [ -66.759, -214.459, -3.453] \end{aligned}$$

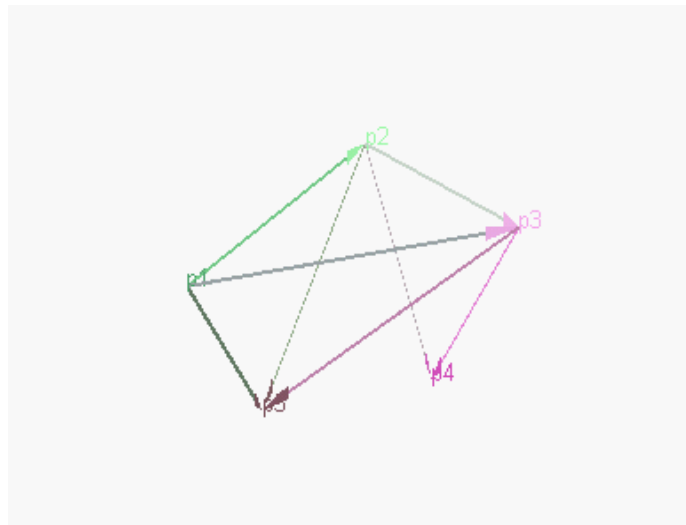


Fig. 3.15 Vectores GPS

donde cada vector tiene la matriz de varianza-covarianza

$$\Sigma_V = \begin{pmatrix} 0.0003 & 0.000013 & 0.000012 \\ 0.000013 & 0.000425 & 0.000011 \\ 0.000012 & 0.000011 & 0.000244 \end{pmatrix}$$

## 4 Observaciones indirectas. Modelo no lineal

### 4.1 Linealización

Hasta ahora hemos supuesto que la relación entre el vector de observaciones  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y el vector de incógnitas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_h)$  se expresaba mediante un sistema de *ecuaciones lineales*

$$A x = u$$

donde los términos independientes contienen las observaciones. Pero, en general, esta relación está determinada por un sistema de  $n$  ecuaciones con  $h$  incógnitas de la forma

$$F(x) = u \quad (4.1)$$

o, en componentes,

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_h) \\ u_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_h) \\ &\dots \\ u_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_h) \end{aligned}$$

donde las  $n$  funciones  $f_i$  son *no lineales*.

Para poder aplicar la teoría expuesta en el capítulo anterior, deberemos *linealizar* el sistema desarrollando por Taylor las  $n$  funciones  $f_i$  hasta primer orden en el entorno de un punto

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_h^0)$$

Llamando

$$\begin{aligned} u_i^0 &= f_i(x^0) \\ \Delta u_i &= u_i - u_i^0 \\ \Delta x_i &= x_i - x_i^0 \end{aligned}$$

y haciendo los desarrollos, se obtiene el *sistema lineal en los incrementos con los observables en los términos independientes*:

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_h} \Delta x_h \\ \Delta u_2 &= \frac{\partial f_2(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_2(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_2(x^0)}{\partial x_h} \Delta x_h \\ &\dots \\ \Delta u_n &= \frac{\partial f_n(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_n(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_n(x^0)}{\partial x_h} \Delta x_h \end{aligned} \quad (4.2)$$

Es decir,

$$\Delta u = dF_{x^0} \Delta x$$

Una vez linealizado el modelo matemático, la estimación de  $\Delta x$  mediante el método de los mínimos cuadrados se hará siguiendo el proceso descrito en el apartado 3.7 del capítulo anterior, identificando la matriz de diseño con la diferencial del campo vectorial  $F$ :

$$A \equiv dF_{x^0}$$

#### 4.1.1 Iteración

Sabemos que la linealización es válida *en un entorno de  $x^0$* . Si este punto es una buena aproximación a la solución que buscamos, entonces la solución

$$\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_h)$$

por mínimos cuadrados del sistema lineal en los incrementos nos proporcionará una solución aceptable del problema:

$$x = x^0 + \Delta x$$

Si el punto  $x^0$  no es una buena aproximación, entonces *se puede iterar el método* hasta obtener la aproximación deseada: Partimos del punto  $x^0$  y llamamos  $\Delta^0 x$  a la solución por mínimos cuadrados del sistema lineal en los incrementos, y  $x^1 = x^0 + \Delta^0 x$  a la solución del problema correspondiente. Si repetimos el proceso partiendo del punto  $x^1$ , obtenemos la nueva aproximación  $x^2 = x^1 + \Delta^1 x$ , y así sucesivamente.

Esta iteración se puede considerar como una generalización, para sistemas de ecuaciones, del método de Newton para encontrar las raíces de ecuaciones no lineales del tipo  $u = f(x)$ . La convergencia de la sucesión ( $x^i$ ) hacia la solución correcta dependerá del punto inicial  $x^0$ . Si este punto es más o menos razonable como aproximación de la solución buscada, con pocas iteraciones se llegará a una buena solución.

El problema reside en establecer el número de iteraciones o, lo que es lo mismo, en dar un criterio para parar el proceso iterativo. El criterio más directo e intuitivo consiste [MIG81] en parar el proceso cuando la corrección  $\Delta^i x$  sea de un orden de magnitud inferior a la tolerancia previamente establecida. Alternativamente, un criterio parecido consiste en comparar las observaciones  $u$  con los valores  $u^i = F(x^i)$  calculados a partir de la solución  $x^i$  correspondiente.

Sin embargo, no hemos de perder de vista que el método de los mínimos cuadrados empleado para obtener la corrección  $\Delta^i x$  de cada iteración se basa en el criterio de hacer mínima la suma ponderada  $v^T P v$  de los residuos al cuadrado. Por tanto, si la iteración es convergente, esta magnitud ha de ser cada vez más pequeña, y el criterio más consistente con el método [LEI95] será el de parar el proceso cuando  $v^T P v$  pare de crecer o se estabilice. Según este criterio, el *test estadístico* más importante para establecer la bondad del ajuste se basa en el análisis de los residuos y es el descrito en el apartado 3.6.1 del capítulo anterior.

Aceptaremos que el ajuste ha sido bueno si, fijado un nivel de significación  $\alpha$ , la magnitud  $v^T P v / \sigma^2$  se mantiene entre los valores  $\chi^2_a$  y  $\chi^2_b$  de la variable  $\chi^2$  con  $n-h$  grados de libertad que dejan un área  $\alpha/2$  a cada extremo de la distribución, y siendo  $P(\chi^2_a < \chi^2 < \chi^2_b) = 1 - \alpha$  (fig. 3.3).

### 4.1.2 Resumen

Supongamos que tenemos  $n$  observaciones  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  con  $u_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$  y  $h$  incógnitas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_h)$ , de verdadero valor  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h)$ , relacionadas con las observaciones mediante un sistema no lineal  $F(x) = u$ . Para estimar los parámetros  $\zeta_i$  según el criterio de los mínimos cuadrados seguiremos los siguientes pasos:

1. Identificar las  $n$  observaciones  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , las  $h$  incógnitas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_h)$  y el número de grados de libertad del sistema  $gdl = n-h$ .

2. Proponer valores aproximados de las incógnitas  $x^0 = (x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_h)$ , linealizar el modelo matemático que relaciona observaciones con incógnitas,

$$\Delta u = dF_{x^0} \Delta x$$

e identificar la matriz de diseño

$$A \equiv dF_{x^0}$$

3. *Modelo estocástico*. Consideraremos dos casos posibles:

- Se conocen los errores en las observaciones  $\sigma_{ui}$  y su correlación  $\sigma_{uij}$ . Es decir, se conoce la matriz de varianza-covarianza de las observaciones  $\Sigma_u$ . En este caso, se establece la varianza de referencia a priori  $\sigma^2$ , la matriz cofactor

$$Q_u = (1/\sigma^2)\Sigma_u$$

y la matriz peso

$$W_u = Q_u^{-1}$$

Si las observaciones son independientes, entonces

$$W_u = P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

y

$$Q_u = P^{-1}$$

- Se conocen los pesos de las observaciones, es decir la matriz  $P$ , pero no sus errores  $\sigma_{ui}$  ni la varianza de referencia a priori  $\sigma^2$ .

4. Sistema de ecuaciones normales

$$Nx = T,$$

con

$$N = A^T P A$$

y

$$T = A^T P u.$$

5. Cálculo de la matriz inversa

$$Q_m = N^{-1}$$

y de la solución

$$m = Q_m T$$

$$x = x^0 + m$$

6 Residuos

$$v = Am - u,$$

varianza de referencia a posteriori

$$S^2 = v^T P v / gdl$$

y observaciones ajustadas

$$\hat{u} = u + v = Am$$

7. Test de bondad de ajuste y detección de errores groseros, en su caso.

8. Iteración del proceso, en su caso.

9. Errores en la solución. Como  $x^0$  es constante, la matriz de varianza-covarianza, y por tanto las correspondientes desviaciones tipo, de  $x = x^0 + m$  es la de  $m$ :

$$\Sigma_x = \sigma^2 Q_m \rightarrow \sigma_{xi} = \sigma \sqrt{Q_{mii}} \approx S \sqrt{Q_{mii}}$$

10. Estimación por intervalo de confianza

$$\zeta_i = x_i \pm t_{\alpha, gdl} \sigma_{xi}.$$

### Ejemplo 1 Ecuaciones de observación no lineales

Se quieren calcular las coordenadas  $(x, y)$  de un punto  $P$  (fig. 4.1) a partir de las siguientes observaciones:

Ángulo del segmento  $OP$  con el eje  $x$ :  $u_1 = 20^\circ 60' 14''$ ;  $\sigma_1 = 15''$

Ángulo del segmento  $OP$  con el eje  $y$ :  $u_2 = 69^\circ 57' 40''$ ;  $\sigma_2 = 15''$

Distancia  $OP$ :  $u_3 = 228,23$  m;  $\sigma_3 = 0,01$  m

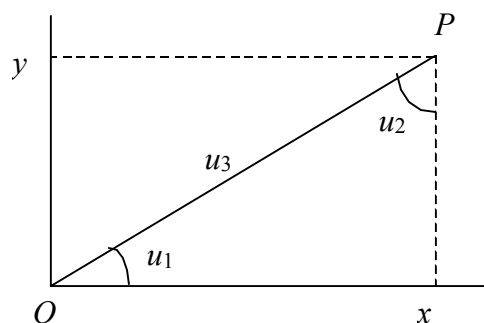


Fig. 4.1 Observaciones angulares y de distancia

Resolución mediante MAPLE con los paquetes habituales:

Vector  $u$  de observaciones.  $fgr$  = factor de conversión de grados a radianes.  $frs$  = factor de conversión de radianes a segundos:

```
> n:=3:fgr:=evalf(Pi/180):frs:=3600/fgr:
  u:=vector(n, [evalf((20+2/60+14/3600))*fgr,
```

```
evalf((69+57/60+40/3600))*fgr,
228.23]);
```

```
u := [.3497155007, 1.221051737, 228.23]
```

Errores en las observaciones, varianza de referencia = varianza angular y matriz de pesos:

```
> s1:=evalf((15/3600)*fgr):
s2:=s1:
s3:=0.01:
sigma:=s1:
P:=diag(1,1,(sigma/s3)^2);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .00005288496872 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones no lineales. Observables en función de las incógnitas:

```
> u1:=arctan(y/x);
u2:=arctan(x/y);
u3:=sqrt(x^2+y^2);
```

$$\begin{aligned} u1 &:= \arctan(y/x) \\ u2 &:= \arctan(x/y) \\ u3 &:= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Linealización:

```
> F:=vector(3,[u1,u2,u3]);
JF:=jacobian(F,[x,y]);
```

$$F := [\arctan(y/x), \arctan(x/y), \sqrt{x^2 + y^2}]$$

Valor aproximado de las incógnitas:

```
> x0:=210: y0:=75:
X0:=[x0,y0];
```

$$X0 := [210, 75]$$

Matriz y término independiente del sistema lineal sobredeterminado:

```
> A:=evalf(subs(x=x0,y=y0,evalm(JF)));
At:=transpose(A):
u0:=evalf(subs(x=x0,y=y0,evalm(F)));
du:=evalm(u-u0);
```

$$A := \begin{bmatrix} -.001508295626 & .004223227753 \\ .001508295626 & -.004223227753 \\ .9417419116 & .3363363970 \end{bmatrix}$$

$$du := [.0066915603, -.006720649, 5.2389688]$$

Matriz y término independiente del sistema normal:

```
> AtP:=evalm(&*(At,P)):
N:=evalm(&*(AtP,A)):
T:=evalm(&*(AtP,du)):
```

Matriz inversa y solución del sistema normal:

```
> Qm:=inverse(N):
```

```
m:=evalm(Qm*T);
```

```
m := [4.430798644, 3.170337868]
```

Evaluación de las incógnitas y error:

```
> X1:=evalm(X0+m);
```

```
Sx1:=sigma*sqrt(Qm[1,1]);
```

```
Sx2:=sigma*sqrt(Qm[2,2]);
```

```
X1 := [214.4307986, 78.17033787]
```

```
Sx1 := .01017652594
```

```
Sx2 := .01131033038
```

Residuos y desviación típica de referencia a posteriori:

```
> v:=evalm(A*m-du);
```

```
vpv:=evalm(&*(v,P,v));
```

```
Spos:=sqrt(vpv/1);
```

```
v := [.000014544356, .000014544344, .1 10-8 ]
```

```
Spos := .00002056881703
```

Test *ji* cuadrado (nivel de significación 0.05):

```
> ji2a:=statevalf[icdf,chisquare[1] ](0.025);
```

```
ji2:=vpv/sigma^2;
```

```
ji2b:=statevalf[icdf,chisquare[1] ](0.975);
```

```
ji2a := .0009820691172
```

```
ji2 := .07999933519
```

```
ji2b := 5.023886187
```

Vemos que, aunque los incrementos que se han añadido a los valores aproximados de las incógnitas han sido considerables (del orden de 4 y 3 m), el resultado ha pasado el test *ji* cuadrado. Podemos dar, según este criterio, el ajuste como bueno. Comparemos las observaciones *u* con los valores *u1* de los observables calculados a partir de *X1*. Las diferencias angulares las pasaremos a segundos sexagesimales:

```
> u1:=evalf(subs(x=X1[1],y=X1[2],evalm(F))):
```

```
du1:=evalm(u-u1);
```

```
du1[1]*frs;
```

```
du1[2]*frs;
```

```
du1 := [.0001394864, -.000168576, -.0048990]
```

```
28.77113526
```

```
-34.77129597
```

La diferencia angular es del orden de los segundos y la longitudinal del orden de medio centímetro.

Veamos qué mejora obtenemos iterando:

```
> A:=evalf(subs(x=X1[1],y=X1[2],evalm(JF))):
```

```
At:=transpose(A):
```

```
AtP:=evalm(&*(At,P)):
```

```
N:=evalm(&*(AtP,A)):
```

```
T:=evalm(&*(AtP,du1)):
```

```
Qm:=inverse(N):
```

```
m:=evalm(Qm*T);
```

```
m := [-.01664336969, .03135112821]
```

Las modificaciones introducidas son del orden de 2 y 3 cm respectivamente.

Evaluación de las incógnitas y el error:

```
> X2:=evalm(X1+m);
  Sx1:=sigma*sqrt(Qm[1,1]);
  Sx2:=sigma*sqrt(Qm[2,2]);
```

```
      X2 := [214.4141552, 78.20168900]
          Sx1 := .01021897053
          Sx2 := .01154619565
```

Residuos y desviación típica de referencia a posteriori:

```
> v:=evalm(A&*m-du1);
  vpv:=evalm(&*(v,P,v));
  Spos:=sqrt(vpv/1);
```

```
      v := [.0000145448002, .0000145448000, 0.]
          Spos := .00002056945356
```

Test  $\chi^2$  (nivel de significación 0.05):

```
> ji2a:=ji2a;
  ji2:=vpv/sigma^2;
  ji2b:=ji2b;
```

```
      ji2a := .0009820691172
          ji2 := .08000428669
          ji2b := 5.023886187
```

El test  $\chi^2$  ha dado un resultado similar. Comparemos de nuevo las observaciones  $u$  con los valores  $u_2$  de los observables calculados a partir de  $X_2$ :

```
> u2:=evalf(subs(x=X2[1],y=X2[2],evalm(F))):
  du2:=evalm(u-u2);
  du2[1]*frs;
  du2[2]*frs;
```

```
      du2 := [-.0000145481, -.000014541, -.26 10-5 ]
          -3.000761027
          -2.999296547
```

Las diferencias son ahora muy pequeñas. Es de esperar que una nueva iteración produzca modificaciones imperceptibles:

```
> A:=evalf(subs(x=X2[1],y=X2[2],evalm(JF))):
  At:=transpose(A):
  AtP:=evalm(&*(At,P)):
  N:=evalm(&*(AtP,A)):
  T:=evalm(&*(AtP,du2)):
  Qm:=inverse(N):
  m:=evalm(Qm&*T);
```

```
      m := [-.2164994028 10-5, -.1652044782 10-5]
```

Efectivamente, las modificaciones introducidas son del orden de las milésimas de milímetro.

Intervalo de confianza (nivel de significación 0.05):

```

> t:=statevalf[icdf,studentst[1]](0.975);
dx1:=Sx1*t;
dx2:=Sx2*t;

t := 12.70620474
dx1 := .1298443318
dx2 := .1467083259

```

## 4.2 Elipse de error

Muchas veces, como en el ejemplo anterior, la solución por mínimos cuadrados del problema de observaciones indirectas consiste en las coordenadas  $m = (m_1, m_2, \dots, m_h) = (x_A, y_A, x_B, y_B, \dots)$  de un conjunto de puntos  $A, B, \dots$ , en un cierto sistema de referencia, acompañadas de su matriz de varianza-covarianza  $\Sigma_m$ , que da el error de cada coordenada y la correlación entre ellas, en este sistema de referencia.

La pregunta que nos hacemos en este apartado es: ¿cómo afecta un cambio de sistema de referencia (por ejemplo, pasar de un sistema de coordenadas local a coordenadas UTM) en los resultados y en sus errores?

Consideraremos el problema para un solo punto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  en el sistema inicial con desviaciones tipo  $S_x$  y  $S_y$  y covarianza  $S_{xy}$ . Supondremos que el nuevo sistema se obtiene del inicial mediante un giro de ángulo  $\alpha$  (fig. 4.2). Recordando la matriz de la transformación ortogonal del plano consistente en un giro de ejes de ángulo  $\alpha$ , sabemos que la relación entre las coordenadas  $(x, y)$  en el sistema inicial y las coordenadas  $(x', y')$  en el nuevo sistema está determinada por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

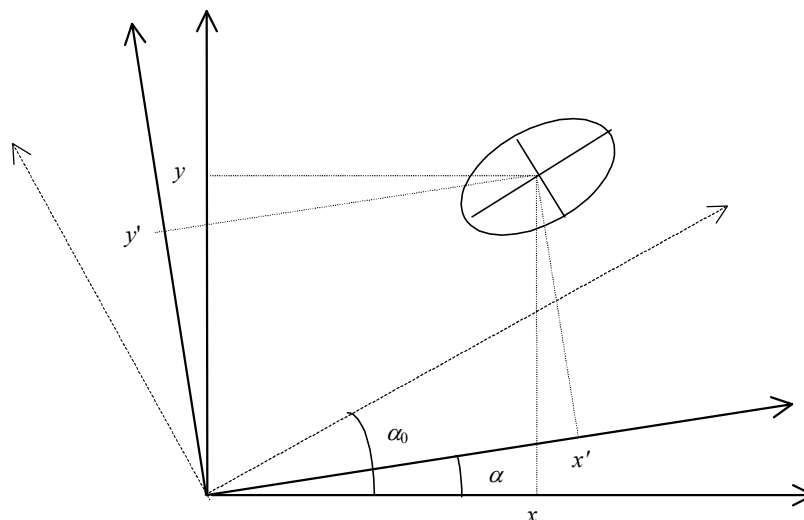


Fig. 4.2 Giro de ejes

Siguiendo la ley de propagación de la matriz de varianza-covarianza, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} S_{x'}^2 & S_{x'y'} \\ S_{x'y'} & S_{y'}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x^2 & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$S_{x'}^2 = \cos^2 \alpha S_x^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha S_{xy} + \sin^2 \alpha S_y^2$$

$$S_{y'}^2 = \sin^2 \alpha S_x^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha S_{xy} + \cos^2 \alpha S_y^2$$

$$S_{x'y'} = -\cos \alpha \sin \alpha S_x^2 + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) S_{xy} + \sin \alpha \cos \alpha S_y^2$$

### Observación

Las varianzas  $S_{x'}^2$ ,  $S_{y'}^2$  y la covarianza  $S_{x'y'}$  son funciones del ángulo de giro  $\alpha$ . Tomando coordenadas polares, las curvas

$$S_{x'}^2(\alpha) = \cos^2 \alpha S_x^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha S_{xy} + \sin^2 \alpha S_y^2$$

y

$$S_{y'}^2(\alpha) = \sin^2 \alpha S_x^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha S_{xy} + \cos^2 \alpha S_y^2$$

son dos curvas con radios vectores  $S_{x'}^2$  y  $S_{y'}^2$ , llamadas *curvas de varianza* (o *curvas pedal* en algunos contextos), iguales y con los ejes perpendiculares (fig. 4.3).

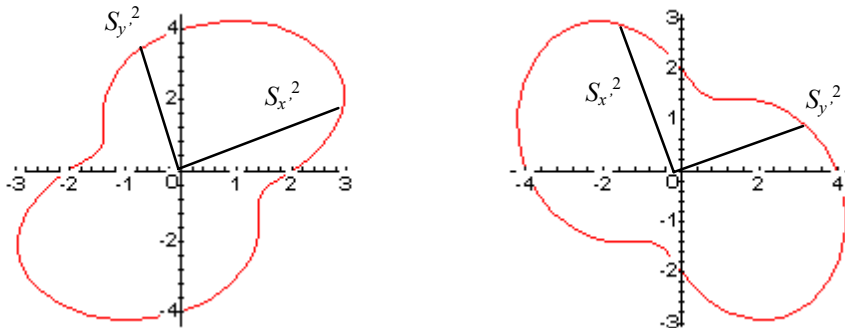


Fig. 4.3 Curvas de varianza

Dado un ángulo  $\alpha$ , las dos varianzas  $S_{x'}^2(\alpha)$  y  $S_{y'}^2(\alpha)$  son los radios vectores respectivos de cada una de estas “curvas de varianza”. O bien, con una sola curva, son los radios vectores perpendiculares, ya que  $S_{y'}^2(\alpha) = S_{x'}^2(\alpha + \pi/2)$  (fig. 4.3).

Sacando la raíz cuadrada se obtienen las *curvas de desviación tipo* de forma parecida a las curvas de varianza.

$$S_{x'}(\alpha) = \sqrt{\cos^2 \alpha S_x^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha S_{xy} + \sin^2 \alpha S_y^2}$$

y

$$S_{y'}(\alpha) = \sqrt{\sin^2 \alpha S_x^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha S_{xy} + \cos^2 \alpha S_y^2}$$

Las desviaciones tipo máxima y mínima son los semi-ejes de la llamada *elipse de error* y

corresponden a un cierto ángulo de giro  $\alpha_0$  (fig. 4.1). Estos parámetros quedan determinados por la proposición siguiente.

### Proposición 1

Sea  $m = (m_1, m_2, \dots, m_h)$  la solución por mínimos cuadrados de un problema de observaciones indirectas. Sean  $(m_i, m_{i+1}) = (x, y)$  las coordenadas de un punto cualquiera de la solución. Sea la matriz cofactor de la solución

$$N^{-1} = Q_m = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & & & \\ Q_{12} & Q_{22} & & & \\ & & Q_{33} & Q_{34} & \\ & & Q_{34} & Q_{44} & \\ & & & & \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{S^2} \begin{pmatrix} S_1^2 & S_{12} & & & \\ S_{12} & S_2^2 & & & \\ & & S_3^2 & S_{34} & \\ & & S_{34} & S_4^2 & \\ & & & & \dots \end{pmatrix}$$

y la submatriz correspondiente al par  $(x, y)$

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{pmatrix}$$

Los semiejes (al cuadrado) de la elipse de error son

$$S_{\max}^2 = \frac{S_x^2 + S_y^2}{2} + \sqrt{S_{xy}^2 + \frac{(S_x^2 - S_y^2)^2}{4}} \quad \text{y} \quad S_{\min}^2 = \frac{S_x^2 + S_y^2}{2} - \sqrt{S_{xy}^2 + \frac{(S_x^2 - S_y^2)^2}{4}} \quad (4.3)$$

orientados según un ángulo  $\alpha_0$  tal que

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2S_{xy}}{S_x^2 - S_y^2} \quad (4.4)$$

El cuadrante donde se encuentra  $\alpha_0$  se determina analizando el signo de numerador y denominador en (4.4).

### Demostración

Derivando la expresión de  $S_x^2(\alpha)$  o bien de  $S_y^2(\alpha)$  respecto de  $\alpha$  e igualando a cero, en ambos casos se obtiene

$$S_{x'y'} = -\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha S_x^2 + (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)S_{xy} + \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha S_y^2 = 0$$

Teniendo en cuenta las identidades trigonométricas

$$2\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \operatorname{sen}2\alpha \quad \text{y} \quad (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = \cos 2\alpha$$

queda

$$(S_y^2 - S_x^2) \operatorname{sen}2\alpha + 2S_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

de donde se deduce la expresión propuesta para  $\tan 2\alpha_0$ . Introduciendo este valor de  $\alpha_0$  en las

expresiones de  $S_{x'}^2$  y de  $S_{y'}^2$ , y mediante las identidades trigonométricas convenientes, se obtienen las expresiones propuestas para  $S_{\min}^2$  y  $S_{\max}^2$ .

### Observaciones

1. En la anterior demostración se ve que la condición de que la varianza  $S_{x'}^2$  o  $S_{y'}^2$  sea máxima o mínima equivale a que la covarianza  $S_{x'y'}$  sea nula o, lo que es lo mismo, que las variables  $x'$  e  $y'$  no estén correlacionadas.
2. Las expresiones (4.3) de  $S_{\min}^2$  y  $S_{\max}^2$  son los valores propios de la matriz de varianza-covarianza del vector  $(x, y)$ ,

$$\begin{pmatrix} S_x^2 & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y^2 \end{pmatrix}$$

según se deduce calculando las raíces del polinomio característico

3. En términos de la matriz cofactor, los semiejes de la elipse de error se escriben

$$S_{\max}^2 = S^2 \left( \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} + \sqrt{Q_{xy}^2 + \frac{(Q_{xx} - Q_{yy})^2}{4}} \right) \quad (4.5)$$

y

$$S_{\min}^2 = S^2 \left( \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} - \sqrt{Q_{xy}^2 + \frac{(Q_{xx} - Q_{yy})^2}{4}} \right)$$

orientados según un ángulo  $\alpha_0$  tal que

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \quad (4.6)$$

### Ejemplo 2 [MIG81] *Elipse de error*

El error en el posicionamiento de un punto de estación en un levantamiento topográfico está determinado por los parámetros

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0,22 \text{ m} \\ \sigma_y &= 0,14 \text{ m} \\ \sigma_{xy} &= 0,0246 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Se trata de dibujar la curva de desviación tipo, calcular los parámetros (semiejes y orientación) de la elipse de error y dibujar esta elipse. Para hacer los cálculos y las representaciones gráficas utilizaremos MAPLE con el paquete gráfico Plottools.

Introducimos los datos del problema:

```
> sx:=.22:  sx2:=sx^2:
  sy:=.14:  sy2:=sy^2:
  sxy:=.0246:  sxy2:=sxy^2:
```

Calculamos los semi-ejes y la inclinación de la elipse de error según (4.3) y (4.4):

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
  smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
  theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
```

```
      smax := .250
      smin := .074
      theta := 0.5206
```

Como numerador y denominador en (4.4) son ambos positivos, el ángulo  $\theta$  estará en el primer cuadrante.

Dibujemos la curva de desviación tipo:

```
> plot(
  [sqrt(sx2*cos(t)^2+2*sxy*cos(t)*sin(t)+sy2*sin(t)^2), t,
  t=0..2*Pi], coords=polar);
```

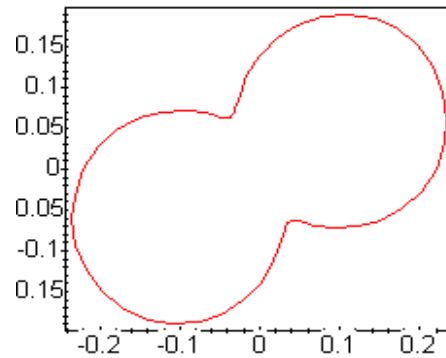


Fig. 4.4 Curva de desviación tipo

Dibujemos la elipse de error:

```
> elli:=ellipse([0,0],smax,smin):
  plots[display](rotate(elli,theta));
```

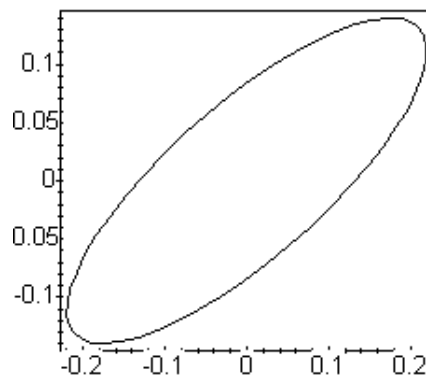


Fig. 4.5 Elipse de error

### 4.3 Triangulación. Ecuaciones de ángulo

Se trata de determinar las coordenadas de un conjunto de puntos a partir de observaciones de azimuts. Es decir que, en este caso, los observables son ángulos. No haremos distinciones innecesarias entre intersecciones directas e inversas, de manera que, en principio, consideraremos desconocidas las coordenadas de los dos puntos que intervienen, el punto de estación  $A(x_A, y_A)$  y el punto visado  $B(x_B, y_B)$ .

Además, también consideraremos desconocida la desorientación  $\Sigma_A$  del punto de estación. Llamando  $\theta_{A,B}$  al azimut de la recta  $AB$  (fig. 4.6) y  $L_{A,B}$  a la lectura con aparato desorientado, se escribe

$$\theta_{A,B} = L_{A,B} + \Sigma_A \quad (4.7)$$

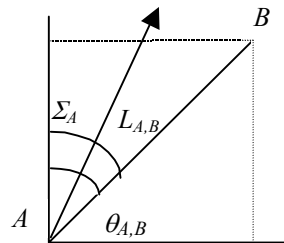


Fig. 4.6 Medida de ángulo

La relación que liga la observación  $L_{A,B}$  con las 5 incógnitas  $x_A, y_A, x_B, y_B$  y  $\Sigma_A$  es

$$\operatorname{tg} \theta_{A,B} = (x_B - x_A) / (y_B - y_A)$$

o bien

$$L_{A,B} = \operatorname{arctg} \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} - \Sigma_A \quad (4.8)$$

que es una expresión *no lineal* de la forma

$$L_{A,B} = f(x_A, y_A, x_B, y_B, \Sigma_A)$$

Para linealizarla, consideraremos un vector  $x^0 = (x_A^0, y_A^0, x_B^0, y_B^0, \Sigma_A^0)$  de coordenadas conocidas y llamaremos

$$\begin{aligned} L_{A,B}^0 &= f(x^0) \\ \Delta L_{A,B} &= L_{A,B} - L_{A,B}^0 \\ \Delta x_A &= x_A - x_A^0 \\ \Delta y_A &= y_A - y_A^0 \\ \Delta x_B &= x_B - x_B^0 \\ \Delta y_B &= y_B - y_B^0 \\ \Delta \Sigma_A &= \Sigma_A - \Sigma_A^0 \\ D_0^2 &= (x_B^0 - x_A^0)^2 + (y_B^0 - y_A^0)^2 \end{aligned}$$

Haciendo el desarrollo de Taylor hasta orden 1 se obtiene la *ecuación lineal en los incrementos con los observables en el término independiente*

$$\Delta L_{A,B} = -\frac{y_B^0 - y_A^0}{D_0^2} \Delta x_A + \frac{y_B^0 - y_A^0}{D_0^2} \Delta x_B + \frac{x_B^0 - x_A^0}{D_0^2} \Delta y_A - \frac{x_B^0 - x_A^0}{D_0^2} \Delta y_B - \Delta \Sigma_A \quad (4.9)$$

que también se puede escribir

$$\Delta L_{A,B} = -\frac{\cos \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta x_A + \frac{\cos \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta x_B + \frac{\sin \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta y_A - \frac{\sin \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta y_B - \Delta \Sigma_A \quad (4.10)$$

La forma de proceder más usual consiste en partir de unas coordenadas  $(x_A^0, y_A^0)$  y  $(x_B^0, y_B^0)$  aproximadas y calcular el azimut aproximado:

$$\theta_{A,B}^0 = \arctg \frac{x_B^0 - x_A^0}{y_B^0 - y_A^0} \quad (4.11)$$

La orientación aproximada se escribe

$$L_{AB}^0 = \theta_{A,B}^0 - \Sigma_A^0$$

Por tanto, al introducir los incrementos

$$\Delta L_{A,B} = L_{A,B} - \theta_{A,B}^0 + \Sigma_A^0$$

y

$$\Delta \Sigma_A = \Sigma_A - \Sigma_A^0$$

en las ecuaciones linealizadas (4.9) o (4.10), se cancela la desorientación aproximada  $\Sigma_A^0$  y queda

$$L_{AB} - \theta_{AB}^0 = -\frac{\cos \theta_{AB}^0}{D_0} \Delta x_A + \frac{\cos \theta_{AB}^0}{D_0} \Delta x_B + \frac{\sin \theta_{AB}^0}{D_0} \Delta y_A - \frac{\sin \theta_{AB}^0}{D_0} \Delta y_B - \Sigma_A \quad (4.12)$$

Si se trata de una *intersección directa*, entonces no intervienen las variables  $\Delta x_A$ ,  $\Delta y_A$  y  $\Delta \Sigma_A$ , ya que las coordenadas  $x_A$ ,  $y_A$  y la desorientación  $\Sigma_A$  son constantes conocidas:

$$L_{A,B} - \theta_{AB}^0 = \frac{\cos \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta x_B - \frac{\sin \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta y_B \quad (4.13)$$

Si se trata de una *intersección inversa*, entonces desaparecen las incógnitas  $\Delta x_B$  y  $\Delta y_B$  correspondientes al punto visado:

$$L_{A,B} - \theta_{AB}^0 = -\frac{\cos \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta x_A + \frac{\sin \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta y_A - \Sigma_A \quad (4.14)$$

### Observación

Hay otros métodos para tratar la corrección de orientación basados en, por ejemplo, corregir todas las lecturas hechas desde el punto  $A$  con la magnitud  $\Sigma_A^0 = L_{A,B} - \theta_{A,B}^0$ , o eliminar la desorientación  $\Sigma_A$  de las ecuaciones utilizando una media de las desorientaciones aproximadas  $\Sigma_{Ai}^0 = L_{A,Bi} - \theta_{A,Bi}^0$  calculadas a partir de todas las lecturas hechas desde el punto  $A$  [CHB96].

En cuanto a las unidades, el proceso de cálculo (desarrollo en serie de Taylor) que ha conducido a

estas ecuaciones lineales obliga que los ángulos  $L_{A,B}$  y  $\Sigma_A$  estén expresados en radianes. En caso de que las observaciones se hagan en segundos sexagesimales (centésimas), será preciso dividir la lectura  $L_{A,B}$  y la desorientación  $\Sigma_A$  por el factor de conversión  $fc = 180 \times 3600 / \pi = 206264.806$  s/rad ( $fc = 200 \times 10000 / \pi = 636619.772$  s/rad):

$$\frac{L_{A,B} - \theta_{AB}^0}{fc} \text{ rad} = -\frac{\cos \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta x_A + \frac{\cos \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta x_B + \frac{\sin \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta y_A - \frac{\sin \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta y_B - \frac{\Sigma_A}{fc} \text{ rad} \quad (4.15)$$

o bien, si se quiere trabajar con unidades de segundos de arco,

$$(L_{A,B} - \theta_{AB}^0) s = -fc \frac{\cos \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta x_A + fc \frac{\cos \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta x_B + fc \frac{\sin \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta y_A - fc \frac{\sin \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta y_B - \Sigma_A s \quad (4.16)$$

La ventaja de esta ecuación frente a ecuaciones del tipo (4.15) con unidades en radianes es que, en aquel caso, para mantener una precisión de, por ejemplo, décimas de segundo de arco, se ha de trabajar con muchos decimales ( $1'' = 1/60 = 0.000004848$  rad; es decir, que una décima de segundo es aproximadamente 5 diezmilésimas de radián). Observemos, además, que, al tener unidades de ángulo, estas ecuaciones son adimensionales.

### Ejemplo 3 [LAU83] *Triangulación. Intersección directa*

Se conocen las coordenadas de 4 estaciones (en metros),

$P_1$  [12875,273, 28679,604]  
 $P_2$  [12273,916, 29612,311]  
 $P_3$  [14117,387, 30999,974]  
 $P_4$  [14717,693, 30168,703]

desde las cuales se visa un punto  $P$  de coordenadas desconocidas. Las orientaciones observadas de las visuales son, respectivamente,

$l_{o_1} = 34^\circ 47' 52'',3$   
 $l_{o_2} = 81^\circ 1' 22'',9$   
 $l_{o_3} = 200^\circ 40' 18'',5$   
 $l_{o_4} = 252^\circ 9' 42'',6$

Se trata de estimar las coordenadas de  $P$  partiendo de los valores aproximados:

$P$  [13677,500, 29834,000]

Resolución mediante MAPLE con los paquetes habituales:

Entramos las coordenadas conocidas de los puntos de estación  $p_i$ , las coordenadas aproximadas del punto visado  $p$  y las visuales [punto estación, punto visado]:

```
> p1:=[12875.273, 28679.604]: p2:=[12273.916, 29612.311]:
  p3:=[14117.387, 30999.974]: p4:=[14717.693, 30168.703]:
  p :=[13677.500, 29834.000]:
  vis1:=[p1,p]: vis2:=[p2,p]: vis3:=[p3,p]: vis4:=[p4,p]:
```

Dibujamos las visuales:

```
> plp:=polygonplot([vis1,vis2,vis3,vis4],axes=None):
  txp:=textplot([[12875.273,28679.604, 'P1'], [12273.916, 29612.311
'P2'], [14117.387,30999.974, 'P3'], [14717.693, 30168.703, 'P4'],
[13677.5, 29834, 'P']]):
  display({plp,txp});
```

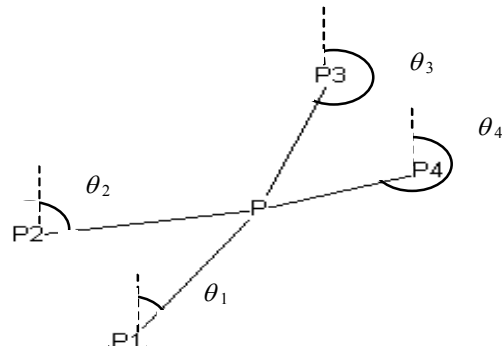


Fig. 4.7 Intersección directa

Orientación calculada  $lc$  de cada visual. El dibujo nos permite ver en qué casos hay que sumar  $180^\circ$  al arco tangente correspondiente. Calculamos también la diferencia  $dl$  entre las lecturas u orientaciones observadas  $lo$  y las calculadas  $lc$ , en segundos de arco.  $fc$  = factor de conversión de radianes a segundos sexagesimales:

```
> fc:=evalf(180*3600/Pi):
  lc:=vector(4,[]): lo:=vector(4,[]): dl:=vector(4,[]):
  lc[1]:=arctan((p[1]-p1[1])/(p[2]-p1[2]))*fc:
  lo[1]:=34*3600 + 47*60 + 52.3:
  lc[2]:=arctan((p[1]-p2[1])/(p[2]-p2[2]))*fc:
  lo[2]:=81*3600 + 1*60 + 22.9:
  lc[3]:=evalf(arctan((p[1]-p3[1])/(p[2]-p3[2]))+Pi)*fc:
  lo[3]:=200*3600 + 40*60 + 18.5:
  lc[4]:=evalf(arctan((p[1]-p4[1])/(p[2]-p4[2]))+Pi)*fc:
  lo[4]:=252*3600 + 9*60 + 42.6:
  dl:=evalm(lo-lc):
  dl := [4.2, -5.5, 6.5, -5.6]
```

Distancias calculadas  $D_{ci}$  y coeficientes de las ecuaciones del tipo (2.48) en unidades de segundos de arco:

```
> Dc1:=sqrt((p[1]-p1[1])^2+(p[2]-p1[2])^2):
  a1:=cos(lc[1]/fc)*fc/Dc1: b1:=-sin(lc[1]/fc)*fc/Dc1:
  Dc2:=sqrt((p[1]-p2[1])^2+(p[2]-p2[2])^2):
  a2:=cos(lc[2]/fc)*fc/Dc2: b2:=-sin(lc[2]/fc)*fc/Dc2:
  Dc3:=sqrt((p[1]-p3[1])^2+(p[2]-p3[2])^2):
  a3:=cos(lc[3]/fc)*fc/Dc3: b3:=-sin(lc[3]/fc)*fc/Dc3:
  Dc4:=sqrt((p[1]-p4[1])^2+(p[2]-p4[2])^2):
  a4:=cos(lc[4]/fc)*fc/Dc4: b4:=-sin(lc[4]/fc)*fc/Dc4:
```

Matriz  $A$  del sistema y traspuesta  $At$ :

```
> A := matrix(4,2,[a1,b1,a2,b2,a3,b3,a4,b4]);
  At:=transpose(A):
```

[120.489 -83.732]

```

      [ 22.645  -143.378]
A :=  [-154.861  58.424]
      [ -57.818  179.690]

```

Matriz  $N$  del sistema normal e inversa  $Q_m$ , cofactor de la solución:

```

> N:=evalm(At&*A);
  Qm:=inverse(N);

```

```

      [42355.717  -32773.040]
N :=  [-32773.040  63270.644 ]
      [ .000039   .000020 ]
  Qm :=  [.000020   .000026]

```

Solución  $m$  del sistema normal y coordenadas  $pc$  del punto  $P$  corregidas:

```

> m:=evalm(&*(Qm,At,dl));
  pc:=evalm(p+m);

```

```

      m := [-.016, -.011]
      pc := [13677.484, 29833.989]

```

Residuos:

```

> v:=evalm(A&*m-dl);
  vt:=transpose(v);

```

```

      v := [-5.2, 6.7, -4.7, 4.5]

```

Los residuos son correcciones a las observaciones. Comprobemos si las observaciones  $lo2$  corregidas con los residuos coinciden con las direcciones  $lc2$  calculadas con el punto  $P$  de coordenadas  $pc$  corregidas:

```

> lo2:=evalm((lo+v)/fc);
  lc2:=vector(4, []);
  lc2[1]:=arctan((pc[1]-p1[1])/(pc[2]-p1[2]));
  lc2[2]:=arctan((pc[1]-p2[1])/(pc[2]-p2[2]));
  lc2[3]:=evalf(arctan((pc[1]-p3[1])/(pc[2]-p3[2]))+Pi);
  lc2[4]:=evalf(arctan((pc[1]-p4[1])/(pc[2]-p4[2]))+Pi);
  dl2:=evalm((lc2-lo2)*fc);

```

```

      dl2 := [0, -.0004, -.0002, .0004]

```

Vemos que la diferencia es de diezmilésimas de segundo y podemos dar el ajuste por bueno. La corrección  $m = (\Delta x, \Delta y)$  hecha a las coordenadas de  $P$  ha sido aproximadamente de 1 cm.

Procedamos, ahora, a la evaluación del error. Calculemos la magnitud  $vtv$  que el proceso ha hecho mínima, el estimador  $s2$  de la varianza de referencia, la desviación tipo  $(sx, sy)$  de  $m$  y, por tanto, de las coordenadas de  $P$  corregidas y su covarianza  $sxy$ .  $gdl =$  grados de libertad:

```

> vtv:=evalm(vt&*v); gdl:= 4-2; s2:=vtv/gdl;
  sx2:=s2*Qm[1,1]; sy2:=s2*Qm[2,2]; sxy:=s2*Qm[1,2];
  sx:=sqrt(sx2); sy:=sqrt(sy2); sxy2:=sxy^2;

```

```

      sxy := .001
      sx := .048
      sy := .039

```

Podemos decir, pues, que las coordenadas del punto  $P$  son

$x = 13677.48$  m con desviación tipo  $s_x = 0.05$  m  
 $y = 29833.99$  m con desviación tipo  $s_y = 0.04$  m

La desviación tipo o error medio cuadrático de las coordenadas es del orden de los centímetros. Por tanto, la tercera cifra decimal no es significativa y no tiene sentido expresar las coordenadas con más precisión.

Calculamos los semiejes y la inclinación de la elipse de error y la dibujamos:

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
  smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
  theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
  elli := ellipse([0,0], smax, smin);
  display(rotate(elli, theta),xtickmarks=2,ytickmarks=2);
```

```
smax := .056
smin := .026
theta := .631
```

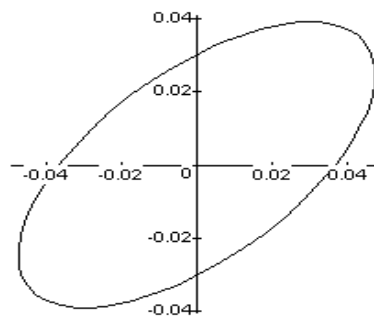


Fig. 4.8 Elipse de error

Intervalos del 95% de confianza:

```
> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
  ex:=t*sx; ey:=t*sy;

  t := 4.302
  ex := .205
  ey := .168
```

La estimación de las coordenadas de  $P$ , con un 95% de confianza, es, pues,

$x = 13677.5 \pm 0.2$  m  
 $y = 29833.9 \pm 0.17$  m

Como las coordenadas aproximadas de  $P$  que hemos entrado eran suficientemente aproximadas, ha sido precisa una sola iteración del proceso para obtener un buen ajuste.

Veamos, ahora, cómo evolucionan los cálculos si entramos coordenadas de  $P$  con aproximación grosera e iteramos. Hacemos

```
> p:=[13600, 29800];
```

y repetimos todos los cálculos desde el principio. Se obtienen los resultados siguientes:

Diferencia entre orientaciones calculadas y observadas:

$$dl := [6843.9, -3315.8, -9547.9, -5.5]$$

Correcciones  $m = (\Delta x, \Delta y)$ :

$$m := [75.749, 28.573]$$

Residuos y magnitud que el proceso ha hecho mínima:

$$v := [588.8, 593.5, 354.2, 706.2]$$

$$v\bar{v} := .132 \cdot 10^7$$

Diferencia entre orientaciones calculadas y observadas después de la corrección:

$$dl2 := [-348.7, 151.8, -406.5, -1571.8]$$

Volvemos a iterar. Pararemos las iteraciones cuando la corrección  $m$  a las coordenadas sea de orden inferior a los milímetros, el valor  $v\bar{v}$  de la magnitud que el proceso hace mínima se haga estable y la diferencia  $dl2$  entre orientaciones calculadas y observadas después de la corrección sea suficientemente pequeña:

> p := [13677.921, 29834.058] :

$$dl := [-41.6, -6.7, 68.4, 8.4]$$

$$m := [-.437, -.069]$$

$$v := [-5.2, 6.7, -4.7, 4.5]$$

$$v\bar{v} := 115.6$$

$$dl2 := [-.01, -.0002, -.01, -.005]$$

Volvamos a iterar

> p := [13677.484, 29833.989] :

$$dl := [5.2, -6.7, 4.7, -4.5]$$

$$m := [.0003, .00006]$$

$$v := [-5.2, 6.7, -4.7, 4.5]$$

$$v\bar{v} := 115.7$$

$$dl2 := [-.0001, -.0002, 0, .0004]$$

Nos paramos porque  $v\bar{v}$  se ha estabilizado y el orden de magnitud de las correcciones  $(\Delta x, \Delta y)$  y de la diferencia  $dl2$  entre magnitudes calculadas y observadas es suficientemente pequeña. Por otra parte, observamos que hemos obtenido la misma precisión iterando a partir de una aproximación inicialmente grosera que partiendo de una buena aproximación y haciendo una sola iteración.

#### **Ejemplo 4** [LAU83] *Triangulación. Intersección inversa.*

Se conocen las coordenadas de 5 estaciones:

$$P1 [90296, 116, 80834, 826]$$

$$P2 [97156, 749, 81102, 868]$$

$$P3 [98050, 171, 75960, 756]$$

$$P4 [94491, 189, 73608, 300]$$

$$P5 [88148, 558, 76244, 855]$$

que son visadas desde un punto  $P$  de coordenadas desconocidas. Las orientaciones observadas de las

visuales son, respectivamente,

$$\begin{aligned} lo_1 &= 0^\circ 0' 0'' ,00 \\ lo_2 &= 77^\circ 48' 9'' ,71 \\ lo_3 &= 162^\circ 42' 34'' ,19 \\ lo_4 &= 243^\circ 56' 03'' ,66 \\ lo_5 &= 315^\circ 51' 25'' ,56 \end{aligned}$$

Se trata de estimar las coordenadas de  $P$  partiendo de los valores aproximados

$$P [95202,300, 77027,000]$$

Resolución con MAPLE. Cargamos librerías, entramos las coordenadas conocidas de los puntos visados  $p_i$  y aproximadas del punto de estación  $p$ , definimos las visuales y las dibujamos, de manera análoga al ejercicio anterior:

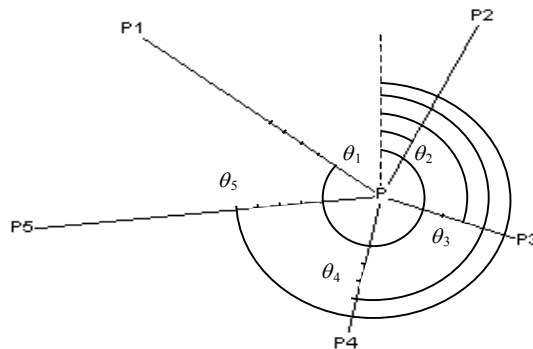


Fig. 4.9 Intersección inversa

Azimut calculado  $lc$  de cada visual (el dibujo nos permite ver el múltiplo de  $90^\circ$  que hay que sumar, en cada caso, al arco tangente correspondiente), orientación observada  $lo$  y diferencia  $dl$  entre las lecturas u orientaciones observadas  $lo$  y azimuts calculados  $lc$ , en segundos de arco.  $fc$  = factor de conversión de radianes a segundos sexagesimales:

```
> lc:=vector(5, []): lo:=vector(5, []): dl:=vector(5, []):
  fc:=evalf(180*3600/Pi):
  lc[1]:=evalf(arctan((p1[1]-p[1])/(p1[2]-p[2]))+2*Pi)*fc:
  lo[1]:=0.0
  lc[2]:=arctan((p2[1]-p[1])/(p2[2]-p[2]))*fc:
  lo[2]:=77*3600 + 48*60 + 9.71 - 1296000:
  lc[3]:=evalf(arctan((p3[1]-p[1])/(p3[2]-p[2]))+Pi)*fc:
  lo[3]:=162*3600 + 42*60 + 34.19 - 1296000:
  lc[4]:=evalf(arctan((p4[1]-p[1])/(p4[2]-p[2]))+Pi)*fc:
  lo[4]:=243*3600 + 56*60 + 3.66 - 1296000:
  lc[5]:=evalf(arctan((p5[1]-p[1])/(p5[2]-p[2]))+Pi)*fc:
  lo[5]:=315*3600 + 51*60 + 25.56 - 1296000:
  dl:=evalm(lo-lc);
```

$$dl := [-1108137.7, -1108137.0, -1108139.1, -1108137.5, -1108136.1]$$

Distancias calculadas  $Dci$ , y coeficientes de las ecuaciones en unidades de segundos de arco:

```
> Dc1:=sqrt((p[1]-p1[1])^2+(p[2]-p1[2])^2):
  a1:=-cos(lc[1]/fc)*fc/Dc1: b1:=sin(lc[1]/fc)*fc/Dc1:
```

```

Dc2:=sqrt((p[1]-p2[1])^2+(p[2]-p2[2])^2):
a2:=-cos(lc[2]/fc)*fc/Dc2: b2:=sin(lc[2]/fc)*fc/Dc2:
Dc3:=sqrt((p[1]-p3[1])^2+(p[2]-p3[2])^2):
a3:=-cos(lc[3]/fc)*fc/Dc3: b3:=sin(lc[3]/fc)*fc/Dc3:
Dc4:=sqrt((p[1]-p4[1])^2+(p[2]-p4[2])^2):
a4:=-cos(lc[4]/fc)*fc/Dc4: b4:=sin(lc[4]/fc)*fc/Dc4:
Dc5:=sqrt((p[1]-p5[1])^2+(p[2]-p5[2])^2):
a5:=-cos(lc[5]/fc)*fc/Dc5: b5:=sin(lc[5]/fc)*fc/Dc5:

```

Matriz  $A$  del sistema y traspuesta  $A^t$ :

```

> A := matrix(5, 3,
    [a1,b1,-1,a2,b2,-1,a3,b3,-1,a4,b4,-1,a5,b5,-1]);
At:= transpose(A):

```

$$A := \begin{bmatrix} -20.363 & -26.237 & -1 \\ -41.145 & 19.730 & -1 \\ 23.783 & 63.523 & -1 \\ 57.832 & -12.029 & -1 \\ 3.203 & -28.887 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz  $N$  del sistema normal e inversa  $Q_m$ , cofactor de la solución:

```

> N:=evalm(At*A);
Qm:=inverse(N);

```

$$N := \begin{bmatrix} 6028.067 & 445.050 & -23.309 \\ 445.050 & 6092.022 & -16.100 \\ -23.309 & -16.100 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Q_m := \begin{bmatrix} .00017 & -.00001 & .00076 \\ -.00001 & .00017 & .00049 \\ .00076 & .00049 & .20510 \end{bmatrix}$$

Solución  $m$  del sistema normal y coordenadas  $pc$  del punto  $P$  corregidas:

```

> m:=evalm(&* (Qm, At, dl)); pc:=[p[1]+m[1],p[2]+m[2]];

```

$$m := [-.008, -.021, -1108137.4]$$

$$pc := [95202.292, 77026.979]$$

**Residuos:**

```

> v:=evalm(A&*m-dl); vt:=transpose(v):

```

$$v := [1.04, -.51, .25, -.06, -.72]$$

Los residuos son correcciones a las observaciones. Comprobamos si las observaciones  $lo2$  corregidas de orientación con  $m[3]$  y compensadas con los residuos coinciden con los azimuts  $lc2$  calculados con el punto  $P$  de coordenadas  $pc$  corregidas:

```

>lc2:=vector(5, []): lo2:=vector(5, []): dl2:=vector(5, []):
lc2[1]:=evalf(arctan((p1[1]-pc[1])/(p1[2]-c[2]))+2*Pi)*fc:
lo2[1]:=lo[1]+m[3]+v[1]:
lc2[2]:=arctan((p2[1]-pc[1])/(p2[2]-pc[2]))*fc:
lo2[2]:=lo[2]+m[3]+v[2]:
lc2[3]:=evalf(arctan((p3[1]-pc[1])/(p3[2]-pc[2]))+Pi)*fc:
lo2[3]:=lo[3]+m[3]+v[3]:
lc2[4]:=evalf(arctan((p4[1]-pc[1])/(p4[2]-pc[2]))+Pi)*fc:
lo2[4]:=lo[4]+m[3]+v[4]:
lc2[5]:=evalf(arctan((p5[1]-pc[1])/(p5[2]-pc[2]))+Pi)*fc:

```

```
l02[5]:=l0[5]+m[3]+v[5]:
dl2:=evalm(l02-lc2);
```

```
dl2 := [.001, .0002, .0006, .0004, -.0002]
```

Vemos que la diferencia es del orden de las milésimas de segundo y podemos dar el ajuste por bueno. La corrección ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) hecha a las coordenadas de  $P$  ha sido de aproximadamente 2 cm.

Procedemos, ahora, a la evaluación del error. Calculamos la magnitud  $vtv$  que el proceso ha hecho mínima, el estimador  $s2$  de la varianza de referencia a posteriori, la desviación tipo ( $s_x$ ,  $s_y$ ) de las coordenadas de  $P$  corregidas y su covarianza  $s_{xy}$ .  $gdl$  = grados de libertad:

```
> gdl:=5-3: vtv:=evalm(vt&*v): s2:=vtv/gdl:
  sx2:=s2*Qm[1,1]: sy2:=s2*Qm[2,2]: sxy:=s2*Qm[1,2]:
  sx:=sqrt(sx2): sy:=sqrt(sy2): sxy2:=sxy^2:
```

```
sxy := -.00001
sx := .01
sy := .01
```

Podemos decir, pues, que las coordenadas del punto  $P$  son

```
x = 95202.29 m con desviación tipo sx := 0.01 m
y = 77026.98 m con desviación tipo sy := 0.01 m
```

La desviación tipo o error medio cuadrático es del orden de los centímetros. Por tanto, la tercera cifra decimal no es significativa y no tiene sentido expresar las coordenadas con más precisión.

Calculamos los semiejes y la inclinación de la elipse de error y la dibujamos:

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
  smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
  theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
  elli := ellipse([0,0], smax, smin):
  display(rotate(elli, theta), xtickmarks=2, ytickmarks=2);
```

```
smax := .013
smin := .012
theta := -.704
```

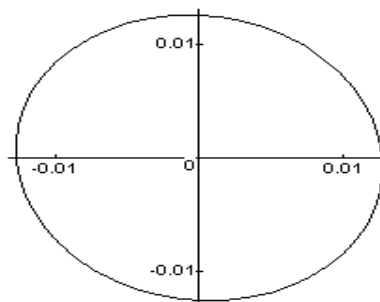


Fig. 4.10 Elipse de error

Intervalos del 95% de confianza:

```
> t:=statevalf[icdf, studentst[gdl]](0.975);
> ex:=t*sx; ey:=t*sy;
```

$$\begin{aligned}t &:= 4.302 \\ex &:= .05 \\ey &:= .05\end{aligned}$$

Las coordenadas de  $P$ , con un 95% de confianza, son

$$\begin{aligned}x &= 95202.29 \pm 0.05 \text{ m} \\y &= 77026.98 \pm 0.05 \text{ m}\end{aligned}$$

Igual que en el ejemplo anterior, como las coordenadas de  $P$  que hemos entrado eran suficientemente aproximadas, ha sido necesaria una sola iteración del proceso para obtener un buen ajuste. Veamos, ahora, cómo evolucionan los cálculos si entramos coordenadas de  $P$  con aproximación grosera e iteramos. Hacemos

> p:=[95150, 77000] :

y repetimos todos los cálculos desde el principio. Se obtienen los resultados siguientes:

Diferencia entre orientaciones calculadas y observadas:

$$dl := [-1109918.2, -1109739.5, -1105218.3, -1105408.9, -1108753.3]$$

Correcciones  $m$ :

$$m := [52.219, 27.326, -1108137.3]$$

Residuos y magnitud que el proceso ha hecho mínima:

$$\begin{aligned}v &:= [-13.5, 25.9, -17.3, 20.7, -15.8] \\v_{tv} &:= 1833.74\end{aligned}$$

Diferencia entre orientaciones calculadas y observadas después de la corrección:

$$dl2 := [-6.9, 16.5, -37.9, 29.1, -4.9]$$

Volvemos a iterar. Pararemos las iteraciones cuando la corrección  $m$  a las coordenadas sea de orden inferior a los milímetros, el valor  $v_{tv}$  de la magnitud que el proceso hace mínima se haga estable y la diferencia  $dl2$  entre orientaciones calculadas y observadas después de la corrección sea suficientemente pequeña:

> p:=[95202.219, 77027.326] :

$$\begin{aligned}dl &:= [-1108130.8, -1108146.7, -1108157.9, -1108128.9, -1108126.4] \\m &:= [.073, -.346, -1108137.4] \\v &:= [1.04, -.51, .25, -.06, -.72] \\v_{tv} &:= 1.93 \\dl2 &:= [0, -.0008, .002, -.0008, -.0008]\end{aligned}$$

Volvamos a iterar:

> p:=[95202.292, 77026.979] :

$$\begin{aligned}dl &:= [-1108138.4, -1108136.9, -1108137.6, -1108137.3, -1108136.7] \\m &:= [.0004, .0004, -1108137.4] \\v &:= [1.04, -.51, .25, -.06, -.72] \\v_{tv} &:= 1.92 \\dl2 &:= [0, .001, .0002, -.0002, -.0002]\end{aligned}$$

Nos paramos porque  $v/v$  se ha estabilizado y el orden de magnitud de las correcciones ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) y de la diferencia  $d/l_2$  entre magnitudes calculadas y observadas es suficientemente pequeña. Por otra parte, observamos que hemos conseguido la misma precisión iterando a partir de una aproximación inicialmente grosera que partiendo de una buena aproximación y haciendo una sola iteración.

#### 4.4 Trilateración. Ecuaciones de distancia

Se trata de determinar las coordenadas de un conjunto de puntos a partir de observaciones de distancias. En este caso, pues, los observables son longitudes. Igual que en la triangulación, no haremos distinciones innecesarias entre intersecciones directas e inversas, de manera que, en principio, consideraremos desconocidas las coordenadas de los dos puntos que intervienen, el punto de estación  $A(x_A, y_A)$  y el punto visado  $B(x_B, y_B)$ .

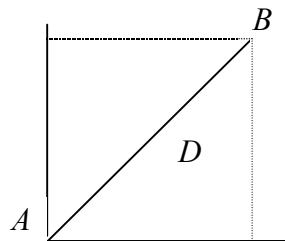


Fig. 4.11 Medida de distancia

La relación que liga la observación  $D$  con las 4 incógnitas  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $x_B$  y  $y_B$  es

$$D^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

o bien

$$D = ((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)^{1/2} \quad (4.17)$$

que es una expresión *no lineal* de la forma

$$D = f(x_A, y_A, x_B, y_B)$$

Para linealizarla, consideraremos un vector de coordenadas conocidas  $x^0 = (x_A^0, y_A^0, x_B^0, y_B^0)$  y llamaremos

$$\begin{aligned} D_0 &= f(x^0) \\ \Delta D &= D - D_0 \\ \Delta x_A &= x_A - x_A^0 \\ \Delta y_A &= y_A - y_A^0 \\ \Delta x_B &= x_B - x_B^0 \\ \Delta y_B &= y_B - y_B^0 \end{aligned}$$

Haciendo el desarrollo de Taylor hasta orden 1, se obtiene la *ecuación lineal en los incrementos con el observable en el término independiente*:

$$\Delta D = -\frac{x_B^0 - x_A^0}{D_0} \Delta x_A + \frac{x_B^0 - x_A^0}{D_0} \Delta x_B - \frac{y_B^0 - y_A^0}{D_0} \Delta y_A + \frac{y_B^0 - y_A^0}{D_0} \Delta y_B \quad (4.18)$$

En caso de que el punto  $A$  de estación sea conocido, no intervienen las incógnitas correspondientes y la ecuación queda de la forma

$$\Delta D = \frac{x_B^0 - x_A^0}{D_0} \Delta x_B + \frac{y_B^0 - y_A^0}{D_0} \Delta y_B \quad (4.19)$$

### Ejemplo 5 [LAU83] Trilateración

Se conocen las coordenadas (en metros) de 3 estaciones:

P1 [26433,372, 708901,235]  
 P2 [52854,609, 675108,449]  
 P3 [19113,597, 680721,885]

desde las cuales se visa un punto  $P$  de coordenadas desconocidas. Las distancias observadas de las visuales son, respectivamente,

$Do_1 = 19990,402$  m  
 $Do_2 = 24630,764$  m  
 $Do_3 = 17063,857$  m

Se trata de estimar las coordenadas de  $P$  partiendo de los valores aproximados

$P$  [33345,200, 690143,700]

Resolución con MAPLE V. Cargamos librerías, entramos las coordenadas conocidas de los puntos visados  $pi$  y las coordenadas aproximadas del punto de estación  $p$  y dibujamos las visuales de manera análoga a los ejercicios anteriores:

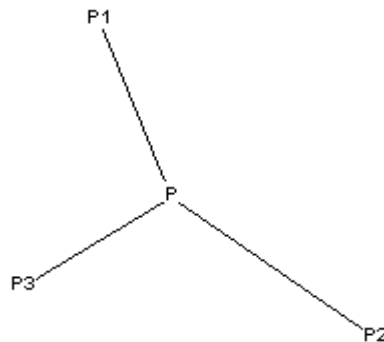


Fig. 4.12 Trilateración

Distancia calculada  $Dc$  de cada visual y diferencia  $dD$  entre las distancias observadas  $Do$  y las calculadas  $Dc$ , en metros:

```
> Dc:=vector(3,[]): Do:=vector(3,[]):
  Dc[1]:=sqrt((p[1]-p1[1])^2+(p[2]-p1[2])^2):
  Do[1]:=19990.402:
  Dc[2]:=sqrt((p[1]-p2[1])^2+(p[2]-p2[2])^2):
  Do[2]:=24630.764:
```

```
Dc[3]:=sqrt((p[1]-p3[1])^2+(p[2]-p3[2])^2):
Do[3]:=17067.857:
dD:=evalm(Do-Dc):
dD := [-.058, -.026, .077]
```

Coefficientes de las ecuaciones en unidades de metros:

```
> a1:=(p[1]-p1[1])/Dc[1]: b1:=(p[2]-p1[2])/Dc[1]:
a2:=(p[1]-p2[1])/Dc[2]: b2:=(p[2]-p2[2])/Dc[2]:
a3:=(p[1]-p3[1])/Dc[3]: b3:=(p[2]-p3[2])/Dc[3]:
```

Matriz  $A$  del sistema y traspuesta  $At$ :

```
> A := matrix(3,2,[a1,b1,a2,b2,a3,b3]);
At:=transpose(A):
A := [ .346  -.938
      [-.792  .610]
      [ .834  .552]
```

Matriz  $N$  del sistema normal e inversa  $Qm$ , cofactor de la solución:

```
> N:=evalm(At*A);
Qm:=inverse(N);
N := [1.442  -.348]
     [-.348  1.558]
     [.733  .163]
Qm = [ .163  .678]
```

Solución  $m$  del sistema normal y coordenadas  $pc$  del punto  $P$  corregidas:

```
> m:=evalm(&*(Qm,At,dD));
pc:=evalm(p+m);
m := [.060, .065]
pc := [33345.260, 690143.765]
```

Residuos:

```
> v:=evalm(A*m-dD);
vt:=transpose(v):
v := [.017, .018, .010]
```

Los residuos son correcciones a las observaciones. Comprobamos si las observaciones  $Do2$  corregidas con los residuos coinciden con las distancias  $Dc2$  calculadas con el punto  $P$  de coordenadas  $pc$  corregidas:

```
> Do2:=evalm(Do+v):Dc2:=vector(3,[]):
Dc2[1]:=sqrt((pc[1]-p1[1])^2+(pc[2]-p1[2])^2):
Dc2[2]:=sqrt((pc[1]-p2[1])^2+(pc[2]-p2[2])^2):
Dc2[3]:=sqrt((pc[1]-p3[1])^2+(pc[2]-p3[2])^2):
dD2:=evalm(Do2-Dc2):
dD2 := [-.00001, 0, 0]
```

Vemos que la diferencia es del orden de las centésimas de milímetro y podemos dar el ajuste por bueno. La corrección  $m = (\Delta x, \Delta y)$  hecha a las coordenadas de  $P$  ha sido de aproximadamente 6 cm.

Procedemos, ahora, a la evaluación del error. Calculamos la magnitud  $\sqrt{v^t v}$  que el proceso ha hecho mínima, el estimador  $s^2$  de la varianza de referencia a posteriori, la desviación tipo  $(s_x, s_y)$  de las

coordenadas de  $P$  corregidas y su covarianza  $sxy$ .  $gdl$  = grados de libertad:

```
> gdl:=3-2
vtt:=evalm(vt&*v); s2:=vtt/gdl:
sx2:=s2*Qm[1,1]: sy2:=s2*Qm[2,2]: sxy:=s2*Qm[1,2]:
sx:=sqrt(sx2): sy:=sqrt(sy2): sxy2:=sxy^2:

vtt := .0007
sx := .023
sy := .022
```

Podemos decir, pues, que las coordenadas del punto  $P$  son

$x = 33345.26$  m con desviación tipo  $sx := 0.02$  m  
 $y = 690143.76$  m con desviación tipo  $sy := 0.02$  m

La desviación tipo o error medio cuadrático es del orden de los centímetros. Por tanto, la tercera cifra decimal no es significativa y no tiene sentido expresar las coordenadas con más precisión.

Calculamos los semiejes y la inclinación de la elipse de error y la dibujamos:

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
elli := ellipse([0,0], smax, smin);
display(rotate(elli, theta), xtickmarks=2, ytickmarks=2);

smax := .025
smin := .0197
theta := .703
```

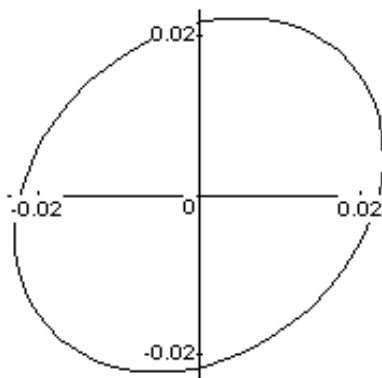


Fig. 4.13 Elipse de error

Intervalos del 95% de confianza:

```
> t:=statevalf[icdf, studentst[gdl]](0.975);
ex:=t*sx; ey:=t*sy;

t := 12.706
ex := .29
ey := .28
```

Las coordenadas de  $P$ , con un 95% de confianza, son

$$x = 33345.26 \pm 0.29 \text{ m}$$

$$y = 690143.76 \pm 0.28 \text{ m}$$

Igual que en los ejemplos anteriores, como las coordenadas de  $P$  que hemos entrado eran suficientemente aproximadas, ha sido precisa una sola iteración del proceso para obtener un buen ajuste. Veamos, ahora, cómo evolucionan los cálculos si entramos coordenadas de  $P$  con aproximación grosera e iteramos. Hacemos

```
> p:=[33300, 690100]:
```

y repetimos todos los cálculos desde el principio. Se obtienen los resultados siguientes:

Diferencia entre distancias calculadas y observadas:

$$dD := [-25.517, -9.231, 61.885]$$

Correcciones  $m$ :

$$m := [45.233, 43.742]$$

Residuos y magnitud que el proceso ha hecho mínima:

$$v := [-.052, -.054, -.030]$$

$$v_{tv} := .006$$

Diferencia entre distancias calculadas y observadas después de la corrección:

$$dl2 := [-.083, -.079, -.004]$$

Volvemos a iterar. Pararemos las iteraciones cuando la corrección  $m$  a las coordenadas sea de orden inferior a los milímetros, el valor  $v_{tv}$  de la magnitud que el proceso hace mínima se haga estable y la diferencia  $dl2$  entre distancias observadas y calculadas después de la corrección sea suficientemente pequeña.

```
> p:=[33345.233, 690143.742]:
```

$$dD := [-.030, -.025, .026]$$

$$m := [.027, .023]$$

$$v := [.017, .0179, .010]$$

$$v_{tv} := .0007$$

$$dD2 := [-.00001, 0, 0]$$

Volvamos a iterar:

```
> p:=[33345.260, 690143.765]:
```

$$dD := [-.018, -.018, -.009]$$

$$m := [.0005, .0004]$$

$$v := [.017, .018, .010]$$

$$v_{tv} := .00072$$

$$dD2 := [-.00001, 0, 0]$$

Paramos las iteraciones porque  $v_{tv}$  se ha estabilizado y el orden de magnitud de las correcciones ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) y de la diferencia  $dl2$  entre magnitudes calculadas y observadas es suficientemente pequeña. Por otra parte, observamos que hemos conseguido la misma precisión iterando a partir de una aproximación inicialmente grosera que partiendo de una buena aproximación y haciendo una sola iteración.

#### 4.5 Utilización de ecuaciones de ángulo y de distancia conjuntamente

Las ecuaciones de distancia tienen dimensiones de longitud. Si se utilizan mezcladas con ecuaciones de ángulo, como estas últimas son adimensionales, será preciso multiplicar las unas o las otras por un factor que haga el conjunto coherente dimensionalmente. Si no se hace así, el vector  $u$  de observaciones y, por tanto, el vector  $v$  de residuos tendrían unas componentes con unidades de ángulo y otras con unidades de longitud.

Lo que haremos será tomar la varianza de las observaciones angulares como varianza de referencia  $\sigma^2$  o, lo que es lo mismo, dar peso unidad a las observaciones angulares. De esta forma, el peso

$$p_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$$

de las observaciones de distancia tendrá unidades de  $rad^2/m^2$ .

Ya hemos observado que dar peso  $p_i$  a una observación  $u_i$  equivale a multiplicar la ecuación correspondiente por  $\sqrt{p_i}$ . Por tanto, las ecuaciones de ángulo y distancia quedarán con unidades de radianes:

$$\frac{L_{A,B} - \theta_{A,B}^0}{fc} rad = -\frac{\cos \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta x_A + \frac{\cos \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta x_B + \frac{\sen \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta y_A - \frac{\sen \theta_{A,B}^0}{D_0} \Delta y_B - \frac{\Sigma_A}{fc} rad \quad (4.20)$$

y

$$\sqrt{p} \Delta D rad = \sqrt{p} \left( -\frac{x_B^0 - x_A^0}{D_0} \Delta x_A + \frac{x_B^0 - x_A^0}{D_0} \Delta x_B - \frac{y_B^0 - y_A^0}{D_0} \Delta y_A + \frac{y_B^0 - y_A^0}{D_0} \Delta y_B \right) rad \quad (4.21)$$

respectivamente.

De la misma forma, al calcular la varianza de referencia a posteriori

$$S^2 = \frac{\sum p_i v_i^2}{n - h}$$

todos los términos del sumatorio, y por tanto el resultado, estarán en radianes al cuadrado.

#### Ejemplo 6 Utilización de ecuaciones de ángulo y de distancia conjuntamente

Con los mismos datos del ejemplo 9 estacionamos, además, en un punto  $p_e$  de coordenadas desconocidas y hacemos medidas angulares, visando los puntos  $p_3$ ,  $p_v$  y  $p_1$  y medidas de distancia, visando los puntos  $p_4$  y  $p_v$ . Además, desde  $p_1$  hacemos una medida de distancia visando  $p_v$ . Tenemos, pues, 10 observaciones (las 4 intersecciones directas del ejemplo 9, 3 intersecciones inversas y 3 observaciones de distancia), que corresponderán a 10 ecuaciones, con las coordenadas de los puntos  $p_e$  y  $p_v$  como incógnitas (4). Los datos son:

Coordenadas:

Puntos de referencia  $p_i$  (coordenadas conocidas):

$$\begin{aligned}
 p1 & [12875,273, 28679,604] \\
 p2 & [12273,916, 29612,311] \\
 p3 & [14117,387, 30999,974] \\
 p4 & [14717,693, 30168,703]
 \end{aligned}$$

Puntos de coordenadas desconocidas (coordenadas aproximadas). Hay un punto visado  $pv$  y un punto de estación  $pe$ :

$$\begin{aligned}
 pv & [13677,500, 29834,000] \\
 pe & [13490,400, 30135,600]
 \end{aligned}$$

Observaciones angulares directas:

$$\begin{aligned}
 lo_{1v} & = 34^\circ 47' 52'',3 \\
 lo_{2v} & = 81^\circ 1' 22'',9 \\
 lo_{3v} & = 200^\circ 40' 18'',5 \\
 lo_{4v} & = 252^\circ 9' 42'',6
 \end{aligned}$$

Observaciones angulares inversas:

$$\begin{aligned}
 lo_{e1} & = 187^\circ 46' 15'',3 \\
 lo_{e3} & = 20^\circ 50' 13'',7 \\
 lo_{ev} & = 133^\circ 5' 15'',2
 \end{aligned}$$

La desviación tipo de las observaciones angulares es de  $15''$ , la misma para todas, que tomaremos como desviación tipo de referencia. Por tanto, las observaciones angulares tendrán todas peso unidad.

Observaciones de distancia:

$$\begin{aligned}
 D_{1v} & = 1405,77 \text{ m} && \text{con desviación tipo de 1 cm} \\
 D_{e4} & = 1227,66 \text{ m} && \text{con desviación tipo de 1,5 cm} \\
 D_{ev} & = 354,979 \text{ m} && \text{con desviación tipo de 0,5 cm}
 \end{aligned}$$

Resolución con MAPLE. Cargamos librerías, entramos las coordenadas conocidas de los puntos visados  $pi$ , las coordenadas aproximadas del punto de estación  $pe$  y del punto visado  $pv$  y dibujamos las visuales, de manera análoga a los ejercicios anteriores (fig. 4.14).

Entrada de datos observacionales (vector  $lo$ ) con su desviación tipo (vector  $so$ ), evaluación de los correspondientes datos calculados (vector  $lc$ ), distancias calculadas (vector  $Dc$ ) y elementos de la matriz  $A$  del sistema sobredeterminado de observaciones indirectas linealizado.  $fc$  = factor de conversión de radianes a segundos sexagesimales. Desviación tipo de referencia o de las observaciones de peso unidad  $s\theta = 15$  segundos de arco.

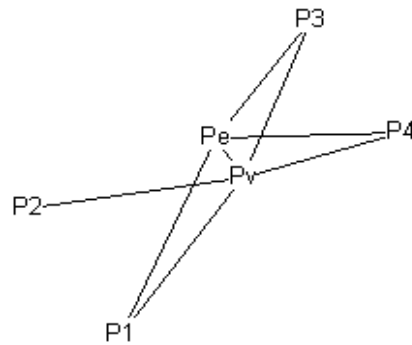


Fig. 4.14 Red con observaciones de ángulo y de distancia

```
> Pin:=evalf(Pi): fc:=180*3600/Pin:
lc:=vector(10, []):lo:=vector(10, []):Dc:=vector(10, []):
so:=vector(10, []): s0:=15: s02:=s0^2:
```

**Intersección directa:**

```
> lc[1]:=arctan((pv[1]-p1[1])/(pv[2]-p1[2]))*fc:
Dc[1]:=sqrt((pv[1]-p1[1])^2+(pv[2]-p1[2])^2):
lc[2]:=arctan((pv[1]-p2[1])/(pv[2]-p2[2]))*fc:
Dc[2]:=sqrt((pv[1]-p2[1])^2+(pv[2]-p2[2])^2):
lo[2]:=81*3600 + 1*60 + 12.9: so[2]:=s0:
lc[3]:=arctan((pv[1]-p3[1])/(pv[2]-p3[2]))*fc:
Dc[3]:=sqrt((pv[1]-p3[1])^2+(pv[2]-p3[2])^2):
lo[3]:=200*3600 + 40*60 + 8.5: so[3]:=s0:
lc[4]:=arctan((pv[1]-p4[1])/(pv[2]-p4[2]))*fc:
Dc[4]:=sqrt((pv[1]-p4[1])^2+(pv[2]-p4[2])^2):
lo[4]:=252*3600 + 9*60 + 32.6: so[4]:=s0:
```

**Elementos de la matriz del sistema sobredeterminado correspondientes a las observaciones angulares directas:**

```
> a11:=cos(lc[1]/fc)*fc/Dc[1]:a12:=-sin(lc[1]/fc)*fc/Dc[1]:
a21:=cos(lc[2]/fc)*fc/Dc[2]:a22:=-sin(lc[2]/fc)*fc/Dc[2]:
a31:=cos(lc[3]/fc)*fc/Dc[3]:a32:=-sin(lc[3]/fc)*fc/Dc[3]:
a41:=cos(lc[4]/fc)*fc/Dc[4]:a42:=-sin(lc[4]/fc)*fc/Dc[4]:
```

**Intersección inversa. Valor aproximado inicial de la desorientación  $co = 0$ :**

```
> lc[5]:=arctan((p3[1]-pe[1])/(p3[2]-pe[2]))*fc:
Dc[5]:=sqrt((p3[1]-pe[1])^2+(p3[2]-pe[2])^2):
lo[5]:=20*3600 + 50*60 + 13.7:
lc[6]:=arctan((p1[1]-pe[1])/(p1[2]-pe[2]))*fc:
Dc[6]:=sqrt((p1[1]-pe[1])^2+(p1[2]-pe[2])^2):
lo[6]:=187*3600 + 46*60 + 15.3: so[6]:=s0:
lc[7]:=arctan((pv[1]-pe[1])/(pv[2]-pe[2]))*fc:
Dc[7]:=sqrt((pv[1]-pe[1])^2+(pv[2]-pe[2])^2):
lo[7]:=133*3600 + 5*60 + 15.2: so[7]:=s0:
co:=0:
```

Elementos de la matriz del sistema sobredeterminado correspondientes a las observaciones angulares inversas:

```
> a53:=-cos(lc[5]/fc)*fc/Dc[5]:a54:=sin(lc[5]/fc)*fc/Dc[5]:
  a63:=-cos(lc[6]/fc)*fc/Dc[6]:a64:=sin(lc[6]/fc)*fc/Dc[6]:
  a73:=-cos(lc[7]/fc)*fc/Dc[7]:a74:=sin(lc[7]/fc)*fc/Dc[7]:
  a71:=-a73: a72:=-a74:
```

Observaciones de distancia:

```
> lc[8]:=sqrt((p4[1]-pe[1])^2+(p4[2]-pe[2])^2):
  Dc[8]:=lc[8]:
  lo[8]:=1227.66: so[8]:=0.010:
  lc[9]:=sqrt((p1[1]-pv[1])^2+(p1[2]-pv[2])^2):
  Dc[9]:=lc[9]:
  lo[9]:=1405.77: so[9]:=0.010:
  lc[10]:=sqrt((pv[1]-pe[1])^2+(pv[2]-pe[2])^2):
  Dc[10]:=lc[10]:
  lo[10]:=354.979: so[10]:=0.005:
```

Elementos de la matriz del sistema sobredeterminado correspondientes a las observaciones de distancia:

```
> a83:=- (p4[1]-pe[1])/Dc[8]: a84:=- (p4[2]-pe[2])/Dc[8]:
  a91:= (pv[1]-p1[1])/Dc[9]: a92:= (pv[2]-p1[2])/Dc[9]:
  a101:= (pv[1]-pe[1])/Dc[10]: a102:= (pv[2]-pe[2])/Dc[10]:
  a103:=-a101: a104:=-a102:
```

Diferencia entre datos observados y calculados (vector *dl*) y vector de incógnitas *vin* (valores aproximados):

```
> dl:=evalm(lo-lc);
  vin:=vector([pv[1],pv[2],pe[1],pe[2],co]);
```

```
dl := [-5.757,-15.540,-3.449,-15.558,-54427.297,-54475.544,-54355.369,-.079,-.003,058]
  vin := [13677.500, 29834.000, 13490.400, 30135.600, 0]
```

Matriz *A* del sistema y traspuesta *At*:

```
> A := matrix(10,5,[
  a11 , a12 , 0 , 0 , 0 ,
  a21 , a22 , 0 , 0 , 0 ,
  a31 , a32 , 0 , 0 , 0 ,
  a41 , a42 , 0 , 0 , 0 ,
  0 , 0 , a53 , a54 , -1 ,
  0 , 0 , a63 , a64 , -1 ,
  a71 , a72 , a73 , a74 , -1 ,
  0 , 0 , a83 , a84 , 0 ,
  a91 , a92 , 0 , 0 , 0 ,
  a101, a102, a103, a104, 0 ]); At:=transpose(A):
```

```

[ 120.489   -83.732     0         0         0 ]
[  22.646  -143.379     0         0         0 ]
[-154.862   58.425     0         0         0 ]
[ -57.819  179.690     0         0         0 ]
[    0         0   -156.357   113.418   -1 ]
A :=
[    0         0   120.208   -50.786   -1 ]
[-493.847  -306.362  493.847   306.362   -1 ]
[    0         0    -0.999    -0.027    0 ]
[   .571     .821     0         0         0 ]
[   .527    -0.850   -0.527     .850     0 ]

```

Matriz de pesos:

```
> P:=diag(1,1,1,1,1,1,1,1,(s0/so[8])^2,(s0/so[9])^2,
(s0/so[10])^2);
```

```

[1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 ]
[0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0 ]
[0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0 ]
[0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0 ]
[0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0 ]
P:=
[0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0 ]
[0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0 ]
[0  0  0  0  0  0  0  .225 10^7 0  0 ]
[0  0  0  0  0  0  0  0  .1 10^7 0 ]
[0  0  0  0  0  0  0  0  0  .9 10^7 ]

```

Matriz  $N$  del sistema normal e inversa  $Q_m$ , cofactor de la solución:

```
> N:=evalm(&*(At,P,A)): Qm:=inverse(N);
```

```

[ .276 10^-5  -0.163 10^-5  .363 10^-6  -0.307 10^-5  -0.610 10^-3 ]
[-0.163 10^-5  .229 10^-5  -0.231 10^-6  .313 10^-5  .384 10^-3 ]
Qm:= [ .363 10^-6  -0.231 10^-6  .426 10^-6  -0.195 10^-6  .483 10^-5 ]
[-0.307 10^-5  .313 10^-5  -0.195 10^-6  .500 10^-5  .771 10^-3 ]
[-0.610 10^-3  .384 10^-3  .483 10^-5  .771 10^-3  .490 ]

```

Solución  $m$  del sistema normal, vector de incógnitas  $vinc$  (valores corregidos) y coordenadas corregidas  $pvc$  y  $pec$  de los puntos  $pv$  y  $pe$ , respectivamente:

```
> m:=evalm(&*(Qm,At,P,dl));
vinc:=evalm(vin+m);
pvc:=vector([vinc[1],vinc[2]]);
pec:=vector([vinc[3],vinc[4]]);
co:=vinc[5];
m := [-.040, .024, .073, .164, 54454.861]
vinc := [13677.460, 29834.024, 13490.474, 30135.764, 54454.861]
pvc := [13677.460, 29834.024]
pec := [13490.474, 30135.764]
co := 54454.861
```

Residuos:

```
> v:=evalm(A&*m-dl); vt:=transpose(v);
```

```
v := [-1.116, 11.127, 11.082, 22.268, -20.504, 21.21620 -712, .0014, .0004, .0005]
```

Los residuos son correcciones de las observaciones. Comprobamos si las observaciones *lo2* corregidas con los residuos coinciden con las magnitudes *lc2* calculadas con los puntos *pvc* y *pec* de coordenadas corregidas:

```
> lo2:=evalm((lo+v)):
lc2:=vector(10,[]):
lc2[1]:=arctan((pvc[1]-p1[1])/(pvc[2]-p1[2]))*fc:
lc2[2]:=arctan((pvc[1]-p2[1])/(pvc[2]-p2[2]))*fc:
lc2[3]:=arctan((pvc[1]-p3[1])/(pvc[2]-p3[2]))+Pin)*fc:
lc2[4]:=arctan((pvc[1]-p4[1])/(pvc[2]-p4[2]))+Pin)*fc:
lc2[5]:=arctan((p3[1]-pec[1])/(p3[2]-pec[2]))*fc:
lo2[5]:=lo2[5]+co:
lc2[6]:=arctan((p1[1]-pec[1])/(p1[2]-pec[2]))+Pin)*fc:
lo2[6]:=lo2[6]+co:
lc2[7]:=arctan((pvc[1]-pec[1])/(pvc[2]-pec[2]))+Pin)*fc:
lo2[7]:=lo2[7]+co:
lc2[8]:=sqrt((p4[1]-pec[1])^2+(p4[2]-pec[2])^2):
lc2[9]:=sqrt((p1[1]-pvc[1])^2+(p1[2]-pvc[2])^2):
lc2[10]:=sqrt((pvc[1]-pec[1])^2+(pvc[2]-pec[2])^2):
dl2:=evalm(lc2-lo2);
```

```
dl2 := [-.0002, -.0005, .0002, 0, .0013, -.0006, -.02, .00001, .2 10^-5, .00004]
```

Vemos que la diferencia es, en el peor de los casos, del orden de las centésimas de segundo para las observaciones angulares y de las centésimas de milímetro para las de distancia, y podemos dar el ajuste por bueno. Las correcciones hechas a las coordenadas llegan a los 16 cm y la corrección de orientación es de aproximadamente 15 grados.

Evaluación del error. Calculamos el estimador *s2* de la varianza de referencia a posteriori y lo comparamos con el valor *s02* propuesto inicialmente para este parámetro, basándonos en que *vtpv/s02* sigue una ley  $\chi^2$  con *gdl* grados de libertad.

```
> vtpv:=evalm(&*(vt,P,v)); gdl:= 10-5: s2:=vtpv/gdl;
jia:=statevalf[icdf,chisquare[gdl]](0.025);
vtpv/s02;
jib:=statevalf[icdf,chisquare[gdl]](0.975);
```

```
vtpv := 1621.358
s2 := 324.272
jia := .832
vtpv/s02 = 7.206
jib := 12.832
```

Vemos que, aunque que la diferencia entre la varianza de referencia propuesta *s02* y su estimador *s2* sea aparentemente grande, la magnitud *vtpv/s02* se mantiene entre los valores *jia* y *jib* de la variable  $\chi^2$  con *gdl* grados de libertad correspondientes a un nivel de significación  $\alpha = 0.05$ .

Calculamos los semiejes y la inclinación de las elipses de error y dibujamos estas elipses. Calculamos también los intervalos del 95% de confianza.

```
> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
```

$$t := 2.571$$

Punto visado  $pv$ :

```
> sx2:=s2*Qm[1,1]: sy2:=s2*Qm[2,2]: sxy:=s2*Qm[1,2];
  sx:=sqrt(sx2); sy:=sqrt(sy2); sxy2:=sxy^2:
```

$$\begin{aligned} sxy &:= -.0005 \\ sx &:= .030 \\ sy &:= .028 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto incógnita visado  $pv$  son

$$\begin{aligned} x_{pv} &= 13677.46 \pm 0.03 \text{ m} \\ y_{pv} &= 29834.02 \pm 0.03 \text{ m} \end{aligned}$$

Elipse de error:

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
  smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
  theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
  elli := ellipse([0,0], smax, smin);
  display(rotate(elli, theta), xtickmarks=2, ytickmarks=2);
```

$$\begin{aligned} smax &:= .037 \\ smin &:= .017 \\ theta &:= -.714 \end{aligned}$$

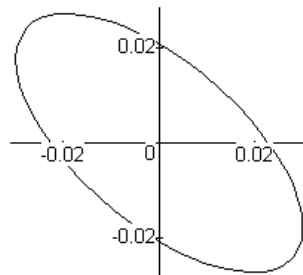


Fig. 4.15 Elipse de error

Intervalos del 95% de confianza:

```
> ex:=t*sx; ey:=t*sy;
```

$$\begin{aligned} ex &:= .077 \\ ey &:= .070 \end{aligned}$$

Con un 95% de confianza, las coordenadas del punto incógnita visado  $pv$  son

$$\begin{aligned} x_{pv} &= 13677.46 \pm 0.08 \text{ m} \\ y_{pv} &= 29834.02 \pm 0.07 \text{ m} \end{aligned}$$

Punto de estación  $pe$ :

```
> sx2:=s2*Qm[3,3]: sy2:=s2*Qm[4,4]: sxy:=s2*Qm[3,4];
  sx:=sqrt(sx2); sy:=sqrt(sy2); sxy2:=sxy^2:
```

$$\begin{aligned} sxy &:= -.00006 \\ sx &:= .012 \\ sy &:= .040 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto de estación incógnita  $pe$  son

$$\begin{aligned} x_{pe} &= 13490.47 \pm 0.01 \text{ m} \\ y_{pe} &= 30135.76 \pm 0.04 \text{ m} \end{aligned}$$

Elipse de error:

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
elli := ellipse([0,0], smax, smin);
display(rotate(elli, theta),xtickmarks=2,ytickmarks=2);
```

$$\begin{aligned} smax &:= .040 \\ smin &:= .012 \\ theta &:= .042 \end{aligned}$$

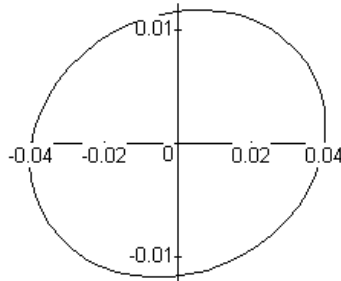


Fig. 4.16 Elipse de error

Intervalos del 95% de confianza:

```
> ex:=t*sx; ey:=t*sy;
ex := .030
ey := .103
```

Con un 95% de confianza, las coordenadas del punto de estación incógnita  $pe$  son

$$\begin{aligned} x_{pe} &= 13490.47 \pm 0.03 \text{ m} \\ y_{pe} &= 30135.8 \pm 0.10 \text{ m} \end{aligned}$$

Igual que en los ejemplos anteriores, una buena aproximación inicial ha permitido un buen ajuste con una sola iteración. Veamos cómo evolucionan los cálculos si entramos coordenadas de  $pv$  y  $pe$  con aproximación grosera e iteramos:

```
> pv:=[13600.000, 29800.000]: pe:=[13400.000, 30100.000]:
dl := [6833.9, -3325.7, -9557.9, 1496.4, 0, 18782.7, 16198.2, -91.8, 71.4, -5.5]
pvc := [13676.911, 29835.067]
pec := [13490.123, 30137.179]
co := -8912.759
v := [204.455, -361.660, 601.618, 117.314, 436.012, -109.280, -326.732, -.113, -.193, .005]
dl2 := [-358.953, 210.786, -444.525, 124.027, -672.096, -414.696, 106.449, .428, .737, .208]
vtpv := 923636.434
s2 := 184727.287
jia:= .831, vtpv/s02 := 4105.051, jib := 12.832
```

Volvamos a iterar:

```
> pv:=[13676.911, 29835.067]: pe:=[13490.123, 30137.179]:
```

```
dl := [154.5, 150.8, -157.1, -241.3, 236.1, 523.9, 220.0, -.3, -.5, -.2]
pvc := [13677.461, 29834.026]
pec := [13490.471, 30135.764]
co := -9343.179
v := [-1.245, 10.890, 10.978, 22.634, -28.753, 26.529, 2.224, .002, .002, .0006]
dl2 := [.059, -.044, .092, -.040, 7.835, -6.389, -5.655, .0008, .0004, .0002]
vtpv := 2311.696
jia := .831, vtpv/s02 := 10.274, jib := 12.832
```

Volvamos a iterar:

```
> pv:=[13677.461, 29834.026]: pe:=[13490.471, 30135.764]:
```

```
dl := [1.119, -10.928, -11.008, -22.485, 20.864, -20.089, 3.706, -.004, -.002, -.001]
pvc := [13677.459, 29834.025]
pec := [13490.474, 30135.765]
co := -9343.782
v := [-1.267, 11.002, 11.238, 22.445, -20.55059387, 20.94963584, -.399, .001, .0006, .0005]
dl2 := [-.0002, -.0005, .0002, .0007, -.0208, .0116, -.0211, -.4 10^-5, .4 10^-5, -.58 10^-5]
vtpn := 1620.735
jia := .831, vtpv/s02 := 7.203, jib := 12.832
```

Volvamos a iterar:

```
> pv:=[13677.459, 29834.025]: pe:=[13490.474, 30135.765]:
```

```
dl := [1.276, -11.027, -11.259, -22.421, 20.617, -21.001, .023, -.001, -.0003, -.0005]
pvc := [13677.459, 29834.025]
pec := [13490.474, 30135.765]
co := -9343.785
v := [-1.272, 10.999, 11.243, 22.451, -20.565, 20.964, -.399, .001, .0006, .0005]
dl2 := [-.0004, -.0007, .0005, .0008, .0035, -.0019, -.0011, .4 10^-5, .3 10^-5, .3 10^-5]
vtpv := 1622.230
jia := .831, vtpv/s02 := 7.210, jib := 12.832
```

#### 4.6 Transformación de semejanza tridimensional

La expresión de una transformación de semejanza tridimensional compuesta de tres rotaciones de ángulos  $\omega$ ,  $\varphi$  y  $\kappa$  respecto de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, una homotecia de razón  $\lambda$  y una traslación de vector  $t = (tx, ty, z)$  es

$$\lambda \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa & \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa \\ -\cos \varphi \sin \kappa & \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa & \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa \\ \sin \varphi & -\sin \omega \cos \varphi & \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

que también escribiremos

$$\lambda R X + t = X'$$

Para cada punto de control  $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ , del cual conocemos las coordenadas  $X'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$  del punto transformado, tenemos las tres ecuaciones no lineales (4.23)

$$\begin{aligned} x_i \lambda \cos \varphi \cos \kappa + y_i \lambda \cos \omega \sin \kappa + y_i \lambda \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa + z_i \lambda \sin \omega \sin \kappa - z_i \lambda \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa + tx &= x'_i \\ -x_i \lambda \cos \varphi \sin \kappa + y_i \lambda \cos \omega \cos \kappa - y_i \lambda \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa + z_i \lambda \sin \omega \cos \kappa + z_i \lambda \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa + ty &= y'_i \\ x_i \lambda \sin \varphi - y_i \lambda \sin \omega \cos \varphi + z_i \lambda \cos \omega \cos \varphi + tz &= z'_i \end{aligned} \quad (4.23)$$

en las 7 incógnitas  $\omega, \varphi, \kappa, tx, ty, z$  y  $\lambda$ .

Linealizando estas expresiones mediante un desarrollo de Taylor en un entorno de los valores  $\omega^0 = \varphi^0 = \kappa^0 = tx^0 = ty^0 = z^0 = 0, \lambda^0$ , se obtiene el sistema (4.24) de tres ecuaciones lineales en los incrementos.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^0 z_i & \lambda^0 y_i & 1 & 0 & 0 & x_i \\ \lambda^0 z_i & 0 & -\lambda^0 x_i & 0 & 1 & 0 & y_i \\ -\lambda^0 y_i & \lambda^0 x_i & 0 & 0 & 0 & 1 & z_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \varphi \\ \kappa \\ tx \\ ty \\ tz \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_i - x_i^0 \\ y'_i - y_i^0 \\ z'_i - z_i^0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

donde

$$\begin{pmatrix} x_i^0 \\ y_i^0 \\ z_i^0 \end{pmatrix} = \lambda^0 \begin{pmatrix} \cos \varphi^0 \cos \kappa^0 & \cos \omega^0 \sin \kappa^0 + \sin \omega^0 \sin \varphi^0 \cos \kappa^0 & \sin \omega^0 \sin \kappa^0 - \cos \omega^0 \sin \varphi^0 \cos \kappa^0 \\ -\cos \varphi^0 \sin \kappa^0 & \cos \omega^0 \cos \kappa^0 - \sin \omega^0 \sin \varphi^0 \sin \kappa^0 & \sin \omega^0 \cos \kappa^0 + \cos \omega^0 \sin \varphi^0 \sin \kappa^0 \\ \sin \varphi^0 & -\sin \omega^0 \cos \varphi^0 & \cos \omega^0 \cos \varphi^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tx^0 \\ ty^0 \\ tz^0 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} x_i^0 \\ y_i^0 \\ z_i^0 \end{pmatrix} = \lambda^0 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

Se toma  $\omega^0 = \varphi^0 = \kappa^0 = 0$  por razones de simplicidad de las ecuaciones lineales resultantes. Por otra parte, aunque  $tx^0 = ty^0 = z^0 = 0$  puedan no ser valores aproximados, el hecho de que el sistema sea lineal en las tras variables  $tx, ty$  y  $z$  nos permite partir de valores alejados de estos parámetros.

El número mínimo de puntos de control necesario para la determinación de los parámetros es 3 ( $i = 1, 2, \dots, m \geq 3$ ), que da lugar a un sistema sobredeterminado de, como mínimo, 9 ecuaciones con 7 incógnitas (con 2 puntos tendríamos 6 ecuaciones y, por tanto, un sistema indeterminado).

Los parámetros  $\omega, \varphi, \kappa, tx, ty, z$  y  $\lambda = \lambda^0 + \Delta\lambda$  se estimarán mediante el criterio de los mínimos cuadrados. Como se parte de una linealización y, por tanto, de una aproximación del verdadero sistema, la estimación mínimo-cuadrática de los parámetros será, en principio, sólo una primera aproximación  $\omega^1, \varphi^1, \kappa^1, tx^1, ty^1, z^1$  y  $\lambda^1$ . Se deberá, pues, iterar el proceso desarrollando por Taylor en un entorno de este nuevo punto aproximado. Aunque el desarrollo de Taylor en el entorno de un punto con valores de  $\omega, \varphi$  y  $\kappa$  diferentes de cero da lugar a unas ecuaciones bastante complicadas de manejar, el uso de un programa de cálculo simbólico como MAPLE nos puede permitir hacer los cálculos con cierta comodidad.

No obstante, el hecho de que se traten de determinar los parámetros de una transformación nos permite emplear otra estrategia iterativa: calcular una sucesión de transformaciones cuya composición sea la transformación buscada.

Para cada punto de control  $(x_i, y_i, z_i)$  llamamos  $(x_i^1, y_i^1, z_i^1)$  al punto transformado con la primera aproximación  $\omega^1, \varphi^1, \kappa^1, tx^1, ty^1, z^1$  y  $\lambda^1$  de los parámetros

$$\begin{pmatrix} x_i^1 \\ y_i^1 \\ z_i^1 \end{pmatrix} = \lambda^1 \begin{pmatrix} \cos \varphi^1 \cos \kappa^1 & \cos \omega^1 \sin \kappa^1 + \sin \omega^1 \sin \varphi^1 \cos \kappa^1 & \sin \omega^0 \sin \kappa^1 - \cos \omega^1 \sin \varphi^1 \cos \kappa^1 \\ -\cos \varphi^1 \sin \kappa^1 & \cos \omega^1 \cos \kappa^1 - \sin \omega^1 \sin \varphi^1 \sin \kappa^1 & \sin \omega^0 \cos \kappa^1 + \cos \omega^1 \sin \varphi^1 \sin \kappa^1 \\ \sin \varphi^1 & -\sin \omega^1 \cos \varphi^1 & \cos \omega^1 \cos \varphi^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tx^1 \\ ty^1 \\ tz^1 \end{pmatrix}$$

Una segunda aproximación de los parámetros será la solución mínimo-cuadrática del sistema sobredeterminado con ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 0 & -z_i^1 & y_i^1 & 1 & 0 & 0 & x_i^1 \\ z_i^1 & 0 & -x_i^1 & 0 & 1 & 0 & y_i^1 \\ -y_i^1 & x_i^1 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_i^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \varphi \\ \kappa \\ tx \\ ty \\ tz \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i^1 - x_i^1 \\ y_i^1 - y_i^1 \\ z_i^1 - z_i^1 \end{pmatrix}$$

para cada punto de control. Observamos que, a partir de este segundo paso, el desarrollo de Taylor se hace en un entorno de los valores  $\omega^0 = \varphi^0 = \kappa^0 = tx^0 = ty^0 = z^0 = 0, \lambda^0 = 1$ . Este proceso se iterará hasta llegar a una aproximación  $X^k = (x_i^k, y_i^k, z_i^k) \cong (x_i', y_i', z_i')$  razonable para los  $m$  puntos de control. La transformación definitiva será

$$F(X) = \lambda^k R^k (\dots (\lambda^2 R^2 (\lambda^1 R^1 (X) + t^1) + t^2) \dots + t^{k-1}) + t^k$$

que escribiremos

$$F(X) = \lambda R(X) + t$$

donde

$$\lambda = \lambda^1 \lambda^2 \dots \lambda^k$$

$$R = R^k R^{k-1} \dots R^2 R^1$$

y

$$t = t^k + \lambda^k R^k t^{k-1} + \dots + \lambda^k \lambda^{k-1} \dots \lambda^2 R^k R^{k-1} \dots R^2 t^1$$

### Ejemplo 7 Parámetros de una transformación de semejanza tridimensional

En una restitución fotogramétrica se dispone de las coordenadas instrumentales  $vi$  de 4 puntos de control:

$$\begin{aligned} v1 & [.46284, .64835, .07781] \\ v2 & [.57028, .66257, .08612] \\ v3 & [.35203, .34150, .04791] \\ v4 & [.55893, .31123, .06371] \end{aligned}$$

y de las correspondientes coordenadas de campo  $Vi$  de los mismos puntos, todas expresadas en metros:

$$\begin{aligned} V1 & [432014.31, 507430.31, 901.40] \\ V2 & [433087.09, 507568.62, 907.16] \\ V3 & [430886.87, 504372.59, 868.92] \\ V4 & [432951.16, 504068.16, 911.77] \end{aligned}$$

Se trata de calcular los parámetros de la transformación de semejanza tridimensional correspondiente. La resolución está hecha mediante MAPLE, con los paquetes de álgebra lineal y estadística.

Definimos la transformación de semejanza  $F$ .

Ángulos de rotación:  $rx, ry, rz$

Matriz de rotación:  $R$

Factor de escala:  $l$

Vector de traslación:  $t=(tx, ty, z)$

```
> R:=matrix(3,3,[
  cos(ry)*cos(rz),
  cos(rx)*sin(rz)+sin(rx)*sin(ry)*cos(rz),
  sin(rx)*sin(rz)-cos(rx)*sin(ry)*cos(rz),
  -cos(ry)*sin(rz),
  cos(rx)*cos(rz)-sin(rx)*sin(ry)*sin(rz),
  sin(rx)*cos(rz)+cos(rx)*sin(ry)*sin(rz),
  sin(ry),
  -sin(rx)*cos(ry),
  cos(rx)*cos(ry)
]);
t:=vector(3,[tx,ty,z]):
v:=vector(3,[x,y,z]):
F:=v->evalm(l*(R&*v)+t);
```

$$F := v \rightarrow \text{evalm}(l(R \&* v) + t)$$

Calculamos su jacobiano  $JF$  respecto de los parámetros:

```
> JF:=jacobian(F(v),[rx,ry,rz,tx,ty,z,l]):
```

Valores iniciales de los parámetros  $P_0=(rx_0, ry_0, rz_0, tx_0, ty_0, z_0, l_0)$ , transformación  $F_0$  para estos valores y jacobiano  $JF_0$  en este punto:

```
> rx0:=0:ry0:=0:rz0:=0:
  tx0:=0:ty0:=0:z0:=0:
  l0:=10000:
  R0:=value(subs([
  rx=rx0,ry=ry0,rz=rz0,
  tx=tx0,ty=ty0,z=z0,
  l=l0],
  evalm(R))):
  t0:=value(subs([tx=tx0,ty=ty0,z=z0],evalm(t))):
  F0:=v->evalm(l0*(R0&*v)+t0):
  JF0:=value(subs([
  rx=rx0,ry=ry0,rz=rz0,
  tx=tx0,ty=ty0,z=z0,
  l=l0],
  evalm(JF))):
```

$$JF_0 := \begin{bmatrix} 0 & -10000z & 10000y & 1 & 0 & 0 & x \\ 10000z & 0 & -10000x & 0 & 1 & 0 & y \\ -10000y & 10000x & 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix}$$

Coordenadas instrumentales transformadas por  $F_0$  y términos independientes  $U_0$  del sistema lineal sobredeterminado:

```
> V01:=F0(v1):V02:=F0(v2):V03:=F0(v3):V04:=F0(v4):
u1:=evalm(V1-V01):u2:=evalm(V2-V02):
u3:=evalm(V3-V03):u4:=evalm(V4-V04):
U0:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector);

U0 := [427385.91, 500946.81, 123.30, 427384.29, 500942.92, 45.96,
427366.57, 500957.59, 389.82, 427361.86, 500955.86, 274.67]
```

Matriz del sistema lineal sobredeterminado:

```
> JF01:=value(subs([x=v1[1],y=v1[2],z=v1[3]],evalm(JF0))):
JF02:=value(subs([x=v2[1],y=v2[2],z=v2[3]],evalm(JF0))):
JF03:=value(subs([x=v3[1],y=v3[2],z=v3[3]],evalm(JF0))):
JF04:=value(subs([x=v4[1],y=v4[2],z=v4[3]],evalm(JF0))):
A:=stack(JF01,JF02,JF03,JF04);
At:=transpose(A):

[ 0,-778.1,6483.5,1,0,0,.463]
[ 778.1,0,-4628.4,0,1,0,.648]
[-6483.5,4628.4,0,0,0,1,.078]
[ 0,-861.2,6625.7,1,0,0,.570]
[ 861.2,0,-5702.8,0,1,0,.662]
[-6625.7,5702.8,0,0,0,1,.086]

A :=
[ 0,-479.1,3415.0,1,0,0,.352]
[ 479.1,0,-3520.3,0,1,0,.341]
[-3415.0,3520.3,0,0,0,1,.048]
[ 0,-637.1,3112.3,1,0,0,.559]
[ 637.1,0,-5589.3,0,1,0,.311]
[-3112.3,5589.3,0,0,0,1,.064]
```

Matriz  $N$  del sistema de ecuaciones normales e inversa  $Qm$ :

```
> N:=evalm(At*A): Qm:=inverse(N):
```

Solución del sistema normal:

```
> m0:=evalm(&* (Qm, At, U0));
```

```
m0 := [.063, -.064, .003, 427350.920, 500962.985, 831.901, -77.592]
```

Primeros valores aproximados de los parámetros y transformación  $F1$  para estos valores:

Ángulos de rotación:  $rx1, ry1, rz1$

Matriz de rotación:  $R1$

Factor de escala:  $l1$

Vector de traslación:  $t1=(tx1, ty1, z1)$

```
> rx1:=rx0+m0[1]:ry1:=ry0+m0[2]:rz1:=rz0+m0[3]:
tx1:=tx0+m0[4]:ty1:=ty0+m0[5]:z1:=ty0+m0[6]:
l1:=l0+m0[7]:
R1:=value(subs([
rx=rx1,ry=ry1,rz=rz1,
tx=tx1,ty=ty1,z=z1,
l=l1],
evalm(R))):
t1:=value(subs([tx=tx1,ty=ty1,z=z1],evalm(t))):
F1:=v->evalm(l1*(R1*v)+t1):
```

Coordenadas instrumentales de los puntos de control transformados por  $F1$ : nuevos puntos objeto:

```
> v11:=F1(v1):v12:=F1(v2):v13:=F1(v3):v14:=F1(v4):
```

Términos independientes del nuevo sistema sobredeterminado: diferencia entre las coordenadas de los nuevos puntos objeto y las coordenadas de campo de los puntos de control:

```
> u1:=evalm(V1-v11):u2:=evalm(V2-v12):
  u3:=evalm(V3-v13):u4:=evalm(V4-v14):
  U1:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector):
```

$$U1 := [33.839, 14.818, -4.220, 37.529, 10.945, -3.720, \\ 21.246, 10.451, -1.702, 26.63, 3.284, -2.736]$$

Jacobiano de la transformación con factor de escala aproximado = 1:

```
> l0:=1:
  JF0:=value(subs([
  rx=rx0,ry=ry0,rz=rz0,
  tx=tx0,ty=ty0,z=z0,
  l=l0],
  evalm(JF))):
```

$$JF0 := \begin{bmatrix} 0 & -z & y & 1 & 0 & 0 & x \\ z & 0 & -x & 0 & 1 & 0 & y \\ -y & x & 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix}$$

Matriz del nuevo sistema sobredeterminado:

```
> JF01:=value(subs([x=v11[1],y=v11[2],z=v11[3]],evalm(JF0))):
  JF02:=value(subs([x=v12[1],y=v12[2],z=v12[3]],evalm(JF0))):
  JF03:=value(subs([x=v13[1],y=v13[2],z=v13[3]],evalm(JF0))):
  JF04:=value(subs([x=v14[1],y=v14[2],z=v14[3]],evalm(JF0))):
  A:=stack(JF01,JF02,JF03,JF04):
  At:=transpose(A):
```

Matriz del sistema de ecuaciones normales e inversa:

```
> N:=evalm(At*A): Qm:=inverse(N):
```

Solución del sistema normal:

```
> m1:=evalm(&* (Qm,At,U1)):
```

$$m1 := [.00046, -.00040, .00315, -2664.764, 84.686, 398.847, .002]$$

Valores aproximados de los parámetros, corrección y elementos de la transformación para estos valores:

```
> rx2:=rx0+m1[1]:ry2:=ry0+m1[2]:rz2:=rz0+m1[3]:
  tx2:=tx0+m1[4]:ty2:=ty0+m1[5]:z2:=ty0+m1[6]:
  l2:=l0+m1[7]:
  R2:=value(subs([
  rx=rx2,ry=ry2,rz=rz2,
  tx=tx2,ty=ty2,z=z2,
  l=l2],
  evalm(R))):
  t2:=value(subs([tx=tx2,ty=ty2,z=z2],evalm(t))):
  F2:=v->evalm(l2*(R2*v)+t2):
```

Puntos transformados por  $F2$ : nuevos puntos objeto:

```
> v21:=F2(v11):v22:=F2(v12):v23:=F2(v13):v24:=F2(v14):
```

Términos independientes del nuevo sistema inicial:

```
> u1:=evalm(V1-v21):u2:=evalm(V2-v22):
u3:=evalm(V3-v23):u4:=evalm(V4-v24):
U2:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector);
U2 := [-2.129, 6.293, .5194, -1.60, 5.433, 1.499, -2.228, 6.172, 1.278, -1.149, 6.245, .820]
```

Matriz del nuevo sistema inicial:

```
> JF01:=value(subs([x=v21[1],y=v21[2],z=v21[3]],evalm(JF0))):
JF02:=value(subs([x=v22[1],y=v22[2],z=v22[3]],evalm(JF0))):
JF03:=value(subs([x=v23[1],y=v23[2],z=v23[3]],evalm(JF0))):
JF04:=value(subs([x=v24[1],y=v24[2],z=v24[3]],evalm(JF0))):
A:=stack(JF01,JF02,JF03,JF04):
At:=transpose(A):
```

Matriz del sistema de ecuaciones normales e inversa:

```
> N:=evalm(At*A): Qm:=inverse(N):
```

Solución del sistema normal:

```
> m2:=evalm(&*(Qm,At,U2));
```

$$m2 := [-.107 \cdot 10^{-5}, .114 \cdot 10^{-5}, -.786 \cdot 10^{-5}, .021, .093, -.011, .503 \cdot 10^{-5}]$$

Valores aproximados de los parámetros, corrección y elementos de la transformación para estos valores:

```
> rx3:=rx0+m2[1]:ry3:=ry0+m2[2]:rz3:=rz0+m2[3]:
tx3:=tx0+m2[4]:ty3:=ty0+m2[5]:z3:=ty0+m2[6]:
l3:=l0+m2[7]:
R3:=value(subs([
rx=rx3,ry=ry3,rz=rz3,
tx=tx3,ty=ty3,z=z3,
l=l3],
evalm(R))):
t3:=value(subs([tx=tx3,ty=ty3,z=z3],evalm(t))):
F3:=v->evalm(l3*(R3*v)+t3):
```

Puntos transformado por  $F3$ : nuevos puntos objeto:

```
> v31:=F3(v21):v32:=F3(v22):v33:=F3(v23):v34:=F3(v24):
```

Términos independientes del nuevo sistema inicial:

```
> u1:=evalm(V1-v31):u2:=evalm(V2-v32):
u3:=evalm(V3-v33):u4:=evalm(V4-v34):
U3:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector);
```

$$U3 := [-.3371, .251, -.511, .182, -.618, .467, -.455, .154, .252, .611, .212, -.208]$$

Matriz del nuevo sistema inicial:

```
> JF01:=value(subs([x=v31[1],y=v31[2],z=v31[3]],evalm(JF0))):
JF02:=value(subs([x=v32[1],y=v32[2],z=v32[3]],evalm(JF0))):
JF03:=value(subs([x=v33[1],y=v33[2],z=v33[3]],evalm(JF0))):
```

```
JF04:=value(subs([x=v34[1],y=v34[2],z=v34[3]],evalm(JF0))):
A:=stack(JF01,JF02,JF03,JF04);
At:=transpose(A):
```

Matriz del sistema de ecuaciones normales e inversa:

```
> N:=evalm(At*A): Qm:=inverse(N):
```

Solución del sistema normal:

```
> m3:=evalm(&*(Qm,At,U3));
```

$$m3 := [.911 \cdot 10^{-10} \quad , .185 \cdot 10^{-9} \quad , .959 \cdot 10^{-8} \quad , -.009, -.001, -.00006, .112 \cdot 10^{-7}]$$

Valores aproximados de los parámetros, corrección y elementos de la transformación para estos valores:

```
> rx4:=rx0+m3[1]:ry4:=ry0+m3[2]:rz4:=rz0+m3[3]:
tx4:=tx0+m3[4]:ty4:=ty0+m3[5]:z4:=ty0+m3[6]:
l4:=l0+m3[7]:
R4:=value(subs([
rx=rx4,ry=ry4,rz=rz4,
tx=tx4,ty=ty4,z=z4,
l=l4],
evalm(R))):
t4:=value(subs([tx=tx4,ty=ty4,z=z4],evalm(t))):
F4:=v->evalm(l4*(R4*v)+t4):
```

Puntos transformados por F4: nuevos puntos objeto:

```
> v41:=F4(v31):v42:=F4(v32):v43:=F4(v33):v44:=F4(v34):
```

Términos independientes del nuevo sistema inicial:

```
> u1:=evalm(V1-v41):u2:=evalm(V2-v42):
u3:=evalm(V3-v43):u4:=evalm(V4-v44):
U4:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector):
```

$$U4 := [-.337, .251, -.511, .182, -.618, .467, -.455, .154, .252, .611, .213, -.208]$$

Matriz del nuevo sistema inicial:

```
> JF01:=value(subs([x=v41[1],y=v41[2],z=v41[3]],evalm(JF0))):
JF02:=value(subs([x=v42[1],y=v42[2],z=v42[3]],evalm(JF0))):
JF03:=value(subs([x=v43[1],y=v43[2],z=v43[3]],evalm(JF0))):
JF04:=value(subs([x=v44[1],y=v44[2],z=v44[3]],evalm(JF0))):
A:=stack(JF01,JF02,JF03,JF04):
At:=transpose(A):
```

Matriz del sistema de ecuaciones normales e inversa:

```
> N:=evalm(At*A): Qm:=inverse(N):
```

Solución del sistema normal:

```
> m4:=evalm(&*(Qm,At,U4));
```

$$m4 := [.336 \cdot 10^{-10} \quad , .725 \cdot 10^{-9} \quad , -.314 \cdot 10^{-7} \quad , .0277, .00026, -.00026, -.271 \cdot 10^{-7}]$$

Valores aproximados de los parámetros, corrección y elementos de la transformación para estos valores:

```
> rx5:=rx0+m4[1]:ry5:=ry0+m4[2]:rz5:=rz0+m4[3]:
  tx5:=tx0+m4[4]:ty5:=ty0+m4[5]:z5:=ty0+m4[6]:
  l5:=l0+m4[7]:
  R5:=value(subs([
    rx=rx5,ry=ry5,rz=rz5,
    tx=tx5,ty=ty5,z=z5,
    l=l5],
  evalm(R))):
  t5:=value(subs([tx=tx5,ty=ty5,z=z5],evalm(t))):
  F5:=v->evalm(l5*(R5*v)+t5):
```

Puntos transformados por  $F5$ : nuevos puntos objeto:

```
> v51:=F5(v41):v52:=F5(v42):v53:=F5(v43):v54:=F5(v44):
```

Términos independientes del nuevo sistema inicial:

```
> u1:=evalm(V1-v51):u2:=evalm(V2-v52):
  u3:=evalm(V3-v53):u4:=evalm(V4-v54):
  U5:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector);
```

$$U5 := [-.337, .251, -.511, .181, -.618, .467, -.455, .154, .252, .611, .212, -.208]$$

Transformación definitiva  $FD$ .

Matriz de rotación  $RD$ :

```
> RD:=evalm(&*(R4,R3,R2,R1));
```

$$RD := \begin{bmatrix} .99791 & .00266 & .06452 \\ -.00671 & .99801 & .06266 \\ -.06422 & -.06296 & .99595 \end{bmatrix}$$

Factor de escala  $ID$ :

```
> lD:=l4*l3*l2*l1;
```

$$lD := 9947.705$$

Vector de translación  $tD$ :

```
> tD:=evalm(
  t4+
  l4*R4&t3+
  l4*l3*R4&R3&t2+
  l4*l3*l2*R4&R3&R2&t1);
```

$$tD := [427352.9497, 500975.6959, 832.808]$$

Transformación en lenguaje MAPLE:  $> FD:=v->evalm(lD*(RD*v)+tD):$

Comprobación de la transformación definitiva sobre un punto de control:

```
> evalm(FD(v1)-V1);
```

$$[.337, -.251, .511]$$

Otra manera de expresar la transformación definitiva en lenguaje MAPLE sería como composición de las transformaciones parciales:

```
> FD:=v->F4(F3(F2(F1(v))));
```

## 4.7 Ejercicios

1. Se conoce la distancia  $d = 100$  m entre dos puntos  $A$  y  $B$ . Un tercer punto,  $C$ , está situado sobre la perpendicular al segmento  $AB$  que pasa por  $B$  (fig. 4.17). Se observa la distancia entre  $C$  y  $A$  con el resultado  $u_1 = 131.20$  m con desviación tipo  $\sigma_1 = 0.005$  m, y el ángulo  $CAB$  con el resultado  $u_2 = 40^\circ 20' 0''$  con desviación tipo  $\sigma_2 = 20''$ . Estimar la distancia  $x$  entre  $C$  y  $B$  siguiendo los siguientes pasos:
  - a) Escribir los observables  $u_1$  y  $u_2$  en función de la incógnita  $x$  y linealizar estas dos relaciones alrededor de un valor aproximado  $x^0$ .
  - b) Estimar el valor de la incógnita  $x$  por el criterio de los mínimos cuadrados, mediante el método de las observaciones indirectas, tomando  $\sigma_2^2$  como varianza de referencia.
  - c) Calcular el intervalo de confianza para el verdadero valor de la incógnita  $x$  con nivel de significación  $\alpha = 0.05$ .

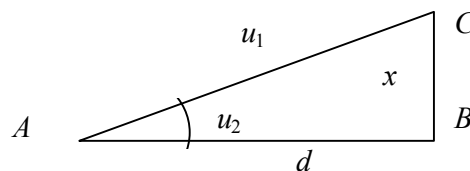


Fig. 4.17 Medidas angular y de distancia

2. Triangulación. Intersección directa. Se conocen las coordenadas (en metros) de 3 estaciones (fig. 4.18):

$$P1 [10578,235, 25376,375]$$

$$P2 [11256,739, 20615,254]$$

$$P3 [12987,658, 28563,437]$$

desde las cuales se visa un punto  $P$  de coordenadas desconocidas. Las orientaciones observadas de las visuales son, respectivamente,

$$l_{01} = 35^\circ 32' 5'',3$$

$$l_{02} = 7^\circ 7' 20'',6$$

$$l_{03} = 220^\circ 9' 48'',7$$

Se trata de estimar las coordenadas de  $P$  partiendo de los valores aproximados

$$P [12121,400, 27537,100]$$

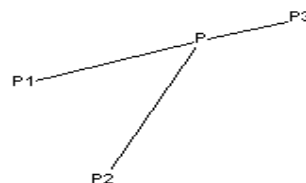


Fig. 4.18 Intersección directa

3. Triangulación. Intersección inversa. Se conocen las coordenadas (en metros) de 4 estaciones (fig. 4.19):

$$\begin{aligned} P1 & [10512,256, 8314,847] \\ P2 & [12614,415, 9512,413] \\ P3 & [14320,536, 7114,358] \\ P4 & [12150,435, 7001,124] \end{aligned}$$

que son visadas desde un punto  $P$  de coordenadas desconocidas. Las orientaciones observadas de las visuales son, respectivamente,

$$\begin{aligned} lo_1 &= 278^\circ 34' 7'',9 \\ lo_2 &= 13^\circ 54' 52'',1 \\ lo_3 &= 78^\circ 1' 26'',6 \\ lo_4 &= 107^\circ 28' 49'',6 \end{aligned}$$

Se trata de estimar las coordenadas de  $P$  partiendo de los valores aproximados

$$P [11251,500, 7824,200].$$

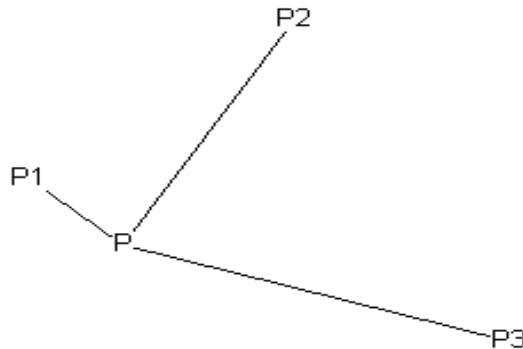


Fig. 4.19 Intersección inversa

4. Trilateración. Se conocen las coordenadas (en metros) de 3 estaciones (fig. 4.20):

$$\begin{aligned} P1 & [5234,475, 7365,739] \\ P2 & [7735,264, 8845,648] \\ P3 & [9157,483, 6256,354] \end{aligned}$$

desde las cuales se visa un punto  $P$  de coordenadas desconocidas. Las distancias observadas de las visuales son, respectivamente,

$$\begin{aligned} Do_1 &= 1797,360 \text{ m} \\ Do_2 &= 2149,325 \text{ m} \\ Do_3 &= 2280,083 \text{ m} \end{aligned}$$

Se trata de estimar las coordenadas de  $P$  partiendo de los valores aproximados

$$P [6954,200, 6843,200]$$

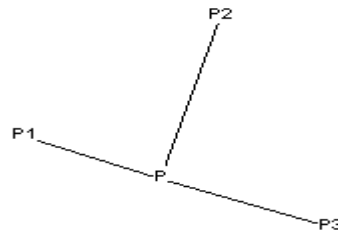


Fig. 4.20 Trilateración

5. Utilización de ecuaciones de ángulo y de distancia conjuntamente. Se conocen las coordenadas (en metros) de 3 estaciones (fig. 4.21):

$$P1 [10578,235, 25376,375]$$

$$P2 [11256,739, 20615,254]$$

$$P3 [12987,658, 28563,437]$$

desde las cuales se visa un punto  $P_v$  de coordenadas desconocidas. Las orientaciones observadas de las visuales son, respectivamente,

$$l_{0_{1v}} = 35^\circ 32' 5'',3, \quad \sigma_{1vl} = 15''$$

$$l_{0_{2v}} = 7^\circ 7' 20'',6, \quad \sigma_{2vl} = 15''$$

$$l_{0_{3v}} = 220^\circ 9' 48'',7, \quad \sigma_{3vl} = 15''$$

Desde el punto  $P3$  también se observa la distancia a  $P_v$  con el resultado

$$D_{3v} = 1342,980 \text{ m}, \quad \sigma_{3vd} = 1 \text{ cm}$$

Además, se estaciona en un punto  $P_e$ , de coordenadas también desconocidas, desde el cual se hacen observaciones angulares y se visan los puntos  $P1$ ,  $P2$  y  $P_v$ , con los resultados

$$l_{0_{e1}} = 307^\circ 7' 22'',2, \quad \sigma_{e1l} = 15''$$

$$l_{0_{e2}} = 171^\circ 20' 16'',3, \quad \sigma_{e2l} = 15''$$

$$l_{0_{ev}} = 4^\circ 29' 27'',5, \quad \sigma_{evl} = 15''$$

y observaciones de distancia a los puntos  $P1$  y  $P_v$  con los resultados

$$D_{e1} = 1132,102 \text{ m}, \quad \sigma_{e1d} = 1 \text{ cm}$$

$$D_{ev} = 3088,676 \text{ m}, \quad \sigma_{evd} = 1 \text{ cm}$$

Se trata de estimar las coordenadas de  $P_v$  y  $P_e$  partiendo de los valores aproximados

$$P_v [12121,400, 27537,100]$$

$$P_e [11348,500, 24546,700]$$

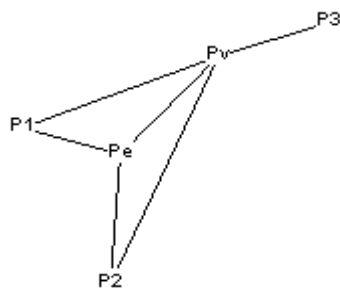


Fig. 4.21 Red con observaciones de ángulo y de distancia



## 5 Observaciones condicionadas

### 5.1 Introducción

En este capítulo se trata el problema del *ajuste de observaciones en sentido estricto*. El planteamiento general del problema es el siguiente:

1. Queremos averiguar el *verdadero valor* de  $n$  magnitudes observables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
2. Hemos hecho  $n$  observaciones directas  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , que, como tales observaciones, constituyen  $n$  *valores aproximados*.
3. Se trata, por tanto, de *ajustar las observaciones*, es decir, de corregir cada observación  $u_i \rightarrow u_i + v_i$  de manera que se aproxime el máximo posible al “verdadero valor” de la magnitud  $x_i$ .
4. Para hacerlo dispondremos de  $h$  *condiciones* sobre las magnitudes  $x_i$ , con  $h < n$ , que se expresan en forma de  $h$  ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots \\ f_h(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

en general no lineales, que constituyen el llamado *modelo matemático* del problema de observaciones condicionadas. Evidentemente, estas ecuaciones no serán satisfechas por las observaciones a causa de su imprecisión:

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) &\neq 0 \\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) &\neq 0 \\ &\dots \\ f_n(u_1, u_2, \dots, u_n) &\neq 0 \end{aligned}$$

Como es habitual, empezaremos estudiando el caso más sencillo, correspondiente a un modelo de ecuaciones de condición lineales, y después abordaremos el caso general mediante la linealización de las ecuaciones.

El capítulo anterior, de observaciones indirectas, empieza con el caso de observaciones equiprecisas y, a continuación, trata el caso de observaciones ponderadas. Esto permite establecer la equivalencia entre diferentes formas de introducir pesos en las ecuaciones. Ahora ya no vale la pena hacer la distinción entre observaciones ponderadas y observaciones equiprecisas, porque estas segundas no son más que un caso particular de las primeras con pesos unidad. En este capítulo, pues, consideraremos directamente que cada observación está acompañada del error o el peso correspondiente (modelo estocástico), y que éstos no son necesariamente iguales.

**Ejemplo 1** [MIG81] *Ajuste de observaciones angulares (I). Planteamiento del problema*



$$c + Ax = 0 \quad (5.1)$$

Algebraicamente es un *sistema indeterminado* con infinitas soluciones  $x$  posibles. Se trata de establecer un criterio que nos permita escoger una de estas soluciones partiendo de las siguientes hipótesis.

*Hipótesis:*

1. La matriz  $A$  es de rango  $h$ ; es decir, no hay ninguna condición superflua.

2. Las magnitudes observables

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

son variables aleatorias normales e independientes de media

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

y desviación típica respectiva

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$$

Evidentemente, la media  $\mu$ , que es *el verdadero valor de  $x$* , satisface las condiciones (5.1):

$$c + A\mu = 0 \quad (5.2)$$

En estos términos, *calcular el verdadero valor de  $x$*  se ha de traducir por *estimar los parámetros  $\mu_i$  y  $\sigma_i$* .

3. Además, disponemos de un conjunto de observaciones

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

con pesos respectivos

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

donde

$$p_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$$

y donde  $\sigma^2$  es la varianza de referencia o estándar de las observaciones de peso unidad.

Llamaremos  $P$

$$W_u = P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

a la matriz de pesos de las observaciones. Por tanto, la matriz cofactor del conjunto de observaciones se escribirá

$$Q_u = P^{-1}$$

y la matriz de varianza-covarianza

$$\Sigma_u = \sigma^2 P^{-1}$$

4. Supondremos conocidos los pesos  $p_i$ . La varianza de referencia  $\sigma^2$  no es siempre conocida y puede





o, en notación matricial,

$$(df)^T + (dg)^T \lambda = 0$$

Haciendo los cálculos, se obtiene

$$(df)^T = 2Pv \quad y \quad (dg)^T = A^T$$

Escribiendo  $k = -\lambda/2$ , se obtiene la expresión

$$Pv = A^T \kappa \quad (5.8)$$

que, sustituida en la ecuación (5.6) de condiciones, del siguiente sistema determinado de  $h$  ecuaciones en las  $h$  incógnitas  $k_i$  da como resultado:

$$(AP^{-1}A^T)\kappa = -r \quad (5.9)$$

Sustituyendo la solución

$$\kappa = -(AP^{-1}A^T)^{-1}r \quad (5.10)$$

en la expresión (5.8) del sistema de Lagrange, se obtiene el resultado propuesto.

### Observación

La anterior demostración sólo establece que el vector propuesto satisface las condiciones necesarias de Lagrange. Se puede demostrar formalmente que se trata de un mínimo condicionado (para ejemplo, [LIN63], teorema 9.3.1, p. 229), pero es suficiente la justificación intuitiva inducida por las condiciones del problema: el sistema (5.9) es determinado, ya que la matriz  $A$  se supone de rango  $h$  y, por tanto, el candidato a extremo es único. Por otra parte, parece natural la existencia de un mínimo condicionado, mientras que un máximo no tiene ningún sentido; siempre podremos encontrar vectores  $x$  que satisfagan (5.1) y estén alejados de  $u$  tanto como queramos.

### Definición 3 Sistema de ecuaciones normales

En el problema de observaciones condicionadas definido por sistema de  $h$  condiciones lineales  $c + A^T x = 0$ , el vector  $u$  de observaciones y la matriz  $P$  de pesos, llamamos *sistema de ecuaciones normales* al sistema determinado de orden  $h$

$$N\kappa = -r \quad (5.11)$$

donde

$$N = AP^{-1}A^T$$

y  $r$  es el vector de residuos condicionales

$$r = Au + c$$

Como *consecuencia* de la proposición 1 se tiene que el estimador mínimo-cuadrático del *verdadero valor*  $\mu$  de las magnitudes observables  $x$  es

$$m = (I - P^{-1}A^T(AP^{-1}A^T)^{-1}A)u - P^{-1}A^T(AP^{-1}A^T)^{-1}c \quad (5.12)$$

Efectivamente, sólo es preciso hacer  $m = u + v$  y considerar las expresiones (5.7) de  $v$  y (5.3) de  $r$ .

Sin embargo, habitualmente, para calcular  $m$  no se aplica directamente la expresión (5.12) sino que se sigue la secuencia de operaciones siguiente:

1. Planteamiento del sistema indeterminado de ecuaciones de condición para los residuos:

$$r + Av = 0$$

2. Planteamiento del sistema de ecuaciones normales:

$$Nk = -r$$

Cálculo de la matriz del sistema:

$$N = AP^1A^T$$

(guardando el resultado parcial  $P^1A^T$ ), y de su inversa  $N^{-1}$ .

3. Cálculo de los multiplicadores de Lagrange:

$$k = -N^{-1}r$$

4. Cálculo de los residuos:

$$v = P^1A^T k$$

5. Cálculo de las observaciones ajustadas:

$$m = u + v$$

**Ejemplo 2** [MIG81] *Ajuste de observaciones angulares (II). Cálculo de las observaciones ajustadas*

Vamos a resolver el problema de ajuste de observaciones angulares planteado en el ejemplo 1 aplicando la secuencia de operaciones que acabamos de describir.

1. El sistema de ecuaciones  $r + Av = 0$  para las correcciones  $v$  se escribe

$$\begin{pmatrix} 24'' \\ -18'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como las observaciones son independientes, la matriz  $P$  de pesos es la matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz cofactor de las observaciones será su inversa:

$$Q_u = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La matriz  $P^{-1}A^T$  es

$$P^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz  $N = AP^{-1}A^T$  del sistema de ecuaciones normales resulta

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 2/6 \\ 2/6 & 2 \end{pmatrix}$$

y su inversa:

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.562 & -0.187 \\ -0.187 & 0.562 \end{pmatrix}$$

3. Multiplicadores de Lagrange:

$$\kappa = - \begin{pmatrix} 0.562 & -0.187 \\ -0.187 & 0.562 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16.9 \\ 14.6 \end{pmatrix}$$

4. Residuos:

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16.9 \\ 14.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17'' \\ -5'' \\ -1'' \\ -1'' \\ 5'' \\ 15'' \end{pmatrix}$$

5. Observaciones ajustadas:

$$m = \begin{pmatrix} 44^\circ 50' 44'' \\ 46^\circ 10' 25'' \\ 45^\circ 55' 12'' \\ 43^\circ 04' 03'' \\ 48^\circ 32' 45'' \\ 42^\circ 27' 42'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17'' \\ -5'' \\ -1'' \\ -1'' \\ 5'' \\ 15'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44^\circ 50' 27'' \\ 46^\circ 10' 20'' \\ 45^\circ 55' 11'' \\ 43^\circ 04' 02'' \\ 48^\circ 32' 50'' \\ 42^\circ 27' 57'' \end{pmatrix}$$

Comprobamos que las observaciones ajustadas satisfacen las ecuaciones de condición

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 180^\circ, m_3 + m_4 + m_5 + m_6 = 180^\circ$$

## 5.4 Precisión en la estimación por mínimos cuadrados

Vamos a estudiar el error asociado al estimador mínimo-cuadrático  $m$  determinado en (3.12) y a establecer la forma de estimar la varianza de referencia o de las observaciones de peso unidad.

### 5.4.1 Errores asociados al estimador por mínimos cuadrados

#### Proposición 2

La esperanza matemática y la matriz cofactor del estimador  $m$  son, respectivamente,

$$E(m) = \mu \quad (5.13)$$

y

$$Q_m = P^{-1} - P^{-1} A^T (A P^{-1} A^T)^{-1} A P^{-1} \quad (5.14)$$

*Demostración*

Teniendo en cuenta la linealidad de la esperanza matemática, se tiene:

$$E(m) = (I - P^{-1} A^T (A P^{-1} A^T)^{-1} A) E(u) - P^{-1} A^T (A P^{-1} A^T)^{-1} c$$

Pero, atendiendo a que, por hipótesis,  $E(u) = \mu$  y  $c = -A\mu$ , se obtiene  $E(m) = \mu$ .

Para calcular  $Q_m$  sólo hay que tener en cuenta que  $Q_u = P^{-1}$  y aplicar la ley de propagación de la matriz cofactor a la ecuación (5.12), que da  $m$  a partir de  $u$ :

$$\begin{aligned} m &= (I - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A) u - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} c \Rightarrow \\ Q_m &= (I - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A) Q_u (I - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A)^T = \\ &= Q_u - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A Q_u - [Q_u - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A Q_u] A^T (A Q_u A^T)^{-1} A Q_u = \\ &= Q_u - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A Q_u \end{aligned}$$

Como consecuencia de la proposición 2 tenemos:

1. El vector  $m$  dado por la expresión (5.12) es un estimador puntual no sesgado del “verdadero valor”  $\mu$  de las magnitudes observables.
2. La matriz de varianza-covarianza del estimador  $m$  es

$$\Sigma_m = \sigma^2 Q_m \quad (5.15)$$

En particular, la varianza  $\sigma_{m_i}^2$  del estimador  $m_i$  está determinada por la expresión

$$\sigma_{m_i}^2 = \sigma^2 Q_{m_{ii}} = \sigma^2 \{P^{-1} - P^{-1} A^T (A P^{-1} A^T)^{-1} A P^{-1}\}_{ii}.$$

3. Atendiendo a la expresión (5.14) de la matriz cofactor  $Q_m$  de las observaciones ajustadas, y a que la inversa de la matriz de pesos  $P^{-1}$  es la matriz cofactor  $Q_u$  de las observaciones iniciales, podemos asegurar que *el error en las observaciones ajustadas es siempre inferior al error en las observaciones iniciales*.

### 5.4.2 El error en las observaciones. Varianza de referencia a posteriori

#### Proposición 3

La variable aleatoria

$$Y = \frac{v^T P v}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{u_i - m_i}{\sigma} \right)^2 \quad (5.16)$$

tiene una distribución de probabilidad que sigue una ley  $\chi_h^2$  *chi cuadrado* con  $h$  grados de libertad.

#### Demostración

Se ha de demostrar que  $Y$  se puede escribir como suma de  $h$  variables  $N(0,1)$  al cuadrado. El proceso correspondiente (por ejemplo, [LIN63], teorema 9.5.2, p. 235) es bastante largo y supone, además de cálculos complicados, resultados de estadística matemática cuyo estudio nos conduciría demasiado lejos de nuestros propósitos.

Sin embargo, éste es un resultado intuitivamente razonable. Los sumandos de (5.16) serían variables  $N(0,1)$  si se sustituyera  $m_i$  por  $\mu_i$ . En cuanto al número de grados de libertad, pensemos que  $Y$  es una variable aleatoria debido a que hay ecuaciones de condición; sin éstas, el mínimo de  $Y$  sería trivialmente 0 en  $m = u$ . Por tanto, parece lógico que el número de grados de libertad sea el de ecuaciones de condición, que constituyen la “redundancia” o el “exceso de información” del problema.

Como consecuencia de la proposición 3, y atendiendo a que el esperanza matemática de una variable *chi cuadrado* es el número de grados de libertad, tenemos que  $E(Y) = h$  y, por tanto,

$$E\left(\frac{v^T P v}{h}\right) = \sigma^2$$

con lo cual

$$S^2 = \left(\frac{v^T P v}{h}\right) \quad (5.17)$$

es un *estimador puntual no sesgado de la varianza de referencia*.

Como consecuencia de este resultado, tenemos que, si la varianza de referencia  $\sigma^2$  es desconocida, entonces la matriz de varianza-covarianza del estimador  $m$  se puede evaluar a partir de la expresión

$$\Sigma_m \sim S^2 Q_m \quad (5.18)$$

En particular,

$$\sigma_{mi}^2 \sim S^2 Q_{mii} = S^2 \{P^{-1} - P^{-1} A^T (A P^{-1} A^T)^{-1} A P^{-1}\}_{ii}$$

### 5.4.3 Estimación por intervalos

Hasta ahora hemos hecho una estimación puntual del verdadero valor  $\mu$  de los observables por el estadístico  $m$  que se calcula según la ecuación (3.12), y del verdadero valor de la varianza de referencia  $\sigma^2$  por el estadístico  $S^2$  que se calcula según la ecuación (3.17). Vamos a ver cómo se calculan los intervalos de confianza correspondientes.

También como consecuencia de la proposición 3 tenemos que, fijado un nivel de significación  $\alpha$ , el *intervalo de confianza de probabilidad  $(1 - \alpha)$  para el verdadero valor de la desviación tipo  $\sigma$*  es

$$\frac{\sqrt{\mathbf{v}^T P \mathbf{v}}}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \frac{\sqrt{\mathbf{v}^T P \mathbf{v}}}{\sqrt{\chi_a^2}} \quad (5.19)$$

donde  $\chi_a^2$  y  $\chi_b^2$  son los valores de la variable  $\chi^2$  con  $h$  grados de libertad tales que

$$P(\chi^2 < \chi_a^2) = P(\chi^2 > \chi_b^2) = \alpha/2$$

Para establecer el intervalo de confianza de los estimadores  $m_i$ , es necesaria la proposición siguiente.

#### Proposición 4

La variable aleatoria

$$t_i = \frac{m_i - \mu_i}{S \sqrt{Q_{mii}}}$$

tiene una distribución de probabilidad que sigue una ley  $t$  de Student con  $h$  grados de libertad.

#### Demostración

Se trata de ver que  $t_i$  se escribir de la forma

$$t_i = \sqrt{h} \frac{Z_i}{\sqrt{Y}}$$

donde  $Z_i$  es  $N(0,1)$  e  $Y$  es  $\chi^2$  con  $h$  grados de libertad.

Según las ecuaciones (5.13) y (5.15) que establece la proposición 2, la variable aleatoria

$$Z_i = \frac{m_i - \mu_i}{\sigma \sqrt{Q_{mii}}}$$

es  $N(0,1)$ . Por otra parte, considerando el expresión (5.16) de  $Y$  y (5.17) de  $S^2$ , podemos escribir

$$\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{Y}} = \frac{\sigma}{S}$$

y, por tanto,

$$t_i = \sqrt{h} \frac{Z_i}{\sqrt{Y}}$$

lo cual, y teniendo en cuenta la proposición 3, demuestra el resultado propuesto.

Como consecuencia de la proposición 4, estamos en condiciones de establecer que, fijado un nivel de significación  $\alpha$ , el *intervalo de confianza de probabilidad*  $(1 - \alpha)$  para los verdaderos valores de los parámetros  $\mu_i$  es

$$m_i - t_\alpha S \sqrt{Q_{mii}} < \mu_i < m_i + t_\alpha S \sqrt{Q_{mii}} \quad (5.20)$$

donde  $T_\alpha$  es el valor de la variable  $t_h$  de Student con  $h$  grados de libertad tal que

$$P(-t_\alpha < t_h < t_\alpha) = 1 - \alpha$$

### Ejemplo 3 [MIG81] Ajuste de observaciones angulares (III). Estimación por intervalos

A continuación calcularemos la matriz cofactor y los intervalos del 95% de confianza para las observaciones ajustadas de los ejercicios 1 y 2. El proceso se ha ejecutado con MAPLE V con los paquetes de álgebra lineal y estadística como es habitual.

Matriz del sistema inicial de condiciones y traspuesta:

```
> A:=matrix(2,6,[1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> At:=transpose(A);
```

Grados de libertad:

```
> gdl:=2;
```

Vector de residuos:

```
> v:=vector(6,[-17,-5,-1,-1,5,15]);
```

```
> vt:=transpose(v);
```

Matriz de pesos:

```
> P:=diag(1,3,3,3,3,1);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de la matriz de pesos = matriz cofactor de las observaciones:

```
> cu:=inverse(P);
```

$$Qu := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz del sistema de ecuaciones normales e inversa:

```
> N:=evalm(&*(A,Qu,At));
      [ 2  2/3]
      N:=
      [2/3  2 ]
> Ninv:=inverse(n);
      [ 9/16 -3/16]
      Ninv:=
      [-3/16  9/16]
```

Matriz cofactor  $Qm$  de las observaciones ajustadas:

```
> qq:=evalm(&*(Qu,At,Ninv,A,Qu));
> Qm:=evalm(Qu-qq);
      [ 7/16 -3/16 -1/8 -1/8  1/16  3/16]
      [-3/16 13/48 -1/24 -1/24  1/48  1/16]
      [-1/8 -1/24  1/4 -1/12 -1/24 -1/8]
      Qm:=
      [-1/8 -1/24 -1/12 -1/12 -1/24 -1/8]
      [1/16  1/48 -1/24 -1/24 13/48 -3/16]
      [3/16  1/16 -1/8 -1/8 -3/16  7/16]
```

Varianza de referencia:

```
> S2:=evalm(&*(vt,P,v))/gdl;
      S2 := 335
```

Desviación tipo  $Su$  de las observaciones sin ajustar (en segundos de arco):

```
> Su:=array(1..6);
> for y from 1 to 6 do
> Su[i]:=evalf(sqrt(S2*Qu[i,i]))
> od;
      Su[1] := 18.3
      Su[2] := 10.6
      Su[3] := 10.6
      Su[4] := 10.6
      Su[5] := 10.6
      Su[6] := 18.3
```

Desviación tipo  $Sm$  de las observaciones ajustadas (en segundos de arco):

```
> Sm:=array(1..6);
> for y from 1 to 6 do
```

```

> Sm[i]:=evalf(sqrt(S2*Qm[i,i]))
> od;
Sm[1] := 12.1
Sm[2] := 9.5
Sm[3] := 9.1
Sm[4] := 9.1
Sm[5] := 9.5
Sm[6] := 12.1

```

Observamos que las desviaciones tipo  $Sm$  de las observaciones ajustadas son más pequeñas que las desviaciones tipo  $Su$  de las desviaciones iniciales sin ajustar.

Calculemos, ahora, los intervalos del 95% de confianza:

```

> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
t := 4.3026

```

Errores con el 95% de confianza (en segundos de arco):

```

> dm:=array(1..6):
> for y from 1 to 6 do
> dm[i]:=evalf(t*sm[i])
> od;
dm[1] := 52.1
dm[2] := 41.0
dm[3] := 39.4
dm[4] := 39.4
dm[5] := 41.0
dm[6] := 52.1

```

## 5.5 Ecuaciones de condición no lineales

Supongamos ahora que las  $h$  condiciones a que están sometidas las  $n$  incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  están determinadas por  $h$  ecuaciones no lineales (modelo matemático) que podemos representar de la forma  $F(x) = 0$ , donde  $F$  es una función no lineal de  $R^n$  sobre  $R^h$ :

$$\begin{array}{ccc}
 F: \Omega \subset R^n & \rightarrow & R^h \\
 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_h(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Estableceremos un paralelismo entre los diferentes pasos que hay que seguir para plantear y resolver el caso lineal ya estudiado y el caso no lineal (ver, como ejemplo, el ejercicio 2).

### 1. Planteamiento de las ecuaciones de condición

$$c + Ax = 0 \quad \leftrightarrow \quad F(x) = 0$$

o bien

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 &\dots \\
 f_h(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

2. Cálculo de los residuos condicionales o errores de cierre  $r$  introduciendo las observaciones  $u$  en las condiciones

$$c + Au = r \leftrightarrow F(u) = r$$

o bien

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= r_1 \\
 f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= r_2 \\
 &\dots \\
 f_h(x_1, x_2, \dots, x_n) &= r_h
 \end{aligned}
 \tag{5.22}$$

3. Definición de las correcciones  $v$

$$c + A(u+v) = 0 \leftrightarrow F(u+v) = 0$$

o bien

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) &= 0 \\
 f_2(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) &= 0 \\
 &\dots \\
 f_h(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

Podemos linealizar esta expresión haciendo un desarrollo de Taylor hasta orden 1 en un entorno del punto  $x = u$  que representa los valores observados

$$F(u+v) = F(u) + dF_u v + \dots \tag{5.24}$$

o bien

$$\begin{aligned}
 f_1(u+v) &= f_1(u) + \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_n} v_n \\
 f_2(u+v) &= f_2(u) + \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_n} v_n \\
 &\dots \\
 f_h(u+v) &= f_h(u) + \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_n} v_n
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$f_i(u+v) = 0, \quad y = 1, 2, \dots, h$$

y que

$$f_i(u) = r_i, \quad y = 1, 2, \dots, h$$

matricialmente escribiremos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_h \end{pmatrix}$$

o bien

$$0 = r + dF_u v \quad (5.25)$$

4. Hemos obtenido unas *ecuaciones de condición lineales para las correcciones* análogas a las del caso lineal:

$$Av = -r \Leftrightarrow dF_u v = -r$$

La diferencia entre los dos casos es que, en el caso lineal, las ecuaciones de condición para los residuos salen directamente de aplicar las definiciones de errores de cierre y residuos a las ecuaciones de condición iniciales:

$$\{c + A(u+v) = 0, c + Au = r\} \Leftrightarrow Av = -r$$

mientras que, en el caso no lineal, las ecuaciones de condición para los residuos salen de linealizar las ecuaciones de condición iniciales:

$$F(u+v) = 0 \rightarrow \text{linealizando} \rightarrow dF_u v = -r$$

A partir de este punto, el proceso es el mismo que el correspondiente al caso lineal, identificando la matriz del sistema con el jacobiano de la función  $F$  en el punto  $u$ :

$$A \equiv dF_u$$

Haciendo esta adaptación, el proceso descrito en el apartado 5.3 quedará de la forma siguiente:

- Planteamiento del sistema para las correcciones:

$$(dF_u) v = -r \quad (5.26)$$

- Planteamiento del sistema  $Nk = -r$  de ecuaciones normales, cálculo de la matriz:

$$N = (dF_u) P^{-1} (dF_u)^T \quad (5.27)$$

(guardando el resultado parcial  $P^{-1} (dF_u)^T$ ), y de su inversa:

$$N^{-1} = [(dF_u) P^{-1} (dF_u)^T]^{-1} \quad (5.28)$$

- Cálculo de los multiplicadores de Lagrange:

$$k = -N^{-1} r \quad (5.29)$$

- Cálculo de los residuos:

$$v = P^{-1} (dF_u)^T k \quad (5.30)$$

- Cálculo de las observaciones ajustadas:

$$m = u + v \quad (5.31)$$

En cuanto a la evaluación de los errores, tendremos lo siguiente:

- Matriz cofactor de las observaciones ajustadas:

$$Q_m = P^{-1} - P^{-1} (dF_u)^T N^{-1} (dF_u) P^{-1} \quad (5.32)$$

- Estimador  $S^2$  de la varianza de referencia  $\sigma^2$ :

$$S^2 = \left( \frac{v^T P v}{h} \right) \quad (5.33)$$

- Estimadores  $S_{mi}^2$  de las varianzas  $\sigma_{mi}^2$  de las observaciones ajustadas:

$$S_{mi}^2 = S^2 Q_{mii} \quad (5.34)$$

- Intervalos de confianza para los parámetros  $\mu_i$  o verdaderos valores de las magnitudes observadas:

$$m_i - t_\alpha S \sqrt{Q_{mii}} < \mu_i < m_i + t_\alpha S \sqrt{Q_{mii}} \quad (5.35)$$

### Observación

Igual que se ha especificado en el capítulo anterior a propósito de los sistemas no lineales de observaciones indirectas, el proceso de linealización implica que la resolución del problema es aproximada.

La cuestión reside en si la aproximación es suficientemente buena. En cualquier caso, *el proceso se puede iterar tantas veces como sea necesario*, considerando las observaciones ajustadas como nuevas observaciones iniciales susceptibles de ser ajustadas mediante el mismo método.

## 5.6 Cálculo de coordenadas por el método del itinerario

Consideremos la siguiente situación (fig. 5.2), frecuente en la práctica de los levantamientos topográficos:

*Los datos*

Conocemos las coordenadas de dos puntos  $A(x_A, y_A)$  y  $B(x_B, y_B)$ , así como las referencias  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  de orientación respecto de otras dos estaciones  $C$  y  $D$ .

*Las incógnitas*

Se trata de calcular las coordenadas de  $n$  puntos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (para facilitar el planteamiento del problema, inicialmente consideraremos sólo 3), distribuidos alrededor del segmento que une  $A$  y  $B$ .

*Las magnitudes observables*

Las 4 (en general  $n+1$ ) distancias,  $L_i$ , de los 4 (en general  $n+1$ ) tramos que van de  $A$  a  $B$  y los 5 (en general  $n+2$ ) ángulos,  $\theta_i$ , entre cada tramo y el inmediatamente anterior.

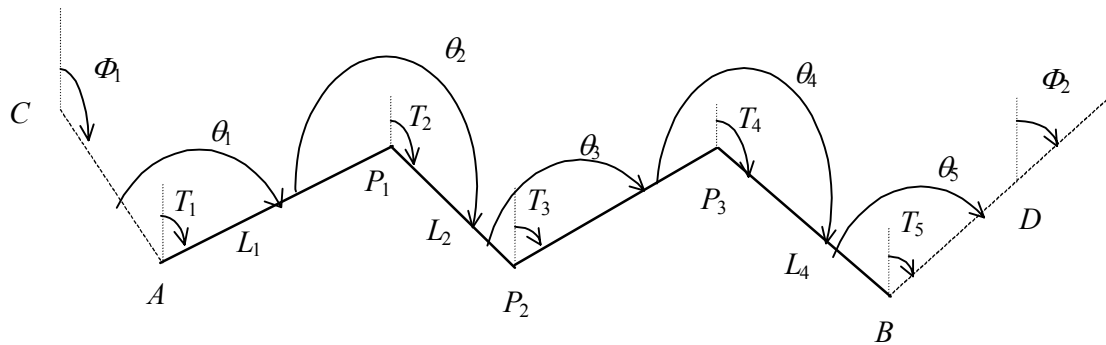


Fig. 5.2 Itinerario

Veamos cómo podemos calcular las coordenadas de los 3 (en general  $n$ ) puntos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  mediante las 9 (en general  $2n+3$ ) magnitudes observables  $L_i, y = 1, 2, 3, 4,$  y  $\theta_k, k = 1, 2, \dots, 5$ .

Es preciso calcular previamente las 4 (en general  $n+1$ ) orientaciones,  $T_1, T_2, T_3$  y  $T_4$ , de los 4 (en general  $n+1$ ) tramos que van de  $A$  a  $B$ . Las coordenadas que buscamos se podrán encontrar a partir de las relaciones

$$x_i = x_{i-1} + L_i \sin T_i \text{ y } y_i = y_{i-1} + L_i \cos T_i \tag{5.36}$$

Pero entre las orientaciones  $T_i$  y los ángulos observados  $\theta_i$  se verifican las relaciones (fig. 5.3)

$$T_1 = \Phi_1 + \theta_1 - \pi, \quad T_i = T_{i-1} + \theta_i - \pi \tag{5.37}$$

y podemos escribir las orientaciones  $T_i$  en función de los ángulos observados  $\theta_i$ :

$$T_1 = \Phi_1 + \theta_1 - \pi = T_1(\theta_1)$$

$$T_2 = \Phi_1 + \theta_1 + \theta_2 - 2\pi = T_2(\theta_1, \theta_2)$$

En general,

$$T_k = \Phi_1 - k\pi + \sum_{i=1}^k \theta_i = T_k(\theta_1, \dots, \theta_k), \quad k = 1, 2, \dots, n+2 \tag{5.38}$$

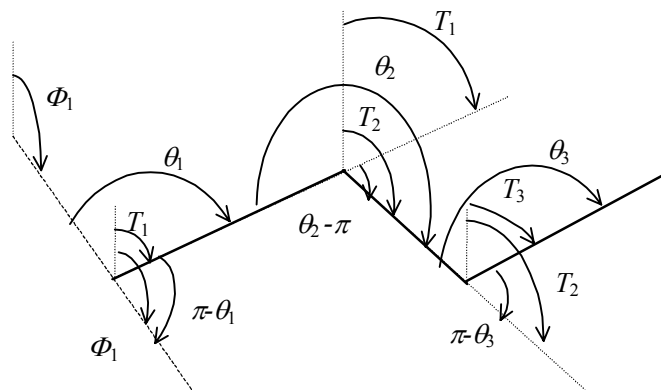


Fig. 5.3 Relación entre orientaciones  $T_i$  y ángulos observados  $\theta_i$

Con esto, el problema quedaría resuelto si las observaciones fuesen exactas.

### 5.6.1 La verdadera naturaleza del problema: el ajuste estadístico de las observaciones

El auténtico problema matemático no es el cálculo de las coordenadas a partir de las observaciones de ángulos y distancias, que es trivial como acabamos de ver, sino el del *ajuste de estas observaciones*. En los métodos de la topografía clásica se proponen diversos tipos de correcciones de carácter empírico (ver los métodos de Bowditch y Crandall en [CHU82]) a los valores de las magnitudes observables, deducidos a partir de la práctica repetida en el experiencia profesional. Con independencia de la mayor o menor corrección del resultado final, el verdadero inconveniente de estos métodos es que no permiten hacer un análisis riguroso de la precisión obtenida.

El punto de vista matemáticamente correcto empieza considerando que los observables  $L_i$  y  $\theta_i$  son variables aleatorias normales e independientes. Por tanto, constituyen un vector aleatorio normal

$$Z = (L_1, \dots, L_{n+1}, \theta_1, \dots, \theta_{n+2})$$

de dimensión  $2n+3$ , del cual conocemos una realización:

$$U = (L^0_1, \dots, L^0_{n+1}, \theta^0_1, \dots, \theta^0_{n+2})$$

Se trata de estimar el verdadero valor del observable  $Z$ , que no es otro que su esperanza matemática

$$\mu_Z = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n+3})$$

así como la matriz de varianza-covarianza  $\Sigma_Z$ , para poder establecer los intervalos de confianza correspondientes y, en consecuencia, un análisis del error correcto. Para esto, se dispone de la realización  $U$  y de las condiciones de cierre.

*Condiciones de cierre*

- La orientación del tramo  $BD$  coincide con la referencia de orientación del estación  $D$  (fig. 5.2):

$$T_{n+2} = \Phi_2 \quad (5.39)$$

- La suma de las proyecciones horizontales de las distancias de los tramos entre  $A(x_0, y_0)$  y  $B(x_{n+1}, y_{n+1})$  es igual a la coordenada  $x$  del vector  $B-A$  (Fig. 5.2):

$$\sum_{i=1}^{n+1} L_i \sin T_i = x_{n+1} - x_0 \quad (5.40)$$

- Lo mismo para las coordenadas  $y$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} L_i \cos T_i = y_{n+1} - y_0 \quad (5.41)$$

Tenemos, pues, 3 ecuaciones de condición no lineales, para las 9 (en general  $2n+3$ ) variables  $Z = (L_1, \dots, L_{n+1}, \theta_1, \dots, \theta_{n+2})$ :

$$f_1(Z) = \Phi_1 - \Phi_2 - 5\pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 0$$

$$f_2(Z) = x_0 - x_4 + L_1 \sin T_1(\theta_1) + L_2 \sin T_1(\theta_1, \theta_2) + L_3 \sin T_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) + \\ + L_4 \sin T_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) + L_5 \sin T_5(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = 0$$

$$f_3(Z) = y_0 - y_4 + L_1 \cos T_1(\theta_1) + L_2 \cos T_1(\theta_1, \theta_2) + L_3 \cos T_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) + \\ + L_4 \cos T_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) + L_5 \cos T_5(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = 0$$

En general,

$$f_1(Z) = \Phi_1 - \Phi_2 - (n+2)\pi + \sum_{i=1}^{n+2} \theta_i = 0 \quad (5.42)$$

$$f_2(Z) = x_0 - x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L_i \sin T_i(\theta_1, \dots, \theta_i) = 0 \quad (5.43)$$

$$f_3(Z) = y_0 - y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L_i \cos T_i(\theta_1, \dots, \theta_i) = 0 \quad (5.44)$$

Evidentemente, las observaciones  $U$  no verifican las ecuaciones de condición a causa de su carácter aleatorio

$$f_i(U) \neq 0, \quad y = 1, 2, 3$$

La verdadera naturaleza del problema es, por tanto, la de la *estimación de los parámetros (esperanza matemática y matriz de covarianza) de un vector aleatorio normal* de  $m$  componentes independientes (=9 en nuestro ejemplo), sometidas a  $h$  (= 3 en nuestro caso) ecuaciones de condición, con  $h < m$ .

### 3.6.2 Compensación de itinerarios por el método de los mínimos cuadrados

Vamos a resolver el problema de compensar las observaciones de un itinerario por mínimos cuadrados. Lo primero que hay que hacer es plantear las ecuaciones de condición y linealizarlas. Esto se hará en 3 pasos:

1. Planteamiento de las *ecuaciones de condición para las variables*  $Z = (L_1, \dots, L_{n+1}, \theta_1, \dots, \theta_{n+2})$ :

$$f_1(Z) = \Phi_1 - \Phi_2 - (n+2)\pi + \sum_{i=1}^{n+2} \theta_i = 0 \quad (5.45)$$

$$f_2(Z) = x_0 - x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L_i \sin T_i(\theta_1, \dots, \theta_i) = 0 \quad (5.46)$$

$$f_3(Z) = y_0 - y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L_i \cos T_i(\theta_1, \dots, \theta_i) = 0 \quad (5.47)$$

2. Cálculo de los *errores de cierre* sustituyendo las observaciones  $U$  en las ecuaciones de condición:

$$f_1(U) = \Phi_1 - \Phi_2 - (n+2)\pi + \sum_{i=1}^{n+2} \theta_i^0 = r_1 \quad (5.48)$$

$$f_2(U) = x_0 - x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L_i^0 \sin T_i(\theta_1^0, \dots, \theta_i^0) = r_2 \quad (5.49)$$

$$f_3(U) = y_0 - y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L_i^0 \cos T_i(\theta_1^0, \dots, \theta_i^0) = r_3 \quad (5.50)$$

3. Definición de los *residuos* como un vector  $V = (v_1, \dots, v_{n+1}, w_1, \dots, w_{n+2})$  tal que

$$f_1(U+V) = \Phi_1 - \Phi_2 - (n+2)\pi + \sum_{i=1}^{n+2} \theta_i^0 + w_i = 0 \quad (5.51)$$

$$f_2(U+V) = x_0 - x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} (L_i^0 + v_i) \operatorname{sen} T_i (\theta_1^0 + w_1, \dots, \theta_i^0 + w_i) = 0 \quad (5.52)$$

$$f_3(U+V) = y_0 - y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} (L_i^0 + v_i) \operatorname{cos} T_i (\theta_1^0 + w_1, \dots, \theta_i^0 + w_i) = 0 \quad (5.53)$$

4. Cálculo de las *ecuaciones de condición para los residuos*  $V$ , linealizando las ecuaciones de condición para las variables  $Z$ , mediante un desarrollo de Taylor hasta orden 1 en un entorno del punto  $U$  de observaciones:

$$f_i(U+V) = f_i(U) + df_{iu}V + \dots = 0, \quad y = 1,2,3 \quad (5.54)$$

Es decir,

$$r_i + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial f_i(U)}{\partial L_k} v_k + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\partial f_i(U)}{\partial \theta_k} w_k = 0, \quad y = 1,2,3 \quad (5.55)$$

Haciendo los cálculos se obtiene

$$r_1 + \sum_{k=1}^{n+2} w_k = 0 \quad (5.56)$$

$$r_2 + \sum_{i=1}^{n+1} [\operatorname{sen} T_i^0] v_i + \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \sum_{k=i}^{n+1} L_k^0 \operatorname{cos} T_k^0 \right] w_i = 0 \quad (5.57)$$

$$r_3 + \sum_{i=1}^{n+1} [\operatorname{cos} T_i^0] v_i + \sum_{i=1}^{n+1} \left[ -\sum_{k=i}^{n+1} L_k^0 \operatorname{sen} T_k^0 \right] w_i = 0 \quad (5.58)$$

que, matricialmente, se escribe

$$r + (dF_u)V = 0$$

donde el jacobiano de  $F$  es la matriz

$$dF_u \equiv A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} T_1^0 & \operatorname{sen} T_2^0 & \dots & \operatorname{sen} T_{n+1}^0 & l y_1^0 & l y_2^0 & \dots & l y_{n+1}^0 & 0 \\ \operatorname{cos} T_1^0 & \operatorname{cos} T_2^0 & \dots & \operatorname{cos} T_{n+1}^0 & l x_1^0 & l x_2^0 & \dots & l x_{n+1}^0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

y donde se ha llamado

$$\begin{aligned}
T_i^0 &= T_i(\theta_1^0, \dots, \theta_i^0) \\
ly_i^0 &= \sum_{k=i}^{n+1} L_k \cos T_k^0 \\
lx_i^0 &= -\sum_{k=i}^{n+1} L_k \sin T_k^0
\end{aligned} \tag{5.60}$$

El resto del proceso es el descrito en el apartado anterior por las ecuaciones de (5.26) a (5.35).

### Observación

Cada elemento  $lx_i^0$  o  $ly_i^0$  de la matriz  $A$  es una derivada parcial  $\frac{\partial f_j(U)}{\partial \theta_i}$ . Como que  $f_1$  y  $f_2$  tienen dimensión de longitud y, en general, unidades de metros, y los ángulos  $\theta_i$  están en radianes, los elementos  $lx_i^0$  y  $ly_i^0$  tienen unidades de m/rad. Si los residuos  $w_i$ , como es habitual, están expresados en segundos de arco, entonces habrá que dividir cada elemento  $lx_i^0$  y  $ly_i^0$  por el factor de conversión  $fc$  de radianes a segundos de arco, para que los productos  $lx_i^0 w_i$  y  $ly_i^0 w_i$  estén expresados en metros y las ecuaciones linealizadas sean coherentes en las unidades.

### 5.6.3 Evaluación del error en las coordenadas

Con las ecuaciones (5.34) se evalúan los errores  $\sigma_{\theta_i}$  y  $\sigma_{L_i}$  de las observaciones angulares y de distancia. Sin embargo, la finalidad del itinerario es calcular las coordenadas de los puntos incógnita a partir de las observaciones ajustadas y, por tanto, deberemos evaluar la propagación de los errores en las observaciones a los errores en las coordenadas calculadas a partir de estas observaciones.

Teniendo en cuenta la ley de propagación de la varianza

$$\begin{aligned}
y &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
\sigma_y^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i \neq j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \sigma_{x_i x_j}
\end{aligned}$$

y las ecuaciones (5.36) para el cálculo de las coordenadas de los puntos incógnita, se pueden evaluar los errores mediante las ecuaciones

$$\sigma_{x_i}^2 = \sigma_{x_{i-1}}^2 + (\sin T_i)^2 \sigma_{L_i}^2 + (L_i \cos T_i)^2 \sum_{k=1}^i \sigma_{\theta_k}^2 + \text{términos covariantes} \tag{5.61}$$

y

$$\sigma_{y_i}^2 = \sigma_{y_{i-1}}^2 + (\cos T_i)^2 \sigma_{L_i}^2 + (L_i \sin T_i)^2 \sum_{k=1}^i \sigma_{\theta_k}^2 + \text{términos covariantes} \tag{5.62}$$

### Observación

El error en las coordenadas se propaga de manera que aumenta en cada tramo del itinerario. Por este motivo no conviene hacer itinerarios de muchos tramos ni emplear este método en la determinación de coordenadas para las cuales se necesite mucha precisión.

Por otra parte, las observaciones de ángulo y distancia propias de un itinerario también se pueden emplear para el cálculo de coordenadas con las técnicas de triangulación y trilateración descritas al capítulo anterior.

#### Ejemplo 4 [LAU83] *Itinerario*

Se trata de compensar, por el método de los mínimos cuadrados expuesto más arriba, las observaciones angulares y de distancia del itinerario de tres tramos representado en la figura 4, con dos puntos incógnita, con los siguientes datos:

Puntos extremos:

$$\begin{aligned} A = (x_0, y_0) &= (21406,293, 46739,687) \\ B = (x_3, y_3) &= (23420,248, 44126,829) \end{aligned}$$

Referencias de orientación:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 206^\circ 37' 43'' \\ \Phi_2 &= 80^\circ 16' 20'' \end{aligned}$$

Y con las observaciones angulares siguientes:

$$\begin{aligned} \theta_1^0 &= 50^\circ 29' 46'' \text{ con desviación típica } \sigma_1 = 4'',2 \\ \theta_2^0 &= 237^\circ 56' 14'' \text{ con desviación típica } \sigma_2 = 4'',2 \\ \theta_3^0 &= 206^\circ 27' 51'' \text{ con desviación típica } \sigma_3 = 4'',2 \\ \theta_4^0 &= 98^\circ 44' 35'' \text{ con desviación típica } \sigma_4 = 4'',2 \end{aligned}$$

y las observaciones de distancia:

$$\begin{aligned} L_1^0 &= 647,277 \text{ m con desviación típica } \sigma_5 = 0,025 \text{ m} \\ L_2^0 &= 983,104 \text{ m con desviación típica } \sigma_6 = 0,049 \text{ m} \\ L_3^0 &= 2137,245 \text{ m con desviación típica } \sigma_7 = 0,087 \text{ m} \end{aligned}$$

Calculemos las orientaciones  $T_i$  y las coordenadas de los puntos incógnita en primera aproximación mediante las ecuaciones (5.36) y (5.37):

$$\begin{aligned} T_1^0 &= \Phi_1 + \theta_1 - \pi = 77^\circ 07' 29'' \\ x_1^0 &= x_0 + L_1 \sin T_1^0 = 22037,296 \text{ m} \\ y_1^0 &= y_0 + L_1 \cos T_1^0 = 46883,919 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2^0 &= T_1^0 + \theta_2 - \pi = 135^\circ 03' 43'' \\ x_2^0 &= x_1^0 + L_2 \sin T_2^0 = 22731,703 \text{ m} \\ y_2^0 &= y_1^0 + L_2 \cos T_2^0 = 46188,009 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3^0 &= T_2^0 + \theta_3 - \pi = 161^\circ 31' 34'' \\ x_3^0 &= x_2^0 + L_3 \sin T_3^0 = 23420,345 \text{ m} \\ y_3^0 &= y_2^0 + L_3 \cos T_3^0 = 44126,755 \text{ m} \end{aligned}$$

$$T_4^0 = T_3^0 + \theta_4 - \pi = 80^\circ 16' 09''$$

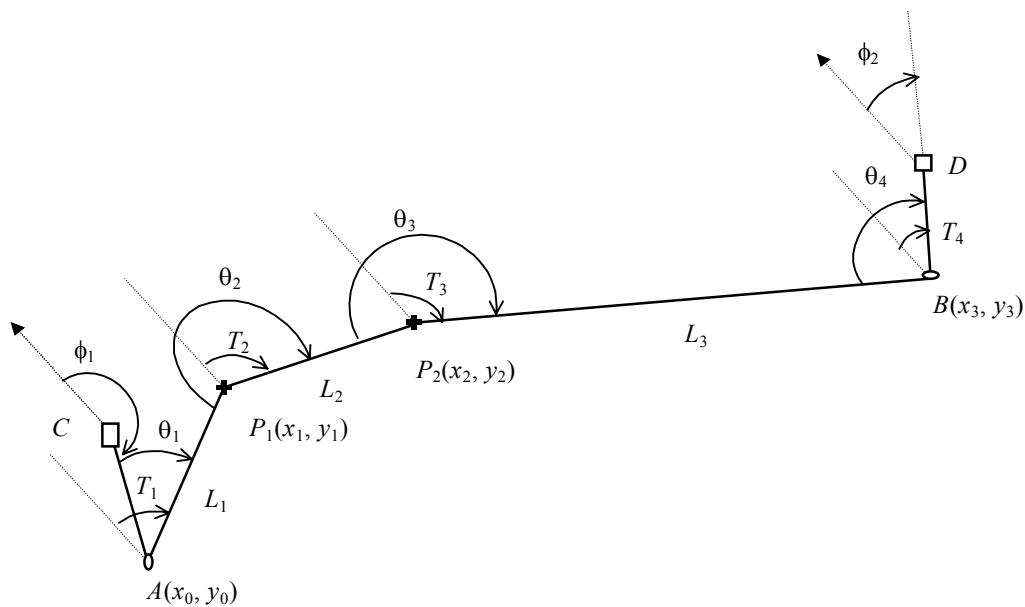


Fig. 5.4 Itinerario de 3 tramos

Errores de cierre:

$$\begin{aligned} r_1 &= T_4^0 - \Phi_2 = -11'' \\ r_2 &= x_3^0 - x_3 = 0,097 \text{ m} \\ r_3 &= y_3^0 - y_3 = -0,074 \text{ m} \end{aligned}$$

Hacemos los cálculos con MAPLE V, con los paquetes de álgebra lineal y estadística.

Matriz del sistema inicial de condiciones y traspuesta:

```
> A:=matrix(3, 7, [
  0, 0, 0, 1, 1, 1, 1,
  0.9749, 0.7063, 0.3169, -0.0126678, -0.0133671, -0.0099932, 0,
  0.2228, -0.7079, -0.9485, -0.0097644, -0.0067052, -0.0033386, 0
]); At:=transpose(A):
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ .9749 & .7063 & .3169 & -.0126 & -.0133 & -.0099 & 0 \\ .2228 & -.7079 & -.9485 & -.0097 & -.0067 & -.0033 & 0 \end{bmatrix}$$

Grados de libertad:

```
> gdl:=3:
```

Matriz de pesos:

```
> P:=diag((4.2/.025)^2, (4.2/.049)^2, (4.2/.087)^2, 1, 1, 1, 1);
```

$$P := \begin{bmatrix} 28224 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7347 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2331 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de la matriz de pesos = matriz cofactor de las observaciones:

```
> cu:=inverse(P) :
```

Matriz del sistema de ecuaciones normales e inversa:

```
> N:=evalm(&*(A,Qu,At)); Ninv:=inverse(N) :
```

$$N := \begin{bmatrix} 4. & -.036081 & -.019808 \\ -.036081 & .000583 & .000057 \\ -.019808 & .000057 & .000607 \end{bmatrix}$$

Errores de cierre:

```
> r:=vector(3, [-11, .097, -.074]);
```

$$r := [-11", 0.097m, -0.074m]$$

Vector de residuos:

```
> v:=-evalm(&*(Qu,At,Ninv,r));
```

$$v := [-0.007m, 0.014m, 0.097m, -0".86, -1".63, -3".07, -5".44]$$

Matriz cofactor  $Qm$  de las observaciones ajustadas:

```
> qq:=evalm(&*(Qu,At,Ninv,A,Qu));
```

```
> Qm:=evalm(Qu-qq) :
```

Varianza de referencia o de las observaciones de peso unidad:

```
> Vref:=4.2^2:
```

Desviación tipo  $Sm$  de las observaciones ajustadas:

```
> Sm:=array(1..7):
  for y from 1 to 7 do
    Sm[i]:=evalf(sqrt(Vref*Qm[i,i]))
  od;
```

$$\begin{aligned} Sm[1] &:= .023 \\ Sm[2] &:= .041 \\ Sm[3] &:= .041 \\ Sm[4] &:= 3.2 \\ Sm[5] &:= 3.4 \\ Sm[6] &:= 3.6 \\ Sm[7] &:= 2.1 \end{aligned}$$

Observamos que las desviaciones ajustadas tienen un error inferior a las observaciones iniciales.

Calculemos, ahora, los intervalos del 95% de confianza:

```
> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
```

$$t := 3.1824$$

Errores con el 95% de confianza:

```
> dm:=array(1..7):
> for y from 1 to 7 do
> dm[i]:=evalf(t*sm[i])
> od;
```

$$\begin{aligned}
 dm[1] &:= .072 \\
 dm[2] &:= .130 \\
 dm[3] &:= .132 \\
 dm[4] &:= 10 \\
 dm[5] &:= 11 \\
 dm[6] &:= 12 \\
 dm[7] &:= 7
 \end{aligned}$$

Volvemos a calcular las coordenadas con las observaciones ajustadas:

$$\begin{aligned}
 T_1^1 &= \Phi_1 + \theta_1 + v_4 - \pi = 77^\circ 07' 29",86 \\
 x_1^1 &= x_0 + (L_1 + v_1) \sin T_1^1 = 22037,303 \text{ m} \\
 y_1^1 &= y_0 + (L_1 + v_1) \cos T_1^1 = 46883,918 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_2^1 &= T_1^1 + \theta_2 + v_5 - \pi = 135^\circ 03' 45",49 \\
 x_2^1 &= x_1^1 + (L_2 + v_2) \sin T_2^1 = 22731,692 \text{ m} \\
 y_2^1 &= y_1^1 + (L_2 + v_2) \cos T_2^1 = 46188,009 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_3^1 &= T_2^1 + \theta_3 + v_6 - \pi = 161^\circ 31' 39",56 \\
 x_3^1 &= x_2^1 + (L_3 + v_3) \sin T_3^1 = 23420,248 \text{ m} \\
 y_3^1 &= y_2^1 + (L_3 + v_3) \cos T_3^1 = 44126,829 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$T_4^1 = T_3^1 + \theta_4 + v_7 - \pi = 80^\circ 16' 20"$$

Errores de cierre:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= T_4^1 - \Phi_2 = 0'' \\
 r_2 &= x_3^1 - x_3 = 0\text{m} \\
 r_3 &= y_3^1 - y_3 = 0\text{m}
 \end{aligned}$$

Si el itinerario no hubiese cerrado bien, deberíamos haber iterado el proceso partiendo de las observaciones ajustadas como nuevas observaciones iniciales.

## 5.7 Ejercicios

1. Se miden, de forma no muy precisa, los tres ángulos de un triángulo. Los resultados son

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 51^\circ, \text{ con peso } p_1 = 3 \\
 \alpha_2 &= 59^\circ, \text{ con peso } p_2 = 2 \\
 \alpha_3 &= 71^\circ, \text{ con peso } p_3 = 1
 \end{aligned}$$

- Calcular los valores de las observaciones compensadas y comprobar que satisfacen la condición de cierre.
- Calcular los residuos y evaluar la varianza de referencia.
- Calcular la matriz cofactor de las observaciones compensadas y evaluar varianza y la covarianza. Comparar la desviación tipo de las observaciones compensadas con la correspondiente desviación tipo de las observaciones sin compensar.
- Dar los intervalos de confianza para el verdadero valor de los ángulos con nivel de significación 0,05.

2. [MIG81] En un triángulo rectángulo (fig. 5.5) se miden la hipotenusa, un cateto y el ángulo opuesto.

Los resultados son los siguientes:

$$a = 352,14 \text{ m}, \sigma_a = 0,03 \text{ m}$$

$$b = 236,76 \text{ m}, \sigma_b = 0,02 \text{ m}$$

$$B = 42^\circ 15' 20'', \sigma_B = 15''$$

- Expresar una ligadura entre las tres variables  $a$ ,  $b$  y  $B$  y linealizarla.
- Calcular los valores de las observaciones compensadas y comprobar que satisfacen la ligadura.
- Calcular los residuos y evaluar la varianza de referencia.
- Calcular la matriz cofactor de las observaciones compensadas y evaluar la varianza y la covarianza. Comparar la desviación tipo de las observaciones compensadas con la correspondiente desviación tipo de las observaciones sin compensar.
- Dar los intervalos de confianza para el verdadero valor de las magnitudes observadas con nivel de significación 0.05.

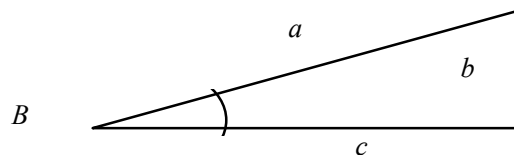


Fig. 5.5 Medidas angular y de distancia

3. Resolver el ejercicio 4 del capítulo 3. Ahora hacerlo por el método de las observaciones condicionadas y considerando el ángulo  $D$  como un dato exento de error en vez de como una observación.

- Expresar dos ligaduras entre las tres variables  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
- Calcular los valores de las observaciones compensadas y comprobar que satisfacen la ligadura.
- Calcular los residuos y evaluar la varianza de referencia.
- Calcular la matriz cofactor de las observaciones compensadas y evaluar la varianza y la covarianza. Comparar la desviación tipo de las observaciones compensadas con la correspondiente desviación tipo de las observaciones sin compensar.
- Dar los intervalos de confianza para el verdadero valor de las magnitudes observadas con nivel de significación 0.05.
- Comparar estos resultados con los obtenidos en el capítulo 2 por el método de las observaciones indirectas.

4. Resolver el ejercicio 1 del capítulo 4. Ahora hacerlo por el método de las observaciones condicionadas, compensando las observaciones  $u_1$  y  $u_2$  y calculando la incógnita  $x$ , directamente, a partir de los valores compensados.

- Expresar una ligadura entre las variables  $u_1$  y  $u_2$  y linealizarla.
- Calcular los valores de las observaciones compensadas y comprobar que satisfacen la ligadura.
- Calcular los residuos y evaluar la varianza de referencia.
- Calcular la matriz cofactor de las observaciones compensadas y evaluar la varianza y la covarianza. Comparar la desviación tipo de las observaciones compensadas con la correspondiente desviación tipo de las observaciones sin compensar.
- Calcular la incógnita  $x$  directamente a partir de los valores compensados de las observaciones  $u_1$  y  $u_2$  y evaluar el error correspondiente.
- Comparar estos resultados con los obtenidos en el capítulo 2 por el método de las observaciones indirectas.

5. Compensar, por el método de los mínimos cuadrados, las observaciones angulares y de distancia del itinerario de tres tramos (fig. 5.6) con dos puntos incógnita, con los datos siguientes:

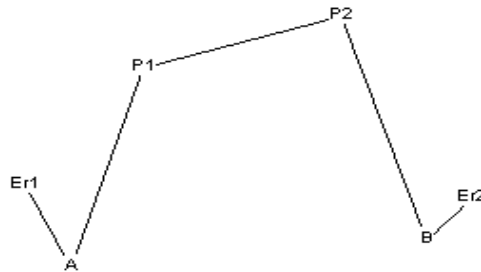


Fig. 5.6 Itinerario abierto

Puntos extremos:

$$A = (x_0, y_0) = (808,552, 2546,753)$$

$$B = (x_3, y_3) = (2356,739, 2615,254)$$

Orientación de las estaciones de referencia  $Er1$  y  $Er2$ :

$$\Phi_1 = 135^\circ$$

$$\Phi_2 = 63^\circ 26' 5''$$

Y con las observaciones angulares

$$\theta_1^0 (A) = 77^\circ 32' 3'' \text{ con desviación típica } \sigma_1 = 6''$$

$$\theta_2^0 (P1) = 229^\circ 10' 17'' \text{ con desviación típica } \sigma_2 = 6''$$

$$\theta_3^0 (P2) = 244^\circ 20' 25'' \text{ con desviación típica } \sigma_3 = 6''$$

$$\theta_4^0 (B) = 97^\circ 23' 20'' \text{ con desviación típica } \sigma_4 = 6''$$

y de distancia

$$L_1^0 (A - P1) = 581,70 \text{ m con desviación típica } \sigma_5 = 0,03 \text{ m}$$

$$L_2^0 (P1 - P2) = 857,33 \text{ m con desviación típica } \sigma_6 = 0,05 \text{ m}$$

$$L_3^0 (P2 - B) = 660,81 \text{ m con desviación típica } \sigma_7 = 0,03 \text{ m}$$

6. Compensar, por el método de los mínimos cuadrados, las observaciones angulares y de distancia del itinerario cerrado (fig. 5.7), con tres puntos incógnita, con los datos siguientes:

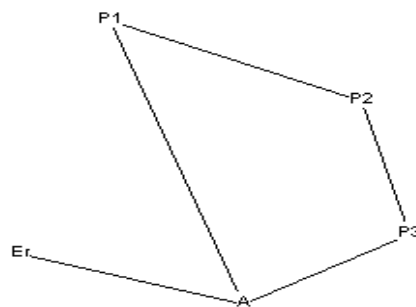


Fig. 5.7 Itinerario cerrado

Punto de salida y llegada:

$$A = (x_0, y_0) = (1578,235, 2376,375)$$

Orientación de la estación de referencia  $Er$ :

$$\Phi = 102^\circ 28' 54''$$

Y con las observaciones angulares

$$\theta_1^0 (A) = 52^\circ 5' 27'' \quad \text{con desviación típica } \sigma_1 = 5''$$

$$\theta_2^0 (P1) = 312^\circ 57' 50'' \quad \text{con desviación típica } \sigma_2 = 5''$$

$$\theta_3^0 (P2) = 231^\circ 47' 45'' \quad \text{con desviación típica } \sigma_3 = 5''$$

$$\theta_4^0 (P3) = 268^\circ 13' 50'' \quad \text{con desviación típica } \sigma_3 = 5''$$

$$\theta_5^0 (A) = 214^\circ 55' 12'' \quad \text{con desviación típica } \sigma_4 = 5''$$

y de distancia

$$L_1^0 (A-P1) = 1063,80 \text{ m con desviación típica } \sigma_5 = 0,05 \text{ m}$$

$$L_2^0 (P1-P2) = 908,51 \text{ m con desviación típica } \sigma_6 = 0,05 \text{ m}$$

$$L_3^0 (P2-P3) = 479,03 \text{ m con desviación típica } \sigma_7 = 0,02 \text{ m}$$

$$L_4^0 (P3-A) = 625,84 \text{ m con desviación típica } \sigma_8 = 0,03 \text{ m}$$



## Bibliografía

- [BOG89] BOLSHAKOV, V.; GAIDÁIEV, P. *Teoría de la elaboración matemática de mediciones geodésicas*. Moscú, MIR, 1989
- [CHB96] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNE, J. L. *Tratado de Topografía. Tomo II. Métodos Topográficos*. Madrid, Ed. Paraninfo, 1996
- [KOC87] KOCH, K. R. *Parameter estimation and hypothesis testing in linear models*. Nueva York, Springer Verlag, 1987
- [LAU83] LAUF, G. B. *The method of Least Squares with applications in surveying*. Hawthorn, TAFE Pub. Unit., 1983
- [LEI95] LEICK, A. *GPS Satellite Surveying*. Nova York, John Wiley & Sons, Inc., 1995
- [LHA74] LAWSON, C. L.; HANSON, R. J. *Solving Least Squares Problems*. New Jersey, Prentice Hall, 1974
- [LIN63] LINNIK, Y. V. *Méthode des Moindres Carrés*. París, Dunod, 1963
- [MIG81] MIKHAIL, E. M.; GRACIE, G. *Analysis and Adjustment of Survey Measurements*. Nueva York, Van Nostrand, 1981
- [SLA80] SLAMA, C. (Editor) *Manual of Photogrammetry*. Falls Church, American Society of Photogrammetry, 1980
- [STB97] STRANG, G., BORRE, K. *Linear Algebra, Geodesy and GPS*. Wellesley, Wellesley-Cambridge Press, 1997
- [WOG97] WOLF, P. R., GHILANI, C. D. *Adjustment computations*. Nueva York, John Wiley & Sons, Inc., 1997



## Índice alfabético

### A

Ajuste de coeficientes, 39  
 Ajuste de observaciones, 135, 141  
 Ajuste estadístico de las observaciones, 153  
 Análisis de los residuos, 57

### C

Coefficiente de confianza, 23, 24, 32, 33  
 Coeficiente de correlación, 15, 17  
 Compensación de itinerarios, 154  
 Correcciones, 21, 27, 29, 31, 40, 51, 58, 101, 103, 105, 108, 110, 113, 118, 138, 139, 141, 149, 150, 153  
 Criterio de mínimos cuadrados, 20, 40, 138  
 Criterio para parar el proceso iterativo, 86  
 Curvas de desviación tipo, 93  
 Curvas de varianza, 93

### D

Desorientación, 97, 98, 99, 115  
 Desviación tipo de referencia a priori, 47, 48

### E

Ecuaciones de ángulo, 97  
 Ecuaciones de ángulo y de distancia, 113, 132  
 Ecuaciones de condición, 135, 136, 138, 139, 141, 143, 144, 148, 150, 153, 154, 155  
 Ecuaciones de condición no lineales, 148  
 Ecuaciones de distancia, 108  
 Ecuaciones de observación, 37, 40, 43, 58  
 Ecuaciones de observación no lineales, 88  
 Ecuaciones normales, 42, 43, 45, 46, 48, 52, 55, 63, 65, 66, 87, 125, 126, 127, 128, 140, 141, 142, 147, 150, 159  
 Elipse de error, 92, 95, 96, 102, 106, 111, 119, 120  
 Error en las observaciones, 11  
 Error estadístico, 21, 22, 23, 30  
 Error medio cuadrático, 22, 30, 34, 102, 106, 111

Errores absolutos, 21, 29  
 Errores de cierre, 138, 149, 150, 154  
 Errores en las observaciones, 89  
 Errores groseros, 60, 61, 62, 63, 66, 88  
 Estimación por intervalos, 23, 24, 25, 32, 33, 49, 55, 63, 66, 145, 146  
 Estimación por intervalos de confianza, 88  
 Estimación puntual, 23, 25, 32, 34, 35, 145  
 Estimador mínimo-cuadrático, 20, 27, 54, 140, 143  
 Extremos condicionados, 139

### F

Factor de conversión, 88, 99, 100, 104, 114, 156

### G

Grados de libertad, 21, 23, 24, 25, 26, 32, 33, 47, 48, 49, 50, 51, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 68, 79, 86, 87, 101, 106, 111, 118, 144, 145, 146

### I

Intersección directa, 98, 99, 100, 115, 130  
 Intersección inversa, 98, 103, 104, 115, 131  
 Intervalo de confianza, 23, 24, 32, 33, 92  
 Iteración, 86, 88  
 Itinerario, 151, 154, 156, 160, 162

### L

Ley de propagación, 14, 18, 46, 70, 92, 143, 156  
 Límites de confianza, 24, 26  
 Linealización, 85, 89  
 Linealizar, 15, 69, 85, 87, 130, 149, 150

### M

Matriz cofactor, 12, 13, 14, 46, 51, 54, 58, 59, 62, 87, 94, 95, 137, 141, 143, 144, 146, 159, 160, 161  
 Matriz de diseño, 38, 86, 87

Matriz de varianza-covarianza, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 28, 45, 46, 48, 51, 53, 54, 55, 62, 66, 70, 72, 77, 84, 87, 88, 92, 95, 137, 143, 144, 153  
 Matriz peso, 13, 51, 62, 87  
 Máxima verosimilitud, 19, 27, 40, 52, 138  
 Media ponderada, 27, 28, 30, 31, 32, 57  
 Medidas directas de igual precisión, 19, 22, 24, 25  
 Mínimos cuadrados, 19, 20, 21, 27, 38, 39, 40, 41, 43, 46, 49, 52, 54, 56, 57, 62, 68, 69, 74, 76, 86, 87, 92, 94, 122, 130, 138, 143, 154, 156, 162  
 Modelo estocástico, 38, 45, 51, 60, 61, 62, 79, 87, 135  
 Modelo lineal, 37  
 Modelo matemático, 38, 39, 40, 62, 78, 86, 87, 135, 148  
 Modelo no lineal, 85  
 Multiplicadores de Lagrange, 139, 141, 150

**N**

Nivel de confianza, 24, 25, 26, 49, 56  
 Nivel de significación, 23, 24, 25, 32, 33, 49, 50, 51, 55, 56, 58, 60, 61, 66, 82, 86, 90, 91, 92, 118, 130, 145, 146, 160, 161  
 Nivelación, 37, 38, 42, 49, 50, 63, 64  
 Número de incógnitas, 38  
 Número de iteraciones, 86  
 Número de observaciones, 38, 48, 61  
 Números de redundancia, 59

**O**

Observable, 11, 108, 153  
 Observaciones ajustadas, 58, 67, 142  
 Observaciones condicionadas, 135  
 Observaciones directas, 19, 20, 40, 56, 135, 136  
 Observaciones indirectas, 37, 85  
 Observaciones ponderadas, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 40, 51, 52, 53, 54, 57, 63, 135

**P**

Peso de una observación, 11  
 Precisión en la estimación por mínimos cuadrados, 29, 45, 54, 143  
 Propagación de la varianza, 12, 156  
 Puntos de control, 68, 69, 70, 71, 74, 82, 83, 122, 123, 125, 126

**R**

Rango máximo, 38, 42, 59  
 Recta de regresión, 43, 44  
 Redes GPS, 74, 77  
 Residuos, 21, 22, 29, 40, 41, 47, 48, 49, 51, 52, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 86, 101, 105, 110, 113, 118, 138, 139, 140, 141, 146, 149, 150, 155, 156, 159, 160, 161

**S**

Sistema de referencia, 68, 92  
 Sistema indeterminado, 74, 122, 137, 141  
 Sistema sobredeterminado, 40, 42, 51, 54, 58, 65, 68, 69, 71, 74, 114, 115, 116, 122, 123, 126  
 Sistemas de ecuaciones de observación, 37  
 Solución mínimo-cuadrática, 41, 42, 46, 48, 49, 52, 54, 55, 123

**T**

Test de Baarda, 60, 61  
 Test de bondad del ajuste, 58  
 Transformación de semejanza, 68, 69, 70, 73, 82, 83, 121, 123, 124  
 Triangulación, 97, 99, 103, 130, 131  
 Trilateración, 108, 109, 131, 132

**V**

Variable aleatoria, 11, 12, 13, 15, 19, 21, 23, 24, 26, 32, 45, 47, 48, 55, 60, 61, 144, 145  
 Varianza de peso unidad, 12  
 Varianza de referencia, 11, 12, 13, 30, 35, 47, 48, 51, 54, 55, 60, 61, 62, 63, 66, 67, 72, 79, 80, 87, 88, 89, 101, 106, 111, 113, 118, 130, 137, 143, 144, 145, 147, 151, 159, 160, 161  
 Varianza de referencia a posteriori, 47, 55, 144  
 Vectores GPS, 74, 75, 77, 78, 83  
 Verdadero valor, 11, 19, 21, 23, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 38, 49, 51, 54, 55, 56, 62, 82, 87, 130, 135, 136, 137, 140, 143, 145, 153, 160, 161



